



~~MAURO PICONE~~
PUBBLICAZIONI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI CATANIA

8460
MAURO PICONE

PROFESSORE DELLA R. UNIVERSITÀ DI CATANIA

LEZIONI

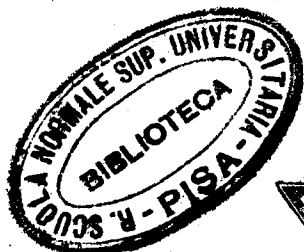
DI

ANALISI INFINITESIMALE

VOLUME PRIMO

LA DERIVAZIONE E L'INTEGRAZIONE

(PARTE SECONDA)



CIRCOLO MATEMATICO DI CATANIA

EDITORE

CATANIA, R. Università

1923

Libreria Bemporad
delle Librerie Italiane Riunite (L. I. R.)

PISA

PROPRIETÀ LETTERARIA

Copia N. 251.....



Officine di Arti Grafiche del Cav. Uff. VINCENZO GIANNOTTA, Editore

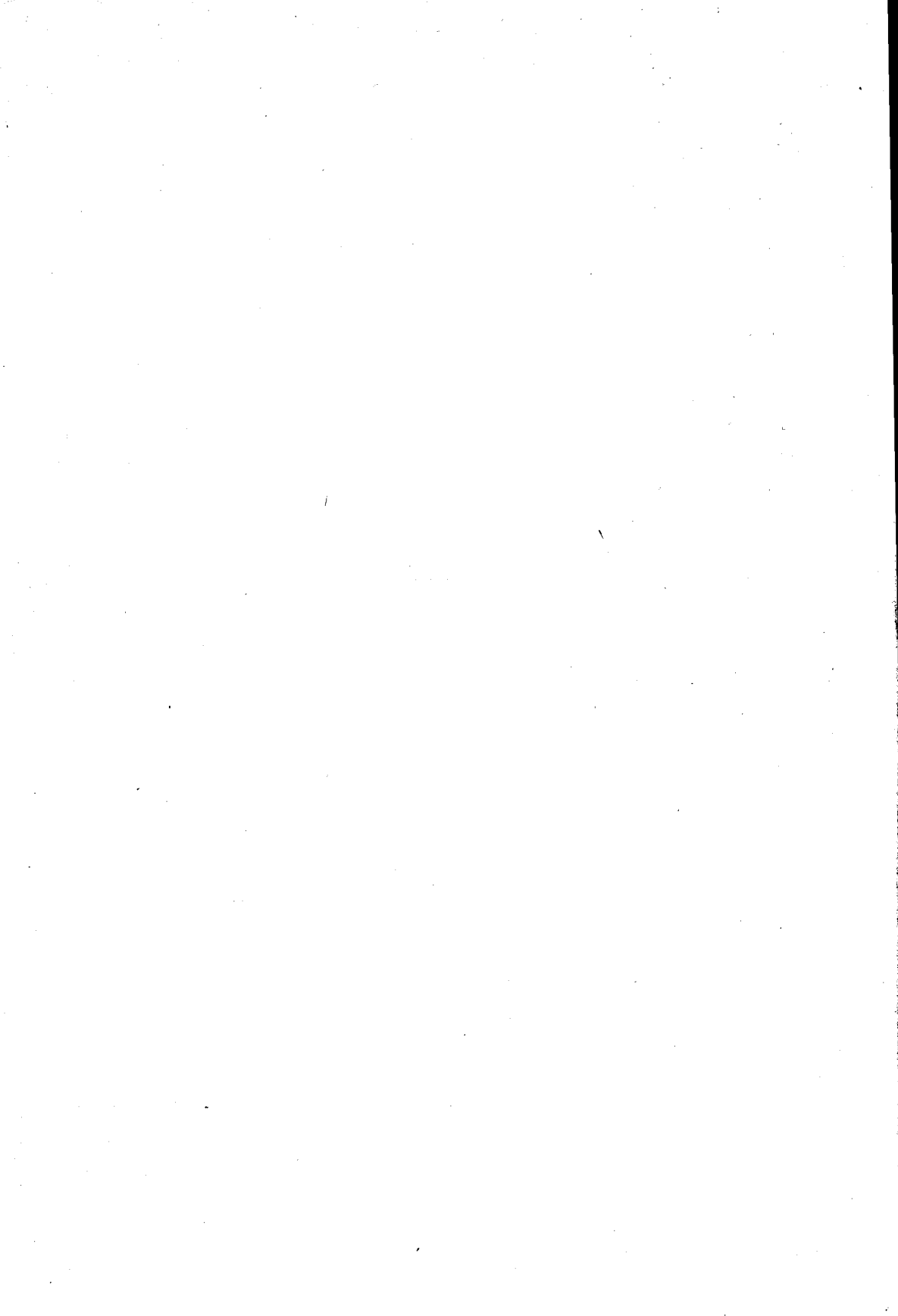
Libraio di S. M. 1a Regina Madre

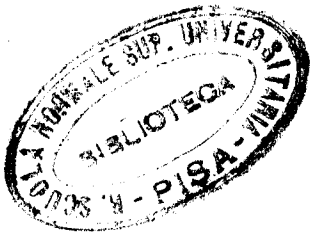
CATANIA — Via Crociferi, 15 — CATANIA



PARTE SECONDA

L' INTEGRAZIONE





CAPITOLO IV.

GENERALITÀ SULL'INTEGRAZIONE.

§ 1. Estensione degli insiemi di punti.

84. Estensione degli insiemi somme di domini rettangolari. — Nello spazio $S_{(r)}$, a r dimensioni, sia R un dominio rettangolare di punti estremi $(a'_1, a'_2, \dots, a'_r)$, $(a''_1, a''_2, \dots, a''_r)$, chiamasi *estensione* o *misura* di R , e verrà indicata con la notazione $\text{est}R$ o $\text{mis}R$, oppure, semplicemente, con la lettera R la seguente quantità positiva

$$(a''_1 - a'_1)(a''_2 - a'_2) \dots (a''_r - a'_r).$$

L'estensione di R chiamasi, per $r=1$, la *lunghezza* o l'*ampiezza* dell'intervallo (a', a'') , per $r=2$, l'*area* del rettangolo R a lati paralleli agli assi coordinati, per $r=3$, il *volume* del parallelepipedo rettangolo R a lati paralleli agli assi coordinati.

Siano ora R_1, R_2, \dots, R_n due o più domini rettangolari, a due a due senza punti *interni* comuni. Si pone allora

$$\text{est} \sum_i^{1, n} R_i = \sum_i^{1, n} \text{est} R_i.$$

In generale, osservando che se i domini rettangolari R_i, R_k, \dots, R_l hanno in comune un punto che sia interno a ciascuno di essi, il prodotto $R_i \cdot R_k \cdot \dots \cdot R_l$ è un dominio rettangolare e convenendo di attribuire il valore *zero* al simbolo $\text{est}(R_i \cdot R_k \cdot \dots \cdot R_l)$ tutte le volte che quel prodotto non esiste o non è un dominio rettangolare, si pone

$$\begin{aligned} \text{est} \sum_i^{1, n} R_i &= \sum_i^{1, n} \text{est} R_i - \sum_{ik}^{1, n} \text{est}(R_i \cdot R_k) - \\ &- \sum_{ikl}^{1, n} \text{est}(R_i \cdot R_k \cdot R_l) - \dots - \text{est}(R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_n). \end{aligned}$$

85. Lemma fondamentale della teoria dell'integrazione.—

Nell'insieme limitato A dello spazio $S_{(x)}$ sia definita una funzione $I = I(\mathbf{T})$ dell'insieme variabile \mathbf{T} , la quale goda delle seguenti proprietà: a) è sempre $I(\mathbf{T}) \geq 0$; b) se $\mathbf{T}' < \mathbf{T}''$, riesce sempre $I(\mathbf{T}') \leq I(\mathbf{T}'')$, e si ha quindi sempre $I(\mathbf{T}) \leq I(A)$. Sia R un qualunque dominio rettangolare, di punti estremi $(a'_1, a'_2, \dots, a'_r), (a''_1, a''_2, \dots, a''_r)$ contenente A , e facciamo le seguenti operazioni, il cui insieme indicheremo con $[O]$: 1^a) si divida ciascun intervallo (a'_i, a''_i) ($i=1, 2, \dots, n$), mediante i punti

$$x_i^{(0)} = a'_i, x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n_i)}, x_i^{(n_i+1)} = a''_i,$$

nel modo più arbitrario, in $n_i + 1$ intervalli parziali, ed indichiamo con

$$(1) R_{k_1 k_2 \dots k_r} (k_1=0, 1, \dots, n_1; k_2=0, 1, \dots, n_2, \dots, k_r=0, 1, \dots, n_r),$$

il dominio rettangolare avente, per punti estremi, i due punti

$$(x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_r^{(k_r)}), (x_1^{(k_1+1)}, x_2^{(k_2+1)}, \dots, x_r^{(k_r+1)}),$$

con $\Delta x_i^{(k_i)}$ la differenza $x_i^{(k_i+1)} - x_i^{(k_i)}$, con δ la più grande fra le diagonali dei domini rettangolari (1), secondo i quali risulta decomposto il dominio R ; 2^a) fra tutti questi $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_r + 1)$ domini rettangolari, si prendano solamente quelli che hanno almeno un punto in comune con A , e per ognuno di questi indichiamo con $T_{k_1 k_2 \dots k_r}$ il suo prodotto con A ; 3^a) si calcoli la quantità

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \sum_{k_1 k_2 \dots k_r} I(T_{k_1 k_2 \dots k_r}) \text{est} R_{k_1 k_2 \dots k_r} = \\ &= \sum_{k_1 k_2 \dots k_r} I(T_{k_1 k_2 \dots k_r}) \Delta x_1^{(k_1)} \Delta x_2^{(k_2)} \dots \Delta x_r^{(k_r)}. \end{aligned}$$

Ordiniamo ora le operazioni di $[O]$ al modo seguente: Per ogni operazione O' , alla quale competa il valore δ' della massima diagonale dei domini rettangolari (1), di decomposizione del dominio R , diciamo ad essa seguenti tutte quelle alle quali competono valori minori della indicata massima diagonale. La variabile ordinata σ_I , che così si ottiene, si dice ottenuta facendo tendere a zero la massima diagonale δ dei domini rettangolari di decomposizione (1), ed i limiti di σ_I si denotano con i simboli

$$\lim'_{\delta \rightarrow 0} \sigma_I \quad \lim''_{\delta \rightarrow 0} \sigma_I.$$

Al variare, in tutti i modi possibili, della decomposizione degli intervalli (a'_i, a''_i) , la variabile σ_I descrive un insieme numerico Σ_I di numeri non negativi, orbene sussiste il seguente

Lemma fondamentale della teoria dell'integrazione.

Detto λ l'estremo inferiore dell'insieme numerico Σ_I , si ha

$$(2) \quad \lim'_{\delta \rightarrow 0} \sigma_I = \lim''_{\delta \rightarrow 0} \sigma_I = \lambda.$$

Per semplificare l'esposizione dimostreremo il lemma nel caso particolare $r=2$. Avvertiamo, anzi, fin da ora, che — non ostante che l'intera teoria svolta nel presente capitolo valga, quasi sempre, qualunque sia il valore della dimensione r dello spazio — noi, per maggiore chiarezza e per abbreviare, circostanzieremo le definizioni ed esporremo le dimostrazioni dei teoremi considerando, per lo più, il caso particolare $r=2$, laddove enunceremo sempre i teoremi affatto in generale. Consigliamo però allo studioso l'utilissimo esercizio di rifare le definizioni e le dimostrazioni per i valori 1 e 3 di r .

Sia dunque A un insieme limitato del piano (x, y) contenuto nel dominio rettangolare $R[(a', b'); (a'', b'')]$; mediante i punti $x_0 = a', x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1} = a''; y_0 = b', y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1} = b''$, si dividano gli intervalli (a', a'') e (b', b'') , nel modo più arbitrario, rispettivamente, in $m+1$ e $n+1$ parti. Poniamo $\Delta x_h = x_{h+1} - x_h$ ($h=0, 1, 2, \dots, m$), $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$) ed indichiamo con R_{hk} il dominio rettangolare di punti estremi (x_h, y_k) e (x_{h+1}, y_{k+1}) . Mediante il reticolato r , formato dalle m rette verticali $x = x_h$ ($h=1, 2, \dots, m$) e dalle n orizzontali $y = y_k$ ($k=1, 2, \dots, n$); il rettangolo R risulta decomposto negli $(m+1)(n+1)$ rettangoli R_{hk} . Fra tutti questi rettangoli consideriamo soltanto quelli che hanno almeno un punto in comune con A , ed indichiamone con T_{hk} il prodotto per A . Posto

$$\sigma_I = \sum_{hk} I(T_{hk}) \text{ est } R_{hk} = \sum_{hk} I(T_{hk}) \Delta x_h \Delta y_k,$$

devo dimostrare che vale la (2), λ denotando l'estremo inferiore dell'insieme Σ_I di numeri non negativi, descritto da σ_I , al variare, in tutti i modi possibili, delle decomposizioni degli intervalli (a', a'') e (b', b'') . Devo cioè dimostrare che, comunque si assegni un numero positivo ε , ne esiste un altro δ_ε tale che per tutte le indicate decomposizioni del rettangolo R in rettangoli parziali per i quali la massima diagonale δ non supera δ_ε , si ha sempre

$$(3) \quad \lambda \leq \sigma_I \leq \lambda + \varepsilon.$$

Cominciamo dall'osservare, a tale scopo, che, comunque si consideri un dominio rettangolare $\mathbf{R}^{(1)}$ contenuto in \mathbf{R} , indicando con

$$\sigma_I^{(1)} = \sum_{hk}^{(1)} I(\mathbf{T}_{hk}) \Delta x_h \Delta y_k,$$

quella parte di σ_I proveniente dalla somma dei suoi termini relativi a tutti e soli i rettangoli contenuti in $\mathbf{R}^{(1)}$, si trova

$$\sigma_I^{(1)} \leq I(\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{(1)}) \sum_{hk}^{(1)} \Delta x_h \Delta y_k \leq I(\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{(1)}) \text{ est } \mathbf{R}^{(1)}.$$

Ciò posto, ragioniamo al modo seguente: Poichè λ è l'estremo inferiore dell'insieme numerico Σ_I , comunque sia preventivamente assegnato il numero positivo ε , esisterà almeno un numero $\sigma_{I\varepsilon}$ di Σ_I , minore di $\lambda + \varepsilon$. Siano m_ε e n_ε i punti di suddivisione, rispettivamente degli intervalli (a', a'') e (b', b'') , a questi interni, competenti alla somma $\sigma_{I\varepsilon}$. Dico che se δ_ε è un tal numero positivo da risultare

$$[m_\varepsilon (b'' - b') + n_\varepsilon (a'' - a')] I(\mathbf{A}) \cdot \delta_\varepsilon \leq \lambda + \varepsilon - \sigma_{I\varepsilon},$$

per $\delta \leq \delta_\varepsilon$ riesce sempre verificata la (3). Indichiamo con \mathbf{r}_ε il reticolato relativo alla somma $\sigma_{I\varepsilon}$; per ogni altra somma σ_I indicheremo con σ'_I quella parte di essa che proviene dai rettangoli di decomposizione *non* attraversati da nessuna delle rette del reticolato \mathbf{r}_ε , e con σ''_I la parte rimanente. In virtù dell'osservazione premessa si ha $\sigma'_I \leq \sigma_{I\varepsilon}$; laddove, se $\delta \leq \delta_\varepsilon$, si ha

$$\begin{aligned} \sigma''_I &= \sum''_{hk} I(\mathbf{T}_{hk}) \text{ est } \mathbf{R}_{hk} \leq I(\mathbf{A}) \sum''_{hk} \text{ est } \mathbf{R}_{hk} \leq \\ &\leq I(\mathbf{A}) [m_\varepsilon (b'' - b') + n_\varepsilon (a'' - a')] \delta_\varepsilon \leq \lambda + \varepsilon - \sigma_{I\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ne segue, per $\delta \leq \delta_\varepsilon$, $\sigma_I = \sigma'_I + \sigma''_I \leq \lambda + \varepsilon$. È così dimostrato il lemma.

Esso deve essere completato dalla seguente

Osservazione. Il limite λ della somma σ_I è indipendente dal dominio rettangolare \mathbf{R} , che si considera, contenente il dato insieme limitato \mathbf{A} . Detti, invero, $P'(p'_1, p'_2, \dots, p'_r)$ e $P''(p''_1, p''_2, \dots, p''_r)$ i punti estremi di \mathbf{A} , si vede immediatamente che se $(p''_1 - p'_1)(p''_2 - p'_2) \dots (p''_r - p'_r) = 0$, riesce $\lambda = 0$, e che, nell'altro caso, qualunque sia il dominio rettangolare \mathbf{R} contenente \mathbf{A} , che si considera, si ottiene sempre per λ il valore a cui si perviene considerando il dominio rettangolare aventi per punti estremi i punti P' e P'' .

86. Estensione degli insiemi limitati. — Se, per definizione della funzione $I(T)$ del n° precedente, poniamo identicamente,

$$I(T) = 1,$$

posto allora $\sigma_T = \sigma$, si ha:

$$(1) \quad \sigma = \sum_{hk} \text{est } R_{hk} = \sum_{hk} \Delta x_h \Delta y_k,$$

ove la somma è estesa a tutti i domini rettangolari R_{hk} aventi, almeno, un punto in comune con l'insieme limitato A . L'estremo inferiore dell'insieme numerico Σ , descritto dalla variabile σ , definita dalla (1), al variare, in tutti i modi possibili, della decomposizione dei lati del dominio rettangolare R contenente il dato insieme A , chiamasi per definizione, l'estensione dell'insieme limitato A e viene denotato col simbolo $\text{est } A$ oppure, bene spesso, con la stessa lettera A . Il lemma fondamentale della teoria dell'integrazione dato al n° prec., consente di asserire che: *Indicando con δ la massima diagonale dei domini rettangolari secondo i quali è stato decomposto il dominio R , si ha:*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{hk} \text{est } R_{hk} = \text{est } A = A.$$

Se, in particolare, dividiamo ciascun lato di R in n parti eguali, si ha $\text{est } R_{hk} = R : n^2$, avendo posto $R = \text{est } R$. Il numero $v(n)$ dei rettangoli R_{hk} aventi, ciascuno, almeno un punto in comune con A , riesce allora una ben determinata funzione di n ; al divergere di n la variabile $v(n) R : n^2$ è subordinata alla variabile σ definita dalla (1) e si ha pertanto anche:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v(n)}{n^2} R = \text{est } A = A.$$

Si dimostra poi subito che: *L'estensione di un insieme somma di domini rettangolari, com'è stata ora definita, coincide con l'estensione dell'insieme stesso com'è stata definita al n° 84.*

Dimostriamo l'importante teorema:

I. *Se A e A' sono due insiemi limitati e se $A' < A$ si ha sempre $\text{est } A' \leq \text{est } A$.*

Per il calcolo dell'estensione di A e di A' consideriamo un dominio rettangolare R contenente A . Decomposto al solito modo, il

rettangolo R in rettangoli parziali R_{hk} , quelli, fra questi, contenenti almeno un punto di A' , sono tutti fra quelli contenenti almeno un punto di A , pertanto, la somma σ' delle aree dei primi non supera mai la somma σ delle aree dei secondi. Dalla relazione $\sigma' \leq \sigma$, passando al limite per δ infinitesimo, si deduce est $A' \leq \text{est } A$.

Da questo teorema si trae un *metodo di calcolo dell'estensione di un insieme*, che sarà spesso seguito. Dato l'insieme limitato A , supponiamo che si riesca a costruire due famiglie $[A']$ e $[A'']$ di insiemi limitati A' e A'' , tali che: 1°) ogni insieme A' sia contenuto in A e ogni insieme A'' contenga A ; 2°) le due classi di numeri $[\text{est } A']$ e $[\text{est } A'']$, rispettivamente descritte dai numeri $\text{est } A'$ e $\text{est } A''$ supposti noti, riescono contigue; si ha allora, evidentemente, che: *L'estensione di A è il numero di separazione di queste due classi numeriche.*

Si osservi che l'estensione di un insieme può, in particolare, risultare nulla. Sarà nulla l'estensione di un insieme che sia contenuto in una famiglia di insiemi, le cui estensioni formano una classe di numeri avente lo zero per estremo inferiore. Si vede subito così che:

II. *L'estensione di un insieme limitato di un $S_{(r)}$, considerato come insieme di un $S_{(q)}$, è sempre nulla, se $q > r$.*

Si dimostri, per esercizio, che: *L'estensione, sul piano, di una circonferenza è sempre nulla. L'estensione, su $S_{(r)}$, di un dominio di $S_{(r)}$ è sempre maggiore di zero.*

Decomposizione elementare di un insieme limitato.

Dato un insieme limitato A , diremo che gli insiemi A_1, A_2, \dots, A_n , provengono da una *decomposizione elementare dell'insieme A* , oppure che A è la *somma elementare degli insiemi A_1, A_2, \dots, A_n* , e scriveremo

$$A = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \dots \dot{+} A_n, \quad \text{oppure} \quad A = \sum_i^{1, n} A_i,$$

se: 1°) si ha $A = \sum_i^{1, n} A_i$, 2°) considerato un dominio rettangolare R contenente A e decomposto, al solito modo, in rettangoli parziali R_{hk} detta s la somma delle aree dei rettangoli R_{hk} ciascuno dei quali contiene punti appartenenti a *due*, almeno, degli insiemi A_1, A_2, \dots, A_n , si ha:

$$(2) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} s = 0.$$

Sussiste il teorema :

III. Se $A = \sum_i^{1, n} A_i$, si ha est $A = \sum_i^{1, n} \text{est } A_i$.

Basta dimostrarlo per $n=2$. Considerato un dominio rettangolare R contenente A e decompostolo, al solito modo, in rettangoli parziali R_{hk} , diciamo σ la somma delle aree di questi rettangoli contenenti, ciascuno, almeno un punto di A e diciamo σ_1 e σ_2 le somme analoghe per gli insiemi A_1 e A_2 . Si ha evidentemente $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma + s$, e quindi in forza della (2), passando al limite per δ infinitesimo, est $A_1 + \text{est } A_2 = \text{est } A$.

Insiemi limitati misurabili. Ogni insieme limitato di $S_{(r)}$ la cui frontiera ha, su $S_{(r)}$, estensione nulla, dicesi *misurabile su $S_{(r)}$* . L'estensione su $S_{(r)}$, di un insieme A misurabile, su $S_{(r)}$, dicesi anche la *sua misura, su $S_{(r)}$* . Essa si denota anche con la notazione $\text{mis } A$. La misura, sulla retta, di un insieme di punti della retta, misurabile sulla retta, dicesi anche la *lunghezza* dell'insieme. Un insieme del piano, misurabile sul piano, dicesi anche *quadrabile*, la sua misura, sul piano, dicesi anche *area dell'insieme*. Un insieme dello spazio ordinario, misurabile su questo spazio, dicesi anche *cubabile*, la sua misura, sul detto spazio, dicesi anche *volume dell'insieme*. Dicendo, in seguito, che *l'insieme A di $S_{(r)}$ è misurabile* sottintenderemo sempre di parlare della sua misurabilità su $S_{(r)}$ e per *misura di A* intenderemo sempre la sua misura su $S_{(r)}$.

Evidentemente, se due o più insiemi limitati di $S_{(r)}$ hanno, ciascuno, un'estensione nulla, anche la loro somma ha un'estensione nulla. D'altra parte, se A_1, A_2, \dots, A_n sono insiemi di $S_{(r)}$, si ha

$$\left. \begin{array}{l} F(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \\ F(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) \end{array} \right\} < F A_1 + F A_2 + \dots + F A_n,$$

$$F(A_1 - A_2) < F A_1 + F A_2,$$

onde segue il teorema :

IV. Se due o più insiemi di $S_{(r)}$ sono misurabili anche la loro somma e il loro prodotto sono misurabili e la differenza fra due qualsivogliano di essi è pure misurabile.

È importante il teorema:

V. Siano A_1, A_2, \dots, A_n insiemi misurabili di un medesimo spazio $S_{(r)}$, a due a due senza punti interni comuni, si ha allora che:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \dots \dot{+} A_n,$$

e pertanto

$$\text{est} \sum_i^{1, n} A_i = \sum_i^{1, n} \text{est} A_i.$$

Basta dimostrarlo per $n = 2$. Detto R un dominio rettangolare contenente $A_1 + A_2$, decomponiamolo, al solito modo, in rettangoli parziali R_{hk} ; ognuno di questi rettangoli che contiene un punto di A_1 e un punto di A_2 contiene un punto di $FA_1 + FA_2$.

Ne segue, assai facilmente, che se A, B, C, \dots , sono insiemi misurabili di un medesimo spazio $S_{(r)}$, si ha

$$\begin{aligned} \text{mis}(A + B) &= \text{mis} A + \text{mis} B - \text{mis}(A \cdot B), \\ \text{mis}(A + B + C) &= \text{mis} A + \text{mis} B + \text{mis} C - \text{mis}(B \cdot C) - \\ &\quad - \text{mis}(C \cdot A) - \text{mis}(A \cdot B) - \text{mis}(A \cdot B \cdot C) (*), \\ &\dots \end{aligned}$$

Dal teorema V si deduce che per decomporre un insieme misurabile A in due o più altri misurabili, basterà costruire due o più insiemi misurabili che, a due a due, abbiano, in comune, al più, punti della loro frontiera, contenuti, ciascuno, in A e tali che la totalità dei loro punti esaurisca tutti i punti di A .

Osservazione. Sia A un insieme misurabile, per ottenere la misura dell'insieme si può anche procedere al modo seguente: Preso un dominio rettangolare R contenente A , decomponiamolo, al solito modo, in rettangoli parziali R_{hk} e facciamo la somma $\sigma^{(i)}$ delle aree di quelli fra questi rettangoli *costituiti, ciascuno, di punti interni ad* A , si avrà anche:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma^{(i)} = \text{mis} A.$$

(*) Beninteso, se l'insieme $A \cdot B \cdot C \dots$ non esiste con i simboli est ($A \cdot B \cdot C \dots$), $\text{mis}(A \cdot B \cdot C \dots)$ si conviene di indicare lo zero.

87. Nozioni complementari e calcolo di alcune aree e di alcuni volumi. — Nella definizione della estensione per un insieme limitato ci siamo riferiti ad un particolare sistema di assi coordinati, onde sorge spontanea la domanda. L'estensione di un insieme limitato è forse dipendente dai particolari assi coordinati ai quali ci si riferisce? Si risponde negativamente, poichè sussiste il seguente teorema che andiamo a dimostrare:

I. Due insiemi eguali A e A^ hanno sempre la medesima estensione.*

Come si sa, due insiemi A e A^* diconsi *eguali* se fra i loro punti si può porre una corrispondenza biunivoca tale che detti P e Q due qualsivogliano punti di A e P^* e Q^* i corrispondenti punti di A^* , si ha sempre $\text{lung } PQ = \text{lung } P^*Q^*$. Limitandoci, come sempre, a considerare gli insiemi del piano, si comincia dal constatare, ciò che proponiamo di fare al lettore, che, considerando nel piano (x, y) un qualunque rettangolo, anche a lati *non* paralleli agli assi coordinati, l'area del rettangolo, com'è stata definita al n° prec. (pag. 355), è sempre data dal prodotto delle lunghezze dei suoi due lati. Ciò posto, siano A e A^* due qualsivogliano insiemi *eguali* del piano (x, y) , devo dimostrare che $A = \text{est } A = \text{est } A^* = A^*$. Sia R' un dominio rettangolare del piano (x, y) contenente A ed R^* quel tale rettangolo dello stesso piano che l'insieme $R^* + A^*$ riesca eguale all'insieme $R' + A$. Col solito reticolato variabile r^* , formato da due famiglie di rette parallele ai lati del rettangolo R^* decomponiamo tale rettangolo in rettangoli parziali R_{hk}^* e diciamo σ^* la somma delle aree di quelli fra questi rettangoli che hanno, almeno, un punto in comune con A^* , δ la massima diagonale di quei rettangoli. In forza dell'osservazione premessa si ha $\sigma^* \geq A$, $\lim \sigma^* (\delta \rightarrow 0) = A$. D'altra parte è sempre (86, I) $\sigma^* \geq A^*$, onde segue, intanto, $A \geq A^*$. Sia ora $R [(a', a''); (b', b'')]$ un dominio rettangolare, del piano (x, y) , contenente R^* , mediante il reticolato variabile r , formato da due famiglie di rette orizzontali e verticali, decomponiamo R in domini rettangolari parziali R_{hk} e diciamo σ la somma delle aree di quelli fra questi domini che hanno, almeno, un punto in comune con A^* . Comunque si assegni un numero positivo ε è possibile costruire un particolare reticolato r tale che per esso risulti $\sigma < A^* + \varepsilon$. Sia m

il numero delle rette verticali e n quello delle rette orizzontali del detto reticolato r e diciamo δ_ε un numero positivo per cui riesca

$$2[m(b'' - b') + n(a'' - a')] \delta_\varepsilon \leq A^* + \varepsilon - \sigma.$$

Con un ragionamento analogo a quello fatto al n° 85 (a pag. 354) si vede che per ogni reticolato r^* al quale corrispondono rettangoli di decomposizione del rettangolo R^* aventi, ciascuno, una diagonale non superiore δ_ε , risulta

$$A \leq \sigma^* \leq A^* + \varepsilon.$$

Si ha dunque, data l'arbitrarietà di ε , $A \leq A^*$. Ne segue $A = A^*$, poichè abbiamo già visto che $A \geq A^*$.

Due insiemi A e A^* diconsi *simili* se fra i punti di essi si può porre una corrispondenza biunivoca tale che detti P e Q due qualsivogliano punti di A e P^* e Q^* i corrispondenti punti di A^* si abbia sempre $\text{lung} P^* Q^* = k \cdot \text{lung} PQ$, ove k è una costante positiva. Tale costante chiamasi il *rapporto di similitudine*. Poggiandosi sul teorema precedente si dimostra subito che:

II. *Se i due insiemi A e A^* , di $S_{(r)}$, sono simili, detto k il rapporto di similitudine si ha est $A^* = k^r \text{ est} A$.*

Allo stesso modo si dimostra che :

III. *Detto α l'angolo diedro (non ottuso) fra due piani π e π' dello spazio, fra l'estensione di un qualsiasi insieme A di π e l'estensione della sua proiezione ortogonale A' su π' , sussiste la relazione est $A' = \cos \alpha \cdot \text{est} A$.*

IV. *Area del parallelogrammo.* Il parallelogrammo, come qualsiasi poligono piano, avendo la frontiera costituita da segmenti di retta, è misurabile (86, II). Il parallelogrammo $P \equiv ABCD$ del piano (x, y) abbia i lati opposti AB e CD , rispettivamente, sull'asse x e sulla retta $y = h$. Sia b la lunghezza del lato AB , c quella del lato AC , l'angolo BAC sia acuto e di α radianti ($h = c \sin \alpha$). Essendo n un qualsiasi numero naturale, mediante le rette orizzontali $y = ih : n$ ($i = 0, 1, \dots, n$) dividiamo il parallelogrammo P in n parallelogrammi parziali $P_1 \equiv ABA_1B_1$, $P_2 \equiv A_1B_1A_2B_2, \dots, P_n \equiv A_{n-1}B_{n-1}CD$, denotando con A_i e B_i i punti secondo i quali la $y = ih : n$ incontra, rispettivamente, i lati AC e BD di P . Proiettiamo, orto-

gonalmente, i punti A_i e B_i sulla retta $y = (i - 1)h : n$ e sulla retta $y = (i + 1)h : n$ e diciamo $A_i^{(i-1)}$ e $B_i^{(i-1)}$ le proiezioni sulla prima, $A_i^{(i+1)}$ e $B_i^{(i+1)}$ le proiezioni sulla seconda. Si ha :

$$A_i^{(i-1)} B_{i-1} A_i B_i^{(i)} < P_i < A_{i-1} B_i^{(i-1)} A_{i-1}^{(i)} B_i$$

e quindi

$$\left(b - \frac{h}{n} \cot \alpha\right) \frac{h}{n} \leq \text{area } P_i \leq \left(b + \frac{h}{n} \cot \alpha\right) \frac{h}{n}$$

e pertanto

$$bh - \frac{h^2}{n} \cot \alpha \leq \text{area } P \leq bh + \frac{h^2}{n} \cot \alpha,$$

ne segue, facendo divergere n ,

$$\text{area } P = bh = bc \text{ sen } \alpha.$$

V. *Area del triangolo.* Per il triangolo $T \equiv ABC$ i lati CA e CB abbiano, rispettivamente, le lunghezze a e b e l'angolo BGA sia di γ radianti. Le parallele per B e per A ai lati AC e CB si incontrino nel punto C' . Il parallelogrammo $CBA C'$ è decomposto (elementarmente) dalla sua diagonale AB in due triangoli eguali, si ha pertanto (teorr. I e III, 86) $2 \text{area } T = ab \text{sen } \gamma$. Senza invocare l'eguaglianza dei due triangoli ABC e ABC' , si giunge allo stesso risultato al modo seguente. Disponiamo il lato CB di T sull'asse delle x e diciamo $h = a \text{sen } \gamma$ l'ordinata (positiva) di A . Denotiamo con B_i e C_i i punti secondo i quali le rette $y = ih : n$ ($i = 0, 1, \dots, n$) incontrano, rispettivamente, i lati AB e AC di T , con T_i il trapezio $B_{i-1} C_{i-1} B_i C_i$, T_n è un triangolo. Si ha $T = \sum_i T_i$, lung $B_i C_i = b(n - i) : n$. Parallelamente al lato AC proiettiamo il punto B_i sulla retta $y = (i - 1)h : n$ e sulla retta $y = (i + 1)h : n$, e diciamone $B_i^{(i-1)}$ e $B_i^{(i+1)}$ le proiezioni. Si ha

$$C_{i-1} B_i^{(i-1)} C_i B_i < T_i < C_{i-1} B_{i-1} C_i B_{i-1}^{(i)},$$

e quindi (teor. IV)

$$b \frac{n-i}{n} \frac{h}{n} \leq \text{area } T_i \leq b \frac{n-i+1}{n} \frac{h}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

e pertanto

$$bh \frac{n-1}{2n} \leq \text{area } T \leq bh \frac{n+1}{2n},$$

ne segue, per n divergente, $\text{area } T = bh : 2$.

VI. *Area del settore ellittico.* Al variare del parametro θ nell'intervallo $(0, 2\pi)$, il punto

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta, \quad (a > 0, b > 0)$$

descrive un'ellisse col centro nell'origine O delle coordinate, di semiassi a e b . Siano α e β ($\beta > \alpha$) due valori di θ , A e B i corrispondenti punti dell'ellisse, chiameremo *settoare ellittico* $S(A, B)$ lo insieme dei punti non esterni all'ellisse contenuti nell'angolo AOB . La frontiera di $S(A, B)$ è costituita dai due segmenti di rette OA e OB e dall'arco $C(A, B)$ determinato sull'ellisse dai punti A e B . Dividiamo l'intervallo (α, β) in n parti eguali, mediante i punti $\theta_i = \alpha + i(\beta - \alpha) : n$ ($i = 0, 1, \dots, n$) e diciamo A_i il punto dell'ellisse corrispondente al valore θ_i di θ , B_i il polo, rispetto all'ellisse, della corda $A_{i-1}A_i$ di essa. Poniamo

$$(1) \quad T_n = \sum_i^{1, n} \text{triang}(A_{i-1}OA_i), \quad T'_n = \sum_i^{1, n} \text{triang}(A_{i-1}B_iA_i).$$

Si ha

$$T_n < S(A, B) < T_n + T'_n, \quad C(A, B) < T'_n,$$

e si trova (con facile calcolo)

$$\text{area } T_n = n \frac{ab}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{n}, \quad \text{area } T'_n = nab \text{tang} \frac{\beta - \alpha}{2n} \left(\sin \frac{\beta - \alpha}{2n} \right)^2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{area } T_n = \frac{ab}{2} (\beta - \alpha), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{area } T'_n = 0.$$

Ne segue: Il settoare ellittico $S(A, B)$ è misurabile e la sua area è data da $ab(\beta - \alpha)/2$. In particolare, per $\alpha = 0$ e $\beta = 2\pi$, si trova che l'area dell'intera ellisse è data da πab .

VII. *Area del settoare iperbolico.* Al variare di θ da $-\infty$ a $+\infty$, il punto

$$x = a \cosh \theta, \quad y = b \sinh \theta \quad (a > 0, b > 0),$$

descrive un ramo di iperbola, col centro nell'origine O delle coordinate, di semiassi a e b . Siano α e β ($\beta > \alpha$) due valori di θ , A e B i corrispondenti punti dell'iperbola, chiameremo *settoare iperbolico* $S(A, B)$ l'insieme dei punti non interni all'iperbola contenuti nell'angolo AOB . La frontiera di $S(A, B)$ è costituita dai due segmenti di retta OA e OB e dall'arco $C(A, B)$ determinato sul conside-

rato ramo di iperbola dai punti A e B . Dividiamo l'intervallo (α, β) in n parti eguali, mediante i punti $\theta_i = \alpha + i(\beta - \alpha) : n, (i=0, 1, \dots, n)$ e diciamo A_i il punto dell'iperbola corrispondente al valore θ_i di θ , B_i il polo, rispetto all'iperbola, della corda di essa $A_{i-1} A_i$. Facendo le posizioni (1) si trova

$$T_n - T'_n < S(A, B) < T_n, \quad C(A, B) < T'_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{area } T_n = \frac{ab}{2} (\beta - \alpha), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{area } T'_n = 0.$$

Ne segue: Il settore iperbolico $S(A, B)$ è misurabile e la sua area è data da $ab(\beta - \alpha)/2$. In particolare, per $a = b = 1, \beta = \theta, \alpha = -\theta$, si trova (cfr. pag. 200) che l'area del settore iperbolico $S(-\theta, \theta)$, di iperbola equilatera di semiassi uno, è data da θ .

VIII. *Area del segmento parabolico.* Sieno A e B due qualsivogliano punti di una parabola, si vuole calcolare l'estensione del *segmento parabolico* limitato dalla parabola e dalla corda AB di essa. Riferiamo perciò la parabola ai due assi x e y di origine in A formanti fra di loro un angolo ω (in generale diverso da $\pi/2$), l'asse x essendo sulla tangente in A alla parabola, e l'asse y sul diametro di questa passante per A . Diamo poi agli assi x e y tali versi che entrambe le coordinate di B risultino positive. Siano b l'ascissa di B , C il punto dell'asse x di ascissa $b, y = x^2 : k (k > 0)$ l'equazione della parabola. Cominciamo dal determinare l'estensione del dominio D definito dalle limitazioni

$$0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq \frac{x^2}{k}.$$

La frontiera di D è costituita dai due segmenti di retta AC e CB e dell'arco $C(A, B)$ determinato sulla parabola dei punti A e B . Mediante i punti $x_i = ib : n (i = 0, 1, \dots, n)$ dividiamo l'intervallo $(0, b)$ dell'asse x in n parti eguali e diciamo A_i il punto della parabola di ascissa x_i, A'_i il punto di ascissa x_i e di ordinata eguale a quella di A_{i-1}, P_i il parallelogrammo avente per base l'intervallo (x_{i-1}, x_i) ed un vertice in A_i, P'_i il parallelogrammo avente per base $A_{i-1} A'_i$ ed un vertice del pari in A_i . Riesce $P_i \equiv P'_i$. Si ha:

$$\sum_i^{1, n} P_i - \sum_i^{1, n} P'_i < D < \sum_i^{1, n} P_i, \quad C(A, B) < \sum_i^{1, n} P'_i,$$

$$\text{area } P_i = \frac{b^3}{k} \frac{i^2}{n^3} \text{sen } \omega, \quad \text{area } P'_i = \frac{b^3}{k} \frac{2i-1}{n^3} \text{sen } \omega,$$

e pertanto, poichè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\text{area } \sum_i^{1, n} P_i \right) = \frac{b^3}{3k} \text{sen } \omega, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\text{area } \sum_i^{1, n} P'_i \right) = 0,$$

segue la quadrabilità di D e che $\text{area } D = (b^3 : 3k) \text{sen } \omega$. Il segmento parabolico di corda AB è dunque anch'esso quadrabile ed ha per area

$$\text{area triang } ABC - \text{area } D = (b^3 : 6k) \text{sen } \omega.$$

Si osservi che l'area del triangolo della corda AB e delle tangenti alla parabola in A e in B è la metà dell'area del triangolo ABC e si ha pertanto, com'è noto, che: *L'area del segmento parabolico di corda AB vale i due terzi dell'area del triangolo della corda AB e delle tangenti alla parabola in A e in B .*

IX. *Volume del parallelepipedo a base rettangolare.* Nello spazio (x, y, z) si abbia un parallelepipedo P , la cui base rettangolare R sia situata sul piano (x, y) e la cui altezza sia h . Disponiamo R con un vertice nell'origine O delle coordinate e con i due lati, per questo vertice, sugli assi x e y ; sia a la lunghezza del lato sull'asse x e b quella del lato sull'asse y . Diciamo γ l'angolo (acuto) di inclinazione della terza costola di P , passante per O , sul piano (x, y) , α e β gli angoli (acuti) che la proiezione di quella costola sul piano (x, y) fa, rispettivamente, con gli assi x e y . Mediante i piani π_i ($i = 0, 1, \dots, n$) di equazioni $z = ih : n$, seghiamo il parallelepipedo P e diciamo R_i i rettangoli sezione, P_1, P_2, \dots, P_n i parallelepipedi secondo i quali viene così decomposto P . Denotiamo con R'_i la proiezione (ortogonale) di R_i sul piano π_{i-1} , con H_i il dominio rettangolare R_{i-1}, R'_i e con K_i il dominio rettangolare avente per punti estremi quelli stessi della somma $R_{i-1} + R'_i$. Il parallelepipedo P_i è contenuto nel dominio rettangolare (dello spazio) avente per base K_i e per altezza $h : n$ e contiene il dominio rettangolare avente per base H_i e la stessa altezza. Le dimensioni del primo dominio sono

$$a + \frac{h}{n} \frac{\cos \alpha}{\text{tang } \gamma}, \quad b + \frac{h}{n} \frac{\cos \beta}{\text{tang } \gamma}, \quad \frac{h}{n},$$

e le dimensioni del secondo

$$a - \frac{h \cos \alpha}{n \operatorname{tang} \gamma}, \quad b - \frac{h \cos \beta}{n \operatorname{tang} \gamma}, \quad \frac{h}{n}.$$

Il parallelepipedo P , come ogni altro poliedro dello spazio, è misurabile, e da quanto precede segue:

$$\left(a - \frac{h \cos \alpha}{n \operatorname{tang} \gamma}\right) \left(b - \frac{h \cos \beta}{n \operatorname{tang} \gamma}\right) h \leq \operatorname{vol} P \leq \left(a + \frac{h \cos \alpha}{n \operatorname{tang} \gamma}\right) \left(b + \frac{h \cos \beta}{n \operatorname{tang} \gamma}\right) h,$$

e pertanto, facendo divergere n , si trova

$$\operatorname{vol} P = abh = h \operatorname{area} R.$$

X. *Volume del cilindro a base misurabile.* Sia T un insieme di punti del piano (x, y) e r una retta non orizzontale. Chiameremo C il cilindro di base T , di direzione r e di lato a , luogo descritto dai punti di un segmento orientato \overrightarrow{MN} , che mantiene costantemente la direzione della retta r , verso costante e lunghezza costante $= a$, nel mentre che l'origine M del segmento percorre l'intero insieme T . L'insieme piano (eguale a T) descritto dall'estremo N del segmento è la base superiore del cilindro, l'insieme T ne è la base inferiore. La distanza h fra i piani delle due basi è l'altezza di C . Il cilindro dicesi ortogonale od obliquo secondochè la retta r è normale o no al piano (x, y) . I punti di frontiera per C sono i punti delle due basi e i punti del cilindro avente per base FT , la direzione r e il lato a . Tale cilindro è la frontiera laterale di C . Noi vogliamo ora dimostrare il teorema: *Se la base T del cilindro C è misurabile, è pure misurabile il cilindro e questo ha per volume il prodotto $h \cdot \operatorname{area} T$ dell'altezza per l'area della base.*

Considerato un dominio rettangolo R contenente T , decompiamolo, al solito modo, in domini rettangolari parziali R_{hk} e diciamo T' la somma di quelli fra questi domini costituiti di punti interni a T , T'' la somma di quelli che hanno, almeno, un punto in comune con FT , C' e C'' i cilindri aventi per base, rispettivamente, T' e T'' , la direzione r e l'altezza h . Si ha:

$$T' < T < T' \dot{+} T'', \quad C' < C < C' \dot{+} C'',$$

$$\operatorname{vol} C' = h \operatorname{area} T', \quad \operatorname{vol} C'' = h \operatorname{area} T'', \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \operatorname{area} T' = \operatorname{area} T,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \operatorname{area} T'' = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \operatorname{vol} C' = h \operatorname{area} T, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \operatorname{vol} C'' = 0,$$

e quindi

$$\text{est } C = h \text{ area } T$$

Il cilindro C è poi misurabile poichè anche la sua frontiera laterale ha estensione nulla, essendo essa sempre contenuta in C'' .

XI. *Volume del tetraedro.* Il tetraedro $P \equiv VABC$, di vertice V e di base $T \equiv ABC$, abbia la base sul piano (x, y) e l'altezza h . Mediante i piani π_i ($i = 0, 1, \dots, n$), di equazioni $z = ih : n$, seghiamo il tetraedro P e diciamo T_i i triangoli sezione, P_1, P_2, \dots, P_n i tronchi di tetraedro secondo i quali viene così decomposto P . Si ha (teor. II) area $T_i = [(n - i)^2 : n^2] \text{ area } T$. Diciamo T'_i la proiezione di T_i sul piano π_{i-1} fatta parallelamente, per esempio, al lato VA di P e diciamo C'_i ($i = 1, 2, \dots, n$) il cilindro (prisma triangolare) avente per base T'_i , la direzione VA e l'altezza $h : n$, C''_i ($i = 1, 2, \dots, n$) il cilindro (prisma triangolare) avente per base T_{i-1} , la direzione VA e l'altezza $h : n$. Si ha (teor. X)

$$\text{vol } C'_i = h \cdot \text{area } T \cdot \frac{(n - i)^2}{n^2}, \quad \text{vol } C''_i = h \cdot \text{area } T \cdot \frac{(n - i + 1)^2}{n^2},$$

$$C'_i < P_i < C''_i, \quad \sum_i^{1, n} C'_i < P < \sum_i^{1, n} C''_i$$

e quindi, facendo divergere n , si trova

$$(2) \quad \text{vol } P = \frac{h}{3} \text{ area } T.$$

Poichè ogni piramide si può decomporre (in modo elementare) in tetraedri aventi la stessa altezza e lo stesso vertice della piramide, subito si vede che la formola (2) sussiste anche se P designa la più generale piramide, di altezza h e di base poligonale T .

XII. *Volume del cono a base misurabile.* Sia T un insieme limitato del piano (x, y) , V un punto fuori di questo piano, il cono di base T e di vertice V è il luogo descritto dai punti del segmento VM , al variare del punto M nell'insieme T . L'altezza h del cono è la distanza di V del piano (x, y) . La frontiera laterale del cono è il cono avente per vertice V e per base FT . Con un ragionamento del tutto simile a quello fatto (in IX) per la determinazione del volume del cilindro a base misurabile, sostituendo, soltanto, alla considerazione

dei cilindri C' e C'' quella delle piramidi P' e P'' , aventi per vertice V e per basi somme di rettangoli T' e T'' , si dimostra che: *Se la base T del cono è misurabile è pure misurabile il cono e questo ha per volume h area $T:3$.*

XIII. *Volume dell'ellissoide.* Si abbia l'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

il piano (x, y) lo divide in due domini eguali. Vogliamo trovare l'estensione del semiellissoide S del semispazio $z \geq 0$. Mediante i piani π_i ($i = 0, 1, \dots, n$), di equazioni $z = ic:n$, seghiamo S e diciamo E_i le ellissi sezione, S_1, S_2, \dots, S_n i segmenti ellissoidici secondo i quali viene così decomposto S . L'ellisse E_i ha i semiassi

$$a\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}}, \quad b\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}},$$

e quindi (cfr. VI) l'area $\pi ab(n^2 - i^2):n^2$. Sia E'_i la proiezione (ortogonale) dell'ellisse E_i sul piano π_{i-1} . Diciamo C'_i il cilindro ortogonale avente per base E'_i e l'altezza $c:n$, C''_i il cilindro della stessa altezza avente per base la corona ellittica limitata delle due ellissi E_i e E_{i-1} . Si ha:

$$\text{vol } C'_i = \pi abc \frac{n^2 - i^2}{n^3}, \quad \text{vol } C''_i = \pi abc \frac{2i - 1}{n^3},$$

$$C'_i < S_i < C'_i + C''_i, \quad \sum_i^{1, n} C'_i < S < \sum_i^{1, n} C'_i + \sum_i^{1, n} C''_i,$$

e quindi, per n divergente, si trova est $S = (2/3)\pi abc$, e pertanto

$$\text{est ellissoide} = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Poichè $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{area } \sum_i C''_i = 0$ se ne deduce la cubabilità dell'ellissoide.

XIV. *Le equazioni*

$$(3) \quad \begin{cases} x^* = a_1x + a_2y + a_3z + a \\ y^* = b_1x + b_2y + b_3z + b \\ z^* = c_1x + c_2y + c_3z + c \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

fanno corrispondere ad un parallelepipedo P dello spazio un altro parallelepipedo P^* . In virtù del risultato ottenuto in X , applicando note formole della *geometria analitica*, si trova che sussiste la relazione:

$$\text{vol } P^* = |D| \text{ vol } P.$$

Da qui, con un ragionamento del tutto analogo a quello fatto in I , si deduce il teorema: *Detto A^* l'insieme di punti che le (3) fanno corrispondere ad un qualsiasi insieme limitato A dello spazio, si ha:*

$$\text{est } A^* = |D| \text{ est } A.$$

Come particolarissimo caso si ritrovano i teor. I, II e III.

88. Insiemi illimitati di estensione finita.—Sia A un qualsiasi insieme *illimitato* di $S_{(r)}$ e T un insieme *limitato* variabile, contenuto sempre in A . Si dirà che l'insieme A ha un'*estensione finita* se l'insieme numerico [est T] descritto da est T al variare di T in A è limitato superiormente. L'estremo superiore dell'insieme [est T] è allora, per definizione, l'*estensione* di A e si denota sempre con est A o con la lettera A . Sussiste il teorema: *Sia*

$$(1) \quad C_1, C_2, \dots, C_n, \dots,$$

la più arbitraria successione di insiemi limitati godenti delle seguenti proprietà: 1^a) $C_1 < C_2 < \dots < C_n < \dots$, 2^a) comunque si consideri un dominio rettangolare R di $S_{(r)}$, esiste sempre un insieme della successione contenente R . Si ha allora che condizione necessaria e sufficiente affinché l'insieme illimitato A abbia un'estensione finita è che la successione non decrescente

$$(2) \quad \text{est}(A \cdot C_1), \text{est}(A \cdot C_2), \dots, \text{est}(A \cdot C_n), \dots,$$

abbia un limite finito. Sarà allora

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{est}(A \cdot C_n).$$

La necessità della condizione è evidente; dimostriamone la sufficienza. Diciamo A' il limite della successione (2); comunque si consideri un insieme limitato T , contenuto in A , riesce est $T \leq A'$, ed invero, preso un dominio rettangolare R contenente T , sia C_k un insieme della successione (1) per il quale è $R < C_k$, sarà $T < C_k$ e quindi $T \equiv A \cdot T < A \cdot C_k$, e pertanto est $T \leq \text{est}(A \cdot C_k) \leq A'$. Ne segue che l'insieme numerico [est T] è limitato superiormente;

A' ne è poi l'estremo superiore poichè, con l'estensione dei particolari insiemi $A \cdot C_n$, contenuti in A , ci si può, per ipotesi, avvicinare ad A' tanto quanto si vuole.

Una successione di insiemi, come la successione $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, testè considerata, sarà da noi detta *invadente lo spazio*.

Evidentemente, se A è un insieme di estensione finita, ogni insieme A' contenuto in A è pure tale ed è est $A' \leq \text{est } A$. Un insieme chiuso di estensione finita, ha dunque sempre la frontiera di estensione finita. Un insieme illimitato dicesi, come uno limitato, *misurabile* se la sua frontiera ha estensione nulla. Un insieme illimitato misurabile di estensione finita dicesi anche di *misura finita*.

Lasciamo al lettore la cura di dimostrare che: *Se due o più insiemi misurabili A, B, \dots , di misura finita, non hanno, presi a due a due, punti interni comuni, si ha $\text{mis}(A + B + \dots) = \text{mis } A + \text{mis } B + \dots$.*

Esercizio. Si dimostri che, se α è un qualsiasi numero maggiore di uno, il dominio illimitato del piano (x, y) definito dalle limitazioni $1 \leq x, 0 \leq y \leq 1 : x^\alpha$, è misurabile ed ha per misura $1 : (\alpha - 1)$.

§. 2. Integrali delle funzioni.

89. Massimo e minimo integrale di una funzione limitata estesi ad un insieme limitato. — Sull'insieme limitato A del piano (x, y) sia definita la funzione reale $f(P)$ che supporremo limitata. Per ogni variabile insieme T , contenuto in A , denoteremo con $e'(T)$, $e''(T)$, rispettivamente, gli estremi inferiore e superiore delle funzioni $f(P)$ in T . Diciamo $R[(a', b'); (a'', b'')]$ un qualsiasi dominio rettangolare contenente A e decomponiamolo, come al n° 85, in domini rettangolari parziali R_{hk} , indicandone con $R_{hk} = \Delta x_h \Delta y_k$ l'area, con δ la massima diagonale, ed indicando con T_{hk} i prodotti dell'insieme A con quelli fra quei rettangoli che hanno con esso almeno un punto in comune. Poniamo poi

$$\sigma' = \sum_{hk} e'(T_{hk}) R_{hk}, \quad \sigma'' = \sum_{hk} e''(T_{hk}) R_{hk},$$

sussiste il teorema:

I. *Ciascuna delle due variabili σ' e σ'' al tendere a zero della massima diagonale δ dei domini rettangolari di decomposizione del dominio R , tende ad un limite determinato e finito.*

Basterà dimostrare il teorema per le somme σ'' , poichè le somme σ' si cangiano nelle σ'' , cangiando f in $-f$. Se, allora, in primo luogo, supporremo $e'(A) \geq 0$, se cioè supporremo in A , mai negativa la funzione $f(P)$, il teorema rientra nel *lemma fondamentale della teoria dell'integrazione* dimostrato al n° 85: la somma σ'' avrà per limite l'estremo inferiore dell'insieme numerico da essa descritto al variare, in tutti i modi possibili, della decomposizione dei lati del rettangolo R . In generale, porremo

$$f_1(P) = f(P) - e'(A),$$

sarà $f_1(P) \geq 0$ in A , mentre l'estremo superiore $e''_1(T)$ di $f_1(P)$ in T è $e''(T) - e'(A)$. Si ha pertanto

$$\sigma'' = \sum_{hk} e''_1(T_{hk}) R_{hk} + e'(A) \sum_{hk} R_{hk};$$

la variabile σ'' è così decomposta nella somma di due addendi aventi, ciascuno, un limite determinato e finito, per δ infinitesimo, altrettanto avverrà dunque per σ'' .

Dopo questo teorema si può porre la seguente

Definizione. I limiti λ' e λ'' , per δ infinitesimo, delle somme σ' e σ'' , chiamansi rispettivamente il minimo e il massimo integrale della funzione limitata $f(P)$ estesi all'insieme limitato A . Essi si designano con le notazioni

$$\int_A' f(P) dT, \quad \int_A'' f(P) dT.$$

Con la notazione

$$\int_A f(P) dT,$$

sprovvista di apici, indicheremo, indifferentemente, il massimo o il minimo integrale nell'enunciare quelle proprietà che i due integrali hanno in comune. Subito si dimostra (cfr. pag. 354) che i limiti λ' e λ'' sono indipendenti dal particolare rettangolo R , contenente A , che si considera.

Secondochè l'insieme A è contenuto in uno spazio $S_{(1)}$ o in un $S_{(2)}$, ..., oppure in un $S_{(r)}$, l'integrale si dice ad *una*, a *due*, ..., a *r* dimensioni, e per esso si adotta anche la notazione:

$$\int_A f(x) dx, \quad \int_A f(x, y) dx dy, \dots \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_r) dx_1 dx_2 \dots dx_r.$$

Si ha, in particolare,

$$\int_A dT = \int_A dx_1 dx_2 \dots dx_r = \text{est } A = A.$$

Passiamo ora a dare alcune proprietà fondamentali per gli integrali di una funzione limitata.

II. *Il massimo integrale non è inferiore al minimo.*

Ed invero, per due somme σ' e σ'' , relative ad una medesima decomposizione di R , si ha sempre $\sigma' \leq \sigma''$.

III. *Teorema della media. Sussiste la limitazione*

$$A e'(A) \leq \int_A f(P) dT \leq A e''(A).$$

Si ha infatti

$$e'(A) \sum_{hk} R_{hk} \leq \sum_{hk} e'(T_{hk}) R_{hk} \leq \sum_{hk} e''(T_{hk}) R_{hk} \leq e''(A) \sum_{hk} R_{hk},$$

e quindi, passando al limite per δ infinitesimo,

$$A e'(A) \leq \int_A f(P) dT \leq \int_A f''(P) dT \leq A e''(A).$$

Ne segue che se $\text{est } A = 0$, i due integrali della $f(P)$ sono sempre entrambi nulli.

IV. *Teorema dell'additività. Se $A = \sum_i A_i$, si ha*

$$\int_A f(P) dT = \sum_i \int_{A_i} f(P) dT.$$

Ci limiteremo a dimostrare il teorema nel caso che A sia la somma elementare di due insiemi A_1 e A_2 . Diciamo M l'estremo superiore, in A , di $|f(P)|$, cioè il maggiore dei due numeri $|e'(A)|$ e $|e''(A)|$, σ'_1 e σ'_2 le somme rispettivamente per gli insiemi A_1 e A_2 , analoghe alla somma σ' , s^* la somma $\sum_{hk}^* e'(T_{hk}) R_{hk}$ estesa ai rettangoli R_{hk} aventi, ciascuno, punti appartenenti a A_1 e punti appartenenti a A_2 , si ha:

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 = \sigma' + s^*, \quad |s^*| \leq M \sum_{hk}^* R_{hk}, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{hk}^* R_{hk} = 0,$$

e quindi, dalla prima, passando al limite per δ infinitesimo, si trova

$$\int_A f(P) dT = \int_{A_1} f(P) dT + \int_{A_2} f(P) dT.$$

V. Integrali della somma. Siano f_1, f_2, \dots, f_n , n funzioni reali e limitate, definite nell'insieme limitato A . Indicando con λ'_i e λ''_i il minimo e il massimo integrale della funzione f_i , estesi ad A ($i=1, 2, \dots, n$) con λ' e λ'' il minimo e il massimo integrale della funzione $f(P) = \sum_i f_i(P)$ estesi del pari ad A , sussistono le $2n + 2$ relazioni:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \lambda'_i \leq \lambda' \leq \lambda'' \leq \sum_{i=1}^n \lambda''_i, \\ \lambda' \leq \lambda'_k + \lambda'_1 + \dots + \lambda'_{k-1} + \lambda'_{k+1} + \dots + \lambda'_n, \\ \lambda'' \geq \lambda''_k + \lambda'_1 + \dots + \lambda'_{k-1} + \lambda'_{k+1} + \dots + \lambda'_n, \end{array} \right\} (k=1, 2, \dots, n)$$

cioè, per $n=2$, le sei relazioni:

$$(2) \quad \lambda'_1 + \lambda'_2 \leq \lambda' \leq \frac{\lambda'_1 + \lambda'_2}{\lambda''_1 + \lambda''_2} \leq \lambda'' \leq \lambda''_1 + \lambda''_2.$$

Limitiamoci a dimostrare le relazioni (2), poichè allora, col metodo di induzione, subito si deducono le (1). Diciamo $e', e'_1, e'_2; e'', e''_1, e''_2$, gli estremi inferiore o superiore in T , delle f, f_1, f_2 . Si ha, in T_{hk} ,

$$e'_1(T_{hk}) + e'_2(T_{hk}) \leq f_1(P) + f_2(P) \leq e''_1(T_{hk}) + e''_2(T_{hk}),$$

e quindi

$$e'_1(T_{hk}) + e'_2(T_{hk}) \leq e'(T_{hk}) \leq e''(T_{hk}) \leq e''_1(T_{hk}) + e''_2(T_{hk}),$$

ne segue

$$\lambda'_1 + \lambda'_2 \leq \lambda' \leq \lambda'' \leq \lambda''_1 + \lambda''_2.$$

Comunque si assegni il numero positivo ε , esiste in ciascuno insieme T_{hk} , almeno un punto P nel quale è $f_1(P) \leq e'_1(T_{hk}) + \varepsilon$, e quindi $f(P) \leq e'_1(T_{hk}) + e'_2(T_{hk}) + \varepsilon$. Si ha dunque $e'(T_{hk}) \leq e'_1(T_{hk}) + e'_2(T_{hk}) + \varepsilon$, e per l'arbitrarietà di ε , $e'(T_{hk}) \leq e'_1(T_{hk}) + e'_2(T_{hk})$. Ne segue $\lambda' \leq \lambda'_1 + \lambda'_2$. Ecc.

VI. Se la costante c è non negativa, si ha

$$\int_A c f(P) dT = c \int_A f(P) dT, \quad \int_A c f(P) dT = c \int_A f(P) dT,$$

e se c è non positiva

$$\int_A' cf(P) dT = c \int_A'' f(P) dT, \quad \int_A''' cf(P) dT = c \int_A'' f(P) dT,$$

VII. *Integrali della differenza.* Se f_1 e f_2 sono due funzioni reali e limitate, definite in un insieme limitato A , posto $f = f_1 - f_2$, fra gli integrali di f, f_1, f_2 , sussistono le sei relazioni:

$$\lambda_1' - \lambda_2'' \leq \lambda' \leq \frac{\lambda_1' - \lambda_2'}{\lambda_1'' - \lambda_2''} \leq \lambda'' \leq \lambda_1'' - \lambda_2'.$$

Esse si deducono immediatamente dalle (2), cangiando f_2 in $-f_2$ ed applicando il teor. VI.

VIII. Se le due funzioni reali $f_1(P)$ e $f_2(P)$ sono entrambe limitate in A , ed ivi è sempre $f_1(P) \leq f_2(P)$, si ha

$$\int_A' f_1(P) dT \leq \int_A' f_2(P) dT, \quad \int_A'' f_1(P) dT \leq \int_A'' f_2(P) dT.$$

Ed invero, riesce sempre $e_1'(T_{hk}) \leq e_2'(T_{hk}), e_1''(T_{hk}) \leq e_2''(T_{hk})$.

IX. Per ogni funzione $f(P)$ limitata in A si ha:

$$\left. \begin{array}{l} \left| \int_A' f(P) dT \right| \\ \left| \int_A'' f(P) dT \right| \end{array} \right\} \leq \int_A'' |f(P)| dT.$$

Poichè $-|f(P)| \leq f(P) \leq |f(P)|$, il teorema è conseguenza immediata del precedente e del teor. VI.

X. Per due qualsivogliano funzioni reali f_1 e f_2 limitate in A , si ha

$$\left. \begin{array}{l} \left| \int_A'' f_1(P) dT - \int_A'' f_2(P) dT \right| \\ \left| \int_A' f_1(P) dT - \int_A' f_2(P) dT \right| \end{array} \right\} \leq \int_A'' |f_1(P) - f_2(P)| dT.$$

Il teorema segue immediatamente dai teorr. VII e IX.

XI. Se l'insieme limitato A è misurabile, dette s' e s'' le somme

dei prodotti $e'(T_{hk}) R_{hk}$ e $e''(T_{hk}) R_{hk}$, estese, ciascuna, ai rettangoli R_{hk} costituiti totalmente di punti interni ad A , si avrà anche

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} s' = \int_A f'(P) dT, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} s'' = \int_A f''(P) dT.$$

XII. Se due funzioni reali $f_1(P)$ e $f_2(P)$, limitate in A , hanno valori eguali in tutti i punti di A , eccezion fatta soltanto per i punti di un insieme $C (< A)$ di estensione nulla, il minimo ed il massimo integrale della prima, estesi ad A , coincidono, rispettivamente, col minimo e col massimo integrale della seconda.

Si ha, invero, $A = (A - C) \dot{+} C$, mentre gli integrali di f_1 e di f_2 estesi a C sono nulli.

XIII. Se $f(P)$ è limitata e non negativa in A , presi ivi due insiemi qualsivogliano B e C , se $B < C$ è

$$\int_B f''(P) dT \leq \int_C f''(P) dT.$$

XIV. Se l'insieme A è dotato di punti interni e se in esso è sempre $f(P) > 0$, si ha allora

$$\int_A f''(P) dT > 0.$$

Ed invero, se il considerato integrale fosse nullo, per un qualsiasi insieme B contenuto in A , sarebbe pure sempre nullo il massimo integrale della f esteso a B . Sia B un dominio rettangolare contenuto in A , esso potrà essere decomposto in domini rettangolari parziali B_{hk} per modo che riesca:

$$\sum_{hk} e''(B_{hk}) B_{hk} < B, \quad \text{cioè} \quad \sum_{hk} [e''(B_{hk}) - 1] B_{hk} < 0,$$

e quindi fra i detti domini ne dovrà esistere almeno uno $B^{(1)}$ per cui è $e''(B^{(1)}) < 1$. Poichè il massimo integrale di f esteso a $B^{(1)}$ è nullo, si potrà decomporre questo dominio in domini rettangolari parziali $B_{hk}^{(1)}$ per modo che riesca

$$\sum_{hk} e''(B_{hk}^{(1)}) B_{hk}^{(1)} < \frac{B^{(1)}}{2} \quad \text{cioè} \quad \sum_{hk} \left[e''(B_{hk}^{(1)}) - \frac{1}{2} \right] B_{hk}^{(1)} < 0,$$

e quindi fra questi ultimi domini ne dovrà esistere almeno uno $B^{(2)}$

per cui è $e''(B^{(2)}) < 1:2$. Allo stesso modo si potrà trovare un dominio rettangolare $B^{(3)}$ contenuto in $B^{(2)}$ per cui è $e''(B^{(3)}) < 1:3, \dots$ e così via indefinitamente. Si viene così a costruire una successione illimitata di domini rettangolari $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(n)}, \dots$, ciascuno dei quali contiene il seguente e per i quali è $e''(B^{(n)}) < 1:n$. Ne segue che in un punto P comune (19, VII) a tutti i domini della successione si ha, contro l'ipotesi, $f(P) = 0$.

90. Il massimo e il minimo integrale come massimo e minimo limite di una variabile. — È assai interessante una nuova interpretazione che possono avere il massimo e il minimo integrale di una funzione reale e limitata $f(P)$ estesi ad un insieme limitato A , come massimo e minimo limite di una certa variabile ordinata σ . Consideriamo l'insieme delle operazioni, consistenti, ciascuna, nel decomporre, al solito modo, il rettangolo R , contenente A , in rettangoli parziali R_{hk} , nel prendere in ciascuno insieme $T_{hk} = A \cdot R_{hk}$ un arbitrario punto P_{hk} e nel fare la somma:

$$\sigma = \sum_{hk} f(P_{hk}) R_{hk}.$$

Orbene, se ordiniamo tali operazioni con lo stesso criterio adottato al n° 85 per stabilire il *lemma fondamentale*, si ha il teorema:

Per il minimo e il massimo limite della variabile somma σ si ha:

$$(1) \quad \lim'_{\delta \rightarrow 0} \sigma = \int_A f(P) dT = \lambda', \quad \lim''_{\delta \rightarrow 0} \sigma = \int_A f(P) dT = \lambda''.$$

Ed invero, comunque si assegni un numero positivo ε , è possibile trovarne un altro δ_ε tale che per tutte le decomposizioni di R per le quali è $\delta \leq \delta_\varepsilon$ si abbia

$$(2) \quad \lambda'' - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{hk} e''(T_{hk}) R_{hk} < \lambda'' + \varepsilon,$$

ne segue, per $\delta \leq \delta_\varepsilon$ e comunque si prenda P_{hk} in T_{hk} ,

$$\sum_{hk} f(P_{hk}) R_{hk} < \lambda'' + \varepsilon.$$

Detta R l'area di R , per ogni fissata decomposizione di R per la quale è $\delta \leq \delta_\varepsilon$ prendiamo, in ciascuno insieme T_{hk} , un punto P_{hk} tale che sia

$$e''(T_{hk}) - f(P_{hk}) < \frac{\varepsilon}{2R},$$

riesce allora

$$\sum_{hk} e''(\mathbf{T}_{hk}) R_{hk} - \sum_{hk} f(P_{hk}) R_{hk} < \frac{\varepsilon}{2},$$

e quindi, in virtù della prima delle (2),

$$\sum_{hk} f(P_{hk}) R_{hk} > \lambda'' - \varepsilon.$$

È così dimostrata la seconda delle (1), ed analogamente si procede per la prima.

Osservazioni. 1^a* Se $f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P)$ sono n funzioni reali e limitate nell'insieme \mathbf{A} , le variabili ordinate

$$\sigma_1 = \sum_{hk} f_1(P_{hk}) R_{hk}, \quad \sigma_2 = \sum_{hk} f_2(P_{hk}) R_{hk}, \quad \dots, \quad \sigma_n = \sum_{hk} f_n(P_{hk}) R_{hk},$$

sono in corrispondenza. Pertanto, i teorr. V, VI e VII del n° prec. sono contenuti nei teoremi dati al n° 9* (pag. 25), il teor. VIII è contenuto nel teor. II del n° 6 (pag. 18).

2^a) Se l'insieme \mathbf{A} è misurabile, detta s la somma dei prodotti $f(P_{hk}) R_{hk}$ estesa solamente ai rettangoli \mathbf{R}_{hk} costituiti, ciascuno, di punti interni ad \mathbf{A} , si avrà anche:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0}' s = \int_{\mathbf{A}}' f(P) dT, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0}'' s = \int_{\mathbf{A}}'' f(P) dT.$$

91. Funzioni integrabili. — Una funzione reale e limitata $f(P)$, definita in un insieme limitato \mathbf{A} , dicesi *integrabile su \mathbf{A}* , se coincidono il suo minimo ed il suo massimo integrale estesi ad \mathbf{A} . Ciascuno di essi si chiama allora l'*integrale della funzione $f(P)$ esteso ad \mathbf{A}* . Indicando con $\omega(\mathbf{T}_{hk}) = e''(\mathbf{T}_{hk}) - e'(\mathbf{T}_{hk})$ l'oscillazione della funzione $f(P)$ nell'insieme $\mathbf{T}_{hk} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_{hk}$, si ha evidentemente che:

I. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f(P)$ sia integrabile su \mathbf{A} è che risulti:*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{hk} \omega(\mathbf{T}_{hk}) R_{hk} = 0.$$

Poichè $\omega(\mathbf{T}) \geq 0$ e $\omega(\mathbf{T}') \leq \omega(\mathbf{T})$ se $\mathbf{T}' < \mathbf{T}$, ne segue:

II. *Se la funzione $f(P)$ è integrabile su \mathbf{A} essa è altresì integrabile sopra un qualunque insieme contenuto in \mathbf{A} .*

III. *Per qualunque funzione reale $f(P)$, limitata nell'insieme limitato \mathbf{A} , si ha (in forza del Lemma fondamentale)*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{hk} \omega(T_{hk}) R_{hk} = \lambda'' - \lambda', \quad \sum_{hk} \omega(T_{hk}) R_{hk} \geq \lambda'' - \lambda',$$

e pertanto: *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f(P)$ sia integrabile su A è che, comunque si assegni un numero positivo ε sia possibile, in corrispondenza, trovare una speciale decomposizione del rettangolo R , contenente A , in rettangoli parziali R_{hk} , per la quale si abbia*

$$\sum_{hk} \omega(T_{hk}) R_{hk} \leq \varepsilon.$$

Una funzione che possieda valore costante c per tutti i punti dell'insieme limitato A è sempre su di esso integrabile ed il suo integrale vale evidentemente $c \text{ est}A$. Esempi importanti di funzioni integrabili sono forniti dai tre teoremi seguenti:

IV. *Se A è chiuso e limitato una funzione $f(P)$ continua in A è su di esso integrabile.*

Detta R l'area di R , comunque si assegni un numero positivo ε , è possibile (32, VI) determinarne un altro δ_ε tale che, per ogni insieme $T < A$, di diametro inferiore a δ_ε , l'oscillazione $\omega(T)$ della f sia minore di ε/R . Quindi, per ogni decomposizione di R in rettangoli parziali di massima diagonale δ inferiore a δ_ε , si avrà

$$\sum_{hk} \omega(T_{hk}) R_{hk} < \frac{\varepsilon}{R} \sum_{hk} R_{hk} \leq \varepsilon.$$

V. *Se A è chiuso e limitato, ogni funzione $f(P)$, definita in A , ed ivi limitata, continua in ogni punto di A , eccezion fatta per i punti di un insieme $C (< A)$ di estensione nulla, è integrabile su A .*

Fissato un numero naturale n maggiore di 2, suddividiamo entrambi i lati di un dominio rettangolare $R[(a', b'); (a'', b'')] al quale l'insieme A sia interno, in n^p parti uguali ($p = 1, 2, 3, \dots$), indicando con $R_{hk}^{(p)}$ i rettangoli secondo i quali viene, corrispondentemente, decomposto il rettangolo R , con $\omega_{hk}^{(p)}$ l'oscillazione di $f(P)$ in $T_{hk}^{(p)} = A$. $R_{hk}^{(p)}$, con M l'estremo superiore in A del modulo di $f(P)$, con $R^{(p)} = (a'' - a')(b'' - b')$: n^{2p} il comune valore delle aree dei rettangoli eguali $R_{hk}^{(p)}$. Sarà sempre $\omega_{hk}^{(p)} \leq 2M$. Poniamo.$

$$\Omega^{(p)} = \sum_{hk} \omega_{hk}^{(p)} R^{(p)}.$$

Per dimostrare il teorema enunciato basta far vedere che, comunque si assegni un numero positivo ε , è possibile determinare un tale valore di p da riuscire $\Omega^{(p)} < \varepsilon$. Diciamo p_ε quel tale numero naturale che la somma delle aree $R^{(p_\varepsilon)}$ dei rettangoli $R_{hk}^{(p_\varepsilon)}$ aventi ciascuno, almeno, un punto in comune con C sia minore di $\varepsilon:4M$ e diciamo B il dominio formato dalla somma di questi rettangoli. Poichè tutti i punti di A e quindi C sono interni a B , nella frontiera di B non sarà contenuto alcun punto di C , pertanto nell'insieme chiuso $A_1 = A - (B - FB)$ la funzione $f(P)$ è continua. Per ogni valore di $p > p_\varepsilon$, diciamo $\Omega_1^{(p)}$ la parte di $\Omega^{(p)}$ proveniente dai rettangoli di decomposizione che hanno almeno un punto in comune con A_1 e diciamo $\Omega_2^{(p)}$ la parte rimanente. I rettangoli di decomposizione dai quali proviene quest'ultima sono tutti contenuti in B e pertanto risceirà

$$\Omega_2^{(p)} \leq 2M \text{area } B < \varepsilon:2.$$

D'altra parte, poichè la $f(P)$ è continua nell'insieme chiuso e limitato A_1 , è possibile determinare un numero naturale $p' > p_\varepsilon$ tale che risulti $\Omega_1^{(p')} < \varepsilon:2$, per $p > p'$. Per $p > p'$ si ha dunque $\Omega^{(p)} = \Omega_1^{(p)} + \Omega_2^{(p)} < \varepsilon$.

VI. Sia A un insieme chiuso e limitato dell'asse x , se la funzione $f(x)$, dell'unica variabile x , definita in A , è ivi monotona, essa è su A integrabile.

Siano a' e a'' i punti estremi, inferiore e superiore, di A e dividiamo l'intervallo (a', a'') , nel modo più arbitrario, in intervalli parziali, per i quali sia δ la massima ampiezza. Diciamo I_1, I_2, \dots, I_n quelli fra questi intervalli che hanno, almeno, un punto in comune con A , disposti nell'ordine secondo il quale si incontrano percorrendo l'intervallo (a', a'') nel verso positivo e diciamo δ_k l'ampiezza di I_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Poniamo $T_k = A \cdot I_k$ e siano x'_k e x''_k i punti estremi di T_k . Se, per fissare le idee, supponiamo la funzione $f(x)$ non decrescente in A , riesce $\omega(T_k) = f(x''_k) - f(x'_k)$, e quindi

$$\sum_{k=1}^n \omega(T_k) \delta_k = \sum_{k=1}^n [f(x''_k) - f(x'_k)] \delta_k \leq \delta \sum_{k=1}^n [f(x''_k) - f(x'_k)].$$

Ma è

$$\sum_{k=1}^n [f(x''_k) - f(x'_k)] \leq \sum_{k=1}^n [f(x''_k) - f(x'_k)] + \sum_{k=1}^{n-1} [f(x'_{k+1}) - f(x'_k)] = f(x''_n) - f(x'_1) \leq f(a'') - f(a') = \omega(A),$$

e pertanto, non appena è $\delta \leq \varepsilon : \omega(A)$, risulta $\sum \omega(T_k) \delta_k \leq \varepsilon$.

È importante osservare anche la proposizione:

VII. *La variabile ordinata σ , definita al n° prec., ha un limite determinato e finito se la funzione $f(P)$ è integrabile su A ; si ha cioè, per ogni tale funzione,*

$$(1) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{hk} f(P) R_{hk} = \int_A f(P) dT.$$

Tale relazione — con gli opportuni perfezionamenti e accorgimenti che saranno ottenuti, caso per caso, in seguito — fornisce un vero e proprio metodo di calcolo (*addirittura numerico nelle pratiche applicazioni*) dell'integrale, frequentemente adottato. In proposito, è bene osservare che: **a)** se l'insieme A è misurabile ci si può limitare ad estendere la somma che compare nel primo membro della (1) ai rettangoli R_{hk} totalmente costituiti di punti interni ad A ; **b)** Il punto P_{hk} nel quale occorre, per l'insieme T_{hk} , calcolare il valore della funzione integranda è affatto in nostro arbitrio e può perciò, secondo i casi, essere scelto in modo da semplificare quanto più è possibile i calcoli.

Un utile teorema generale sulle funzioni integrabili è il seguente:

VIII. *La funzione reale $F(y_1, y_2, \dots, y_q)$ delle q variabili y_1, y_2, \dots, y_q sia uniformemente lipschitziana nell'insieme B dello spazio $S_{(q)}$ e le funzioni reali $f_1(P), f_2(P), \dots, f_q(P)$ limitate, nell'insieme limitato A , siano su questo integrabili, ed inoltre tali che, al variare del punto P in A , il punto $[f_1(P), f_2(P), \dots, f_q(P)]$ di $S_{(q)}$ non esca mai dall'insieme B , sarà allora su A altresì integrabile la funzione $f(P) = F[f_1(P), f_2(P), \dots, f_q(P)]$.*

Ed invero, se per un certo numero positivo L e per due qualsivogliano punti $(y'_1, y'_2, \dots, y'_q)$ e $(y''_1, y''_2, \dots, y''_q)$ di B si ha sempre:

$$F(y'_1, y'_2, \dots, y'_q) - F(y''_1, y''_2, \dots, y''_q) \leq L \sum_i^{1, q} |y''_i - y'_i|,$$

detta $\omega_i(T)$ l'oscillazione della funzione $f_i(P)$ ($i = 1, 2, \dots, q$) in un insieme T di A , per due qualsivogliano punti P' e P'' di T riescirà:

$$|f(P') - f(P'')| \leq L \sum_i^{1, q} \omega_i(T)$$

ciò prova intanto che la funzione $f(P)$ è limitata in A e che per la sua oscillazione $\omega(T)$ nell'insieme T si ha:

$$(2) \quad \omega(T) \leq L \sum_i^{1, q} \omega_i(T).$$

Ne segue poi immediatamente la integrabilità su A della funzione $f(P)$ poichè dalla (2) risulta che per ogni decomposizione del rettangolo R in rettangoli parziali R_{hk} si ha

$$\sum_{hk} \omega(T_{hk}) R_{hk} \leq L \sum_i^{1, q} \sum_{hk} \omega_i(T_{hk}) R_{hk}.$$

Dal teorema ora dimostrato segue, in particolare, che se $f(P)$ è integrabile su A è altresì integrabile $|f(P)|$; se, di più, $|f(P)|$ possiede, in A , un estremo inferiore positivo, è anche integrabile $1:f(P)$. Segue pure che se $f_1(P), f_2(P), \dots, f_q(P)$ sono integrabili su A , lo è anche una qualsiasi loro combinazione a coefficienti costanti e lo è del pari il loro prodotto. La integrabilità della somma di due o più funzioni integrabili o della differenza di due funzioni integrabili segue già dai teorr. V e VII del n° 89. Dai teorr. V e VII dello stesso numero si deduce poi il seguente:

IX. Teorema della distribuitività dell'integrale. *Se le funzioni reali e limitate $f_1(P), f_2(P), \dots, f_q(P)$, definite nell'insieme limitato A , sono su questo integrabili, e se c_1, c_2, \dots, c_q sono costanti, è altresì su A integrabile la combinazione $\sum c_i f_i(P)$ e si ha:*

$$\int_A \sum_i^{1, q} c_i f_i(P) dT = \sum_i^{1, q} c_i \int_A f_i(P) dT.$$

Per le funzioni integrabili, il teorema della media (89, III) può essere enunciato sotto un'utile forma più generale, al modo seguente:

X. Teorema della media. *Se le due funzioni reali e limitate $f(P)$ e $\varphi(P)$, definite nell'insieme limitato A , sono su questo integra-*

bili e se la seconda non è mai negativa, detti e' ed e'' gli estremi inferiore e superiore della f , si ha :

$$e'(A) \int_A \varphi(P) dT \leq \int_A f(P) \varphi(P) dT \leq e''(A) \int_A \varphi(P) dT,$$

cioè :

$$\int_A f(P) \varphi(P) dT = \mu \int_A \varphi(P) dT,$$

ove μ è un numero dell'intervallo $[e'(A), e''(A)]$. In particolare, se A è un continuo e se la funzione $f(P)$ vi è continua, esistono in A due punti Q e Q_φ per i quali riesce :

$$\int_A f(P) dT = f(Q) \text{est} A, \quad \int_A f(P) \varphi(P) dT = f(Q_\varphi) \int_A \varphi(P) dT.$$

Ed invero, se P_{hk} è un qualsiasi punto di $T_{hk} = A \cdot R_{hk}$ si ha:

$$e'(A) \varphi(P_{hk}) \leq f(P_{hk}) \varphi(P_{hk}) \leq e''(A) \varphi(P_{hk}),$$

e quindi

$$e'(A) \sum_{hk} \varphi(P_{hk}) R_{hk} \leq \sum_{hk} f(P_{hk}) \varphi(P_{hk}) R_{hk} \leq e''(A) \sum_{hk} \varphi(P_{hk}) R_{hk}.$$

Osservazioni 1ª)* Torniamo a considerare la variabile ordinata

$$(3) \quad \sigma = \sum_{hk} f(P_{hk}) R_{hk},$$

definita al n° prec., per la più generale funzione $f(P)$ limitata nell'insieme limitato A , la quale variabile ha per minimo e massimo limite il minimo e il massimo integrale (λ' e λ'') della $f(P)$ estesi all'insieme A . Della variabile ordinata σ ne possiamo costruire infinite altre ad essa subordinate semplicemente convenendo di associare, con una certa legge da fissare caso per caso, ad ogni insieme T_{hk} un ben determinato punto P_{hk} e di prendere tali speciali punti P_{hk} nel calcolare la somma (3). Indicando con L questa legge e con σ_L la corrispondente variabile subordinata alla σ , riuscirà (6, I)

$$\lambda' \leq \lim'_{\delta \rightarrow 0} \sigma_L \leq \lim''_{\delta \rightarrow 0} \sigma_L \leq \lambda''.$$

Se la f è integrabile su A si avrà allora $\lambda' = \lambda''$ e pertanto, qualunque sia la legge fissata,

$$\lim'_{\delta \rightarrow 0} \sigma_L = \lim''_{\delta \rightarrow 0} \sigma_L = \int_A f(P) dT.$$

La f non sia integrabile su A , sarà allora $\lambda' < \lambda''$. Ora domandiamo, è mai possibile, in tal caso, trovare una tale legge L che la corrispondente variabile σ_L , subordinata alla σ , abbia un limite determinato? Alla posta questione, se, per esempio, si suppone A misurabile, è stato risposto affermativamente da **Lebesgue**, in ipotesi insperatamente larghe per la funzione $f(P)$. Si sono così ottenute le così dette funzioni **integrabili secondo Lebesgue** fra le quali, *supposto, per esempio, A misurabile*, trovansi le funzioni integrabili da noi qui definite, le quali soglionsi oggi chiamare **integrabili secondo Riemann**. Il limite determinato λ della variabile σ_L costruita secondo la legge data da **Lebesgue**, chiamasi l'**integrale di Lebesgue**. L'introduzione di tale integrale nell'*Analisi*, avvenuta da un ventennio appena, ha consentito le più belle scoperte costituenti un sostanziale progresso nei più importanti rami dell'*Analisi*, consigliamo perciò lo studioso di matematica pura di non tardare ad impadronirsi dei procedimenti di integrazione secondo **Lebesgue**.

2a) Osserviamo anche il seguente teorema, che è contenuto nei teorr. V e VII del n° 89. *Se le funzioni reali $f_1(P)$ e $f_2(P)$ sono limitate nell'insieme limitato A e la seconda è su questo integrabile si ha:*

$$\int_A [f_1(P) \pm f_2(P)] dT = \int_A f_1(P) dT \pm \int_A f_2(P) dT,$$

$$\int_A [f_1(P) \pm f_2(P)] dT = \int_A f_1(P) dT \pm \int_A f_2(P) dT.$$

3a) È opportunissima, per future applicazioni, un'osservazione che vogliamo ora fare *sul calcolo dell'integrale di una funzione continua composta per mezzo di altre funzioni pur esse continue, esteso ad un insieme limitato A supposto chiuso*. In A siano definite le q funzioni continue $f_1(P), \dots, f_q(P)$ tali che il punto $[f_1(P), \dots, f_q(P)]$ sia sempre contenuto in un insieme chiuso e limitato B dello spazio $S_{(q)}$, ove è definita una funzione continua $F(y_1, \dots, y_q)$ delle q coordinate y_1, \dots, y_q del punto di $S_{(q)}$. La funzione $f(P) = F[f_1(P), \dots, f_q(P)]$ riesce definita in A ed ivi (34, I) continua e quindi integrabile. Or bene, vogliamo dimostrare che:

Per il calcolo dell'integrale esteso ad A della funzione continua $f(P)$ si può procedere al modo seguente: In ogni insieme $T_{hk} = A \cdot R_{hk}$, nel modo più arbitrario, si prendono q punti P'_{hk}, P''_{hk}, \dots , si calcola la quantità $F[f_1(P'_{hk}), f_2(P'_{hk}), \dots]$ e quindi la somma:

$$\sigma^* = \sum_{hk} F[f_1(P'_{hk}), f_2(P'_{hk}), \dots] R_{hk},$$

si passa infine al limite per δ infinitesimo. Si ha che tale limite è ben determinato ed è l'integrale della funzione $f(P)$ esteso all'insieme A .

Posto, come sempre, $\sigma = \sum f(P_{hk}) R_{hk}$, basta dimostrare che $\sigma^* - \sigma$ è infinitesimo per δ infinitesimo. Comunque sia assegnato un numero positivo ε se ne può determinare un altro ρ tale che se $|y'_i - y''_i| \leq \rho$ ($i = 1, 2, \dots, q$) di conseguenza si ha $|F(y'_1, y'_2, \dots) - F(y''_1, y''_2, \dots)| \leq \varepsilon \cdot R$. Comunque risulti il numero positivo ρ è altresì possibile determinare un numero positivo δ_ε tale che se la massima diagonale δ dei rettangoli R_{hk} di decomposizione del rettangolo R , contenente A , non è superiore a δ_ε riesca $|f_i(P^{(i)}_{hk}) - f_i(P_{hk})| \leq \rho$ ($i = 1, 2, \dots, q$). Si ha dunque, per $\delta \leq \delta_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} |\sigma^* - \sigma| &\leq \sum_{hk} |F[f_1(P'_{hk}), f_2(P'_{hk}), \dots] - F[f_1(P_{hk}), f_2(P_{hk}), \dots]| R_{hk} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{R} \sum_{hk} R_{hk} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Se poi l'insieme A è misurabile, nel calcolare le somme σ^* ci si può, al solito, anche limitare a considerare soltanto i rettangoli R_{hk} totalmente costituiti di punti interni ad A .

Esercizi. 1°) Siano α un numero reale qualsiasi, a e b ($b > a$) due numeri positivi, la funzione x^α è continua nell'intervallo (a, b) , se ne calcoli l'integrale su questo intervallo.

Si ponga $q = b : a$. Mediante i punti $x_i = aq^{i:n}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) si divida l'intervallo (a, b) in n intervalli parziali (x_{i-1}, x_i) ($i = 1, 2, \dots, n$). Si ha $x_i - x_{i-1} = aq^{(i-1):n}(q^{1:n} - 1)$ e quindi, per n divergente, $\lim(x_i - x_{i-1}) = 0$. Ne segue

$$\begin{aligned} (4) \quad \int_{(a, b)} x^\alpha dx &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) x_{i-1}^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\alpha+1} (\sqrt[n]{q} - 1) \sum_{i=1}^n (\sqrt[n]{q^{\alpha+1}})^{i-1}. \end{aligned}$$

Se $\alpha \neq -1$, si ha

$$(\sqrt[n]{q} - 1) \sum_{i=1}^n (\sqrt[n]{q^{\alpha+1}})^{i-1} = (q^{\alpha+1} - 1) \frac{\sqrt[n]{q} - 1}{\sqrt[n]{q^{\alpha+1}} - 1},$$

e quindi (42, II) dalla (4) si ricava

$$\int_{(a, b)} x^{\alpha} dx = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} (q^{\alpha+1} - 1) = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Se $\alpha = -1$, si ha

$$(\sqrt[n]{q} - 1) \sum_{i=1}^n (\sqrt[n]{q^{\alpha+1}})^{i-1} = n(\sqrt[n]{q} - 1),$$

e quindi (42, II) della (4) si ricava

$$\int_{(a, b)} \frac{dx}{x} = \log q = \log \frac{b}{a}.$$

2°) Sia ora α una qualsiasi quantità reale di modulo diverso da uno, la funzione della x :

$$f(x) = \log(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)$$

è continua nell'intervallo $(0, \pi)$, se ne calcoli l'integrale su questo intervallo.

Mediante i punti $x_i = i\pi : n$ ($i = 0, 1, \dots, n$) si divida l'intervallo $(0, \pi)$ in n intervalli eguali. Si avrà:

$$\int_{(0, \pi)} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

mentre è

$$(5) \quad \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) - \log(1 - \alpha^2) =$$

$$= \log \left[\left(1 - 2\alpha \cos \frac{\pi}{n} + \alpha^2\right) \left(1 - 2\alpha \cos \frac{2\pi}{n} + \alpha^2\right) \dots \left(1 - 2\alpha \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + \alpha^2\right) \right].$$

Osserviamo ora che l'equazione binomia $\alpha^{2n} - 1 = 0$ ha le radici 1 e -1 e le altre complesse

$$\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}, \quad \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

e che

$$\left[\alpha - \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} \right) \right] \left[\alpha - \left(\cos \frac{k\pi}{n} - i \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} \right) \right] = 1 - 2\alpha \cos \frac{k\pi}{n} + \alpha^2.$$

Ne segue che l'argomento del logaritmo che si trova al secondo membro della (5) non è che il quoziente $(\alpha^{2n} - 1) : (\alpha^2 - 1)$ e pertanto si ha

$$\int_{(0, \pi)} \log(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left[\log(1 - \alpha^2) + \log \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} \right],$$

e quindi

$$\int_{(0, \pi)} \log(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx \begin{cases} = 0 & , \text{ se } \alpha^2 < 1, \\ = \pi \log \alpha^2 & , \text{ se } \alpha^2 > 1. \end{cases}$$

92. Riduzione degli integrali. Formole di quadratura e

di cubatura. — Di grandissima importanza teorica e pratica è la risoluzione della questione seguente: Quando mai il calcolo di un integrale a più dimensioni, può ricondursi al successivo calcolo di integrali di dimensione minore? I teoremi che assegnano le condizioni sotto le quali la posta questione possiede soluzioni diconsi *teoremi di riduzione*. Vogliamo ora passare a stabilire, fra questi teoremi, quelli che ci sembrano di maggiore interesse. Per semplificare l'esposizione conviene premettere alcuni notevoli lemmi.

Lemma primo. Sia A un insieme limitato e misurabile di $S_{(r)}$ contenuto in un dominio rettangolare R e sia $f(P)$ una funzione definita in A ed ivi limitata. Definita in R la funzione $F(P)$ al modo seguente

$$(1) \quad F(P) \begin{cases} = f(P) & \text{se } P \text{ è in } A, \\ = 0 & \text{se } P \text{ è in } R - A, \end{cases}$$

si ha

$$\int_R F(P) dT = \int_A f(P) dT, \quad \int_R F(P) dT = \int_A f(P) dT.$$

Ed inverso, riesce $R = A + (R - A)$ e quindi

$$\int_R F(P) dT = \int_A f(P) dT + \int_{R-A} F(P) dT = \int_A f(P) dT, \dots$$

Lemma secondo. *Se, conservando le notazioni precedenti, si suppone l'insieme limitato A affatto arbitrario e ivi sempre $f(P) \geq 0$, si ha*

$$\int_{\bar{R}} F(P) dT \leq \int_A f(P) dT, \quad \int_{\bar{R}} F(P) dT = \int_A f(P) dT.$$

Decomposto, al modo solito, il dominio rettangolare R in domini rettangolari parziali R_{hk} diciamo E'_{hk} , E''_{hk} gli estremi inferiore e superiore di $F(P)$ in quei domini. Poichè $E'_{hk} = E''_{hk} = 0$ per quelli fra questi domini che non hanno alcun punto comune con A , risulta

$$\int_A f(P) dT = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{hk} e'(T_{hk}) R_{hk}, \quad \int_A f(P) dT = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{hk} e''(T_{hk}) R_{hk},$$

$$\int_{\bar{R}} F(P) dT = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{hk} E'_{hk} R_{hk}, \quad \int_{\bar{R}} F(P) dT = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{hk} E''_{hk} R_{hk},$$

ove le somme sono sempre soltanto estese ai domini rettangolari R_{hk} che hanno, almeno, un punto in comune con A . Ma, evidentemente, si ha:

$$E'_{hk} \leq e'(T_{hk}), \quad E''_{hk} = e''(T_{hk}).$$

Andiamo ora a stabilire un terzo lemma fondamentale. Supporremo per fissare le idee e per considerare il caso particolare più istruttivo $r=3$. Diciamo (a', b', c') e (a'', b'', c'') il punto estremo inferiore e il punto estremo superiore di un dominio rettangolare P (parallelepipedo e lati paralleli agli assi coordinati) contenente A , A_z l'insieme dei punti dell'asse z , contenuti nell'intervallo (c', c'') , formato dalle proiezioni ortogonali dei punti di A sul detto asse, A_{xy} l'insieme dei punti del piano (x, y) , formato dalle proiezioni ortogonali dei punti di A sul detto piano, R il dominio rettangolare, contenente A_{xy} , proiezione ortogonale di P sullo stesso piano (x, y) . Diciamo poi $S(z)$ la sezione dell'insieme A con un piano normale all'asse z e $S(x, y)$ la sezione dello stesso insieme con una retta normale al piano (x, y) . $S(z)$ è un insieme sempre contenuto nel dominio rettangolare R e $S(x, y)$ nell'intervallo (c', c'') . Per ogni punto z dell'insieme A_z riescono ben definite le due funzioni della z :

$$(2) \quad \int_{S(z)} f(x, y, z) dx dy, \quad \int_{S(z)} f''(x, y, z) dx dy,$$

e per ogni punto (x, y) di A_{xy} le due funzioni della x e della y .

$$(3) \quad \int_{S(x,y)} f(x, y, z) dz, \quad \int_{S(x,y)}'' f(x, y, z) dz.$$

Le funzioni (2) sono certamente limitate in A_z e così pure le funzioni (3) sono limitate in A_{xy} . Si ha (89, II e VIII)

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{A_z} dz \int_{S(z)} f(xyz) dx dy &\leq \int_{A_z} dz \int_{S(z)}' f(xyz) dx dy \leq \int_{A_z} dz \int_{S(z)}'' f(xyz) dx dy, \\ \int_{A_z} dz \int_{S(z)} f(xyz) dx dy &\leq \int_{A_z}'' dz \int_{S(z)} f(xyz) dx dy \leq \int_{A_z}'' dz \int_{S(z)}' f(xyz) dx dy, \end{aligned} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{A_{xy}} dx dy \int_{S(xy)} f(xyz) dz &\leq \int_{A_{xy}} dx dy \int_{S(xy)}' f(xyz) dz \leq \int_{A_{xy}} dx dy \int_{S(xy)}'' f(xyz) dz, \\ \int_{A_{xy}} dx dy \int_{S(xy)} f(xyz) dz &\leq \int_{A_{xy}}'' dx dy \int_{S(xy)} f(xyz) dz \leq \int_{A_{xy}}'' dx dy \int_{S(xy)}' f(xyz) dz. \end{aligned} \right.$$

Possiamo ora enunciare la seguente proposizione fondamentale:

Lemma terzo. *Se l'insieme limitato A è misurabile e la funzione limitata $f(P)$ è integrabile su A ed ivi mai negativa, le due funzioni (2) della z sono integrabili su A_z e le due funzioni (3) della x e della y su A_{xy} e si ha:*

$$(6) \quad \int_A f(xyz) dx dy dz \quad \left\{ \begin{aligned} &= \int_{A_z} dz \int_{S(z)} f(xyz) dx dy = \int_{A_z} dz \int_{S(z)}'' f(xyz) dx dy, \\ &= \int_{A_{xy}} dx dy \int_{S(xy)} f(xyz) dz = \int_{A_{xy}} dx dy \int_{S(xy)}' f(xyz) dz. \end{aligned} \right.$$

Per dimostrare la proposizione enunciata introduciamo la funzione $F(x, y, z)$, coincidente con $f(x, y, z)$ in A , ed identicamente nulla in $R - A$. Si ha (*lemma primo*)

$$(7) \quad \int_A f(xyz) dx dy dz = \int_P F(xyz) dx dy dz.$$

Consideriamo i due integrali

$$(8) \quad \int_{(c', c'')} dz \int_R F(xyz) dx dy \leq \int_{(c', c'')}'' dz \int_R F(xyz) dx dy,$$

ed anche i due altri

$$(9) \quad \int_{\mathbf{R}} dx dy \int_{(c', c'')} F(xyz) dz \leq \int_{\mathbf{R}} dx dy \int_{(c', c'')} F(xyz) dz.$$

Mediante i punti $x_0 = a', x_1, \dots, x_m, x_{m+1} = a''; y_0 = b', y_1, \dots, y_n, y_{n+1} = b''; z_0 = c', z_1, \dots, z_p, z_{p+1} = c''$, dividiamo i lati di \mathbf{P} , nel modo piú arbitrario, rispettivamente in $m+1$, in $n+1$, in $p+1$ parti. Diciamo \mathbf{P}_{hkl} , il dominio rettangolare, dello spazio, di punti estremi (x_h, y_k, z_l) e $(x_{h+1}, y_{k+1}, z_{l+1})$, \mathbf{R}_{hk} il dominio rettangolare del piano (x, y) di punti estremi (x_h, y_k) e (x_{h+1}, y_{k+1}) . Si ha (89, IV)

$$\int_{\mathbf{R}} F(xyz) dx dy = \sum_k^{0, n} \sum_h^{0, m} \int_{\mathbf{R}_{hk}} F(xyz) dx dy,$$

e quindi (89, V e III)

$$(10) \quad \int_{(c', c'')} dz \int_{\mathbf{R}} F(xyz) dx dy \geq \sum_k^{0, n} \sum_h^{0, m} \int_{(c', c'')} dz \int_{\mathbf{R}_{hk}} F(xyz) dx dy = \\ = \sum_l^{0, p} \sum_k^{0, n} \sum_h^{0, m} \int_{(z_l, z_{l+1})} dz \int_{\mathbf{R}_{hk}} F(xyz) dx dy \geq \sum_{hkl} E'_{hkl} P_{hkl};$$

si ha pure

$$\int_{(c', c'')} F(xyz) dz = \sum_l^{0, p} \int_{(z_l, z_{l+1})} F(xyz) dz,$$

e quindi

$$(11) \quad \int_{\mathbf{R}} dx dy \int_{(c', c'')} F(xyz) dz \geq \sum_l^{0, p} \int_{\mathbf{R}} dx dy \int_{(c', c'')} F(xyz) dz = \\ = \sum_l^{0, p} \sum_k^{0, n} \sum_h^{0, m} \int_{\mathbf{R}_{hk}} dx dy \int_{(z_l, z_{l+1})} F(xyz) dz \geq \sum_{hkl} E'_{hkl} P_{hkl}.$$

Allo stesso modo si trova che:

$$(12) \quad \sum_{hkl} E''_{hkl} P_{hkl} \left\{ \begin{array}{l} \geq \int_{(c', c'')} dz \int_{\mathbf{R}} F(xyz) dx dy, \\ \geq \int_{\mathbf{R}} dx dy \int_{(c', c'')} F(xyz) dz. \end{array} \right.$$

Dalle (10), (11) e (12), passando al limite facendo tendere a zero la massima diagonale δ dei domini rettangolari P_{hkl} , si trova

$$(13) \int_P F(xyz) \, dx \, dy \, dz \begin{cases} = \int_{(c', c'')} dz \int_R F(xyz) \, dx \, dy = \int_{(c', c'')} dz \int_R F(xyz) \, dx \, dy, \\ = \int_R dx \, dy \int_{(c', c'')} F(xyz) \, dz = \int_R dx \, dy \int_{(c', c'')} F(xyz) \, dz \end{cases}$$

Ora, se z è fuori di A_z e se (x, y) è fuori di A_{xy} risulta

$$\int_R F(xyz) \, dx \, dy = \int_R F(xyz) \, dx \, dy = 0,$$

$$\int_{(c', c'')} F(xyz) \, dz = \int_{(c', c'')} F(xyz) \, dz = 0,$$

e pertanto, in forza del lemma secondo,

$$\int_{(c', c'')} dz \int_R F(xyz) \, dx \, dy \leq \int_{A_z} dz \int_R F(xyz) \, dx \, dy \leq \int_{A_z} dz \int_{S(z)} f(xyz) \, dx \, dy.$$

$$\int_{(c', c'')} dz \int_R F(xyz) \, dx \, dy = \int_{A_z} dz \int_{S(z)} f(xyz) \, dx \, dy.$$

$$\int_R dx \, dy \int_{(c', c'')} F(xyz) \, dz \leq \int_{A_{xy}} dx \, dy \int_{(c', c'')} F(xyz) \, dz \leq \int_{A_{xy}} dx \, dy \int_{S(xy)} f(xyz) \, dz,$$

$$\int_R dx \, dy \int_{(c', c'')} F(xyz) \, dz = \int_{A_{xy}} dx \, dy \int_{S(xy)} f(xyz) \, dz.$$

Ne segue, in forza delle (13), l'eguaglianza degli integrali estremi, tanto nelle (4) quanto nelle (5) e quindi l'integrabilità delle funzioni (2) su A_z e delle funzioni (3) su A_{xy} ed infine, per la (7), le eguaglianze (6) che volevansi dimostrare. Se ne deduce, per $f(P) \equiv 1$ in A , l'importante teorema:

I. Se l'insieme limitato A di $S_{(3)}$, è misurabile, l'estensione della sua sezione $S(z)$ è integrabile su A_z e quella della sua sezione $S(x, y)$ è integrabile su A_{xy} e si ha:

$$\text{vol } \mathbf{A} = \int_{\mathbf{A}_z} \text{est } \mathbf{S}(z) dz = \int_{\mathbf{A}_{xy}} \text{est } \mathbf{S}(x, y) dx dy.$$

Da quanto precede subito si deduce il *teorema di riduzione*:

II. Se l'insieme limitato \mathbf{A} di $\mathbf{S}(z)$ è misurabile e la funzione reale $f(P)$ è limitata e integrabile su \mathbf{A} , le due funzioni (2) della z sono integrabili su \mathbf{A}_z e le due funzioni (3) della x e della y sono integrabili su \mathbf{A}_{xy} e sussistono le (6).

Detto $l = e'(\mathbf{A})$ l'estremo inferiore di f in \mathbf{A} , poniamo $\varphi(x, y, z) = f(x, y, z) - l$; sarà sempre, in \mathbf{A} , $\varphi(x, y, z) \geq 0$ e $\varphi(x, y, z)$ integrabile su \mathbf{A} . Si ha

$$\int_{\mathbf{A}} f(xyz) dx dy dz = \int_{\mathbf{A}} \varphi(xyz) dx dy dz + l \cdot \text{vol } \mathbf{A}.$$

In virtù del lemma terzo la funzione di z :

$$\int_{\mathbf{S}(z)} \varphi(xyz) dx dy,$$

è integrabile su \mathbf{A}_z , ma è (91, Oss. 2^a)

$$\int_{\mathbf{S}(z)} f(xyz) dx dy = \int_{\mathbf{S}(z)} \varphi(xyz) dx dy + l \cdot \text{est } \mathbf{S}(z),$$

e pertanto (teor. I) il minimo integrale di $f(x, y, z)$ esteso a $\mathbf{S}(z)$ è pur esso funzione di z integrabile su \mathbf{A}_z e riesce:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{A}_z} \int_{\mathbf{S}(z)} f(xyz) dx dy &= \int_{\mathbf{A}_z} \int_{\mathbf{S}(z)} \varphi(xyz) dx dy + l \cdot \text{vol } \mathbf{A} = \\ &= \int_{\mathbf{A}} \varphi(xyz) dx dy dz + l \cdot \text{vol } \mathbf{A} = \int_{\mathbf{A}} f(xyz) dx dy dz. \end{aligned}$$

Ecc.

Dalle (6) si deduce

$$\int_{\mathbf{A}_z} \left(\int_{\mathbf{S}(z)} f(xyz) dx dy - \int_{\mathbf{S}(z)} f(xyz) dx dy \right) dz = 0,$$

$$\int \left(\int_{A_{xy} S(xy)}'' f(xyz) dz - \int_{S(xy)}'' f(xyz) dz \right) dx dy = 0,$$

e pertanto (89, XIV) sussiste la proposizione :

III. Se la funzione limitata $f(x, y, z)$ è integrabile sull'insieme limitato e misurabile A , l'insieme dei punti z di A_z per ciascuno dei quali la f è funzione di x e di y **non** integrabile su $S(z)$ è privo di punti interni e così pure l'insieme dei punti (x, y) di A_{xy} per ciascuna dei quali la f è funzione di z **non** integrabile su $S(x, y)$ è privo di punti interni.

Il teorema II qui ottenuto consente di ricondurre il calcolo dell'integrale a tre dimensioni, di una funzione integrabile, esteso ad un insieme limitato e misurabile, al successivo calcolo di due integrali ad una o a due dimensioni, in un qualsiasi ordine.

Se, considerando ad esempio le prime delle (6), per ogni fissato valore z_0 di z in A_z , supponiamo misurabile la sezione $S(z_0)$ di A e integrabile su $S(z_0)$ la funzione $f(x, y, z_0)$ delle due variabili x e y , indicando con $S_{xz}(z)$ la proiezione ortogonale di $S(z)$ sul piano (x, z) , si ha :

$$\int_{S(z)} f(xyz) dx dy = \int_{S_{xz}(z)} dx \int_{S(xz)} f(xyz) dy = \int_{S_{xz}(z)} dx \int_{S(xz)}'' f(xyz) dy,$$

e quindi

$$(14) \int_A f(xyz) dx dy dz = \int_{A_z} dz \int_{S_{xz}(z)} dx \int_{S(xz)}'' f(xyz) dy = \int_{A_z} dz \int_{S_{xz}(z)} dx \int_{S(xz)}'' f(xyz) dy;$$

si riconduce così, nelle ipotesi fatte, il calcolo dell'integrale a tre dimensioni della funzione $f(x, y, z)$ esteso ad A al successivo calcolo di tre integrali ad una dimensione.

In particolare: Se la funzione $f(x, y, z)$, integrabile sull'insieme misurabile A , è altresì integrabile su ogni sezione di A si avrà

$$(15) \int_A f(xyz) dx dy dz \left\{ \begin{array}{l} = \int_{A_z} dz \int_{S(z)} f(xyz) dx dy = \int_{A_z} dx \int_{S(x)} f(xyz) dy dz = \dots, \\ = \int_{A_{xy}} dx dy \int_{S(xy)} f(xyz) dz = \int_{A_{yz}} dy dz \int_{S(yz)} f(xyz) dx = \dots. \end{array} \right.$$

Queste formole sussistono sempre (in particolare) se l'insieme misurabile e limitato A è chiuso e se la funzione $f(x, y, z)$ è continua in A .

Se poi inoltre, riescono misurabili le sezioni piane di A , insieme alle formole (15) sussistono le (14), private di ogni apice, con quelle che da queste si deducono permutando le x, y, z .

Così dunque (per $r=2$): Se A è un insieme misurabile e limitato del piano (x, y) e se la funzione $f(x, y)$ è integrabile su A e su ogni sezione di A — in particolare, se A è chiuso e se la funzione $f(x, y)$ è continua in A — si avrà:

$$(16) \quad \int_A f(xy) dx dy = \int_{A_y} dy \int_{S(y)} f(xy) dx = \int_{A_x} dx \int_{S(x)} f(xy) dy.$$

Siano a e b due numeri qualsivogliano e sia $a < b$, sia A il triangolo del piano (x, y) formato dalle rette $x=y, x=a, x=b$; dall'ultima proposizione si ricava: Se $f(x, y)$ è integrabile su A e su ogni sezione di A , in particolare se essa è continua in A , sussiste l'eguaglianza:

$$(17) \quad \int_{(a\ b)} dx \int_{(a\ x)} f(xy) dx = \int_{(a\ b)} dy \int_{(y\ b)} f(xy) dx.$$

Questa formola è nota sotto il nome di *formola di inversione di Dirichlet*.

In ipotesi molto larghe dunque è possibile ricondurre il calcolo di un integrale a *tre* dimensioni al successivo calcolo di *tre* integrali ad *una*; alludendo a tale possibilità diconsi anche *tripli* gli integrali a tre dimensioni e denotansi anche col simbolo

$$\iiint_A f(xyz) dx dy dz.$$

Analogamente gli integrali a *due* dimensioni diconsi anche *doppi* e denotansi anche con la notazione

$$\iint_A f(xy) dx dy;$$

gli integrali a r dimensioni diconsi r^{pli} .

Quadratura dei rettangoloidi e cubatura dei cilindroidi. Nel piano (x, y) si abbia il rettangoloide H ($n^\circ 25$) avente

per base l'insieme limitato A e relativo alla funzione limitata $f(x)$, definita in A . La sezione di H , con una retta verticale di ascissa x , è un intervallo limitato dai punti 0 e $f(x)$, essa è dunque misurabile ed ha per misura $|f(x)|$. L'analogo del teor. I nel piano, ci dice che: *Se il rettangoloide H è misurabile la funzione $|f(x)|$ è integrabile e si ha:*

$$(18) \quad \text{area } H = \int_A |f(x)| dx.$$

Nello spazio (x, y, z) si abbia il cilindroide K (n° 25) avente per base l'insieme limitato A del piano (x, y) , relativo alla funzione limitata $f(x, y)$, definita in A . La sezione di K , con una retta verticale, il cui piede sul piano (x, y) ha le coordinate x e y , è un intervallo limitato dai punti 0 e $f(x, y)$, essa è dunque misurabile ed ha per misura $|f(x, y)|$. Il teor. I ci dice che: *Se il cilindroide K è misurabile la funzione $|f(x, y)|$ è integrabile e si ha:*

$$(19) \quad \text{vol } K = \int_A |f(xy)| dx dy.$$

Domandiamo ora, quando mai un rettangoloide o un cilindroide è misurabile? A tale domanda rispondono — in particolare — i due teoremi seguenti:

IV. *Un rettangoloide avente per base un intervallo (a, b) dell'asse x e relativo ad una funzione $f(x)$ continua in (a, b) è misurabile.*

Basta dimostrare che la curva C di equazione $y = f(x)$ — la quale, in forza della continuità di $f(x)$, coi punti di H di ascissa a e di ascissa b e con quelli di ordinata nulla, costituisce, come subito si dimostra, la frontiera di H — è un insieme del piano (x, y) di estensione nulla. Poichè $f(x)$ è continua nell'intervallo (a, b) , comunque si assegni un numero positivo ϵ è possibile determinarne un altro δ tale che l'oscillazione della $f(x)$ in ogni intervallo di (a, b) , di ampiezza non superiore a δ , sia minore di $\epsilon: (b - a)$. Mediante i punti $x_0 = a, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = b$, dividiamo (a, b) in intervalli parziali ciascuno di ampiezza minore di δ e diciamo m_i e M_i il minimo e il massimo di $f(x)$ in (x_i, x_{i+1}) ($i = 0, 1, \dots, n$), R_i il dominio rettangolare definito dalle limitazioni $x_i \leq x \leq x_{i+1}, m_i \leq y \leq M_i$. Si ha:

$$C < \sum_i R_i,$$

$$\text{area } \sum_i R_i = \sum_i (x_{i+1} - x_i)(M_i - m_i) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_i (x_{i+1} - x_i) = \varepsilon.$$

V. *Un cilindroide avente per base un insieme limitato, chiuso e misurabile A del piano (x, y) e relativo ad una funzione continua $f(x, y)$ definita in A , è misurabile.*

Basta dimostrare (poichè — cfr. 87, X — il cilindro ortogonale avente per base FA e per altezza il doppio del massimo di $|f|$ in A , ha estensione nulla) che la superficie S di equazione $z = f(x, y)$ è un insieme dello spazio di estensione nulla. A ciò si giunge con un ragionamento assai analogo a quello fatto per il teor. precedente.

Cade qui a proposito il notare l'immediato corollario seguente del teor. I:

VI. *Se due solidi misurabili dello spazio sono compresi fra due piani paralleli, e se in tutti i piani paralleli intermedi le sezioni dei due solidi hanno estensioni in rapporto costante, anche i volumi dei due solidi saranno in quel rapporto.*

Le formole (18) e (19) diconsi *le formole fondamentali di quadratura e di cubatura in coordinate cartesiane*. Insieme ad esse è bene ricordare *le formole fondamentali di quadratura e di cubatura in coordinate polari*, alle quali si giunge considerando, come appunto andiamo a fare, il problema di misurare i settoroidi del piano e dello spazio.

Quadratura dei settoroidi nel piano e cubatura dei settoroidi nello spazio. Per i numeri reali α e β si abbia $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, e nell'intervallo (α, β) sia definita una funzione continua $f(\theta)$, sempre positiva, della variabile θ . Introdotte le coordinate polari ρ e θ per i punti del piano (x, y) — col polo nell'origine O degli assi x e y e con l'asse polare x — consideriamo il settoroide (pag. 174) S del piano, relativo alla funzione continua e positiva $f(\theta)$, avente per base l'intervallo (α, β) . Vogliamo dimostrare la quadrabilità di S e trovarne l'area. Mediante i punti $\theta_0 = \alpha, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta_{n+1} = \beta$, dividiamo, nel modo più arbitrario, l'intervallo (α, β) in intervalli parziali, dei quali con δ indichiamo l'ampiezza massima. Diciamo m_i e M_i il minimo e il massimo di $f(\theta)$ nell'intervallo (θ_i, θ_{i+1}) ($i = 0, 1, \dots, n$). Chiamiamo S_i il settore circolare definito dalle limitazioni $\theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1}$

$\rho \leq m_i$ e S''_i il settore circolare definito dalle limitazioni $\theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1}$, $\rho \leq M_i$. Si ha:

$$\sum_i S'_i < S < \sum_i S''_i,$$

e quindi (87, VI)

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i^2 (\theta_{i+1} - \theta_i) \leq \text{est } S \leq \frac{1}{2} \sum_i M_i^2 (\theta_{i+1} - \theta_i),$$

onde segue, facendo tendere δ a zero,

$$(20) \quad \text{est } S = \frac{1}{2} \int_{(\alpha\beta)} [f(\theta)]^2 d\theta.$$

Detta C la curva di equazione $\rho = f(\theta)$, la misurabilità di S segue dall'osservare che è sempre

$$\text{est } C \leq \frac{1}{2} \sum_i (M_i^2 - m_i^2) (\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Passiamo ora a definire quei particolari insiemi misurabili dello spazio, (x, y, z) che chiameremo *settoroidi dello spazio*, e a determinare il volume di tali insiemi. Siano α', α'' e β', β'' due coppie di numeri reali per i quali si abbia $0 \leq \alpha' < \alpha'' \leq \pi$, $0 \leq \beta' < \beta'' \leq 2\pi$. Nel piano (φ, θ) consideriamo il dominio rettangolare R di punti estremi (α', β') e (α'', β'') . Entro tale dominio sia assegnato un insieme chiuso A e in questo insieme sia definita una funzione continua e sempre positiva $f(\varphi, \theta)$ delle due variabili φ e θ . Riferiamo i punti P dello spazio (x, y, z) ad un sistema di coordinate polari ρ, φ e θ , col polo nell'origine O degli assi x, y, z , designando ρ la distanza di P da O , φ la *colatitudine* di P , cioè l'angolo, compreso fra 0 e π , che il raggio vettore \vec{OP} fa con l'asse z , θ la *longitudine* di P , cioè l'angolo che il semipiano contenente P e terminato all'asse z fa col semipiano (z, x) contenente le x positive; chiamiamo *settoroide dello spazio, relativo alla funzione $f(\varphi, \theta)$, avente per base l'insieme A* , l'insieme S dello spazio definito dalle condizioni

$$\text{il punto } (\varphi, \theta) \text{ è in } A, \quad 0 \leq \rho \leq f(\varphi, \theta).$$

In forza della continuità in A della $f(\varphi, \theta)$, i punti di S , interni a S , sono quelli e solo quelli che verificano le condizioni:

$$\text{il punto } (\varphi, \theta) \text{ è interno a } A, \quad 0 < \rho < f(\varphi, \theta),$$

gli altri punti appartengono alla frontiera FS di S . L'insieme dei punti di FS verificanti le condizioni:

$$\text{il punto } (\varphi, \theta) \text{ è in } A, \quad \rho = f(\varphi, \theta),$$

chiamasi anche, come l'insieme piano A , *base* del settoreide. Vogliamo, in ciò che segue, dimostrare la misurabilità di S e trovarne il volume.

Premettiamo, a tale scopo, la determinazione del volume del settore sferico. Si abbia la sfera di raggio r , e sopra un suo fissato diametro, con l'origine sulla sfera, disponiamo un asse ξ di tale verso che il centro della sfera abbia su esso l'ascissa positiva. L'area della sezione della sfera fatta, con un piano normale all'asse ξ in un punto di ascissa ξ , è data da $\pi\xi(2r - \xi)$. Il segmento sferico limitato dai due piani p_0 e p_h , normali all'asse ξ nei due punti di ascisse 0 e h , è (87, XIII) un dominio misurabile e pertanto il suo volume è dato da (teor. I)

$$\pi \int_{(0, h)} (2r\xi - \xi^2) d\xi = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right),$$

cfr. l'Esercizio 1° al n° 91. Il settore sferico avente per base la zona sferica limitata dai due piani p_0 e p_h ha per volume quello del considerato segmento sferico aumentato o diminuito (aumentato se $h \leq r$, diminuito se $h > r$) del volume del cono circolare retto avente per vertice il centro della sfera e per base la sezione della sfera determinata dal piano p_h . L'indicato settore sferico ha dunque per volume

$$\pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) + \pi h(2r - h) \frac{r - h}{3} = \frac{2\pi}{3} h r^2.$$

Ne segue che: *Il volume del settore sferico, avente per base una qualsiasi zona sferica limitata da due piani normali a ξ aventi fra loro la distanza h , è dato da $2\pi h r^2 : 3$. In virtù del teor. IV si ha poi che: Il settore sferico, parte del precedente, staccato da esso da due semipiani uscenti dall'asse ξ e formanti fra di loro un angolo diedro di a radianti ha il volume dato da $a h r^2 : 3$. Pertanto, se sopra una sfera col centro nel polo O delle considerate coordinate polari e di raggio r , prendiamo il quadrilatero limitato dai paralleli di colatitudine φ e $\varphi + \Delta\varphi$ ($\Delta\varphi > 0$) e dai meridiani di longitudine θ e*

$\theta + \Delta\theta (\Delta\theta > 0)$, il volume del settore sferico avente per base quel quadrilatero è dato da

$$\frac{r^3}{3} [\cos\varphi - \cos(\varphi + \Delta\varphi)]\Delta\theta = \frac{r^3}{3} \operatorname{sen}\varphi \Delta\varphi \Delta\theta + \frac{r^3}{6} \cos(\varphi + \tau\Delta\varphi) \Delta\varphi^2 \Delta\theta,$$

ove τ è una certa frazione positiva.

Mediante i punti $\varphi_0 = \alpha'$, $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, $\varphi_{m+1} = \alpha''$; $\theta_0 = \beta'$, $\theta_1, \dots, \theta_n$, $\theta_{n+1} = \beta''$, decomponiamo, nel modo più arbitrario, i lati del rettangolo R del piano (φ, θ) contenente l'insieme A base del settoroide S , rispettivamente in $m + 1$ e in $n + 1$ intervalli parziali e, corrispondentemente, il rettangolo R nei rettangoli parziali R_{hk} di punti estremi (φ_h, θ_k) e $(\varphi_{h+1}, \theta_{k+1})$. Porremo $\Delta\varphi_h = \varphi_{h+1} - \varphi_h$, $\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k$. Diciamo m_{hk} il minimo e M_{hk} il massimo della funzione $f(\varphi, \theta)$ nel rettangolo R_{hk} . Se consideriamo tutti i rettangoli R_{hk} interni a A e facciamo la somma (elementare) dei settori sferici aventi, ciascuno, per raggio il minimo m_{hk} e per base R_{hk} , si ottiene un solido S' contenuto nel settoroide S ; se consideriamo invece tutti i rettangoli R_{hk} aventi con A almeno un punto in comune, e facciamo la somma (elementare) dei settori sferici aventi, ciascuno, per raggio il massimo M_{hk} e per base R_{hk} , si ottiene un solido S'' che contiene il settoroide S . Si ha:

$$\operatorname{vol} S' = \frac{1}{3} \sum'_{hk} m_{hk}^3 \operatorname{sen}\varphi_h \Delta\varphi_h \Delta\theta_k + \frac{1}{6} \sum'_{hk} m_{hk}^3 \cos(\varphi_h + \tau_h \Delta\varphi_h) \Delta\varphi_h^2 \Delta\theta_k,$$

$$\operatorname{vol} S'' = \frac{1}{3} \sum''_{hk} M_{hk}^3 \operatorname{sen}\varphi_h \Delta\varphi_h \Delta\theta_k + \frac{1}{6} \sum''_{hk} M_{hk}^3 \cos(\varphi_h + \tau_h \Delta\varphi_h) \Delta\varphi_h^2 \Delta\theta_k.$$

Se, al solito, diciamo δ la massima diagonale dei rettangoli R_{hk} , e se, tenendo conto della misurabilità di A , ricordiamo le proposizioni ottenute nell'osservazione 3^a del n° prec., si può affermare che :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{3} \sum'_{hk} m_{hk}^3 \operatorname{sen}\varphi_h \Delta\varphi_h \Delta\theta_k = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \iint_A [f(\varphi, \theta)]^3 \operatorname{sen}\varphi d\varphi d\theta. \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{3} \sum''_{hk} M_{hk}^3 \operatorname{sen}\varphi_h \Delta\varphi_h \Delta\theta_k = \end{array} \right.$$

D'altra parte, se M designa il massimo di $f(\varphi, \theta)$ in A , si ha:

$$\left. \begin{array}{l} \left| \sum'_{hk} m_{hk}^3 \cos(\varphi_h + \tau_h \Delta\varphi_h) \Delta\varphi_h^2 \Delta\theta_k \right| \leq \\ \left| \sum''_{hk} M_{hk}^3 \cos(\varphi_h + \tau_h \Delta\varphi_h) \Delta\varphi_h^2 \Delta\theta_k \right| \leq \end{array} \right\} \delta M^3 R,$$

onde possiamo concludere che: *L'estensione del considerato settoroide S è data dalla formola:*

$$(21) \quad \text{est } S = \frac{1}{3} \iint_A [f(\varphi, \theta)]^3 \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \, d\theta.$$

Dalla nostra analisi segue pure *la misurabilità di S* , poichè è sempre $FS < S' - (S' - FS')$ ed è $\operatorname{vol}[S' - (S' - FS')] = \operatorname{vol} S' - \operatorname{vol} S'$.

Osservazione 1^a)*. La misurabilità dei rettangoloidi e dei cilindroidi e quindi le formole (18) e (19) sussistono anche nelle sole ipotesi seguenti: *La base A e un insieme misurabile e la funzione limitata f è integrabile su A .* Così pure la misurabilità dei settoroidi del piano e dello spazio e le formole (20) e (21) sussistono anche nelle sole ipotesi seguenti: *La base A , contenuta sempre entro i domini rettangolari indicati, è misurabile e la funzione limitata e positiva f è integrabile su A .*

Osservazione 2^a). Nell'intervallo (α, β) , ove varia θ , siano definite due funzioni continue e positive $f_1(\theta)$ e $f_2(\theta)$ per le quali inoltre sia sempre $f_2(\theta) \geq f_1(\theta)$. Nel piano (ρ, θ) consideriamo l'insieme B (misurabile) definito dalle limitazioni $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $f_1(\theta) \leq \rho \leq f_2(\theta)$ e facciamo l'integrale di ρ esteso a B , si ha:

$$(22) \quad \iint_B \rho \, d\rho \, d\theta = \int d\theta \int_{(f_1, f_2)} \rho \, d\rho = \frac{1}{2} \int_{(\alpha, \beta)} (f_2^2 - f_1^2) \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{(\alpha, \beta)} f_2^2 \, d\theta - \frac{1}{2} \int_{(\alpha, \beta)} f_1^2 \, d\theta.$$

Nel piano (x, y) consideriamo i due settoroidi S_1 e S_2 aventi per comune base l'intervallo (α, β) e relativi, rispettivamente, alle funzioni f_1 e f_2 . Poniamo $S = S_2 - (S_1 - FS_1)$. Si ha $\operatorname{area} S = \operatorname{area} S_2 - \operatorname{area} S_1$, e quindi, in virtù della (20) e delle (22), che: *Per l'area dell'insieme S del piano (x, y) , definito, in coordinate polari, dalle limitazioni $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $f_1(\theta) \leq \rho \leq f_2(\theta)$, sussiste la formola*

$$(23) \quad \operatorname{area} S = \iint_B \rho \, d\rho \, d\theta.$$

Allo stesso modo, partendo dalla (21), si dimostra che: *Per il volume dell'insieme S dello spazio (x, y, z) definito, in coordinate polari, dalle condizioni*

$$(24) \quad \text{il punto } (\varphi, \theta) \text{ è in } A, \quad f_1(\varphi, \theta) \leq \rho \leq f_2(\varphi, \theta),$$

essendo $f_1(\varphi, \theta)$ e $f_2(\varphi, \theta)$ due funzioni positive e continue in A , sussiste la formola

$$(25) \quad \text{vol } S = \iiint_B \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta,$$

ove B è l'insieme dello spazio (ρ, φ, θ) definito dalle (24).

Dalle proposizioni ora osservate segue subito il teorema:

VII. Sia B un qualsiasi insieme del piano (ρ, θ) contenuto nel dominio rettangolare R di punti estremi (ρ', θ') e (ρ'', θ'') , $0 \leq \rho' < \rho''$, $0 \leq \theta' < \theta'' \leq 2\pi$. Sia S l'insieme di punti del piano (x, y) , descritto dal punto $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, al variare di (ρ, θ) in B . Si ha allora che se B è quadrabile è pure quadrabile S e l'area di S è data dalla (23). Sia B un qualsiasi insieme dello spazio (ρ, φ, θ) contenuto nel dominio rettangolare R di punti estremi $(\rho', \varphi', \theta')$ e $(\rho'', \varphi'', \theta'')$, $0 \leq \rho' < \rho''$, $0 \leq \varphi' < \varphi'' \leq \pi$, $0 \leq \theta' < \theta'' \leq 2\pi$. Sia S l'insieme di punti dello spazio (x, y, z) descritto dal punto $x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$, $z = \rho \cos \varphi$, al variare di (ρ, φ, θ) in B . Si ha allora che se B è cubabile è pure cubabile S e il volume di S è dato dalla (25).

Limitiamoci a dimostrare la prima parte del teorema. Mediante il solito reticolato — formato di rette parallele agli assi ρ e θ — dividiamo il rettangolo R in rettangoli parziali R_{hk} , dei quali diremo δ la massima diagonale, e affettiamo di un apice le somme estese a tutti i rettangoli R_{hk} completamente interni a B e di due apici quelle estese a tutti i rettangoli R_{hk} aventi, almeno, un punto in comune con B . Poniamo poi $B' = \sum' R_{hk}$, $B'' = \sum'' R_{hk}$. Siano S_{hk} , S' e S'' i domini del piano (x, y) corrispondenti, rispettivamente, ai domini R_{hk} , B' e B'' . Si ha $S' = \sum' S_{hk}$, $S'' = \sum'' S_{hk}$, $S' < S < S''$, $FS < S'' - S'$,

$$\text{area } S_{hk} = \iint_{R_{hk}} \rho \, d\rho \, d\theta, \quad \text{area } S' = \sum' \iint_{R_{hk}} \rho \, d\rho \, d\theta = \iint_{B'} \rho \, d\rho \, d\theta,$$

$$\text{area } S'' = \iint_{B''} \rho \, d\rho \, d\theta,$$

$$(26) \quad \iint_{B'} \rho \, d\rho \, d\theta \left\{ \begin{array}{l} \leq \iint_B \rho \, d\rho \, d\theta \leq \\ \leq \text{est } S \leq \end{array} \right\} \iint_{B''} \rho \, d\rho \, d\theta,$$

$$(27) \text{ est } FS \leq \iint_{B''} \rho \, d\rho \, d\theta - \iint_{B'} \rho \, d\rho \, d\theta = \iint_{B''-B'} \rho \, d\rho \, d\theta \leq \rho'' \text{ area}(B''-B').$$

Ma area $(B'' - B')$, in virtù della supposta quadrabilità di B , è un infinitesimo con δ , onde segue la quadrabilità di S e la formula (23).

93. Passaggio al limite sotto il segno integrale. — La funzione $u = f(\xi, \eta, \dots; x, y, \dots)$ sia definita in un insieme di punti H dello spazio $(\xi, \eta, \dots; x, y, \dots)$ e siano A e B due insiemi di punti, rispettivamente degli spazii (x, y, \dots) e (ξ, η, \dots) , tali che comunque si consideri un punto $Q(\xi, \eta, \dots)$ di B , le coordinate di questo punto, associate a quelle di un qualunque altro punto di A , diano sempre coordinate di punti di H . Porremo, brevemente, $u = f(Q, P)$.

a) Sia Q_0 un punto di DB e supponiamo che, per ogni arbitrariamente fissato punto P di A esista, determinato e finito il limite

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} f(Q, P) \text{ (su } B).$$

Tale limite sarà indicato con $\varphi(Q_0, P)$; esso è una funzione di P , per ipotesi definita in A . Si dice che *la tendenza (su B) di $f(Q, P)$ al limite in Q_0 è uniforme in A* , oppure che *la $f(Q, P)$ tende (su B) al suo limite in Q_0 , uniformemente in A* , se, comunque si assegni un numero positivo ε , è possibile determinare un intorno circolare C_ε del punto Q_0 , su B , tale che, per due punti qualsivogliono Q' e Q'' di $C_\varepsilon - Q_0$, si abbia, qualunque sia il punto P di A ,

$$|f(Q', P) - f(Q'', P)| \leq \varepsilon.$$

Evidentemente (cfr. il teor. III del n° 67) condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f(Q, P)$ tenda in Q_0 al suo limite $\varphi(Q_0, P)$, uniformemente in A , è che, comunque si assegni un numero positivo ε , sia possibile determinare un intorno circolare C_ε del punto Q_0 , su B , tale che per qualsivoglia punto Q di $C_\varepsilon - Q_0$, si abbia, qualunque sia il punto P di A ,

$$(1) \quad |f(Q, P) - \varphi(Q_0, P)| \leq \varepsilon.$$

Se, in particolare, l'insieme B coincide con l'insieme $1, 1/2, \dots, 1/n, \dots$, dei reciproci dei numeri naturali, posto $f(1/n, P) = f_n(P)$, e preso per Q_0 il punto *zero*, si ricade nella definizione di convergenza unifor-

me in un insieme A per una successione di funzioni, già data al n° 67.

b) Se, supponendo l'insieme B illimitato, per ogni punto P di A esiste, determinato e finito, il limite

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} f(Q, P) \text{ (su } B),$$

tale limite sarà indicato con $\varphi(\infty, P)$. Esso, per ipotesi, riesce una funzione di P definita in A . Si dice che la *tendenza al limite di $f(Q, P)$ all'infinito, su B , è uniforme in A* , se, comunque si assegni un numero positivo ε , è possibile determinarne un altro R_ε tale che per due punti quali si vogliono Q' e Q'' di B , aventi dall'origine O dello spazio (ξ, η, \dots) distanze maggiori di R_ε , si abbia, qualunque sia il punto P di A ,

$$|f(Q', P) - f(Q'', P)| \leq \varepsilon \text{ oppure } |f(Q', P) - \varphi(\infty, P)| \leq \varepsilon.$$

Se, in particolare, l'insieme B coincide con l'insieme $1, 2, \dots, n, \dots$ dei numeri naturali, posto $f(n, P) = f_n(P)$, si ricade nella definizione di convergenza uniforme in un insieme A per una successione di funzioni.

In ciò che segue, per amore di brevità, considereremo esclusivamente il caso *a)*, lasciando al lettore il facile compito di enunciare, nel caso *b)*, i teoremi analoghi a quelli che otterremo, per la dimostrazione dei quali non si ha che da ripetere i ragionamenti che andiamo ad esporre. Cominciamo dal dimostrare il teorema:

I. Se la funzione $f(Q, P)$ è limitata in H , e se essa tende in Q_0 al limite $\varphi(Q_0, P)$, uniformemente in A , la funzione $\varphi(Q_0, P)$ è limitata in A dai due numeri $-L$ e L , avendo designato con L l'estremo superiore di $|f(P, Q)|$ in H .

Comunque si assegni un numero positivo ε esiste, invero, un intorno circolare C_ε di Q_0 , su B , tale che per qualsivoglia punto Q di $C_\varepsilon - Q_0$ e ovunque si prenda P in A , sussiste la (1), e quindi

$$-L + \varepsilon \leq \varphi(Q_0, P) \leq L + \varepsilon;$$

per l'arbitrarietà di ε ne segue, ovunque in A , $|\varphi(Q_0, P)| \leq L$.

Manterremo sempre, in questo articolo, l'ipotesi che la funzione $f(Q, P)$ sia limitata in H e faremo sempre anche l'ipotesi che l'in-

sieme A sia limitato. In tali ipotesi, per ogni fissato punto Q di B potremo considerare il minimo ed il massimo integrale della funzione $f(Q, P)$, riguardata soltanto come funzione di P , estesi all'insieme A . Si verranno così a definire in B le due funzioni di Q :

$$F'(Q) = \int_A f(Q, P) dT, \quad F''(Q) = \int_A f''(Q, P) dT.$$

Sussiste il seguente classico teorema del passaggio al limite sotto il segno integrale:

II. Se la funzione $f(Q, P)$ tende in Q_0 ad un limite determinato e finito, uniformemente nell'insieme limitato A , si ha:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{Q \rightarrow Q_0} \int_A f(Q, P) dT = \int_A \left[\lim_{Q \rightarrow Q_0} f(Q, P) \right] dT. \\ \lim_{Q \rightarrow Q_0} \int_A f''(Q, P) dT = \int_A \left[\lim_{Q \rightarrow Q_0} f''(Q, P) \right] dT. \end{array} \right.$$

Ed inverso (89, X)

$$\left| \int_A f(Q, P) dT - \int_A \varphi(Q_0, P) dT \right| \leq \left. \begin{array}{l} \int_A |f(Q, P) - \varphi(Q_0, P)| dT, \\ \int_A |f''(Q, P) - \varphi''(Q_0, P)| dT \end{array} \right| \leq \varepsilon$$

pertanto, se, quando Q è in $C_\varepsilon - Q_0$, riesce, ovunque sia P in A ,

$$|f(Q, P) - \varphi(Q_0, P)| \leq \varepsilon: \text{est } A,$$

risulterà pure, in $C_\varepsilon - Q_0$,

$$\left| F'(Q) - \int_A \varphi(Q_0, P) dT \right| \leq \varepsilon, \quad \left| F''(Q) - \int_A \varphi''(Q_0, P) dT \right| \leq \varepsilon.$$

Come particolarissimi casi del precedente si hanno i teoremi:

II'. Se la successione di funzioni limitate $f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P), \dots$ converge uniformemente nell'insieme limitato A , si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(P) dT = \int_A \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(P) \right] dT, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n''(P) dT = \int_A \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n''(P) \right] dT.$$

II''. Se la serie di funzioni limitate $g_1(P) + g_2(P) + \dots$ converge uniformemente nell'insieme limitato A , si ha:

$$\sum_A^{1, \infty} \int f_i(P) dT = \int_A \left(\sum_i^{1, \infty} f_i(P) \right) dT, \quad \sum_A^{1, \infty} \int f_i''(P) dT = \int_A \left(\sum_i^{1, \infty} f_i''(P) \right) dT$$

Quest'ultimo teorema si suole chiamare *il teorema dell'integrazione termine a termine delle serie*. Del teor. II sono poi immediati corollarii i seguenti.

III. Se la funzione $f(Q, P)$ tende, in Q_0 , ad un limite determinato e finito $\varphi(Q_0, P)$, uniformemente nell'insieme limitato A , e se essa, per ogni fissato punto Q in B , è funzione di P integrabile su A , tale sarà pure la funzione $\varphi(Q_0, P)$, mentre si ha

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \int_A f(Q, P) dT = \int_A \left[\lim_{Q \rightarrow Q_0} f(Q, P) \right] dT.$$

Pertanto: La funzione limite di una successione di funzioni, uniformemente convergente nell'insieme limitato A , integrabili su A , è pur essa tale, e l'integrale della funzione limite è il limite degli integrali delle funzioni della successione; la somma di una serie di funzioni, uniformemente convergente nell'insieme limitato A , è integrabile su A se tali sono le funzioni della serie, e l'integrale della somma della serie è la somma della serie degli integrali dei termini.

IV. Se l'insieme H è chiuso limitato e la funzione $f(Q, P)$ vi è continua, tale è pure la funzione

$$F(Q) = \int_A f(Q, P) dT,$$

nell'insieme B , supposto pur esso chiuso.

Per ogni punto Q di B diciamo $S(Q)$ quel ben determinato insieme di punti dello spazio (x, y, \dots) tali che le coordinate di ciascuno di questi, associate a quelle di Q , danno coordinate di punti di H . L'insieme $S(Q)$ sarà sempre chiuso e limitato e conterrà sempre l'insieme A . Comunque si fissi Q in B , la funzione $f(Q, P)$ riesce funzione di P continua nell'insieme chiuso e limitato $S(Q)$ e pertanto essa sarà integrabile su $S(Q)$ e quindi su $A [\subset S(Q)]$. Ciò posto,

arbitrariamente assegnato un numero positivo ε , se ne può trovare un altro δ tale che se

$$(\Delta\xi^2 + \Delta\eta^2 + \dots + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \dots)^{1/2} \leq \delta,$$

si abbia sempre, per due qualsiasi punti $(\xi + \Delta\xi, \dots; x + \Delta x, \dots)$ e $(\xi, \dots; x, \dots)$ di \mathbf{H} ,

$$|f(\xi + \Delta\xi, \dots; x + \Delta x, \dots) - f(\xi, \dots; x, \dots)| \leq \varepsilon.$$

Ne segue, per ogni fissato punto Q_0 di \mathbf{DB} e ovunque si prenda P in \mathbf{A} ,

$$|f(Q, P) - f(Q_0, P)| \leq \varepsilon,$$

non appena il punto Q appartiene all'intorno circolare di Q_0 su \mathbf{B} , avente il raggio δ . Si ha dunque, uniformemente in \mathbf{A} ,

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} f(Q, P) \text{ (su } \mathbf{B}) = f(Q_0, P),$$

e pertanto, teor. II,

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} F(Q) = \int_A \left[\lim_{Q \rightarrow Q_0} f(Q, P) \right] dT = \int_A f(Q_0, P) dT = F(Q_0).$$

E ciò dimostra la continuità di $F(Q)$ nell'insieme chiuso \mathbf{B} .

V. Derivazione sotto il segno integrale. Se l'insieme \mathbf{H} è chiuso e limitato e se la derivata parziale $f_\xi(\xi, \eta, \dots; x, y, \dots)$ della f è funzione continua in tutto \mathbf{H} (cfr. locuzione abbreviata indicata a pag. 204), mentre la f , per ogni fissato punto Q in \mathbf{B} , è integrabile su \mathbf{A} , la funzione

$$F(Q) = \int_A f(Q, P) dT,$$

è parzialmente derivabile rispetto alla ξ in ogni punto di \mathbf{RB} , e si ha:

$$F_\xi(Q) = \int_A f_\xi(Q, P) dT.$$

Ed inverso

$$f_\xi(\xi, \eta, \dots; x, y, \dots) =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h} [f(\xi + h, \eta, \dots; x, y, \dots) - f(\xi, \eta, \dots; x, y, \dots)] \right\},$$

uniformemente in A , per la supposta continuità di f_{ξ} in H , poichè il rapporto incrementale parziale, che si trova nel secondo membro, vale

$$f_{\xi}(\xi + \theta h, \eta, \dots; x, y, \dots) \text{ essendo } 0 < \theta < 1.$$

E pertanto (teor. II)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\xi + h, \eta, \dots) - F(\xi, \eta, \dots)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_A \frac{f(\xi + h, \eta, \dots; P) - f(\xi, \eta, \dots; P)}{h} dT \\ &= \int_A \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h, \eta, \dots; P) - f(\xi, \eta, \dots; P)}{h} \right] dT = \int_A f_{\xi}(Q, P) dT. \end{aligned}$$

Osservazione. Il teorema IV sussiste anche nell'ipotesi che nell'insieme chiuso e limitato H riesca $f(Q, P) = \mu(P)g(Q, P)$, ove $\mu(P)$ è una funzione limitata e integrabile su A e $g(Q, P)$ è continua in tutto H . Il teor. V sussiste anche nell'ipotesi che nell'insieme chiuso e limitato H riesca $f(Q, P) = \mu(P)g(Q, P)$, ove $\mu(P)$ è una funzione limitata e integrabile su A , $g(Q, P)$, per ogni fissato punto Q di B , è integrabile su A , e la derivata parziale $g_{\xi}(Q, P)$ è funzione continua in tutto A .

Del teor. IV si può dare una notevole ed utilissima generalizzazione della quale si fa spesso uso in *Analisi*. Supponiamo che l'insieme B dello spazio (ξ, η, \dots) sia chiuso e che ad ogni punto Q di B si possa univocamente far corrispondere un ben determinato insieme limitato e misurabile $A(Q)$ dello spazio (x, y, \dots) tale che le coordinate di un qualunque suo punto associate a quelle di Q diano sempre le coordinate di un punto appartenente all'insieme chiuso e limitato H dello spazio $(\xi, \eta, \dots; x, y, \dots)$, ove è definita la funzione continua $f(Q, P)$. Diremo che l'insieme $A(Q)$ è funzione continua di Q in un punto Q_0 di DB se riesce:

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} [\text{mis}(A(Q) + A(Q_0)) - \text{mis}(A(Q) \cdot A(Q_0))] = 0.$$

Si osservi che, per essere (n° 86, pag. 358)

$$\text{mis}(A(Q) + A(Q_0)) = \text{mis} A(Q) + \text{mis} A(Q_0) - \text{mis}(A(Q) \cdot A(Q_0)),$$

risulta

$$\begin{aligned} &\text{mis}(A(Q) + A(Q_0)) - \text{mis}(A(Q) \cdot A(Q_0)) = \\ &= [\text{mis} A(Q) - \text{mis}(A(Q) \cdot A(Q_0))] + [\text{mis} A(Q_0) - \text{mis}(A(Q) \cdot A(Q_0))]. \end{aligned}$$

e quindi: *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'insieme $A(Q)$ sia funzione di Q , continua nel punto Q_0 di DB è che, simultaneamente, si abbia*

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} [\text{mis } A(Q) - \text{mis } (A(Q) \cdot A(Q_0))] = 0,$$

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} [\text{mis } A(Q_0) - \text{mis } (A(Q) \cdot A(Q_0))] = 0.$$

Ne segue immediatamente che: *Se l'insieme $A(Q)$ è funzione continua di Q , nel punto Q_0 di DB , la misura di $A(Q)$ è funzione (numerica) di Q , continua nello stesso punto. Ovviamente, non sussiste la proposizione reciproca.*

Diremo che l'insieme $A(Q)$ è, in B , funzione continua di Q , se esso è tale in ogni punto di DB . Ciò posto andiamo a dimostrare il seguente importante teorema:

VI. *Se l'insieme H è chiuso e limitato e la funzione $f(Q, P)$ vi è continua, tale è pure la funzione*

$$(3) \quad F(Q) = \int_{A(Q)} f(Q, P) dT,$$

nell'insieme B , supposto chiuso, quando l'insieme misurabile $A(Q)$ è in B funzione continua di Q .

Poichè $\text{mis } A(Q)$ riesce funzione continua di Q nell'insieme chiuso e limitato B , essa vi ammetterà un massimo valore M . Diremo L il massimo in H di $|f(P, Q)|$. Devo dimostrare che, se Q_0 è un qualsiasi punto di DB , si ha:

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \int_{A(Q)} f(Q, P) dT = \int_{A(Q_0)} f(Q_0, P) dT.$$

Comunque sia stato assegnato il numero positivo ε , è possibile trovarne un altro δ tale che: I°) in due qualsivogliano punti di H , ad una reciproca distanza non superiore a δ , la f prenda valori la cui differenza sia in modulo non superiore a $\varepsilon/3M$; II°) se Q è un punto di B ad una distanza da Q_0 non superiore a δ , si abbia

$$\left. \begin{aligned} \text{mis}[A(Q) - A(Q, Q_0)] &= \text{mis } A(Q) - \text{mis } A(Q, Q_0) \leq \\ \text{mis}[A(Q_0) - A(Q, Q_0)] &= \text{mis } A(Q_0) - \text{mis } A(Q, Q_0) \leq \end{aligned} \right\} \varepsilon: 3L,$$

avendo posto $A(Q, Q_0) = A(Q) \cdot A(Q_0)$ e convenuto — come sempre in seguito — di dare il valore zero al simbolo $\text{mis}(E - F)$, tutte le volte che per i due insiemi E ed F non esiste $E - F$. Si osservi d'altra parte che:

$$(4) \quad \int_{A(Q)} f(Q, P) dT - \int_{A(Q_0)} f(Q_0, P) dT = \\ = \int_{A(Q, Q_0)} [f(Q, P) - f(Q_0, P)] dT + \int_{A(Q) - A(Q, Q_0)} f(Q, P) dT - \int_{A(Q_0) - A(Q, Q_0)} f(Q_0, P) dT,$$

[avendo convenuto, qualunque sia la funzione $\varphi(P)$, di dare il valore zero al simbolo

$$\int_{E - F} \varphi(P) dT,$$

se per i due insiemi E ed F non esiste $E - F$] e pertanto per ogni punto Q dell'intorno circolare di Q_0 , su B , avente il raggio δ , si avrà:

$$\left| \int_{A(Q)} f(Q, P) dT - \int_{A(Q_0)} f(Q_0, P) dT \right| \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{3M} \text{mis} A(Q, Q_0) + L \text{mis}[A(Q) - A(Q, Q_0)] + L \text{mis}[A(Q_0) - A(Q, Q_0)] \leq \varepsilon.$$

Spontanea è ora la domanda: Sotto quali condizioni la funzione $F(Q)$, definita dalla (3), è in RB parzialmente derivabile rispetto ad una delle variabili ξ, η, \dots , dalle quali essa dipende? Un gruppo di condizioni sufficienti perciò subito si ottiene partendo dalla formula (4), di decomposizione di $F(Q) - F(Q_0)$, quando, supposta, soltanto, la $f(Q, P)$ — per ogni fissato punto Q di B — funzione di P integrabile su $A(Q)$, si introduca la seguente funzione della coppia $[Q'(\xi', \eta', \dots), Q''(\xi'', \eta'', \dots)]$ di punti di B :

$$\Phi(Q', Q'') = \int_{A(Q') - A(Q', Q'')} f(Q', P) dT - \int_{A(Q'') - A(Q', Q'')} f(Q'', P) dT.$$

Si ha, evidentemente, $\Phi(Q', Q'') = -\Phi(Q'', Q')$, $\Phi(Q, Q) = 0$.
Sussiste il seguente notevole teorema:

VII. L'insieme H sia chiuso e limitato e la funzione $f(Q, P)$ —supposta, per ogni punto Q di B , integrabile su $A(Q)$ rispetto a P —sia parzialmente derivabile rispetto alla ξ , con derivata $f_{\xi}(Q, P)$ finita e continua in tutto H . Sia inoltre $A(Q)$ misurabile e, in B , funzione continua di Q . Allora: Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $F(Q)$, definita dalla (3), sia in RB parzialmente derivabile rispetto alla ξ è che la funzione $\Phi(Q', Q'')$ sia parzialmente derivabile rispetto alla ξ' , quando $Q' \equiv Q''$; soddisfatta questa condizione risulta

$$F_{\xi}(Q) = \int_{A(Q)} f_{\xi}(Q, P) dT + \Phi_{\xi}(Q, Q).$$

Indicando qui con $Q(\xi, \eta, \dots)$ un fissato punto di RB , indichiamo con Q_h il punto, di RB , di coordinate $\xi + h, \eta, \dots$. Si ha:

$$(5) \quad \frac{1}{h} [F(Q_h) - F(Q)] = \frac{1}{h} \left(\int_{A(Q_h)} f(Q_h, P) dT - \int_{A(Q)} f(Q, P) dT \right) = \\ = \frac{1}{h} \int_{A(Q_h, Q)} [f(Q_h, P) - f(Q, P)] dT + \frac{1}{h} \Phi(Q_h, Q).$$

Ma

$$(6) \quad \frac{1}{h} \int_{A(Q_h, Q)} [f(Q_h, P) - f(Q, P)] dT = \int_{A(Q)} f_{\xi}(Q, P) dT - \int_{A(Q) - A(Q_h, Q)} f_{\xi}(Q, P) dT + \\ + \int_{A(Q_h, Q)} \left[\frac{f(Q_h, P) - f(Q, P)}{h} - f_{\xi}(Q, P) \right] dT, \\ \frac{f(Q_h, P) - f(Q, P)}{h} = f_{\xi}(Q_{\theta h}, P) \quad (0 < \theta < 1),$$

e quindi, in forza della continuità di $f_{\xi}(Q, P)$ in H e di $A(Q)$ in B ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{A(Q_h, Q)} [f(Q_h, P) - f(Q, P)] dT = \int_{A(Q)} f_{\xi}(Q, P) dT.$$

Onde, dalla (5), segue il teorema, poichè

$$\frac{1}{h} \Phi(Q_h, Q) = \frac{1}{h} [\Phi(Q_h, Q) - \Phi(Q, Q)].$$

Importanti casi particolari dei teoremi VI e VII.

Nell'intervallo (a', a'') dell'asse delle x , siano definite le due funzioni continue $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$, verificanti sempre la relazione $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x)$. Sia H l'insieme (perfetto) del piano (x, y) definito dalle limitazioni $a' \leq x \leq a''$, $\alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x)$. L'insieme H è misurabile poichè le due curve $y = \alpha_1(x)$, $y = \alpha_2(x)$ hanno ciascuna (cfr. dim. del teor. IV del n° prec.) estensione nulla. La sezione $S(x)$ dell'insieme H , fatta con la verticale di ascissa x è un insieme (un intervallo) che dico essere funzione continua di x . Si ha, invero:

$$\text{mis}[S(x) + S(x_0)] - \text{mis}[S(x) \cdot S(x_0)] = |\alpha_1(x) - \alpha_1(x_0)| + |\alpha_2(x) - \alpha_2(x_0)|.$$

Segue, dunque, in particolare, dal teor. VI, che: *Se la funzione $f(x, y)$, definita nell'insieme perfetto H , è ivi continua, la funzione della x*

$$(6) \quad F(x) = \int_{S(x)} f(x, y) dy = \int_{(\alpha_1, \alpha_2)} f(x, y) dy,$$

che sappiamo già (n° prec.) essere integrabile sull'intervallo (a', a'') , è inoltre ivi continua.

Nell'insieme chiuso e limitato B del piano (x, y) siano definite le due funzioni continue $\alpha_1(x, y)$ e $\alpha_2(x, y)$, verificanti sempre la relazione $\alpha_1(x, y) \leq \alpha_2(x, y)$. Sia ora H l'insieme chiuso e misurabile dello spazio (x, y, z) definito dalle condizioni seguenti: *il punto (x, y) è in B , $\alpha_1(x, y) \leq z \leq \alpha_2(x, y)$.* La sezione $S(x, y)$ dell'insieme H , fatta con la normale al piano (x, y) , nel punto (x, y) , è un insieme (un intervallo) che, come sopra, si vede essere in B una funzione continua del punto (x, y) . Se ne deduce dal teorema VI che: *Se la funzione $f(x, y, z)$, definita nell'insieme chiuso H , è ivi continua, la funzione della x e della y .*

$$(7) \quad F(x, y) = \int_{S(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_{(\alpha_1, \alpha_2)} f(x, y, z) dz,$$

che sappiamo già (n° prec.) essere integrabile su B , è inoltre ivi continua.

L'insieme B del piano (x, y) — proiezione ortogonale di H sul detto piano — sia a sua volta definito dalle limitazioni $b' \leq x \leq b''$, $\beta_1(x) \leq y \leq \beta_2(x)$, essendo le funzioni $\beta_1(x)$ e $\beta_2(x)$ funzioni continue nell'intervallo (b', b'') . Indicando con $S(x)$ la sezione — definita dalle

limitazioni $\beta_1(x) \leq y \leq \beta_2(x)$, $\alpha_1(x, y) \leq z \leq \alpha_2(x, y)$ — dell'insieme H , fatta con un piano normale all'asse x , nel punto x di (b', b'') , poichè

$$\int_{S(x)} f(x, y, z) dy dz = \int_{(\beta_1, \beta_2)} dy \int_{(\alpha_1, \alpha_2)} f(x, y, z) dz,$$

dalle osservazioni che precedono si deduce che: *Se la funzione $f(x, y, z)$ è continua nell'insieme H , definito dalle limitazioni*

$$b' \leq x \leq b'', \quad \beta_1(x) \leq y \leq \beta_2(x), \quad \alpha_1(x, y) \leq z \leq \alpha_2(x, y),$$

la funzione della x

$$(8) \quad F(x) = \int_{S(x)} f(x, y, z) dy dz,$$

che sappiamo già (n° prec.) essere integrabile sull'intervallo (b', b'') , è inoltre ivi continua. Lo stesso risultato si deduce direttamente dal teor. VI facendo vedere, il che è facilissimo, che la sezione $S(x)$ dell'insieme H è funzione continua della x .

Torniamo ora a considerare la funzione $F(x)$, definita dalla (6), per dimostrare il seguente importante caso particolare del teor. VII:

VIII. *Se la funzione $f(x, y)$ è continua nell'insieme H ed è inoltre ivi parzialmente derivabile rispetto alla x , con derivata $f_x(x, y)$ continua in tutto H e se le funzioni $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$ sono derivabili in (a', a'') , tale sarà pure la funzione $F(x)$, definita dalla (6), e si ha:*

$$(9) \quad \frac{dF}{dx} = \int_{(\alpha_1, \alpha_2)} f(x, y) dy + \frac{d\alpha_2}{dx} f[x, \alpha_2(x)] - \frac{d\alpha_1}{dx} f[x, \alpha_1(x)].$$

In forza del teor. VII basta verificare che, introdotta la funzione $\Phi(x+h, x)$ ponendo: $S(x, x+h) = S(x) \cdot S(x+h)$,

$$\Phi(x+h, x) = \int_{S(x+h) - S(x, x+h)} f(x+h, y) dy - \int_{S(x) - S(x, x+h)} f(x, y) dy,$$

si ha

$$(10) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \Phi(x+h, x) = \frac{d\alpha_2}{dx} f[x, \alpha_2(x)] - \frac{d\alpha_1}{dx} f[x, \alpha_1(x)].$$

La verifica va condotta in modo diverso secondochè $\alpha_1'(x)\alpha_2'(x) = 0, > 0$ o < 0 . Noi la faremo, per esempio, nei casi $\alpha_2'(x) > 0, \alpha_1'(x) < 0$; $\alpha_2'(x) > 0, \alpha_1'(x) > 0$ e $\alpha_2'(x) > 0, \alpha_1'(x) = 0$; considerando inoltre va-

lori positivi di h . Nel primo caso, si potrà determinare un numero positivo σ tale che se $0 < h < \sigma$ riesca $\alpha_2(x+h) > \alpha_2(x)$, $\alpha_1(x+h) < \alpha_1(x)$, e quindi, poichè allora viene a mancare l'insieme $S(x) - S(x, x+h)$ mentre l'insieme $S(x+h) - S(x, x+h)$ si riduce alla somma dei due intervalli $[\alpha_1(x+h), \alpha_1(x)]$, $[\alpha_2(x), \alpha_2(x+h)]$ sulla retta verticale di ascissa $x+h$, si ha:

$$\Phi(x+h, x) = \int_{[\alpha_1(x+h), \alpha_1(x)]} f(x+h, y) dy + \int_{[\alpha_2(x), \alpha_2(x+h)]} f(x+h, y) dy,$$

e pertanto (X, 89)

$$(11) \Phi(x+h, x) = -[\alpha_1(x+h) - \alpha_1(x)]f(x+h, y') + [\alpha_2(x+h) - \alpha_2(x)]f(x+h, y''),$$

ove y' è un punto di $S(x+h)$ fra $\alpha_1(x+h)$ e $\alpha_1(x)$ e y'' è un altro punto di $S(x+h)$ fra $\alpha_2(x)$ e $\alpha_2(x+h)$. Ne segue la (10). Nel secondo caso, si potrà determinare un numero positivo σ tale che se $0 < h < \sigma$ riesca $\alpha_1(x+h) > \alpha_1(x)$, $\alpha_2(x+h) > \alpha_2(x)$. Esistono allora entrambi i due insiemi $S(x) - S(x, x+h)$ e $S(x+h) - S(x, x+h)$ il primo è l'intervallo $[\alpha_1(x), \alpha_1(x+h)]$ sulla retta verticale di ascisse x ed il secondo l'intervallo $[\alpha_2(x), \alpha_2(x+h)]$ sulla verticale di ascisse $x+h$. Si ha quindi

$$(12) \Phi(x+h, x) = [\alpha_2(x+h) - \alpha_2(x)]f(x+h, y'') - [\alpha_1(x+h) - \alpha_1(x)]f(x, y'),$$

ove y'' è un punto di $S(x+h)$ fra $\alpha_2(x)$ e $\alpha_2(x+h)$ e y' un punto di $S(x)$ fra $\alpha_1(x)$ e $\alpha_1(x+h)$. Ne segue di nuovo la (10). Nel terzo caso, può darsi che, mentre per un certo valore di σ , non appena è $0 < h < \sigma$, $\alpha_2(x+h)$, diventa e rimane maggiore di $\alpha_2(x)$, si trovino sempre valori di h , di modulo piccolo quanto si vuole, per cui $\alpha_1(x+h) \geq \alpha_1(x)$ e valori di h per cui $\alpha_1(x+h) < \alpha_1(x)$, per i primi sussiste la (12) e per i secondi la (11). Si può in tal caso asserire soltanto che:

$$\Phi(x+h, x) = [\alpha_2(x+h) - \alpha_2(x)]f(x+h, y'') - [\alpha_1(x+h) - \alpha_1(x)]f(M),$$

ove y'' è un punto di $S(x+h)$ fra $\alpha_2(x)$ e $\alpha_2(x+h)$ e M è un certo punto variabile del dominio rettangolare avente il centro nel punto $[x, \alpha_1(x)]$ e le semidimensioni h e $|\alpha_1(x+h) - \alpha_1(x)|$. Ne segue ancora la (10).

Dal teorema ora dimostrato segue, evidentemente, la derivabilità parziale in \mathbf{RB} , per esempio, rispetto alla x , della funzione $F(x, y)$ definita dalla (7), quando si supponga la continuità, in \mathbf{H} , della $f(x, y, z)$ e della $f_x(x, y, z)$ e la derivabilità parziale in \mathbf{RB} rispetto alla x delle

funzioni $\alpha_1(x, y)$ e $\alpha_2(x, y)$. Si ottiene una formola analoga alla (9). Così pure segue la derivabilità in (b', b'') della funzione $F(x)$ definita dalla (8), nelle seguenti ipotesi: 1^a) le funzioni $\beta_1(x)$ e $\beta_2(x)$ sono derivabili in (b', b'') , 2^a) le funzioni $\alpha_1(x, y)$ e $\alpha_2(x, y)$ sono in B finite e continue con le loro derivate parziali prime rispetto alla x , 3^a) la funzione $f(x, y, z)$ e la derivata $f_x(x, y, z)$ sono finite e continue in H . Lo studioso scriva la formola che dà, in tal caso, la derivata di $F(x)$.

Esistenza della funzione primitiva per ogni funzione continua di una variabile. Sia $f(x)$ una funzione dell'unica variabile x , definita nell'intervallo (a', a'') ed ivi continua. Per ogni punto x di questo intervallo poniamo

$$F(x) = \int_{(a', x)} f(y) dy,$$

si viene così a definire in (a', a'') una funzione che (teor. VIII) è derivabile e per la quale [formola (9)] si ha

$$\frac{dF}{dx} = f(x).$$

Non è però il caso di ricordare le circostanze ora rilevate come (particolarissima) conseguenza del teor. VIII; essa è anche *immediata* conseguenza del teor. X del n° 89, e come tale deve essere ricordata. È immediata conseguenza del teorema citato, poichè, essendo, se $h > 0$,

$$F(x+h) - F(x) = \int_{(x, x+h)} f(y) dy, \quad F(x-h) - F(x) = - \int_{(x-h, x)} f(y) dy,$$

da quel teorema si deduce che

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x + \theta_1 h), \quad \frac{F(x-h) - F(x)}{-h} = f(x - \theta_2 h),$$

ove $0 \leq \theta_1 \leq 1$, $0 \leq \theta_2 \leq 1$.

Il problema della ricerca delle funzioni primitive per una funzione $f(x)$, assegnata in un intervallo (a', a'') , posto al n° 46, è dunque già risolto, nel caso particolare che la $f(x)$ sia continua: Ogni tale funzione è una funzione derivata e tutte le sue funzioni primitive sono date dalla formola

$$c + \int_{(a', x)} f(y) dy,$$

ove c è una costante arbitraria.

Dimostriamo subito anche che:

Viceversa, nota in (a', a'') una funzione $F(x)$ primitiva della funzione continua $f(x)$, per un qualsivoglia intervallo (a, b) di (a', a'') si ha:

$$(12) \quad \int_{(a, b)} f(x) dx = F(b) - F(a) (*).$$

Ed invero, per $a \leq x \leq b$, si ha

$$\frac{d}{dx} \left[F(x) - \int_{(a, x)} f(y) dy \right] = 0,$$

e quindi, designando c una costante,

$$(13) \quad F(x) - \int_{(a, x)} f(y) dy = c,$$

ma

$$\int_{(a, a)} f(y) dy = 0,$$

onde $c = F(a)$ e pertanto dalla (13), per $x = b$, segue in particolare la (12). In seguito si porrà sempre

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

In virtù di quest'ultimo teorema, si può dunque dire che ove di una funzione continua $f(x)$ se ne conosca in (a', a'') una funzione primitiva $F(x)$, l'integrale di quella, esteso ad un qualsiasi intervallo (a, b) di (a', a'') è immediatamente calcolato: esso è dato dalla formola (12). Così, per esempio, poichè $x^{\alpha+1} / (\alpha + 1)$ ($\alpha \neq -1$), $\log x$, e^x , $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$, $\operatorname{tang} x$, sono, rispettivamente, funzioni primitive di x^α , $1/x$, e^x , $\operatorname{cos} x$, $-\operatorname{sen} x$, $1/\operatorname{cos}^2 x$, possiamo subito asserire che, se $0 < a < b$,

$$\int_{(a, b)} x^\alpha dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \text{ (cfr. pag. 384)} \quad \int_{(a, b)} \frac{dx}{x} = \log \frac{b}{a} \text{ (cfr. pag. 384),}$$

qualunque siano a e b ,

(*) Il teorema sussiste anche se $f(x)$ è supposta, soltanto, integrabile su (a', a'') . Ciò vedremo nel capitolo a questo successivo.

$$\int_{(a,b)} e^x dx = e^b - e^a,$$

$$\int_{(a,b)} \cos x dx = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a, \quad \int_{(a,b)} \operatorname{sen} x dx = \operatorname{cos} a - \operatorname{cos} b,$$

se $-\pi/2 < a < b < \pi/2$,

$$\int_{(a,b)} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} b - \operatorname{tang} a.$$

Ma su ciò ritorneremo, in modo più particolareggiato, nel capitolo a questo successivo.

94. Integrali per le funzioni non limitate ed integrali estesi ad insiemi non limitati. — L'estensione del concetto di integrale alle funzioni non limitate e agli insiemi non limitati è di grandissima, fondamentale importanza, specialmente per le continue applicazioni che quell'estensione riceve, sia nel campo della pura *Analisi* sia in quello della *Fisica*. Di tale estensione vogliamo ora diffusamente occuparci. Cominceremo dal considerare il concetto di integrale esteso ad un insieme *limitato* A dello spazio $S_{(r)}$, e ci metteremo sempre nell'ipotesi, ben sufficiente per tutte le applicazioni indicate, della misurabilità dell'insieme A .

Sia, per un momento, $f(P)$ una funzione limitata, definita nell'insieme limitato e misurabile A . Sia T un insieme misurabile *variabile* contenuto in A e poniamo

$$(1) \quad I'(T) = \int_T f(P) dT, \quad I''(T) = \int_T'' f(P) dT,$$

veniamo così a definire in A , due ben determinate funzioni dell'insieme misurabile T . Si ha sempre $I'(T) \leq I''(T)$. Diciamo $[O]_0'$ e $[O]_0''$ gli insiemi di operazioni consistenti, ciascuna, nel fissare un insieme misurabile T , contenuto in A , e nel calcolare, rispettivamente, la funzione $I'(T)$ e la funzione $I''(T)$, ordinate al modo seguente: *Di un'operazione O_1 , corrispondente all'insieme T_1 , diremo seguenti tutte quelle che corrispondono a insiemi T aventi una misura non superiore a quella di T_1 .* Le due funzioni (1) danno così luogo a due variabili

ordinate che diremo *ottenute facendo tendere a zero la misura di \mathbf{T}* . Porremo sempre $\text{mis } \mathbf{T} = T$, $\text{mis } \mathbf{A} = A$, ..., e i limiti delle ora indicate variabili ordinate si designeranno con le notazioni

$$\lim'_{T \rightarrow 0} I, \quad \lim''_{T \rightarrow 0} I.$$

Subito si dimostrano le due seguenti proposizioni:

I. *Se la funzione $f(P)$ è limitata nell'insieme limitato \mathbf{A} , entrambi gli insiemi numerici descritti dalle (1), al variare di \mathbf{T} in \mathbf{A} , sono limitati.*

Ed invero, se M è l'estremo superiore di $|f(P)|$ in \mathbf{A} , riesce:

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} |I'(\mathbf{T})| \leq \\ |I''(\mathbf{T})| \leq \end{array} \right\} \int_{\mathbf{T}} |f(P)| dT \leq M \cdot T,$$

laddove è sempre $M \cdot T \leq M \cdot A$.

II. *Se la funzione $f(P)$ è limitata nell'insieme limitato \mathbf{A} , si ha:*

$$\lim_{T \rightarrow 0} I'(\mathbf{T}) = \lim_{T \rightarrow 0} I''(\mathbf{T}) = 0.$$

Ciò è espresso dalle (2).

Designamo ora con $[O]_{\mathbf{A}}$ e $[O]''_{\mathbf{A}}$ gli insiemi di operazioni già considerate, ma ordinate in questo altro modo: *Di un'operazione O_1 , corrispondente all'insieme \mathbf{T}_1 , diremo seguenti tutte quelle che corrispondono a insiemi \mathbf{T} aventi una misura non inferiore a quella di \mathbf{T}_1* . Le due funzioni (1) danno ora luogo a due variabili ordinate che diconsi *ottenute facendo tendere la misura di \mathbf{T} alla misura di \mathbf{A}* . I limiti di queste variabili ordinate si designeranno con le notazioni

$$\lim'_{T \rightarrow A} I, \quad \lim''_{T \rightarrow A} I.$$

Sussiste la proposizione:

III. *Se la funzione $f(P)$ è limitata nell'insieme limitato \mathbf{A} , si ha:*

$$(3) \quad \lim_{T \rightarrow A} I'(\mathbf{T}) = I'(\mathbf{A}), \quad \lim_{T \rightarrow A} I''(\mathbf{T}) = I''(\mathbf{A}).$$

Cominciamo dall'osservare che è sempre possibile costruire un insieme \mathbf{T} contenuto in \mathbf{A} , la cui misura differisca da quella di \mathbf{A} per meno di qualunque numero prefissato. Basta infatti ricordare

che la misura di A è il limite della misura della somma (elementare) di taluni domini rettangolari formati, ciascuno, di punti interni ad A . Si vede anzi, è bene osservarlo, che un tale insieme T può essere anche supposto chiuso (ed altresì costituito di punti interni ad A). Ciò posto, comunque sia stato assegnato il numero positivo ε , diciamo δ quel corrispondente numero positivo tale che se $T \leq \delta$ risulti $|I'(T)| \leq \varepsilon$, $|I''(T)| \leq \varepsilon$. Costruiamo un insieme T_ε la cui misura T_ε differisca da quella di A per non più di δ ; dico che per ogni insieme $T (< A)$ la cui misura T non sia inferiore a T_ε , si ha:

$$|I'(A) - I'(T)| \leq \varepsilon, \quad |I''(A) - I''(T)| \leq \varepsilon.$$

Ed invero, poichè $T_\varepsilon \leq T \leq A$, ne segue $\text{mis}(A - T) = A - T \leq \delta$ e pertanto $|I'(A - T)| \leq \varepsilon$, $|I''(A - T)| \leq \varepsilon$. Ma $I'(A - T) = I'(A) - I'(T)$, $I''(A - T) = I''(A) - I''(T)$.

Se si fa ricorso all'osservazione iniziale del ragionamento testè fatto subito si vede che:

III'. *Detta, come sempre in questo articolo, $[A]$ la totalità degli insiemi T chiusi (misurabili) e contenuti in A , risulta pure:*

$$\lim_{T \rightarrow A} I'(T)(\text{su } [A]) = I'(A) \quad \lim_{T \rightarrow A} I''(T)(\text{su } [A]) = I''(A).$$

In virtù dell'osservazione indicata, si vede che queste relazioni di limite continuano a sussistere anche se alla totalità $[A]$ si sostituisce quella degli insiemi chiusi (misurabili) costituiti, ciascuno, di punti interni ad A ,

Considerando le proposizioni I, II e III', noi introdurremo il concetto di integrale per una funzione non limitata, esteso ad un insieme limitato e misurabile A di $S_{(r)}$, cercando, unicamente, di conservare le proprietà per l'integrale, espresse da quelle proposizioni. Per non interrompere il corso della trattazione conviene permettere il seguente:

Lemma. *Sia A un qualsiasi insieme limitato e misurabile, è sempre possibile costruire una successione $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, di insiemi chiusi, misurabili, contenuti in A e tali che: a) sia sempre $C_n < C_{n+1}$, b) comunque si assegni un insieme chiuso T , costituito di punti interni ad A , esista un insieme C_n contenente T . Ne segue $\lim \text{mis } C_n = \text{mis } A$.*

Sia invero R un dominio rettangolare contenente A e p un fisso numero naturale non inferiore a due. Dividendo ciascun lato di R in p^n parti eguali ($n = 1, 2, \dots$) decomponiamo, corrispondentemente, al solito modo, il dominio R in p^{nr} domini rettangolari parziali eguali e indichiamo con C_n la somma di quelli fra questi domini che sono contenuti in A . Evidentemente sarà $C_n < C_{n+1}$, $\lim \text{mis } C_n = \text{mis } A$. Sia ora T un qualsiasi insieme chiuso costituito di punti interni ad A , risulterà $FT < A - FA$, e pertanto la distanza d fra le due frontiere FA e FT diversa da zero. Ora evidentemente, non appena n è talmente grande che la diagonale dei domini rettangolari di decomposizione del dominio R , riesca minore di d , l'insieme T sarà contenuto in C_n .

Una successione di insiemi (chiusi e misurabili), come la successione $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ testè considerata, sarà da noi detta *invadente* *v'insieme* A .

Ciò posto, andiamo a dare la definizione di *funzione sommabile* su un insieme limitato e misurabile A . Diremo che una funzione $f(P)$ è sommabile sopra un insieme limitato e misurabile A quando, N designando un certo insieme chiuso di estensione nulla, contenuto in A , 1°) la funzione $f(P)$ sia definita, almeno, in ogni punto dell'insieme $A - N$; 2°) essa riesca limitata in ogni insieme della totalità $[A - N]$ costituita dagli insiemi chiusi e misurabili, contenuti in $A - N$; 3°) l'insieme numerico descritto dall'integrale

$$(4) \quad H(T) = \int_T'' |f(P)| dT,$$

al variare di T in $[A - N]$, sia limitato.

Esempi. Affrettiamoci a dare alcuni esempi notevoli di funzioni sommabili.

1°) Sia $g(x, y)$ una funzione limitata delle due variabili x e y , definita nel dominio rettangolare R del piano (x, y) , di punti estremi $(0, 0)$ e (a, b) ($a > 0, b > 0$) e sia M l'estremo superiore di $|g(x, y)|$ in R . Se α e β sono due numeri positivi, minori dell'unità, ponendo

$$f(x, y) = \frac{g(x, y)}{x^\alpha y^\beta}, \quad (\alpha < 1, \beta < 1)$$

detto N l'insieme dei punti di R per i quali è $x = 0$ oppure $y = 0$,

si viene a definire una funzione in ogni punto di $\mathbf{R}-\mathbf{N}$, la quale riesca sommabile in \mathbf{R} . Invero, preso un qualsiasi insieme chiuso \mathbf{T} , contenuto in $\mathbf{R}-\mathbf{N}$, esso avrà da \mathbf{N} una distanza $h > 0$. Diciamo \mathbf{R}_h il rettangolo del piano (x, y) di punti estremi (h, h) e (a, b) , si ha $\mathbf{T} < \mathbf{R}_h < \mathbf{R}$ e successivamente

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}}'' \left| \frac{g(x, y)}{x^\alpha y^\beta} \right| dx dy &\leq M \int_{\mathbf{R}_h} \frac{dx dy}{x^\alpha y^\beta} = M \int_{(h, a)} dx \int_{(h, b)} \frac{dy}{x^\alpha y^\beta} = M \left(\int_{(h, a)} \frac{dx}{x^\alpha} \right) \left(\int_{(h, b)} \frac{dy}{y^\beta} \right) = \\ &= M \frac{a^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}}{1-\alpha} \frac{b^{1-\beta} - h^{1-\beta}}{1-\beta} < \frac{Ma^{1-\alpha} b^{1-\beta}}{(1-\alpha)(1-\beta)}. \end{aligned}$$

2°) Allo stesso modo si vede che se $g(x, y, z)$ è una funzione delle tre variabili x, y, z , il cui modulo, nel dominio rettangolare \mathbf{R} dello spazio, di punti estremi $(0, 0, 0)$ e (a, b, c) , è limitato superiormente dal numero M , ponendo

$$f(x, y, z) = \frac{g(x, y, z)}{x^\alpha y^\beta z^\gamma}, \quad (\alpha < 1, \beta < 1, \gamma < 1)$$

si ha una funzione sommabile sopra \mathbf{R} . Detto \mathbf{N} l'insieme dei punti per i quali è $xyz = 0$, per ogni insieme chiuso \mathbf{T} contenuto in $\mathbf{R} - \mathbf{N}$ si trova

$$\int_{\mathbf{T}}''' \left| \frac{g(x, y, z)}{x^\alpha y^\beta z^\gamma} \right| dx dy dz < \frac{Ma^{1-\alpha} b^{1-\beta} c^{1-\gamma}}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}.$$

Sono di immediata dimostrazione le proposizioni seguenti:

IV. *Le due funzioni $f(P)$ e $|f(P)|$ sono sempre sommabili insieme. Se $f(P)$ è sommabile su \mathbf{A} è altresì sommabile sopra qualunque insieme misurabile contenuto in \mathbf{A} . Se \mathbf{V} insieme \mathbf{A} è elementarmente decomponibile in due o più insiemi misurabili sopra ciascuno dei quali la funzione $f(P)$ è sommabile, essa è altresì sommabile su \mathbf{A} .*

Dimostriamo che:

V. *Siano \mathbf{N} e \mathbf{N}_1 due insiemi chiusi di estensione nulla, contenuti in \mathbf{A} , le due funzioni $f(P)$ e $f_1(P)$ siano, rispettivamente, definite in $\mathbf{A} - \mathbf{N}$ e in $\mathbf{A} - \mathbf{N}_1$; dalla sommabilità di $f_1(P)$ su \mathbf{A} si deduce quella di $f(P)$ se, in ogni punto di $\mathbf{A} - (\mathbf{N} + \mathbf{N}_1)$, riesca $|f(P)| \leq |f_1(P)|$.*

Ed invero, dalla relazione $|f(P)| \leq |f_1(P)|$, si deduce che l'insieme numerico descritto da $H(T)$ al variare di T in $[A - (N + N_1)]$ è limitato superiormente da un certo numero L . Sia ora U un qualsiasi insieme di $[A - N]$, poichè

$$H(U) = \lim_{T \rightarrow U} H(T) \text{ (su } [U - N_1]),$$

si ricava ancora $H(U) \leq L$.

Esempi. Ulteriori importanti esempi di funzioni sommabili sono i seguenti:

3°) Siano A un qualsiasi insieme limitato e misurabile del piano (x, y) , $g(P)$ una funzione definita in A , ed ivi limitata, α un numero positivo minore di due, $Q(\xi, \eta)$ un punto di A , ponendo

$$f(Q, P) = g(P) : \overline{PQ}^\alpha, \quad (\alpha < 2)$$

si ottiene una funzione sommabile su A . Detto R un dominio rettangolare contenente A , poniamo $g_1(P) = g(P)$ se P è in A , $g_1(P) = 0$ se P è in $R - A$, poniamo poi $f_1(Q, P) = g_1(P) : \overline{PQ}^\alpha$. Dalla sommabilità di $f_1(Q, P)$ su R segue quella di $f(Q, P)$ su A . Ma

$$\overline{PQ} \geq 2^{1/2} |x - \xi|^{1/2} |y - \eta|^{1/2},$$

e quindi

$$|f_1(Q, P)| \leq \frac{|g_1(P)|}{2^{\alpha/2} |x - \xi|^{\alpha/2} |y - \eta|^{\alpha/2}},$$

e pertanto, poichè (es. 1°) la funzione al secondo membro di questa disuguaglianza è sommabile su R , segue (teor. V) la sommabilità di $f_1(Q, P)$. Se T è un qualsiasi insieme chiuso contenuto in $A - Q$ si trova

$$\int_T |f(Q, P)| dT \leq \frac{M(ab)^{1 - \frac{\alpha}{2}}}{2^{\alpha/2} (2 - \alpha)^2},$$

ove M è l'estremo superiore di $|g(P)|$ in A e a e b sono le dimensioni di R .

4°) Siano A un qualsiasi insieme limitato e misurabile dello spazio (x, y, z) , $g(P)$ una funzione definita in A , ed ivi limitata, α un numero positivo minore di tre, $Q(\xi, \eta, \zeta)$ un punto di A , ponendo

$$f(Q, P) = g(P) : \overline{PQ}^\alpha, \quad (\alpha < 3)$$

si ottiene una funzione sommabile su A . Si ha invero

$$\overline{PQ} \geq 6^{1/6} |x - \xi|^{1/3} |y - \eta|^{1/3} |z - \zeta|^{1/3},$$

e quindi (es. 2° e teor. V) se a, b e c sono le dimensioni di un dominio rettangolare contenente A , se M è l'estremo superiore di $|g(P)|$ in A , e se T è un qualsiasi insieme chiuso contenuto in $A - Q$, si trova:

$$\int_T'' |f(Q, P)| dT \leq \frac{8 M (abc)^{1 - \frac{\alpha}{3}}}{27 6^{\alpha/6} (3 - \alpha)^3},$$

Nella teoria delle funzioni sommabili sono utili i due seguenti teoremi che forniscono due criteri di sommabilità.

VI. *Se N è un insieme chiuso, di estensione nulla, contenuto nell'insieme limitato e misurabile A e se $f(P)$ è una funzione definita in $A - N$, limitata in ogni insieme della totalità $[A - N]$, condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f(P)$ sia sommabile su A è che esista una particolare successione di insiemi $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, invadente $A - N$, tale che la seguente successione monotona di numeri positivi.*

$$(5) \quad H(C_1), H(C_2), \dots, H(C_n), \dots,$$

sia limitata superiormente.

Occorre soltanto dimostrare la sufficienza della condizione. Sia L il limite (finito) della successione (5), e sia U un qualsiasi insieme di $[A - N]$, costituito di punti interni ad $A - N$. Poichè esiste un insieme C_s contenente U , si avrà $H(U) \leq H(C_s) \leq L$; dico che per un qualsiasi insieme della totalità $[A - N]$ sarà sempre $H(T) \leq L$. Ed invero se U varia mantenendosi sempre in $T - FT$, si ha:

$$H(U) \leq L, \quad H(T) = \lim_{U \rightarrow T} H(U) \text{ (su } [T - FT]).$$

VII. *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente, condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f(P)$ sia sommabile su A è che risulti, variando T in $[A - N]$,*

$$\lim_{T \rightarrow 0} H(T) = \lim_{T \rightarrow 0} \int_T'' |f(P)| dT = 0.$$

La condizione è necessaria. Ed invero se la funzione $f(P)$ è sommabile su A , detto L l'estremo superiore dell'insieme numerico descritto da H al variare di T in $[A - N]$, si potrà costruire un insieme U di questa totalità per il quale risulti $L - \epsilon/2 \leq H(U) \leq L$. Se l'insieme T , della stessa totalità, è contenuto in $A - U$, poichè $L \geq H(U + T) = H(U) + H(T) \geq H(U) \geq L - \epsilon/2$, risulterà sempre $H(T) \leq \epsilon/2$. Ma (teor. II) è possibile determinare un numero positivo δ tale che per ogni insieme T , contenuto in U , per il quale sia $\text{mis } T \leq \delta$ riesca $H(T) \leq \epsilon/2$, e quindi, per ogni arbitrario insieme della totalità $[A - N]$, la cui misura non superi δ , si avrà

$$H(T) = H(T \cdot U) + H(T \cdot (A - U)) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

La condizione è sufficiente. Ed invero, se, per ogni insieme della totalità $[A - N]$ la cui misura non superi il numero positivo δ , riesce $H(T) \leq \epsilon$, costruito un insieme U di questa totalità la cui misura differisca da quella di A per non più di δ , per ogni insieme T di $[A - N]$, si avrà

$$H(T) = H(T \cdot U) + H(T \cdot (A - U)) \leq H(U) + \epsilon.$$

La definizione di minimo e di massimo integrale per una funzione sommabile, estesi ad un insieme limitato e misurabile A , si fonda sul seguente teorema:

VIII. *Se la funzione $f(P)$ è sommabile sull'insieme limitato e misurabile A , posto*

$$I'(T) = \int_T f(P) dT, \quad I''(T) = \int_T'' f(P) dT,$$

esistono, determinati e finiti, i due limiti

$$(6) \quad \lim_{T \rightarrow A} I'(T) (\text{su } [A - N]), \quad \lim_{T \rightarrow A} I''(T) (\text{su } [A - N]).$$

Preso, arbitrariamente, il numero positivo ϵ , risulti $H(T) \leq \epsilon/2$, tutte le volte che, essendo T in $[A - N]$, si abbia $T \leq \delta$. Siano ora T_1 e T_2 due arbitrari insiemi di $[A - N]$ le cui misure differiscano, ciascuna, da quella di A per non più di δ , poichè,

$$T_1 - T_1 \cdot T_2 < A - T_2, \quad T_2 - T_1 \cdot T_2 < A - T_1,$$

riesce $\text{mis}(T_1 - T_1 \cdot T_2) \leq \delta$, $\text{mis}(T_2 - T_1 \cdot T_2) \leq \delta$, e quindi

$$H(T_1 - T_1 \cdot T_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad H(T_2 - T_1 \cdot T_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'altra parte

$$I''(T_1) - I''(T_2) = I''(T_1 - T_1 \cdot T_2) - I''(T_2 - T_1 \cdot T_2),$$

$$I'(T_1) - I'(T_2) = I'(T_1 - T_1 \cdot T_2) - I'(T_2 - T_1 \cdot T_2),$$

e quindi

$$\left. \begin{array}{l} |I''(T_1) - I''(T_2)| \leq \\ |I'(T_1) - I'(T_2)| \leq \end{array} \right\} H(T_1 - T_1 \cdot T_2) + H(T_2 - T_1 \cdot T_2) \leq \varepsilon.$$

E ciò dimostra il teorema.

Dopo ciò possiamo dare la seguente *definizione di minimo e di massimo integrale per una funzione sommabile*: I due limiti (6) discussi, rispettivamente, il minimo ed il massimo integrale della funzione sommabile $f(P)$ estesi all'insieme limitato e misurabile A e denotansi come simboli

$$(7) \quad \int_A' f(P) dT, \quad \int_A'' f(P) dT.$$

Evidentemente: Se la funzione $f(P)$ è sommabile su A , arbitrariamente scelta in $[A - N]$ una successione di insiemi $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ tale che $\lim \text{mis } C_n = \text{mis } A$, si avrà sempre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n}' f(P) dT = \int_A' f(P) dT, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n}'' f(P) dT = \int_A'' f(P) dT.$$

In particolare, ciò avverrà se la successione scelta invade $A - N$; in tal caso, se la funzione sommabile $f(P)$ è non negativa in A , la variabile $I''(C_n)$ non decresce al crescere di n e si ha pertanto che: *Se la funzione non negativa $f(P)$ è sommabile su A il massimo integrale di essa esteso ad A è l'estremo superiore dell'insieme numerico descritto da $I''(T)$ al variare di T in $[A - N]$.*

Diremo *integrabile su A* una funzione sommabile su A , se essa è integrabile su ogni insieme T di $[A - N]$. Per una funzione sommabile integrabile i suoi due integrali minimo e massimo, coincidono in ciò che si chiama l'integrale della funzione [esteso ad A e che denotasi con i simboli (7) privati degli apici. In particolare: *Ogni funzione sommabile su A che sia continua in ogni punto di*

$A - N$ è integrabile su A . Le funzioni degli esempi 1°, 2°, 3° e 4° sono integrabili su A se tale è la funzione $g(P)$.

Passiamo ora in rassegna i teoremi del n° 89, per indagare quali delle proprietà espresse da questi rimangono valide per gli integrali delle funzioni non limitate, supposte sommabili.

Il teor. II è immediato, il teor. III non ha senso, il teor. IV dell'additività è del pari immediato. I teorr. V, VI e VII si estendono immediatamente agli integrali delle funzioni sommabili, non appena si sia dimostrato il seguente:

IX. *La funzione $f(P)$, definita in ogni punto di $A - N$, sia sommabile su A . Sia N_1 un altro insieme chiuso, di estensione nulla, contenuto in A , se si impone a T di variare nella totalità $[A - (N + N_1)]$, sarà sempre*

$$\lim_{T \rightarrow A} \int_T f(P) dT = \int_A f(P) dT, \quad \lim_{T \rightarrow A} \int_T'' f(P) dT = \int_A'' f(P) dT.$$

Ed invero, si può sempre costruire un insieme chiuso (per esempio, somma elementare di domini rettangolari) contenuto in $A - (N + N_1)$, avente una misura che differisca da quella di A per meno di un termine arbitrariamente assegnato. Ne segue:

X. *Se due o più funzioni f_1, f_2, \dots, f_n sono sommabili sull'insieme A , riesce pure tale una qualsiasi loro combinazione lineare a coefficienti costanti, e fra gli integrali della somma, della differenza e del prodotto $cf_i(P)$ (c costante) sussistono i teorr. V, VI e VII del n° 89. In particolare, se ciascuna funzione $f_i(P)$ è integrabile su A , tale è pure una qualsiasi loro combinazione lineare a coefficienti costanti e sussiste il teor. IX del n° 91 della distribuitività dell'integrale.*

Limitiamoci a dimostrare che se f_1 e f_2 sono sommabili su A , tale è pure la somma $f = f_1 + f_2$ e che per gli integrali λ' e λ'' , λ_1' e λ_1'' , λ_2' e λ_2'' di f, f_1, f_2 sussistono le relazioni (2) del n° 89. La f_1 sia definita in $A - N_1$ e la f_2 in $A - N_2$, allora la $f = f_1 + f_2$ sarà definita in $A - (N_1 + N_2)$. Inoltre, variando T in $[A - (N_1 + N_2)]$, poichè

$$\int_T'' |f_1(P) + f_2(P)| dT \leq \int_T'' \{|f_1(P)| + |f_2(P)|\} dT \leq \int_T'' |f_1(P)| dT + \int_T'' |f_2(P)| dT,$$

il massimo integrale di $|f(P)|$ esteso a \mathcal{T} descrive un insieme numerico limitato. La somma f è dunque sommabile su \mathcal{A} . D' altra parte, per gli integrali $I'(\mathcal{T})$ e $I''(\mathcal{T})$, $I_1'(\mathcal{T})$ e $I_1''(\mathcal{T})$, $I_2'(\mathcal{T})$ e $I_2''(\mathcal{T})$, delle funzioni f, f_1, f_2 , estesi ad un insieme \mathcal{T} variabile in $[\mathcal{A} - (N_1 + N_2)]$ si ha sempre

$$I_1' + I_2' \leq I' \leq \frac{I_1' + I_2''}{I_1'' + I_2'} \leq I'' \leq I_1'' + I_2'',$$

e pertanto, passando al limite facendo tendere \mathcal{T} ad \mathcal{A} , si ottengono (in forza del teor. IX) le (2) del n° 89.

In virtù del teor. IX, si estende subito alle funzioni sommabili il teor. VIII del n° 89. Altrettanto immediata è l'estensione a tali funzioni dei teorr. IX, X, XII, XIII e XIV di quel numero. Si osservi ancora il teorema:

XI. *Se la funzione $\varphi(P)$ è sommabile su \mathcal{A} e se la funzione $f(P)$ è definita in tutto \mathcal{A} ed è ivi limitata, il prodotto $f(P)\varphi(P)$ è pure sommabile su \mathcal{A} . Se $f(P)$ e $\varphi(P)$ sono integrabili tale è pure il prodotto $f(P)\varphi(P)$ e — se è sempre $\varphi(P) \geq 0$ — sussiste il teorema della media:*

$$\int_{\mathcal{A}} f(P)\varphi(P) dT = \mu \int_{\mathcal{A}} \varphi(P) dT,$$

ove μ è un numero compreso fra gli estremi inferiore e superiore di $f(P)$ in \mathcal{A} .

Passiamo ora a studiare il concetto di integrale esteso ad un insieme \mathcal{V} non limitato e misurabile dello spazio $\mathcal{S}_{(r)}$.

Diremo che una funzione $f(P)$ è sommabile sopra un insieme illimitato e misurabile \mathcal{V} dello spazio $\mathcal{S}_{(r)}$, quando: 1° essa è sommabile sopra ogni insieme misurabile e limitato \mathcal{A} contenuto in \mathcal{V} ; 2° l'insieme numerico descritto dall'integrale

$$H(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} |f(P)| dT,$$

al variare di \mathcal{A} in \mathcal{V} , è limitato.

Sia \mathcal{N} l'insieme dei punti di \mathcal{V} (se esiste) ove manca la definizione della funzione $f(P)$ e sia $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_s, \dots$ una successione di insiemi misurabili invadente lo spazio. Poichè, per ipotesi, la fun-

zione $f(P)$ è sommabile in $V.C_s$, l'insieme $N.C_s$ ha un'estensione nulla, comunque grande sia l'indice s , e si ha pertanto: *Se la funzione $f(P)$ è sommabile sull'insieme (illimitato e misurabile) V , l'insieme N , se esiste, dei punti ove manca la definizione di $f(P)$ è di estensione nulla.*

Poichè $H(A)$ è l'estremo superiore dell'insieme numerico descritto da $H(T)$ al variare di T in $[A - N]$, possiamo dire che:

XII. Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f(P)$ sia sommabile sopra l'insieme (misurabile e illimitato) V è che l'insieme N , se esiste, dei punti di V ove manca la definizione della $f(P)$ sia di estensione nulla e che l'integrale $H(T)$, al variare dell'insieme limitato, chiuso e misurabile T in $V - N$, descriva un insieme numerico limitato.

Esempi. 5°) Se la funzione $f(P)$ è ovunque definita in V e vi è limitata, mentre V ha estensione finita, la $f(P)$ è sommabile su V .

6°) Sia h un numero positivo, V un insieme illimitato e misurabile del piano (x, y) per i punti del quale si abbia $x \geq h, y \geq h$; $g(x, y)$ una funzione ovunque definita in V ed ivi limitata, α e β due numeri maggiori dell'unità. Ponendo

$$f(x, y) = \frac{g(x, y)}{x^\alpha y^\beta}, \quad (\alpha > 1, \beta > 1)$$

si viene a definire una funzione che dico essere sommabile su V . Sia invece A un qualsiasi insieme limitato e misurabile contenuto in V , sia R_{hk} un dominio rettangolare, di punti estremi (h, h) e (k, k) contenente A e sia M l'estremo superiore di $|g(x, y)|$, si ha successivamente,

$$\int_A \left| \frac{g(x, y)}{x^\alpha y^\beta} \right| dx dy \leq M \int_{R_{hk}} \frac{dx dy}{x^\alpha y^\beta} = M \left(\int_{(h, k)} \frac{dx}{x^\alpha} \right) \left(\int_{(h, k)} \frac{dy}{y^\beta} \right) < \frac{M}{(\alpha-1)(\beta-1)h^{\alpha+\beta-2}}.$$

7°) Sia h un numero positivo, V un insieme illimitato misurabile dello spazio (x, y, z) , per i punti del quale si abbia $x \geq h, y \geq h, z \geq h$, $g(x, y, z)$ una funzione ovunque definita in V ed ivi limitata, α, β e γ tre numeri maggiori dell'unità. Come nell'esempio precedente si vede che posto

$$f(x, y, z) = \frac{g(x, y, z)}{x^\alpha y^\beta z^\gamma}, \quad (\alpha > 1, \beta > 1, \gamma > 1)$$

si definisce una funzione sommabile su V .

Continuano, evidentemente, a sussistere inalterati i teorr. IV e V anche per le funzioni sommabili sugli insiemi illimitati. Se ne deducono i seguenti ulteriori

Esempii. 8°) Se l'origine O delle coordinate del piano (x, y) è esterno all'insieme illimitato e misurabile V , se $g(x, y)$ è definita ovunque in questo insieme, e vi è limitata, e se α è un numero maggiore di due, posto

$$f(P) = g(P) : \overline{OP}^\alpha \quad (\alpha > 2)$$

si ha una funzione sommabile.

9°) Se l'origine O delle coordinate dello spazio (x, y, z) è esterno all'insieme illimitato e misurabile V , se $g(x, y, z)$ è definita ovunque in questo insieme e vi è limitata, e se α è un numero maggiore di tre, posto

$$f(P) = g(P) : \overline{OP}^\alpha \quad (\alpha > 3)$$

si ha una funzione sommabile.

È di immediata dimostrazione il teorema:

XIII. Se la funzione $f(P)$ è sommabile sopra ogni insieme limitato A contenuto in V , condizione necessaria e sufficiente affinché essa sia sommabile su V è che esista una particolare successione $C_1, C_2, \dots, C_s, \dots$, di insiemi misurabili, invadente lo spazio, tale che la seguente successione monotona di numeri positivi

$$H(C_1 \cdot V), HC_2 \cdot V, \dots, H C_s \cdot V, \dots,$$

sia limitata superiormente.

Nell'ipotesi del teorema ora enunciato, per ogni insieme (limitato e misurabile) A contenuto in V , consideriamo i due integrali

$$(8) \quad I'(A) = \int_A f(P) dT, \quad I''(A) = \int_A f(P) dT.$$

Diciamo $[O]'_\infty$ e $[O]''_\infty$ gli insiemi di operazioni consistenti, ciascuna, nel fissare l'insieme A e nel calcolare, rispettivamente, le

funzioni $I'(A)$ e $I''(A)$, ordinate al modo seguente: Di ogni operazione O_1 , corrispondente all'insieme A_1 , avente dall'origine delle coordinate la distanza R_1 , diciamo seguenti tutte quelle che corrispondono a insiemi A aventi dalla detta origine una distanza non inferiore a R_1 . Le funzioni (8) dànno così luogo a due variabili ordinate che discansi *ottenute facendo tendere all'infinito la distanza $R = \overline{OA}$ dell'insieme variabile A* dall'origine O delle coordinate. I limiti di queste variabili si designano con le notazioni

$$\lim'_{\overline{OA} \rightarrow \infty} I, \quad \lim''_{\overline{OA} \rightarrow \infty} I.$$

Andiamo a dimostrare il teorema:

XIV. *Nelle ipotesi del teor. prec., condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f(P)$ sia sommabile su V è che riesca*

$$\lim_{\overline{OA} \rightarrow \infty} H(A) = \lim_{\overline{OA} \rightarrow \infty} \int_A''' |f(P)| dT = 0.$$

La condizione è necessaria. Ed invero, se la funzione $f(P)$ è sommabile su V , detto L l'estremo superiore dell'insieme numerico descritto da $H(A)$ al variare di A in V , si potrà costruire un insieme B (limitato e misurabile) di V , per il quale risulti $L - \varepsilon \leq H(B) \leq L$. Sia R l'estremo superiore delle distanze dei punti di B dall'origine O delle coordinate, per ogni insieme A per cui $\overline{OA} \geq R$ riesce allora $H(A) \leq \varepsilon$.

La condizione è sufficiente. Ed invero se risulta $H(A) \leq \varepsilon$, per ogni insieme A per cui $\overline{OA} \geq R$, detto B l'insieme comune a V e al dominio circolare di centro in O o di raggio R , per ogni insieme A di V riesce:

$$H(A) = H(A \cdot B) + H(A - B) \leq H(B) + \varepsilon.$$

Sussiste poi il seguente teorema, su cui fonderemo la definizione di minimo e di massimo integrale per una funzione sommabile sopra un insieme illimitato e misurabile, estesi a questo insieme.

XV. *Se la funzione $f(P)$ è sommabile sull'insieme illimitato e misurabile V , posto $A' = V - A$, per le funzioni (8) esistono, determinati e finiti, i limiti*

$$(9) \quad \lim_{\overline{OA'} \rightarrow \infty} I'(A), \quad \lim_{\overline{OA'} \rightarrow \infty} I''(A).$$

Preso, invero, arbitrariamente, il numero positivo ε , risulti $H(\mathbf{A}) \leq \varepsilon/2$, per ogni insieme \mathbf{A} per cui $\overline{O\mathbf{A}} \geq R$. Siano ora \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 due arbitrarii insiemi (limitati e misurabili sempre) di \mathbf{V} per i quali si abbia $\overline{O\mathbf{A}_1'} \geq R$, $\overline{O\mathbf{A}_2'} \geq R$. Poichè $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 < \mathbf{A}_2'$, $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 < \mathbf{A}_1'$, si avrà

$$H(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2) \leq \varepsilon/2, \quad H(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2) \leq \varepsilon/2,$$

e quindi (come nella dimostrazione del teor. VIII)

$$|I'(\mathbf{A}_1) - I'(\mathbf{A}_2)| \leq \varepsilon, \quad |I''(\mathbf{A}_1) - I''(\mathbf{A}_2)| \leq \varepsilon.$$

I due limiti (9) diconsi, rispettivamente, *il minimo ed il massimo integrale* della funzione sommabile $f(P)$ estesi all'insieme (ilimitato e misurabile) \mathbf{V} e denotansi coi simboli

$$\int_{\mathbf{V}}' f(P) dT, \quad \int_{\mathbf{V}}'' f(P) dT.$$

È utile osservare che: *Comunque si assegni un numero positivo ε è sempre possibile costruire quanti si vogliono insiemi \mathbf{T} chiusi, limitati e misurabili e costituiti di punti interni a $\mathbf{V} - \mathbf{N}$ per ciascuno dei quali riesca:*

$$\left| \int_{\mathbf{T}}' f(P) dT - \int_{\mathbf{V}}' f(P) dT \right| \leq \varepsilon, \quad \left| \int_{\mathbf{T}}'' f(P) dT - \int_{\mathbf{V}}'' f(P) dT \right| \leq \varepsilon.$$

Si osservi pure che, evidentemente, se la funzione $f(P)$ è sommabile su \mathbf{V} , comunque si scelga una successione di insiemi misurabili $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_s, \dots$ invadente lo spazio, si avrà:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_s}' f(P) dT = \int_{\mathbf{V}}' f(P) dT, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_s}'' f(P) dT = \int_{\mathbf{V}}'' f(P) dT.$$

Se, in particolare, la funzione $f(P)$ non è mai negativa, la variabile $I''(\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_s)$ non decresce mai al crescere di s , e si ha pertanto che: *Se la funzione non negativa $f(P)$ è sommabile su \mathbf{V} , il massimo integrale di essa esteso a questo insieme è l'estremo superiore dell'insieme numerico descritto da $I''(\mathbf{T})$ al variare di \mathbf{T} nella totalità $[\mathbf{V} - \mathbf{N}]$.*

Anche per un insieme illimitato \mathbf{V} è utile la nozione di *successione di insiemi invadente \mathbf{V}* . Diremo tale ogni successione $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_s, \dots$ di insiemi chiusi, limitati e misurabili, contenuti in \mathbf{V} , tale che:

a) sia sempre $C_s < C_{s+1}$; b) comunque si assegni un insieme chiuso e limitato T , costituito di punti interni a V , esiste un insieme C^s contenente T . Dimostriamo (cfr. il lemma a pag. 416) che: Ogni insieme illimitato V possiede una successione di insiemi che lo invade. Diciamo perciò A_s l'insieme comune a V e al dominio quadrato col centro nell'origine dello spazio e di semidimensione s . Sia p un fissato numero naturale, maggiore di due, e, decomposto lo spazio in domini quadrati di dimensioni $1/p^s$, diciamo C_s la somma di questi domini quadrati che sono contenuti in A_s . Si dimostra subito che la successione $C_1, C_2, \dots, C_s, \dots$, così costruita, invade V . È poi immediato che:

XVI. Se la funzione $f(P)$ è sommabile sopra l'insieme illimitato e misurabile V , per una qualunque successione di insiemi $C_1, C_2, \dots, C_s, \dots$, invadente $V - N$, si ha:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{C_s} f(P) dT = \int_V f(P) dT, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{C_s} f(P) dT = \int_V f(P) dT.$$

Diremo *integrabile* su V una funzione sommabile su questo insieme se essa è integrabile su ogni insieme limitato e misurabile A contenuto in V , cioè se essa è integrabile su ogni insieme chiuso, limitato e misurabile T contenuto in $V - N$. Ogni funzione sommabile su V che sia continua in ogni punto di $V - N$ è integrabile su V . Ecc.

Lasciamo ormai al lettore il facile compito di constatare che tutti i teorr. del n° 89 che valgono per gli integrali delle funzioni sommabili estesi ad insiemi limitati, valgono pure per gli integrali di tali funzioni estesi ad insiemi non limitati.

È utile rilevare infine che: Se la funzione $f(P)$ è sommabile sull'insieme illimitato V , comunque si assegni un numero positivo ε , è sempre possibile determinarne due altri δ e R tali che, per ogni insieme misurabile A (limitato o no) contenuto in V , si abbia

$$\int_A |f(P)| dT \leq \varepsilon,$$

non appena si verifichi una delle seguenti circostanze: la misura di A non supera δ ; la distanza di A dall'origine non è inferiore a R . E reciprocamente.

95.* Passaggio al limite sotto il segno integrale per gli integrali delle funzioni sommabili. — Come al n° 93 consideriamo la funzione $f(\xi, \eta, \dots, x, y, \dots) \equiv f(Q, P)$ e supponiamo che, per ogni fissato punto Q di un determinato insieme B dello spazio (ξ, η, \dots) , la funzione $f(Q, P)$ sia funzione del punto $P(x, y, \dots)$, sommabile sopra un certo insieme A dello spazio (x, y, \dots) , insieme che supporremo sempre misurabile e dapprima indipendente da Q e limitato. Riescono allora definite in B le due funzioni di Q :

$$(1) \quad F'(Q) = \int_A f(Q, P) dT, \quad F''(Q) = \int_A f''(Q, P) dT.$$

L'insieme N , chiuso e di estensione nulla, dei punti di A ove può, eventualmente, mancare la definizione di $f(Q, P)$ dipenderà, in generale, da Q e perciò lo indicheremo con la notazione $N(Q)$. Sia Q_0 un punto limite di B , noi diremo che la *sommabilità su A della funzione $f(Q, P)$ è uniforme nelle vicinanze di Q_0* , se si verificano le seguenti circostanze:

a) Comunque si assegni in A un insieme T , chiuso e misurabile, che escluda tutti i punti di un certo insieme $N'(Q_0)$ — che può eventualmente anche non esistere — chiuso e di estensione nulla (quando esiste), si può sempre, corrispondentemente, determinare un dominio circolare $C(Q_0, T)$, su B (*), di centro in Q_0 , tale che, per ogni punto di esso, distinto da Q_0 , l'insieme $N(Q)$ non abbia alcun punto comune con T ; laddove la funzione $f(Q, P)$, al variare di Q in $C(Q_0, T) - Q_0$ e di P in T , descrive un insieme numerico limitato.

b) Comunque si assegni un numero positivo ε , è sempre possibile determinare, in corrispondenza, un altro numero positivo $\delta(\varepsilon)$ e un dominio circolare $C(Q_0, \varepsilon)$, su B , di centro in Q_0 , tali che per ogni punto Q di $C(Q_0, \varepsilon) - Q_0$, e per ogni insieme misurabile U , contenuto in A , la cui misura non superi $\delta(\varepsilon)$, si abbia sempre

$$\int_U |f(Q, P)| dT \leq \varepsilon.$$

(*) Per dominio circolare su B , di centro in Q_0 , intendiamo il prodotto di B per un dominio circolare di centro in Q_0 , cioè la totalità dei punti di B le cui distanze da Q_0 non superano un certo termine assegnato.

Come conseguenza della proprietà **b)** si deduce subito che: *La funzione*

$$\int_A'' |f(Q, P)| dT,$$

è limitata nelle vicinanze di Q_0 . Di conseguenza tali risulteranno pure le funzioni $F'(Q)$ e $F''(Q)$ definite dalle (1).

Ed invero, se $C(Q_0, 1)$ è quel dominio circolare su B , di centro in Q_0 , e $\delta(1)$ quel numero positivo, tali che per ogni punto Q in $C(Q_0, 1) - Q_0$ e per ogni insieme misurabile U , contenuto in A , avente una misura non superiore a $\delta(1)$, si abbia

$$\int_U'' |f(Q, P)| dT \leq 1,$$

decomposto, al solito modo, un dominio rettangolare contenente A , in domini rettangolari parziali, ciascuno di misura non superiore a $\delta(1)$, l'insieme A viene, in corrispondenza, elementarmente decomposto in un certo numero n di insiemi misurabili $U_{hk\dots}$, aventi ciascuno una misura non superiore a $\delta(1)$. Si avrà pertanto, in $C(Q_0, 1) - Q_0$,

$$\int_A'' |f(Q, P)| dT = \sum_{hk\dots} \int_{U_{hk\dots}}'' |f(Q, P)| dT \leq n.$$

Per la uniforme sommabilità su A della funzione $f(Q, P)$, nelle vicinanze del punto Q_0 di DB , insieme alla condizione **a)**, basta richiedere la seguente, che è equivalente alla **b)**, ma che, talvolta, è di questa più facilmente riscontrabile:

b') Comunque si assegni un numero positivo ε , è possibile costruire un particolare insieme T , della totalità $[A - N'(Q_0)]$, e un dominio circolare $C'(Q, \varepsilon)$, su B , di centro in Q_0 , contenuto in $C(Q_0, T)$, tale che per ogni suo punto Q , distinto da Q_0 , riesca

$$\int_{A-T}'' |f(Q, P)| dT \leq \varepsilon.$$

È importante la immediata proposizione seguente:

1. Se esiste un dominio circolare C , su B , di centro in Q_0 , tale che variando Q in $C - Q_0$, l'insieme $N(Q)$ si mantiene sempre entro

un certo insieme fisso N' chiuso e di estensione nulla, ed inoltre riesce sempre in $A - N'$

$$|f(Q, P)| \leq \Phi(P),$$

ove $\Phi(P)$ è una funzione, definita in $A - N'$, non negativa, indipendente da Q , sommabile su A , la sommabilità di $f(Q, P)$ su A è uniforme nelle vicinanze di Q_0 (*).

Ciò posto, andiamo a dimostrare il seguente generale teorema:

II. Se la funzione $f(Q, P)$ è sommabile su A , uniformemente nelle vicinanze del punto Q_0 di DB , e se comunque si fissi il punto P in ogni insieme T della totalità $[A - N'(Q_0)]$, la funzione $f(Q, P)$ tende, in Q_0 , ad un limite determinato e finito, uniformemente in T , si ha:

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \int_A' f(Q, P) dT = \int_A \left[\lim_{Q \rightarrow Q_0} f(Q, P) \right] dT,$$

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \int_A'' f(Q, P) dT = \int_A''' \left[\lim_{Q \rightarrow Q_0} f(Q, P) \right] dT.$$

Porremo

$$(2) \quad \lim_{Q \rightarrow Q_0} f(Q, P) = \varphi(Q_0, P).$$

La funzione $\varphi(Q_0, P)$ riesce definita ovunque si prenda il punto P in $A - N'(Q_0)$. Sia T il più arbitrario insieme della totalità $[A - N'(Q_0)]$, e manteniamo il punto Q in $C(Q_0, T) - Q_0$ e in $C(Q_0, 1) - Q_0$. Si ha allora, con L designando un certo numero fisso,

$$(2) \quad \int_T''' |f(Q, P)| dT \leq \int_A''' |f(Q, P)| dT \leq L,$$

(*) Un tipo di sommabilità uniforme ancora più particolare di quello indicato nella proposizione enunciata, viene sempre — esclusivamonte — considerato nei capitoli fondamentali dei trattati d'Analisi. Restringendosi però a quel tipo, nelle teorie fondamentali non rientra, ad esempio, lo studio delle ben modeste funzioni potenziali della Fisica-matematica! Vedasi più avanti (esercizi 3° e 4° del presente articolo ed esercizi 4° e 5° del n° 101) la semplicissima trattazione che — come particolarissima applicazione della teoria fondamentale qui svolta — ricevono le indicate funzioni.

e poichè la tendenza al limite espressa dalla (2) è uniforme in T ,

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \int_T''' |f(Q, P)| dT = \int_T''' |\varphi(Q_0, P)| dT,$$

e pertanto, per le (2),

$$\int_T''' |\varphi(Q_0, P)| dT \leq L.$$

Ciò prova intanto che la funzione $\varphi(Q_0, P)$ è sommabile su A .
Ho asserito anche che:

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \int_A'' f(Q, P) dT = \int_A'' \varphi(Q_0, P) dT, \quad \lim_{Q \rightarrow Q_0} \int_A''' f(Q, P) dT = \int_A''' \varphi(Q_0, P) dT.$$

Per dimostrarlo basta far vedere che, comunque si assegni il numero positivo ε , è possibile costruire un dominio circolare C , su B , di centro in Q_0 , tale che per ogni punto Q di $C - Q_0$ si abbia

$$(3) \quad \int_A''' |f(Q, P) - \varphi(Q_0, P)| dT \leq \varepsilon,$$

Risulta

$$\int_U''' |f(Q, P)| dT \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

se Q è in $C(Q_0, \varepsilon/3)$ e se $\text{mis } U \leq \delta(\varepsilon/3)$. Esiste un numero positivo $\delta' \leq \delta(\varepsilon/3)$ tale che se $\text{mis } U \leq \delta'$, riesce pure

$$\int_U''' |\varphi(Q_0, P)| dT \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sia ora T un arbitrario insieme della totalità $[A - N'(Q_0)]$, la cui misura differisca da quella di A per non più di δ' . Mantenendo Q in $C(Q_0, T, \varepsilon) \equiv C(Q_0, T) \cdot C(Q_0, \varepsilon/3) - Q_0$, si ha,

$$\begin{aligned} & \int_A''' |f(Q, P) - \varphi(Q_0, P)| dT \leq \\ & \leq \int_T''' |f(Q, P) - \varphi(Q_0, P)| dT + \int_{A-T}''' \{|f(Q, P)| + |\varphi(Q_0, P)|\} dT \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int''_T |f(Q, P) - \varphi(Q_0, P)| dT + \int''_{A-T} |f(Q, P)| dT + \int''_{A-T} |\varphi(Q_0, P)| dT \leq \\ &\leq \int''_T |f(Q, P) - \varphi(Q_0, P)| dT + \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Ma in T sussiste la (2), uniformemente, e pertanto è possibile costruire un dominio circolare C , su B , di centro in Q_0 , contenuto in $C(Q_0, T, \varepsilon)$, tale che in ogni punto di esso, distinto da Q_0 , risulti:

$$\int''_T |f(Q, P) - \varphi(Q_0, P)| dT \leq \frac{\varepsilon}{3};$$

ne segue che in $C - Q_0$ vale la (3).

Il concetto di ciò che chiameremo la *sommabilità uniforme* per le funzioni di una successione $f_1(P), f_2(P), \dots, f_s(P), \dots$, sommabili sopra un determinato insieme limitato e misurabile A , si deduce da quello già dato di sommabilità uniforme, su A , nelle vicinanze del punto Q_0 , per la funzione $f(Q, P)$, quando si consideri il caso particolare che l'insieme Q coincida con l'insieme $1, 1/2, \dots, 1/s, \dots$ dei reciproci dei numeri naturali e si ponga $f(1/s, P) = f_s(P)$, prendendo per Q_0 il punto zero. Come particolarissimo caso del teor. II si hanno dopo ciò i seguenti:

II'. *Se le funzioni della successione $f_1(P), f_2(P), \dots, f_s(P), \dots$, sono uniformemente sommabili sopra l'insieme limitato e misurabile A e se, in ogni insieme T della totalità $[A - N']$, la successione converge uniformemente, si ha:*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int'_A f_s(P) dT = \int'_A \left[\lim_{s \rightarrow \infty} f_s(P) \right] dT, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int''_A f_s(P) dT = \int''_A \left[\lim_{s \rightarrow \infty} f_s(P) \right] dT.$$

II''. *Se le funzioni della serie $g_1(P) + g_2(P) + \dots + g_s(P) + \dots$ sono tali che quelle della successione delle somme risultano uniformemente sommabili sull'insieme limitato e misurabile A e se, in ogni insieme T della totalità $[A - N']$, la serie è uniformemente convergente, si ha:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int'_A f_i(P) dT = \int'_A \left(\sum_i f_i(P) \right) dT, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \int''_A f_i(P) dT = \int''_A \left(\sum_i f_i(P) \right) dT.$$

Lasciamo al lettore la cura di stabilire il concetto di sommabilità uniforme su A , della funzione $f(Q, P)$, nelle vicinanze del punto ∞ , nel caso che sia illimitato l'insieme B ove può variare Q . Del pari al lettore affidiamo il compito di enunciare per le funzioni illimitate sommabili il teorema analogo al teor. III del n° 91.

Dal teorema II si deduce immediatamente il seguente importante corollario:

III. Se l'insieme B è chiuso e se la funzione $f(Q, P)$ è, su A , uniformemente sommabile nelle vicinanze di ogni punto di DB , mentre in ogni punto Q_0 di tale derivato risulta

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} f(Q, P) = f(Q_0, P),$$

uniformemente in ogni insieme T delle totalità $[A - N'(Q_0)]$, le due funzioni $F'(Q)$ e $F''(Q)$, definite dalle (1) sono continue in B . In particolare, se, essendo $\mu(P)$ una funzione definita in tutto A ed ivi limitata, si ha $f(Q, P) = \mu(P)g(Q, P)$, ove $g(Q, P)$ è, su A , uniformemente sommabile nelle vicinanze di ogni punto Q_0 di DB ed inoltre, comunque si prenda l'insieme T della totalità $[A - N'(Q_0)]$, continua nell'insieme chiuso $[C(Q_0, T), T]$ descritto dal punto $(\xi, \eta, \dots, x, y, \dots)$ al variare di $Q(\xi, \eta, \dots)$ in $C(Q_0, T)$ e di $P(x, y, \dots)$ in T , le due funzioni $F'(Q)$ e $F''(Q)$ definite dalle (1) sono continue in B . Se la funzione limitata $\mu(P)$ è inoltre integrabile su A , riesce pure tale la $f(Q, P)$, per ogni punto Q di DB e si ha, allora, la continuità in B della funzione:

$$(4) \quad F(Q) = \int_A \mu(P)g(Q, P) dT.$$

Vogliamo ora studiare l'importante questione della derivabilità parziale rispetto, per esempio, alla variabile ξ , della funzione $F(Q)$ definita dalla (4), nelle ipotesi seguenti: 1ª) L'insieme B è chiuso e dotato di punti interni; 2ª) la funzione $\mu(P)$ è definita in tutto A e vi è limitata e integrabile; 3ª) per ogni fissato punto Q di B la funzione $g(Q, P)$ è sommabile e integrabile su A ; 4ª) detto $N(Q)$ l'insieme dei punti di A ove può mancare la definizione di $g(Q, P)$, si deve avere che, per ogni punto Q di RB , comunque si assegni in A un insieme T , chiuso e misurabile, che escluda tutti i punti

di un insieme $N'(Q)$ — che può anche non esistere — chiuso e di estensione nulla (quando esiste), si possa sempre, in corrispondenza, determinare un dominio circolare $C(Q, T)$, su B , di centro in Q , tale che, per qualunque punto S di $C(Q, T)$, l'insieme $N(S)$ non abbia alcun punto comune con T ; 5^a) la funzione $g(Q, P)$ possiede in $[C(Q, T), T]$ la derivata parziale $g_{\xi}(Q, P)$, rispetto alla ξ , finita e continua (cfr. la locuzione abbreviata indicata a pag. 204).

Osserviamo che, nelle ipotesi fatte, la derivata $g_{\xi}(Q, P)$ riesce ben definita per Q in RB e P in $A - N'(Q)$. Dimostriamo, in primo luogo, il seguente importante teorema:

IV. *Se, avendo fissato il punto $Q(\xi, \eta, \dots)$ in RB , diamo ad h valori così limitati che il punto $Q_h(\xi + h, \eta, \dots)$ sia sempre in B , e se allora la funzione (di h, x, y, \dots)*

$$(5) \quad \frac{1}{h} [g(Q_h, P) - g(Q, P)],$$

riesce uniformemente sommabile, su A , nelle vicinanze del punto $h=0$, la funzione $F(Q)$ definita dalla (4) è parzialmente derivabile, rispetto alla ξ , nel detto punto Q di RB , e si ha:

$$(6) \quad F_{\xi}(Q) = \int_A \mu(P) g_{\xi}(Q, P) dT.$$

Anche questo teorema segue assai facilmente dal generale teor. II. Si ha invero

$$\frac{F(Q_h) - F(Q)}{h} = \int_A \mu(P) \frac{g(Q_h, P) - g(Q, P)}{h} dT,$$

e in virtù della supposta continuità di $g_{\xi}(Q, P)$ in $[C(Q, T), T]$, si ha che (cfr. la dimostrazione del teor. V del n° 95)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(Q_h, P) - g(Q, P)}{h} = g_{\xi}(Q, P),$$

uniformemente in ogni insieme chiuso T contenuto in $A - N'(Q)$.

Un caso particolare, degno di nota, del teorema ora dimostrato è il seguente:

V. *Se esiste un dominio circolare C , su B , col centro nel considerato punto Q di RB , tale che al variare del punto S in C , l'insie-*

me $N'(S)$ si mantiene sempre entro un certo insieme fisso N^* , chiuso e di estensione nulla, ed inoltre riesce sempre in $A - N^*$

$$|g_{\xi}(S, P)| \leq \Phi(P),$$

ove $\Phi(P)$ è una funzione non negativa, indipendente da S , sommabile su A , sussiste la formola (6) di derivazione parziale.

Ed invero, mantenendo Q_h in C , comunque si prenda P in $A - N^*$, si ha:

$$\left| \frac{1}{h} [g(Q_h, P) - g(Q, P)] \right| = |g_{\xi}(Q_{0h}, P)| \leq \Phi(P),$$

e ne segue la uniforme sommabilità su A , nelle vicinanze del punto $h=0$, del rapporto incrementale parziale (5).

Andiamo ora a considerare il caso, esso pure assai interessante anche per le applicazioni, in cui l'insieme ove può variare il punto $P(x, y, \dots)$ sia illimitato e misurabile. Indicheremo con V tale insieme. Sia Q_0 un punto limite di B , noi diremo che la sommabilità su V della funzione $f(Q, P)$ è uniforme nelle vicinanze di Q_0 , se si verificano le seguenti circostanze:

a) Comunque si assegni in V un insieme T , limitato, chiuso e misurabile, che escluda tutti i punti di un certo insieme $N'(Q_0)$ — che può eventualmente anche non esistere — quando esiste, chiuso e di estensione nulla (limitato o no), si può sempre, in corrispondenza, costruire un dominio circolare $C(Q_0, T)$, su B , di centro in Q_0 , tale che, per ogni punto di esso, distinto da Q_0 , l'insieme $N(Q)$ non abbia alcun punto comune con T , laddove la funzione $f(Q, P)$, al variare di Q in $C(Q_0, T) - Q_0$ e di P in T , descrive un insieme numerico limitato.

b) Comunque si assegni un numero positivo ε , è sempre possibile determinare, in corrispondenza, due altri numeri positivi $\delta(\varepsilon)$ e $R(\varepsilon)$, e un dominio circolare $C(Q_0, \varepsilon)$, su B , di centro in Q_0 , tali che per ogni punto Q di $C(Q_0, \varepsilon) - Q_0$ e per ogni insieme misurabile A (limitato o no) contenuto in V , si abbia sempre

$$\int_A'' |f(Q, P)| dT \leq \varepsilon,$$

non appena avvenga che: o la misura di A non supera $\delta(\varepsilon)$, oppure la sua distanza dall'origine non è inferiore a $R(\varepsilon)$.

Evidentemente: Se la funzione $f(Q, P)$ è, su V , uniformemente sommabile nelle vicinanze del punto Q_0 , essa è pure tale su ogni insieme misurabile contenuto in V , in particolare essa è tale su ogni insieme limitato e misurabile A contenuto in V . Ne segue: *La funzione*

$$(7) \quad \int_V''' |f(Q, P)| dT,$$

è limitata nelle vicinanze di Q_0 . E di conseguenza tali riescono pure le funzioni $F'(Q)$ e $F''(Q)$ definite dalle eguaglianze

$$(8) \quad F'(Q) = \int_V' f(Q, P) dT, \quad F''(Q) = \int_V'' f(Q, P) dT,$$

Se, invero, manteniamo Q in $C(Q_0, 1) - Q_0$ si ha sempre

$$\int_{V-A}''' |f(Q, P)| dT \leq 1,$$

essendo A l'insieme limitato comune a V e al dominio circolare di centro nell'origine e di raggio $R(1)$. D'altra parte, come già sappiamo, anche la funzione

$$\int_A''' |f(Q, P)| dT,$$

è limitata in $C(Q_0, 1)$, onde segue altrettanto per la (7), poichè

$$\int_V'' |f(Q, P)| dT = \int_A'' |f(Q, P)| dT + \int_{V-A}'' |f(Q, P)| dT.$$

Per la uniforme sommabilità su V della funzione $f(Q, P)$, nelle vicinanze del punto Q_0 di DB , insieme alla condizione *a)* basta richiedere la seguente, che equivale alla *b)* ma che talvolta è di questa più facilmente riscontrabile:

b') Comunque si assegni un numero positivo ε , è possibile costruire un particolare insieme T chiuso, limitato e misurabile contenuto in $A - N'(Q_0)$, e un dominio circolare $C'(Q_0, \varepsilon)$, su B , di centro in Q_0 , contenuto in $C(Q_0, T)$, tale che per ogni suo punto Q , distinto da Q_0 , riesca:

$$\int_{V-T}''' |f(Q, P)| dT \leq \varepsilon.$$

Evidentemente sussiste inalterata la proposizione I quando in essa si sostituisca l'insieme limitato A con l'insieme illimitato V .

Se ora conveniamo di indicare con $[A - N'(Q_0)]$ la totalità degli insiemi T limitati, chiusi e misurabili contenuti in $A - N'(Q_0)$, possiamo dimostrare il seguente teorema:

VI. *Sussiste inalterato il teor. II quando in esso si sostituisca l'insieme limitato A con l'insieme illimitato V .*

Posto

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} f(Q, P) = \varphi(Q_0, P),$$

allo stesso modo, come per il teor. II, si dimostra la sommabilità di $\varphi(Q_0, P)$ su V . Se A è il prodotto di V con un conveniente dominio circolare avente il centro nell'origine, si ha

$$(9) \quad \int_V'' |f(Q, P) - \varphi(Q_0, P)| dT \leq \int_A'' |f(Q, P) - \varphi(Q_0, P)| dT + 2\varepsilon,$$

ove ε è una quantità positiva arbitrariamente assegnata e il punto Q (sempre distinto da Q_0) è mantenuto entro un certo dominio circolare, su B , di centro in Q_0 . D'altra parte (teor. II) si ha:

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \int_A'' |f(Q, P) - \varphi(Q_0, P)| dT = 0,$$

e pertanto, mediante la (9), risulta dimostrato il nostro asserto. Ne segue:

VII. *Sussistono inalterati i teorr. II', II'', III, IV e V, quando in ciascuno di essi, si sostituisca l'insieme limitato A con l'insieme illimitato V .*

L'insieme A al quale viene esteso l'integrale della funzione $f(Q, P)$ sia ora supposto *funzione di Q* , e sia *limitato o no*. Vogliamo, infine, dare un gruppo di condizioni, che vengono a verificarsi in importantissimi casi delle applicazioni, sotto le quali si può asserire che l'integrale

$$(10) \quad F(Q) = \int_{A(Q)} f(Q, P) dT,$$

è funzione continua di Q . Le dette condizioni trovansi enunciate nelle ipotesi del seguente teorema:

VIII. Gli insiemi $A(Q)$ e $N(Q)$, limitati o no, dello spazio (x, y, \dots) siano funzioni del punto Q , ben definite nell'insieme B dello spazio (ξ, η, \dots) , ove può variare Q e sia sempre $A(Q)$ misurabile, $N(Q)$ chiuso, di estensione nulla e contenuto in $A(Q)$. Per ogni fissato punto Q dell'insieme B la funzione $f(Q, P)$ sia funzione di P definita in $A(Q) - N(Q)$, sommabile e integrabile su $A(Q)$. Sia B' un insieme chiuso e limitato contenuto in B e supponiamo che, comunque si assegni un numero positivo ε , sia sempre possibile, in corrispondenza, determinare entro ogni insieme $A(Q) - N(Q)$, un particolare insieme $T(Q, \varepsilon)$ funzione di Q (e di ε), chiuso, limitato e misurabile, per il quale si verificchino le seguenti circostanze: a) per qualsiasi punto Q di B' si ha:

$$\int_{A(Q) - T(Q, \varepsilon)} |f(Q, P)| dT \leq \varepsilon;$$

b) l'insieme $T(Q, \varepsilon)$ — per ogni ε — è in B' funzione continua di Q ;
c) al variare di Q in B' l'insieme $T(Q, \varepsilon)$ descrive un insieme chiuso e limitato $H(\varepsilon)$ dello spazio $(\xi, \eta, \dots, x, y, \dots)$ ove la funzione $f(Q, P)$ è continua. Si ha allora che: La funzione $F(Q)$ definita dalla (10) è continua in B' .

Devo dimostrare che se Q_0 è in DB' , comunque si assegni un numero positivo ε , è possibile, in corrispondenza, determinare un intorno circolare C di Q_0 , su B' , tale che se Q è in C si abbia

$$(11) \quad |F(Q) - F(Q_0)| \leq \varepsilon.$$

Ora, per ipotesi, per ogni punto Q in B' , risulta

$$\int_{A(Q) - T(Q, \varepsilon/3)} |f(Q, P)| dT \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

ma

$$\begin{aligned} & F(Q) - F(Q_0) = \\ &= \int_{T(Q, \varepsilon/3)} f(Q, P) dT - \int_{T(Q_0, \varepsilon/3)} f(Q_0, P) dT + \int_{A(Q) - T(Q, \varepsilon/3)} f(Q, P) dT - \int_{A(Q_0) - T(Q_0, \varepsilon/3)} f(Q_0, P) dT, \end{aligned}$$

e pertanto

$$(12) \quad |F(Q) - F(Q_0)| \leq \left| \int_{T(Q, \varepsilon/3)} f(Q, P) dT - \int_{T(Q_0, \varepsilon/3)} f(Q_0, P) dT \right| + \frac{2\varepsilon}{3};$$

ma (VI, 93) la funzione di Q

$$\int_{T(Q, \varepsilon/3)} f(Q, P) dT,$$

per le circostanze $b)$ e $c)$, riesce continua in B' , e quindi è possibile determinare un intorno circolare C di Q_0 , su B' , tale che se Q è in C , si abbia

$$\left| \int_{T(Q, \varepsilon/3)} f(Q, P) dT - \int_{T(Q_0, \varepsilon/3)} f(Q_0, P) dT \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dalla (12) segue allora che, se Q è in C , sussiste la (10).

Osservazioni. 1^a) Sia A^* l'insieme dei punti dello spazio (x, y, \dots) descritto da $A(Q)$, al variare di Q in B , e sia $\mu(P)$ una funzione limitata e integrabile definita in A^* . Si ha allora che, nelle ipotesi del teorema precedente, anche la seguente funzione di Q :

$$(13) \quad \int_{A(Q)} \mu(P) f(Q, P) dT,$$

è continua in B' .

2^a) Analogamente a quanto si è fatto al n° 93 si dovrebbe ora passare a dare un gruppo di condizioni sufficienti atte ad assicurare la derivabilità parziale delle funzioni (10) e (13). Noi ci dispenseremo dal far ciò, anche perchè lo studio della questione non ci ha dato, almeno fino ad ora, criteri sufficienti che siano senz'altro applicabili ai più importanti casi che si presentano nelle applicazioni. Ci riserveremo dunque di esaminare partitamente nei casi indicati la questione della derivabilità.

Esercizi. 1^o) Nel triangolo H del piano (x, y) , determinato dalle limitazioni $0 \leq x \leq h$, $0 \leq y \leq x$, è definita una funzione continua $g(x, y)$, dimostrare che la funzione della x :

$$(14) \quad F(x) = \int_{(0, x)} \frac{g(x, y) dy}{(x-y)^\alpha y^\beta},$$

ove α e β sono costanti *minori dell'unità*, è continua in ogni intervallo (a, b) contenuto in $(0, h)$, che escluda il punto zero.

Qui il punto variabile Q , della teoria generale, è rappresentato dalla variabile x , l'insieme B' dall'intervallo (a, b) dell'asse x , l'insieme $A(x)$ dall'intervallo $(0, x)$ dell'asse y , l'insieme $N(Q)$ dai punti 0 e x di quest'ultimo intervallo, la funzione $f(Q, P)$ dalla

$$f(x, y) = \frac{g(x, y)}{(x-y)^\alpha y^\beta}.$$

Dobbiamo anzitutto dimostrare che la funzione $f(x, y)$ è sommabile sopra ogni intervallo $(0, x)$, ovunque si prenda x in (a, b) . Detto M il massimo modulo di $g(x, y)$ in H , si ha

$$(15) \quad f(x, y) \begin{cases} \leq \frac{2^\alpha M}{x^\alpha y^\beta} & \text{per } 0 < y \leq \frac{x}{2}, \\ \leq \frac{2^\beta M}{x^\beta (x-y)^\alpha} & \text{per } \frac{x}{2} \leq y < x, \end{cases}$$

e poichè $1/y^\beta$ è sommabile in $(0, x/2)$ e $1/(x-y)^\alpha$ in $(x/2, x)$, la $f(x, y)$ sarà sommabile in $(0, x)$. Sia ora 2σ una quantità positiva minore di a e per ogni x dell'intervallo (a, b) consideriamo l'intervallo $T(x, \sigma)$ dell'asse y di punti estremi σ e $x - \sigma$. Tale intervallo è funzione continua di x . Si ha poi

$$\begin{aligned} \int_{A(x) - T(x, \sigma)} |f(x, y)| dy &\leq M \int_{(0, \sigma)} \frac{dy}{(x-y)^\alpha y^\beta} + M \int_{(x-\sigma, x)} \frac{dy}{(x-y)^\alpha y^\beta} \leq \\ &\leq \left(\frac{2^\alpha}{a^\alpha} \frac{\sigma^{1-\beta}}{1-\beta} + \frac{2^\beta}{a^\beta} \frac{\sigma^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right), \end{aligned}$$

pertanto, comunque si assegni un numero positivo ε , detto $\sigma(\varepsilon)$ un numero positivo, certamente esistente, per cui è

$$M \left(\frac{2^\alpha}{a^\alpha} \frac{\sigma^{1-\beta}}{1-\beta} + \frac{2^\beta}{a^\beta} \frac{\sigma^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \leq \varepsilon,$$

riuscirà, per x in (a, b) ,

$$\int_{A(x) - T[x, \sigma(\varepsilon)]} |f(x, y)| dy \leq \varepsilon.$$

D'altra parte, al variare di x in (a, b) , l'intervallo $\mathcal{T} [x, \sigma(\varepsilon)]$ descrive il trapezio $a \leq x \leq b$, $\sigma \leq y \leq x - \sigma$, ove la $f(x, y)$ è funzione continua. Sono dunque soddisfatte tutte le condizioni del teor. VIII e possiamo perciò asserire che la funzione $F(x)$ definita dalla (14) è continua nell'intervallo (a, b) che esclude il punto zero.

2°) Se α è una qualsiasi costante positiva *minore di uno*, e $g(y)$ è una funzione di y , definita nell'intervallo $(0, h)$, ivi finita e continua con la sua derivata prima $g'(y)$, dimostrare che la funzione $F(x)$ definita dalle eguaglianze

$$(16) \quad F(x) = \int_{(0, x)} \frac{g(y) dy}{(x-y)^\alpha}, \quad F(0) = 0,$$

è continua nell'intervallo $(0, h)$ ed è derivabile in ogni punto di questo intervallo, distinto dal punto zero. Nel punto zero è derivabile allora e allora soltanto che sia $g(0) = 0$. In ogni caso si ha

$$(17) \quad \frac{dF}{dx} = \frac{g(0)}{x^\alpha} + \int_{(0, x)} \frac{g'(y) dy}{(x-y)^\alpha}.$$

La continuità di $F(x)$ in ogni punto dell'intervallo $(0, h)$, distinto dal punto zero, è dimostrata, come caso particolare, nell'esercizio precedente. Per dimostrare la continuità di $F(x)$ nel punto zero, basta far vedere che essa è infinitesima in quel punto. Effettivamente, se M è il massimo modulo di $g(y)$ in $(0, h)$, si ha

$$|F(x)| \leq M \int_{(0, x)} \frac{dy}{(x-y)^\alpha} = \frac{M x^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Passiamo ora ad esaminare la derivabilità di $F(x)$. Conviene perciò trasformare l'espressione della $F(x)$ data dalla (16). Sia x un qualunque numero positivo dell'intervallo $(0, h)$ e ε sia un infinitesimo positivo sempre minore di x . Nell'intervallo $(0, x - \varepsilon)$ si ha

$$\frac{d}{dy} [g(y)(x-y)^{1-\alpha}] = g'(y)(x-y)^{1-\alpha} - (1-\alpha) \frac{g(y)}{(x-y)^\alpha},$$

e quindi

$$\int_{(0, x-\varepsilon)} \left[g'(y)(x-y)^{1-\alpha} - (1-\alpha) \frac{g(y)}{(x-y)^\alpha} \right] dy = g(x-\varepsilon) \varepsilon^{1-\alpha} - g(0) x^{1-\alpha},$$

ne segue, passando al limite per ε infinitesimo,

$$(18) \quad F(x) = \frac{g(0)}{1-\alpha} x^{1-\alpha} + \int_{(0,x)} g'(y) \frac{(x-y)^{1-\alpha}}{1-\alpha} dy.$$

Da questa espressione di $F(x)$ segue di nuovo la continuità di $F(x)$ in tutto l'intervallo $(0, h)$. Segue anche che essa è derivabile nel punto zero, allora e allora soltanto che sia $g(0) = 0$; ed inverso si ha

$$\frac{F(x)}{x} = \frac{g(0)}{1-\alpha} \frac{1}{x^\alpha} + g'(\theta x) \frac{x^{1-\alpha}(1-\theta)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

ove θ è una quantità compresa fra 0 e 1. Se $g(0) = 0$, si ha $F'(0) = 0$.

Per dimostrare la derivabilità di $F(x)$ per $x \neq 0$, occorre e basta, in virtù della (18), dimostrare la derivabilità di

$$\Phi(x) = \int_{(0,x)} g'(y) (x-y)^{1-\alpha} dy.$$

Ora è, per esempio per $h > 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} [\Phi(x+h) - \Phi(x)] = \\ &= \frac{1}{h} \int_{(x, x+h)} g'(y) (x+h-y)^{1-\alpha} dy + \int_{(0,x)} g'(y) \frac{(x+h-y)^{1-\alpha} - (x-y)^{1-\alpha}}{h} dy, \end{aligned}$$

e quindi, poichè

$$\frac{1}{h} \int_{(x, x+h)} g'(y) (x+h-y)^{1-\alpha} dy = g'(x+\theta h) h^{1-\alpha} (1-\theta)^{1-\alpha}, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

$$\frac{(x+h-y)^{1-\alpha} - (x-y)^{1-\alpha}}{h} = \frac{1-\alpha}{(x+\theta'h-y)^\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{(x-y)^\alpha},$$

$$0 < \theta' < 1,$$

passando al limite per h infinitesimo, in virtù della svolta teoria del passaggio al limite sotto il segno integrale, si trova

$$\Phi'(x) = (1-\alpha) \int_{(0,x)} \frac{g'(y) dy}{(x-y)^\alpha}.$$

Ne segue la (17).

3o) Per ogni coppia di valori di x e di y , per i quali è $0 \leq y < x$, poniamo

$$F(x, y) = \int_{(y, x)} \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-y)^\alpha},$$

si viene così a definire una funzione delle due variabili x e y . Dimostrare che essa ha valore costante. Si ha, inverso,

$$F(x, y) = \frac{1}{x-y} \int_{(y, x)} \frac{(x-t)^\alpha}{(t-y)^\alpha} dt + \frac{1}{x-y} \int_{(y, x)} \frac{(t-y)^{1-\alpha}}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,$$

Ma

$$\frac{d}{dt} [(x-t)^\alpha (t-y)^{1-\alpha}] = (1-\alpha) \frac{(x-t)^\alpha}{(t-y)^\alpha} - \alpha \frac{(t-y)^{1-\alpha}}{(x-t)^{1-\alpha}},$$

e quindi

$$\int_{(y, x)} \frac{(t-y)^{1-\alpha}}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = \frac{1-\alpha}{\alpha} \int_{(y, x)} \frac{(x-t)^\alpha}{(t-y)^\alpha} dt,$$

e pertanto

$$F = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{x-y} \int_{(y, x)} \frac{(x-t)^\alpha}{(t-y)^\alpha} dt.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{(x-y)^2} \int_{(y, x)} \frac{(x-t)^\alpha}{(t-y)^\alpha} dt + \frac{1}{x-y} \int_{(y, x)} \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-y)^\alpha} = \\ &= -\frac{1}{x-y} F + \frac{1}{x-y} F = 0. \end{aligned}$$

Allo stesso modo si dimostra che $\partial F / \partial y = 0$. Si ha dunque, ponendo per esempio $y=0$, $x=1$,

$$\int_{(y, x)} \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-y)^\alpha} = \int_{(0, 1)} \frac{dt}{(1-t)^{1-\alpha} t^\alpha}.$$

Alla stessa eguaglianza, e quindi ad un'altra dimostrazione della costanza di F , si perviene — assai più rapidamente — mediante un cambiamento della variabile di integrazione, operazione che impareremo

a fare più avanti. Si vedrà pure, in avvenire, che il costante valore positivo di F è precisamente $\pi / \text{sen} \alpha$.

4°) **Potenziale newtoniano.** Sia T un dominio limitato e misurabile dello spazio (x, y, z) e $\mu(P)$ una funzione del punto $P(x, y, z)$ definita in T , ivi limitata e integrabile. Per ogni punto $Q(\xi, \eta, \zeta)$ dello spazio poniamo

$$F(Q) = F(\xi, \eta, \zeta) = \int_T \frac{\mu(P)}{PQ^\alpha} dT, \quad 0 < \alpha < 3,$$

ove α è una qualsiasi costante positiva *minore di 3*. Si viene così a definire nello spazio intero una funzione del punto Q ; ciò è evidente se Q è esterno a T , e se Q è in T ciò risulta dall'esercizio 4° del n° 94. Dimostriamo le seguenti importanti proposizioni.

a) *La funzione $F(Q)$ è infinitesima all'infinito, e si ha*

$$(19) \quad \lim_{Q \rightarrow \infty} (F(Q) \overline{OQ}^\alpha) = \int_T \mu(P) dT,$$

designando con O l'origine delle coordinate.

Ed invero, uniformemente in T , sussiste la relazione di limite:

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \left[\mu(P) \left(\frac{\overline{OQ}}{PQ} \right)^\alpha \right] = \mu(P).$$

b) *La funzione $F(Q)$ è continua in ogni punto dello spazio.*

Prolunghiamo la definizione della $\mu(P)$ all'esterno di T , dandole il valore *zero* per ogni punto esterno a tale dominio. Se, essendo Q_0 un punto dello spazio arbitrariamente fissato, io dimostro che la sommabilità in T della funzione

$$f(Q, P) = \mu(P) : \overline{PQ}^\alpha$$

è uniforme nelle vicinanze di Q_0 , è dimostrata la proposizione. Basta verificare se sono soddisfatte le condizioni *a)* e *b')* della sommabilità uniforme sopra un dominio limitato. La condizione *a)* è evidentemente soddisfatta; quanto alla *b')* essa risulta da ciò che per ogni dominio quadrato D , avente il centro nel punto Q_0 e la dimensione σ , riesce (esercizio 4° del n° 94), per qualunque suo punto Q ,

$$\int_D |f(Q, P)| dT \leq \frac{8M\sigma^{3-\alpha}}{276^{\alpha/6}(3-\alpha)^3},$$

M designando l'estremo superiore di $|\mu(P)|$ in T .

c) Se α soddisfa la limitazione $1 \leq \alpha < 3/2$, la funzione $F(Q)$ è parzialmente derivabile, una prima volta, in ogni punto dello spazio, con derivate continue.

Se $Q \neq P$, si ha

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{PQ^\alpha} = \frac{-\alpha}{PQ^{\alpha+1}} \frac{\xi - x}{PQ},$$

e pertanto, poichè $|\xi - x| \leq \overline{PQ}$, $\alpha + 1 < 5/2 < 3$, si vede che la funzione di Q

$$\int_T \mu(P) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{PQ^\alpha} \right) dT,$$

è continua in tutto lo spazio. Per provare la derivabilità parziale di $F(Q)$ rispetto alla ξ e per dimostrare che:

$$(21) \quad \frac{\partial F}{\partial \xi} = \int_T \mu(P) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{PQ^\alpha} \right) dT,$$

basta constatare (teor. IV), indicando con Q_h il punto $(\xi + h, \eta, \zeta)$, la uniforme sommabilità su T , nelle vicinanze del punto $h=0$, della funzione (di h, x, y, z).

$$(22) \quad \frac{1}{h} \left(\frac{1}{PQ_h^\alpha} - \frac{1}{PQ^\alpha} \right) = - \frac{\overline{PQ}_h - \overline{PQ}^\alpha}{h} \frac{1}{PQ_h^\alpha \cdot PQ^\alpha}.$$

Sia D un dominio quadrato di centro nel punto Q e mantenendo il punto Q_h in D , diciamo d l'estremo superiore dell'insieme numerico descritto da \overline{PQ}_h al variare di P in T e di Q_h in D . Si ha, poichè $\alpha \geq 1$,

$$|\overline{PQ}_h^\alpha - \overline{PQ}^\alpha| \leq \alpha d^{\alpha-1} |\overline{PQ}_h - \overline{PQ}| \leq \alpha d^{\alpha-1} |h|,$$

e si ha pure

$$\frac{1}{\overline{PQ}_h^\alpha \cdot PQ^\alpha} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{PQ_h^{2\alpha}} + \frac{1}{PQ^{2\alpha}} \right),$$

onde segue, dalla (22),

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{PQ_h^\alpha} - \frac{1}{PQ^\alpha} \right) \right| \leq \alpha d^{\alpha-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{PQ_h^{2\alpha}} + \frac{1}{PQ^{2\alpha}} \right),$$

e ciò prova, essendo $2\alpha < 3$, l'asserita uniforme sommabilità su \mathbf{T} , nelle vicinanze del punto $h = 0$, del rapporto incrementale (22). Susiste dunque la (21) e il teorema è completamente dimostrato.

d) Dalle (20) e (21) si deduce che:

$$\lim''_{Q \rightarrow \infty} (|F_{\xi}(Q)| \overline{OQ}^{\alpha+1}) \leq \alpha \int_{\mathbf{T}} |\mu(P)| dT.$$

Per $\alpha = 1$, la $F(Q)$ si riduce al *potenziale newtoniano* del corpo \mathbf{T} , nel quale sia distribuita una materia la cui densità (positiva o negativa) in ogni punto di \mathbf{T} , è data dalla funzione $\mu(P)$, integrabile, ma non necessariamente continua. Alla fine del successivo paragrafo deriveremo parzialmente, una seconda volta, la funzione $F(Q)$.

5°) **Potenziale logaritmico.** Per la distribuzione di materia in corpi a due dimensioni (del piano) occorre considerare il *potenziale logaritmico* che vogliamo ora studiare. Nel piano (x, y) sia dato il dominio \mathbf{T} , limitato e misurabile, e ivi sia definita la funzione $\mu(P)$, limitata e integrabile. Il potenziale logaritmico $F(Q)$ di \mathbf{T} , relativo ad una distribuzione di materia su esso, la cui densità (positiva o negativa) in ogni suo punto P è data dalla funzione $\mu(P)$, si definisce ponendo

$$F(Q) = \int_{\mathbf{T}} \mu(P) \log \frac{1}{PQ} dx dy.$$

Si osservi che:

$$0 \leq \overline{PQ} \log \frac{1}{PQ} \leq \frac{1}{e} \quad \text{se} \quad \overline{PQ} \leq \frac{1}{e},$$

pertanto, se prolunghiamo la definizione di $\mu(P)$ in tutto il piano, dandole il valore zero in ogni punto esterno a \mathbf{T} , si trova che la funzione

$$f(Q, P) = \mu(P) \log \frac{1}{PQ},$$

è uniformemente sommabile su \mathbf{T} nelle vicinanze di ogni punto Q_0 del piano. Si ha, invero, se M è l'estremo superiore di $|\mu(P)|$, in ogni dominio quadrato \mathbf{D} , di centro in Q_0 e di semidiagonale $1/e$,

$$|f(Q, P)| \leq \frac{M}{e} \frac{1}{PQ},$$

e quindi (esercizio 3° del n° 94) in ogni dominio quadrato D di centro in Q_0 e di dimensione $\sigma \leq \sqrt{2}/e$,

$$\int_D |f(Q, P)| dT \leq \frac{M\sigma}{e\sqrt{2}}.$$

Si ha dunque: α) *Il potenziale logaritmico $F(Q)$ è funzione continua di Q in tutto il piano.*

Esaminiamo ora la derivabilità parziale della $F(Q)$ rispetto alla ξ . Si ha intanto, per $Q \neq P$,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \log \frac{1}{PQ} = - \frac{1}{PQ} \frac{\xi - x}{PQ},$$

e pertanto, poichè $|\xi - x| \leq \overline{PQ}$, si vede che la funzione di Q :

$$\int_T \mu(P) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \log \frac{1}{PQ} \right) dx dy,$$

è continua in tutto il piano. Io dico che

$$(23) \quad \frac{\partial f}{\partial \xi} = \int_T \mu(P) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \log \frac{1}{PQ} \right) dx dy.$$

Fissato il punto $Q(\xi, \eta)$ del piano e designato con Q_h il punto variabile $(\xi + h, \eta)$ basta dimostrare che il rapporto incrementale

$$\frac{1}{h} \left(\log \frac{1}{PQ_h} - \log \frac{1}{PQ} \right),$$

è uniformemente sommabile su T nelle vicinanze del punto $h=0$. Effettivamente, poichè

$$\log \overline{PQ_h} - \log \overline{PQ} = \frac{1}{PQ_{\theta h}} (\overline{PQ_h} - \overline{PQ}), \quad 0 < \theta < 1,$$

si ha

$$|\log \overline{PQ_h} - \log \overline{PQ}| \leq \left(\frac{1}{\overline{PQ_h}} + \frac{1}{\overline{PQ}} \right) |\overline{PQ_h} - \overline{PQ}| \leq \left(\frac{1}{\overline{PQ_h}} + \frac{1}{\overline{PQ}} \right) |h|,$$

e quindi

$$\left| \frac{1}{h} \left(\log \frac{1}{PQ_h} - \log \frac{1}{PQ} \right) \right| \leq \frac{1}{\overline{PQ_h}} + \frac{1}{\overline{PQ}}.$$

Adunque: **b)** Il potenziale logaritmico $F(Q)$ è dotato di derivate parziali del prim' ordine, finite e continue in tutto il piano. Sussiste inoltre la (23)

c) Si ha pure, dalla (23);

$$\lim''_{Q \rightarrow \infty} (|F'_z(Q)| \overline{OQ}) \leq \int_T |\mu(P)| dx dy.$$

Alla fine del successivo paragrafo esamineremo, anche per il potenziale logaritmico, la derivabilità parziale del second' ordine.

96.* Riduzione degli integrali delle funzioni sommabili.—

Assai interessante, specialmente per le applicazioni che può ricevere, è la riduzione degli integrali, a più dimensioni, delle funzioni sommabili. Noi tratteremo questo argomento con la maggiore semplicità possibile, accontentandoci di considerare le condizioni di cose che sogliansi presentare nelle più importanti applicazioni. Dobbiamo perciò premettere una proposizione, di passaggio al limite sotto il segno integrale, che non rientra in quelle già date al n° 93. Essa consiste nel seguente

Lemma. Se la successione di funzioni $f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P), \dots$, definite nell'insieme chiuso e limitato A , ed ivi continue, converge in ogni punto di A verso la funzione $f(P)$, pur essa continua in A , in maniera che, posto

$$\varphi_n(P) = |f(P) - f_n(P)|,$$

la $\varphi_n(P)$, in ogni punto di A , non cresca al crescere di n , si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(P) dT = \int_A f(P) dT. (*)$$

(*) Il teorema sussiste anche nelle sole ipotesi seguenti: Le funzioni della successione sono limitate e integrabili su A , ed ivi uniformemente limitate, la funzione limite $f(P)$ è pur essa limitata e integrabile su A , supposto sempre tale insieme chiuso e limitato. In questa ipotesi si ha un teorema che, nel caso particolare delle funzioni di una variabile e degli integrali estesi ad un intervallo, è dovuto ad **Arzela**. Non dimostriamo qui tale teorema perchè non ne possediamo ancora una dimostrazione della semplicità che desideriamo per l'indole di queste lezioni.

Basta dimostrare che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \varphi_n(P) dT = 0.$$

Se così non fosse esisterebbe un numero positivo ϵ tale da risultare, per ogni indice n ,

$$\int_A \varphi_n(P) dT > \epsilon \text{ est } A.$$

Ne seguirebbe l'esistenza in A di un punto P_n (almeno) per cui è $\varphi_s(P_n) > \epsilon$, per $s \leq n$. In un punto limite P (contenuto sempre in A per la supposta chiusura di questo) della successione di punto $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$, si avrebbe allora $\varphi_k(P) \geq \epsilon$, qualunque sia l'indice k . Ed inverò, in un qualsiasi intorno circolare di P , su A , sono contenuti quanti si vogliono punti P_n , il cui indice n supera k e per ciascuno di questi punti è $\varphi_k(P_n) > \epsilon$. Ma poichè $\lim \varphi_n(P) = 0$, è assurdo che riesca $\varphi_k(P) \geq \epsilon$, qualunque sia l'indice k .

Consideriamo ora, per semplificare l'esposizione, un insieme A dell'ordinario spazio (x, y, z) , misurabile, limitato o no. Sia N , a sua volta, un insieme chiuso e di estensione nulla, limitato o no, contenuto in A e sia $f(x, y, z)$ una funzione definita in $A - N$, ed ivi in ogni punto continua. Facciamo le seguenti ipotesi, che chiameremo le ipotesi $(x, y): a)$ Indicando con A_{xy} la proiezione di A sul piano (x, y) , questa proiezione sia un insieme misurabile e, eccettuati al più i punti di un certo insieme N' , chiuso e di estensione nulla, contenuto in A_{xy} , la sezione $S(x, y)$ di A , con la retta parallela all'asse z , la cui traccia sul piano (x, y) ha le coordinate x e y , sia sempre misurabile e quella $Z(x, y)$ di N di estensione nulla; $b)$ esiste una particolare successione di insiemi $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(n)}, \dots$, invadente $A - N$, tale che la successione $C_{xy}^{(1)}, C_{xy}^{(2)}, \dots, C_{xy}^{(n)}, \dots$ delle proiezioni di questi insiemi sul piano (x, y) invade $A_{xy} - N'$ e la successione $S^{(n)}(x, y), S^{(n+1)}(x, y), \dots$ delle sezioni di $C^{(n)}, C^{(n+1)}, \dots$, con la retta parallela all'asse z la cui traccia sul piano (x, y) è in $C_{xy}^{(n)}$, invade, a sua volta, $S(x, y) - Z(x, y)$.

Ciò posto andiamo a dimostrare il teorema :

I. La funzione $f(x, y, z)$, continua in ogni punto di $A - N$, non sia mai negativa e, nelle ipotesi (x, y) , si abbia che: per ogni punto (x, y)

di $A_{xy} - N'$, la $f(x, y, z)$ sia funzione di z sommabile su $S(x, y)$; allora, se le seguenti funzioni di x e di y

$$F(x, y) = \int_{S(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad F_n(x, y) = \int_{S^{(n)}(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

sono continue, rispettivamente, in ogni punto di $A_{xy} - N'$ e di $C_{xy}^{(n)}$, dalla sommabilità su A di $f(x, y, z)$ segue quella su A_{xy} di F , e viceversa; mentre si ha sempre

$$(1) \quad \int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_{A_{xy}} F(x, y) dx dy = \int_{A_{xy}} dx dy \int_{S(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Cominciamo dall'osservare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, y) = F(x, y), \quad F(x, y) - F_n(x, y) \geq F(x, y) - F_{n+1}(x, y) \geq 0,$$

e pertanto, in virtù del lemma premesso, considerando sempre valori di $m \geq n$,

$$(2) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{C_{xy}^{(n)}} F_m(x, y) dx dy = \int_{C_{xy}^{(n)}} F(x, y) dx dy.$$

Ciò posto, supponiamo, dapprima, $f(x, y, z)$ sommabile su A . Si ha

$$\begin{aligned} \int_{C^{(n)}} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{C_{xy}^{(n)}} dx dy \int_{S^{(n)}(x, y)} f(x, y, z) dz \leq \\ &\leq \int_{C_{xy}^{(n)}} dx dy \int_{S^{(m)}(x, y)} f(x, y, z) dz \leq \int_{C_{xy}^{(m)}} dx dy \int_{S^{(m)}(x, y)} f(x, y, z) dz \leq \\ &\leq \int_A f(x, y, z) dx dy dz, \end{aligned}$$

e quindi, facendo divergere m , in virtù della (2),

$$\int_{C^{(n)}} f(x, y, z) dx dy dz \leq \int_{C_{xy}^{(n)}} dx dy \int_{S(x, y)} f(x, y, z) dz \leq \int_A f(x, y, z) dx dy dz.$$

Se facciamo ora divergere n ne segue la sommabilità di $F(x, y)$ su A_{xy} e la relazione (1). Supponiamo ora, in secondo luogo, la funzione $F(x, y)$ sommabile su A_{xy} , dalla limitazione

$$\int_{C^{(n)}} f(x, y, z) dx dy dz \leq \int dx dy \int_{S(x, y)} F(x, y, z) dz,$$

segue evidentemente la sommabilità di $f(x, y, z)$ su A , e quindi, di nuovo, la (1).

Dal teorema ora dimostrato si deduce subito il seguente più generale:

II. *La funzione $f(x, y, z)$ sia continua in ogni punto di $A - N$ e si abbia che, nelle ipotesi (x, y) , per ogni punto (x, y) di $A_{xy} - N'$ la $f(x, y, z)$ sia funzione di z sommabile su $S(x, y)$, allora se le seguenti funzioni di x e di y :*

$$(3) \quad \begin{cases} F(x, y) = \int_{S(x, y)} f(x, y, z) dz, & F_n(x, y) = \int_{S^{(n)}(x, y)} f(x, y, z) dz, \\ \Phi(x, y) = \int_{S(x, y)} |f(x, y, z)| dz, & \Phi_n(x, y) = \int_{S^{(n)}(x, y)} |f(x, y, z)| dz, \end{cases}$$

sono continue — le F e Φ in ogni punto di $A - N'$, e le F_n e Φ_n in ogni punto di $C_{xy}^{(n)}$ — dalla sommabilità su A di $f(x, y, z)$ segue la sommabilità su A_{xy} di $F(x, y)$, e viceversa; mentre sussiste sempre la (1).

Posto, invero, $f' = |f|$, $f'' = |f| - f$, le due funzioni f' e f'' sono non negative e continue in ogni punto di $A - N$, mentre si ha $f = f' - f''$. Le funzioni f' e f'' , per ogni punto (x, y) di $A_{xy} - N'$ sono sommabili su $S(x, y)$, le funzioni

$$F'(x, y) = \Phi(x, y) = \int_{S(x, y)} f'(x, y, z), \quad F''(x, y) = \int_{S(x, y)} f''(x, y, z) dz,$$

sono continue in ogni punto di $A_{xy} - N'$ e le funzioni

$$F'_n(x, y) = \Phi_n(x, y) = \int_{S^{(n)}(x, y)} f'(x, y, z) dz, \quad F''_n(x, y) = \int_{S^{(n)}(x, y)} f''(x, y, z) dz,$$

in ogni punto di $C_{xy}^{(n)}$. Dalla sommabilità su A della f segue quella di f' e di f'' e (teor. I) si ha

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_A f'(x, y, z) dx dy dz - \int_A f''(x, y, z) dx dy dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{A_{xy}} dx dy \int_{S(x,y)} f'(x, y, z) dz - \int_{A_{xy}} dx dy \int_{S(x,y)} f''(x, y, z) dz = \\
&= \int_{A_{xy}} dx dy \int_{S(x,y)} [f'(x, y, z) - f''(x, y, z)] dz = \int_A dx dy \int_{S(x,y)} f(x, y, z) dz.
\end{aligned}$$

Ecc. Dal teorema ora dimostrato si deduce evidentemente il seguente che è di frequente applicazione:

III. La funzione $f(x, y, z)$ sia continua in ogni punto di $A - N$ e si abbia che, verificandosi simultaneamente le ipotesi (x, y) e (y, z) , per ogni punto (x, y) di $A_{xy} - N'$ la $f(x, y, z)$ sia funzione di z sommabile su $S(x, y)$ e per ogni punto (y, z) di $A_{yz} - N''$ sia funzione di x sommabile su $S(y, z)$, allora, se insieme alla continuità delle funzioni (3) si ha pure quella delle analoghe in y e in z , dalla sommabilità di $F(x, y)$ su A_{xy} segue quella di

$$F(y, z) = \int_{S(y, z)} f(x, y, z) dx,$$

su A_{xy} ed inoltre la formola

$$\int_{A_{xy}} dx dy \int_{S(x,y)} f(x, y, z) dz = \int_{A_{yz}} dy dz \int_{S(y, z)} f(x, y, z) dx.$$

Esercizii. 1°) Lo studioso enunci i teoremi, analoghi ai teorr. II e III, per le funzioni di due variabili x e y ; ne deduca un gruppo di condizioni sufficienti sotto le quali, per le funzioni di due variabili non limitate, sommabili e integrabili, sussiste la formola di **Dirichlet** d'inversione dell'ordine di integrazione, data al n° 92.

2°) Nel triangolo H del piano (x, y) , determinato dalle limitazioni $0 \leq x \leq h$, $0 \leq y \leq x$, si consideri la funzione

$$(4) \quad f(x, y) = \frac{g(x, y)}{(x-y)^\alpha y^\beta}, \quad \alpha < 1, \beta < 1,$$

già considerata nell'esercizio 1° del n° prec. Si dimostri che essa è sommabile su H e che:

$$\int_{(0,h) \cdot (0,x)} dx \int_{(0,x)} \frac{g(x, y)}{(x-y)^\alpha y^\beta} dy = \int_{(0,h)} \frac{dy}{y^\beta} \int_{(y,h)} \frac{g(x, y)}{(x-y)^\alpha} dx.$$

Si verifica immediatamente che sussistono tutte le ipotesi sotto le quali è valido il teorema, per le funzioni di due variabili, analogo al teor. III. La funzione $f(x, y)$ definita dalla (4) è invero continua in ogni punto di $\mathbf{H} - \mathbf{N}$, con \mathbf{N} avendo designato l'insieme chiuso e di estensione nulla costituito dai segmenti rettilinei ($y = 0$, $0 \leq x \leq h$) e ($x - y = 0$, $0 \leq x \leq h$). La sezione di \mathbf{H} con qualsiasi retta è sempre misurabile. Come già nell'esercizio 1° del n° prec. abbiamo dimostrato la sommabilità, per ogni valore di x , della $f(x, y)$ sull'intervallo $(0, x)$ e la continuità della funzione della x

$$(5) \quad \int_{(0,x)} \frac{g(x, y)}{(x-y)^\alpha y^\beta} dy,$$

in ogni punto dell'intervallo $(0, h)$, aperto a sinistra, così si dimostra la sommabilità, per ogni valore di y , della $f(x, y)$ sull'intervallo (y, h) e la continuità della funzione della y

$$(6) \quad \frac{1}{y^\beta} \int_{(y,h)} \frac{g(x, y)}{(x-y)^\alpha} dx,$$

in ogni punto dell'intervallo $(0, h)$, aperto a sinistra. Si constata poi immediatamente la sommabilità su $(0, h)$ delle funzioni (5) e (6). Se indichiamo con $\mathbf{C}^{(n)}$ il triangolo determinato, per ogni valore dell'indice n , dalle limitazioni

$$\frac{h}{2n} \leq x \leq h, \quad \frac{h}{4n} \leq y \leq x - \frac{h}{4n},$$

la successione di triangoli $\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(2)}, \dots$ invade \mathbf{H} e le due successioni delle proiezioni di questi triangoli sull'asse x e sull'asse y invadono rispettivamente, l'intervallo $(0, h)$, aperto a sinistra, dell'asse x e l'intervallo $(0, h)$, aperto a sinistra, dell'asse y . Infine, le funzioni della x :

$$\int_{\left(\frac{h}{4n}, x - \frac{h}{4n}\right)} \frac{g(x, y)}{(x-y)^\alpha y^\beta} dy, \quad \int_{\left(\frac{h}{4n}, x - \frac{h}{4n}\right)} \frac{|g(x, y)|}{(x-y)^\alpha y^\beta} dy:$$

sono continue nell'intervallo $(h/2n, h)$ e le funzioni della y

$$\frac{1}{y^\beta} \int_{\left(y + \frac{h}{4n}, h\right)} \frac{g(x, y)}{(x-y)^\alpha} dx, \quad \frac{1}{y^\beta} \int_{\left(y + \frac{h}{4n}, h\right)} \frac{|g(x, y)|}{(x-y)^\alpha} dx,$$

sono continue nell'intervallo $(h/4n, h - h/4n)$.

3°) **Problema d' Abel.** Nell'intervallo $(0, a)$ dell'asse x è assegnata una funzione continua $f(x)$, dotata di derivata prima $f'(x)$, finita e continua; dato il numero positivo α minore di uno, in ogni punto dell'intervallo $(0, a)$, aperto a sinistra, definire una funzione continua $u(x)$ che verifichi l'equazione

$$(7) \quad \int_{(0,x)} \frac{u(\xi) d\xi}{(x-\xi)^\alpha} = f(x) \quad (0 < \alpha < 1),$$

e tale che, M designando una costante positiva, riesca sempre

$$|u(x)| x^{1-\alpha} \leq M.$$

Nell'esercizio 3° del n° precedente abbiamo dimostrato che, per $0 \leq \xi < x$, l'integrale

$$\int_{(\xi,x)} \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha} (t-\xi)^\alpha} = \int_{(\xi,x)} \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-\xi)^{1-\alpha}},$$

ha valore positivo costante. Indichiamo con $k (= \pi/\sin\alpha\pi)$ tale valore. Supponiamo che esista la richiesta soluzione $u(x)$ dell'equazione (7), poichè

$$\frac{|u(\xi)|}{(x-\xi)^\alpha} \leq \frac{M}{\xi^{1-\alpha} (x-\xi)^\alpha},$$

si vede che la funzione $u(\xi)/(x-\xi)^\alpha$ risulta sommabile in $(0, a)$. Dalla (7) si deduce poi

$$\int_{(0,x)} \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \int_{(0,x)} \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_{(0,t)} \frac{u(\xi) d\xi}{(t-\xi)^\alpha},$$

e quindi, applicando al secondo membro la formola di **Dirichlet** di inversione degli integrali doppi, certamente applicabile come subito si vede (eserc. prec.), si trova

$$k \int_{(0,x)} u(\xi) d\xi = \int_{(0,x)} \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}},$$

e quindi (esercizio 2° del n° prec.)

$$(8) \quad u(x) = \frac{1}{k} \frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \frac{1}{k} \int_{(0,x)} \frac{f'(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Adunque: se esiste una soluzione del nostro problema essa non può essere data che dalla (8). Non esiste, pertanto, più di una soluzione. Ma, effettivamente, la (8) fornisce la soluzione del problema. Si ha, invero, in $(0, a)$

$$|u(x)|x^{1-\alpha} \leq \frac{1}{k} |f(0)| + \frac{H}{k} \frac{a^\alpha}{\alpha},$$

ove H è il massimo di $|f'(x)|$ in $(0, a)$. Ed in secondo luogo

$$\begin{aligned} \int_{(0,x)} \frac{u(\xi) d\xi}{(x-\xi)^\alpha} &= \frac{f(0)}{k} \int_{(0,x)} \frac{d\xi}{(x-\xi)^\alpha \xi^{1-\alpha}} + \frac{1}{k} \int_{(0,x)} f'(t) dt \int_{(t,x)} \frac{d\xi}{(x-\xi)^\alpha (\xi-t)^{1-\alpha}} = \\ &= f(0) + f(x) - f(0) = f(x). \end{aligned}$$

L'equazione (7) ora risolta, che chiamasi *equazione d'Abel*, è classica nell'Analisi; essa costituisce il primo esempio di un tipo di equazioni, delle cosiddette *equazioni integrali*, la cui recente introduzione ha fornito all'Analisi uno dei più potenti strumenti di ricerca in campi assai importanti.

Nel caso particolare $\alpha = 1/2$, l'equazione (7) traduce il seguente problema di meccanica, posto e risolto da *Abel*:

Nel piano verticale (x, y) , l'asse y verticale è volto verso l'alto, costruire una porzione di curva regolare di equazione $x = x(y)$ [$y \geq 0$], che tocchi l'asse x per $y = 0$ in maniera che riesca $x'(y)\sqrt{y} \leq M$ (M essendo una costante positiva) tale che, abbandonato, senza velocità iniziale, in un punto della curva di ordinata h , un punto materiale pesante G , obbligato — come unico vincolo — a percorrere, senza attrito, la curva, il tempo impiegato da G a trasferirsi nel punto più basso di quella sia un'assegnata funzione $f(h)$ dell'ordinata h .

Il lettore, non appena in possesso del teorema delle forze vive della Meccanica razionale e del Capitolo V di queste lezioni, potrà con grande facilità ottenere l'indicata traduzione; di questo problema, nell'equazione (7) per $\alpha = 1/2$.

4°) Indicando con V il primo quadrante del piano (x, y) , dimostrare che:

$$\int_V e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_{(0,\infty)} e^{-x^2} dx \right)^2,$$

indicando con V il primo ottante dello spazio (x, y, z) , dimostrare che:

$$\int_V e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = \left(\int_{(0,\infty)} e^{-x^2} dx \right)^3,$$

Sono, invero, immediatamente verificate tutte le ipotesi del teorema III.

97. Metodo di integrazione di Darboux. — Nell'insieme limitato A di $S_{(r)}$ sia definita una funzione limitata $f(P)$, della quale indichiamo con $e'(T)$ ed $e''(T)$ gli estremi inferiore e superiore in un qualsiasi insieme T contenuto in A . Il metodo di calcolo del minimo e del massimo integrale della funzione $f(P)$ estesi ad A sia, fin ad ora, consistito in ciò: Fissato un qualsiasi dominio rettangolare R contenente A , lo si è diviso in domini rettangolari parziali $R_{hk\dots}$, e, posto $T_{hk\dots} = A \cdot R_{hk\dots}$, detti $P_{hk\dots}$ un punto arbitrario contenuto in $T_{hk\dots}$, δ la massima diagonale dei domini rettangolari di decomposizione, si sono calcolati i limiti

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{hk\dots} e'(T_{hk\dots}) R_{hk\dots} = \lim'_{\delta \rightarrow 0} \sum_{hk\dots} f(P_{hk\dots}) R_{hk\dots} = \int_A f(P) dT,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{hk\dots} e''(T_{hk\dots}) R_{hk\dots} = \lim''_{\delta \rightarrow 0} \sum_{hk\dots} f(P_{hk\dots}) R_{hk\dots} = \int_A f(P) dT.$$

Tale procedimento può, intanto, far sorgere il dubbio che l'integrale della funzione dipenda dagli speciali assi coordinati a cui si è riferito lo spazio, ma può anche, per il nessun conto in cui sono tenute le particolarità geometriche dell'insieme A , essere, per l'effettivo calcolo numerico dell'integrale, di attuazione pratica assai più difficile del *metodo di integrazione di Darboux*, di cui andiamo ora a parlare; il qual metodo, anzichè decomporre A negli speciali insiemi $A \cdot R_{hk\dots}$, consente la più completa libertà nella decomposizione *elementare* dell'insieme A , la quale pertanto (cfr. esercizi) potrà, caso per caso, essere adattata alle particolarità geometriche di detto insieme, con l'intento di semplificare e di abbreviare i calcoli.

Siano $T_1, T_2, \dots, T_n; T'_1, T'_2, \dots, T'_{n'}$, i più arbitrari insiemi, e si abbia

$$A = \sum_i^{1, n} T_i = \sum_i^{1, n'} T'_i.$$

Risulta

$$e'(T'_i) T'_i \leq \int_{T'_i} f(P) dT \quad (i = 1, 2, \dots, n')$$

$$\int_{T_i} f(P) dT \leq e''(T_i) T_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

e quindi

$$\sum_i^{1, n'} e'(T'_i) T'_i \leq \sum_i^{1, n'} \int_{T'_i} f(P) dT = \int_A f(P) dT = \lambda',$$

$$\lambda'' = \int_A f(P) dT = \sum_i^{1, n} \int_{T_i} f(P) dT \leq \sum_i^{1, n} e''(T_i) T_i,$$

e pertanto la proposizione: Al variare, in tutti i modi possibili, della decomposizione elementare dell' insieme A negli insiemi T_1, T_2, \dots, T_n , facciamo le somme

$$(1) \quad s' = \sum_i^{1, n} e'(T_i) T_i, \quad s'' = \sum_i^{1, n} e''(T_i) T_i,$$

e diciamo I' e I'' gli insiemi numerici rispettivamente descritti da s' e da s'' . Si ha che i due insiemi I' e I'' sono separati e l'intervallo di separazione contiene l'intervallo (λ', λ'') avente per punti estremi il minimo ed il massimo integrale della funzione.

Sussiste il seguente importante *teorema di Darboux*:

I. *Al tendere a zero del massimo diametro δ degli insiemi T_i , provenienti dalla più arbitraria decomposizione elementare di A , le variabili s' e s'' definite dalla (1) tendono, rispettivamente, al minimo ed al massimo integrale, λ' e λ'' , della funzione f estesi ad A .*

Limitiamoci a considerare le somme s'' . Supponiamo, in primo luogo, $f(P) \geq 0$ in A . Si potrà trovare ($r=2$) una decomposizione

di un dominio rettangolare $R[(a', b'); (a'', b'')]$, contenente l'insieme A , in domini rettangolari parziali R_{hk} , in maniera che, detta σ'' la somma dei prodotti

$$e''(A \cdot R_{hk}) R_{hk},$$

estesa a tutti i rettangoli che hanno, almeno, un punto in comune con A , si abbia

$$\lambda'' \leq \sigma'' < \lambda'' + \varepsilon.$$

comunque sia stato preventivamente assegnato il numero positivo ε . Sia p il numero dei punti di suddivisione del lato (a', a'') e q quello dei punti di suddivisione del lato (b', b'') . Determiniamo un numero positivo δ_ε per il quale risulti

$$2[p(b'' - b') + q(a'' - a')]e''(A)\delta_\varepsilon \leq \lambda'' + \varepsilon - \sigma''.$$

Dico che, e con ciò avrò dimostrato il teorema nell'ipotesi $f \geq 0$, per ogni somma s'' per cui sia diametro $T_i \leq \delta_\varepsilon$ ($i = 1, 2, \dots$), si avrà sempre

$$(2) \quad \lambda'' \leq s'' \leq \lambda'' + \varepsilon.$$

Infatti, indichiamo con s_1'' quella parte della somma s'' che proviene dagli insiemi T_i che sono, ciascuno, completamente contenuti in un rettangolo R_{hk} e indichiamo con s_2'' la parte rimanente della somma s'' . Si ha:

$$s'' = s_1'' + s_2'',$$

$$s_1'' \leq \sigma'',$$

$$s_2'' \leq 2[p(b'' - b') + q(a'' - a')]e''(A)\delta_\varepsilon \leq \lambda'' + \varepsilon - \sigma'';$$

ne segue la (2). La funzione limitata $f(P)$ sia ora, in secondo luogo, affatto arbitraria. Poniamo $f_1 = f - e'(A)$. L'estremo superiore $e_1''(T)$ della f_1 in T è $e''(T) - e'(A)$. Si ha

$$\int_A'' f(P) dT = \int_A'' f_1(P) dT + e'(A) \text{est } A,$$

$$\sum_i^{1, n} e''(T_i) T_i = \sum_i^{1, n} e_1''(T_i) T_i + e'(A) \text{est } A,$$

onde, di nuovo,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_i^{1, n} e''(T_i) T_i = \int_A f(P) dT.$$

Ne segue :

II. Gli integrali di una funzione sono indipendenti dalla scelta degli assi coordinati ai quali viene riferito lo spazio.

III. I due insiemi I' e I'' , rispettivamente descritti dalle somme s' e s'' definite dalle (1), sono precisamente separati dall'intervallo (λ', λ'') , avente per punti estremi il minimo ed il massimo integrale della funzione f estesi ad A .

IV. Posto, per la più arbitraria decomposizione elementare di A negli insiemi T_1, T_2, \dots, T_n ,

$$s = \sum_i^{1, n} f(P_i) T_i,$$

ove P_i è un punto arbitrariamente scelto in T_i , si ha :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0}' s = \int_A f(P) dT, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0}'' s = \int_A f''(P) dT.$$

V. Detta $\omega(T)$ l'oscillazione di f in T , condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione f sia integrabile su A è che, comunque sia assegnato un numero positivo ε si possa, in corrispondenza, costruire una speciale decomposizione elementare dell'insieme A in insiemi T_1, T_2, \dots, T_n , per modo che riesca

$$\sum_i^{1, n} \omega(T_i) T_i \leq \varepsilon.$$

VI. Se la funzione $f(P)$ è integrabile su A , in particolare se essa è continua e A è chiuso, comunque si decomponga elementarmente l'insieme A , le somme (1) danno due valori approssimati dell'integrale della funzione esteso ad A , il primo per difetto ed il secondo per eccesso, con un errore d'approssimazione, per entrambi, minore di

$$\sum_i^{1, n} \omega(T_i) T_i.$$

Si ha poi

$$(3) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_i^{1, n} f(P_i) T_i = \int_A f(P) dT,$$

comunque si scelga P_i in T_i .

VII. Se $f(y_1, y_2, \dots, y_q)$ è funzione continua e $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_q(P)$ sono funzioni continue nell'insieme chiuso \mathbf{A} , riesce (Oss. 3^a del n° 91)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_i^{1, n} f[\varphi_1(P'_i), \varphi_2(P'_i), \dots, \varphi_q(P'_i)] T_i = \int_{\mathbf{A}} f[\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_q(P)] dT,$$

comunque si siano scelti i punti $P'_i, P''_i, \dots, P'_i^{(q)}$ in \mathbf{T}_i .

Osservazioni. 1^a) Il teorema VI fornisce ulteriori essenziali elementi per il **calcolo numerico approssimato** dell'integrale di una funzione integrabile. Se la funzione è tale che di essa è facile calcolare, per speciali insiemi $\mathbf{T} (< \mathbf{A})$, il cui diametro può essere reso piccolo quanto si vuole, due numeri $l'(\mathbf{T})$ e $l''(\mathbf{T})$, il primo non superiore all'estremo inferiore della funzione in \mathbf{T} ed il secondo non inferiore all'estremo superiore, le somme

$$\sum_i l'(\mathbf{T}_i) T_i, \quad \sum_i l''(\mathbf{T}_i) T_i,$$

rappresentano due valori approssimati dell'integrale, il primo per difetto ed il secondo per eccesso, con un errore d'approssimazione, per entrambi, minore di

$$\sum_i [l''(\mathbf{T}_i) - l'(\mathbf{T}_i)] T_i.$$

In particolare dunque, se la $f(x)$, funzione dell'unica variabile x , è monotona (e quindi integrabile) nell'intervallo (a, b) , comunque si scelga un numero naturale n , posto $x_i = a + i(b-a)/n$ ($i = 0, 1, \dots, n$), le due somme

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}), \quad \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

rappresentano due valori approssimati dell'integrale di $f(x)$ esteso all'intervallo (a, b) , il primo per difetto ed il secondo per eccesso, con un errore d'approssimazione, per entrambi, minore di

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)].$$

Se invece riesce malagevole o assai difficile la determinazione dei numeri $l'(\mathbf{T})$ e $l''(\mathbf{T})$, per il calcolo dell'integrale si ricorrerà alla (3). Decomposto elementarmente, con una legge conveniente, l'insieme \mathbf{A} in insiemi parziali \mathbf{T}_i e scelti, in ciascuno di questi,

nel modo che più conviene per il calcolo, i punti P_i , si calcolano, successivamente le somme

$$(4) \quad \sum_i f_i(P_i) T_i,$$

per valori del massimo diametro δ (degli insiemi T_i) via via più piccoli; più piccolo è δ , e più grande tende a diventare l'approssimazione fornita dalla (4) per il valore dell'integrale. Se, ad esempio, si vuole calcolare il valore dell'integrale con l'approssimazione di un millesimo, si ripeterà il calcolo della (4) per valori di δ via via decrescenti, fino a conseguire la stabilità della cifra dei millesimi. Come assicura la (3) a ciò si perverrà certamente da un momento in poi.

Vedremo più avanti come taluni accorgimenti analitici consentono, specialmente per le funzioni di una variabile, di abbreviare i calcoli in modo notevole; ma, comunque, è solo questione di tempo, in ogni caso, alla stabilità di una cifra decimale di un qualsiasi pre-stabilito ordine si perverrà certamente. Raccomandabilissimo per simili calcoli è l'uso delle *macchine calcolatrici* (a manovella) che consentono appunto il più rapido e più sicuro calcolo delle somme di prodotti $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots$, nelle quali consistono le somme (4).

2ª) Può darsi che l'insieme A non si presti ad essere agevolmente decomposto in insiemi parziali T_i (di diametro piccolo a piacere) dei quali si possa con precisione calcolare l'estensione; in tal caso si farà ricorso alla formola (1) del n° 91:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{hk\dots} f(P_{hk\dots}) R_{hk\dots} = \int_A f(P) dT,$$

la quale fa a meno del calcolo delle estensioni indicate. Si ricordino le avvertenze già date in proposito al n° 91.

Esercizi. 1º) Sia D il dominio limitato da due sfere concentriche, di centro nell'origine e aventi, rispettivamente, i raggi R_1 e R_2 ($R_1 < R_2$), calcolare l'integrale

$$\int_D f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz,$$

$f(\rho)$ essendo una qualsivoglia funzione integrabile sull'intervallo (R_1, R_2) dell'asse ρ .

Riferito lo spazio al solito sistema (ρ, φ, θ) di coordinate polari, per ogni numero naturale n poniamo $\rho_h = R_1 + h(R_2 - R_1)/n$, $\varphi_k = k\pi/n$, $\theta_l = 2l\pi/n$ ($h, k, l = 0, 1, \dots, n$) e decomponiamo il dominio D nei domini T_{hkl} definiti dalle limitazioni

$$\rho_{h-1} \leq \rho \leq \rho_h, \quad \varphi_{k-1} \leq \varphi \leq \varphi_k, \quad \theta_{l-1} \leq \theta \leq \theta_l \\ (h, k, l = 1, 2, \dots, n).$$

Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_h^{1, n} \sum_k^{1, n} \sum_l^{1, n} f(\rho_{h-1}) T_{hkl} = \int_D f(\rho) dx dy dz,$$

ma

$$\sum_h^{1, n} \sum_k^{1, n} \sum_l^{1, n} f(\rho_{h-1}) T_{hkl} = \sum_h^{1, n} f(\rho_{h-1}) \sum_k^{1, n} \sum_l^{1, n} T_{hkl} = \\ = \frac{4}{3} \pi \sum_h^{1, n} f(\rho_{h-1}) (\rho_h^3 - \rho_{h-1}^3),$$

$$\rho_h^3 - \rho_{h-1}^3 = 3\rho_{h-1}^2 \frac{R_2 - R_1}{n} + 3\rho_{h-1} \frac{(R_2 - R_1)^2}{n^2} + \frac{(R_2 - R_1)^3}{n^3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_2 - R_1}{n} \sum_h^{1, n} f(\rho_{h-1}) \rho_{h-1}^2 = \int_{(R_1, R_2)} f(\rho) \rho^2 d\rho,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(R_2 - R_1)^2}{n^2} \sum_h^{1, n} f(\rho_{h-1}) \rho_{h-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(R_2 - R_1)^3}{n^3} \sum_h^{1, n} f(\rho_{h-1}) = 0,$$

e pertanto

$$\int_D (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz = 4\pi \int_{(R_1, R_2)} f(\rho) \rho^2 d\rho.$$

Se, dunque, $f(\rho) = \rho^\alpha$, riesce

$$\int_D (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha}{2}} dx dy dz \begin{cases} = 4\pi \frac{R_2^{\alpha+3} - R_1^{\alpha+3}}{\alpha+3} & \text{se } \alpha \neq -3, \\ = 4\pi \log \frac{R_2}{R_1} & \text{se } \alpha = -3. \end{cases}$$

2°) Allo stesso modo si dimostra che se D è il dominio piano determinato, in coordinate polari, delle limitazioni:

$$\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \tau \quad R_1 \leq \rho \leq R_2$$

e $f(\rho)$ è una funzione integrabile su (R_1, R_2) ,

$$\int_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \tau \int_{(R_1, R_2)} f(\rho) \rho d\rho.$$

Ne segue, in particolare, se $\theta_0 = 0$, $\tau = \pi/2$, $R_1 = 0$, $R_2 = R$, $f(\rho) = e^{-\rho^2}$,

$$\int_D e^{-x^2 - y^2} dx dy = \frac{\pi}{2} \int_{(0, R)} e^{-\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}).$$

Siano V il primo quadrante del piano (x, y) , n un numero naturale e D_n il dominio $(0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq n)$; la successione di domini $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ invade V e pertanto si ha

$$\int_V e^{-x^2 - y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \frac{\pi}{4}.$$

Ne segue (esercizio 4° del n° prec.)

$$\int_{(0, \infty)} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

98. Integrali delle funzioni complesse di variabili reali.—

Sia $f(P) = u(P) + iv(P)$ una funzione complessa del punto $P(x, y, \dots)$, definita nell'insieme A o $A - N$, ove N designa un insieme chiuso e di estensione nulla e A un qualsiasi insieme limitato o no, e designiamo con \mathfrak{J} una qualsiasi operazione di integrazione su A avente un risultato finito e ben determinato per ciascuna funzione $u(P)$ e $v(P)$, supposte limitate o no. Si pone allora, per definizione,

$$\mathfrak{J} f(P) = \mathfrak{J} u(P) + i \mathfrak{J} v(P).$$

§ 3. Sulle funzioni di dominio.

99. Derivate e differenziali per le funzioni di dominio.—

Sia A un dominio dello spazio $S_{(r)}$ e designiamo con $[A]$ una qualsiasi famiglia di domini T contenuti in A , per la quale richiediamo

la sola condizione seguente: *Se R è un qualsiasi dominio rettangolare avente con A punti interni in comune, alla famiglia $[A]$ appartiene sempre il prodotto $R \cdot A$.* La totalità di tali prodotti sarà da noi sempre indicata con $[A]_R$. Non è escluso, naturalmente, che la famiglia $[A]$ possa ridursi alla $[A]_R$, e, pertanto, se A , esso stesso fosse un dominio rettangolare, la famiglia potrebbe ridursi, semplicemente, a contenere tutti i soli domini rettangolari contenuti in A .

Osserviamo che, in ogni caso, se il dominio A è limitato, esso appartiene sempre alla famiglia $[A]_R$.

Sia ora $F(T)$ una funzione reale del dominio T definita nella famiglia $[A]$. Per una tale funzione vogliamo dare il concetto di derivata e di differenziale. A tale scopo cominciamo dall'osservare, in primo luogo, che se fissiamo, arbitrariamente, un punto P di A ed un numero positivo ρ , esistono quanti si vogliono domini di $[A]_R$ e quindi di $[A]$ contenenti P e contenuti nel dominio quadrato di centro in P e di semidimensione ρ . In secondo luogo, per ogni dominio limitato T di $[A]$, contenente il punto P , esiste e riesce ben determinato il dominio quadrato $Q(P, T)$, di centro in P , contenente T e avente la più piccola semidimensione possibile. Esso è il minimo dominio quadrato di centro in P , contenente il dominio rettangolare che ha gli stessi punti estremi di T .

Ciò posto, consideriamo l'insieme ordinato $[O]_P$ delle operazioni consistenti, ciascuna, nel fissare un dominio limitato T di $[A]$ contenente P e nel calcolare il valore di $F(T)$, ordinate al modo seguente: Di ogni operazione O' , corrispondente ad un dominio T' , diremo seguenti tutte quelle corrispondenti ai domini T contenuti in $Q(P, T')$. La funzione di dominio $F(T)$ dà così luogo ad una variabile ordinata che si dice *ottenuta facendo tendere, su $[A]$, il dominio T al punto P* . I limiti di tale variabile saranno denotati coi simboli

$$\lim'_{T \rightarrow P} F(T) \{su [A]\}, \quad \lim''_{T \rightarrow P} F(T) \{su [A]\}.$$

La funzione $F(T)$ dicesi *continua* o *infinitesima* $\{su [A]\}$ in un punto P di A se si ha:

$$\lim'_{T \rightarrow P} F(T) \{su [A]\} = \lim''_{T \rightarrow P} F(T) \{su [A]\} = 0.$$

Insieme alla funzione F riesce definita in $[A]$ la funzione

$$\frac{F(\mathbf{T})}{\text{est } \mathbf{T}} = \frac{F(\mathbf{T})}{T},$$

orbene, i limiti

$$\lim'_{\mathbf{T} \rightarrow P} \frac{F(\mathbf{T})}{T} \{ \text{su } [A]_R \}, \quad \lim''_{\mathbf{T} \rightarrow P} \frac{F(\mathbf{T})}{T} \{ \text{su } [A]_R \},$$

chiamansi, rispettivamente, *la massima e la minima derivata, su A* , della funzione F nel punto P e si denotano, rispettivamente, con le notazioni

$$\text{deriv}'_{\mathbf{T} \rightarrow P} F(\mathbf{T})(\text{su } A), \quad \text{deriv}''_{\mathbf{T} \rightarrow P} F(\mathbf{T})(\text{su } A).$$

La funzione F dicesi *lipschitziana* nel punto P se essa vi possiede derivate entrambe finite. Evidentemente: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione $F(\mathbf{T})$ sia lipschitziana nel punto P è che si possano determinare un numero positivo k e un dominio quadrato Q di centro in P tali che per ogni dominio \mathbf{T} di $[A]_R$ contenente P e contenuto in Q , risulti*

$$|F(\mathbf{T})| \leq k \text{ est } \mathbf{T}.$$

Una funzione F lipschitziana in un punto è ivi continua.

Nella famiglia $[A]$ sia definita la funzione $F(\mathbf{T})$, lipschitziana in ogni punto di A , si dirà allora, più semplicemente, che la funzione è lipschitziana nel dominio A . In tal caso, entrambe le derivate hanno valori finiti in ogni punto; mediante la derivazione, la funzione di dominio $F(\mathbf{T})$ dà dunque origine a due funzioni di punto $f'(P)$ e $f''(P)$, definite in tutto A , alla *funzione derivata minima*, che in ogni punto ha per valore ivi quello della derivata minima, e alla *funzione derivata massima*, che in ogni punto ha per valore ivi quello della derivata massima.

La funzione lipschitziana F , dicesi *uniformemente lipschitziana in A* , se è possibile determinare un numero positivo K tale che per qualsiasi dominio \mathbf{T} di $[A]_R$ si abbia

$$|F(\mathbf{T})| \leq K \text{ est } \mathbf{T}.$$

Evidentemente: *Una funzione di dominio F , uniformemente lipschitziana in A , possiede ivi funzioni derivate (finite in ogni punto e) limitate in A .*

Se in un punto P coincidono le due derivate, su A , della F , si dice che *questa funzione è in P a derivata unica, su A* , oppure che *possiede in P la derivata su A* . Se la funzione F è in P lipschitziana e a derivata unica, su A , dicesi *derivabile in P , su A* . Una funzione F avente derivata unica oppure derivabile in ciascun punto di A , dicesi *a derivata unica, oppure derivabile nel dominio A* .

La funzione $F(\mathbf{T})$, derivabile in ogni punto, dà luogo ad una funzione di punto $f(P)$, nella quale vengono a coincidere le sue due derivate massima e minima, tale funzione chiamasi *la derivata di F* .

Se la funzione $F(\mathbf{T})$ è derivabile in un punto P , chiamasi *differenziale della F o elemento della F nel punto P* , il prodotto

$$f(P) \cdot \text{est } \mathbf{T} = f(P) \cdot \mathbf{T},$$

del valore in P della derivata f per l'estensione T di un qualsiasi dominio rettangolare. Si pone poi

$$dF = f(P) \cdot \mathbf{T}.$$

Pertanto $dT = T$ e quindi

$$dF = f(P)dT, \quad f(P) = \frac{dF}{dT}.$$

Sussiste, evidentemente, la proposizione: *Se F è derivabile in un punto P interno a A vale la seguente formola di decomposizione:*

$$F(\mathbf{T}) = dF + \omega(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{T},$$

ove $\omega(\mathbf{T})$ è la funzione di dominio rettangolare definita dall'eguaglianza

$$\omega(\mathbf{T}) = \frac{F(\mathbf{T})}{\mathbf{T}} - f(P),$$

infinitesima in P , su $[A]_R$.

È immediata la dimostrazione del teorema:

I. Se F_1, F_2, \dots, F_n sono funzioni del dominio \mathbf{T} definite in una medesima famiglia $[A]$, ciascuna derivabile, e se c_1, c_2, \dots, c_n , sono le più arbitrarie costanti, la combinazione

$$F(\mathbf{T}) = \sum_i^{1, n} c_i F_i(\mathbf{T}),$$

è pur essa definita in $[A]$ e derivabile. Si ha:

$$\frac{dF}{dT} = \sum_i^{1, n} c_i \frac{dF_i}{dT}.$$

che si dice — com'è naturale — funzione di U composta mediante la φ e la F . Andiamo a dimostrare l'importante teorema seguente:

II. Derivazione di una funzione di dominio composta mediante due altre. Nelle ipotesi ora dette, la funzione $t(U)$ sia derivabile nel punto Q di C e la funzione $F(T)$ lo sia nel punto P di A corrispondente a Q . Diciamo $f'(P)$ la derivata di $F(T)$ e $J(Q)$ la derivata di $t(U)$. Se

$$(4) \quad \lim_{T \rightarrow P} \frac{F(T) - F(P)}{T - P} \{ \text{su } [A] \text{ e non soltanto su } [A]_R \} = f'(P),$$

allora la funzione $G(U) = F(\varphi(U))$ è pur essa derivabile nel punto Q e si ha

$$(5) \quad g(Q) = \frac{dG}{dU} = f'(P) J(Q) = f(\varphi_1(Q), \dots, \varphi_r(Q)) J(Q).$$

Ed inverso:

$$\frac{G(U) - G(Q)}{U - Q} = \frac{F(\varphi(U)) - F(\varphi(Q))}{t(U) - t(Q)} \frac{t(U) - t(Q)}{U - Q} = \frac{F(T) - F(P)}{T - P} \frac{t(U) - t(Q)}{U - Q},$$

e mentre U tende a Q (su $[C]_R$ ed anche su $[C]$) il dominio T tende a P su $[A]$. Ne segue la (5) poichè sussiste la (4).

Il teorema ora ottenuto si suole ricordare dicendo, brevemente, che: *L'elemento o il differenziale della funzione F , nelle coordinate y_1, y_2, \dots, y_r , è dato da*

$$dF = f[\varphi_1(Q), \varphi_2(Q), \dots, \varphi_r(Q)] J(Q) dU.$$

Diciamo dx_1, dx_2, \dots, dx_r le dimensioni di un dominio rettangolare T dello spazio (x_1, x_2, \dots, x_r) , l'estensione di T è data dal prodotto $dx_1 dx_2 \dots dx_r$. Secondo una convenzione già fatta tale prodotto si denota con dT e potrà chiamarsi *l'elemento o il differenziale di estensione o di misura (di lunghezza per $r=1$, di area per $r=2$, di volume per $r=3$) nelle coordinate x_1, x_2, \dots, x_r* . Sia ora U un dominio rettangolare di dimensioni dy_1, dy_2, \dots, dy_r dello spazio (y_1, y_2, \dots, y_r) . Mediante le (1) ad esso corrisponde, nello spazio (x_1, x_2, \dots, x_r) , un dominio $\varphi(U)$ la cui estensione è data da $t(U)$. Sia Q un punto di U , il prodotto

$$(6) \quad dt = J(Q) dy_1 dy_2 \dots dy_r,$$

è un'approssimazione di $t(U)$, tanto migliore quanto più piccola è

la somma $\sum_i |dy_i|$. Ebbene, il prodotto (6) chiamasi *l'elemento o il differenziale di estensione o di misura nelle coordinate* y_1, y_2, \dots, y_r , legate alle x_1, x_2, \dots, x_r dalle equazioni (1).

In ordine a tali locuzioni — di uso diffusissimo e continuo — il dominio $\varphi(U)$ può chiamarsi il *dominio elementare dello spazio* (x_1, x_2, \dots, x_r) relativo alle coordinate y_1, y_2, \dots, y_r . (Vedansi gli esempi illustrativi del n° 101).

Osservazione. Sia, in particolare, $r = 3$ e si abbia

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\equiv a_1 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ \varphi_2 &\equiv a_2 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ \varphi_3 &\equiv a_3 + a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \end{aligned} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0;$$

abbiamo visto (87, XIV) che, in tal caso, sussiste la relazione

$$T = |D| U,$$

e pertanto

$$J(Q) = \frac{dT}{dU} = |D| = \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} \right|.$$

Notizia. Orbene, sarà dimostrato in avvenire che, in ulteriori ipotesi per le funzioni φ_i , largamente verificate nelle più importanti applicazioni, si ha sempre

$$(7) \quad J(Q) = \frac{dT}{dU} = \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_r)} \right|.$$

Nell'articolo 101 tale fatto trovasi già dimostrato per gli integrali ad una dimensione e, nel caso particolare, del passaggio dalle coordinate cartesiane alle polari, per gli integrali a due e a tre dimensioni.

Osservazione sulla notazione di integrale. Sia A un insieme limitato e vi sia definita la funzione di punto $f(P)$, limitata e integrabile. Decomposto un dominio rettangolare R contenente A in domini rettangolari parziali, possiamo ora — per una convenzione fatta — denotare con dT la misura del generico di tali domini. Se δ è la massima diagonale di tali domini e se fra questi prendiamo tutti e soli quelli che hanno, almeno, un punto P in comune con A e facciamo la somma

$$\sum f(P) dT,$$

passando al limite, per δ infinitesimo, si ha l'integrale della funzione esteso ad \mathcal{A} . Ciò dà finalmente ragione della notazione introdotta per designare l'integrale di una funzione: il simbolo \int non è che una deformazione della lettera s , iniziale della parola *somma*.

100. Sulle funzioni additive di dominio. — Una classe importantissima di funzioni di dominio sono le *funzioni additive*. Diciasi tali quelle funzioni $F(\mathcal{T})$, definite per i domini \mathcal{T} della solita famiglia $[\mathcal{A}]$, per le quali, dalla relazione

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \dot{+} \mathcal{T}_2 \dot{+} \dots \dot{+} \mathcal{T}_n,$$

si deduce l'altra

$$(1) \quad F(\mathcal{T}) = F(\mathcal{T}_1) + F(\mathcal{T}_2) + \dots + F(\mathcal{T}_n).$$

Può darsi che, presi comunque due o più domini della famiglia $[\mathcal{A}]$, suscettibili di una somma elementare, la loro somma non sia contenuta in $[\mathcal{A}]$; ebbene, noi sottintenderemo sempre che questa famiglia sia stata così ampliata da contenere la somma di un numero qualsivoglia di suoi domini suscettibili di una somma elementare. Mediante la (1) prolungheremo poi la definizione di $F(\mathcal{T})$ su tutta la famiglia $[\mathcal{A}]$ così ampliata. Nella famiglia $[\mathcal{A}]_R$ porremo poi anche il prodotto di \mathcal{A} per ogni dominio somma elementare di due o più domini rettangolari ciascuno dei quali ha punti interni in comune con \mathcal{A} .

Se $f(P)$ è una funzione di punto definita in \mathcal{A} e limitata in ogni dominio limitato, nella famiglia costituita da *tutti* i domini limitati contenuti in \mathcal{A} , ponendo

$$(3) \quad F'(\mathcal{T}) = \int_{\mathcal{T}}' f(P) dT, \quad F''(\mathcal{T}) = \int_{\mathcal{T}}'' f(P) dT,$$

si vengono a definire *due* funzioni additive di dominio.

Se \mathcal{A} è un corpo pesante, ponendo

$$(4) \quad F(\mathcal{T}) = \text{peso di } \mathcal{T},$$

nella famiglia costituita da tutte le porzioni limitate del corpo si definisce una funzione additiva di dominio.

Prendiamo ora a considerare le funzioni additive di dominio derivabili. In *Fisica*, per esempio, si suppone sempre che ogni funzione

di dominio definita dalla (4) sia derivabile, e alla derivata di una tale funzione, in un punto P , si dà il nome di *peso specifico* del corpo nel punto P . Sia $f(P)$ tale peso specifico; per ogni porzione limitata T del corpo, diciamo $m'(T)$ e $m''(T)$, rispettivamente, il minimo e il massimo valore del peso specifico. Il peso $F(T)$ della porzione T è evidentemente compreso fra i prodotti $Tm'(T)$ e $Tm''(T)$, si ha cioè

$$(5) \quad Tm'(T) \leq F(T) \leq Tm''(T).$$

Orbene, in generale, la funzione di dominio $F(T)$ sia definita nella famiglia $[A]$ e la funzione di punto $g(P)$ sia definita in A ; se, designando

$$e'_g(T), \quad e''_g(T),$$

gli estremi, inferiore e superiore, di $g(P)$ in T , si ha sempre, per ogni dominio di $[A]_R$, e quindi, in particolare, per A , quando è limitato,

$$Te'_g(T) \leq F(T) \leq Te''_g(T);$$

si dice che la funzione $F(T)$ *verifica la proprietà della media rispetto alla funzione di punto $g(P)$* .

Così, com'è ben noto, le funzioni additive di dominio definite dalle (3) verificano entrambe la proprietà della media rispetto alla funzione integranda $f(P)$, supposta limitata. In virtù della (5), si ha che la funzione additiva *peso*, definita dalla (4), verifica la proprietà della media rispetto al peso specifico, rispetto cioè alla derivata della funzione; tale proposizione è affatto generale, secondo il seguente *teorema Cauchy-Fubini*:

I. *Se la funzione additiva di dominio $F(T)$, definita nella famiglia $[A]$, è ovunque derivabile su A , essa verifica la proprietà della media rispetto alla sua funzione derivata $f(P)$. (*)*

Limitiamoci a dimostrare che se T è un qualunque dominio di $[A]_R$, si ha

$$(6) \quad F(T) \leq Te'_f(T).$$

(*) Questo teorema fu scoperto da *Cauchy*, ma con una definizione assai più restrittiva della derivabilità di una funzione di dominio, la quale definizione porta alla continuità della funzione derivata. Ma anche la definizione di derivabilità contemplata dal *Fubini* è più restrittiva di quella data qui.

Ciò occorre solo fare se $e'_f(\mathbf{T})$ è finito, e noi tale lo supporremo e ne indicheremo il valore, semplicemente, con e . Se, essendo ε una qualsiasi quantità positiva, dimostriamo che $F(\mathbf{T}) < (e + \varepsilon) T$, avremo dimostrato la (6). Fissato arbitrariamente ε , poniamo

$$G(\mathbf{T}) = F(\mathbf{T}) - (e + \varepsilon) T,$$

si ha $g(P) = dG/dT = f(P) - e - \varepsilon < 0$, in ogni punto di \mathbf{T} . Devo dimostrare che $G(\mathbf{T}) < 0$. Sia invero, se possibile, $G(\mathbf{T}) \geq 0$. Consideriamo, al solito, il caso particolare $r = 2$, e diciamo \mathbf{R} il dominio rettangolare $[(a', b'); (a'', b'')]$ avente gli stessi punti estremi di \mathbf{T} . Fissato un numero naturale $n (\geq 2)$, dividiamo gli intervalli (a', a'') e (b', b'') in n parti eguali e, corrispondentemente, il dominio rettangolare \mathbf{R} in n^2 domini rettangolari eguali, dei quali indicheremo con \mathbf{R}_{hk} quelli che hanno punti *interni* in comune con \mathbf{T} . Posto $\mathbf{T}_{hk} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_{hk}$, si ha:

$$\mathbf{T} = \sum_{hk} \mathbf{T}_{hk}, \quad G(\mathbf{T}) = \sum_{hk} G(\mathbf{T}_{hk}),$$

e poichè $G(\mathbf{T}) \geq 0$, per almeno uno fra i domini \mathbf{T}_{hk} si dovrà avere $G(\mathbf{T}_{hk}) \geq 0$. Diciamo \mathbf{T}_1 tale dominio e $\mathbf{R}_1 [(a'_1, b'_1); (a''_1, b''_1)]$ il dominio rettangolare \mathbf{R}_{hk} che lo contiene; si ha $a''_1 - a'_1 = (a'' - a')/n$, $b''_1 - b'_1 = (b'' - b')/n$. Dividendo, a sua volta, il dominio rettangolare \mathbf{R}_1 in n^2 domini rettangolari eguali, si viene a costruire un dominio rettangolare $\mathbf{R}_2 [(a'_2, b'_2); (a''_2, b''_2)]$, per il quale, ponendo $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_2$, si ha $G(\mathbf{T}_2) \geq 0$, $a''_2 - a'_2 = (a'' - a')/n^2$, $b''_2 - b'_2 = (b'' - b')/n^2$. Ripetendo indefinitamente questo procedimento, si viene a costruire una successione illimitata di domini rettangolari $\mathbf{R} > \mathbf{R}_1 > \mathbf{R}_2 > \dots$, aventi, ciascuno, punti interni in comune con \mathbf{T} , e per i quali risulta

$$(7) \quad G(\mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_i) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Detti (a'_i, b'_i) e (a''_i, b''_i) i punti estremi di \mathbf{R}_i , le successioni a', a'_1, a'_2, \dots ; a'', a''_1, a''_2, \dots ; b', b'_1, b'_2, \dots ; b'', b''_1, b''_2, \dots sono monotone, la prima e la terza non decrescenti, le altre due non crescenti, e si ha $a''_i - a'_i = (a'' - a')/n^i$, $b''_i - b'_i = (b'' - b')/n^i$. Ponendo

$$a = \lim a'_i = \lim a''_i, \quad b = \lim b'_i = \lim b''_i,$$

si vede che il punto (a, b) appartiene a \mathbf{T} e ad ogni \mathbf{R}_i e che, in forza della (7), per essere sempre $\mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_i$ contenuto in $[\mathbf{A}]_E$, la derivata di $G(\mathbf{T})$ in questo punto non è negativa, ciò che è assurdo.

Convieni rilevare il seguente teorema, più generale di quello ora dimostrato, il quale riceve un più frequente riscontro nella *Fisica*.

II. Il dominio A sia la somma dei domini A_1, A_2, \dots, A_n , in modo che per ogni dominio T della famiglia $[A]_R$ riesca

$$(8) \quad T = \sum_{i=1}^n T \cdot A_i,$$

ove, nella somma del secondo membro, si sottintendono omissi gli addendi eventualmente non esistenti; allora, se la funzione additiva di dominio $F[T]$, definita nella famiglia $[A]$, è derivabile, in ogni punto, su ciascun dominio A_i ($i=1, 2, \dots, n$), essa funzione verifica sempre la proprietà della media rispetto alla sua derivata.

In virtù della (8) i domini A_i , presi a due a due, sono sprovvisti di punti interni comuni. In un punto interno ad un qualsiasi dominio A_i la derivata, su questo, della funzione F , della quale derivata il teorema suppone l'esistenza, è anche derivata su A ; può benissimo *non* essere così per un punto comune a due o più frontiere dei domini A_i , per un tale punto la derivata della F , su A , può mancare (*). Per ogni dominio T della famiglia $[A]_R$ in virtù del teor. prec., si ha

$$(9) \quad e'_f(T \cdot A_i) \text{ est } (T \cdot A_i) \leq F(T \cdot A_i) \leq e''_f(T \cdot A_i) \text{ est } (T \cdot A_i),$$

$$(i=1, 2, \dots, n),$$

e quindi, detti $e'_f(T)$ e $e''_f(T)$, rispettivamente, il minore fra gli n numeri $e'_f(T \cdot A_i)$ e il maggiore fra gli n numeri $e''_f(T \cdot A_i)$, sommando membro a membro le relazioni (9), risulta, in virtù della (8),

$$T e'_f(T) \leq F(T) \leq T e''_f(T),$$

come appunto volevamo dimostrare.

Come abbiamo detto, il teorema ora stabilito trova, assai frequentemente, riscontro in esempi della *Fisica*. Basta considerare la funzione definita dalla (4) nel caso che il corpo pesante A sia costituito da più corpi, di sostanze diverse, saldati fra loro ai loro con-

(*) Per un tale punto si può solo affermare che la minima e la massima derivata di F su A , sono comprese fra la minore e la maggiore delle derivate in quel punto calcolate sopra ciascuno dei domini ai quali appartiene il punto.

torni. In un punto ove si saldano due o più di questi corpi, il corpo \mathcal{A} può non avere un peso specifico determinato. Non ostante, com'è intuitivo, il peso di ogni porzione del corpo verifica sempre la proprietà della media rispetto al peso specifico, considerato là ove è determinato.

Dopo il teor. I siamo in grado di dimostrare — per le funzioni additive di dominio — la reciproca di una proposizione enunciata al n° prec., di dimostrare cioè che:

III. *Se la funzione additiva di dominio $F(\mathcal{T})$, definita nella famiglia $[\mathcal{A}]$, è ovunque derivabile su \mathcal{A} , con derivata $f(P)$ ivi limitata, essa è uniformemente lipschitziana.*

Ed invero, per ogni dominio \mathcal{T} di $[\mathcal{A}]_R$ si ha

$$T e'_f(\mathcal{T}) \leq F(\mathcal{T}) \leq T e''_f(\mathcal{T});$$

ma se K è l'estremo superiore di $|f(P)|$ in \mathcal{A} riesce sempre $|e'_f(\mathcal{T})| \leq K$, $|e''_f(\mathcal{T})| \leq K$, e se ne deduce pertanto $|F(\mathcal{T})| \leq K.T$.

Problema della ricerca della funzione primitiva. L'assegnata funzione di punto $f(P)$ sia definita nel dominio \mathcal{A} ; ogni funzione di dominio $F(\mathcal{T})$, definita in una famiglia $[\mathcal{A}]$, di domini \mathcal{T} contenuti in \mathcal{A} , per la quale funzione si abbia, in ogni punto e su \mathcal{A} ,

$$\frac{dF}{d\mathcal{T}} = f(P),$$

dicesi *primitiva* della $f(P)$. Un problema del quale si occupa il calcolo integrale è il seguente:

Assegnata, in ogni punto del dominio \mathcal{A} , la funzione di punto $f(P)$, definire in una famiglia $[\mathcal{A}]$ una funzione di dominio additiva primitiva della $f(P)$.

Si esprime che il problema ora posto possiede una soluzione, dicendo, semplicemente, che la funzione $f(P)$ è dotata di *funzione primitiva additiva di dominio*.

Sussiste il seguente fondamentale teorema:

IV. *Nella famiglia $[\mathcal{A}]_R$, non si può definire più di una funzione di dominio additiva primitiva della $f(P)$.*

Ed invero, se le due funzioni additive di dominio $F_1(\mathcal{T})$ e $F_2(\mathcal{T})$ sono definite nella detta famiglia $[\mathcal{A}]_R$ e sono entrambe primitive

della $f(P)$, la funzione $G = F_1 - F_2$ è additiva, è definita nella stessa famiglia e ha ovunque per derivata lo zero. In virtù del teor. I si ha allora $G(\mathbf{T}) \equiv 0$; e ciò dimostra il teorema.

Supporremo ora — sino alla fine — che la funzione $f(P)$, definita nel dominio \mathbf{A} , sia limitata, in ogni dominio limitato contenuto in \mathbf{A} . Riescono allora definite, per ogni tale dominio, le funzioni additive (3), rappresentanti il minimo ed il massimo integrale della funzione f ; orbene, si ha il seguente importante teorema:

V. Una funzione additiva di dominio $F(\mathbf{T})$ che verifichi la proprietà della media rispetto alla funzione di punto $f(P)$, per ogni dominio \mathbf{T} di $[\mathbf{A}]_R$ ha un valore compreso fra il minimo e il massimo integrale della f estesi a \mathbf{T} .

Fissato, arbitrariamente, un dominio \mathbf{T} di $[\mathbf{A}]_R$, decomponiamo, al solito modo, un dominio rettangolare contenente \mathbf{T} in domini rettangolari parziali, dei quali sia δ la massima diagonale e diciamo $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots$ i prodotti di \mathbf{T} per quelli fra questi domini rettangolari che hanno punti interni in comune con \mathbf{T} . Si ha

$$F(\mathbf{T}) = \sum_i F(\mathbf{T}_i), \quad T_i \cdot e'_f(\mathbf{T}_i) \leq F(\mathbf{T}_i) \leq T_i \cdot e''_f(\mathbf{T}_i),$$

e quindi

$$\sum_i T_i e'_f(\mathbf{T}_i) \leq F(\mathbf{T}) \leq \sum_i T_i e''_f(\mathbf{T}_i),$$

e pertanto (I, 97), passando al limite per δ infinitesimo,

$$\int_{\mathbf{T}}'' f(P) dT \leq F(\mathbf{T}) \leq \int_{\mathbf{T}}''' f(P) dT.$$

Ne segue:

VI. La funzione $f(P)$ sia integrabile. Una funzione additiva $F(\mathbf{T})$ che verifichi la proprietà della media rispetto alla funzione $f(P)$, per ogni dominio \mathbf{T} di $[\mathbf{A}]_R$ coincide con l'integrale della funzione esteso a \mathbf{T} .

VII. La funzione $f(P)$ sia dotata di funzione primitiva additiva di dominio. Tale funzione, per qualsiasi dominio \mathbf{T} di $[\mathbf{A}]_R$, ha un valore compreso fra il minimo e il massimo integrale della $f(P)$ estesi a \mathbf{T} .

Per le funzioni integrabili, il posto problema della ricerca della funzione primitiva additiva di dominio è, dopo ciò, completamente risolto dal teorema seguente:

VIII. *La funzione $f(P)$ sia integrabile. Se essa è dotata di funzione primitiva additiva di dominio, questa, per ogni dominio \mathbf{T} di $[\mathbf{A}]_R$, ha il valore dell'integrale della funzione esteso a \mathbf{T} .*

Si sa (IV, 91) che le funzioni continue sono integrabili su ogni dominio limitato, per queste funzioni si ha inoltre che:

IX. *Ogni funzione continua $f(P)$ è dotata di funzione primitiva additiva di dominio.*

Verificheremo che, posto

$$(10) \quad F(\mathbf{T}) = \int_{\mathbf{T}} f(P) d\mathbf{T},$$

per ogni punto P del dominio ove è definita la f , si ha

$$\frac{dF}{d\mathbf{T}} = f(P).$$

Effettivamente, comunque si assegni un numero positivo ε , si può sempre, in corrispondenza, determinare, sul dominio di definizione della f , un dominio quadrato \mathbf{Q} di centro in P , tale che per ogni punto M di \mathbf{Q} riesca

$$f(P) - \varepsilon \leq f(M) \leq f(P) + \varepsilon,$$

per ogni dominio \mathbf{T} contenuto in \mathbf{Q} si avrà allora

$$f(P) - \varepsilon \leq \frac{F(\mathbf{T})}{\mathbf{T}} \leq f(P) + \varepsilon.$$

Adunque dalla (10) si deduce la seguente:

$$dF = f(P) d\mathbf{T},$$

e viceversa, da questa si deduce la (10).

Osserviamo che per la funzione di dominio, definita dalla (10) nella famiglia $[\mathbf{A}]$ costituita da tutti i domini limitati contenuti in \mathbf{A} , si ha:

$$\lim_{\mathbf{T} \rightarrow P} \frac{F(\mathbf{T})}{\mathbf{T}} \{su [\mathbf{A}]\} = f(P).$$

Nuova dimostrazione dell'integrabilità sopra un dominio delle funzioni continue. Il teor. IV fornisce una nuova dimostrazione (dovuta a **Cino Polì**) della integrabilità delle funzioni continue sopra un dominio limitato, la quale, contrariamente a quella già data al n° 91, è affatto indipendente dal teorema di **Cantor** sulle funzioni continue stabilito al n° 32. Vogliamo esporre tale semplice dimostrazione. Si deve dimostrare che se $f(P)$ è una funzione continua nel dominio A , per ogni dominio T di $[A]_R$ e quindi anche per il dominio A , quando è limitato, riesce:

$$F'(T) = \int_T f(P) dT = \int_T f''(P) dT = F''(T).$$

Effettivamente, le due funzioni $F'(T)$ e $F''(T)$ sono additive e, come risulta da una dimostrazione identica a quella data per il teor. IX, si ha ovunque

$$\frac{dF'}{dT} = \frac{dF''}{dT}.$$

Complemento al teorema Cauchy-Fubini. Come ha osservato il **Fubini**, il teorema I è suscettibile del seguente notevole perfezionamento:

X. *La funzione additiva di dominio $F(T)$, definita nella famiglia $[A]$ abbia ovunque la derivata finita $f(P)$. Per ogni dominio T di $[A]_R$, ed in particolare per A , quando è limitato, si avrà precisamente*

$$e'_f(A) < \frac{F(T)}{T} < e''_f(T),$$

se $e'_f(T) < e''_f(T)$.

Limitiamoci a dimostrare che $F(T) < T e''_f(T)$. Supposto e'_f finito, indichiamone con e il valore. Sia U un dominio di $[A]_R$ variabile in T , e poniamo $G(U) = F(U) - eU$; in virtù del teorema I si ha $F(U) - e'_f(U)U \leq 0$ e quindi, poichè $e''_f(U) \leq e$, si ha sempre $G(U) \leq 0$. Se non fosse $G(T) = F(T) - eT < 0$, sarebbe $G(T) = 0$, e quindi, poichè per ogni dominio U di $[A]_R$ contenuto in T , anche $T - U$ è di $[A]_R$, dalla

$$G(T) = G(U) + G(T - U),$$

ne seguirebbe sempre $G(U) = 0$, e pertanto $dG/dU = 0$, cioè $f(P) \equiv e$, ciò che avrebbe la conseguenza, contraria all'ipotesi, $e'_f(T) = e = e'_f(T)$.

101. Cambiamento delle variabili negli integrali. Applicazioni. — La r -pla di funzioni reali e continue

$$(1) \quad x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_r) \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

sia definita in un dominio limitato C dello spazio (y_1, y_2, \dots, y_r) e sia tale che (cfr. n° 75, IV e V): Nel mentre che il punto $Q(y_1, y_2, \dots, y_r)$ descrive un dominio qualsivoglia U di una certa famiglia $[C]$, il punto $P[\varphi_1(Q), \varphi_2(Q), \dots, \varphi_r(Q)]$, che le (1) fanno corrispondere a Q , descriva, nello spazio (x_1, x_2, \dots, x_r) , un corrispondente dominio T , contenuto entro un determinato dominio limitato A di quello spazio, ove è definita la funzione di punto $f(P)$, e appartenente ad una certa famiglia $[A]$. Supporremo sempre che al dominio C venga, in tal modo, a corrispondere il dominio A . Come al n° 99, porremo

$$T = \varphi(U), \quad T = t(U),$$

sarà $A = \varphi(C)$, $A = t(C)$.

Sussistono i due importanti teoremi seguenti che, per ovvia ragione, chiamansi *del cambiamento delle variabili negli integrali*.

I. *La funzione $f(P)$ sia continua in ogni punto del dominio A e le funzioni continue φ_i siano tali che: a) si abbia sempre, per due qualsivogliano domini U' e U'' , elementarmente addizionabili, della famiglia $[C]_R$,*

$$\varphi(U' \dot{+} U'') = \varphi(U') \dot{+} \varphi(U'');$$

b) *la funzione numerica $t(U)$, che risulta allora additiva in $[C]_R$ sia derivabile in ogni punto Q di C e la derivata $J(Q)$ sia limitata e integrabile su C . Si ha allora per ogni dominio di $[C]_R$, ed in particolare per C ,*

$$(2) \quad \int_{\varphi(U)} f(P) dT = \int_U f[\varphi_1(Q), \varphi_2(Q), \dots, \varphi_r(Q)] J(Q) dU$$

Ponendo

$$F(T) = \int_T f(P) dT,$$

data la continuità di $f(P)$, qualunque sia la famiglia $[A]$ di domini limitati, si ha sempre (n° prec. IX)

$$\lim_{T \rightarrow P} \frac{F(T)}{T} \{su [A]\} = f(P).$$

Sono dunque soddisfatte tutte le ipotesi del teor. II del n° 99, e pertanto, posto $G(U) = F[\varphi(U)]$, per qualunque punto Q di C si ha

$$(3) \quad \frac{dG}{dU} = f[\varphi_1(Q), \varphi_2(Q), \dots, \varphi_r(Q)] J(Q).$$

D'altra parte, in $[C]_R$,

$$\begin{aligned} G(U' \dot{+} U'') &= F[\varphi(U' \dot{+} U'')] = F[\varphi(U') \dot{+} \varphi(U'')] = \\ &= F[\varphi(U')] + F[\varphi(U'')] = G(U') + G(U''), \end{aligned}$$

si ha dunque che la funzione di dominio G , definita in $[C]_R$, è additiva, è ovunque derivabile, con derivata — data dalla (3) — limitata e integrabile in ogni dominio di $[C]$; ne segue (teor. VIII del n° prec.) per ogni dominio di $[C]_R$

$$G(U) = F[\varphi(U)] = \int_{\varphi(U)} f(P) dT = \int_U f[\varphi_1(Q), \dots, \varphi_r(Q)] J(Q) dU.$$

II. Le (1) pongano una corrispondenza biunivoca fra i punti di A e di C e si abbia

$$y_i = \phi_i(x_1, x_2, \dots, x_r) \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

le ϕ_i risultando pur esse continue e tali che nel mentre che il punto $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$ descrive un dominio qualsivoglia T della famiglia $[A]$, il punto corrispondente $Q[\phi_1(P), \phi_2(P), \dots, \phi_r(P)]$ descriva, nello spazio (y_1, y_2, \dots, y_r) , un corrispondente dominio $U \equiv \phi(T)$ di $[C]$, in maniera che, in $[A]_R$, sia sempre $\phi(T' \dot{+} T'') = \phi(T') \dot{+} \phi(T'')$. Se la funzione $f(P)$ è limitata e integrabile su A e se esiste una funzione $J(Q)$, limitata, non negativa e integrabile su C , tale che, comunque si prenda un dominio T di $[A]_R$, risulti

$$(4) \quad \text{est } T = \int_{\phi(T)} J(Q) dU,$$

allora la funzione

$$f[\varphi_1(Q), \varphi_2(Q), \dots, \varphi_r(Q)] J(Q)$$

è limitata in C e si avrà, per qualsiasi dominio T di $[A]_R$, in particolare per A ,

$$(5) \quad \int_T f(P) dT = \int_{\phi(T)} f[\varphi_1(Q), \varphi_2(Q), \dots, \varphi_r(Q)] J(Q) dU.$$

Intanto, poichè mentre il punto Q descrive per intero $\phi(T)$, il punto corrispondente P descrive per intero T , posto

$$g(Q) = f[\varphi_1(Q), \varphi_2(Q), \dots, \varphi_r(Q)],$$

la funzione $g(Q)$ possiede in $\phi(T)$ gli estremi $e'(T)$ e $e''(T)$ che la funzione $f(P)$ possiede in T . Qualunque dominio di $[A]$ si consideri la funzione $g(Q)J(Q)$ riesce pertanto limitata nel corrispondente dominio di $[C]$. Poniamo

$$F'(T) = \int_{\phi(T)}' g(Q) J(Q) dU, \quad F''(T) = \int_{\phi(T)}'' g(Q) J(Q) dU.$$

Le due funzioni di dominio F' e F'' così definite in $[A]_R$ sono ivi additive, e poichè

$$e'(T) \int_{\phi(T)} J(Q) dU \left\{ \begin{array}{l} \leq \int_{\phi(T)}' g(Q) J(Q) dU \leq \\ \leq \int_{\phi(T)}'' g(Q) J(Q) dU \leq \end{array} \right\} e''(T) \int_{\phi(T)} J(Q) dU,$$

esse, in forza della (4), verificano la proprietà della media rispetto alla funzione $f(P)$. Per la supposta integrabilità di questa funzione, se ne deduce (teor. VI del n° prec.) in $[A]_R$,

$$F'(T) = F''(T) = \int_T f(P) dT,$$

ciò che dimostra completamente il teorema.

Per molte, anche modeste, applicazioni è necessario estendere i teorr. I e II al caso che la funzione $f(P)$ sia soltanto supposta sommabile e le funzioni φ_i e ϕ_i *non* siano ovunque continue e non pongo, senza eccezione, una corrispondenza biunivoca fra i domini A e C . Al riguardo, è sufficiente stabilire il seguente teorema:

III. Siano A e M due insiemi misurabili (limitati o no) dello

spazio (x_1, x_2, \dots, x_r) , sia M chiuso, contenuto in A e di estensione nulla, e la funzione $f(P)$ sia definita in ogni punto di $A - M$. Siano C e N due insiemi misurabili (limitati o no) dello spazio (y_1, y_2, \dots, y_r) , sia N chiuso, contenuto in C e di estensione nulla, e la r^{va} di funzioni reali $\varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_r)$ siano definite e siano continue in ogni punto di $C - N$. Esista una successione di domini limitati $C_1, C_2, \dots, C_s, \dots$, invadente $C - N$, ai quali, mediante le (1) corrispondano in A , i domini limitati $A_1, A_2, \dots, A_s, \dots$, costituenti pur essi, una successione invadente $A - M$. Si ha allora che se per la funzione f e per la corrispondenza posta dalle (1), fra i domini C_s e A_s sono soddisfatte — per ogni s — le ipotesi del teor. I o quelle del teor. II, dalla sommabilità su A di $f(P)$ segue quella su C di $f[\varphi_1(Q), \dots, \varphi_r(Q)] \times J(Q)$, e viceversa; laddove, nell'un caso o nell'altro, riesce :

$$(6) \quad \int_A f(P) dT = \int_C f[\varphi_1(Q), \varphi_2(Q), \dots, \varphi_r(Q)] J(Q) dU$$

Si ha, invero, per ogni valore dell'indice s ,

$$(7) \quad \int_{A_s} f(P) dT = \int_{C_s} f[\varphi_1(Q), \varphi_2(Q), \dots, \varphi_r(Q)] J(Q) dU,$$

$$(8) \quad \int_{A_s} |f(P)| dT = \int_{C_s} |f[\varphi_1(Q), \varphi_2(Q), \dots, \varphi_r(Q)]| J(Q) dU.$$

La (8) assicura che dalla sommabilità di $f(P)$ su A segue quella di $g(Q)J(Q)$ su C , e viceversa; la (7), al limite per $s \rightarrow \infty$, ha poi come conseguenza la (6).

Caso particolare degli integrali ad una dimensione.

Sia $f(x)$ una funzione dell' unica variabile reale x definita nell' intervallo (a', a'') e su di questo limitata e integrabile. Sia $\varphi(y)$ una funzione definita nell' intervallo (c', c'') , ivi ovunque derivabile con derivata $\varphi'(y)$ continua, non negativa e non sempre nulla in ogni intervallo di (c', c'') , e si abbia $a' = \varphi(c')$, $a'' = \varphi(c'')$. La funzione $x = \varphi(y)$ è allora propriamente invertibile in (c', c'') , sia $y = \phi(x)$ la sua funzione inversa. Ad ogni dominio della famiglia $[A]_R$, costituita dagli intervalli (x', x'') di (a', a'') , corrisponde in (c', c'') l' intervallo $[\phi(x'), \phi(x'')]$, cioè un dominio della famiglia $[C]_R$, costituita dagli intervalli (y', y'') di (c', c'') , in maniera che alla somma (ele-

mentare) di due intervalli di $[A]_R$ corrisponde la somma (elementare) dei due intervalli corrispondenti di $[C]_R$. Risulta inoltre (pag. 413)

$$\text{lung}(x', x'') = x'' - x' = \int_{[\psi(x'), \psi(x'')]} \varphi'(y) dy.$$

Sono soddisfatte dunque tutte le ipotesi del teor. II e si ha pertanto

$$(9) \quad \int_{(a', a'')} f(x) dx = \int_{(c', c'')} f[\varphi(y)] \varphi'(y) dy.$$

Se, mantenendo tutte le altre ipotesi, fosse, invece, sempre $\varphi'(y) \leq 0$, avendosi $a' = \varphi(c'')$, $a'' = \varphi(c')$, risulterebbe

$$(10) \quad \int_{(a', a'')} f(x) dx = - \int_{(c', c'')} f[\varphi(y)] \varphi'(y) dy.$$

Nei due casi, si ha dunque sempre

$$\int_{(a', a'')} f(x) dx = \int_{(c', c'')} f[\varphi(y)] |\varphi'(y)| dy.$$

Nel Cap. V tratteremo, con maggiore diffusione, l'importante argomento del cambiamento della variabile negli integrali semplici.

Troviamo già una prima conferma della proprietà generale della quale abbiamo dato notizia alla fine del n° 99. All'intervallo $U \equiv (y', y'')$ di $[C]_R$, corrisponde, mediante la $x = \varphi(y)$, l'intervallo $T \equiv [\varphi(y'), \varphi(y'')]$ di $[A]_R$ e si ha:

$$\frac{T}{U} = \frac{1}{y'' - y'} \int_{(y', y'')} |\varphi'(y)| dy,$$

e pertanto (100, IX)

$$\lim_{U \rightarrow y} \frac{T}{U} = \frac{dT}{dU} = \left| \frac{d\varphi}{dy} \right|.$$

Esercizi. 1°) Posto $x = \frac{y}{1-y}$ si trova (teor. III)

$$\int_{(0, \infty)} e^{-x^2} dx = \int_{(0, 1)} e^{-\left(\frac{y}{1-y}\right)^2} \frac{dy}{(1-y)^2}.$$

2°) Essendo $y < x$, posto $t = y + (x - y)\tau$, si trova (cfr. eserc. 3°, n° 95)

$$\int_{(y, x)} \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha} (t-y)^\alpha} = \int_{(0, 1)} \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\alpha} \tau^\alpha}.$$

Per $\alpha = 1/2$ si ha

$$\int_{(0, 1)} \frac{dt}{(1-t)^{1-\alpha} t^\alpha} = \int_{(0, 1)} \frac{dt}{\sqrt{t-t^2}} = \int_{(0, 1)} \frac{2dt}{\sqrt{1-(2t-1)^2}},$$

e col cambiamento della variabile $\tau = 2t - 1$, e ricordando che $d\tau = 2dt / \sqrt{1-\tau^2}$, si trova, come appunto già dicemmo,

$$\int_{(y, x)} \frac{dt}{\sqrt{(x-t)(t-y)}} = \int_{(-1, 1)} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \pi.$$

2°) **Integrali a due o a tre dimensioni in coordinate polari.** Gli sviluppi relativi al teor. VII del n° 92, consentono immediatamente di asserire (in forza dei teorr. II e III del presente) che, nelle ipotesi fatte per il citato teorema del n° 92 e mantenendo le notazioni là usate, per ogni funzione $f(x, y)$, sommabile e integrabile sull'insieme misurabile S del piano (x, y) , si ha:

$$(11) \quad \int_S f(x, y) dx dy = \int_B f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta,$$

e per ogni funzione $f(x, y, z)$ sommabile e integrabile sull'insieme misurabile S dello spazio (x, y, z)

$$(12) \quad \int_S f(xyz) dx dy dz = \int_B f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

Si ha poi che:

$$\rho d\rho d\theta \text{ e } \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta,$$

sono, rispettivamente, *l'elemento d'area* e *l'elemento di volume* in coordinate polari. E si verifica immediatamente che (cfr. *Notizia*, n° 99)

$$\rho = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} \right|, \quad \rho^2 \sin \varphi = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} \right|.$$

Il *dominio elementare* del piano, relativo alle coordinate polari, è il dominio piano limitato dalle circonferenze di raggi ρ e $\rho + d\rho$

col centro nell'origine e dai raggi, uscenti da questa, di anomalie θ e $\theta + d\theta$. Il *dominio elementare* dello spazio, relativo alle coordinate polari, è il dominio limitato delle superficie sferiche di raggi ρ e $\rho + d\rho$, col centro nell'origine, dai due semipiani, uscenti dall'asse z , di longitudini θ e $\theta + d\theta$, ed infine, dai coni circolari retti, aventi per comune asse l'asse z e di semiaperture φ e $\varphi + d\varphi$.

4°)* **Derivate seconde del potenziale newtoniano. Formola di Poisson.** Nell'esercizio 4° del n° 95* abbiamo stabilito che il potenziale newtoniano

$$(13) \quad f(Q) = \int_{\mathbf{T}} \frac{\mu(P)}{PQ} dT,$$

del corpo \mathbf{T} [dominio limitato e misurabile dello spazio (x, y, z)] nel quale sia distribuita una materia la cui densità (positiva o negativa) è data dalla funzione $\mu(P)$ definita in \mathbf{T} , ivi limitata e integrabile, è una funzione del punto Q finita e continua in tutto lo spazio, ovunque parzialmente derivabile una prima volta, con derivate sempre continue. E abbiamo visto che riesce

$$F_{\xi}(Q) = \int_{\mathbf{T}} \mu(P) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{PQ} \right) dT, \dots, \dots$$

Di estrema importanza, per le applicazioni alla *Fisica* e alla pura *Analisi matematica*, è lo stabilire un gruppo di condizioni sufficienti per la *seconda* derivabilità parziale del potenziale $F(Q)$ nei punti interni al corpo \mathbf{T} . Si verifica immediatamente che:

a) *In ogni punto Q esterno al corpo, il potenziale $F(Q)$ è una seconda volta parzialmente derivabile, con derivate continue, laddove risulta identicamente*

$$(14) \quad \Delta_2 F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Si ha, invero, per ogni punto esterno a \mathbf{T} (93, V e Oss. a pagina 405),

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = \int_{\mathbf{T}} \mu(P) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{PQ} \right) dT, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = \int_{\mathbf{T}} \mu(P) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{PQ} \right) dT, \dots,$$

$$\Delta_2 F = \int_T \mu(P) \Delta_2 \left(\frac{1}{PQ} \right) dT.$$

Ma

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{PQ} = - \frac{\xi - x}{PQ^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{PQ} = - \frac{1}{PQ^3} + 3 \frac{(\xi - x)^2}{PQ^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{PQ} = 3 \frac{(\xi - x)(\eta - y)}{PQ^5}, \dots,$$

e ne segue $\Delta_2 (1/\overline{PQ}) = 0$.

Ogni funzione F di tre variabili che, in un dominio D dello spazio, è finita e continua, e in ogni punto interno di D lo è con le sue derivate parziali del primo e del secondo ordine, verificando identicamente l'equazione (14) — detta di **Laplace** — dicesi **armonica nel dominio D** . Si ha dunque che: *Il potenziale newtoniano è una funzione armonica, in ogni dominio D che non contenga punti interni al corpo T .*

La proprietà α) dell'*Eserc.* 4^o del n^o 95* dà poi che il potenziale è infinitesimo all'infinito e si ha che:

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} (F(Q) \times \overline{OQ}) = \int_T \mu(P) dT = \text{massa del corpo } T = M,$$

O designando l'origine delle coordinate.

Per lo studio della derivabilità parziale del second'ordine della F nell'interno del corpo, conviene dapprima considerare l'interessante caso particolare che il corpo si riduca ad uno **strato sferico sfericamente stratificato**. Essendo cioè $P_0(a, b, c)$ un punto dello spazio e r_1, r_2 due numeri arbitrarii tali che $0 \leq r_1 < r_2$, il corpo T sia definito dalla limitazione

$$r_1 \leq \overline{P_0P} \leq r_2,$$

e la densità μ sia soltanto funzione della distanza $\rho = \overline{P_0P}$. Supporremo dunque $\mu(\rho)$ funzione di ρ limitata e integrabile sull'intervallo (r_1, r_2) dell'asse ρ . Denoteremo con T_e il dominio dei punti dello spazio non interni alla sfera di centro in P_0 e di raggio r_2 , con T_i la sfera di centro in P_0 e di raggio r_1 . Se $r_1 = 0$ la sfera T_i si riduce al punto P_0 che diremo, in ogni caso, **centro dello strato**. Per

ogni punto Q , arbitrariamente fissato, assumiamo un sistema di coordinate polari aventi il polo in P_0 e per asse polare l'asse $\vec{P_0Q}$. Ponendo $\overline{P_0Q} = r$, per ogni punto P di T si ha:

$$\overline{PQ} = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi},$$

e quindi [per la (12)]

$$(15) \quad F(Q) = \int_{(0, 2\pi)} d\theta \int_{(r_1, r_2)} \rho \mu(\rho) d\rho \int_{(0, \pi)} \frac{\rho \operatorname{sen} \varphi d\varphi}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi}}$$

Si osservi che

$$\frac{d}{d\varphi} \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi} = \frac{r\rho \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi}},$$

e pertanto, se Q è in T_e dalla (15) si deduce:

$$(16) \quad F(Q) = \frac{4\pi}{r} \int_{(r_1, r_2)} \rho^2 \mu(\rho) d\rho = \frac{M}{r}.$$

Ne segue: **b)** *Il potenziale newtoniano di uno strato sferico T , sfericamente stratificato, in un punto non interno alla superficie sferica di raggio maggiore limitante lo strato, è quello stesso di un corpo puntiforme, avente la massa di T , deposto nel centro dello strato.*

Dalla stessa (15), se Q è in T_i , si trova invece

$$(17) \quad F(Q) = 4\pi \int_{(r_1, r_2)} \rho \mu(\rho) d\rho.$$

Ne segue: **c)** *Il potenziale newtoniano di uno strato sferico T , sfericamente stratificato, in un punto non esterno alla superficie sferica di raggio minore limitante lo strato ha il valore costante dato dalla (17).*

Sia ora il punto Q interno a T . Diciamo T' lo strato sferico definito dalla limitazione $r_1 \leq \rho \leq r$, T'' lo strato sferico definito dalla limitazione $r \leq \rho \leq r_2$. Si ha:

$$F(Q) = \int_{T'} \frac{\mu(P)}{PQ} dT + \int_{T''} \frac{\mu(P)}{PQ} dT = \frac{4\pi}{r} \int_{(r_1, r)} \rho^2 \mu(\rho) d\rho + 4\pi \int_{(r, r_2)} \rho \mu(\rho) d\rho.$$

Si ha dunque: **d)** *Il potenziale newtoniano di uno strato sferico T , sfericamente stratificato, ha la seguente definizione*

$$(18) \quad F(Q) \begin{cases} = 4\pi \int_{(r_1, r_2)} \rho \mu(\rho) d\rho & \text{se } Q \text{ è in } T_i, \\ = \frac{4\pi}{r} \int_{(r_1, r)} \rho^2 \mu(\rho) d\rho + 4\pi \int_{(r, r_2)} \rho \mu(\rho) d\rho, & \text{se } Q \text{ è in } T, \\ = \frac{M}{r} = \frac{4\pi}{r} \int_{(r_1, r_2)} \rho^2 \mu(\rho) d\rho & \text{se } Q \text{ è in } T_e. \end{cases}$$

Sempre nella sola ipotesi della integrabilità della funzione limitata $\mu(\rho)$ su (r_1, r_2) è facile verificare direttamente [ciò che è un utilissimo esercizio (*)] su questa definizione di $F(Q)$, la già stabilita continuità sua e delle sue derivate parziali del primo ordine, in tutto lo spazio. Si trova

$$(19) \quad \frac{\partial F}{\partial \xi} \begin{cases} = 0 & , \text{ se } Q \text{ è in } T_i, \\ = -4\pi \frac{\xi - a}{r^3} \int_{(r_1, r)} \rho^2 \mu(\rho) d\rho, & \text{se } Q \text{ è in } T, \\ = -\frac{M}{r^3} (\xi - a) & , \text{ se } Q \text{ è in } T_e. \end{cases}$$

Con queste espressioni della derivata $\partial F/\partial \xi$, e con le analoghe per le derivate $\partial F/\partial \eta$, $\partial F/\partial \zeta$, è immediato che:

e) Se la densità μ dello strato sferico T , sfericamente stratificato, è, **inoltre**, una funzione continua, il potenziale newtoniano $F(Q)$ è parzialmente derivabile una seconda volta anche in ogni punto interno a T , con derivate sempre continue, e si trova (93, VII) in $T - FT$,

(*) Si dimostri, in generale, che: Se $f(x)$ è una funzione di x sommabile sull'intervallo (a, b) e $\varphi(x)$ è nello stesso intervallo uniformemente lipschitziana, posto

$$g(x) = \varphi(x) \int_{(a, x)} f(y) dy + \int_{(x, b)} \varphi(y) f(y) dy,$$

si ha, in ogni punto di (a, b) ,

$$\text{deriv}' g(x) = [\text{deriv}' \varphi(x)] \int_{(a, x)} f(y) dy,$$

$$\text{deriv}'' g(x) = [\text{deriv}'' \varphi(x)] \int_{(a, x)} f(y) dy.$$

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(\xi - a)^2}{r^5} \right) \int_{(r_1, r)} \rho^2 \mu(\rho) d\rho - \frac{(\xi - a)^2}{r^2} \mu(r), \\ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{3(\xi - a)(\eta - b)}{r^5} \int_{(r_1, r)} \rho^2 \mu(\rho) d\rho - \frac{(\xi - a)(\eta - b)}{r^2} \mu(r), \\ \dots \end{array} \right.$$

Se $r_1 = 0$, se cioè il corpo T è un **nocciolo sferico sfericamente stratificato**, la derivabilità parziale del secondo ordine del potenziale nel punto P_0 , centro del nocciolo, deve essere esaminata a parte, e si trova:

f) Nel centro $P_0(a, b, c)$ di un nocciolo sferico, di raggio R , sfericamente stratificato, con densità limitata e integrabile, il potenziale vale

$$4\pi \int_{(0, R)} \rho \mu(\rho) d\rho;$$

le sue derivate parziali del primo ordine sono tutte nulle e se, inoltre, la densità è continua, le derivate parziali del secondo ordine del potenziale hanno i valori:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = -\frac{4\pi}{3} \mu(a, b, c), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \zeta} = \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta \partial \xi} = 0.$$

Il potenziale del nocciolo ha dunque, nel centro, un minimo o un massimo **proprio** secondochè la densità ivi è negativa o positiva.

Dalle (20) si deduce poi la continuità in P_0 delle derivate seconde poichè

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} \int_{(0, r)} \rho^2 \mu(\rho) d\rho = \frac{\mu(0)}{3}.$$

Osserviamo che dalle (18) si ricava subito che:

g) Il potenziale $F(Q)$ di un nocciolo sferico, di centro in P_0 e di raggio R , omogeneo e di densità μ , in ciascun punto Q non esterno al nocciolo è dato da

$$F(Q) = \frac{2\pi\mu}{3} (3R^2 - r^2) = \frac{2\pi\mu}{3} (3R^2 - \overline{P_0Q}^2).$$

Denotiamo con u, v una qualsiasi coppia costituita da due, anche coincidenti, fra i tre assi ξ, η, ζ , dalle (19) e (20) si deduce pure immediatamente che:

h) Per ogni punto Q_0 della frontiera FT dello strato sferico T , sfericamente stratificato, con densità continua, sono sempre ben determinati e finiti i limiti

$$(21) \quad \lim_{Q \rightarrow Q_0} F_{uv}(Q) [su T - FT], \quad \lim_{Q \leftarrow Q_0} F_{uv}(Q) [su CT],$$

ed indicando con n l'asse normale alla FT volto, per esempio, verso l'interno di T , si ha:

$$(22) \quad \lim_{Q \rightarrow Q_0} F_{uv}(Q) [su T - FT] - \lim_{Q \leftarrow Q_0} F_{uv}(Q) [su CT] = \\ = -4\pi\mu(Q_0) \cos(u, n) \cos(v, n).$$

Dalle (20) si ha infine:

k) Il potenziale $F(Q)$ di uno strato sferico T , sfericamente stratificato, con densità continua, in ogni punto $Q(\xi, \eta, \zeta)$ interno a T verifica l'equazione di **Poisson**,

$$\Delta_2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = -4\pi\mu(\xi, \eta, \zeta).$$

Sia ora T un qualsivoglia dominio (limitato e misurabile) e, in esso, identicamente $\mu(P) = 1$. Poniamo

$$(23) \quad F^*(Q) = \int_T \frac{dT}{PQ}.$$

Dimostriamo che: *i)* $F^*(Q)$ è parzialmente derivabile una seconda volta in ogni punto interno di T , con derivate continue in ogni tale punto e che: $\Delta_2 F^* = -4\pi$. Sia invero Q un punto, arbitrariamente fissato, interno a T , e consideriamo due sfere S e S' , aventi il comune centro in Q , la prima interna alla seconda, e quest'ultima contenuta in T . Poniamo $T' = T - (S' - FS')$. Si ha

$$F^*(Q) = \int_{T'} \frac{dT}{PQ} + \int_{S'} \frac{dT}{PQ};$$

la $F^*(Q)$ risulta pertanto la somma di due funzioni che, in tutto S , sono [per *a*) e per *e*] continue con le loro derivate parziali dei due primi ordini; altrettanto si potrà allora dire della $F^*(Q)$, mentre riesce:

$$\Delta_2 F^* = \Delta_2 \int_{T'} \frac{dT}{PQ} + \Delta_2 \int_{S'} \frac{dT}{PQ} = -4\pi,$$

in virtù di *a*) e di *k*).

Siamo ora in grado di affrontare la questione generale della derivabilità parziale del secondo ordine della $F(Q)$, definita dalla (13), in ogni punto interno di T . Risolveremo affermativamente la questione. Ma, laddove, nel caso particolare di uno strato sferico sfericamente stratificato, essa è stata [teor. e)] così risolta nella sola ipotesi della continuità della densità del corpo, nel caso affatto generale, noi la risolveremo — *con tutto rigore* — nell'ipotesi (più restrittiva, ma sempre meno di quelle che d'ordinario si considerano^(*)) che quella densità sia uniformemente lipschitziana in tutto il corpo. Dimostreremo precisamente il teorema:

*l) Se la densità $\mu(P)$ è uniformemente lipschitziana (vedi pag. 212) in tutto il corpo T , il potenziale newtoniano $F(Q)$ è parzialmente derivabile una seconda volta in ogni punto interno a T , con derivate continue, date dalla seguente formola di **Moreira**:*

$$(24) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \int_T [\mu(P) - \mu(Q)] \left(\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \frac{1}{PQ} \right) dT + \mu(Q) \frac{\partial^2 F^*}{\partial u \partial v},$$

ove u e v rappresentano due qualsivogliano, anche coincidenti, fra le tre variabili ξ, η, ζ .

Limitiamoci a dimostrare il teorema quando $u \equiv v \equiv \xi$. Il secondo membro della (24) si scrive allora

$$(25) \quad \int_T [\mu(P) - \mu(Q)] \left[-\frac{1}{PQ^3} + 3 \frac{(\xi - x)^2}{PQ^5} \right] dT + \mu(Q) \frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi^2},$$

e cominciamo dal dimostrare che esso rappresenta intanto una funzione di Q , continua in ogni punto interno a T . Per ogni coppia P e Q di punti di T si abbia:

$$|\mu(P) - \mu(Q)| \leq K \cdot \overline{PQ},$$

ove K è una certa costante positiva, risulterà allora:

(*) In questo argomento, una certa economia di ipotesi sulla densità $\mu(P)$ ha un grande significato, specialmente per le applicazioni fisiche. Le distribuzioni di materia (gravifica, elettrica, ...) che possono presentare in natura, saranno, in generale, sempre ben lungi dal possedere per le loro densità proprio quelle particolarità analitiche che occorrono all'analista per la precisione dei suoi calcoli e per il rigore delle sue deduzioni!

$$\left| [\mu(P) - \mu(Q)] \left[-\frac{1}{PQ^3} + 3 \frac{(\xi - x)^2}{PQ^5} \right] \right| \leq 4K \frac{1}{PQ^2},$$

ne segue (per essere verificate le proprietà *a*) e *b'*) delle pagg. 437 e 438, cfr. esempio 4° del n° 94) la uniforme sommabilità su *T*, nelle vicinanze di *Q*, della funzione sotto il segno di integrale nella (25) e quindi (95*, III) data la continuità di μ e [teor. *i*] di $\partial^2 F^* / \partial \xi^2$, l'asserita continuità della funzione (25). Resta solo da dimostrare che questa funzione è precisamente la derivata $\partial^2 F / \partial \xi^2$. Si ha:

$$F_\xi(Q) = - \int_T \mu(P) \frac{\xi - x}{PQ^3} dT;$$

indichiamo con Q_h un punto di coordinate $\xi + h, \eta, \zeta$, variabile in un intorno quadrato $I(Q)$ di Q , contenuto in T , dobbiamo ricercare il limite:

$$(26) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_\xi(Q_h) - F_\xi(Q)}{h}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} (27) \quad \frac{1}{h} [F_\xi(Q_h) - F_\xi(Q)] &= \frac{1}{h} \int_T \mu(P) \left[\frac{\xi - x}{PQ^3} - \frac{\xi + h - x}{PQ_h^3} \right] dT = \\ &= \frac{1}{h} \int_T [\mu(P) - \mu(Q_h)] \left[\frac{\xi - x}{PQ^3} - \frac{\xi + h - x}{PQ_h^3} \right] dT + \mu(Q_h) \frac{F_\xi^*(Q_h) - F_\xi^*(Q)}{h}. \end{aligned}$$

La funzione, di *h* e di *P*,

$$\varphi(h, P) = \frac{\mu(P) - \mu(Q_h)}{h} \left[\frac{\xi - x}{PQ^3} - \frac{\xi + h - x}{PQ_h^3} \right],$$

è funzione di *P* uniformemente sommabile su *T*, nelle vicinanze del punto $h = 0$. Si ha invero, poichè $|PQ_h - PQ| \leq |h|$,

$$\begin{aligned} |\varphi(h, P)| &\leq \frac{K \cdot \overline{PQ_h}}{|h|} \left| (\xi - x) \frac{\overline{PQ_h^3} - \overline{PQ^3}}{\overline{PQ^3} \cdot \overline{PQ_h^3}} - \frac{h}{\overline{PQ_h^3}} \right| \leq \\ &\leq K \left(\frac{\overline{PQ_h^2} + \overline{PQ} \cdot \overline{PQ_h} + \overline{PQ^2}}{\overline{PQ^2} \cdot \overline{PQ_h^2}} + \frac{1}{\overline{PQ_h^2}} \right) \leq \frac{K}{2} \left(\frac{3}{\overline{PQ^2}} + \frac{5}{\overline{PQ_h^2}} \right). \end{aligned}$$

D'altra parte, qualunque sia l'intorno $\mathbf{I}(Q)$ di Q si ha, uniformemente per P variabile in $\mathbf{T} - \mathbf{I}(Q)$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h, P) = [\mu(P) - \mu(Q)] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{PQ},$$

e pertanto e per la stabilita uniforme sommabilita di $\varphi(h, P)$, risulta (95*, II)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbf{T}} \varphi(h, P) dT = \int_{\mathbf{T}} [\mu(P) - \mu(Q)] \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{PQ} \right) dT.$$

Per la continuita di μ e per la proprieta i) si ha poi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mu(Q_h) \frac{F_{\xi}^*(Q_h) - F_{\xi}^*(Q)}{h} = \mu(Q) \frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi^2},$$

e quindi, dalla (27), si deduce, come volevasi dimostrare, che la funzione (25) e precisamente il limite (26), e cioe la derivata $\partial^2 F / \partial \xi^2$, nel punto Q interno a \mathbf{T} .

Ne segue

$$\Delta_2 F = \int_{\mathbf{T}} [\mu(P) - \mu(Q)] \left(\Delta_2 \frac{1}{PQ} \right) dT + \mu(Q) \Delta_2 F^*,$$

e quindi [per i)] $\Delta_2 F = -4\pi\mu(Q)$. Adunque:

m) La funzione potenziale $F(Q)$, nell'ipotesi che la densita μ sia uniformemente lipschitziana in \mathbf{T} , in ogni punto Q interno a \mathbf{T} , verifica l'equazione di **Poisson**:

$$(28) \quad \Delta_2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = -4\pi\mu(\xi, \eta, \zeta).$$

In altre parole: Se la funzione $f(P)$ e definita nel dominio limitato e misurabile \mathbf{T} , dello spazio, e ivi e uniformemente lipschitziana, per ogni punto $Q(\xi, \eta, \zeta)$ interno a \mathbf{T} , si ha:

$$(29) \quad f(Q) = -\frac{1}{4\pi} \Delta_2 \int_{\mathbf{T}} \frac{f(P)}{PQ} dT.$$

Questa formola, che ha in *Analisi* importantissime applicazioni, e nota sotto il nome di **formola di Poisson**.

Ritornando alla funzione potenziale $F(Q)$, vediamo che, in vir-

tù della (14) e della (28), per ogni punto Q_0 della frontiera FT si ha

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \Delta_2 F[su T - FT] = -4\pi\mu(Q_0), \quad \lim_{Q \rightarrow Q_0} \Delta_2 F[su CT] = 0,$$

se non è identicamente $\mu(Q) = 0$ su FT , ciò esclude la possibilità di definire, per ciascuna derivata parziale $\partial^2 F / \partial u^2$, una funzione continua in tutto lo spazio che coincida con quella derivata sia nei punti interni a T sia nei punti esterni.

Rimarrebbero da considerare le questioni seguenti: Quando mai la funzione potenziale è una seconda volta parzialmente derivabile in punti di FT ? Quando lo è in un punto di $RT.FT$, su T , e quando in un punto di $R(CT + FT).FT$, su $CT + FT$? Quando esistono i limiti (21)? Se questi limiti esistono, quando per essi si verificano le (22)? Rinunziamo a trattare qui tali questioni. Ciò ci porterebbe molto in lungo e d'altra parte, quando si voglia essere rigorosi, ad esse non si può dare risposta: che in ipotesi speciali sulla frontiera FT o sulla densità (*).

5°)* **Derivate seconde del potenziale logaritmico. Formola di Poisson.** Al n° 91, esercizio 2°, abbiamo visto che

$$(30) \int_{(0, \pi)} \log(1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2) d\theta \begin{cases} = 0 & \text{se } |\alpha| < 1, \\ = 2\pi \log|\alpha| & \text{se } |\alpha| > 1, \end{cases}$$

considerando, per esempio, valori di α positivi, vogliamo calcolare questo integrale anche per $\alpha = 1$. Se $\alpha = 1$, la funzione integranda perde la sua definizione per $\theta = 0$ e riesce illimitata nell'intervallo $(0, \pi)$, aperto a sinistra; essa però è sempre sommabile e integrabile su $(0, \pi)$. Poichè ad ogni intervallo $(1 - \sigma, 1 + \sigma)$, nel quale si mantenga α , si può far corrispondere un numero positivo k_σ per il quale sia, in $(0, \pi)$,

$$|\log(1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2)| \leq \frac{k_\sigma}{\sqrt{\theta}},$$

si vede che la detta funzione integranda è uniformemente sommabi-

(*) Il lettore potrà al riguardo utilmente consultare le memorie di **Petrini** [*Acta mathematica*, t. XXXI, 1908 e *Journal de Liouville*, 6° série, t. V, 1909] e la nota di **Schmidt** [*Mathematische Annalen*, LXVIII Band, 1910].

le su $(0, \pi)$, nelle vicinanze del punto $\alpha = 1$. L'integrale (30) è pertanto (95*, III) funzione continua di α anche nel punto 1 e si ha perciò

$$\int_{(0, \pi)} \log(1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2) d\theta \begin{cases} = 0 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq 1, \\ = 2\pi \log \alpha & \text{se } \alpha \geq 1. \end{cases} \quad (*)$$

Si osservi che:

$$\int_{(0, 2\pi)} \log(1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2) d\theta = 2 \int_{(0, \pi)} \log(1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2) d\theta,$$

onde segue, da quanto precede che: Se ρ e r sono due quali si vogliano numeri positivi

$$(31) \quad \int_{(0, 2\pi)} \log(\rho^2 - 2\rho r \cos \theta + r^2) d\theta \begin{cases} = 4\pi \log \rho^2 & \text{se } r \leq \rho, \\ = 4\pi \log r^2 & \text{se } r \geq \rho. \end{cases}$$

Si osservi ancora che $\frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho^2}{2} \log \rho - \frac{\rho^2}{4} \right) = \rho \log \rho$, e pertanto, se

$0 \leq r < R$, si trova

$$(32) \quad \int_{(r, R)} \rho \log \rho d\rho = \frac{R^2}{2} \log R - \frac{r^2}{2} \log r - \frac{R^2}{4} + \frac{r^2}{4}.$$

Nel dominio limitato e misurabile T del piano (x, y) sia distribuita una materia di densità $\mu(P)$, limitata e integrabile. Il potenziale logaritmico di T , in un punto $Q(\xi, \eta)$ del suo piano, è dato da

$$(33) \quad F(Q) = \int_T \mu(P) \log \frac{1}{PQ} dT,$$

e riesce definito in tutto il piano e continuo (ovunque) con le sue derivate parziali del primo ordine, per le quali si ha

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \int_T \mu(P) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \log \frac{1}{PQ} \right) dT, \dots$$

(*) Ne segue la *formola di Eulero*

$$\int_{(0, \pi/2)} \log \operatorname{sen} x = -\frac{\pi}{2} \log 2$$

In ogni punto Q esterno a T il potenziale logaritmico è una seconda volta parzialmente derivabile, con derivate continue, date da

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = \int_T \mu(P) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \log \frac{1}{PQ} \right) dT, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = \int_T \mu(P) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \log \frac{1}{PQ} \right) dT, \dots;$$

e poichè

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \log \frac{1}{PQ} = - \frac{\xi - x}{PQ^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \log \frac{1}{PQ} = - \frac{1}{PQ^2} + 2 \frac{(\xi - x)^2}{PQ^4},$$

si può dire (pag. 259) che: **a)** Il potenziale logaritmico è una funzione armonica in ogni dominio del piano (x, y) che non contenga punti interni a T .

Per indagare la derivabilità parziale del secondo ordine del potenziale logaritmico nell'interno di T , come per il potenziale newtoniano, conviene dapprima considerare il caso particolare che T si riduca ad un *anello circolare circolarmente striato*. Essendo cioè $P_0(a, b)$ un punto del piano e r_1 e r_2 due numeri arbitrarii tali che $0 \leq r_1 < r_2$, il dominio T sia definito dalla limitazione $r_1 \leq \overline{P_0 P} \leq r_2$ e la densità μ sia soltanto funzione della distanza $\rho = \overline{P_0 P}$. Per ogni punto Q , arbitrariamente fissato nel piano, assumiamo, nel piano, un sistema di coordinate polari ρ e θ , aventi il polo in P_0 e l'asse polare $\overrightarrow{P_0 Q}$. Ponendo $\overline{P_0 Q} = r$, si ha:

$$F(Q) = - \frac{1}{2} \int_{(r_1, r_2)} \mu(\rho) \rho \, d\rho \int_{(0, 2\pi)} \log(\rho^2 - 2\rho r \cos \theta + r^2) \, d\theta,$$

e quindi — in forza della 31 —

$$(34) \quad F(Q) \begin{cases} = - 2\pi \int_{(r_1, r_2)} \mu(\rho) \rho \log \rho \, d\rho, & \text{se } Q \text{ è in } T_i, \\ = - 2\pi \log r \cdot \int_{(r_1, r)} \mu(\rho) \rho \, d\rho - 2\pi \int_{(r, r_2)} \mu(\rho) \rho \log \rho \, d\rho, & \text{se } Q \text{ è in } T, \\ = - 2\pi \log r \cdot \int_{(r_1, r_2)} \mu(\rho) \rho \, d\rho = M \log \frac{1}{r}, & \text{se } Q \text{ è in } T_e \end{cases}$$

ove M designa la massa di T . Ne seguono, per il potenziale logaritmico, le proprietà analoghe alle **b)**, **c)** e **d)** stabilite per il poten-

ziale newtoniano. Dalle (34) si ricava subito (cfr. *Nota* a pag. . .)

$$(35) \quad \left. \begin{aligned} &= 0, && \text{se } Q \text{ è in } T_i, \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} &= -2\pi \frac{\xi - a}{r^2} \int_{(r_1, r)} \mu(\rho) \rho \, d\rho, && \text{se } Q \text{ è in } T, \\ &= -M \frac{\xi - a}{r^2}, && \text{se } Q \text{ è in } T_e, \end{aligned} \right\}$$

pertanto, se la densità μ dell'anello circolare T , circolarmente striato, è, *inoltre*, una funzione continua, il potenziale logaritmico $F(Q)$ è parzialmente derivabile, una seconda volta, anche in ogni punto interno a T , con derivate seconde continue, e si trova, in $T - FT$,

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} &= \left(-\frac{1}{r^2} + 2 \frac{(\xi - a)^2}{r^4} \right) \int_{(r_1, r)} \mu(\rho) \rho \, d\rho - \frac{(\xi - a)^2}{r^2} \mu(r), \\ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} &= 2 \frac{(\xi - a)(\eta - b)}{r^4} \int_{(r_1, r)} \mu(\rho) \rho \, d\rho - \frac{(\xi - a)(\eta - b)}{r^2} \mu(r), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Se $r_1 = 0$, se cioè il corpo T è un *disco circolare circolarmente striato*, dettونه R il raggio, si ha che nel centro $P_0(a, b)$ del disco, il potenziale logaritmico di esso vale

$$-2\pi \int_{(0, R)} \mu(\rho) \rho \log \rho \, d\rho,$$

le sue derivate parziali del primo ordine, sono entrambe nulle e se, inoltre, la densità è continua, le derivate parziali del secondo ordine del potenziale, hanno i valori

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = -\pi \mu(a, b), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Il potenziale logaritmico $F(Q)$ di un disco circolare, di centro in P_0 e di raggio R , omogeneo e di densità μ , in un punto Q non esterno al disco, risulta dato, per la (32), da

$$F(Q) = -\frac{\pi}{2} \mu (2R^2 \log R - R^2 + r^2) = -\frac{\pi}{2} \mu (2R^2 \log R - R^2 + \overline{P_0 P}^2).$$

Per il potenziale logaritmico di un anello (o di un disco) circolare, circolarmente striato, sussistono dunque le proprietà analo-

ghe alle e), f), g), h) e k) stabilite per il potenziale newtoniano. Ne segue che: *i*) Se T è un qualunque dominio limitato e misurabile del piano (x, y) , ponendo:

$$F^*(Q) = \int_T \left(\log \frac{1}{PQ} \right) dT,$$

il potenziale logaritmico $F^*(Q)$ è parzialmente derivabile una seconda volta, in ogni punto interno di T , con derivate continue in ogni tale punto, riuscendo, in $T - FT$,

$$\Delta^2 F^* = \frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial \eta^2} = -2\pi.$$

Se ne deducono, proprio come per il potenziale newtoniano, i seguenti importanti teoremi:

l) Se la densità $\mu(P)$ è uniformemente lipschitziana in tutto T , il potenziale logaritmico $F(Q)$ è parzialmente derivabile una seconda volta in ogni punto interno a T , con derivate continue, date dalla formola:

$$(37) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \int_T [\mu(P) - \mu(Q)] \left(\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{1}{PQ} \right) dT + \mu(Q) \frac{\partial^2 F^*}{\partial u \partial v},$$

ove u e v rappresentano due quali si vogliono, anche coincidenti, fra le due variabili ξ e η .

m) Il potenziale logaritmico $F(Q)$, nell' ipotesi che la densità μ sia in T , uniformemente lipschitziana, verifica, in $T - FT$, l' equazione di **Poisson**:

$$(38) \quad \Delta_2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = -2\pi \mu(\xi, \eta).$$

In altre parole: Se la funzione $f(x, y)$ è definita nel dominio limitato e misurabile T del piano, e ivi è uniformemente lipschitziana, per ogni punto (ξ, η) interno a T , si ha la formola di **Poisson**:

$$(39) \quad f(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \Delta_2 \int_T f(x, y) \left(\log \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}} \right) dx dy.$$

6°)* **Potenziale newtoniano e potenziale logaritmico dovuti a corpi illimitati.** Sia T un dominio illimitato e misurabile dello

spazio e sia $\mu(P)$ una funzione, definita in \mathbf{T} , limitata e integrabile in ogni porzione limitata di \mathbf{T} , per la quale funzione esista un numero positivo α maggiore di due tale da risultare

$$(40) \quad \mu(P) \times \overline{OP}^\alpha \quad (\alpha > 2),$$

limitata in tutto \mathbf{T} , O designando l'origine delle coordinate. Definito mediante la (13) il potenziale newtoniano di \mathbf{T} , studiarne la continuità e la derivabilità parziale nei punti dello spazio. Si osservi che il corpo potrebbe risultare di massa infinita o indeterminata.

Compiere lo studio analogo per il potenziale logaritmico, definito dalla (33), nel caso che il dominio misurabile \mathbf{T} del piano (x, y) sia illimitato e che per la densità μ siano verificate le stesse ipotesi testè enunciate. Il dominio piano risulta ora di massa ben determinata e finita.

102.* Teoremi di Rolle, di Lagrange, di Darboux, di Cauchy, di l'Hospital per le funzioni additive di dominio. — Devesi a *Fubini* e a *Vitali* l'estensione dei teoremi di *Rolle* e di *Lagrange* alle funzioni di dominio additive, dotate di derivata. Alla trattazione di questi teoremi conviene premettere il seguente

Lemma. *Se $f(x)$ è definita nell'intervallo (a, b) , vi è continua ed è $f(a) = f(b)$, comunque si assegni un numero positivo ε , esiste sempre un intervallo (α, β) di (a, b) , di ampiezza minore di ε , per gli estremi del quale riesce $f(\alpha) = f(\beta)$.*

Esiste invero un punto c , *interno* all'intervallo (a, b) , nel quale la $f(x)$ assume il suo massimo o il suo minimo assoluto in (a, b) . Cangiando, caso mai, $f(x)$ in $-f(x)$, possiamo supporre sempre $f(c)$ il massimo assoluto di $f(x)$ in (a, b) . Sia ora σ un numero positivo, minore di $\varepsilon/2$, tale che l'intervallo $(c - \sigma, c + \sigma)$ sia contenuto in (a, b) . Se fosse $f(c - \sigma) = f(c + \sigma)$ la proposizione sarebbe dimostrata. Sia, al contrario, $f(c - \sigma) \neq f(c + \sigma)$, e riesca, per esempio, $f(c - \sigma) < f(c + \sigma)$. Poichè $f(c - \sigma) < f(c + \sigma) \leq f(c)$, nell'intervallo $(c - \sigma, c)$ esiste almeno un punto $c - \sigma'$ nel quale si ha $f(c - \sigma') = f(c + \sigma)$, e l'intervallo $(c - \sigma', c + \sigma)$ ha le proprietà dell'intervallo (α, β) del quale la proposizione asserisce l'esistenza.

Ne segue facilmente il **primo teorema di Rolle**:

I'. *Siano A un dominio limitato di $S_{(n)}$, connesso con tutti i do-*

minii di $[A]_{\mathbb{R}}$ (*), e $F(\mathbf{T})$ una funzione additiva di dominio, definita in una certa famiglia $[A]$, ovunque derivabile (su A) con derivata $f(P)$ limitata. Se $F(A) = 0$ esiste almeno un punto P di A per il quale è $f(P) = 0$.

Al solito, faremo la dimostrazione nel caso particolare che $S_{(r)}$ sia il piano (x, y) . Se \mathbf{T} è un dominio di questo piano, di punti estremi (α', β') e (α'', β'') , è facile vedere che sui lati del dominio rettangolare $\mathbf{R}(\mathbf{T})$ avente gli stessi punti estremi sono sempre contenuti punti di \mathbf{T} , se inoltre \mathbf{T} è connesso, che, qualunque sia il punto ξ di (α', α'') o il punto η di (β', β'') , le rette $x = \xi$ e $y = \eta$ hanno punti comuni con \mathbf{T} e che, qualunque sia l'intervallo (x', x'') di (α', α'') o l'intervallo (y', y'') di (β', β'') , i punti di \mathbf{T} per i quali è verificata la limitazione $x' \leq x \leq x''$ formano un dominio e così pure quelli per cui è verificata la limitazione $y' \leq y \leq y''$; si vede anzi che se \mathbf{T} appartiene a $[A]_{\mathbb{R}}$ anche i domini ora indicati appartengono ad $[A]_{\mathbb{R}}$. Questi domini saranno designati con le notazioni $\mathbf{T}_{x', x''}$, $\mathbf{T}_{y', y''}$.

Per ogni dominio \mathbf{T} di $[A]_{\mathbb{R}}$, di punti estremi (α', β') e (α'', β'') , definiamo, in (α', α'') , la funzione $X_{\mathbf{T}}(x)$ ponendo

$$X_{\mathbf{T}}(x) = F(\mathbf{T}_{\alpha', x}),$$

e in (β', β'') la funzione $Y_{\mathbf{T}}(y)$ ponendo

$$Y_{\mathbf{T}}(y) = F(\mathbf{T}_{\beta', y}).$$

Per l'additività di F si ha

$$X_{\mathbf{T}}(x'') - X_{\mathbf{T}}(x') = F(\mathbf{T}_{x', x''}), \quad Y_{\mathbf{T}}(y'') - Y_{\mathbf{T}}(y') = F(\mathbf{T}_{y', y''}),$$

ed avendo $F(\mathbf{T})$ la derivata $f(P)$ limitata, esiste un numero positivo K tale che per ogni dominio \mathbf{T} di $[A]_{\mathbb{R}}$ si ha

$$|F(\mathbf{T})| \leq K \text{ est } \mathbf{T},$$

onde segue che le funzioni $X_{\mathbf{T}}(x)$ e $Y_{\mathbf{T}}(y)$ sono continue, anzi uniformemente lipschitziane. Si ha inverso

$$|X_{\mathbf{T}}(x'') - X_{\mathbf{T}}(x')| \leq K |\beta'' - \beta'| |x'' - x'|,$$

$$|Y_{\mathbf{T}}(y'') - Y_{\mathbf{T}}(y')| \leq K |\alpha'' - \alpha'| |y'' - y'|.$$

(*) In $[A]_{\mathbb{R}}$ intendiamo qui contenuti soltanto i prodotti di A per i domini rettangolari aventi punti interni in comune con A . Per esempio, se A è convesso (pag. 61) esso risulta connesso con tutti i domini di $[A]_{\mathbb{R}}$.

Consideriamo una successione $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$, di numeri positivi decrescenti, avente per limite zero. Siano (a', b') e (a'', b'') i punti estremi di A . Risulta $X_A(a') = 0$, e poichè $X_A(a'') = F(A)$, si ha pure $X_A(a'') = 0$. Esiste pertanto (in virtù del lemma premesso) un intervallo (a_1', a_1'') , contenuto in (a', a'') , di ampiezza minore di ε_1 , per il quale si ha

$$X_A(a_1'') - X_A(a_1') = F(A_{a_1', a_1''}) = 0.$$

Indichiamo con B il dominio $A_{a_1', a_1''}$ di $[A]_R$ e diciamone β' e β'' le ordinate dei punti estremi. Riesce $Y_B(\beta') = Y_B(\beta'') = 0$, ed esiste pertanto, come precedentemente, un intervallo (b_1', b_1'') , contenuto in (β', β'') e quindi in (b', b'') , di ampiezza minore di ε_1 , per il quale si ha

$$Y_B(b_1'') - Y_B(b_1') = F(B_{b_1', b_1''}) = 0.$$

Detto R_1 il dominio rettangolare di punti estremi (a_1', b_1') e (a_1'', b_1'') , si ha: $B_{b_1', b_1''} = A \cdot R_1$. Concludiamo dunque che: *Esiste un dominio rettangolare R_1 (contenuto in R), avente entrambe le dimensioni minori di ε_1 , per il quale risulta $F(A \cdot R_1) = 0$* . Allo stesso modo si vede che esiste un dominio rettangolare R_2 , contenuto in R_1 , avente entrambe le dimensioni minori di ε_2 , per il quale risulta $F(A \cdot R_2) = 0$. E così via indefinitamente. Si perviene alla costruzione di una successione di domini rettangolari $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$, ciascuno contenuto nel precedente e avente punti interni in comune con A , risultando R_n di dimensioni entrambe minori di ε_n e $F(A \cdot R_n) = 0$.

Esiste uno ed un sol punto P di A comune a tutti questi rettangoli e per questo punto si ha

$$f(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(A \cdot R_n)}{\text{est}(A \cdot R_n)} = 0.$$

La dimostrazione ora esposta, tranne qualche perfezionamento, è dovuta al **Fubini**; con un ragionamento dovuto al **Vitali**, passiamo ora a dimostrare il seguente non ancora osservato **teorema di Darboux**:

II. *Sia A un qualsiasi dominio di $S_{(r)}$ e $F(T)$ una funzione additiva di dominio, ovunque derivabile, su A , definita in una certa famiglia $[A]$. La derivata $f(P)$ (potrà non essere continua, ma come le funzioni continue) non può assumere, in due punti P' e P'' di A , contenuti in un dominio rettangolare R contenuto in A , due valori di*

versi p' e p'' , senza prendere nel dominio R ogni valore compreso fra p' e p'' .

Sia $p' < p < p''$, e sia R un dominio rettangolare, contenuto in A , nel quale i punti P' e P'' siano situati sulla frontiera. Dobbiamo dimostrare l'esistenza in R di un punto P per il quale è $f(P) = p$. Posto $G(T) = F(T) - pT$, per tale funzione additiva di dominio la derivata $g(P)$ è negativa in P' e positiva in P'' , e tutto si riduce a dimostrare l'esistenza di un punto P di R per il quale è $g(P) = 0$. Supponiamo sempre che lo spazio $S_{(r)}$ sia il piano (x, y) . Dividendo ambo i lati del rettangolo R in 2^n parti eguali, decomponiamo, al solito modo, il rettangolo in 4^n rettangoli eguali. Esisterà un valore n_1 di n per il quale i valori di G , relativi ai rettangoli della decomposizione contenenti P' , sono negativi, e quelli relativi ai rettangoli della decomposizione contenenti P'' sono positivi. Per tale valore n_1 di n esisteranno due certi rettangoli T_1' e T_1'' della decomposizione, aventi un lato in comune, per i quali risulta $G(T_1') \leq 0$, $G(T_1'') \geq 0$. Porremo $T_1 = T_1' + T_1''$. Data l'additività di G , fra i rettangoli di decomposizione relativi al valore $n_1 + 1$ di n , ne esisteranno due T_2' e T_2'' , contenuti in T_1 , e aventi un lato in comune, per i quali riesce $G(T_2') \leq 0$, $G(T_2'') \geq 0$. Porremo $T_2 = T_2' + T_2''$. Del pari, fra i rettangoli di decomposizione, relativi al valore $n_1 + 2$ di n , ne esisteranno due T_3' e T_3'' , contenuti in T_2 e aventi un lato in comune, per i quali si ha $G(T_3') \leq 0$, $G(T_3'') \geq 0$. Porremo $T_3 = T_3' + T_3''$. Veniamo così a costruire una successione T_1, \dots, T_s, \dots di domini rettangolari, contenuti in R e ciascuno contenuto nel precedente, le cui dimensioni sono entrambe infinitesime. Esiste uno ed un solo punto P comune a tutti questi rettangoli e noi dimostreremo che, precisamente, $g(P) = 0$. Esistono infiniti T_s' e infiniti T_s'' contenenti P ; supponiamo che ne esistano infiniti dei primi e sia $T_{i_1}', T_{i_2}', \dots (i_1 < i_2 < \dots)$ la successione da essi formata. Si ha

$$g(P) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{G(T_{i_s})}{T_{i_s}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{G(T_{i_s}')}{T_{i_s}'} \leq 0,$$

$$0 \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{G(T_{i_s}'')}{T_{i_s}''} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{G(T_{i_s}) - G(T_{i_s}')}{T_{i_s}''} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(2 \frac{G(T_{i_s})}{T_{i_s}} - \frac{G(T_{i_s}')}{T_{i_s}'} \right) = g(P),$$

e pertanto $g(P) = 0$.

Ne segue (cfr. n° 46).

III. *Nelle ipotesi del teorema precedente, la derivata $f(P)$ della funzione additiva di dominio $F(T)$, in ciascun dominio rettangolare contenuto in A , prende ogni valore interno all'intervallo numerico determinato dagli estremi inferiore e superiore della derivata, nel detto dominio.*

Da questo e dal teor. X del n° 100 si ottiene subito il **secondo teorema di Rolle**:

I'. *Nelle ipotesi del teor. II, in ogni dominio rettangolare di $[A]$ per il quale sia $F(T) = 0$, esiste un punto nel quale è nulla la derivata $f(P)$.*

Se ne deducono immediatamente i teoremi seguenti.

IV. **Teorema di Cauchy.** *Siano A un dominio di $S_{(r)}$ e $F(T)$ e $G(T)$ due funzioni additive di dominio, definite in una certa famiglia $[A]$, ovunque derivabili, su $[A]$, con derivate $f(P)$ e $g(P)$. In ogni dominio rettangolare R di $[A]$ esiste un punto P per il quale è*

$$G(R)f(P) - F(R)g(P) = 0;$$

se, inoltre, il dominio A è limitato ed è connesso con tutti i domini di $[A]_R$, e le derivate $f(P)$ e $g(P)$ vi sono limitate, esiste pure un punto P di A per il quale è

$$G(A)f(P) - F(A)g(P) = 0.$$

Ed inverso, se B è un dominio di $[A]$, arbitrariamente fissato, ponendo

$$H(T) = G(B)F(T) - F(B)G(T),$$

si ha: $H(B) = 0$,

$$\frac{dH}{dT} = G(B)f(P) - F(B)g(P).$$

V. **Teorema di Lagrange.** *Nelle ipotesi del teor. II, in ogni dominio rettangolare R di $[A]$ esiste un punto P per il quale è*

$$f(P) = \frac{F(R)}{R} (*);$$

(*) Ciò è anche conseguenza immediata dei teoremi III del n° presente e X del n° 100.

nelle ipotesi del teor. I' esiste in A un punto P per cui riesce

$$f(P) = \frac{F(A)}{A}.$$

Ciò segue dal teor. prec. quando vi si faccia $G(T) \equiv T$.

VI. Teorema de l'Hospital. Siano A un dominio qualsivoglia di $S_{(r)}$ e $F(T)$ e $G(T)$ due funzioni additive di dominio, definite in una certa famiglia $[A]$, ovunque derivabili su A , con derivate $f(P)$ e $g(P)$. Detto P_0 un punto interno ad A ed R un dominio rettangolare variabile, contenente P_0 , se esiste un intorno quadrato $Q (< A)$ di P_0 nel quale è sempre $g(P) \neq 0$ e se il rapporto $f(P)/g(P)$ è continuo in P_0 si ha

$$\lim_{R \rightarrow P_0} \frac{F(R \cdot A)}{G(R \cdot A)} = \frac{f(P_0)}{g(P_0)}.$$

Per ogni dominio rettangolare R contenuto nell'intorno Q si ha invero $R \cdot A = R$, $G(R) \neq 0$, e pertanto (teor. IV)

$$\frac{F(R \cdot A)}{G(R \cdot A)} = \frac{F(R)}{G(R)} = \frac{f(P)}{g(P)},$$

ove P è un punto di R e quindi di Q .

Osservazioni. 1ª Dal teor. IV, in virtù del teor. IX del n° 100, segue, in particolare, che se $f(P)$ e $g(P)$ sono due funzioni continue in un dominio A , in ogni dominio T , limitato e connesso con ogni dominio di $[T]_R$, contenuto in A , esiste sempre un punto Q per il quale risulta

$$g(Q) \int_T f(P) dT - f(Q) \int_T g(P) dT = 0.$$

A tale conclusione si può giungere, direttamente, anche quando T è supposto, soltanto, un *continuo*. Esistono invero sempre due numeri a e b per i quali riesce

$$b \int_T f(P) dT + a \int_T g(P) dT = 0;$$

la funzione continua $bf(P) + ag(P)$ ha dunque nullo l'integrale esteso a T , essa perciò non potrà conservarsi ivi sempre di un segno, ed esisterà quindi (32, II) un punto Q di T per il quale si ha $bf(Q) + ag(Q) = 0$.

2^a) Per le funzioni additive di dominio, derivabili, si possono facilmente avere altre forme del teorema di *L'Hospital*, delle quali proponiamo la ricerca allo studioso.

3^a) Il teor. II assegna una *forte* condizione necessaria affinché il problema posto al n° 100, della ricerca della funzione primitiva additiva di dominio per una data funzione di punto, possieda la soluzione.



CAPITOLO V.

INTEGRAZIONE SULLA RETTA.

§ 1. Integrali definiti e indefiniti.

103. Integrali definiti. — La funzione reale $f(x)$ dell'unica variabile reale x sia sommabile sull'intervallo (x', x'') , finito o infinito dell'asse x . Siano a e b due arbitrari punti dell'intervallo (x', x'') , denoteremo con $\mathbf{I}(a, b)$ l'intervallo determinato da quei due punti, porremo cioè $\mathbf{I}(a, b) = (a, b)$ se $a \leq b$, $\mathbf{I}(a, b) = (b, a)$ se $b \leq a$. Non è escluso che uno dei punti a o b sia all'infinito e non è escluso che lo siano entrambi. Della funzione $f(x)$, chiamasi *minimo (massimo) integrale definito di origine a , esteso all'intervallo $\mathbf{I}(a, b)$ e designasi con la notazione*

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx, \quad \left(\int_a^b f(x) dx \right)$$

l'integrale della $f(x)$, esteso all'intervallo indicato, se $a \leq b$, tale integrale cambiato di segno se $a \geq b$. Per definizione del simbolo (1) si ha dunque

$$\int_a^b f(x) dx \left\{ \begin{array}{l} = \int_a^b f(x) dx, \quad \text{se } a \leq b, \\ \mathbf{I}(a, b) \\ = -\int_b^a f(x) dx, \quad \text{se } a \geq b. \\ \mathbf{I}(a, b) \end{array} \right.$$

L'integrale definito (minimo o massimo) della funzione $f(x)$, di origine a , esteso all'intervallo $\mathbf{I}(a, b)$ è anche detto, *brevemente, l'integrale definito della $f(x)$ esteso all'intervallo (a, b)* ; convenendo, dunque, di continuare a denotare con (a, b) , anche se $a > b$, l'intervallo orientato di origine a e terminato in b .

Nell'ipotesi che la funzione $f(x)$ sia sommabile sull'intervallo

$(a, +\infty)$ o sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$ hanno dunque un ben preciso significato i simboli

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \int_a^a f(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \int_{+\infty}^{-\infty} f(x) dx.$$

Se l'intervallo (a, b) ove la funzione $f(x)$ è sommabile contiene il punto $-\infty$, ovvero il punto $+\infty$, si porrà

$$\int_{-\infty}^{-\infty} f(x) dx = 0, \int_{+\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0.$$

Se x_1, x_2, \dots, x_n sono i più arbitrari punti di (x', x'') , subito si vede che: *Sussistono le seguenti relazioni di Chasles:*

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_1} f(x) dx = 0,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx + \int_{x_n}^{x_1} f(x) dx = 0.$$

Siano x e y due punti variabili di (x', x'') , si dimostra immediatamente che: *Posto*

$$F(x, y) = \int_x^y f(\xi) d\xi,$$

nel dominio T del piano (x, y) determinato dalle limitazioni $x' \leq x \leq x''$, $x' \leq y \leq x''$, risulta definita una funzione continua e limitata, continua anche all'infinito su ogni semiretta, infinitesima all'infinito su ogni insieme A , contenuto in T , per il quale i due estremi inferiori dei moduli delle coordinate dei punti di esso, non contenuti nel cerchio di centro nell'origine e di raggio R , divergono *entrambi* al divergere di R .

Se (x_0, y_0) è un punto di T si ha inverso

$$\left| \int_x^y f(\xi) d\xi \right| \leq \int_{I(x, y)} |f(\xi)| d\xi,$$

$$\left| \int_x^y f(\xi) d\xi - \int_{x_0}^{y_0} f(\xi) d\xi \right| = \left| \int_x^{x_0} f(\xi) d\xi - \int_y^{y_0} f(\xi) d\xi \right| \leq \int_{I(x_0, x)} |f(\xi)| d\xi + \int_{I(y_0, y)} |f(\xi)| d\xi.$$

Per gli integrali delle funzioni di una variabile sommabili e integrabili estesi ad intervalli finiti o infiniti, sussiste un **secondo teorema della media** che riceve importanti applicazioni. Allo scopo di stabilire tale teorema, in una generalità che ci conviene per future applicazioni, cominciamo dall'osservare la proposizione seguente: *Se la funzione $f(x)$ è continua e limitata nell'intervallo (a, b) , finito o infinito, ed è anche, eventualmente, continua all'infinito, tanto a destra che a sinistra, del punto ∞ , senza esserlo — necessariamente — in questo punto, posto*

$$f(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

nell'intervallo (a, b) esiste un punto (al finito o all'infinito) nel quale la funzione $f(x)$ assume il suo massimo valore M e un punto nel quale assume il suo minimo valore m . Se λ è un qualsiasi punto dell'intervallo (m, M) esiste pure un punto (al finito o all'infinito) nel quale la $f(x)$ assume il valore λ .

Se $f(x)$ è sommabile sull'intervallo (a, b) , finito o infinito, la proposizione ora enunciata si applica alle funzioni

$$(2) \quad \int_a^x f(\xi) d\xi, \quad \int_x^b f(\xi) d\xi.$$

Ciò posto, dimostriamo anzitutto il seguente caso particolare del secondo teorema della media:

Se $f(x)$ è una funzione sommabile e integrabile sull'intervallo (a, b) , finito o infinito, se $\varphi(x)$ è, nello stesso intervallo, positiva, limitata e non decrescente; comunque si assegni un numero K che limiti superiormente $\varphi(x)$, esiste in (a, b) un punto ξ per il quale riesce

$$(3) \quad \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = K \int_{\xi}^b f(x) dx.$$

Anzitutto osserviamo che essendo $\varphi(x)$ limitata e (91, VI) integrabile, il prodotto $f(x)\varphi(x)$ riesce esso pure sommabile e integra-

bile su (a, b) , ha quindi senso il primo membro della (3). Porremo

$$F(x) = \int_x^b f(y) dy,$$

e cominceremo dal supporre finito l'intervallo (a, b) . Mediante i punti $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$, dividiamo l'intervallo (a, b) , nel modo più arbitrario, in intervalli parziali, dei quali con δ designeremo la massima ampiezza. Dico che comunque si prenda un punto ξ_i in ciascun intervallo (x_{i-1}, x_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) si ha

$$(4) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\sum_i^{1, n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx + [K - \varphi(\xi_n)] \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx \right] = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx.$$

Per ogni numero positivo ε/K , arbitrariamente assegnato, esiste invero un numero σ tale che, ovunque si prenda un intervallo I di (a, b) , di ampiezza non superiore a σ , si abbia

$$\int_I |f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{K}.$$

Se, dunque, $\delta \leq \sigma$, si ha

$$\begin{aligned} \left| \sum_i^{1, n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \right| &= \left| \sum_i^{1, n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi(\xi_i) - \varphi(x)] f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \sum_i^{1, n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\varphi(\xi_i) - \varphi(x)| |f(x)| dx \leq \sum_i^{1, n} [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})] \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)| dx \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{K} \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})] = \frac{\varepsilon}{K} [\varphi(b) - \varphi(a)] \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

e d'altra parte è

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ [K - \varphi(\xi_n)] \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx \right\} = 0.$$

Designamo ora con S la variabile a destra del segno di limite nel primo membro della (4). Si ha

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) [F(x_{i-1}) - F(x_i)] + [K - \varphi(\xi_n)] F(x_{n-1}) = \\
 &= F(a) \varphi(\xi_1) + \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i) [\varphi(\xi_{i+1}) - \varphi(\xi_i)] + [K - \varphi(\xi_n)] F(x_{n-1}),
 \end{aligned}$$

e quindi, poichè φ è positiva, non decrescente e non superiore a K , detti $m_F(a, b)$ il minimo e $M_F(a, b)$ il massimo dei valori di $F(x)$ in (a, b) , se ne deduce

$$K m_F(a, b) \leq S \leq K M_F(a, b),$$

onde segue, in virtù della (4), passando al limite per δ infinitesimo,

$$(5) \quad K m_F(a, b) \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq K M_F(a, b).$$

L'intervallo (a, b) sia ora infinito e sia $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_s, b_s), \dots$ una successione di intervalli *invadente* l'intervallo (a, b) , per ogni indice s si ha

$$K m_F(a_s, b_s) \leq \int_{a_s}^{b_s} f(x) \varphi(x) dx \leq K M_F(a_s, b_s),$$

e quindi, passando al limite per s divergente, se ne deduce, di nuovo, la (5). Da questa segue infine l'esistenza di un punto ξ per il quale riesce

$$F(\xi) = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{K} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx,$$

e con ciò il teorema è dimostrato.

Dopo ciò si ottiene immediatamente il *secondo teorema della media* nella forma più generale datagli da *de la Vallée-Poussin* (*).

I. Se $f(x)$ è una funzione sommabile e integrabile sull'intervallo (a, b) , finito o infinito e se $\varphi(x)$ è, nello stesso intervallo, limitata e monotona; comunque si assegnino due numeri H e K che limitino $\varphi(x)$,

(*) La dimostrazione che abbiamo esposto in ciò che precede è sostanzialmente dovuta a questo Autore.

il primo inferiormente e il secondo superiormente, esiste in (a, b) un punto ξ per il quale riesce

$$(6) \quad \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = H \int_a^{\xi} f(x) dx + K \int_{\xi}^b f(x) dx,$$

se $\varphi(x)$ è non decrescente, per il quale riesce invece

$$(7) \quad \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = K \int_a^{\xi} f(x) dx + H \int_{\xi}^b f(x) dx,$$

se $\varphi(x)$ è non crescente.

Ed invero, se $H \leq \varphi(x) \leq K$, quando $\varphi(x)$ è non decrescente, $\varphi(x) - H$ è pure tale, non negativa e superiormente limitata dal numero $K - H$; quando $\varphi(x)$ è non crescente, $K - \varphi(x)$ riesce non decrescente, non negativa e superiormente limitata dal numero $K - H$. Sostituendo, nel primo caso, nella (3), $\varphi(x)$ e K , rispettivamente con $\varphi(x) - H$ e $K - H$ si ottiene la (6), e sostituendo, nel secondo caso, sempre nella (3), $\varphi(x)$ e K , rispettivamente, con $K - \varphi(x)$ e $K - H$, si ottiene la (7).

Ponendo

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) [su(a, b)] = \varphi_a, \quad \lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) [su(a, b)] = \varphi_b,$$

ed eventualmente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \varphi(-\infty), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \varphi(+\infty),$$

secondochè $\varphi(x)$ è in (a, b) non decrescente oppure non crescente si trova

$$\varphi_a \left. \vphantom{\varphi_a} \right\} \leq \varphi(x) \leq \left. \vphantom{\varphi_a} \right\} \begin{matrix} \varphi(b) \\ \varphi_b \end{matrix}, \quad \text{ovvero} \quad \left. \vphantom{\varphi_a} \right\} \begin{matrix} \varphi(b) \\ \varphi_b \end{matrix} \leq \varphi(x) \leq \left. \vphantom{\varphi_a} \right\} \begin{matrix} \varphi(a) \\ \varphi_a \end{matrix},$$

dal teor. I se ne deduce dunque, in particolare, il seguente:

II. Se $f(x)$ è su (a, b) sommabile e integrabile e $\varphi(x)$ vi è monotona e limitata, esiste sempre un punto ξ di (a, b) per il quale è

$$(8) \quad \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + \varphi(b) \int_{\xi}^b f(x) dx,$$

un punto ξ per il quale è

$$(9) \quad \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi_a \int_a^{\xi} f(x) dx + \varphi_b \int_{\xi}^b f(x) dx,$$

ed anche un punto ξ per il quale è

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi_a \int_a^{\xi} f(x) dx + \varphi(b) \int_{\xi}^b f(x) dx, \dots$$

104. Funzioni di punto primitive di una data. — Vogliamo ora di nuovo occuparci del problema della ricerca delle funzioni dell'unica variabile reale x , primitive di una data funzione $f(x)$ della stessa variabile definita nell'intervallo (x', x'') , problema posto al n° 46 e già — nel caso particolare che l'assegnata funzione $f(x)$ sia continua — completamente risoluto al n° 93 (a pag. 412). Cominciamo dal dimostrare il seguente interessante teorema:

I. Sia (α, β) ($\alpha < \beta$) un intervallo finito variabile in (x', x'') . Se $F(x)$ è una funzione di punto primitiva di $f(x)$, la funzione $F(\beta) - F(\alpha)$ è una funzione additiva di intervallo, essa pure primitiva di $f(x)$. Se $G(\alpha, \beta)$ è una funzione additiva di intervallo, primitiva di $f(x)$, la funzione di punto $F(x)$ definita dalle eguaglianze

$$(1) \quad F(x) \left\{ \begin{array}{l} = G(\alpha, x) \text{ se } x > \alpha, \\ = 0 \quad \text{se } x = \alpha, \\ = -G(x, \alpha) \text{ se } x < \alpha, \end{array} \right.$$

ove α è un punto, al finito, di (x', x'') , arbitrariamente fissato, è essa pure primitiva di $f(x)$.

Ed inverso, se $F(x)$ è una funzione di punto primitiva di $f(x)$, fissati arbitrariamente un punto x_0 di (x', x'') e un numero positivo ε , è possibile determinare un intorno circolare I di x_0 , su (x', x'') , tale che se x è in I ed è distinto da x_0 , si abbia

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x) + \varepsilon;$$

se (α, β) è un qualunque intervallo contenente x_0 e contenuto in I , ne segue:

$$[f(x_0) - \varepsilon](\beta - x_0) \leq F(\beta) - F(x_0) \leq [f(x_0) + \varepsilon](\beta - x_0),$$

$$[f(x_0) - \varepsilon](x_0 - \alpha) \leq F(x_0) - F(\alpha) \leq [f(x_0) + \varepsilon](x_0 - \alpha),$$

e pertanto, sommando membro a membro,

$$[f(x_0) - \varepsilon](\beta - \alpha) \leq F(\beta) - F(\alpha) \leq [f(x_0) + \varepsilon](\beta - \alpha),$$

cioè

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε possiamo dunque dire che la funzione di intervallo $F(\beta) - F(\alpha)$ ha, in x_0 , precisamente per derivata $f(x_0)$. È poi evidente l'additività di $F(\beta) - F(\alpha)$. Sia ora, in secondo luogo, $G(\alpha, \beta)$ una funzione additiva di intervallo primitiva della $f(x)$ e a un punto, al finito, di (x', x'') , dico che la funzione di punto $F(x)$ definite dalla (1) è essa pure primitiva della $f(x)$. Supponiamo, per esempio, $x > a$ e diamo alla x un incremento h , su (x', x'') , positivo. Si ha

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{G(a, x+h) - G(a, x)}{h} = \frac{G(x, x+h)}{h},$$

e quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x, x+h)}{h} = f(x).$$

Da questo teorema segue, manifestamente, che il problema della ricerca delle funzioni di intervallo primitive di un'assegnata funzione di una variabile *equivale perfettamente* a quello della ricerca delle funzioni della stessa variabile primitive di quella funzione.

Si sa già (IX, 46) che: *Se $F_0(x)$ è una particolare funzione di punto, primitiva di una data funzione $f(x)$, ogni altra funzione di punto primitiva della stessa funzione, si ottiene ponendo*

$$F(x) = F_0(x) + c,$$

ove c è una costante affatto arbitraria. Ciò si deduce, **di nuovo**, dal teorema di unicità, dimostrato al n° 100 (teor. IV), per le funzioni additive di intervallo (definite nella totalità degli intervalli contenuti in un dato) primitive di una data funzione di punto. Ed invero, se $F_0(x)$ e $F(x)$ sono due funzioni di punto primitive della stessa funzione $f(x)$, abbiamo visto or ora che $F(\beta) - F(\alpha)$ e $F_0(\beta) - F_0(\alpha)$ sono due

funzioni additive di intervallo primitive della $f(x)$, e pertanto, in forza del ricordato teorema di unicità, si avrà

$$F(\beta) - F(\alpha) = F_0(\beta) - F_0(\alpha),$$

in particolare, se a è un fissato punto al finito di (x', x'') ,

$$F(x) = F_0(x) + F(a) - F_0(a) = F_0(x) + c,$$

ove $c = F(a) - F_0(a)$.

Sia ora $f(x)$ limitata e integrabile in ogni intervallo finito di (x', x'') , ciascuna funzione di punto $F(x)$, primitiva della $f(x)$, dà luogo, come abbiamo visto, alla funzione di intervallo $F(\beta) - F(\alpha)$, additiva e primitiva della stessa funzione, questa funzione è (VIII, 100) l'integrale della $f(x)$ esteso all'intervallo (α, β) . Si ha dunque il teorema:

II. Se $F(x)$ è una funzione di punto primitiva della funzione $f(x)$, limitata e integrabile su ogni intervallo finito, per ogni tale intervallo (α, β) ($\alpha < \beta$) si ha

$$(2) \quad \int_{(\alpha, \beta)} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha) = [F(x)]_{\alpha}^{\beta},$$

ed anche, in virtù della definizione di integrale definito, se x_1 e x_2 sono due arbitrarii punti al finito,

$$(3) \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1) = [F(x)]_{x_1}^{x_2}$$

e quindi, comunque si fissi il punto α in (x', x'') e per x variabile,

$$(4) \quad F(x) = F(\alpha) + \int_{\alpha}^x f(\xi) d\xi.$$

Pertanto: Se $f(x)$, supposta limitata e integrabile su ogni intervallo finito, possiede una funzione primitiva di punto, essa ne possiede infinite date *tutte* dalla formola

$$c + \int_{\alpha}^x f(\xi) d\xi,$$

ove c è una costante arbitraria. Ad ogni tale funzione si può arbitra-

riamente prescrivere il valore in un punto a di (x', x'') , in seguito a che essa riesce determinata.

Sia, infine, più in particolare ancora, $f(x)$ continua in ogni punto di (x', x'') . Essa possiede (IX, 100) una funzione primitiva additiva di intervallo, e quindi anche una funzione primitiva di punto, e per questa sussistono dunque le formole (2), (3) e (4), come già sappiamo (pp. 412-413).

Le formole (2) e (3) servono per il calcolo dell'integrale della $f(x)$, quando di questa funzione sia nota una funzione primitiva $F(x)$. È assai opportuna perciò l'estensione di quelle formole al caso delle funzioni sommabili non limitate e al caso degli intervalli di integrazione infiniti. Basta occuparci dell'estensione della formola (2); al riguardo sussiste il seguente teorema:

III. Sia $A \equiv (a, b)$ ($a < b$) un intervallo, finito o no, e la funzione $f(x)$ sia sommabile su A . Se $N (< A)$ è un insieme costituito da un numero finito di punti (al finito) x_1, x_2, \dots, x_n ($x_1 < x_2 < \dots < x_n$) e se $f(x)$ è definita, limitata e integrabile su ogni intervallo finito di (a, b) che non contenga alcun punto di N ed esiste una funzione $F(x)$ che, in ciascun punto (al finito) di $A - N$, ha per derivata $f(x)$, è continua nell'intero intervallo (a, b) , eventualmente anche a destra e a sinistra del punto ∞ , e vi è limitata, la funzione $f(x)$ è integrabile su A e si ha sempre:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Sia, per esempio, infinito l'intervallo (a, b) e si abbia $a = -\infty$, $b = +\infty$. Siano s e s' numeri naturali e sia $-s' < x_1 - 1$, $s' > x_n + 1$, $1/s'$ minore della metà di ognuno degli intervalli $(x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$. Per ogni $s \geq s'$ consideriamo l'insieme T_s , somma degli intervalli

$$\left(-s, x_1 - \frac{1}{s}\right), \left(x_1 + \frac{1}{s}, x_2 - \frac{1}{s}\right), \dots, \left(x_{n-1} + \frac{1}{s}, x_n - \frac{1}{s}\right), \left(x_n + \frac{1}{s}, s\right).$$

La successione di insiemi $T_{s'}, T_{s'+1}, \dots$ invade (a, b) e pertanto

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{T_s} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

D'altra parte

$$\int_{T_s} f(x) dx =$$

$$= \left[F\left(x_1 - \frac{1}{s}\right) - F(-s) \right] + \sum_i^{1, n-1} \left[F\left(x_{i+1} - \frac{1}{s}\right) - F\left(x_i + \frac{1}{s}\right) \right] + \left[F(s) - F\left(x_n + \frac{1}{s}\right) \right]$$

e quindi, in forza della continuità di $F(x)$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{T_s} f(x) dx =$$

$$= F(x_1) - F(-\infty) + \sum_i^{1, n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)] + F(+\infty) - F(x_n) =$$

$$= F(+\infty) - F(-\infty).$$

Dopo il teorema ora dimostrato si potrà dunque, per esempio, scrivere senz'altro

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \text{ (se } \alpha < 1), \quad \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Con un ragionamento analogo al precedente si dimostra poi il teorema :

IV. Siano $A \equiv (a, b)$, ($a < b$) un intervallo, finito o no, e $N (< A)$ un insieme costituito da un numero finito di punti (al finito). Se $f(x)$ è definita in ogni punto di $A - N$ e se è limitata e integrabile su ogni intervallo finito di (a, b) che non contenga alcun punto di N , ed esiste una funzione $F(x)$ che, in ciascun punto (al finito) di $A - N$, ha per derivata $|f(x)|$, è definita nell'intero intervallo (a, b) , e vi è limitata, la funzione $f(x)$ è sommabile su A .

Osservazione*. Ogni funzione di una variabile x , definita in un intervallo (x', x'') , derivata di una funzione additiva di intervallo definita nella famiglia degli intervalli finiti contenuti in (x', x'') , è anche derivata di una funzione di punto; pertanto tutti i teoremi ottenuti ai n.° 100 e 102*, per le derivate delle funzioni additive di dominio, si trasportano alle derivate delle funzioni di una variabile,

riottenendo così, con *nuove* dimostrazioni, i teoremi generali sulle derivate stabiliti ai n° 46 e 48. Si noti che dal teorema di **Fubini** (X, 100) segue la proposizione: *Se la funzione $F(x)$ è ovunque derivabile nell'intervallo finito (a, b) , con derivata di valore ivi non costante, il rapporto $[F(b) - F(a)] / (b - a)$ ha un valore interno all'intervallo che ha per punti estremi l'estremo inferiore e l'estremo superiore, in (a, b) , della derivata (*)*.

105. Integrali indefiniti. Metodi di elementare integrazione indefinita. — Allo scopo di semplificare, conviene, in questo articolo, prendere a considerare le funzioni $f(x)$ dell' unica variabile reale x che possono essere anche complesse. Una funzione complessa $f(x)$, dell' unica variabile reale x , supposta continua, è sempre dotata di funzione primitiva $F(x)$ — che risulterà pur essa complessa — così dotate sono invero la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di $f(x)$ (cfr. il n° 52). Ciò posto, chiamasi *integrale indefinito della funzione continua $f(x)$* , e designasi con la notazione

$$\int f(x) dx ,$$

l'*insieme* delle funzioni primitive della $f(x)$. Se, pertanto, $F(x)$ è una funzione primitiva di $f(x)$, si ha, per definizione,

$$\int f(x) dx = F(x) + c ,$$

ove c è una costante (complessa) affatto arbitraria. Faremo la seguente:

Convenzione. *Una relazione lineare fra integrali indefiniti :*

$$f(x) + \sum_h a_h \int f_h(x) dx = \varphi(x) + \sum_k \alpha_k \int \varphi_k(x) dx ,$$

ove le a_h e α_k sono costanti (complesse) e $f(x)$ e $\varphi(x)$ funzioni derivabili, con le derivate $f'(x)$ e $\varphi'(x)$, esprime, per convenzione, che sussiste l'identità

$$f'(x) + \sum_h a_h f'_h(x) = \varphi'(x) + \sum_k \alpha_k \varphi'_k(x).$$

(*) Ma la proposizione sussiste anche se la derivabilità di $f(x)$ non è verificata negli estremi di (a, b) , purchè la $f(x)$ vi sia sempre continua. Con tale perfezionamento la proposizione si deduce immediatamente dai teorr. del n° 46: Sia e l'estremo superiore (supposto finito) della derivata di $F(x)$ nell'intervallo aperto (a, b) , se fosse $[F(b) - F(a)] / (b - a) = e$, posto $G(x) = F(x) - F(a) - e(x - a)$, risulterebbe $G(a) = G(b) = 0$, $G'(x) \leq 0$, e quindi (46, X) $G'(x) \equiv 0$, $F'(x) \equiv e$.

Ne segue :

$$(1) \quad \int af(x)dx = a \int f(x)dx ,$$

$$(2) \quad \int [\sum_n a_n f_n(x)] dx = \sum_n a_n \int f_n(x)dx ,$$

$$(3) \quad \int f'(x) dx = \int df = f ,$$

$$(4) \quad \int uv' dx = uv - \int vu' dx , \quad \int u dv = uv - \int v du$$

$$(5) \quad \left[\int f(x) dx \right]_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt .$$

Queste relazioni costituiscono il fondamento per i metodi di calcolo, dei quali vogliamo ora brevemente trattare, dell'integrale indefinito di una data funzione, il quale, mediante la (3) del n° prec., fornisce poi il calcolo dell'integrale definito della funzione, esteso ad un intervallo qualsiasi.

L'integrale indefinito di $f(x)$ si suole designare anche come l'*integrale del differenziale* $f(x)dx$. Si ha $f(x)dx = d \int f(x)dx$.

Si è eseguita una *integrazione indefinita* quando, assegnata una funzione continua $f(x)$, se n'è trovato l'integrale indefinito. Per le applicazioni alla pratica e in talune occasioni della teoria è talvolta vantaggioso sapere celermente risolvere il seguente

Problema della elementare integrazione indefinita.

La funzione $f(x)$ sia algebricamente esprimibile per mezzo di funzioni elementari, si richiede di esprimere, del pari algebricamente, il suo integrale indefinito mediante funzioni elementari.

Avvertiamolo subito, un tale problema, il più spesso, non è risolubile, e non vi sono regole generali che permettano di decidere, *a priori*, quando il problema sia o non sia risolubile. Nel caso della risolubilità, diremo che la funzione $f(x)$ è ***elementarmente integrabile***. Per esempio, la funzione

$$1 : \sqrt[5]{(x^4 + 1)^6} ,$$

non è, come ha dimostrato ***Tchebichef***, elementarmente integrabile, laddove la funzione

$$1 : \sqrt[5]{(x^5 + 1)^6}$$

lo è. Si ha

$$\int \frac{dx}{(x^5 + 1)^{6/5}} = \frac{x}{(x^5 + 1)^{1/5}} + c.$$

Le varie regole che si danno per la elementare integrazione indefinita, hanno tutte lo scopo di far conoscere, mediante la loro applicazione, come si esprime l'integrale indefinito di una data funzione elementarmente integrabile, per mezzo dei cosiddetti *integrali indefiniti immediati*. Ed è bene perciò tenere presente la seguente

Tabella degli integrali indefiniti immediati.

$$\int [f(x)]^{\alpha} df(x) = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \int \frac{df(x)}{f(x)} = \log f(x) + c,$$

$$\int e^{f(x)} df(x) = e^{f(x)} + c,$$

$$\int \operatorname{sen} f(x) df(x) = -\operatorname{cos} f(x) + c, \quad \int \operatorname{cos} f(x) df(x) = \operatorname{sen} f(x) + c,$$

$$\int \frac{df(x)}{\operatorname{cos}^2 f(x)} = \operatorname{tang} f(x) + c, \quad \int \frac{df(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)} = -\operatorname{cot} f(x) + c,$$

$$\int \frac{df(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} f(x) + c, \quad \int \frac{df(x)}{1 + [f(x)]^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tang} f(x) + c,$$

$$\int \operatorname{senh} f(x) df(x) = \operatorname{cosh} f(x) + c, \quad \int \operatorname{cosh} f(x) df(x) = \operatorname{senh} f(x) + c,$$

$$\int \frac{df(x)}{\operatorname{cosh}^2 f(x)} = \operatorname{tangh} f(x) + c, \quad \int \frac{df(x)}{\operatorname{senh}^2 f(x)} = -\operatorname{coth} f(x) + c,$$

$$\int \frac{df(x)}{\sqrt{1 + [f(x)]^2}} = \operatorname{sett} \operatorname{senh} f(x) + c, \quad \int \frac{df(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - 1}} = \operatorname{sett} \operatorname{cosh} f(x) + c,$$

$$\int \frac{df(x)}{1 - [f(x)]^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)} + c = \operatorname{sett} \operatorname{tangh} f(x) + c.$$

Nelle formole di questa tabella è sottinteso, naturalmente, che la x abbia tali valori che esse abbiano senso (cfr. il n° 52).

1. Integrazione elementare per semplici trasformazioni della funzione da integrare. Si ha

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{cos} \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{cos}^2 \frac{x}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2}} = \int \frac{d \operatorname{tang} \frac{x}{2}}{\operatorname{tang} \frac{x}{2}} = \operatorname{long} \operatorname{tang} \frac{x}{2} + c.$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{2 \cosh x} = \int \frac{\frac{dx}{2 \cosh^2 \frac{x}{2}}}{1 + \operatorname{tanh}^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d \operatorname{tanh} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tanh}^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{arctang} \left(\operatorname{tanh} \frac{x}{2} \right) + c =$$

$$= \operatorname{arc tang} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + c.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \int \frac{\frac{2 dx}{\sqrt{4q - p^2}}}{1 + \left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arc tang} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + c.$$

Naturalmente, l'ultima integrazione sussiste se $4q - p^2 \neq 0$. Dal punto di vista reale, se p e q sono reali e se $4q - p^2 > 0$, l'integrale indefinito è espresso con una funzione reale; se $4q - p^2 < 0$, posto $\sqrt{p^2 - 4q} = r > 0$, si ha

$$\frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arc tang} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} = \frac{2}{ir} \operatorname{arc tang} \frac{2x + p}{ir} = \frac{-1}{r} \log \frac{1 + \frac{2x + p}{r}}{1 - \frac{2x + p}{r}} =$$

$$= \frac{1}{r} \log \frac{r - 2x - p}{r + 2x + p} = \frac{1}{\beta - \alpha} \log \left| \frac{x - \beta}{x - \alpha} \right| + k,$$

ove k è una costante e α e β ($\beta > \alpha$) sono le due radici reali del trinomio $x^2 + px + q$, sicchè si ha allora

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\beta - \alpha} \log \left| \frac{x - \beta}{x - \alpha} \right| + c.$$

Si ha pure:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} = \int \frac{\frac{2 dx}{\sqrt{4q - p^2}}}{\sqrt{\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right)^2 + 1}} = \operatorname{sett} \operatorname{senh} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + c,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{q + px - x^2}} = \int \frac{\frac{2 dx}{\sqrt{4q + p^2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x - p}{\sqrt{4q + p^2}}\right)^2}} = \operatorname{arc sen} \frac{2x - p}{\sqrt{4q + p^2}} + c.$$

II. *Integrazione per decomposizione in somma.* Tale metodo di integrazione non è che l'applicazione della relazione (2): Se si riesce a decomporre la funzione integranda $f(x)$ in una somma di funzioni per ciascuna delle quali sia possibile l'elementare integrazione, si otterrà l'integrale indefinito di $f(x)$, facendo la somma degli integrali delle funzioni parziali di decomposizione. Esempii :

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } x - \sqrt{1-x^2} + c.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^3 x \text{ sen}^3 x} &= \int \frac{(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^3 x \text{ sen}^3 x} dx = \int \frac{\cos x}{\text{sen}^3 x} dx + \int \frac{\text{sen } x}{\cos^3 x} dx + 2 \int \frac{dx}{\text{sen } x \cos x} = \\ &= -\frac{1}{2 \text{sen}^2 x} + \frac{1}{2 \cos^2 x} + 2 \log \text{tang } x + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \int \text{sen } \lambda x \text{ sen } \mu x dx &= \int \cos (\lambda - \mu) x dx - \int \cos (\lambda + \mu) x dx = \\ &= \frac{\text{sen } (\lambda - \mu) x}{\lambda - \mu} - \frac{\text{sen } (\lambda + \mu) x}{\lambda + \mu} + c, \quad (\lambda \neq \mu). \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \int \text{sen } \lambda x \cos \mu x dx &= -\frac{\cos (\lambda + \mu) x}{\lambda + \mu} - \frac{\cos (\lambda - \mu) x}{\lambda - \mu} + c, \\ 2 \int \cos \lambda x \cos \mu x dx &= \frac{\text{sen } (\lambda + \mu) x}{\lambda + \mu} + \frac{\text{sen } (\lambda - \mu) x}{\lambda - \mu} + c. \end{aligned} \right\} (\lambda \neq \mu)$$

$$2 \int \text{sen}^2 \lambda x dx = x - \frac{\text{sen } 2 \lambda x}{2 \lambda} + c, \quad 2 \int \cos^2 \lambda x dx = x + \frac{\text{sen } 2 \lambda x}{2 \lambda} + c,$$

$$2 \int \text{sen } \lambda x \cos \lambda x dx = -\frac{\cos 2 \lambda x}{2 \lambda} + c.$$

Calcolati gli integrali indefiniti delle funzioni $\text{sen} \lambda x \cos \mu x$, $\cos \lambda x \cos \mu x$, ne segue, per decomposizione in somma, il calcolo degli integrali

$$\int \text{sen}^m x \cos^n x dx,$$

ove m e n sono numeri interi, positivi o nulli. Si ha invero

$$2^n \cos^n x = \cos nx + \binom{n}{1} \cos (n-2)x + \binom{n}{2} \cos (n-4)x + \dots,$$

$$2^n \operatorname{sen}^n x \begin{cases} = (-1)^{\frac{n}{2}} \left[\cos nx - \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \binom{n}{2} \cos(n-4)x - \dots \right], & \text{se } n \text{ è pari,} \\ = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \left[\operatorname{sen} nx - \binom{n}{1} \operatorname{sen}(n-2)x + \binom{n}{2} \operatorname{sen}(n-4)x - \dots \right], & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

La più importante applicazione del metodo di integrazione per decomposizione in somma si ha nell'integrazione delle funzioni razionali. Sia da integrare la funzione razionale $\Phi(x)/F(x)$, ove $\Phi(x)$ e $F(x)$ designano polinomiali nella x . Supporremo sempre, naturalmente, d'averne diviso ambo i termini della frazione Φ/F per il loro massimo comune divisore, il quale è razionalmente noto. Si sa (cfr. *Algebra* n° 270 274) che, dette $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ le radici dell'equazione $F(x) = 0$ e detti r_1, r_2, \dots, r_s i rispettivi gradi di molteplicità di quelle radici, sussiste la seguente formola di decomposizione in somma:

$$(6) \quad \frac{\Phi(x)}{F(x)} = p(x) + \sum_h^{1, s} \sum_k^{1, r_h} \frac{A_{hk}}{(x - \alpha_h)^k},$$

ove $p(x)$ è un polinomio intero (razionalmente noto — quoziente della divisione di $\Phi(x)$ per $F(x)$ — identicamente nullo quando il grado di Φ sia minore di quello di F) e A_{hk} sono costanti. Ne segue

$$(7) \quad \int \frac{\Phi(x)}{F(x)} dx = \int p(x) dx + \sum_h^{1, s} A_{h1} \log(x - \alpha_h) + \sum_h^{1, s} \sum_k^{2, r_h} \frac{1}{1-k} \frac{A_{hk}}{(x - \alpha_h)^{k-1}} + c.$$

Dal punto di vista teorico è così effettuata, senz'altro, l'integrazione della frazione razionale; ma per la pratica sono assai importanti le osservazioni che andiamo a fare. Detto $f(x)$ il resto della divisione di $\Phi(x)$ per $F(x)$, si ha $\Phi(x)/F(x) = p(x) + f(x)/F(x)$, e ci si può pertanto sempre limitare a considerare il problema dell'integrazione delle *frazioni razionali proprie*, di quelle frazioni razionali cioè per le quali il grado del numeratore è minore di quello del denominatore. Si ha

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum_h^{1, s} \frac{A_{h1}}{x - \alpha_h} + \frac{d}{dx} \sum_h^{1, s} \sum_k^{2, r_h} \frac{1}{1-k} \frac{A_{hk}}{(x - \alpha_h)^{k-1}},$$

e se poniamo

$$\sum_h^{1, s} \frac{A_{hk}}{x - \alpha_h} = \frac{X(x)}{P(x)}, \quad \sum_h^{1, s} \sum_k^{2, r_h} \frac{1}{1-k} \frac{A_{hk}}{(x - \alpha_h)^{k-1}} = \frac{Y(x)}{Q(x)},$$

si trova la seguente formola di decomposizione (osservata da *Hermite*) della funzione razionale propria f/F :

$$(8) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{X(x)}{P(x)} + \frac{d}{dx} \frac{Y(x)}{Q(x)},$$

ove $X(x)$, $Y(x)$, $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomii. I polinomii P e Q sono subito *razionalmente* noti, si ha invero

$$(9) \quad Q(x) = (x - \alpha_1)^{r_1-1} (x - \alpha_2)^{r_2-1} \dots (x - \alpha_s)^{r_s-1},$$

$$(10) \quad P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_s),$$

e quindi $Q(x)$ è il massimo comune divisore fra $F(x)$ e la sua derivata prima e $P(x)$ è il quoziente di F per Q . Per il calcolo dei coefficienti dei polinomii $X(x)$ e $Y(x)$, osserviamo, anzitutto, che i gradi di questi sono minori, rispettivamente, di quelli di $P(x)$ e di $Q(x)$. Sia $n = r_1 + r_2 + \dots + r_s$ il grado di F , i gradi di P , Q , X , Y sono s , $n - s$, $s - 1$, $n - s - 1$. I coefficienti (incogniti) di X e di Y sono perciò in numero (complessivo) di n . Assunta la dimostrata formola (8) e assunte come incognite i coefficienti di X e di Y , si eseguisca la derivazione indicata nella (8), si porti tutto ad un membro e si riduca a forma intera, ordinando in seguito rispetto alla x . Eguagliando a zero i coefficienti delle varie potenze della x , si ottengono, com'è subito visto, n equazioni lineari negli n coefficienti incogniti di X e di Y . Poichè la (8) sussiste qualunque sia il polinomio $f(x)$, di grado $n - 1$, queste equazioni riescono sempre compatibili quali si siano i termini noti (forniti appunto dagli n coefficienti di f) e perciò il determinante dei coefficienti di esse deve *sempre* risultare diverso da zero. I polinomii X e Y verificanti la (8) sono dunque altresì unici.

Ottenuti X e Y (con calcoli puramente razionali) si ha:

$$(11) \quad \int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \frac{Y(x)}{Q(x)} + \int \frac{X(x)}{P(x)} dx,$$

e pertanto (*Hermite*): *L'integrazione di una frazione razionale può sempre essere — con soli calcoli razionali — ridotta a quella di una frazione razionale propria il cui denominatore ha tutte le radici semplici.*

La formola di integrazione (7) è affatto generale, però, nel caso particolare che i polinomi f e F siano (a coefficienti) reali conviene condurre i calcoli evitando di *implicare* le formole di immaginari provenienti dalle eventuali radici complesse dell'equazione $F(x)=0$. Limitandoci a considerare il caso (al quale, come abbiamo visto, ci si può sempre ridurre) che la $F(x)=0$ abbia semplici tutte le radici, si sa che (*Algebra*, n° 274) se f e F sono a coefficienti reali, sussiste la seguente formola di decomposizione:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum \frac{A}{x-\alpha} + \sum \frac{Bx+C}{(x-\beta)^2 + \gamma^2},$$

ove α , β , γ , A , B , C sono costanti reali. E poichè

$$\frac{Bx+C}{(x-\beta)^2 + \gamma^2} = \frac{B}{2} \frac{2(x-\beta)}{(x-\beta)^2 + \gamma^2} + \frac{C+B\beta}{(x-\beta)^2 + \gamma^2},$$

si trova

$$\begin{aligned} & \int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \\ = & \sum A \log|x-\alpha| + \sum \frac{B}{2} \log[(x-\beta)^2 + \gamma^2] + \sum \frac{C+B\beta}{\gamma} \operatorname{arc tang} \frac{x-\beta}{\gamma} + c. \end{aligned}$$

III. *Metodo di integrazione per sostituzione.* Tale metodo si fonda sulla (5):

$$\left[\int f(x) dx \right]_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Può darsi appunto che, mediante un'opportuna scelta della funzione $\varphi(t)$, laddove il differenziale $f(x)dx$ è di difficile integrazione elementare, non lo sia invece il differenziale $f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$, nella nuova variabile t . Sia $G(t)$ l'integrale indefinito di quest'ultimo, l'integrale indefinito del primo non si potrà ricavare da G se non quando la funzione $\varphi(t)$ sia propriamente invertibile; se $t=\phi(x)$ è, in tal caso, la funzione inversa (derivabile) di $x=\varphi(t)$, per l'integrale indefinito $F(x)$ di $f(x)dx$ si avrà $F(x)=G[\phi(x)]$. Per esempio, con la sostituzione $x=asent$ si trova

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2-x^2} dx &= a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \right) + c = \\ &= \frac{a^2}{2} \operatorname{arc sen} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + c. \end{aligned}$$

La più importante applicazione del metodo di sostituzione si ha nel problema della così detta *razionalizzazione* dei differenziali $f(x)dx$, nella ricerca cioè di una funzione $x = \varphi(t)$ tale che la funzione $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ risulti razionale. Se tale ricerca riesce, il calcolo dell'integrale di $f(x)$ è ricondotto a quello di una funzione razionale, del quale ci siamo già occupati.

Se x_1, x_2, \dots, x_n sono argomenti variabili, col simbolo $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ denoteremo, in questo articolo, una funzione razionale di quegli argomenti.

Diconsi *integrali abeliani* gli integrali del tipo

$$\int R(x, y(x)) dx,$$

ove $y(x)$ è una *funzione algebrica* della x , implicitamente definita — cioè — da un'equazione del tipo

$$(12) \quad F(x, y) = 0,$$

essendo $F(x, y)$ un polinomio intero in x e in y . Una curva piana la cui equazione è del tipo della (12) dicesi *algebrica*. Una curva algebrica dicesi *razionale* (o *di genere zero*) se è possibile determinare un parametro t e due funzioni *razionali* $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ di quel parametro, in maniera che la curva di equazioni parametriche

$$(13) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

coincida con la (12). Così, per esempio, la curva (algebrica d'ordine n) di equazione

$$(14) \quad \sum_h^{0, n} a_h (x - x_0)^h (y - y_0)^{n-h} - \sum_k^{0, n-1} b_k (x - x_0)^k (y - y_0)^{n-1-k} = 0,$$

è razionale. Posto infatti $y - y_0 = t(x - x_0)$, si trovano, come equazioni parametriche della curva,

$$x = x_0 + \frac{\sum_k^{0, n-1} b_k t^k}{\sum_h^{0, n} a_h t^h}, \quad y = y_0 + \frac{t \sum_k^{0, n-1} b_k t^k}{\sum_h^{0, n} a_h t^h}.$$

Pertanto, in particolare, le coniche sono curve razionali. Orbene, si ha che: *Il differenziale di un integrale abeliano relativo ad*

una curva algebrica razionale è razionalizzabile. Mediante le sostituzioni (13) si ha invero

$$R(x, y(x)) dx = R(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt.$$

In particolare, è razionalizzabile il differenziale

$$(15) \quad R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = R(x, y(x)) dx.$$

Se (x_0, y_0) è un qualunque punto della conica

$$y^2 - ax^2 - bx - c = 0,$$

la funzione $y = y(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, soddisfa l'equazione, del tipo della (14),

$$(y - y_0)^2 - a(x - x_0)^2 + 2y_0(y - y_0) - (2ax_0 + b)(x - x_0) = 0,$$

e pertanto, il differenziale (15) si razionalizza con le sostituzioni:

$$x = x_0 + \frac{2ax_0 + b - 2y_0 t}{t^2 - a}, \quad y = y_0 + t \frac{2ax_0 + b - 2y_0 t}{t^2 - a}$$

Si noti che, data la completa arbitrarietà del punto (x_0, y_0) sulla conica, si potrà nei singoli casi scegliere tale punto in modo da semplificare i calcoli quanto più è possibile. Il differenziale

$$(16) \quad R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d}) dx,$$

con la sostituzione $\sqrt{ax + b} = t$, si riconduce al tipo (15).

Ed ora, per un rapido riassunto di alcuni risultati, assai facilmente controllabili, se $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ sono numeri frazionarii, con $d(\alpha), d(\alpha, \beta), \dots, d(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ converremo di designare, rispettivamente, il denominatore di α , il minimo denominatore comune di α e di β, \dots , il minimo denominatore comune di α , di β, \dots , di γ . Si ha allora che: I differenziali

$$(17) \quad R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_n} \right] dx,$$

$(ad - bc \neq 0; r_1, r_2, \dots, r_n$ numeri frazionarii reali)

$$(18) \quad x^m (a + bx^n)^p dx,$$

$(m, n, p$ numeri frazionarii reali)

$$(19) \quad R(\operatorname{sen} x, \cos x) dx,$$

$$(20) \quad R(\operatorname{sen} x, \cos^2 x) \cos x dx,$$

$$(21) \quad R(\operatorname{sen}^2 x, \cos x) \operatorname{sen} x dx,$$

$$(22) \quad R(\operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x, \operatorname{sen} x \cos x) dx,$$

$$(23) \quad R(e^{ax}) dx,$$

si razionalizzano, rispettivamente, con le sostituzioni:

$$(17) \quad \frac{ax + b}{cx + d} = t^{\vec{d}(r_1, r_2, \dots, r_n)},$$

$$(18) \quad \begin{cases} x = t^{\vec{d}(m, n)}, & \text{se } p \text{ è intero,} \\ a + bx^n = t^{\vec{d}(p)}, & \text{se } \frac{m+1}{n} \text{ è intero} \quad (*) \\ \frac{a + bx^n}{x^n} = t^{\vec{d}(p)}, & \text{se } p + \frac{m+1}{n} \text{ è intero} \end{cases}$$

$$(19) \quad \operatorname{tang} \frac{x}{2} = t,$$

$$(20) \quad \operatorname{sen} x = t, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (**)$$

$$(21) \quad \cos x = t,$$

$$(22) \quad \operatorname{tang} x = t,$$

$$(23) \quad e^{ax} = t.$$

Osserviamo ancora che i differenziali

$$\begin{aligned} & R(\operatorname{tang} x, \sqrt{a \operatorname{tang}^2 x + b \operatorname{tang} x + c}) dx, \quad R(e^x, \sqrt{a e^{2x} + b e^x + c}) dx, \\ & R(\operatorname{tang} x, \sqrt{a \operatorname{tang} x + b}, \sqrt{c \operatorname{tang} x + d}) dx, \quad R(e^x, \sqrt{a e^x + b}, \sqrt{c e^x + d}) dx, \\ & R \left[\operatorname{tang} x, \dots, \left(\frac{a \operatorname{tang} x + b}{c \operatorname{tang} x + d} \right)^{r_i}, \dots \right] dx, \quad R \left[e^x, \dots, \left(\frac{a e^x + b}{c e^x + d} \right)^{r_i}, \dots \right] dx, \end{aligned}$$

con le sostituzioni $\operatorname{tang} x = t$, $e^x = t$ si riportano ai differenziali del tipo (15), (16), (17).

Osserviamo infine che, in virtù delle formole di **Eulero**, i differenziali (19), (20), (21), (22) rientrano tutti nel differenziale (23), per $a = i$. In quest'ultimo rientrano pure i differenziali razionali in $\operatorname{sen} h x$ e $\operatorname{cosh} x$, per i quali d'altronde sussistono formole di razionalizzazione analoghe a quelle date per i differenziali (19), (20), (21), (22).

(*) Se nessuno dei numeri p , $(m+1)/n$, $p + (m+1)/n$ è intero, il differenziale (18) non può essere razionalizzato (**Tchebichef**) e non è elementarmente integrabile.

(**) Se R è razionale intero, il differenziale riesce un polinomio in t .

IV. *Metodo di integrazione per parti.* La formola (4) va sotto il nome di *formola di integrazione per parti*, essa è spesso utilizzata per trasformare l'integrale di $u dv$ nell'integrale di $v du$, il quale ultimo integrale può, talvolta, rispetto a quello assegnato, essere più facilmente esprimibile, mediante le funzioni elementari, oppure può essere a questo legato da certe relazioni che valgono a determinarle. Esempi:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c,$$

$$\int \frac{x}{\cosh^2 x} dx = \int x d \operatorname{tanh} x = x \operatorname{tanh} x - \int \operatorname{tanh} x dx =$$

$$= x \operatorname{tanh} x - \log \cosh x + c,$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x \cos x - \operatorname{sen} x)^2} = \int \frac{x}{\operatorname{sen} x} d \left(\frac{1}{x \cos x - \operatorname{sen} x} \right) =$$

$$= \frac{x}{(x \cos x - \operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{x \operatorname{sen} x + \cos x}{x \cos x - \operatorname{sen} x} + c.$$

Per il calcolo dell'integrale $\int \sqrt{1+x^2} dx$ osserviamo che

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}},$$

e quindi

$$(24) \quad \int \sqrt{1+x^2} dx = \operatorname{sett} \operatorname{senh} x + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

ma

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int x d \sqrt{1+x^2} = x \sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx,$$

onde, sostituendo in (24), si ricava

$$2 \int \sqrt{1+x^2} dx = \operatorname{sett} \operatorname{senh} x + x \sqrt{1+x^2} + c.$$

Integrando per parti, si hanno le equazioni:

$$a \int e^{ax} \operatorname{sen} \beta x dx = e^{ax} \operatorname{sen} \beta x - \beta \int e^{ax} \cos \beta x dx,$$

$$\beta \int e^{ax} \operatorname{sen} \beta x dx = -e^{ax} \cos \beta x + a \int e^{ax} \cos \beta x dx$$

onde, posto $A = \alpha / (\alpha^2 + \beta^2)$, $B = \beta / (\alpha^2 + \beta^2)$, dalla risoluzione delle equazioni si ottiene

$$(25) \quad \begin{cases} \int e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \, dx = e^{\alpha x} (A \operatorname{sen} \beta x - B \operatorname{cos} \beta x) + c, \\ \int e^{\alpha x} \operatorname{cos} \beta x \, dx = e^{\alpha x} (B \operatorname{sen} \beta x + A \operatorname{cos} \beta x) + c. \end{cases}$$

V. **Formole di riduzione.** Assegnato un integrale da calcolare, mediante le così dette *formole di riduzione*, si cerca, applicando le varie regole indicate in ciò che precede, di dedurre dal dato una successione di integrali tali che, ciascuno di essi, sia legato in modo noto all'integrale successivo, laddove l'ultimo integrale della successione riesca elementarmente calcolabile oppure realizzi talune utili semplificazioni. La *formola di riduzione* esprimerà appunto la relazione esistente fra due integrali consecutivi della menzionata successione.

Ponendo

$$(26) \quad I_m = \int x^m e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \, dx, \quad J_m = \int x^m e^{\alpha x} \operatorname{cos} \beta x \, dx,$$

l'integrazione per parti dà, in forza delle (25), le seguenti formole di riduzione

$$\begin{aligned} I_m &= x^m e^{\alpha x} (A \operatorname{sen} \beta x - B \operatorname{cos} \beta x) - m A I_{m-1} + m B J_{m-1}, \\ J_m &= x^m e^{\alpha x} (B \operatorname{sen} \beta x + A \operatorname{cos} \beta x) - m B I_{m-1} - m A J_{m-1}, \\ (m+1) I_m &= x^{m+1} e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x - \alpha I_{m+1} - \beta J_{m+1}, \\ (m+1) J_m &= x^{m+1} e^{\alpha x} \operatorname{cos} \beta x + \beta I_{m+1} - \alpha J_{m+1}. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} m \neq -1$$

Il differenziale (18) va sotto il nome di *differenziale binomio*. Per l'integrale di tale differenziale sussistono le seguenti utilissime formole di riduzione. Posto $p = -r$, consideriamo che:

$$\begin{aligned} a \int \frac{x^m \, dx}{(a + bx^n)^r} &= \int x^m \frac{(a + bx^n) - bx^n}{(a + bx^n)^r} \, dx = \\ &= \int \frac{x^m \, dx}{(a + bx^n)^{r-1}} - \frac{1}{n} \int x^{m+1} \frac{nbx^{n-1}}{(a + bx^n)^r} \, dx, \end{aligned}$$

con un'integrazione per parti nell'ultimo integrale scritto, si ottiene la seguente formola di riduzione (se $r - 1 \neq 0$):

$$(27) \quad an(r-1) \int \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^r} = \frac{x^{m+1}}{(a+bx^n)^{r-1}} + [n(r-1) - m + 1] \int \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^{r-1}}$$

che, letta nei due sensi, serve a diminuire il valore assoluto di r , ed in particolare, nel caso che r sia intero, la sua successiva ripetuta applicazione, ridurrà ad uno o a zero il valore assoluto di r , ad uno se r è positivo a zero se r è negativo. Ciò si può applicare all'integrale

$$\int \frac{dx}{(x^2 + hx + k)^r},$$

il quale, con la sostituzione $\xi = x + h/2$, si trasforma appunto nell'integrale

$$\int \frac{d\xi}{(\xi^2 + a)^r}, \quad a = \frac{4k - h^2}{4}.$$

Con la sostituzione $x^n = t$, l'integrale del differenziale binomio (18) si trasforma, a meno di un fattore costante, nel seguente

$$I(p, q) = \int (a + bt)^p t^q dt, \quad q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

Si hanno subito le seguenti formole riduzione, delle quali è evidente l'ufficio:

$$(28) \quad \begin{cases} (q+1)I(p, q) = (a+bt)^p t^{q+1} - bpI(p-1, q+1), & (q+1 \neq 0), \\ b(p+1)I(p, q) = (a+bt)^{p+1} t^q - qI(p+1, q-1), & (p+1 \neq 0), \\ (p+q+1)I(p, q) = (a+bt)^p t^{q+1} + apI(p-1, q), \\ b(p+q+1)I(p, q) = (a+bt)^{p+1} t^q - aqI(p, q-1). \end{cases}$$

Il differenziale

$$\operatorname{sen}^\alpha x \cos^\beta x dx,$$

si trasforma in un differenziale binomio mediante la sostituzione $\operatorname{sen} x = \sqrt{t}$. Si ha così

$$(29) \quad J(\alpha, \beta) = \int \operatorname{sen}^\alpha x \cos^\beta x dx = \frac{1}{2} \int t^{\frac{\alpha-1}{2}} (1-t)^{\frac{\beta-1}{2}} dt.$$

Pertanto, l'integrale (29) è elementarmente calcolabile allora (e allora soltanto) che sia intero uno dei numeri $(\alpha - 1)/2$, $(\beta - 1)/2$, $(\alpha + \beta)/2$, in particolare, dunque, se entrambi i numeri α e β sono interi. Ponendo, nelle (28), $p = (\beta - 1)/2$, $q = (\alpha - 1)/2$, $a = 1$, $b = -1$,

si hanno le formole di riduzione per l'integrale (29). Meglio conviene però ritrovare direttamente tali formole, il che è facilissimo. Esse sono:

$$(30) \quad \begin{cases} (\beta + 1)J(\alpha, \beta) = -\operatorname{sen}^{\alpha-1} x \cos^{\beta+1} x + (\alpha-1)J(\alpha-2, \beta+2), \\ (\alpha+1)J(\alpha, \beta) = \operatorname{sen}^{\alpha+1} x \cos^{\beta-1} x + (\beta-1)J(\alpha+2, \beta-2), \\ (\alpha+\beta)J(\alpha, \beta) = -\operatorname{sen}^{\alpha-1} x \cos^{\beta+1} x + (\alpha-1)J(\alpha-2, \beta), \\ (\alpha+\beta)J(\alpha, \beta) = \operatorname{sen}^{\alpha+1} x \cos^{\beta-1} x + (\beta-1)J(\alpha, \beta-2). \end{cases}$$

In particolare, se $\beta = -\alpha$, si trova

$$\int \operatorname{tang}^{\alpha} x dx = \frac{\operatorname{tang}^{\alpha-1} x}{\alpha-1} - \int \operatorname{tang}^{\alpha-2} x dx.$$

Le formole di riduzione (30) bastano, evidentemente, per l'elementare integrazione di $\operatorname{sen}^{\alpha} x \cos^{\beta} x$, tutte le volte che α e β sono entrambi interi, positivi o negativi.

Designi $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un polinomio razionale intero dei suoi argomenti x_1, x_2, \dots, x_n . Osserviamo allora che l'integrale

$$(31) \quad \int P(x, e^{ax}, \operatorname{sen} bx, \cos cx) dx,$$

si riduce ad una combinazione lineare degli integrali (26), esso è dunque sempre elementarmente esprimibile. Tali sono pure gli integrali

$$\int P(x, \log x) dx, \quad \int P(x, \operatorname{arc} \operatorname{sen} x) dx, \quad \int P(x, \operatorname{setts} \operatorname{senh} x) dx,$$

i quali, con le sostituzioni $x = e^t$, $x = \operatorname{sent} t$, $x = \operatorname{senh} t$, si riconducono al tipo (31).

106. Regole per il calcolo di integrali definiti. — Un metodo di calcolo dell'integrale definito, esteso all'intervallo (a, b) , di una funzione $f(x)$, verificante le ipotesi (la parte reale e il coefficiente dell'immaginario, se $f(x)$ fosse complessa) enunciate nei teorr. II e III del n° 104, consiste nel preventivo calcolo di una funzione primitiva $F(x)$ della $f(x)$, dopo di che si avrà:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Ma le regole di integrazione per decomposizione in somma, per

sostituzione e per parti e le formole di riduzione, date al n° precedente, si possono estendere, come ora vedremo, al calcolo degli integrali definiti, consentendo tale estensione, il calcolo indicato senza passare attraverso l'integrazione indefinita, il che, bene spesso, può portare delle dannose complicazioni.

Integrazione definita per decomposizione in somma.

Se $f(x)$ è sommabile e integrabile su (a, b) e tali sono pure $f_1(x)$, $f_2(x), \dots, f_n(x)$, ed inoltre, al più eccettuati i punti di un insieme N di estensione nulla, riesce in (a, b)

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x),$$

con c_1, c_2, \dots, c_n costanti, si ha

$$\int_a^b f(x) dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx + \dots + c_n \int_a^b f_n(x) dx.$$

Nell'applicazione di tale formola consiste appunto il metodo di integrazione definita per decomposizione in somma. Esempio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

Integrazione definita per sostituzione. La funzione $f(x)$ sia, anzitutto, supposta limitata e integrabile nell'intervallo finito $A \equiv (a', a'')$ dell'asse x e sia $\varphi(y)$ una funzione definita nell'intervallo finito $C \equiv (c', c'')$ dell'asse y , ivi ovunque derivabile, con derivata $\varphi'(y)$ limitata e integrabile, non negativa e non sempre nulla in ogni intervallo di (c', c'') e si abbia $a' = \varphi(c')$, $a'' = \varphi(c'')$. La funzione $x = \varphi(y)$ è allora propriamente invertibile in (c', c'') , sia $y = \psi(x)$ la sua funzione inversa. Ad ogni dominio della famiglia $[A]_R$, costituita dagli intervalli (x', x'') di (a', a'') , corrisponde in C l'intervallo $[\psi(x'), \psi(x'')]$, cioè un dominio della famiglia $[C]_R$, costituita dagli intervalli (y', y'') di (c', c'') , ed in maniera che alla somma (elementare) di due intervalli di $[A]_R$ corrisponde la somma (elementare) dei due intervalli corrispondenti di $[C]_R$. Per l'integrabilità di $\varphi'(y)$ si ha inoltre (104, II)

$$\int_{[\psi(x'), \psi(x'')]} \varphi'(y) dy = \varphi[\psi(x'')] - \varphi[\psi(x')] = x'' - x'.$$

Sono dunque soddisfatte tutte le ipotesi del teor. II del n° 101, e si ha pertanto

$$(1) \quad \int_{(a', a'')} f(x) dx = \int_{(c', c'')} f[\varphi(y)] \varphi'(y) dy, \quad [\varphi'(y) \geq 0]$$

Si ottiene dunque, di nuovo, la formola (9) del n° 101; ma, mentre là supponemmo $\varphi'(y)$ continua in (c', c'') , qui abbiamo solo supposto ch'essa sia limitata e integrabile. Se, mantenendo tutte le altre ipotesi qui fatte, si suppone invece che, in (c', c'') , sia sempre $\varphi'(y) \leq 0$, risultando $a' = \varphi(c'')$, $a'' = \varphi(c')$, si avrà

$$(2) \quad \int_{(a', a'')} f(x) dx = - \int_{(c', c'')} f[\varphi(y)] \varphi'(y) dy, \quad [\varphi'(y) \leq 0].$$

Ne segue il teorema:

I. *La $f(x)$ sia limitata e integrabile su ogni intervallo finito dell'intervallo (a, b) e la $x = \varphi(y)$ sia ovunque derivabile nell'intervallo finito (c', c'') , con derivata $\varphi'(y)$ limitata e integrabile su (c', c'') , ivi priva di valori di segno opposto e non sempre nulla in ogni intervallo, si ha allora*

$$(3) \quad \int_{\varphi(c')}^{\varphi(c'')} f(x) dx = \int_{c'}^{c''} f[\varphi(y)] \varphi'(y) dy,$$

se $\varphi(c')$ e $\varphi(c'')$ sono due punti di (a, b) .

Particolarizzando il teor. III del n° 101 si ricava subito, in virtù del teorema precedente, il seguente:

II. *L'intervallo $A \equiv (a', a'')$ dell'asse x sia finito o no, e M sia un insieme di estensione nulla contenuto in A . In $A - M$ sia definita la funzione $f(x)$, limitata e integrabile in ogni intervallo finito contenuto in $A - M$. L'intervallo $C \equiv (c', c'')$ dell'asse y sia finito o no e N sia un insieme di punti di estensione nulla, contenuto in C . In $C - N$ sia definita la funzione $x = \varphi(y)$, derivabile in ogni punto di $C - N$, con derivata $\varphi'(y)$ limitata e integrabile in ogni intervallo finito di $C - N$ e priva (ivi) di valori di segno opposto. Esista una successione, invadente $C - N$, di domini limitati $C_1, C_2, \dots, C_s, \dots$, ciascuno costituito da una somma di intervalli, ai quali domini, mediante la*

$x = \varphi(y)$, corrispondano in A i domini limitati $A_1, A_2, \dots, A_s, \dots$, ciascuno costituito da una somma di intervalli, formanti una successione invadente $A - M$. Nelle ipotesi enunciate, dalla sommabilità su A di $f(x)$ segue quella su C di $f[\varphi(y)]\varphi'(y)$, e viceversa; laddove, nell'uno caso e nell'altro, riesce

$$(4) \quad \int_{(a', a'')} f(x) dx = \int_{(c', c'')} f[\varphi(y)] \varphi'(y) dy.$$

I teoremi I e II bastano già per le più importanti applicazioni. Tuttavia, ha interesse il rispondere alla domanda seguente: Nelle formule (3) e (4) si può togliere per la $\varphi'(y)$ la condizione che la priva di valori di segno opposto? Si risponde affermativamente col seguente teorema (che può del resto essere, in varie direzioni, ulteriormente esteso).

III. Nell'intervallo (c, d) dell'asse y sia definita la funzione $x = \varphi(y)$ ovunque derivabile, con derivata $\varphi'(y)$ continua in ogni punto di (c, d) . Variando y nell'intervallo (c, d) , il valore di $\varphi(y)$ sia sempre contenuto in un intervallo (a, b) , ove è definita la funzione $f(x)$ limitata e integrabile in ogni intervallo finito. Si ha allora che, ovunque si prendano due punti y_0 e y_1 (al finito) in (c, d) , la funzione $f[\varphi(y)]\varphi'(y)$ è (limitata) e integrabile nell'intervallo da quei punti determinato, e che

$$(5) \quad \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_1)} f(x) dx = \int_{y_0}^{y_1} f[\varphi(y)] \varphi'(y) dy.$$

Prendendo, per esempio, a considerare il minimo integrale definito di $f[\varphi(y)]\varphi'(y)$, dimostrerò che la funzione continua della y :

$$F(y) = \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} f(x) dx = \int_{y_0}^y f[\varphi(\eta)] \varphi'(\eta) d\eta,$$

ha la derivata identicamente nulla; ed allora, poichè $F(y_0) = 0$, ne seguirà, identicamente, $F(y) = 0$, e pertanto, in particolare

$$\int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_1)} f(x) dx = \int_{y_0}^{y_1} f[\varphi(\eta)] \varphi'(\eta) d\eta.$$

Sia, anzitutto, y un punto di (c, d) ove $\varphi'(y) \neq 0$ — se fosse identicamente $\varphi'(y) = 0$ la (5) sarebbe ovvia — esisterà un intorno circolare I di y , su (c, d) , ove risulterà sempre $\varphi'(y) \neq 0$. Diamo a y un incremento Δy , su I , si ha

$$(6) \quad \Delta F = \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+\Delta y)} f(x) dx - \int_y^{y+\Delta y} f[\varphi(\eta)] \varphi'(\eta) d\eta,$$

ma (teor. I) poichè in I è sempre $\varphi'(\eta) \neq 0$, la funzione $f[\varphi(\eta)] \varphi'(\eta)$ risulta integrabile su $(y, y + \Delta y)$ e i due integrali del secondo membro della (6) risultano eguali. Si ha dunque nel caso in considerazione $dF/dy = 0$.

Sia ora y un punto per cui $\varphi'(y) = 0$. Detto I un intorno circolare di y , su (c, d) , e dando a y un incremento Δy variabile su I , il punto $\varphi(y + \Delta y)$ dell'asse x , varierà in un intervallo finito (α, β) . Diciamo M l'estremo superiore di $|f(x)|$ in (α, β) e diciamo $N(\Delta y)$ il massimo modulo di $\varphi'(y)$ nell'intervallo $(y, y + \Delta y)$, si ha

$$(7) \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} N(\Delta y) = 0.$$

Dalla (6) segue $|\Delta F| \leq M \cdot |\Delta \varphi| + M \cdot N(\Delta y) \cdot |\Delta y|$ e quindi

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta y} \right| \leq M \cdot \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta y} \right| + M \cdot N(\Delta y) \leq 2M \cdot N(\Delta y),$$

onde, per la (7), di nuovo $dF/dy = 0$.

Il teorema è dunque dimostrato. Non dobbiamo tacere che, nell'ipotesi particolare della continuità di $f(x)$, la dimostrazione dell'identità $dF/dy \equiv 0$ si semplifica assai, poichè allora (p. 412)

$$\frac{d}{dy} \int_{y_0}^y f[\varphi(\eta)] \varphi'(\eta) d\eta = f[\varphi(y)] \varphi'(y),$$

e, in forza della regola di derivazione delle funzioni composte,

$$\frac{d}{dy} \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} f(x) dx = f[\varphi(y)] \varphi'(y).$$

Nell'applicazione delle formole (3), (4), (5), consiste il metodo di integrazione definita per sostituzione. Esempii:

Siano $a + b$ e $a - b$ due numeri positivi, mediante la sostituzione $x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} y$, si trova

$$(8) \int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b \cos x} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dy}{(a+b) + (a-b)y^2} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tang} \left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} y \right) \right]_0^{\infty} \\ = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Se $0 < a < b$, con la medesima sostituzione si trova

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a + b \cos x} = 2 \int_0^1 \frac{dy}{(b+a) - (b-a)y^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \left[\log \left(\frac{\sqrt{b+a} + y\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a} - y\sqrt{b-a}} \right) \right]_0^1 \\ = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$$

Con la sostituzione $x = a \operatorname{sen} y$ si trova

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 y dy = \frac{a^2}{2} \left[y + \frac{\operatorname{sen} 2y}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} a^2$$

Con le sostituzioni $x = \pi - y$, $x = \pi/2 - y$ si trova, rispettivamente,

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \log \operatorname{sen} x dx = \int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} y dy \text{ e perciò } \int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} x dx, (*) \\ \int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} x = \int_0^{\pi/2} \log \operatorname{cos} y dy,$$

ne segue, poichè $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} (x/2) \operatorname{cos} (x/2)$,

(*) La funzione $\log \operatorname{sen} x$ è sommabile su $(0, \pi)$ poichè, per esempio,

$$|\log \operatorname{sen} x| \leq \frac{4}{e^2 \sqrt{x}} \sqrt{\frac{x}{\operatorname{sen} x}} \text{ se } 0 < x \leq \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{e^2}, \\ |\log \operatorname{sen} x| \leq \frac{4}{e^2 \sqrt{\pi-x}} \sqrt{\frac{\pi-x}{\operatorname{sen} x}} \text{ se } \pi > x \geq \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{e^2}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} x \, dx &= \pi \log 2 + \int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} \frac{x}{2} \, dx + \int_0^{\pi} \log \cos \frac{x}{2} \, dx = \\ &= \pi \log 2 + 4 \int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} x \, dx, \end{aligned}$$

d'onde la *formola di Eulero* (già ottenuta a pag. 496)

$$(9) \quad \int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

Integrazione definita per parti. Nei riguardi di tale integrazione sussiste il seguente teorema:

IV. *Nell'intervallo* $A \equiv (a, b)$, *finito o no le due funzioni* $u(x)$ *e* $v(x)$ *siano continue, eventualmente anche alla sinistra e alla destra dell'infinito e siano limitate; ed eccettuati, al più, i punti di un insieme* $N (< A)$ *costituito da un numero finito di punti, siano ovunque entrambe derivabili, con derivate* $u'(x)$ *e* $v'(x)$ *limitate e integrabili in ogni intervallo finito di* (a, b) *che non contenga alcun punto di* N . *Si ha allora che se* $u'(x)$ *e* $v'(x)$ *sono sommabili su* (a, b) , *sussiste la seguente formola di integrazione definita per parti:*

$$(10) \quad \int_a^b uv' \, dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v \, dx.$$

Ed invero, poichè, in $A - N$, $(uv)' = u'v + uv'$, si ha (104, III)

$$\int_a^b (uv)' \, dx = [uv]_a^b,$$

ma è anche

$$\int_a^b (uv)' \, dx = \int_a^b uv' \, dx + \int_a^b u'v \, dx.$$

Nell'applicazione della formola (10) consiste il metodo di integrazione definita per parti. Esempi: Se n e m sono interi positivi,

$$(11) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \left[-x^n e^{-x} \right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \dots = n!,$$

se $n \geq 2$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = - \left[x^{n-1} \frac{e^{-x^2}}{2} \right]_0^{+\infty} + \frac{n-1}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx,$$

e pertanto, se conveniamo di rappresentare col simbolo $n!!$ il prodotto di tutti i numeri interi e positivi non superiori a n ed *aventi la stessa parità di questo*, si trova, con la successiva e ripetuta applicazione dell'ultima formola,

$$(11') \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx \begin{cases} = \frac{(n-1)!!}{2^{n/2}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ = \frac{(n-1)!!}{2^{(n+1)/2}}, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Integrando per parti, si ha pure (formole (30) del n° prec.)

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^m x \cos^n x dx = \frac{m-1}{m+n} \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{m-2} x \cos^n x dx, \quad (m \geq 2),$$

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^m x \cos^n x dx = \frac{n-1}{m+n} \int_0^{\pi/2} \text{sen}^m x \cos^{n-2} x dx, \quad (n \geq 2),$$

ne segue

$$(12) \int_0^{\pi/2} \text{sen}^m x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx \begin{cases} = \frac{(m-1)!!}{m!!} \frac{\pi}{2}, & \text{se } m \text{ è pari,} \\ = \frac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{se } m \text{ è dispari,} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^m x \cos^n x dx \begin{cases} = \frac{(m-1)!! (n-1)!!}{(m+n)!!} \frac{\pi}{2}, & \text{se } m \text{ e } n \text{ sono pari,} \\ = \frac{(m-1)!! (n-1)!!}{(m+n)!!}, & \text{se } m \text{ e } n \text{ non sono entrambi pari.} \end{cases}$$

trambi pari.

Mediante la sostituzione $x = \text{sen}^2 y$ si trova

$$(13) \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = 2 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2m+1} y \cos^{2n+1} y dy = \frac{m! n!}{(m+n+1)!}.$$

Con la sostituzione $x = \text{tang} y$ si trova

$$(14) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} y dy = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}.$$

Dalle (12), poichè

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n+1} x dx < \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n} x dx < \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n-1} x dx,$$

segue

$$\frac{2n}{2n+1} < n \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \pi < 1,$$

e quindi la classica *formola di Wallis*

$$(15) \sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

Da questa formola, dalle (12) e dalla (14), si deduce il valore (cfr. eserc. 2° del n° 97) dell'integrale di e^{-x^2} esteso all'intervallo $(0, +\infty)$. Si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx > \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx = \sqrt{n} \int_0^1 e^{-nx^2} dx;$$

ma, come facilmente si riconosce,

$$(1-x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad (*).$$

(*) Ed invero, per esempio, posto $y = (1+x^2) e^{-x^2}$, si trova $y' = -2x^3 e^{-x^2}$.

l'eguaglianza potendo solo sussistere per $x=0$, d'onde

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} &= \sqrt{n} \int_0^1 (1-x^2)^n dx < \sqrt{n} \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \\ &= \sqrt{n} \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \sqrt{n} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \sqrt{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

e pertanto, in virtù della (15), passando al limite per n divergente,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Integrando per parti si ricava, dalla (9),

$$\int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} x \, dx = \left[x \log \operatorname{sen} x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x \cot x \, dx = - \int_0^{\pi/2} x \cot x \, dx,$$

onde

$$\int_0^{\pi/2} x \cot x \, dx = \frac{\pi}{2} \log 2.$$

Integrazione definita per passaggio al limite sotto il segno integrale. Per il calcolo degli integrali definiti, insieme alle regole precedenti, sono talvolta utili quelle che possono chiamare le *regole del passaggio al limite sotto il segno integrale*. Sia da calcolare l'integrale definito della funzione $f(x)$, supposta sommabile e integrabile sull'intervallo (a, b) dell'asse x , finito o no. Supponiamo che si sia riusciti a trovare una funzione $g(x, y)$ delle due variabili x e y , sommabile e integrabile, rispetto alla x , su (a, b) , per ogni valore di y in un certo intervallo (c, d) , finito o no, e che si verifichi uno dei seguenti *tre* casi:

1°) Esiste un punto y_0 , al finito o no, di (c, d) , per cui

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(x, y) = f(x), \quad \text{in } (a, b);$$

2°) esiste un punto y_0 , al finito, di (c, d) , per cui

$$g_y(x, y_0) = f(x), \quad \text{in } (a, b);$$

3°) esistono due punti y_1 e y_2 , al finito o no, di (c, d) , per cui

$$\int_{y_1}^{y_2} g(x, y) dy = f(x), \quad \text{in } (a, b).$$

Allora, se riesce (cfr. i criteri dei n° 92, 93, 95* e 96*)

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b g(x, y) dx = \int_a^b \left(\lim_{y \rightarrow y_0} g(x, y) \right) dx, \quad \text{nel 1° caso,}$$

$$\int_a^b g_y(x, y_0) dx = \left[\frac{d}{dy} \int_a^b g(x, y) dx \right]_{y=y_0}, \quad \text{nel 2° caso,}$$

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} g(x, y) dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_a^b g(x, y) dx, \quad \text{nel 3° caso, (*)}$$

si potrà porre, rispettivamente,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b g(x, y) dx, \quad \int_a^b f(x) dx = \left[\frac{d}{dy} \int_a^b g(x, y) dx \right]_{y=y_0},$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_a^b g(x, y) dx.$$

Esempi: Nell'esercizio 2° del n° 91, abbiamo già, con metodo diretto, calcolato l'integrale

$$\varphi(\alpha) = \int_0^\pi \log(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx, \quad \text{per } \alpha^2 \neq 1;$$

(*) Se gli intervalli (a, b) e (c, d) sono finiti e $g(x, y)$ è continua nel dominio rettangolare $\mathbf{R}[(a, c); (b, d)]$, questa relazione sussiste per quali si vogliano punti y_1 e y_2 di (c, d) . Ciò ci è già noto (pag. 392), ma risulta anche al modo seguente. Posto per y in (c, d) ,

$$F(y) = \int_a^b dx \int_{y_1}^y g(x, \eta) d\eta - \int_{y_1}^y d\eta \int_a^b g(x, \eta) dx,$$

si ha $F(y_1) = 0$ e (93, V; 104, II) $dF/dy \equiv 0$.

col metodo della derivazione sotto il segno integrale, rispetto al parametro α , il valore di questo integrale si deduce subito dalla (8). Nell'intervallo aperto $(-1, 1)$ dell'asse α si ha invero

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha) &= \int_0^\pi \frac{2\alpha - 2\alpha \cos x}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} dx = \frac{\pi}{\alpha} - \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \int_0^\pi \frac{dx}{(1 + \alpha^2) - 2\alpha \cos x} = \\ &= \frac{\pi}{\alpha} - \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \frac{\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}} = 0, \end{aligned}$$

ma $\varphi(0) = 0$ e quindi $\varphi(\alpha) = 0$ per $\alpha^2 < 1$. Per $\alpha^2 > 1$, si ha, dopo ciò,

$$\varphi(\alpha) = \int_0^\pi \log \left[\alpha^2 \left(1 - \frac{\pi}{\alpha} \cos x + \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] dx = \pi \log \alpha^2.$$

Vogliamo calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos x \, dx.$$

Introducendo un parametro y , poniamo

$$\alpha(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2yx) \, dx.$$

Si ha (95*, V e VII)

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dy} &= \int_0^{+\infty} (-2xe^{-x^2}) \operatorname{sen}(2yx) \, dx = \left[e^{-x^2} \operatorname{sen}(2yx) \right]_0^{+\infty} - 2y \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2yx) \, dx = \\ &= -2y\alpha(y), \end{aligned}$$

e quindi è identicamente nulla la derivata di $\alpha(y)e^{y^2}$, e pertanto, k designando una costante, risulta $\alpha(y) = ke^{-y^2}$; ma $\alpha(0) = \sqrt{\pi}/2$, onde

$$\alpha(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-y^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{e}}.$$

Con lo stesso procedimento si trova, invece, il risultato

$$\beta(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \operatorname{sen}(2yx) \, dx = e^{-y^2} \int_0^y e^{x^2} \, dx.$$

Siano $\alpha(x, y)$ e $\beta(x, y)$ due funzioni continue, con le loro derivate parziali $\alpha_y(x, y)$ e $\beta_x(x, y)$, nel dominio rettangolare $R[(a, c); (b, d)]$, ove inoltre riesca identicamente $\alpha_y = \beta_x$. In virtù delle formole di integrazione sotto il segno integrale risulterà

$$\int_a^b dx \int_c^d \alpha_y(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b \beta_x(x, y) dx;$$

ne segue la *relazione di Cauchy*:

$$(16) \quad \int_a^b [\alpha(x, d) - \alpha(x, c)] dx = \int_c^d [\beta(b, y) - \beta(a, y)] dy,$$

che fornisce il calcolo di parecchi notevoli integrali definiti. Se $0 < a$, $-1 < c$, si potrà porre nella (16) $\alpha = x^d / \log x$, $\beta = x^{y+1} / (y+1)$, e si ottiene

$$\int_a^b \frac{x^d - x^c}{\log x} dx = \int_c^d \frac{b^{y+1} - a^{y+1}}{y+1} dy,$$

e quindi

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^b \frac{x^d - x^c}{\log x} dx = \int_c^d \frac{b^{y+1}}{y+1} dy;$$

ciò prova (come si può anche direttamente dimostrare) la sommabilità su $(0, b)$ della funzione $(x^d - x^c) / \log x$, per $-1 < c \leq d$ e che

$$\int_0^b \frac{x^d - x^c}{\log x} dx = \int_c^d \frac{b^{y+1}}{y+1} dy, \quad \int_0^1 \frac{x^d - x^c}{\log x} dx = \log \frac{d+1}{c+1},$$

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\log x} dx = \log 2.$$

Nell'esposto metodo di integrazione definita col passaggio al limite sotto il segno integrale rientra il metodo di *integrazione definita per serie*. La funzione $f(x)$, definita nell'intervallo finito (a, b) , ivi limitata e integrabile, ammetta il seguente sviluppo in serie

$$f(x) = u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x) + \dots,$$

la serie risultando uniformemente convergente nell'intervallo (a, b) .
 Come si sa (93, III) se x_1 e x_2 sono due quali si vogliono punti di (a, b) , si ha allora

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} u_0(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} u_1(x) dx + \dots + \int_{x_1}^{x_2} u_n(x) dx + \dots$$

Si ottiene dunque, se gli integrali delle $u_n(x)$ sono noti, lo sviluppo in serie dell'integrale definito di $f(x)$ esteso all'intervallo (x_1, x_2) , il che può essere utilissimo per l'effettivo calcolo numerico di questo integrale. Nel successivo paragrafo ritorneremo su ciò. Esempi:

Si potrà dunque porre

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \sum_{i=0, \infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!(2i+1)^2},$$

e se $e^2 < 1$, $k^2 < 1$ (per le (12))

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \dots - \left[\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \right]^2 (2n-1) e^{2n} - \dots \right\},$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} + \dots \right\}.$$

Integrali euleriani*. L'integrale definito

$$(17) \quad B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (p > 0, q > 0),$$

chiamasi *integrale euleriano di prima specie o funzione Bèta*. La funzione $B(p, q)$, delle due variabili reali p e q riesce, dalla (17), definita nell'insieme aperto \mathcal{A} , del piano (p, q) , determinato dalle limitazioni $p > 0$, $q > 0$. Essa è in \mathcal{A} parzialmente derivabile quante volte si vuole, con derivate continue, si ha (95*, III e V)

$$\frac{\partial^{m+n} B}{\partial p^m \partial q^n} = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} (\log t)^m [\log(1-t)]^n dt.$$

Con la sostituzione $t = 1 - \tau$, si trova

$$\int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \int_0^1 \tau^{q-1} (1-\tau)^{p-1} d\tau,$$

e quindi $B(p, q) = B(q, p)$. Con la sostituzione $t = \cos^2 \theta$

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta;$$

con la sostituzione $t = x/(1+x)$

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx.$$

Per p e q interi si ha [per la (13)]

$$(18) \quad B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} \quad (p \text{ e } q \text{ interi}).$$

Per $p = \alpha$, $q = 1 - \alpha$, si ha

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha t^{1-\alpha}} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \quad (0 < \alpha < 1).$$

L'integrale $B(\alpha, 1 - \alpha)$ è stato già da noi incontrato (nell'*eserc.* 3° del n° 95* e nell'*eserc.* 3° del n° 96*) e già demmo notizia che esso ha il valore $\pi/\text{sen}\alpha\pi$. Siamo ora in grado di dimostrare che, effettivamente,

$$(19) \quad B(\alpha, 1 - \alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\text{sen}\alpha\pi} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Data la continuità di $B(\alpha, 1 - \alpha)$ basterà dimostrare la (19) per $\alpha = \mu/\nu$, ove μ e ν sono numeri interi e positivi, essendo inoltre $\mu < \nu$, μ dispari e ν una potenza di due eguale a 2^n . Con la sostituzione $x = t^\nu$ si trova

$$B\left(\frac{\mu}{\nu}, 1 - \frac{\mu}{\nu}\right) = \nu \int_0^{+\infty} \frac{t^{\mu-1}}{1+t^\nu} dt,$$

e poichè subito si vede che $B(1/2, 1/2) = \pi$, potremo supporre $\nu \geq 4$, cioè $n \geq 2$. Ponendo

$$m = \nu - \mu, \quad \tau_h = \frac{(2h-1)\pi}{\nu}, \quad \alpha_h = \cos \tau_h + i \operatorname{sen} \tau_h \quad (h = 1, 2, \dots, \nu/2),$$

si ha:

$$\frac{\nu t^{\mu-1}}{1+t^\nu} = \sum_h^{1, \nu} \frac{1}{\alpha_h^m} \frac{1}{t-\alpha_h} = \sum_h^{1, \nu/2} \frac{2 \cos(m\tau_h)(t-\cos \tau_h) + 2 \operatorname{sen}(m\tau_h) \operatorname{sen} \tau_h}{(t-\cos \tau_h)^2 + \operatorname{sen}^2 \tau_h},$$

e quindi una funzione primitiva di $\nu t^{\mu-1}/(1+t^\nu)$ è data da

$$F(t) = \sum_h^{1, \nu/2} \cos(m\tau_h) \log[(t-\cos \tau_h)^2 + \operatorname{sen}^2 \tau_h] + \\ + 2 \sum_h^{1, \nu/2} \operatorname{sen}(m\tau_h) \operatorname{arc tang} \frac{t-\cos \tau_h}{\operatorname{sen} \tau_h}.$$

Ma $F(0) = 0$,

$$F(t) = \sum_h^{1, \nu/4} \cos(m\tau_h) \log \frac{(t-\cos \tau_h)^2 + \operatorname{sen}^2 \tau_h}{(t+\cos \tau_h)^2 + \operatorname{sen}^2 \tau_h} + \\ + 2 \sum_h^{1, \nu/2} \operatorname{sen}(m\tau_h) \operatorname{arc tang} \frac{t-\cos \tau_h}{\operatorname{sen} \tau_h},$$

e quindi

$$\nu \int_0^{+\infty} \frac{t^{\mu-1}}{1+t^\nu} dt = F(+\infty) = 2\pi \sum_h^{1, \nu/4} \operatorname{sen}(m\tau_h) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{m\pi}{\nu}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{\mu\pi}{\nu}} \quad (*).$$

(*) Poichè, come è ben noto, sussistono le formole

$$\sum_k^{0, n} \operatorname{sen}(a+k\theta) = \frac{\operatorname{sen}\left(a + \frac{n}{2}\theta\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}},$$

$$\sum_k^{0, n} \cos(a+k\theta) = \frac{\cos\left(a + \frac{n}{2}\theta\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}.$$

L' integrale definito

$$(20) \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad (s > 0),$$

chiamasi *integrale euleriano di seconda specie o funzione Gamma*.

La funzione $\Gamma(s)$ della variabile reale s , riesce, dalla (20), definita nell' intervallo aperto $\mathcal{A} \equiv (0, +\infty)$ dell' asse s . Essa è in \mathcal{A} derivabile quante volte si vuole, si ha (95*, III e V)

$$\frac{d^n \Gamma}{ds^n} = \Gamma^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} (\log x)^n dx.$$

Riesce $\Gamma(s) > 0$, $\Gamma'(s) > 0$. Se, dunque, tracciamo nel piano (s, u) la curva $u = \Gamma(s)$, troviamo che essa è per intero contenuta nel semipiano $u > 0$ e volge sempre le concavità nel verso positivo dell' asse u . Con la sostituzione $x = y^{1/s}$ si trova

$$(21) \quad \Gamma(s) = \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt[s]{y}} dy,$$

ma

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt[s]{y}} dy > \int_0^1 e^{-\sqrt[s]{y}} dy > \frac{1}{e},$$

e quindi $\Gamma(s) > 1/es$,

$$(22) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(s) = +\infty.$$

Dalla (21) si trae

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Integrando per parti si trova $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s-1)$, e quindi, per n intero e positivo [formola (11)]

$$(23) \quad \Gamma(n) = (n-1)! , \quad \Gamma(1) = 1.$$

Ne segue, poichè $\Gamma'(s) > 0$, $\lim \Gamma(s) (s \rightarrow +\infty) = +\infty$. Da

ciò che precede si deduce l'esistenza in A di un *unico* punto di zero s_0 della derivata $\Gamma'(s)$; al decrescere della s , da s_0 verso zero, la funzione $\Gamma(s)$ diverge positivamente, crescendo sempre; al crescere di s , da s_0 verso $+\infty$, la funzione $\Gamma(s)$, di nuovo, diverge positivamente, crescendo sempre. Il punto s_0 è stato calcolato da *Legendre*, il quale ha trovato $s_0 = 1,46163\dots$ ed il minimo della funzione Gamma $\Gamma(s_0) = 0,8556\dots$. Si constata del resto facilmente che $1 < s_0 < 2$, poichè si dimostrano facilmente le relazioni $\Gamma'(1) < 0$ e $\Gamma'(2) > 0$. Si può anzi dimostrare che $\Gamma'(1) = -\gamma$, ove γ è la costante di *Euler* (cfr. *Algebra*, pag. 248)

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) = 0,57721\dots$$

Dimostriamo che: *Le funzioni Gamma e Bèta sono legate dalla relazione*

$$(24) \quad \Gamma(p) \Gamma(q) = B(p, q) \Gamma(p+q) .$$

Per p e q numeri interi tale relazione è subito verificata, in virtù delle (18) e (23). Per p e q positivi e quali si vogliono essa si verifica come segue. Si ha (96*, I) indicando con V il primo quadrante del piano (x, y) ,

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = \int_V 4x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-x^2-y^2} dx dy ,$$

onde (101, III e p. 485) col cambiamento di coordinate $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, indicando con U il dominio $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $\rho \geq 0$,

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = \int_U 4 \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta \rho^{2p+2q-1} e^{-\rho^2} d\rho d\theta ,$$

cioè (96*, I).

$$\begin{aligned} \Gamma(p) \Gamma(q) &= \int_0^{\pi/2} 2 \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \int_0^{+\infty} 2\rho^{2p+2q-1} e^{-\rho^2} d\rho = \\ &= B(p, q) \Gamma(p+q) . \end{aligned}$$

Le funzioni Γ e B , ricchissime delle più eleganti proprietà, sono inoltre di grande importanza, specialmente per la teoria analitica dei numeri. Noi però dobbiamo limitarci al rapidissimo cenno che ne abbiamo fatto.

107.* Integrali definiti impropri. — Siano $A \equiv (a', a'')$ un intervallo finito o infinito dell'asse x ed N un insieme costituito da un numero finito di punti di (a', a'') ; sia $f(x)$ una funzione (che per semplificare, vogliamo supporre reale) della variabile reale x , definita in ogni punto di A , eccettuati, al più, i punti di N . Se la funzione $f(x)$ è limitata e integrabile soltanto in ogni intervallo finito contenuto in $A - N$ o se l'intervallo A è infinito, il simbolo

$$(1) \quad \int_{a'}^{a''} f(x) dx,$$

chiamasi *integrale definito improprio* della $f(x)$. Anche quando la $f(x)$ non sia sommabile, è in taluni casi possibile attribuire un determinato significato numerico ad un integrale improprio, è ciò che ci proponiamo di mostrare. Indicheremo, sempre in questo articolo, con c_1, c_2, \dots, c_s i punti di N e con (p, q) ($q > p$) un intervallo finito contenuto in $A - N$. Se riesce, per ogni punto c_i ($i = 1, 2, \dots, s$)

$$\lim_{q \rightarrow c_i} \int_p^q f(x) dx \text{ (a destra)} = \lim_{p \rightarrow c_i} \int_p^q f(x) dx \text{ (a sinistra)} = 0,$$

e se inoltre, quando $a' = -\infty$,

$$\lim_{q \rightarrow -\infty} \int_p^q f(x) dx = 0,$$

e quando $a'' = +\infty$,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_p^q f(x) dx = 0,$$

l'integrale improprio (1) dicesi *convergente*, e si dice anche che la funzione $f(x)$ è *ad integrale convergente su* (a', a'') . Si dimostra immediatamente che:

Se l'integrale improprio (1) è convergente esistono determinati e finiti i limiti

$$\lim_{(p, q) \rightarrow (c_i, c_{i+1})} \int_p^q f(x) dx,$$

$$\lim_{q \rightarrow c_1} \int_p^q f(x) dx \text{ (a sinistra, con } p \text{ fisso),}$$

$$\lim_{p \rightarrow c_s} \int_p^q f(x) dx \text{ (a destra, con } q \text{ fisso),}$$

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} \int_p^q f(x) dx \text{ (se } a' = -\infty, \text{ con } q \text{ fisso),}$$

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \int_p^q f(x) dx \text{ (se } a'' = +\infty, \text{ con } p \text{ fisso).}$$

E, per definizione, si pone

$$\lim_{(p,q) \rightarrow (c_i, c_{i+1})} \int_p^q f(x) dx = \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x) dx,$$

$$\lim_{q \rightarrow c_1} \int_p^q f(x) dx \text{ (a sinistra)} = \int_p^{c_1} f(x) dx,$$

$$\lim_{p \rightarrow c_s} \int_p^q f(x) dx \text{ (a destra)} = \int_{c_s}^q f(x) dx,$$

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} \int_p^q f(x) dx = \int_{-\infty}^q f(x) dx, \quad \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_p^q f(x) dx = \int_p^{+\infty} f(x) dx.$$

Sia ora (a, b) ($b > a$) un qualsiasi intervallo contenuto in \mathcal{A} , finito o infinito e siano $c_h, c_{h+1}, \dots, c_{k-1}, c_k$ i punti di \mathcal{N} contenuti in (a, b) ; se la funzione $f(x)$ è su (a', a'') ad integrale convergente, chiamasi *integrale definito di $f(x)$ esteso all'intervallo (a, b)* e denotasi col solito simbolo, la somma:

$$\int_a^a f(x) dx + \int_a^{c_h} f(x) dx + \int_{c_h}^{c_{h+1}} f(x) dx + \dots + \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x) dx + \int_{c_k}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^b f(x) dx,$$

ove α è un qualsiasi punto (al finito) dell'intervallo (a, c_k) e β un qualsiasi punto (al finito) dell'intervallo (c_k, b) . Si pone poi

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Si ha evidentemente che: *Se la funzione $f(x)$ è, su (a', a'') , ad integrale convergente, posto*

$$F(x, y) = \int_x^y f(\xi) d\xi,$$

nel dominio del piano (x, y) determinato dalle limitazioni $a' \leq x \leq a''$, $a' \leq y \leq a''$, si viene a definire una funzione continua e limitata, identicamente nulla sulla diagonale $x = y$: e se x, x_2, \dots, x_n sono i più arbitrarii punti di (a', a'') si ha

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx + \int_{x_n}^{x_1} f(x) dx = 0.$$

Se $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ sono ad integrale convergente su (a', a'') , tale è pure una qualsiasi loro combinazione lineare $f(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)$, a coefficienti costanti, e si ha

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_i^{1, n} k_i \int_a^b f_i(x) dx,$$

qualunque sia l'intervallo (a, b) di (a', a'') .

Se la funzione $f(x)$ è sommabile su A essa è, su A medesimo, ad integrale convergente, ma ci domandiamo: *Esistono funzioni ad integrale convergente che non sono sommabili?* Risponderemo affermativamente con un esempio. Nell'intervallo $(0, +\infty)$ si consideri la funzione $f(x) = \cos x^2$, dico che l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx,$$

è convergente. Se p e q sono due quali si vogliono numeri positivi si ha, invero,

$$\int_p^q \cos x^2 dx = \int_{p^2}^{q^2} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy = \left[\frac{\text{sen } y}{\sqrt{y}} \right]_{p^2}^{q^2} + \frac{1}{2} \int_{p^2}^{q^2} \frac{\text{sen } y}{y^{3/2}} dy,$$

e quindi

$$\left| \int_p^q \cos x^2 dx \right| \leq \frac{2}{p} + \frac{1}{2} \int_{p^2}^{q^2} \frac{dy}{y^{3/2}} < \frac{3}{p},$$

e pertanto

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_p^q \cos x^2 dx = 0.$$

Ma la funzione $\cos x^2$ **non** è sommabile sull'intervallo $(0, +\infty)$.

Se n è un qualsiasi numero intero e positivo si ha invero

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{(2n+1)\pi/2}} |\cos x^2| dx &= \int_{\pi/2}^{(2n+1)\pi/2} \frac{|\cos y|}{\sqrt{y}} dy = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos y| \left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y+\pi}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{y+(n-1)\pi}} \right) dy > \\ &> \left(\frac{1}{\sqrt{3\pi/2}} + \frac{1}{\sqrt{5\pi/2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi/2}} \right) \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos y| dy, \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{(2n+1)\pi/2}} |\cos x^2| dx = +\infty.$$

Sono di immediata dimostrazione i seguenti teoremi:

I. Se il modulo di $f(x)$ è ad integrale convergente la funzione $f(x)$ è sommabile, e viceversa.

II. Se la $f(x)$ è ad integrale convergente e se: **a)** per ogni punto c , esistono un intervallo a destra e un intervallo a sinistra, in ciascuno dei quali la $f(x)$ è priva di valori di segno opposto, **b)** quando

(a', a'') non è finito, esiste un intervallo a sinistra di ∞ (un intervallo a destra) ove la $f(x)$ è priva di valori di segno opposto, la funzione $f(x)$ è sommabile su (a', a'') .

III. Se esiste una funzione $F(x)$ continua e limitata in (a', a'') , continua, eventualmente, tanto a destra che a sinistra di ∞ , e che abbia per derivata $f(x)$ in ogni punto (al finito) di $A - N$, la funzione $f(x)$ è ad integrale convergente e si ha

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

ove a e b sono due qualsivogliano punti di (a', a'') .

IV. Se (a', a'') è finito e se, per ogni punto c_i , si ha

$$\lim''_{x \rightarrow c_i} \{ |f(x)| |x - c_i|^{\alpha_i} \} = K,$$

con $\alpha_i < 1$ e K finito, la $f(x)$ è sommabile su (a', a'') .

V. Se, per uno c fra i punti c_1, c_2, \dots, c_s , esiste un numero $\alpha \geq 1$, tale da risultare

$$\lim'_{x \rightarrow c} \{ f(x) |x - c|^\alpha \} \text{ (a destra o a sinistra)} > 0,$$

oppure

$$\lim''_{x \rightarrow c} \{ f(x) |x - c|^\alpha \} \text{ (a destra o a sinistra)} < 0,$$

l'integrale di $f(x)$ non è convergente su ogni intervallo contenente c .

VI. Se $f(x)$ è limitata e integrabile in qualsiasi intervallo finito contenuto nell'intervallo $(p, +\infty)$ [nell'intervallo $(-\infty, q)$] e se riesce

$$\lim''_{x \rightarrow +\infty} \{ |f(x)| |x|^\alpha \} = K \quad \left(\lim''_{x \rightarrow -\infty} \{ |f(x)| |x|^\alpha \} = K \right),$$

con $\alpha > 1$ e K finito, la funzione $f(x)$ è sommabile su $(p, +\infty)$ [su $(-\infty, q)$].

VII. Se esiste un numero $\alpha \leq 1$, tale da risultare

$$\lim'_{x \rightarrow \pm \infty} \{ f(x) |x|^\alpha \} > 0,$$

oppure.

$$\lim''_{x \rightarrow \pm \infty} \left\{ f(x) |x|^{\alpha} \right\} < 0,$$

l'integrale di $f(x)$ non è convergente.

Sulla (2) si fonda il calcolo degli integrali impropri convergenti per decomposizione in somma. Per il calcolo di questi integrali sussistono altresì le regole di integrazione per sostituzione e per parti, secondo i seguenti teoremi di immediata dimostrazione:

VIII. *Il teor. II del n° prec. sussiste anche per le funzioni supposte, soltanto, ad integrale convergente, se gli insiemi \mathbf{M} e \mathbf{N} , in esso considerati, sono costituiti da un numero finito di punti.*

IX. *Nell'intervallo $\mathbf{A} \equiv (a, b)$, finito o no, le due funzioni $u(x)$ e $v(x)$ siano continue, eventualmente anche alla sinistra o alla destra dell'infinito e siano limitate; ed eccettuati, al più, i punti di un insieme $\mathbf{N} (< \mathbf{A})$ costituito da un numero finito di punti, siano sempre entrambe derivabili, con derivate $u'(x)$ e $v'(x)$ limitate e integrabili su ogni intervallo finito di (a, b) che non contenga alcun punto di \mathbf{N} . Si ha allora che se $u'(x)v(x)$ è su (a, b) ad integrale convergente lo è anche $u(x)v'(x)$ e sussiste la seguente formola di integrazione per parti*

$$\int_a^b uv' dx = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b u'v dx.$$

Per enunciare due utili criterii di convergenza per gli integrali impropri, ci limiteremo a considerare il caso — al quale ci si deve sempre ridurre — che la funzione $f(x)$ sia definita in ogni punto dell'intervallo (a, b) aperto a destra ($b > a$), potendo anche l'estremo b essere all'infinito, mentre la funzione è limitata e integrabile in ogni intervallo finito contenuto in (a, b) che escluda il punto b . Si hanno allora i due teoremi seguenti:

X. *La $f(x)$ è su (a, b) ad integrale convergente, se essa risulta il prodotto di due funzioni $g(x)$ e $h(x)$, tali che: α) esiste un numero positivo K per cui riesce, qualunque sia l'intervallo finito (p, q) contenuto nell'intervallo (a, b) aperto a destra,*

$$\left| \int_p^q g(x) dx \right| \leq K,$$

b) la funzione $h(x)$ è monotona in (a, b) ed inoltre

$$\lim_{x \rightarrow b} h(x) = 0.$$

In virtù del secondo teorema della media (103, II) si ha invero

$$(3) \quad \int_p^q f(x) dx = \int_p^q g(x) h(x) dx = h(p) \int_p^{\xi} g(x) dx + h(q) \int_{\xi}^q g(x) dx.$$

e quindi

$$\left| \int_p^q f(x) dx \right| \leq 2 |h(p)| K.$$

XI. La $f(x)$ è su (a, b) ad integrale convergente, se essa risulta il prodotto di due funzioni $g(x)$ e $h(x)$, tali che: a) l'integrale improprio

$$\int_a^b g(x) dx,$$

è convergente, b) la funzione $h(x)$ è monotona e limitata in (a, b) .

Sussiste invero la (3).

Dal teorema X segue senz'altro, per esempio, la convergenza degli integrali impropri

$$\int_1^{+\infty} \frac{\text{sen} x}{x^\alpha} dx, \quad \int_2^{+\infty} \frac{\text{sen} x}{(\log x)^\alpha} dx, \quad (\alpha > 0)$$

$$\int_1^{+\infty} \text{sen} x^\alpha dx = \int_1^{+\infty} (x^{\alpha-1} \text{sen} x^\alpha) \frac{dx}{x^{\alpha-1}}, \quad \int_1^{+\infty} \cos x^\alpha dx, \quad (\alpha > 1).$$

Convergenza uniforme degli integrali impropri. La funzione reale $f(x, Q) \equiv f(x, \xi, \eta, \dots, \zeta)$ sia definita per ogni punto Q di un certo insieme chiuso B dello spazio $(\xi, \eta, \dots, \zeta)$ a r dimensioni

e per ogni punto x dell'intervallo (a', a'') , finito o infinito, eccettuati, al più, i punti c_1, c_2, \dots, c_s , che, per semplicità, vogliamo inoltre supporre indipendenti da Q . Per ogni arbitrario punto Q di B , la funzione $f(x, Q)$ sia funzione della x limitata e integrabile su ogni intervallo finito (p, q) contenuto in $A - N$ e sia ad integrale convergente su (a', a'') . Vogliamo ora, dipendentemente dalla variabilità di Q in B , considerare la convergenza dell'integrale definito improprio

$$(4) \quad \int_{a'}^{a''} f(x, Q) dx.$$

Potremo sempre limitarci a supporre l'intervallo (a', a'') coincidente con l'intervallo $(-\infty, +\infty)$; poichè, ove così non fosse, ponendo $f(x, Q) \equiv 0$ all'esterno di (a', a'') , si avrebbe

$$\int_{a'}^{a''} f(x, Q) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, Q) dx.$$

Ebbene, l'integrale improprio

$$(5) \quad F(Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, Q) dx,$$

dicesi *uniformemente convergente* nell'insieme B , se si ha, *uniformemente* per Q variabile in B ,

$$\lim_{q \rightarrow c_i} \int_p^q f(x, Q) dx \text{ (a destra)} = \lim_{p \rightarrow c_i} \int_p^q f(x, Q) dx \text{ (a sinistra)} = 0,$$

$$\lim_{q \rightarrow -\infty} \int_p^q f(x, Q) dx = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_p^q f(x, Q) dx = 0.$$

Essendo n un numero intiero e positivo, il cui reciproco non superi i numeri $(c_2 - c_1)/2, (c_3 - c_2)/2, \dots, (c_s - c_{s-1})/2$, porremo

$$(6) \quad F_n(Q) = \int_{c_1 - n}^{c_1 - 1/n} f(x, Q) dx + \sum_{i=1}^{s-1} \int_{c_i + 1/n}^{c_{i+1} - 1/n} f(x, Q) dx + \int_{c_s + 1/n}^{c_s + n} f(x, Q) dx,$$

evidentemente, se l'integrale improprio (5) è uniformemente convergente, si avrà, *uniformemente in B*,

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(Q) = F(Q).$$

Sussistono i seguenti importanti teoremi:

XII. *Se, comunque si fissi un intervallo (p, q) di A - N, la funzione f(x, Q) è continua per x variabile in (p, q) e Q in B, mentre l'integrale improprio (5) è uniformemente convergente in B, esso è, in questo insieme, una funzione continua di Q.*

Ed invero, $F_n(Q)$ è (93, IV) funzione continua di Q e quindi, in virtù della (7) (69, I) tale è pure la funzione $F(Q)$.

XIII. *Se $Q(\xi, \eta, \dots, \zeta)$ è un punto di B, converremo di indicare con $B(Q)$ l'insieme dei punti $Q'(\xi', \eta', \dots, \zeta')$ di B, per le cui coordinate si ha simultaneamente $\xi' \leq \xi, \eta' \leq \eta, \dots, \zeta' \leq \zeta$. Ciò posto, se, nelle ipotesi del teorema precedente per la $f(x, Q)$ l'insieme B è inoltre supposto limitato, si ha*

$$(8) \quad \int_{B(Q)} d\xi' d\eta' \dots d\zeta' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, Q') dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{B(Q)} f(x, Q') d\xi' d\eta' \dots d\zeta',$$

ed inoltre, la funzione

$$f_1(x, Q) = \int_{B(Q)} f(x, Q') d\xi' d\eta' \dots d\zeta',$$

gode di tutte le proprietà supposte per la $f(x, Q)$.

È subito visto, che l'insieme $B(Q)$ è funzione continua di Q, e da ciò (93, VI) segue la continuità di $f_1(x, Q)$, per x variabile in un intervallo (p, q) e Q in B. Dimostriamo la uniforme convergenza in B dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x, Q) dx.$$

Se, ad esempio, per p e q in un intervallo I a destra di c_1 , indipendente da Q, si ha

$$\left| \int_p^q f(x, Q) dx \right| < \varepsilon / \text{est } B,$$

segue, (pag. 392), sempre in I ,

$$\begin{aligned} \left| \int_p^q f_1(x, Q) dx \right| &= \left| \int_p^q dx \int_{B(Q)} f(x, Q') d\xi' d\eta' \dots d\zeta' \right| = \\ &= \left| \int_{B(Q)} d\xi' d\eta' \dots d\zeta' \int_p^q f(x, Q') dx \right| < \frac{\varepsilon}{\text{est } B} \int_{B(Q)} d\xi' d\eta' \dots d\zeta' \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

D'altra parte è (pag. 392)

$$(9) \int_{B(Q)} F_n(Q') d\xi' d\eta' \dots d\zeta' = \int_{c_1 - n}^{c_1 - 1/n} f_1(x, Q) dx + \sum_{i=1, s-1}^{c_{i+1} - 1/n} \int_{o_i + 1/n}^{c_i + n} f_1(x, Q) dx + \int_{o_s + 1/n}^{c_s + n} f_1(x, Q) dx,$$

ed anche (93, II'')

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B(Q)} F_n(Q') d\xi' d\eta' \dots d\zeta' &= \int_{B(Q)} F(Q') d\xi' d\eta' \dots d\zeta' = \\ &= \int_{B(Q)} d\xi' d\eta' \dots d\zeta' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, Q') dx, \end{aligned}$$

onde, in forza della (9), segue la (8).

XIV. Se, comunque si fissi un intervallo (p, q) di $A - N$ la derivata parziale $f_{\xi}(x, Q)$ è finita e continua, per x variabile in (p, q) e Q in B , mentre l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x, Q) dx,$$

in un certo intorno circolare $C(Q)$, su B , del punto Q , è uniformemente convergente, si ha

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, Q) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x, Q) dx.$$

Lasciamo al lettore la cura di dimostrare il teorema. Ciò si ottiene immediatamente dai teoremi IV del n° 69 e V del n° 93, prendendo, di nuovo, in considerazione la funzione $F_n(Q)$.

Calcolo di taluni integrali impropri. 1°) L'integrazione per parti fornisce:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \left[\frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx,$$

si ha poi, con la sostituzione $x = 2y$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} 2 \left(\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right) \frac{dx}{x^2} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} y}{y} \right)^2 dy.$$

Si parta ora dalla formola [cfr. le (25) del n° 105]

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos ax dx = \frac{1}{1 + a^2},$$

dalla quale si trae, integrando successivamente due volte rispetto ad a , fra 0 e $a > 0$ (teor. XIII oppure teor. III del n° 96*)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{1 - \cos ax}{x^2} dx = a \operatorname{arctang} a - \frac{1}{2} \log(1 + a^2),$$

cioè, con la sostituzione $y = ax$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x/a)} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \operatorname{arctang} a - \frac{1}{2a} \log(1 + a^2),$$

od anche, se $b > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-bx} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \operatorname{arccot} b - \frac{b}{2} \log \left(1 + \frac{1}{b^2} \right),$$

e passando al limite per $b \rightarrow 0$ (teor. XII, oppure teorr. VII e III del n° 95*)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2°) **Integrali di Fresnel.** Ricordiamo (pag. 465 e pag. 541) che:

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

e pertanto, con la sostituzione $y = \tau\sqrt{x}$ ($x > 0$), si trova

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{x}},$$

ne segue, se p e q sono due arbitrarii numeri positivi,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^q dy \int_p^q e^{-xy^2} \operatorname{sen} x dx = \int_p^q \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx,$$

per il teor. XIII, oppure per il teor. III del n° 96*. Donde (per le (25) del n° 105)

$$\begin{aligned} \int_p^q \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\operatorname{sen} p \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-py^2} y^2}{1+y^4} dy + \operatorname{cosp} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-py^2}}{1+y^4} dy - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sen} q \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-qy^2} y^2}{1+y^4} dy - \operatorname{cos} q \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-qy^2}}{1+y^4} dy \right]. \end{aligned}$$

Ne segue, per essere (pag. 547)

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

e per il teor. XII, oppure per i teor. VII e III del n° 95*,

$$(10) \int_0^q \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\operatorname{sen} q \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-qy^2} y^2}{1+y^4} dy + \operatorname{cos} q \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-qy^2}}{1+y^4} dy \right].$$

Con un calcolo analogo si trova

$$(11) \int_0^q \frac{\operatorname{cos} x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\operatorname{cos} q \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-qy^2} y^2}{1+y^4} dy - \operatorname{sen} q \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-qy^2}}{1+y^4} dy \right].$$

La (10) e la (11) sono le formole di *Gilbert*, assai utili nella teoria della diffrazione. Osserviamo ora che:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-qy^2} y^2}{1+y^4} dy < \int_0^{+\infty} e^{-qy^2} y^2 dy = \frac{1}{4q} \sqrt{\frac{\pi}{q}},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-qy^2}}{1+y^4} dy < \int_0^{+\infty} e^{-qy^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{q}},$$

e quindi, dalle (10) e (11), si deduce

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{cos} x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Con la sostituzione $x = y^2$ se ne ricavano i valori degli integrali di *Fresnel* (nella teoria della diffrazione)

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} y^2 dy = \int_0^{+\infty} \operatorname{cos} y^2 dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

3°) **Formola di Frullani.** Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo $(0, +\infty)$, limitata e integrabile in ogni intervallo finito, tale che

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_p^q \frac{f(x)}{x} dx = 0, \quad (q > p).$$

Allora, se $f(x)$ è continua nel punto zero, oppure se

$$\lim_{q \rightarrow 0} \int_p^q \frac{f(x) - f(0)}{x} dx = 0, \quad (q > p > 0),$$

sussiste la seguente formola di *Frullani*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log \frac{b}{a},$$

ove a e b sono due arbitrarii numeri positivi. Lo studioso la dimostri.

Criterio di convergenza di Cauchy per le serie a termini positivi. Sia $f(x)$ una funzione ovunque definita e positiva nell'intervallo $(a, +\infty)$ e consideriamo il rettangoloide $R_f(a, +\infty)$ del piano (x, y) , relativo alla funzione $f(x)$, di base $(a, +\infty)$. Supposta $f(x)$ limitata e integrabile su ogni intervallo finito, condizione necessaria e sufficiente affinché il rettangoloide (illimitato e misurabile) $R_f(a, +\infty)$ abbia un'area finita è che la funzione $f(x)$ sia ad integrale convergente su $(a, +\infty)$, e se detto rettangoloide ha area finita, si ha

$$\text{area } R_f(a, +\infty) = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Ciò posto, si abbia una serie a termini positivi

$$(12) \quad U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots,$$

e sia

$$(13) \quad U_1, U_2, \dots, U_n, \dots,$$

una successione di domini misurabili del piano (x, y) , a due a due senza punti interni comuni, tali che sia

$$\text{area } U_i = k U_{i+j} \quad (i=1, 2, \dots),$$

ove k è un costante positiva e j un costante numero intero non negativo. Sussiste allora, evidentemente, il seguente **criterio di Cauchy**: Se qualunque sia n si ha $U_1 + U_2 + \dots + U_n < R_f(a, +\infty)$, dalla convergenza dell'integrale di f su $(a, +\infty)$ segue la convergenza della serie (12). Se $U_1 + U_2 + \dots + U_n > R_f(a, n)$, dalla non convergenza del detto integrale segue la divergenza della serie (12).

Per esempio, sia $U_n = 1/n^{1+\alpha}$ ($\alpha > 0$). Posto $f(x) = 1/x^{1+\alpha}$, detto U_n il rettangolo del piano (x, y) avente per base l'intervallo $(n, n+1)$ e per altezza $1/(n+1)^{1+\alpha}$, si ha area $U_i = U_{i+1}$ e $U_1 + U_2 + \dots + U_n < R_f(1, +\infty)$. Pertanto, dalla convergenza su $(1, +\infty)$ dell'integrale di $1/x^{1+\alpha}$ ($\alpha > 0$) segue la convergenza della serie

$$\frac{1}{1^{1+\alpha}} + \frac{1}{2^{1+\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{1+\alpha}} + \dots \quad (\alpha > 0).$$

Nello stesso modo, dalla convergenza su $(2, +\infty)$ dell'integrale di $1/[x(\log x)^{1+\alpha}]$ ($\alpha > 0$), segue la convergenza della serie

$$\frac{1}{2(\log 2)^{1+\alpha}} + \frac{1}{3(\log 3)^{1+\alpha}} + \dots + \frac{1}{n(\log n)^{1+\alpha}} + \dots \quad (\alpha > 0).$$

Dalla *non* convergenza degli integrali $1/x$, $1/(x \log x)$, su $(2, +\infty)$ segue la divergenza delle serie

$$\sum \frac{1}{n}, \quad \sum \frac{1}{n \log n}.$$

Ben evidentemente, facendo uso delle funzioni sommabili positive in più variabili, l'enunciato criterio di *Cauchy*, nella forma che qui gli abbiamo data, è suscettibile d'essere immediatamente esteso alle serie multiple a termini positivi. Facendo ricorso ad un' immediata generalizzazione degli esempi 8° e 9° del n° 94, si dimostra così, per esempio, l'assoluta convergenza della serie multipla d'ordine p :

$$\sum_{n_1 \dots n_p}^{1, \infty} \frac{1}{(\sqrt{n_1^2 + \dots + n_p^2})^{p+\alpha}} \quad (\alpha > 0).$$

§ 2. Calcolo numerico degli integrali definiti.

108. Preliminari. — Poichè l'integrale definito di una funzione reale integrabile non negativa, di una variabile reale, può sempre interpretarsi come l'area di un certo rettangoloide, invece di dire che si calcola un integrale definito, si usa di dire che si *fa una quadratura*, e ciò, per estensione, anche quando la funzione integranda assume valori di segno opposto. Si dice che un problema è *ridotto alle quadrature*, quando il calcolo della soluzione di esso è ridotto a quello di taluni integrali definiti. È assai diffusa l'opinione che una data formola non possa essere utilizzabile in pratica, se non quando essa contenga soltanto funzioni elementari, sottoposte alle più semplici operazioni algebriche. Tale opinione ha fatto, bene spesso, ripudiare dai pratici le soluzioni di quei problemi che sono ricondotte a talune quadrature *non* elementarmente eseguibili, e preferire, a soluzioni razionali cosiffatte, quelle di ignoto grado d'approssimazione ottenute con la faticosa aggiunta di ipotesi sovrabbondanti, ingiustificate e spesso ingiustificabili, purchè esse soluzioni riescano alla fine esprimibili da formole private da ogni segno di integrazione e non contenenti che funzioni elementari. Ora tale modo di vedere

non può trovare alcuna seria giustificazione. Abbiamo già visto invero (p. 379 e pp. 462-463) che l'integrale (anche doppio, triplo,...) di una qualsiasi funzione può sempre essere calcolato con quante cifre decimali esatte si vogliono, per modo che una formola che contenga degli integrali ha lo stesso pratico significato di una che non ne contenga e contenga, per esempio, il numero $\sqrt{2}$. Si potrà giustamente obiettare che il calcolo della prima, seguendo i metodi generali dei quali abbiamo discorso nelle pagine dianzi citate, riuscirà quasi sempre assai laborioso e richiederà un lunghissimo tempo; ma, appunto, in questo paragrafo, ci dedicheremo ad una diffusa e circostanziata esposizione di metodi di quadratura numerica, mediante i quali si può raggiungere il risultato, con quel grado d'approssimazione richiesto, in brevissimo tempo, con poca fatica e con tutta sicurezza, specialmente quando si faccia uso delle moderne *macchine calcolatrici* a tamburo girevole.

In tutto questo paragrafo considereremo soltanto funzioni reali di una variabile reale x , limitate e integrabili in tutto l'intervallo di loro definizione ed estenderemo gl'integrali ad intervalli finiti.

109. Prime utili limitazioni per un integrale da calcolare. — Prima di accingersi al calcolo numerico approssimato dell'integrale di una funzione $f(x)$ è consigliabile cercare di stabilire talune ristrette limitazioni per il valore dell'integrale stesso, le quali, mentre con i loro estremi già forniscono delle approssimazioni per esso, danno inoltre utili indicazioni di controllo all'inizio del calcolo d'approssimazione. le

Per lo più, a ciò si riesce con la regola seguente: Sia (a, b) l'intervallo al quale si vuole estendere l'integrale di $f(x)$ da calcolare; si ricercano due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, ciascuna di funzione primitiva ben nota in tutto (a, b) , per le quali si abbia sempre ivi

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),$$

allora, se $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ sono le funzioni primitive di $\varphi(x)$ e di $\psi(x)$, per l'integrale di $f(x)$ varrà evidentemente la limitazione:

$$\Phi(b) - \Phi(a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \Psi(b) - \Psi(a).$$

Esempi: Sia n un numero naturale, si ha, in $(0, \pi/2)$,

$$\sqrt[n]{\operatorname{sen} x} \cos x \leq \sqrt[n]{\operatorname{sen} x} \leq \operatorname{sen} x,$$

e quindi

$$\frac{n}{n+1} < \int_0^{\pi/2} \sqrt[n]{\operatorname{sen} x} dx < 1.$$

Si ha, in $(0, 1)$,

$$\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-x^4} \leq \sqrt{2} \sqrt{1-x^2},$$

e quindi

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \sqrt{1-x^4} dx < \sqrt{2} \frac{\pi}{4}.$$

110. Quadratura per serie. — Per la funzione $f(x)$, definita nell'intervallo (a, b) , si sia riusciti a costruire due successioni di funzioni

$$\begin{aligned} u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots, \\ \sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_n(x), \dots, \end{aligned}$$

tali che, per ogni punto x di (a, b) risulti

$$|f(x) - u_n(x)| \leq \sigma_n(x).$$

Supponiamo che le funzioni $u_i(x)$ ($i=1, 2, \dots$) siano dotate di funzioni primitive $U_i(x)$, **ben note** in tutto (a, b) e che le funzioni (non negative) $\sigma_i(x)$ vi abbiano gli estremi superiori ε_i . Si ha allora, comunque si prendano due punti α e β di (a, b) ,

$$\begin{aligned} \left| U_n(\beta) - U_n(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |u_n(x) - f(x)| dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} \sigma_n(x) dx \leq \\ &\leq (\beta - \alpha) \varepsilon_n, \end{aligned}$$

e quindi: *Il numero ben noto $U_n(\beta) - U_n(\alpha)$ fornisce un'approssimazione del valore dell'integrale di $f(x)$ esteso all'intervallo (α, β) , con un errore minore di $(\beta - \alpha)\varepsilon_n$.*

Supponiamo inoltre che sia sempre, in (a, b) , $0 \leq f(x) - u_n(x)$, allora: *I numeri ben noti $U_n(\beta) - U_n(\alpha)$ e $U_n(\beta) - U_n(\alpha) + (\beta - \alpha)\varepsilon_n$,*

forniscono due valori approssimati, il primo per difetto, ed il secondo per eccesso.

Se, infine, supponiamo ancora che, uniformemente in (a, b) , riesca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = 0,$$

cioè che $\lim \varepsilon_n (n \rightarrow \infty) = 0$, possiamo dire che: *Le due successioni di numeri ben noti*

$$U_1(\beta) - U_1(\alpha), \dots, U_n(\beta) - U_n(\alpha), \dots, \\ U_1(\beta) - U_1(\alpha) + \varepsilon_1(\beta - \alpha), \dots, U_n(\beta) - U_n(\alpha) + \varepsilon_n(\beta - \alpha), \dots,$$

forniscono il calcolo dell'integrale di $f(x)$ esteso all'intervallo (a, β) . I numeri della prima successione sono approssimati per difetto.

Su tali considerazioni (cfr. il teor. II'' del n° 93) è fondato il metodo di quadratura per serie: Se, in tutto (a, b) , risulta

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots,$$

e la serie è uniformemente convergente, dettone $R_n(x)$ il resto, e detto ε_n l'estremo superiore di $|R_n(x)|$ in (a, b) , supposte le funzioni $f_n(x)$ dotate di funzioni primitive $F_n(x)$ ben note in tutto (a, b) per ogni intervallo (a, β) di (a, b) , i numeri ben noti

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n [F_i(\beta) - F_i(\alpha)],$$

rappresentano valori approssimati (per difetto o per eccesso) dell'integrale di $f(x)$ esteso all'intervallo (a, β) , con un errore minore di $(\beta - \alpha)\varepsilon_n$, infinitesimo per n divergente. Se, in tutto (a, b) , le funzioni della serie sono non negative, il numero (1) è un valore approssimato per difetto. Se, in tutto (a, b) , le funzioni $f_{2i-1}(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) sono positive e le rimanenti sono negative, mentre le funzioni $|f_i(x)| - |f_{i+1}(x)|$ ($i = 1, 2, \dots$) sono positive, i numeri

$$\sum_{i=1}^{2n} [F_i(\beta) - F_i(\alpha)],$$

sono valori approssimati per difetto, ed i numeri

$$\sum_{i=1}^{2n-1} [F_i(\beta) - F_i(\alpha)],$$

lo sono per eccesso, mentre il numero (1) è, in ogni caso, un valore approssimato con un errore minore di $|F_{n+1}(\beta) - F_{n+1}(\alpha)|$.

Esempi: Se $|k| < 1$, la somma dei primi n termini della serie

$$\frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} + \dots \right\},$$

è (p. 545) un valore approssimato per difetto dell'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}},$$

con un errore dato da

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} + \frac{\pi}{2} \left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right]^2 k^{2n+2} + \dots < \frac{\pi}{2} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} (1 + k^2 + \dots) = \\ = \frac{\pi}{2} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{1 - k^{2n}} < \text{(p. 540)} < \frac{1}{2n} \frac{k^{2n}}{1 - k^{2n}}. \end{aligned}$$

La somma dei primi n termini della serie

$$1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)} + \dots,$$

è (p. 545) un valore approssimato (per difetto se n è pari, per eccesso se n è dispari) dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx,$$

con un errore minore di $1/[(2n+1)!(2n+1)]$.

III. Quadratura delle funzioni razionali. — Mediante calcoli razionali l'integrale definito di una funzione razionale si può ricondurre a quello di una frazione razionale propria $f(x)/F(x)$. Dato l'intervallo (a, b) — supposto, naturalmente, privo di ogni radice dell'equazione $F(x) = 0$ — si abbia dunque da calcolare numericamente l'integrale definito

$$I = \int_a^b \frac{f(x)}{F(x)} dx,$$

ove $f(x)$ e $F(x)$ sono polinomi in x ed è grado $f(x) < \text{grado } F(x)$. Al n° 105, a proposito dell'integrazione indefinita delle frazioni razionali,

abbiamo visto che, mediante calcoli razionali, si possono determinare quattro polinomi $X(x)$, $Y(x)$, $P(x)$, $Q(x)$, tali che, in (a, b) , sussista la decomposizione

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{d}{dx} \frac{Y(x)}{Q(x)} + \frac{X(x)}{P(x)},$$

ne segue

$$(1) \quad I = \frac{Y(b)}{Q(b)} - \frac{Y(a)}{Q(a)} + \int_a^b \frac{X(x)}{P(x)} dx.$$

Il polinomio $P(x)$ — a radici semplici — è suscettibile di una decomposizione in prodotto del tipo

$$P(x) = \Pi_r (x - \alpha_r) \Pi_s [(x - \beta_s)^2 + \gamma_s^2],$$

non potendo però, in generale, che avere delle approssimazioni α'_r , β'_s , γ'_s delle quantità α_r , β_s , γ_s . Posto

$$P'(x) = \Pi_r (x - \alpha'_r) \Pi_s [(x - \beta'_s)^2 + \gamma_s'^2],$$

si ha

$$\lim_{(\dots, \alpha'_r, \dots, \beta'_s, \gamma'_s, \dots) \rightarrow (\dots, \alpha_r, \dots, \beta_s, \gamma_s, \dots)} P'(x) = P(x),$$

uniformemente in (a, b) , ed inoltre (p. 525)

$$(2) \quad \int_a^b \frac{X(x)}{P'(x)} dx = \sum_r A'_r \log \left| \frac{b - \alpha'_r}{a - \alpha'_r} \right| + \sum_s B'_s \log \frac{(b - \beta'_s)^2 + \gamma_s'^2}{(a - \beta'_s)^2 + \gamma_s'^2} - 2 \sum_s C'_s \left(\text{arc tang} \frac{b - \beta'_s}{\gamma'_s} - \text{arc tang} \frac{a - \beta'_s}{\gamma'_s} \right),$$

ove la quantità A'_r , B'_s , C'_s si calcolano razionalmente per mezzo delle α'_r , β'_s , γ'_s . Siano, in (a, b) , m il minimo di $|P(x)|$ e M il massimo di $|X(x)|$, si ha

$$\left| \int_a^b \frac{X(x)}{P(x)} dx - \int_a^b \frac{X(x)}{P'(x)} dx \right| \leq \frac{M}{m} \int_a^b \left| 1 - \frac{P(x)}{P'(x)} \right| dx,$$

basta dunque determinare tali valori approssimati α'_r , β'_s , γ'_s di α_r ,

β_s, γ_s , da risultare, in (a, b) , $|1 - P(x)/P'(x)| < (m\varepsilon)/[M(b-a)]$, perchè si abbia

$$\left| \int_a^b \frac{X(x)}{P(x)} dx - \int_a^b \frac{X(x)}{P'(x)} dx \right| < \varepsilon.$$

Dopo ciò, se si calcola il secondo membro delle (2) con un errore minore di ε_1 e la differenza $Y(b)/Q(b) - Y(a)/Q(a)$ con un errore minore di ε_2 , la formola (1) darà il valore dell'integrale I con un errore minore di $\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Ben si vede quanto sia faticosa, in generale, la quadratura delle funzioni razionali condotta col metodo ora esposto! In singoli casi particolari si possono trovare fortissime semplificazioni, specialmente quando la quantità $\sigma_r, \beta_s, \gamma_s$ sono razionali; ma per lo più meglio conviene saggiare i metodi di quadratura approssimata che andiamo a trattare.

112. Quadratura per decomposizione in prodotto. — Le funzioni $u(x)$ e $v(x)$ siano uniformemente lipschitziane nell'intervallo (a, b) , e si abbia, A e B essendo due certe costanti positive,

(1) $|u(x') - u(x'')| \leq A|x' - x''|$, $|v(x') - v(x'')| \leq B|x' - x''|$,
quali si siano i punti x' e x'' di (a, b) . Sussiste allora la notevole proposizione:

Se α e $\alpha + h$, con $h > 0$, sono due punti qualsivogliano di (a, b) , posto

$$\delta(h) = \int_{\alpha}^{\alpha+h} u(x)v(x) dx - \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\alpha+h} u(x) dx \int_{\alpha}^{\alpha+h} v(x) dx,$$

si ha

$$|\delta(h)| \leq AB \frac{h^3}{12}.$$

Derivando $\delta(h)$ si trova invero

$$(2) \quad \delta'(h) = \left[u(\alpha+h) - \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\alpha+h} u(x) dx \right] \left[v(\alpha+h) - \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\alpha+h} v(x) dx \right];$$

d'altra parte

$$u(\alpha + h) - \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\alpha+h} u(x) dx = \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\alpha+h} [u(\alpha + h) - u(x)] dx,$$

e quindi, tenendo conto delle (1),

$$\begin{aligned} \left| u(\alpha + h) - \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\alpha+h} u(x) dx \right| &\leq \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\alpha+h} |u(\alpha + h) - u(x)| dx \leq \\ &\leq \frac{A}{h} \int_{\alpha}^{\alpha+h} (\alpha + h - x) dx = \frac{Ah}{2}, \end{aligned}$$

allo stesso modo si trova

$$\left| v(\alpha + h) - \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\alpha+h} v(x) dx \right| \leq \frac{Bh}{2},$$

onde infine, dalla (2), si deduce

$$|\delta'(h)| \leq AB \frac{h^2}{4}.$$

Ma osserviamo che $\lim_{h \rightarrow 0} \delta(h) = 0$, e quindi si ha

$$\begin{aligned} \delta(h) &= \int_0^h \delta'(s) ds, \\ |\delta(h)| &\leq \frac{AB}{4} \int_0^h s^2 ds = AB \frac{h^3}{12}, \end{aligned}$$

come appunto volevasi dimostrare.

Dal teorema ora stabilito scaturisce un buon metodo (osservato ed utilizzato da *Signorini*) di calcolo approssimato dell'integrale definito di una funzione uniformemente lipschitziana $f(x)$, esteso a un intervallo (a, b) , nel quale valga la decomposizione in prodotto: $f(x) = u(x)v(x)$, ove le funzioni $u(x)$ e $v(x)$ soddisfano alle (1) e possiedono, ciascuna, note funzioni primitive $U(x)$ e $V(x)$.

Si divida l'intervallo (a, b) in n parti eguali, ponendo $h_n = (b-a)/n$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h_n, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)h_n$, $x_n = b$. Si ha:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_i^{1, n} \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1} + h_n} u(x) v(x) dx,$$

e quindi: *Prendendo per I il valore*

$$(3) I' = \sum_i^{1, n} \frac{1}{h_n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} v(x) dx = \frac{n}{b-a} \sum_i^{1, n} [U(x_i) - U(x_{i-1})][V(x_i) - V(x_{i-1})],$$

si commette un errore dato da

$$I - I' = \sum_i^{1, n} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) v(x) dx - \frac{1}{h_n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} v(x) dx \right),$$

e si ha:

$$\begin{aligned} |I - I'| &\leq \sum_i^{1, n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) v(x) dx - \frac{1}{h_n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} v(x) dx \right| \leq \\ &\leq \sum_i^{1, n} AB \frac{h_n^3}{12} = \frac{AB}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2}. \end{aligned}$$

Così, per esempio, se si deve calcolare l'integrale

$$(4) \int_1^2 \frac{\text{sen } x}{x} dx,$$

si porrà $u(x) = x \text{ sen } x$, $v(x) = 1/x^2$, e si potrà allora fare $A=3$, $B=2$, $U(x) = \text{sen } x - x \text{ cos } x$, $V(x) = -1/x$, e la formola (3), per $a=1$ e $b=2$, darà l'integrale (4) con un errore minore di $1/2n^2$. Pertanto, per $n=10$, la (3), calcolata con un errore minore di $1/10^3$ darà il valore dell'integrale (4) con le cifre esatte fino a quella inclusa dei centesimi.

113. Interpolazione ed estrapolazione razionale intera. — I metodi di quadratura numerica che in pratica possono — per lo più — fornire il risultato con la maggiore rapidità possibile si hanno fa-

cendo uso della *interpolazione ed estrapolazione razionale intiera* della quale vogliamo, anzitutto, parlare in questo articolo.

Conviene introdurre talune locuzioni che ci semplificheranno il discorso e che sono di uso frequente. Le due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono entrambe definite nell'intervallo (a, b) , e ivi, inoltre, le supponiamo dotate di quelle derivate, finite, delle quali ci occorrerà di dover parlare. Sia c un punto di (a, b) , diremo che le due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ o le due curve $y = f(x)$ e $y = \varphi(x)$ hanno nel punto di ascissa c un **contatto d'ordine** n se la differenza $f(x) - \varphi(x)$ è nel punto c , su (a, b) , infinitesima precisamente d'ordine $n+1$ rispetto all'infinitesimo $x - c$. Si ha che (48, V):

Condizione necessaria e sufficiente affinché le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ abbiano nel punto c un contatto d'ordine n è che, per le funzioni e per le successive loro derivate, sussistano le relazioni

$$f(c) = \varphi(c), \quad f'(c) = \varphi'(c), \quad f''(c) = \varphi''(c), \dots, \quad f^{(n)}(c) = \varphi^{(n)}(c), \\ f^{(n+1)}(c) \neq \varphi^{(n+1)}(c).$$

Pertanto: Se le due curve $y = f(x)$ e $y = \varphi(x)$ hanno, nel punto d'ascissa c , un contatto d'ordine *zero*, esse avranno in comune il punto $[c, f(c) = \varphi(c)]$ ed ivi le tangenti distinte. Se le due curve hanno nel punto d'ascissa c un contatto del prim'ordine (o d'ordine *uno*) esse avranno in comune il punto $[c, f(c) = \varphi(c)]$ ed ivi anche le tangenti.

Ciò posto, supponiamo che di una certa funzione, per la quale sussiste la possibilità — per lo meno teorica — di essere definita nell'intero intervallo (a, b) , si conosca, soltanto, che per certi r punti x_1, x_2, \dots, x_r , ($x_1 < x_2 < \dots < x_r$) di quell'intervallo si ha

$$(1) \quad f(x_h) = f_{h0}, \quad f'(x_h) = f_{h1}, \dots, \quad f^{(n_h)}(x_h) = f_{hn_h}, \\ (h = 1, 2, \dots, r),$$

ove le quantità f_{hk} ($h = 1, 2, \dots, r$; $k = 1, 2, \dots, n_h$) sono **ben note**. Sia $[\varphi]$ una famiglia di funzioni definite nell'intervallo (a, b) e ben note, ciascuna, in ogni punto di quell'intervallo e supponiamo che, *comunque si prendano i punti x_1, x_2, \dots, x_r ($x_1 < x_2 < \dots < x_r$) di (a, b) , i numeri intieri e non negativi n_1, n_2, \dots, n_r , e infine le quantità f_{hk} , esista sempre almeno una funzione $\varphi(x)$ della famiglia $[\varphi]$ che verifichi le condizioni*

$$(2) \quad \varphi(x_h) = f_{h0}, \quad \varphi'(x_h) = f_{h1}, \dots, \quad \varphi^{(n_h)}(x_h) = f_{hn_h},$$

$$(h = 1, 2, \dots, r).$$

Esisterà allora, sempre, almeno una funzione $\varphi(x)$ della famiglia $[\varphi]$ che nei punti x_1, x_2, \dots, x_r ha con la funzione $f(x)$ contatti, rispettivamente, degli ordini n_1, n_2, \dots, n_r , almeno. Orbene, se per un punto x *contenuto* nell'intervallo (x_1, x_r) si dà alla $f(x)$ il valore che vi assume $\varphi(x)$, si dice che la funzione $f(x)$ è stata calcolata nel punto x *per interpolazione sulla famiglia* $[\varphi]$, se per un punto x *non contenuto* nell'intervallo (x_1, x_r) si dà alla $f(x)$ il valore che vi assume $\varphi(x)$ si dice che la funzione $f(x)$ è stata calcolata nel punto x *per estrapolazione sulla famiglia* $[\varphi]$. La speciale funzione $\varphi(x)$ considerata si dice la *funzione interpolatrice* o *estrapolatrice*.

Se la famiglia $[\varphi]$ è quella descritta dalla funzione del tipo

$$\sum_{\mu=0}^n (a_{\mu} \cos \mu x + b_{\mu} \sin \mu x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

le costanti a_{μ} e b_{μ} essendo suscettibili di prendere i più arbitrari valori reali, si ha la *interpolazione* e la *estrapolazione trigonometrica*, della quale ci occuperemo nel secondo volume di queste lezioni.

Se la famiglia $[\varphi]$ è quella descritta dai polinomiali razionali interi nella x , si ha l'*interpolazione* e l'*estrapolazione razionale intera* della quale vogliamo ora occuparci. Denoteremo con $P(x)$ il più generale polinomio razionale intero nella variabile x , e con la notazione $^{(n)}P(x)$ significheremo, quando occorra, che il polinomio $P(x)$ è di grado n .

Se il prescelto polinomio interpolatore od estrapolatore è di grado n , la compiuta interpolazione o estrapolazione razionale intera si dice, essa stessa, di grado n (*lineare*, per $n = 1$; *quadratica*, per $n = 2$; *cubica*, per $n = 3, \dots$).

Per potere interpolare od estrapolare sulla famiglia dei polinomiali razionali interi, bisogna anzitutto assicurare se, comunque si assegnino i punti x_1, x_2, \dots, x_r ($x_1 < x_2 < \dots < x_r$), i numeri interi non negativi n_1, n_2, \dots, n_r e le quantità f_{hk} esistono polinomiali verificanti le condizioni:

$$(3) \quad P(x_h) = f_{h0}, \quad P'(x_h) = f_{h1}, \dots, \quad P^{(n_h)}(x_h) = f_{hn_h},$$

$$(h = 1, 2, \dots, r).$$

Al n° 47 abbiamo visto che, posto

$$P_1(x) = f_{10} + f_{11} \frac{x - x_1}{1!} + f_{12} \frac{(x - x_1)^2}{2!} + \dots + f_{1n_1} \frac{(x - x_1)^{n_1}}{n_1!},$$

si ha \mathcal{U} polinomio di grado n_1 verificante le (3) per $h = 1$. Ogni polinomio $P(x)$ per il quale sussistono *tutte* le (3) è tale che la differenza $P(x) - P_1(x)$ è infinitesima in x_1 almeno d'ordine $n_1 + 1$, e $P(x)$ sarà perciò della forma

$$(4) \quad P(x) = P_1(x) + Q_1(x)(x - x_1)^{n_1+1},$$

ove $Q_1(x)$ è un polinomio; e viceversa, è subito visto che ogni polinomio $P(x)$ della forma (4) verifica la (3) per $h = 1$. Dovendo $P(x)$ verificare le (3) anche per $h = 2$ si deve avere

$$P_1(x_2) + Q_1(x_2)(x_2 - x_1)^{n_1+1} = f_{20}$$

$$P_1'(x_2) + (n_1 + 1) Q_1(x_2)(x_2 - x_1)^{n_1} + Q_1'(x_2)(x_2 - x_1)^{n_1+1} = f_{21}$$

.

$$P_1^{(n_2)}(x_2) + \dots + Q_1^{(n_2)}(x_2)(x_2 - x_1)^{n_1+1} = f_{2n_2},$$

e pertanto, nel punto x_2 , risultano assegnati i valori, per il polinomio $Q_1(x)$ e per le sue successive derivate fino a quella inclusa d'ordine n_2 . Detto $P_2(x)$ \mathcal{U} polinomio di grado n_2 verificante queste condizioni, si avrà

$$Q_1(x) = {}^{(n_2)}P_2(x) + Q_2(x)(x - x_2)^{n_2+1},$$

significando $Q_2(x)$ un altro polinomio, e quindi

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x)(x - x_1)^{n_1+1} + Q_2(x)(x - x_1)^{n_1+1}(x - x_2)^{n_2+1}.$$

Come precedentemente, si vede che le (3), per $h = 3$, assegnano al polinomio $Q_2(x)$, nel punto x_3 , i valori di esso e delle sue successive derivate fino a quella inclusa d'ordine n_3 , e si avrà

$$Q_2(x) = {}^{(n_3)}P_3(x) + Q_3(x)(x - x_3)^{n_3+1},$$

ove il polinomio $P_3(x)$ riesce ben determinato. Donde, necessariamente,

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x)(x - x_1)^{n_1+1} + P_3(x)(x - x_1)^{n_1+1}(x - x_2)^{n_2+1} +$$

$$+ Q_3(x)(x - x_1)^{n_1+1}(x - x_2)^{n_2+1}(x - x_3)^{n_3+1}.$$

E così via. Si ha dunque il teorema:

Esistono polinomi $P(x)$ verificanti le $n_1 + n_2 + \dots + n_r + r$ condizioni (3), essi sono tutti contenuti nella seguente formula:

$$(5) \quad P(x) = \binom{n_1}{1} P_1(x) + \binom{n_2}{2} P_2(x)(x-x_1)^{n_1+1} + \binom{n_3}{3} P_3(x)(x-x_1)^{n_1+1}(x-x_2)^{n_2+1} + \dots \\ \dots + \binom{n_r}{r} P_r(x)(x-x_1)^{n_1+1}(x-x_2)^{n_2+1} \dots (x-x_{r-1})^{n_{r-1}+1} + \\ + Q(x)(x-x_1)^{n_1+1}(x-x_2)^{n_2+1} \dots (x-x_{r-1})^{n_{r-1}+1}(x-x_r)^{n_r},$$

ove i polinomi $\binom{n_1}{1} P_1(x)$, $\binom{n_2}{2} P_2(x)$, ..., $\binom{n_r}{r} P_r(x)$ sono tutti ben determinati e il polinomio $Q(x)$ rimane affatto arbitrario. Di conseguenza, esiste uno ed un solo polinomio di grado $n_1 + n_2 + \dots + n_r + r - 1$ verificanti le (3) esso si ottiene dalla (5) ponendovi $Q(x) \equiv 0$.

Il polinomio $P_1(x)$ dipende da x_1 e dai numeri $f_{10}, f_{11}, \dots, f_{1n_1}$; il polinomio $P_2(x)$ da x_1 , da x_2 e dai numeri $f_{10}, f_{11}, \dots, f_{1n_1}, f_{20}, f_{21}, \dots, f_{2n_2}$; il polinomio $P_r(x)$ da x_1, x_2, \dots, x_r e dai numeri f_{hk} ($h=1, 2, \dots, r, k=1, 2, \dots, n_h$). Si abbia, in particolare, $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 0$, e poniamo $f_{h0} = f_h$, i polinomi $P_1(x), P_2(x), \dots, P_r(x)$ riescono allora di grado zero, cioè indipendenti dalla x , e, come subito si riconosce, si ha

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} P_1 &= f_1, \quad P_2 = \frac{f_1}{x_2 - x_1} + \frac{f_2}{x_1 - x_2}, \\ P_3 &= \frac{f_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{f_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, \\ &\dots \\ P_r &= \frac{f_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_r)} + \\ &+ \frac{f_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_r)} + \dots + \frac{f_r}{(x_r - x_1)(x_r - x_2) \dots (x_r - x_{r-1})}. \end{aligned} \right.$$

Sostituendo in (5) si ottiene per $P(x)$ la seguente ben nota espressione di **Lagrange**:

$$(6) \quad P(x) = \sum_i^{1,r} f_i \frac{(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_r)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_r)}.$$

Per le pratiche applicazioni numeriche è utile osservare quanto segue: Nel caso particolare che i punti x_1, x_2, \dots, x_r siano equidistanti, che si abbia cioè $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_r - x_{r-1} = l$, i numeri P_1, P_2, \dots, P_r si esprimono assai semplicemente mediante le differenze

e la formola di **Taylor** del n° 47 ci dice che, così facendo, si commette un errore dato da:

$$\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \text{ (resto di } \mathbf{Lagrange}),$$

ove ξ è un certo punto intermedio fra x_0 e x . Ebbene noi vedremo che un'espressione del tutto analoga sussiste per l'errore commesso nei più generali calcoli di interpolazione o di estrapolazione razionale intiera. Dobbiamo premettere il seguente fondamentale

Lemma. *Se la funzione $f(x)$, nei punti x_1, x_2, \dots, x_r ($x_1 < x_2 < \dots < x_r$) ha con lo zero (con l'asse x) contatti degli ordini, rispettivamente, non inferiori ai numeri n_1, n_2, \dots, n_r ; posto $n_1 + n_2 + \dots + n_r + r = n$, ciascuna successiva derivata dalla $f(x)$, fino a quella inclusa d'ordine $n - 1$, si annulla in (almeno) un punto **interno** all'intervallo (x_1, x_r) .*

Diciamo p il minimo fra i numeri n_1, n_2, \dots, n_r e $p + q$ il massimo. La funzione $f(x)$ e (almeno) le sue prime p derivate si annullano in ognuno dei punti x_1, x_2, \dots, x_r . Sia $r_1 (\leq r)$ il numero di punti, fra questi, in ciascuno dei quali si annulla anche la derivata $(p + 1)^{\text{ma}}$ della f ; sia $r_2 (\leq r_1)$ il numero di punti, fra questi ultimi, in ciascuno dei quali si annulla anche la derivata $(p + 2)^{\text{ma}}$ della f, \dots , e sia $r_q (\leq r_{q-1})$ il numero di punti, fra questi ultimi, in ciascuno dei quali si annulla anche la derivata $(p + q)^{\text{ma}}$ della f . Si avrà evidentemente $pr + r_1 + r_2 + \dots + r_q = n_1 + n_2 + \dots + n_r = n - r$.

La derivata prima $f'(x)$ si annulla in x_1, x_2, \dots, x_r e (di conseguenza per il teor. di **Rolle**) in un punto x'_i interno a ciascuno degli intervalli (x_i, x_{i+1}) ($i = 1, 2, \dots, r - 1$). Essa si annulla dunque nei distinti $2r - 1$ punti di (x_1, x_r) :

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, \dots, x_{r-1}, x'_{r-1}, x_r.$$

La derivata seconda $f''(x)$ si annulla in x_1, x_2, \dots, x_r e (teor. di **Rolle**) in un punto interno di ciascuno dei $2r - 2$ intervalli (x_1, x'_1) $(x'_1, x_2), \dots, (x_{r-1}, x'_{r-1}), (x'_{r-1}, x_r)$, essa si annulla dunque in $3r - 2$ punti di (x_1, x_r) ; ..., la derivata $f^{(p)}(x)$ si annulla in $(p + 1)r - p$ punti di (x_1, x_r) , dei quali r sono in x_1, x_2, \dots, x_r .

Ne segue che, in (x_1, x_r) ,

$f^{(p+1)}(x)$ si annulla in $(p + 1)r - p - 1 + r_1$ punti,

$f^{(p+2)}(x)$ si annulla in $(p+1)r - p - 2 + r_1 + r_2$ punti,
 $f^{(p+q)}(x)$ si annulla in $(p+1)r - p - q + r_1 + r_2 + \dots + r_q$ punti.

Ma, $(p+1)r - p - q + r_1 + r_2 + \dots + r_q = n - p - q$ e si ha, successivamente, intendendo di parlare di punti *interni* a (x_1, x_r) ,

$f^{(p+q+1)}(x)$ si annulla in $n - p - q - 1$ punti,
 $f^{(p+q+2)}(x)$ si annulla in $n - p - q - 2$ punti,
 $f^{(n-1)}(x)$ si annulla in un punto.

Con ciò il lemma è dimostrato e siamo in grado di stabilire immediatamente il **teorema fondamentale per la interpolazione ed estrapolazione razionale intera**:

I. La funzione $f(x)$ sia suscettibile d'essere definita nell'intero intervallo (a, b) e siano x_1, x_2, \dots, x_r ($x_1 < x_2 < \dots < x_r$) punti di (a, b) arbitrariamente fissati. Per un qualunque punto di (a, b) denoteremo con $A(x)$ il minimo intervallo (chiuso) contenente i punti x_1, x_2, \dots, x_r, x . Se $P(x)$ è il polinomio interpolatore od estrapolatore, di grado $n_1 + n_2 + \dots + n_r + r - 1 = n - 1$, che, nei punti x_1, x_2, \dots, x_r , ha con $f(x)$ contatti, rispettivamente, degli ordini n_1, n_2, \dots, n_r , almeno, si ha

$$(7) \quad f(x) - P(x) = (x - x_1)^{n_1+1} (x - x_2)^{n_2+1} \dots (x - x_r)^{n_r+1} + 1 \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_r + r,$$

ove ξ è un certo punto interno all'intervallo $A(x)$.

Per ogni punto x di (a, b) , diverso dai punti x_1, x_2, \dots, x_r , poniamo

$$\rho(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_1)^{n_1+1} (x - x_2)^{n_2+1} \dots (x - x_r)^{n_r+1}},$$

e poniamo

$$\rho(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i} \rho(x) \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Si viene così a definire in (a, b) una funzione continua $\rho(x)$ per la quale si ha, identicamente,

$$f(x) - P(x) = (x - x_1)^{n_1+1} (x - x_2)^{n_2+1} \dots (x - x_r)^{n_r+1} \rho(x).$$

Fissato ora, in (a, b) , arbitrariamente, il punto x distinto dai punti x_1, x_2, \dots, x_r , per u variabile in (a, b) si ponga

$$F(u) = f(u) - P(u) - (u-x_1)^{n_1+1} (u-x_2)^{n_2+1} \dots (u-x_r)^{n_r+1} \rho(x).$$

$\perp n_1, n_2, \dots, n_r$

La funzione $F(u)$, nei punti x_1, x_2, \dots, x_r, x , ha, con lo zero, contatti, rispettivamente, degli ordini n_1, n_2, \dots, n_r , zero, almeno; esiste pertanto (in forza del lemma) un punto ξ interno all'intervallo $A(x)$, per il quale è $F^{(n)}(\xi) = 0$, ma

$$F^{(n)}(u) = f^{(n)}(u) - n! \rho(x),$$

onde segue, come appunto asserisce la (7), $\rho(x) = f^{(n)}(\xi)/n!$.

La formola (7) contiene evidentemente, come particolarissimo caso, la formola di **Taylor**, con il resto nella forma di **Lagrange**, data al n° 47. Dal teorema dimostrato si deduce

II. Sia $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r + r$. Se K_n è un numero positivo non superato, in tutto (a, b) , dal modulo della derivata n^{ma} della $f(x)$, interpolando od estrapolando la $f(x)$ con il polinomio di grado $n - 1$ avente con la $f(x)$, nei punti x_1, x_2, \dots, x_r , contatti rispettivamente degli ordini n_1, n_2, \dots, n_r , almeno, si commette un errore il cui modulo non supera mai il termine

$$(8) \quad K_n \frac{|x-x_1|^{n_1+1} |x-x_2|^{n_2+1} \dots |x-x_r|^{n_r+1}}{(n_1 + n_2 + \dots + n_r + r)!}.$$

Osservazioni. 1ª) Per assegnare il termine (8) non occorre precisamente conoscere, in ogni punto di (a, b) , la derivata di $f(x)$ d'ordine n , ma basta soltanto essere nella possibilità di determinare, con le considerazioni le più varie, un numero positivo K_n che non sia mai superato dal modulo di quella derivata.

2ª) Nel caso particolare che i punti di (a, b) , scelti per il calcolo di interpolazione o di estrapolazione, siano due e sia inoltre $n_1 = n_2 = 0$, si ha l'interpolazione o l'estrapolazione lineare, già considerata al n° 51, della quale, a pag. 189, abbiamo già trovato, per tutt'altra via, il termine (8) non superato dall'errore commesso.

114. Quadratura per interpolazione e per estrapolazione razionale intera. — Sia ora (α, β) ($\beta > \alpha$) un intervallo qualsiasi contenuto nell'intervallo (a, b) ove è definita la funzione $f(x)$ e si voglia calcolare l'integrale definito di $f(x)$ esteso all'intervallo (α, β) . Denote-

remo con $K_n(\alpha, \beta)$ un numero positivo non inferiore all'estremo superiore, in (α, β) , del modulo della derivata n^{ma} di $f(x)$. Il metodo di quadratura della $f(x)$ per interpolazione e per estrapolazione razionale intera, consiste in ciò:

Si scelgono r punti x_1, x_2, \dots, x_r di (α, β) e, corrispondentemente, r numeri interi non negativi n_1, n_2, \dots, n_r , detto $P(x)$ il polinomio di grado $n - 1 = n_1 + n_2 + \dots + n_r + r - 1$, avente con la $f(x)$, nei punti x_1, x_2, \dots, x_r , contatti degli ordini n_1, n_2, \dots, n_r , almeno, si pone

$$(1) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} {}^{(n-1)}P(x) dx.$$

Così facendo si commette un errore dato da

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - {}^{(n-1)}P(x)] dx,$$

non inferiore in modulo (teor. II del n° prec.) alla quantità

$$\frac{K_n(\alpha, \beta)}{(n_1 + n_2 + \dots + n_r + r)!} \int_{\alpha}^{\beta} |x - x_1|^{n_1+1} |x - x_2|^{n_2+1} \dots |x - x_r|^{n_r+1} dx,$$

$(n = n_1 + n_2 + \dots + n_r + r).$

Detti, rispettivamente, t_1, t_2, \dots, t_r i rapporti

$$\frac{x_1 - \alpha}{\beta - \alpha}, \quad \frac{x_2 - \alpha}{\beta - \alpha}, \quad \dots, \quad \frac{x_r - \alpha}{\beta - \alpha},$$

con la sostituzione $x = \alpha + (\beta - \alpha)t$, si trova

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} |x - x_1|^{n_1+1} |x - x_2|^{n_2+1} \dots |x - x_r|^{n_r+1} dx = \\ & = (\beta - \alpha)^{n+1} \int_0^1 |t - t_1|^{n_1+1} |t - t_2|^{n_2+1} \dots |t - t_r|^{n_r+1} dt. \end{aligned}$$

Porremo:

$$(2) \quad C = \frac{1}{(n_1 + n_2 + \dots + n_r + r)!} \int_0^1 |t - t_1|^{n_1+1} |t - t_2|^{n_2+1} \dots |t - t_r|^{n_r+1} dt;$$

la quantità numerica O dipende, unicamente, dai rapporti t_1, t_2, \dots, t_r e dai numeri interi non negativi n_1, n_2, \dots, n_r , ordini dei contatti del prescelto polinomio interpolatore ed estrapolatore. Si ha :

I. *L' errore commesso scrivendo la (1) non supera, in modulo, la quantità*

$$CK_n(\alpha, \beta)(\beta - \alpha)^{n+1} \quad (n = n_1 + n_2 + \dots + n_r + r).$$

Si voglia ora calcolare l' integrale di $f(x)$ esteso all' intero intervallo (a, b) . Mediante i punti $\alpha_1 = a, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1} = b$, nel modo più arbitrario, dividiamo l' intervallo (a, b) negli s intervalli parziali (α_i, α_{i+1}) ($i = 1, 2, \dots, s$); si ha allora

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_i^{1, s} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx.$$

In ciascuno intervallo (α_i, α_{i+1}) intercaliamo r punti, i quali dividano l' intervallo stesso negli r rapporti t_1, t_2, \dots, t_s , fissi, invariabili, cioè, da intervallo a intervallo, e diciamo $P_i(x)$ il polinomio, interpolatore ed estrapolatore nell' intervallo (α_i, α_{i+1}) , di grado $n - 1 = n_1 + n_2 + \dots + n_r + r - 1$, che in quei punti ha con $f(x)$ contatti degli ordini n_1, n_2, \dots, n_r , almeno. Ponendo

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_i^{1, s} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx = \sum_i^{1, s} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) P_i(x) dx,$$

si commette un errore in modulo non superiore al termine

$$CK_n(a, b) \sum_i^{1, s} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)^{n+1}.$$

Naturalmente, per ogni fissato numero s di parti in cui si divide l' intervallo (a, b) , conviene scegliere i punti $\alpha_1 = a, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1} = b$, in modo che la somma $\sum (\alpha_{i+1} - \alpha_i)^{n+1}$ abbia il minimo valore, ciò che si consegue, come subito si riconosce, quando i punti $\alpha_1 = a, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1} = b$, dividono l' intervallo (a, b) in parti eguali. E si ha allora :

II. *Se, mediante i punti $\alpha_1 = a, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1} = b$, si divide*

V'intervallo (a, b) in s parti eguali, scrivendo l'eguaglianza (3) si commette un errore in modulo non superiore al termine :

$$(4) \quad CK_n(a, b) \frac{(b-a)^{n+1}}{s^n}.$$

Si vede dunque che: Tenendo fissa la somma n e facendo divergere il numero s di parti eguali in cui si divide l'intervallo (a, b) , l'errore commesso è infinitesimo almeno d'ordine n rispetto a $1/s$.

La costante positiva C che entra nella (4), definita dalla (2), dipende dai rapporti t_1, t_2, \dots, t_r secondo i quali è stato diviso ciascuno intervallo (α_i, α_{i+1}) e dai numeri n_1, n_2, \dots, n_r . Naturalmente, in pratica, vi è vantaggio a realizzare per la C i più piccoli valori possibili, mediante un'opportuna scelta dei rapporti t_1, t_2, \dots, t_r e dei numeri interi non negativi n_1, n_2, \dots, n_r . Dipendentemente da tale scelta si hanno appunto i vari metodi di quadratura per interpolazione e per estrapolazione razionale intera. Osserviamo, ancora in generale, che, fissata la somma $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r + r$, la costante C , comunque poi singolarmente si scelgano i rapporti t_1, t_2, \dots, t_r e i numeri n_1, n_2, \dots, n_r , non può mai superare il termine $1/n!$.

E possiamo ora a dare i vari metodi di quadratura per interpolazione e estrapolazione razionale intera.

Quadratura per estrapolazione tayloriana. Si ottiene facendo $r=1$, sostituendo cioè, nell'intervallo (α, β) , alla funzione $f(x)$ il polinomio $^{(n)}P(x)$ che ha nel punto x_1 di (α, β) , un contatto con la $f(x)$ di ordine non inferiore a n_1 . Per semplificare la scrittura porremo $n_1 = m, t_1 = \tau$. Si ha :

$$C = \frac{1}{(m+1)!} \left[\int_0^\tau (\tau-t)^{m+1} dt + \int_\tau^1 (t-\tau)^{m+1} dt \right] = \frac{\tau^{m+2} + (1-\tau)^{m+2}}{(m+2)!}.$$

Fissato il numero m , il minimo di C si ha per $\tau=1/2$, ed allora risulta $C=1/[2^{m+1}(m+2)!]$. Porremo sempre $\gamma=(\alpha+\beta)/2$; per $\tau=1/2$ il polinomio estrapolatore $^{(m)}P(x)$ è definito dall'eguaglianza:

$$^{(m)}P(x) = f(\gamma) + (x-\gamma)f'(\gamma) + \frac{(x-\gamma)^2}{2!}f''(\gamma) + \dots + \frac{(x-\gamma)^m}{m!}f^{(m)}(\gamma),$$

e si ha:

$$\int_a^\beta {}^{(m)}P(x) dx = (\beta - \alpha)f(\gamma) + \frac{(\beta - \alpha)^3}{2^2 \cdot 3!} f''(\gamma) + \frac{(\beta - \alpha)^5}{2^4 \cdot 5!} f^{IV}(\gamma) + \dots,$$

onde il risultato: *Se m è un numero intero, positivo o nullo, il metodo di quadratura per estrapolazione tayloriana consiste nel porre:*

$$(5) \quad \int_a^\beta f(x) dx = \sum_h^{0, [m/2]} \frac{(\beta - \alpha)^{2h+1}}{2^{2h} (2h+1)!} f^{(2h)}(\gamma),$$

ove $[m/2]$ è il massimo numero intero contenuto in $m/2$ e γ è il punto di mezzo dell'intervallo (α, β) . L'errore che viene così commesso non supera, in modulo, la quantità

$$\frac{(\beta - \alpha)^{m+2}}{2^{m+1} (m+2)!} K_{m+1}(\alpha, \beta).$$

Indicando con μ un numero intero non negativo, osserviamo che il secondo membro della (5) ha lo stesso valore per $m = 2\mu$ e per $m = 2\mu + 1$, e si ha pertanto che: *Per $m = 2\mu$ esistono i seguenti due termini non superati dall'errore commesso nella quadratura per estrapolazione tayloriana:*

$$\frac{(\beta - \alpha)^{2\mu+2}}{2^{2\mu+1} (2\mu+2)!} K_{2\mu+1}(\alpha, \beta), \quad \frac{(\beta - \alpha)^{2\mu+3}}{2^{2\mu+2} (2\mu+3)!} K_{2\mu+2}(\alpha, \beta).$$

Per la continua applicazione che se ne fa in pratica, dobbiamo rilevare il caso particolare $m = \mu = 0$. In tal caso si pone

$$(6) \quad \int_a^\beta f(x) dx = (\beta - \alpha)f(\gamma), \quad \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

e l'errore commesso non supera ciascuna delle quantità seguenti

$$(7) \quad \frac{1}{4} K_1(\alpha, \beta) (\beta - \alpha)^2, \quad (8) \quad \frac{1}{24} K_2(\alpha, \beta) (\beta - \alpha)^3.$$

Poichè il prodotto $(\beta - \alpha)f(\gamma)$ rappresenta l'area del rettangolo avente per base l'intervallo (α, β) e per altezza l'ordinata della curva $y = f(x)$ nel punto di mezzo γ di quell'intervallo, la (6) dicesi la **formola di quadratura col metodo del rettangolo**. Nella maggior parte dei casi pratici (per esempio quando la curva $y = f(x)$

rappresenta graficamente un fenomeno in istudio) si sarà solamente in grado di calcolare *approssimativamente*, per ogni punto x di (α, β) , il valore che vi ha la sola funzione $f(x)$. In questi casi, ben chiaramente, il termine (7) è di calcolo più sicuro del termine (8) e si dovrà perciò preferire quello a questo. Sempre per gli scopi pratici, è assai utile osservare che si può pervenire al termine (7) che limita superiormente l'errore commesso scrivendo la (6), anche quando, *senza neppure avere nozione della derivabilità di $f(x)$, il numero K_1 limita superiormente, per x in (α, β) e $\neq \gamma$, il rapporto*

$$(9) \quad \frac{|f(x) - f(\gamma)|}{|x - \gamma|}.$$

Si ha allora, per x in (α, β) , $|f(x) - f(\gamma)| \leq K_1 |x - \gamma|$, e poichè

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - (\beta - \alpha)f(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - f(\gamma)] dx,$$

risulta appunto

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - (\beta - \alpha)f(\gamma) \right| \leq K_1 \int_{\alpha}^{\beta} |x - \gamma| dx = K_1 \frac{(\beta - \alpha)^2}{4}.$$

Con la formola di quadratura col metodo del rettangolo, la (3) si scrive

$$(10) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_i^{1,s} (a_{i+1} - a_i) f(\gamma_i), \quad \gamma_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2},$$

e se, come appunto vogliamo supporre, i punti a_1, a_2, \dots, a_{s+1} dividono l'intervallo (a, b) in s parti eguali,

$$(11) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{s} \sum_i^{1,s} f(\gamma_i),$$

con un errore, limitato in modulo dai numeri

$$(12) \quad \frac{K_1(a, b)}{4} \frac{(b-a)^2}{s}, \quad (13) \quad \frac{K_2(a, b)}{24} \frac{(b-a)^3}{s^2}.$$

Se, dunque, nulla si sa sulla derivata del second'ordine della $f(x)$, mentre è noto che la derivata prima è limitata oppure che è

limitato il rapporto (9), si può solo asserire che, l'errore commesso scrivendo la (10), è, al divergere di s , infinitesimo almeno del primo ordine rispetto a $1/s$.

Se, anche senza conoscere la derivata seconda di $f(x)$, si sa che essa esiste in (a, b) e vi è limitata—da un numero anche ignoto—si può, per la (13), asserire di più che detto errore è infinitesimo almeno del second'ordine rispetto a $1/s$. Col reiterato calcolo, per valori crescenti di s , del secondo membro della (11) [consigliabile l'impiego delle *macchine calcolatrici a tamburo girevole*] si arriverà in ogni caso, anche nella sola ipotesi della integrabilità di $f(x)$, al calcolo dell'integrale; ma vediamo, per la (13), che assai più presto si raggiungerà la stabilità della cifra decimale di un assegnato ordine, se $f(x)$ è dotata in (a, b) di derivata seconda limitata.

Sia ora $f(x) > 0$ nell'intervallo di integrazione. Il termine $(\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\gamma_i)$ della somma scritta nel secondo membro della (10) rappresenta anche l'area del trapezio racchiuso dall'asse x , dalle verticali nei punti α_i e α_{i+1} e dalla tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto di ascissa γ_i , media fra α_i e α_{i+1} . Ne segue che: *Se la curva $y = f(x)$ volge costantemente la convessità in un determinato verso rispetto all'asse y , secondochè tale convessità è volta nel verso dell'asse y o nel verso opposto, le formole (10) e (11), di quadratura col metodo del rettangolo, sono approximate per eccesso o per difetto.*

Se $P(x)$ è il polinomio estrapolatore di secondo grado:

$$P(x) = f(\gamma) + (x - \gamma)f'(\gamma) + \frac{(x - \gamma)^2}{2!}f''(\gamma),$$

l'equazione $y = P(x)$ rappresenta la *parabola osculante* la curva $y = f(x)$ nel punto $[\gamma, f(\gamma)]$, le formole

$$(14) \quad \int_a^\beta f(x) dx = (\beta - \alpha)f(\gamma) + \frac{(\beta - \alpha)^3}{24}f''(\gamma),$$

$$(15) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{b - a}{s} \sum_i^{1, s} f(\gamma_i) + \frac{(b - a)^3}{24 s^3} \sum_i^{1, s} f''(\gamma_i)$$

si potranno chiamare le *formole di quadratura col metodo della parabola osculante*. L'errore commesso scrivendo la (15) non supera, in modulo, ciascuno dei seguenti termini:

$$(16) \quad \frac{(b-a)^4}{192} K_3(a, b) \frac{1}{s^3}, \quad (17) \quad \frac{(b-a)^5}{1920} K_4(a, b) \frac{1}{s^4}.$$

Per la formola (15) e per i termini (16) e (17) che ne limitano il modulo dell'errore valgono considerazioni perfettamente analoghe a quelle già fatte per la (11). Alla (15) si potrà fare ricorso quando, in ciascun punto di (a, b) , si conoscono il valore della funzione e della sua derivata seconda. Se la funzione è dotata di derivata quarta, limitata in (a, b) , l'errore che si commette è, al divergere di s , infinitesimo del quarto ordine almeno rispetto a $1/s$.

Metodo di Cotes. Nel metodo generale di quadratura per interpolazione e per estrapolazione razionale intera facciamo $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 0$, interpoliamo ed estrapoliamo cioè con un polinomio $P(x)$ di grado $r - 1$, al quale non si richiede altra condizione che di assumere nei punti x_1, x_2, \dots, x_r , opportunamente scelti in (α, β) , i valori f_1, f_2, \dots, f_r che vi assume la $f(x)$. Per la (6) del n° prec. si porrà allora

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_h^{1, 2} f_h \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{h-1})(x - x_{h+1}) \dots (x - x_r)}{(x_h - x_1) \dots (x_h - x_{h-1})(x_h - x_{h+1}) \dots (x_h - x_r)} dx,$$

cioè, con la sostituzione $x = \alpha + (\beta - \alpha)t$ e introducendo i rapporti t_1, t_2, \dots, t_r secondo i quali i punti x_1, x_2, \dots, x_r dividono l'intervallo (α, β) ,

$$(18) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\beta - \alpha)(N_1 f_1 + N_2 f_2 + \dots + N_r f_r)$$

ove

$$N_h = \int_0^1 \frac{(t - t_1) \dots (t - t_{h-1})(t - t_{h+1}) \dots (t - t_r)}{(t_h - t_1) \dots (t_h - t_{h-1})(t_h - t_{h+1}) \dots (t_h - t_r)} dt.$$

I numeri N_1, N_2, \dots, N_r dipendono unicamente dai rapporti secondo i quali i punti x_1, x_2, \dots, x_r dividono l'intervallo (α, β) ; essi sono coefficienti fissi che possono essere preventivamente calcolati. L'errore commesso con la (18) è di modulo non superiore alla quantità:

$$(19) \quad O'K_r(\alpha, \beta)(\beta - \alpha)^{r+1}$$

L'errore commesso con la (18). Sia dunque $r = 2\rho + 1$, ove ρ è un numero intero e positivo, e mediante i punti $x_1 = \alpha, x_2, \dots, x_\rho, x_{\rho+1}, x_{\rho+2}, \dots, x_{2\rho}, x_{2\rho+1} = \beta$, si divida l'intervallo (α, β) in 2ρ parti eguali. Sia $Q(x)$ il polinomio di grado r che nei punti x_1, x_2, \dots, x_r assume i valori f_1, f_2, \dots, f_r che vi assume $f(x)$ e che, inoltre, nel punto medio $x_{\rho+1}$ dell'intervallo (α, β) ha con $f(x)$ un contatto del prim' ordine, almeno. Detto $P(x)$ il polinomio di grado $r-1$ dianzi considerato, si ha

$$Q(x) = P(x) + A(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_r),$$

ove la costante A è determinata dall'equazione

$$P'(x_{\rho+1}) + A(x_{\rho+1} - x_1) \dots (x_{\rho+1} - x_\rho)(x_{\rho+1} - x_{\rho+2}) \dots (x_{\rho+1} - x_r) = f'(x_{\rho+1}).$$

Interpolando, in (α, β) , la funzione $f(x)$ con questo polinomio $Q(x)$, poniamo

$$(21) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x) dx;$$

si commette un errore il cui modulo è (teor. I) superiormente limitato dal numero,

$$(22) \quad O'' K_{r+1}(\alpha, \beta) (\beta - \alpha)^{r+2},$$

ove

$$(23) \quad O'' = \frac{1}{(r+1)!} \int_0^1 |t - t_1| \dots |t - t_\rho| (t - t_{\rho+1})^2 |t - t_{\rho+2}| \dots |t - t_{2\rho+1}| dt = \\ = \frac{1}{(2\rho+2)!} \int_0^1 t \left| t - \frac{1}{2\rho} \right| \dots \left| t - \frac{\rho-1}{2\rho} \right| \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 \left| t - \frac{\rho+1}{2\rho} \right| \dots \left| t - \frac{2\rho-1}{2\rho} \right| (1-t) dt.$$

Ma osserviamo che

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_r) dx = \\ = \int_{x_1}^{x_{\rho+1}} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_r) dx + \int_{x_{\rho+1}}^{x_r} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_r) dx,$$

laddove, l'ultimo integrale, con la sostituzione $x = 2x_{\rho+1} - \xi$, si trasforma nel contrario del penultimo, onde segue

$$\int_{\alpha}^{\beta} Q(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x) dx.$$

Pertanto: Se r è dispari ($= 2\rho + 1$), scrivendo, col metodo di *Côtes*, la (18), si commette un errore il cui modulo è limitato superiormente da ciascuno dei seguenti termini:

$$(19) \quad O' K_r(\alpha, \beta) (\beta - \alpha)^{r+1}, \quad (22) \quad O'' K_{r+1}(\alpha, \beta) (\beta - \alpha)^{r+2},$$

ove

$$(20) \quad O' = \frac{1}{(2\rho+1)!} \int_0^1 t \left| t - \frac{1}{2\rho} \right| \dots \left| t - \frac{\rho-1}{2\rho} \right| \left| t - \frac{1}{2} \right| \left| t - \frac{\rho+1}{2\rho} \right| \dots \left| t - \frac{2\rho-1}{2\rho} \right| (1-t) dt,$$

$$(23) \quad O'' = \frac{1}{(2\rho+2)!} \int_0^1 t \left| t - \frac{1}{2\rho} \right| \dots \left| t - \frac{\rho-1}{2\rho} \right| \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 \left| t - \frac{\rho+1}{2\rho} \right| \dots \left| t - \frac{2\rho-1}{2\rho} \right| (1-t) dt.$$

Metodo di quadratura del trapezio. Si ottiene dal metodo di *Côtes* per $r=2$. Si pone allora

$$(24) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{\beta - \alpha}{2} [f(\alpha) + f(\beta)],$$

con un errore il cui modulo è limitato superiormente dal numero:

$$(25) \quad \frac{1}{12} K_2(\alpha, \beta) (\beta - \alpha)^3.$$

La (3) si scrive:

$$(26) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_i^{1,s} \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{2} [f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1})],$$

e se i punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+1}$ dividono l'intervallo (a, b) in s parti eguali:

$$(27) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2s} [f(a) + f(b) + 2\{f(\alpha_2) + f(\alpha_3) + \dots + f(\alpha_s)\}],$$

con un errore il cui modulo è superiormente limitato dal termine:

$$(28) \quad \frac{K_2(a, b)}{12s^2} (b-a)^3.$$

Sia ora $f(x) > 0$ nell'intervallo di integrazione. Il secondo membro della (24) rappresenta allora l'area del trapezio racchiuso dall'asse x , dalle verticali di ascisse α e β e dalla corda condotta per i punti $[\alpha, f(\alpha)]$ e $[\beta, f(\beta)]$; donde il nome dato al metodo. Esso suole anche chiamarsi: *metodo di Bezout*. Evidentemente: *Se la curva $y=f(x)$ volge costantemente la convessità in un determinato verso rispetto all'asse y , secondochè tale convessità è volta nel verso dell'asse y o nel verso opposto, le formole (26) e (27) di quadratura col metodo del trapezio, sono approximate per difetto o per eccesso.*

Sull'errore d'approssimazione delle formole di quadratura coi metodi del rettangolo e del trapezio. Vogliamo ora dare un altro termine superiore al modulo dell'errore d'approssimazione delle due formole di quadratura coi metodi del rettangolo e del trapezio, al quale si deve fare ricorso in tutti quei casi, che sono assai frequenti nelle applicazioni, in cui si è riusciti ad ottenere un'attendibile riproduzione grafica della curva $y=f(x)$, dalla quale si possa anche desumerne la regolarità, senza tuttavia essere in grado di istituire un calcolo sicuro per la derivata prima e seconda della $f(x)$. Supporremo sempre $f(x) > 0$ e, dapprima, che la curva $y=f(x)$, nell'intero intervallo (a, b) al quale si estende l'integrazione, volga costantemente la convessità in un determinato verso, per esempio, per fissare le idee, nel verso dell'asse y .

Dividiamo l'intervallo (a, b) in parti non necessariamente eguali, mediante i punti $\alpha_1 = a, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1} = b$, e diciamo γ_i il punto di mezzo dell'intervallo parziale (α_i, α_{i+1}) . Si ha

$$\sum_i^{1,s} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \frac{f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1})}{2} < \int_a^b f(x) dx < \sum_i^{1,s} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\gamma_i),$$

e pertanto, quadrando col metodo del rettangolo o con quello del trapezio, si commette un errore che, qualunque sia il costante verso della convessità della curva, è in modulo non superiore alla quantità

$$\sum_i^{1,s} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \left| f(\gamma_i) - \frac{f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1})}{2} \right|.$$

La differenza $f(\gamma_i) - [f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1})]/2$ esprime, in valore assoluto, la lunghezza del segmento intercettato dall'arco di curva limitato dai punti M_i e M_{i+1} , di ascisse α_i e α_{i+1} , e dalla corda $M_i M_{i+1}$, sulla verticale condotta per il punto di mezzo della corda. Chiameremo tale segmento la *mediana verticale* dell'arco $M_i M_{i+1}$. Sia δ la massima fra le mediane verticali degli archi $M_1 M_2, M_2 M_3, \dots, M_s M_{s+1}$; si avrà allora, come termine superiore al modulo dell'errore d'approssimazione delle formole di quadratura coi metodi del rettangolo e del trapezio:

$$(b - a)\delta.$$

Supponiamo ora che la riproduzione grafica della curva $y=f(x)$ consenta un'approssimativa decomposizione di essa negli archi $Q_1 Q_2, Q_2 Q_3, \dots, Q_v Q_{v+1}$, lungo ciascuno dei quali abbia costante il verso della convessità. Siano $q_1 = a, q_2, \dots, q_v, q_{v+1} = b$ le ascisse dei punti Q_1, Q_2, \dots, Q_{v+1} . Per il calcolo dell'integrale di $f(x)$ esteso all'intervallo (a, b) , applichiamo il metodo del rettangolo o del trapezio, prendendo fra i punti di suddivisione dell'intervallo tutti i punti q_1, q_2, \dots, q_{v+1} . Sia δ la lunghezza della massima mediana verticale degli archi secondo cui riesce così suddivisa la curva, ed indichiamo con $S(q_i, q_k)$ ($i, k = 1, 2, \dots, v$) la somma delle aree dei rettangoli o dei trapezii compresi fra le verticali $x = q_i$ e $x = q_k$. L'errore d'approssimazione della formola sarà dato da

$$\sigma = \int_a^b f(x) dx - S(a, b) = \sum_i^{1, v} \left(\int_{q_i}^{q_{i+1}} f(x) dx - S(q_i, q_{i+1}) \right),$$

e si ha

$$|\sigma| \leq \sum_i^{1, v} \left| \int_{q_i}^{q_{i+1}} f(x) dx - S(q_i, q_{i+1}) \right| \leq \delta \sum_{i=1}^v (q_{i+1} - q_i) = \delta(b - a).$$

Questa formola esprime il risultato al quale volevamo arrivare.

Metodo Cavalieri-Simpson. Si ottiene, per $r=3$, dal metodo di *Côtes*. Si pone allora

$$(29) \quad \int_a^\beta f(x) dx = \frac{\beta - a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a + \beta}{2}\right) + f(\beta) \right],$$

con un errore il cui modulo è limitato superiormente da ciascuno dei termini (19) e (22) per $r=3$, cioè, come subito si vede con facile calcolo, dai termini

$$(30) \quad \frac{K_3(\alpha, \beta)}{192} (\beta - \alpha)^4, \quad (31) \quad \frac{K_4(\alpha, \beta)}{2880} (\beta - \alpha)^5.$$

Questo secondo termine fu dato dal *Peano*. Nell'ipotesi che i punti $a_1 = a, a_2, \dots, a_s, a_{s+1} = b$, dividano l'intervallo (a, b) in s parti eguali, la (3) si scrive ora

$$(32) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6s} \{ f(a) + f(b) + 2[f(\alpha_2) + f(\alpha_3) + \dots + f(\alpha_s)] + \\ + 4[f(\gamma_1) + f(\gamma_2) + \dots + f(\gamma_s)] \}, \\ \gamma_i = (\alpha_i + \alpha_{i+1})/2 \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

con un errore il cui modulo non supera ciascuno dei seguenti due termini:

$$(33) \quad \frac{K_3(\alpha, b)}{192} (b - \alpha)^4 \frac{1}{s^3}, \quad (34) \quad \frac{K_4(\alpha, b)}{2880} (b - \alpha)^5 \frac{1}{s^4}.$$

È bene tenere presenti entrambi questi termini: Può ben darsi che risulti:

$$\frac{K_3(\alpha, \beta)}{192} < \frac{K_4(\alpha, \beta)}{2880} (\beta - \alpha),$$

ed inoltre per il calcolo del termine (30) non occorre che la conoscenza della derivata terza di $f(x)$. Se la funzione $f(x)$ è dotata di derivata terza, limitata in (a, b) , la (32) è affetta da un errore che, al divergere di s , è infinitesimo del terz' ordine, almeno, rispetto a $1/s$, se $f(x)$ è inoltre dotata di derivata quarta, limitata in (a, b) , il detto errore è infinitesimo del quart' ordine, almeno.

L'impiego della formola (32) di *Cavalieri-Simpson* è assai diffuso in pratica. Ciò perchè essa si presta ad un rapido calcolo (mediante macchina calcolatrice) e con la reiterata sua applicazione per valori di s crescenti si raggiunge ben presto — come assicura la presenza dei fattori $1/s^3$ e $1/s^4$ nelle espressioni dei termini (33) e (34) — la stabilità delle cifre decimali degli ordini che occorre in pratica di dover considerare. E d'altronde è subito dimostrato che, anche nella sola ipotesi della integrabilità della $f(x)$, il secondo mem-

bro della (32) al divergere di s , converge sempre verso l'integrale della $f(x)$ esteso all'intervallo (a, b) (*).

Sui polinomi di Legendre. Vogliamo anche dare le utilissime formole di quadratura approssimata dovute a **Gauss**. Ciò ci dà l'occasione di dover parlare dei *polinomi di Legendre* che appunto entrano in quelle formole e che, d'altra parte, sono utilizzati in importanti ricerche di *Fisica*. Secondo **Rodrigues** diremo *polinomi di Legendre* quelli definiti dalle eguaglianze:

$$X_0(x) \equiv 1, \quad X_r(x) = \frac{1}{(2r)!} \frac{d^r}{dx^r} (x^2 - 1)^r.$$

Evidentemente: il polinomio $X_r(x)$ è di grado r e, secondochè r è pari o dispari il polinomio è funzione della x pari o dispari (**). Porremo:

$$Y_r(x) = X_r(x)(2r)!.$$

Si ha:

$$(35) \quad Y_{r+1} = \frac{d^r}{dx^r} \left[\frac{d}{dx} (x^2 - 1)^{r+1} \right] = 2(r+1) \frac{d^r}{dx^r} [x(x^2 - 1)^r] = \\ = 2(r+1)xY_r + 2r(r+1) \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} (x^2 - 1)^r,$$

ma

$$\frac{d^r}{dx^r} [x(x^2 - 1)^r] = \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} [(x^2 - 1)^r + 2rx^2(x^2 - 1)^{r-1}] = \\ = \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} [(2r+1)(x^2 - 1)^r + 2r(x^2 - 1)^{r-1}] = (2r+1) \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} (x^2 - 1)^r + 2rY_{r-1}$$

e quindi anche

$$(36) \quad Y_{r+1} = 2(r+1)(2r+1) \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} (x^2 - 1)^r + 4r(r+1)Y_{r-1}.$$

Dalle (35) e (36), eliminando la derivata $(r-1)^{\text{ma}}$ di $(x^2 - 1)^r$, segue

$$Y_{r+1} = 2(2r+1)xY_r - 4r^2Y_{r-1},$$

(*) Ciò, affatto in generale, avviene per il secondo membro delle (3), quando tende a zero la massima ampiezza degli intervalli (α_i, α_{i+1}) di decomposizione dell'intervallo (a, b) .

(**) Com'è noto, la funzione $\varphi(x)$ dicesi pari o dispari secondochè $\varphi(x) \equiv \varphi(-x)$ oppure $\varphi(x) \equiv -\varphi(-x)$. Evidentemente se $\varphi(x)$ è dispari sarà $\varphi(0) = 0$.

e dividendo ambo i membri di quest'eguaglianza per $(2r+2)!!$ si trova la seguente *relazione di ricorrenza* fra i polinomi X_r :

$$(37) \quad X_{r+1} = \frac{(2r+1)xX_r - rX_{r-1}}{r+1}.$$

Tale relazione serve, anzitutto, al calcolo ricorrente dei polinomi di *Legendre*. Poichè

$$(38) \quad X_0(x) = 1, \quad X_1(x) = x,$$

si ricava, successivamente, dalla (37)

$$X_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad X_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$X_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad X_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \dots$$

Dalle (38) e dalla (37) si deduce poi immediatamente che:

$$X_r(1) = 1, \quad X_r(-1) = (-1)^r, \quad X_{2r+1}(0) = 0, \quad X_{2r}(0) = (-1)^r \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}.$$

Lo sviluppo di $(1-2ax+\alpha^2)^{-1/2}$ in serie doppia di potenze, secondo le potenze di x e di α , dà luogo alla seguente relazione:

$$(39) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2ax+\alpha^2}} = P_0(x) + P_1(x)\alpha + P_2(x)\alpha^2 + \dots + P_r(x)\alpha^r + \dots,$$

ove $P_0(x) \equiv 1$ e $P_r(x)$ è un polinomio in x di grado r . Si verifica immediatamente, derivando la (39) rispetto ad α , dalla identità

$$(x-\alpha)(1+P_1\alpha+\dots+P_r\alpha^r+\dots) = (1-2ax+\alpha^2)(P_1+\dots+rP_r\alpha^{r-1}+\dots),$$

che ne segue, che anche per i polinomi $P_r(x)$ sussiste la relazione di ricorrenza (37), e poichè $P_0(x) \equiv 1$, $P_1(x) \equiv x$, se ne deduce $P_r(x) \equiv X_r(x)$. Si ha dunque la relazione

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ax+\alpha^2}} = 1 + X_1(x)\alpha + X_2(x)\alpha^2 + \dots + X_r(x)\alpha^r + \dots,$$

di applicazione frequentissima.

A noi qui interessa stabilire le seguenti proposizioni: **a)** *L'equazione $X_r(x) = 0$ ha reali e distinte tutte le sue r radici e tutte interne all'intervallo $(-1, 1)$.*

Ed invero, l'equazione $Z_r(x) \equiv (x^2-1)^r = 0$ ha le due radici -1 e 1 , ciascuna r -pla. Ne segue che l'equazione $Z'_r(x) = 0$ ha le ra-

dici -1 e 1 , ciascuna $(r-1)^{\text{pla}}$ e l'altra radice ξ_{11} interna all'intervallo $(-1, 1)$. L'equazione $Z_r''(x) = 0$, di conseguenza, ha le radici -1 e 1 , ciascuna $(r-2)^{\text{pla}}$ e le altre due radici ξ_{21} e ξ_{22} , la prima interna all'intervallo $(-1, \xi_{11})$ e la seconda interna all'intervallo $(\xi_{11}, 1)$. E così via, ripetendo questa considerazione, si giunge a stabilire la realtà delle r radici dell'equazione, di grado r , $Z_r^{(r)}(x) = 0$, interne all'intervallo $(-1, 1)$ e distinte. Ma $Z_r^{(r)}(x) = Y_r(x)$. Denoteremo con $t_{r1}, t_{r2}, \dots, t_{rr}$ le r radici dell'equazione $X_r(x) = 0$. Si potrà scrivere:

$$X_r(x) = \frac{(2r)!}{2^r (r!)^2} (x - t_{r1})(x - t_{r2}) \dots (x - t_{rr}).$$

b) Qualunque sia il polinomio $P(x)$ si ha:

$$\int_{-1}^1 {}^{(n)}P(x) X_r(x) dx = 0 \quad \text{se} \quad n < r.$$

Ed invero, con successive integrazioni per parti, si trova:

$$\begin{aligned} (40) \quad & \int_{-1}^1 P(x) \frac{d^r}{dx^r} (x^2 - 1)^r dx = - \int_{-1}^1 \frac{dP}{dx} \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} (x^2 - 1)^r dx = \\ & = \int_{-1}^1 \frac{d^2 P}{dx^2} \frac{d^{r-2}}{dx^{r-2}} (x^2 - 1)^r dx = \dots = (-1)^r \int_{-1}^1 \frac{d^r P}{dx^r} (x^2 - 1)^r dx, \end{aligned}$$

e l'ultimo integrale è nullo quando $P(x)$ è un polinomio di grado minore di r . Ne segue:

c) Se $r' \neq r''$,

$$\int_{-1}^1 X_{r'}(x) X_{r''}(x) dx = 0.$$

d) Per ogni indice r si ha

$$\int_{-1}^1 [X_r(x)]^2 dx = \frac{2}{2r+1}.$$

Dalla (40), ponendovi $P(x) = X_r(x)$, si trae invero

$$\int_{-1}^1 X_r(x) \frac{d^r}{dx^r} (x^2 - 1)^r dx = (2r - 1)!! \int_{-1}^1 (1 - x^2)^r dx = 2 \frac{(2r)!!}{2r + 1}.$$

Metodo di Gauss. Si ha dal metodo generale di quadratura per interpolazione e per estrapolazione razionale intera quando si ponga $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 0$ e

$$(41) \quad x_h = x_{rh} = \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} t_{rh} \quad (h = 1, 2, \dots, r),$$

ove le t_{rh} ($h = 1, 2, \dots, r$) sono le r radici dell'equazione $X_r(x) = 0$. Con la sostituzione $x = (\beta + \alpha)/2 + t(\beta - \alpha)/2$ si trova

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{\beta - \alpha}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} t\right) dt.$$

Porremo $f[(\beta + \alpha)/2 + t(\beta - \alpha)/2] = g(t)$, si ha

$$g^{(n)}(t) = \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} t\right),$$

e quindi, detto H_n un numero che limita superiormente, in $(-1, 1)$, il modulo della derivata n^{ma} di $g(t)$, si può porre $H_n = K_n(\alpha, \beta) (\beta - \alpha)^n / 2^n$. Diciamo $Q(t)$ il polinomio di grado $2r - 1$, in t , che, nei punti $t_{r1}, t_{r2}, \dots, t_{rr}$, dell'intervallo $(-1, 1)$, ha, con $g(t)$, contatti del primo ordine, almeno. Si ha (teor. I)

$$(42) \quad \int_{-1}^1 g(t) dt = \int_{-1}^1 Q(t) dt + \sigma,$$

$$(43) \quad |\sigma| \leq \frac{H_{2r}}{(2r)!} \int_{-1}^1 (t - t_{r1})^2 (t - t_{r2})^2 \dots (t - t_{rr})^2 dt.$$

Ma

$$(t - t_{r1})(t - t_{r2}) \dots (t - t_{rr}) = X_r(t) \frac{2^r (r!)^2}{(2r)!},$$

e quindi l'integrale nel secondo membro della (43) vale [teor. d)]

$$\frac{2^{2r+1} (r!)^4}{(2r+1) [(2r)!]^2},$$

$$(46) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{\beta - \alpha}{2} \left[f\left(\gamma - \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\gamma + \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}}\right) \right],$$

con un errore il cui modulo non supera

$$\frac{(\beta - \alpha)^5}{4320} K_4(\alpha, \beta).$$

Per $r = 3$, la (45) dà

$$(47) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{\beta - \alpha}{18} \left[5f\left(\gamma - \frac{(\beta - \alpha)\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\right) + 8f(\gamma) + 5f\left(\gamma + \frac{(\beta - \alpha)\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\right) \right]$$

con un errore il cui modulo non supera

$$\frac{(\beta - \alpha)^7}{2016000} K_6(\alpha, \beta).$$

Ecc.

115. Formole di cubatura approssimata.— Nello spazio (x, y, z) si abbia un solido limitato e misurabile A , e siano a e b ($a < b$) i valori della x per i due punti estremi di A . Supponiamo che sia *nota* l'estensione (sul piano) della sezione piana del solido, fatta con un qualsiasi piano perpendicolare all'asse x , di ascissa compresa fra a e b . Denoteremo con $f(x)$ tale estensione. Se α e β ($\alpha < \beta$) sono due quali si vogliono numeri dell'intervallo (a, b) , denoteremo con $A(\alpha, \beta)$ la parte di A contenuta fra i due piani $x = \alpha$ e $x = \beta$. Si ha (92, I) che $f(x)$ è integrabile su (a, b) e che:

$$\text{vol } A(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Pertanto: *Tutte le formole di quadratura approssimata, date in questo paragrafo, possono anche riguardarsi di cubatura approssimata, per ogni solido misurabile al quale si possa associare un asse x tale che l'estensione (sul piano) della sezione, fatta con un piano perpendicolare a questo asse, risulti una nota funzione $f(x)$ dell'ascissa x del punto di incontro del piano con l'asse.*

In tutti i solidi che considera la *Geometria elementare* avviene

che l'estensione $f(x)$ della sezione è nota e che, anzi, essa è una funzione della x razionale intera di grado non superiore al secondo. Pertanto: *Per tutti i solidi della Geometria elementare, la formola di Cavalieri-Simpson e la formola (46) di Gauss dànno, senza errore, il volume del solido $A(a, \beta)$. Per quei solidi la cui sezione ha un'estensione funzione lineare della x , le formole del rettangolo e del trapezio dànno senza errore il volume di $A(a, \beta)$.*

Esercizio. La sezione del solido A , fatta col piano di ascissa x , perpendicolare all'asse x , sia sempre un poligono non intrecciato e si abbia che: al variare di x , ciascun vertice del poligono descriva una retta. Dimostrare che: La formola di *Cavalieri-Simpson* e la formola (46) di *Gauss* dànno esattamente il volume del solido $A(a, \beta)$. Se, in particolare, quelle rette sono parallele ad un medesimo piano, dimostrare che: già le formole del rettangolo e del trapezio dànno esattamente il volume $A(a, \beta)$.

116. Quadratura grafica e meccanica. Integragli. — Nelle scienze applicate sono altresì in uso metodi grafici e meccanici per il calcolo degli integrali definiti. Si esegue una *quadratura grafica* quando, realizzata una *precisa* riproduzione grafica della curva C_f di equazione $y = f(x)$, posto che la $f(x)$ sia la funzione da integrare, si calcolano con procedimento grafico le somme del tipo $\sum f_s \Delta x_s$, espressioni, per esempio secondo le formole del rettangolo o del trapezio o di *Cavalieri-Simpson* e così via, le varie approssimazioni dell'integrale da calcolare. Si esegue invece una *quadratura meccanica* se quelle somme si calcolano impiegando speciali strumenti meccanici. Noi non ci fermeremo ad esporre tali metodi di quadratura, essi lo sono in taluni appositi manuali per l'ingegnere, e d'altra parte i principii teorici su cui si fondano sono affatto elementari. Non possiamo però esimerci dal prevenire coloro che dovranno fare calcoli numerici di una certa precisione che a questi metodi di quadratura grafica o meccanica, sono — assai più — da preferire i metodi numerici descritti e studiati negli articoli precedenti, specialmente quando si faccia uso di macchine calcolatrici. I primi richiedono perfezionati e ingombranti strumenti da disegno, esperti e precisi disegnatori e una manualità grafica e misuratrice tutta speciale che non si può acquistare se non dopo lunga pratica, ed inoltre daranno sempre ri-

sultati affetti da errori di impossibile preventiva valutazione; i secondi invece, senza richiedere alcun mezzo speciale, anche senza l'uso di macchine calcolatrici ove il tempo non faccia difetto, consentono a chicchessia di dare il risultato con un *prestabilito arbitrario* numero di cifre decimali esatte.

Vogliamo invece dare un cenno meno fugace degli *integrati*, i quali, pur soggiacendo alle critiche fatte sopra per i metodi di quadratura grafica e meccanica, sono in pratica assai utili perchè, con grandissima rapidità, possono fornire preliminari a vantaggiose indicazioni di massima sul risultato della quadratura da eseguire (*).

Se $F(x)$ è una funzione di punto primitiva della $f(x)$, la curva C_F di equazione $y = F(x)$ chiamasi una *curva integrale* della curva C_f di equazione $y = f(x)$. Supponiamo che si sia realizzata una precisa riproduzione grafica della curva C_f sopra un piano orizzontale π sul quale siano tracciati due assi coordinati cartesiani ortogonali x e y . L'integrato (di *Abdank Abakanowicz*) porta due punte P_f e P_F , quest'ultima scrivente, ed è congegnato in maniera, che, imprimendo allo strumento, appoggiato su π , un certo moto traslatorio di velocità in ogni istante parallela a π , quando la punta P_f venga obbligata a percorrere la curva C_f , di conseguenza la punta P_F , mantenendosi costantemente sulla parallela condotta per P_f all'asse delle y , descrive su π una curva integrale C_F della C_f , alla quale curva integrale si può inoltre assegnare ad arbitrio un punto M per cui deve passare.

La tangente t in P_F alla curva C_F deve risultare inclinata sull'asse x di un angolo la cui tangente è data dalla misura y dell'ordinata di P_f . Sia Q il punto dell'asse x , avente l'ascissa di P_f diminuita di un'unità, la t risulterà parallela alla retta $P_f Q$. Viceversa, se due curve C_F e C_f del piano π , sono tali che la tangente in ogni punto P_F alla C_F è parallela alla retta $P_f Q$, congiungente il punto P_f di C_f , della medesima ascissa x di P_F , col punto Q dell'asse x di ascissa $x - 1$, la curva C_F è una curva integrale di C_f . Adunque l'integrato deve essere congegnato in mo-

(*) In questo indirizzo sono da tenere sempre presenti gli utilissimi e perfezionati strumenti ideati e realizzati da *E. Pascal*. Cfr. il libro di questo Autore: *I miei integrati per equazioni differenziali*. (Pellerano, Napoli, 1914).

do che, mentre la punta P_f è obbligata a descrivere la curva C_f , il punto P_F , mantenendosi sulla parallela condotta per P_f all'asse y , deve acquistare un tale moto che la sua velocità abbia in ogni istante la direzione della retta $P_f Q$. Per realizzare un tale moto basta fissare la punta P_F ad un corpo rigido che si muova di moto traslatorio, con velocità costantemente parallela alla retta $P_f Q$. Si fa perciò portare la punta P_F da un'asta rigida α' , la quale è munita di una ruota, a forma di cilindro circolare retto, che può liberamente rotolare sul piano π , ed il cui asse è solidale con l'asta, in una direzione a questa perpendicolare. Mantenendo l'asta orizzontale e facendo rotolare la sua ruota sul piano π , tutti i punti dell'asta acquistano una velocità parallela all'asta, e così in particolare è della velocità della punta P_F . Per ottenere ora che questa velocità risulti parallela alla retta $P_f Q$, basterà, evidentemente, costruire un parallelogrammo articolato $ABA'B'$ di cui un lato AB sia sempre sulla retta $P_f Q$ e il lato opposto $A'B'$ si trovi sull'asta α' , ciò che si consegue collegando a cerniera con la α' e in due punti fissi A' e B' due aste rigide AA' e BB' eguali, le quali vengano alla loro volta collegate a cerniera nei due punti fissi A e B (ad una mutua distanza $AB = A'B'$) ad una quarta asta rigida α che porta la punta P_f .

Applicazione. L'integralo può avere svariate utili applicazioni. Una di queste consiste nel dare una notevole prima approssimazione delle radici reali di una qualunque equazione algebrica a coefficienti reali: $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$. Basta mostrare che l'integralo può disegnare la curva di equazione $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$. Si disegni la retta $y = n! a_0$ e la curva integrale di questa passante per il punto di coordinate $x = 0$ e $y = (n-1)! a_1$; si ha così la curva $y = n! a_0 x + (n-1)! a_1$. Si disegni ora la curva integrale di questa passante per il punto di coordinate $x = 0$, $y = (n-2)! a_2$, si avrà così la curva $y = (n!/2!) a_0 x^2 + [(n-1)!/1!] a_1 x + (n-2)! a_2$. Si ripetano successivamente queste integrazioni, alla n^{ma} si otterrà la curva che si voleva costruire.

§ 3. Integrali curvilinei.

117. Integrali definiti funzioni di una o più variabili. —

Al n° 93 (pp. 409-414) abbiamo già studiato la funzione della variabile reale x :

$$\varphi(x) = \int_{[\alpha_1(x), \alpha_2(x)]} f(x, y) dy = \int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(x, y) dy \quad [\alpha_2(x) \geq \alpha_1(x)],$$

stabilendo talune condizioni sufficienti per la continuità e per la derivabilità di essa. Per le applicazioni giova stabilire analoghe condizioni per l'integrale definito, dipendente dalla variabile x ,

$$(1) \quad \varphi(x) = \int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(x, y) dy,$$

nelle quali, pur introducendo ulteriori ipotesi, è tolta la limitazione $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x)$. Nell'insieme A del piano (x, y) , dotato di punti interni, chiuso e limitato, sia definita la funzione $f(x, y)$ continua, e siano (a', b') e (a'', b'') i punti estremi di A . Per ogni punto (x, y) di RA , diamo alle variabili reali u e v tali valori che i punti (x, u) e (x, v) siano contenuti entrambi in un dominio rettangolare contenuto in A . Poniamo

$$(2) \quad F(x, u, v) = \int_u^v f(x, y) dy;$$

dimostriamo subito che la funzione F è continua. Se, invero, a x , u , v diamo tali incrementi Δx , Δu , Δv , che i punti (x, u) , (x, v) , $(x + \Delta x, u + \Delta u)$, $(x + \Delta x, v + \Delta v)$ siano tutti contenuti in un dominio rettangolare contenuto in A , si ha:

$$(3) \quad \begin{aligned} \Delta F &= \int_{u+\Delta u}^{v+\Delta v} f(x+\Delta x, y) dy - \int_u^v f(x, y) dy = \\ &= \int_v^{v+\Delta v} f(x+\Delta x, y) dy - \int_u^{u+\Delta u} f(x+\Delta x, y) dy + \int_u^v [f(x+\Delta x, y) - f(x, y)] dy, \end{aligned}$$

e quindi, se M è il massimo di $|f(x, y)|$ in \mathcal{A} , se $|f(x + \Delta x, y) - f(x, y)| \leq \varepsilon$ quando $|\Delta x| \leq \sigma(\varepsilon)$, si ottiene

$$|\Delta F| \leq M(|\Delta u| + |\Delta v|) + \varepsilon(b'' - b').$$

In un intervallo (a, b) contenuto in (a', a'') siano ora definite due funzioni continue $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$, tali che, per ogni x , esista un dominio rettangolare $\mathbf{R}(x)$, contenuto in \mathcal{A} , che contenga i due punti $[x, \alpha_1(x)]$ e $[x, \alpha_2(x)]$. Possiamo allora (34, I) asserire che: *La funzione $\varphi(x)$, definita dalla (1) in (a, b) , è ivi continua.*

Si ha evidentemente $\partial F / \partial v = f(x, v)$, $\partial F / \partial u = -f(x, u)$, e se supponiamo, come appunto vogliamo fare, che la derivata parziale $f_x(x, y)$ sia finita e continua in \mathcal{A} , si avrà anche (n° 93)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_u^v f_x(x, y) dy.$$

La funzione F è dunque altresì (56, VII) differenziabile in ogni punto interno all'insieme \mathbf{B} di sua definizione. Ne segue (n° 57) che: *Se $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$, verificando le ipotesi sopra enunciate, sono derivabili in (a, b) e se, variando x in (a, b) , il punto $[x, \alpha_1(x), \alpha_2(x)]$ si mantiene interno a \mathbf{B} , la funzione $\varphi(x)$ definita dalla (1) è pur essa derivabile in (a, b) , e si ha*

$$(4) \quad \frac{d\varphi}{dx} = \int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f_x(x, y) dy + \frac{d\alpha_2}{dx} f[x, \alpha_2(x)] - \frac{d\alpha_1}{dx} f[x, \alpha_1(x)].$$

Ma la condizione che il punto $[x, \alpha_1(x), \alpha_2(x)]$ si mantenga interno a \mathbf{B} è superflua. Ponendo infatti nella (3) $u = \alpha_1(x)$, $v = \alpha_2(x)$ e dividendone ambo i membri per Δx e passando poscia al limite per Δx infinitesimo, si giunge [cfr. il ragionamento fatto per il teor. V del n° 93] di nuovo alla (4). Concludiamo dunque col teorema:

Se nell'insieme chiuso e limitato \mathcal{A} , di punti estremi (a', b') e (a'', b'') , la funzione f è continua con la sua derivata f_x , se le funzioni $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$, definite in un intervallo (a, b) contenuto in (a', a'') , sono derivabili ed inoltre tali che i punti $[x, \alpha_1(x)]$ e $[x, \alpha_2(x)]$ siano sempre entrambi contenuti in un dominio rettangolare $\mathbf{R}(x)$ contenuto in \mathcal{A} , la funzione $\varphi(x)$ definita dalla (1) è derivabile in (a, b) e vale la (4).

Osservazione. Con la (4) si è precisamente ritrovata la formola (9) del n° 93, ma in ipotesi diverse: se qui si è tolta la limitazione $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x)$, là non si richiedeva che i punti $[x, \alpha_1(x)]$ e $[x, \alpha_2(x)]$ fossero sempre entrambi contenuti in un dominio rettangolare contenuto in \mathbf{A} . Da questa condizione ci si può però liberare, ed essa può essere sostituita dall'altra, meno restrittiva, che il segmento rettilineo congiungente i punti $[x, \alpha_1(x)]$ e $[x, \alpha_2(x)]$ sia sempre contenuto in \mathbf{A} . Ma si perviene a ciò con un ulteriore ragionamento che, per brevità, vogliamo omettere.

Esercizio. Sotto quali condizioni si può asserire che la funzione delle r variabili x_1, x_2, \dots, x_r

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_r) = \int_{\alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_r)}^{\alpha_2(x_1, x_2, \dots, x_r)} f(x_1, x_2, \dots, x_r, y) dy,$$

è differenziabile?

118. Integrazione parziale. — Sia $f(P) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ una funzione continua del punto $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$ definita in un insieme \mathbf{A} , dello spazio $S_{(r)}$, chiuso e dotato di punti interni. Vogliamo rispondere alla seguente importante questione:

Considerando ciascuna variabile x_i , esiste una funzione continua $F_i(x_1, x_2, \dots, x_r)$, definita in \mathbf{A} , per la quale, in ogni punto di $\mathbf{R}\mathbf{A}$, riesce

$$(1) \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = f?$$

Se \mathbf{A} è un dominio rettangolare e (a_1, a_2, \dots, a_r) è un punto di \mathbf{A} , arbitrariamente fissato, ponendo, per ogni punto (x_1, x_2, \dots, x_r) di \mathbf{A} ,

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_r) = \int_{a_i}^{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_r) d\xi,$$

è immediato che la F_i è continua in \mathbf{A} , ed ivi soddisfa alla (1). Ma si può rispondere, in tutta generalità, affermativamente alla posta questione in grazia del seguente recentissimo teorema di **Carathéodory**:

Nell'intero spazio $S_{(r)}$ può essere definita una funzione $g(P)$, continua in ogni punto, che in A , coincide con la $f(P)$ (*).

Noi non siamo in grado qui di dimostrarlo. Ammessolo, detto $A(a_1, a_2, \dots, a_r)$ un fissato punto di $S_{(r)}$, poniamo

$$(2) \quad F_i(x_1, x_2, \dots, x_r) = \int_{a_i}^{x_i} g(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_r) d\xi.$$

È subito visto che la funzione F_i , così definita è continua in ogni punto di $S_{(r)}$, e quindi di A , e che in ciascun punto di RA sussiste la (1). La funzione F_i può dirsi ottenuta dalla f , mediante un'integrazione parziale rispetto alla variabile x_i .

119. Lunghezza d'arco per una curva regolare continua. — Sia C una curva regolare continua (n° 49) di equazioni parametriche

$$(1) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

e di intervallo base (a', a'') . Sia $C(P', P'')$ un arco della curva di intervallo base finito (t', t'') ($t' < t''$) che non abbia alcun punto singolare ad esso interno.

Vogliamo cominciare dal dare la nozione di *lunghezza* per un tale arco. A tale scopo, inserivamo nell'arco $C(P', P'')$ un'arbitraria poligonale P , i cui vertici siano P' e P'' e un certo numero $m - 1$ di punti T_1, T_2, \dots, T_{m-1} interni all'arco $C(P', P'')$. Questi vertici corrispondono ai valori

$$t_0 = t', \quad t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, \quad t_m = t'' \quad (t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m)$$

del parametro t . I punti P' e P'' saranno anche denotati con T_0 e T_m . Per il perimetro p della poligonale P si ha

$$p = \sum_i^{1,m} T_{i-1} T_i = \sum_i^{1,m} \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2}.$$

Se facciamo ora tendere a zero la massima τ fra le differenze $t_i - t_{i-1}$, tenderanno a zero tutti i lati della poligonale P , e se con

(*) *Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen* [Teubner, Leipzig und Berlin, 1918] p. 620.

ciò la variabile p ha un limite determinato e finito, è ben naturale chiamare tale limite *lunghezza dell'arco* $C(P', P'')$. Ora, effettivamente, si ha

$$p = \sum_i^{1,m} \sqrt{[x'(t_i')]^2 + [y'(t_i'')]^2 + [z'(t_i''')]^2} (t_i - t_{i-1}),$$

t_i', t_i'', t_i''' essendo punti dell'intervallo (t_{i-1}, t_i) , e per la continuità della funzione $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ e delle derivate $x'(t), y'(t), z'(t)$, si può asserire (*Oss. 3^a del n° 91*) l'esistenza di un determinato limite finito per la variabile p , e di più che

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} p = \int_{t'}^{t''} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Come *lunghezza dell'arco* $C(P', P'')$ di curva regolare continua, privo di punti singolari ad esso interni e di intervallo base finito (t', t'') ($t' < t''$), assumeremo dunque la quantità

$$\int_{t'}^{t''} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \int_{t'}^{t''} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

L'arco $C(P', P'')$ di intervallo base finito (t', t'') ($t' < t''$) contenga ora i punti singolari A_1, A_2, \dots, A_n , ad esso interni, come *lunghezza dell'arco* si assumerà la quantità

$$\text{lung arco } C(P', A_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \text{lung arco } C(A_i, A_{i+1}) + \text{lung arco } C(A_n, P'').$$

Ed evidentemente, si ha ancora:

$$\text{lung arco } C(P', P'') = \int_{t'}^{t''} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Se A e B sono due punti arbitrarii su C , corrispondenti ai valori (finiti) a e b del parametro t , chiameremo *misura algebrica dell'arco orientato* $C(A, B)$, di origine in A e terminato in B , e la indicheremo con *mis alg* $C(A, B)$, quel numero algebrico che ha per modulo la lunghezza dell'arco, ed è positivo o negativo secondochè B segue o precede A . Si ha evidentemente

$$\text{mis alg } C(A, B) = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (a \leq b).$$

Se P_1, P_2, \dots, P_n sono punti arbitrari di C , sussiste la relazione di *Chasles*.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \text{mis alg } C(P_i, P_{i+1}) = \text{mis alg } C(P_1, P_n).$$

Fissiamo su C un punto O , corrispondente al valore t_0 del parametro t , preso un punto P variabile su C , diremo sua *ascissa curvilinea su C , di origine O* , od anche *arco di C di origine O* , la misura algebrica dell'arco orientato $C(O, P)$, di origine in O , e terminato in P . Detta s tale ascissa curvilinea, questa è una funzione del parametro t definita dall'eguaglianza

$$(2) \quad s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2} d\tau.$$

Per due punti P' e P'' di C si ha:

$$\text{mis alg } C(P', P'') = \text{ascissa } P'' - \text{ascissa } P'.$$

Diciamo a_1, a_2, \dots, a_n i valori di t corrispondenti ai punti singolari A_1, A_2, \dots, A_n della curva C . La funzione $s(t)$ definita dalla (2) è continua e sempre crescente in (a', a'') , nulla in t_0 , derivabile in ogni punto diverso dai punti a_i , con derivata continua, data da

$$(3) \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \equiv H(t),$$

derivabile a destra e derivabile a sinistra in ogni punto a_i . Queste proprietà caratterizzano, com'è subito visto, la funzione $s(t)$.

Poichè $ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$, questa radice quadrata chiamasi il *differenziale dell'arco di C* .

Sia finito l'intervallo base (a', a'') della curva C , se assumiamo l'origine O delle ascisse su C , nel punto A' , mentre t varia crescendo da a' a a'' , la s varia crescendo da zero a l , avendo indicato con l la lunghezza totale della curva C . Se l'intervallo (a', a'') non è finito, alla curva intiera C si attribuirà una lunghezza allora e allora soltanto che la funzione $H(t)$ riesca sommabile su (a', a'') e per lunghezza si prenderà sempre l'integrale di $H(t)$ esteso all'intervallo (a', a'') .

La funzione $s = s(t)$ è, in ogni caso, propriamente invertibile, sia $t = t(s)$ la funzione inversa, definita entro un certo intervallo (b', b'') , che potrà risultare anche non finito. Posto $x[t(s)] = \varphi(s)$, $y[t(s)] = \phi(s)$, $z[t(s)] = \chi(s)$, le equazioni parametriche della C , parametro essendo l'arco s , si scriveranno

$$(4) \quad x = \varphi(s), \quad y = \phi(s), \quad z = \chi(s),$$

per s variabile nell'intervallo base (b', b'') . Si ha, in virtù della (3) $(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2 + (dz/ds)^2 = 1$, e pertanto: *Se il parametro s che figura nelle equazioni parametriche (4) della curva regolare continua C è l'arco s della curva, le funzioni φ, ϕ, χ verificano, identicamente, la relazione*

$$[\varphi'(s)]^2 + [\phi'(s)]^2 + [\chi'(s)]^2 = 1.$$

Sussiste la proposizione reciproca

I coseni direttori dell'asse tangente positivo sono dati da

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}.$$

Curve piane. Se nelle definizioni precedenti facciamo $z(t) \equiv 0$, quelle definizioni si riferiranno alle curve regolari continue del piano (x, y) . Per l'arco s di una curva regolare continua del piano (x, y) , di equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$, si avrà

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

In particolare, se la curva ha la rappresentazione cartesiana $y = f(x)$, si trova

$$s(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + [f'(\xi)]^2} d\xi.$$

I coseni direttori, nel piano (x, y) , dell'asse tangente positivo τ sono dati da

$$\cos(x, \tau) = \frac{dx}{ds}, \quad \cos(y, \tau) = \sin(x, \tau) = \frac{dy}{ds}.$$

Coordinate polari. Nell'intervallo (a', a'') dell'asse t siano definite le tre funzioni continue $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $\theta(t)$, la prima essendo sempre

positiva. Il punto P dello spazio di coordinate polari $\rho(t), \varphi(t), \theta(t)$, al variare di t in (a', a'') , descriverà, per definizione, una curva regolare continua di base (a', a'') se (cfr. pag. 173) tale è il luogo descritto dal punto di coordinate cartesiane

$$x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \varphi.$$

Si ha allora

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi d\theta^2,$$

e se la curva è nel piano (x, y) $|\varphi(t) \equiv \pi/2|$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

Osservazione. Ovviamente, la lunghezza dell'arco $C(P', P'')$ è indipendente dal parametro al quale si riferiscono i punti della curva. Ciò risulta anche dall'espressione di tale lunghezza: se invero τ è un altro parametro di riferimento del quale t è funzione monotona e derivabile con derivata continua e mai nulla, e se $x(t) = \xi(\tau)$, $y(t) = \eta(\tau)$, $z(t) = \zeta(\tau)$, $\tau' = \tau'(t)$, $\tau'' = \tau''(t)$, si ha (106, I)

$$\int_t^{t''} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \int_{\tau}^{\tau''} \sqrt{[\xi'(\tau)]^2 + [\eta'(\tau)]^2 + [\zeta'(\tau)]^2} d\tau.$$

Esercizi. 1°) Se $C(P', P'')$ è un arco di curva regolare continua e P una qualsivoglia poligonale inscritta all'arco, si dimostri che

$$\text{lung arco } C(P', P'') \geq \text{perimetro di } P,$$

il segno « $=$ » potendo sussistere allora e allora soltanto che sia $C(P', P'') \equiv P$.

2°) Sia P un punto regolare della curva regolare continua C e siano P' e P'' due punti variabili di C contenuti nella sfera di raggio r e di centro in P , si dimostri che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{lung arco } C(P', P'')}{P'P''} = 1.$$

120*. **Curve continue rettificabili.** — Sia ora C la più generale curva continua (p. 168), è assai interessante, per importanti questioni di *Analisi matematica*, dare il concetto di *lunghezza* per un arco $C(P', P'')$ della curva. A tale scopo consideriamo, di nuovo, la poligonale P , inscritta all'arco $C(P', P'')$, di vertici $T_0 \equiv P', T_1, T_2, \dots$,

$T_{m-1}, T_m \equiv P''$ (*) corrispondenti ai valori $t_0 = t', t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, t_m = t''$, suddividenti, nel modo più arbitrario, l'intervallo base (t', t'') supposto dapprima finito. Designamo con $L(t', t'')$ l'estremo superiore (finito o infinito) dell'insieme numerico descritto dal perimetro p della poligonale P al variare, in tutti i modi possibili, della suddivisione dell'intervallo (t', t'') . Tale estremo superiore si dirà la *lunghezza* dell'arco $C(P', P'')$. La curva C dicesi *rettificabile* se ogni suo arco di intervallo base finito ha sempre lunghezza finita (le curve continue regolari sono dunque — n° prec. — rettificabili). *Lunghezza* di una curva C rettificabile di intervallo base (a', a'') *infinito* è l'estremo superiore dell'insieme numerico costituito dalle lunghezze degli archi, della curva, di intervallo base finito. Sussiste il seguente importante teorema:

I. Per la lunghezza $L(t', t'')$ di un arco $C(P', P'')$ di intervallo base finito (t', t'') si ha

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} p = L(t', t''),$$

designando τ la massima fra le differenze $t_{i+1} - t_i$.

Per dimostrarlo, osserviamo anzitutto che, data la continuità delle funzioni $x(t), y(t), z(t)$, è possibile, comunque si assegni un numero positivo σ , trovarne un altro $\delta(\sigma)$ tale che, comunque si prendano due punti α e β in (t', t'') , la disequaglianza $|\beta - \alpha| < \delta(\sigma)$, abbia di conseguenza l'altra

$$\sqrt{[x(\beta) - x(\alpha)]^2 + [y(\beta) - y(\alpha)]^2 + [z(\beta) - z(\alpha)]^2} < \sigma.$$

Ciò posto, distinguiamo due casi secondochè L è finito o infinito. Sia, in primo luogo, L finito. Comunque si assegni un numero positivo ε è possibile inscrivere nell'arco $C(P', P'')$ una certa poligonale P' , per modo che per il relativo perimetro p' si abbia $p' > L - \varepsilon/2$. Sia m' il numero degli intervalli parziali secondo i quali è stato suddiviso l'intervallo base (t', t'') per la costruzione della poligonale P' e poniamo $\sigma = \varepsilon / (4m')$. Designamo con ω un numero positivo che sia minore di $\delta(\sigma)$ e del minimo degli intervalli parziali ora detti. Se farò vedere che per il perimetro p di ogni po-

(*) Non è detto che tutti questi punti riescano fra di loro distinti.

ligonale P corrispondente ad una suddivisione dell'intervallo (t', t'') in intervalli (t_i, t_{i+1}) ciascuno di ampiezza $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ non superiore a ω , si ha sempre $p > L - \varepsilon$, avrò dimostrato il teorema nel caso che consideriamo. Prendiamo, simultaneamente, i punti di suddivisione di (t', t'') relativi ad una tale poligonale P e alla speciale poligonale P' già considerata, e diciamo P'' la poligonale inscritta relativa alla totalità indicata di punti di suddivisione, p'' il perimetro di P'' . Si avrà $p'' \geq p' > L - \varepsilon/2$.

Siano $(t_{i_1}, t_{i_1+1}), (t_{i_2}, t_{i_2+1}), \dots$ quegli intervalli della suddivisione di (t', t'') relativa alla poligonale P , i quali contengono nell'interno punti t'_i della suddivisione di (t', t'') relativa alla poligonale P' . Ogni intervallo $(t_{i_s}, t_{i_s} + 1)$, $s = 1, 2, \dots$, non può contenere più di un punto t'_i , indichiamo con t'_{i_s} un tale punto. Diciamo l_{i_s} la lunghezza del lato di P relativo all'intervallo $(t_{i_s}, t_{i_s} + 1)$, l'_{i_s} e l''_{i_s} le lunghezze dei lati di P'' corrispondenti ai due intervalli secondo i quali il punto t'_{i_s} divide l'intervallo $(t_{i_s}, t_{i_s} + 1)$, si avrà

$$p'' = p + \sum_s (l'_{i_s} + l''_{i_s} - l_{i_s}) \leq p + \sum_s \varepsilon / (2m') \leq p + \varepsilon/2,$$

e quindi $p + \varepsilon/2 \geq p'' > L - \varepsilon/2$, $p > L - \varepsilon$.

Sia, in secondo luogo, infinito l'estremo superiore L . Comunque si assegni un numero positivo K si potrà inscrivere nell'arco $C(P', P'')$ una certa poligonale P' per modo che per il relativo perimetro p' si abbia $p' > K + \varepsilon/2$. Sia m' il numero degli intervalli parziali secondo i quali è stato diviso l'intervallo (t', t'') , poniamo $\sigma = \varepsilon / (4m')$ e indichiamo con ω un numero positivo minore di $\delta(\sigma)$ e del minimo di questi intervalli parziali, si vede allora, come nel caso precedente, che per il perimetro p di ogni poligonale P relativa ad una suddivisione dell'intervallo (t', t'') in parti ciascuna di ampiezza non superiore a ω , si avrà sempre $p > K$.

Dal teorema ora dimostrato segue che:

II. Se P è un punto dell'arco $C(P', P'')$ si ha

$$(1) \text{ lung arco } C(P', P) + \text{ lung arco } C(P, P'') = \text{ lung arco } C(P', P'').$$

Ed inverò, se P' e P'' sono due poligonali rispettivamente inscritte negli archi $C(P', P)$ e $C(P, P'')$, la poligonale $P = P' + P''$

è inscritta nell'arco $C(P', P'')$, ma si ha perimetro $P =$ perimetro $P' +$ perimetro P'' .

La curva continua C sia rettificabile; come al n° precedente si definisce l'arco $s(t)$ della C , avente per origine un determinato punto O di C . Tale arco $s(t)$ è (teor. II) una funzione crescente di t , e si dimostra (*Jordan, Cours d'Analyse*, volume primo) che essa è altresì continua.

Un importante concetto introdotto nell'Analisi dal *Jordan*, per le funzioni reali di un' unica variabile reale, è quello delle *funzioni a variazione limitata*. La funzione reale $f(x)$ della variabile reale x sia definita nell'intervallo finito (a, b) . Mediante i punti $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m = b$, suddividiamo, nel modo più arbitrario, l'intervallo (a, b) in intervalli parziali (x_{i-1}, x_i) e facciamo la somma:

$$V = \sum_{i=1}^m |f(x_{i-1}) - f(x_i)|.$$

Se l'insieme numerico descritto da V al variare, in tutti i modi possibili, della suddivisione dell'intervallo (a, b) , è superiormente limitato, la funzione $f(x)$ dicesi *a variazione limitata nell'intervallo (a, b)* . Evidentemente: Ogni funzione a variazione limitata nell'intervallo (a, b) , è ivi limitata ed è a variazione limitata in qualsiasi intervallo contenuto in (a, b) . Ciò posto è immediato che:

III. *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'arco $C(P', P'')$ abbia lunghezza finita è che le funzioni $x(t), y(t), z(t)$ siano, tutte e tre, a variazione limitata nell'intervallo base (t', t'') dell'arco.*

Si dimostra subito il teorema:

IV. *La funzione $f(x)$ sia continua nell'intervallo finito (a, b) e derivabile in ogni punto di questo, eccezion fatta, al più, per i punti di un certo insieme N , costituito da un numero finito di punti. Se la derivata $f'(x)$ è limitata e integrabile su ogni intervallo di (a, b) che non contenga punti di N ed è sommabile su (a, b) , la funzione $f(x)$ è a variazione limitata in (a, b) .*

Si ha inverò (104, III)

$$\sum_i^{1, m} \left| f(x_{i-1}) - f(x_i) \right| = \sum_i^{1, m} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) dx \right| \leq \sum_i^{1, m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(x)| dx = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Il teorema è dimostrato e ne segue (teor. III) che se le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, nell'intervallo base (t', t'') , verificano le ipotesi enunciate per la $f(x)$, l'arco $C(P', P'')$ avrà lunghezza finita. Ebbene sussiste il seguente teorema *Lebesgue-Tonelli* :

V. Se le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, nell'intervallo base finito (t', t'') , verificano, tutte e tre, le ipotesi del teor. IV per la funzione $f(x)$, si ha :

$$(1) \quad L = \text{lung arco } C(P', P'') = \int_{t'}^{t''} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Diciamo l_i la lunghezza del lato della poligonale P , inscritta all'arco $C(P', P'')$, relativo all'intervallo parziale (t_{i-1}, t_i) della suddivisione dell'intervallo base (t', t'') , operata dai punti $t_0 = t'$, $t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, t_m = t''$. Porremo $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, $H(t) = [x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2]^{1/2}$, e diremo τ la massima fra le τ_i . Cominciamo dal dimostrare la (1) nell'ipotesi che le funzioni $x(t), y(t), z(t)$ siano derivabili senza eccezione in tutto l'intervallo (t', t'') , con derivate limitate e integrabili. Siano A_i, B_i, C_i gli estremi superiori e a_i, b_i, c_i gli estremi inferiori, rispettivamente, di $|x'(t)|, |y'(t)|, |z'(t)|$ in (t_{i-1}, t_i) . Si ha

$$\tau_i \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2} \leq l_i \leq \tau_i \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2},$$

$$\tau_i \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2} \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} H(t) dt \leq \tau_i \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2},$$

e quindi

$$(2) \quad \sum_{i=1}^m \tau_i \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2} \leq p \leq \sum_{i=1}^m \tau_i \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2},$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^m \tau_i \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2} \leq \int_{t'}^{t''} H(t) dt \leq \sum_{i=1}^m \tau_i \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}.$$

Inoltre :

$$0 \leq \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2} - \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2} \leq \sqrt{(A_i - a_i)^2 + (B_i - b_i)^2 + (C_i - c_i)^2} \leq \\ \leq (A_i - a_i) + (B_i - b_i) + (C_i - c_i),$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^m \tau_i \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2} - \sum_{i=1}^m \tau_i \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2} \leq \\ \leq \sum_{i=1}^m (A_i - a_i) \tau_i + \sum_{i=1}^m (B_i - b_i) \tau_i + \sum_{i=1}^m (C_i - c_i) \tau_i,$$

e pertanto, in forza della supposta integrabilità delle $x'(t)$, $y'(t)$ e $z'(t)$,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^m \tau_i \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2} - \sum_{i=1}^m \tau_i \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2} \right) = 0.$$

Dalla (3) segue allora

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \tau_i \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \tau_i \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2} = \int_{t'}^{t''} H(t) dt,$$

ed infine dalla (2) se ne deduce

$$L = \lim_{\tau \rightarrow 0} p = \int_{t'}^{t''} H(t) dt,$$

cioè la (1). Per dimostrare ora il teorema in tutta generalità, possiamo evidentemente limitarci a considerare il caso che le funzioni continue $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ siano derivabili in ogni punto dell'intervallo (t', t'') , diverso dal punto t' , con derivate limitate e integrabili in qualsiasi intervallo di (t', t'') che escluda il punto t' . Dalla sommabilità di $x'(t)$, $y'(t)$ e $z'(t)$ segue la sommabilità di $H(t)$ (e viceversa). Comunque si assegni un numero positivo ϵ , ne esiste un altro ω tale che per $\tau < \omega$ riesce sempre $L - p < \epsilon$. Ma

$$\text{lung arco } C(T_1, P'') = \int_{t_1}^{t''} H(t) dt \geq l_2 + l_3 + \dots + l_m,$$

$$\text{lung arco } C(P', T_1) \geq l_1,$$

donde

$$L \geq l_1 + \int_{t_1}^{t''} H(t) dt \geq p,$$

e quindi, per $\tau < \omega$,

$$0 \leq l_1 + \int_{t_1}^{t''} H(t) dt - p \leq \varepsilon,$$

da cui, passando al limite per τ infinitesimo,

$$0 \leq \int_{t'}^{t''} H(t) dt - L \leq \varepsilon.$$

Osserviamo infine la proposizione: *La curva continua e rettificabile C , di intervallo base infinito (a', a'') , sia tale che, per ogni arco di essa di intervallo base finito si verificchino le ipotesi del teorema prec., allora condizione necessaria e sufficiente affinchè l'intera curva C abbia lunghezza finita è che le derivate $x'(t), y'(t), z'(t)$ siano sommabili sull'intervallo (a', a'') . Soddisfatta questa condizione la lunghezza di C sarà sempre data dall'integrale di $H(t)$ esteso all'intervallo (a', a'') .*

121. Definizioni e prime proprietà degli integrali curvilinei. — Nella teoria degli integrali curvilinei ci limiteremo sempre a considerare curve regolari continue di intervallo base finito e adotteremo sempre rappresentazioni parametriche di esse che ne conservino il carattere di continuità e di regolarità. Anzi, se t è il primitivo parametro di una curva regolare continua, supporremo sempre che ogni altro parametro che si consideri sia funzione di t ovunque derivabile con derivata continua e mai nulla. Sia A un insieme di punti dello spazio (x, y, z) e sia C una curva regolare continua di intervallo base $(0, l)$ e di equazioni parametriche

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s),$$

s designando l'arco della curva. Diremo che la curva C è *quasi contenuta* nell'insieme A se i valori di s , competenti ai punti di C che non sono contenuti in A , o non esistono o costituiscono un insieme di punti N_s di estensione nulla sulla retta. Nell'insieme A

sia definita una funzione reale o complessa $f(x, y, z)$, delle tre variabili reali x, y, z ; supposta, come sempre faremo, la curva C quasi contenuta in A , siano $P'(s')$ e $P''(s'')$ due punti di C ; diremo che la $f(x, y, z)$ è *sommabile* (è *sommabile e integrabile*) sull'arco $C(P', P'')$ se la funzione della s :

$$(1) \quad f[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)]$$

riesce sommabile (sommabile e integrabile) sull'intervallo $I(s', s'')$ determinato dai punti s' e s'' sull'asse s . In tal caso, diremo (*massimo o minimo*) *integrale curvilineo della f esteso all'arco $C(P', P'')$* della curva C e lo indicheremo con la notazione

$$\int_{C(P', P'')} f(x, y, z) ds,$$

l'integrale (*massimo o minimo*) della funzione (1) esteso all'intervallo $I(s', s'')$. Diremo (*massimo o minimo*) *integrale curvilineo della f esteso all'arco $C(P', P'')$ e nel verso secondo cui P'' segue P'* , e lo indicheremo con

$$(C) \int_{P'}^{P''} f(x, y, z) ds, \quad (C) \int_{(x', y', z')}^{(x'', y'', z'')} f(x, y, z) ds,$$

(se x', y', z' sono le coordinate di P' e x'', y'', z'' quelle di P'') l'integrale definito (*massimo o minimo*) della funzione (1) della s , esteso all'intervallo orientato (s', s'') di origine s' .

Se la curva C è data sotto forma parametrica la più generale, che conservi però sempre alla C i caratteri di regolarità,

$$x = \lambda(t), \quad y = \mu(t), \quad z = \nu(t),$$

designando con t' e t'' i valori di t relativi ai punti P' e P'' , *nell'ipotesi, per esempio, che la curva C sia totalmente contenuta in A o che l'insieme N_s sia costituito da un numero finito di punti*, si avrà, evidentemente (106, II)

$$\int_{C(P', P'')} f(x, y, z) ds = \int_{I(t', t'')} f[\lambda(t), \mu(t), \nu(t)] H(t) dt,$$

$$(C) \int_{P'}^{P''} f(x, y, z) ds = \pm \int_{t'}^{t''} f[\lambda(t), \mu(t), \nu(t)] H(t) dt,$$

col segno *più* o col *meno* secondochè s è funzione crescente o decrescente di t , ove, come sempre, con $H(t)$ designamo la funzione positiva $[\lambda'(t)^2 + \mu'(t)^2 + \nu'(t)^2]^{1/2}$.

Se la curva C è totalmente contenuta in A e se la funzione f è continua, essa riesce sommabile e integrabile sull'arco $C(P', P'')$, la (1) è allora una funzione continua della s .

Siano ora $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ tre funzioni (reali o complesse) definite nell'insieme A e consideriamo la *forma differenziale lineare*

$$(2) \quad Xdx + Ydy + Zdz.$$

Sia τ l'asse tangente (positivo o negativo) alla curva C , supposta sempre quasi contenuta nell'insieme A . Diremo che la forma differenziale (1) è *sommabile* (è *sommabile e integrabile*) sull'arco $C(P', P'')$ se le *tre* seguenti funzioni della s :

$$(3) \quad \begin{cases} X[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)] \cos(x, \tau), \\ Y[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)] \cos(y, \tau), \\ Z[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)] \cos(z, \tau), \end{cases}$$

riescono sommabili (sommabili e integrabili) sull'intervallo $I(s', s'')$. Diremo in tal caso (*massimo o minimo*) *integrale curvilineo della forma differenziale* (2) *esteso all'arco* $C(P', P'')$ *e nel verso secondo cui* P'' *segue* P' , e lo indicheremo con una delle notazioni

$$(4) \quad (C) \int_{P'}^{P''} (Xdx + Ydy + Zdz), \quad (C) \int_{(x', y', z')}^{(x'', y'', z'')} (Xdx + Ydy + Zdz),$$

il seguente integrale

$$\int_{I(s', s'')} \{ X[\varphi, \psi, \chi] \cos(x, \tau) + Y[\varphi, \psi, \chi] \cos(y, \tau) + Z[\varphi, \psi, \chi] \cos(z, \tau) \} ds,$$

ove τ designa l'asse tangente alla curva C volto nel verso secondo cui il punto P'' segue P' . Si ha evidentemente

$$(C) \int_{P'}^{P''} (Xdx + Ydy + Zdz) =$$

$$= \int_{s'}^{s''} [X(\varphi, \psi, \chi)\varphi' + Y(\varphi, \psi, \chi)\psi' + Z(\varphi, \psi, \chi)\chi'] ds = [\text{se, per esem-}$$

pio, N_s non esiste o è costituito da un numero finito di punti] =

$$= \int_{t'}^{t''} [X(\lambda, \mu, \nu)\lambda' + Y(\lambda, \mu, \nu)\mu' + Z(\lambda, \mu, \nu)\nu'] dt.$$

Se le equazioni della curva C possansi mettere, per esempio, sotto la forma $x = x, y = \mu(x), z = \nu(x)$, l'integrale curvilineo ora considerato è dato anche da

$$\int_{x'}^{x''} [X(x, \mu, \nu) + Y(x, \mu, \nu)\mu' + Z(x, \mu, \nu)\nu'] dx.$$

Evidentemente: Se P_1, P_2, \dots, P_n sono i più arbitrari punti di C , si ha

$$(C) \int_{P_n}^{P_1} f ds + \sum_i^{1, n-1} (C) \int_{P_i}^{P_{i+1}} f ds = 0,$$

$$(C) \int_{P_n}^{P_1} (Xdx + Ydy + Zdz) + \sum_i^{1, n-1} (C) \int_{P_i}^{P_{i+1}} (Xdx + Ydy + Zdz) = 0;$$

se, lungo i punti di $C(P', P'')$, le funzioni X, Y, Z ricevono valori tali che la somma $|X| + |Y| + |Z|$ non superi mai la quantità positiva M , si avrà:

$$\left| (C) \int_{P'}^{P''} (Xdx + \dots) \right| \leq M \text{ lung arco } C(P', P'').$$

La curva C sia ora chiusa. Per (minimo o massimo) integrale curvilineo della funzione f o della forma (2) esteso alla curva intiera, in un determinato verso, si intende il (minimo o massimo) integrale curvilineo della funzione o della forma esteso, nel verso indicato, all'arco, coincidente con la curva intiera, determinato sulla curva da due quali si vogliono punti coincidenti di essa. È subito visto

che il valore dell'integrale non dipende dalla particolare posizione dei considerati punti coincidenti della curva. Gli integrali curvilinei estesi alla curva chiusa C si indicheranno con le notazioni

$$\int_{\pm C} f(x, y, z) ds, \quad \int_{\pm C} (Xdx + Ydy + Zdz),$$

col segno *più* o col *meno*, secondochè il verso dell'integrazione è quello positivo o quello negativo sulla curva. Si ha:

$$\int_{+C} f ds + \int_{-C} f ds = 0, \quad \int_{+C} (Xdx + \dots) + \int_{-C} (Xdx + \dots) = 0.$$

Se nelle precedenti definizioni si pone $z \equiv 0$, $\chi(s) \equiv \lambda(t) \equiv 0$, $f(x, y, 0) = f(x, y)$, $X(x, y, 0) = X(x, y)$, $Y(x, y, 0) = Y(x, y)$, si ottengono le definizioni degli integrali curvilinei — nel piano (x, y) — della funzione $f(x, y)$ o della forma differenziale $X(x, y)dx + Y(x, y)dy$.

Supporremo, da ora in poi, che le tre funzioni X, Y, Z , definite nell'insieme A , siano ovunque continue e che tale insieme sia dotato di punti interni. Vale allora, anzitutto, il teorema:

I. *Esista una funzione $f(x, y, z)$, definita in A , che, in ogni punto di $A - FA$, abbia sempre per differenziale totale la forma (2), tale cioè che, in ogni punto di $A - FA$, si abbia*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = Z;$$

allora, se l'arco $C(P', P'')$ è contenuto in $A - FA$, l'integrale curvilineo (4) dipende soltanto dai punti terminali P' e P'' dell'arco, ed ha il valore $f(P'') - f(P')$.

Per dimostrare il teorema, cominciamo dal supporre l'arco $C(P', P'')$ privo di punti singolari. Si ha (57, I).

$$\begin{aligned} (C) \int_{P'}^{P''} (Xdx + Ydy + Zdz) &= \int_t^{t''} [f_x(\lambda\mu\nu)\lambda' + f_y(\lambda\mu\nu)\mu' + f_z(\lambda\mu\nu)\nu'] dt = \\ &= \int_t^{t''} \left[\frac{d}{dt} f(\lambda, \mu, \nu) \right] dt = f[\lambda(t''), \mu(t''), \nu(t'')] - f[\lambda(t'), \mu(t'), \nu(t')] = \\ &= f(P'') - f(P'). \end{aligned}$$

Se, in secondo luogo, l'arco $C(P', P'')$ contiene i punti singolari A_1, A_2, \dots, A_n , posto $A_0 \equiv P', A_{n+1} \equiv P''$, si ha

$$\begin{aligned} (C) \int_{P'}^{P''} (Xdx + Ydy + Zdz) &= \sum_i^{0, n} (C) \int_{A_i}^{A_{i+1}} (Xdx + Ydy + Zdz) = \\ &= \sum_i^{0, n} [f(A_{i+1}) - f(A_i)] = f(P'') - f(P'). \end{aligned}$$

Nelle ipotesi del teorema ora stabilito, l'integrale della forma (2) esteso ad una curva regolare continua, chiusa, contenuta in $A - FA$, è dunque sempre nullo. Una qualsiasi funzione continua di una sola variabile è sempre il differenziale totale di un'altra funzione della stessa sola variabile; se, dunque, X dipende dalla sola x , Y dalla sola y , Z dalla sola z , e se C è una qualsivoglia curva regolare continua chiusa, contenuta in $A - FA$, si avrà

$$\int_{\pm C} Xdx = \int_{\pm C} Ydy = \int_{\pm C} Zdz = 0.$$

Sia ora A un dominio internamente connesso e siano P_0 e P due punti interni di A . Il punto P_0 potrà sempre essere congiunto con P mediante un arco di curva regolare continua $C(P_0, P)$ contenuto in $A - FA$. Sussiste, in tal caso, il teorema reciproco del precedente:

II. Se, fissato il punto P_0 interno al dominio internamente connesso A , e variando P e $C(P_0, P)$ in $A - FA$, l'integrale curvilineo

$$(5) \quad (C) \int_{P_0}^P (Xdx + Ydy + Zdz),$$

dipende soltanto da P , esso rappresenterà una funzione f di P , nulla in P_0 e che, in ogni punto di $A - FA$, è differenziabile ed ha per differenziale $Xdx + Ydy + Zdz$.

Cominciamo dal dimostrare che $f(P_0) = 0$. Se C è una qualsiasi curva regolare continua e chiusa, passante per P_0 , si ha, per ipotesi,

$$f(P_0) = \int_{+C} (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_{-C} (Xdx + Ydy + Zdz),$$

e quindi $f(P_0) = 0$. Dimostriamo ora che se $P(\xi, \eta, \zeta)$ è un punto di A interno, $\partial f / \partial \xi = X(\xi, \eta, \zeta)$. Sia I un intorno circolare di P , contenuto in A , e diamo a ξ un incremento infinitesimo $\Delta \xi$ in maniera che il punto $(\xi + \Delta \xi, \eta, \zeta)$ sia sempre contenuto in I . Per il calcolo di $f(\xi + \Delta \xi, \eta, \zeta)$ prendiamo, come curva di integrazione, la curva C di integrazione che ha servito per il calcolo di $f(\xi, \eta, \zeta)$, prolungata col segmento rettilineo congiungente i due punti (ξ, η, ζ) e $(\xi + \Delta \xi, \eta, \zeta)$, si vede allora che:

$$f(\xi + \Delta \xi, \eta, \zeta) - f(\xi, \eta, \zeta) = \int_{\xi}^{\xi + \Delta \xi} X(x, \eta, \zeta) dx,$$

d'onde segue, per la continuità della X ,

$$\lim_{\Delta \xi \rightarrow 0} \frac{f(\xi + \Delta \xi, \eta, \zeta) - f(\xi, \eta, \zeta)}{\Delta \xi} = X(\xi, \eta, \zeta).$$

Allo stesso modo si dimostra che $\partial f / \partial \eta = Y(\xi, \eta, \zeta)$, $\partial f / \partial \zeta = Z(\xi, \eta, \zeta)$ e se ne deduce (56, VII) — data la continuità delle X, Y, Z — la differenziabilità (e quindi la continuità) di f in ogni punto di $A - FA$.

Osservazione. Il richiedere che per due quali si vogliono archi, di curve regolari continue, $C_1(P', P'')$ e $C_2(P', P'')$, terminati a due arbitrari punti P' e P'' , si abbia sempre

$$(C_1) \int_{P'}^{P''} (Xdx + \dots) = (C_2) \int_{P'}^{P''} (Xdx + \dots),$$

equivale perfettamente a richiedere che per qualsiasi curva regolare continua chiusa C si abbia sempre

$$\int_{\pm C} (Xdx + \dots) = 0.$$

122. Integrazione delle forme differenziali lineari. — Il problema dell'integrazione delle forme differenziali lineari si pone al modo seguente: Nel dominio D , internamente connesso, dello spazio (x, y, z) siano assegnate tre funzioni continue $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$; definire in D una funzione $f(x, y, z)$, ivi continua, che,

in ogni punto interno di D , abbia per differenziale totale la forma differenziale lineare:

$$(1) \quad Xdx + Ydy + Zdz,$$

che verifichi cioè le equazioni:

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = Z.$$

Dicendo che la forma differenziale (1) è *integrabile in D* o che essa è *in D un differenziale*, intenderemo dire che il posto problema possiede soluzioni. Ogni soluzione del problema si dirà allora un *integrale della forma differenziale* (1). Il teorema IV del n° 57 dà immediatamente luogo al seguente:

I. Se la forma differenziale (1) è integrabile in D , detto $f_0(P)$ un particolare integrale di essa, ogni altro integrale è dato dalla formola

$$f(P) = f_0(P) + c,$$

ove c è una costante affatto arbitraria. Ad un integrale della forma si può, affatto arbitrariamente, prescrivere il valore α in un fissato punto P_0 , in seguito a che esso riesce individuato e si ha

$$f(P) = \alpha + f_0(P) - f_0(P_0).$$

Se la forma differenziale (1) è integrabile, chiameremo *integrale indefinito della forma* e lo designeremo con la notazione

$$\int (Xdx + Ydy + Zdz),$$

l'insieme degli integrali della forma. Se, pertanto, $f_0(P)$ è un particolare fra questi, si ha, per definizione,

$$\int (Xdx + Ydy + Zdz) = f_0(P) + c,$$

ove c è una costante arbitraria. Il teor. I del n° prec. ci dice che:

II. Se la forma differenziale (1) è in D integrabile, detto α il valore di un integrale f della forma nel punto P_0 , interno a D , per ogni altro punto P del pari interno a D deve risultare

$$(3) \quad f(P) = \alpha + (C) \int_{P_0}^P (Xdx + Ydy + Zdz),$$

essendo $C(P_0, P)$ un qualsiasi arco di curva regolare continua contenuto in $D - FD$, congiungente P_0 con P . Quindi, deve essere sempre nullo l'integrale della forma esteso ad una qualsiasi curva regolare continua chiusa interna a D .

Già questo teorema traccia la via da seguire per risolvere il posto problema dell'integrazione delle forme differenziali lineari. Ogni possibile soluzione del problema è data, in $D - FD$, dalla formola (3), e quindi assunte la (3) e, se si vuole, particolari tipi di curve congiungenti il fissato punto P_0 col punto variabile P , occorrerà soltanto verificare se, effettivamente, la funzione $f(P)$ definita dalla (3), soddisfa le (2) e se esiste una funzione continua in tutto D che, nell'interno, coincida con la $f(P)$. Tale via seguiremo fra poco. Ma vogliamo prima osservare un interessante caso in cui già i teoremi I e II del n° prec., danno condizioni necessarie e sufficienti per la risolubilità del posto problema dell'integrazione delle forme differenziali lineari. Esso caso è dato dal seguente teorema:

III. Il dominio limitato e internamente connesso D sia tale che, comunque si assegnino un punto Q della sua frontiera e un numero positivo ε , sia sempre possibile costruire un intorno circolare $I_\varepsilon(Q)$ di Q , su $D - FD$, in maniera che due qualsivogliano punti P' e P'' di esso possano sempre essere congiunti mediante un arco $C_\varepsilon(P', P'')$, di curva regolare continua, interno a D e di lunghezza non superiore a ε . Allora, condizione necessaria e sufficiente affinché la forma differenziale (1) sia in D integrabile è che l'integrale della forma, esteso ad una qualsiasi curva regolare continua chiusa interna a D , sia sempre nullo.

Occorre solo dimostrare la sufficienza della condizione. Sia P_0 un fissato punto interno a D e poniamo, per ogni altro tale punto P ,

$$g(P) = (C) \int_{P_0}^P (X dx + Y dy + Z dz),$$

ove $C(P_0, P)$ è un arco del pari interno a D . Si viene così (teor. II del n° prec.) a definire in $D - FD$ una funzione continua (anzi differenziabile) che, in ogni punto, ha per differenziale la (1). Dico che per ciascun punto Q di FD , esiste, determinato e finito, il limite

$$(4) \quad \lim_{P \rightarrow Q} g(P) \text{ (su } D - FD).$$

Diciamo, invero, M il massimo in D di $|X| + |Y| + |Z|$ e, scelto arbitrariamente, il numero positivo σ , poniamo $\varepsilon = \sigma/M$. Per due qualsivogliano punti P' e P'' dell'intorno $I_\varepsilon(Q)$ si ha $|f(P') - f(P'')| \leq \sigma$, poichè

$$f(P'') - f(P') = (C_\varepsilon) \int_{P'}^{P''} (X dx + Y dy + Z dz)$$

e quindi

$$|f(P') - f(P'')| \leq M \cdot \text{lung arco } C_\varepsilon(P', P'') \leq \sigma.$$

Indicando con $\gamma(Q)$ il limite (4), la funzione $f(P)$, definita in D dalle eguaglianze:

$$f(P) \begin{cases} = g(P) & \text{se } P \text{ è in } D - FD, \\ = \gamma(P) & \text{se } P \text{ è in } FD, \end{cases}$$

è continua in tutto D e, nell'interno, ha per differenziale la (1).

Condizioni di integrabilità della forma (1) assai più facilmente riscontrabili, nonchè espressioni dell'integrale della forma, si ottengono quando esistono e sono continue talune derivate parziali delle funzioni X, Y, Z . Si hanno, al riguardo, i seguenti teoremi:

IV. *In ogni punto interno di D esistano le derivate parziali X_y, Y_z, Z_x e siano finite e continue. Se il dominio D è rettangolare, condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità in esso della (1) è che, in ogni punto di $D - FD$, esistano altresì le derivate parziali X_z, Y_x, Z_y , e si verifichino le relazioni*

$$(5) \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}.$$

La condizione è necessaria. Se difatti esiste, in D , la funzione f verificante le (2) in ogni punto interno, dall'identità $f_x = X$, si deduce che esiste la derivata seconda mista f_{xy} e che $f_{xy} = X_y$, ma $f_y = Y$ e quindi (53, VI) deve esistere anche la derivata seconda mista f_{yx} e risultare $f_{yx} = f_{xy}$, deve cioè esistere anche la derivata Y_x e risultare $Y_x = X_y$. Ecc.

La condizione è sufficiente. Ed invero, fissato in D un arbitrario punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, per ogni punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ di D , consideriamo

l'integrale curvilineo della forma (1), nel verso secondo cui P segue P_0 , esteso all'arco $C(P_0, P)$ costituito dalla poligonale (che riesce sempre contenuta in D) avente i seguenti vertici:

$$(x_0, y_0, z_0), (\xi, y_0, z_0), (\xi, \eta, z_0), (\xi, \eta, \zeta),$$

e poniamo:

$$(6) \quad f(\xi, \eta, \zeta) = (C) \int_{P_0}^P (X dx + Y dy + Z dz) = \\ = \int_{x_0}^{\xi} X(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^{\eta} Y(\xi, y, z_0) dy + \int_{z_0}^{\zeta} Z(\xi, \eta, z) dz.$$

La funzione $f(\xi, \eta, \zeta)$, così definita in tutto D , è evidentemente ivi continua. E si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = X(\xi, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{\eta} Y_x(\xi, y, z_0) dy + \int_{z_0}^{\zeta} Z_x(\xi, \eta, z) dz = \\ = X(\xi, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{\eta} X_y(\xi, y, z_0) dy + \int_{z_0}^{\zeta} X_z(\xi, \eta, z) dz = X(\xi, \eta, \zeta), \dots$$

Il teorema è così dimostrato, e si vede che, insieme alla (6), si hanno altre cinque formole analoghe esprimenti l'integrale; si hanno in tutto sei formole, tante cioè quante sono le poligonali congiungenti P_0 con P , composte di tre lati del parallelepipedo rettangolo, a lati paralleli agli assi coordinati, del quale i punti P_0 e P sono due vertici opposti.

V. In ogni punto interno di D esistano le derivate parziali $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_x, Z_x$ e siano finite e continue. Se nel dominio esiste un tal punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ che il segmento $P_0 P$ che lo congiunge ad ogni altro punto P di esso è per intero contenuto nel dominio, condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità ivi della (1) è che, in ogni punto interno, esistano altresì le derivate parziali X_z, Y_x, Z_y e si verifichino le (5).

Basta dimostrare la sufficienza della condizione. Per ogni punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ del dominio si consideri l'integrale curvilineo della forma

(1) esteso, nel verso secondo cui P segue P_0 , al segmento rettilineo $C(P_0, P)$ congiungente P_0 con P , e consideriamo la funzione $f(\xi, \eta, \zeta)$ definita, nel dominio intero, dall'eguaglianza

$$f(\xi, \eta, \zeta) = (C) \int_{P_0}^P (X dx + Y dy + Z dz).$$

Se si pone

$$\lambda(t) = x_0 + (\xi - x_0)t, \quad \mu(t) = y_0 + (\eta - y_0)t, \quad \nu(t) = z_0 + (\zeta - z_0)t,$$

si ha

$$(7) \quad f(\xi, \eta, \zeta) = \int_0^1 [X(\lambda, \mu, \nu)(\xi - x_0) + Y(\lambda, \mu, \nu)(\eta - y_0) + Z(\lambda, \mu, \nu)(\zeta - z_0)] dt.$$

È evidente la continuità di f , laddove in ogni punto interno al dominio risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \int_0^1 \{ [X_x(\lambda, \mu, \nu)(\xi - x_0) + Y_x(\lambda, \mu, \nu)(\eta - y_0) + Z_x(\lambda, \mu, \nu)(\zeta - z_0)] t + X(\lambda, \mu, \nu) \} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ t \frac{d}{dt} X(\lambda, \mu, \nu) + X \right\} dt = X(\xi, \eta, \zeta), \dots \end{aligned}$$

VI. Se, in D , si ha

$$X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad Z = \sum_{i=1}^n Z_i,$$

laddove le funzioni continue X_i, Y_i, Z_i ($i=1, 2, \dots, n$) sono, nell'interno del dominio, differenziabili e omogenee di un comune grado α_i di omogeneità, **diverso da** -1 , e verificano le (5), la forma (1) riesce integrabile nel dominio.

Posto, invero,

$$(8) \quad f(x, y, z) = \sum_i^{1, n} \frac{1}{\alpha_i + 1} (x X_i + y Y_i + z Z_i),$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sum_i^{1, n} \frac{1}{\alpha_i + 1} \left(x \frac{\partial X_i}{\partial x} + y \frac{\partial Y_i}{\partial x} + z \frac{\partial Z_i}{\partial x} + X_i \right) = \\ &= \sum_i^{1, n} \frac{1}{\alpha_i + 1} \left(x \frac{\partial X_i}{\partial x} + y \frac{\partial X_i}{\partial y} + z \frac{\partial X_i}{\partial z} + X_i \right) = X, \dots \end{aligned}$$

Osservazioni. 1ª) Dei teorr. IV, V e VI che, in vari casi notevoli, risolvono il problema dell'integrazione delle forme differenziali lineari, solamente l'ultimo non impone alcuna particolarità al dominio D . Ma quest'ultimo teorema impone però fortissime restrizioni alle funzioni X, Y, Z . Il teor. IV è quello che richiede meno condizioni per le funzioni X, Y, Z , ma, d'altro canto, richiede che il dominio D si riduca ad un dominio rettangolare. È bene non tacere, fin da ora, che nell'integrazione delle forme differenziali lineari, salvo casi particolarissimi, non si può mai prescindere dalla considerazione del dominio. In seguito vedremo ulteriori casi di integrabilità della forma (1).

2ª) I teorr. IV, V e VI bastano già per le pratiche applicazioni. Non si dimentichi che le formole (6), (7) e (8) sono da riguardarsi come vere e proprie formole risolutive alle quali gioverà nelle applicazioni fare ricorso. Si noti la semplificazione che riceve la formola (7) se per punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ si può prendere l'origine delle coordinate. Essa si scrive allora:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \int_0^1 [\xi X(\xi t, \eta t, \zeta t) + \eta Y(\xi t, \eta t, \zeta t) + \zeta Z(\xi t, \eta t, \zeta t)] dt.$$

Forme differenziali lineari in due variabili. Se, in tutto ciò che precede, si pone $z \equiv 0$, $X(x, y, 0) \equiv X(x, y)$, $Y(x, y, 0) \equiv Y(x, y)$, $Z(x, y, 0) \equiv 0$, si ottiene la teoria dell'integrazione della forma differenziale lineare in due variabili

$$(9) \quad X(x, y) dx + Y(x, y) dy.$$

Le (5) si riducono all'unica condizione

$$(10) \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Lasciando al lettore la cura di enunciare i teorr. V e VI per

l' integrazione della forma differenziale (9), limitiamoci ad enunciare il seguente:

VII. In ogni punto interno del dominio D del piano (x, y) esista la derivata parziale X_y e sia finita e continua. Se il dominio è rettangolare, condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità in esso della forma (9) è che in ogni punto interno del dominio esista altresì la derivata parziale Y_x e verifichi la (10). Se $P_0(x_0, y_0)$ è un fissato punto del dominio, per l'integrale della forma si hanno allora le due espressioni:

$$f(\xi, \eta) = \int_{x_0}^{\xi} X(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{\eta} Y(\xi, y) dy = \int_{y_0}^{\eta} Y(x_0, y) dy + \int_{x_0}^{\xi} X(x, \eta) dx.$$

123*. **Estensioni.** — I concetti di porzione di curva regolare, di curva regolare continua, di curva continua, sono immediatamente estendibili al luogo descritto dal punto $P(t)[x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t)]$, di uno spazio $S_{(r)}$ ad un numero qualsiasi r di dimensioni, al variare del parametro t di cui le coordinate del punto sono assegnate funzioni. E lasciamo al lettore il compito di fare tale estensione e di estendere alle curve di $S_{(r)}$ le definizioni e i risultati contenuti nei n.° 49, 119, 120*, 121, 122. Ci limitiamo ad enunciare il seguente teorema:

Nel dominio D dello spazio $S_{(r)}$ siano definite le r funzioni continue X_1, X_2, \dots, X_r , delle r variabili reali x_1, x_2, \dots, x_r , per le quali funzioni, in ogni punto interno del dominio, esistano le $\binom{n}{2}$ derivate parziali $\partial X_h / \partial x_k$ ($h=1, 2, \dots, r-1, k=h+1, h+2, \dots, r$) e siano finite e continue. Se il dominio è rettangolare, condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità in esso della forma differenziale lineare

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_r dx_r,$$

è che in ogni punto interno esistano altresì le derivate parziali $\partial X_k / \partial x_h$ ($h=1, 2, \dots, r-1, k=h+1, h+2, \dots, r$) e verifichino le relazioni:

$$\frac{\partial X_h}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_h} \quad (h \neq k) \quad (h, k=1, 2, \dots, r).$$

Per l'integrale f della forma si ha allora :

$$f = \int_{x_1^0}^{\xi_1} X_1(x_1, x_2^0, x_3^0, \dots, x_r^0) dx_1 + \int_{x_2^0}^{\xi_2} X_2(\xi_1, x_2, x_3^0, \dots, x_r^0) dx_2 + \\ + \int_{x_3^0}^{\xi_3} X_3(\xi_1, \xi_2, x_3, x_4^0, \dots, x_r^0) dx_3 + \dots + \int_{x_r^0}^{\xi_r} X_r(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-1}, x_r) dx_r, \\ \dots \dots \dots ,$$

ove $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0)$ è un punto arbitrariamente fissato in D .

124. Dominii normali e dominii regolari del piano.—Nell'intervallo finito (c_1, c_2) dell'asse u siano definite due funzioni $\gamma_1(u)$ e $\gamma_2(u)$, continue con le loro derivate prime, tali che sia $\gamma_2(u) > \gamma_1(u)$ per $c_1 < u < c_2$. Ciascuno dei due dominii del piano (x, y) definiti dalle limitazioni

$$(1) \quad c_1 \leq x \leq c_2, \quad \gamma_1(x) \leq y \leq \gamma_2(x),$$

$$(2) \quad c_1 \leq y \leq c_2, \quad \gamma_1(y) \leq x \leq \gamma_2(y),$$

dicesi *dominio normale*, il primo rispetto all'asse x ed il secondo rispetto all'asse y . Evidentemente:

Ogni dominio normale è internamente connesso, limitato e (cfr. dim. del teor. IV del n° 92 e teor. I dello stesso numero) misurabile con un'area data da

$$(3) \quad \int_{c_1}^{c_2} [\gamma_2(u) - \gamma_1(u)] du.$$

La frontiera del dominio è costituita da una curva regolare continua semplice e chiusa, la quale si compone (per esempio se il dominio è normale rispetto all'asse x) delle due porzioni di curve regolari di equazioni $y = \gamma_1(x)$ e $y = \gamma_2(x)$, aventi per comune base l'intervallo (c_1, c_2) , e, quando $\gamma_1(c_1) < \gamma_2(c_1)$, del segmento rettilineo congiungente i due punti $[c_1, \gamma_1(c_1)]$ e $[c_1, \gamma_2(c_1)]$, quando $\gamma_1(c_2) < \gamma_2(c_2)$, del segmento rettilineo congiungente i due punti $[c_2, \gamma_1(c_2)]$ e $[c_2, \gamma_2(c_2)]$.

È subito visto che ogni *dominio normale gode della proprietà posseduta dai dominii considerati nel teor. III del n° 122*. Dimostriamo che:

I. Se le funzioni $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ sono continue nel dominio normale D ed esistono, in ogni punto interno, finite e continue, le derivate X_y e Y_x , essendo inoltre sempre $X_y = Y_x$, la forma differenziale $X dx + Y dy$ è integrabile in D .

Supponiamo il dominio normale rispetto all'asse x e definito dalle (1). Poniamo $\gamma(x) = [\gamma_1(x) + \gamma_2(x)]/2$ e designamo con $\varphi(x)$ una funzione della sola x , primitiva, in (c_1, c_2) , della funzione continua

$$X[x, \gamma(x)] + Y[x, \gamma(x)] \frac{d\gamma}{dx}.$$

Ponendo, per ogni punto (x, y) del dominio,

$$f(x, y) = \int_{\gamma(x)}^y Y(x, \eta) d\eta + \varphi(x),$$

si viene a definire (n° 117) una funzione continua, mentre per ogni punto interno al dominio si ha (n° 117)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Y(x, y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_{\gamma(x)}^y Y_x(x, \eta) d\eta - Y[x, \gamma(x)] \frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} = \int_{\gamma(x)}^y X_y(x, \eta) d\eta + X[x, \gamma(x)] = X(x, y).$$

Passiamo ora a definire i *dominii regolari* del piano (x, y) . Essi sono tutti quei domini del piano (x, y) suscettibili di una elementare decomposizione in domini normali. Evidentemente: *Ogni dominio regolare è limitato e misurabile ed ha una frontiera composta di porzioni di curve regolari.* Ogni triangolo, e quindi ogni poligono, del piano (x, y) è un dominio regolare. I punti non esterni ad un'ellisse formano un dominio regolare.

Sia T un dominio regolare, un punto P di FT che appartenga ad un'unica C fra le porzioni di curve regolari di cui si compone FT dicesi *regolare* per FT , la tangente e la normale in P alla C diconsi *tangente e normale* in P alla frontiera FT . Sia r una retta per P distinta dalla tangente t in P alla FT , è assai facile dimostrare, pensando che il punto P apparterrà alla frontiera di uno dei domini normali dei quali si compone T , che sulla retta r , da bande opposte rispetto a P , esistono due punti Q_i e Q_e , tali che il seg-

mento rettilineo PQ_i sia per intero contenuto in T e il segmento PQ_e , privato del punto P , sia contenuto in CT . L'asse r_i su r avente il verso \vec{PQ}_i lo diremo *l'asse della direzione r penetrante in T* , ovvero *l'asse interno della direzione r* , l'altro asse r_e su r avente il verso opposto (il verso di \vec{PQ}_e) lo diremo *l'asse della direzione r penetrante in CT* , ovvero *l'asse esterno della direzione r* . Se, in particolare, r è la retta normale in P alla FT , i due assi n_i e n_e su n , diconsi, in modo breve, rispettivamente, la *normale interna* e la *normale esterna* alla FT . Sia ora t' quell'asse sulla tangente t alla FT in P , tale che la coppia (t', n_i) risulti congruente con la coppia (x, y) degli assi coordinati, ebbene il verso dell'asse t' dicesi *verso positivo sulla frontiera di T* . Il *verso negativo* sulla frontiera di T è quello dell'asse opposto a t' . È ben intuitivo che il *verso positivo su FT* è quello del moto di un osservatore che, portato dal piano (x, y) vada percorrendo la frontiera di T , in modo che l'asse n_i sia volto dalla sua destra alla sua sinistra.

Osserveremo anche che: *Ogni dominio regolare gode della proprietà posseduta dai domini considerati nel teor. III del n° 122.*

Un dominio regolare internamente connesso dicesi *ad unico contorno* se la sua frontiera si compone di un'unica curva regolare continua semplice e chiusa. Quando, nel seguito, parleremo di curva regolare continua semplice e chiusa sottintenderemo sempre ch'essa sia l'intera frontiera di un dominio regolare ad unico contorno. Ma con ciò non si introduce limitazione alcuna all'insieme di tali curve, secondo quanto stabilisce il seguente *teorema Jordan-Osgood*:

La più generale curva regolare continua semplice chiusa (ad intervallo base finito) è sempre l'intera frontiera di un dominio regolare ad unico contorno.

Per quanto in grado di farlo, noi non daremo la laboriosa dimostrazione di questo teorema, al quale, del resto, non faremo ricorso (*) se non in due casi particolari: che la curva regolare continua si riduca ad una poligonale, ed in tal caso esso è contenuto

(*) Il teorema non ha ancora un analogo nello spazio, ed essendo perciò costretti ad evitarlo nello spazio, lo vogliamo noi evitare anche nel piano, allo scopo di mantenere una perfetta analogia (didatticamente utilissima) fra le due trattazioni nel piano e nello spazio.

nella *Geometria elementare*, che si sia nelle condizioni contemplate nel teor. VI del n° 130 ed in tal caso esso si può dimostrare facilmente.

Sia C una curva regolare continua semplice e chiusa, con $D_i C$ denoteremo il dominio regolare che l'ammette come completa frontiera, con $D_e C$ designeremo il dominio somma di C e del complementare di $D_i C$. Ogni punto interno a $D_i C$ si dice anche *interno alla curva C* ; ogni punto esterno a $D_i C$ (e quindi interno a $D_e C$) si dice anche *esterno alla curva C* . Le normali n_i e n_e interna ed esterna alla frontiera di $D_i C$ diconsi anche *normali interna ed esterna alla curva C* . I versi positivo e negativo sulla frontiera di $D_i C$ diconsi anche i *versi positivo e negativo sulla C* . È facile convincersi che è sempre possibile trovare una rappresentazione parametrica di una curva regolare continua semplice e chiusa C , in maniera che il verso positivo della curva, *relativo a tale rappresentazione*, coincida in ogni suo punto regolare con quello testè definito. *Per ogni curva regolare continua semplice e chiusa noi sottintenderemo sempre di adottare una tale rappresentazione*. Detta s l'ascissa curvilinea sulla curva, relativa ad una tale rappresentazione, i coseni di settori dell'asse tangente positivo t' saranno dati da

$$\cos(x, t') = \frac{dx}{ds}, \quad \cos(y, t') = \sin(x, t') = \frac{dy}{ds},$$

e quelli della normale interna n_i da

$$\cos(x, n_i) = -\frac{dy}{ds}, \quad \cos(y, n_i) = \sin(x, n_i) = \frac{dx}{ds}.$$

Siano $C, C_1, C_2, \dots, C_p, p+1$ curve regolari continue semplici e chiuse e supponiamo che le curve C_1, C_2, \dots, C_p siano, ciascuna, interne alla curva C , mentre ognuna di esse sia esterna ad una qualunque altra delle medesime. Un dominio regolare T , internamente connesso, che possa considerarsi il prodotto:

$$D_i C \cdot D_e C_1 \cdot D_e C_2 \cdot \dots \cdot D_e C_p,$$

dicesi un *dominio regolare connesso a $p+1$ contorni*. Si ha evidentemente

$$FT = C + C_1 + C_2 + \dots + C_p.$$

La curva C dicesi il *contorno esterno* del dominio T , la som-

ma $C_1 + C_2 + \dots + C_p$ il *contorno interno*. Per la curva C il verso positivo su di essa, a se considerata, coincide con quello su FT ; al contrario, per ogni curva del contorno interno, a se considerata, il verso positivo su di essa è l'opposto di quello su FT (*).

Sia ora T il più generale dominio regolare, connesso o no, e $X(x, y)$, $Y(x, y)$ due funzioni continue in esso definite. Il verso positivo su FT subordina sopra ogni curva regolare continua di cui si compone FT un determinato verso; supponiamo che sulla curva regolare continua C_h (di FT) ($h = 1, 2, \dots, n$) tale verso sia quello dell'asse tangente t_h . Come integrale curvilineo della forma differenziale $Xdx + Ydy$ esteso a FT , nel verso positivo, integrale designato con la notazione

$$\int_{+FT} (Xdx + Ydy),$$

intendiamo la somma

$$\sum_h^{1, n} \int_{C_h} [X \cos(x, t_h) + Y \cos(y, t_h)] ds.$$

Analogamente si definisce e si designa l'integrale curvilinea di $Xdx + Ydy$ esteso a FT , nel verso negativo.

Se, in particolare, il dominio T è regolare connesso a $p + 1$ contorni, di contorno esterno C e di contorno interno costituito curve C_1, C_2, \dots, C_p , si avrà

$$\int_{+FT} (Xdx + Ydy) = \int_{+C} (Xdx + Ydy) - \sum_j^{1, p} \int_{+C_j} (Xdx + Ydy).$$

Sussiste il teorema:

II. *Nelle ipotesi del teor. I si ha:*

$$(4) \quad \int_{+FD} (Xdx + Ydy) = 0.$$

(*) Per ragioni che risiedono nella teoria della connessione, la cui applicazione può qui essere evitata, ogni dominio regolare connesso a $p + 1$ contorni dicesi anche *a connessione* $(p + 1)^{pla}$ o *connesso* $p + 1$ volte, per $p = 0$ dicesi *semplicemente connesso*, per $p = 1$ *doppiamente connesso*.

L'integrale della forma differenziale $Xdx + Ydy$ esteso ad una qualunque curva regolare continua chiusa interna al dominio D , è invero (122, II) sempre nullo. Pertanto, se ε designa un'arbitraria quantità positiva minore di $(c_2 - c_1)/2$ e σ un'arbitraria quantità positiva o nulla minore del minimo in $(c_1 + \varepsilon, c_2 - \varepsilon)$ di $[\gamma_2(x) - \gamma_1(x)]/2$, per il dominio normale $D(\varepsilon, \sigma)$ ($\varepsilon > 0, \sigma > 0$), completamente interno a D , definito dalle limitazioni

$$c_1 + \varepsilon \leq x \leq c_2 - \varepsilon; \quad \gamma_1(x) + \sigma \leq y \leq \gamma_2(x) - \sigma,$$

si avrà

$$\int_{+FD(\varepsilon, \sigma)} (X dx + Y dy) = 0.$$

Ma, come facilmente si riconosce,

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{+FD(\varepsilon, \sigma)} (X dx + Y dy) &= \int_{+FD(\varepsilon, 0)} (X dx + Y dy), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{+FD(\varepsilon, 0)} (X dx + Y dy) &= \int_{+FD} (X dx + Y dy). \end{aligned}$$

Il dominio regolare T sia ora variabile, nel modo più arbitrario, entro il fissato dominio regolare A , ove sono definite le due funzioni continue $X(x, y), Y(x, y)$. Ponendo

$$(5) \quad H(T) = \int_{+FT} (X dx + Y dy),$$

si viene a definire una ben determinata funzione del dominio regolare T . Ebbene, è fondamentale il seguente teorema:

III. *La funzione di dominio regolare $H(T)$, definita dalla (5), è additiva.*

Dobbiamo dimostrare che se T, T', T'' sono domini regolari di A e se $T = T' + T''$, riesce

$$(6) \quad H(T) = H(T') + H(T'').$$

Se le frontiere FT' e FT'' non hanno in comune alcuna delle curve regolari di cui esse si compongono, risulta $FT = FT' + FT''$ e quindi la (5) è evidente. Nell'altro caso, poniamo

$$C' = FT \cdot FT', \quad C'' = FT \cdot FT'', \quad L = FT' \cdot FT''.$$

C', C'', L potranno essere composte di più curve regolari continue. E si ha $FT = C' + C''$, $FT' = C' + L$, $FT'' = C'' + L$. Indicando con t, t', t'' gli assi tangenti positivi delle frontiere FT, FT', FT'' , risulta,

$$\begin{aligned} \text{su } C', \quad t' &\equiv t \\ \text{su } C'', \quad t'' &\equiv t \\ \text{su } L, \quad t'' &\text{ opposto a } t', \end{aligned}$$

$$H(T') = \int_{C'} [X \cos(x, t') + \dots] ds + \int_L [X \cos(x, t') + \dots] ds,$$

$$H(T'') = \int_{C''} [X \cos(x, t'') + \dots] ds + \int_L [X \cos(x, t'') + \dots] ds,$$

e quindi

$$H(T') + H(T'') = \int_{C'} [X \cos(x, t') + \dots] ds + \int_{C''} [X \cos(x, t'') + \dots] ds = H(T).$$

Da questo e dal teor. II segue il classico teorema:

IV. Se X e Y sono funzioni continue nel dominio regolare A , le quali possiedono, in ogni punto interno di A , le derivate parziali X_y e Y_x , finite e continue ed eguali fra loro, si ha

$$H(A) = \int_{+FA} (X dx + Y dy) = 0.$$

Ed inverso se T_1, T_2, \dots, T_n sono i domini normali di cui si compone A , si ha (teor. II)

$$\int_{+FT_h} (X dx + Y dy) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

e d'altra parte (teor. prec.)

$$\int_{+FA} (X dx + Y dy) = \sum_h^{1, n} \int_{+FT_h} (X dx + Y dy).$$

Del teorema ora stabilito, dal quale trarremo importanti conseguenze nel prossimo capitolo, si può fare subito una notevole applicazione al problema dell'integrazione delle forme differenziali lineari

in due variabili. Quel teorema ci pone, difatti, in grado di dimostrare il seguente:

V. *Il dominio limitato e internamente connesso D abbia per frontiera un continuo e goda della proprietà posseduta dai domini considerati nel teor. III del n° 122 (in particolare sia regolare ad unico contorno). Se le funzioni $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ sono continue in D , ed in ogni punto interno sono dotate delle derivate parziali X_y e Y_x , finite e continue ed eguali fra loro, la forma differenziale $Xdx + Ydy$ è integrabile in D .*

Sia P_0 un fissato punto interno al dominio e P un punto variabile, del pari interno al dominio. Indicheremo qui con $C(P_0, P)$ una poligonale semplice (non intrecciata) completamente interna a D , congiungente P_0 con P . Dimostriamo anzitutto che l'integrale curvilineo

$$(7) \quad (C) \int_{P_0}^P (Xdx + Ydy),$$

non dipende affatto dalla poligonale $C(P_0, P)$ congiungente i due punti. Siano invero C' e C'' due tali poligonali, percorrendo la poligonale C' da P_0 a P si incontrino successivamente i punti $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n, Q_{n+1}$ da ciascuno dei quali partono due lati, uno della C' e l'altro della C'' , non coincidenti (i punti Q_1, Q_2, \dots, Q_n possono naturalmente anche mancare e ciò avverrà se le due poligonali non hanno altri punti comuni all'infuori di P_0 e di P , nel quale caso risulterà $Q_0 \equiv P_0, Q_{n+1} \equiv P$). Se facciamo vedere che

$$(C') \int_{Q_h}^{Q_{h+1}} (Xdx + Ydy) = (C'') \int_{Q_h}^{Q_{h+1}} (Xdx + Ydy) \quad (h = 0, 1, \dots, n),$$

avremo dimostrato l'indipendenza dell'integrale (7) dalla C . Effettivamente, le due poligonali $C'(Q_h, Q_{h+1})$ e $C''(Q_h, Q_{h+1})$, se non coincidono, costituiscono, insieme, la completa frontiera di un dominio regolare T_h (di un poligono) contenuto in D — in T_h non può essere contenuto alcun punto della FD poichè questa è per ipotesi un continuo — e pertanto, in forza del teorema precedente, si avrà:

$$\int_{\pm FT_h} (Xdx + Ydy) = (C') \int_{Q_h}^{Q_{h+1}} (Xdx + \dots) + (C'') \int_{Q_{h+1}}^{Q_h} (Xdx + \dots) = 0.$$

La (7) definisce, in ogni punto interno di D , una funzione $f(P)$, nulla in P_0 . Ripetendo il ragionamento fatto per dimostrare il teor. II del n° 121 subito si constata che la $f(P)$ è differenziabile in ogni punto interno del dominio e che in ogni tale punto si ha $f_x = X$, $f_y = Y$. Ne segue (121, I) che l'integrale della forma $Xdx + Ydy$, esteso ad una qualsiasi curva regolare continua chiusa, interna al dominio, è sempre nullo. Ma ciò (122, III) è condizione sufficiente per l'integrabilità della forma nel dominio. Un integrale di essa è definito dalla (7), per ogni punto interno al dominio, ove C può designare la più arbitraria curva regolare continua interna a D .

Osservazione. Salvo nel caso particolare contemplato dal teorema VI del n° 122, l'integrabilità della forma $Xdx + Ydy$, pur essendo le funzioni X e Y finite e continue con quante si vogliono loro derivate parziali, verificanti la relazione $X_y = Y_x$, **non** è dunque stata assicurata se, per esempio, il dominio è regolare connesso a più contorni. Tale integrabilità può allora effettivamente **non** sussistere. Sia $0 < r' < r''$ e consideriamo, per esempio, due circonferenze C' e C'' del piano (x, y) , di centro nell'origine e di raggi r' e r'' . Il loro insieme costituisce la frontiera di un dominio regolare connesso D a due contorni (di una corona circolare). Poniamo

$$X = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Le due funzioni X e Y sono in D finite e continue con tutte le loro derivate parziali e si ha inoltre $X_y = Y_x$. Nonostante, la forma $Xdx + Ydy$ **non** è integrabile in D (*). Considerando invero (122, II) una qualunque circonferenza C avente il centro nell'origine, tracciata in D , si ha:

$$\int_{+C} (Xdx + Ydy) = 2\pi.$$

(*) Si noti che le funzioni X e Y sono anche omogenee e dello stesso grado di omogeneità. Ma tale grado ha il valore -1 , precisamente escluso dal teor. VI del n° 122.

Sia C una curva regolare continua semplice e chiusa, contenente nel suo interno la circonferenza C' e contenuta nella considerata corona circolare. Se la C e la C' costituiscono insieme l'intera frontiera di un dominio regolare si ha sempre (teor. IV)

$$\int_{+C} (Xdx + Ydy) = \int_{+C'} (Xdx + Ydy) = 2\pi.$$

A tale risultato si giunge subito, direttamente, se, soltanto, detto (t', t'') l'intervallo base della curva C , essa, in coordinate polari, ha le equazioni parametriche $\rho = \rho(t)$, $\theta = \theta(t)$, ove — essendo $\rho(t) \geq r'$, $\rho(t') = \rho(t'')$, $\theta(t') = 0$, $\theta(t'') = 2\pi$ — le funzioni $\rho(t)$ e $\theta(t)$ sono finite e continue con le loro derivate prime. Si ha invero $x = \rho(t) \cos \theta(t)$, $y = \rho(t) \sin \theta(t)$, $x dy - y dx = \rho^2(t) d\theta$, e quindi

$$\int_{+C} (Xdx + Ydy) = \int_{t'}^{t''} \frac{d\theta}{dt} dt = \theta(t'') - \theta(t') = 2\pi.$$

125. Formole di quadratura per i domini regolari. —

Sotto forma di un integrale curvilineo, il seguente teorema dà subito l'area di un qualunque dominio regolare.

I. Ogni dominio regolare T ha un'area T data da

$$(1) \quad T = \int_{+FT} x dy = - \int_{+FT} y dx = \frac{1}{2} \int_{+FT} (x dy - y dx).$$

Anzitutto è nullo (124, IV) l'integrale curvilineo di $x dy + y dx$ esteso a FT , e si ha dunque

$$\int_{+FT} x dy = - \int_{+FT} y dx = \frac{1}{2} \int_{+FT} (x dy - y dx).$$

Basta (124, III) dimostrare la (1) nell'ipotesi che T sia un dominio normale. Il dominio normale T sia definito dalle limitazioni $c_1 \leq x \leq c_2$, $\gamma_1(x) \leq y \leq \gamma_2(x)$, si ha

$$T = \int_{c_1}^{c_2} [\gamma_2(x) - \gamma_1(x)] dx,$$

ma, evidentemente, è

$$\int_{c_1}^{c_2} [\gamma_2(x) - \gamma_1(x)] dx = - \int y dx. \\ +FT$$

Introducendo le coordinate polari ρ e θ , sopra ciascuna porzione di curva regolare di cui si compone FT , quelle coordinate saranno funzioni finite e continue, con le loro derivate prime, di un certo parametro; e dalle relazioni $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, si trae

$$x dy - y dx = \rho^2 d\theta,$$

ne segue

II. *In coordinate polari ρ e θ , ogni dominio regolare T ha un'area data da*

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} \int \rho^2 d\theta. \\ +FT$$

Il dominio regolare T si riduca ad un settoreide del piano relativo alla funzione $f(\theta)$, avente per base l'intervallo (α, β) dell'asse θ ($0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$). La formola (2) dà allora

$$T = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta;$$

si ricade, in ipotesi più ristrette, nella (20) del n° 92.

126. Planimetri. — Realizzata, sopra una tavola da disegno perfettamente orizzontale, una precisa riproduzione grafica (in una conveniente scala) della frontiera di un dominio piano regolare, che possiamo supporre ad un solo contorno, valori abbastanza approssimati dell'area del dominio si possono anche avere impiegando speciali strumenti che vanno sotto il nome generico di *planimetri*. Di tali strumenti si fa largo uso in pratica, e specialmente nelle operazioni di *Topografia*. Sono in uso parecchi planimetri: I) il planimetro di *Amsler*, II) il planimetro compensato *Amsler-Corradi*, III) il planimetro a rulli di *Corradi*, IV) il planimetro del capitano *Prytz*. Noi qui ci limiteremo a dare una schematica descrizione del primo planimetro e a svolgerne completamente la razio-

nale teoria. La teoria del secondo planimetro è identica a quella del primo e la teoria del terzo può essere assai facilmente ottenuta al primo esame del funzionamento dell'apparecchio. Il planimetro di *Prytz* (detto anche *a scure*), meraviglioso per la sua semplicità, non è invece suscettibile di una razionale teoria, e noi ne sconsigliamo l'uso perchè — a nostro avviso — può dare talvolta risultati assai poco approssimati.

Una rotella r , perfettamente girevole intorno al suo asse α , sia poggiata sulla tavola da disegno, ed il suo asse sia animato da un arbitrario movimento, durante il quale però si mantenga sempre orizzontale. Una prima proposizione della teoria del planimetro di *Ams-ler* è la seguente: *Detta C la traiettoria sulla tavola da disegno del punto di contatto della rotella r, s l'arco di C, $\lambda(s)$ l'angolo dell'asse α con la tangente alla C, ρ il raggio della rotella, l'angolo di cui avrà ruotato la rotella (intorno al suo asse) alla fine del moto è dato da*

$$(1) \quad \omega = \frac{1}{r} \int_C \operatorname{sen} \lambda(s) ds.$$

La proposizione è evidente se la curva C è un segmento rettilineo e l'asse α mantiene una direzione costante. Supponiamo che la C sia una porzione di curva regolare di equazioni $x=x(s)$, $y=y(s)$, di base $(0, l)$ e di punti terminali P e Q . Designeremo con $\xi(s)$ e $\eta(s)$ i coseni direttori dell'asse α . Mediante i punti $s_0=0$, $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n=l$, dividiamo l'intervallo $(0, l)$ in intervalli parziali e diciamo $P_0 \equiv P$, $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n \equiv Q$, i punti di C relativi ai valori $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n$ del parametro s , σ la massima fra le differenze $s_i - s_{i-1}$ ($i=1, 2, \dots, n$). Possiamo *approssimativamente* riprodurre il moto del sistema asse α e rotella r al modo seguente: Mantenendo l'asse α nella direzione $[\xi(s_0), \eta(s_0)]$ facciamo percorrere al punto di contatto della rotella il segmento P_0P_1 ; giunti in P_1 , ruotando intorno alla verticale per P_1 , diamo all'asse α la direzione $[\xi(s_1), \eta(s_1)]$ e poscia, mantenendo l'asse in tale direzione, facciamo percorrere al punto di contatto della rotella il segmento P_1P_2 ; giunti in P_2 , ruotando intorno alla verticale per P_2 , diamo all'asse α la direzione $[\xi(s_2), \eta(s_2)]$ e poscia, mantenendo l'asse in tale direzione, facciamo percorrere al punto di contatto della rotella il segmento P_2P_3 , e così via. È intuitivo che il moto così ottenuto tanto meglio

(soltanto per quanto riguarda le successive posizioni) approssimerà il moto reale del sistema asse e rotella, quanto più piccolo è σ . Ora l'angolo di cui avrà ruotato la rotella (intorno al suo asse) alla fine del moto approssimativo descritto, è evidentemente dato da

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \{ \eta(s_{i-1}) [x(s_i) - x(s_{i-1})] - \xi(s_{i-1}) [y(s_i) - y(s_{i-1})] \} = \\ & = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n [\eta(s_{i-1}) x'(s'_i) - \xi(s_{i-1}) y'(s''_i)] (s_i - s_{i-1}), \end{aligned}$$

ove s'_i e s''_i sono certi punti dell'intervallo (s_{i-1}, s_i) . Ma (Oss. 3^a del n° 91) si ha

$$\begin{aligned} & \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\eta(s_{i-1}) x'(s'_i) - \xi(s_{i-1}) y'(s''_i)] (s_i - s_{i-1}) = \\ & = \int_0^l [\eta(s) x'(s) - \xi(s) y'(s)] ds = \int_C \text{sen } \lambda(s) ds, \end{aligned}$$

onde segue la (1). Se ne deduce la (1) anche se la curva C è la più generale curva regolare continua.

Consideriamo ora, poggiate sulla tavola da disegno, un'asta rigida mobile α , e nella sua direzione un asse di anomalia θ rispetto all'asse x . Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ due punti fissati sull'asta e l la misura algebrica del segmento P_1P_2 . Il movimento di α riescirà determinato con l'assegnare x_t, y_t e θ in funzione del tempo t , in un certo intervallo finito (t', t'') . Supponiamo che, al crescere di t da t' a t'' , i punti P_1 e P_2 descrivano, sempre in un verso, rispettivamente, le due curve regolari, continue e chiuse C_1 e C_2 e poniamo:

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_{t'}^{t''} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1), \quad A_2 = \frac{1}{2} \int_{t'}^{t''} (x_2 dy_2 - y_2 dx_2).$$

Se la curva C_h ($h=1$ o 2) è semplice, il valore assoluto di A_h darà l'area del dominio $D_i C_h$. Ma la curva C_h può non essere semplice; se, per esempio, ogni suo punto risulta doppio, se, cioè, durante il moto, il punto P_h percorre due volte una medesima curva C'_h , dapprima in un senso e poscia nel senso opposto, sarà $A_h = 0$; se la curva C_h ha un solo punto doppio, essa si compone

di due curve regolari continue semplici e chiuse C'_h e C''_h e si ha allora $|A_h| = |\text{area } D_i C'_h - \text{area } D_i C''_h|$. In ogni caso il numero (con segno) A_h sarà, in modo breve, chiamata l'area racchiusa dalla curva C_h . Si ha $x_2 = x_1 + l \cos \theta$, $y_2 = y_1 + l \sin \theta$, e quindi

$$(2) \quad x_2 dy_2 - y_2 dx_2 = x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + l^2 d\theta + l(\cos \theta dy_1 - \sin \theta dx_1 + x_1 \cos \theta d\theta + y_1 \sin \theta d\theta).$$

Ma: 1°) l'integrale di $d\theta$ esteso all'intervallo (t', t'') vale un multiplo di 2π , secondo un numero n (positivo o negativo, bene spesso nullo) per la cui precisa determinazione basta soltanto porre al moto dell'asta α ; 2°) integrando per parti si ottiene:

$$\int_{t'}^{t''} (x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta) d\theta = \int_{t'}^{t''} (\cos \theta dy_1 - \sin \theta dx_1),$$

poichè $\theta(t'') - \theta(t') = 2n\pi$, $x_1(t'') = x_1(t')$, $y_1(t'') = y_1(t')$; 3°) detto, come sopra, λ l'angolo del quale è inclinata l'asta α sulla tangente alla C_1 , si ha $\cos \theta dy_1 - \sin \theta dx_1 = \sin \lambda ds$, pertanto la (2) dà luogo alla seguente

$$(3) \quad A_2 = A_1 + n\pi l^2 + l \int_{C_1} \sin \lambda ds.$$

Tale relazione costituisce la seconda ed ultima proposizione della teoria del planimetro di *Amsler*, del quale ecco la schematica descrizione: Sull'asta rigida α siano fissati i tre punti P_0 , P' e P e siano l_0 e l le misure algebriche dei seguenti $P'P_0$ e $P'P$; nel punto P è fissata alla α una punta p che è mantenuta verticale e il punto P' è centro di una rotella r avente il raggio ρ della stessa lunghezza di p . La rotella r ha l'asse α ed è perfettamente girevole intorno al suo asse.

Sia C la riproduzione grafica sulla tavola da disegno dell'unico contorno di un dominio regolare del quale si vuole determinare l'area A . Mantenendo l'asta α orizzontale le si imprima un movimento durante il quale la punta p percorra, sempre in uno stesso verso, l'intero contorno C ; il punto di contatto della rotella e il punto P_0 descriveranno due curve regolari continue e chiuse C' e C_0 e, dette A' e A_0 le aree racchiuse da queste due curve, si ha:

$$A = A' + n\pi l^2 + l \int_C \operatorname{sen} \lambda \, ds, \quad A_0 = A' + n\pi l_0^2 + l_0 \int_C \operatorname{sen} \lambda \, ds,$$

e quindi

$$(4) \quad A = A_0 + n\pi(l^2 - l_0^2) + \rho(l - l_0)\omega,$$

in forza della (1), avendo designato con ω l'angolo di cui avrà ruotato, intorno al proprio asse, la rotella r quando la punta p ha percorso l'intero contorno C . Ora, evidentemente, nel compiere ciò, si può anche imporre al punto P_0 di descrivere una prestabilita curva chiusa C_0 della quale sia nota l'area A_0 da essa racchiusa. Se si prende per C_0 una retta si ha sempre $A_0 = 0$ e si ottiene il *planimetro rettilineo di Amster*. Se si prende per P_0 un cerchio si ottiene il *planimetro polare di Amster*. Quest'ultimo è il più usato, esso si realizza collegando a cerniera, alla a , in P_0 , una seconda asta rigida b munita all'altra estremità di una punta ad ago che può essere infissa sul foglio da disegno. In quei frequentissimi casi nei quali riesce $A_0 = 0$, $n = 0$, la (4) dà $A = \rho(l - l_0)\omega$, dà cioè che l'area A è *proporzionale all'angolo ω di cui avrà ruotato la rotella r quando la punta p ha percorso l'intero contorno C* . La costante $K = \rho(l - l_0)$ è una costante strumentale, data con l'apparecchio. L'angolo ω può essere facilmente letto, graduando la rotella e congegnando ad essa un *contagiri* e un *nonio*.



CAPITOLO VI.

INTEGRAZIONE NEL PIANO E NELLO SPAZIO.

§ 1. Calcolo degli integrali nel piano.

127*. Teoremi di Rolle, di Lagrange, di Cauchy, di l'Hospital (terza forma) e teorema di Darboux per le funzioni di due variabili. — Sia A un dominio rettangolare del piano (x, y) , di punti estremi (a', b') e (a'', b'') , od anche un dominio determinato dalle limitazioni

$$a' \leq x \leq a'', \quad b' \leq y \leq b'',$$

ove taluni o tutti i numeri a', a'', b', b'' possono essere infiniti. In A sia definita una funzione $F(x, y)$, delle due variabili reali x e y , ovunque totalmente derivabile e $f(x, y)$ ne sia la derivata totale. Sussiste la seguente proposizione:

I. Se, per ogni dominio rettangolare T , di punti estremi (α', β') e (α'', β'') , contenuto e variabile in A , poniamo:

$$(1) \quad \Phi(T) = F(\alpha'', \beta'') + F(\alpha', \beta') - F(\alpha'', \beta') - F(\alpha', \beta''),$$

nella famiglia $[A]_R$ dei domini rettangolari contenuti in A si definisce una funzione di dominio rettangolare additiva e primitiva della $f(x, y)$.

Cominciamo dal dimostrare l'additività di $\Phi(T)$. Sia, per esempio, α un punto interno all'intervallo (α', α'') , mediante la retta $x = \alpha$ il dominio rettangolare T risulta (elementarmente) decomposto nei due domini rettangolari T' e T'' di punti estremi (α', β') , (α, β') e (α, β'') , (α'', β'') , e si ha

$$\Phi(T') = F(\alpha, \beta'') + F(\alpha', \beta') - F(\alpha, \beta') - F(\alpha', \beta''),$$

$$\Phi(T'') = F(\alpha'', \beta'') + F(\alpha, \beta') - F(\alpha'', \beta') - F(\alpha, \beta''),$$

d'onde $\Phi(T') + \Phi(T'') = \Phi(T)$. Dimostriamo ora che se $P_0(x_0, y_0)$ è un qualsiasi punto di A , si ha

$$\lim_{T \rightarrow P_0} \frac{\Phi(T)}{T} \left\{ \text{su } [A]_R \right\} = f(P_0).$$

Comunque si assegni un numero positivo ε , esiste invero un dominio quadrato Q , di centro in P_0 , tale che se $P(x, y)$ è un qualunque punto di Q , A , per cui $(x - x_0)(y - y_0) \neq 0$, risulta sempre

$$(1) \quad f(P_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x, y) + F(x_0, y_0) - F(x, y_0) - F(x_0, y)}{(x - x_0)(y - y_0)} \leq f(P_0) + \varepsilon.$$

Sia T un qualsiasi dominio rettangolare contenuto in Q e contenente P_0 , se T ha in P_0 uno dei suoi vertici, posto $f(P_0) = f_0$, la (1) dice appunto che

$$(2) \quad (f_0 - \varepsilon) T \leq \Phi(T) \leq (f_0 + \varepsilon) T;$$

in ogni altro caso, le parallele agli assi coordinati per P_0 , decomporranno il dominio rettangolare T in domini rettangolari T_i ($i = 1, 2, \dots$), ciascuno dei quali ha un vertice in P_0 — in quattro tali domini se P_0 è interno a T , in due se P_0 è sulla frontiera di T . E dalle limitazioni

$$(f_0 - \varepsilon) T_i \leq \Phi(T_i) \leq (f_0 + \varepsilon) T_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

poichè $\sum_i T_i = T$, $\sum_i \Phi(T_i) = \Phi(T)$, sommate membro a membro, se gue, di nuovo, la (2).

Il teorema è così dimostrato, ed esso, in forza dei teorr. del n° 102*, offre immediatamente, in una terza forma, i teoremi (da avvicinare a quelli già ottenuti al n° 53) di **Rolle**, di **Lagrange**, di **Cauchy**, di **'Hospital**, e il teorema di **Darboux** per le funzioni di due variabili. Si hanno, per esempio, i teoremi seguenti.

II. Teorema di Cauchy. In un qualunque insieme A (dotato di punti interni) siano definite le due funzioni $F(x, y)$ e $G(x, y)$, entrambe totalmente derivabili in ogni punto di RA , con derivate totali $f(x, y)$ e $g(x, y)$. Presi due qualsivogliano punti $P'(x', y')$ e $P''(x'', y'')$ di A , se $(x'' - x')(y'' - y') \neq 0$ e se il dominio rettangolare $R(P', P'')$ — di cui P' e P'' sono una coppia di vertici opposti — è contenuto in A , esiste un punto H del dominio $R(P', P'')$ per il quale è

$$\begin{aligned} & [F(x'', y'') + F(x', y') - F(x'', y') - F(x', y'')] g(H) = \\ & = [G(x'', y'') + G(x', y') - G(x'', y') - G(x', y'')] f(H). \end{aligned}$$

III. Teorema di Darboux. La derivata totale $f(x, y)$ non può assumere in due punti P' e P'' di A , contenuti in un dominio rettangolare R contenuto in A , due valori diversi p' e p'' , senza assumere nel dominio R ogni valore compreso fra p' e p'' .

128*. Problema della ricerca delle funzioni di punto primitive di una data. — Sia A un qualsiasi insieme, dotato di punti interni, del piano (x, y) , ed in esso siano definite le due funzioni di punto $F(P)$ e $f(P)$; se, in ogni punto di RA , la funzione $f(P)$ è la derivata totale di $F(P)$, questa sarà detta *funzione primitiva* di quella. Vogliamo ora occuparci del problema della ricerca delle funzioni di punto primitive di una data, problema che enunceremo al modo seguente: *Assegnata in un insieme A una funzione di punto $f(P)$, definirne, in A medesimo, una funzione di punto primitiva.* Osserviamo, anzitutto, che il problema è indeterminato. Se, invero, $F_0(P)$ è definita in A ed è una particolare funzione primitiva della $f(P)$, dette $X(x)$ e $Y(y)$ le più arbitrarie funzioni, rispettivamente, della sola x e della sola y , definite, la prima, per ogni valore di x e la seconda per ogni valore di y , la funzione

$$F(x, y) = F_0(x, y) + X(x) + Y(y),$$

è, ancora, definita in A e primitiva della f .

Il teorema III del n° prec. assegna poi alla f una forte condizione necessaria per la risolubilità del problema.

Sia A un qualsiasi dominio del piano (x, y) e $[A]$ una famiglia di insiemi, contenuti in A , costituita da domini e (cfr. n° 99) dalla totalità $[A]_R$ dei prodotti di A per i domini rettangolari del piano avente punti interni in comune con A (*). Sussiste l'importante teorema:

I. *Nella famiglia $[A]$ sia definita la funzione additiva di dominio $\Phi(T)$ primitiva dell'assegnata funzione di punto $f(P)$. Fissato nel piano, arbitrariamente, un punto $P_0(x_0, y_0)$, per ogni altro punto $P(x, y)$, per cui $(x - x_0)(y - y_0) \neq 0$, indichiamo con $R(P_0, P)$ il dominio rettangolare di cui P_0 e P formano una coppia di vertici opposti, dico che la funzione di punto $F_0(P)$ definita in A dalle seguenti eguaglianze:*

$$(1) F_0(P) \begin{cases} = & \Phi[A \cdot R(P_0, P)], \text{ se } (x - x_0)(y - y_0) > 0 \text{ e se } A \cdot R(P_0, P) < [A]_R, \\ = & -\Phi[A \cdot R(P_0, P)], \text{ se } (x - x_0)(y - y_0) < 0 \text{ e se } A \cdot R(P_0, P) < [A]_R, \\ = & 0, \text{ negli altri casi,} \end{cases}$$

è primitiva della $f(P)$.

(*) Un tale prodotto può — eccezionalmente — non essere un dominio nel preciso senso da noi stabilito al n° 22; ma, per semplificare il discorso, qui, come del resto abbiamo già fatto al n° 99, seguireremo a chiamarlo dominio.

Per dimostrare il teorema, limitiamoci, per esempio, a considerare il rapporto incrementale totale di $F_0(x, y)$ per un punto $P(x, y)$ intorno ad \mathcal{A} , per il quale sia $x - x_0 < 0$, $y - y_0 > 0$. Diamo a x e a y tali incrementi Δx e Δy che il punto $P'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ sia contenuto in un intorno circolare del punto $P(x, y)$, a sua volta contenuto in \mathcal{A} . Diciamo P_1 il punto $(x + \Delta x, y)$, P_2 il punto $(x, y + \Delta y)$. Si ha, tenendo conto delle (1) e dell'additività di $\Phi(\mathcal{T})$,

$$\begin{aligned} & \frac{F_0(x + \Delta x, y + \Delta y) - F_0(x + \Delta x, y) - F_0(x, y + \Delta y) + F_0(x, y)}{\Delta x \Delta y} \\ &= \frac{-\Phi[\mathcal{A} \cdot \mathcal{R}(P_0, P')] + \Phi[\mathcal{A} \cdot \mathcal{R}(P_0, P_1)] + \Phi[\mathcal{A} \cdot \mathcal{R}(P_0, P_2)] - \Phi[\mathcal{A} \cdot \mathcal{R}(P_0, P)]}{\Delta x \Delta y} \\ &= \frac{\Phi[\mathcal{R}(P, P')]}{|\Delta x| |\Delta y|} = \frac{\Phi[\mathcal{R}(P, P')]}{\text{area } \mathcal{R}(P, P')}, \end{aligned}$$

ma, per essere $\Phi(\mathcal{T})$ funzione primitiva della f , posto $|\Delta x| + |\Delta y| = \sigma$, risulta

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\Phi[\mathcal{R}(P, P')]}{\text{area } \mathcal{R}(P, P')} = f(P).$$

Dal teorema ora dimostrato e dal teorema I del n° prec., segue evidentemente l'altro:

II. *Se la funzione $f(P)$ è assegnata in un dominio \mathcal{A} determinato dalle limitazioni $a' \leq x \leq a''$, $b' \leq y \leq b''$, ove taluni o tutti i numeri a' , a'' , b' , b'' possono essere infiniti, vi è perfetta equivalenza fra il problema della costruzione in \mathcal{A} di una funzione di punto primitiva della f e quello della costruzione in $[\mathcal{A}]_R$ della funzione di dominio rettangolare primitiva della stessa f . La (1) del n° prec. fa passare dalla prima alla seconda e le (1) del n° presente da questa a quella.*

Il teorema seguente assegna inoltre la totalità delle funzioni di punto primitive della f , nel dominio \mathcal{A} testè considerato.

III. *Se nel dominio \mathcal{A} considerato nel teor. prec., esiste una funzione di punto $F_0(P)$ primitiva della $f(P)$, ne esistono infinite, tutte contenute nella formola*

$$(2) \quad F(P) = F_0(P) + X(x) + Y(y),$$

ove $X(x)$ e $Y(y)$ sono le più arbitrarie funzioni della sola x e della sola y , rispettivamente definite negli intervalli (a', a'') , (b', b'') .

Ed invero, se $F(P)$ è in A una funzione di punto primitiva della $f(P)$, si ottengono in $[A]_R$ (127*, I) le due funzioni di dominio rettangolare T , di punti estremi (α', β') e (α'', β'') ,

$$\Phi(T) = F(\alpha'', \beta'') + F(\alpha', \beta') - F(\alpha', \beta'') - F(\alpha'', \beta'),$$

$$\Phi_0(T) = F_0(\alpha'', \beta'') + F_0(\alpha', \beta') - F_0(\alpha', \beta'') - F_0(\alpha'', \beta'),$$

entrambe primitive della $f(P)$. Ora in virtù del teor. IV del n° 100 si deve avere identicamente

$$(3) \quad \Phi(T) = \Phi_0(T),$$

e quindi, se $P_0(x_0, y_0)$ è un fissato punto di A e $P(x, y)$ un punto variabile di A , per cui $(x - x_0)(y - y_0) \neq 0$,

$$\Phi[R(P_0, P)] = \Phi_0[R(P_0, P)],$$

cioè [tanto se $(x - x_0)(y - y_0) > 0$ quanto se $(x - x_0)(y - y_0) < 0$]

$$\begin{aligned} F(x, y) + F(x_0, y_0) - F(x, y_0) - F(x_0, y) &= \\ = F_0(x, y) + F_0(x_0, y_0) - F_0(x, y_0) - F_0(x_0, y), \end{aligned}$$

d'onde

$$\begin{aligned} F(x, y) = F_0(x, y) + [F(x, y_0) - F_0(x, y_0)] + [F(x_0, y) - F_0(x_0, y)] + \\ + F_0(x_0, y_0) - F(x_0, y_0), \end{aligned}$$

ciò che dimostra il teorema, poichè $F(x, y_0) - F_0(x, y_0) + F(x_0, y) - F_0(x_0, y)$, $F(x_0, y) - F_0(x_0, y) - F(x_0, y_0)$ sono funzioni, rispettivamente, della sola x e della sola y . Si ha anche che:

IV. Se la funzione $f(P)$ è definita nel dominio A considerato nel teor. II, ed è ivi dotata di funzioni primitive di punto, fissato arbitrariamente un punto $P_0(x_0, y_0)$ di A , ogni tale funzione riesce completamente determinata con l'assegnarle, in modo affatto arbitrario, i valori $u(x)$ e $v(y)$ che deve, rispettivamente, assumere per $y = y_0$ e per $x = x_0$.

Deve necessariamente essere $u(x_0) = v(y_0) = w$, ove w indica il valore assegnato alla funzione primitiva nel punto (x_0, y_0) . Sia $F_0(x, y)$ una particolare funzione primitiva della f , definita in A ; poichè ogni altra tale funzione è data dalla formola (2), bisogna (e basta) costruire le funzioni $X(x)$ e $Y(y)$ per modo che risulti

$$(4) \quad \begin{cases} F_0(x, y_0) + X(x) + Y(y_0) = u(x), \\ F_0(x_0, y) + X(x_0) + Y(y) = v(y). \end{cases}$$

Si deve quindi avere $X(x_0) + Y(y_0) = w - F_0(x_0, y_0)$, e perciò, c designando una costante arbitraria, $X(x_0) = c$, $Y(y_0) = w - F_0(x_0, y_0) - c$, onde, dalle (4),

$$\begin{aligned} X(x) &= u(x) - F_0(x, y_0) + F_0(x_0, y_0) - w + c, \\ Y(y) &= v(y) - F_0(x_0, y) - c, \end{aligned}$$

ed infine troviamo che la richiesta funzione primitiva è perfettamente determinata e data dalla formola

$$(5) \quad F(x, y) = F_0(x, y) + [u(x) - F_0(x, y_0)] + [v(y) - F_0(x_0, y)] + F_0(x_0, y_0) - w.$$

Supporremo da ora in poi l'assegnata funzione $f(P)$ limitata in ogni insieme limitato contenuto in A ; facendo ricorso al teorema **Cauchy-Fubini** del n° 100 si dimostra allora immediatamente, anzitutto, il seguente:

V. *Se, nel qualsivoglia dominio A , la funzione $f(P)$ è dotata di funzione di dominio $\Phi(T)$ primitiva, la funzione di punto $F_0(P)$, pur essa primitiva della f , definita dalle (1), riesce continua in A . Se poi A è, in particolare, determinato dalle limitazioni $a' \leq x \leq a''$, $b' \leq y \leq b''$, tutte e sole le funzioni continue di punto, primitive della f , sono date dalla formola*

$$(6) \quad F(x, y) = F_0(x, y) + X(x) + Y(y),$$

ove la $F_0(x, y)$ è definita dalle (1) e le $X(x)$, $Y(y)$ sono arbitrarie funzioni continue, rispettivamente, negli intervalli (a', a'') , (b', b'') . Si ha pure

$$(7) \quad F(x, y) = F_0(x, y) + u(x) + v(y) - w \quad [w = u(x_0) = v(y_0)],$$

ove $u(x) = F(x, y_0)$, $v(y) = F(x_0, y)$.

Se ora, inoltre, supponiamo che la funzione $f(P)$ sia integrabile sopra ogni insieme limitato contenuto nel dominio A di sua definizione, facendo ricorso al teor. VIII del n° 100 e considerando che, per un punto P di A , l'integrale

$$\int_{A \cdot R(P_0, P)} f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

è nullo quando il prodotto $A \cdot R(P_0, P)$ non appartiene a $[A]_R$, poichè allora è nulla l'estensione (sul piano) di quel prodotto, indicando ancora con $R(P_0, P)$ il segmento dei punti P_0 e P , quando $x = x_0$, oppure $y = y_0$, perveniamo al teorema:

VI. L'assegnata funzione $f(x, y)$ sia limitata e integrabile su ogni insieme limitato contenuto nel suo dominio di definizione A , detto $P_0(x_0, y_0)$ un arbitrario punto del piano, se la f è dotata in A di funzione primitiva di dominio, fra le funzioni di punto primitive di essa trovasi la funzione continua definita dalle seguenti eguaglianze

$$(8) \quad F_0(x, y) \begin{cases} = \int f(\xi, \eta) d\xi d\eta & \text{se } (x - x_0)(y - y_0) \geq 0, \\ \mathbf{A. R.}_{(P_0, P)} \\ = - \int f(\xi, \eta) d\xi d\eta & \text{se } (x - x_0)(y - y_0) \leq 0. \\ \mathbf{A. R.}_{(P_0, P)} \end{cases}$$

Dal teor. I del n° prec. segue ancora che :

VII. Se, nelle ipotesi del teor. prec., è nota nel dominio A , una funzione di punto $F(x, y)$, primitiva della f , per ogni dominio rettangolare T di punti estremi (α', β') e (α'', β'') e contenuto in A , si ha sempre

$$(9) \quad \int_T f(x, y) dx dy = F(\alpha'', \beta'') + F(\alpha', \beta') - F(\alpha', \beta'') - F(\alpha'', \beta').$$

Questa formola fornisce dunque immediatamente il calcolo dell'integrale della f esteso ad un qualsiasi dominio rettangolare, non appena di essa sia nota una particolare funzione primitiva di punto. Si noti la perfetta analogia con le funzioni di una variabile (104, II).

L'assegnata funzione $f(x, y)$ sia ora supposta continua nel dominio A di sua definizione, essa (100, IX) vi è allora dotata di funzione primitiva di dominio, ed i risultati precedenti danno perciò luogo al seguente teorema :

VIII. Ogni funzione $f(x, y)$ continua in un dominio A vi è dotata di funzioni primitive di punto. Una fra queste è definita dalle (8), ed è pur essa continua. Se, in particolare, il dominio A è determinato dalle limitazioni $a' \leq x \leq a''$, $b' \leq y \leq b''$, le (8) si riducono all'unica seguente

$$(9) \quad F_0(x, y) = \int_{x_0}^x d\xi \int_{y_0}^y f(\xi, \eta) d\eta = \int_{y_0}^y d\eta \int_{x_0}^x f(\xi, \eta) d\xi ;$$

in tal caso, la funzione di punto primitiva della f , verificante le condizioni $F(x, y_0) = u(x)$, $F(x_0, y) = v(y)$, è data da

$$(10) \quad F(x, y) = u(x) + v(y) - w + \int_{x_0}^x d\xi \int_{y_0}^y f(\xi, \eta) d\eta \quad [w = u(x_0) = v(y_0)].$$

Dalle (9) si trae

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} = \int_{y_0}^y f(x, \eta) d\eta, \quad \frac{\partial F_0}{\partial y} = \int_{x_0}^x f(\xi, y) d\xi, \quad \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

e si ha perciò che: Se la $f(x, y)$ è continua nel dominio A determinato dalle limitazioni $a' \leq x \leq a''$, $b' \leq y \leq b''$, vi esiste una funzione di punto continua primitiva della f , parzialmente derivabile una prima volta rispetto alla x e rispetto alla y , con derivate continue, la cui derivata seconda mista dà pure la f . È bene altresì tenere presente che, anche quando la f non è continua, se la funzione di punto F , primitiva della f in qualsivoglia dominio A , è in RA parzialmente derivabile una prima volta rispetto alla x e rispetto alla y , la f è (53, I) la derivata seconda mista $F_{xy} = F_{yx}$, si ha cioè che: la derivata F_x è un integrale parziale di f rispetto alla y e la derivata F_y un integrale parziale rispetto alla x .

Osserviamo infine che: Quale si sia il dominio A , ogni funzione continua f vi possiede una funzione di punto primitiva, continua e dotata di derivate parziali del primo ordine del pari continue in A .

Ed invero, detta $g(x, y)$ (n° 118) una funzione continua in tutto il piano che, in A , coincida con la $f(x, y)$ e detto $P_0(x_0, y_0)$ un fisso punto del piano, la funzione

$$F_0(x, y) = \int_{x_0}^x d\xi \int_{y_0}^y g(\xi, \eta) d\eta$$

è, in A , primitiva della f , è continua e dotata di derivate parziali del primo ordine del pari continue.

129. Riduzione degli integrali delle funzioni continue estesi a domini regolari. — Nelle più importanti applicazioni si devono considerare integrali di funzioni continue estesi a domini rego-

lari; tali integrali sono suscettibili di nuove formole di riduzione che si devono aggiungere a quelle già date in generale al n° 92. A tali formole presiede il seguente *teorema di Green* di fondamentale importanza nell' *Analisi*:

I. Se le funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sono definite nel dominio regolare A e vi sono continue, la prima con la derivata parziale f_x e la seconda con la derivata parziale g_y , sussistono le relazioni:

$$(1) \quad \int_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{+FA} f dy, \quad \int_A \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = - \int_{+FA} g dx.$$

Osserviamo, anzitutto, che questo teorema è già stato stabilito al n° 125 nel caso particolare che sia $f(x, y) \equiv x$, $g(x, y) \equiv y$, e noi ora lo dimostreremo in generale con una dimostrazione analoga a quella data allora. Limitiamoci, per esempio, a dimostrare la prima delle (1). Siano T_1, T_2, \dots, T_n i domini normali di cui A è somma elementare, poichè

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \sum_i^{1, n} \int_{T_i} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy, \quad \int_{+FA} f dy = \sum_i^{1, n} \int_{+FT_i} f dy,$$

avremo, in generale, dimostrata la prima delle (1) se essa lo sarà nel caso particolare di un dominio normale T . Sia, dapprima, T normale rispetto all'asse y e definito dalle limitazioni $b' \leq y \leq b''$, $\beta'(y) \leq x \leq \beta''(y)$. Si ha:

$$\int_{+FT} f dy = \int_{b'}^{b''} \{ f[\beta''(y), y] - f[\beta'(y), y] \} dy = \int_{b'}^{b''} dy \int_{\beta'(y)}^{\beta''(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx = (p. 392) = \int_T \frac{\partial f}{\partial x} dx dy.$$

Sia, in secondo luogo, T normale rispetto all'asse x e definito dalle limitazioni $a' \leq x \leq a''$, $\alpha'(x) \leq y \leq \alpha''(x)$. Poniamo

$$\varphi(x, y) = \int_{\alpha'(x)}^y f_x(x, \eta) d\eta;$$

le funzioni f e φ sono continue in T e vi possiedono, in ogni punto interno di T , la prima, la derivata f_x e la seconda derivata φ_y , continue ed eguali fra loro, si ha allora (124, II o IV)

$$\int_{+FT} (\varphi dx + f dy) = 0,$$

e quindi

$$\int_{+FT} f dy = - \int_{+FT} \varphi dx = \int_{a'}^{a''} dx \int_{\alpha'(x)}^{\alpha''(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dy = \int_T \frac{\partial f}{\partial x} dx dy.$$

Diverse espressioni del teorema di Green. Le formole (1) equivalgono all'unica seguente:

$$(2) \quad \int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \int_{+FA} (f dy - g dx);$$

introducendo l'asse τ tangente positivo a FT e le normali interna ed esterna n_i e n_e , avendosi

$$\begin{aligned} \cos(x, \tau) &= \cos(y, n_i) = -\cos(y, n_e), \\ \cos(y, \tau) &= -\cos(x, n_i) = \cos(x, n_e), \end{aligned}$$

se ne deduce

$$\begin{aligned} \int_{+FA} (-g dx + f dy) &= \int_{FA} [-g \cos(x, \tau) + f \cos(y, \tau)] ds = \\ &= - \int_{FA} [g \cos(y, n_i) + f \cos(x, n_i)] ds = \int_{FA} [g \cos(y, n_e) + f \cos(x, n_e)] ds. \end{aligned}$$

Pertanto la formola (2) traducendo il teor. di **Green** si scrive anche

$$(3) \quad \int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \int_{FA} [f \cos(x, n_e) + g \cos(y, n_e)] ds = - \int_{FA} [f \cos(x, n_i) + g \cos(y, n_i)] ds.$$

Se, interpretando le funzioni f e g come le componenti di un vettore \mathbf{l} , si pone, come in *Fisica*,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{l},$$

indicando con n_i e con n_e i vettori unitarii che, in ogni punto di

FA hanno la direzione e il verso, rispettivamente, di n_i e di n_e , la formola (3) di **Green** si scrive anche al modo seguente

$$(4) \quad \int_A (\operatorname{div} \mathbf{l}) dx dy = \int_{FA} (\mathbf{l} \times \mathbf{n}_e) ds = - \int_{FA} (\mathbf{l} \times \mathbf{n}_i) ds.$$

Formole di integrazione per parti. Tali formole si ottengono dalle (1) ponendovi, in ciascuna, in luogo di f e di g il prodotto uv di due funzioni u e v continue, in A , con le loro derivate parziali del primo ordine; si ha allora

$$\int_A u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \int_{+FA} uv dy - \int_A \frac{\partial u}{\partial x} v dx dy,$$

$$\int_A u \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = - \int_{+FA} uv dx - \int_A \frac{\partial u}{\partial y} v dx dy.$$

Riduzione degli integrali. La funzione $f(x, y)$ sia definita nel dominio regolare A e vi sia continua. Indichiamo con i simboli

$$(5) \quad \int^x f(\xi, y) d\xi, \quad \int^y f(x, \eta) d\eta,$$

due funzioni continue in A , ottenute (n° 118) con una integrazione parziale della f rispetto alla x e rispetto alla y . In ogni punto interno di A riesce

$$\frac{\partial}{\partial x} \int^x f(\xi, y) d\xi = \frac{\partial}{\partial y} \int^y f(x, \eta) d\eta = f(x, y),$$

e quindi, per il teorema di **Green**,

$$(6) \quad \int_A f(x, y) dx dy = \int_{+FA} dy \int^x f(\xi, y) d\xi = - \int_{+FA} dx \int^y f(x, \eta) d\eta.$$

Adunque: *Il calcolo di ogni integrale di una funzione continua f , esteso ad un dominio regolare A , può ricondursi a quello di due successivi integrali semplici (anche) nel modo indicato dalle formole (6).*

Sono evidenti i vantaggi che possono presentare le formole di riduzione (6) sulle formole (16) del n° 92. Sia nota, per esempio, la

prima delle (5) ed indichiamola con $X(x, y)$ e il dominio regolare A sia ad unico contorno e sia (t', t'') l'intervallo base dell'unica curva regolare continua, semplice e chiusa C costituente la frontiera di A , siano $x = \lambda(t)$, $y = \mu(t)$ le equazioni parametriche di C , stabilenti su C il verso positivo che a questa compete come frontiera di A . Secondo le (6) si ha

$$(7) \quad \int_A f(x, y) dx dy = \int_{t'}^{t''} X[\lambda(t), \mu(t)] \frac{d\mu}{dt} dt,$$

laddove le (16) del n° 92 potrebbero (*praticamente*), pur conoscendo la funzione $X(x, y)$, non fornire alcun utile risultato poichè la sezione $S(y)$ del dominio A potrebbe anche, talvolta, essere costituita da infiniti intervalli.

Il dominio regolare A sia, per esempio, normale rispetto all'asse x e determinato dalle limitazioni $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq \alpha(x)$, essendo $\alpha(a) = \alpha(b) = 0$, la (7), nota la funzione $X(x, y)$, riconduce subito il calcolo dell'integrale doppio della f esteso al dominio A , al calcolo del seguente integrale semplice

$$-\int_a^b X[x, \alpha(x)] \alpha'(x) dx.$$

È nota una funzione primitiva*. Se è nota in A una funzione $F(x, y)$, primitiva della $f(x, y)$, dotata della derivata parziale F_x (della derivata F_y) finita e continua in A , si può porre

$$\int_0^y f(x, \eta) d\eta = F_x(x, y), \quad \left(\int_0^x f(\xi, y) d\xi = F_y(x, y) \right),$$

e si ha pertanto

$$\int_A f(x, y) dx dy = - \int_{+FA} F_x(x, y) dx,$$

$$\left(\int_A f(x, y) dx dy = \int_{+FA} F_y(x, y) dy \right).$$

Adunque: Ogni integrale esteso ad un dominio regolare A , di una funzione continua $f(x, y)$, della quale si conosce una funzione primiti-

va $F(x, y)$, dotata della derivata parziale F_x (della derivata parziale F_y) finita e continua, si calcola mediante un'integrazione semplice.

Se, in particolare, A è il dominio rettangolare di punti estremi (α', β') e (α'', β'') si trova:

$$\int_A f(x, y) dx dy = - \int_{+FA} F_x(x, y) dx = - \int_{\alpha'}^{\alpha''} F_x(x, \beta') dx + \int_{\alpha'}^{\alpha''} F_x(x, \beta'') dx =$$

$$= F(\alpha'', \beta'') - F(\alpha', \beta'') - F(\alpha'', \beta') + F(\alpha', \beta'),$$

come già sappiamo (128*, VII).

Applicazioni.* 1^a) Sul potenziale logaritmico di doppio strato. Sia $P(a, b)$ un punto arbitrariamente fissato nel piano, esterno al dominio regolare A , e per ogni altro punto $Q(x, y)$ del piano si ponga $\overline{PQ} = r$, e si denoti altresì con r l'asse avente la direzione e il verso del raggio vettore \overrightarrow{PQ} . Si osservino le relazioni.

$$(8) \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r} = \cos(x, r) \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r} = \cos(y, r) .$$

Sia U la più arbitraria funzione definita in A , ivi continua con ambo le sue derivate parziali del prim'ordine; se poniamo, nella (3), $f = (x-a) U/r^2$, $g = (y-b) U/r^2$ e se conveniamo di indicare semplicemente con n la normale esterna n_e alla FA , si trova la relazione

$$(9) \quad 0 = \int_{FA} U \frac{\cos(r, n)}{r} ds - \int_A \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} dT .$$

Sia ora $P(a, b)$ un arbitrario punto interno al dominio A e diciamo I un intorno circolare di P , di raggio ρ , interno, con la frontiera, al dominio A ; possiamo applicare la (9) al dominio regolare $A-I$, e si ottiene

$$(10) \quad 0 = \int_{FA} U \frac{\cos(r, n)}{r} ds + \int_{FI} U \frac{\cos(r, n)}{r} ds - \int_{A-I} \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} dT .$$

Ma, su FI , si ha $\cos(r, n) = -1$, r costante $= \rho$, e quindi

$$\int_{FI} U \frac{\cos(r, n)}{r} ds = -2\pi U(M) ,$$

ove M è un certo punto della circonferenza FI . Per la evidente

sommabilità su A di $\frac{dU}{dr} \frac{1}{r}$, passando al limite per ρ infinitesimo, si deduce dalla (10)

$$(11) \quad 2\pi U(P) = \int_{FA} U \frac{\cos(r, n)}{r} ds - \int_A \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} dT.$$

Le formole (9) e (11) sono assai importanti nella teoria del potenziale logaritmico. In virtù delle (8) si può scrivere $\cos(r, n)/r = d \log r / dn$, ed è facile vedere che per ogni punto P del piano (anche se P è su FA) ha senso l'integrale

$$W(P) = \int_{FA} U \frac{\cos(r, n)}{r} ds = \int_{FA} U \frac{d \log r}{dn} ds = \int_{FA} U \left(\frac{d}{dn_i} \log \frac{1}{r} \right) ds,$$

esso chiamasi *potenziale logaritmico di doppio strato, di momento U della linea o del sistema di linee costituenti FA* . Si dimostra immediatamente la uniforme sommabilità su A , nelle vicinanze di ogni punto del piano, della funzione $\frac{dU}{dr} \frac{1}{r}$, onde segue (95*, III) che l'integrale esteso ad A di tale funzione è una funzione continua in tutto il piano, e pertanto, dalle (9) e (11), la classica relazione di limite del potenziale logaritmico di doppio strato: In ogni punto P_0 di FA si ha:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} W(P) [\text{su } A - FA] - \lim_{P \rightarrow P_0} W(P) [\text{su } CA] = 2\pi U(P_0).$$

Nelle (9) e (11) si faccia $U \equiv 1$, si ha allora

$$(12) \quad \int_{FA} \frac{\cos(r, n)}{r} ds \begin{cases} = 0, & \text{se } P \text{ è esterno al dominio } A, \\ = 2\pi, & \text{se } P \text{ è interno al dominio } A. \end{cases}$$

A queste importanti formole si suole — per lo più — pervenire col ragionamento seguente di natura affatto intuitiva: Se si considera un archetto ds della frontiera FA subito si vede che la quantità $\cos(r, n) ds/r$ misura, *approssimativamente*, con un segno determinato, l'angolo sotto cui si vede detto archetto del punto P ; se, pertanto, supponiamo, *in particolare*, che FA si riduca ad un'unica curva regolare continua semplice e chiusa C , la somma di quegli angoli, cioè l'integrale (12), dovrà dare l'intero giro se P è interno a C , lo zero se P è esterno. Con tale (dal punto di vista analitico

inammissibile) ragionamento, si intuisce che l'integrale (12) deve valere π per ogni punto regolare di FA ; lo studioso dia di ciò la dimostrazione analitica.

2^a) **Proprietà fondamentali delle funzioni armoniche nel piano.** Le funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$ siano continue nel dominio D del piano (x, y) e, in ogni punto interno di D , siano dotate delle derivate $f_x, f_{xx}, f_y, f_{yy}, g_x, g_{xx}, g_y, g_{yy}$, finite e continue. Sia T un dominio regolare variabile sempre completamente interno a D , in virtù delle formole di **Green** si ha

$$\int_T \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} g - f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) dT = \int_T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} g - f \frac{\partial g}{\partial x} \right) dT = \int_{FT} \left(\frac{\partial f}{\partial x} g - f \frac{\partial g}{\partial x} \right) \cos(x, n) ds,$$

$$\int_T \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} g - f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) dT = \int_T \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} g - f \frac{\partial g}{\partial y} \right) dT = \int_{FT} \left(\frac{\partial f}{\partial y} g - f \frac{\partial g}{\partial y} \right) \cos(y, n) ds,$$

e quindi, sommando membro a membro,

$$(13) \quad \int_T (g \Delta_2 f - f \Delta_2 g) dT = \int_{FT} \left(g \frac{df}{dn} - f \frac{dg}{dn} \right) ds.$$

Ne segue: Se U e V sono (p. 259) due funzioni armoniche in D

$$(14) \quad \int_{FT} \left(V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn} \right) ds = 0,$$

ed in particolare, per $V \equiv 1$,

$$(15) \quad \int_{FT} \frac{dU}{dn} ds = 0.$$

Dalla (13), per $g \equiv 1$, segue che: *Il verificarsi della (15) per ogni dominio circolare o per ogni dominio quadrato, interno a D , è condizione sufficiente per l'armonicità in D della funzione U .*

Sia $P(a, b)$ un fissato punto interno ad un dominio regolare T (interno a D) e sia I un intorno circolare, di P , di raggio ρ , con la frontiera interno a T , poichè $\log r = \log [(x-a)^2 + (y-b)^2]^{1/2}$ è (p. 497) funzione armonica nel dominio regolare $T - I$, si deduce dalla (14), per $V = \log r$,

$$\int_{FT} \left(\frac{dU}{dn} \log r - U \frac{d \log r}{dn} \right) ds + \int_{FI} \left(\frac{dU}{dn} \log r - U \frac{d \log r}{dn} \right) ds = 0,$$

d'onde, in forza della (15), passando al limite per ρ infinitesimo,

$$(16) \quad U(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{FT} \left(U \frac{d \log r}{dn} - \frac{dU}{dn} \log r \right) ds .$$

Questa formola è *fondamentale* nella teoria delle funzioni armoniche. Essa fa conoscere la funzione armonica U nell'interno di T non appena siano noti sulla frontiera la U stessa e la sua derivata secondo la normale. Lo studioso ne deduca che: *Se la funzione U è armonica in D essa è analitica* (p. 299) *nell'interno di D .*

Sia T un dominio circolare di centro in P e di raggio R , dalla (16) si trae

$$(17) \quad U(P) = \frac{1}{2\pi R} \int_{FT} U ds ,$$

cioè: *La media dei valori che una funzione armonica in un dominio D prende su una circonferenza interna a D dà il valore della funzione nel centro della circonferenza.* Data la continuità di U ciò si verifica, di conseguenza, anche se la circonferenza è *soltanto* contenuta in D . Questa proprietà è caratteristica delle funzioni armoniche? Si risponde affermativamente col seguente teorema:

La funzione U sia continua nel dominio D , e, nell'interno, con le sue derivate parziali dei due primi ordini; se, per ogni punto P , interno a D , la media dei valori della funzione su ogni circonferenza di centro in P , interna a D , non dipende dal raggio della circonferenza, la funzione U è armonica in D . Dette, invero, ρ e θ le coordinate polari col polo in P , riesce

$$\int_0^{2\pi} U(\rho, \theta) d\theta = \text{costante} ,$$

e quindi

$$\int_0^{2\pi} U_\rho(\rho, \theta) d\theta = \int_{FT} \frac{dU}{dn} ds = 0 ,$$

per ogni dominio circolare T ; d'onde, come abbiamo visto, segue l'armonicità di U .

130. Cambiamento delle variabili. — Una prima trattazione del problema del cambiamento delle variabili negli integrali (anche) a due dimensioni è stata già fatta al n° 101; riprendiamo ora qui lo stesso argomento per completarlo e col calcolo — in tutta generalità — della funzione $J(Q)$ introdotta nei teoremi colà stabiliti e con nuovi teoremi che non rientrano in quelli. Siano

$$(1) \quad x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta),$$

le equazioni esprimenti le antiche variabili di integrazione x e y in funzione delle nuove ξ e η ; una notevolissima semplificazione riceve tutta la trattazione se si suppone, come appunto noi vogliamo qui fare, che: *Le funzioni φ e ψ siano definite in un dominio rettangolare $R_{\xi\eta}$ del piano (ξ, η) e vi siano parzialmente derivabili una prima volta, con derivate continue ed esistano inoltre, in ogni punto di $R_{\xi\eta}$, le derivate seconde miste*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta}$$

pur esse finite e continue (*).

Sia A un dominio del piano (x, y) e $f(x, y)$ una funzione integrabile definita in A , vogliamo esprimere l'integrale doppio

$$(2) \quad \int_A f(x, y) dx dy,$$

mediante le variabili ξ e η . Cominciamo dal supporre che il dominio A sia regolare e, per semplificare, ad unico contorno C . Siano $x = x(t)$, $y = y(t)$ le equazioni parametriche di C e (t', t'') ne sia l'intervallo base.

Supponiamo ora, per le (1), che nel dominio rettangolare $R_{\xi\eta}$ del piano (ξ, η) esista una curva regolare semplice e chiusa L , di equazioni parametriche $\xi = \xi(\tau)$, $\eta = \eta(\tau)$ e di intervallo base (τ', τ'') tale che: *Mentre il punto $Q(\xi, \eta)$ la percorre per intero, il punto $P(x, y)$, che le (1) fanno corrispondere a Q nel piano (x, y) , percorra per intero la curva C , non importa se non sempre in un verso, purchè non oltrepassi mai il punto di partenza e vi ritorni muovendosi nel verso del suo moto all'inizio, tale cioè che le equazioni*

(*) Quest'ultima condizione è superflua per la validità dei risultati che otterremo, noi però ad essa non rinunciamo perchè semplifica assai i ragionamenti.

$$(3) \quad \begin{cases} x(t) = \varphi[\xi(\tau), \eta(\tau)], \\ y(t) = \psi[\xi(\tau), \eta(\tau)], \end{cases}$$

possano essere simultaneamente verificate da una medesima funzione $t = t(\tau)$ della τ , definita in tutto l'intervallo (τ', τ'') , avente per minimo t' e per massimo t'' , mentre, agli estremi di (τ', τ'') , o è

$$(4) \quad t(\tau') = t', \quad t(\tau'') = t'',$$

oppure

$$(5) \quad t(\tau') = t'', \quad t(\tau'') = t'.$$

Diciamo $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ i valori di τ a cui corrispondono i punti singolari di L , la funzione $t(\tau)$ riuscirà (u¹ 75 e 76) continua in (τ', τ'') e derivabile, con derivata continua in ciascuno degli intervalli (τ', τ_1) , $(\tau_1, \tau_2), \dots, (\tau_{s-1}, \tau_s)$, (τ_s, τ'') , ciò perchè le derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ non sono mai contemporaneamente nulle. Si ha:

$$(6) \quad \begin{cases} x'(t) \frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \xi'(\tau) + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \eta'(\tau), \\ y'(t) \frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \xi'(\tau) + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \eta'(\tau), \end{cases}$$

Ciò premesso, facciamo le ulteriori seguenti ipotesi: **a**) la funzione $f(x, y)$ sia definita in tutto un dominio rettangolare R_{xy} del piano (x, y) , di punti estremi (a', b') e (a'', b'') e contenente il dominio regolare A , e sia in R_{xy} parzialmente derivabile una prima volta, con derivate continue; **b**) al variare del punto $Q(\xi, \eta)$ in $R_{\xi\eta}$ il punto P , che le (1) fanno corrispondere a Q , non esca mai da R_{xy} .

In queste ipotesi, posto

$$X(x, y) = \int_{a'}^x f(s, y) ds,$$

la $X(x, y)$ è in R_{xy} una funzione finita e continua con le sue derivate parziali del primo ordine e riesce $X_x = f$; le due funzioni di ξ e di η

$$f[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)], \quad X[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)]$$

risultano entrambe definite in $R_{\xi\eta}$ e ivi finite e continue con le loro derivate parziali del primo ordine. Si ha

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_{+C} X(x, y) dy = \int_{t'}^{t''} X[x(t), y(t)] y'(t) dt,$$

e se nell'integrale definito facciamo la sostituzione $t = t(\tau)$, otteniamo (106, III) in virtù delle (2) e (6),

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) dx dy &= \pm \int_{\tau'}^{\tau''} X(\varphi, \psi) \left[\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \xi'(\tau) + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \eta'(\tau) \right] d\tau = \\ &= \pm \int_{+L} \left[X(\varphi, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\xi + X(\varphi, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} d\eta \right] = (\text{teor. di Green}) = \\ &= \pm \int_{D;L} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[X(\varphi, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[X(\varphi, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] \right\} d\xi d\eta = \\ &= \pm \int_{D;L} f(\varphi, \psi) \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \end{aligned}$$

col segno + o col segno - secondochè volgono le (4) o le (5). Se poniamo $B = D;L$, si ha infine la formola

$$(7) \quad \int_A f(x, y) dx dy = \pm \int_B f(\varphi, \psi) \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta,$$

che provvede, per l'integrale (2), al cambiamento delle variabili x e y nelle ξ, η . Riepilogando si ha dunque il teorema:

I. *Le equazioni (1) facciamo corrispondere ad un punto qualsivoglia del dominio rettangolare $R_{\xi\eta}$, in cui è contenuto il dominio regolare B , la cui frontiera è costituita da un'unica curva regolare continua semplice e chiusa L , un punto del dominio rettangolare R_{xy} , in cui è contenuto il dominio regolare A la cui frontiera è del pari costituita da un'unica curva regolare continua semplice e chiusa C , e ad ogni punto Q di L un punto P di C , in maniera che mentre Q percorre per intero L , in un determinato verso costante, il punto P percorra per intero C , non importa se non sempre in un verso, purchè non oltrepassi mai il punto di partenza e vi ritorni muovendosi nel verso del suo moto all'inizio. Se la funzione $f(x, y)$ è definita in R_{xy} e vi è parzialmente derivabile con derivate continue, si avrà*

$$(8) \quad \int_A f(x, y) dx dy = \pm \int_B f(\varphi, \psi) \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta,$$

se Q e P si muovono, su L e su C , nello stesso verso all'inizio, si avrà invece, nell'altro caso,

$$(9) \quad \int_A f(x, y) dx dy = - \int_B f(\varphi, \psi) \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta.$$

L'enunciato di questo teorema si semplifica se si fa l'ipotesi che lo jacobiano delle (1) si mantenga diverso da zero su L , potendo allora, dalle (6), poichè $|\xi'(\tau)| + |\eta'(\tau)| > 0$ e $|x'(t)| + |y'(t)| > 0$, dedurre che, in (τ, τ') , sarà sempre $dt/d\tau \neq 0$, cioè che, mentre Q percorre L in un determinato verso costante, il punto corrispondente P percorre C muovendosi sempre in uno stesso verso. Si ha pertanto l'ulteriore teorema:

II. *Le equazioni (1) facciano corrispondere ad un qualsivoglia punto del dominio regolare $R_{\xi\eta}$, in cui è contenuto il dominio regolare B , ad unico contorno L , un punto del dominio rettangolare R_{xy} , in cui è contenuto il dominio regolare A del pari ad unico contorno C , e ad un punto Q di L un punto P di C , in maniera che, essendo lo jacobiano delle (1) sempre diverso da zero su L , mentre Q percorre per intero L il punto corrispondente P percorra per intero C . Se la funzione $f(x, y)$ è definita in R_{xy} e vi è parzialmente derivabile con derivate continue, si avrà la (8) o la (9) secondochè Q e P si muovono, su L e su C , nello stesso verso o in verso opposto.*

Circa la corrispondenza stabilita dalle (1) fra i punti delle due curve regolari continue semplici e chiuse C e L è interessante il seguente teorema:

III. *Le (1) facciano corrispondere ad una curva regolare continua semplice e chiusa L del dominio rettangolare $R_{\xi\eta}$ un'altra tale curva C del piano (x, y) e pongano una corrispondenza biunivoca fra i punti di queste curve; allora, secondochè, in $D_i L$, risulta sempre $\partial(\varphi, \psi)/\partial(\xi, \eta) \geq 0$ o sempre $\partial(\varphi, \psi)/\partial(\xi, \eta) \leq 0$, i punti corrispondenti Q e P , su L e su C , si muovono nello stesso verso o in verso opposto.*

Ed invero, se facciamo, nel teor. I, $f(x, y) \equiv 1$, soddisfatte le ipotesi ora enunciate, riescono verificate tutte le ipotesi del teorema indicato. Se, pertanto, essendo sempre $\partial(\varphi, \psi)/\partial(\xi, \eta) \geq 0$ in $D_i L$,

i punti corrispondenti Q e P si muovessero, su L e su C , in verso opposto, si avrebbe

$$\int_{D_i C} dx dy = - \int_{D_i L} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta \leq 0,$$

il che è assurdo. Ne segue:

IV. *Nelle ipotesi dei teorr. I e III, se, inoltre, lo jacobiano delle (1) è privo, in B , di valori di segno opposto, si avrà:*

$$(10) \quad \int_A f(x, y) dx dy = \int_B f(\varphi, \psi) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta.$$

Sarebbe facile estendere i teoremi ora stabiliti per il cambiamento delle variabili negli integrali doppii al caso che, ferme restando tutte le altre ipotesi, le frontiere dei domini regolari A e B fossero costituite, ciascuna, da più curve regolari continue semplici e chiuse, in numero eguale. Ma non vogliamo insistere su ciò. Preferiamo piuttosto, abbandonando l'ipotesi della regolarità dei domini A e B , tornare a considerare le condizioni di cose poste al n° 101 per dimostrare, in tutta generalità, secondo quanto già annunziammo a pag. 471, che la funzione $J(Q)$ considerata ai n° 99 e 101 è effettivamente data dal modulo dell'jacobiano delle (1). Si ha, al riguardo, il seguente teorema:

V. *Le equazioni (1) pongano una corrispondenza biunivoca fra i punti dei domini H e K del piano (x, y) e del piano (ξ, η) e facciano corrispondere: ad ogni dominio B contenuto in K ($< R_{\xi\eta}$) un dominio A contenuto in H , alla frontiera FB la frontiera FA , ad ogni dominio rettangolare contenuto in K un dominio regolare ad unico contorno di H . Sia inoltre, in K , lo jacobiano delle (1) privo di valori di segno opposto. Si ha allora che se B è un qualsivoglia dominio quadrabile, totalmente costituito di punti interni a K , il dominio corrispondente A è del pari quadrabile e riesce:*

$$(11) \quad \text{area } A = \int_B \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta.$$

Supponendo, per esempio, lo jacobiano non negativo, ripeteremo un ragionamento fatto al n° 92 per dimostrare il teor. VII colà ot-

tenuto. Sia δ_0 la distanza fra \mathbf{FB} e \mathbf{FK} , e, mediante il solito reticolato, formato di rette parallele agli assi coordinati ξ e η , dividiamo un dominio rettangolare contenente \mathbf{B} in domini rettangolari parziali \mathbf{R}_{hk} , dei quali diciamo δ la massima diagonale che, supporremo minore sempre di δ_0 . Affetteremo di un apice le somme estese a tutti i rettangoli \mathbf{R}_{hk} interni a \mathbf{B} e di due apici quelle estese a tutti i rettangoli \mathbf{R}_{hk} aventi, almeno, un punto in comune con \mathbf{B} . Porremo poi $\mathbf{B}' = \sum'_{hk} \mathbf{R}_{hk}$, $\mathbf{B}'' = \sum''_{hk} \mathbf{R}_{hk}$. Siano \mathbf{D}_{hk} , \mathbf{D}' e \mathbf{D}'' i domini del piano (x, y) corrispondenti, rispettivamente, ai domini \mathbf{R}_{hk} , \mathbf{B}' e \mathbf{B}'' . Si ha: $\mathbf{D}' = \sum'_{hk} \mathbf{D}_{hk}$, $\mathbf{D}'' = \sum''_{hk} \mathbf{D}_{hk}$, $\mathbf{D}' < \mathbf{A} < \mathbf{D}''$, $\mathbf{FA} < \mathbf{D}'' - \mathbf{D}'$,

$$\text{area } \mathbf{D}_{hk} = \int_{\mathbf{R}_{hk}} \frac{\partial(\varphi, \phi)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \quad \text{area } \mathbf{D}' = \sum'_{hk} \text{area } \mathbf{D}_{hk} = \int_{\mathbf{B}'} \frac{\partial(\varphi, \phi)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta,$$

$$\text{area } \mathbf{D}'' = \int_{\mathbf{B}''} \frac{\partial(\varphi, \phi)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta,$$

$$(12) \quad \int_{\mathbf{B}'} \frac{\partial(\varphi, \phi)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta \left\{ \begin{array}{l} \leq \int_{\mathbf{B}} \frac{\partial(\varphi, \phi)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta \leq \\ \leq \text{est } \mathbf{A} \leq \end{array} \right\} \int_{\mathbf{B}''} \frac{\partial(\varphi, \phi)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta,$$

$$\text{est } \mathbf{FA} \leq \int_{\mathbf{B}'' - \mathbf{B}'} \frac{\partial(\varphi, \phi)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta.$$

Ma area $(\mathbf{B}'' - \mathbf{B}')$, in virtù della supposta quadrabilità di \mathbf{B} , è infinitesima con δ , onde segue la quadrabilità di \mathbf{A} e, dalle (12), la formula (11).

Mauterremo ora le ipotesi di quest'ultimo teorema. Sia \mathbf{B} un fissato dominio misurabile interno a \mathbf{K} e sia \mathbf{U} un dominio misurabile, variabile nella famiglia $[\mathbf{B}]$ dei domini misurabili contenuti in \mathbf{B} . Diciamo \mathbf{T} il dominio che le (1) fanno corrispondere, in \mathbf{H} , al dominio \mathbf{U} , posto $\mathbf{T} = \chi(\mathbf{U})$, $\mathbf{A} = \chi(\mathbf{B})$, si ha evidentemente

$$\chi(\mathbf{U}' \dot{+} \mathbf{U}'') = \chi(\mathbf{U}') \dot{+} \chi(\mathbf{U}'');$$

perciò la funzione di dominio $t(\mathbf{U})$, definita in $[\mathbf{B}]$, esprime l'area di $\mathbf{T} = \chi(\mathbf{U})$ è additiva. Abbiamo inoltre or ora dimostrato che

$$\mathbf{T} = t(\mathbf{U}) = \int_{\mathbf{U}} \left| \frac{\partial(\varphi, \phi)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta,$$

e se ne deduce, per la continuità dell' jacobiano,

$$(11') \quad \frac{dT}{dU} = \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} \right|.$$

Adunque: *Nelle ipotesi poste in principio per le funzioni (1) con le ulteriori del teor. prec., per la funzione $J(Q)$ introdotta ai n. 99 e 101, si ha*

$$J(Q) = \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} \right|.$$

Lasciamo al lettore il compito di enunciare, di nuovo, i teoremi I, II e III del n. 101 con le particolarizzazioni provenienti dalle condizioni ulteriori qui poste. Per le applicazioni è importante rilevare che:

VI. *Nell'ipotesi che lo jacobiano delle (1) si mantenga in K sempre diverso da zero, tutte le proprietà della corrispondenza stabilita dalle (1) fra i punti dei domini H e K , supposte nel teorema V, sono conseguenza della biunivocità della corrispondenza.*

Basta evidentemente soltanto dimostrare che ad ogni dominio rettangolare U contenuto in K , le (1) fanno corrispondere in H un dominio regolare T . Poichè in U è sempre $\varphi_\xi \phi_\eta - \varphi_\eta \phi_\xi \neq 0$, le due funzioni continue $\varphi_\xi \phi_\eta$ e $\varphi_\eta \phi_\xi$ non sono mai, in U , simultaneamente nulle. È perciò possibile decomporre il dominio rettangolare U in domini rettangolari parziali U_{hk} per modo che in ciascuno di questi domini una delle due funzioni $\varphi_\xi \phi_\eta$ o $\varphi_\eta \phi_\xi$ si mantenga sempre diversa da zero. Ed è facile dimostrare che il dominio T_{hk} che le (1) fanno corrispondere a U_{hk} è regolare. Ne segue:

VII. *Se le funzioni (1) sono definite in un dominio limitato e misurabile B del piano (ξ, η) , vi sono continue con le loro derivate parziali prime e seconde miste, stabiliscono, con le equazioni (1), una corrispondenza biunivoca fra i punti di B e di un dominio misurabile A del piano (x, y) e il loro jacobiano si mantiene sempre diverso da zero in B , allora se la funzione $f(x, y)$, definita in A , è limitata e integrabile su A , tale risulta pure la funzione*

$$f(\varphi, \psi) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} \right|,$$

su B , laddove sussiste sempre la (10).

Ed invero, ad una successione U_1, \dots, U_n, \dots , di domini misurabili interni a B , invadente B , corrisponde, per le (1), una successione T_1, \dots, T_n, \dots di domini (teor. V) misurabili interni ad A , invadente A , e dalla relazione già stabilita (teor. V)

$$\text{area } T_n = \int_{U_n} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta,$$

passando al limite per n divergente segue, di nuovo, la (11).

Coordinate curvilinee nel piano. Per le funzioni (1) manteniamo le ipotesi contemplate nel teor. V ed aggiungiamovi quella che lo jacobiano $J(\xi, \eta)$ si mantenga diverso da zero nel dominio K , e, per fissare le idee, supponiamo che sia $J(\xi, \eta) > 0$. Consideriamo in K il dominio rettangolare di punti estremi (a', b') e (a'', b'') , a questo corrisponde nel piano (x, y) il dominio regolare $D[(a', b'); (a'', b'')]$. Tale dominio può ben riguardarsi (n. 58) come una porzione di superficie regolare dello spazio (x, y, z) avente per equazioni parametriche le seguenti

$$x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta), \quad z = 0,$$

e per base il dominio rettangolare $[(a', b'); (a'', b'')]$ del piano (ξ, η) . Il dominio D è pertanto (pag. 232) solcato da un doppio sistema di porzioni di curve regolari: dalle curve ξ , ottenute dando a ξ un valore costante dell'intervallo (a', a'') e facendo variare η da b' a b'' , e delle curve η , ottenute dando a η un valore costante dell'intervallo (b', b'') e facendo variare ξ da a' a a'' . Per ogni punto del dominio D passano una ben determinata curva ξ e una ben determinata curva η e due tali quali si vogliano curve hanno sempre un sol punto comune di D ; queste curve possono pertanto assumersi come coordinate (curvilinee) dei punti del piano (x, y) contenuti in D . Posto

$$E = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2, \quad F = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad G = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^2,$$

(pag. 230) per la forma quadratica

$$(13) \quad E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2$$

si ha $J(\xi, \eta) = (EG - F^2)^{1/2}$ e che le due curve ξ e η passanti per un punto del dominio D di coordinate (curvilinee) ξ e η si tagliano sotto un angolo ω il cui coseno è dato da $F/(EG)^{1/2}$. Le coordinate

curvilinee ξ e η sono dunque ortogonali, le curve ξ e η si tagliano cioè sempre mutuamente ad angolo retto, allora e allora soltanto che sia $F \equiv 0$. Per tracciare in D una porzione C di curva regolare, basta considerare ξ e η tali funzioni di un parametro t che la curva $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ del piano (ξ, η) sia, essa stessa, una porzione di curva regolare. Per il differenziale ds dell'arco di C si ha

$$(14) \quad ds^2 = E d\xi^2 + 2F d\xi d\eta + G d\eta^2,$$

e quindi, se (t', t'') è l'intervallo base di C , la lunghezza l di C è data dall'integrale

$$\int_{t'}^{t''} \sqrt{E d\xi^2 + 2F d\xi d\eta + G d\eta^2}.$$

La forma differenziale quadratica (14) fornisce ciò che si chiama il *quadrato dell'elemento lineare del piano* (x, y) nelle coordinate ξ e η . Sappiamo poi (per quanto precede e per le definizioni poste alle pp. 470 e 471) che l'*elemento d'area* del piano (x, y) nelle coordinate ξ e η è dato da

$$(15) \quad J(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sqrt{EG - F^2} d\xi d\eta,$$

esso esprime, approssimativamente, l'area del *dominio elementare* relativo alle coordinate ξ e η cioè del dominio $D[(\xi, \eta), (\xi + d\xi, \eta + d\eta)]$. Tale dominio (con tanto maggiore approssimazione quanto più piccoli sono $d\xi$ e $d\eta$) si può considerare come un parallelogramma avente [per la (14)] i lati di lunghezza $\sqrt{E} d\xi$ e $\sqrt{G} d\eta$, formanti fra di loro l'angolo ω , e pertanto avente l'area

$$\begin{aligned} \sqrt{E} d\xi \cdot \sqrt{G} d\eta \cdot \text{sen } \omega &= \sqrt{EG} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} d\xi d\eta = \sqrt{EG - F^2} d\xi d\eta = \\ &= J(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Si ottiene così una giustificazione intuitiva delle formole (11') e (11).

Coordinate ellittiche. Per dare un efficace esempio delle cose ora dette vogliamo accennare alle *coordinate ellittiche nel piano*, le quali vengono usate in talune ricerche di *Fisica*. Indichiamo con A l'insieme aperto del piano (x, y) determinato dalle limitazioni $x > 0$, $y > 0$, e per ogni punto (x, y) di A consideriamo la seguente equazione in λ :

$$(16) \quad \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} - 1 = 0$$

ove a e b sono due costanti reali per le quali è $0 < a < b$. È subito visto che l'equazione (16) ha sempre due radici reali u e v , per le quali riesce

$$u < a < v < b.$$

Per $\lambda = u$, la (16) è, in x e in y , l'equazione di un'ellisse, avente i fuochi nei punti fissi dell'asse y di ordinate $(b-a)^{1/2}$ e $-(b-a)^{1/2}$, per $\lambda = v$ è l'equazione di un'iperbola avente i medesimi fuochi. Al variare di u nell'intervallo aperto $(-\infty, a)$ e di v nell'intervallo aperto (a, b) , l'ellisse e l'iperbola ora menzionate solcano la regione A , in modo che, per ogni punto di essa, passano sempre una ed una sola ellisse, una ed una sola iperbola. Si ottiene così ciò che si chiama un **doppio sistema di coniche omofocali** e le quantità u e v diconsi *coordinate ellittiche* dei punti di A . Si trova subito che, in funzione di u e di v , le coordinate x e y sono espresse dalle equazioni:

$$x^2 = -\frac{(a-u)(a-v)}{b-a}, \quad y^2 = \frac{(b-u)(b-v)}{b-a},$$

e da ciò che il quadrato dell'elemento lineare del piano, in coordinate ellittiche, è dato da

$$ds^2 = \frac{v-u}{4} \left(\frac{du^2}{\Lambda(u)} - \frac{dv^2}{\Lambda(v)} \right),$$

ove $\Lambda(\lambda) = (a-\lambda)(b-\lambda)$. Adunque: le coordinate ellittiche sono ortogonali e l'elemento d'area nelle coordinate ellittiche è dato da

$$dx dy = \frac{(v-u) du dv}{4\sqrt{-\Lambda(u)\Lambda(v)}}.$$

Se si pone

$$\xi(u) = \int \frac{du}{\sqrt{\Lambda(u)}}, \quad \eta(v) = \int \frac{dv}{\sqrt{-\Lambda(v)}},$$

e si prendono, come nuovi parametri, le ξ e η si avrà

$$ds^2 = \frac{v(\eta) - u(\xi)}{4} (d\xi^2 + d\eta^2).$$

Le ξ e η diconsi *coordinate ellittiche isoterme* nel piano.

131. Sul calcolo numerico degli integrali a due dimensioni. — A ciò che abbiamo detto in generale, alle pp. 379, 462 e 463, sul calcolo numerico approssimato degli integrali a due dimensioni estesi ad un qualunque insieme del piano (x, y) , vogliamo ora aggiungere quanto segue. Se l'insieme A al quale si estende l'integrale della funzione $f(x, y)$ è un dominio regolare, può darsi che (cfr. n° 129) l'integrale a due dimensioni, da calcolare, sia riconducibile — in modo noto — ad un integrale ad una, ed allora possiamo, per il calcolo, senz'altro applicare i metodi trattati al § 2 del Cap. precedente. Supponiamo dunque che *non* si sia in grado di ridursi al calcolo di un integrale semplice. Faremo l'ipotesi che la funzione integranda $f(x, y)$ sia continua e dotata di quelle derivate parziali, finite e continue, che occorrerà di dover considerare. Porremo, per abbreviare, $f_{pq} = \partial^{p+q} f / \partial x^p \partial y^q$, ed indicheremo con $K_{pq}(\mathbf{T})$ un numero non inferiore all'estremo superiore di $|f_{pq}|$ nell'insieme \mathbf{T} .

Cominciamo dal considerare il caso dell'integrale della funzione $f(x, y)$ esteso ad un dominio rettangolare \mathbf{R} di punti estremi (a', b') e (a'', b'') . Diciamo \mathbf{T} un dominio rettangolare variabile, contenuto in \mathbf{R} , di punti estremi (α', β') e (α'', β'') e di centro (α, β) , $\alpha = (\alpha' + \alpha'')/2$, $\beta = (\beta' + \beta'')/2$. Si ha:

$$\int_{\mathbf{T}} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha'}^{\alpha''} dx \int_{\beta'}^{\beta''} f(x, y) dy,$$

e integrando, rispetto a y , col metodo del rettangolo (n° 114)

$$(1) \int_{\beta'}^{\beta''} f(x, y) dy = (\beta'' - \beta') f(x, \beta) + \sigma(x), \quad |\sigma(x)| \begin{cases} \leq K_{01}(\mathbf{T})(\beta'' - \beta')^2/4, \\ \leq K_{02}(\mathbf{T})(\beta'' - \beta')^3/24. \end{cases}$$

Ne segue

$$\int_{\mathbf{T}} f(x, y) dx dy = (\beta'' - \beta') \int_{\alpha'}^{\alpha''} f(x, \beta) dx + \int_{\alpha'}^{\alpha''} \sigma(x) dx,$$

ma

$$\int_{\alpha'}^{\alpha''} f(x, \beta) dx = (\alpha'' - \alpha') f(\alpha, \beta) + \tau, \quad |\tau| \begin{cases} \leq K_{10}(\mathbf{T})(\alpha'' - \alpha')^2/4, \\ \leq K_{20}(\mathbf{T})(\alpha'' - \alpha')^3/24, \end{cases}$$

e pertanto: *Se, integrando col metodo del rettangolo sia rispetto a x che rispetto a y , si pone*

$$(2) \quad \int_{\mathbf{T}} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha'}^{\alpha''} dx \int_{\beta'}^{\beta''} f(x, y) dy = (\alpha'' - \alpha')(\beta'' - \beta') f(\alpha, \beta) = Tf(\alpha, \beta),$$

$$\alpha = (\alpha' + \alpha'')/2, \quad \beta = (\beta' + \beta'')/2,$$

si commette un errore il cui modulo non supera ciascuno dei seguenti due termini

$$\frac{T}{4} [(\alpha'' - \alpha')K_{10}(\mathbf{T}) + (\beta'' - \beta')K_{01}(\mathbf{T})], \quad \frac{T}{24} [(\alpha'' - \alpha')^2 K_{20}(\mathbf{T}) + (\beta'' - \beta')^2 K_{02}(\mathbf{T})].$$

Con lo stesso procedimento si trova: *Se, integrando col metodo Cavalieri-Simpson sia rispetto a x che rispetto a y , si pone*

$$\int_{\mathbf{T}} f(x, y) dx dy = \frac{T}{36} \{ f(\alpha', \beta') + f(\alpha'', \beta') + f(\alpha', \beta'') + f(\alpha'', \beta'') +$$

$$+ 4[f(\alpha, \beta') + f(\alpha, \beta'') + f(\alpha', \beta) + f(\alpha'', \beta)] + 16f(\alpha, \beta) \},$$

si commette un errore il cui modulo non supera ciascuno dei seguenti due termini:

$$\frac{T}{192} [(\alpha'' - \alpha')^3 K_{30}(\mathbf{T}) + (\beta'' - \beta')^3 K_{03}(\mathbf{T})], \quad \frac{T}{2880} [(\alpha'' - \alpha')^4 K_{40}(\mathbf{T}) + (\beta'' - \beta')^4 K_{04}(\mathbf{T})].$$

Per calcolare ora l'integrale della f esteso al dominio rettangolare \mathbf{R} , mediante i punti $x_1 = a'$, x_2, \dots, x_n , $x_{n+1} = a''$; $y_1 = b'$, y_2, \dots, y_n , $y_{n+1} = b''$, dividiamo ambo i lati di \mathbf{R} in n parti eguali e diciamo \mathbf{T}_{hk} il dominio rettangolare di punti estremi (x_h, y_k) e (x_{h+1}, y_{k+1}) , indicando con ξ_h, η_k le coordinate del centro di \mathbf{T}_{hk} [$\xi_h = (x_h + x_{h+1})/2$, $\eta_k = (y_k + y_{k+1})/2$]; applicando la (1) o la (2) calcoliamo l'integrale della f esteso a ciascun dominio rettangolare parziale \mathbf{T}_{hk} e facciamo poi la somma dei risultati ottenuti. *Si perviene, in tal modo, alle formole*

$$(3) \quad \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dT = \frac{\mathbf{R}}{n^2} \sum_{hk}^{1, n} f(\xi_h, \eta_k),$$

$$(4) \quad \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dT = \frac{\mathbf{R}}{36n^2} \sum_{hk}^{1, n} \{ f(x_h, y_k) + f(x_{h+1}, y_k) + f(x_h, y_{k+1}) + f(x_{h+1}, y_{k+1}) +$$

$$+ 4[f(\xi_h, y_k) + f(\xi_h, y_{k+1}) + f(x_h, \eta_k) + f(x_{h+1}, \eta_k)] + 16f(\xi_h, \eta_k) \},$$

ove

$$x_h = a' + \frac{h-1}{n}(a'' - a'), \quad y_k = b' + \frac{k-1}{n}(b'' - b'),$$

$$\xi_h = a' + \frac{2h-1}{n} \frac{a'' - a'}{2}, \quad \eta_k = b' + \frac{2k-1}{n} \frac{b'' - b'}{2},$$

la prima, affetta da un errore non superiore in modulo a ciascuno dei seguenti termini

$$\frac{R}{4n} [(a'' - a') K_{10}(\mathbf{R}) + (b'' - b') K_{01}(\mathbf{R})], \frac{R}{24n^2} [(a'' - a')^2 K_{20}(\mathbf{R}) + (b'' - b')^2 K_{02}(\mathbf{R})],$$

la seconda da un errore non superiore in modulo a ciascuno dei seguenti termini

$$\frac{R}{192n^3} [(a'' - a')^3 K_{30}(\mathbf{R}) + (b'' - b')^3 K_{03}(\mathbf{R})],$$

$$\frac{R}{2880n^4} [(a'' - a')^4 K_{40}(\mathbf{R}) + (b'' - b')^4 K_{04}(\mathbf{R})].$$

Il dominio A del piano (x, y) al quale si deve estendere l'integrale da calcolare della funzione $f(x, y)$ sia ora non rettangolare; ma, in secondo luogo, supponiamo che si possano trovare due funzioni φ e ψ , di due nuove variabili u e v ed un dominio rettangolare R del piano (u, v) per modo che (cfr. n° prec.) risulti

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_R f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] J(u, v) du dv,$$

ove $J(u, v) = |\partial(\varphi, \psi) / \partial(u, v)|$. Posto allora $f(\varphi, \psi) J(u, v) = g(u, v)$, per il calcolo dell'integrale si applicheranno alla funzione $g(u, v)$ e al dominio rettangolare R del piano (u, v) , le formole (3) e (4).

Siano a, b, c numeri reali, per i quali $ac - b^2 > 0$, e supponiamo, per dare un esempio, che il dominio A sia costituito dai punti non esterni all'ellisse

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1.$$

Ponendo $H(v) = (a \cos^2 v + 2b \cos v \sin v + c \sin^2 v)^{-1/2}$,

$$x = uH(v) \cos v, \quad y = uH(v) \sin v,$$

riesce $J(u, v) = uH^2(v)$ e (130, II)

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_0^1 u du \int_0^{2\pi} f[uH(v) \cos v, uH(v) \sin v] H^2(v) dv.$$

Sia, in terzo luogo, A il più generale insieme *misurabile e limitato* del piano (x, y) e diciamo R il dominio rettangolare dello stesso piano avente i medesimi punti estremi (a', b') , (a'', b'') di A , porremo $R = (a'' - a')(b'' - b')$. Decomponiamo, come sopra, il dominio rettangolare R in domini rettangolari parziali T_{hk} di punti estremi (x_h, y_k) e (x_{h+1}, y_{k+1}) e diciamo M un numero non inferiore all'estremo superiore di $|f(x, y)|$ in A , σ_n la somma delle aree dei rettangoli T_{hk} aventi punti interni in comune con A e non contenuti in A ; si ha allora che: *Se, estendendo le somme ai soli valori degli indici h e k competenti ai domini rettangolari T_{hk} contenuti in A , si applicano le formole (3) e (4), nelle quali si sostituisca R con A , si commette, con la (3) un errore non superiore in modulo a ciascuno dei seguenti due termini:*

$$\frac{\Lambda}{4n} [(a'' - a') K_{10}(A) + (b'' - b') K_{01}(A)] + M\sigma_n,$$

$$\frac{\Lambda}{24n^2} [(a'' - a')^2 K_{20}(A) + (b'' - b') K_{02}(A)] + M\sigma_n,$$

con la (4) un errore non superiore in modulo a ciascuno dei seguenti due termini

$$\frac{\Lambda}{192n^3} [(a'' - a')^3 K_{30}(A) + (b'' - b')^3 K_{03}(A)] + M\sigma_n,$$

$$\frac{\Lambda}{2880n^4} [(a'' - a')^4 K_{40}(A) + (b'' - b')^4 K_{04}(A)] + M\sigma_n,$$

ove Λ è una quantità non inferiore all'area di A (in particolare $= R$) e può pertanto essere quest'area stessa, quando sia nota.

Supponiamo ora, sino alla fine dell'articolo, che la funzione $f(x, y)$ non sia mai negativa nell'insieme A al quale si estende l'integrale da calcolare. Tale integrale rappresenta allora (p. 393) il volume del cilindroide di base A relativo alla funzione $f(x, y)$; è perciò che i metodi di integrazione approssimata qui indicati possono anche riguardare come altrettanti metodi di *curvatura approssimata*. Sia dapprima A un poligono (non intrecciato) del piano (x, y) e il luogo S dei punti dello spazio determinato dalle condizioni: il punto (x, y) è in A , $z = f(x, y)$ sia (n° 58) una *porzione di superficie regolare*, per la quale supporremo verificate le seguenti circostanze *a)* o *b)*:

a) *Comunque si assegni un punto P_0 di S , tutti i punti della superficie non sono mai al disopra del piano tangente in P_0 alla S . Co-*

ma *non* si prendano tre punti P_1, P_2, P_3 di S , tutti i punti del triangolo $P_1 P_2 P_3$ non sono mai al disopra della superficie S .

b) *Comunque* si assegni un punto P_0 di S , tutti i punti della superficie non sono mai al disotto del piano tangente in P_0 alla S . *Comunque* si prendano tre punti P_1, P_2, P_3 di S tutti i punti del triangolo $P_1 P_2 P_3$ non sono mai al disotto della superficie S .

Verificate le circostanze **a)** o le **b)** si può istituire come segue il calcolo approssimato dell'integrale della $f(x, y)$ esteso al poligono A del piano (x, y) . Si riconosce, anzitutto, assai facilmente, che se D è un qualsivoglia dominio limitato e misurabile del piano (x, y) e O ne è il baricentro (vedi più avanti la def. generale) spiccato per O , in una direzione r , un segmento OP e condotto per P un qualsiasi piano che non incontri il piano (x, y) in punti interni a D , il solido limitato da questi due piani e dalla superficie cilindrica avente per direttrice FD e per direzione delle generatrici la direzione r , è misurabile ed ha un volume dato da $\overline{OP} \cdot \text{area } D \cdot \text{sen } \omega$, ove ω è l'angolo di inclinazione della direzione r sul piano (x, y) .

Ciò posto, supponiamo, per fissare le idee, che si verifichino le circostanze **a)**. Decomponiamo nel modo (elementare) più arbitrario il poligono A , in triangoli T_1, T_2, \dots, T_ν e diciamo $(x_{i1}, y_{i1}), (x_{i2}, y_{i2}), (x_{i3}, y_{i3}), (\xi_i, \eta_i)$ i tre vertici e il baricentro del triangolo T_i ($i=1, 2, \dots, \nu$), $P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, Q_i$ i corrispondenti punti di S . Consideriamo il prisma triangolare avente per base T_i e per direzione dei suoi spigoli quella dell'asse z e i due tronchi P'_i e P''_i di tale prisma determinati dal piano (x, y) e, il primo, dal piano $P_{i1} P_{i2} P_{i3}$, il secondo, dal piano tangente alla S condotto per Q_i . Diciamo ζ_i il segmento intercettato dal piano (x, y) e dal piano $P_{i1} P_{i2} P_{i3}$ sulla parallela condotta per Q_i all'asse z e poniamo $z_i = f(\xi_i, \eta_i)$. Si ha

$$\text{vol } P'_i \leq \int_{T_i} f(x, y) dx dy \leq \text{vol } P''_i,$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^{\nu} \text{vol } P'_i \leq \int_A f(x, y) dx dy \leq \sum_{i=1}^{\nu} \text{vol } P''_i,$$

Ma, $\text{vol } P'_i = \zeta_i \cdot \text{area } T_i = \zeta_i T_i$, $\text{vol } P''_i = z_i T_i$, e pertanto: *La*

somma $\sum_i \zeta_i T_i$ è un valore approssimato per difetto dell'integrale della f esteso al poligono A , la somma $\sum_i z_i T_i$ è un valore approssimato per eccesso. Detta δ la massima fra le differenze $z_i - \zeta_i$, l'errore d'approssimazione è, per entrambe le somme, non superiore, in modulo, al termine δA . Detto τ il massimo diametro dei triangoli T_i di decomposizione, si ha $\lim \delta (\tau \rightarrow 0) = 0$.

Si osservi che $\zeta_i = (x_{i1} + x_{i2} + x_{i3})/3$, $\eta_i = (y_{i1} + y_{i2} + y_{i3})/3$, $\zeta_i = [f(x_{i1}, y_{i1}) + f(x_{i2}, y_{i2}) + f(x_{i3}, y_{i3})]/3$ e si ha pertanto

$$\sum_{i=1}^{\nu} \text{vol } P'_i = \sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i T_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\nu} [f(x_{i1}, y_{i1}) + f(x_{i2}, y_{i2}) + f(x_{i3}, y_{i3})] T_i,$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \text{vol } P''_i = \sum_{i=1}^{\nu} z_i T_i = \sum_{i=1}^{\nu} f\left(\frac{x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}}{3}, \frac{y_{i1} + y_{i2} + y_{i3}}{3}\right) T_i.$$

Supponiamo, infine, che, verificandosi sempre per la superficie S le circostanze α , la base A della superficie non sia più un poligono, ma sia il più generale dominio limitato e misurabile, internamente connesso. Si decomporrà allora, come sopra, il dominio rettangolare R , avente gli stessi punti estremi di A , in n^2 domini rettangolari eguali e ciascuno di questi rettangoli, conducendo una diagonale, in due triangoli. Il dominio R verrà così decomposto in $2n^2$ triangoli rettangoli eguali, diciamo $T_1, T_2, \dots, T_{\nu(n)}$ quelli fra questi triangoli che sono contenuti in A e σ_n la somma delle aree di quelli non contenuti in A ma aventi con A punti interni in comune. Si ha allora che: *Le somme*

$$\sum_{i=1}^{\nu(n)} \zeta_i T_i, \quad \sum_{i=1}^{\nu(n)} z_i T_i + M \sigma_n,$$

ove M è il massimo di f in A , danno valori approssimati dell'integrale della f esteso ad A , la prima per difetto e la seconda per eccesso, con un errore, per entrambe, minore in modulo del termine

$$A \delta_n + M \sigma_n,$$

ove δ_n è la massima fra le differenze $z_i - \zeta_i$ [$i = 1, 2, \dots, \nu(n)$]. Si ha $\lim \delta_n = \lim \sigma_n = 0$, per n divergente.

§ 2. Integrali superficiali.

132. Elemento lineare ed elemento d'area per una porzione di superficie regolare. Siano (n° 58).

$$(1) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

le equazioni parametriche di una porzione di superficie regolare S avente per base il dominio internamente connesso A del piano (u, v) , e $x = x[u(t), v(t)]$, $y = y[u(t), v(t)]$, $z = z[u(t), v(t)]$, le equazioni parametriche di una porzione C di curva regolare tracciata sulla S . Con le posizioni di pag. 230, che, insieme alle altre dello stesso articolo, saranno sempre mantenute, per il differenziale ds dell'arco s di C si trova

$$(2) \quad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2;$$

per tale circostanza si dice che la forma differenziale quadratica $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ — che al n° 82 abbiamo chiamato la *prima forma fondamentale della superficie* — fornisce il *quadrato dell'elemento lineare della superficie* S .

Per il differenziale dell'arco di ogni linea coordinata u si ha, come si deduce dalla (2) per $dv = 0$, $ds = G^{1/2} du$, e, analogamente, per il differenziale dell'arco di ogni linea coordinata v , $ds = E^{1/2} dv$. Per un punto P di S , ad essa interno, spicchiamo due linee coordinate u e v , queste formano (pp. 232-233) un angolo ω il cui seno è dato da $(EG - F^2)^{1/2} / (EG)^{1/2}$; diamo a u e a v due incrementi non nulli du e dv , infinitesimi e su $A - FA$, la parte S' di S avente per base il dominio rettangolare (*elementare* nelle coordinate u e v) del piano (u, v) del quale i punti (u, v) e $(u + du, v + dv)$ sono due vertici opposti, si dirà l'*elemento* di S nelle coordinate u e v , esso, con tanta maggiore approssimazione quanto più piccola è la somma $|du| + |dv|$, può considerarsi un parallelogrammo piano i cui lati hanno le rispettive lunghezze $G^{1/2} dv$ e $E^{1/2} du$ e formano fra di loro l'angolo ω . Si avrà pertanto, *approssimativamente*,

$$\text{area } S' = \sqrt{G} dv \cdot \sqrt{E} du \cdot \text{sen } \omega = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Questa *imprecisa* ma ben intuitiva considerazione, suggerisce la definizione seguente:

Denotiamo, al solito, con $[A]_R$ la famiglia costituita dai prodotti di A per ciascun dominio rettangolare R nel piano (u, v) , avente con A punti interni in comune; la funzione additiva di dominio $\sigma = \sigma(T)$, definita in $[A]_R$, tale che, per ogni punto (u, v) di A , risulti

$$(3) \quad d\sigma = \sqrt{EG - F^2} \, dudv,$$

chiamasi, nell'ipotesi che il dominio A sia misurabile, *area della parte $S(T)$ di S , descritta dal punto $P[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \equiv P(u, v)$ al variare del punto (u, v) nel dominio T di $[A]_R$* . Per la continuità di $(EG - F^2)^{1/2}$ si ha

$$\sigma(T) = \text{area } S(T) = \int_T \sqrt{EG - F^2} \, dudv,$$

e quindi, se la base A è inoltre un dominio limitato,

$$(4) \quad \sigma(A) = \text{area } S = \int_A \sqrt{EG - F^2} \, dudv.$$

Se la base A è un dominio misurabile non limitato, alla porzione S di superficie regolare si attribuirà un'area allora e allora soltanto che la funzione $(EG - F^2)^{1/2}$ riesca su A sommabile, e come definizione dell'area si assumerà sempre la (4).

Caso particolare della rappresentazione cartesiana.

Nel caso particolare che la porzione di superficie regolare S abbia per base un dominio internamente connesso A del piano (x, y) , essa può essere rappresentata (p. 232) da un'equazione del tipo $z = f(x, y)$, ove $f(x, y)$ è in A finita e continua con le sue derivate parziali del primo ordine. In tal caso, si avrà $d\sigma = (1 + p^2 + q^2)^{1/2} \, dudv$, e se A è misurabile e limitato, oppure se, essendo A illimitato, $(1 + p^2 + q^2)^{1/2}$ è sommabile su A ,

$$\sigma(A) = \text{area } S = \int_A \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy,$$

ove $p = \partial f / \partial x$, $q = \partial f / \partial y$.

Superficie di rotazione. In un piano ruotante attorno l'asse z assumiamo due assi coordinati ortogonali: l'asse z e un asse r a questo ortogonale. Siano $z = z(u)$, $r = r(u)$ le equazioni paramettri-

che di una porzione di curva regolare C del piano indicato, avente l'intervallo base finito (u', u'') e per la quale inoltre sia sempre $r(u) > 0$. Nella rotazione la curva C genera una *superficie di rotazione*, della quale la curva C è detta la curva meridiana. Sia v la longitudine variabile del piano ruotante, longitudine contata a partire dal piano (x, z) , tutti i punti della superficie si ottengono ponendo:

$$(5) \quad x = r(u) \cos v, \quad y = r(u) \sin v, \quad z = z(u),$$

al variare del punto (u, v) nel dominio rettangolare $[(u', 0); (u'', 2\pi)]$ del piano (u, v) . Se manteniamo v fra 0 e α , α essendo un angolo minore di 2π , avremo una parte (un *fuso*) della superficie di rotazione, staccata dai piani meridiani di longitudine 0 e α ; tale parte S_α è una porzione di superficie regolare avente le equazioni parametriche (5) e per base il dominio rettangolare $R_\alpha \equiv [(u', 0); (u'', \alpha)]$. Per quadrato dell'elemento lineare della S_α si trova

$$[r'(u)^2 + z'(u)^2] du^2 + r(u)^2 dv^2.$$

Le curve u sono i paralleli e le curve v i meridiani della superficie di rotazione: poichè $F \equiv 0$, si vede che i meridiani e i paralleli si tagliano mutuamente ad angolo retto. Per area σ_α della S_α si ha

$$\sigma_\alpha = \int_{R_\alpha} r(u) \sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2} du dv = \alpha \int_{u'}^{u''} r(u) \sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2} du.$$

Mantenendo v fra α e 2π , si ottiene un'altra porzione S'_α di superficie regolare, avente per equazioni parametriche le (5) e per base il dominio rettangolare $R'_\alpha \equiv [(u', \alpha); (u'', 2\pi)]$. Per area σ'_α della S'_α si trova

$$\sigma'_\alpha = (2\pi - \alpha) \int_{u'}^{u''} r(u) \sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2} du.$$

Come *definizione* di area per l'intera superficie di rotazione assumeremo la somma $\sigma_\alpha + \sigma'_\alpha$ delle aree di S_α e di S'_α . Pertanto: *L'area di una superficie di rotazione la cui curva meridiana è una*

porzione di curva regolare avente le equazioni parametriche $r = r(u)$, $z = z(u)$, l'intervallo base finito (u', u'') e per la quale è $r(u) > 0$, è data da

$$(6) \quad \sigma = 2\pi \int_{u'}^{u''} r(u) \sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2} du.$$

Introducendo, come parametro di riferimento dei punti della curva C , il suo arco s avente per origine il punto di C corrispondente al valore u' del parametro u , si trova, semplicemente,

$$(7) \quad \sigma = 2\pi \int_0^l r(s) ds,$$

ove l è la lunghezza totale di C . A tale formola si può subito pervenire anche con considerazioni di natura intuitiva, qualora si concepisca la superficie di rotazione come la riunione di tanti tronchi di cono (circolare retto) di apotema ds e di raggio $r(s)$ della sezione mediana.

Per una qualsiasi curva regolare continua C di lunghezza l chiamasi **baricentro** di essa, il punto (x_0, y_0, z_0) le cui coordinate sono:

$$x_0 = \frac{1}{l} \int_C x ds, \quad y_0 = \frac{1}{l} \int_C y ds, \quad z_0 = \frac{1}{l} \int_C z ds.$$

È subito visto che se la curva è piana, il baricentro di essa è situato nel piano che contiene la curva. Dalla (7) segue immediatamente il **teorema di Guldino**: *L'area di una superficie di rotazione si ottiene moltiplicando la lunghezza della curva meridiana per la lunghezza della circonferenza descritta (nella rotazione) del baricentro di quella curva.* La (7) può scriversi invero

$$\sigma = 2\pi l \cdot \frac{1}{l} \int_0^l r(s) ds = 2\pi p \cdot l,$$

ove p designa il valore della coordinata r per il baricentro della curva meridiana.

Porzioni di superficie regolari con singolarità. Il dominio internamente connesso e misurabile A (limitato o no) del

piano (u, v) contenga un ben determinato insieme chiuso N di estensione nulla (sul piano). Allora, se: α) le funzioni $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ sono simultaneamente definite in un certo insieme B contenuto in A e contenente $A-N$, β) il luogo descritto nello spazio dal punto (1) al variare del punto (u, v) in un dominio T internamente connesso limitato e misurabile è una porzione di superficie regolare allora e allora soltanto che il dominio T sia contenuto in $A-N$, γ) la funzione $(EG-F^2)^{1/2}$ riesce sommabile su A ; il luogo S descritto nello spazio dal punto di coordinate (1), al variare del punto (u, v) nell'insieme B , si dice una *porzione di superficie regolare con singolarità, di base A*. I punti di S corrispondenti ai punti di B non contenuti in N diconsi *regolari* o *punti di regolarità*, gli altri diconsi *singolari* o *punti di singolarità*.

L' integrale di $(EG-F^2)^{1/2}$, esteso al dominio base A , chiamasi ancora area della S .

Ad esempio, il luogo descritto dal punto $z = (r^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$, al variare del punto (x, y) nel cerchio del piano (x, y) , di centro nell'origine e di raggio r , è (una semisfera e) una porzione di superficie regolare con singolarità, avente per base questo cerchio; sono singolari i punti per cui $x^2 + y^2 = r^2$.

Si badi bene però che una porzione di superficie regolare con singolarità può apparire tale *dipendentemente* dalla rappresentazione parametrica adottata. Si consideri, per esempio, la semicalotta sferica di raggio r :

$$(8) \quad x = r \operatorname{senu} \operatorname{cos} v, \quad y = r \operatorname{senu} \operatorname{senu} v, \quad z = r \operatorname{cos} u,$$

descritta al variare di u nell'intervallo $(0, \alpha)$ e di v nell'intervallo $(0, \pi)$, essendo α una quantità positiva minore di $\pi/2$. Poichè $EG-F^2 = r^4 \operatorname{sen}^2 u$, risulta $EG-F^2 = 0$, per $u = 0$, e pertanto, con la rappresentazione (8), quella semicalotta ci appare una porzione di superficie regolare con singolarità; laddove, con la rappresentazione cartesiana

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha, \quad y \geq 0,$$

essa appare perfettamente una porzione di superficie regolare.

Siano $r = r(s), z = z(s)$ le equazioni parametriche di una curva regolare continua e semplice C di arco s e di intervallo base finito $(0, l)$ del piano (r, z) ruotante attorno l'asse z , potendo la funzio-

ne $r(s)$ anche cambiare di segno, purchè esistano soltanto un numero finito di valori di s per i quali $r(s)$ si annulla. I luoghi S_α e S'_α , descritti dal punto $x = r(s) \cos v$, $y = r(s) \sin v$, $z = z(s)$, al variare del punto (s, v) , rispettivamente, nei domini rettangolari $[(0, 0); (l, \alpha)]$ e $[(0, \alpha); (l, 2\pi)]$, ove $0 < \alpha < 2\pi$, sono due porzioni di superficie regolari con singolarità. Si trova, secondo la posta definizione,

$$\text{area } S_\alpha = \alpha \int_0^l |r(s)| ds, \quad \text{area } S'_\alpha = (2\pi - \alpha) \int_0^l |r(s)| ds,$$

e pertanto: *All'intera superficie di rotazione descritta dalla C nella rotazione del suo piano attorno l'asse z si attribuirà l'area*

$$2\pi \int_0^l |r(s)| ds.$$

Per la superficie sferica di raggio k si trova così l'area $4\pi k^2$. Nel piano ruotante (r, z) , già considerato, sia situato un cerchio di raggio k , il cui centro abbia dall'asse z di rotazione una distanza ρ maggiore di k , chiamasi **toro** il solido generato dal cerchio nella rotazione del suo piano attorno l'asse z . Per la superficie generata, nella rotazione, dalla circonferenza, cioè per quella che si chiama la *superficie torica*, si trova, secondo le poste definizioni, l'area $4\pi^2 \rho k$ (*).

Nel piano p si consideri una retta z , chiamasi *trattrice di asintoto z e di tangente k* , ogni curva C sulla cui tangente la C e la retta z intercettano un segmento di lunghezza costante k . Chiamasi *pseudosfera di asse z e di raggio k* , la superficie generata dalla trattrice nella rotazione del suo piano attorno l'asintoto z . Nel piano p assumiamo come assi coordinati un asse z sull'asintoto della trattrice ed un asse r a questo normale, si vede allora subito che, a meno di una traslazione parallela all'asse z , le equazioni parametriche di una trattrice di asintoto z e di tangente k , possono scrivere al modo seguente

$$z = k \sin u, \quad r = k \left(\log \tan \frac{u}{2} + \cos u \right),$$

(*) Si dimostri che: Un punto della superficie torica è per questa (cfr. n. 82) ellittico, parabolico o iperbolico, secondochè la distanza del punto dall'asse di rotazione z , è maggiore, eguale o minore di k .

per u variabile nell'intervallo $(0, \pi)$. Per $u = \pi/2$, si ha $r = k$, $z = 0$; tale punto della trattrice è una cuspidè per essa. I punti della pseudosfera di asse z e di raggio k si hanno tutti ponendo

$$\begin{aligned} x &= k \operatorname{sen} u \cos v, & y &= k \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \\ z &= k \left(\log \operatorname{tang} \frac{u}{2} + \cos u \right), \end{aligned}$$

per (u, v) variabile nel dominio rettangolare $[(0, 0); (\pi, 2\pi)]$. Essendo $0 < \alpha < 2\pi$, ciascun fuso della pseudosfera ottenuto mantenendo v sia nell'intervallo $(0, \alpha)$ che nell'intervallo $(\alpha, 2\pi)$ è una porzione di superficie regolare con singolarità. Per esempio, il primo ha per base il dominio rettangolare $[(0, 0); (\pi, \alpha)]$, in questo l'insieme N è dato dal segmento $u = \pi/2$ e dai segmenti $u = 0$ e $u = \pi$: lungo il primo segmento riesce $EG - F^2 = 0$, lungo i due ultimi manca la definizione di z . Poichè $EG - F^2 = k^4 \cos^2 u$, per area della pseudosfera di raggio k si trova $4\pi k^2$, precisamente come per la sfera di raggio k . La pseudosfera offre un esempio di superficie di rotazione avente un'area finita, la cui curva meridiana non ha lunghezza finita (*).

Cambiamento dei parametri. Ritorniamo a considerare la porzione S di superficie regolare, affatto priva di singolarità, avente le equazioni parametriche (1) e il dominio base internamente connesso A , del piano (u, v) . Nel piano (α, β) sia situato in dominio B , del pari internamente connesso, e siano definite in esso due funzioni $u(\alpha, \beta)$ e $v(\alpha, \beta)$ finite e continue con le loro derivate parziali del primo ordine. Supporremo inoltre che: α) le equazioni

$$(9) \quad u = u(\alpha, \beta), \quad v = v(\alpha, \beta),$$

poungano una corrispondenza biunivoca fra i due domini A e B dei piani (u, v) e (α, β) ; β) lo jacobiano $J(\alpha, \beta) = \partial(u, v) / \partial(\alpha, \beta)$ si conservi sempre in B diverso da zero. Ponendo $x[u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)] = \xi(\alpha, \beta)$, $y[u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)] = \eta(\alpha, \beta)$, $z[u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)] = \zeta(\alpha, \beta)$, le equazioni

$$(10) \quad x = \xi(\alpha, \beta), \quad y = \eta(\alpha, \beta), \quad z = \zeta(\alpha, \beta),$$

dauno, col dominio base B , una nuova rappresentazione parametrica della stessa porzione S di superficie regolare. Si ha (p. 227)

(*) La sfera di raggio k ha curvatura costante positiva $= 1/k^2$, si dimostri che la pseudosfera di raggio k ha curvatura costante negativa $= -1/k^2$.

$$(11) \quad \frac{\partial (\eta, \zeta)}{\partial (\alpha, \beta)} = \frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)} J(\alpha, \beta), \quad \dots, \quad \dots,$$

e poichè $J(\alpha, \beta) \neq 0$, possiamo dire che: *Le equazioni parametriche (10) conservano il carattere di porzione di superficie regolare alla S .*

Detti A, B, C i coseni direttori dell'asse normale positivo relativo alla rappresentazione (1) e A_1, B_1, C_1 quelli dell'asse normale positivo relativo alla rappresentazione (10), si ha

$$A_1 = A \frac{J}{|J|}, \quad B_1 = B \frac{J}{|J|}, \quad C_1 = C \frac{J}{|J|},$$

e pertanto: *I due assi normali positivi relativi alle due rappresentazioni parametriche (1) e (10) coincidono o sono opposti secondochè l'jacobiano $J(\alpha, \beta)$, cioè, come lo chiameremo, l'jacobiano della trasformazione di coordinate curvilinee, è positivo o negativo.*

Detti E_1, F_1, G_1 i coefficienti della prima forma fondamentale della S relativa alla nuova rappresentazione (10), si trova

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} E_1 &= E \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + G \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2, & G_1 &= E \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \beta} + G \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} \right)^2, \\ F_1 &= E \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} + F \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + G \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta}, \end{aligned} \right.$$

e quindi, poichè $du = u_\alpha d\alpha + u_\beta d\beta$, $dv = v_\alpha d\alpha + v_\beta d\beta$,

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = E_1 d\alpha^2 + 2F_1 d\alpha d\beta + G_1 d\beta^2,$$

cioè: *In una trasformazione di coordinate curvilinee la prima forma fondamentale si trasforma in se.*

Posto $L = \partial(y, z) / \partial(u, v), \dots, L_1 = \partial(y, z) / \partial(\alpha, \beta), \dots$, in virtù delle (11), si trova

$$(13) \quad E_1 G_1 - F_1^2 = L_1^2 + M_1^2 + N_1^2 = (L^2 + M^2 + N^2) J^2 = (EG - F^2) J^2,$$

ciò che, con facile calcolo diretto, si deduce anche dalle (12).

Restrizioni nella definizione di porzione di superficie regolare. Come già facemmo al' n° 82, vogliamo anche ora considerare quelle porzioni di superficie regolari che sono suscettibili di una rappresentazione parametrica (1) nella quale le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ possiedono altresì le derivate parziali del second'ordine finite e continue in tutto il dominio base A . Il maggiore interesse è offerto — anche in tutte le applicazioni — da tali porzioni di super-

ficie regolari, e noi converremo di limitare, da ora in poi e per tutto il corso, il campo delle nostre considerazioni esclusivamente a queste superficie. Dopo questa convenzione, dobbiamo, naturalmente, anche convenire che in ogni trasformazione (9) di coordinate curvilinee, le funzioni $u(\alpha, \beta)$ e $v(\alpha, \beta)$, oltre alle già poste proprietà, devono anche possedere in tutto il dominio B le derivate parziali del second'ordine finite e continue.

Ciò posto, se consideriamo (n° 82) la seconda forma fondamentale della superficie S

$$Ddu^2 + 2D' du dv + D'' dv^2,$$

troviamo subito che: *Mediante la trasformazione (9), essa si trasforma in se o nella cambiata di segno, secondochè lo jacobiano della trasformazione è positivo o negativo.* Si ha invero, per esempio,

$$\begin{aligned} D_1 &= A_1 \xi_{\alpha\alpha} + B_1 \eta_{\alpha\alpha} + C_1 \zeta_{\alpha\alpha} = \varepsilon (A \xi_{\alpha\alpha} + B \eta_{\alpha\alpha} + C \zeta_{\alpha\alpha}) = \\ &= \varepsilon \left[D \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + 2D' \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + D'' \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

ove ε vale $+1$ o -1 secondochè $J > 0$ oppure < 0 . Se ne deduce

$$D_1 D_1'' - D_1'^2 = (DD'' - D'^2) J^2,$$

e tenendo conto della (13)

$$\frac{D_1 D_1'' - D_1'^2}{E_1 G_1 - F_1^2} = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}.$$

Pertanto: *La curvatura totale di una porzione di superficie regolare è, in ogni punto, una quantità affatto indipendente dalla speciale rappresentazione parametrica adottata per la superficie.*

Un' ulteriore proprietà che riterremo sempre soddisfatta quando parleremo di porzione di superficie regolare è che la sua base sia un dominio (internamente connesso) *misurabile e limitato*, ed inoltre totalmente costituito di punti interni ad un altro dominio A^* nel quale le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ già verificano tutte le poste condizioni. Talchè, in definitiva, da ora in poi, sarà per noi una porzione di superficie regolare soltanto: *Ogni luogo S di punti dello spazio, descritto dal punto $P(x, y, z)$, le cui coordinate sono date dalle (1), al variare del punto (u, v) in un dominio A internamente con-*

nesso, limitato e misurabile, del piano (u, v) , quando si ha che: **a)** le tre funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono, in tutto un dominio A^* al quale ogni punto di A è interno, finite e continue con le loro derivate parziali dei due primi ordini; **b)** la matrice jacobiana $\partial(x, y, z) / \partial(u, v)$ conserva caratteristica 2 in tutto A^* ; **c)** le (1) pongono una corrispondenza biunivoca fra i punti di A^* e quelli del luogo S^* , descritto da P al variare di (u, v) in A^* .

Di conseguenza, per ogni trasformazione (9) di coordinate, dovremo sempre supporre che: *Le funzioni $u(\alpha, \beta)$ e $v(\alpha, \beta)$ siano finite e continue, con tutte le loro derivate parziali dei primi due ordini, in un dominio B^* del piano (α, β) in cui è sempre $\partial(u, v) / \partial(\alpha, \beta) \neq 0$, il quale dominio è dalle (9) posto in corrispondenza biunivoca col dominio A^* del piano (u, v) .*

In tali ipotesi risulterà sempre, in $A - FA$, $\partial(\alpha, \beta) / \partial(u, v) \neq 0$ e quindi (p. 309 e n° 130, VI) l'insieme B che le (9) fanno corrispondere al dominio A sarà del pari un dominio internamente connesso, limitato e misurabile.

Giustificazione rigorosa della data definizione di area. Siano S_1, S_2, \dots, S_n porzioni di superficie regolari, diremo che la porzione S di superficie regolare è decomposta nelle porzioni S_1, S_2, \dots, S_n , se fra la base A di S e le basi A_1, A_2, \dots, A_n delle S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sussiste la relazione

$$(14) \quad A = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \dots \dot{+} A_n.$$

Sarà allora $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ e due quali si vogliano superficie S_i e S_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) avranno in comune, al più, punti dei loro bordi. Ciò posto, la rigorosa giustificazione della data definizione di area per una porzione di superficie regolare sarà evidentemente raggiunta se faremo vedere quanto segue: I) *Se S è decomposta nelle S_i , risulta area $S = \sum_i$ area S_i ; II) l'area di S è indipendente dalla speciale rappresentazione parametrica adottata; III) se la S si riduce ad un dominio piano misurabile, l'area di S , com'è stata ora definita, coincide con l'area di tale dominio com'è già stata definita al § 1 del Cap. IV.*

La prima proprietà si deduce immediatamente dalla (14) e dall'additività dell'integrale di $(EG - F^2)^{1/2}$. Per dimostrare la secon-

da osserviamo che operando la trasformazione di coordinata (9) si trova (130, VI)

$$\int_A \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \int_B \sqrt{EG - F^2} |J| \, du \, dv ,$$

ma, per la (13), è $(EG - F^2)^{1/2} |J| = (E_1 G_1 - F_1^2)^{1/2}$. Dimostriamo ora la terza proprietà. Se la S non è che un dominio di un certo piano p le quantità

$$A = \frac{L}{\sqrt{EG - F^2}} , \quad B = \frac{M}{\sqrt{EG - F^2}} , \quad C = \frac{N}{\sqrt{EG - F^2}} ,$$

devono rappresentare i coseni direttori della normale al piano p e devono, pertanto, ciascuna, ridursi ad una costante. Fra le costanti A, B e C ve ne deve essere almeno una diversa da zero, sia questa la C . Il dominio misurabile S del piano p si proietta sul piano (x, y) in un dominio S_{xy} del pari misurabile e le due corrispondenze biunivoche intercedenti fra i punti di A e quelli di S e fra i punti di S e quelli di S_{xy} hanno per prodotto una corrispondenza biunivoca fra i punti di A e di S_{xy} , posta dalle equazioni $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Ne segue, per essere $N = \partial(x, y) / \partial(u, v) \neq 0$ (130, VI),

$$\text{area } S_{xy} = \int_A |N| \, du \, dv .$$

Se ne deduce, intendendo parlare di area com'è stata definita al n° 86,

$$\text{area } S = \frac{1}{|C|} \text{area } S_{xy} = \frac{1}{|C|} \int_A |N| \, du \, dv = \int_A \frac{|N|}{|C|} \, du \, dv = \int_A \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv .$$

133. Superficie regolari e biregolari. — Se un insieme S di punti dello spazio è tale che sia possibile costruire, in un certo ordine, un determinato numero n di porzioni di superficie regolari S_1, S_2, \dots, S_n , per le quali si abbia: I) $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$, II) la S_i ha punti in comune con la S_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n - 1$), III) prese due quali si vogliono S_i e S_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) esse hanno, al più, in comune punti dei loro bordi; l'insieme S chiamasi una *superficie regolare* (continua e semplice). Le porzioni di superficie regolari S_1, S_2, \dots, S_n diconsi

facce della superficie S . Evidentemente, una superficie regolare è un continuo limitato, essa dicesi *aperta* o *chiusa* secondochè non esiste od esiste un *dominio limitato internamente connesso* che ammette la S come sua completa frontiera. Se la superficie S è chiusa, con $D_i S$ denoteremo *il* dominio limitato di cui essa è frontiera e con $D_e S$ il dominio illimitato $C(D_i S) + S$ (*). Un punto dello spazio, non situato sulla superficie chiusa S , dicesi *interno* od *esterno* ad essa secondochè è interno al dominio $D_i S$ o al dominio $D_e S$. *Area* di una superficie regolare è la somma delle aree delle sue facce.

Per esempio, una superficie sferica di raggio R e di centro nell'origine è una superficie regolare. Sia, invero, r un qualunque numero positivo minore di R e α l'angolo positivo e minore di $\pi/2$ che ha per seno r/R ; la superficie sferica è la superficie regolare avente le seguenti *quattro* facce

$$z = (R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}, \quad x^2 + y^2 \leq r^2,$$

$$z = -(R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}, \quad x^2 + y^2 \leq r^2,$$

$$x = R \operatorname{sen} u \cos v, \quad y = R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad z = R \cos u, \quad (u, v) \text{ in } [(\alpha, 0); (\pi - \alpha, \pi)]$$

$$x = R \operatorname{sen} u \cos v, \quad y = R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad z = R \cos u, \quad (u, v) \text{ in } [(\alpha, \pi); (\pi - \alpha, 2\pi)].$$

Così pure si vede che una superficie torica è regolare. Tanto la superficie sferica che la torica sono chiuse.

Nel piano (u, v) si abbia un dominio A misurabile, limitato e internamente connesso, ed in esso siano definite le tre funzioni continue $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Se è possibile un'elementare decomposizione del dominio A in domini misurabili e internamente connessi A_1, A_2, \dots, A_n , tale che il luogo S_i descritto dal punto

$$(1) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

al variare del punto (u, v) in A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sia sempre una porzione di superficie regolare e se inoltre le (1) pongono una corrispondenza biunivoca fra i punti di $S = S_1 + \dots + S_n$ e i punti di A , l'insieme S potrà evidentemente dirsi una superficie regolare di facce S_1, S_2, \dots, S_n . In tal caso, diremo che la superficie regolare S è *dotata di base* e il dominio A sarà la base di S . Evidente-

(*) È subito visto che il dominio $D_i S$ è ben determinato.

mente, una superficie regolare dotata di base, che non si riduca ad un'unica porzione di superficie regolare, è un particolare esempio di porzione di superficie regolare con singolarità. Se le facce di una superficie regolare S sono poligoni piani, la S dicesi una *superficie poliedrica*. Ogni tale superficie è dotata di base.

Un punto di una superficie regolare S che appartenga ad una sola sua faccia, dicesi *regolare* o *ordinario*. *Asse normale positivo* in un punto regolare di S è quello che compete ivi alla faccia a cui appartiene il punto, *asse normale negativo* è l'asse opposto. *Pagina positiva (negativa)* di S è l'insieme delle pagine positive (negative) delle facce componenti S . Se S_i è una tale faccia, diremo *bordo libero* di S_i quella parte del bordo di S_i che non è comune ad alcuna altra faccia di S . *Contorno* o *bordo* di S è l'insieme somma dei bordi liberi delle sue facce. Il bordo di S sarà denotato con la notazione BS . Se la S è dotata di base A , ed ha le equazioni parametriche (1), il bordo di S è il luogo descritto dal punto (1) al variare del punto (u, v) sulla frontiera di A .

Per le applicazioni in genere, e per le nostre in particolare, è di grande interesse introdurre il concetto di ciò che chiameremo una *porzione di superficie biregolare*. Queste sono le porzioni di superficie regolari aventi per base un dominio regolare internamente connesso. Il bordo di una porzione di superficie biregolare S è evidentemente costituito da una curva regolare semplice e chiusa o da un sistema di tali curve (a due a due senza punti comuni) che, mediante le equazioni parametriche della superficie, corrispondono su S alle curve regolari semplici e chiuse costituenti la frontiera FA del dominio A base della S . Se le (1) sono le equazioni parametriche della S , diremo *verso positivo o negativo* su BS il verso (costante) secondo cui si muove il punto (1) quando il punto (u, v) percorre FA sempre nel verso positivo o sempre nel negativo.

A questo punto ci torna utilissima un'osservazione sull'asse normale positivo, che possiamo fare per una qualsiasi porzione S di superficie regolare. Sia $Q(u, v)$ un punto della base A della superficie e P il punto corrispondente su S , se per Q e con asse tangente positivo d , spicchiamo una porzione L di curva regolare contenuta in A , a questa corrisponderà su S una porzione di curva regolare C spiccata dal punto P con un asse tangente positivo t (tangente alla

S) avente i coseni direttori

$$\frac{1}{H} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \alpha + \frac{\partial x}{\partial v} \beta \right), \quad \frac{1}{H} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \alpha + \frac{\partial y}{\partial v} \beta \right), \quad \frac{1}{H} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \alpha + \frac{\partial z}{\partial v} \beta \right),$$

ove α e β sono i coseni direttori [nel piano (u, v)] dell'asse d e

$$H = (E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2)^{1/2}.$$

Orbene: Diremo che all'asse d del dominio base A corrisponde su S l'asse t . L'osservazione alla quale abbiamo alluso è questa: Se una coppia d, d_1 di assi ortogonali del piano (u, v) , spiccati per un punto di A è sinistrorsa nel piano (u, v) , è cioè congruente alla coppia dei due assi coordinati u e v , detti t e t_1 gli assi corrispondenti sulla S agli assi d e d_1 , e detto n_+ l'asse normale positivo alla S , la terna d'assi (t, t_1, n_+) riesce sempre sinistrorsa. Ed invero per il determinante dei nove coseni direttori degli assi t, t_1, n_+ , presi nell'ordine scritto, troviamo il seguente valore positivo

$$\frac{(EG - F^2)^{1/2}}{[(E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2)(E\alpha_1^2 + 2F\alpha_1\beta_1 + G\beta_1^2)]^{1/2}},$$

ove α e β designano i coseni direttori, nel piano (u, v) , dell'asse d e α_1 e β_1 quelli dell'asse d_1 .

Ciò posto sia S una porzione di superficie biregolare e P un punto del suo bordo, regolare per questo, Q il punto di FA che corrisponde a P in A . Per Q e alla FA conduciamo l'asse tangente positivo d e la normale interna d_1 . A d corrisponde su S l'asse tangente in P al bordo BS , che fissa su questo il già definito verso positivo, a d_1 corrisponde un asse t_1 ; ebbene quel determinato asse t_1 , per P , tangente alla S e normale al bordo BS , che fa con l'asse t_1 un angolo acuto, sarà, per ovvia ragione, da noi chiamato, **normale interna al bordo della S** . Per la superiore osservazione possiamo dire che: In ogni punto P del bordo di una superficie biregolare, punto che sia regolare per questo bordo, i seguenti tre assi mutuamente ortogonali: l'asse tangente positivo al bordo, la normale interna al bordo e l'asse normale positivo alla S , formano, nell'ordine ora dato, una terna ortogonale sinistrorsa, congruente cioè alla terna (x, y, z) degli assi coordinati. Con linguaggio meno preciso ma assai espressivo, si usa dire così: Se immaginiamo un osservatore portato dalla S , in un punto P del bordo di questa, il cui corpo sia attraversato,

dai piedi alla testa, dall'asse normale positivo alla S e che guardi nella direzione e nel verso dell'asse tangente positivo al bordo, la normale interna a questo va dalla destra alla sinistra dell'osservatore.

Una superficie regolare dicesi *biregolare*, se ogni sua faccia è biregolare. Tanto la superficie sferica che la torica sono biregolari. Se nella definizione di superficie regolare dotata di base, si aggiunge la condizione che i domini A_1, A_2, \dots, A_n , basi delle facce S_1, S_2, \dots, S_n di S , siano regolari, si ottiene la definizione di *superficie biregolare dotata di base*. In tal caso, se le due facce S_i e S_j hanno punti comuni, i versi positivi su BS_i e su BS_j sono, evidentemente, *opposti* lungo gli archi comuni a BS_i e a BS_j . Il verso positivo sul bordo BS di una superficie biregolare qualsiasi è quello che compete ai vari bordi liberi delle sue facce. Se la superficie biregolare è dotata di base A e le (1) sono le sue equazioni parametriche, mentre il punto (u, v) percorre, nel verso positivo, la frontiera di A , il punto (1) percorre BS nel già definito verso positivo.

134. Definizione di integrale superficiale. Teorema di Stokes. — Sia H un insieme di punti dello spazio (x, y, z) e S una porzione di superficie regolare, di equazioni parametriche

$$(1) \quad x = \lambda(u, v), \quad y = \mu(u, v), \quad z = \nu(u, v),$$

e di dominio base A del piano (u, v) . Diremo (cfr. n° 121) che S è *quasi contenuta* nell'insieme H , se l'insieme dei punti di S che non sono contenuti in H o non esiste, o è tale che il corrispondente insieme N di A ha estensione nulla, sul piano. Nell'insieme H sia definita una funzione $f(x, y, z)$ reale o complessa delle tre variabili reali x, y, z ; diremo che *la $f(x, y, z)$ è sommabile (è sommabile e integrabile) su S* , se la funzione di u e di v

$$f[\lambda(u, v), \mu(u, v), \nu(u, v)],$$

riesce sommabile (sommabile e integrabile) sull'insieme A . In tal caso, diremo (*massimo o minimo*) *integrale superficiale della f esteso alla superficie S* , e lo indicheremo con la notazione

$$(2) \quad \int_S f(x, y, z) d\sigma,$$

l'integrale (massimo o minimo) della funzione

$$f[\lambda(u, v), \mu(u, v), \nu(u, v)] \sqrt{EG - F^2},$$

esteso al dominio A . Talchè, per definizione, si ha

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \int_A f(\lambda, \mu, \nu) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Ha interesse il notare un modo di pervenire al valore dell' integrale (2), che ripete sulla superficie S i procedimenti di decomposizione in parti di diametro infinitesimo seguiti ai n° 89 e 97 per gli integrali delle funzioni limitate estesi ad insiemi limitati dello spazio. Ci limiteremo a considerare il caso che la S sia totalmente contenuta in H e che la f sia limitata e integrabile su S . Per una porzione di superficie regolare diremo *diametro base* il diametro della sua base. Sia $S(T)$ una porzione di superficie regolare contenuta nella S , di base $T (< A)$, data la continuità delle funzioni λ, μ, ν , si dimostra immediatamente che:

$$\lim_{\text{diam } T \rightarrow 0} \text{diam } S(T) = 0.$$

Dico che: *Operata la più arbitraria decomposizione della porzione di superficie regolare S in porzioni di superficie regolari S_1, S_2, \dots, S_n , delle quali sia δ il massimo diametro base, posto $\sigma_i = \text{area } S_i (i=1, 2, \dots, n)$, preso, nel modo più arbitrario, un punto P_i in $S_i (i=1, 2, \dots, n)$, si ha*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \sigma_i = \int_S f(x, y, z) d\sigma.$$

Diciamo invero T_i la base di S_i e Q_i il punto di A che corrisponde a P_i , e poniamo $H(u, v) = (EG - F^2)^{1/2}$, $\varphi(u, v) = f(\lambda, \mu, \nu)$, si ha

$$\sum_i^{1, n} f(P_i) \sigma_i = \sum_i^{1, n} \varphi(Q_i) \int_{T_i} H(u, v) du dv = \sum_i^{1, n} \varphi(Q_i) H(Q'_i) T_i$$

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_i^{1, n} \varphi(Q_i) H(Q'_i) T_i,$$

$$\left| \sum_i^{1, n} \varphi(Q_i) H(Q_i) T_i - \sum_i^{1, n} \varphi(Q'_i) H(Q'_i) T_i \right| \leq LA\omega,$$

avendo designato con Q_i e Q'_i due punti di T_i , con L l'estremo su-

periore di $|f|$ in S , con ω la più grande fra le oscillazioni che la funzione $H(Q)$ subisce nei domini T_1, T_2, \dots, T_n .

Siano ora $X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)$ tre funzioni (reali o complesse) definite nell'insieme H e prendiamo a considerare la forma differenziale quadratica seguente:

$$(3) \quad X(x, y, z) dy dz + Y(x, y, z) dz dx + Z(x, y, z) dx dy.$$

Denotiamo con n l'asse normale (positivo o negativo) alla porzione di superficie regolare S , supposta sempre quasi contenuta in H . I tre coseni direttori di n : $\cos(x, n), \cos(y, n), \cos(z, n)$, riescono tre determinate funzioni finite e continue dei parametri u e v . Diremo che la forma differenziale (3) è *sommabile* (è *sommabile e integrabile*) sulla superficie S , se le tre seguenti funzioni di u e di v

$$\begin{aligned} X[\lambda(u, v), \mu(u, v), \nu(u, v)] \cos(x, n), \\ Y[\lambda(u, v), \mu(u, v), \nu(u, v)] \cos(y, n), \\ Z[\lambda(u, v), \mu(u, v), \nu(u, v)] \cos(z, n), \end{aligned}$$

sono sommabili (sommabili e integrabili) sul dominio A base di S . Diremo, in tal caso, (*massimo o minimo*) *integrale superficiale della forma differenziale (3) esteso alla superficie S , secondo la pagina positiva*, e lo indicheremo con la notazione

$$\int_{+S} (X dy dz + Y dz dx + Z dx dy),$$

il seguente integrale

$$\begin{aligned} & \int_S [X \cos(x, n_+) + Y \cos(y, n_+) + Z \cos(z, n_+)] d\sigma = \\ & = \int_A [X(\lambda, \mu, \nu) \cos(x, n_+) + Y(\lambda, \mu, \nu) \cos(y, n_+) + Z(\lambda, \mu, \nu) \cos(z, n_+)] \sqrt{EG - F^2} du dv \\ & = \int_A \left[X(\lambda, \mu, \nu) \frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(u, v)} + Y(\lambda, \mu, \nu) \frac{\partial(\nu, \lambda)}{\partial(u, v)} + Z(\lambda, \mu, \nu) \frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(u, v)} \right] du dv, \end{aligned}$$

ove con n_+ abbiamo designato l'asse normale positivo alla S .

Integrale superficiale (massimo o minimo) della forma differenziale (3) esteso alla superficie S , secondo la pagina negativa, indicato con la notazione

$$\int_{-S} (Xdy dz + Ydz dx + Zdx dy),$$

sarà, naturalmente, l'integrale

$$\int_S [X \cos(x, n_-) + \dots] d\sigma = - \int_A \left[X(\lambda, \mu, \nu) \frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(u, v)} + \dots \right] du dv,$$

ove con n_- abbiamo designato l'asse normale negativo alla S .

Se, per esempio, la porzione di superficie regolare S ammette la rappresentazione cartesiana $z = f(x, y)$, si avrà

$$\begin{aligned} & \int_{+S} (Xdy dz + Ydz dx + Zdx dy) = \\ & = \int_A \left\{ -X[x, y, f(x, y)] \frac{\partial f}{\partial x} - Y[x, y, f(x, y)] \frac{\partial f}{\partial y} + Z[x, y, f(x, y)] \right\} dx dy. \end{aligned}$$

Sia ora S una qualsiasi superficie regolare. Essa si dirà quasi contenuta nell'insieme H se è tale ogni sua faccia; diremo allora la funzione f o la forma differenziale (3) sommabile (sommabile e integrabile) sulla S se la funzione o la forma lo è sopra ogni faccia di S , e in tal caso porremo, per definizione,

$$\begin{aligned} \int_S f(x, y, z) d\sigma &= \sum_i^{1, n} \int_{S_i} f(x, y, z) d\sigma, \\ \int_{+S} (X dy dz + \dots) &= \sum_i^{1, n} \int_{+S_i} (X dy dz + \dots), \\ \int_{-S} (X dy dz + \dots) &= \sum_i^{1, n} \int_{-S_i} (X dy dz + \dots), \end{aligned}$$

se S_1, S_2, \dots, S_n sono le facce di S .

Queste definizioni poste, siamo in grado di enunciare e di dimostrare il classico *teorema di Stokes* (*):

I. Se le funzioni X, Y, Z , con tutte le loro derivate parziali del

(*) Che per noi serve di fondamento alla teoria degli integrali tripli.

primo ordine, sono continue nell'insieme \mathbf{H} , per ogni superficie biregolare, dotata di base \mathbf{A} , contenuta in \mathbf{H} , sussiste la relazione

$$(4) \int_{+S} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy \right] = \\ = \int_{+BS} (X dx + Y dy + Z dz).$$

Poichè, se S_1, S_2, \dots, S_n sono le facce di S , si ha

$$\int_{+S} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz + \dots \right] = \sum_i^{1,n} \int_{+S_i} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz + \dots \right], \\ \int_{+BS} (X dx + \dots) = \sum_i^{1,n} \int_{+BS_i} (X dx + \dots),$$

basterà limitarsi a dimostrare il teorema nel caso che la S si riduca ad un'unica porzione di superficie biregolare. Ma si ha allora

$$\int_{+BS} (X dx + Y dy + Z dz) = \\ = \int_{+FA} \left\{ \left[X(\lambda \mu \nu) \frac{\partial \lambda}{\partial u} + Y(\lambda \mu \nu) \frac{\partial \mu}{\partial u} + Z(\lambda \mu \nu) \frac{\partial \nu}{\partial u} \right] du + \right. \\ \left. + \left[X(\lambda \mu \nu) \frac{\partial \lambda}{\partial v} + Y(\lambda \mu \nu) \frac{\partial \mu}{\partial v} + Z(\lambda \mu \nu) \frac{\partial \nu}{\partial v} \right] dv \right\} =$$

(per il teorema di **Green**)

$$= \int_A \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(X \frac{\partial \lambda}{\partial v} + Y \frac{\partial \mu}{\partial v} + Z \frac{\partial \nu}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(X \frac{\partial \lambda}{\partial u} + Y \frac{\partial \mu}{\partial u} + Z \frac{\partial \nu}{\partial u} \right) \right] du dv = \\ = \int_A \left[(Z_y - Y_z) \frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(u, v)} + (X_z - Z_x) \frac{\partial(\nu, \lambda)}{\partial(u, v)} + (Y_x - X_y) \frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(u, v)} \right] du dv = \\ = \int_{+S} \left[(Z_y - Y_z) dy dz + (X_z - Z_x) dz dx + (Y_x - X_y) dx dy \right],$$

come dovevasi dimostrare.

Il teorema di *Stokes* riceve, anche in *Fisica*, frequenti ed importanti applicazioni, per le quali è specialmente utile la forma vettoriale del teorema. Tale forma si ottiene qualora si interpretino X , Y , Z come le componenti di un vettore \mathbf{v} ; allora il vettore che ha per componenti le quantità

$$Z_y - Y_z, \quad X_z - Z_x, \quad Y_x - X_y,$$

chiamasi *rotazione di v* e denotasi con la scrittura

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Denotiamo con \mathbf{n} il vettore unitario avente la direzione e il verso dell'asse normale positivo alla S e con \mathbf{t} il vettore unitario avente la direzione e il verso dell'asse tangente positivo al bordo di S . La (4) si traduce allora nella seguente:

$$(5) \quad \int_S (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) \, d\sigma = \int_{BS} (\mathbf{t} \times \mathbf{v}) \, ds.$$

Detto \mathbf{u}_i il vettore unitario avente la direzione e il verso della normale interna al bordo di S , si ricordi (pag. 690) che, lungo il bordo, la terna $(\mathbf{t}, \mathbf{u}_i, \mathbf{n})$ deve risultare sinistrorsa.

Applicazione all'integrazione delle forme differenziali lineari. Il teorema di *Stokes* offre anche, immediatamente, un'ulteriore risposta al problema dell'integrazione delle forme differenziali lineari in tre variabili, posto al n° 122 e colà già risolto in taluni casi; esso teorema consente invero di dimostrare il seguente:

II. Il dominio limitato e internamente connesso D goda delle seguenti due proprietà: *a*) della proprietà posseduta dai domini considerati nel teor. III del n° 122, *b*) comunque si consideri una poligonale (piana o gobba) chiusa e non intrecciata interna a D , si può sempre costruire una superficie poliedrica interna a D che ammetta quella poligonale come completo suo bordo. Allora se le assegnate funzioni X , Y , Z sono continue in D ed in ogni punto interno sono dotate di derivate parziali del primo ordine, finite e continue, e tali inoltre che sia sempre

$$(6) \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$$

la forma differenziale $Xdx + Ydy + Zdz$ sarà integrabile in D .

Se il lettore riconsidera la dimostrazione del teor. V del n° 124, vede immediatamente che l'attuale teorema sarà dimostrato non appena sarà stabilito che l'integrale della forma differenziale $Xdx + Ydy + Zdz$, esteso ad una qualsiasi poligonale chiusa, non intrecciata, interna a D , è sempre nullo. Ora una tale poligonale è sempre, per ipotesi, il completo bordo di una superficie poliedrica S interna a D , e, per il teorema di *Stokes*, l'integrale della forma $Xdx + \dots$, esteso alla poligonale ha il valore

$$\int_{+S} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy \right],$$

il quale è nullo, in virtù delle (6).

Nelle sole ipotesi testè fatte sulle funzioni X, Y, Z , il teorema ora dimostrato arricchisce assai la classe dei domini ove si può assicurare l'integrabilità della forma differenziale $Xdx + \dots$. Ai teoremi IV e V del n° 122 sfuggivano, per esempio, i domini formati da tutti i punti non esterni ad una sfera S e non interni a ciascuna delle sfere S_1, S_2, \dots, S_n , esterne l'una all'altra e tutte interne alla S ; laddove, valendo le (6), il teorema ora ottenuto assicura l'integrabilità della forma anche in un tale dominio. Si consideri, invece, come dominio ove si vuole integrare la forma $Xdx + \dots$, un toro. Esso non presenta le proprietà volute dal teor. II, precisamente non presenta la proprietà **b**). Se, invero, si considera il cerchio C generato dal centro del cerchio (ruotante) generatore del toro, si vede che per qualunque poligono inscritto al cerchio C e interno al toro è impossibile costruire una superficie poliedrica, pur essa interna al toro, che ammetta quel poligono come completo suo bordo. Ed effettivamente, come si può vedere con esempi, la forma differenziale $Xdx + \dots$, pur verificandosi per le funzioni X, Y, Z tutte le ipotesi del teor. II, può *non* essere integrabile in un toro.

135. Domini normali, binormali e regolari dello spazio.

Corollari del teorema di Stokes. — Nel dominio regolare e internamente connesso A_{uv} del piano (u, v) siano definite due funzioni $f_1(u, v)$ e $f_2(u, v)$, finite e continue con le loro derivate parziali dei due primi ordini, tali che: **a**) sia sempre $f_2(u, v) > f_1(u, v)$, per ogni punto (u, v) interno al dominio A_{uv} , **b**) i punti della frontiera FA

nei quali è $f_2(u, v) = f_1(u, v)$ costituiscano sempre, quando esistono, un numero finito di archi i quali, eventualmente, possono, tutti o taluni di essi, anche ridursi a punti, come può anche avvenire che sia $f_2(u, v) = f_1(u, v)$ in tutto \mathbf{FA} . Ciascuno dei tre domini dello spazio (x, y, z) definiti dalle condizioni:

$$(1) \quad (y, z) \text{ è in } \mathbf{A}_{yz}, \quad f_1(y, z) \leq x \leq f_2(y, z),$$

$$(2) \quad (z, x) \text{ è in } \mathbf{A}_{zx}, \quad f_1(z, x) \leq y \leq f_2(z, x),$$

$$(3) \quad (x, y) \text{ è in } \mathbf{A}_{xy}, \quad f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y),$$

dicesi *dominio normale* dello spazio, il primo, *normale rispetto al piano* (y, z) e *avente per base il dominio* \mathbf{A}_{yz} , il secondo, *normale rispetto al piano* (z, x) e *avente per base il dominio* \mathbf{A}_{zx} , il terzo, *normale rispetto al piano* (x, y) e *avente per base il dominio* \mathbf{A}_{xy} .

Ogni dominio normale \mathbf{T} è internamente connesso, limitato e (cfr. dim. del teor. V del n° 92 e teor. I dello stesso numero) misurabile con un volume dato da

$$(4) \quad T = \int_{\mathbf{A}_{uv}} [f_2(u, v) - f_1(u, v)] du dv.$$

La frontiera di un dominio normale è costituita da una superficie biregolare chiusa \mathbf{S} , della quale, per esempio se il dominio è normale rispetto al piano (x, y) , le due superficie aventi la comune base \mathbf{A}_{xy} e le equazioni cartesiane $z = f_2(x, y)$, $z = f_1(x, y)$, sono precisamente due facce (le diremo *facce basilari*) e sono le *uniche* facce se riesce $f_1(x, y) = f_2(x, y)$ su \mathbf{FA} ; diversamente, la \mathbf{S} avrà pure un certo numero di facce su superficie cilindriche (le diremo *facce laterali*); se $x = \alpha(s)$, $y = \beta(s)$ sono le equazioni parametriche di un arco di porzione di curva regolare facente parte di \mathbf{FA} , nell'interno del quale riesce $f_2[\alpha(s), \beta(s)] > f_1[\alpha(s), \beta(s)]$, ed agli estremi s_1 e s_2 , $f_1[\alpha(s_1), \beta(s_1)] = f_2[\alpha(s_1), \beta(s_1)]$, $f_1[\alpha(s_2), \beta(s_2)] = f_2[\alpha(s_2), \beta(s_2)]$, la porzione di superficie biregolare avente le equazioni parametriche

$$x = \alpha(s), \quad y = \beta(s), \quad z = z,$$

e per base il dominio normale del piano (s, z)

$$s_1 \leq s \leq s_2, \quad f_1[\alpha(s), \beta(s)] \leq z \leq f_2[\alpha(s), \beta(s)],$$

è appunto una faccia laterale di \mathbf{S} (*).

(*) Per rispettare le convenzioni delle pagg. 685-686, dobbiamo supporre,

Un dominio normale dello spazio che ha per base un dominio del pari normale del piano, sarà detto *binormale*. Siano $g_1(w)$ e $g_2(w)$ due funzioni finite e continue con le loro derivate prime e seconde, definite in un comune intervallo (d_1, d_2) dell'asse w , e sia $g_2(w) > g_1(w)$ se $d_1 < w < d_2$, si hanno *sei* specie di domini binormali, definiti, rispettivamente, dalle limitazioni seguenti :

$$(5) \quad d_1 \leq x \leq d_2, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \quad f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y),$$

$$(6) \quad d_1 \leq y \leq d_2, \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y), \quad f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y),$$

$$(7) \quad d_1 \leq z \leq d_2, \quad g_1(z) \leq y \leq g_2(z), \quad f_1(y, z) \leq x \leq f_2(y, z),$$

$$(8) \quad d_1 \leq y \leq d_2, \quad g_1(y) \leq z \leq g_2(y), \quad f_1(y, z) \leq x \leq f_2(y, z),$$

$$(9) \quad d_1 \leq z \leq d_2, \quad g_1(z) \leq x \leq g_2(z), \quad f_1(z, x) \leq y \leq f_2(z, x),$$

$$(10) \quad d_1 \leq x \leq d_2, \quad g_1(x) \leq z \leq g_2(x), \quad f_1(z, x) \leq y \leq f_2(z, x),$$

i domini (5) e (6) sono normali rispetto al piano (x, y) , i domini (7) e (8) rispetto al piano (z, y) e i domini (9) e (10) rispetto al piano (z, x) .

Evidentemente: Ogni dominio normale è elementarmente decomponibile in domini binormali.

Dicesi *regolare* un dominio dello spazio (x, y, z) quando esso è suscettibile di un'elementare decomposizione in domini normali. Evidentemente: Ogni dominio regolare è elementarmente decomponibile in domini binormali, è limitato, è misurabile ed ha una frontiera composta di porzioni di superficie biregolari. Esempi: La sfera, l'ellissoide, il toro, i poliedri, sono domini regolari; la totalità dei punti non esterni ad una sfera S e non interni a più sfere S_1, S_2, \dots, S_n , esterne l'una all'altra ed interne alla S , costituisce pure un dominio regolare.

Come per i domini regolari del piano così per quelli dello spazio si definiscono i punti regolari della frontiera, la retta normale e il piano tangente alla frontiera in un suo punto regolare, l'asse interno e l'asse esterno in una data direzione, la *normale interna* e la *normale esterna*. Sia T un qualsiasi dominio regolare dello spazio, ogni porzione di superficie biregolare S facente parte di FT , dicesi *faccia* di FT , noi *converremo* sempre di adottare (ciò che è evidentemente possibile) per ciascuna faccia S di FT una tale rappresentazione parametrica che l'asse normale positivo alla S , rela-

per tutti gli archi di FA , privi di punti singolari, $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ finite e continue con le loro derivate dei due primi ordini.

tivo a questa rappresentazione, coincida con la normale esterna alla FT , nei punti di S ad essa interni. L'asse normale positivo alla S nei punti del bordo di S dicesi allora *normale esterna alla FT relativa alla faccia S* . In un punto non regolare di FT vi sono dunque tante normali esterne quante sono le facce distinte alle quali quel punto appartiene. Lungo il bordo di ogni faccia di T viene, dopo quanto precede, fissato il verso positivo al modo seguente: È dato da un asse tangente al bordo, il quale, con la normale interna al bordo e con la normale esterna alla FT relativa alla faccia in considerazione, forma una terna ortogonale sinistrorsa.

Per ogni faccia di FT diremo *pagina esterna (interna)* la pagina di essa volta verso la normale esterna (interna) (*). *Pagina esterna (interna)* di FT è l'insieme delle pagine esterne (interne) delle sue facce.

Come nel piano, si definiscono nello spazio i domini regolari connessi ad uno o a più contorni.

Sia T il più generale dominio regolare dello spazio e f, X, Y, Z tre funzioni (reali o complesse) che, per semplificare, vogliamo supporre ovunque definite in T e ivi continue. Siano S_1, S_2, \dots, S_n le facce di cui si compone FT . Come *integrale superficiale della funzione f esteso alla frontiera di T* , indicato con la notazione

$$\int_{FT} f(x, y, z) d\sigma,$$

si intende la somma

$$\sum_i^{1, n} \int_{S_i} f(x, y, z) d\sigma.$$

Come *integrale superficiale della forma differenziale*

$$(11) \quad X dy dz + Y dz dx + Z dx dy,$$

esteso alla frontiera FT , secondo la pagina esterna, indicato con la notazione

$$\int_{(FT)_e} [X dy dz + Y dz dx + Z dx dy],$$

(*) Per la convenzione testè fatta questa pagina è la positiva relativa alla adottata rappresentazione parametrica della faccia.

si intende la somma

$$\sum_{i=1}^{1,2} \int_{S_i} [X \cos(x, n_e) + Y \cos(y, n_e) + Z \cos(z, n_e)] d\sigma,$$

ove n_e designa la normale esterna a \mathbf{FT} . Analogamente si definisce e si designa l'integrale superficiale della (11) esteso alla \mathbf{FT} , secondo la pagina interna.

Il dominio regolare \mathbf{T} sia ora comunque variabile entro il fissato dominio regolare \mathbf{H} , ove sono definite le tre funzioni continue X, Y, Z . Ponendo

$$(12) \quad I(\mathbf{T}) = \int_{(\mathbf{FT})_e} (X dy dz + Y dz dx + Z dx dy)$$

si definisce, in \mathbf{H} , una ben determinata funzione di dominio regolare. Ebbene, come per il piano (124, III) si dimostra il teorema:

I. *La funzione di dominio regolare $I(\mathbf{T})$, definita dalla (12), è additiva.*

Ed ora passiamo a dare taluni notevolissimi corollari del teorema di *Stokes* sui quali ci fonderemo nel prossimo paragrafo per trarne importanti conseguenze.

II. *Nell'insieme \mathbf{H} dello spazio, le funzioni X, Y, Z siano finite e continue con le loro derivate parziali del primo ordine, se \mathbf{T} è un qualsiasi dominio regolare contenuto in \mathbf{H} , si ha sempre:*

$$(13) \quad \int_{(\mathbf{FT})_e} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy \right] = 0.$$

In virtù del teorema precedente, e per essere un dominio regolare sempre decomponibile in domini binormali, possiamo limitarci a dimostrare il teorema nell'ipotesi che \mathbf{T} sia un dominio binormale. Supporremo che il dominio \mathbf{T} sia normale rispetto al piano (x, y) e che la base A_{xy} abbia per contorno un'unica curva regolare semplice e chiusa \mathbf{C} , priva di punti singolari, di arco s , di equazioni $x = \alpha(s)$, $y = \beta(s)$, e di intervallo base $(0, l)$, s crescente nel verso positivo di \mathbf{C} . Diciamo \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 i bordi delle facce basilari. \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 di \mathbf{FT} , di equazioni $z = f_1(x, y)$, $z = f_2(x, y)$, e supponiamo, per esempio, che

C_1 e C_2 coincidano lungo un arco avente i punti terminali P e Q e abbiano inoltre un ulteriore punto comune R fuori di quest'arco, mentre i punti di C , proiezioni ortogonali di P, Q, R sul piano (x, y) , hanno su C le ascisse curvilinee $0, q, r, 0 < q < r < l$. Gli archi $C_1(Q, R)$ e $C_2(Q, R)$ costituiscono insieme il completo bordo di una faccia laterale S' di FT e gli archi $C_1(R, P), C_2(R, P)$ il completo bordo della rimanente faccia laterale S'' di FT . Ora, se per comodità di scrittura poniamo

$$Z_y - Y_z = U, \quad X_z - Z_x = V, \quad Y_x - X_y = W,$$

si ha:

$$\begin{aligned} \int_{(FT)_e} (U dy dz + \dots) &= \int_{S_1} [U \cos(x, n_e) + \dots] d\sigma + \int_{S_2} [U \cos(x, n_o) + \dots] d\sigma + \\ &+ \int_{S'} [U \cos(x, n_e) + \dots] d\sigma + \int_{S''} [U \cos(x, n_e) + \dots] d\sigma, \end{aligned}$$

ed evidentemente, in virtù del teorema di **Stokes**, se supponiamo che, in A_{xy} , sia $f_2(x, y) \geq f_1(x, y)$,

$$\begin{aligned} \int_{S_2} [U \cos(x, n_e) + \dots] d\sigma &= (C_2) \int_P^Q (X dx + \dots) + (C_2) \int_Q^R (X dx + \dots) + \\ &+ (C_2) \int_R^P (X dx + \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_1} [U \cos(x, n_e) + \dots] d\sigma &= -(C_1) \int_P^Q (X dx + \dots) - (C_1) \int_Q^R (X dx + \dots) - \\ &- (C_1) \int_R^P (X dx + \dots), \end{aligned}$$

$$\int_{S'} [U \cos(x, n_e) + \dots] d\sigma = (C_1) \int_Q^R (X dx + \dots) - (C_2) \int_Q^R (X dx + \dots),$$

$$\int_{S''} [U \cos(x, n_e) + \dots] d\sigma = (C_1) \int_R^P (X dx + \dots) - (C_2) \int_R^P (X dx + \dots).$$

Ne segue, sommando membro a membro, come volevasi dimostrare,

$$\int_{(\mathbf{FT})_e} (U dy dz + \dots) = 0.$$

III. Se F è una qualunque funzione di x, y, z , che possiede, in \mathbf{H} , le derivate parziali seconde miste, finite e continue, e se \mathbf{T} è un qualunque dominio regolare contenuto in \mathbf{H} , si ha:

$$\int_{(\mathbf{FT})_e} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} dy dz = \int_{(\mathbf{FT})_e} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} dz dx = \int_{(\mathbf{FT})_e} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy.$$

Ed invero, se si pone nella (13), $Z = F_z$, $X = Y = 0$, si trova

$$\int_{(\mathbf{FT})_e} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} dy dz - \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} dz dx \right) = 0.$$

IV. Se U, V, W sono, rispettivamente, funzioni continue soltanto di y e z , di z e x , di x e y , definite in un dominio rettangolare \mathbf{H} dello spazio, per ogni dominio regolare \mathbf{T} contenuto in \mathbf{H} , si ha:

$$\int_{(\mathbf{FT})_e} U(y, z) dy dz = \int_{(\mathbf{FT})_e} V(z, x) dz dx = \int_{(\mathbf{FT})_e} W(x, y) dx dy = 0.$$

Ed invero si può definire in \mathbf{H} una funzione F delle sole due variabili y e z , tale che riesca $F_{yz} = U$, onde segue

$$\int_{(\mathbf{FT})_e} U(y, z) dy dz = \int_{(\mathbf{FT})_e} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} dy dz = \int_{(\mathbf{FT})_e} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} dz dx = 0,$$

poichè $F_{zx} \equiv 0$.

V. Se U e V sono due funzioni delle variabili x, y, z , continue nel dominio regolare \mathbf{T} , che possiedono, nell'interno di \mathbf{T} , la prima, la derivata rispetto ad una delle variabili, la seconda, la derivata rispetto ad un'altra delle variabili, continue ed eguali fra loro, si ha:

$$(14) \quad \int_{(\mathbf{FT})_e} U dy dz = \int_{(\mathbf{FT})_e} V dz dx, \quad \text{se} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$(15) \quad \int_{(\mathbf{FT})_e} U dz dx = \int_{(\mathbf{FT})_e} V dx dy, \quad \text{se} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$(16) \quad \int_{(\mathbf{FT})_e} U dx dy = \int_{(\mathbf{FT})_e} V dy dz, \quad \text{se} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Al solito, possiamo supporre binormale il dominio \mathbf{T} . Sia esso definito dalle limitazioni

$$d_1 \leq x \leq d_2, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \quad f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y).$$

Cominciamo dal dimostrare la (15). Poniamo $f = (f_1 + f_2) / 2$, esiste una funzione $H(x, y)$, continua nel dominio A_{xy} base di \mathbf{T} , funzione solamente di x e di y , per la quale si ha :

$$\frac{\partial H}{\partial y} = V[x, y, f(x, y)] + U[x, y, f(x, y)] \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ponendo, per ogni punto (x, y, z) di \mathbf{T} ,

$$F(x, y, z) = \int_{f(x, y)}^z U(x, y, \zeta) d\zeta + H(x, y),$$

si viene a definire in \mathbf{T} una funzione continua, per la quale, in ogni punto interno di \mathbf{T} , si ha

$$\frac{\partial F}{\partial z} = U(x, y, z),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \int_{f(x, y)}^z U_y(x, y, \zeta) d\zeta - U[x, y, f(x, y)] \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} = \\ &= \int_{f(x, y)}^z V_z(x, y, \zeta) d\zeta + V[x, y, f(x, y)] = V(x, y, z). \end{aligned}$$

Ma allora, se \mathbf{T}' è un qualunque dominio regolare *interno* a \mathbf{T} , si ha

$$(17) \quad \int_{(\mathbf{FT})_e} (U dz dx - V dx dy) = \int_{(\mathbf{FT})_e} \left(\frac{\partial F}{\partial z} dz dx - \frac{\partial F}{\partial y} dx dy \right) = 0,$$

come si deduce dal teor. II, per $Y = Z = 0$, $X = F$. Presa una

quantità positiva infinitesima $\varepsilon < (d_2 - d_1)/2$, ne esistono evidentemente due altre $\delta'(\varepsilon)$ e $\delta''(\varepsilon)$ tali che le limitazioni

$$d_1 + \varepsilon \leq x \leq d_2 - \varepsilon, \quad g_1(x) + \varepsilon' \leq y \leq g_2(x) - \varepsilon', \\ f_1(x, y) + \varepsilon'' \leq z \leq f_2(x, y) - \varepsilon'',$$

se $0 < \varepsilon' \leq \delta'(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon'' \leq \delta''(\varepsilon)$, definiscono un dominio binormale T' , completamente interno a T . Posto

$$I(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') = \int_{(FT)_\varepsilon} (U dz dx - V dx dy),$$

si ha, per la (17), $I(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') = 0$ e d'altra parte

$$\lim_{(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') \rightarrow 0} I(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') = \int_{(FT)_\varepsilon} (U dz dx - V dx dy),$$

onde finalmente segue la (15). In modo perfettamente analogo si dimostra la (16). Per dimostrare la (14), definiamo, nel dominio T , una funzione continua $W(x, y, z)$ ponendo

$$W(x, y, z) = \int_{f(x, y)}^z U_x(x, y, \zeta) d\zeta = \int_{f(x, y)}^z V_y(x, y, \zeta) d\zeta.$$

In ogni punto interno di T si ha $W_z = U_x = V_y$, e quindi, per quanto abbiamo già dimostrato,

$$\int_{(FT)_\varepsilon} U dy dz = \int_{(FT)_\varepsilon} W dx dy = \int_{(FT)_\varepsilon} V dz dx.$$

Osservazione. Se la funzione $F(x, y, z)$ possiede in H le derivate parziali *secondo* miste e la derivata parziale *terza* mista, finite continue, posto $U = F_{yz}$, $V = F_{zx}$, $W = F_{xy}$, riesce, in H , $U_x = V_y = W_z$, e quindi, in forza del teorema ora dimostrato, per ogni dominio regolare T contenuto in H ,

$$\int_{(FT)_\varepsilon} F_{yz} dy dz = \int_{(FT)_\varepsilon} F_{zx} dz dx = \int_{(FT)_\varepsilon} F_{xy} dx dy,$$

precisamente come, in ipotesi più larghe, già asserisce il teor. III.

136. Formole di cubatura per i domini regolari dello

spazio. — Sotto forma di integrale superficiale, il seguente teorema dà subito il volume di un qualunque dominio regolare dello spazio.

I. Ogni dominio regolare T dello spazio ha un volume T dato da

$$\begin{aligned}
 (1) \quad T &= \int_{(FT)_e} x \, dy \, dz = \int_{(FT)_e} y \, dz \, dx = \int_{(FT)_e} z \, dx \, dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{(FT)_e} (y \, dz \, dx + z \, dx \, dy) = \frac{1}{2} \int_{(FT)_e} (z \, dx \, dy + x \, dy \, dz) = \frac{1}{2} \int_{(FT)_e} (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx) = \\
 &= \frac{1}{3} \int_{(FT)_e} (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy).
 \end{aligned}$$

L'eguaglianza dei sette integrali superficiali ora scritti discende da quella dei primi tre, e l'eguaglianza di questi discende dal teor. III o dal teor. V del n° prec. Possiamo limitarci a dimostrare che per un dominio normale T , normale, per esempio, rispetto al piano (x, y) e di base A_{xy} , si ha

$$(2) \quad T = \int_{(FT)_e} z \, dx \, dy.$$

Diciamo S_1 e S_2 le facce basilari di FT e $S', S'', \dots, S^{(n)}$ le facce laterali. Siano $z = f_1(x, y)$ e $z = f_2(x, y)$ le equazioni di S_1 e di S_2 e sia, in A_{xy} , $f_2(x, y) \geq f_1(x, y)$. Si ha

$$\int_{(FT)_e} z \, dx \, dy = \sum_i^{1, 2} \int_{S_i} z \cos(z, n_e) \, d\sigma + \sum_i^{1, n} \int_{S^{(i)}} z \cos(z, n_e) \, d\sigma.$$

Ora, su ogni faccia laterale $S^{(i)}$ si ha costantemente $\cos(z, n_e) = 0$, mentre è

$$\int_{S_1} z \cos(z, n_e) \, d\sigma = - \int_{A_{xy}} f_1(x, y) \, dx \, dy, \quad \int_{S_2} z \cos(z, n_e) \, d\sigma = \int_{A_{xy}} f_2(x, y) \, dx \, dy,$$

onde segue

$$\int_{(FT)_e} z \, dx \, dy = \int_{A_{xy}} [f_2(x, y) - f_1(x, y)] \, dx \, dy,$$

e ciò dà la (2), per la (4) del n° prec.

Le (1) contengono *tutte* le formole note di cubatura dei domini regolari ed anche di taluni altri domini la frontiera dei quali è costituita da porzioni di superficie regolari con singolarità. A proposito di ciò dobbiamo anzi rilevare che i concetti e i teoremi stabiliti ai n° 133, 134 e 135 possono, in gran parte, essere estesi al caso che nelle superficie considerate e nelle frontiere dei domini considerati si presentino porzioni di superficie regolari dotate di singolarità e lo possono, più largamente e più facilmente, specialmente se per ogni tale porzione di superficie regolare il discriminante $EG - F^2$ della prima forma fondamentale si mantiene limitato, le singolarità consistendo, per esempio, soltanto nella presenza di punti di zero per tale discriminante. Il lettore indagherà, in queste ipotesi, le possibilità dell'estensione indicata.

Così, per esempio, prendiamo a considerare una curva regolare continua semplice e chiusa C di un piano p , di equazioni parametriche $x = \alpha(v)$, $y = \beta(v)$, $z = \gamma(v)$ e di intervallo base (v', v'') , ed un fissato punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ fuori di p . Poniamo $A = D_1C$ e consideriamo il cono T di vertice P_0 e di base A . Data la misurabilità di A , già sappiamo (87, XII) che il cono riesce misurabile e che ha per volume $Ah/3$, avendo designato con h l'altezza del cono. La frontiera di T è composta della porzione di superficie biregolare nella quale consiste il dominio base A e del luogo S (*superficie conica*) descritta dal punto

$x = x_0 + u[\alpha(v) - x_0]$, $y = y_0 + u[\beta(v) - y_0]$, $z = z_0 + u[\gamma(v) - z_0]$,
 al variare del punto (u, v) nel dominio rettangolare $[(0, v'), (1, v'')]$. Per la S risulta $EG - F^2 = 0$, per $u = 0$, e subito si vede che S è una porzione di superficie biregolare con singolarità. Non ostante, io dico che per il volume T del cono si ha sempre

$$(3) \quad T = \frac{1}{3} \int_{(FT)_e} (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy).$$

Ed inverso

$$\int_{(FT)_e} (x \, dy \, dz + \dots) = \int_S [x \cos(x, n_e) + \dots] \, d\sigma + \int_A [x \cos(x, n_e) + \dots] \, d\sigma,$$

laddove, su S , $x \cos(x, n_e) + y \cos(y, n_e) + z \cos(z, n_e) = 0$, e su A ,

$x \cos(x, n_e) + y \cos(y, n_e) + z \cos(z, n_e) = h$; la (3) fornisce quindi $T = Ah/3$.

Allo stesso modo, se T è un settore sferico di una sfera di raggio R , avente per base una porzione di superficie sferica, di area A , la (3) dà, come effettivamente è, $T = AR/3$.

Formole di cubatura in coordinate polari. Dalla (3) deduconsi immediatamente le formole di cubatura in coordinate polari ρ, φ, θ . Al n° 92 abbiamo imparato che un settoroide T dello spazio (x, y, z) , relativo alla funzione positiva e continua $f(\varphi, \theta)$, avente per base un insieme A chiuso e misurabile, del piano (φ, θ) , contenuto nel dominio rettangolare $[(0, 0); (\pi, 2\pi)]$, è misurabile ed ha per volume

$$(4) \quad T = \frac{1}{3} \int_A [f(\varphi, \theta)]^3 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta;$$

orbene, alla stessa formola conduce immediatamente la (3) quando si supponga, per esempio, che A sia un dominio regolare internamente connesso e la funzione $f(\varphi, \theta)$ sia in A continua con le sue derivate parziali. In tal caso, la frontiera di T si compone della porzione di superficie biregolare S avente le equazioni parametriche

$$(5) \quad x = f(\varphi, \theta) \cos \theta \sin \varphi, \quad y = f(\varphi, \theta) \sin \theta \sin \varphi, \quad z = f(\varphi, \theta) \cos \varphi,$$

e la base A e della superficie conica S' proiettante, dall'origine O delle coordinate, i punti di BS . Nei punti di S' è $x \cos(x, n_e) + y \cos(y, n_e) + z \cos(z, n_e) = 0$. Detto n l'asse normale positivo alla S relativo alla rappresentazione parametrica (5), si trova che

$$[x \cos(x, n) + y \cos(y, n) + z \cos(z, n)] \, d\sigma = f^3 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta.$$

Ne segue che il detto asse normale positivo, in ogni punto P di S , fa sempre un angolo acuto col raggio vettore \vec{OP} , cioè che quell'asse coincide con la normale esterna a FT nei punti di S , e che la (3) si traduce nella (4).

Ma ad una formola poco diversa dalla (4) si perviene anche nell'ipotesi del più generale dominio regolare T . La faccia S_i ($i=1, 2, \dots, n$) della FT abbia le equazioni parametriche

$$(6) \quad \begin{cases} x = \rho_i(u, v) [\cos \theta_i(u, v)] [\sin \varphi_i(u, v)], & y = \rho_i(u, v) [\sin \theta_i(u, v)] [\sin \varphi_i(u, v)] \\ z = \rho_i(u, v) \cos \varphi_i(u, v), \end{cases}$$

e il dominio base A_i ; essa, in coordinate polari, avrà le equazioni

$$(7) \quad \rho = \rho_i(u, v), \quad \varphi = \varphi_i(u, v), \quad \theta = \theta_i(u, v).$$

In virtù della relazione

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \theta)} \frac{\partial(\varphi, \theta)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \rho)} \frac{\partial(\theta, \rho)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(\rho, \varphi)} \frac{\partial(\rho, \varphi)}{\partial(u, v)},$$

e delle altre due che da questa si ottengono con la sostituzione circolare (x, y, z) , poichè:

$$x \frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \theta)} + y \frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \theta)} + z \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \theta)} = \rho^3 \operatorname{sen} \varphi,$$

$$x \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \rho)} + y \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \rho)} + z \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \rho)} = 0,$$

$$x \frac{\partial(y, z)}{\partial(\rho, \varphi)} + y \frac{\partial(z, x)}{\partial(\rho, \varphi)} + z \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = 0,$$

si trova

$$x \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + y \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + z \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \rho^3 \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial(\varphi, \theta)}{\partial(u, v)},$$

e quindi, se — secondo quanto è stato già convenuto — supponiamo che l'asse normale positivo alla S_i relativa alla rappresentazione parametrica (6) coincida con la normale esterna a $F\mathbf{T}$ nei punti di S_i , si ricava dalla (3)

$$(8) \quad T = \frac{1}{3} \sum_{A_i}^{1, n} \int \rho_i^3 \operatorname{sen} \varphi_i \frac{\partial(\varphi_i, \theta_i)}{\partial(u, v)} du dv.$$

Supponiamo ora che, nello spazio (ρ, φ, θ) le equazioni (7) siano equazioni parametriche di porzioni di superficie biregolari costituenti, nel loro insieme, la frontiera di un dominio regolare \mathbf{T}' e che le pagine positive di queste superficie coincidano o sempre con le pagine esterne di esse, considerate come facce di $F\mathbf{T}'$, o sempre con le pagine interne; la (8) si scriverà allora

$$T = \pm \frac{1}{3} \sum_{(F\mathbf{T}')_e}^{1, n} \int \rho^3 \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta,$$

col segno « + » o col segno « - » secondochè si è nel primo o nel secondo caso.

Formole di cubatura per i solidi di rivoluzione. Prima di dare queste formole conviene premettere alcune brevi considerazioni sui *baricentri* degli insiemi del piano. Sia A il più generale insieme del piano (x, y) limitato e di estensione (sul piano) non nulla A . Il punto di coordinate

$$x_0 = \frac{1}{A} \int_A x dT, \quad y_0 = \frac{1}{A} \int_A y dT,$$

chiamasi baricentro di A . Si vede immediatamente che: Se A_1, A_2, \dots, A_n sono insiemi del piano (x, y) limitati e misurabili, a due a due senza punti interni in comune, di baricentri $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, detto (x_0, y_0) il baricentro di $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, risulta

$$(9) \quad x_0 A = \sum_{i=1}^n x_i A_i, \quad y_0 A = \sum_{i=1}^n y_i A_i.$$

Si ha invero

$$x_0 A = \int_A x dT = \sum_i^{1, n} \int_{A_i} x dT = \sum_i^{1, n} x_i A_i.$$

Ed ora, in un piano ruotante attorno l'asse z , assumiamo due assi coordinati ortogonali: l'asse z e un asse r a questo normale. Nel piano (r, z) sia situato un insieme di punti A misurabile e limitato, contenuto in un dominio rettangolare R di punti estremi (r', z') e (r'', z'') , e sia $r' \geq 0$. Diciamo v la longitudine variabile del piano ruotante, ed essendo α un fissato numero positivo non superiore a 2π , consideriamo il solido T_α dello spazio staccato, dal solido di rivoluzione generato da A nella intiera rotazione del piano (r, z) , dai due piani di longitudine v_0 e $v_0 + \alpha$. Vogliamo dimostrare la misurabilità di T_α e determinarne il volume.

Quando parleremo, qui appresso, di solido generato da un qualsiasi insieme B di punti di (r, z) , intenderemo sempre di parlare della parte staccata, dal solido di rivoluzione generato da B nella intiera rotazione del piano (r, z) , dai due piani di longitudine v_0 e $v_0 + \alpha$. Ciò posto, cominciamo dall'osservare che il solido generato da un dominio rettangolare di punti estremi (r, z) e $(r + \Delta r, z + \Delta z)$, contenuto in R , ha il volume

$$(10) \quad \alpha \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta r \Delta z < \alpha r'' \Delta r \Delta z.$$

Mediante un reticolato di rette parallele agli assi r e z , dividiamo il dominio rettangolare R in 2^{2n} domini rettangolari parziali eguali e diciamo A_n la somma di quelli fra questi domini che sono interni ad A e A'_n la somma di quelli contenenti punti della frontiera di A . La frontiera di T_α è contenuta nel solido generato da A'_n , tale solido — per la (10) — ha un volume minore di $\alpha r'' A'_n$ e poichè $\lim A'_n (n \rightarrow \infty) = 0$, ne segue la misurabilità di T_α . Diciamo B_n il solido generato da A_n ed osserviamo che $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ è una successione di domini invadente T_α . Il volume del solido generato da uno, R_{hk} , dei domini rettangolari di cui si compone A_n è dato [per la (10)] da $\alpha r_{hk} R_{hk}$, ove r_{hk} rappresenta la coordinata r del baricentro di R_{hk} ; se ρ_n designa la coordinata r del baricentro di A_n , poichè, per le (9), si ha

$$\rho_n A_n = \sum_{hk} r_{hk} R_{hk},$$

ne segue che il volume B_n del solido B_n è dato da $\alpha \rho_n A_n$. Ma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = T_\alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} r dT = \int_A r dT,$$

e quindi $\lim \rho_n (n \rightarrow \infty) = \rho =$ coordinata r del baricentro di A e si ha perciò il **teorema di Guldino**:

Il piano p ruoti attorno l'asse z , in esso contenuto, e l'insieme limitato A sia di punti di p giacenti tutti da una medesima banda di z . Il solido T_α staccato, dai piani per z di lungitudini v_0 e $v_0 + \alpha$, dal solido generato da A nella rotazione intiera di p , è misurabile se è misurabile A , ed in tal caso ha il volume

$$(11) \quad T_\alpha = \alpha \rho \cdot \text{area } A,$$

ove ρ è la distanza del baricentro di A dall'asse z di rotazione. Per $\alpha = 2\pi$ si trova che il volume generato da A nell'intiera rotazione di p si ottiene moltiplicando l'area di A per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo baricentro.

Assicurata la misurabilità di T_α , nel caso particolare che l'insieme A sia definito dalle limitazioni

$$z' \leq z \leq z'', \quad 0 \leq f_1(z) \leq r \leq f_2(z),$$

ove $f_1(z)$ e $f_2(z)$ sono funzioni continue di z in (z', z'') , si può immediatamente pervenire alla (11) anche applicando il teor. I del n° 92.

La sezione di T_α secondo un piano perpendicolare all'asse di rotazione z ha invero l'area $\alpha[f_2(z)^2 - f_1(z)^2]/2$ e pertanto (92, I)

$$T_\alpha = \frac{\alpha}{2} \int_{z'}^{z''} [f_2(z)^2 - f_1(z)^2] dz = \alpha \int_{z'}^{z''} dz \int_{f_1(z)}^{f_2(z)} r dr = \alpha \int_A r dz dr = \alpha \rho A.$$

Nel caso che l'insieme A , generante il solido di rivoluzione sia un dominio regolare, vogliamo rilevare che nelle formole generali (1) è, sotto altra forma, pure contenuta la (11). Per semplificare supporremo che il dominio regolare A sia ad unico contorno C e che C sia una curva regolare continua semplice e chiusa e priva di punti singolari. Siano $r = r(s)$, $z = z(s)$ le equazioni parametriche di C , s l'arco, $(0, l)$ l'intervallo base. Supposto $\alpha < 2\pi$, la frontiera FT_α è una superficie biregolare composta di tre facce: delle facce piane S_1 e S_2 sui piani di longitudine v_0 e $v_0 + \alpha$ e della faccia S , generata dalla curva C , faccia avente le equazioni parametriche $x = r(s) \cos v$, $y = r(s) \sin v$, $z = z(s)$ e il dominio rettangolare $[(0, v_0); (l, v_0 + \alpha)]$ del piano (s, v) per dominio base. Se assumiamo la formola

$$T_\alpha = \frac{1}{2} \int_{FT_\alpha} [x \cos(x, n_e) + y \cos(y, n_e)] d\sigma,$$

tratta dalle (1), poichè su S_1 e su S_2 , $x \cos(x, n_e) + y \cos(y, n_e) = 0$, e su S , $x \cos(x, n_e) + y \cos(y, n_e) = r(s) z'(s) = r(s) \cos(r, n_e)$, $d\sigma = r(s) ds dv$, si trova

$$T_\alpha = \frac{1}{2} \int_{v_0}^{v_0 + \alpha} dv \int_0^l r^2(s) \cos(r, n_e) ds = \frac{\alpha}{2} \int_C r^2 \cos(r, n_e) ds.$$

Si ottiene così effettivamente il volume di T_α , poichè, per la formola di *Green*, si ha

$$\frac{1}{2} \int_C r^2 \cos(r, n_e) ds = \int_A r ds dr = \rho A.$$

E possiamo infine dire che: *Un dominio regolare A , del piano (r, z) , ruotante intorno all'asse z che non lo attraversi, genera un solido il cui volume è dato da*

$$\pi \int_{FA} r^2 \cos(r, n_e) ds,$$

ove n_e è la normale esterna a FA .

§ 3. Sul calcolo degli integrali nello spazio.

137*. Teoremi di Rolle, di Lagrange, di Cauchy, di l'Hospital (terza forma) e teorema di Darboux per le funzioni di tre variabili. — Sia \mathcal{A} il dominio dello spazio (x, y, z) determinato dalle limitazioni

$$a' \leq x \leq a'', \quad b' \leq y \leq b'', \quad c' \leq z \leq c'',$$

ove taluni o tutti i numeri $a', a'', b', b'', c', c''$ possono essere infiniti. In \mathcal{A} sia definita una funzione reale $F(x, y, z)$ delle tre variabili reali x, y, z , ovunque totalmente derivabile e $f(x, y, z)$ ne sia la derivata totale, sussiste il seguente teorema, perfettamente analogo al teor. I del n° 127*, dimostrabile con lo stesso ragionamento:

I. Se per ogni dominio rettangolare \mathcal{T} , di punti estremi (x, y, z) e $(x + h, y + k, z + l)$ contenuto in \mathcal{A} , poniamo (cfr. n° 54)

$$\Phi(\mathcal{T}) = \Delta_l \Delta_k \Delta_h F(x, y, z),$$

nella famiglia $[\mathcal{A}]_{\mathcal{R}}$ dei domini rettangolari contenuti in \mathcal{A} , si definisce una funzione additiva e primitiva della f .

Anche per le funzioni di tre variabili, dai teoremi del n° 102* seguono dunque il teorema di *Darboux* e, in una terza forma, i teoremi di *Rolle*, di *Lagrange*, di *Cauchy*, di *l'Hospital*.

138*. Problema della ricerca delle funzioni di punto primitive di una data. — Questo problema per le funzioni di tre variabili reali, si pone come per le funzioni di due, ed esso è suscettibile di una trattazione perfettamente analoga a quella data al n° 128*, per le funzioni di due variabili. Sia \mathcal{A} un qualsiasi insieme di punti, dotato di punti interni, dello spazio (x, y, z) ; se $F_0(P)$ è definita in \mathcal{A} ed è una particolare funzione di punto primitiva della $f(P)$, pure definita in \mathcal{A} , dette $X(y, z)$, $Y(z, x)$, $Z(x, y)$ le più arbitrarie funzioni, rispettivamente, delle sole y e z , delle sole z e x , delle sole x e y , definite per quale si voglia valore delle variabili, la funzione

$$F(x, y, z) = F_0(x, y, z) + X(y, z) + Y(z, x) + Z(x, y),$$

è, anch'essa, definita in \mathcal{A} e primitiva della f .

Sussistono, con analoghe dimostrazioni, teoremi analoghi ai teoremi I, II, III, IV del n° 128*. Il teorema analogo al teor. IV si enuncia al modo seguente:

IV. Se la funzione $f(P)$ è definita nel dominio A determinato dalle limitazioni

$$(1) \quad a' \leq x \leq a'', \quad b' \leq y \leq b'', \quad c' \leq z \leq c'',$$

ove taluni o tutti i numeri estremi possono essere infiniti, ed è ivi dotata di funzioni primitive di punto, fissato arbitrariamente un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ di A , ogni tale funzione riesce completamente determinata con l'assegnarle, in modo affatto arbitrario, i valori $u(y, z)$, $v(z, x)$, $w(x, y)$ che deve, rispettivamente, assumere per $x = x_0$, per $y = y_0$, per $z = z_0$.

Deve necessariamente essere

$$\begin{aligned} v(z_0, x) = w(x, y_0) = l(x), \quad w(x_0, y) = u(y, z_0) = m(y), \\ u(y_0, z) = v(z, x_0) = n(z), \quad l(x_0) = m(y_0) = n(z_0) = p, \end{aligned}$$

ove $l(x)$, $m(y)$, $n(z)$ designano, rispettivamente, i valori che risultano assegnati alla funzione primitiva, per $y = y_0$ e $z = z_0$, per $z = z_0$ e $x = x_0$, per $x = x_0$ e $y = y_0$ e p designa il valore che risulta assegnato alla stessa funzione nel punto (x_0, y_0, z_0) . Se $F_0(x, y, z)$ è una particolare funzione primitiva della f , per la funzione primitiva $F(x, y, z)$, verificante le condizioni $F(x_0, y, z) = u(y, z)$, $F(x, y_0, z) = v(z, x)$, $F(x, y, z_0) = w(x, y)$, si ha

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = F_0(x, y, z) + [u(y, z) - F_0(x_0, y, z)] + [v(z, x) - F_0(x, y_0, z)] + \\ + [w(x, y) - F_0(x, y, z_0)] - [l(x) - F_0(x, y_0, z_0)] - \\ - [m(y) - F_0(x_0, y, z_0)] - [n(z) - F_0(x_0, y_0, z)] + \\ + p - F_0(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Sussistono pure i teoremi analoghi ai teoremi V, VI, VII, VIII del n° 128*. I teoremi analoghi agli ultimi due si enunciano al modo seguente:

VII. La funzione $f(x, y, z)$ sia definita nel qualsivoglia dominio A dello spazio e sia limitata e integrabile su ogni insieme limitato contenuto in A ; se è nota in A una funzione di punto $F(x, y, z)$, primitiva della f , per ogni dominio rettangolare T , di punti estremi (x, y, z) e $(x + h, y + k, z + l)$, contenuto in A , si ha sempre

$$\int_T f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \Delta_l \Delta_k \Delta_h F(x, y, z).$$

VIII. Ogni funzione $f(x, y, z)$ continua in un dominio A vi è dotata di funzione primitiva di punto. Una fra queste è definita dalle eguaglianze :

$$(2) F_0(x, y, z) \left\{ \begin{array}{l} = \int_{A.R(P_0, P)} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \text{ se } (x-x_0)(y-y_0)(z-z_0) \geq 0, \\ = - \int_{A.R(P_0, P)} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \text{ se } (x-x_0)(y-y_0)(z-z_0) \leq 0, \end{array} \right.$$

ove $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è un punto dello spazio arbitrariamente fissato ; tale funzione riesce pur essa continua. Se, in particolare, il dominio A è determinato dalle limitazioni (1), le (2) si riducono all' unica seguente

$$(3) F_0(x, y, z) = \int_{z_0}^z d\zeta \int_{y_0}^y d\eta \int_{x_0}^x f(\xi, \eta, \zeta) d\xi = \int_{x_0}^x d\xi \int_{z_0}^z d\zeta \int_{y_0}^y f(\xi, \eta, \zeta) d\eta = \dots ;$$

in tal caso, la funzione di punto primitiva della f , verificante le condizioni $F(x_0, y, z) = u(y, z)$, $F(x, y_0, z) = v(z, x)$, $F(x, y, z_0) = w(x, y)$ è data da

$$F(x, y, z) = u(y, z) + v(z, x) + w(x, y) - l(x) - m(y) - n(z) + p + \int_{z_0}^z \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x f(\xi, \eta, \zeta) d\xi.$$

Dalle (3) si trae

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial x} &= \int_{y_0}^y d\eta \int_{z_0}^z f(x, \eta, \zeta) d\zeta, & \frac{\partial F_0}{\partial y} &= \int_{z_0}^z d\zeta \int_{x_0}^x f(\xi, y, \zeta) d\xi, & \frac{\partial F_0}{\partial z} &= \int_{x_0}^x d\xi \int_{y_0}^y f(\xi, \eta, z) d\eta, \\ \frac{\partial^2 F_0}{\partial y \partial z} &= \int_{x_0}^x f(\xi, y, z) d\xi, & \frac{\partial^2 F_0}{\partial z \partial x} &= \int_{y_0}^y f(x, \eta, z) d\eta, & \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} &= \int_{z_0}^z f(x, y, \zeta) d\zeta, \\ \frac{\partial^3 F_0}{\partial x \partial y \partial z} &= f(x, y, z). \end{aligned}$$

Ma, come al n° 128*, si ha, più in generale, che: Quale si sia il dominio A , ogni funzione continua f vi possiede una funzione di punto primitiva F , continua e dotata delle derivate F_x, F_y, F_z, F_{yz} ,

F_{zx} , F_{xy} , pur esse finite e continue. Se ne deduce $F_{xyz} = f$, e pertanto che F_{yz} , F_{zx} , F_{xy} sono altrettanti integrali parziali della f , rispettivamente, rispetto alla x , rispetto alla y , rispetto alla z .

139. Riduzione degli integrali delle funzioni continue estesi a domini regolari dello spazio. — Anche nello spazio sussiste un *teorema di Green*, perfettamente analogo a quello già dato nel piano (al n° 129), di fondamentale importanza per la continua applicazione che se ne fa in *Analisi* e in *Fisica*. Noi ci fonderemo su questo teorema per dare nuove formole di riduzione degli integrali delle funzioni continue estesi a domini regolari. Eccone l'enunciato e la dimostrazione:

I. Se le funzioni $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ sono definite nel dominio regolare T e ivi sono continue, la prima con la derivata X_x , la seconda con la derivata Y_y e la terza con la derivata Z_z , sussistono le relazioni

$$(1) \quad \int_T \frac{\partial X}{\partial x} dT = \int_{(FT)_e} X dy dz, \quad \int_T \frac{\partial Y}{\partial y} dT = \int_{(FT)_e} Y dz dx, \quad \int_T \frac{\partial Z}{\partial z} dT = \int_{(FT)_e} Z dx dy.$$

Dimostreremo la terza di queste relazioni. Basta dimostrarla nell'ipotesi che il dominio T sia normale. Supponiamo, in primo luogo, che il dominio sia normale rispetto al piano (x, y) e definito dalle condizioni

$$(x, y) \text{ è in } A_{xy}, \quad f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y).$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_{(FT)_e} Z dx dy &= \int_{FT} Z \cos(z, n_e) d\sigma = \int_{A_{xy}} \{ Z(x, y, f_2) - Z(x, y, f_1) \} dx dy = \\ &= \int_{A_{xy}} dx dy \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} Z_z(x, y, z) dz = \int_T \frac{\partial Z}{\partial z} dT. \end{aligned}$$

Sia, in secondo luogo, il dominio T normale rispetto al piano (y, z) e definito dalle condizioni

$$(y, z) \text{ è in } A_{yz}, \quad f_1(y, z) \leq x \leq f_2(y, z).$$

Per ogni punto (x, y, z) di T poniamo

$$X(x, y, z) = \int_{f_1(y, z)}^x Z_z(\xi, y, z) d\xi,$$

la funzione X così definita e la Z sono continue in T e vi possiedono, in ogni punto interno, la prima, la derivata rispetto alla x , la seconda, la derivata rispetto alla z , continue ed eguali fra loro, ma allora, in virtù del corollario V del teor. di *Stokes*, dato al n° 135, si ha

$$\int_{(FT)_e} Z dx dy = \int_{(FT)_e} X dy dz,$$

e quindi

$$\int_{(FT)_e} Z dx dy = \int_{A_{yz}} dy dz \int_{f_1(y, z)}^{f_2(y, z)} Z_z(x, y, z) dx = \int_T \frac{\partial Z}{\partial z} dT.$$

Con ragionamento perfettamente analogo si dimostra la terza delle (1) se, in ultimo luogo, si suppone il dominio T normale rispetto al piano (z, x) .

Diverse espressioni del teorema di Green. Le relazioni (1) equivalgono all' unica seguente

$$\int_T \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dT = \int_{(FT)_e} (X dy dz + Y dz dx + Z dx dy),$$

che si scrive anche

$$\begin{aligned} (2) \int_T \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dT &= \int_{FT} [X \cos(x, n_e) + Y \cos(y, n_e) + Z \cos(z, n_e)] d\sigma = \\ &= - \int_{FT} [X \cos(x, n_i) + Y \cos(y, n_i) + Z \cos(z, n_i)] d\sigma. \end{aligned}$$

Se interpretiamo le X, Y, Z come le componenti di un vettore v , la somma $X_x + Y_y + Z_z$ si chiama, in *Fisica*, la **divergenza del vettore v** e si denota con la scrittura

$$\operatorname{div} v,$$

indicando con n_e il vettore unitario avente, in ogni punto regolare

di \mathbf{FT} , la direzione e il verso della normale esterna a \mathbf{FT} , la (2) si traduce, vettorialmente, nella seguente

$$\int_{\mathbf{T}} \operatorname{div} \mathbf{v} dT = \int_{\mathbf{FT}} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}_e) d\sigma.$$

Con le notazioni del *Calcolo vettoriale* (*), se \mathbf{v} è un vettore, di componenti X, Y, Z , funzione del punto $P(x, y, z)$, con i simboli

$$\int_C \mathbf{v} ds, \quad \int_S \mathbf{v} d\sigma, \quad \int_T \mathbf{v} dT,$$

si indicano, rispettivamente, i vettori aventi le componenti

$$\int_C X ds, \int_C Y ds, \int_C Z ds; \quad \int_S X d\sigma, \dots; \quad \int_T X dT, \dots;$$

si ricordi anche che se \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono vettori aventi, rispettivamente, le componenti X_1, Y_1, Z_1 e X_2, Y_2, Z_2 , il vettore \mathbf{v} di componenti

$$X = Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1, \quad Y = Z_1 X_2 - Z_2 X_1, \quad Z = X_1 Y_2 - X_2 Y_1,$$

è il **prodotto esterno** di \mathbf{v}_1 per \mathbf{v}_2 e denotasi con la scrittura

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2.$$

Ciò ricordato, deduconsi immediatamente dalle (1) le seguenti relazioni vettoriali

$$\int_{\mathbf{T}} (\operatorname{grad} f) dT = \int_{\mathbf{FT}} (f \mathbf{n}_e) d\sigma,$$

$$\int_{\mathbf{T}} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) dT = \int_{\mathbf{FT}} (\mathbf{n}_e \wedge \mathbf{v}) d\sigma.$$

Formole di integrazione per parti. A queste danno luogo le (1) quando, in ciascuna di esse, al posto di X, Y, Z si sostituisce il prodotto UV . Esse sono:

$$\int_{\mathbf{T}} U \frac{\partial V}{\partial x} dT = \int_{(\mathbf{FT})_e} UV dy dz - \int_{\mathbf{T}} \frac{\partial U}{\partial x} V dT,$$

(*) **Burali-Forti** e **Marcolongo**, *Elementi di Calcolo vettoriale* [Bologna, Zanichelli].

$$\int_{\mathbf{T}} U \frac{\partial V}{\partial y} dT = \int_{(\mathbf{FT})_e} UV dz dx - \int_{\mathbf{T}} \frac{\partial U}{\partial y} V dT,$$

$$\int_{\mathbf{T}} U \frac{\partial V}{\partial z} dT = \int_{(\mathbf{FT})_e} UV dx dy - \int_{\mathbf{T}} \frac{\partial U}{\partial z} V dT.$$

Riduzione degli integrali. La funzione $f(x, y, z)$ sia definita nel dominio regolare \mathbf{T} e vi sia continua. Con i simboli

$$(3) \quad \int_{\xi}^x f(\xi, y, z) d\xi, \quad \int_{\eta}^y f(x, \eta, z) d\eta, \quad \int_{\zeta}^z f(x, y, \zeta) d\zeta$$

indicheremo tre funzioni continue in \mathbf{T} , ottenute (n° 118) con un' integrazione parziale della f rispetto alla x , rispetto alla y e rispetto alla z . In ogni punto interno di \mathbf{T} riesce

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\xi}^x f(\xi, y, z) d\xi = \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^y f(x, \eta, z) d\eta = \frac{\partial}{\partial z} \int_{\zeta}^z f(x, y, \zeta) d\zeta = f(x, y, z),$$

e quindi, per il teorema di *Green*,

$$(4) \quad \int_{\mathbf{T}} f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$= \int_{(\mathbf{FT})_e} dy dz \int_{\xi}^x f(\xi, y, z) d\xi = \int_{(\mathbf{FT})_e} dz dx \int_{\eta}^y f(x, \eta, z) d\eta = \int_{(\mathbf{FT})_e} dx dy \int_{\zeta}^z f(x, y, \zeta) d\zeta.$$

Queste sono nuove formole di riduzione degli integrali a tre dimensioni, per le funzioni continue, estesi a domini regolari dello spazio, le quali, sulle formole generali date al n° 92, analogamente a quanto abbiamo già osservato al n° 129 nel piano, possono avere grandi vantaggi in molti casi. Sia, ad esempio, il dominio \mathbf{T} normale e definito dalle condizioni: (x, y) è in \mathbf{A} , $0 \leq z \leq \alpha(x, y)$, essendo $\alpha(x, y) \equiv 0$ su \mathbf{FA} , e sia noto il primo degli integrali parziali (3), che indicheremo con $X(x, y, z)$, si potrà allora scrivere:

$$\int_{\mathbf{T}} f(x, y, z) dx dy dz = - \int_{\mathbf{A}} X[x, y, \alpha(x, y)] \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx dy.$$

È nota una funzione primitiva*. Supponiamo ora di co-

noscere in T una funzione di punto F , primitiva della f , dotata della derivata totale $F'_{(y,z)}$ rispetto alla coppia y e z , finita e continua in T , si ha allora, com'è facile riconoscere,

$$\int_{\xi}^x f(\xi, y, z) d\xi = F'_{(y,z)}(x, y, z),$$

e pertanto:

$$\int_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_{(FT)_e} F'_{(y,z)} dy dz.$$

Adunque: *Ogni integrale a tre dimensioni, esteso ad un dominio regolare, di una funzione continua f , della quale si conosce una funzione primitiva F dotata di derivata totale finita e continua, rispetto ad una coppia delle variabili x, y, z , si riduce ad un integrale a due dimensioni.*

Applicazioni*. 1^a) Sul potenziale newtoniano di doppio strato. Sia $P(a, b, c)$ un punto arbitrariamente fissato nello spazio, esterno al dominio regolare A , e per ogni altro punto $Q(x, y, z)$ dello spazio si ponga $PQ = r$, e si denoti altresì con r l'asse avente la direzione e il verso del raggio vettore \vec{PQ} . Si osservino le relazioni

$$(5) \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r} = \cos(x, r), \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \cos(y, r), \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \cos(z, r).$$

Sia U la più arbitraria funzione definita in A , ivi continua con le sue tre derivate parziali del prim' ordine; se poniamo, nella (2), $X = (x-a)U/r^3$, $Y = (y-b)U/r^3$, $Z = (z-c)U/r^3$, e se conveniamo di indicare, semplicemente, con n la normale esterna n_e alla FA , si trova la relazione

$$(6) \quad 0 = \int_{FA} U \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\sigma - \int_A \frac{1}{r^2} \frac{dU}{dr} dT.$$

Sia ora $P(a, b, c)$ un arbitrario punto interno al dominio A e diciamo I un intorno circolare di P , di raggio ρ , interno, con la sua frontiera, al dominio A ; possiamo applicare la (6) al dominio regolare $A - I$, e si ottiene

$$(7) \quad 0 = \int_{FA} U \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\sigma + \int_{FI} U \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\sigma - \int_{A-I} \frac{1}{r^2} \frac{dU}{dr} dT.$$

Ma, su FI , si ha $\cos(r, n) = -1$, r costante $= \rho$, e quindi

$$\int_{FI} U \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\sigma = -4\pi U(M),$$

ove M è un certo punto della superficie sferica FI . Per la sommabilità su A di $\frac{dU}{dr} \frac{1}{r^2}$, passando al limite per ρ infinitesimo si deduce dalla (7)

$$(8) \quad 4\pi U(P) = \int_{FA} U \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\sigma - \int_A \frac{1}{r^2} \frac{dU}{dr} dT.$$

Le formole (6) e (8) appartengono alla teoria del potenziale newtoniano. In virtù delle (5) si ha $\cos(r, n)/r^2 = -d(1/r)/dn$, e si può vedere che per ogni punto P dello spazio (anche se P è su FA) ha senso l'integrale

$$W(P) = \int_{FA} U \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\sigma = - \int_{FA} U \frac{d(1/r)}{dn} d\sigma = \int_{FA} U \frac{d(1/r)}{dn_i} d\sigma,$$

esso chiamasi *potenziale newtoniano di doppio strato, di momento U , della superficie o del sistema di superficie costituenti FA* . Come a pag. 658, dalle (6) e (8), si deduce la classica relazione di limite del potenziale newtoniano di doppio strato: In ogni punto P_0 di FA si ha:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} W(P)[\text{su } A - FA] - \lim_{P \rightarrow P_0} W(P)[\text{su } CA] = 4\pi U(P_0).$$

Dalle (6) e (8), fattovi $U \equiv 1$, si deduce

$$(9) \quad \int_{FA} \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\sigma \begin{cases} = 0, & \text{se } P \text{ è interno al dominio } A, \\ = 4\pi, & \text{se } P \text{ è esterno al dominio } A. \end{cases}$$

L'integrale (9) va sotto il nome di *integrale di Gauss*.

Data una superficie regolare S di bordo BS , chiamasi *angolo solido secondo cui si vede la superficie S da un punto P dello spazio*, l'area della parte di superficie sferica, di raggio uno e di centro in P , staccata dalla superficie conica proiettante BS da P . Sia S una faccetta piana d'area $d\sigma$, r la distanza di un suo punto Q dal punto P , n un asse normale alla S , la parte di superficie sferica, di centro in P e di raggio PQ , staccata dalla superficie conica

proiettante BS da P , ha, *approssimativamente*, un'area data dal valore assoluto di $\cos(r, n)d\sigma$, e pertanto, l'angolo solido secondo cui si vede la faccetta piana S dal punto P , risulterà *approssimativamente* dato dal valore assoluto di $\cos(r, n)d\sigma/r^2$. Questa considerazione, se si suppone in particolare che FA si riduca ad un'unica superficie regolare chiusa incontrata, al più, in un numero finito di punti da ogni retta che non giaccia su di essa, offre subito una convincente dimostrazione intuitiva, della quale d'ordinario ci si accontenta, delle formole (9). Subito si intuisce così che se P è un punto regolare di FA l'integrale (9) deve valere 2π ; lo studioso dia di ciò la dimostrazione analitica.

2°) **Proprietà fondamentali delle funzioni armoniche nello spazio e nel piano.** Le funzioni $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ siano continue nel dominio D dello spazio (x, y, z) e, in ogni punto interno di D , siano dotate delle derivate $f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, g_x, g_y, g_z, g_{xx}, g_{yy}, g_{zz}$, finite e continue. Sia T un dominio regolare variabile sempre interno a D , in virtù delle formole (1) di *Green* si ha:

$$\int_T \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} g - \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} f \right) dT = \int_T \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} g - \frac{\partial g}{\partial t} f \right) dT = \int_{FT} \left(\frac{\partial f}{\partial t} g - f \frac{\partial g}{\partial t} \right) \cos(t, n) d\sigma,$$

per $t = x, y, z$. Sommando membro a membro queste tre relazioni, si ottiene, precisamente come nel piano (cfr. pag. 659), la seguente formola fondamentale

$$(10) \quad \int_T (g\Delta_2 f - f\Delta_2 g) dT = \int_{FT} \left(g \frac{df}{dn} - f \frac{dg}{dn} \right) d\sigma.$$

Ne segue: Se U e V sono (pag. 487) due funzioni armoniche in D ,

$$(11) \quad \int_{FT} \left(V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn} \right) d\sigma = 0,$$

ed in particolare, per $V \equiv 1$,

$$(12) \quad \int_{FT} \frac{dU}{dn} d\sigma = 0.$$

Il verificarsi della (12) per ogni dominio circolare o per ogni dominio quadrato, interno a D , è condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione U sia armonica in D .

Sia $P(a, b, c)$ un fissato punto interno ad un dominio regolare T interno a D e sia I un intorno circolare di P , di raggio ρ , con la sua frontiera interno a T , poichè $1/r = 1/\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}^{1/2}$ è (pag. 487) una funzione armonica nel dominio regolare $T - I$, si ha dalla (11) per $V = 1/r$

$$\int_{FT} \left(\frac{dU}{dn} \frac{1}{r} - U \frac{d(1/r)}{dn} \right) d\sigma + \int_{FI} \left(\frac{dU}{dn} \frac{1}{r} - U \frac{d(1/r)}{dn} \right) d\sigma = 0,$$

e ne deduciamo, in forza della (12), passando al limite per $\rho \rightarrow 0$,

$$(13) \quad U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{FT} \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d(1/r)}{dn} \right) dT \quad (*).$$

Ne segue, come il lettore può dimostrare, che: *Ogni funzione armonica in un dominio D dello spazio, è (pag. 299) analitica nell'interno di D .*

Dalla formola (13) — fondamentale per la teoria delle funzioni armoniche nello spazio — segue nel caso che T sia una sfera, di raggio R e di centro in P , interna a D od anche, soltanto, contenuta in D , il *teorema della media di Gauss*:

$$(14) \quad U(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{FT} U d\sigma.$$

(*) Le formole (10) e (13) si conoscono sotto il nome di formole di *Green*. Per ogni punto P interno a T poniamo nella formola (10) $g = 1/r$ ed applichiamo al dominio regolare $T - I$, passando poscia al limite per $\rho \rightarrow 0$; si ottiene così la seguente formola di *Stokes*:

$$4\pi f(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{FT} \left(\frac{1}{r} \frac{df}{dn} - f \frac{d(1/r)}{dn} \right) d\sigma - \int_T \frac{\Delta_2 f}{r} dT.$$

Da questa formola, postovi $\Delta_2 f = \mu$, si deduce

$$4\pi \Delta_2 f = - \Delta_2 \int_T \frac{\mu}{r} dT,$$

si ha cioè una brillante verifica della formola di *Poisson*:

$$\Delta_2 \int_T \frac{\mu}{r} dT = - 4\pi \mu(P),$$

formola già data al n° 101, esercizio 4°.

Ne seguono le considerazioni perfettamente analoghe a quelle fatte a pag. 660, per le funzioni armoniche nel piano.

Si deduce da (14) il teorema: *Una funzione armonica U in un dominio limitato e internamente connesso D , diversa da una costante, assume il suo massimo e il suo minimo assoluti esclusivamente in punti della frontiera di D .* Ed invero, se esistono punti interni a D , ove la funzione armonica U assume il valore M del suo massimo assoluto in D , detto B l'insieme da essi formato vediamo che $B \equiv D - FD$. L'insieme B non ha infatti punti della sua frontiera interni a D , poichè in un tale punto P si ha $U(P) = M$ e se Q è un qualsiasi punto di un intorno circolare I di P contenuto in D , detta T la sfera di centro in P e di raggio PQ , dalla (14) si deduce

$$\int_{FT} (U - M) dT = 0,$$

d'onde $U - M \equiv 0$ su FT e di conseguenza $U(Q) = M$, poichè è sempre $U - M \leq 0$.

Lo stesso teorema, con la stessa dimostrazione, sussiste evidentemente, per le funzioni armoniche nel piano. Se ne deduce: *Una funzione armonica (nel piano o nello spazio) in un dominio limitato e internamente connesso D , che sulla frontiera di questo è di valore costante c , è la costante c in tutto il dominio.* Ne segue (nel piano o nello spazio) il classico teorema:

Una funzione armonica in un dominio limitato e internamente connesso D è perfettamente determinata quando di essa si conoscono i valori che assume sulla frontiera del dominio.

Ed invero, se U_1 e U_2 sono due funzioni armoniche in D che assumono gli stessi valori sulla frontiera, la funzione $U = U_1 - U_2$, del pari armonica in D , assume sulla frontiera costantemente il valore zero.

La formola (11), che fa conoscere nel dominio regolare T la funzione armonica U , richiede un dato, la derivata dU/dn su FT , che, come si deduce dal teorema ora dimostrato, è assolutamente superfluo. In *Analisi* e in *Fisica* è classico, ed estremamente importante in *Fisica*, il problema di calcolare una funzione armonica per i punti interni ad un dominio limitato e internamente connesso D quando

della funzione sono soltanto assegnati i valori che assume sulla frontiera. Tale problema va sotto il nome di *problema di Dirichlet*. Esso è di facile soluzione quando D è un dominio circolare, nel qual caso si vede che per la risolubilità del problema basta (ciò che del resto è anche necessario) che i valori assegnati alla funzione armonica su FD costituiscano una funzione continua su FD . Ma per quanto già in grado di farla dobbiamo rimandare al secondo volume di queste lezioni la sistematica trattazione del problema di *Dirichlet*.

140. Cambiamento delle variabili negli integrali a tre dimensioni. Le equazioni

$$(1) \quad \begin{cases} x' = \varphi(x, y, z), \\ y' = \psi(x, y, z), \\ z' = \chi(x, y, z) \end{cases}$$

facciano corrispondere ad ogni punto $P(x, y, z)$ del dominio rettangolare R_{xyz} dello spazio (x, y, z) , un punto $P'(x', y', z')$ del dominio rettangolare $R'_{x'y'z'}$ dello spazio (x', y', z') . Nel dominio $R'_{x'y'z'}$ sia definita una funzione $f(x', y', z')$ limitata e integrabile; per ogni dominio T' contenuto in $R'_{x'y'z'}$ vogliamo imparare ad esprimere l'integrale

$$(2) \quad \int_{T'} f(x', y', z') dx' dy' dz',$$

per mezzo delle variabili x, y, z , legate alle x', y', z' dalle relazioni (1). Nella nostra trattazione faremo l'ipotesi che le funzioni φ, ψ, χ siano continue in R_{xyz} con le derivate parziali prime e seconde.

Cominceremo dal supporre la funzione $f(x', y', z')$ continua con le sue derivate parziali prime, allora la funzione di x, y, z :

$$f[\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z)]$$

risulterà ben definita in tutto R_{xyz} e ivi continua con le sue derivate parziali prime. Sia, in primo luogo, T' un dominio regolare e siano $S'_1, S'_2, \dots, S'_\nu$ le facce che ne compongono la frontiera, le quali, per semplificare, sono supposte, ciascuna, ad unico bordo.

Siano

$$x' = x'_i(u, v), \quad y' = y'_i(u, v), \quad z' = z'_i(u, v) \quad (i=1, 2, \dots, \nu)$$

le equazioni parametriche della faccia S'_i e A'_i il dominio del piano (u', v') , regolare e ad unico contorno, base di S'_i . Supporremo che nel dominio rettangolare R_{xyz} dello spazio (x, y, z) esista un dominio regolare T per il quale si verifichino le seguenti circostanze: **a)** la frontiera di T è costituita dalle facce S_1, S_2, \dots, S_ν , ciascuna ad unico bordo, nello stesso numero ν delle facce di FT' ; **b)** mentre il punto P varia descrivendo una qualsiasi faccia S_i ($i = 1, 2, \dots, \nu$) di FT , il punto P' corrispondente — per le (1) — nello spazio (x', y', z') , non esce mai dalla faccia S'_i , che diremo corrispondente alla S_i , di FT' ; **c)** mentre il punto P percorre, costantemente nel verso positivo (o costantemente nel verso negativo) per intero BS_i il punto P' percorre per intero BS'_i , non importa se non sempre in un verso, purchè non oltrepassi mai il punto di partenza e vi ritorni muovendosi nel verso del suo moto all' inizio; **d)** qualunque sia la coppia, che si considera, di facce corrispondenti, i punti P e P' si muovono, all' inizio, sopra i bordi delle facce, o sempre nello stesso verso o sempre in verso opposto.

Siano

$$x = x_i(u, v), \quad y = y_i(u, v), \quad z = z_i(u, v),$$

le equazioni parametriche della faccia S_i di FT e A_i il dominio base (regolare e ad unico contorno) di S_i , nel piano (u, v) . Ad un punto $Q(u, v)$ di A_i corrisponde un determinato punto P di S_i , a questo un determinato punto P' di S'_i e a quest'ultimo un determinato punto $Q'(u', v')$ di A'_i ; le coordinate u' e v' di Q' saranno dunque ben determinate funzioni

$$(3) \quad u' = u'_i(u, v), \quad v' = v'_i(u, v),$$

di u e di v , implicitamente definite in A_i dal sistema di equazioni:

$$(4) \quad \begin{cases} x'_i(u', v') = \varphi[x_i(u, v), y_i(u, v), z_i(u, v)], \\ y'_i(u', v') = \psi[x_i(u, v), y_i(u, v), z_i(u, v)], \\ z'_i(u', v') = \chi[x_i(u, v), y_i(u, v), z_i(u, v)]. \end{cases}$$

La corrispondenza, posta dalle (3), fra i punti di A_i e quelli di A'_i , per la corrispondenza biunivoca esistente fra i punti di A_i e quelli di S_i e fra i punti di A'_i e quelli di S'_i , è tale che mentre $Q(u, v)$

percorre per intero FA_i , sempre nel verso positivo (o nel negativo), il punto corrispondente $Q'(u', v')$ percorre per intero FA'_i , forse non sempre in un verso, non oltrepassando però mai il punto di partenza e ritornandovi con un moto il cui verso coincide con quello del moto all'inizio.

Per essere S'_i una porzione di superficie biregolare (priva di singularità), in ciascun punto di A'_i dei tre jacobiani

$$\frac{\partial(y'_i, z'_i)}{\partial(u', v')}, \quad \frac{\partial(z'_i, x'_i)}{\partial(u', v')}, \quad \frac{\partial(x'_i, y'_i)}{\partial(u', v')},$$

almeno *uno* risulterà diverso da zero; ciò ha di conseguenza che le funzioni $u'_i(u, v)$, $v'_i(u, v)$ verificanti le (4) sono in A_i continue con le loro derivate parziali dei due primi ordini. Dalle (4) si deducono poi la relazione (p. 227)

$$(5) \quad \frac{\partial(y'_i, z'_i)}{\partial(u'_i, v'_i)} \frac{\partial(u'_i, v'_i)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(y_i, z_i)} \frac{\partial(y_i, z_i)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(z_i, x_i)} \frac{\partial(z_i, x_i)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(x_i, y_i)} \frac{\partial(x_i, y_i)}{\partial(u, v)},$$

e le altre due analoghe che da questa si traggono simultaneamente operando le sostituzioni circolari (x'_i, y'_i, z'_i) e (φ, ψ, χ) .

Poniamo

$$X(x', y', z') = \int_{x'} f(\xi, y', z') d\xi,$$

si ha

$$(6) \quad \int_{T'} f(x', y', z') dx' dy' dz' = \int_{(FT')_e} X(x', y', z') dy' dz' = \sum_i^{1, \nu} \int_{+S'_i} X(x' y' z') dy' dz' = \\ = \sum_i^{1, \nu} \int_{A'_i} X(x'_i, y'_i, z'_i) \frac{\partial(y'_i, z'_i)}{\partial(u', v')} du' dv'.$$

Nell'integrale a due dimensioni

$$\int_{A'_i} X(x'_i, y'_i, z'_i) \frac{\partial(y'_i, z'_i)}{\partial(u', v')} du' dv', \quad (i = 1, 2, \dots, \nu)$$

operiamo il cambiamento di variabili espresso dalle (3), si ottiene (cfr. n° 130), secondochè P e P' si muovono all'inizio, su BS_i e su

BS'_i , nello stesso verso o in verso opposto, ed indicando con $\varphi_i, \phi_i, \chi_i$ i secondi membri delle (4),

$$\begin{aligned} & \int_{A'_i} X(x'_i, y'_i, z'_i) \frac{\partial(y'_i, z'_i)}{\partial(u', v')} du' dv' = \pm \int_{A_i} X(\varphi_i, \phi_i, \chi_i) \frac{\partial(y'_i, z'_i)}{\partial(u'_i, v'_i)} \frac{\partial(u'_i, v'_i)}{\partial(u, v)} du dv = \\ & = \pm \int_{A_i} X(\varphi_i, \phi_i, \chi_i) \left[\frac{\partial(\phi_i, \chi_i)}{\partial(y_i, z_i)} \frac{\partial(y_i, z_i)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(\phi_i, \chi_i)}{\partial(z_i, x_i)} \frac{\partial(z_i, x_i)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(\phi_i, \chi_i)}{\partial(x_i, y_i)} \frac{\partial(x_i, y_i)}{\partial(u, v)} \right] du dv = \\ & = \pm \int_{+S_i} X(\varphi, \phi, \chi) \left[\frac{\partial(\phi, \chi)}{\partial(y, x)} dy dz + \frac{\partial(\phi, \chi)}{\partial(z, x)} dz dx + \frac{\partial(\phi, \chi)}{\partial(x, y)} dx dy \right]. \end{aligned}$$

Si deduce perciò, dalle (6),

$$\begin{aligned} & \int_{T'} f(x', y', z') dx' dy' dz' = \\ & = \pm \int_{(FT)_e} X(\varphi, \phi, \chi) \left[\frac{\partial(\phi, \chi)}{\partial(y, z)} dy dz + \frac{\partial(\phi, \chi)}{\partial(z, x)} dz dx + \frac{\partial(\phi, \chi)}{\partial(x, y)} dx dy \right] = \\ & \quad \text{(teorema di Green)} \\ & = \pm \int_T \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[X(\varphi, \phi, \chi) \frac{\partial(\phi, \chi)}{\partial(y, z)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[X(\varphi, \phi, \chi) \frac{\partial(\phi, \chi)}{\partial(z, x)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[X(\varphi, \phi, \chi) \frac{\partial(\phi, \chi)}{\partial(x, y)} \right] \right\} dT \\ & = \pm \int_T f(\varphi, \phi, \chi) \frac{\partial(\varphi, \phi, \chi)}{\partial(x, y, z)} dx dy dz. \end{aligned}$$

Si ha dunque il teorema:

I. *Nelle ipotesi fatte sulla corrispondenza fra i punti $P(x, y, z)$ e $P'(x', y', z')$, posta dalle (1), si ha*

$$\int_{T'} f(x', y', z') dx' dy' dz' = \pm \int_T f(\varphi, \phi, \chi) I(x, y, z) dx dy dz,$$

ove $I(x, y, z)$ è lo jacobiano delle (1); col segno $+$ o col segno $-$, secondochè i punti P e P' si muovono all'inizio, sopra i bordi di una qualsiasi coppia S_i e S'_i di facce corrispondenti di FT e di FT' , nello stesso verso o in verso opposto.

Seguono ora considerazioni perfettamente analoghe a quelle svolte al n° 130, dopo il teor. I, per il cambiamento delle variabili negli integrali a due dimensioni. È facile dimostrare, anzitutto, che se lo jacobiano delle (1) si mantiene diverso da zero su FT , le (1), in virtù delle circostanze $a)$, $b)$ e $c)$, pongono una corrispondenza biunivoca fra i punti P e P' di FT e di FT' e si ha allora che mentre P percorre per intero BS_i , muovendosi sempre in un verso, il punto P' percorre per intero BS'_i , muovendosi pure sempre in un verso. Come al n° 130 si dimostrano i teoremi:

II. *Le (1) pongano una corrispondenza biunivoca fra i punti delle frontiere dei considerati domini regolari T e T' , allora, secondochè, in T , risulta sempre $I(x, y, z) \geq 0$ o sempre $I(x, y, z) \leq 0$, i punti corrispondenti P e P' , su BS_i e su BS'_i ($i = 1, 2, \dots, \nu$), si muovono nello stesso verso o in verso opposto.*

III. *Nelle ipotesi dei teorr. I e II, se inoltre lo jacobiano delle (1) è privo, in T , di valori di segno opposto, riuscirà*

$$\int_{T'} f(x', y', z') dx' dy' dz' = \int_T f(\varphi, \psi, \chi) |I(x, y, z)| dx dy dz.$$

Sussistono pure inalterati i teorr. V, VI e VII del n° 130.

Coordinate curvilinee nello spazio. Le equazioni

$$(7) \quad \begin{cases} x = \lambda(u, v, w), \\ y = \mu(u, v, w), \\ z = \nu(u, v, w), \end{cases}$$

pongano una corrispondenza biunivoca fra i punti dell'insieme K dello spazio (u, v, w) e quelli dell'insieme H dello spazio (x, y, z) , mentre le funzioni λ, μ, ν sono in K continue, con le loro derivate parziali dei due primi ordini, e hanno lo jacobiano $I(x, y, z)$ sempre diverso da zero. Ad un fissato dominio rettangolare $R (< K)$ dello spazio (u, v, w) corrisponde un dominio regolare $D (< H)$ dello spazio (x, y, z) ; siano (a', b', c') e (a'', b'', c'') i punti estremi di R , la frontiera di D risulta costituita da sei facce, delle quali le rispettive equazioni parametriche si ottengono dalle (7) ponendo, successivamente, $w = c', c'', v = b', b'', u = a', a''$. Il dominio regolare

D risulta solcato da un triplo sistema di porzioni di superficie regolari: dalle superficie u , ottenute dando ad u un qualsiasi valore costante dell'intervallo (a', a'') e facendo variare il punto (v, w) nel dominio rettangolare $[(b', c'); (b'', c'')]$; dalle superficie v , ottenute dando a v un qualsiasi valore costante dell'intervallo (b', b'') e facendo variare il punto (w, u) nel dominio rettangolare $[(c', a'); (c'', a'')]$ e dalle superficie w , ottenute dando a w un qualsiasi valore costante dell'intervallo (c', c'') e facendo variare il punto (u, v) nel dominio rettangolare $[(a', b'); (a'', b'')]$. Comunque si scelga in **D** un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, per questo passano sempre una determinata superficie u , una determinata superficie v ed una determinata superficie w . Ed invero, per la corrispondenza biunivoca posta dalle (1) fra i punti di **H** e di **K**, il punto P_0 ha un determinato punto $Q_0(u_0, v_0, w_0)$ ad esso corrispondente in **R**, e pertanto, per il punto P_0 passano le tre superficie u_0, v_0, w_0 . Viceversa, presa una qualsiasi superficie $u(a' \leq u \leq a'')$, una qualsiasi superficie $v(b' \leq v \leq b'')$, una qualsiasi superficie $w(c' \leq w \leq c'')$, queste hanno in comune uno ed un sol punto di **D**. Le superficie u, v, w possono perciò essere riguardate come *superficie coordinate* dei punti di **D** e i parametri u, v, w come coordinate di questi punti. Esse diconsi *coordinate curvilinee* dei punti di **D**.

Una qualsiasi superficie $u(a' \leq u \leq a'')$ ed una qualsiasi superficie $v(b' \leq v \leq b'')$, hanno in comune una ben determinata porzione di curva regolare, le cui equazioni parametriche si ottengono dalle (7) ponendovi u e v costanti e facendo variare il parametro w nell'intervallo (c', c'') . Si hanno così tre distinti sistemi di curve: le curve C_{vw} , le curve C_{vu} e le curve C_{uw} . Per ogni punto P di **D** passa una ed una sola curva di ciascun sistema. Queste curve diconsi *linee coordinate* dei punti di **D**.

Il *dominio elementare* (p. 471) dello spazio (x, y, z) , relativo alle coordinate u, v, w , si ottiene prendendo il dominio regolare **T** corrispondente, in **H**, ad un dominio rettangolare variabile **U**, contenuto in **K**. La frontiera del dominio elementare **T** è costituita da sei facce, ciascuna ad unico bordo, composto sempre di quattro porzioni di curve regolari.

Per tracciare in **D** una porzione di curva regolare, tratteremo in **R** una tale curva **L**, il luogo **C** dei punti corrispondenti in **D**

ai punti di L riesce evidentemente una porzione di curva regolare. Per il differenziale dell'arco s di C si trova

$$(8) \quad ds^2 = A_{11} du^2 + A_{22} dv^2 + A_{33} dw^2 + 2A_{12} dudv + 2A_{13} dudw + 2A_{23} dvdw,$$

ove

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial u}\right)^2, & A_{22} &= \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial v}\right)^2, \\ A_{33} &= \left(\frac{\partial \lambda}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial w}\right)^2, & A_{12} &= \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{\partial \nu}{\partial u} \frac{\partial \nu}{\partial v}, \\ A_{13} &= \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial w} + \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial w} + \frac{\partial \nu}{\partial u} \frac{\partial \nu}{\partial w}, & A_{23} &= \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial w} + \frac{\partial \mu}{\partial v} \frac{\partial \mu}{\partial w} + \frac{\partial \nu}{\partial v} \frac{\partial \nu}{\partial w}. \end{aligned}$$

La forma differenziale quadratica (8), evidentemente definita positiva, dà perciò il quadrato dell'elemento lineare dello spazio (x, y, z) nelle coordinate u, v, w . Per il discriminante della forma (8) si trova

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(\lambda, \mu, \nu)}{\partial(u, v, w)}\right)^2 = [I(u, v, w)]^2.$$

Ponendo, nella (8), $w = \text{costante}$, $dw = 0$, si ha il quadrato dell'elemento lineare di una superficie coordinata w , ponendovi $v = \text{costante}$, $w = \text{costante}$, $dv = dw = 0$, si ha il quadrato del differenziale dell'arco di una linea coordinata C_{vw} . Per un punto P di D spicchiamo le tre linee coordinate C_{vw} , C_{wu} , C_{uv} , esse hanno gli assi tangenti positivi rispettivamente di coseni direttori

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} \frac{\partial \mu}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} \frac{\partial \nu}{\partial u}, \\ \frac{1}{\sqrt{A_{22}}} \frac{\partial \lambda}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{A_{22}}} \frac{\partial \mu}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{A_{22}}} \frac{\partial \nu}{\partial v}, \\ \frac{1}{\sqrt{A_{33}}} \frac{\partial \lambda}{\partial w}, \quad \frac{1}{\sqrt{A_{33}}} \frac{\partial \mu}{\partial w}, \quad \frac{1}{\sqrt{A_{33}}} \frac{\partial \nu}{\partial w}, \end{array} \right.$$

il determinante dei nove coseni per gli indicati tre assi vale perciò

$$(10) \quad \frac{I(u, v, w)}{\sqrt{A_{11}A_{22}A_{33}}},$$

esso è dunque sempre diverso da zero, ed ha il segno di I ; cioè la terna di questi tre assi tangenti è destrorsa o sinistrorsa, secondo-

chè I è positivo o negativo, si ha così il significato geometrico del segno dell'Jacobiano delle (7). Poichè il determinante delle (9) è sempre diverso da zero, le tre linee coordinate spiccate da un qualsiasi punto di D , si *intersecano* ivi mutuamente, e ciò ha di conseguenza che due quali si vogliono superficie coordinate si *intersecano* pur esse lungo la linea coordinata comune.

Dalle espressioni (9) dei coseni direttori degli assi tangenti alle linee coordinate C_{vw} , C_{wu} , C_{uv} spiccate da un punto P , segue che

$$\cos(C_{vw}, C_{wu}) = \frac{A_{12}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}}, \quad \cos(C_{wu}, C_{uv}) = \frac{A_{23}}{\sqrt{A_{22}A_{33}}}, \quad \cos(C_{uv}, C_{vw}) = \frac{A_{13}}{\sqrt{A_{11}A_{33}}}.$$

Pertanto: Se, identicamente in R , riesce $A_{12} = A_{23} = A_{13} = 0$, le linee coordinate spiccate da ogni punto P di D sono a due a due ortogonali fra loro, il che ha di conseguenza che due quali si vogliono superficie coordinate hanno allora, lungo la linea coordinata comune, piani tangenti fra di loro ortogonali, quelle superficie sono cioè, come anche si dice, *ortogonali fra loro*. Le superficie u , v , w formano allora ciò che si chiama un *triplo sistema ortogonale di superficie* e si dice anche che il *sistema di coordinate u , v , w è ortogonale*.

Consideriamo il dominio elementare T dello spazio (x, y, z) , relativo alle coordinate curvilinee u, v, w , corrispondente in D al dominio rettangolare $U (< R)$ dello spazio (u, v, w) , di punti estremi $Q(u, v, w)$, $Q(u + du, v + dv, w + dw)$. Il dominio T , con tanta maggiore approssimazione quanto più piccoli sono du, dv, dw , può considerarsi un parallelepipedo di cui un vertice è nel punto P , corrispondente in D al punto Q , ed il cui triedro di vertice in P ha le costole rispettivamente di lunghezze $\sqrt{A_{11}} du$, $\sqrt{A_{22}} dv$, $\sqrt{A_{33}} dw$, ed il seno dato dalla (10). Ne segue il valore approssimativo del volume di T :

$$|I(u, v, w)| du dv dw,$$

e quindi una dimostrazione intuitiva della formola

$$\frac{dT}{dU} = |I(u, v, w)| = \left| \frac{\partial(\lambda, \mu, \nu)}{\partial(u, v, w)} \right|.$$

Esempi famigliari di sistemi ortogonali di coordinate curvilinee nello spazio sono dati dalle coordinate polari e dalle coordinate ci-

lindriche; vogliamo dare altri tre esempi, particolarmente interessanti per le applicazioni.

Esempi 1°). Coordinate ellittiche. Indicheremo con A l'insieme aperto dello spazio (x, y, z) determinato dalle limitazioni $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, e per ogni punto $P(x, y, z)$ di A considereremo la seguente equazione in λ :

$$(11) \quad \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = 1,$$

ove a, b, c sono tre costanti reali per le quali è $0 < a < b < c$. È subito visto che l'equazione (11) ha sempre *tre* radici reali u, v, w , per le quali riesce

$$(12) \quad u < a < v < b < w < c.$$

Per $\lambda = u$ la (11) è, in x, y, z , l'equazione di un ellissoide, per $\lambda = v$ l'equazione di un iperboloido ad *una* falda, per $\lambda = w$ l'equazione di un iperboloido a *due* falde. Queste tre quadriche hanno sempre — comunque varii il punto P in A — in comune e fissi i piani diametrali e le coniche focali, ed è perciò che il triplo sistema di quadriche ottenuto, dalle (11), al variare di $\lambda = u$ nell'intervallo aperto $(-\infty, a)$, di $\lambda = v$ nell'intervallo aperto (a, b) , di $\lambda = w$ nell'intervallo aperto (b, c) , dicesi un **triplo sistema di quadriche omofocali**. Queste quadriche solcano A in modo che, per ogni punto di esso, passa sempre una ed una sola quadrica di ciascun sistema, laddove presa, arbitrariamente, una quadrica in ciascuno dei tre sistemi, si ottengono tre quadriche aventi in comune uno ed un sol punto di A . Le quantità u, v, w ,

$$(-\infty < u < a), \quad (a < v < b), \quad (b < w < c),$$

possonsi pertanto assumere come coordinate dei punti di A , esse diconsi *coordinate ellittiche*. Con facile calcolo si trova che, in funzione di u, v, w , le coordinate x, y, z sono date dalle equazioni

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 = \frac{(a-u)(a-v)(a-w)}{(b-a)(c-a)}, \\ y^2 = \frac{(b-u)(b-v)(b-w)}{(c-b)(a-b)}, \\ z^2 = \frac{(c-u)(c-v)(c-w)}{(a-c)(b-c)}, \end{array} \right.$$

e da ciò che il quadrato dell'elemento lineare dello spazio, in coordinate ellittiche, è dato da

$$ds^2 = \frac{(u-v)(u-w)}{4\Lambda(u)} du^2 + \frac{(v-w)(v-u)}{4\Lambda(v)} dv^2 + \frac{(w-u)(w-v)}{4\Lambda(w)} dw^2,$$

ove $\Lambda(\lambda) = (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$. Adunque: Il sistema di coordinate ellittiche è ortogonale, l'elemento di volume in tali coordinate è dato da

$$dT = dx dy dz = \frac{(w-u)(w-v)(v-u) du dv dw}{8\sqrt{-\Lambda(u)\Lambda(v)\Lambda(w)}} \quad (*).$$

2°. **Generalizzazione del teorema di *Guldino* e coordinate canali.** La porzione di curva regolare C dello spazio, riferita al suo arco s , abbia le equazioni parametriche

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s),$$

e l'intervallo base $(0, l)$. Sia A un insieme di punti *rigido*, limitato, misurabile, di area A , di un piano mobile (u, v) e supponiamo che il *baricentro* O di A descriva la curva C ; vogliamo stabilire delle condizioni sotto le quali si può assicurare la misurabilità dell'insieme di punti T descritto dai punti di A , e determinare, in tal caso, il volume di T . Il piano mobile (u, v) sia riferito ad una coppia d'assi ortogonali aventi l'origine in O e siano $\alpha_1(s), \beta_1(s), \gamma_1(s)$ i coseni direttori dell'asse u , $\alpha_2(s), \beta_2(s), \gamma_2(s)$ i coseni direttori dell'asse v . Denoteremo con $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$ i coseni direttori della tangente alla C . Le coordinate dei punti dell'insieme T si ottengono ponendo

$$(14) \quad \begin{cases} x = \varphi(s) + \alpha_1(s)u + \alpha_2(s)v, & y = \psi(s) + \beta_1(s)u + \beta_2(s)v, \\ z = \chi(s) + \gamma_1(s)u + \gamma_2(s)v \end{cases}$$

e imponendo ai parametri s, u, v le condizioni:

$$(15) \quad 0 \leq s \leq l, \quad \text{il punto } (u, v) \text{ in } A.$$

I punti dello spazio (s, u, v) le cui coordinate verificano le condizioni (15) costituiscono un cilindro retto T' , di base misurabile A e di altezza l . Esso cilindro è misurabile. Per jacobiano delle (14) si trova:

$$(16) \quad I(s, u, v) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{d\alpha_1}{ds} & \frac{d\beta_1}{ds} & \frac{d\gamma_1}{ds} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} \frac{d\alpha_2}{ds} & \frac{d\beta_2}{ds} & \frac{d\gamma_2}{ds} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} v.$$

(*) Si consideri che $\Lambda(u) > 0$, $\Lambda(v) < 0$, $\Lambda(w) > 0$.

Se diciamo $\omega(s)$ l'angolo del quale la tangente in O alla C è inclinata sul piano (u, v) , il modulo del primo determinante D , del secondo membro della (16), è precisamente $\text{sen } \omega(s)$; se supponiamo che tale angolo non sia mai nullo, si potrà determinare un numero positivo δ tale che, se riesce sempre, in A , $u^2 + v^2 \leq \delta^2$, se cioè l'insieme A è contenuto nel cerchio del piano (u, v) di centro in O e di raggio δ , si abbia sempre lo jacobiano I diverso da zero e del costante segno di D . Se occorre, si impicciolisca ancora δ per modo che le (14) pongano una corrispondenza biunivoca fra i punti di T e quelli di T' , sarà allora assicurata la misurabilità di T ed inoltre che

$$(17) \quad T = \text{vol } T = \int_{T'} |I(s, u, v)| \, ds \, du \, dv = \int_0^l ds \int_A |I(s, u, v)| \, du \, dv = \\ = A \int_0^l \text{sen } \omega(s) \, ds.$$

Si ha dunque il seguente teorema che, evidentemente, generalizza quello di **Guldino**, dato al n° 136: *Durante il moto del piano (u, v) , ove è situato l'insieme rigido, misurabile e limitato A , di area A , il lavicentro O di A descriva una porzione di curva regolare C , di lunghezza l e di arco s , la quale intersechi sempre il piano mobile secondo un angolo non nullo $\omega(s)$; se l'insieme A è contenuto entro un certo cerchio del piano (u, v) , di centro in O , l'insieme T descritto dai punti di A riesce misurabile ed ha il volume*

$$(18) \quad T = A \int_0^l \text{sen } \omega(s) \, ds.$$

Se, in particolare, è sempre $\omega(s) = \pi/2$, se cioè il baricentro O descrive una traiettoria ortogonale alle successive posizioni del piano mobile, si trova $T = l \cdot A$ ().*

Se ne ricava la seguente definizione alla **Minkowski** di lunghezza per una porzione di curva regolare:

(*) Il teorema di **Guldino** si ottiene se, ancor più in particolare, si suppone che la C si riduca ad un arco di cerchio.

Sia C una porzione di curva regolare e sia A un insieme piano, mobile, rigido, limitato e misurabile, di area A , e di baricentro O , il cui piano tagli sempre, in O , ortogonalmente la C . Diciamo T l'estensione dell'insieme descritto dai punti di A mentre che il baricentro O descrive la C e diciamo r il raggio di un cerchio del piano di A e di centro in O , contenente l'insieme A . Si potrà determinare un numero positivo δ tale che, per r variabile nell'intervallo, aperto a sinistra, $(0, \delta)$, il rapporto $T:A$ rimanga costante; ebbene, tale rapporto costante chiamasi *lunghezza* della curva C . Più semplicemente, ma meno compiutamente, si può dire anche così: Chiamasi *lunghezza* della curva C il limite seguente:

$$\lim_{r \rightarrow 0} (T:A).$$

Poniamo, nelle (14), $u = \rho \cos \theta$, $v = \rho \sin \theta$, e supponiamo che il piano mobile (u, v) si conservi normale alla curva C ; i punti di T riescono allora riferiti alle coordinate s, ρ, θ , che diremo *coordinate canali*. Ogni superficie coordinata ρ è descritta da una circonferenza di raggio costante ρ , il cui piano interseca normalmente la curva C nel centro O della circonferenza, il quale descrive la curva C stessa. Una tale superficie dicesi appunto *superficie canale*.

Domandiamoci ora: Un sistema di coordinate canali può mai essere ortogonale? Per il considerato sistema di coordinate canali, ove nella (8) si sostituisca u, v, w , rispettivamente con s, ρ, θ , si trova

$$A_{12} = A_{23} = 0, \quad A_{13} = \rho^2 \left(\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{ds} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{ds} \right),$$

e quindi per l'ortogonalità del sistema occorre e basta poter determinare, in $(0, l)$, una funzione continua $k(s)$ per la quale risulti

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = k\alpha, \quad \frac{d\beta_1}{ds} = k\beta, \quad \frac{d\gamma_1}{ds} = k\gamma.$$

Le costanti a, b, c rappresentino i coseni direttori di un arbitrario asse normale alla tangente alla C nel punto iniziale $s=0$, si trova subito che è necessario e sufficiente che $k(s)$ verifichi l'equazione seguente

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \int_0^s k(t) [\alpha(s)\alpha(t) + \beta(s)\beta(t) + \gamma(s)\gamma(t)] dt = 0$$

la quale, per essere sempre soddisfatta per $s=0$, equivale a quella che si ottiene eguagliando a zero la derivata del primo membro, equivalente cioè alla seguente

$$(18) \quad \alpha\alpha' + b\beta' + c\gamma' + k(s) + \int_0^s k(t) [\alpha'(s)\alpha(t) + \beta'(s)\beta(t) + \gamma'(s)\gamma(t)] dt = 0.$$

Questa è un'equazione nella $k(s)$ appartenente alla classe delle così dette *equazioni integrali lineari di seconda specie tipo Volterra*, le quali equazioni saranno diffusamente trattate nel secondo volume di queste lezioni. Si vedrà allora, in particolare, che l'equazione (18) possiede sempre una ed una sola soluzione finita e continua in tutto l'intervallo $(0, l)$ e si potrà dire che: *La più generale porzione di curva regolare dà luogo, nel modo sopra indicato, a ∞^4 sistemi ortogonali di coordinate canali.*

3°. **Coordinate a superficie parallele.** Si abbia la porzione di superficie regolare S di equazioni parametriche

$$(19) \quad x = \varphi(u, v), \quad y = \phi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

e di base A nel piano (u, v) . Cominciamo dal dare talune formole che esprimono le derivate parziali del primo ordine dei coseni direttori A, B, C , della retta normale alla S , in funzione delle derivate parziali prime delle x, y, z e dei coefficienti E, F, G, D, D', D'' della prima e della seconda forma fondamentale della S . Osserviamo che se deriviamo, sia rispetto alla u che rispetto alla v , le identità

$$Ax_u + By_u + Cz_u = 0, \quad Ax_v + By_v + Cz_v = 0,$$

si ricava (cfr. pag. 341)

$$\begin{aligned} A_u x_u + B_u y_u + C_u z_u &= -D, & A_v x_v + B_v y_v + C_v z_v &= -D'', \\ A_u x_v + B_u y_v + C_u z_v &= A_v x_u + B_v y_u + C_v z_u = -D', \end{aligned}$$

osserviamo anche che

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ A & B & C \end{vmatrix} = \sqrt{EG - F^2},$$

onde, dai due seguenti sistemi di equazioni

$$\begin{cases} x_u A_u + y_u B_u + z_u C_u = -D, \\ x_v A_u + y_v B_u + z_v C_u = -D', \\ AA_u + BB_u + CC_u = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_u A_v + y_u B_v + z_u C_v = -D'', \\ x_v A_v + y_v B_v + z_v C_v = -D''', \\ AA_v + BB_v + CC_v = 0, \end{cases}$$

si ottengono le identità

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial u} = \frac{-1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} D & y_u & z_u \\ D' & y_v & z_v \\ 0 & B & C \end{vmatrix} = \frac{FD' - GD}{EG - F^2} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{FD - ED'}{EG - F^2} \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{-1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} D' & y_u & z_u \\ D'' & y_v & z_v \\ 0 & B & C \end{vmatrix} = \frac{FD'' - GD'}{EG - F^2} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{FD' - ED''}{EG - F^2} \frac{\partial x}{\partial v}, \end{array} \right.$$

e le altre quattro che da questa si ricavano con le simultanee sostituzioni circolari (A, B, C) , (x, y, z) . Sono queste le formole alle quali avevamo alluso.

Ciò premesso, diamo la nozione di coppie di porzioni di superficie regolari *parallele*. Due porzioni di superficie regolari S e S' diconsi parallele se fra i loro punti è possibile porre una tale corrispondenza biunivoca che la congiungente di un qualsiasi punto P di S col corrispondente punto P' di S' sia normale in P alla S e in P' alla S' . Se le (19) sono le equazioni parametriche della S , le equazioni della S' si potranno mettere nella forma

$$(21) \quad x = \varphi + Aw, \quad y = \phi + Bw, \quad z = \chi + Cw,$$

ove w rappresenta una funzione incognita, da determinarsi in A in guisa che i coseni direttori della normale alla S' siano ancora A, B, C . Si vede immediatamente che perciò occorre e basta che riesca, in A , $w_u \equiv w_v \equiv 0$, cioè w costante. Adunque: Due porzioni di superficie regolari parallele staccano sulle normali comuni un segmento costante; data la S con le equazioni parametriche (19), le equazioni parametriche di ogni superficie S' parallela alla S sono date dalle (21) ponendovi per w un valore costante. Per assicurare poi la biunivocità della considerata corrispondenza fra i punti di S e di S' , basta evidentemente dare a w valori in modulo superiormente limitato da un certo numero positivo $\delta(S)$ dipendente dalla superficie.

Sia r un' arbitraria quantità positiva minore di $\delta(S)$ e consideriamo il dominio T dello spazio (x, y, z) descritto dal punto di coordinate date dalle (21), al variare del punto (u, v, w) nel cilindro retto T' , dello spazio (u, v, w) , definito dalle condizioni

$$\text{il punto } (u, v) \text{ è in } A, \quad 0 \leq w \leq r.$$

Il dominio T chiamasi uno *strato* sulla S , di spessore r . Se si calcola lo jacobiano $I(u, v, w)$ delle (21) si trova, con facile calcolo, tenendo conto delle (20),

$$I(u, v, w) = (1 + Hw + Kw^2)\sqrt{EG - F^2},$$

ove

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}.$$

La quantità K è (p. 341) la curvatura totale della superficie, la quantità H porta il nome di *curvatura media* della superficie stessa. Evidentemente, se occorre, si può impicciolire il termine $\delta(S)$ in guisa che riesca, in tutto T' , $I(u, v, w) > 0$; dopo ciò, data la corrispondenza biunivoca esistente fra i punti di T e quelli di T' , data la misurabilità di A e quindi di T' , si può asserire che anche T è misurabile e che ha per volume

$$\begin{aligned} (22) \quad T &= \int_{T'} (1 + Hw + Kw^2)\sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \\ &= \int_0^r dw \int_A (1 + Hw + Kw^2)\sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \\ &= r\sigma + \frac{r^2}{2} \int_S H d\sigma + \frac{r^3}{3} \int_S K d\sigma, \end{aligned}$$

ove σ designa l'area e $d\sigma$ l'elemento d'area della S . La formola (22) esprime il volume di uno strato sulla superficie S di spessore r è nota sotto il nome di *formola di Steiner*. Da essa si trae la seguente notevole definizione di *Minkowski* di area per una porzione di superficie regolare S :

Sia T il volume di uno strato sulla S di spessore r , chiamasi *area di S* il limite

$$\lim_{r \rightarrow 0} (T : r).$$

Le coordinate u, v, w dei punti dello strato T diconsi *coordinate a superficie parallele*. Le superficie w sono, a due a due, sempre fra loro parallele, ogni superficie u è il luogo delle normali alla S lungo i punti di una linea u e ogni superficie v è il luogo delle normali

alla S lungo i punti di una linea v . Per i coefficienti della forma quadratica che dà il ds^2 nelle attuali coordinate, si trova $A_{13} \equiv A_{23} \equiv 0$ e si vede immediatamente che affinchè il coefficiente A_{13} risulti pur esso identicamente nullo, occorre e basta che per la S sia identicamente $F \equiv D' \equiv 0$. Quando le coordinate curvilinee u e v a cui sono riferiti i punti di una porzione S di superficie regolare sono tali che risulti identicamente $F \equiv D' \equiv 0$, le linee u e v diconsi di *curvatura* per la superficie. Nel secondo volume di queste lezioni torneremo su tale concetto — specialmente dal punto di vista geometrico — e dimostreremo che ogni porzione di superficie regolare è dotata sempre di un doppio sistema (ortogonale) di linee di curvatura (*). Si ha dunque: *Data una porzione di superficie regolare S e dato su di essa un doppio sistema di linee u e v , si consideri il triplo sistema di superficie costituito dalle superficie parallele alla S e dalle superficie luogo delle normali alla S lungo i punti delle linee u e lungo i punti delle linee v ; condizione necessaria e sufficiente affinchè questo triplo sistema di superficie sia ortogonale è che le linee u e v siano di curvatura per la S .*

Teorema di Dupin. Negli esempi di sistemi coordinati ortogonali precedentemente dati è facile constatare la notevole circostanza seguente:

Comunque si fissi una superficie di ciascuno dei tre sistemi, la superficie degli altri due la tagliano secondo un doppio sistema di linee di curvatura.

Orbene, il celebre teorema di *Dupin* stabilisce che questa circostanza si presenta in qualsiasi sistema triplo ortogonale di superficie. Riprendendo le notazioni delle pagg. 729 e 731, andiamo a dare una semplicissima dimostrazione di questo teorema. Se il sistema delle coordinate u, v, w è ortogonale, per ogni superficie w (per esempio) i coseni direttori della normale sono dati da

$$\frac{1}{\sqrt{A_{33}}} \frac{\partial \lambda}{\partial w}, \quad \frac{1}{\sqrt{A_{33}}} \frac{\partial \mu}{\partial w}, \quad \frac{1}{\sqrt{A_{33}}} \frac{\partial \nu}{\partial w},$$

(*) Si dimostri che: sopra ogni superficie di rotazione il doppio sistema dei meridiani e dei paralleli è di linee di curvatura; sopra ogni superficie luogo delle rette tangenti ad una porzione di curva regolare, il doppio sistema costituito da queste rette e dalle loro traiettorie ortogonali è di linea di curvatura.

onde il coefficiente medio D' della seconda forma fondamentale è precisamente:

$$\frac{1}{\sqrt{A_{33}}} \sum \frac{\partial \lambda}{\partial w} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v},$$

ove la somma si intende estesa a tutti i termini che si ottengono da quello scritto, ponendo successivamente μ e ν al posto di λ . Poichè è identicamente

$$\sum \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial w} = 0, \quad \sum \frac{\partial \lambda}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0,$$

derivando queste identità, rispettivamente, rispetto a u , v , w , si ricavano le altre

$$\sum \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial w \partial u} + \sum \frac{\partial \lambda}{\partial w} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = 0,$$

$$\sum \frac{\partial \lambda}{\partial w} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} + \sum \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v \partial w} = 0,$$

$$\sum \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v \partial w} + \sum \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial w \partial u} = 0,$$

dalle quali, immediatamente,

$$\sum \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v \partial w} \equiv \sum \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial w \partial u} \equiv \sum \frac{\partial \lambda}{\partial w} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} \equiv 0;$$

cioè che dimostra il teorema.

141. Sul calcolo numerico degli integrali a tre dimensioni. — Quando, in modo noto, è possibile ricondurre un integrale a *tre* dimensioni ad un integrale a *due*, per l'effettivo calcolo numerico dell'integrale si ricorrerà ai metodi indicati al n° 131. Se ciò non è possibile, ai metodi generali dei quali abbiamo discorso alle pp. 379, 462 e 463 si potranno aggiungere quelli che si ottengono con una ben facile estensione dei metodi esposti al n° 131 per il calcolo numerico diretto degli integrali a *due* dimensioni. Tale estensione conduce alle iniziali proposizioni seguenti. Sia $f(x, y, z)$ una funzione finita e continua, definita nel dominio rettangolare T , di punti estremi $(\alpha', \beta', \gamma')$ e $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ e di volume $T = (\alpha'' - \alpha')(\beta'' - \beta')(\gamma'' - \gamma')$, dotata di quelle derivate parziali finite e continue che oc-

corre di dover considerare. Con A_p , B_p , C_p indicheremo numeri non inferiori agli estremi superiori in T , rispettivamente dei moduli delle derivate $\partial^p f / \partial x^p$, $\partial^p f / \partial y^p$, $\partial^p f / \partial z^p$.

Se, integrando col metodo del rettangolo rispetto a x , rispetto a y e rispetto a z , si pone

$$\int_T f(x, y, z) dT = Tf(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$\alpha = (\alpha' + \alpha'')/2, \quad \beta = (\beta' + \beta'')/2, \quad \gamma = (\gamma' + \gamma'')/2,$$

si commette un errore il cui modulo non supera ciascuno dei seguenti due termini:

$$\frac{T}{4} [(\alpha'' - \alpha') A_1 + (\beta'' - \beta') B_1 + (\gamma'' - \gamma') C_1],$$

$$\frac{T}{24} [(\alpha'' - \alpha')^2 A_2 + (\beta'' - \beta')^2 B_2 + (\gamma'' - \gamma')^2 C_2].$$

Se, integrando col metodo *Cavalieri-Simpson* rispetto a x , rispetto a y e rispetto a z , si pone

$$\int_T f(x, y, z) dT =$$

$= (T/216) \times \{$ la somma dei valori di f nei vertici di T + quattro volte la somma dei valori di f nei punti di mezzo dei lati di T + sedici volte la somma dei valori di f nei centri delle facce di T + sessantaquattro volte il valore di f nel centro di T $\}$,

si commette un errore il cui modulo non supera ciascuno dei seguenti due termini:

$$\frac{T}{192} [(\alpha'' - \alpha')^3 A_3 + (\beta'' - \beta')^3 B_3 + (\gamma'' - \gamma')^3 C_3],$$

$$\frac{T}{2880} [(\alpha'' - \alpha')^4 A_4 + (\beta'' - \beta')^4 B_4 + (\gamma'' - \gamma')^4 C_4].$$

FINE DEL PRIMO VOLUME.



INDICE DELLA 2^a PARTE

CAPITOLO IV.

§ 1. Estensione degli insiemi di punti.

84. Estensione degli insiemi somme di domini rettangolari . . .	Pag. 351
85. Lemma fondamentale della teoria dell'integrazione . . .	» 352
87. Estensione degli insiemi limitati (<i>metodo di calcolo dell'estensione, decomposizione elementare, insiemi misurabili</i>).	» 355
87. Nozioni complementari e calcolo di alcune aree e di alcuni volumi (<i>area del parallelogrammo, del triangolo, del settore ellittico, del settore iperbolico, del segmento parabolico; volume del parallelepipedo a base rettangolare, del cilindro a base misurabile, del tetraedro, del cono a base misurabile, dell'ellissoide</i>)	» 359
88. Insiemi illimitati di estensione finita	» 368

§ 2. Integrali delle funzioni.

89. Massimo e minimo integrale di una funzione limitata estesi ad un insieme limitato (<i>teoremi della media o dell'additività, integrali della somma e della differenza, relazioni fondamentali</i>).	» 369
90. Il massimo e il minimo integrale come massimo e minimo limite di una variabile.	» 375
91. Funzioni integrabili (<i>calcolo numerico degli integrali, teoremi della distribuitività e della media, cenno sugli integrali di Lebesgue, importanti osservazioni sul calcolo dell'integrale di una funzione continua composta mediante più oltre, esercizi</i>)	» 376
92. Riduzione degli integrali. Formole di quadratura e di cubatura (<i>formola di inversione di Dirichlet, formole fondamentali di quadratura e di cubatura in coordinate cartesiane e in coordinate polari</i>).	» 385
93. Passaggio al limite sotto il segno integrale (<i>integrazione termine a termine delle serie, derivazione sotto il segno integrale, limiti e derivazione degli integrali di cui è altresì variabile l'insieme d'integrazione, esistenza della funzione primitiva per ogni funzione continua di una variabile</i>)	» 400
94. Integrali per le funzioni non limitate ed integrali estesi ad insiemi non limitati (<i>funzioni sommabili, esempi notevoli, massimo e minimo integrale per le funzioni sommabili</i>)	» 414
95*. Passaggio al limite sotto il segno integrale per gli integrali delle funzioni sommabili. [<i>sommabilità uniforme nelle vicinanze di un punto,</i>	

continuità e derivabilità degli integrali di funzioni sommabili dei quali è altresì variabile l'insieme d'integrazione, esercizi: 1o) continuità della funzione

$$F(x) = \int_{(0, x)} \frac{g(x, y) dy}{(x-y)^\alpha y^\beta}, \quad (\alpha < 1, \beta < 1),$$

2o) dimostrazione della formola

$$\frac{d}{dx} \int_{(0, x)} \frac{g(y) dy}{(x-y)^\alpha} = \frac{g(0)}{x^\alpha} + \int_{(0, x)} \frac{g'(y) dy}{(x-y)^\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1),$$

3o) costanza della funzione

$$F(x, y) = \int_{(y, x)} \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha} (t-y)^\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1),$$

4o) continuità e differenziabilità del potenziale newtoniano, 5o) continuità e differenziabilità del potenziale logaritmico] Pag. 430

- 96*. Riduzione degli integrali delle funzioni sommabili (esercizi, risoluzione dell'equazione integrale d' Abel) » 450
97. Metodo di integrazione di **Darboux** (osservazione sul calcolo numerico degli integrali, esercizi, dimostrazione della eguaglianza

$$\int_{(0, \infty)} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}) \quad » 458$$

98. Integrali delle funzioni complesse di variabili reali » 463

§ 3. Sulle funzioni di dominio.

99. Derivate e differenziali per le funzioni di dominio (dominii elementari, elementi di lunghezza, d'area, di volume, osservazione sulla notazione di integrale) » 463
100. Sulle funzioni additive di dominio [teorema **Cauchy-Fubini**, problema della ricerca della funzione primitiva, ulteriore dimostrazione (di **Cino Poli**) dell'integrabilità sopra un dominio delle funzioni continue, teorema di **Fubini**] » 472
101. Cambiamento delle variabili negli integrali. Applicazioni (caso particolare degli integrali ad una dimensione, esercizi, integrali a due o a tre dimensioni in coordinate polari, derivate seconde del potenziale newtoniano, formole di **Morera** e di **Poisson**, derivate seconde del potenziale logaritmico, formole di **Morera** e di **Poisson**) » 480
- 102*. Teoremi di **Rolle**, di **Lagrange**, di **Darboux**, di **Cauchy**, di **Hospital** per le funzioni additive di dominio (estensioni di **Fubini** e di **Vitali** e nuove estensioni). » 500

§ 3. Integrali curvilinei.

117. Integrali definiti funzioni di una o più variabili	Pag. 603
118. Integrazione parziale (teorema di Caratheodory)	» 605
119. Lunghezza d' arco per una curva regolare continua	» 606
120*. Curve continue rettificabili (funzioni a variazione limitata, teorema di Jordan, teorema Lebesgue-Tonelli)	» 610
121. Definizioni e prime proprietà degli integrali curvilinei	» 616
122. Integrazione delle forme differenziali lineari	» 622
123*. Estensioni	» 629
124. Domini normali e domini regolari del piano (teorema Jordan-Osgood, teoremi sugli integrali delle forme differenziali lineari estesi alle frontiere dei domini regolari, applicazione al problema dell'integrazione delle forme differenziali lineari).	» 630
125. Formole di quadratura per i domini regolari	» 639
126. Planimetri (razionale teoria del planimetro di Amsler).	» 640

CAPITOLO VI.

§ 1. Calcolo degli integrali nel piano.

127*. Teoremi di Rolle, di Lagrange, di Cauchy, di l'Hospital (terza forma) e teorema di Darboux per le funzioni di due variabili »	645
128*. Problema della ricerca delle funzioni di punto primitive di una data	» 647
129. Riduzione degli integrali delle funzioni continue estesi a domini regolari (teorema di Green, diverse forme del teor. di Green, forma vettoriale, formole di integrazione per parti, nuove formole di riduzione degli integrali nel piano, applicazioni: sul potenziale logaritmico di doppio strato, proprietà fondamentali delle funzioni armoniche nel piano).	» 652
130. Cambiamento delle variabili (coordinate curvilinee nel piano, coordinate ellittiche)	» 661
131. Sul calcolo numerico degli integrali a due dimensioni (metodo del rettangolo, metodo Cavalieri-Simpson, metodo del baricentro)	» 671

§ 2. Integrali superficiali.

132. Elemento lineare ed elemento d'area per una porzione di superficie regolare (area delle superficie di rotazione, teorema di Guldino, porzioni di superficie regolari con singolarità, area della superficie sferica, pseudosferica, torica, cambiamento dei parametri)	» 677
133. Superficie regolari e biregolari	» 687
134. Definizione di integrale superficiale. Teorema di Stokes (forma vettoriale del teor. di Stokes, applicazione all'integrazione delle forme differenziali lineari)	» 691

135. **Domini normali, binormali e regolari dello spazio. Corollari del teorema di Stokes** (*nuovi teoremi sugli integrali della forma differenziale*)

$$Xdy dz + Ydz dx + Zdx dy$$

estesi alle frontiere dei domini regolari dello spazio) **Pag. 697**

136. **Formole di cubatura per i domini regolari dello spazio** (*le più generali formole a mezzo di integrali superficiali, formole di cubatura in coordinate polari, formole di cubatura per i solidi di rivoluzione, diverse deduzioni del teorema di Guldino*) **» 705**

§ 3. Sul calcolo degli integrali nello spazio.

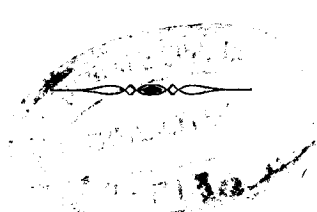
- 137*. **Teoremi di Rolle, di Lagrange, di Cauchy, di l'Hospital** (terza forma) e **teorema di Darboux** per le funzioni di tre variabili **» 713**

- 138*. **Problema della ricerca delle funzioni di punto primitive di una data** **» 713**

139. **Riduzione degli integrali delle funzioni continue estesi a domini regolari dello spazio** (*teorema di Green, diverse forme del teor. di Green, forme vettoriali, formole di integrazione per parti, nuove formole di riduzione degli integrali nello spazio, applicazioni: sul potenziale newtoniano di doppio strato, proprietà fondamentali delle funzioni armoniche nello spazio e nel piano, formola di Stokes, problema di Dirichlet, teorema di unicità per tale problema*) **» 716**

140. **Cambiamento delle variabili negli integrali a tre dimensioni** [*coordinate curvilinee nello spazio, coordinate ellittiche, coordinate canali e generalizzazione del teor. di Guldino, definizione alla Minkowski di lunghezza per una curva, esistenza di coordinate canali ortogonali (si perviene ad una particolare equazione integrale lineare tipo Volterra), coordinate a superficie parallele, curvatura media per una superficie, formola di Steiner per il volume di uno strato su una superficie, definizione di Minkowski di area per una superficie, teorema di Dupin sui sistemi tripli ortogonali di superficie*]. **» 725**

141. **Sul calcolo numerico degli integrali a tre dimensioni** (*metodo del rettangolo, metodo Cavalieri-Simpson*) **» 741**



Legatoria della Scuola
Normale Superiore - Pisa

Stalder



033115

BIBLIOTECA
Scuola Normale Superiore