

~~M. VIII 28~~ 16-1X-53
PUBBLICAZIONI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI CATANIA

8860
MAURO PICONE

PROFESSORE DELLA R. UNIVERSITÀ DI CATANIA

LEZIONI

DI

ANALISI INFINITESIMALE

VOLUME PRIMO

LA DERIVAZIONE E L'INTEGRAZIONE

(PARTE PRIMA)



CIRCOLO MATEMATICO DI CATANIA

EDITORE

CATANIA, R. Università

1923

Libreria Bemporad
delle Librerie Italiane Riunite (L. I. R.)

PISA

PROPRIETÀ LETTERARIA

Le copie non munite della firma dell'Autore sono apocrife.

H. P. Long

Copia N. 251



Officine di Arti Grafiche del Cav. VINCENZO GIANNOTTA, Editore

Libraio di S. M. la Regina Madre

CATANIA — Via Crociferi, 15 — CATANIA

p. Consultazione
in K. 2

~~16, 8 28~~



A

MIO PADRE

CHE PRIMO M' EDUCÒ

AL CULTO DELLA SCIENZA

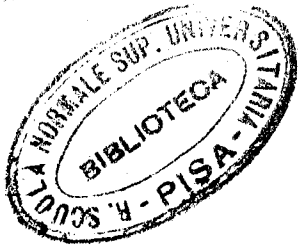
E A

LUIGI BIANCHI

IL VENERATO MAESTRO

A CUI DEVO

IL MIO PENSIERO MATEMATICO



PREFAZIONE

Esauritesi le dispense litografate del mio corso di Calcolo infinitesimale pubblicate nel 1919, scolari, amici e colleghi di Catania vollero che io stampassi quel corso. Quell'impareggiabile, fervido giovane che è il DOTT. NICCOLÒ SPAMPINATO fondò perciò in seno al Circolo matematico, da lui creato e giunto ormai alla sua affermazione, una società editrice per azioni, avente lo scopo di stampare corsi matematici universitarii, catanesi e non catanesi. La prima opera che viene stampata da questa giovane società editrice è la presente. Speriamo che ciò non le arrechi danno!

Rimessomi a redigere il corso per la stampa, pensai che non era il caso di riscriverlo proprio entro i modesti confini del corso universitario del primo biennio. Ove così avessi fatto, avrei certamente compiuto un'opera che poteva essere solo utile ai miei scolari di Catania, poichè in Italia sono ormai numerosi ed eccellenti i corsi pubblicati di Calcolo infinitesimale, contenenti su per giù la sola materia di insegnamento del primo biennio, ed io non mi sentivo di poter fare un'opera che avesse potuto gareggiare con quelle.

Manca invece in Italia, e forse anche fuori, un'ordinata raccolta di lezioni di Analisi infinitesimale, la quale possa essere egualmente utile tanto a coloro che si dedicheranno a studi teorici, sia di matematica pura che di scienze sperimentali, quanto a coloro che vorranno o dovranno fare talvolta delle pratiche applicazioni numeriche.

Quando le vicende della guerra passata mi portarono a fare, in campo, dei calcoli numerici di balistica, potei constatare le gravi lacune che esistono in tutti i trattati d'Analisi per quanto riguarda le pratiche applicazioni numeriche dei potenti concetti del calcolo infinitesimale. È forse perciò che i fisici, i chimici, gl'ingegneri, nella grande maggioranza, sogliono ben presto dimenticare ogni nozione di Analisi infinitesimale? A chi deve fare delle applicazioni sperimentali, anche soltanto puramente scientifiche, più che la costruzione di funzioni continue che non hanno mai la derivata, più che lo studio dei particolari e svariati artifici per integrare quelle particolarissime equazioni diffe-

renziali — parlo anche dell'equazione $dy = f(x)dx$ — che possonsi integrare con le funzioni elementari, serve, per esempio, la conoscenza di rapidi e praticabili metodi che gli consentano di calcolare, in un dato punto, con quell'approssimazione che è necessaria, l'integrale di un'equazione differenziale, o alle derivate parziali, individuato da note condizioni iniziali o al contorno. È ben naturale che l'ingegnere, il quale, nell'esercizio della professione, ha talvolta inutilmente dovuto scartabellare il libro d'Analisi studiato all'università, per trovarvi il modo di conoscere numericamente l'integrale di una certa sua equazione differenziale, del quale là trova però dimostrata l'esistenza, finisca col relegare quel libro nel più riposto angolo della sua biblioteca e col dimenticarlo.

Si è così discreditata la teoria presso coloro che si dedicano alla pratica. A causa di ciò si è andata attuando una progressiva riduzione della mole dei corsi matematici del primo biennio di studii per la laurea in ingegneria e si è introdotto in quel biennio anche il corso di Meccanica razionale, naturalmente a spese degli altri corsi teorici. Ora io domando: persistendo in questa riduzione, ove mai si formeranno in Italia coloro che potranno far progredire la scienza dell'ingegnere? Fra i valenti analisti d'Italia è ormai di moda la gara a chi fa il corso di Calcolo più ridotto! Ma perchè? Io oso invece affermare: Non si deve affatto ridurre, si deve anzi ampliare di molto, ma si deve anche profondamente, radicalmente trasformare. Trasformare con gli intenti su esposti e con quelli che vado ad esporre.

Al teorico della pura matematica e a quello delle scienze sperimentali, deve riuscire utilissimo un libro d'Analisi che — con rapide mosse — tratti, oltre che i soliti argomenti, anche i seguenti: Gli integrali curvilinei; gli integrali estesi a superficie curve (formole di GREEN, di STOKES,...); gli integrali delle funzioni non limitate (e ciò con grande diffusione) e l'applicazione alle funzioni potenziali; la teoria delle funzioni analitiche; le equazioni integrali in qualsiasi numero di variabili e di funzioni incognite; le equazioni alle derivate parziali della Fisica matematica; l'integrazione approssimata (numerica) di queste equazioni e di quelle generali ai differenziali totali; gli sviluppi in serie di FOURIER, di funzioni sferiche, di BESSEL; le funzioni ellittiche; il calcolo delle variazioni (ed anche questo con diffusione maggiore della solita).

Un libro d'Analisi che svolga questi argomenti per quanto possa strettamente occorrere, specialmente allo studioso di scienze sperimentali, e servire di base al matematico puro, manca in Italia e forse anche fuori. Vi sono in Italia, per esempio, trattati di funzioni analitiche e di funzioni ellittiche, non dico soltanto eccellenti, ma addirittura classici, ma si può sperare che, ad esempio, un ingegnere idraulico che voglia impadronirsi dei metodi di trattazione dei problemi idrodinamici dovuti al LEVI-CIVITA, si metta dapprima a studiare uno di quei voluminosi trattati sulle funzioni analitiche? Quello che gli occorre, può essere esposto, in forma piana ed elementare, in una cinquantina di pagine al più. Esistono in Francia mirabili corsi d'Analisi che contengono tutti gli argomenti citati sopra, ma perchè non ve ne deve essere uno anche in Italia? I trattati francesi svolgono però quegli argomenti, con la più ampia trattazione, con l'intento di riuscire utili, più che ad altri, agli studiosi di matematica pura.

Fare una raccolta ordinata di lezioni d'Analisi infinitesimale che abbia sempre in vista le pratiche applicazioni numeriche e che contenga tutte le teorie matematiche che possono essere di utile base allo studioso di matematiche pure, ma anche e sopra tutto, di sufficiente cultura per lo studioso di scienze sperimentali: Ecco lo scopo che mi son prefisso nello scrivere queste pagine.

Oi sono riuscito? Forse no. Credo di essermi soltanto avvicinato al tipo di trattato che vagheggio. Se il mio attuale tentativo avrà il consenso dei matematici e di coloro che la matematica devono applicare ai problemi delle scienze sperimentali e della pratica, io lo andrò via via rinnovando, e chi sa se alla fine non potrò completamente riuscire al mio scopo.

Nelle presenti lezioni vi sono parecchie novità di trattazione, talune notevoli. Vi è completamente nuovo, ad esempio, l'iniziale paragrafo della teoria dei limiti; in esso, per la prima volta io credo, viene esposta una teoria dei limiti affatto generale che contiene, come caso particolare, tutti i concetti di limite dell'Analisi. Vi è nuova quasi tutta la seconda parte che tratta dell'integrazione. Degna di speciale menzione mi sembra in questa seconda parte la nuova teoria degli integrali delle funzioni non limitate; in questa teoria è contenuta, come

caso particolare, anche quella delle funzioni potenziali. Non così si può dire, com'è noto, delle teorie, fino ad oggi esposte, degli integrali delle funzioni non limitate; invero, le funzioni potenziali hanno sempre avuto bisogno di una speciale trattazione a parte. Ed era veramente strano che le teorie fondamentali del Calcolo non avessero dovuto bastare allo studio delle ben modeste funzioni potenziali.

La presente raccolta di lezioni di Analisi infinitesimale è divisa in due grossi volumi, ma la stampa del secondo volume sarà iniziata soltanto se, a questo primo, sarà fatta una favorevole accoglienza.

Ed ora, alcune avvertenze. I pochi esercizi che si trovano proposti in queste « Lezioni » sono quasi sempre di indole teorica e complementare; mancano del tutto gli esercizi che devono fornire esempio di pratica applicazione della teoria. Non ho potuto assolutamente trovare spazio per essi, non ostante la loro indiscutibile utilità. Ma ad una metodica raccolta di tali esercizi si è dedicato l'egregio DOTT. GABRIELE MAMMANA, assistente alla mia cattedra di Analisi. In questa raccolta saranno anche sviluppati i soliti metodi di integrazione indefinita e definita a mezzo delle funzioni elementari, dei quali qui faccio soltanto un rapidissimo cenno, per la ragione già detta, della loro scarsa utilità pratica e del limitato interesse teorico che essi offrono.

Gli articoli del presente libro i cui numeri si trovano asteriscati possono essere omessi nella lettura; ad essi non si fa mai ricorso nei rimanenti articoli. Questi ultimi contengono la materia che meno s'allontana da quella che si può svolgere in un ordinario corso di Analisi infinitesimale del primo biennio. Penso però che quei giovani del primo biennio i quali, avendo fra le mani questo libro, saranno vinti dalla curiosità di leggere anche gli articoli asteriscati, faranno cosa utilissima alla formazione della loro cultura matematica.

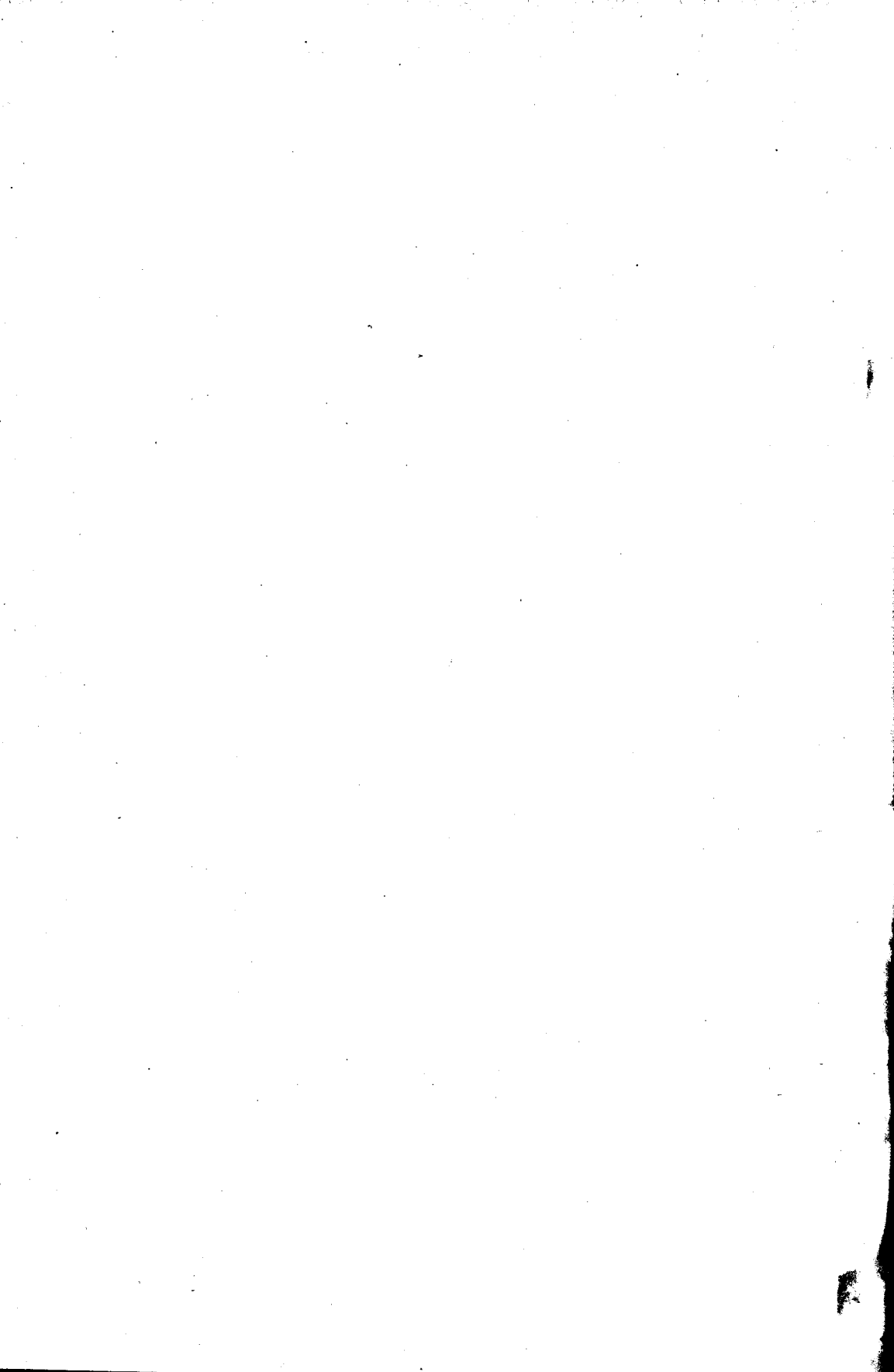
A base di queste « Lezioni » ho preso la magistrale opera del mio carissimo amico MICHELE CIPOLLA: Analisi algebrica e introduzione al calcolo infinitesimale (2^a edizione, Palermo, Casa editrice D. Capozzi). Questo libro viene qui citato con la semplice dizione: Algebra.

Mi è infine sommamente piacevole porgere pubblicamente i miei più vivi ringraziamenti al DOTT. NICCOLÒ SPAMPINATO anche per

Vassiduità con la quale ha voluto curare, in ogni particolare, la stampa di questo libro, e all'egregio Editore CAV. VINCENZO GIANNOTTA proprietario delle Officine d'arti grafiche ove è stato stampato il libro. Il CAV. VINCENZO GIANNOTTA, anche lui, ha voluto che queste « Lezioni » avessero una smagliante veste tipografica, e vi è mirabilmente riuscito, affrontando altresì spese ingenti per trasformare un reparto delle sue Officine in una ricca e perfetta Tipografia matematica.

Catania, aprile 1923.

MAURO PICONE



PARTE PRIMA

LA DERIVAZIONE

CAPITOLO I.

INSIEMI ORDINATI DI OPERAZIONI. — LIMITI PER UNA VARIABILE.

INSIEMI DI PUNTI. — FUNZIONI.

§ 1. Insiemi ordinati di operazioni. Limiti per una variabile.

1. **L'insieme dei numeri reali.**—Nei nostri studii ci fonderemo sulle seguenti due proprietà dell'insieme di *tutti* i numeri reali:

1^a. Fra due numeri reali diversi, se ne possono sempre intercalare quanti altri si vogliano, maggiori del minore e minori del maggiore.

2^a Se si dividono tutti i numeri reali in due classi A e B , tali che ogni numero della classe A sia *minore* di ogni numero della classe B , esisterà sempre un determinato numero x — che sarà o il più grande fra i numeri di A o il più piccolo fra quelli di B — tale che ogni numero minore di x appartiene alla classe A , ed ogni numero maggiore di x appartiene alla classe B . Tale numero x si dice il *numero di separazione* delle due classi A e B .

2. **Estremi per un insieme di numeri reali.** — In *Analisi* si ha continuamente occasione di dover considerare l'insieme (classe) di tutti i numeri (in numero finito o infinito) che soddisfano a determinate condizioni. Per esempio: l'insieme dei numeri interi e positivi, l'insieme dei numeri interi maggiori di -50 e minori di 100 , quello di tutti i numeri razionali, quello delle frazioni proprie positive, ecc..

Per un insieme numerico è *fondamentale* la nozione dei suoi *estremi*.

Un insieme numerico I si dice *limitato superiormente* se si può assegnare un numero k maggiore di tutti quelli dell'insieme, esso si dice *limitato inferiormente*, se si può assegnare un numero h minore di tutti quelli dell'insieme. Se, nello stesso tempo, un insieme

è limitato inferiormente e superiormente, si dice, semplicemente, ch' esso è *limitato*.

Supponiamo che l'insieme numerico I , sia limitato superiormente. Vi sono allora infiniti numeri maggiori di ciascun numero di I ; indichiamo con B l'insieme formato da tutti quei numeri e con A l'insieme formato dai rimanenti numeri reali. Detto e_2 il numero di separazione delle due classi A e B , secondo le quali risulta diviso l'insieme dei numeri reali, si ha che:

a) Non vi è alcun numero di I superiore a e_2 . Ed invero, ogni numero superiore a e_2 appartiene a B , e quindi non può appartenere a I .

b) Comunque si assegni un numero positivo ε , esiste sempre almeno un numero di I superiore a $e_2 - \varepsilon$. Ed invero il numero $e_2 - \frac{\varepsilon}{2}$ appartiene a A e quindi esisterà almeno un numero di I non inferiore a $e_2 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Il numero e_2 ora costruito chiamasi *l'estremo superiore* dell'insieme numerico I .

Le proprietà *a)* e *b)* del numero e_2 lo determinano univocamente. Ed invero, ogni numero che le verifichi è di separazione della classe B , formata da tutti i numeri maggiori di ciascun numero di I , e della classe A , formata dai rimanenti numeri reali.

Le proprietà *a)* e *b)* consentono di indicare il numero e_2 , come *il più piccolo numero che non è inferiore a nessun numero dell'insieme I* .

Allo stesso modo, per ogni insieme numerico I , limitato inferiormente, si ha *l'estremo inferiore* e_1 caratterizzato dalle due proprietà:

a) Non vi è alcun numero di I inferiore a e_1 .

b) Comunque si assegni un numero positivo ε , esiste sempre almeno un numero di I inferiore a $e_1 + \varepsilon$.

L'estremo inferiore e_1 dell'insieme numerico I , limitato inferiormente, è cioè *il più grande numero che non è superiore a nessun numero dell'insieme I* .

Se un insieme numerico I è limitato inferiormente e superiormente esso ammette un estremo inferiore e_1 ed un estremo superiore e_2 .

Riuscirà, evidentemente, $e_1 \leq e_2$, e sarà $e_1 = e_2$ allora, e allora soltanto, che l'insieme I sia costituito da un unico numero. Per un insieme numerico limitato la differenza $e_2 - e_1$, fra il suo estremo

superiore ed il suo estremo inferiore, chiamasi *ampiezza* o *diametro* dell'insieme.

Ogni insieme costituito da un numero finito di numeri ha, evidentemente, per estremi superiore e inferiore, rispettivamente, il più grande ed il più piccolo fra quei numeri. Ma un insieme che contenga infiniti numeri, può non possederne uno che sia più grande di tutti gli altri, oppure che sia più piccolo. Per esempio, nell'insieme delle frazioni proprie positive non vi è nè alcun numero più grande nè alcun numero più piccolo di tutti gli altri. Se un insieme numerico I contiene un numero più grande (più piccolo) di tutti gli altri, questo si chiama *il massimo* (*il minimo*) numero di I , ed è altresì l'estremo superiore (l'estremo inferiore) dell'insieme. Si dice allora che l'insieme *ammette il massimo* (*il minimo*).

Se a e b sono due numeri reali, ed è $a \leq b$, chiamasi *intervallo* (a, b) l'insieme costituito da tutti i numeri reali x soddisfacenti, simultaneamente, alle due relazioni

$$x \geq a, \quad x \leq b,$$

ovvero, come anche si dice, alla *limitazione*

$$a \leq x \leq b.$$

L'intervallo (a, b) ammette il minimo a ed il massimo b .

Sia ora $a < b$. Chiamasi *intervallo* (a, b) *aperta a sinistra* (*a destra*), l'insieme costituito da tutti i numeri reali x soddisfacenti alla limitazione

$$a < x \leq b \quad (a \leq x < b).$$

L'intervallo (a, b) aperto a sinistra (*a destra*) non ammette minimo (massimo), ha l'estremo inferiore a (l'estremo superiore b), ammette il massimo b (il minimo a).

L'intervallo (a, b) , aperto a sinistra (*a destra*) dicesi anche *un intervallo a destra di a* (*un intervallo a sinistra di b*).

Chiamasi *intervallo* (a, b) *aperto*, l'insieme costituito da tutti i numeri reali x soddisfacenti alla limitazione

$$a < x < b.$$

L'intervallo (a, b) aperto non ammette nè minimo, nè massimo, ha l'estremo inferiore a e l'estremo superiore b .

Dati due insiemi numerici I e J , si dice che *l'insieme J è contenuto in I , ovvero che I contiene J* , e si scrive

$$J < I, I > J,$$

quando ogni numero di J è anche di I .

Evidentemente: *Ogni insieme numerico limitato I , avente l'estremo inferiore e_1 e l'estremo superiore e_2 , è contenuto nell'intervallo (e_1, e_2) .*

Sussiste il teorema :

I. *Se l'insieme numerico I è limitato, ogni insieme J in esso contenuto è altresì limitato; e detti e_1, e_2 gli estremi inferiore e superiore di I , g_1, g_2 gli estremi inferiore e superiore di J , si ha*

$$e_1 \leq g_1 \leq g_2 \leq e_2.$$

Poichè ogni numero j di J è anche di I , si ha .

$$(1) \quad e_1 \leq j \leq e_2,$$

e ciò dimostra intanto che J è limitato. Il suo estremo superiore g_2 è il più piccolo numero non superato da nessuno dei suoi numeri, e quindi, poichè sussiste la (1), riuscirà $g_2 \leq e_2$. Così pure, l'estremo inferiore g_1 di J è il più grande numero che non supera alcun numero di J , e quindi, poichè sussiste la (1), riuscirà $e_1 \leq g_1$.

Molto opportunamente, se un insieme numerico I non è limitato superiormente (inferiormente) si conviene di dire che esso ha $+\infty$ ($-\infty$) *per estremo superiore (inferiore)*.

Dopo tale convenzione, ogni insieme numerico possiede e l'estremo inferiore e l'estremo superiore (finiti o infiniti).

Sia c un numero reale determinato. *L'intervallo $(c, +\infty)$ è l'insieme di tutti i numeri reali non minori di c . L'intervallo $(c, +\infty)$ aperto è l'insieme di tutti i numeri reali maggiori di c . L'intervallo $(-\infty, c)$ è l'insieme di tutti i numeri reali non maggiori di c . L'intervallo $(-\infty, c)$ aperto è l'insieme di tutti i numeri reali minori di c .*

L'intervallo $(c, +\infty)$ (l'intervallo $(-\infty, c)$) dicesi anche *un intervallo a sinistra di ∞ (un intervallo a destra di ∞)*.

L'intervallo $(-\infty, +\infty)$ è l'insieme di tutti i numeri reali.

3. Coppie di insiemi contigui. — Per future applicazioni, giova qui richiamare il concetto di *coppie di insiemi numerici contigui*.

Dati due insiemi numerici (due classi numeriche) A e B , dire-

mo che i due insiemi sono separati (che le due classi sono separate) se ogni numero di uno determinato fra i due insiemi non è maggiore di ogni numero dell'altro. Quello fra i due insiemi A e B i cui numeri non sono maggiori dei numeri dell'altro, chiamasi *l'insieme inferiore* (o la classe inferiore), l'altro si chiama *l'insieme superiore* (o la classe superiore). Sussiste il teorema:

I. Se i due insiemi numerici A e B sono separati e A è l'insieme inferiore, questo è limitato superiormente e quello inferiormente. Detti α l'estremo superiore di A e β l'estremo inferiore di B si ha:

$$\alpha \leq \beta.$$

Ed invero, indicando con b un numero di B , comunque fissato, e con a un qualunque numero di A si ha: $a \leq b$. Ciò dimostra che A è limitato superiormente. Detto α l'estremo superiore di A , riesce $\alpha \leq b$. Questa relazione, sussistendo per qualunque numero b di B , esprime che B è limitato inferiormente, ed inoltre che, detto β l'estremo inferiore di B , riesce $\alpha \leq \beta$.

Ogni numero x appartenente all'intervallo (α, β) è tale che, comunque si prenda a in A e b in B , risulta:

$$a \leq x \leq b.$$

Ogni numero x che goda di questa proprietà si dice un numero di separazione dei due insiemi separati (delle due classi separate) A e B . Evidentemente sussiste il teorema:

II. Nelle ipotesi del teorema precedente, tutti i numeri di separazione delle due classi separate A e B , costituiscono un intervallo, e precisamente l'intervallo (α, β) , determinato dall'estremo superiore α dell'insieme A e dall'estremo inferiore β dell'insieme B .

L'intervallo (α, β) costituito da tutti i numeri di separazione delle due classi A e B , si dice l'intervallo di separazione delle due classi separate A e B . Si ha, evidentemente, che:

III. L'ampiezza $\beta - \alpha$ dell'intervallo di separazione delle due classi separate A e B è l'estremo inferiore dell'insieme di numeri non negativi costituito da tutte le differenze $b - a$ fra ogni numero della classe B e ogni numero della classe A .

Due insiemi numerici separati (due classi numeriche separate) diconsi *contigui* (*contigue*) se il loro intervallo di separazione ha ampiezza nulla. In virtù del teorema II si ha che:

IV. *Se i due insiemi numerici A e B sono contigui, ammettono un unico numero di separazione, e viceversa. Se A è l'insieme inferiore, tale numero è l'estremo superiore di A e l'estremo inferiore di B .*

In forza del teorema III si ha poi che:

V. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due insiemi numerici separati A e B , siano contigui, è che, comunque si assegni un numero positivo ϵ , si possano trovare un numero di B ed un numero di A , la differenza dei quali sia, in modulo, minore di ϵ .*

Riepilogando, potremo dunque dire che:

Due classi numeriche A e B , sono contigue se:

a) ogni numero di una determinata fra di esse non è maggiore di ogni numero dell'altra;

b) comunque si assegni un numero positivo ϵ , si possono trovare un numero di B ed un numero di A , la differenza dei quali è, in modulo, minore di ϵ .

Due classi contigue A e B determinano univocamente un numero reale x : il numero di separazione delle due classi; il quale gode della proprietà caratteristica di essere non maggiore di ogni numero della classe superiore e non minore di ogni numero della classe inferiore.

4. Insiemi ordinati di operazioni. — Noi prenderemo ora a considerare operazioni — di natura la più arbitraria — ciascuna delle quali abbia sempre per risultato un numero reale ben determinato. Con la notazione

[O]

disegneremo un insieme (una classe) di tali operazioni, la cui operazione generica sarà indicata con O .

Diremo che l'insieme di operazioni [O] è *ordinato*, quando si sia stabilita una regola che permetta, senza eccezione, di assegnare ad ogni operazione O' dell'insieme, un'altra operazione O'' dello stesso

insieme, almeno una—operazione che converremo di chiamare *seguen-
te* alla O' , scrivendo

$$O' \rightarrow O''$$

— in modo che siano soddisfatte le due condizioni:

a) Se O' , O'' , O''' sono operazioni di $[O]$ e se $O' \rightarrow O''$, $O'' \rightarrow O'''$, è anche $O' \rightarrow O'''$.

b) Se O' e O'' sono due quali si vogliono operazioni di $[O]$, esiste sempre un'operazione di $[O]$, almeno una, seguente tanto alla O' che alla O'' ; cioè due operazioni quali si vogliono di $[O]$, ammettono sempre una comune operazione seguente.

Se ne deduce:

Quante si vogliono operazioni di un insieme ordinato $[O]$ ammettono sempre una comune operazione seguente.

Ed invero, siano $O^{(1)}$, $O^{(2)}$, ..., $O^{(n)}$ operazioni di $[O]$. Sia $O^{(12)}$ una comune operazione seguente alla $O^{(1)}$ e alla $O^{(2)}$. Sia $O^{(123)}$ una comune operazione seguente alla $O^{(12)}$ e alla $O^{(3)}$, sarà $O^{(123)}$ una comune operazione seguente alla $O^{(1)}$, alla $O^{(2)}$ e alla $O^{(3)}$. Ecc.

Se O , O' , \bar{O} , \bar{O} , designano operazioni di $[O]$, con le notazioni (O) , (O') , (\bar{O}) , (\bar{O}) designeremo gli insiemi di tutte le operazioni di $[O]$ seguenti, rispettivamente, alle O , O' , \bar{O} , \bar{O} .

Osservazione. Si badi bene che, prese due operazioni quali si vogliono di un insieme ordinato $[O]$, non è affatto detto che una di esse debba essere seguente all'altra. Può darsi anche che accada che ognuna di quelle operazioni sia seguente all'altra.

Esempi: 1°) Può darsi, in particolare, che le operazioni di un insieme ordinato $[O]$ si possano porre in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali $1, 2, \dots, n, \dots$, ed in modo che all'operazione corrispondente al numero naturale i siano seguenti ognuna di quelle corrispondenti ai numeri $i+1, i+2, \dots, i+v, \dots$. Si dice allora che l'insieme di operazioni è una *successione di operazioni*, e per l'insieme $[O]$ si adotta la notazione

$$O^{(1)}, O^{(2)}, \dots, O^{(n)}, \dots,$$

ove con $O^{(n)}$ abbiamo designato l'operazione di $[O]$, corrispondente al numero naturale n . Il risultato numerico dell'operazione $O^{(n)}$ si

può designare con $x^{(n)}$ e l'insieme numerico formato dai risultati delle operazioni di $[O]$ viene a costituire ciò che si chiama una *successione di numeri*:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots,$$

(cfr. *Algebra*, n° 158).

L'operazione $O^{(1)}$ si potrà chiamare la *prima* operazione, la $O^{(2)}$, la *seconda*, ..., la $O^{(n)}$, la *n*ma, ecc.

Prese due operazioni quali si vogliano in una successione di operazioni, avviene sempre che una determinata di queste è seguente all'altra.

Preso sull'asse delle ξ un segmento (α, β) si ha una successione di operazioni, quando, per esempio, chiamiamo operazione *n*ma quella consistente nel dividere l'intervallo (α, β) in *n* parti eguali e nel fare la somma dei prodotti dell'ampiezza $\frac{\beta - \alpha}{n}$ di ciascun intervallo parziale per il quadrato dell'ascissa dal suo punto di mezzo. Il risultato $x^{(n)}$ dell'operazione *n*ma sarà dato dal numero

$$x^{(n)} = \frac{\beta - \alpha}{n} \sum \left[\alpha + \left(i - \frac{1}{2} \right) \frac{\beta - \alpha}{n} \right]^2.$$

2°) Ma si può avere subito anche un esempio di un insieme ordinato $[O]$ di operazioni che non è una successione. Mettiamo in $[O]$ tutte e sole le operazioni consistenti nel dividere, *nel modo più arbitrario*, l'intervallo (α, β) in intervalli parziali e nel fare la somma dei prodotti dell'ampiezza di ciascun intervallo parziale per il quadrato dell'ascissa del suo punto di mezzo. Per ogni tale operazione O diremo *seguenti* quelle il cui massimo delle ampiezze degli intervalli parziali, nei quali risulta diviso l'intervallo (α, β) , è *minore* del massimo delle ampiezze degli intervalli parziali nei quali, nell'operazione O , è stato diviso l'intervallo (α, β) . Sono evidentemente verificate le proprietà *a)* e *b)*. Fra due operazioni di un tale insieme $[O]$, nelle quali gli intervalli di suddivisione hanno ampiezze di eguale massimo, nessuna è seguente all'altra.

Altri esempi:

3°) Si abbia un corpo pesante e mettiamo in $[O]$, tutte e sole le operazioni consistenti nel trovare il peso di una porzione qualsiasi del corpo. L'insieme $[O]$ risulterà ordinato se, per esempio, diremo

seguinte di ogni sua operazione O tutte quelle che si riferiscono a porzioni del corpo di volume *non minore* a quella a cui si riferisce l'operazione O . Qui, prese due operazioni di $[O]$, riferentesi a porzioni del corpo di eguale volume, ognuna di esse è *seguinte* all'altra.

4°) In un luogo determinato sia situato un barometro e mettiamo in $[O]$ tutte e sole le operazioni consistenti nel leggere la pressione indicata dal barometro. L'insieme $[O]$ risulterà ordinato se, per esempio, diremo *seguinte* di ogni sua operazione O , tutte le operazioni di lettura della pressione, che avvengono in istanti successivi a quelli in cui è avvenuta l'operazione O .

5. Limiti per una variabile ordinata. — Chiamiamo *variabile ordinata* il numero che risulta dell'operazione O di un insieme ordinato $[O]$ di operazioni, numero considerato al variare di O in $[O]$.

Vogliamo arrivare al *fondamentale* concetto di *limite* per una variabile ordinata. A tale scopo introdurremo un modo di dire che ci consentirà maggiore rapidità di esposizione.

Diremo che una variabile ordinata x *assume definitivamente* una certa proprietà, oppure *acquista e conserva* quella proprietà, ovvero *diventa e rimane* tale da verificare la proprietà stessa, quando è possibile determinare un'operazione O del relativo insieme $[O]$ di operazioni, tale che l'indicata proprietà riesca verificata dai risultati di tutte le operazioni di (O) , cioè di tutte le operazioni seguinti alla O .

Osserviamo subito la seguente generale proposizione:

I. *Se le proprietà $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ sono, ciascuna di per se, assunte definitivamente dalla variabile x , questa diverrà e rimarrà tale da verificare simultaneamente le proprietà $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$.*

Ed invero, se Π_1 si verifica quando O è in $(O^{(1)})$, Π_2 quando O è in $(O^{(2)})$, ..., Π_n quando O è in $(O^{(n)})$, detta O' una comune operazione seguinte a $O^{(1)}$, a $O^{(2)}$, ..., a $O^{(n)}$, quando O è in (O') si verificheranno simultaneamente le proprietà $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$.

Con la notazione $X[O]$ indicheremo l'insieme numerico descritto dalla variabile x , al variare dell'operazione O nell'insieme $[O]$, con $X(O')$ indicheremo l'insieme numerico descritto dalla variabile x al variare di O nell'insieme (O') delle operazioni seguinti alla O' .

Si dirà che l'insieme numerico $X[O]$ assume definitivamente una certa proprietà, oppure *acquista e conserva* quella proprietà, ovvero *diventa e rimane* tale da verificare la proprietà stessa, quando è possibile determinare un'operazione O di $[O]$ tale che l'indicata proprietà riesca verificata dall'insieme numerico $X(O)$.

Ciò posto, supponiamo, in primo luogo, che l'insieme numerico $X[O]$ percorso dalla variabile x sia definitivamente limitato, e designano con \bar{O} un'operazione di $[O]$ tale che l'insieme numerico $X(\bar{O})$, descritto dalla variabile x al variare di O nell'insieme (\bar{O}) delle operazioni seguenti alla \bar{O} , sia limitato. Essendo k_1 e k_2 due certi numeri, si avrà:

$$k_1 \leq x \leq k_2 \quad \text{se } O \text{ è in } (\bar{O}).$$

Consideriamo ora, esclusivamente, operazioni di (\bar{O}) . Inducendo con $x_1(O)$ e $x_2(O)$ gli estremi inferiore e superiore di $X(O)$, si avrà sempre

$$k_1 \leq x_1(O) \leq x_2(O) \leq k_2.$$

Al variare di O in (\bar{O}) , i numeri $x_1(O)$ e $x_2(O)$ descriveranno due insiemi numerici limitati che indicheremo con X_1 e X_2 . Si ponga

- (1) l' = estremo superiore di X_1 ,
 (2) l'' = estremo inferiore di X_2 .

La quantità l' si chiama il *minimo limite* della variabile x , e la quantità l'' il *massimo limite*, e si designeranno, rispettivamente, con le notazioni

$$\lim' x, \quad \lim'' x.$$

Si ha evidentemente

$$k_1 \leq l' \leq k_2, \quad k_1 \leq l'' \leq k_2.$$

Dimostriamo che:

II. *Comunque si assegni un numero positivo ε , la variabile x diventa e rimane maggiore di $l' - \varepsilon$, laddove non diviene mai definitivamente maggiore o eguale a $l' + \varepsilon$.*

Difatti, in virtù della (1), esiste un numero di X_1 maggiore di $l' - \varepsilon$, cioè un'operazione O di (\bar{O}) per la quale è

$$x_1(O) > l' - \varepsilon,$$

ma $x_1(O)$ è l'estremo inferiore di $X(O)$, cioè dell'insieme numerico descritto dalla variabile x al variare dell'operazione in (O) , si ha dunque:

$$x > l' - \varepsilon \text{ per ogni operazione di } (O).$$

D'altra parte è sempre, comunque si prenda O in (\bar{O}) ,

$$x_1(O) \leq l',$$

e poichè esiste almeno un numero di $X(O)$ che riesce minore di $x_1(O) + \varepsilon$, se ne deduce che, comunque si prenda un'operazione O di (\bar{O}) , esistono sempre delle operazioni ad essa seguenti per le quali si ha $x < l' + \varepsilon$, ciò che appunto dimostra che la variabile x non è mai definitivamente $\geq l' + \varepsilon$. Ed invero, se \bar{O} è una qualsivoglia operazione di $[O]$, detta O' una comune operazione seguente alla \bar{O} e alla \bar{O} , esiste un'operazione O seguente alla O' e quindi alla \bar{O} per la quale si ha $x < l' + \varepsilon$.

Allo stesso modo si dimostra:

III. *Comunque si assegni un numero positivo ε , la variabile x diventa e rimane minore di $l'' + \varepsilon$, laddove non è mai definitivamente minore o eguale a $l' - \varepsilon$.*

Ne segue:

IV. *Il minimo limite non è mai maggiore del massimo limite.*

Ed invero, comunque si assegni la quantità positiva ε , la variabile x è definitivamente maggiore di $l' - \varepsilon$, ed è definitivamente minore di $l'' + \varepsilon$, ma allora, in virtù della proposizione I, la variabile x riesce definitivamente maggiore di $l' - \varepsilon$, simultaneamente, minore di $l'' + \varepsilon$. Si ha dunque, comunque si assegni la quantità positiva ε ,

$$l' - \varepsilon < l'' + \varepsilon,$$

e perciò

$$l' \leq l''.$$

Dimostriamo anche che:

V. *Le proprietà per il minimo limite e per il massimo limite rispettivamente espresse dai teoremi II e III, determinano univocamente tali limiti.*

Supponiamo, invero, che per un certo numero h' si verifichi la proprietà espressa, per l' , dal teorema II. Comunque si assegni una quantità positiva ε , si potrà allora determinare un'operazione O tale che per tutte le seguenti ad essa si abbia

$$(3) \quad x > h' - \varepsilon,$$

ma, poichè la x non è mai definitivamente $\geq l' + \varepsilon$, nelle indicate operazioni di (O) se ne può trovare almeno una per cui riesce

$$(4) \quad x < l' + \varepsilon.$$

Adunque, per un'operazione seguente ad O (almeno per una) varranno simultaneamente la (3) e la (4), e perciò sarà

$$l' + \varepsilon > h' - \varepsilon,$$

onde segue, per l'arbitrarietà di ε , $l' \geq h'$. Allo stesso modo, scambiando l' con h' , si deduce che $h' \geq l'$, e deve perciò essere, come volevamo dimostrare, $l' = h'$.

Riassumendo, possiamo dunque enunciare il teorema:

VI. *Data una variabile x , se l'insieme numerico da essa descritto riesce definitivamente limitato, esistono sempre due ben determinati numeri, il minimo limite ($\lim'x$) e il massimo limite ($\lim''x$) di esse ($\lim''x \geq \lim'x$) verificanti, rispettivamente, le proprietà espresse dai teoremi II e III.*

Supponiamo, in secondo luogo, che non si verifichi l'ipotesi del teorema ora enunciato.

Se l'insieme numerico $X[O]$ non è mai definitivamente limitato superiormente, se, cioè, comunque si scelga un'operazione $\overset{*}{O}$ di $[O]$, l'insieme numerico $X(\overset{*}{O})$, descritto dalla variabile x al variare dell'operazione O in $(\overset{*}{O})$, non è mai limitato superiormente, si dice che *il massimo limite di x è $+\infty$ e si scrive*

$$(5) \quad \lim''x = +\infty.$$

Scrivendo dunque la (5) si asserisce che, comunque si assegni un numero positivo K , la variabile x non diviene mai definitivamente $\leq K$, cioè che, per qualunque operazione O di $[O]$, se ne possono sempre trovare delle seguenti ad essa, il cui risultato è maggiore di K .

Analogamente: Se l'insieme $X[O]$ non è mai definitivamente li-

mitata inferiormente, si dice che *il minimo limite di x è $-\infty$ e si scrive*

$$(6) \quad \lim'x = -\infty.$$

Le (5) e (6) si possono simultaneamente presentare (v. Esempi), ma supponiamo ora che, sussistendo la (6), non si verifichi la (5), ed esista quindi un'operazione $\overset{*}{O}$ di $[O]$ per cui l'insieme numerico $X(\overset{*}{O})$ sia limitato superiormente. Essendo k_2 un numero determinato si avrà

$$x \leq k_2 \text{ se } O \text{ è in } (\overset{*}{O}).$$

Variando O in $(\overset{*}{O})$, consideriamo l'insieme numerico $X(O)$. L'estremo inferiore di tale insieme è $-\infty$, mentre il suo estremo superiore $x_2(O)$ è un numero finito $\leq k_2$. Sia X_2 l'insieme numerico descritto da $x_2(O)$ al variare di O in $(\overset{*}{O})$, due ipotesi sono ora possibili :

a) l'insieme X_2 (che è limitato superiormente) è limitato inferiormente,

b) l'insieme X_2 non è limitato inferiormente.

Nell'ipotesi *a)*, fatta la posizione (2), il numero l'' , così definito, chiamasi, di nuovo, *il massimo limite di x* , ed esso possiede, evidentemente, le proprietà caratteristiche espresse nel teorema III.

Nell'ipotesi *b)*, si pone

$$\lim''x = -\infty.$$

In tale ipotesi, comunque si assegni un numero negativo $-K$, si può trovare un numero di X_2 minore di $-K$, cioè un'operazione O di $(\overset{*}{O})$ per la quale è $x_2(O) < -K$, e si ha quindi

$$x < -K, \text{ per ogni operazione seguente alla } O;$$

in altre parole, la variabile x diventa e rimane minore di ogni quantità negativa, comunque assegnata.

Analogamente, si vede che, sussistendo la (5) e non la (6), due casi sono possibili: o esiste un numero finito l' , che si chiamerà di nuovo *il minimo limite di x* , presentante le proprietà caratteristiche espresse dal teorema II, oppure avviene che la variabile x è definitivamente maggiore di ogni quantità positiva, comunque assegnata, ed allora si scrive

$$\lim'x = +\infty.$$

Riassumendo i risultati della discussione fatta nel presente articolo, se si conviene di dire che $+\infty$ è maggiore di $-\infty$ che ogni nu-

mero k è maggiore di $-\infty$ ed è minore di $+\infty$, scrivendo $+\infty > -\infty$, $+\infty > k > -\infty$, possiamo enunciare il seguente teorema:

VII. Una variabile qualsivoglia x ha sempre un determinato massimo limite e un determinato minimo limite (finiti o infiniti). Indicati questi, rispettivamente, con $\lim'x$ e $\lim''x$, si ha sempre

$$\lim''x \geq \lim'x,$$

e sussistono le seguenti possibilità

$\lim''x =$ quantità finita,	$\lim'x =$ quantità finita,
$=$ quantità finita,	$= -\infty$,
$= +\infty$,	$=$ quantità finita,
$= +\infty$,	$= -\infty$,
$= -\infty$,	$= -\infty$,
$= +\infty$,	$= +\infty$.

I limiti $\lim'x$ e $\lim''x$, quando sono finiti, presentano le proprietà caratteristiche enunciate dai teoremi II e III. Se $\lim''x = +\infty$, l'insieme numerico $X[O]$ descritto dalla variabile x non è mai definitivamente limitato superiormente; se $\lim'x = -\infty$, lo stesso insieme non è mai definitivamente limitato inferiormente. Se $\lim''x = -\infty$, la variabile x è definitivamente minore di ogni numero, comunque assegnato; se $\lim'x = +\infty$, la variabile x è definitivamente maggiore di ogni numero, comunque assegnato.

Esempi. Nei seguenti esempi si riscontrano le possibilità indicate dal teorema ora enunciato.

Nell'insieme $[O]$ poniamo tutte e sole le operazioni consistenti nel prendere un punto u , diverso dall'origine, dell'asse delle u , e nel calcolare le quantità

$$a) \quad x = (1 + u^2) \operatorname{sen} \frac{1}{u},$$

$$b) \quad x = \frac{1}{u^2} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{u},$$

$$c) \quad x = \frac{1}{u} \operatorname{sen} \frac{1}{u},$$

$$d) \quad x = \frac{1}{u^2}.$$

Per un'operazione O' di $[O]$, relativa al punto u' , diremo seguenti

tutte quelle che si riferiscono a punti u per i quali è $|u| < |u'|$. Si ha allora :

nel caso <i>a</i>)	$\lim''x = +1,$	$\lim'x = -1,$
nel caso <i>b</i>)	$= +\infty,$	$= 0,$
nel caso <i>c</i>)	$= +\infty,$	$= -\infty,$
nel caso <i>d</i>)	$= +\infty,$	$= +\infty.$

6. Primi teoremi sui limiti. — Una variabile ordinata y si dice *subordinata* ad un'altra variabile ordinata x , quando, detti $[\Omega]$ e $[O]$ i due insiemi ordinati di operazioni, dalle quali, rispettivamente, risultano le due variabili, si ha che:

a) ogni operazione di $[\Omega]$ appartiene a $[O]$, e quindi l'insieme numerico $Y[\Omega]$ descritto dalla y , è contenuto nell'insieme numerico $X[O]$ descritto dalla x ;

b) comunque si prenda Ω in $[\Omega]$, ogni operazione seguente alla Ω in $[\Omega]$ è anche seguente alla Ω in $[O]$, e quindi l'insieme numerico $Y(\Omega)$ è contenuto nell'insieme numerico $X(\Omega)$;

c) ogni operazione di $[O]$ ha delle seguenti in $[\Omega]$.

Sussiste il teorema:

I. Se la variabile y è subordinata alla variabile x , fra i loro limiti intercedono le relazioni:

$$(1) \quad \lim'x \leq \lim'y \leq \lim''y \leq \lim''x.$$

Per dimostrare il teorema, supporremo, ad esempio, che l'insieme $X[O]$ sia definitivamente limitato, e diremo l' e l'' i valori (finiti) di $\lim'x$ e di $\lim''x$. Comunque si assegni un numero positivo ε , si potrà allora trovare un'operazione $\overset{*}{O}$ di $[O]$, tale che si abbia

$$l' - \varepsilon < x < l'' + \varepsilon, \text{ se } \overset{*}{O} \rightarrow O,$$

cioè se il numero x appartiene a $X(\overset{*}{O})$. Sia $\overset{*}{\Omega}$ una seguente di $\overset{*}{O}$ in $[\Omega]$, l'insieme numerico $Y(\overset{*}{\Omega})$ è contenuto in $X(\overset{*}{O})$, e pertanto possiamo dire che l'insieme $Y[\Omega]$ è pur esso definitivamente limitato, e che inoltre si ha

$$l' - \varepsilon < y < l'' + \varepsilon, \text{ se } \Omega \text{ è in } (\overset{*}{\Omega}).$$

Ne segue

$$l' - \varepsilon \leq \lim'y \leq \lim''y \leq l'' + \varepsilon,$$

e quindi, data l'arbitrarietà di ε , la relazione (1).

Passiamo ora all'importante concetto di *variabili ordinate in corrispondenza*. Siano x_1, x_2, \dots, x_n , n variabili ordinate, risultanti, rispettivamente, dagli insiemi ordinati di operazioni $[O_1], [O_2], \dots, [O_n]$. Quelle variabili si dicono *in corrispondenza* se fra le operazioni di $[O_1]$, di $[O_2], \dots$, di $[O_n]$, vi è una corrispondenza che gode delle seguenti particolarità:

a) ogni operazione O_i di $[O_i]$ ha sempre una ed una sola corrispondente O_j di $[O_j]$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$);

b) se O_i e O_j hanno una comune corrispondente in $[O_k]$, esse sono corrispondenti fra loro;

c) la corrispondenza fra le operazioni di $[O_i]$ e di $[O_j]$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) trasforma operazioni seguenti in $[O_i]$ in operazioni seguenti in $[O_j]$.

Un gruppo (O_1, O_2, \dots, O_n) di operazioni, appartenenti, rispettivamente, ad $[O_1]$, ad $[O_2], \dots$, ad $[O_n]$, si dirà di *operazioni corrispondenti* se esse sono tali quando vengono prese due a due. Un gruppo di operazioni corrispondenti è ben determinato quando si fissi una qualsivoglia delle sue operazioni.

Un gruppo di valori $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, per le variabili x_1, x_2, \dots, x_n , in corrispondenza, si dice di *valori corrispondenti*, se le operazioni O'_1, O'_2, \dots, O'_n dalle quali, rispettivamente, risultano quei valori costituiscono un gruppo di operazioni corrispondenti.

Sussiste il teorema:

II. — *Se le due variabili x_1 e x_2 sono in corrispondenza, e se, per ogni coppia (x_1, x_2) di valori corrispondenti, si ha*

$$x_1 \leq x_2, \text{ oppure } x_1 < x_2,$$

fra i loro limiti sussisteranno le relazioni:

$$\lim' x_1 \leq \lim' x_2, \quad \lim'' x_1 \leq \lim'' x_2.$$

Dimostriamo, ad esempio, che se $\lim'' x_1$ e $\lim'' x_2$ sono entrambi finiti ed hanno, rispettivamente, i valori l_1'' e l_2'' , si ha $l_1'' \leq l_2''$. Comunque si assegni una quantità positiva ε , esiste un'operazione $\overset{*}{O}_2$ di $[O_2]$, per la quale si ha

$$x_2 < l_2'' + \varepsilon, \quad \text{se } \overset{*}{O}_2 \rightarrow O_2.$$

Diciamo $\overset{*}{O}_1$ l'operazione di $[O_1]$ corrispondente alla $\overset{*}{O}_2$, se è

$\overset{*}{O}_1 \rightarrow O_1$ ed O_2 è la corrispondente di O_1 , si ha pure $\overset{*}{O}_2 \rightarrow O_2$, e quindi,

se $\overset{*}{O}_1 \rightarrow O_1$, $x_1 \leq x_2 < l_2'' + \varepsilon$, oppure $x_1 < x_2 < l_2'' + \varepsilon$,
ne segue

$$l_1'' \leq l_2'' + \varepsilon,$$

e quindi, data l'arbitrarietà di ε , $l_1'' \leq l_2''$.

È, dopo ciò, immediato il corollario seguente:

III. — Se le variabili x_1, x_2, x_3 sono in corrispondenza, e se per ogni terna (x_1, x_2, x_3) di valori corrispondenti, si ha

$$x_1 \leq x_3 \leq x_2,$$

da ciascuna delle eguaglianze

$$\lim' x_1 = \lim' x_2, \quad \lim'' x_1 = \lim'' x_2,$$

si deduce rispettivamente, ciascuna delle seguenti

$$\lim' x_1 = \lim' x_3, \quad \lim'' x_1 = \lim'' x_3$$

7. Variabili regolari.— Diremo *regolare* una variabile ordinata x quando i due suoi limiti coincidono. Ciascuno di questi si rappresenterà allora con la notazione $\lim x$ e si chiamerà *limite* della variabile. Per il limite di una variabile regolare possono presentarsi i seguenti tre casi:

$$\begin{aligned} \lim x &= \text{quantità finita,} \\ &= +\infty, \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Nel primo caso si dice che la variabile x è *convergente*. Negli ultimi due si dice che la variabile è *divergente*, e precisamente, *divergente positivamente* nel secondo caso, *divergente negativamente* nel terzo.

Se si ricordano le proprietà caratteristiche dei due limiti per una variabile, espresse dai teoremi II e III del n° 5, si può enunciare il seguente teorema:

I. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una variabile ordinata x sia convergente ed abbia per limite il numero l , è che, comunque si assegni il numero positivo ε , la variabile sia definitivamente compresa fra i numeri $l - \varepsilon$ e $l + \varepsilon$, si possa cioè determinare un'operazione $\overset{*}{O}$ dell'insieme ordinato $[O]$ di operazioni, dalle quali risulta*

la variabile, tale che sia

$$|x - l| < \varepsilon \quad \text{se} \quad \bar{O} \rightarrow O.$$

In questo teorema è espressa una *definizione* di limite (finito) per una variabile, che è quella che comunemente si adotta.

Il fatto che la variabile x converge ed ha per limite il numero l , si suole indicare dicendo anche che: *la variabile x converge verso l* , oppure *tende verso l* o *tende ad l* .

Diamo alcuni istruttivi esempi di variabili convergenti o divergenti. Se nell'insieme $[O]$ poniamo tutte e sole le operazioni consistenti nel prendere un punto u , diverso dall'origine, dell'asse delle u , e nel calcolare le quantità:

$$a) \quad x = u \operatorname{sen} \frac{1}{u},$$

$$b) \quad x = \frac{1}{u^2},$$

$$c) \quad x = \frac{-1}{u^2},$$

e se, per un'operazione O' di $[O]$, relativa al punto u' , diciamo seguenti tutte quelle che si riferiscono a punti di u per i quali è $|u| < |u'|$, si ha:

$$\text{nel caso } a) \quad \lim x = 0,$$

$$\text{nel caso } b) \quad \lim x = +\infty,$$

$$\text{nel caso } c) \quad \lim x = -\infty.$$

È di importanza grandissima nelle applicazioni il teorema:

II. Criterio di convergenza di Cauchy. *Data una variabile ordinata x , risultante dalle operazioni dell'insieme ordinato $[O]$, condizione necessaria e sufficiente affinché essa sia convergente è che, comunque si assegni un numero positivo ε , si possa determinare un'operazione \bar{O} di $[O]$ tale che per i valori x' e x'' della variabile, ottenuti da due quali si vogliano operazioni O' e O'' seguenti alla \bar{O} si abbia sempre:*

$$|x' - x''| < \varepsilon.$$

La condizione è necessaria. Ed infatti, se $\lim x = l$, comunque

si assegni la quantità positiva ε , la variabile x è definitivamente compresa fra $l - \frac{\varepsilon}{3}$ e $l + \frac{\varepsilon}{3}$.

La condizione è sufficiente. Ed infatti, se fissiamo un'operazione O' seguente alla O , si ha

$$|x' - x| < \varepsilon \quad \text{se} \quad O' \rightarrow O,$$

l'insieme numerico $X(O')$ è quindi limitato, cioè il totale insieme numerico $X[O]$, descritto dalla variabile x è, intanto, definitivamente limitato. La variabile x ammette pertanto un massimo limite ed un minimo limite finiti. Siano l'' e l' i valori di questi limiti. Devo dimostrare che $l'' = l'$. Se fosse $l'' > l'$, posto $l'' - l' = 3\sigma$, comunque si prenda un'operazione O di $[O]$, ne esisterebbe una seguente O'' per il cui risultato x'' si ha:

$$x'' > l'' - \sigma,$$

ed una seguente O' per il cui risultato x' si ha:

$$x' < l' + \sigma,$$

e quindi esisterebbero sempre due operazioni O' e O'' , seguenti alla O , per i risultati delle quali si ha

$$x'' - x' > \sigma,$$

contrariamente all'ipotesi.

Passiamo ora a considerare particolari tipi di variabili, le cosiddette *variabili monotone*.

Una variabile ordinata dicesi *non decrescente* (*non crescente*) se, comunque si prendano due operazioni O' e O'' dell'insieme ordinato $[O]$ di operazioni dalle quali risulta la variabile, la relazione

$$O' \rightarrow O''$$

ha di conseguenza, per i risultati x' e x'' di esse, la relazione

$$x' \leq x'' \quad (x' \geq x'').$$

Una variabile dicesi *crescente* (*decrescente*) se, comunque si prendano due distinte operazioni O' e O'' di $[O]$, la relazione

$$O' \rightarrow O''$$

ha di conseguenze, per i risultati x' e x'' di esse, la relazione

$$x' < x'' \quad (x' > x'').$$

Ogni variabile x che sia crescente o non decrescente (decrecente o non crescente) dicesi *monotona*. Orbene, per una tale variabile sussiste il seguente importante teorema:

III. *Ogni variabile definitivamente monotona è regolare. Ed è convergente se l'insieme numerico dei suoi valori è definitivamente limitato, divergente nell'altro caso.*

Supponiamo, ad esempio, che la variabile x sia definitivamente non decrescente. Esisterà un'operazione \bar{O} di $[O]$ tale che, se O' e O'' appartengono ad (\bar{O}) , la relazione $O' \rightarrow O''$ ha di conseguenza, per i risultati x' e x'' di esse, la relazione $x' \leq x''$. Fissata l'operazione O' di (\bar{O}) si avrà dunque

$$x \geq x' \text{ se } O \text{ è in } (O');$$

l'insieme numerico $X[O]$ di tutti i valori assunti dalla variabile è dunque definitivamente limitato inferiormente. Pertanto, se esso non è definitivamente limitato, non lo sarà superiormente. In tal caso, comunque si scelgano un numero positivo K e un'operazione O di $[O]$, si potrà sempre trovare un'operazione a quella seguente il cui risultato supera K . Ciò avverrà anche per l'operazione \bar{O} , e se, per $\bar{O} \rightarrow O'$, si ha:

$$x' > K,$$

poichè $x \geq x'$ per $\bar{O} \rightarrow O' \rightarrow O$, si ricava

$$x > K \text{ se } O' \rightarrow O,$$

ciò che dimostra che la variabile x è divergente positivamente.

Supponiamo ora che l'insieme $X[O]$ sia definitivamente limitato, e quindi, definitivamente limitato superiormente. Esiste allora una operazione \bar{O} di $[O]$ tale che l'insieme numerico $X(\bar{O})$ è limitato superiormente. Sia O' una comune operazione seguente alla \bar{O} e alla \bar{O} . L'insieme $X(O')$, contenuto in $X(\bar{O})$, è pur esso limitato superiormente, diciamone l l'estremo superiore, dico che si ha:

$$\lim x = l.$$

Ed invero, comunque si prenda una quantità positiva ε , esisterà un'operazione O'' di (O') , per il cui risultato x'' si ha:

$$l \geq x'' > l - \varepsilon,$$

ma per $O' \rightarrow O'' \rightarrow O$ riesce $x \geq x''$, e quindi

$$l \geq x > l - \varepsilon, \text{ se } O \text{ è in } (O''),$$

ciò che dimostra quanto si voleva.

I teoremi I, II e III dell'articolo 6, danno luogo ai seguenti per le variabili regolari.

IV. *Se la variabile x è regolare, ogni altra variabile ad essa subordinata è altresì regolare, ed ha lo stesso limite.*

V. *Se le variabili regolari x_1 e x_2 sono in corrispondenza e se per ogni coppia (x_1, x_2) di valori corrispondenti si ha*

$$x_1 \leq x_2, \text{ oppure } x_1 < x_2,$$

fra i loro limiti sussiste la relazione

$$\lim x_1 \leq \lim x_2.$$

VI. *Le variabili x_1, x_2, x_3 siano in corrispondenza, e per ogni terna (x_1, x_2, x_3) di valori corrispondenti si abbia*

$$x_1 \leq x_3 \leq x_2;$$

allora se le variabili x_1 e x_2 sono regolari ed hanno lo stesso limite, sarà pure regolare la x_3 ed avrà il medesimo limite.

Aggiungiamo qui i teoremi:

VII. *Se una variabile è definitivamente monotona, tale è pure ogni altra variabile ad essa subordinata.*

VIII. *Se la variabile x converge verso il numero l , la variabile $|x|$ converge verso $|l|$.*

Quest'ultimo teorema è immediata conseguenza della relazione

$$||x| - |l|| \leq |x - l|.$$

8. Esercizio. — Si consideri il particolarissimo caso in cui i considerati insieme di operazioni formano sempre delle successioni e si enuncino i teoremi ottenuti, negli articoli 5, 6 e 7, facendo esclusivamente menzione del numero d'ordine delle operazioni di ciascun insieme (cfr. *Algebra*, § 1 del Cap. VI).

La completa risoluzione dell'esercizio è *immediata*. Notiamo anzitutto il teorema:

I. Se una successione

$$(1) \quad x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots,$$

è definitivamente limitata superiormente (inferiormente) essa stessa è limitata superiormente (inferiormente).

Ed invero, se la successione (1) è definitivamente limitata superiormente, esistono un indice ν ed un numero k tali che si ha

$$x^{(n)} < k, \text{ per } n > \nu.$$

Ne segue che, detto K il più grande fra i $\nu + 1$ numeri $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(\nu)}, k$, si avrà che ogni numero della successione non è superiore a K .

Il teorema VI del n.º 4 si enuncia così:

Data la successione (1) limitata, esistono sempre due ben determinati numeri: il minimo limite della variabile $x^{(n)}$ ($\lim' x^{(n)} = l'$) ed il massimo limite della stessa variabile ($\lim'' x^{(n)} = l''$). Tali limiti si dicono anche limiti della successione. Per essi si ha che: Comunque si assegni un numero positivo ε , si può determinare un indice ν tale, per $n > \nu$, si abbia sempre

$$l' - \varepsilon < x^{(n)} < l'' + \varepsilon,$$

laddove, per ogni indice n , se ne possono trovare due altri maggiori n' e n'' tali che sia

$$x^{(n')} < l' + \varepsilon, \quad x^{(n'')} > l'' - \varepsilon.$$

Il concetto di variabile subordinata ad un'altra, si traduce, per le successioni, al modo seguente: Se

$$i_1, i_2, \dots, i_r, \dots,$$

è una successione crescente di numeri naturali, la successione

$$x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, \dots, x^{(i_r)}, \dots,$$

dicesi subordinata alla successione (1).

Le p successioni di operazioni $[O_1], [O_2], \dots, [O_p]$ siano in corrispondenza, e si abbia

$$[O_1] \equiv (O_1^{(1)}, O_1^{(2)}, \dots, O_1^{(n)}, \dots)$$

Potremo sempre denotare con $O_i^{(n)}$ l'operazione della successione $[O_i]$, corrispondente alla $O_1^{(n)}$ in $[O_1]$, si avrà

$$[O_i] \equiv (O_i^{(1)}, O_i^{(2)}, \dots, O_i^{(n)}, \dots), \quad (i = 2, 3, \dots, p).$$

Indichiamo con $x_i^{(n)}$ il risultato dell'operazione $O_i^{(n)}$ della successione $[O_i]$. Le p variabili $x_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, \dots, p$) sono in corrispondenza e la p^{pla} di valori $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})$ rappresenta, per ogni valore di n , una p^{pla} di valori corrispondenti.

Si potranno dopo ciò subito enunciare, nella maniera ora voluta, i teoremi del N. 6 per le successioni.

Il teorema I del n. 7 si enuncia :

Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots$, sia convergente ed abbia per limite l , è che, comunque si assegni un numero positivo ε , si possa determinare un indice ν tale che sia:

$$|x^{(n)} - l| < \varepsilon \text{ per } n > \nu.$$

Il teorema II del n. 6, esprimente il criterio di convergenza di **Cauchy**, si enuncia:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots$ sia convergente è che, comunque si assegni un numero positivo ε , si possa determinare un indice ν tale che, presi due quali si vogliano numeri naturali p e q , maggiori di ν , si abbia sempre:

$$|x^{(p)} - x^{(q)}| < \varepsilon.$$

Ecc.

9*. Ulteriori teoremi sui limiti. — Si abbiano n variabili ordinate x_1, x_2, \dots, x_n , in corrispondenza, rispettivamente risultanti dalle operazioni degli insiemi ordinati $[O_1], [O_2], \dots, [O_n]$. Per ogni n^{pla} , x_1, x_2, \dots, x_n , di valori corrispondenti delle variabili, facciamo la somma $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ di quei valori. L'operazione che dà per risultato x è la seguente: Si prende un'operazione O_1 in $[O_1]$, se ne trovano le corrispondenti O_2, O_3, \dots, O_n , rispettivamente in $[O_2]$, in $[O_3]$, ..., in $[O_n]$ e si fa la somma $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ dei risultati della operazione O_1 e delle sue corrispondenti. Detta O l'operazione da cui risulta x , per essa adotteremo la notazione $O_1 + O_2 + \dots + O_n$. Essendo (O_1, O_2, \dots, O_n) e $(O_1', O_2', \dots, O_n')$ due n^{pla} di operazioni corrispondenti, porremo

$$O_1 + O_2 + \dots + O_n \rightarrow O_1' + O_2' + \dots + O_n',$$

se $O_1 \rightarrow O_1'$ (e quindi $O_2 \rightarrow O_2', \dots, O_n \rightarrow O_n'$).

La quantità $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ è dunque una variabile ordinata, e l'insieme ordinato di operazioni, da cui essa risulta, è da denotarsi col simbolo $[O_1 + O_2 + \dots + O_n]$.

La variabile $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, si dice la *somma* delle n variabili in corrispondenza x_1, x_2, \dots, x_n .

Ora in molte questioni di Analisi matematica giova conoscere in quali relazioni si trovino i limiti di due o più variabili, in corrispondenza, con i limiti della loro somma. Tali relazioni vogliamo trovare in questo articolo.

Supponiamo, anzitutto, definitivamente limitati gli insiemi $X_1 [O_1]$, $X_2 [O_2], \dots, X_n [O_n]$, dei valori assunti, rispettivamente, dalle variabili x_1, x_2, \dots, x_n . Poniamo:

$$\lim' x_i = l'_i, \lim'' x_i = l''_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Comunque si assegni un numero positivo ε , si potrà determinare un'operazione $O_i^{(\varepsilon)}$ in $[O_i]$ tale che sia:

$$l'_i - \frac{\varepsilon}{n} < x_i < l''_i + \frac{\varepsilon}{n}, \text{ se } O_i^{(\varepsilon)} \rightarrow O_i,$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Sia

$$O_1^{(\varepsilon)}, O_2^{(\varepsilon)}, \dots, O_i^{(\varepsilon)}, \dots, O_n^{(\varepsilon)},$$

la n^{pla} di operazioni corrispondenti determinata dalla $O_i^{(\varepsilon)}$. Diciamo \check{O}_i un'operazione di $[O_i]$, comune seguente alle operazioni $O_1^{(1)}, O_1^{(2)}, \dots, O_1^{(n)}$ e $(\check{O}_1, \check{O}_2, \dots, \check{O}_n)$ la n^{pla} di operazioni corrispondenti determinata dalla \check{O}_i . Si avrà allora:

$$l'_i - \frac{\varepsilon}{n} < x_i < l''_i + \frac{\varepsilon}{n} \text{ se } \check{O}_i \rightarrow O_i,$$

e quindi

$$-\varepsilon + \sum l'_i < \sum x_i < +\varepsilon + \sum l''_i,$$

se

$$\check{O}_1 + \check{O}_2 + \dots + \check{O}_n \rightarrow O_1 + O_2 + \dots + O_n.$$

Ciò dimostra che l'insieme dei valori della variabile $x = \sum x_i$ è definitivamente limitato e che sussistono le relazioni:

$$\sum \lim' x_i \leq \lim' \sum x_i \leq \lim'' \sum x_i \leq \sum \lim'' x_i.$$

Poniamo

$$\lim' \Sigma x_i = l', \quad \lim'' \Sigma x_i = l''.$$

Si può trovare una n^{pla} di operazioni corrispondenti $(O'_1, O'_2, \dots, O'_n)$ per le quali si abbia

$$l' - \varepsilon < \Sigma x_i < l' + \varepsilon,$$

$$l'_i - \frac{\varepsilon}{n} < x_i < l'_i + \frac{\varepsilon}{n},$$

se

$$O'_1 \rightarrow O_1, \quad O'_2 \rightarrow O_2, \dots, O'_n \rightarrow O_n.$$

D'altra parte, fissato l'indice k , si può trovare un'operazione O'_k seguente alla O'_k per il cui risultato x'_k si ha

$$x'_k < l'_k + \frac{\varepsilon}{n},$$

ed un'altra operazione O''_k seguente sempre alla O'_k , per il cui risultato x''_k si ha

$$l''_k - \frac{\varepsilon}{n} < x''_k$$

Dette (O_1, O_2, \dots, O_n) , $(O''_1, O''_2, \dots, O''_n)$ le n^{ple} di operazioni corrispondenti, determinate, rispettivamente, dalla O'_k e dalla O''_k e $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ le relative n^{ple} di valori corrispondenti delle variabili, si avrà

$$x'_1 < l'_1 + \frac{\varepsilon}{n},$$

$$x''_1 > l''_1 - \frac{\varepsilon}{n},$$

.....

.....

$$x'_{k-1} < l'_{k-1} + \frac{\varepsilon}{n},$$

$$x''_{k-1} > l''_{k-1} - \frac{\varepsilon}{n},$$

$$x'_k < l'_k + \frac{\varepsilon}{n},$$

$$x''_k > l''_k - \frac{\varepsilon}{n},$$

$$x'_{k+1} < l'_{k+1} + \frac{\varepsilon}{n},$$

$$x''_{k+1} > l''_{k+1} - \frac{\varepsilon}{n},$$

.....

.....

$$x'_n < l'_n + \frac{\varepsilon}{n},$$

$$x''_n > l''_n - \frac{\varepsilon}{n},$$

e quindi

$$l' - \varepsilon < \sum x_i < l'_k + \sum_k l''_i + \varepsilon,$$

$$l''_k + \sum_k l'_i - \varepsilon < \sum x_i < l'' + \varepsilon,$$

con evidente significato del simbolo \sum_k . E per l'arbitrarietà di ε , ne

segue:

$$\begin{aligned} \lim' \sum x_i &\leq \lim' x_k + \sum_k \lim'' x_i, \\ \lim'' x_k + \sum_k \lim' x_i &\leq \lim'' \sum x_i. \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Si ha dunque il teorema:

I. *Se le variabili x_1, x_2, \dots, x_n descrivono insiemi definitivamente limitati, anche la variabile loro somma descrive un tale insieme, e fra i limiti delle variabili e della loro somma, sussistono le seguenti $2n + 2$ relazioni:*

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum \lim' x_i \leq \lim' \sum x_i \leq \lim'' \sum x_i \leq \sum \lim'' x_i, \\ (2) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \lim' \sum x_i \leq \lim' x_k + \sum_k \lim'' x_i, \\ & \lim'' x_k + \sum_k \lim' x_i \leq \lim'' \sum x_i, \end{aligned} \right. \\ & (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Le $2n + 2$ relazioni (1) e (2), nel caso di due variabili (x_1 e x_2) descrittive di insiemi definitivamente limitati, sono in numero di sei, e queste possono scriversi al modo seguente:

$$l'_1 + l'_2 \leq l' \leq \frac{l'_1 + l'_2}{l''_1 + l''_2} \leq l'' \leq l''_1 + l''_2.$$

Dalle (1) segue immediatamente che: *Se ciascuna delle variabili x_1, x_2, \dots, x_n , in corrispondenza, è convergente, è pure convergente la variabile loro somma, e questa ha per limite la somma dei limiti di quelle.*

Dalle (2) segue immediatamente che: *Se le variabili, in corrispondenza, x_1, x_2, \dots, x_n descrivono insiemi definitivamente limitati, e le variabili $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ sono convergenti, si ha:*

$$\lim' \sum x_i = \lim' x_k + \sum_k \lim' x_i,$$

$$\lim'' \sum x_i = \lim'' x_k + \sum_k \lim'' x_i.$$

Passiamo ora, in secondo luogo, a considerare il caso in cui non tutti gli insiemi numerici descritti dalle variabili, in corrispondenza, x_1, x_2, \dots, x_n sono limitati. Lasciamo allo studioso la cura di applicare i ragionamenti che precedono per dimostrare, nel caso ora indicato, le proposizioni seguenti.

II. Se

$$\lim x_1 = \lim x_2 = \dots = \lim x_k = +\infty,$$

$$\lim' x_i = \text{quantità finita, per } i \geq k + 1,$$

si ha

$$\lim \Sigma x_i = +\infty.$$

Se

$$\lim x_1 = \lim x_2 = \dots = \lim x_k = -\infty,$$

$$\lim'' x_i = \text{quantità finita, per } i \geq k + 1,$$

si ha

$$\lim \Sigma x_i = -\infty.$$

III. Se

$$\lim'' x_k = +\infty, \lim' x_i = \text{quantità finita, per } i \neq k,$$

si ha

$$\lim'' \Sigma x_i = +\infty.$$

Se

$$\lim' x_k = -\infty, \lim'' x_i = \text{quantità finita per } i \neq k,$$

si ha

$$\lim' \Sigma x_i = -\infty.$$

Si osservi ancora che se, per definizione, poniamo

$$-(+\infty) = -\infty, \quad -(-\infty) = +\infty,$$

si ha, in ogni caso, per qualunque variabile,

$$(3) \quad \lim'(-x) = -\lim'' x.$$

Finiremo il presente articolo, considerando la variabile differenza di due altre in corrispondenza. Abbiansi due tali variabili x_1 e x_2 e, per ogni coppia (x_1, x_2) di valori corrispondenti, si faccia la differenza $x_1 - x_2$ di questi valori. Denoteremo con $O_1 - O_2$ l'operazione che ha per risultato $x_1 - x_2$ e porremo

$$O_1 - O_2 \rightarrow O_1' - O_2',$$

se $O_1 \rightarrow O_1'$ (e quindi $O_2 \rightarrow O_2'$). La variabile $x = x_1 - x_2$, risultante dalle operazioni dell'insieme ordinato $[O_1 - O_2]$, si dice la *differenza* delle due variabili in corrispondenza x_1 e x_2 . La variabile $x = x_1 - x_2$ è anche la somma delle due variabili x_1 e $-x_2$, e pertanto, in virtù di I e della (3) si ha:

IV. *Se le variabili in corrispondenza x_1 e x_2 descrivono insiemi definitivamente limitati, anche la loro differenza descrive un tale insieme, e fra i limiti (l_1', l_1'' e l_2', l_2'') delle variabili e i limiti (l', l'') della loro differenza, sussistono le sei relazioni:*

$$l_1' - l_2'' \leq l' \leq \frac{l_1' - l_2'}{l_1'' - l_2''} \leq l'' \leq l_1'' - l_2'.$$

In particolare: Se ciascuna delle due variabili x_1 e x_2 è convergente, è pure convergente la loro differenza, ed ha per limite la differenza dei limiti delle variabili x_1 e x_2 . Se le variabili x_1 e x_2 descrivono insiemi definitivamente limitati e la variabile x_2 è convergente si ha

$$\lim'(x_1 - x_2) = \lim' x_1 - \lim x_2, \quad \lim''(x_1 - x_2) = \lim'' x_1 - \lim x_2.$$

In un prossimo paragrafo, ove verrà trattata la teoria delle *funzioni continue di punto*, si troveranno i teoremi più generali sui limiti di quante si vogliano variabili convergenti in corrispondenza.

10. Infinitesimi ed infinitamente grandi. — Chiamasi *infinitesimo* ogni variabile convergente che ha per limite zero. Un infinitesimo x , o, come anche si dice, una *variabile infinitesima* x è dunque caratterizzata dalla circostanza che, comunque si assegni una quantità positiva ε , i valori del modulo di essa sono definitivamente al disotto di ε .

Dalla data definizione segue: *Condizione necessaria e sufficiente affinché una variabile x sia infinitesima è che tale sia la variabile $|x|$. Condizione necessaria e sufficiente affinché la variabile x converga verso l è che la variabile $x - l$ sia un infinitesimo.*

Chiamasi *infinitamente grande* ogni variabile il cui modulo è una variabile divergente. Un infinitamente grande, o, come anche si dice, una variabile infinitamente grande, è dunque caratterizzata dalla circostanza che, comunque si assegni un numero positivo K , i valori del modulo di essa sono definitivamente al disopra di K .

Evidentemente: *Il reciproco di ogni infinitesimo definitivamente non nullo è un infinitamente grande e viceversa.*

Sussistono i seguenti teoremi di immediata dimostrazione.

I. *Se una variabile x riesce il prodotto di due variabili x_1 e x_2 in corrispondenza e se x_1 descrive un insieme definitivamente limitato e x_2 è infinitesima, la variabile x è essa pure infinitesima.*

II. *Se una variabile x riesce il prodotto di due variabili x_1 e x_2 in corrispondenza, e se il modulo di x_1 è definitivamente superiore ad un determinato numero positivo e x_2 è infinitamente grande, la variabile x è essa pure infinitamente grande.*

Si abbiano due variabili in corrispondenza x_1 e x_2 risultanti, rispettivamente, dalle operazioni degli insiemi ordinati $[O_1]$ e $[O_2]$. Supponiamo che la variabile x_2 sia definitivamente non nulla, che esista cioè un'operazione \bar{O}_2 di $[O_2]$, tale che, per $\bar{O}_2 \rightarrow O_2$, sia sempre $x_2 \neq 0$. Detta \bar{O}_1 la operazione di $[O_1]$ corrispondente ad \bar{O}_2 , limitiamoci a considerare, in ciascuno degli insiemi di operazioni $[O_1]$ e $[O_2]$, gli insiemi delle seguenti ad \bar{O}_1 e delle seguenti ad \bar{O}_2 , e continuiamo ad indicare con $[O_1]$ e con $[O_2]$ tali insiemi. Ciò posto, per ogni coppia (x_1, x_2) di valori corrispondenti, si faccia il rapporto $x_1 : x_2$ di questi valori. Denoteremo con $O_1 : O_2$ l'operazione che ha per risultato $x_1 : x_2$ e porremo

$$O_1 : O_2 \rightarrow O'_1 : O'_2,$$

se $O_1 \rightarrow O'_1$ (e quindi $O_2 \rightarrow O'_2$). La variabile $x = x_1 : x_2$, si chiama la *variabile rapporto* delle due variabili, in corrispondenza, x_1 e x_2 e l'insieme delle operazioni da cui essa risulta si potrà indicare con la notazione $[O_1 : O_2]$.

Si può dare, dopo ciò, la seguente

Definizione. Due infinitesimi o due infinitamente grandi x_1 e x_2 , in corrispondenza, nell'ipotesi che la variabile x_2 sia definitivamente non nulla, diconsi **dello stesso ordine** se la variabile $x = x_1 : x_2$ loro rapporto, è definitivamente conteuta entro un intervallo limitato, al quale sia esterno il valore zero, se cioè si ha:

$$\lim'(x_1 : x_2) = \text{quantità finita}, \quad \lim''(x_1 : x_2) = \text{quantità finita},$$

$$\lim'(x_1 : x_2) \cdot \lim''(x_1 : x_2) > 0.$$

Osserviamo che se x è un infinitesimo o un infinitamente grande e α è un qualunque numero positivo, anche x^α è un infinitesimo o un infinitamente grande. Ciò posto, si ha la seguente

Definizione. Se, dati due infinitesimi o due infinitamente grandi x_1 e x_2 , in corrispondenza, nell'ipotesi che la variabile x_2 sia definitivamente non nulla, esiste un numero positivo α tale che i due infinitesimi o i due infinitamente grandi x_1 e x_2^α hanno lo stesso ordine, si dice che x_1 è un infinitesimo o un infinitamente grande **d'ordine α rispetto a x_2** .

Pertanto, se x è un infinitesimo, definitivamente non nullo, e α è un numero positivo, x^α è un infinitesimo d'ordine α rispetto a x , e $\frac{1}{x^\alpha}$ è un infinitamente grande d'ordine α rispetto a $\frac{1}{x}$.

Nelle applicazioni, si presenta talvolta l'opportunità di confrontare più infinitesimi (infinitamente grandi) con un determinato infinitesimo (infinitamente grande) x , definitivamente non nullo, col quale quei primi possono porre in corrispondenza. La variabile x chiamasi allora **l'infinitesimo campione (l'infinitamente grande campione)** e diconsi **d'ordine α** quelli fra gli infinitesimi (infinitamente grandi) indicati che sono dello stesso ordine di x^α .

11. Variabile complessa. — Siano a_1, a_2, b_1, b_2 quattro numeri reali e si abbia $a_1 < a_2, b_1 < b_2$. Consideriamo nel piano (x, y) i punti $P_1(a_1, b_1)$ e $P_2(a_2, b_2)$. Chiamasi **dominio rettangolare** $(P_1, P_2) \equiv [(a_1, b_1); (a_2, b_2)]$ del piano (x, y) , il rettangolo R , a lati paralleli agli assi coordinati, luogo dei punti, del piano (x, y) , le coordinate dei quali soddisfano simultaneamente alle limitazioni

$$a_1 \leq x \leq a_2, \quad b_1 \leq y \leq b_2.$$

La lunghezza della diagonale $P_1 P_2$ del rettangolo R chiamasi anche il **diametro** del dominio rettangolare. Le differenze $a_2 - a_1, b_2 - b_1$ sono le **dimensioni** del dominio. I vertici $(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_2)$ del rettangolo R si dicono rispettivamente, il **vertice sud-ovest, sud-est, nord-est, nord-ovest** del dominio rettangolare; il vertice (a_1, b_1) dicesi anche l'**estremo inferiore** e il vertice (a_2, b_2) l'**estremo superiore** del dominio rettangolare. Il **contorno** o la **fron-**

tierra del dominio rettangolare è il contorno del rettangolo R . Un punto $P(x, y)$ del piano, si dirà *interno*, *esterno* o *sul contorno* del dominio rettangolare secondochè è interno, esterno o sul contorno del rettangolo R . I punti interni del dominio rettangolare (P_1, P_2) sono caratterizzati dalla proprietà, per le loro coordinate, di soddisfare simultaneamente alle limitazioni:

$$a_1 < x < a_2, \quad b_1 < y < b_2.$$

Ciò posto, rappresentiamo ogni numero complesso $z = x + iy$ sul piano complesso (x, y) di **Gauss**, mediante il punto di ascissa x e di ordinata y . Con l'aiuto di tale rappresentazione vogliamo ora dare i concetti fondamentali dei *limiti* per una *variabile complessa ordinata*.

Chiamasi *variabile complessa ordinata* il numero complesso che risulta dalla operazione variabile O di un insieme ordinato $[O]$ di operazioni. Sia $z = x + iy$ una variabile complessa ordinata. La quantità x è il risultato dell'operazione O_x , consistente nel fare l'operazione O e nel prendere la parte reale del risultato z di questa. La quantità y è il risultato dell'operazione O_y , consistente nel fare l'operazione O e nel prendere il coefficiente della parte immaginaria del risultato z di questa. Posto

$$O_x \rightarrow O'_x, \quad O_y \rightarrow O'_y,$$

se $O \rightarrow O'$, le operazioni O, O_x, O_y descrivono tre insiemi ordinati $[O], [O_x], [O_y]$ di operazioni in corrispondenza.

L'insieme numerico (di numeri complessi) $Z[O]$, descritto dalla variabile z , si dirà *definitivamente limitato*, se tali sono i due insiemi numerici (di numeri reali) $X[O_x], Y[O_y]$ descritti, rispettivamente, dalle variabili x e y .

Supposto definitivamente limitato l'insieme $Z[O]$, poniamo

$$\begin{aligned} \lim' x &= a', & \lim'' x &= a'', \\ \lim' y &= b', & \lim'' y &= b''; \end{aligned}$$

orbene, per definizione, i due numeri complessi

$$l' = a' + ib', \quad l'' = a'' + ib'',$$

si diranno, rispettivamente, il *minimo limite* ed il *massimo limite* della variabile z , e si scriverà

$$l' = \lim' z, \quad l'' = \lim'' z.$$

Si ha dunque, per definizione,

$$\lim'(x + iy) = \lim'x + i \lim'y, \quad \lim''(x + iy) = \lim''x + i \lim''y.$$

Le proprietà espresse dei teoremi II e III del n° 5 per il minimo limite ed il massimo limite di una variabile reale, danno luogo alle seguenti per i limiti di una variabile complessa:

I. *Comunque si assegni un dominio rettangolare che abbia i punti l' e l'' per punti interni, il punto z sarà definitivamente situato nell'interno di quel dominio.*

II. *Se riesce $a' < a''$ ($b' < b''$), comunque si assegni una retta verticale (orizzontale) che lasci da bande opposte i punti l' e l'' , il punto z non è mai definitivamente sulla retta, nè alla sinistra, nè alla destra (nè al disotto, nè al disopra).*

Lasciamo al lettore la cura di dimostrare che:

III. *Le proprietà per il minimo limite e per il massimo limite, espresse dai teoremi I e II, determinano univocamente tali limiti.*

Supponiamo ora che l'insieme numerico $Z[0]$ non sia mai definitivamente limitato. Possono allora presentarsi 35 casi diversi, tanti quante sono le disposizioni con ripetizione, meno una, di sei oggetti a due a due. Si ricordi infatti, teorema VII del n° 5, che per i limiti di una variabile reale possono presentarsi sei casi diversi. Lasciamo al lettore la cura di esaminare, dal punto di vista geometrico, le circostanze che si presentano in ciascuno di questi casi.

Se, supposto che l'insieme $Z[0]$ non sia mai definitivamente limitato, la variabile reale rappresentante il modulo di z :

$$|z| = |\sqrt{x^2 + y^2}|,$$

è divergente, si dice che la variabile complessa z è *infinitamente grande*. Evidentemente:

IV. *Una variabile complessa z infinitamente grande, è caratterizzata dal fatto seguente: Comunque si assegni nel piano complesso una circonferenza di centro nell'origine, i punti z sono definitivamente all'esterno di quella circonferenza.*

Una variabile complessa $z = x + iy$ dicesi *regolare* se tali sono

le variabili x e y . Una variabile complessa regolare z , descrivente un insieme numerico $Z[0]$ definitivamente limitato, dicesi *convergente*. Saranno allora entrambe convergenti le variabili x e y . Posto

$$\lim x = a, \quad \lim y = b,$$

la quantità complessa $l = a + ib$ si chiama *il limite* della z e si pone:

$$\lim z = l = a + ib = \lim x + i \lim y.$$

Nel punto l vengono a coincidere per una variabile complessa z convergente, i punti l' e l'' rappresentativi dei suoi *due* limiti, e si può pertanto enunciare il teorema:

V. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una variabile complessa ordinata z sia convergente ed abbia per limite l , è che, comunque si costruisca un dominio rettangolare del piano complesso, avente il punto l come punto interno, il punto z sia definitivamente interno a quel dominio.*

Anche per una variabile ordinata complessa sussiste inalterato il *criterio di convergenza di Cauchy*, espresso dal teorema seguente:

VI. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una variabile complessa ordinata z sia convergente, è che, comunque si assegni un numero positivo ε , si abbia definitivamente, per due quali si vogliano valori z' e z'' della variabile,*

$$|z' - z''| < \varepsilon.$$

La condizione è necessaria. Ed invero, se $\lim z = l$, comunque si assegni una quantità positiva ε , il punto z è definitivamente interno ad ogni dominio rettangolare di diametro ε , avente il punto l per punto interno. La condizione è sufficiente. Ed invero, se $z' = x' + iy'$, $z'' = x'' + iy''$, poichè $|x' - x''| \leq |z' - z''|$, $|y' - y''| \leq |z' - z''|$, soddisfatta la condizione, si deduce la convergenza di entrambe le variabili x e y .

Si hanno pure gli *infinitesimi complessi*. Sono tali le variabili complesse convergenti che hanno per limite lo zero. Condizione necessaria e sufficiente affinché la variabile complessa $z = x + iy$ sia un infinitesimo è che siano tali x e y . È assai facile dimostrare che:

VII. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la variabile complessa z sia un infinitesimo è che tale sia la variabile $|z|$, che cioè, comunque si assegni una circonferenza di centro nell'origine, i punti z siano definitivamente contenuti entro la circonferenza.*

Ed invero, se la variabile z è un infinitesimo, comunque si assegni il numero positivo ρ , il punto z è definitivamente contenuto nel dominio rettangolare $\left[\left(-\frac{\rho}{\sqrt{2}}, -\frac{\rho}{\sqrt{2}} \right); \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right) \right]$, e quindi anche nel cerchio di centro nell'origine e di raggio ρ , che contiene quel dominio. Viceversa, se il punto z è definitivamente contenuto in un cerchio, arbitrariamente assegnato, avente per centro l'origine; comunque si dia un dominio rettangolare avente il punto $(0, 0)$ come punto interno, detta ρ la minima distanza di questo punto dai lati del dominio, non appena il punto z è contenuto entro il cerchio di centro nell'origine e di raggio ρ , è anche contenuto nel considerato dominio rettangolare.

Dalla definizione stessa di convergenza di una variabile z verso il limite l , segue che: *Condizione necessaria e sufficiente affinché ciò avvenga è che la variabile $z - l$ sia un infinitesimo.* Pertanto, in virtù del teorema VII, si ha:

VIII. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la variabile z converga verso il limite l , è che la variabile reale $|z - l|$ sia un infinitesimo, che cioè, comunque si assegni una circonferenza di centro nel punto l , il punto z sia definitivamente contenuto entro la circonferenza.*

È pure immediato che: *Il reciproco di ogni infinitesimo complesso, definitivamente non nullo, è un infinitamente grande, e viceversa.*

Osserviamo, infine, che i due teoremi I e II del n° 10, nonché le definizioni che seguono, nello stesso numero, sussistono inalterate per le variabili complesse ordinate.

Una variabile complessa $z = x + iy$ regolare e descrivente un insieme numerico $Z[O]$ che non sia mai definitivamente limitato dicesi *divergente*. Possono allora presentarsi otto casi diversi, tanti quante sono le disposizioni con ripetizione, meno una, di tre oggetti

a due a due. Si ricordi infatti, n° 7, che per il limite di una variabile regolare reale possono presentarsi *tre* casi diversi. Gli otto casi indicati sono i seguenti:

$$\lim x = \text{quantità finita}; \quad \begin{cases} \lim y = +\infty, \\ \lim y = -\infty, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim x = +\infty, \\ \lim x = -\infty, \end{cases} \quad \lim y = \text{quantità finita},$$

$$\lim x = +\infty, \quad \lim y = +\infty,$$

$$\lim x = +\infty, \quad \lim y = -\infty,$$

$$\lim x = -\infty, \quad \lim y = +\infty,$$

$$\lim x = -\infty, \quad \lim y = -\infty.$$

È assai facile dimostrare che *una variabile complessa divergente è un infinitamente grande*. La proposizione reciproca non è vera.

È facile rilevare le caratteristiche circostanze geometriche che si presentano, per i punti z del piano complesso (x, y) , in ciascuno degli *otto* casi indicati di divergenza. Per esempio: se $\lim x = a$, $\lim y = +\infty$, si ha che, comunque si assegnino due numeri positivi ε e k , i punti z sono definitivamente interni alla semistriscia del piano (x, y) definita dalle limitazioni

$$a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon, \quad y \geq k;$$

se $\lim x = +\infty$, $\lim y = +\infty$, si ha che, comunque si assegni un punto (h, k) del piano complesso, i punti z sono definitivamente interni al primo dei *quattro* quadranti secondo cui gli assi congruenti agli assi coordinati, condotti per detto punto, dividono il piano complesso.

12. Serie. — Richiameremo ora brevemente i concetti fondamentali relativi alle serie (cfr. *Algebra*, Cap. VII e § 3 del Cap. XII).

Sia

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots, \quad z_n = x_n + iy_n,$$

una successione di numeri complessi, i quali, in particolare, risulteranno tutti reali se sarà sempre $y_n = 0$. Chiamasi *serie* il simbolo

$$(1) \quad z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \equiv \sum_v^{1, \infty} z_v,$$

e chiamansi *termini* della serie le quantità z_1, z_2, \dots .

Alla serie (1) è sempre associata la cosiddetta *successione delle somme*, i cui termini sono definiti delle eguaglianze

$$\begin{aligned} s_1 &= z_1, \\ s_2 &= z_1 + z_2, \\ &\dots \\ s_n &= z_1 + z_2 + \dots + z_n, \\ &\dots \end{aligned}$$

Una serie si dice *regolare, non regolare, convergente, divergente, infinitesima, infinitamente grande*, secondochè regolare, non regolare, convergente, divergente, infinitesima, infinitamente grande è la variabile s_n percorrente la successione delle somme. Il minimo limite ed il massimo limite della successione delle somme si dicono anche la *minima somma* e la *massima somma* della serie. Se una serie è convergente, chiamasi *somma* di essa il limite (finito) verso cui converge la successione delle somme. Se tale limite è s si scrive allora

$$s = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots, \quad s = \sum_{\nu}^{1, \infty} z_{\nu}$$

Come ad ogni serie è associata una successione, la successione delle somme, così ad ogni successione è associata una serie, di cui quella è la successione delle somme. Ed invero, se

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots,$$

è una successione, questa è la successione delle somme associata alla serie

$$s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n-1}) + \dots$$

Ne segue che le questioni di convergenza delle serie si riconducono a questioni di convergenza delle successioni, e viceversa. Tale osservazione sarà di applicazione frequente nel seguito.

Il criterio di convergenza di *Cauchy*, applicato alla successione delle somme associata ad una data serie, dà luogo al seguente teorema:

I. Criterio di convergenza di Cauchy per le serie. — Affinchè una serie sia convergente, occorre e basta che ad ogni numero positivo ε , si possa far corrispondere un numero intero e positivo n ,

tale che il modulo della somma di quanti si vogliono termini successivi della serie, dopo l' n^{mo} termine, sia sempre minore di ε .

Ne segue:

II. *Condizione necessaria affinché una serie converga è che il suo termine generale sia un infinitesimo.*

III. *Condizione sufficiente perchè una serie sia convergente è che sia tale la serie formata dai moduli dei suoi termini.*

IV. *Se la serie a termini non negativi Σp_n converge, e se $|z_n| \leq p_n$ convergono le serie $\Sigma |z_n|$ e Σz_n .*

Se una serie è tale che la serie formata dai moduli dei suoi termini è convergente, si dice che essa è **assolutamente convergente**. Le serie assolutamente convergenti, e queste soltanto, godono della proprietà commutativa (cfr. *Algebra*, p. 264).

Occorre sovente, nelle applicazioni, considerare serie e termini positivi. Per una tale serie la variabile s_n , percorrente la successione delle somme, è crescente e si ha pertanto (cfr. teor. III del n° 7):

V. *Ogni serie a termini positivi è regolare. Perchè essa sia convergente occorre e basta che la successione delle somme sia limitata.*

Per le serie a termini positivi, esistono speciali criterii di convergenza che giova tener presenti nelle applicazioni, rimandiamo per questi criterii al § 2 del Cap. VII ed al n° 228 dell' *Algebra*:

13. Serie di potenze. — Sia $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ un'assegnata successione di numeri reali o complessi. Chiamasi *serie di potenze* la serie seguente

$$(1) \quad \sum_{\nu}^{0, \infty} a_{\nu} (z - z_0)^{\nu} \equiv a_0 + a_1 (z - z_0) + \dots + a_n (z - z_0)^n + \dots,$$

ove z_0 è un fissato numero complesso e z un numero complesso qualsivoglia. Le quantità a_0, a_1, \dots , si chiamano i *coefficienti* della serie, la quantità z_0 , rappresentata sul piano complesso, si chiama il *punto iniziale* della serie. Vogliamo, fin da ora, studiare i caratteri di convergenza per una serie di potenze.

Cominceremo dalla serie seguente:

$$(2) \quad \sum_{\nu}^{0, \infty} a(z - z_0)^\nu \equiv a + a(z - z_0) + \dots + a(z - z_0)^n + \dots,$$

che prende il nome di *progressione geometrica*. Si ha, se $z - z_0 \neq 1$,

$$s_n = a \sum_{\nu}^{0, n-1} (z - z_0)^\nu = a \frac{1 - (z - z_0)^n}{1 - (z - z_0)},$$

e pertanto, se $|z - z_0| < 1$, la serie è convergente ed ha per somma:

$$\frac{a}{1 - (z - z_0)}.$$

Allo stesso modo si vede che, se $|z - z_0| < 1$, è altresì convergente la serie dei moduli dei termini della (2).

Se $|z - z_0| \geq 1$, la serie (2) non è convergente, poichè allora il termine generale $(z - z_0)^n$ della serie non è un infinitesimo. Si ha dunque il teorema:

I. La serie progressione geometrica (2), è assolutamente convergente per ogni punto z del piano complesso, interno alla circonferenza di centro in z_0 e di raggio uno; non è convergente per ogni punto non interno alla detta circonferenza. Per ogni punto esterno a questa circonferenza, il termine generale della serie è un infinitamente grande.

Orbene, noi andiamo a dimostrare che un teorema analogo sussiste per la più generale serie di potenze (1). Se p designa un numero non negativo e n un numero intero e positivo, col simbolo $p^{\frac{1}{n}}$ intenderemo qui di indicare quel numero non negativo, la cui potenza n^{ma} è p . Ciò posto consideriamo la successione seguente di numeri non negativi

$$|a_1|, |a_2|^{\frac{1}{2}}, \dots, |a_n|^{\frac{1}{n}}, \dots,$$

tre casi sono possibili per il massimo limite della successione, cioè:

$$a) \quad \lim'' |a_n|^{\frac{1}{n}} = +\infty,$$

$$b) \quad \lim'' |a_n|^{\frac{1}{n}} = \text{quantità finita non nulla},$$

$$c) \quad \lim'' |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Nel caso *a)* la serie (1) converge allora e allora soltanto che il

punto z coincida col punto iniziale z_0 . Ed invero, per ogni punto $z \neq z_0$, comunque grande si prenda il numero intero e positivo n' , si possono sempre trovare valori di n maggiori, per ciascuno dei quali riesca

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{|z - z_0|}, \text{ cioè } |a_n| |z - z_0|^n > 1;$$

ciò prova che il termine generale della serie (1) non è un infinitesimo, e quindi che la serie non converge.

Nel caso *c*) la serie (1) converge assolutamente per qualunque valore di z . È ovvia l'assoluta convergenza per $z = z_0$, supponiamo dunque $z \neq z_0$. Poichè $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ è un infinitesimo, comunque si assegni un numero positivo ρ minore di uno, si potrà determinare un indice ν tale che per ogni valore di n maggiore di ν , risulti

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{\rho}{|z - z_0|}, \text{ cioè } |a_n| |z - z_0|^n < \rho^n;$$

la serie formata dai moduli dei termini della (1) ha dunque i suoi termini non superiori ai corrispondenti della serie seguente a termini non negativi

$$|a_0| + |a_1| |z - z_0| + \dots + |a_\nu| |z - z_0|^\nu + \rho^{\nu+1} + \rho^{\nu+2} + \dots$$

Ora tale serie è convergente, e ciò prova la nostra asserzione.

Nel caso *b*), posto

$$\lim'' |a_n|^{\frac{1}{n}} = l, \quad r = \frac{1}{l},$$

per la serie (1) si ha:

$$\begin{aligned} & \text{V'assoluta convergenza per } |z - z_0| < r, \\ & \text{la non convergenza per } |z - z_0| > r. \end{aligned}$$

Sia invero, in primo luogo,

$$|z - z_0| < r, \text{ cioè } |z - z_0| < \frac{1}{l},$$

per un determinato numero positivo ε riesce

$$|z - z_0| = \frac{1}{l + 2\varepsilon},$$

e possiamo sempre fissare un indice ν tale che per ogni valore di n maggiore, si abbia

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < l + \varepsilon.$$

Ne segue, per $n > \nu$,

$$|a_n| |z - z_0|^n < \left(\frac{l + \varepsilon}{l + 2\varepsilon} \right)^n.$$

Pertanto la serie dei moduli dei termini della (1) ha i suoi termini non superiori ai corrispondenti della serie seguente a termini non negativi:

$$|a_0| + \dots + |a_\nu| |z - z_0|^\nu + \left(\frac{l + \varepsilon}{l + 2\varepsilon} \right)^{\nu+1} + \left(\frac{l + \varepsilon}{l + 2\varepsilon} \right)^{\nu+2} + \dots,$$

e poichè tale serie è convergente, risulta provata l'assoluta convergenza della (1) per $|z - z_0| < r$.

Sia ora, in secondo luogo, $|z - z_0| > r$, cioè

$$\frac{1}{|z - z_0|} < l;$$

comunque grande si assegni un indice n' si potranno sempre trovare valori di n maggiori, per ciascuno dei quali riesce:

$$|a_n|^{1/n} > \frac{1}{|z - z_0|} \quad \text{cioè} \quad |a_n| |z - z_0|^n > 1.$$

Ciò prova che il termine generale della serie (1) non è un infinitesimo e quindi che la serie stessa non converge.

Si ha dunque il teorema seguente, noto sotto il nome di **Teorema Cauchy-Hadamard**:

II. Ogni serie di potenze (1) è convergente nel punto iniziale. Se $\lim'' |a_n|^{1/n} = +\infty$, la serie non è mai convergente per ogni altro punto. Se $\lim'' |a_n|^{1/n} = 0$, la serie converge assolutamente per ogni punto del piano complesso. Se $\lim'' |a_n|^{1/n} = l > 0$, posto $r = 1/l$, la serie è assolutamente convergente o non convergente, secondochè è $|z - z_0| < r$ o $|z - z_0| > r$.

Nel caso b), con centro nel punto iniziale e con raggio

$$r = 1 : \lim'' |a_n|^{1/n},$$

descriviamo un cerchio C nel piano complesso. Poichè la serie (1) è assolutamente convergente in ogni punto interno a tale cerchio, e non converge in ogni punto esterno, è ben naturale chiamare quel

cerchio il *cerchio di convergenza*, ed il suo raggio, il *raggio di convergenza* della serie (1).

Si badi bene che l'analisi da noi fatta non dice nulla sulla convergenza o meno della serie di potenze nei punti della circonferenza del cerchio di convergenza. Ma nulla può essere affermato, che valga in generale, sul comportamento della serie § nei punti di detta circonferenza.

Nel caso *a*) si usa dire che il cerchio, o il raggio, di convergenza della serie (1) è *nullo*, nel caso *c*) che esso è *infinito*.

Supponiamo che i coefficienti della serie (1) siano definitivamente non nulli, si sa allora dall'algebra (cfr. *Algebra*, p. 237) che se la variabile

$$\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \quad (n = \nu, \nu + 1, \dots),$$

è regolare, tale è anche la variabile $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ e si ha:

$$\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}.$$

Ne segue il teorema (di cui è facile dare una dimostrazione diretta):

III. *Se i coefficienti della serie (1) sono definitivamente non nulli e se la variabile $(|a_n| : |a_{n-1}|)$ è regolare, il raggio di convergenza della serie (1) è nullo, finito o infinito, secondo che il limite della variabile indicata è infinito, finito o nullo. Nel caso che questo limite sia finito, il suo reciproco è il raggio di convergenza della serie.*

Osserviamo ora un teorema che ci dice in che modo la serie (1) non converge all'esterno del cerchio di convergenza. Si dimostra facilmente che:

IV. *Per ogni punto z esterno al cerchio di convergenza, la successione dei termini, della serie di potenze (1), non è limitata.*

Ed invero, se per un certo punto z' esterno al cerchio di convergenza, esistesse un numero positivo K tale che, per ogni valore di n , riuscisse

$$|a_n| |z' - z_0|^n < K,$$

ne seguirebbe

$$|a_n| |z - z_0|^n < K \frac{|z - z_0|^n}{|z' - z_0|^n},$$

e quindi l'assoluta convergenza della (1) per ogni punto z per cui risulti $|z - z_0| < |z' - z_0|$. Ciò è assurdo poichè di tali punti ve ne sono sempre anche di esterni al cerchio di convergenza.

§ 2. Insiemi di punti.

14. Spazio. — Siano x_1, x_2, \dots, x_r , r variabili reali, per ciascuna delle quali si può pensare il più arbitrario valore reale. La r^{pla} di valori reali (x_1, x_2, \dots, x_r) chiamasi *punto*; ciascuna variabile x_i ($i = 1, 2, \dots, r$) è una *coordinata* del punto.

Lo insieme di *tutti* i punti (x_1, x_2, \dots, x_r) chiamasi *spazio a r dimensioni*, e sarà indicato con la notazione $S_{(r)}$. Il punto $(0, 0, \dots, 0)$ è l'origine di $S_{(r)}$. Scrivendo al modo seguente:

$$X(x_1, x_2, \dots, x_r),$$

vogliamo esprimere che il punto di coordinate x_1, x_2, \dots, x_r è designato con la lettera maiuscola X .

Lo spazio $S_{(1)}$, ad *una* dimensione, si può geometricamente rappresentare sopra una data retta x , sulla quale sia stato stabilito un sistema di ascisse, assumendo il punto di questa retta di ascisse x come rappresentante del punto di $S_{(1)}$ avente la coordinata x .

Lo spazio $S_{(2)}$, a *due* dimensioni, si può geometricamente rappresentare sopra un dato piano, sul quale sia stato stabilito un sistema di *due* assi coordinati cartesiani ortogonali x e y , assumendo il punto di questo piano, di ascissa x e di ordinata y , come rappresentante del punto di $S_{(2)}$ di coordinate x e y .

Così pure lo spazio $S_{(3)}$, a *tre* dimensioni, si può geometricamente rappresentare nello spazio in cui viviamo, nel quale sia stato stabilito un sistema di *tre* assi cartesiani ortogonali x, y e z , assumendo il punto di questo spazio di coordinate x, y e z , come rappresentante del punto di $S_{(3)}$ di coordinate x, y e z .

Siano $A(a_1, a_2, \dots, a_r)$ e $B(b_1, b_2, \dots, b_r)$ due punti di $S_{(r)}$. Chiamasi *distanza* fra i due punti A e B , e sarà denotata con la notazione \overline{AB} , il numero non negativo seguente:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_r - b_r)^2}.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè riesca $\overline{AB} = 0$, è che i due punti A e B coincidano; diversamente, è sempre $\overline{AB} > 0$.

Siano A e B due punti distinti di $S_{(r)}$, il *segmento determinato dai due punti*, che verrà indicato con la notazione AB , è, per definizione, lo insieme di tutti i punti di $S_{(r)}$ le cui coordinate sono date dalle eguaglianze

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + (b_1 - a_1)t, \\ x_2 &= a_2 + (b_2 - a_2)t, \\ &\dots \dots \dots \\ x_r &= a_r + (b_r - a_r)t, \end{aligned}$$

al variare del parametro t nell'intervallo $(0, 1)$.

La distanza \overline{AB} chiamasi anche *la lunghezza* del segmento AB . Vale il seguente teorema, la cui dimostrazione proponiamo per esercizio:

I. *Comunque si assegnino tre punti A, B e C di $S_{(r)}$, si ha sempre la relazione:*

$$\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{CB},$$

sussistendo il segno eguale allora e allora soltanto che il punto C appartenga al segmento AB .

15. Insiemi di punti. — Una porzione ben determinata di punti di un $S_{(r)}$ chiamasi anche un *insieme di punti* del detto $S_{(r)}$. Fra gli insiemi di un $S_{(r)}$ saranno spesso considerati i particolarissimi casi dei *dominii circolari* e dei *dominii rettangolari*.

Chiamasi *dominio circolare*, di centro C e di raggio ρ , l'insieme di tutti i punti di $S_{(r)}$ la cui distanza da C non supera ρ . Se c_1, c_2, \dots, c_r sono le coordinate di C , i punti dell'indicato dominio circolare sono dunque caratterizzati dalla proprietà che le loro coordinate verificano la relazione:

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + \dots + (x_r - c_r)^2 \leq \rho^2.$$

Il dominio circolare di centro C e di raggio ρ di un $S_{(1)}$, coincide con l'intervallo $(c - \rho, c + \rho)$, se c designa l'ascissa del punto C . Il dominio circolare di centro C e di raggio ρ di un $S_{(2)}$ (di un $S_{(3)}$) è rappresentato nel piano (nello spazio ordinario) da un cerchio (da una sfera) di centro in C e di raggio ρ .

Siano $A(a_1, a_2, \dots, a_r)$ e $B(b_1, b_2, \dots, b_r)$ due punti di $S_{(r)}$, fra le cui coordinate sussistono le disequaglianze:

$$a_i < b_i \quad (i = 1, 2, \dots, r);$$

chiamasi *dominio rettangolare*, indicato con la notazione

$$(A, B) \equiv [(a_1, a_2, \dots, a_r); (b_1, b_2, \dots, b_r)],$$

l'insieme dei punti di $S_{(r)}$ le cui coordinate x_1, x_2, \dots, x_r verificano simultaneamente le relazioni:

$$(1) \quad a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Gli r numeri positivi $b_i - a_i$ diconsi le *dimensioni* del dominio rettangolare; il segmento AB dicesi *la diagonale principale* e la lunghezza di questa il *diametro* del dominio rettangolare. Il punto C di coordinate

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

medio del segmento AB , chiamasi il *centro* del dominio rettangolare. Si ponga $b_i - a_i = 2d_i$, risulterà $a_i = c_i - d_i$, $b_i = c_i + d_i$, e quindi le (1) si scrivono anche:

$$(2) \quad |x_i - c_i| \leq d_i.$$

Un dominio rettangolare si può dunque anche determinare assegnandone il centro $O(c_1, c_2, \dots, c_r)$ e le semidimensioni d_i ; in tal caso, le relazioni caratteristiche a cui devono soddisfare le coordinate dei punti del dominio possono prendersi nella forma (2).

Un *dominio quadrato* è un dominio rettangolare per il quale le dimensioni sono eguali fra di loro. Il valore comune delle dimensioni di un dominio quadrato, chiamasi *la dimensione* del dominio.

Un dominio rettangolare di un $S_{(1)}$ non è che un segmento della retta su cui è rappresentato lo $S_{(1)}$ (ovverosia un intervallo numerico). Un dominio rettangolare di un $S_{(2)}$ (di un $S_{(3)}$) è rappresentato nel piano (nello spazio ordinario) da un rettangolo (da un parallelepipedo rettangolo) a lati paralleli agli assi coordinati.

Siano A e B due insiemi di punti di $S_{(r)}$. Si dirà che A è *contenuto* in B ovvero che B *contiene* A , quando si constata che ogni punto di A appartiene anche a B . Si scriverà allora:

$$A < B, \text{ oppure } B > A.$$

I due insiemi *coincidono* se avviene che $A < B$ e $A > B$, si scrive allora $A \equiv B$.

Così, per esempio, un dato dominio circolare è contenuto in ogni altro dominio circolare concentrico di raggio non minore, un dato dominio rettangolare è contenuto in ogni altro dominio rettangolare concentrico le cui dimensioni non sono, rispettivamente, minori delle corrispondenti dimensioni del dato.

Siano $2d''$ la massima e $2d'$ la minima fra le dimensioni $2d_1, 2d_2, \dots, 2d_r$ di un dominio rettangolare di centro $C(c_1, c_2, \dots, c_r)$. Poichè, dal simultaneo verificarsi delle (2) segue che:

$$\Sigma (x_i - c_i)^2 \leq r d''^2,$$

e dal verificarsi della

$$\Sigma (x_i - c_i)^2 \leq d'^2,$$

segue il simultaneo verificarsi delle (2), possiamo dire che:

I. *Detta d' la massima e d la minima semidimensione di un dominio rettangolare, esso è contenuto nel dominio circolare concentrico di raggio $d''\sqrt{r}$, e contiene il dominio circolare concentrico di raggio d .*

Si ha pure che:

II. *Un dominio circolare di raggio ρ è contenuto nel dominio quadrato concentrico di semidimensione ρ e contiene il dominio quadrato concentrico di semidimensione $\rho:\sqrt{r}$.*

Evidentemente, se $A < B$ e $B < C$, risulta $A < C$.

16. Operazioni fra insiemi di punti. — Dati due o più insiemi A, B, \dots, L di un $S_{(r)}$, l'insieme H formato da tutti e soli i punti che appartengono ad uno almeno di questi insiemi chiamasi *insieme somma* dei dati, e si scrive

$$H = A + B + \dots + L.$$

L'insieme K , quando esiste, formato da tutti e soli i punti comuni a tutti gli insiemi dati chiamasi *insieme prodotto* di essi e si scrive:

$$K = A \cdot B \dots L.$$

Evidentemente: $A \cdot B \dots L < A + B + \dots + L$.

Dati due insiemi A e B di $S_{(r)}$, l'insieme C formato da tutti e soli i punti di A che non appartengono a B si chiama *insieme differenza* fra l'insieme A e l'insieme B , e si scrive:

$$C = A - B.$$

Evidentemente $A - B \equiv A - A \cdot B$.

Dato un insieme A che non coincida con lo spazio $S_{(r)}$, chiamasi *insieme complementare* di A e si indica con la notazione CA , l'insieme formato da tutti e soli i punti di $S_{(r)}$ che non appartengono ad A . Si ha cioè, per definizione,

$$CA = S_{(r)} - A.$$

Dati due insiemi A e B di $S_{(r)}$, consideriamo l'insieme numerico I descritto dal numero non negativo \overline{AB} esprimente la distanza fra un punto A variabile in A ed un punto B variabile in B ; orbene, l'estremo inferiore di I (positivo o nullo) chiamasi *la distanza fra i due insiemi A e B* e si denota con la notazione \overline{AB} . In particolare, l'insieme A può ridursi ad un solo punto A , si ha allora la distanza del punto A dall'insieme B , la quale si denota con la notazione \overline{AB} .

Se esiste l'insieme $A \cdot B$, sarà allora $\overline{AB} = 0$; ma può essere $\overline{AB} = 0$ e non esistere l'insieme $A \cdot B$. In tal caso si dice che ciascuno di quegli insiemi è *asintotico* all'altro.

17. Insiemi di punti limitati. — Un insieme di punti di $S_{(r)}$, dicesi *limitato* se esiste un dominio rettangolare contenente l'insieme.

In particolare, dunque, i domini rettangolari e circolari sono insiemi limitati.

Se un insieme è limitato è pure limitato ogni insieme in esso contenuto. Un insieme contenuto in un dominio circolare è limitato, e viceversa.

La somma, il prodotto, la differenza fra due o più insiemi limitati è sempre un insieme limitato.

Siano A un insieme limitato e $X(x_1, x_2, \dots, x_r)$ un punto variabile in A . Sia $[(h'_1, h'_2, \dots, h'_r); (h''_1, h''_2, \dots, h''_r)]$ un dominio rettangolare contenente A . Al variare di X in A si avrà sempre

$$h'_i \leq x_i \leq h''_i \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

e pertanto:

I. *Se un insieme è limitato, ogni coordinata di un punto variabile nell'insieme, descrive un insieme numerico limitato.*

Evidentemente:

II. *Vale la proposizione reciproca della precedente.*

Siano p'_i e p''_i gli estremi inferiore e superiore dell'insieme numerico descritto della coordinata x_i al variare di X in A . I punti $P'(p'_1, p'_2, \dots, p'_r)$ e $P''(p''_1, p''_2, \dots, p''_r)$ chiamansi, rispettivamente, l'*estremo inferiore* e l'*estremo superiore* dell'insieme limitato A . Si ha evidentemente che:

III. *Se P' e P'' sono i punti estremi di un insieme limitato A , ogni dominio rettangolare contenente i detti punti contiene l'insieme, e viceversa.*

Siano $X(x_1, x_2, \dots, x_r)$, $Y(y_1, y_2, \dots, y_r)$ due punti arbitrariamente variabili nell'insieme A di $S_{(r)}$, limitato o no. Consideriamo l'insieme numerico descritto dalla distanza \overline{XY} fra i due punti al variare di questi in A , l'estremo superiore di tale insieme numerico chiamasi il *diametro* di A . Se l'insieme A è limitato e P' e P'' sono i suoi due punti estremi, poichè è sempre

$$|y_i - x_i| \leq p''_i - p'_i \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

risulta $\overline{XY} \leq \overline{P'P''}$, e pertanto:

IV. *Il diametro di un insieme limitato non supera la distanza fra i due punti estremi di esso.*

Ne segue:

V. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme di punti sia limitato è che abbia il diametro finito.*

In IV è stabilita la necessità di tale condizione; la sua sufficienza deriva da ciò che se un insieme ha il diametro finito, di valore δ , esso è contenuto in ogni dominio circolare di raggio δ , avente il centro in un punto dell'insieme.

In virtù del teorema I del n° 14. si ha subito che:

VI. *Il diametro di un dominio circolare vale il doppio del suo raggio.*

Ed invero, se X e Y sono due punti quali si vogliono del do-

minio circolare C di centro $O(c_1, c_2, \dots, c_r)$ e di raggio ρ , dalle relazioni:

$$\overline{XY} \leq \overline{XO} + \overline{OY}, \quad \overline{XO} \leq \rho, \quad \overline{YO} \leq \rho,$$

si deduce che $\overline{XY} \leq 2\rho$, laddove, fra i due punti, di C , di coordinata $c_1 + \rho, c_2, \dots, c_r$ e $c_1 - \rho, c_2, \dots, c_r$ intercede la distanza 2ρ .

18. Punti limiti di un insieme di punti. — Siano A un insieme di punti e P un punto di $S_{(r)}$. Si dice che P è *punto limite* di A se, comunque si consideri un dominio quadrato di centro in P , in esso è sempre contenuto un punto di A , distinto da P .

Evidentemente: Se P è punto limite di A , comunque si consideri un dominio circolare di centro in P , in esso è sempre contenuto un punto di A distinto da P , e viceversa.

Sussiste il teorema:

I. Se P è punto limite di A , comunque si consideri un dominio quadrato o circolare, di centro in P , in esso sono contenuti infiniti punti di A . Pertanto: condizione necessaria affinché un insieme di punti ammetta un punto limite è che esso contenga infiniti punti.

Sia Q un dominio quadrato di centro in P e di semidimensione σ , affatto arbitrario, dobbiamo dimostrare che in Q sono contenuti infiniti punti di A . Consideriamo i domini circolari $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, di centro in P e, rispettivamente, di raggio

$$\frac{\sigma}{1}, \frac{\sigma}{2}, \dots, \frac{\sigma}{n}, \dots,$$

si ha:

$$Q > C_1 > C_2 > \dots > C_n > \dots$$

In C_1 esiste un punto P_1 di A , distinto da P . Sia n_2 un tale numero intero e positivo da risultare $(\sigma : n_2) < \overline{PP_1}$, detto P_2 un punto di A , distinto da P , contenuto in C_{n_2} , riescirà $\overline{PP_1} > \overline{PP_2} > 0$. Sia ora n_3 un tale numero intero e positivo da risultare $(\sigma : n_3) < \overline{PP_2}$, detto P_3 un punto di A , distinto da P , contenuto in C_{n_3} , riescirà $\overline{PP_1} > \overline{PP_2} > \overline{PP_3} > 0$. Si può indefinitamente ripetere il procedimento descritto, e si otterrà così una successione di punti $P_1, P_2, \dots, P_v, \dots$, appartenenti ad A e contenuti in Q , ed inoltre, per essere

$$\overline{PP_1} > \overline{PP_2} > \dots > \overline{PP_v} > \dots > 0,$$

due a due distinti e ciascuno di essi distinto da P . Ciò dimostra il teorema.

Se un punto P dello spazio non è punto limite di A , esiste, per definizione, un dominio quadrato di centro in P non contenente alcun punto di A , distinto da P . È perciò che un punto di A che non sia suo punto limite dicesi un punto *isolato* di A .

Per gli insiemi limitati vale il seguente *teorema di Bolzano-Weierstrass*, reciproco del precedente:

II. *Un insieme limitato contenente infiniti punti, ammette almeno un punto limite.*

Per avere una facile e vantaggiosa rappresentazione geometrica dimostreremo il teorema nel caso particolare che l'insieme di punti appartenga ad uno spazio a due dimensioni. Sia dunque A un insieme di infiniti punti del piano (x, y) , contenuto nel dominio rettangolare R , di punti estremi (a', b') e (a'', b'') .

Fissato un numero intero e positivo n , maggiore di uno, dividiamo i due lati del rettangolo R in n parti eguali e, mediante parallele agli assi coordinati condotte per i punti di divisione, dividiamo il rettangolo stesso in n^2 rettangoli eguali. Fra questi rettangoli ve ne sarà almeno uno che contiene infiniti punti di A , designamo con R_1 quello fra questi rettangoli il cui vertice sud-ovest ha le più piccole coordinate e siano (a_1', b_1') e (a_1'', b_1'') i due punti estremi di R_1 . Si ha

$$a' \leq a_1' < a_1'' \leq a'' , \quad b' \leq b_1' < b_1'' \leq b'' ,$$

$$a_1'' - a_1' = \frac{a'' - a'}{n} , \quad b_1'' - b_1' = \frac{b'' - b'}{n} .$$

Come abbiamo fatto per R , dividiamo il rettangolo R_1 in n^2 rettangoli eguali e diciamo R_2 quello fra questi rettangoli che contiene infiniti punti di A ed il cui vertice sud-ovest ha le più piccole coordinate. Siano (a_2', b_2') e (a_2'', b_2'') i punti estremi di R_2 si avrà:

$$a' \leq a_1' \leq a_2' < a_2'' \leq a_1'' \leq a'' , \quad b' \leq b_1' \leq b_2' < b_2'' \leq b_1'' \leq b'' ,$$

$$a_2'' - a_2' = \frac{a'' - a'}{n^2} , \quad b_2'' - b_2' = \frac{b'' - b'}{n^2} .$$

Ripetiamo su R_2 l'operazione fatta su R e su R_1 , e così via

indefinitamente. Si verrà a costruire una successione di rettangoli $R, R_1, R_2, \dots, R_p, \dots$, ciascuno contenuto nel precedente, laddove, detti (a'_p, b'_p) e (a''_p, b''_p) i punti estremi di R_p , le successioni

$$(1') \quad a', a_1', a_2', \dots, a'_p, \dots,$$

$$(2') \quad b', b_1', b_2', \dots, b'_p, \dots,$$

sono non decrescenti e limitate, le successioni

$$(1'') \quad a'', a_1'', a_2'', \dots, a''_p, \dots,$$

$$(2'') \quad b'', b_1'', b_2'', \dots, b''_p, \dots,$$

sono non crescenti e limitate, ed inoltre, per essere

$$a'_p < a''_p, \quad b'_p < b''_p,$$

$$a''_p - a'_p = \frac{a'' - a'}{n^p}, \quad b''_p - b'_p = \frac{b'' - b'}{n^p},$$

le due successioni (1') e (1'') costituiscono una coppia di classi contigue e così pure le due successioni (2') e (2''). Detto α il numero di separazione delle due classi contigue (1') e (1'') e β quello delle due classi contigue (2') e (2''), si ha:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim a'_p = \lim a''_p = \alpha, \\ \lim b'_p = \lim b''_p = \beta. \end{array} \right.$$

Dico che il punto $P(\alpha, \beta)$ è un punto limite di A . Per dimostrarlo, devo far vedere che, comunque si consideri un dominio quadrato Q di centro in P , in esso cadono sempre infiniti punti di A . Sia σ la semidimensione di Q . In virtù delle (3), esisterà un numero intero e positivo q tale da risultare

$$\alpha - \sigma < a'_q < a''_q < \alpha + \sigma,$$

$$\beta - \sigma < b'_q < b''_q < \beta + \sigma,$$

tale cioè che il rettangolo R_q sia contenuto in Q . Ma in R_q sono contenuti infiniti punti di A , e ciò dimostra quanto abbiamo asserito.

Si dimostri, per esercizio, che: *Tutti e soli i punti limiti di un dominio rettangolare, di un dominio circolare, di un segmento, sono i punti dell'insieme.*

19. Insieme derivato di un dato insieme di punti. Insiemi chiusi. Insiemi perfetti.—Dato un insieme A , dotato di punti

limiti, l'insieme costituito da tutti e soli questi punti limiti chiamasi il *derivato* di A . Per esso si userà la notazione DA . Evidentemente:

I. Se per due insiemi A e B di $S_{(r)}$ si ha $A < B$, si ha pure $DA < DB$.

Dimostriamo subito che:

II. Dati due o più insiemi di punti A, B, \dots, L di $S_{(r)}$, se l'insieme somma $A + B + \dots + L$ è dotato di derivato, tale è almeno uno degli insiemi dati, e viceversa, e si ha:

$$D(A + B + \dots + L) \equiv DA + DB + \dots + DL,$$

ove nella somma del secondo membro si intendono omissi gli addendi che designano insiemi eventualmente non esistenti. Se l'insieme prodotto $A \cdot B \cdot \dots \cdot L$ è dotato di derivato, tale deve essere ciascuno degli insiemi dati, e si avrà:

$$D(A \cdot B \cdot \dots \cdot L) < DA \cdot DB \cdot \dots \cdot DL.$$

Se P è in $D(A + B + \dots + L)$, esso deve appartenere ad uno, almeno, degli insiemi DA, DB, \dots, DL . Ed inverso, in caso contrario, esisterebbero i domini quadrati Q_a, Q_b, \dots, Q_i , di centro in P , in ciascuno dei quali non è contenuto alcun punto, distinto da P , rispettivamente, di A , di B, \dots , di L ; e quindi, in quello, fra gli indicati domini quadrati che ha la più piccola dimensione non sarebbe contenuto alcun punto, distinto da P , di $A + B + \dots + L$. Se, viceversa, P appartiene ad uno degli insiemi DA, DB, \dots, DL , per esempio a DA , in ogni dominio quadrato di centro in P cade sempre un punto di A , distinto da P , e quindi un punto di $A + B + \dots + L$, distinto da P , il quale pertanto apparterrà anche a $D(A + B + \dots + L)$.

Sia ora, in secondo luogo, P un punto di $D(A \cdot B \cdot \dots \cdot L)$; in ogni dominio quadrato di centro in P cade un punto, distinto da P , di $A \cdot B \cdot \dots \cdot L$, e quindi un punto e di A , e di B, \dots , e di L , distinto da P , pertanto P appartiene simultaneamente a DA , a DB, \dots , a DL , e quindi a $DA \cdot DB \cdot \dots \cdot DL$.

La nozione di insieme derivato conduce subito alla caratterizzazione di quei particolari insiemi che si dicono *chiusi*. Un insieme A di $S_{(r)}$ dicesi *chiuso* se non è dotato di derivato, oppure se con-

tiene il proprio derivato; se cioè DA non esiste, oppure $DA < A$.
Dimostriamo che:

III. *Il derivato DA di un insieme qualsiasi A è sempre un insieme chiuso.*

Dico, infatti, che se P è punto limite di DA , in un arbitrario dominio circolare C , di raggio ρ e di centro in P , cadono sempre punti di A distinti da P . Sia P' un punto di DA , distinto da P , del dominio circolare di centro in P e di raggio $\rho:2$. In C è contenuto il dominio circolare di centro in P' e di raggio $\overline{PP'}:2$, ma in questo dominio cade sempre un punto di A , che riesce distinto da P .

Un insieme (chiuso) sprovvisto di derivato è tale che in ogni dominio rettangolare cade di esso, al più, un numero finito di punti (cfr. teor. II del n° 18). Se, perciò, un tale insieme è limitato esso è costituito da un numero finito di punti.

Dal teorema II si deduce subito il seguente:

IV. *La somma o il prodotto di due o più insiemi chiusi è sempre un insieme chiuso.*

Ed invero, per esempio, gli insiemi A, B, C siano chiusi, mentre esistono DA e DB e non esiste DC . Si ha:

$$D(A + B + C) \equiv DA + DB,$$

e quindi, poichè $DA < A$, $DB < B$,

$$D(A + B + C) < A + B < A + B + C.$$

Il prodotto $A \cdot B \cdot C$ è chiuso perchè è sprovvisto di derivato. Il prodotto $A \cdot B$ è chiuso perchè, essendo

$$D(A \cdot B) < DA \cdot DB, \quad DA < A, \quad DB < B,$$

risulta $D(A \cdot B) < A \cdot B$.

Negli insiemi chiusi rientrano, come caso particolare, gli insiemi *perfetti*. Un insieme dicesi *perfetto* se coincide col proprio derivato. Un insieme perfetto è dunque tale che ogni suo punto è punto limite dell'insieme, e viceversa. In altre parole: Un insieme perfetto è un insieme chiuso privo di punti isolati.

Dal teorema II segue immediatamente che:

V. *La somma di due o più insiemi perfetti è un insieme perfetto.*

I domini rettangolari o circolari, i segmenti sono altrettanti esempi di insiemi perfetti.

Audiamo ora a dimostrare il seguente importante teorema:

VI. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due insiemi chiusi A e B di $S(r)$, dei quali uno almeno limitato, non abbiano punti comuni è che riesca $\overline{AB} > 0$.*

Occorre solo dimostrare (cfr. n° 16) che la condizione è necessaria. Noi dimostreremo perciò che se A è limitato ed è $\overline{AB} = 0$, dovrà esistere un punto, almeno, comune ad A e a B .

Cominciamo dal considerare il caso particolare in cui A è costituito da un unico punto A . Comunque si assegni il numero positivo σ , in ogni dominio circolare di centro in A e di raggio σ deve cadere un punto di B , diversamente, dovrebbe esistere un particolare numero positivo σ , tale che, comunque si prenda B in B , riesca $\overline{AB} > \sigma$, e sarebbe perciò $\overline{AB} \geq \sigma > 0$. Ne segue che, supponendo A non appartenente a B , si giunge all'assurdo che il punto A , punto limite dell'insieme chiuso B , non è contenuto in B .

Consideriamo, in secondo luogo, il caso in cui l'insieme chiuso e limitato A è comunque costituito. In tal caso, avendo supposto $\overline{AB} = 0$, dovrà esistere un punto A_1 di A e un punto B_1 di B , per i quali è

$$\overline{A_1 B_1} < 1.$$

Se $\overline{A_1 B_1} = 0$, il teorema è dimostrato. Se $\overline{A_1 B_1} > 0$, diciamo n_2 il minimo numero intero e positivo per il quale è $(1 : n_2) < \overline{A_1 B_1}$, dovranno esistere un punto A_2 di A e un punto B_2 di B per i quali è

$$\overline{A_2 B_2} < 1 : n_2.$$

Se $\overline{A_2 B_2} = 0$, il teorema è dimostrato. Se $\overline{A_2 B_2} > 0$, diciamo n_3 il minimo numero intero e positivo per il quale è $1 : n_3 < \overline{A_2 B_2}$, dovranno esistere un punto A_3 di A e un punto B_3 di B per i quali è

$$\overline{A_3 B_3} < 1 : n_3.$$

Così procedendo, due casi possono presentarsi: O alla p^{ma} operazione si giungerà ad una coppia di punti, A_p di A e B_p di B ,

coincidenti, ed allora il teorema è dimostrato, oppure, comunque grande sia p , sarà sempre $A_p B_p > 0$. In tal caso, si perviene alla costruzione di una successione di coppie di punti:

$$(1) \quad A_1, B_1; A_2, B_2; \dots; A_p, B_p; \dots,$$

a due a due distinte poichè riesce

$$\overline{A_1 B_1} > \overline{A_2 B_2} > \dots > \overline{A_p B_p} > \dots > 0;$$

ed inoltre, poichè la successione $1, n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ di numeri interi e positivi è sempre crescente, ne seguirà $\lim (1 : n_p) = 0$, e pertanto, essendo $\overline{A_p B_p} < 1 : n_p$, sarà $\lim \overline{A_p B_p} = 0$.

Se i punti $A_1, A_2, \dots, A_p, \dots$, per eventuali coincidenze, riescono in numero finito, fra questi ne dovrà esistere almeno uno A che deve appartenere ad infinite coppie (1), per modo che, comunque si assegni un numero intero e positivo ν , si potrà sempre trovare un indice $p > \nu$ per il quale il punto A_p della coppia $A_p B_p$ cade in A . Se ne deduce che, dato arbitrariamente un numero positivo σ , nel dominio circolare C di centro in A e di raggio σ , è sempre contenuto un punto di B distinto da A . Invero, poichè $\lim \overline{A_p B_p} = 0$, si potrà trovare un indice p_σ tale che per ogni $p > p_\sigma$ si abbia sempre $\overline{A_p B_p} < \sigma$; ed allora, se per l'indice $q > p_\sigma$, il punto A_q coincide con A , si avrà $0 < \overline{A B_q} < \sigma$. Il punto A di A è dunque punto limite di B , e come tale, poichè B è chiuso, esso punto apparterrà anche a B .

I punti $A_1, A_2, \dots, A_q, \dots$ siano ora un'infinità. L'insieme da essi costituito, per essere contenuto in A , è limitato, ed ammette perciò un punto limite A che sarà tale anche per A . Poichè A è chiuso, il punto A è intanto in A . Assegnato arbitrariamente il numero positivo σ , si abbia $\overline{A_p B_p} < \sigma : 2$, per $p > p_\sigma$. Sia q un indice maggiore di p_σ per il quale risulti $\overline{A A_q} \leq \sigma : 2$, si avrà

$$\overline{A B_q} \leq \overline{A A_q} + \overline{A_q B_q} < \sigma.$$

Ciò dimostra, per la supposta chiusura di B , che A è anche un punto di B . Il teorema V è così completamente dimostrato.

Terminiamo la teoria generale degli insiemi chiusi col dimostrare il seguente teorema :

VII. Si abbia una successione di insiemi chiusi

$$(2) \quad A_1, A_2, \dots, A_n, \dots;$$

se A_1 è limitato e se ogni insieme della successione è contenuto nel precedente, esiste almeno un punto comune a tutti gli insiemi della successione.

Si prenda arbitrariamente un punto P_1 in A_1 , se esso non è contenuto in tutti gli insiemi della successione, diciamo A_{n_2} il primo di tali insiemi che non contiene P_1 . Si prenda arbitrariamente un punto P_2 in A_{n_2} , se esso non è contenuto in tutti gli insiemi della successione, diciamo A_{n_3} il primo di tali insiemi, dopo A_{n_2} , che non contiene P_2 ; e così via indefinitamente. Così operando, o si capita, dopo un certo numero di operazioni, ad un punto appartenente a tutti gli insiemi della (2); o si perviene alla costruzione di due successioni: una successione di infiniti punti, a due a due distinti,

$$(3) \quad P_1, P_2, \dots, P_s, \dots,$$

e una successione crescente

$$(4) \quad n_1, n_2, \dots, n_s, \dots$$

di numeri interi e positivi. Le due successioni (3) e (4) sono tali che, per qualunque valore dell'indice s , gli infiniti punti

$$(5) \quad P_s, P_{s+1}, \dots$$

sono tutti contenuti nell'insieme A_{n_s} della (2). L'insieme costituito dagli infiniti punti (3), contenuti nell'insieme limitato A_1 , ammette almeno un punto limite P ; orbene, io dico che tale punto appartiene ad ogni insieme della successione (2). Comunque si prenda, invero, l'indice s , il punto P è anche punto limite dell'insieme dei punti (5), e come tale, poichè l'insieme A_{n_s} è chiuso, appartiene intanto a questo insieme. Sia ora A_ν un qualunque insieme della (2); per $n_s > \nu$, risulta $A_\nu \supset A_{n_s}$ e quindi P è anche contenuto in A_ν .

20. Continui. — Fra gli insiemi chiusi meritano speciale menzione gli *insiemi chiusi connessi*. Un dato insieme A chiuso, dicesi *connesso* quando non è possibile costruire due insiemi chiusi, senza punti comuni, la cui somma è l'insieme dato.

Un insieme chiuso connesso dicesi anche un *continuo*.

Si dimostrano subito i tre seguenti teoremi.

∧ I. *Un continuo è un insieme perfetto.*

Ed invero, un insieme chiuso A che contiene il punto isolato P , è decomponibile nei due insiemi chiusi P e $A - P$, privi di punti comuni.

∧ II. *Un insieme A , somma di due continui B e C , aventi almeno un punto comune P , è esso pure un continuo.*

Ed invero, se così non fosse, esisterebbero due insiemi chiusi E ed F , privi di punti comuni, per i quali è $A = E + F$. Il punto P dovrà appartenere ad E o ad F , supponiamo che appartenga ad E . Prendiamo in F un punto Q , esso apparterrà o a B o a C , supponiamo che appartenga a B . Esistono i due insiemi prodotti $B \cdot E$ e $B \cdot F$, poichè nel primo è almeno contenuto il punto P e nel secondo il punto Q , essi sono chiusi (teor. III, n° 19) e privi di punti comuni, laddove, evidentemente, si ha

$$B \equiv B \cdot E + B \cdot F.$$

Ciò è assurdo, poichè, per ipotesi, B è un continuo.

∧ III. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme chiuso A sia un continuo è che, comunque si prendano in A due punti P e Q , esista sempre un continuo, contenuto in A , a cui essi appartengono.*

La condizione è necessaria, ed invero, se A è un continuo, due punti P e Q qualsivogliano di esso appartengono al continuo A contenuto in A . La condizione è sufficiente; ed invero, se A non è un continuo, si ha $A = B + C$, con B e C chiusi e privi di punti comuni. Presi due punti P e Q in A , il primo di B ed il secondo di C , non si può allora costruire un continuo che li contenga, contenute in A ; poichè, per qualunque insieme chiuso H , contenuto in A e contenente P e Q , esisterebbero i due prodotti $H \cdot B$ e $H \cdot C$, che sono (teor. III, n° 19) due insiemi chiusi, privi di punti comuni, laddove è $H \equiv H \cdot B + H \cdot C$.

Introduciamo ora alcune utili definizioni. Nello spazio $S_{(r)}$ si prendano, in un ordine stabilito, più punti A_1, A_2, \dots, A_n , non tutti coincidenti. L'insieme somma dei segmenti $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$ dicesi la *poligonale di quei punti, presi nell'ordine indi-*

cato, essa si denota con la notazione $A_1 A_2 \dots A_n$. Talchè, per definizione si ha:

$$A_1 A_2 \dots A_n = A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_{n-1} A_n.$$

I punti A_1, A_2, \dots, A_n diconsi i *vertici* della poligonale, i segmenti $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$ i *lati*. Il primo vertice A_1 della poligonale e l'ultimo A_n , diconsi *congiunti* dalla poligonale.

Si dice che una poligonale è *inscritta* in un dato insieme di punti, quando i suoi vertici sono contenuti nell'insieme.

Queste definizioni poste, andiamo a dare alcuni teoremi che ci consentiranno di stabilire un criterio, di facile applicazione, atto a riconoscere se un dato insieme chiuso è un continuo o pur no.

IV. *Siano A un insieme chiuso, P_0 un suo punto arbitrariamente fissato, δ un numero positivo pur esso arbitrariamente fissato. Dico che:*
a) lo insieme B_δ formato dal punto P_0 e da tutti i punti di A che si possono congiungere con P_0 mediante una poligonale inscritta in A , la cui massima lunghezza dei lati non supera δ , è un insieme chiuso;
b) se esiste l'insieme $C_\delta = A - B_\delta$ anche questo è chiuso.

Per dimostrare il teorema, cominciamo dall'osservare che se due punti qualsivogliano P e Q di A hanno fra di loro una distanza non superiore a δ , ed uno di essi appartiene a B_δ , a questo appartiene anche l'altro. Ed invero, se, per esempio, $P_0 P_1 P_2 \dots P_n P$ è una poligonale inscritta in A la cui massima lunghezza dei lati non supera δ , altrettanto si può dire per la poligonale $P_0 P_1 P_2 \dots P_n PQ$.

Ciò posto, dimostriamo l'asserzione *a*). Devo far vedere che se P è un punto limite di B_δ , esso appartiene a B_δ . Intanto, per essere $B_\delta < A$, P è punto limite anche di A , e poichè A è chiuso, esso punto appartiene ad A . Ma, per essere P punto limite di B_δ , esiste un punto Q di B_δ per il quale è $\overline{PQ} \leq \delta$, e pertanto anche P appartiene a B_δ .

Dimostriamo l'asserzione *b*). Un punto P , limite di C_δ appartiene ad A . Esiste un punto Q di C_δ per il quale è $\overline{PQ} \leq \delta$, e pertanto, poichè Q non appartiene a B_δ , a questo non apparterrà neanche P , cioè P è contenuto in C_δ .

✓ V. Due punti qualsivogliano P e Q di un continuo A si possono sempre congiungere mediante una poligonale inscritta nel continuo, la cui massima lunghezza dei lati è piccola quanto si vuole.

Ed invero, se, per un certo numero positivo δ , non si potesse costruire una poligonale congiungente P con Q , inscritta in A e la cui massima lunghezza dei lati non supera δ , esisterebbe l'insieme C_δ del teorema precedente (rispetto al punto P) ed A non sarebbe un continuo, poichè risulterebbe la somma dei due insiemi chiusi B_δ e C_δ — del teorema precedente — privi di punti comuni.

Per gli insiemi chiusi limitati sussiste il teorema seguente, reciproco di quello che precede.

✗ VI. Un insieme chiuso e limitato è certo un continuo se due punti qualsivogliano di esso possono sempre essere congiunti mediante una poligonale inscritta nell'insieme, la cui massima lunghezza dei lati è piccola quanto si vuole.

Se, invero, si fa l'ipotesi che l'insieme chiuso e limitato A non è un continuo, dico che si possono trovare due punti P e Q di A che non possono essere congiunti da una poligonale inscritta in A , la cui massima lunghezza dei lati sia piccola quanto si vuole. Nell'ipotesi ora fatta si ha $A = B + C$, ove B e C sono due insiemi chiusi e limitati privi di punti comuni. Si ponga $\overline{BC} = \sigma$, si avrà (teor. V, n° 19) $\sigma > 0$. Comunque si prenda un punto P in B e un punto Q in C , non si può costruire una poligonale che li congiunga, inscritta in A , la cui massima lunghezza dei lati è minore di σ . Difatti, percorrendo, nell'ordine scritto, i vertici $P, P_1, P_2, \dots, P_n, Q$ di una qualsiasi poligonale inscritta in A , congiungente P con Q , se ne troveranno due consecutivi, P_r e P_{r+1} , dei quali, il primo appartiene a B ed il secondo a C , per questi vertici si ha $\overline{P_r P_{r+1}} \geq \sigma$.

L'applicazione del criterio fornito da quest'ultimo teorema, consente di stabilire immediatamente che un segmento AB di $S_{(r)}$ è sempre un continuo. Dette a_1, a_2, \dots, a_r le coordinate di A e b_1, b_2, \dots, b_r quelle di B , si ricordi che tutti i punti $X(x_1, x_2, \dots, x_r)$ di AB si hanno, al variare del parametro t in $(0,1)$, ponendo

$$(1) \quad x_i = a_i + (b_i - a_i)t \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Posto

$$\overline{AB} = \sigma, \quad \alpha_i = \frac{b_i - a_i}{\sigma}, \quad \sigma t = s,$$

si ha $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_r^2 = 1$, e

$$(2) \quad x_i = a_i + \alpha_i s \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Le coordinate di tutti i punti del segmento \overline{AB} si hanno cioè anche dalle (2), al variare di s nell'intervallo $(0, \sigma)$. Per qualunque punto X di AB , si ha sempre $\overline{AX} = s$, quindi il parametro s rappresenta la *distanza* da A del punto variabile X del segmento. Se s' e s'' sono i valori di s per due punti X' e X'' di AB e se $s'' > s'$, si ha pertanto $\overline{X'X''} = s'' - s'$. Siano ora P e Q due qualsivogliano punti di AB e siano p e q ($p < q$) le loro distanze da A . Essendo n un qualsiasi e variabile numero intero e positivo, si prendano su AB i punti P_1, P_2, \dots, P_n , relativi ai valori

$$p + \frac{q-p}{n+1}, p + 2 \frac{q-p}{n+1}, \dots, p + n \frac{q-p}{n+1}$$

di s . La poligonale $PP_1P_2 \dots P_nQ$, congiungente P con Q , è non soltanto inscritta in AB , ma vi è addirittura contenuta, ed i lati di essa hanno la comune lunghezza $(q-p):n$, che può essere resa piccola a piacere, disponendo di n . Ciò dice (teor. VI) che:

✓ VII. *Ogni segmento di $S_{(r)}$ è un continuo. E pertanto (teor. II) ogni poligonale di $S_{(r)}$ è pure un continuo.*

Un insieme di $S_{(r)}$ dicesi **convesso** se è tale che ogni segmento i cui due punti estremi sono contenuti nell'insieme, appartiene per intero a questo. In virtù di III e di VII, si ha che:

✓ VIII. *Ogni insieme di $S_{(r)}$ chiuso e convesso è un continuo.*

L'intero spazio $S_{(r)}$ è un insieme chiuso e convesso, e pertanto, è un continuo.

Si dimostri, per esercizio, che ogni dominio circolare o rettangolare è un insieme convesso. Ne segue:

IX. *Ogni dominio circolare o rettangolare è un continuo.*

A questo risultato si giunge, del resto, più facilmente, al modo seguente. Sia C il centro di un dominio circolare, esso è un insieme

chiuso ed è un continuo perchè due suoi punti qualsivogliano P e Q possono sempre essere congiunti da un continuo, dalla poligonale PCQ . Allo stesso modo, se $P(p_1, p_2, \dots, p_r)$ e $Q(p_1 + \alpha_1, p_2 + \alpha_2, \dots, p_r + \alpha_r)$ sono due arbitrari punti di un dominio rettangolare (che sappiamo già essere un insieme chiuso), essi possono sempre essere congiunti da una poligonale contenuta nel dominio, precisamente, se P_i è il punto di coordinate

$p_1 + \alpha_1, p_2 + \alpha_2, \dots, p_i + \alpha_i, p_{i+1}, \dots, p_r, \quad (i = 1, 2, \dots, r),$
dalla poligonale $PP_1P_2\dots P_rQ$.

Si dimostri, per esercizio, che ogni continuo limitato di un $S_{(1)}$ è un segmento.

21. Punti interni, esterni, della frontiera. Insiemi aperti. — Sia A un insieme di punti di $S_{(r)}$. Un punto P si dirà *interno* ad A , se si può costruire un dominio circolare o quadrato, di centro in P , contenuto in A .

Evidentemente: Un punto interno ad un insieme appartiene ad esso ed è suo punto limite; ogni punto dell'insieme costituito dall'intero spazio $S_{(r)}$ è interno all'insieme; condizione necessaria e sufficiente affinchè un punto P sia interno al dominio circolare di centro in O e di raggio ρ è che sia $\overline{OP} < \rho$; condizione necessaria e sufficiente affinchè un punto $P(p_1, p_2, \dots, p_r)$ sia interno al dominio rettangolare di punti estremi $A(a_1, a_2, \dots, a_r)$ e $B(b_1, b_2, \dots, b_r)$ è che sia

$$a_i < p_i < b_i \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Un insieme può anche non possedere alcun punto interno. Tali sono, ad esempio, ogni insieme privo di derivato, ogni segmento di uno spazio ad un numero di dimensioni non inferiore a due.

L'insieme A non sia tutto lo spazio $S_{(r)}$, per modo che esista il suo complementare CA . Ogni punto interno a CA si dice *esterno* ad A .

Evidentemente: I punti P di $S_{(r)}$ esterni all'insieme A sono tutti e soli quelli per cui $\overline{PA} > 0$ (gli interni sono quelli per cui è $\overline{P(CA)} > 0$); condizione necessaria e sufficiente affinchè un punto sia esterno ad un dominio circolare o rettangolare o ad un segmento, è che non appartenga all'insieme.

In virtù del teor. V del n° 19 si ha, più in generale,

I. *Tutti e soli i punti esterni ad un insieme chiuso sono quelli non contenuti in esso.*

Vi sono insiemi che non ammettono punti esterni: Essi sono quelli e solo quelli i cui complementari sono privi di punti interni.

Ogni punto di $S_{(r)}$ che non sia nè interno, nè esterno ad un dato insieme A , dicesi *punto della frontiera di A* . Lo insieme di tutti i punti della frontiera di un insieme A chiamasi la *frontiera di A* , e si indica con la notazione FA .

Evidentemente: Un qualsiasi insieme e il suo complementare ammettono una comune frontiera; un punto di FA che appartenga ad A è punto limite di CA , è invece punto limite di A nell'altro caso; i punti di FA sono caratterizzati dalla proprietà che in ogni dominio circolare o rettangolare avente il centro in uno di essi cadono un punto di A e un punto di CA ; i punti P di FA sono tutti e soli i punti di $S_{(r)}$ simultaneamente verificanti le relazioni:

$$\overline{PA} = 0, \quad \overline{P(CA)} = 0.$$

Per le frontiere sussistono i teoremi seguenti.

II. *Ogni insieme A dello spazio $S_{(r)}$ che non coincida con lo spazio intiero, è provvisto di frontiera.*

Sia P un punto di A e Q un punto di CA . Dico che nel segmento PQ esiste un punto almeno della frontiera di A . Sia invero X un punto variabile in PQ , e poniamo $\overline{PX} = s$. Consideriamo l'insieme numerico I descritto da s quando si imponga al punto variabile X di rimanere in A . Tale insieme esiste, ad esso appartiene infatti almeno lo zero. Esso è limitato superiormente, poichè è sempre $s \leq \overline{PQ}$. Sia h l'estremo superiore di I (sarà $h \leq \overline{PQ}$) e sia H il punto di PQ alla distanza h da P . Se H appartiene ad A , esso sarà distinto da Q , ed il segmento HQ risulterà allora totalmente costituito di punti di CA , il punto H sarà perciò punto limite di CA ; ma un punto di A che è punto limite di CA è un punto di FA . Se si è nell'altro caso, se cioè H appartiene a CA , poichè esiste sempre allora un numero di I prossimo quanto si vuole ad h e di questo minore, si deduce che H è punto limite di A , e quindi, di nuovo, che esso è un punto di FA .

† III. *La frontiera di ogni insieme A è un insieme chiuso.*

Sia invero P un punto limite di FA , avrò dimostrato che P appartiene a FA se avrò fatto vedere che esso punto è anche punto limite di A e di CA . In un arbitrario dominio circolare C di centro in P , esiste un punto Q di FA , interno al dominio, distinto da P . Costruiamo un dominio circolare C' , di centro in Q , che sia contenuto in C e che escluda il punto P . Poichè Q è punto di FA cadranno entro C' e punti di A e punti di CA , che saranno distinti da P . E pertanto nell'arbitrario dominio circolare C , di centro in P , sono contenuti e punti di A e punti di CA , distinti da P , ciò che dimostra quanto si voleva.

IV. *Gli insiemi chiusi di $S_{(r)}$ sono quelli e solo quelli che contengono la propria frontiera, se questa esiste.*

Ed invero, se, in primo luogo, un insieme è chiuso esso contiene ogni punto della frontiera, poichè (teor. I) un punto non contenuto in un insieme chiuso è esterno all'insieme; in secondo luogo, ogni punto limite di un insieme o è interno all'insieme o appartiene alla sua frontiera, se, pertanto, l'insieme contiene la sua frontiera, conterrà ogni suo punto limite, sarà cioè chiuso.

Si dimostri, per esercizio, che:

† V. *La frontiera di un insieme perfetto è un insieme perfetto.*

Dal teorema III discende subito che:

VI. *Comunque si prenda un insieme A in $S_{(r)}$, l'insieme $A + FA$ è chiuso.*

Ed invero, si ha:

$$D(A + FA) \equiv DA + D(FA)$$

(teor. II, n° 19), ma $DA < A + FA$, $D(FA) < FA$, onde segue

$$D(A + FA) < A + FA.$$

Porremo la seguente definizione: Per un insieme qualsiasi A di $S_{(r)}$, chiamasi *inviluppo*^{d)} l'insieme chiuso $A + FA$. Sussiste il teorema:

VII. *L'inviluppo di un insieme è anche la somma dell'insieme e del suo derivato.*

d) opp. chiusura.

Il teorema asserisce che:

$$A + FA \equiv A + DA,$$

ora ciò è conseguenza immediata delle relazioni evidenti

$$FA < A + DA, \quad DA < A + FA.$$

Definiamo ora gli insiemi *aperti*. Un insieme dotato di punti interni che non contenga alcun punto della sua frontiera, dicesi *aperto*. Sussiste il teorema:

VIII. *Se A è un qualsiasi insieme di $S_{(r)}$, dotato di punti interni, l'insieme $A - FA$ è aperto.*

Il teorema si dimostra subito: Un qualsiasi punto P di $A - FA$ è interno ad A e pertanto, poichè un tale punto non è certo punto limite di FA , esisterà un dominio circolare totalmente costituito di punti di A e privo di punti di FA , cioè contenuto in $A - FA$.

Si badi bene che, secondo le definizioni poste, non si può asserire che un insieme *non* chiuso sia aperto.

Evidentemente: *Il complementare di un insieme chiuso è aperto, il complementare di un insieme aperto è chiuso.*

Si osservi infine che: *Un insieme A non può contemporaneamente essere aperto e chiuso, a meno che non coincida con l'intero spazio $S_{(r)}$. Ed invero, se A è aperto e non coincide con $S_{(r)}$, ammette almeno un punto P della frontiera (teor. II). Tale punto non è contenuto in A e pertanto è un suo punto limite. Dunque A non è chiuso perchè esiste, fuori di esso, un suo punto limite.*

22. Ulteriori definizioni. — Con la definizione seguente si estende la nozione di connessione ad un insieme qualsiasi: Un qualsiasi insieme di $S_{(r)}$ dicesi *connesso* se è tale il suo involucro, se cioè ha per involucro un continuo.

Per un insieme qualsiasi, dotato di punti interni, è utile anche dare la nozione di ciò che chiameremo *connessione interna*: Un qualsiasi insieme di $S_{(r)}$, dotato di punti interni, si dice *connesso internamente* se due qualsivogliano punti interni di esso, possono sempre essere congiunti mediante una poligonale costituita di punti tutti interni all'insieme.

Diamo ora la definizione di *dominio*. Dicesi *dominio* ogni in-

sieme perfetto tale che ogni suo punto sia punto limite di punti interni all'insieme. Chiamasi cioè dominio ogni insieme A verificante le relazioni

$$A \equiv DA \equiv D(A - FA).$$

Un dominio connesso è un particolare continuo. È facile dimostrare che: *Un dominio internamente connesso è un continuo.*

Un dominio rettangolare o circolare è un dominio internamente connesso, come subito si vede.

Diamo infine la definizione utilissima di *intorno di un punto*. Dato un punto P di $S_{(r)}$, ogni insieme aperto di $S_{(r)}$ che contenga P si chiama un *intorno* di P . Dato un punto P qualsivoglia dell'involucro di un insieme A , esiste sempre il prodotto $I \cdot A$ dell'insieme A e di un qualsiasi intorno I di P ; orbene, il prodotto $I \cdot A$ chiamasi un *intorno di P su A* . Se H è un dominio circolare (o rettangolare) di centro in P , l'insieme aperto $H - FH$ chiamasi anche un *intorno circolare (o rettangolare) di P* , ed il prodotto $(H - FH) \cdot A$ chiamasi un *intorno circolare (o rettangolare) di P su A* .

§ 3. Funzioni.

23. Concetto generale di funzione. — Siano $S_{(r)}$ e $S_{(q)}$ due spazii, rispettivamente, di dimensioni r e q , $[A]$ una famiglia ben definita di insiemi di punti di $S_{(r)}$, della quale indicheremo con A il componente generico. Supponiamo che si possieda un procedimento che consenta, non appena si sia, nel modo più arbitrario, fissato un insieme A della detta famiglia $[A]$, di determinare sempre, in corrispondenza, un unico insieme B , dello spazio $S_{(q)}$. Si esprime tale circostanza dicendo, semplicemente, che:

Nella famiglia $[A]$ è definita una funzione dell'insieme variabile A .

L'insieme B di $S_{(q)}$ che, l'indicato procedimento, fa corrispondere all'insieme variabile A di $[A]$, dicesi *una funzione di A* e si scrive:

$$B = f(A), \text{ oppure } B = g(A), \text{ oppure } B = \varphi(A), \text{ oppure } B = \psi(A), \dots$$

Esempi. 1°) Nello spazio fisico ordinario $S_{(3)}$ siano situati in posizione fissa e ben determinata più corpi elettrizzati occupanti una certa porzione T dello spazio. Prendiamo un qualunque insieme A di punti, affatto liberi, contenuto in $S_{(3)} - T$, e concepiamo di concentrare in ciascun punto dell'insieme la massa elettrica *uno*. Abbandonato dopo ciò a se l'insieme A di punti, esso, in virtù delle mutue azioni esercitantesi fra le masse elettriche deposte in T e in A , entrerà in movimento; orbene, alla fine di un secondo, ciascun punto di A raggiungerà in $S_{(3)}$ un punto di ben determinata posizione, il cui insieme indicheremo con B . L'insieme B di $S_{(3)}$ riesce ben determinato non appena si sia fissato, all'inizio, l'insieme A nella famiglia $[A]$ costituita da tutti gli insiemi di $S_{(3)}$ contenuti in $S_{(3)} - T$. Pertanto: *Nell'indicata famiglia si è così definita una funzione dell'insieme variabile A .* Essa è un insieme B dello stesso $S_{(3)}$ e scriveremo $B = f(A)$.

Quando, come nell'esempio attuale, la famiglia $[A]$ in cui si è definita una funzione è costituita da tutti gli insiemi contenuti in un dato insieme H [nell'esempio attuale è questo l'insieme $S_{(3)} - T$], si dice anche, semplicemente, che *si è definita in H una funzione di insieme.*

2°) Consideriamo, di nuovo, le circostanze dell'esempio precedente ed aggiungiamovi quella che i punti dell'insieme A non siano del tutto liberi, quando l'insieme è in moto, ma siano sempre allora vincolati l'uno all'altro dal vincolo della rigidità, nell'insieme $S_{(3)} - T$ si verrà così a definire un'altra funzione dell'insieme variabile A . Detto C l'insieme di punti rappresentanti in $S_{(3)}$ le posizioni che acquistano ora i punti di A — rigidamente vincolati — alla fine di un secondo, scriveremo, per esempio, $C = g(A)$, se si vuole evitare ogni confusione con la notazione usata per l'insieme B .

3°) Sia $[A]$ la famiglia costituita da tutti gli insiemi A di $S_{(r)}$ dotati di derivato; orbene, il derivato dell'insieme variabile A è una funzione di esso, definito nella famiglia indicata.

4°) Consideriamo sempre in $S_{(3)}$ i corpi elettrizzati del primo esempio occupanti l'insieme T , e fissiamo nello spazio una retta r (un $S_{(1)}$) e su di essa un punto O , contenuto in $S_{(3)} - T$, punto che assumeremo come origine di un sistema di ascisse sulla retta. Prendiamo ora un punto X su r , al quale imponiamo il vincolo di non

abbandonare mai la retta, mentre può su di essa affatto liberamente strisciare, e prendiamo altresì in $S_{(3)} - T$ il più arbitrario insieme A di punti. Supposto sempre, inizialmente, il punto X portato a coincidere con O , concepiamo di concentrare in questo punto ed in ciascun punto dell'insieme A la massa elettrica *uno* ed abbandoniamo dopo ciò a se e il punto X e l'insieme A . La posizione che, alla fine di un secondo, verrà ad occupare, sulla retta r , il punto X sarà ben determinata, non appena si sia fissato, all'inizio, l'insieme A , nella famiglia $[A]$ costituita da tutti gli insiemi di punti di $S_{(3)}$ contenuti in $S_{(3)} - T$. Pertanto, in $S_{(3)} - T$ si è così definita una funzione dell'insieme variabile A . Essa è un punto X della retta r (di un $S_{(1)}$); scriveremo $X = f(A)$.

Nell'esempio attuale la determinazione dell'insieme di punti che è funzione dell'insieme variabile A si riduce, unicamente, a quella dell'ascissa x del punto X . In questo caso, come in tutti quelli in cui l'insieme B , funzione di A , si riduce ad un unico punto di un $S_{(1)}$, si dice che l'*ascissa x del punto è funzione dell'insieme variabile A* , e si scrive $x = f(A)$. Si dice anche allora che il simbolo $f(A)$ rappresenta una *funzione reale* dell'insieme variabile A . Si ha dunque la seguente definizione:

Dire che *nella famiglia $[A]$ è definita una funzione reale dell'insieme variabile A* significa asserire che si possiede un procedimento che consente di far corrispondere ad ogni insieme, comunque scelto, della famiglia indicata, un numero reale ben determinato.

Nel nostro corso, prenderemo in considerazione, principalmente, le funzioni reali. Diamo altri due esempi di tali funzioni.

5°) Sia H un fissato arbitrario insieme di $S_{(r)}$. Comunque si assegni un insieme A contenuto in H , riesce ben determinata la distanza d della frontiera di A dalla frontiera di H ; tale numero d è dunque una funzione reale di insieme definita in H .

6°) Sia H un corpo pesante; il peso p di ciascuna porzione di esso, è una funzione reale di insieme definita in H .

7°) Consideriamo ora, di nuovo, tutte le circostanze dell'esempio quarto, con questa sola differenza: Il punto X è obbligato a non abbandonare mai, anziché una retta, un fissato piano π , sul quale può però strisciare affatto liberamente. Sul piano π fissiamo una coppia x e y di assi cartesiani ortogonali di origine O , contenuta in $S_{(3)} - T$,

nella quale origine, come nell' esempio quarto, concepiamo sempre di portare il punto X all' inizio.

Ad ogni determinazione iniziale dell' insieme A corrispondono ora due quantità reali: l' ascissa x e l' ordinata y del punto X alla fine di un secondo. Si hanno così due funzioni reali, definite in $[A]$, dell' insieme variabile A . Si ponga $x = f(A)$, $y = g(A)$. D' altra parte vi è perfetta corrispondenza biunivoca fra la variabile complessa $z = x + iy$ e la coppia (x, y) di coordinate del punto X , ed è perciò che si suole anche dire così: **la quantità complessa z , affissa del punto X , è funzione dell' insieme variabile A .** Posto $f(A) + ig(A) = h(A)$, si scrive $z = h(A)$. Si dice allora che il simbolo $h(A)$ rappresenta una **funzione complessa** dell' insieme variabile A . Abbiamo dunque la definizione seguente:

Dire che *nella famiglia $[A]$ di insiemi è definita una funzione complessa (una coppia di funzioni reali)* significa asserire che si possiede un procedimento che consente di far corrispondere ad ogni insieme, comunque scelto, della famiglia indicata, un numero complesso ben determinato (una coppia ben determinata di numeri reali).

8°) Consideriamo sempre in $S_{(3)}$ i corpi elettrizzati del 1° esempio, e consideriamo ora un insieme B di punti, per il quale, in virtù di speciali vincoli esistenti fra i punti di esso, la sua determinazione nello spazio, senza eccezione e senza ambiguità, si ottenga con l' assegnare n numeri reali x_1, x_2, \dots, x_n , i quali, viceversa, vengono ciascuno univocamente determinati non appena si sia fissata la posizione dell' insieme B . Denotiamo con $B_0 (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ una particolare e ben fissata posizione di B contenuta in $S_{(r)} - T$. Supposto sempre, inizialmente, l' insieme B portato in B_0 , concepiamo di concentrare in ciascun punto di B ed in ciascun punto di A la massa elettrica *uno*, ed abbandoniamo dopo ciò a se e l' insieme B e l' insieme A . La posizione che, alla fine di un secondo, verrà ad occupare l' insieme B sarà ben determinata non appena si sia fissato, all' inizio, l' insieme A in $S_{(3)} - T$. Pertanto si è ivi definito l' insieme B come funzione dell' insieme variabile A . Nell' esempio attuale, ad ogni determinazione di A , corrisponde una ben determinata n^{pla} di valori reali per le coordinate x_1, x_2, \dots, x_n di B , ciascuna di queste sarà perciò una funzione reale di A , defi-

nita in $S_{(3)} - T$. E perciò, scrivere $B = f(A)$, equivale a scrivere $x_1 = f_1(A)$, $x_2 = f_2(A)$, ..., $x_n = f_n(A)$. Si dice allora che *si è definita una n^{pla} di funzioni reali dell'insieme variabile A*.

9°) Nella definizione generale di funzione, data in principio, l'insieme variabile A può, in particolare, ridursi ad un punto P di $S_{(r)}$; in tal caso, la famiglia $[A]$ nella quale è definita la funzione, non è che un insieme di punti di $S_{(r)}$. La funzione dicesi allora una *funzione di punto*. Si ha dunque la definizione seguente:

Si dice che l'insieme B di $S_{(q)}$ è funzione del punto P (e si scrive $B = f(P)$) definita nell'insieme H di $S_{(r)}$, quando si possiede un procedimento che consente di far corrispondere ad ogni punto P , comunque scelto, nell'insieme H , una ed una sola determinazione dell'insieme B in $S_{(q)}$.

In particolare, si hanno le *funzioni reali*, le *funzioni complesse*, le *n^{ple} di funzioni reali di punto*.

Un punto P di $S_{(r)}$ si identifica alla *r^{pla}* delle sue coordinate x_1, x_2, \dots, x_r , ed è perciò che ogni funzione di punto, definita in un insieme di $S_{(r)}$, dicesi anche *funzione delle r variabili reali* x_1, x_2, \dots, x_r . Ed in luogo di scrivere $B = f(P)$, si scrive anche

$$B = f(x_1, x_2, \dots, x_r).$$

Per $r = 1$, si hanno le *funzioni di una variabile reale*: $B = f(x)$; per $r = 2$, si hanno le *funzioni di due variabili reali*: $B = f(x, y)$; ecc.

Se negli esempi 1°, 2°, 4°, 7° e 8° consideriamo il caso particolare in cui l'insieme variabile A si riduce ad un punto $P(x, y, z)$ si hanno altrettanti esempi di funzioni (nell'esempio 4° di funzione reale e nell'esempio 7° di funzione complessa) delle tre variabili reali x, y, z , definite in $S_{(3)} - T$. In ciò che segue diamo ancora altri esempi di funzioni di punto.

10°) Sia H un insieme ben determinato dello spazio ordinario, riferito ad una terna ortogonale di assi coordinati x, y, z . Se di ogni punto di H facciamo la proiezione ortogonale sull'asse delle x , si ottiene su questo (su un $S_{(1)}$) un insieme di punti A . Ad ogni punto x dell'insieme A facciamo corrispondere l'insieme B di punti, appartenenti ad H , che hanno l'ascissa x : si viene così a definire, in A , l'insieme B , come funzione della variabile reale x . E potremo

scrivere, ad esempio, $B=f(x)$. Detto x' un valore particolare di x , appartenente ad A , si ponga $B'=f(x')$. L'insieme B' chiamasi la *sezione* dell'insieme H , operata dal piano $x=x'$.

11°) Di ogni punto di H facciamo ora la proiezione sul piano (x, y) , si ottiene così su questo piano (su un $S_{(2)}$) un insieme di punti C . Se ad ogni punto (x, y) dell'insieme C facciamo corrispondere l'insieme D di punti, appartenenti ad H , che hanno nella terna (x, y, z) delle loro coordinate, le indicate due prime coordinate, si viene a definire, in C , l'insieme D come funzione delle due variabili x e y . Potremo scrivere, ad esempio, $D=g(x, y)$. Detto (x', y') un punto particolare di C , si ponga $D'=g(x', y')$. L'insieme D' dicesi la *sezione* dell'insieme H , operata dalla retta $(x=x', y=y')$.

12°) L'insieme H dei due esempi precedenti sia ora limitato; altrettanto potrà allora dirsi sempre di due insiemi B e D . Detto u il diametro di B e v il diametro di D , la quantità u riescè una funzione reale dell'unica variabile reale x definita in $A: u=\varphi(x)$, e la quantità v una funzione reale delle due variabili reali x e y definita in $C: v=\phi(x, y)$.

13°) Se ad ogni punto (x, y) del piano (x, y) facciamo corrispondere la quantità z data da

$$z = \frac{1}{\text{sen}(xy)},$$

si viene a definire z come funzione reale delle due variabili reali x e y , nell'insieme A del piano, ottenuto da questo col togliere tutti i punti della famiglia di iperbole equilatera coasintotiche:

$$xy = k\pi,$$

ottenute al variare di k nell'insieme dei numeri interi positivi, negativi o nulli.

14°) Si possono anche dare quanti si vogliono esempi, tratti dalle più modeste e realizzabili circostanze fisiche, di funzioni di più di due o tre variabili. Si sia, ad esempio, destato nello spazio ordinario un campo elettromagnetico variabile, dovuto ad una corrente elettrica alternata; allora la grandezza u della forza elettromagnetica in un punto dello spazio sarà una funzione reale delle quattro variabili reali x, y, z, t , ove le prime *tre* designano le coordinate del punto e t il tempo.

24. Funzioni di variabili complesse. — L'insieme B dello spazio $S_{(q)}$ sia funzione del punto P , definita in un insieme A di punti dello spazio $S_{(2r)}$ ad un numero pari $2r$ di dimensioni. Indicando con $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r$ le $2r$ coordinate di P , si potrà scrivere:

$$B = f(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r).$$

Consideriamo i piani complessi $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$ sui quali rappresentiamo, rispettivamente, le variabili complesse

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, \dots, z_r = x_r + iy_r.$$

Al variare del punto P in A , il punto z_k ($k=1, 2, \dots, r$) di π_k descrive un insieme A_k di punti di questo piano. Preso un punto $z_1 = x_1 + iy_1$ in A_1 , un punto $z_2 = x_2 + iy_2$ in A_2, \dots , un punto $z_r = x_r + iy_r$ in A_r , in modo però sempre che il punto $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r)$ sia contenuto in A , riesce ben determinato questo punto e quindi l'insieme B in $S_{(q)}$. Si può perciò dire che: *l'insieme B è funzione delle r variabili complesse z_1, z_2, \dots, z_r e scrivere, perciò, semplicemente,*

$$B = g(z_1, z_2, \dots, z_r).$$

Si dirà che la funzione B delle variabili complesse z_1, z_2, \dots, z_r è definita negli insiemi A_1, A_2, \dots, A_r , se, comunque si prendano un punto (x_1, y_1) in A_1 , un punto (x_2, y_2) in A_2, \dots , un punto (x_r, y_r) , in A_r , i $2r$ numeri reali $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r$ sono sempre coordinate di un punto P dell'insieme A di $S_{(2r)}$ in cui è definita la funzione $f(P)$.

Se, in particolare, B è un punto di un $S_{(1)}$ si hanno *le funzioni reali di variabili complesse*; se B è un punto di un $S_{(2)}$ si hanno *le funzioni complesse di variabili complesse*.

25. Rappresentazione geometrica delle funzioni reali di una o di due variabili reali. — Nell'insieme A dell'asse delle x sia definita la funzione reale

$$y = f(x)$$

della variabile reale x . Per ogni punto x dell'insieme A si costruisca, nel piano (x, y) , il punto di ascissa x e di ordinata $y = f(x)$; al variare di x in A si ottiene così un insieme C di punti del piano

che fornisce appunto quella che si chiama *la rappresentazione geometrica della funzione assegnata* $f(x)$. L'insieme di punti C chiamasi anche il *diagramma* della funzione, e ad esso, nei casi particolari che più interessano, potremo anche dare il nome di *curva di equazione* $y = f(x)$.

L'insieme dei punti del piano, definito dalle condizioni seguenti

$$x \text{ è in } A, \quad |y| \leq |f(x)|, \quad yf(x) \geq 0,$$

chiamasi *rettangoloide, relativo alla funzione* $f(x)$, *di base* A .

Così ad esempio, se nell'intervallo $(-1, 1)$ dell'asse delle x si definisce y come funzione di x ponendo $y = +\sqrt{1-x^2}$, il diagramma della funzione è la semicirconferenza, di centro nell'origine e di raggio uno, giacente nel semipiano delle y non negative; il rettangoloide relativo alla funzione, di base $(-1, 1)$, è il semicerchio relativo alla semicirconferenza indicata.

Nell'insieme A del piano (x, y) sia ora definita la funzione reale $z = f(x, y)$ delle due variabili reali x e y . Per ogni punto (x, y) dell'insieme A si costruisca, nello spazio (x, y, z) , il punto di coordinate $x, y, z = f(x, y)$; al variare di (x, y) in A si ottiene così un insieme S di punti dello spazio che fornisce appunto la cosiddetta *rappresentazione geometrica della funzione assegnata* $f(x, y)$. Questo insieme di punti chiamasi anche il *diagramma* della funzione, e ad esso, nei casi che più interessano, potremo anche dare il nome di *superficie di equazione* $z = f(x, y)$.

L'insieme di punti dello spazio, definito dalle condizioni seguenti

$$(x, y) \text{ è in } A, \quad |z| \leq |f(x, y)|, \quad zf(x, y) \geq 0,$$

chiamasi *cilindroide, relativo alla funzione* $f(x, y)$, *di base* A .

Così ad esempio, se nel cerchio A del piano (x, y) , di raggio uno e di centro nell'origine, definiamo la funzione z di x e di y , ponendo $z = +\sqrt{1-x^2-y^2}$, il diagramma della funzione è una mezza superficie sferica, di centro nell'origine e di raggio uno; il cilindroide relativo alla funzione, di base A , è una semisfera.

26. Generalità sulle funzioni reali di punto. — In questa prima parte del corso ci occuperemo esclusivamente delle funzioni di punto e principalmente delle funzioni reali di punto. Le defini-

zioni che porremo e le proprietà che osserveremo in questo parafraso sono, quasi sempre, comuni a tutte le funzioni reali di punto, in quante si vogliano variabili; è perciò che parlando della funzione reale $u=f(P)$ del punto P , definita in un dato insieme A dello spazio $S_{(r)}$, non daremo a r alcun valore speciale. Consigliamo però il lettore—che senta la necessità di procurarsi, degli oggetti che stiamo per considerare, un modello grafico illustrativo per fissarvi l'occhio—di limitarsi, nel leggere le righe che seguono, e pensare solo al caso delle funzioni reali di *due* variabili reali, al caso particolare cioè $r=2$.

Sia T un insieme di punti arbitrariamente variabile, contenuto nell'insieme A di $S_{(r)}$, in cui è definita la funzione reale di punto $u=f(P)$. Al variare di P in T , la quantità reale u descrive un insieme numerico U che sarà funzione di T e porremo perciò $U=\Phi(T)$. Evidentemente, se T_1 e T_2 sono due determinazioni di T , dalla relazione

$$T_1 < T_2$$

segue l'altra

$$(1) \quad \Phi(T_1) < \Phi(T_2).$$

La funzione $f(P)$, dicesi *limitata superiormente, limitata inferiormente, limitata, nell'insieme T* , se, rispettivamente, limitato superiormente, limitato inferiormente, limitato è l'insieme $\Phi(T)$. Gli estremi inferiore e superiore dell'insieme numerico $\Phi(T)$ si dicono, rispettivamente, gli *estremi inferiore e superiore della funzione in T* .

Evidentemente, segue dalla (1) [cfr. teor. I, n° 2, § 1] il teorema:

I. Se $T_1 < T_2$, si ha sempre, per la funzione,
 estr. inf. in $T_2 \leq$ estr. inf. in $T_1 \leq$ estr. sup. in $T_1 \leq$ estr. sup. in T_2 .

Se la funzione è limitata in tutto A , ad ogni porzione T di A corrispondono due determinati numeri e' ed e'' , rappresentanti, rispettivamente, gli estremi inferiore e superiore della funzione nell'insieme T . Le quantità e' ed e'' sono dunque due funzioni reali dell'insieme T definite in A ; porremo:

$$e' = e'(T), \quad e'' = e''(T).$$

Il diametro (o l'ampiezza) dell'insieme numerico $\Phi(T)$, chiamasi

l'oscillazione della funzione in T. Se la funzione è limitata in T , si ha

$$\text{osc. in } T = e''(T) - e'(T),$$

nell'altro caso l'oscillazione è infinita. Evidentemente:

II. Se $T_1 < T_2$, si ha:

$$\text{osc. in } T_1 \leq \text{osc. in } T_2.$$

Nell'ipotesi che la funzione $f(P)$ sia limitata in T , presi ivi due punti affatto arbitrari P e Q , si ha sempre

$$f(P) \leq e''(T), \quad f(Q) \leq e''(T),$$

$$f(Q) \geq e'(T), \quad f(P) \geq e'(T),$$

e quindi

$$f(P) - f(Q) \leq e''(T) - e'(T), \quad f(Q) - f(P) \leq e''(T) - e'(T),$$

cioè

$$(2) \quad |f(P) - f(Q)| \leq e''(T) - e'(T).$$

Se $e''(T) - e'(T) = 0$, se ne deduce

$$(3) \quad |f(P) - f(Q)| = e''(T) - e'(T) = 0,$$

se invece $e''(T) - e'(T) > 0$, comunque si assegni una quantità positiva ε , minore di $e''(T) - e'(T)$, esistono due particolari punti P_ε e Q_ε di T , per i quali si ha

$$f(P_\varepsilon) > e''(T) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad f(Q_\varepsilon) < e'(T) + \frac{\varepsilon}{2},$$

e quindi

$$f(P_\varepsilon) - f(Q_\varepsilon) > e''(T) - e'(T) - \varepsilon,$$

cioè

$$(4) \quad |f(P_\varepsilon) - f(Q_\varepsilon)| > e''(T) - e'(T) - \varepsilon.$$

Le (2), (3) e (4) provano che l'oscillazione di una funzione limitata in T è anche l'estremo superiore dell'insieme numerico descritto dal modulo della differenza $f(P) - f(Q)$, al variare dei punti P e Q in T . Si dimostra immediatamente che alla stessa conclusione si giunge anche quando la funzione non è limitata in T , e possiamo pertanto enunciare il teorema:

III. *L'oscillazione di una funzione $f(P)$ in un qualsiasi insieme T contenuto nell'insieme A di sua definizione è l'estremo superiore*

dell'insieme numerico descritto dal modulo della differenza $f(P) - f(Q)$, al variare, in tutti i modi possibili, dei punti P e Q in T .

27. Limiti in un punto per una funzione reale di punto. — L'insieme A di $S_{(r)}$ nel quale è definita la funzione reale di punto $u = f(P)$, sia dotato di derivato DA . Sia P_0 un punto arbitrariamente fissato in DA , vogliamo giungere all'importante concetto di *limite nel punto P_0 per la funzione $f(P)$* .

A tale scopo considereremo ogni operazione che consista nel fissare un punto P di A , distinto da P_0 , e nel determinare il valore che la funzione ha in quel punto. Si hanno così infinite operazioni, una per ogni punto di $A - P_0$. Indicheremo con $[O]_{P_0}$ l'insieme di tutte queste operazioni e ordineremo questo insieme al modo seguente: *Di ogni operazione O' , corrispondente ad un certo punto P' di $A - P_0$, diremo seguenti tutte quelle che si riferiscono ai punti P di $A - P_0$ per i quali si ha :*

$$\overline{P_0}P < \overline{P_0}P'.$$

L'insieme $[O]_{P_0}$ di operazioni riesce così ordinato nel senso precisato al n° 4 del § 1. Orbene, si pongono le seguenti definizioni.

Il massimo limite ed il minimo limite della variabile ordinata che risulta dalle operazioni dell'insieme $[O]_{P_0}$, chiamansi, rispettivamente, *il massimo limite ed il minimo limite della funzione $f(P)$, su A , nel punto P_0* (di DA), e si indicano, rispettivamente, con le notazioni

$$\lim''_{P \rightarrow P_0} f(P)(su A), \quad \lim'_{P \rightarrow P_0} f(P)(su A).$$

Una funzione $f(P)$, dicesi, su A , *in un punto P_0* (di DA) *regolare, non regolare, convergente, divergente, infinitesima, infinitamente grande*, secondochè regolare, non regolare, convergente, divergente, infinitesima, infinitamente grande è la variabile ordinata che risulta dalle operazioni dell'insieme ordinato $[O]_{P_0}$.

Se una funzione è regolare in un punto P_0 (di DA) ivi coincidono il suo massimo ed il suo minimo limite, si dice allora anche che *la funzione ha in P_0 un limite determinato* e tale limite si designa con la notazione

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)(su A).$$

Una funzione $f(P)$ dicesi, su A , *limitata superiormente, limitata inferiormente, limitata nelle vicinanze del punto P_0* (di DA), se, rispettivamente, definitivamente limitato superiormente, definitivamente limitato inferiormente, definitivamente limitato è l'insieme numerico descritto dalla variabile ordinata che risulta dalle operazioni dell'insieme ordinato $[O]_{P_0}$.

La variabile ordinata ottenuta dalle operazioni dell'insieme ordinato $[O]_{P_0}$ dicesi anche *ottenuta nel mentre che il punto P di A tende al punto P_0* (di DA) od anche *ottenuta facendo tendere il punto P di A al punto P_0* . I limiti considerati diconsi anche *i limiti di $f(P)$ nel mentre che il punto P di A tende a P_0* . Se la funzione $f(P)$ è in P_0 convergente verso il limite l (divergente), si dice anche che *la funzione $f(P)$ tende verso l* (verso $+\infty$ o verso $-\infty$) *nel mentre che il punto P di A tende verso P_0* .

Se, tenendo presente l'ordinamento dell'insieme di operazioni $[O]_{P_0}$, si considerano le definizioni ora enunciate, si deducono subito i seguenti teoremi che enunceremo sotto forma di nuove definizioni dei concetti di limite testè dati.

I. *Una funzione $f(P)$ dicesi limitata superiormente, limitata inferiormente, limitata (su A) nelle vicinanze del punto P_0 (di DA) se esiste un intorno circolare $C.A$ di P_0 su A , tale che l'insieme numerico $\Phi(C.A - P_0)$, dei valori assunti dalla funzione al variare di P in $C.A - P_0$, è, rispettivamente, limitato superiormente, limitato inferiormente, limitato.*

II. *Se una funzione $f(P)$ non è limitata superiormente (inferiormente), su A e nelle vicinanze del punto P_0 (di DA), si dice che essa ha (su A) in P_0 il massimo limite $+\infty$ (il minimo limite $-\infty$) e si scrive*

$$\lim''_{P \rightarrow P_0} f(P)(\text{su } A) = +\infty,$$

$$\left(\lim'_{P \rightarrow P_0} f(P)(\text{su } A) = -\infty \right).$$

III. *Se una funzione $f(P)$ è limitata nelle vicinanze del punto P_0 (di DA), essa ha in P_0 un massimo limite ed un minimo limite finiti. Indicati con l'' e l' i rispettivi valori di questi limiti, essi sono caratterizzati dalle seguenti proprietà:*

a) comunque si assegni un numero positivo ε , si può sempre in corrispondenza trovare un intorno circolare $C.A$ di P_0 su A , tale che il valore assunto dalla funzione in ogni punto di $C.A - P_0$ è sempre compreso fra i numeri $l' - \varepsilon$ e $l' + \varepsilon$;

b) comunque si prenda un intorno circolare $C.A$ di P_0 su A , esistono sempre in $C.A - P_0$ e punti nei quali la funzione prende valori maggiori di $l' - \varepsilon$ e punti nei quali prende valori minori di $l' + \varepsilon$.

IV. Si dice che, nel punto P_0 (di DA), la funzione $f(P)$ è (su A) convergente verso il limite l , o che vi ha il limite determinato e finito l , quando avviene che, comunque si assegni un numero positivo ε , si può sempre trovare un intorno circolare $C.A$ di P_0 su A , tale che il valore assunto dalla funzione in ogni punto di $C.A - P_0$ è sempre compreso fra i numeri $l - \varepsilon$ e $l + \varepsilon$; ovvero, con altre parole, quando avviene che, comunque si assegni un numero positivo ε , si può sempre in corrispondenza trovarne un altro δ_ε , tale che, per ogni punto P di A verificante la limitazione

$$0 < \overline{P_0 P} < \delta_\varepsilon,$$

si abbia

$$|l - f(P)| \leq \varepsilon.$$

Per $l = 0$, si ha la definizione di funzione infinitesima in P_0 .

V. Si dice che la funzione $f(P)$ è (su A) positivamente (negativamente) divergente nel punto P_0 (di DA), o che è ivi divergente verso $+\infty$ (verso $-\infty$), o che ha per limite $+\infty$ (per limite $-\infty$), quando avviene che, comunque si assegni un numero positivo K , si può sempre trovare un intorno circolare $C.A$ di P_0 su A tale che il valore assunto dalla funzione in ogni punto di $C.A - P_0$ è sempre maggiore di K (minore di $-K$), ovvero, con altre parole, quando avviene che, comunque si assegni un numero positivo K , si può sempre, in corrispondenza, trovarne un altro δ_K tale che per ogni punto P di A verificante la limitazione

$$0 < \overline{P_0 P} < \delta_K,$$

si abbia

$$f(P) > K \quad (f(P) < -K).$$

VI. Quando si dice che la funzione $f(P)$ è (su A) regolare nel punto P_0 (di DA) essa vi può essere o convergente o divergente (positivamente o negativamente).

VII. Si dice che la funzione $f(P)$ è (su A) infinitamente grande nel punto P_0 (di DA), se la funzione $|f(P)|$ è ivi divergente.

Sia B un insieme di punti contenuto in A , ed il punto P_0 sia un punto limite di B . La variabile ordinata ottenuta dalla funzione $f(P)$ facendo tendere il punto P , *mantenuto in B* , verso il punto P_0 è subordinata (cfr. n. 6 del § 1) alla variabile ordinata ottenuta facendo tendere il punto P , *comunque variabile in A* , allo stesso punto P_0 , onde segue il teorema:

VIII. Sia $B < A$ e $P_0 < DB$, se la funzione $f(P)$ è regolare, su A , nel punto P_0 , è altresì ivi regolare su B . Se $f(P)$ è convergente, su A , nel punto P_0 , verso il limite l , è ivi altresì convergente, su B , verso lo stesso limite.

Funzioni di una variabile. Sia, in particolare, A un insieme di punti dell'asse x e la funzione reale $y=f(x)$ della variabile reale x sia definita in questo insieme. Per ogni punto x_0 dell'asse x denoteremo con $A'(x_0)$ l'insieme, se esiste, comune ad A e all'intervallo $(-\infty, x_0)$ e con $A''(x_0)$ l'insieme, se esiste, comune ad A e all'intervallo $(x_0, +\infty)$.

Se il punto x_0 è punto limite di $A''(x_0)$ [di $A'(x_0)$], i limiti, su $A''(x_0)$ [su $A'(x_0)$] di $f(x)$ nel punto x_0 , diconsi *i limiti, su A , di $f(x)$ nel punto x_0 , a destra (a sinistra)*.

La funzione $f(x)$ dicesi, su A , in un punto x_0 di DA , regolare, non regolare, convergente, divergente, infinitesima, infinitamente grande, *a destra (a sinistra)* secondochè la funzione $f(x)$ è, su $A''(x_0)$ [su $A'(x_0)$], nel punto x_0 , regolare, non regolare, convergente, divergente, infinitesima, infinitamente grande.

Come particolarissimo caso del teorema VIII si ha il seguente:

IX. Una funzione $f(x)$ regolare in un punto x_0 , è ivi anche regolare a destra e a sinistra. Una funzione $f(x)$ convergente in un punto x_0 , verso il limite l , è ivi altresì convergente, verso lo stesso limite, a destra e a sinistra.

Si dimostra immediatamente che :

X. Una funzione $f(x)$ che in un punto x_0 , tanto a destra che a sinistra, converga verso lo stesso limite l , converge in quel punto verso il limite l .

La funzione $f(x)$ dicesi *non decrescente (non crescente)* in A , se per due quali si vogliano punti distinti x' e x'' di A si ha sempre

$$[f(x') - f(x'')](x' - x'') \geq 0 (\leq 0).$$

La funzione $f(x)$ dicesi *crescente (decrescente)* in A , se per due quali si vogliano punti distinti x' e x'' di A si ha sempre.

$$[f(x') - f(x'')](x' - x'') > 0 (< 0).$$

Una funzione $f(x)$ non decrescente (non crescente) in un insieme A dicesi anche ivi *monotona*. Da una tale funzione, facendo tendere il punto x al punto x_0 , su $A''(x_0)$ [su $A'(x_0)$] si ottiene sempre una variabile ordinata monotona, ne segue, in virtù del teor. III del n° 7 :

XI. Una funzione $f(x)$ monotona in un insieme A , è, in ogni punto di DA , regolare a destra e a sinistra. Una funzione $f(x)$ monotona e limitata in un insieme A , è, in ogni punto di DA , convergente a destra e convergente a sinistra.

28. **Locuzioni diverse.** — Sia $\sigma(P_0, P)$ una funzione reale delle coppie (P_0, P) di punti di $S_{(r)}$, definita in tutto $S_{(r)}$, la quale verifichi le seguenti proprietà :

a) È sempre

$$\sigma(P_0, P) \begin{cases} \neq 0 & \text{per } P \neq P_0, \\ = 0 & \text{per } P = P_0. \end{cases}$$

b) Comunque si fissi il punto P_0 in $S_{(r)}$ e comunque si assegni una quantità positiva ρ , l'insieme $I(P_0, \rho)$ dei punti P di $S_{(r)}$ per i quali è

$$|\sigma(P_0, P)| < \rho,$$

è sempre un intorno di P_0 .

c) Comunque si consideri un intorno circolare C di P_0 , esiste sempre un punto P' di $C - P_0$, tale che l'intorno $I[P_0, |\sigma(P_0, P')|]$

di P_0 , definito dalla limitazione

$$|\sigma(P_0, P)| < |\sigma(P_0, P')|,$$

sia contenuto in C .

Per gli intorno $I(P_0, \rho)$ di P_0 si ha evidentemente che: Se $0 < \rho' < \rho''$, di conseguenza

$$I(P_0, \rho') \subset I(P_0, \rho'').$$

In virtù della proprietà **b)**, si ha il teorema:

I. *Comunque si fissi il punto P_0 in $S_{(r)}$, riesce:*

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \sigma(P_0, P) = 0.$$

Ed invero, dato arbitrariamente un numero positivo ρ , poichè in $I(P_0, \rho)$ è sempre contenuto un intorno circolare di P_0 , esiste un tale intorno di P_0 , in ogni punto del quale è

$$|\sigma(P_0, P)| < \rho.$$

Ciò posto, sia P_0 un fissato punto limite dell'insieme A di punti ove è definita la funzione reale di punto $f(P)$, e consideriamo l'insieme ordinato $[O]_\sigma$ di operazioni, consistenti nel prendere un punto P di $A - P_0$ e nel determinare ivi il valore di $f(P)$, ordinato al modo seguente: Per v operazione O' di $[O]_\sigma$, relativa al punto P' di $A - P_0$, diconsi operazioni ad essa seguenti quelle relative ad ogni punto di $A - P_0$ contenuto nell'intorno $I[P_0, |\sigma(P_0, P')|]$.

Orbene, la variabile ordinata alla quale, nel modo ora detto, dà luogo la funzione $f(P)$, si dice ottenuta facendo tendere $\sigma(P_0, P)$ a zero, oppure ottenuta per $\sigma(P_0, P)$ infinitesimo; ed i limiti della variabile indicata si designano con le notazioni

$$\lim'_{\sigma(P_0, P) \rightarrow 0} f(P), \quad \lim''_{\sigma(P_0, P) \rightarrow 0} f(P),$$

e diconsi i limiti di $f(P)$ per $\sigma(P_0, P)$ infinitesimo. Se tali limiti coincidono si dice che la funzione $f(P)$ tende ad un limite determinato (finito o infinito) per $\sigma(P_0, P)$ infinitesimo.

Sussiste il teorema:

II. *Per ogni punto P_0 di DA , si ha sempre:*

$$\lim'_{\sigma(P_0, P) \rightarrow 0} f(P) = \lim'_{P \rightarrow P_0} f(P), \quad \lim''_{\sigma(P_0, P) \rightarrow 0} f(P) = \lim''_{P \rightarrow P_0} f(P).$$

Dimostriamo che se

$$\lim'_{P \rightarrow P_0} f(P) = \text{quantità finita} = l',$$

risulta

$$\lim'_{\sigma(P_0, P) \rightarrow 0} f(P) = l'.$$

Ed invero, preso arbitrariamente un numero positivo ε , esiste un intorno circolare C di P_0 tale che in $C - P_0$ è $f(P) > l' - \varepsilon$, ma vi è [proprietà c)] un punto P' di $C - P_0$ tale che l'intorno $I[P_0, |\sigma(P_0, P')|]$ è contenuto in C e pertanto in quell'intorno, per ogni punto di $A - P_0$, si ha pure $f(P) > l' - \varepsilon$. Qualunque intorno $I(P_0, \rho)$ si consideri poi di P_0 , poichè esso contiene sempre un intorno circolare di P_0 , esistono sempre in quello punti di $A - P_0$ per i quali è $f(P) < l' + \varepsilon$.

Con la locuzione ora introdotta, i limiti di $f(P)$ nel punto P_0 possono anche designare al modo seguente :

$$\lim'_{PP_0 \rightarrow 0} f(P), \quad \lim''_{PP_0 \rightarrow 0} f(P).$$

Sia ora $\tau(P_0, P)$ una funzione reale della coppia (P_0, P) di punti di $S_{(r)}$, definita in tutto $S_{(r)} - P_0$, la quale verifichi le seguenti proprietà :

b') Comunque si fissi il punto P_0 in $S_{(r)}$ e comunque si assegni una quantità positiva ρ , l'insieme $J(P_0, \rho)$ dei punti P di $S_{(r)}$ per i quali è

$$|\tau(P_0, P)| > \rho,$$

è sempre un intorno di P_0 , privato di P_0 .

c') Comunque si consideri un intorno circolare C di P_0 , esiste sempre un punto P' di $C - P_0$ tale che l'insieme $J[P_0, |\tau(P_0, P')|]$, definito dalla limitazione

$$|\tau(P_0, P)| > |\tau(P_0, P')|,$$

sia contenuto in C .

In virtù della proprietà **b')** si ha, come precedentemente, il teorema :

III. Comunque si fissi il punto P_0 in $S_{(r)}$, la funzione $\tau(P_0, P)$ è infinitamente grande in P_0 .

Designamo ora con $[O]_\tau$ l'insieme ordinato di operazioni, consi-

stenti nel prendere un punto P di $A - P_0$ e nel determinare ivi il valore di $f(P)$, ordinate al modo seguente: Per l'operazione O' di $[O]_\tau$, relativa al punto P' di $A - P_0$, diconsi operazioni ad essa seguenti quelle relative a ciascun punto di A contenuto in

$$J[P_0, |\tau(P_0, P)|].$$

La variabile ordinata alla quale dà ora luogo la funzione $f(P)$ dicesi ottenuta facendo divergere $\tau(P_0, P)$, oppure ottenuta per $\tau(P_0, P)$ infinitamente grande; ed i limiti della variabile si designano con le notazioni:

$$\lim'_{\tau(P_0, P) \rightarrow \infty} f(P), \quad \lim''_{\tau(P_0, P) \rightarrow \infty} f(P),$$

e diconsi i limiti di $f(P)$ per $\tau(P_0, P)$ infinitamente grande. Ecc.

Come precedentemente, si dimostra che:

IV. Per ogni punto P_0 di DA , si ha sempre:

$$\lim'_{\tau(P_0, P) \rightarrow \infty} f(P) = \lim'_{P \rightarrow P_0} f(P), \quad \lim''_{\tau(P_0, P) \rightarrow \infty} f(P) = \lim''_{P \rightarrow P_0} f(P).$$

Si può, per esempio, porre $\tau(P_0, P) = 1 : \overline{P_0 P}$.

Esempi. 1°) Siano: A un insieme di punti dell'asse delle x , x_0 un punto di DA e $f(x)$ una funzione reale della variabile reale x definita in A . Si ha, posto $x - x_0 = \Delta x$,

$$\lim'_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim'_{|\Delta x| \rightarrow 0} f(x) = \lim'_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) = \lim'_{1 : \Delta x \rightarrow \infty} f(x), \dots$$

2°) Siano: A un insieme di punti del piano (x, y) , $P_0(x_0, y_0)$ un punto limite di A e $f(x, y)$ una funzione reale delle due variabili reali x e y , definita in A . Siano a, b e c tre costanti reali, per le quali si abbia $ac - b^2 > 0$, e per ogni punto $P(x, y)$ del piano si ponga:

$$\begin{aligned} \sigma_1(P_0, P) &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \sigma_2(P_0, P) &= |x - x_0| + |y - y_0|, \\ \sigma_3(P_0, P) &= a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2, \end{aligned}$$

si ha allora:

$$\lim'_{P \rightarrow P_0} f(P) = \lim'_{\sigma_1 \rightarrow 0} f(P) = \lim'_{\sigma_2 \rightarrow 0} f(P) = \lim'_{\sigma_3 \rightarrow 0} f(P).$$

L'intorno di P_0 , definito dalla limitazione $\sigma_2(P_0, P) < \rho$, non è che il quadrato, privato del contorno, avente le diagonali parallele

agli assi coordinati, il centro nel punto P_0 e il diametro 2ρ . L' intorno di P_0 , definito dalla limitazione $\sigma_3(P_0, P) < \rho$ è un' ellisse, privata del contorno, avente il centro in P_0 .

29.* Estremi e oscillazione in un punto per una funzione reale di punto. — Andiamo ora a dare la nozione di *estremi*, per una funzione $f(P)$, in un punto P_0 dell' involucro $A + DA$ dell' insieme A ove essa è definita.

Se il punto P_0 appartiene a $DA - A$, gli *estremi inferiore e superiore della funzione in P_0* , sono, rispettivamente, il massimo ed il minimo limite della funzione in P_0 . Se il punto P_0 appartiene a $A \cdot (DA)$, l' *estremo superiore della funzione nel punto P_0* è $f(P_0)$ quando questo numero non è minore del massimo limite in P_0 , se no è questo stesso massimo limite; l' *estremo inferiore della funzione nel punto P_0* è $f(P_0)$ quando questo numero non è maggiore del minimo limite in P_0 , se no è questo stesso minimo limite. Se il punto P_0 appartiene a $A - DA$, gli *estremi inferiore e superiore della funzione in P_0* , coincidono col valore ivi della funzione.

Evidentemente:

I. In ogni punto P_0 del derivato DA dell' insieme A in cui è definita la funzione $f(P)$ si ha:

$$(1) \text{ estr. inf. in } P_0 \leq \lim'_{P \rightarrow P_0} f(P) \leq \lim''_{P \rightarrow P_0} f(P) \leq \text{estr. sup. in } P_0,$$

ed in ogni punto di A ,

$$(2) \text{ estr. inf. in } P_0 \leq f(P_0) \leq \text{estr. sup. in } P_0.$$

Si definisce pure l' *oscillazione della funzione $f(P)$ in un punto P_0* (di $A + DA$): Essa è l' infinito se almeno uno degli estremi in P_0 non è finito, è la differenza fra l' estremo superiore e l' estremo inferiore nell' altro caso.

Dimostriamo il seguente teorema:

II. Nell' ipotesi (semplificatrice) che la funzione $f(P)$ sia limitata in A , consideriamo il più arbitrario intorno I del punto P_0 di $A + DA$. Al variare, in tutti i modi possibili, di I , i tre numeri $e''(I, A)$, $e'(I, A)$, $e''(I, A) - e'(I, A)$ descrivono i tre insiemi numerici E'' , E' , D ; orbene, si ha che: *a)* l' estremo superiore della funzione in P_0 è l' estremo inferiore di E'' , *b)* l' estremo inferiore della funzione in

P_0 è l'estremo superiore di E' , c) l'oscillazione della funzione in P_0 è l'estremo inferiore di D .

Limitiamoci a dimostrare l'affermazione α) quando P_0 appartiene a DA . Nell'ipotesi fatta il massimo limite in P_0 riesce finito, denotiamolo con l'' . Se P_0 è in $DA - A$, l'estremo superiore ivi è precisamente l'' . Ora, dato un qualunque intorno $I.A$ di P_0 su A , esiste sempre un intorno circolare $C.A$ di P_0 su A , contenuto nel dato. Ma comunque si assegni un numero positivo ε , vi sono sempre punti P in $C.A$ per i quali è (teor. III del n° 27) $f(P) \geq l'' - \varepsilon$, si ha pertanto $e''(I.A) \geq l'' - \varepsilon$, e quindi, per l'arbitrarietà di ε , si deduce

$$(3) \quad e''(I.A) \geq l''.$$

D'altra parte, comunque si assegni una quantità positiva ε , esiste un intorno di P_0 su A nel quale la funzione vi ha un estremo superiore non maggiore di $l'' + \varepsilon$, poichè esiste (teor. III del n° 27) un intorno circolare di P_0 su A tale che in ogni suo punto è sempre $f(P) \leq l'' + \varepsilon$. E ciò dimostra, tenendo conto della (3) l'affermazione α) nell'ipotesi che P_0 sia un punto di $DA - A$.

Sia ora P_0 un punto di $A.DA$. Indicando con λ'' l'estremo superiore di $f(P)$ in P_0 , il numero λ'' è il più grande fra i numeri $f(P_0)$ e l'' . Come precedentemente si dimostra che è sempre

$$e''(I.A - P_0) \geq l'',$$

ma d'altra parte è anche $e''(I.A) \geq e''(I.A - P_0)$, $e''(I.A) \geq f(P_0)$, onde segue $e''(I.A) \geq \lambda''$. Se $l'' \geq f(P_0)$, sarà $\lambda'' = l''$; assegnato arbitrariamente un numero positivo ε , esiste un intorno circolare $C.A$ di P_0 su A , in ogni punto del quale, distinto da P_0 , si ha $f(P) \leq \lambda'' + \varepsilon$, ma è pure $f(P_0) \leq l'' < \lambda'' + \varepsilon$, onde segue $e''(C.A) \leq \lambda'' + \varepsilon$. Se $l'' < f(P_0)$, sarà $\lambda'' = f(P_0)$; assegnato arbitrariamente un numero positivo ε , esiste un intorno circolare $C.A$ di P_0 su A , in ogni punto del quale, distinto da P_0 , si ha $f(P) \leq \lambda'' + \varepsilon$, poichè $l'' < f(P_0) + \varepsilon = \lambda'' + \varepsilon$, ma è pure $f(P_0) = \lambda'' < \lambda'' + \varepsilon$, onde segue, di nuovo, $e''(C.A) \leq \lambda'' + \varepsilon$. L'affermazione α) è dunque dimostrata in ogni caso.

Supponiamo ora *limitata* la funzione $f(P)$, in tutto l'insieme A di sua definizione. In ogni punto P di DA riescono allora definiti quattro numeri determinati: i due estremi λ' e λ'' ($\lambda' \leq \lambda''$) e i due

limiti della funzione, l' e l'' ($l' \leq l''$). Si hanno così le quattro funzioni :

$$(4) \quad \begin{cases} \lambda' = \lambda'(P), & \lambda'' = \lambda''(P), \\ l = l'(P), & l'' = l''(P), \end{cases}$$

del punto P , definite in DA . Le prime due — che riescono definite in $A + DA$ — diconsi, rispettivamente, *la funzione estrema inferiore* e *la funzione estrema superiore* della $f(P)$; le ultime due diconsi, rispettivamente, *la funzione limite inferiore* e *la funzione limite superiore* della $f(P)$. Una quinta funzione definita in $A + DA$ è l'*oscillazione* della $f(P)$ data dalla differenza $\omega(P) = \lambda''(P) - \lambda'(P)$.

Per le funzioni (4) sussistono le relazioni, in DA ,

$$\lambda'(P) \leq l'(P) \leq l''(P) \leq \lambda''(P),$$

ed in ogni punto di A ,

$$\lambda'(P) \leq f(P) \leq \lambda''(P).$$

Assai facilmente si dimostra che:

III. *Le funzioni estreme λ' e λ'' (e quindi le funzioni limiti l' e l'') di una funzione $f(P)$, limitata nell'insieme A di sua definizione, sono esse pure limitate, anzi i loro valori cadono nell'intervallo $[e'(A), e''(A)]$ determinato dagli estremi inferiore e superiore della $f(P)$. Inoltre, comunque si consideri un insieme I aperto, avente punti comuni con l'involucro $H (= A + DA)$ dell'insieme A , la funzione λ'' ha per estremo superiore, in $I.A$ e in $I.H$, precisamente $e''(I.A)$ e la funzione λ' ha per estremo inferiore, in $I.A$ e in $I.H$, precisamente $e'(I.A)$.*

Preso infatti un punto P qualsiasi in $I.H$, il prodotto $I.A$ è sempre un intorno di P su A , e perciò (teor. II) si avrà :

$$e'(I.A) \leq \lambda'(P) \leq \lambda''(P) \leq e''(I.A),$$

ed in particolare, se I è lo spazio intiero,

$$e'(A) \leq \lambda'(P) \leq \lambda''(P) \leq e''(A).$$

D'altra parte, comunque si assegni una quantità positiva ε , vi sono punti di $I.A$ (e quindi di $I.H$) per i quali è

$$\lambda''(P) \geq f(P) \geq e''(I.A) - \varepsilon,$$

e punti di $I.A$ per i quali è

$$\lambda'(P) \leq f(P) \leq e'(I.A) + \varepsilon.$$

E con ciò il teorema è completamente dimostrato.

Un' importante immediata conseguenza del teorema è espressa del seguente :

IV. *L'estrema superiore dell'estrema superiore $\lambda''(P)$ di una funzione limitata, definita in un insieme qualsiasi A , coincide, in tutto l'involucro di A , con $\lambda''(P)$. L'estrema inferiore dell'estrema inferiore $\lambda'(P)$ della funzione coincide con $\lambda'(P)$.*

30*. Semicontinuità. — Nell'analisi matematica moderna ha acquistato grande importanza il concetto, introdotto dal *Baire*, di *semicontinuità* per le funzioni reali di punto, recentemente esteso dal *Tonelli* alle funzioni di linea. Vogliamo qui dire qualcosa di tale concetto, limitandoci a considerare le funzioni di punto.

Una funzione reale di punto, definita in un insieme A dotata di derivato DA , dicesi, in un punto P_0 di A , *semicontinua superiormente*, se il suo estremo superiore ivi coincide col valore che vi assume la funzione; dicesi *semicontinua inferiormente* se invece è il suo estremo inferiore che coincide col valore della funzione.

Evidentemente:

I. *Una funzione semicontinua superiormente (inferiormente) in un punto P_0 , di A . DA , è limitata superiormente (inferiormente) nelle vicinanze del punto P_0 .*

Si ha anche subito, come conseguenza del teor. II del n° 29*, che:

II. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f(P)$ sia semicontinua superiormente (inferiormente) in un punto P_0 di A . DA è che, comunque si assegni una quantità positiva ε , si possa sempre in corrispondenza determinare un intorno I_ε di P_0 , tale che risulti*

$$e''(I_\varepsilon \cdot A) \leq f(P_0) + \varepsilon \quad [e'(I_\varepsilon \cdot A) \geq f(P_0) - \varepsilon].$$

Applicando il criterio fornito da questo teorema, si dimostra immediatamente che:

III. *Se due o più funzioni sono definite in un comune insieme A , dotato di derivato, dalla semicontinuità superiore (inferiore) di esse,*

in un punto di $A.DA$, segue la semicontinuità superiore (inferiore) della loro somma, nello stesso punto.

È poi immediato che :

IV. Se la funzione $f(P)$ è semicontinua superiormente (inferiormente) in un punto di $A.DA$, la funzione $-f(P)$ è semicontinua inferiormente (superiormente) nello stesso punto.

Una funzione, definita in un insieme A dotato di derivato, dicesi semicontinua superiormente (inferiormente) nell'insieme A , se è tale in ogni punto di $A.DA$.

In virtù delle definizioni date, dal teor. V del n° precedente e dai teorr. II e III di questo, segue immediatamente che :

V. Comunque si definisca una funzione limitata in un insieme A , nell'insieme chiuso costituito dall'involucro di A , l'estrema superiore (inferiore) della funzione riesce limitata e superiormente (inferiormente) semicontinua ; l'oscillazione della funzione riesce limitata e superiormente semicontinua.

In base a questo teorema, volendo dunque, nell'intervallo (a, b) dell'asse delle x , definire una funzione semicontinua superiormente, basterà definire la più arbitraria funzione limitata nell'insieme, dei punti di (a, b) , di ascissa razionale : L'estrema superiore di tale funzione è in (a, b) una funzione superiormente semicontinua.

Si dimostrino, per esercizio, i seguenti teoremi :

VI. Se la funzione $f(P)$ è definita nell'insieme chiuso A ed è ivi superiormente (inferiormente) semicontinua, comunque si assegni un numero k , l'insieme dei punti di A in cui è $f(P) \geq k$ ($f(P) \leq k$) è del pari chiuso, se esiste.

VII. Comunque si definisca una funzione limitata in un insieme A , i punti dell'involucro di A , nei quali l'oscillazione della funzione non è inferiore ad una quantità arbitrariamente assegnata k , è sempre un insieme chiuso, se esiste.

Diamo infine il concetto di *continuità* che, sotto altra forma, torneremo a dare nell'articolo seguente. Una funzione $f(P)$ dicesi *continua* in un punto P del derivato DA dell'insieme A in cui essa è definita, se in P coincidono i suoi due estremi.

Evidentemente: In un punto di continuità la funzione è regolare; in un punto di continuità appartenente a A . DA vi è semi-continuità superiore ed inferiore e vi è convergenza verso il valore che la funzione assume nel punto.

Una funzione continua in ogni punto di DA , dicesi *continua nell'insieme A* . Evidentemente. Le funzioni limitate e continue in A sono tutte e sole quelle la cui oscillazione è identicamente nulla in DA .

31. Continuità. — La funzione $f(P)$ sia definita nell'insieme di punti A , dotato di derivato DA . Andiamo a dare, in un punto P di DA , la fondamentale nozione di *continuità* per la funzione. Tale nozione è diversa secondochè il punto P di DA appartiene o pur no all'insieme A nel quale è definita la funzione. Si ha precisamente che:

a) La funzione $f(P)$ dicesi *continua (su A)* in un punto P_0 del derivato DA dell'insieme A di sua definizione *non appartenente ad A* , cioè in un punto P_0 di $DA - A$, semplicemente *se è regolare in P_0* ;

b) la funzione $f(P)$ dicesi *continua (su A)* in un punto P_0 del derivato DA dell'insieme A di sua definizione *appartenente ad A* , cioè in un punto P_0 di $A \cdot DA$, *se è ivi convergente verso il valore $f(P_0)$ che vi assume la funzione.*

Una funzione $f(P)$ dicesi *continua nell'insieme A* di sua definizione, se è continua in ogni punto del derivato DA di tale insieme.

Una funzione $f(P)$ dicesi *discontinua nell'insieme A* di sua definizione, se esistono dei punti di DA nei quali la funzione non è continua. Ogni tale punto dicesi *punto di discontinuità* per la funzione.

Una funzione $f(P)$ continua in un insieme chiuso A è convergente in ogni punto P_0 di DA verso il valore $f(P_0)$ che vi assume la funzione.

Una funzione $f(P)$ continua in un insieme qualsiasi A e ivi limitata, è convergente in ogni punto P_0 di DA .

Si ha evidentemente (in virtù del teor. IV del n° 27) che:

I. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione $f(P)$ sia continua (su A) in un punto P_0 di $A \cdot DA$ è che per ogni arbitrario*

numero positivo ε se ne possa trovare un altro δ_ε tale che per tutti i punti di A verificanti la limitazione

$$0 < \overline{P_0P} < \delta_\varepsilon,$$

si abbia sempre

$$|f(P) - f(P_0)| \leq \varepsilon.$$

Ne segue immediatamente:

II. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione $f(P)$ sia continua (su A) in un punto P_0 di A . DA è che, comunque si assegni un numero positivo ε , si possa sempre trovarne un altro δ_ε tale che l'oscillazione della funzione nell'intorno circolare di P_0 , su A , avente il raggio δ_ε , non sia superiore a ε .*

La condizione è sufficiente; infatti, se nell'intorno circolare $C.A$ di P_0 , su A , l'oscillazione della funzione non supera ε , per due punti P e Q comunque presi in $C.A$, si avrà sempre

$$|f(P) - f(Q)| \leq \varepsilon,$$

ed in particolare, per $Q \equiv P_0$, si avrà $|f(P) - f(P_0)| \leq \varepsilon$. La condizione è necessaria; infatti, se nell'intorno circolare $C.A$ di P_0 su A , si ha sempre

$$|f(P) - f(P_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

per una qualsiasi coppia P e Q di punti in $C.A$, sarà

$$\begin{aligned} |f(P) - f(Q)| &= |(f(P) - f(P_0)) + (f(P_0) - f(Q))| \\ &\leq |f(P) - f(P_0)| + |f(Q) - f(P_0)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

È immediatamente dimostrato che:

III. *Se la funzione $f(P)$ è continua in un insieme A , è ivi continua la funzione $|f(P)|$.*

Non sussiste la proposizione reciproca. È notevole il seguente teorema, che subito discende dal teor. VIII del n° 27:

IV. *Se una funzione $f(P)$ è continua in un insieme A , è altresì continua in ogni insieme B contenuto in A .*

È corollario immediato del teorema ora enunciato, il seguente:

V. *Se la funzione di r variabili reali $f(P) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ è*

continua nel punto $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0)$ e se $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ rappresenta una permutazione qualsiasi delle x_1, x_2, \dots, x_n , attribuiti alle variabili $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$ i valori fissi $x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, \dots, x_{i_s}^0$, si ottiene dalla $f(P)$ una funzione delle rimanenti variabili $x_{i_{s+1}}, x_{i_{s+2}}, \dots, x_{i_r}$, continua nel punto $x_{i_{s+1}}^0, x_{i_{s+2}}^0, \dots, x_{i_r}^0$.

Se si suppone $s < r$, il teorema reciproco del precedente non è vero (vedi il seguente esempio 3°).

Esempi. 1°) La funzione

$$y = \frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} \quad (a < b),$$

è definita nell'insieme A costituito da tutti i punti dell'asse delle x , con esclusione dei punti a e b . Essa è in A una funzione continua.

2°) La funzione

$$y = \frac{1}{(x-a)(x-b)^2} \quad (a < b),$$

è definita nello stesso insieme A . Essa però è discontinua in A , precisamente, nel punto a di DA non è continua.

3°) La funzione

$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

è definita nell'insieme A costituito da tutto il piano, con esclusione dell'origine. Essa non è continua ed ha precisamente l'origine (che è un punto di DA) come punto di discontinuità. Non ostante, assegnato, arbitrariamente, ad una delle variabili (alla x o alla y) un valore fisso, essa riesce sempre funzione dell'altra variabile, continua ovunque.

Distinzione dei punti di discontinuità per una funzione. Si sogliono distinguere in tre categorie i punti (di DA) di discontinuità di una funzione.

In un punto P_0 di $A \cdot DA$ si dice che la funzione $f(P)$ vi ha una **discontinuità eliminabile**, se essa è ivi convergente verso un valore diverso da $f(P_0)$. In tal caso, basta soltanto cambiare la definizione della funzione in P_0 , attribuendole ivi il valore del suo limite, per eliminare la discontinuità.

In un punto P_0 di DA si dice che la funzione ha una *discontinuità di prima specie* se è possibile determinare un numero finito di insiemi B_1, B_2, \dots, B_s , la cui somma dia A e i cui derivati contengano, ciascuno, il punto P_0 , in modo che, considerando, separatamente, la funzione in ciascuno degli insiemi B_1, B_2, \dots, B_s , il punto P_0 risulti per la funzione o un punto di continuità o un punto di discontinuità eliminabile.

La funzione del 2° esempio ha nel punto a una discontinuità di prima specie. Essa, infatti, considerata, separatamente, in ciascuno dei due intervalli $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, riesce sempre continua nel punto a .

Si dice che la funzione ha nel punto P_0 una *discontinuità di seconda specie*, se la discontinuità non è nè eliminabile, nè di prima specie.

Funzioni di una variabile. Sia, in particolare, A un insieme di punti dell'asse delle x e la funzione reale $y = f(x)$ della variabile reale x sia definita in questo insieme. Come alla fine del n° 27, indicheremo con $A''(x_0)$ [con $A'(x_0)$] l'insieme dei punti di A per i quali è $x \geq x_0$ (per i quali è $x \leq x_0$). Si dice che la funzione $f(x)$, in un punto x_0 di DA , è *continua, su A , a destra (a sinistra)* se in quel punto è continua su $A''(x_0)$ [su $A'(x_0)$].

Evidentemente (teor. IV): *Ogni funzione $f(x)$ continua su A , in un punto x_0 , è altresì continua a destra e a sinistra.* La proposizione reciproca non è vera, sussiste però il teorema seguente di immediata dimostrazione:

VI. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione $f(x)$ sia continua, su A , in un punto x_0 di $A \cdot DA$, è che sia in quel punto continua, su A , a destra e a sinistra.*

Se, in particolare, l'insieme A è perfetto o si riduce ad un intervallo (a', a'') dell'asse delle x si ha che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione $f(x)$ sia continua in A è che sia in ogni suo punto continua a destra e a sinistra.*

Come corollario immediato del teor. XI del n° 27 si ha il seguente:

VII. *Se $f(x)$ è una funzione monotona e limitata in un insieme A , in ogni punto di DA si ha che: tanto a destra che a sinistra o la*

funzione è continua o vi ha una discontinuità eliminabile. E pertanto: Una funzione $f(x)$ monotona e limitata in un insieme A non vi può possedere che discontinuità di prima specie.

Dimostriamo ora il notevole teorema:

VIII. Se l'insieme A è chiuso, ogni funzione $f(x)$ ivi monotona tale che, comunque si prendano due punti x' e x'' di A , assume ogni valore compreso fra $f(x')$ e $f(x'')$, è continua.

Occorre e basta dimostrare (teor. VI) che la funzione $f(x)$, in un punto x_0 di $DA(<A)$ è continua tanto a destra che a sinistra. Supponiamo, per fissare le idee, la funzione $f(x)$ non decrescente in A , e dimostriamo, per esempio, che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ (su } A, \text{ a destra)} = f(x_0).$$

Poichè $f(x)$ è non decrescente e $f(x) \geq f(x_0)$, esiste determinato e finito il limite indicato. Designatone con l il valore si ha $l \geq f(x_0)$, devo provare che $l = f(x_0)$. Se fosse infatti $l > f(x_0)$, poichè (su A)

$$f(x) \geq l \text{ per } x \geq x_0, \quad f(x) \leq f(x_0) \text{ per } x \leq x_0,$$

per un punto x di A a destra di x_0 , la $f(x)$ non assumerebbe tutti i valori compresi fra $f(x)$ e $f(x_0)$, non assumerebbe alcun valore intorno all'intervallo $(f(x_0), l)$.

Dal teorema ora dimostrato e dal teorema VI segue poi anche che:

IX. Se l'insieme A è chiuso e se la funzione $f(x)$, in esso definita, è tale che, comunque si prendano due punti x' e x'' di A , assume ogni valore compreso fra $f(x')$ e $f(x'')$, se inoltre esistono n punti a_1, a_2, \dots, a_n ($a_1 < a_2 < \dots < a_n$) dell'asse delle x , tali che in ciascuno degli insiemi

$$A.(-\infty, a_1), A.(a_1, a_2), \dots, A.(a_{n-1}, a_n), A(a_n, +\infty),$$

la funzione $f(x)$ è monotona, si può allora di nuovo asserire che la $f(x)$ è continua in A .

Come immediato corollario di quest'ultimo teorema, ricordando le proprietà delle funzioni elementari dimostrate in *Algebra elemen-*

tare, si ha *la continuità di tutte le funzioni elementari*, si ha cioè che :

X. Se α è una costante positiva le funzioni

$$x^\alpha, \alpha^x, \log_\alpha x, \operatorname{sen} x, \operatorname{tang} x, \operatorname{arcsen} x, \operatorname{arctang} x,$$

sono continue in ogni punto ove risultino definite.

32. Continuità in un insieme chiuso. — Particolarmente interessante è la considerazione della continuità in un insieme chiuso. Cominciamo dal dimostrare, al riguardo, il teorema seguente :

I. Se la funzione $f(P)$ è continua nell'insieme chiuso A , comunque si assegni una quantità k , l'insieme B_k costituito da tutti i punti di A (se ve ne sono) in ciascuno dei quali è $f(P) \geq k$, e l'insieme C_k costituito da tutti i punti di A (se ve ne sono) in ciascuno dei quali è $f(P) \leq k$, sono sempre chiusi.

Limitiamoci a dimostrare la chiusura dell'insieme B_k . Occorre dimostrare ciò soltanto nel caso che questo insieme sia dotato di derivato. Sia P_0 un punto limite di B_k , esso è anche punto limite di A , e come tale, poichè A è chiuso, appartiene ad A . Pertanto, data la continuità in A di $f(P)$, comunque si assegni una quantità positiva ε , si può sempre trovare un intorno circolare $I.A$ di P_0 su A , in ciascun punto del quale è sempre

$$f(P_0) - \varepsilon \leq f(P) \leq f(P_0) + \varepsilon.$$

Ma fra questi punti ve ne sono sempre, quanti se ne vuole, appartenenti a B_k e per ognuno di questi si avrà dunque

$$k \leq f(P) \leq f(P_0) + \varepsilon,$$

onde segue $k \leq f(P_0) + \varepsilon$, e quindi, per l'arbitrarietà di ε , $k \leq f(P_0)$. Il punto P_0 è perciò un punto di B_k . E ciò dimostra quanto si voleva.

Dal teorema ora dimostrato discende subito il seguente, il quale dà ragione della denominazione di funzioni continue data alle funzioni che stiamo considerando.

II. Una funzione $f(P)$, continua in un continuo C , non può ivi prendere due valori distinti a e b ($a < b$), senza passare per tutti i valori dell'intervallo (a, b)

Devo dimostrare che se c è un qualsiasi valore dell'intervallo (a, b) , esiste sempre almeno un punto del continuo C , nel quale la funzione prende il valore c . Diciamo A l'insieme dei punti di C in ciascuno dei quali la funzione $f(P)$ prende un valore non superiore a c e diciamo B l'insieme dei punti di C in ciascuno dei quali la funzione prende un valore non inferiore a c . I due insiemi A e B esistono certamente e sono (teor. I) entrambi chiusi. Essi devono ammettere almeno un punto P comune (cfr. n° 20 del § 2), poichè la loro somma dà il continuo C ; ed in tale punto riesce $f(P) = c$.

In particolare dunque: *Se una funzione continua in un continuo C prende ivi valori di segno opposto, deve esistere un punto di C , almeno uno, nel quale la funzione si annulla.*

Osservazione. Sia P_0 un punto limite di A tale che, comunque si prendano i due numeri positivi p e q , l'insieme A_{pq} , se esiste, dei punti P di A verificanti la limitazione

$$p \leq \overline{P_0 P} \leq p + q,$$

sia sempre un continuo. Si ha allora che: *Se la funzione $f(P)$ è continua in ciascun punto dell'insieme $A - P_0$, dall'ipotesi ch'essa sia infinitamente grande in P_0 , ne segue la sua divergenza ivi.*

Ed invero, se $f(P)$ è infinitamente grande in P_0 , comunque si assegni un numero positivo K , si può sempre determinare un intorno circolare I_K di P_0 , su A , in ogni punto del quale è $|f(P)| > K$. Per dimostrare l'asserita divergenza di $f(P)$ in P_0 basta far vedere che, qualunque sia K , essa ha segno costante in I_K . Se ciò non fosse, e se, per esempio, nel punto P di $I_K(\overline{P_0 P} = p)$ fosse positiva, e negativa nel punto $Q(\overline{P_0 Q} = p + q)$; poichè A_{pq} è un continuo ed ivi la funzione $f(P)$ è continua, esisterebbe un punto R di A_{pq} , e quindi di I_K , nel quale è $f(R) = 0$, il che è assurdo.

Un'altra importante proprietà delle funzioni continue è espressa dal seguente teorema:

III. *Una funzione $f(P)$ continua in un insieme chiuso e limitato A , vi è limitata.*

Occorre e basta dimostrare che la funzione continua $|f(P)|$ è limitata in A . Possiamo perciò limitarci a considerare il caso par-

ticolare in cui la funzione continua $f(P)$ non è mai negativa in A . Se la funzione $f(P)$, supposta dunque continua e non negativa nell'insieme chiuso e limitato A , fosse ivi non limitata, qualunque sia il numero intero e positivo n , esisterebbe un insieme A_n , contenuto in A , in ogni punto del quale è $f(P) \geq n$. Per ogni n l'insieme A_n , è chiuso (teor. I) e contiene l'insieme A_{n-1} . Ora, essendo inoltre A limitato e $A_n < A$, esiste (teor. VII del n° 19, § 2) un punto di A comune a tutti gli insiemi A_n . In tale punto P_0 risulterebbe sempre, qualunque sia il numero intero e positivo n , $f(P_0) \geq n$, ciò che è assurdo (*).

Allo stesso modo si dimostra il classico *teorema di Weierstrass* sulle funzioni continue:

IV. *Fra tutti i valori che una funzione $f(P)$, continua in un insieme chiuso e limitato A , assume in questo insieme, vi sono i suoi estremi (inferiore e superiore) in A .*

La funzione $f(P)$ è intanto limitata in A (teor. precedente). Limitiamoci a dimostrare che, indicando con M il suo estremo superiore in A , esiste sempre ivi un punto P_0 per il quale si ha $f(P_0) = M$. Ed inverso, comunque si assegni un numero intero e positivo n , esiste in A l'insieme A_n di punti, in ciascuno dei quali è

$$f(P) \geq M - \frac{1}{n}.$$

Per ogni n l'insieme A_n è chiuso e contiene A_{n-1} . Nel punto P_0 , comune a tutti gli insiemi A_n , si ha:

$$M \geq f(P_0) \geq M - \frac{1}{n},$$

comunque si prenda il numero intero e positivo n ; ne segue $f(P_0) = M$ (**).

(*) La stessa dimostrazione (in base al teor. VI del n° 30*) vale per il teorema:

III'. *Una funzione $f(P)$ semicontinua superiormente (inferiormente) in un insieme chiuso e limitato A , vi è limitata superiormente (inferiormente).*

(**) La stessa dimostrazione (teor. VI del n° 30*) vale per il teorema:

IV'. *Fra tutti i valori che una funzione $f(P)$, semicontinua superiormente (inferiormente) in un insieme chiuso e limitato A , assume in questo insieme, vi è il suo estremo superiore (inferiore) in A .*

Il dimostrato teorema di *Weierstrass* consente dunque di asserire che: *Fra tutti i valori che una funzione continua in un insieme chiuso e limitato A assume in questo insieme, ve n'è uno più grande di tutti ed uno più piccolo.* In altre parole, si ha cioè che: *Ogni funzione continua in un insieme chiuso e limitato A vi ammette un massimo ed un minimo.*

Come immediato corollario si ha:

V. *Se una funzione $f(P)$, continua in un insieme chiuso e limitato A , è ivi ovunque positiva, esiste un numero positivo m , tale che, comunque si prenda P in A , è sempre $f(P) \geq m$.*

Un altro classico teorema sulle funzioni continue è il *Teorema di Cantor*. Noi lo dedurremo, come corollario, dal teorema di *Weierstrass*.

VI. *Se la funzione $f(P)$ è continua nell'insieme chiuso e limitato A , comunque si assegni un numero positivo ε , si può sempre trovarne un altro δ tale che, l'oscillazione della funzione in ogni insieme contenuto in A , avente un diametro inferiore a δ , non supera mai ε .*

Fissiamo il numero positivo ε , arbitrariamente scelto. Essendo la funzione $f(P)$ continua nell'insieme A , per ogni punto P di A si può sempre costruire un suo intorno circolare (su A) nel quale la oscillazione della funzione non supera ε . Di tali intorni ve ne sono infiniti, poichè se un certo intorno di P verifica la proprietà indicata, la stessa proprietà sarà verificata da ogni intorno di P di raggio minore. Se vi è un punto P di A per il quale esiste uno degli intorni indicati, di raggio superiore al diametro di A , il teorema è senz'altro dimostrato. Faremo dunque l'ipotesi che il detto raggio, per ogni punto di A , non superi mai il diametro di A . Indichere-

Adunque: *Ogni funzione semicontinua superiormente (inferiormente) in un insieme chiuso e limitato A , ammette un massimo (un minimo).*

In base al teorema V del n° 29*, come corollario di quest'ultimo teorema, si deduce il seguente, che deriva da *Weierstrass*:

IV''. *Comunque si definisca una funzione limitata in un insieme limitato A , nell'involucro di A esiste un punto P' (un punto P'') in ogni intorno, su A , del quale l'estremo inferiore (superiore) della funzione è sempre eguale all'estremo inferiore (superiore) della funzione stessa nell'intero insieme A .*

mo con $\rho(P)$ l'estremo superiore dei raggi dei sopradetti interni circolari del punto P . Il numero positivo $\rho(P)$ riesce una funzione del punto P definita in A , ed ivi sempre positiva. Indicheremo con $C(P)$ l'intorno circolare di P (su A) di raggio $\rho(P)$.

Dico che $\rho(P)$ è in A una funzione continua. Ed invero, se P è un punto di A , arbitrariamente fissato, e se Q è un punto di $C(P)$, poichè l'intorno circolare di Q (su A) di raggio $\rho(P) - \overline{PQ}$ è contenuto in $C(P)$, sarà certo

$$\rho(Q) \geq \rho(P) - \overline{PQ};$$

ma sarà anche

$$\rho(Q) \leq \rho(P) + \overline{PQ},$$

poichè se fosse $\rho(Q) > \rho(P) + \overline{PQ}$ l'intorno circolare $C(Q)$ conterrebbe $C(P)$ con la sua frontiera, ed esisterebbe quindi un intorno circolare di P (su A) avente un raggio maggiore di $\rho(P)$, nel quale l'oscillazione di f non supera ε , il che è assurdo. Sarà perciò

$$|\rho(P) - \rho(Q)| \leq \overline{PQ},$$

e quindi

$$\lim_{Q \rightarrow P} \rho(Q) = \rho(P),$$

ciò che prova l'asserita continuità di $\rho(P)$ in A .

Ora la funzione $\rho(P)$, continua nell'insieme chiuso e limitato A ed ivi sempre positiva, ammette in A (teor. V) un minimo δ positivo. È questo il numero positivo di cui il teorema asserisce l'esistenza; ed invero, se P è un qualsiasi punto di una porzione T di A , avente un diametro inferiore a δ , la porzione T è intieramente contenuta nell'intorno circolare $C(P)$ dell'indicato punto.

33. Teorema degli interni circolari. — Nella dimostrazione del teorema di *Cantor* ci siamo imbattuti in una considerazione che si presenta spesso in *Analisi*: nella considerazione cioè di una certa famiglia $[C]$ di interni circolari dei punti di un insieme chiuso A , la quale gode delle seguenti caratteristiche:

a) Ogni intorno circolare C della famiglia riesce ben determinato non appena si assegni il punto P di A del quale esso è intorno;

b) per l'insieme C, A si verifica una certa proprietà che è an-

che verificata per qualsiasi insieme contenuto in $C.A$, mentre non lo è dall'insieme $C'.A$, se C' è un qualunque intorno circolare concentrico a C e di raggio maggiore.

Orbene, se si osserva la prima parte della dimostrazione del teorema di *Cantor*, subito si vede che il ragionamento in essa compiuto dimostra il seguente

Teorema di Pincherle. Per ogni famiglia $[C]$ di intorni circolari dei punti di un insieme chiuso e limitato A , la quale goda delle caratteristiche $a)$ e $b)$, è possibile determinare un numero positivo δ tale che, ovunque si prenda un punto P in A , l'intorno circolare di P avente il raggio δ è sempre contenuto nell'intorno circolare dello stesso punto, appartenente alla famiglia $[C]$.

34. Funzioni composte.—Ci saranno utili in molte occasioni alcune locuzioni che andiamo ad introdurre. Nell'insieme A di punti dello spazio S_r , sia definita una funzione reale

$$u = f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_r).$$

Se $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$ è un punto di A , diremo che le *quantità reali*

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_r,$$

sono *incrementi delle coordinate di P* , su A , allora e allora soltanto che il punto Q di coordinate

$$x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_r + \Delta x_r,$$

sia ancora un punto di A . La differenza

$$f(Q) - f(P) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_r + \Delta x_r) - f(x_1, x_2, \dots, x_r),$$

si chiama l'*incremento della funzione, relativo al passaggio dal punto P al punto Q* . Per tale differenza adotteremo poi la notazione Δu .

Evidentemente [cfr. n° 15 (I e II) e n° 30, I]: Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia continua in un punto $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$ di A , è che, comunque si assegni una quantità positiva ε , sia possibile in corrispondenza trovarne un'altra σ tale che per ogni r^{pla} di incrementi (su A) fatti subire alle coordinate di P , aventi, ciascuna, un modulo minore di σ , il corrispondente incremento della funzione sia sempre in modulo non superiore a ε ;

tali che, variando comunque il punto $P(x, y)$ in A , il punto $Q(u, v, w)$ non esca mai da un insieme B dello spazio (u, v, w) , ove è definita la funzione continua

$$z = \varphi(u, v, w).$$

Devo dimostrare che, posto

$$\varphi(f(x, y), g(x, y), h(x, y)) = F(x, y),$$

la funzione $F(x, y)$ è continua in A . Perciò, dal momento che A è chiuso, occorre e basta dimostrare che, fissati un punto $P(x, y)$ in A e una quantità positiva ε , affatto arbitrariamente, si può sempre determinare un'altra quantità positiva σ , tale che, per ogni coppia Δx e Δy di incrementi, su A , delle coordinate x e y , per i quali è

$$(4) \quad |\Delta x| < \sigma, \quad |\Delta y| < \sigma,$$

si abbia sempre

$$(5) \quad |\Delta z| = |F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y)| \leq \varepsilon.$$

Ora nel punto $Q(u, v, w)$, corrispondente per le (3) al punto $P(x, y)$ di A , vi è continuità per le funzioni f, g e h , e pertanto, comunque si sia assegnata la quantità positiva ε , ne esiste un'altra δ , per la quale, tutte le volte che per incrementi su B sia

$$(6) \quad |\Delta u| < \delta, \quad |\Delta v| < \delta, \quad |\Delta w| < \delta,$$

di conseguenza risulti

$$(7) \quad |\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - \varphi(u, v, w)| \leq \varepsilon.$$

Le differenze

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y), \\ \Delta v = g(x + \Delta x, y + \Delta y) - g(x, y), \\ \Delta w = h(x + \Delta x, y + \Delta y) - h(x, y), \end{cases}$$

le quali sono incrementi, su B , delle coordinate u, v, w , possono, in virtù della supposta continuità delle f, g, h , simultaneamente ridursi in modulo minori di δ , non appena che, per gli incrementi Δx e Δy (su A) di x e di y , siano verificate le (4), ove σ è una certa quantità positiva. Ma si ha

$$\begin{aligned} \Delta z &= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \\ &= \varphi(f(x + \Delta x, y + \Delta y), g(x + \Delta x, y + \Delta y), h(x + \Delta x, y + \Delta y)) - \\ &\quad - \varphi(f(x, y), g(x, y), h(x, y)), \end{aligned}$$



cioè, per le (8),

$$\begin{aligned}\Delta z &= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \\ &= \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - \varphi(u, v, w),\end{aligned}$$

e quindi, poichè dalle (4) seguono le (6) e da queste le (7), si ottiene la (5) come conseguenza delle (4). Ciò che volevamo dimostrare.

Per indicare alcuni particolarissimi casi del teorema ora dimostrato, ai quali d'ordinario si pone mente in modo speciale, osserveremo che, se b_1, b_2, \dots, b_q sono q costanti affatto arbitrarie, la combinazione lineare.

$$(9) \quad z = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_q u_q$$

è una funzione continua in tutte $S_{(q)}$ e così pure il prodotto

$$(10) \quad z = u_1 u_2 \dots u_q.$$

Si ha invero $|\Delta z| \leq \varepsilon$, non appena sia $|\Delta u_i| < \sigma$ ($i=1, 2, \dots, q$), quando si faccia, nel caso della (9), $\sigma = \varepsilon:qb$, ove b è il massimo dei moduli delle costanti b_i , e, nel caso della (10),

$$\sigma \leq \frac{\varepsilon}{(2^q - 1)M}, \quad \sigma \leq 1,$$

ove M è il massimo modulo delle quantità u_1, u_2, \dots, u_q e dei loro prodotti a due a due, a tre a tre, ..., a $q-1$ a $q-1$.

Osserveremo altresì che la funzione $z = u : v$ è continua, nell'insieme aperto ottenuto dall'intero piano (u, v) col toglierli tutti e soli i punti dell'asse delle v . Se è $v \neq 0$, si ha invero $|\Delta z| \leq \varepsilon$, non appena sia $|\Delta x| < \sigma$, $|\Delta y| < \sigma$, quando si faccia

$$\sigma \leq \frac{|v|}{2}, \quad \sigma \leq \frac{\varepsilon}{2M},$$

ove M è la più grande fra le quantità

$$\frac{2}{|v|} \quad \text{e} \quad \frac{2|u|}{v^2}.$$

Ne segue, in virtù del teorema precedente, che:

II. *Se due o più funzioni sono continue in un insieme chiuso A sono ivi funzioni continue una qualunque loro combinazione lineare (a coefficienti costanti) ed il prodotto di un numero qualunque di esse. Se due funzioni f e g sono continue in un insieme chiuso A , è ivi una funzione continua anche il quoziente $f : g$, se, in A , è sempre $g \neq 0$.*

35. Principio generale della teoria dei limiti. — La funzione $u = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ sia definita in un insieme A di punti di $S_{(r)}$, e si abbiano r variabili ordinate x_1, x_2, \dots, x_r , in corrispondenza (cfr. il n° 6 del § 1), rispettivamente risultanti dalle operazioni degli insiemi ordinati $[O_1], [O_2], \dots, [O_r]$, tali però che ogni r^{pla} , x_1, x_2, \dots, x_r , di valori corrispondenti delle variabili sia sempre di coordinate di un punto di A . Per ogni r^{pla} , x_1, x_2, \dots, x_r , di valori corrispondenti delle variabili possiamo allora determinare il valore $u = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ che assume la funzione u nel punto $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$ di A . L'operazione che dà per risultato la variabile u è la seguente: Si prende un'operazione O_1 in $[O_1]$, se ne trovano le corrispondenti O_2, O_3, \dots, O_r , rispettivamente, in $[O_2]$, in $[O_3], \dots$, in $[O_r]$, si determinano i risultati x_1, x_2, \dots, x_r delle operazioni O_1, O_2, \dots, O_r , e dopo ciò il valore $u = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ della funzione u nel punto $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$. Per l'operazione, ora descritta, da cui risulta la variabile u , adoteremo la notazione:

$$f(O_1, O_2, \dots, O_r),$$

ed essendo (O_1, O_2, \dots, O_r) e $(O'_1, O'_2, \dots, O'_r)$ due r^{ple} di operazioni corrispondenti, porremo

$$f(O_1, O_2, \dots, O_r) \rightarrow f(O'_1, O'_2, \dots, O'_r),$$

se $O_1 \rightarrow O'_1$ (e quindi $O_2 \rightarrow O'_2, \dots, O_r \rightarrow O'_r$).

La variabile $u = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ è dunque una variabile ordinata e l'insieme ordinato di operazioni da cui risulta è da denotarsi col simbolo $[f(O_1, O_2, \dots, O_r)]$.

Sulla variabile ordinata $u = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ andiamo ora a dimostrare un teorema che possiamo considerare come il **Principio generale della teoria dei limiti**, poichè in esso teorema sono contenuti, come particolarissimi casi, tutti i teoremi dell'ordinaria teoria dei limiti (cfr. *Algebra*, n° 164 e 165).

I. Per ogni r^{pla} di valori corrispondenti delle variabili ordinate, in corrispondenza, x_1, x_2, \dots, x_r , si abbiano sempre coordinate di un punto di un insieme A di $S_{(r)}$, nel quale è definita la funzione $u = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$, le indicate variabili danno allora luogo alla variabile ordinata $u = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$; orbene, se le variabili x_1, x_2, \dots, x_r sono convergenti, rispettivamente, verso i limiti l_1, l_2, \dots, l_r , se il

punto (l_1, l_2, \dots, l_r) appartiene ad A e se ivi la funzione f è continua, si avrà

$$\lim f(x_1, x_2, \dots, x_r) = f(\lim x_1, \lim x_2, \dots, \lim x_r).$$

Devo dimostrare che, comunque si assegni una quantità positiva ε , si potrà sempre determinare un'operazione $f(\overset{*}{O}_1, \overset{*}{O}_2, \dots, \overset{*}{O}_r)$ di $[f(O_1, O_2, \dots, O_r)]$ tale che per

$$(1) \quad f(\overset{*}{O}_1, \overset{*}{O}_2, \dots, \overset{*}{O}_r) \rightarrow f(O_1, O_2, \dots, O_r),$$

risulti sempre

$$(2) \quad |f(x_1, x_2, \dots, x_r) - f(l_1, l_2, \dots, l_r)| \leq \varepsilon.$$

Intanto, per la supposta continuità della funzione f nel punto $P(l_1, l_2, \dots, l_r)$, si può determinare un numero positivo σ , tale che per ogni punto dell'intorno quadrato di P , su A , di semidimensione σ , la funzione f prenda sempre valori verificanti la (2). Ciò posto, diciamo $O_i^{(i)}$ quell'operazione di $[O_i]$ tale che sia

$$(3) \quad |x_i - l_i| < \sigma \text{ se } O_i^{(i)} \rightarrow O_i, \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Siano

$$\begin{array}{ccccccc} O_1^{(1)}, & O_2^{(1)}, & O_3^{(1)}, & \dots, & O_r^{(1)}, \\ O_1^{(2)}, & O_2^{(2)}, & O_3^{(2)}, & \dots, & O_r^{(2)}, \\ O_1^{(3)}, & O_2^{(3)}, & O_3^{(3)}, & \dots, & O_r^{(3)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O_1^{(r)}, & O_2^{(r)}, & O_3^{(r)}, & \dots, & O_r^{(r)}, \end{array}$$

le $r^{\text{pl}}e$ di operazioni corrispondenti determinate, rispettivamente, dalle operazioni $O_1^{(1)}, O_2^{(2)}, \dots, O_r^{(r)}$. Diciamo $\overset{*}{O}_1$ un'operazione di $[O_1]$, comune seguente alle operazioni $O_1^{(1)}, O_1^{(2)}, \dots, O_1^{(r)}$ e $(\overset{*}{O}_1, \overset{*}{O}_2, \dots, \overset{*}{O}_r)$ la $r^{\text{pl}}a$ di operazioni corrispondenti determinata dalla $\overset{*}{O}_1$. Si avrà allora $O_i^{(i)} \rightarrow O_i$, quando è $\overset{*}{O}_i \rightarrow O_i$, cioè quando $\overset{*}{O}_1 \rightarrow O_1$, e pertanto saranno allora simultaneamente verificate le limitazioni $|x_i - l_i| < \sigma$ se $\overset{*}{O}_1 \rightarrow O_1$. Ne segue che, verificata la (1) è anche verificata la (2). E ciò dimostra il teorema.

Poichè le funzioni $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_r x_r$ (le a_i essendo costanti) e $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_r$ sono continue in ogni punto di $S_{(r)}$ e la funzione $x_1 : x_2$ è pur essa continua in ogni punto, del piano (x_1, x_2) , per il

quale sia $x_2 \neq 0$, come particolarissimo caso del teorema che precede, abbiamo il seguente:

II. Se le variabili ordinate x_1, x_2, \dots, x_r in corrispondenza, sono convergenti, anche le variabili ordinate $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_r x_r$, e $x_1 \cdot x_2 \dots x_r$ sono convergenti, e si ha

$$\lim (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_r x_r) = a_1 \lim x_1 + a_2 \lim x_2 + \dots + a_r \lim x_r,$$

$$\lim (x_1 x_2 \dots x_r) = \lim x_1 \cdot \lim x_2 \dots \lim x_r;$$

se $\lim x_2 \neq 0$, anche la variabile $x_1 : x_2$ è convergente, e si ha:

$$\lim \frac{x_1}{x_2} = \frac{\lim x_1}{\lim x_2}.$$

Ecc.

36. Limiti all' infinito. — Vogliamo ora dare l'importante concetto di limite all' infinito per una funzione reale di punto. Dobbiamo perciò supporre che l'insieme A di punti di $S_{(r)}$, nel quale è definita la funzione reale di punto $u = f(P)$, sia *illimitato*. Indicheremo allora con $[O]_\infty$ l'insieme delle operazioni, consistenti nel fissare, nel modo più arbitrario, un punto P di A e nel determinarvi il valore assunto dalla funzione $f(P)$, ordinato al modo seguente: Di ogni operazione O' , corrispondente ad un punto P' di A , diremo *seguenti* tutte quelle che si riferiscono ai punti P di A , per i quali è

$$\overline{P_0 P} > \overline{P_0 P'},$$

ove P_0 designa l'origine dello spazio $S_{(r)}$.

Orbene: il massimo ed il minimo limite della variabile ordinata che risulta dalle operazioni dell'insieme $[O]_\infty$, chiamansi, rispettivamente, *il massimo ed il minimo limite della funzione $f(P)$, su A , all' infinito*, e si indicheranno con le notazioni:

$$\lim''_{P \rightarrow \infty} f(P)(su A), \quad \lim'_{P \rightarrow \infty} f(P)(su A).$$

Una funzione $f(P)$ dicesi *all' infinito, su A , regolare, non regolare, convergente, divergente, infinitesima, infinitamente grande*, secondochè regolare, non regolare, convergente, divergente, infinitesima, infinitamente grande è la variabile ordinata che risulta dalle operazioni dell'insieme ordinato $[O]_\infty$.

Una funzione regolare (su A) all' infinito dicesi anche *continua*

(su A) all'infinito. Si dice allora che la funzione ha (su A) all'infinito un limite determinato e tale limite si designa con la notazione

$$\lim_{P \rightarrow \infty} f(P) \text{ (su } A \text{)}.$$

Una funzione dicesi su A *limitata superiormente, limitata inferiormente, limitata nelle vicinanze dell'infinito*, se, rispettivamente, definitivamente, limitato superiormente, definitivamente limitato inferiormente, definitivamente limitato è l'insieme numerico descritto dalla variabile ordinata che risulta dalle operazioni di $[O]_{\infty}$.

I limiti considerati diconsi anche *i limiti di $f(P)$ nel mentre che il punto P di A tende all'infinito o si allontana a distanza infinita*. Se la funzione $f(P)$ è, su A , convergente all'infinito verso il limite l , si dice anche che *la funzione $f(P)$ tende verso l nel mentre che il punto P di A tende all'infinito*.

Lasciamo al lettore la cura di fare l'utile esercizio di enunciare i teoremi, analoghi ai teoremi I, II, III, IV, V, VI e VII dell'articolo 27, che sussistono per gli attuali limiti all'infinito.

Consideriamo ora il caso particolare delle funzioni reali di una variabile reale x . Sia $u = f(x)$ una tale funzione e supponiamo che l'insieme B , comune all'insieme illimitato A dell'asse x , di definizione della funzione, e all'intervallo $(0, +\infty)$, esista e sia pur esso illimitato. Potremo limitarci a considerare esclusivamente i valori che la funzione $f(x)$ prende nei punti di B . Orbene: I limiti all'infinito della funzione, su B , diconsi *i limiti della funzione all'infinito positivo*, oppure *i limiti della funzione nel mentre che x tende verso $+\infty$* , e si denotano con le notazioni:

$$\lim'_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim''_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Analoghe definizioni e notazioni si pongono nel caso che esista e sia illimitato l'insieme C comune all'insieme illimitato A , di definizione della funzione, e all'intervallo $(-\infty, 0)$.

Evidentemente: *È sempre:*

$$\lim'_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim'_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim''_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim''_{x \rightarrow \infty} f(x),$$

$$\lim'_{x \rightarrow -\infty} f(x) \leq \lim''_{x \rightarrow -\infty} f(x) \leq \lim'_{x \rightarrow -\infty} f(x) \leq \lim''_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Esempi. Si ha :

$$\lim'_{(x, y) \rightarrow \infty} \frac{xy}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2}, \quad \lim''_{(x, y) \rightarrow \infty} \frac{xy}{x^2 + y^2} = +\frac{1}{2};$$

$$\lim'_{x \rightarrow \infty} \arctang x = \frac{-\pi}{2}, \quad \lim''_{x \rightarrow \infty} \arctang x = +\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctang x = +\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctang x = -\frac{\pi}{2}.$$

37. Limiti per le funzioni complesse. — Lasciamo al lettore il compito di stabilire i concetti di limite e di continuità per le funzioni complesse, di variabili reali o di variabili complesse.



CAPITOLO II.

DERIVATE E DIFFERENZIALI PER LE FUNZIONI DI PUNTO.

§ 1. Derivate e differenziali per le funzioni di una variabile reale.

38. Definizione delle derivate. — Sia $y = f(x)$ una funzione reale della variabile reale x , definita nell'insieme A di punti dell'asse delle x . Supporremo sempre che l'insieme A sia dotato di derivato DA e che esista il prodotto $A \cdot DA$. Ciò posto, andiamo a dare il concetto delle *derivate*, su A , della funzione $f(x)$ in un punto P_0 di $A \cdot DA$. Si dia all'ascissa x_0 di P_0 un incremento Δx , su A , sempre diverso da zero e si ponga

$$x = x_0 + \Delta x, \quad \Delta x = x - x_0;$$

la quantità x rappresenterà sempre l'ascissa di un punto di A . Si calcoli l'incremento

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

della funzione, corrispondente al passaggio dal punto x_0 al punto $x_0 + \Delta x = x$, e si faccia il rapporto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tale rapporto chiamasi il *rapporto incrementale*, su A , della funzione, relativo al punto x_0 . Evidentemente, il rapporto incrementale, relativo al punto x_0 , è una nuova funzione della x definita in tutto l'insieme $A - P_0$, del quale P_0 è un punto limite. Orbene, si pone la seguente

Definizione delle derivate. Il massimo ed il minimo limite nel punto x_0 del rapporto incrementale, su A , della funzione $f(x)$, relativo al punto x_0 , chiamansi, rispettivamente, la massima e la minima derivata, su A , della funzione $f(x)$ nel punto x_0 , e si denotano, rispettivamente con le notazioni

$$\text{deriv}''_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \text{deriv}'_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Si ha dunque, per definizione,

$$\text{deriv}' f(x) = \lim'_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim'_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$\text{deriv}'' f(x) = \lim''_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim''_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Evidentemente:

I. *Sussiste sempre la relazione:*

$$\text{deriv}'_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \text{deriv}''_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

II. *Se B è un qualunque insieme contenuto in A , avente il punto P_0 come punto limite, si ha*

$$\begin{aligned} \text{deriv}'_{x \rightarrow x_0} f(x) [\text{su } A] &\leq \text{deriv}'_{x \rightarrow x_0} f(x) [\text{su } B] \leq \\ &\leq \text{deriv}''_{x \rightarrow x_0} f(x) [\text{su } B] \leq \text{deriv}''_{x \rightarrow x_0} f(x) [\text{su } A]. \end{aligned}$$

Sia ora σ un numero positivo e supponiamo che esista l'insieme B comune ad A e all'intervallo $(x_0, x_0 + \sigma)$ [all'intervallo $(x_0 - \sigma, x_0)$] ed inoltre che x_0 sia un punto limite dell'insieme B . Orbene: Le derivate, su B , della funzione $f(x)$ nel punto x_0 , diconsi *le derivate, su A , della funzione $f(x)$ nel punto x_0 , a destra (a sinistra)*. Se, come il più spesso si supporrà, l'insieme A di definizione della funzione è un dato intervallo (a, b) dell'asse delle x (un continuo di $S_{(1)}$), in ogni punto c interno all'intervallo si sogliono considerare, in modo speciale, le derivate, su (a, b) , della funzione in c a destra e a sinistra. Si osservi che la derivata, su (a, b) , nel punto a (nel punto b) è anche derivata in a , a destra (in b , a sinistra). Nel caso attuale, parlando di derivate, senz'altro, si deve sempre intendere di parlare di derivate su (a, b) . Sussiste il seguente immediato teorema:

III. *Se la funzione $f(x)$ è definita nell'intervallo (a, b) , la massima (la minima) derivata della funzione in un punto c di questo intervallo, è la più grande (la più piccola) fra la massima (la minima) derivata a destra e la massima (la minima) derivata a sinistra.*

Audiamo a dimostrare il teorema:

IV. Se la funzione $f(x)$, definita in A , possiede nel punto x_0 (di $A.DA$) derivate, su A , entrambe finite, essa è continua, su A , nel punto x_0 .

Siano, invero, δ' e δ'' i valori delle derivate, su A , di $f(x)$, nel punto x_0 ; comunque si assegni un numero positivo ε , è allora possibile trovarne, in corrispondenza, un altro σ tale che, per ogni incremento Δx di x_0 , su A , di modulo inferiore a σ , si abbia:

$$\delta' - \varepsilon \leq \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq \delta'' + \varepsilon,$$

e quindi, se k designa il più grande fra i due numeri $|\delta' - \varepsilon|$ e $|\delta'' + \varepsilon|$,

$$|\Delta y| \leq k |\Delta x|,$$

ciò che dimostra quanto si voleva.

Una funzione $f(x)$ dicesi *lipschitziana*, su A , in un punto x_0 di A , se esistono due numeri positivi σ e k tali che, designando sempre x l'ascissa di un punto di A , dalla relazione $|x - x_0| \leq \sigma$, segue l'altra

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k |x - x_0|.$$

Una funzione lipschitziana in un punto x_0 è ivi continua, ma non viceversa. Esempio: la funzione \sqrt{x} è continua nel punto zero, ma non vi è lipschitziana. Evidentemente:

V. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione sia lipschitziana in un punto x_0 (di $A.DA$) è che ivi possieda derivate entrambe finite.*

In questo paragrafo supporremo, da ora in poi, per semplificare l'esposizione, che l'insieme A , sul quale si considera la funzione, sia *perfetto*, e, se si vuole, ci si può anche limitare a fissare l'attenzione sul caso ancora più particolare in cui l'insieme A sia addirittura un intervallo dell'asse delle x .

Sull'insieme (perfetto) A sia definita una funzione $f(x)$, lipschitziana in ogni punto di A , si dirà allora, più semplicemente, che *la funzione è lipschitziana nell'insieme A* . In tal caso, entrambe le derivate hanno valori finite in ogni punto di A , e pertanto, mediante la derivazione, la funzione $f(x)$ dà origine a due funzioni definite in tutto A : alla *funzione derivata massima* che, in ogni punto di

A , ha per valore ivi quello della derivata massima, e alla *funzione derivata minima* che, in ogni punto di A , ha invece per valore ivi quello della derivata minima. Denoteremo, rispettivamente, con $\delta''(x)$ e con $\delta'(x)$ queste due funzioni derivate.

Una funzione lipschitziana in un insieme (perfetto) A dicesi ivi *uniformemente lipschitziana*, se è possibile determinare un numero positivo K tale che presi ovunque due punti x' e x'' di A , si abbia sempre

$$|f(x') - f(x'')| \leq K|x' - x''|.$$

Sussiste il seguente teorema di dimostrazione immediata:

VI. *Una funzione $f(x)$, uniformemente lipschitziana in un insieme (perfetto) A , possiede ivi funzioni derivate (finite in ogni punto e) limitate in A .*

Sussiste la proposizione reciproca, che qui però non possiamo dimostrare.

Esempi. 1°) Sia

$$f(x) \begin{cases} = 1 : x, & \text{per } x \neq 0, \\ = 0 & , \text{ per } x = 0, \end{cases}$$

si trova:

$$\text{deriv}'_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{deriv}''_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

2°) Sia

$$f(x) \begin{cases} = 1 : x^2, & \text{per } x \neq 0, \\ = 0 & , \text{ per } x = 0, \end{cases}$$

si trova:

$$\text{deriv}'_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{deriv}'_{x \rightarrow 0} f(x) [a \text{ sinistra}] = \text{deriv}''_{x \rightarrow 0} f(x) [a \text{ sinistra}] = -\infty,$$

$$\text{deriv}''_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{deriv}'_{x \rightarrow 0} f(x) [a \text{ destra}] = \text{deriv}''_{x \rightarrow 0} f(x) [a \text{ destra}] = +\infty.$$

3°) Sia

$$f(x) \begin{cases} = x \text{ sen } \frac{1}{x}, & \text{per } x \neq 0, \\ = 0 & , \text{ per } x = 0, \end{cases}$$

si trova:

$$\text{deriv}'_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{deriv}'_{x \rightarrow 0} f(x) [a \text{ sinistra}] = \text{deriv}'_{x \rightarrow 0} f(x) [a \text{ destra}] = -1,$$

$$\text{deriv}''_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{deriv}''_{x \rightarrow 0} f(x) [a \text{ sinistra}] = \text{deriv}''_{x \rightarrow 0} f(x) [a \text{ destra}] = +1.$$

La funzione è lipschitziana nel punto zero. Si potrebbe vedere ch'essa, pur essendo lipschitziana in ogni punto dell'asse delle x , non è mai uniformemente lipschitziana in un qualunque intorno dello zero.

4°) Sia

$$f(x) \begin{cases} = x^2 \text{ sen. } \frac{1}{x}, & \text{per } x \neq 0, \\ = 0 & , \text{ per } x = 0, \end{cases}$$

si trova:

$$\text{deriv}'_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{deriv}''_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Si potrebbe vedere che la funzione è uniformemente lipschitziana in ogni intervallo finito dell'asse delle x .

39. Considerazioni geometriche.—Data la funzione $y=f(x)$, definita nell'insieme perfetto A , facciamone il diagramma cartesiano C , nel piano (x, y) . Supporremo che, nel punto x_0 di A , la funzione $f(x)$ sia lipschitziana e denoteremo con δ_0' e δ_0'' i valori delle sue due derivate in quel punto. Diciamo P_0 il punto di C , di ascissa x_0 e di ordinata $y_0 = f(x_0)$, e per P_0 conduciamo, nel piano, le due rette t' e t'' aventi, rispettivamente, i coefficienti angolari δ_0' e δ_0'' . Considerate due rette r' e r'' , condotte per P_0 , distinte fra di loro e dalla verticale per P_0 , intenderemo qui per loro angolo e lo denoteremo con la notazione $r' r''$, quello dei due angoli completi determinati dalle due rette al quale non è interna la verticale per P_0 .

Ciò posto, supponiamo che sia $\delta_0' < \delta_0''$. Le due rette t' e t'' saranno allora distinte fra di loro e dalla verticale per P_0 . Consideriamo il punto $P(x, y)$ variabile su C , nel mentre che l'ascissa x di esso tende a x_0 ; l'ordinata $y=f(x)$ di P tende allora all'ordinata $y_0=f(x_0)$ di P_0 , e potremo quindi dire che il punto P di C tende al punto P_0 . Viceversa, facendo tendere il punto P di C a P_0 , la sua ascissa x tende a x_0 . La retta s congiungente il punto P_0 con un qualsiasi punto P di C , dicesi una *segante di C condotta per P_0* . Nel mentre che P tende a P_0 , la segante s per P_0 , ruoterà attorno a P_0 . Orbene, in tale rotazione avvengono i seguenti due

fatti: *a*) Comunque si considerino due rette fisse r' e r'' per P_0 , distinte fra di loro e dalla verticale per P_0 , il cui angolo contenga nel suo interno entrambe le rette t' e t'' , al tendere di P verso P_0 , la secante ruotante s riuscirà definitivamente contenuta nell'angolo $r'r''$; *b*) comunque si consideri una retta fissa r per P_0 , interna all'angolo $t' t''$, al tendere di P verso P_0 , la secante ruotante s non è mai definitivamente contenuta nè nell'angolo rt' , nè nell'angolo rt'' .

Supponiamo invece che sia $\delta_0' = \delta_0''$. Le due rette t' e t'' vengono allora a coincidere in un'unica retta t , distinta dalla verticale per P_0 . Delle due proprietà *a*) e *b*) riesce, in tal caso, significativa soltanto la prima, la quale enunciasi al modo seguente:

Comunque si considerino due rette fisse r' e r'' per P_0 , distinte fra di loro e dalla verticale per P_0 , il cui angolo contenga nel suo interno la retta t , al tendere di P verso P_0 , la secante ruotante s riuscirà definitivamente contenuta nell'angolo $r'r''$.

Com'è naturale, la proprietà ora enunciata della retta t , si suole ricordare dicendo, semplicemente, così: *La retta t per P_0 è il limite della secante s del diagramma C , condotta per P_0 e per un punto P variabile su C , nel mentre che P tende a P_0 .* Quando esiste tale limite, si dice, in linguaggio geometrico, che *il diagramma C possiede la tangente in P_0 e retta tangente al diagramma in P_0* , chiamasi l'indicata retta limite. Queste definizioni poste, possiamo dire al modo seguente:

Se la funzione $y = f(x)$, definita nell'insieme (perfetto) A dell'asse delle x , possiede in un punto x_0 di A , derivate finite e coincidenti di valore δ_0 , il diagramma cartesiano C , relativo alla funzione, possiede nel punto $[x_0, f(x_0)]$, la retta tangente. Il valore δ_0 delle derivate in x_0 è il coefficiente angolare di questa retta, la quale dunque avrà la seguente equazione:

$$Y - y_0 = \delta_0 (X - x_0).$$

Se si suppone che le due derivate in x_0 , pur coincidendo, non sono finite, subito si vede, con considerazioni perfettamente analoghe alle precedenti, che: *Nel punto $P_0[x_0, f(x_0)]$, il nome di tangente al diagramma della funzione, come retta limite della secante ruotante per P_0 , deve essere attribuito alla verticale condotta per P_0 .*

È assai istruttiva la circostanziata constatazione, che proponia-

mo allo studioso, dei fatti geometrici, considerati nel presente articolo, per i due esempi 3° e 4° dell'articolo precedente.

40*. Derivate della somma e della differenza. — Nell'insieme (perfetto) A dell'asse delle x siano simultaneamente definite n funzioni reali della variabile reale x :

$$y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x), \dots, y_n = f_n(x);$$

ponendo

$$y = f(x) \equiv \sum_{i=1}^n f_i(x),$$

si definisce in A la *funzione somma* delle funzioni y_1, y_2, \dots, y_n . Per molte questioni di *Analisi* ha interesse lo stabilire le relazioni che intercedono fra le derivate della funzione somma y e le derivate delle funzioni addende y_1, y_2, \dots, y_n . Tali relazioni, nel caso più importante, sono fornite dal seguente teorema:

I. *Se le funzioni $y_i = f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sono, nel punto x_0 di A , lipschitziane, è ivi pure lipschitziana la funzione $y = f(x)$ loro somma e fra le derivate di y e delle y_i , nel punto x_0 , sussistono le $2n + 2$ relazioni:*

$$(1) \quad \sum \text{deriv}' y_i \leq \text{deriv}' \sum y_i \leq \text{deriv}'' \sum y_i \leq \sum \text{deriv}'' y_i,$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{deriv}' \sum y_i \leq \text{deriv}' y_k + \sum_k \text{deriv}'' y_i, \\ \text{deriv}'' y_k + \sum_k \text{deriv}' y_i \leq \text{deriv}'' \sum y_i, \\ (k = 1, 2, \dots, n). \end{array} \right.$$

Per ogni incremento Δx di x_0 su A , si ha infatti:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \dots + \frac{\Delta y_n}{\Delta x},$$

ed il teorema enunciato è pertanto un immediato corollario del teor. I del n° 9*. Le $2n + 2$ relazioni (1) e (2), nel caso di *due* funzioni y_1 e y_2 lipschitziane, sono in numero di *sei*, e queste possono scriversi al modo seguente:

$$\text{deriv}' y_1 + \text{deriv}' y_2 \leq \text{deriv}' y \leq \text{deriv}' y_1 + \text{deriv}'' y_2 \leq \text{deriv}'' y \leq \text{deriv}'' y_1 + \text{deriv}'' y_2.$$

Dalle (1) segue immediatamente che: *Se ciascuna delle funzioni y_i è derivabile (v. n° 41) nel punto x_0 , è ivi pure derivabile la funzio-*

ne y loro somma, e questa ha per derivata la somma delle derivate di quelle. Dalle (2) segue immediatamente che: Se le funzioni y_i sono, nel punto x_0 di A , lipschitziane, e le funzioni $y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n$ vi sono derivabili, si ha :

$$\text{deriv}' \sum y_i = \text{deriv}' y_k + \sum_k \text{deriv}' y_i ,$$

$$\text{deriv}'' \sum y_i = \text{deriv}'' y_k + \sum_k \text{deriv}'' y_i .$$

In ogni caso, per una qualunque funzione $y = f(x)$, si ha

$$\text{deriv}' (-y) = - \text{deriv}' y ,$$

e pertanto, dal teor. I segue:

II. Se le funzioni y_1 e y_2 sono, nel punto x_0 di A , lipschitziane, è ivi pure tale la funzione $y = y_1 - y_2$ loro differenza, e fra le derivate di y e delle y_1 e y_2 , nel punto x_0 , sussistono le sei relazioni :

$$\text{deriv}' y_1 - \text{deriv}'' y_2 \leq \text{deriv}' y \leq \text{deriv}' y_1 - \text{deriv}' y_2 \leq \text{deriv}'' y \leq \text{deriv}'' y_1 - \text{deriv}' y_2 .$$

In particolare: Se ciascuna delle funzioni y_1 e y_2 è derivabile, è pure derivabile la loro differenza, ed ha per derivata la differenza delle derivate delle funzioni y_1 e y_2 . Se le funzioni y_1 e y_2 sono lipschitziane e la y_2 è derivabile, si ha

$$\text{deriv}' (y_1 - y_2) = \text{deriv}' y_1 - \text{deriv}' y_2 ,$$

$$\text{deriv}'' (y_1 - y_2) = \text{deriv}'' y_1 - \text{deriv}'' y_2 .$$

41. Funzioni a derivata unica. Funzioni derivabili — Si dice che una funzione $y = f(x)$, definita in un insieme (perfetto) A , possiede, su A , derivata unica in un punto x_0 di A , se ivi coincidono le sue due derivate, su A . Diremo allora derivata, su A , della funzione $f(x)$, nel punto x_0 , il limite ben determinato :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} ,$$

che denoteremo con la notazione.

$$\text{deriv}_{x \rightarrow x_0} f(x) .$$

Si suol dire allora anche, più semplicemente, che la funzione $f(x)$ ha la derivata nel punto x_0 . Se la funzione $f(x)$ ha in x_0 derivata unica e questa derivata è inoltre finita, si dice che la funzione

è derivabile in x_0 . Una funzione $f(x)$ avente derivata unica oppure derivabile in ciascun punto di A dicesi *a derivata unica* oppure *derivabile* nell'insieme A . La interpretazione geometrica della derivazione, fatta nell'articolo 39, ci consente di dire che:

Se la funzione $y = f(x)$, definita nell'insieme (perfetto) A , ha derivata unica nel punto x_0 di A , il diagramma della funzione possiede la tangente nel punto $P_0 [x_0, f(x_0)]$. Se la funzione è derivabile nel punto x_0 , ed allora soltanto, la tangente al diagramma nel punto P_0 non è verticale, ed il valore della derivata è il coefficiente angolare di tale tangente.

Se una funzione è derivabile nell'insieme (perfetto) A , essa è ivi lipschitziana. La derivata della funzione è allora una nuova funzione definita in tutto A . Essa suole essere designata anche con una qualsiasi delle notazioni seguenti:

$$Df(x), \quad f'(x).$$

42. Derivate delle funzioni elementari.—Al n° 31 abbiamo già constatato la continuità delle funzioni elementari

x^a , a^x , $\log_a |x|$, $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{cot} x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{arccos} x$, $\operatorname{arctang} x$, ora ne dimostreremo la derivabilità calcolando la derivata di ciascuna di esse. A tale calcolo si riesce immediatamente applicando alcuni lemmi della teoria dei limiti che andiamo a premettere.

Lemmi della teoria dei limiti. Si sa dall'algebra (*Algebra*, n° 167) che la successione

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots,$$

è sempre crescente e converge verso il numero e di **Neper**:

$$e = 2,718281828\dots,$$

si ha cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Ne segue

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = e, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = e. \end{array} \right.$$

Nell'intervallo $(1, +\infty)$ si definiscano le due funzioni $f_1(\xi)$ e $f_2(\xi)$ della variabile ξ , ponendo:

$$f_1(\xi) = \left(1 + \frac{1}{[\xi] + 1}\right)^{[\xi]}, \quad f_2(\xi) = \left(1 + \frac{1}{[\xi]}\right)^{[\xi] + 1},$$

ove $[\xi]$ rappresenta il massimo numero intero contenuto in ξ . In virtù delle (1) subito si vede che:

$$(2) \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} f_1(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} f_2(\xi) = e.$$

Nell'intervallo $(0, +\infty)$, aperto a sinistra, si definisca ora la funzione $f(\xi)$, ponendo

$$f(\xi) = \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^\xi.$$

Al tendere di ξ verso $+\infty$, le tre funzioni $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $f(\xi)$ dànno luogo a tre variabili, ordinate, in corrispondenza, fra le quali sussiste, definitivamente, la relazione

$$f_1(\xi) < f(\xi) < f_2(\xi);$$

ne segue, in forza delle (2) (7, VI)

$$(3) \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^\xi = e.$$

Ma si ha pure

$$(4) \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^\xi = e,$$

ed invero, posto $|\xi| - 1 = \xi'$, risulta

$$\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^\xi = \left(1 + \frac{1}{\xi'}\right)^{\xi'} \left(1 + \frac{1}{\xi'}\right).$$

Le (3) e (4) equivalgono all'unica seguente *fondamentale* relazione di limite:

$$(5) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^\xi = \lim_{\eta \rightarrow 0} (1 + \eta)^{1/\eta} = e.$$

Se si ricorda la continuità della funzione logaritmica ed il teorema I del n° 35, si trae dalla (5) il seguente primo lemma:

I. Qualunque sia il numero positivo a , si ha:

$$(6) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + \eta)}{\eta} = \log_a e.$$

Se ne deduce facilmente (cfr. n° 28 del Cap. I) che:

II. Qualunque sia il numero positivo a ed il numero reale α , si ha:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{a^\zeta - 1}{\zeta} = \log_e a, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(1 + \tau)^\alpha - 1}{\tau} = \alpha.$$

Posto, invero, nella (6),

$$\eta = a^\zeta - 1,$$

η e ζ sono insieme infinitesimi, e si trova

$$\frac{\log_a(1 + \eta)}{\eta} = \frac{\zeta}{a^\zeta - 1}.$$

Posto, nella (6),

$$\eta = (1 + \tau)^\alpha - 1,$$

η e τ sono insieme infinitesimi, e si trova:

$$\frac{(1 + \tau)^\alpha - 1}{\tau} = \alpha \frac{\log_a(1 + \tau)}{\tau} \frac{\eta}{\log_a(1 + \eta)}.$$

Andiamo ora a dimostrare il terzo lemma.

III. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tang } x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arcsen } x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctang } x}{x} = 1.$$

Basta evidentemente dimostrare che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

A ciò si giunge osservando che, se $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e se $x \neq 0$,

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\text{cos } x},$$

mentre, per la continuità di $\text{cos } x$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\text{cos } x} = 1.$$

Se ne deduce il seguente lemma, di immediata dimostrazione:

IV. Se le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono entrambe infinitesime nel punto a e se, in un intorno di a , è $f(x)\varphi(x) \neq 0$ quando $x \neq a$, supposto che esista il limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{\varphi(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tang} f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{arcsen} f(x)}{\varphi(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{arcfng} f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Possiamo ora rapidamente precedere al

Calcolo delle derivate delle funzioni elementari. V.

Qualunque sia la costante reale a e per tutti i valori di x per i quali hanno significato x^α e $x^{\alpha-1}$, si ha sempre

$$(7) \quad Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Supponiamo dapprima $x \neq 0$. Posto $\Delta x = x\tau$, Δx e τ sono infinitesimi insieme, e si ha

$$\frac{\Delta x^\alpha}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \frac{(1+\tau)^\alpha - 1}{\tau},$$

onde, in virtù di II, si trova

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^\alpha}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Per $x=0$, la formola (7) è subito verificata, se, com'è supposto nel teorema, è allora $\alpha > 1$. Si notino, in modo speciale, i seguenti casi particolari della (7)

$$Dx = 1, \quad D \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}, \quad D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Per $\alpha=0$, la (7) dà sempre il valore zero per la derivata, ma è evidente a priori il seguente teorema:

VI. La derivata, sopra un insieme perfetto, di una funzione che vi ha valore costante ha sempre il valore zero.

VII. Se a è un qualunque numero positivo si ha sempre

$$(8) \quad Da^x = a^x \log_e a.$$

Ciò segue immediatamente da II, poichè

$$\frac{\Delta a^x}{\Delta a} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Si noti, in particolare, che

$$(9) \quad De^x = e^x.$$

VIII. Se a è un qualunque numero positivo, si ha sempre per $x \neq 0$,

$$(10) \quad D \log_a |x| = \frac{\log_a e}{x}.$$

Posto, inverso, $\Delta x = x\eta$, risulta

$$\frac{\Delta \log_a |x|}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{\log_a |1 + \eta|}{\eta},$$

mentre è (per I)

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\log_a |1 + \eta|}{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\log_a (1 + \eta)}{\eta} = \log_a e.$$

Se p è un qualunque numero positivo, con la notazione $\log p$, intenderemo sempre di indicare il logaritmo neperiano di p , cioè il logaritmo di p in base e ; come caso particolare della (10) troviamo dunque che:

$$(11) \quad D \log |x| = \frac{1}{x}.$$

IX. Per qualunque valore di x si ha:

$$D \operatorname{sen} x = \cos x, \quad D \cos x = -\operatorname{sen} x,$$

$$\text{per } x \neq (2n + 1) \frac{\pi}{2},$$

$$D \operatorname{tang} x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\text{per } x \neq n\pi$$

$$D \operatorname{cot} x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Dimostriamo, per esempio, che $D \operatorname{sen} x = \cos x$. Si ha

$$\frac{\Delta \operatorname{sen} x}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} = 2 \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

e pertanto, in virtù del lemma IV e della continuità di $\cos x$, $D \operatorname{sen} x = \cos x$.

X. Per ogni valore di x si ha

$$(12) \quad D \operatorname{arctang} x = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{se} \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctang} x < \frac{\pi}{2},$$

per $|x| < 1$, si ha

$$(13) \quad D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{se} \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsen} x < \frac{\pi}{2},$$

$$(14) \quad D \operatorname{arccos} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{se} \quad 0 < \operatorname{arccos} x < \pi.$$

Si ha, invero,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \operatorname{arctang} x}{\Delta x} &= \frac{\operatorname{arctang}(x + \Delta x) - \operatorname{arctang} x}{\Delta x} = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \operatorname{arctang} \frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}, \end{aligned}$$

onde segue, in virtù del lemma IV,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \operatorname{arctang} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + x^2 + x\Delta x} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Se $\operatorname{arcsen} x$ e $\operatorname{arcsen}(x + \Delta x)$ sono interni all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ e se $|\Delta x|$ è abbastanza piccolo, si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsen}(x + \Delta x) - \operatorname{arcsen} x &= \operatorname{arcsen} \left((x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x + \Delta x)^2} \right) = \\ &= \operatorname{arcsen} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x + \Delta x)^2}}, \end{aligned}$$

onde segue, in virtù del lemma IV,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \operatorname{arcsen} x}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

tanto se $x \neq 0$, quanto se $x = 0$. Ecc.

43. Regole di derivazione. — Daremo fin da ora alcune regole che consentono di dedurre dalle derivate delle funzioni elementari, ottenute nell'articolo precedente, le derivate di funzioni più complicate, composte per mezzo di quelle funzioni. Stabiliremo qui, come si fa d'ordinario, separatamente ciascuna di quelle regole; ma esse sono tutte caso particolare di un'unica regola generale: *la regola della derivazione delle funzioni di una variabile, composte per mezzo di altre funzioni*, regola che sarà data nel paragrafo seguente.

I. Derivazione di una combinazione lineare a coefficienti costanti. Le funzioni $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ siano definite nel-

L'insieme (perfetto) A è ciascuna di esse sia derivabile, su A , nel punto x_0 . Se c_1, c_2, \dots, c_n designano delle costanti reali qualsiansi, la combinazione lineare

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x),$$

è anch'essa derivabile, su A , nel punto x_0 , e riesce

$$(1) \quad Df = c_1 Df_1 + c_2 Df_2 + \dots + c_n Df_n.$$

Ed inverso, dato a x_0 l'incremento Δx , su A , è

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = c_1 \frac{\Delta f_1}{\Delta x} + c_2 \frac{\Delta f_2}{\Delta x} + \dots + c_n \frac{\Delta f_n}{\Delta x},$$

onde (35, II) segue la (1).

In particolare, si ha dunque, designando c una costante,

$$D(c + f(x)) = Df(x), \quad D(cf(x)) = c \cdot Df(x).$$

II. *Derivazione di un prodotto.* Nelle ipotesi del teorema precedente, posto

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x),$$

è anche derivabile, su A , nel punto x_0 , il prodotto $f(x)$ e riesce:

$$(2) \quad Df = \sum_{i=1}^n f_1 \dots f_{i-1} \cdot f_{i+1} \dots f_n \cdot Df_i.$$

Denoteremo con $F_i(x)$ il prodotto di $n - 1$ fra le funzioni $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, dalle quali sia esclusa la $f_i(x)$, con $F_{ik}(x)$ il prodotto di $n - 2$ fra le stesse funzioni, dalle quali siano escluse la $f_i(x)$ e la $f_k(x)$, con $F_{ikl}(x)$ il prodotto di $n - 3$ fra le stesse funzioni, dalle quali siano escluse la $f_i(x)$, la $f_k(x)$ e la $f_l(x)$ ecc... Si ha allora

$$\begin{aligned} \Delta f &= (f_1(x_0) + \Delta f_1)(f_2(x_0) + \Delta f_2) \dots (f_n(x_0) + \Delta f_n) - \\ &- f_1(x_0) f_2(x_0) \dots f_n(x_0) = \sum_i^{1, n} F_i(x_0) \Delta f_i + \sum_{ik}^{1, n} F_{ik}(x_0) \Delta f_i \Delta f_k + \\ &+ \sum_{ikl}^{1, n} F_{ikl}(x_0) \Delta f_i \Delta f_k \Delta f_l + \dots, \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \sum_i^{1, n} F_i(x_0) \frac{\Delta f_i}{\Delta x} + \sum_{ik}^{1, n} F_{ik}(x_0) \Delta f_i \frac{\Delta f_k}{\Delta x} + \sum_{ikl}^{1, n} F_{ikl}(x_0) \Delta f_i \Delta f_k \frac{\Delta f_l}{\Delta x} + \dots,$$

e pertanto, poichè $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f_i = 0$,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \sum_{i=1}^n F_i(x_0) \cdot Df_i(x_0),$$

ciò che dimostra la (2). In particolare dunque se f, f_1 e f_2 sono derivabili e se n è un qualunque numero intero e positivo, si ha

$$\begin{aligned} D(f_1 f_2) &= f_2 \cdot Df_1 + f_1 \cdot Df_2, \\ Df^n &= n f^{n-1} Df. \end{aligned}$$

III. *Derivazione della funzione reciproca di una data.* Se nel punto x_0 , la funzione $f(x)$ è derivabile ed è diversa da zero, è ivi anche derivabile la reciproca della funzione e riesce:

$$(3) \quad D \frac{1}{f} = - \frac{Df}{f^2}.$$

Essendo $f(x)$ derivabile in x_0 , essa vi è continua (anzi lipschitziana), e poichè $f(x_0) \neq 0$, esisterà un intorno $I.A$ di x_0 , su A , nel quale è sempre $f(x) \neq 0$; esiste invero un intervallo I aperto $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ tale che in $I.A$ è sempre

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{2} |f(x_0)|,$$

e quindi

$$|f(x)| \geq \frac{1}{2} |f(x_0)|.$$

In $I.A$ sarà dunque definita la reciproca $1:f(x)$ della funzione. Noi già sappiamo (teor. II del n° 34) che tale reciproca è pur essa continua in x_0 , ma noi ne dimostreremo ora la derivabilità. Si ha:

$$\Delta \frac{1}{f} = \frac{1}{f(x_0) + \Delta f} - \frac{1}{f(x_0)} = \frac{-\Delta f}{f(x_0)(f(x_0) + \Delta f)},$$

e quindi

$$\frac{\Delta \frac{1}{f}}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta f}{\Delta x}}{f(x_0)(f(x_0) + \Delta f)},$$

onde segue la derivabilità di $1:f$ e la (3).

Se ne deduce, se n è un numero intero e positivo,

$$Df^{-n} = D \frac{1}{f^n} = \frac{-Df^n}{f^{2n}} = \frac{-n f^{n-1} Df}{f^{2n}} = -n f^{-n-1} Df.$$

IV. *Derivazione del quoto.* Se nel punto x_0 , $g(x)$ e $f(x)$ sono derivabili, su A , e $f(x_0)$ è diverso da zero, è ivi anche derivabile il quoto di $g(x)$ per $f(x)$, e riesce

$$(4) \quad D \frac{g}{f} = \frac{f Dg - g Df}{f^2}.$$

Poichè $g:f = g \times (1:f)$, il teorema è conseguenza immediata di III e di II.

V. *Derivazione di una funzione di una variabile composta mediante due altre.* Nell'insieme (perfetto) A dell'asse delle x sia definita la funzione $y = y(x)$, tale che al variare di x in A , la variabile y non esca dall'insieme (perfetto) B dell'asse delle y ove è definita la funzione $u = u(y)$. Se $y(x)$ è derivabile in x_0 e se $u(y)$ è derivabile in $y_0 = y(x_0)$, allora la funzione della x

$$u = f(x) \equiv u(y(x)),$$

composta per mezzo della $y(x)$ e della $u(y)$, è derivabile in x_0 , e riesce:

$$f'(x_0) = u'(y_0) \cdot y'(x_0).$$

Definiamo in B la funzione $\omega(y)$ della y , ponendo

$$\omega(y) \begin{cases} = 0 & , \text{ se } y = y_0, \\ = \frac{u(y) - u(y_0)}{y - y_0} - u'(y_0), & \text{ se } y \neq y_0, \end{cases}$$

questa funzione $\omega(y)$ è evidentemente continua in y_0 . Sussiste l'identità

$$u(y) - u(y_0) = [u'(y_0) + \omega(y)](y - y_0);$$

ed invero, essa è subito verificata per $y = y_0$, e per $y \neq y_0$ essa segue dalla definizione stessa di $\omega(y)$. Ciò posto, dato un incremento Δx , su A , a x_0 e detto Δy il corrispondente incremento di y_0 , si ha:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{u(y_0 + \Delta y) - u(y_0)}{\Delta x} = [u'(y_0) + \omega(y_0 + \Delta y)] \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

e quindi, per la continuità di $\omega(y)$,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = u'(y_0) \cdot y'(x_0),$$

come volevasi dimostrare. Se, dunque, $y(x)$ è derivabile in A e $u(y)$ in B , la $f(x) = u(y(x))$ è derivabile in A , e riesce

$$(5) \quad f'(x) = u'(y(x)) y'(x).$$

Esempi. 1°) In virtù del teorema ora dato si può ottenere la derivata di x^α da quelle di e^x e di $\log x$. Supposto ad esempio $x > 0$, si ha invero

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x},$$

e quindi

$$Dx^\alpha = e^{\alpha \log x} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

2°) Se $f(x)$ è una funzione sempre positiva e derivabile e α è una quantità reale qualunque, si ha (in virtù di V)

$$(6) \quad D(f(x))^\alpha = \alpha(f(x))^{\alpha-1} Df(x).$$

Si noti, in particolare, che

$$D\sqrt{f} = \frac{Df}{2\sqrt{f}}, \quad D\sqrt{1-x^2} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Per α intero e positivo la formola (6) è già stata data in II e per α intero e negativo in III.

3°) Così pure, applicando il teor. V, la derivata di $\arcsen x$ si può dedurre da quella di $\arctang x$, e viceversa. Si ha invero

$$\arcsen x = \arctang \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

e quindi

$$D\arcsen x = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} D \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

VI. Funzioni inverse. Loro derivazione. Nell'insieme A (perfetto o no) di punti dell'asse delle x , sia definita la funzione reale $y = f(x)$ della variabile reale x . Al variare di x in A , la variabile y descrive un insieme di punti dell'asse delle y , che denoteremo con B . Preso ora a piacere un punto y di B , diciamo X l'insieme di punti, certamente esistente e contenuto in A , in ogni punto del quale la funzione $f(x)$, prende l'indicato valore y . L'insieme X riesce una ben determinata funzione di y , definita in B , e scriveremo perciò

$$X = \varphi(y).$$

Tale funzione chiamasi *la funzione inversa dell'assegnata funzio-*

ne $f(x)$. Dell'insieme X si può dare anche la seguente costruzione geometrica. Sia C il diagramma relativo alla funzione $y = f(x)$, e B l'insieme di punti dell'asse delle y , luogo delle proiezioni ortogonali sul detto asse dei punti di C : per ogni punto y di B , l'insieme X non è che l'insieme luogo delle proiezioni ortogonali, sull'asse delle x , dei punti della sezione di C fatta con l'orizzontale di ordinata y .

Così, per esempio, se, nell'intervallo $(-1, 1)$, si definisce $f(x)$ ponendo

$$f(x) = +\sqrt{1-x^2},$$

l'insieme B è l'intervallo $(0, 1)$ dell'asse delle y , e per ogni valore di y in $(0, 1)$, l'insieme X è costituito dalla coppia di punti

$$-\sqrt{1-y^2} \text{ e } +\sqrt{1-y^2}$$

dell'intervallo $(-1, 1)$.

Può darsi che la funzione $f(x)$ non prenda mai uno stesso valore in due diversi punti di A ; in tal caso, l'insieme X si riduce ad un punto X di A . Designandone con x l'ascissa, potremo allora dire che tale ascissa x è funzione di y , definita in B , scrivendo, anzichè $X = f(y)$,

$$x = \varphi(y),$$

e potremo dire che la *funzione inversa della funzione reale $y = f(x)$ è la funzione reale $x = \varphi(y)$* . Porremo la seguente definizione:

Ogni funzione reale di variabile reale, dicesi *propriamente invertibile in un dato insieme A* , se ammette per funzione inversa una funzione reale.

Evidentemente: Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione reale sia propriamente invertibile in un dato insieme A , è che ivi non prenda mai lo stesso valore in due punti diversi.

Ad esempio: La funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ è propriamente invertibile nell'intervallo $(0, 1)$, le funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tang} x$ lo sono nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, la funzione $\operatorname{cos} x$ nell'intervallo $(0, \pi)$, la funzione e^x nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

Evidentemente: Condizione sufficiente affinchè una funzione sia propriamente invertibile in un insieme A , è che essa sia ivi crescente o decrescente (cfr. n° 27) e si ha che:

a) Secondochè una data funzione è crescente o decrescente, la sua inversa è crescente o decrescente.

Per le funzioni continue in un intervallo sussiste la proposizione seguente:

b) Affinchè una funzione $f(x)$, continua nell'intervallo (a', a'') , sia in esso propriamente invertibile è condizione necessaria e sufficiente che essa sia o crescente o decrescente.

Occorre solo dimostrare la necessità della condizione. Se $f(x)$ è propriamente invertibile in (a', a'') sarà $f(a') \neq f(a'')$. Supponiamo che sia $f(a') < f(a'')$, dico che allora la funzione $f(x)$ è crescente in (a', a'') . Ed invero sarà intanto, per ogni punto x di (a', a'') ,

$$f(a') < f(x) < f(a'').$$

Poichè se fosse $f(x) < f(a')$ [non può essere $f(x) = f(a')$] esisterebbe un punto dell'intervallo (x, a') in cui (32, II) la funzione $f(x)$ riprenderebbe il valore $f(a')$, e se fosse $f(x) > f(a'')$ esisterebbe un punto dell'intervallo (a', x) in cui la funzione riprenderebbe il valore $f(a'')$. Se ora x_0 è un qualsiasi punto di (a', a'') , poichè $f(a') < f(x_0) < f(a'')$, applicando ai due intervalli (a', x_0) e (x_0, a'') il ragionamento fatto per l'intervallo (a', a'') , si trova che

$$\begin{aligned} f(a') < f(x) < f(x_0), & \text{ se } x \text{ è in } (a', x_0), \\ f(x_0) < f(x) < f(a''), & \text{ se } x \text{ è in } (x_0, a''), \end{aligned}$$

ciò che prova quanto si voleva. Si ha pure che:

c) La funzione inversa di una funzione continua e propriamente invertibile nell'intervallo (a', a'') , è pur essa continua.

Ed invero, se, ad esempio, la funzione continua $f(x)$ è crescente nell'intervallo (a', a'') , posto $b' = f(a')$, $b'' = f(a'')$, la funzione $x = \varphi(y)$, inversa della $f(x)$, riesce definita nell'intervallo (b', b'') , è ivi crescente e prende tutti i valori compresi fra il suo minimo a' ed il suo massimo a'' . Ma da tale circostanza segue (31, VIII) la continuità di $\varphi(y)$.

Per la derivazione delle funzioni inverse si fa uso del seguente teorema:

d) La funzione inversa $x = \varphi(y)$ di una funzione $y = f(x)$ che, nell'intervallo (a', a'') sia continua, propriamente invertibile, derivabile e di derivata non nulla, è pur essa derivabile e di derivata non nulla, mentre sussiste la relazione

$$(7) \quad \varphi'(y)f'(x) = 1.$$

Si ha invero:

$$\frac{\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}},$$

e poichè [teor. c)] se Δy è infinitesimo è pure infinitesimo Δx ,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)},$$

e ciò dimostra la derivabilità di $\varphi(y)$ e la (7).

Esempi. 1°) Se $b > a > 0$, la funzione $y = x^\alpha$ (α numero reale qualsiasi) è crescente nell'intervallo (a, b) , la sua inversa è di nuovo una potenza: $x = y^{1/\alpha}$. Si ha:

$$Dy^{1/\alpha} = \frac{1}{Dx^\alpha} = \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} y^{1/\alpha - 1}.$$

2°) La funzione $y = e^x$ è crescente nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$, e la sua inversa è la funzione logaritmica: $x = \log y$. Si ha:

$$D \log y = \frac{1}{De^x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

3°) La funzione $y = \operatorname{tang} x$ è crescente nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ e la sua inversa è $x = \operatorname{arctang} y$. Si ha:

$$D \operatorname{arctang} y = \frac{1}{D \operatorname{tang} x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

44. Derivate successive. — Nell'insieme perfetto A sia definita la funzione reale $y = f(x)$ della variabile reale x , e supponiamo, per semplificare, che i punti di A nei quali la funzione è derivabile formino, alla loro volta, un insieme perfetto A_1 . La funzione dà allora origine ad un'altra funzione, definita nell'insieme perfetto A_1 : alla sua derivata, che abbiamo indicato con una delle notazioni $Df(x)$ o $f'(x)$. Sottoponiamo, alla sua volta, la funzione $f'(x)$ alla derivazione su A_1 , e supponiamo che esistano in A_1 dei punti di derivabilità per $f'(x)$, il cui insieme indicheremo con A_2 . Riesce allora definita in A_2 la derivata della derivata di $f(x)$ che è ben naturale chiamare *la derivata seconda della $f(x)$* e che indicheremo con una qualsiasi delle notazioni:

$$D^2 f(x) \text{ o } f''(x).$$

Se l'insieme A_2 è (in particolare) perfetto, si potrà sottoporre a sua volta la funzione $f''(x)$ alla derivazione su A_2 e se esistono in A_2 dei punti di derivabilità per $f''(x)$, il cui insieme indicheremo con A_3 , in tale insieme riesce definita la derivata della derivata seconda di $f(x)$, che è ben naturale chiamare *la derivata terza della $f(x)$* e che denoteremo con una qualsiasi delle notazioni:

$$D^3 f(x) \text{ o } f'''(x).$$

Supponiamo che il procedimento ora descritto di successiva derivazione possa essere applicato n volte. Si perverrà così a costruire n insiemi A_1, A_2, \dots, A_n ,

$$A > A_1 > A_2 > \dots > A_{n-1} > A_n,$$

e n funzioni

$$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x),$$

definite, rispettivamente, in quegli insiemi. Gli insiemi A_1, A_2, \dots, A_{n-1} sono supposti perfetti e le funzioni $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ sono derivabili, rispettivamente, in ciascun punto degli insiemi A_2, A_3, \dots, A_n e sugli insiemi A_1, A_2, \dots, A_{n-1} .

In A_p ($p=1, 2, \dots, n$) riesce definita quella che si chiama la derivata p^{ma} della $f(x)$ e che si indica con una delle notazioni

$$D^p f(x) \text{ o } f^{(p)}(x).$$

Evidentemente

$$D^p f(x) = D^i D^j f(x), \quad i + j = p.$$

La derivata p^{ma} della funzione $f(x)$ dicesi anche *derivata d'ordine p* . In ciascun punto di A_p si può successivamente sottoporre la funzione p volte, almeno, alla derivazione.

Può darsi, come per esempio avviene per le funzioni elementari, che il descritto procedimento di successiva derivazione non abbia mai ad arrestarsi, esisteranno allora (19, VII) dei punti di A in ciascuno dei quali si può successivamente sottoporre la funzione alla derivazione quante volte si vuole. Si dice allora che, in ciascuno di quei punti e nell'insieme da essi costituito, la funzione ammette derivate d'ordine comunque elevato.

Per le funzioni elementari esistono interi intervalli (che proponiamo di determinare caso per caso) nei quali esse ammettono derivate d'ordine comunque elevato. Si ha:

$$I. \quad D^n x^\alpha = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1) x^{\alpha - n},$$

e quindi, se α è intero e positivo

$$D^{\alpha-1} x^\alpha = \alpha! x, \quad D^\alpha x^\alpha = \alpha!, \quad D^{\alpha+p} x^\alpha = 0, \quad p \geq 1.$$

$$\text{II.} \quad D^n a^x = a^x (\log_e a)^n, \quad D^n e^x = e^x.$$

$$\text{III.} \quad D^n \log |x| = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

$$\text{IV.} \quad D^n \text{sen } x = \text{sen} \left(x + n \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\text{V.} \quad D^n \text{cos } x = \text{cos} \left(x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

45. Notazione differenziale. Differenziali. — Se $y = f(x)$ è una funzione reale derivabile, come conseguenza della definizione stessa di derivata, si ha

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \sigma(x, \Delta x),$$

ove $\sigma(x, \Delta x)$ è una certa funzione di x e di Δx , infinitesima con Δx .
Ne segue

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \sigma \cdot \Delta x.$$

L'incremento Δy della funzione risulta dunque decomposto nei due addendi

$$f'(x) \Delta x \quad \text{e} \quad \sigma \cdot \Delta x.$$

Il primo addendo è ciò che si chiama *il differenziale della funzione*, e per esso si usa la notazione df e dy . Si pone cioè:

$$dy = df = f'(x) \Delta x.$$

Se, in particolare, consideriamo la funzione $f(x) = x$, ne deduciamo:

$$dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x;$$

il differenziale della variabile indipendente coincide dunque col suo incremento. Potremo, dopo ciò, nella espressione del df sostituire dx a Δx , porre cioè:

$$dy = df = f'(x) dx,$$

e dire dunque: *il differenziale di una funzione è il prodotto della sua derivata prima per il differenziale della variabile indipendente.*

Il differenziale dy d'una funzione è suscettibile di una interpretazione geometrica. Consideriamo il diagramma cartesiano $y = f(x)$, l'equazione della tangente al diagramma in un punto di ascissa x , è

$$Y - y = f'(x)(X - x).$$

Poniamo $X = x + \Delta x = x + dx$, si ricava

$$Y - y = f'(x) dx = dy,$$

onde possiamo dire che: il differenziale di una funzione vale l'incremento dell'ordinata della tangente, al diagramma della funzione, corrispondente allo stesso incremento della variabile.

È importante notare che:

Se si suppone dx infinitesimo e $f'(x)$ diversa da zero nel punto x , le quantità Δy e dy sono due infinitesimi il cui rapporto ha per limite l'unità.

Dalla definizione stessa di differenziale si deduce, invero, nelle ipotesi ora poste,

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\sigma}{f'(x)},$$

e poichè σ è infinitesimo con Δx , segue il nostro asserto.

Adunque, quando Δx è infinitesimo, Δy e dy sono due infinitesimi suscettibili di essere sostituiti l'uno all'altro, e con tanto maggiore approssimazione quanto più piccolo è Δx . Nelle applicazioni ai problemi della pratica, tale sostituzione si fa continuamente e spesso anche al di là dei limiti leciti.

I differenziali successivi a quello ora definito, che dicesi del *prim'ordine*, si definiscono l'uno dopo l'altro come le derivate successive. Si chiama *differenziale del secondo ordine* il differenziale del differenziale del primo ordine, con la convenzione di trattare il fattore dx come costante. Tale differenziale si rappresenta con d^2y , talchè si ha:

$$d^2y = d(dy) = [f'(x)dx]' dx = f''(x) dx^2.$$

Allo stesso modo si ha il differenziale terzo:

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x) dx^2]' dx = f'''(x) dx^3,$$

e così di seguito. In generale, il differenziale d'ordine n , che riesco definito come il differenziale del differenziale d'ordine $n-1$, ha per espressione:

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n.$$

Le derivate $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ..., possono inversamente esprimersi per mezzo dei differenziali e si ha, con ciò, una nuova notazione per rappresentare le derivate:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \dots$$

Talvolta è comodo adottare una deformazione delle notazioni ora date, scrivendo :

$$y' = \frac{d}{dx} y, \quad y'' = \frac{d^2}{dx^2} y, \dots, \quad y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} y, \dots$$

Per il calcolo con i differenziali è fondamentale la *convenzione* seguente: Quando in una questione si presentano più funzioni della medesima variabile x , e di ciascuna di esse si vuol considerare il differenziale, *devesi sempre attribuire al differenziale dx della variabile un valore invariabile da funzione a funzione*. Fatta questa convenzione, a ciascuna delle regole di derivazione, date al n° 42, corrisponde una regola di differenziazione. Le relazioni esprimenti queste regole si ottengono da quelle date al n° 42, semplicemente, moltiplicando ambo i membri di ciascuna di esse per il differenziale dx della variabile indipendente. Si ha così :

$$\text{I.} \quad d(a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n) = a_1 df_1 + a_2 df_2 + \dots + a_n df_n.$$

$$\text{II.} \quad d(f_1 f_2 \dots f_n) = \sum_{i=1}^n f_1 \dots f_{i-1} f_{i+1} \dots f_n df_i.$$

$$\text{III.} \quad d \frac{1}{f} = - \frac{df}{f^2}.$$

$$\text{IV.} \quad d \frac{g}{f} = \frac{f dg - g df}{f^2}.$$

V. Se u è funzione della x , composta per mezzo delle due funzioni $u = u(y)$, $y = u(x)$, si ha :

$$(1) \quad du = u'(y) dy.$$

Fermandoci a considerare quest'ultima regola, vediamo che la formola che dà il du per mezzo del dy è precisamente la medesima di quella che si avrebbe nel caso in cui y fosse la variabile indipendente. In ciò consiste uno dei più apprezzabili vantaggi pratici della notazione differenziale. Con la notazione delle derivate si hanno due formole diverse :

$$u_x = u'(x), \quad u_x = u'(y)y'(x),$$

per rappresentare la derivata di u rispetto alla x , secondochè u è data direttamente in funzione di x , oppure u dipende da x per il tramite di un'altra funzione y ; con la notazione differenziale la stessa formola serve per i due casi.

Se per la funzione u , definita in V, si vuole, partendo dalla (1),

calcolare il differenziale secondò d^2u , bisogna tenere presente che dy non deve ora essere trattato come una costante, poichè, non essendo y la variabile indipendente, sarà $dy = y'(x)dx$, e $y'(x)$ non è, in generale, una costante. Si deve dunque calcolare il differenziale di un prodotto di due funzioni, e si avrà perciò:

$$d^2u = u''(y) dy^2 + u'(y) d^2y.$$

E successivamente si trova:

$$\begin{aligned} d^3u &= u'''(y) dy^3 + 3u''(y) dy d^2y + u'(y) d^3y, \\ d^4u &= u^{IV}(y) dy^4 + 6u'''(y) dy^2 d^2y + 3u''(y) (d^2y)^2 + \\ &\quad + 4u''(y) dy d^3y + u'(y) d^4y, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Avvertenza. Se n è un numero intero e positivo, ed u una variabile qualsiasi, con la scrittura abbreviata

$$du^n$$

devesi intendere $(du)^n$ e non $d(u^n)$.

46. Teoremi di Rolle, di Cauchy, di Lagrange. Massimi e minimi in un punto. Ricerca della funzione primitiva. — In questo articolo stabiliremo alcuni classici teoremi per le funzioni, definite in tutto un intervallo, ed ivi derivabili su di esso, i quali costituiscono il primo sostanziale fondamento dell'Analisi matematica.

La funzione reale $y = f(x)$ della variabile reale x , sia definita nell'intervallo (a', a'') . Sia x_0 un punto di (a', a'') e Δx un incremento di x_0 , sull'intervallo (a', a'') . Si dice che la *funzione $f(x)$ è crescente (decrescente) nel punto x_0* , se si può trovare un numero positivo σ tale che, la condizione

$$0 < \Delta x < \sigma,$$

abbia sempre di conseguenza che Δy assuma il segno (il segno contrario) di Δx , abbia cioè di conseguenza che sia

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \right).$$

Si dimostra assai facilmente il teorema:

I. *Se la funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0 di (a', a'') e la derivata vi ha un valore positivo (un valore negativo), la funzione è crescente (decrescente) nel punto x_0 .*

Sia $\delta > 0$ il valore della derivata di $f(x)$ nel punto x_0 . Esiste allora un numero positivo σ tale che per ogni incremento non nullo Δx di x_0 [sull'intervallo (a', a'')], di modulo inferiore a σ , si abbia sempre

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - \delta \right| < \frac{\delta}{2},$$

e quindi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > \frac{\delta}{2}.$$

Si dice che in un punto x_0 di (a', a'') la funzione $y = f(x)$ vi ha un massimo (un minimo) se si può trovare un numero positivo σ tale che per ogni incremento Δx di x_0 , su (a', a'') , di modulo inferiore a σ , si abbia sempre

$$(1) \quad f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0), \text{ cioè } \Delta y \leq 0,$$

$$(2) \quad [f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0), \text{ cioè } \Delta y \geq 0].$$

Dal teorema precedente discende subito il seguente:

II. Se in un punto x_0 *interno* all'intervallo (a', a'') , la funzione $f(x)$ è derivabile e vi ha un massimo (un minimo) la derivata della funzione vi ha il valore zero.

Supponiamo, ad esempio, che nel punto x_0 *interno* all'intervallo (a', a'') la funzione $f(x)$ sia derivabile e vi abbia un massimo. Devo dimostrare che $f'(x_0) = 0$. Indichiamo con A, A_1, A_2 , rispettivamente, gli intervalli aperti (a', a'') , (a', x_0) , (x_0, a'') . Non può essere $f'(x_0) > 0$; ed infatti, se così fosse esisterebbe (teor. I) un intervallo I aperto $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ tale che in ogni punto $x_0 + \Delta x$ di $I \cdot A$, distinto da x_0 , risulterebbe

$$[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] \Delta x > 0,$$

ma allora in $I \cdot A_2$ sarebbe sempre $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$, e non esisterebbe alcun intorno di x_0 , su A_2 , nel quale sia soddisfatta la (1). Non può essere $f'(x_0) < 0$; ed infatti, se così fosse, esisterebbe (teor. I) un intervallo I aperto $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ tale che in ogni punto $x_0 + \Delta x$ di $I \cdot A$, distinto da x_0 , risulterebbe

$$[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] \Delta x < 0,$$

ma allora in $I \cdot A_1$ sarebbe sempre $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$, e non esisterebbe alcun intorno di x_0 , su A_1 , nel quale sia soddisfatta la (1).

Dal teorema ora dimostrato e dal teorema di *Weierstrass* sulle funzioni continue (32, IV) segue immediatamente il **teorema di Rolle**:

III. *La funzione $f(x)$ sia definita nell'intervallo (a', a'') e vi sia continua e in ogni punto interno derivabile; allora, se $f(a') = f(a'')$, esisterà almeno un punto **interno** all'intervallo nel quale la derivata della funzione ha il valore zero.*

Se il minimo ed il massimo valore della funzione $f(x)$, in (a', a'') coincidessero nel valore $f(a') = f(a'')$, la funzione avrebbe valore costante [= $f(a')$] in (a', a'') , ed avendo perciò derivata ovunque nulla, esisterebbe, come appunto asserisce il teorema, anche un punto *interno* all'intervallo (a', a'') nel quale la derivata ha valore zero; il teorema sarebbe senz'altro dimostrato. Supponiamo, pertanto, che il massimo o il minimo valore di $f(x)$ in (a', a'') non coincida con $f(a')$; tale valore sarà allora assunto in un certo punto α , *interno* all'intervallo (a', a'') . In α si avrà un massimo o un minimo, e perciò (teor. II) $f'(\alpha) = 0$.

Un'altra notevole conseguenza dei teoremi I e II e del teorema di *Weierstrass* sulle funzioni continue, è la proprietà per le funzioni derivate espressa dal teorema seguente di *Darboux*:

IV. *Se la funzione $f(x)$ è derivabile nell'intervallo (a', a'') , la derivata $f'(x)$ (potrà non essere continua, ma come le funzioni continue) non può assumere due valori diversi α e β , in due punti a e b di (a', a'') , senza prendere nell'intervallo (a, b) ogni valore compreso fra α e β .*

Sia, per esempio, $\alpha < \beta$, e sia γ un qualsiasi valore verificante la limitazione $\alpha < \gamma < \beta$, dobbiamo dimostrare che, fra a e b , esiste sempre almeno un punto c in cui è $f'(c) = \gamma$. Consideriamo, a tale scopo, la funzione $\varphi(x) = f(x) - \gamma x$, essa è continua e derivabile in (a', a'') , ed ivi si ha $\varphi'(x) = f'(x) - \gamma$, e pertanto

$$\varphi'(a) = \alpha - \gamma < 0, \quad \varphi'(b) = \beta - \gamma > 0.$$

In un intervallo, a destra di a , si ha (in virtù di I) $\varphi(x) < \varphi(a)$, ed in un intervallo a sinistra di b , $\varphi(x) < \varphi(b)$; onde segue che il minimo valore di $\varphi(x)$ in (a, b) sarà assunto in un punto c *interno* ad (a, b) . In tal punto (per II) riesce $\varphi'(c) = 0$, cioè $f'(c) = \gamma$.

Ne segue:

IV'. La funzione $f(x)$ sia derivabile nell'intervallo aperto (a', a'') e siano m e M gli estremi inferiore e superiore (finiti o infiniti) della derivata $f'(x)$ di $f(x)$ in quell'intervallo. Questa derivata prende nel detto intervallo ogni valore compreso fra m e M e da questi distinto.

Èd invero, se $m < \gamma < M$, esistono due punti a e b di (a', a'') , per i quali è $m \leq f'(a) < \gamma < f'(b) \leq M$.

Comune immediata conseguenza del teorema di **Rolle**, andiamo ora a dimostrare il **teorema di Cauchy**, detto anche il **teorema degli accrescimenti finiti**:

V. Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano entrambe definite nell'intervallo (a', a'') , vi siano continue e in ogni punto interno derivabili. Ovunque si prendano, in (a', a'') , due punti a e b , esiste sempre un punto c interno all'intervallo (a, b) per il quale è

$$(3) \quad \left| \begin{array}{cc} f'(c) & g'(c) \\ f(b) - f(a) & g(b) - g(a) \end{array} \right| = 0.$$

Posto, invero,

$$\varphi(x) = \left| \begin{array}{cc} f(x) & g(x) \\ f(b) - f(a) & g(b) - g(a) \end{array} \right|,$$

la funzione $\varphi(x)$ riesce continua in (a', a'') e derivabile in ogni punto interno di (a', a'') e si ha:

$$\varphi'(x) = \left| \begin{array}{cc} f'(x) & g'(x) \\ f(b) - f(a) & g(b) - g(a) \end{array} \right|.$$

Ma, evidentemente, $\varphi(b) = \varphi(a)$, e pertanto (teor. III) esiste un punto c , interno ad (a, b) , per il quale è $\varphi'(c) = 0$.

Un importante corollario del teorema di **Cauchy**, ora dimostrato, è il **teorema di Lagrange**, detto anche il **teorema del valor medio**:

VI. Se la funzione $f(x)$, definita nell'intervallo (a', a'') vi è continua e derivabile in ogni punto interno, ovunque si prendano in (a', a'') i punti a e b , esiste sempre un punto c interno all'intervallo (a, b) , per il quale è

$$(4) \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ciò risulta appunto dalla (3) quando vi si ponga $g(x) \equiv x$.

Corollarii immediati e notevolissimi del teorema di *Lagrange* sono i due seguenti.

VII. *Una funzione $f(x)$, definita nell'intervallo (a', a'') , ivi continua, derivabile in ogni punto interno e di derivata sempre nulla, è una costante nell'intervallo.*

Si ha, invero, per la (4), ovunque si prenda il punto x nell'intervallo (a', a'') , aperto a sinistra,

$$f(x) - f(a') = (x - a')f'(\xi), \quad a' < \xi < x,$$

e quindi, poichè $f'(\xi) = 0$, riesce sempre $f(x) = f(a')$.

VIII. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione, definita nell'intervallo (a', a'') , ivi continua e derivabile in ogni punto interno, sia, nell'intervallo, uniformemente lipschitziana è che la sua derivata sia limitata nell'intervallo aperto (a', a'') .*

Occorre solo dimostrare la sufficienza della condizione. Se K è l'estremo superiore, nell'intervallo aperto (a', a'') , del modulo della derivata $f'(x)$ della funzione $f(x)$, presi ovunque in (a', a'') due punti a e b , si ha dalla (4):

$$|f(b) - f(a)| \leq K |b - a|,$$

ciò che dimostra quanto si voleva.

Appoggiandosi a quest'ultimo teorema, è subito visto che la funzione dell'esempio 3° del n° 37 non è mai uniformemente lipschitziana in qualunque intorno dello zero, e che la funzione dell'esempio 4° dello stesso numero, è al contrario uniformemente lipschitziana in ogni intervallo finito dell'asse delle x .

Problema della ricerca della funzione primitiva. Un importante problema, importante anche nelle scienze applicate, del quale si domanda la soluzione all'*Analisi matematica* è il seguente:

Assegnata una funzione $f(x)$ in un intervallo (a', a'') , trovare tutte le funzioni, parimente definite in quell'intervallo, che hanno ivi $f(x)$ per derivata.

Ogni soluzione $F(x)$ del problema ora enunciato dicesi, com'è naturale, *una funzione primitiva della $f(x)$* . Si esprime che il problema possiede soluzioni, dicendo che l'assegnata funzione $f(x)$ am-

mette funzione primitiva oppure che essa è una *funzione derivata*. Il teorema IV di *Darboux*, dato nel presente articolo, ci dice intanto che non tutte le funzioni pensabili sono dotate di funzione primitiva: esse devono soddisfare alla condizione necessaria di prendere nel qualunque intervallo (a, b) , contenuto nell'intervallo di loro definizione, ogni valore compreso fra $f(a)$ e $f(b)$. Adunque, per esempio, la funzione che prende il valore *zero* nei punti di ascissa razionale ed il valore *uno* negli altri punti, non è certo dotata, in qualsiasi intervallo, di funzione primitiva; così pure, ogni funzione, monotona in un dato intervallo ed ivi non continua, non vi ammette una funzione primitiva.

Nella seconda parte del nostro corso assegneremo delle condizioni sufficienti, largamente verificate nelle pratiche applicazioni, sotto le quali il problema della ricerca della funzione primitiva possiede soluzioni, rinunciando però per sempre a trovare le condizioni che siano e necessarie e sufficienti.

Il teorema VII ci consente intanto, fin da ora, di trovare *tutte* le soluzioni del problema della ricerca della funzione primitiva, non appena che ne sia conosciuta *una*. Si ha invero il teorema:

IX. *Se la funzione $F(x)$ è, in (a', a'') , primitiva della $f(x)$, tutte e sole le funzioni primitive della $f(x)$, in (a', a'') , sono date dalla formula*

$$F(x) + c,$$

ove c è una costante arbitraria.

Ed infatti, se $G(x)$ è pur essa una funzione primitiva di $f(x)$, la differenza $F(x) - G(x)$ avrà derivata ovunque nulla in (a', a'') , e pertanto (teor. VII) questa differenza sarà ivi una costante.

Funzioni crescenti e decrescenti in un intervallo. Il teorema VI di *Lagrange* consente altresì di determinare per ogni funzione derivabile le condizioni necessarie e sufficienti affinché la funzione sia, in un dato intervallo, crescente o decrescente. Queste condizioni sono espresse dal seguente teorema che andiamo a dimostrare:

X. *Affinchè una funzione $f(x)$ definita nell'intervallo (a', a'') , ivi continua e derivabile in ogni punto interno, sia crescente (decrescente)*

nel detto intervallo, sono condizioni necessarie e sufficienti le due seguenti: **a)** la derivata $f'(x)$ della funzione non deve mai essere negativa (positiva); **b)** non deve esistere alcun intervallo contenuto in (a', a'') nel quale la derivata è sempre nulla.

Limitiamoci a considerare le condizioni per la crescita. Le condizioni sono necessarie: ed invero, se, in primo luogo, in un punto x_0 interno all'intervallo (a', a'') riuscisse $f'(x_0) < 0$, esisterebbe (teorema I) un intorno di x_0 , su (a', a'') , tale che per ogni punto x di esso la differenza $f(x) - f(x_0)$ ha sempre segno contrario a $x - x_0$; se, in secondo luogo, in un intervallo (a, b) di (a', a'') , fosse sempre $f'(x) = 0$, la funzione $f(x)$ avrebbe un valore costante in (a, b) .

Le condizioni sono sufficienti: Occorre dimostrare che, supposte soddisfatte le condizioni **a)** e **b)**, presi ovunque due punti x' e x'' in (a', a'') , se $x'' > x'$, si ha $f(x'') > f(x')$. Se x è un qualsivoglia punto interno all'intervallo (x', x'') , si ha:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x') &= (x - x')f'(\xi'), & x' < \xi' < x, \\ f(x'') - f(x) &= (x'' - x)f'(\xi''), & x < \xi'' < x'', \end{aligned}$$

e poichè è sempre $f'(x) \geq 0$, ne segue

$$(5) \quad f(x') \leq f(x) \leq f(x'').$$

Ciò intanto dice che $f(x') \leq f(x'')$. Ma non può essere $f(x') = f(x'')$, perchè, se così fosse, dalla (5) si dedurrebbe che la funzione $f(x)$ ha valore costante in tutto l'intervallo (x', x'') , nel quale dunque sarebbe sempre nulla la sua derivata.

Il teorema ora dimostrato può anche, più semplicemente, enunciarsi al modo seguente:

X'. Affinchè una funzione $f(x)$, definita nell'intervallo (a', a'') , ivi continua e derivabile in ogni punto interno, sia crescente (decrescente) nel detto intervallo, è condizione necessaria e sufficiente che essa sia crescente (decrescente) in ogni punto interno all'intervallo.

Massimi e minimi propri, crescita e decrescenza in un punto. Per stabilire alcuni corollari notevolissimi dell'ultimo teorema dimostrato, soprattutto utili nelle pratiche applicazioni, dobbiamo cominciare dal dare la definizione di *minimo (massimo) proprio in un punto*. Si dice che in un punto x_0 di (a', a'') , la funzione $f(x)$ vi ha un *minimo (un massimo) proprio*, se si può trovare

un intorno I di x_0 , su (a', a'') , tale che per ogni suo punto x , distinto da x_0 , risulti

$$f(x) > f(x_0) \quad [f(x) < f(x_0)].$$

Ciò posto, ecco un importante corollario del teor. X:

XI. *Se nel punto x_0 di (a', a'') la funzione $f(x)$ possiede le derivate, su (a', a'') , fino a quella d'ordine n inclusa, e se*

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) > 0$ [$f^{(n)}(x_0) < 0$], la funzione è crescente (è decrescente) nel punto x_0 se n è dispari; la funzione ha un minimo (un massimo) proprio nel punto x_0 se n è pari.

Supponiamo $f^{(n)}(x_0) > 0$. La derivata $f^{(n-1)}(x)$ esisterà in un certo intorno di x_0 , su (a', a'') , nel quale esistono e sono lipschitziane tutte le derivate d'ordine minore di $n - 1$. Poichè $f^{(n)}(x) > 0$, la $f^{(n-1)}(x)$ è (teor. I) crescente in x_0 , e perciò esiste un intorno I di x_0 , su (a', a'') , in ogni punto del quale è

$$f^{(n-1)}(x) \begin{cases} > 0, & \text{a destra di } x_0, \\ < 0, & \text{a sinistra di } x_0, \end{cases}$$

ne segue, in virtù del teorema X, successivamente,

$$\text{in } I, f^{(n-2)}(x) \begin{cases} > 0, & \text{a destra di } x_0, \\ > 0, & \text{a sinistra di } x_0, \end{cases}$$

$$\text{in } I, f^{(n-3)}(x) \begin{cases} > 0, & \text{a destra di } x_0, \\ < 0, & \text{a sinistra di } x_0, \end{cases}$$

. ,

e pertanto, se n è dispari, si ha:

$$(6) \quad \text{in } I, f'(x) \begin{cases} > 0, & \text{a destra di } x_0, \\ > 0, & \text{a sinistra di } x_0, \end{cases}$$

e se n è pari

$$(7) \quad \text{in } I, f'(x) \begin{cases} > 0, & \text{a destra di } x_0, \\ < 0, & \text{a sinistra di } x_0. \end{cases}$$

Dalle (6) segue, in virtù di X,

$$\text{in } I, f(x) \begin{cases} > f(x_0), & \text{a destra di } x_0, \\ < f(x_0), & \text{a sinistra di } x_0, \end{cases}$$

la funzione è dunque crescente in x_0 ; dalle (7) segue invece

$$\text{in } I, f(x) \begin{cases} > f(x_0), & \text{a destra di } x_0, \\ > f(x_0), & \text{a sinistra di } x_0, \end{cases}$$

la funzione ha dunque un minimo proprio nel punto x_0 .

Si osservi che il teorema sussiste tanto se x_0 è interno all'intervallo (a', a'') , quanto se è in uno degli estremi. In quest'ultimo caso, si può, più precisamente, dire che:

XI'. Se nell'estremo sinistro a' (nell'estremo destro a'') dell'intervallo (a', a'') , la funzione $f(x)$ possiede derivate, su (a', a'') , fino a quella d'ordine n inclusa, e se

$$f'(a') = f''(a') = \dots = f^{(n-1)}(a') = 0, \quad f^{(n)}(a') \neq 0, \\ [f'(a'') = f''(a'') = \dots = f^{(n-1)}(a'') = 0, \quad f^{(n)}(a'') \neq 0],$$

la funzione $f(x)$ ha nel punto x_0 un minimo o un massimo secondochè $f^{(n)}(a') > 0$ o $f^{(n)}(a') < 0$ [$f^{(n)}(a'') < 0$ o $f^{(n)}(a'') > 0$, se n è dispari; $f^{(n)}(a'') > 0$ o $f^{(n)}(a'') < 0$, se n è pari].

Esempio. Posto

$$f(x) = \operatorname{sen}x - x + \frac{x^3}{6},$$

si trova $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$, e pertanto (teor. XI) in un certo intorno del punto zero, si ha

$$\operatorname{sen}x > x - \frac{x^3}{6} \text{ se } x > 0,$$

$$\operatorname{sen}x < x - \frac{x^3}{6} \text{ se } x < 0.$$

La seconda diseuguaglianza segue peraltro dalla prima cambiando x in $-x$. Ma si ha sempre, per $x > 0$,

$$\operatorname{sen}x > x - \frac{x^3}{6};$$

poichè $f'''(x) = 1 - \cos x \geq 0$, e quindi, successivamente, $f''(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $f(x) > 0$, per $x > 0$.

47. Formola di Taylor. — Se x_0 è una costante reale affatto arbitrariamente fissata, comunque sia assegnato un polinomio reale

$$(1) \quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

della variabile reale x , di grado n , è sempre possibile determinare, ed in un sol modo, $n+1$ costanti reali $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, in maniera che risulti:

$$(2) \quad p(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)^2 + \dots + \alpha_n(x - x_0)^n.$$

Infatti, sviluppando le varie potenze del binomio $x - x_0$, che

compaiono nel secondo membro della (2), ordinando in seguito rispetto alle potenze della x , ed eguagliando ad α_i il coefficiente della potenza x^i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) ad ordinamento compiuto, si ottengono $n + 1$ equazioni lineari nelle $n + 1$ costanti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, per le quali equazioni il determinante dei coefficienti ha gli elementi della diagonale principale tutti eguali a uno, e tutti nulli gli elementi da una medesima e determinata parte di detta diagonale.

Si può dunque sempre prendere un polinomio di grado n nella forma (2). È interessante stabilire il significato infinitesimale dei coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Se si derivano ambo i membri della (2) i volte si trova:

$$(3) \quad p^{(i)}(x) = i! \alpha_i + \frac{(i+1)!}{1!} \alpha_{i+1} (x - x_0) + \dots + \frac{n!}{(n-i)!} \alpha_n (x - x_0)^{n-i},$$

e pertanto, ponendo $x = x_0$, si ottiene il seguente *significato infinitesimale* delle costanti $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$\alpha_0 = p(x_0), \quad \alpha_1 = \frac{p'(x_0)}{1!}, \quad \dots, \quad \alpha_i = \frac{p^{(i)}(x_0)}{i!}, \quad \dots, \quad \alpha_n = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!},$$

e quindi il teorema:

I. *Qualunque sia la costante reale x_0 , per ogni polinomio $p(x)$ di grado n vale la formula:*

$$(4) \quad p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Questa è la *formola di Taylor* per i polinomi. La costante x_0 chiamasi il *punto iniziale* della formola. Il teorema ora dato si può evidentemente anche enunciare nella forma seguente:

I'. *Ad un polinomio di grado n e alle sue derivate fino a quella d'ordine n inclusa, si può prescrivere di assumere, in un punto arbitrariamente fissato x_0 , valori assegnati a piacere. Il polinomio ne risulta allora univocamente determinato. Detti p_0 il valore assegnato al polinomio, e p_i il valore assegnato alla derivata d'ordine i ($i = 1, 2, \dots, n$), il polinomio è dato dalla formola:*

$$(4) \quad p(x) = p_0 + \frac{p_1}{1!} (x - x_0) + \frac{p_2}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{p_n}{n!} (x - x_0)^n.$$

A proposito di polinomi vogliamo qui osservare il seguente teorema del quale proponiamo la dimostrazione per esercizio.

II. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f(x)$, definita in un intervallo (a', a'') , coincida ivi con un polinomio di grado $n = i + j$, è che essa vi sia derivabile almeno i volte e che la sua derivata i^{ma} riesca un polinomio di grado j . In particolare, è necessario e sufficiente che la sua derivata n^{ma} abbia un valore costante in (a', a'') , e quindi che la sua derivata $(n + 1)^{\text{ma}}$ vi sia identicamente nulla.*

Ciò posto andiamo a vedere come da una spontanea questione d'approssimazione sorga la *formola di Taylor per una qualsiasi funzione reale $y = f(x)$, della variabile reale x* , definita in un intervallo (a', a'') . Al n° 44, nell'introdurre il concetto di differenziale, abbiamo notato che il sostituire all'incremento Δy della funzione, relativo al passaggio dal punto x_0 al punto $x_0 + \Delta x$, il suo differenziale $dy = f'(x_0)\Delta x$, equivale a sostituire al diagramma *C*, relativo alla funzione $f(x)$, la sua tangente nel punto x_0 .

$$(5) \quad y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0),$$

equivale cioè a sostituire alla funzione $f(x)$, un polinomio di *primo* grado tale che, nel punto x_0 esso e la sua derivata prima prendono, rispettivamente, i valori della funzione e della derivata prima di questa.

Ma supposto che nel punto x_0 la funzione $f(x)$ sia derivabile *due* volte almeno, esiste un polinomio di *secondo* grado:

$$(6) \quad y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0),$$

tale che, nel punto x_0 , essa e le sue derivate prima e seconda, prendono, rispettivamente i valori della funzione e delle derivate prima e seconda di questa. È ben naturale la presunzione che la sostituzione di questo polinomio di *secondo* grado alla funzione $y = f(x)$, sia più consentibile della sostituzione del polinomio di *primo* grado (5). Poichè, se, come avverrà in generale, è $f''(x_0) \neq 0$, laddove il polinomio (5) coincide, nel punto x_0 , con la $f(x)$, soltanto per il valore suo e della derivata prima, il polinomio (6) vi coincide per il valore suo, della derivata prima e della derivata seconda.

Il diagramma relativo al polinomio (6) è una parabola ad asse verticale, tale parabola chiamasi la *parabola osculante* il diagramma *C* nel punto x_0 .

Supponiamo ora che la funzione $f(x)$ sia derivabile n volte nel

punto x_0 , e che sia $n > 2$. Consideriamo, in luogo di (5) e in luogo di (6), il polinomio di grado n :

$$(7) \quad y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots \\ + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0),$$

tale che, nel punto x_0 , esso e le sue derivate prima, seconda, ..., n^{ma} , prendono, rispettivamente, i valori della funzione, e delle derivate prima, seconda, ..., n^{ma} di questa. Per la supposta derivabilità della funzione $f(x)$, la sostituzione del polinomio (7) alla funzione $f(x)$ appare la maggiormente consentibile fra tutte quelle che si ottengono, in modo analogo, con polinomi di grado minore di n .

Nel giudicare della sostituibilità, più o meno consentibile, della funzione $f(x)$ con un certo polinomio $p(x)$, ci siamo lasciati guidare, in ciò che precede, dal criterio che *la sostituzione tanto più è approssimata quanto maggiore è il numero delle derivate di $p(x)$ che, nel punto x_0 , coincidono con le derivate di pari ordine delle $f(x)$.*

Diciamo subito che tale criterio non è affatto il migliore nè il più sicuro per gli scopi della pratica. In pratica, la sostituzione della funzione con un polinomio occorre che sia effettuata in **tutto** un **assegnato** intorno circolare I di x_0 , su (a', a'') , e, per gli scopi della pratica, fra due polinomi $p(x)$ e $q(x)$, con i quali si intende sostituire la $f(x)$, in tutto I , è preferibile quello che fornisce, in ciascun punto di I , un errore d'approssimazione minore, per difetto o per eccesso; è preferibile, cioè, il polinomio $p(x)$ se, in ciascun punto di I , risulta:

$$(8) \quad |f(x) - p(x)| < |f(x) - q(x)|.$$

Ora, poichè, per il calcolo delle derivate nel punto x_0 , occorrono e bastano i valori di $f(x)$, di $p(x)$ e di $q(x)$, soltanto in un intorno di x_0 , su (a', a'') , di diametro piccolo quanto si vuole, ci si può ben aspettare che, pur essendo il polinomio $p(x)$ quello, fra i due polinomi $p(x)$ e $q(x)$, che ha il maggior numero di derivate successive coincidenti in x_0 con quelle di pari ordine della $f(x)$, non riesca poi sempre in **tutto** l'intorno I soddisfatta la (8).

E ciò avviene effettivamente in molti casi. Ma facciamo l'ipotesi che in ciascun punto dell'intorno circolare I di x_0 , su (a', a'') , fatta al più eccezione per il punto x_0 , esista anche la derivata $(n + 1)^{\text{ma}}$

della funzione $f(x)$ e che la derivata n^{ma} sia continua in I . In tale ipotesi la derivata $f^{(i)}(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$) esiste in tutto I . Supponiamo che ciascuna derivata $f^{(i)}(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$) sia limitata in I , e che tale sia pure la derivata $f^{(n+1)}(x)$, nell'intorno I , eventualmente privato del punto x_0 . Esisterà un numero positivo K , per il quale risulta:

$$\text{in } I, \quad |f^{(i)}(x)| \leq K \quad (i=1, 2, \dots, n+1).$$

Detti m_i e M_i gli estremi, inferiore e superiore, di $f^{(i)}(x)$ in I , si ha:

$$|m_i| \leq K, \quad |M_i| \leq K \quad (i=1, 2, \dots, n+1).$$

Prendiamo a considerare, in I , la funzione:

$$\begin{aligned} \Phi_i(x) = M_{i+1} \frac{(x-x_0)^{i+1}}{(i+1)!} - f(x) + f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots \\ + f^{(i)}(x_0) \frac{(x-x_0)^i}{i!}, \end{aligned}$$

Supposto che il punto x_0 sia interno all'intervallo (a', a'') o coincida col suo estremo sinistro a' , limitiamoci, per semplificare, a considerare i punti di I a destra di x_0 , il cui insieme indicheremo con I'' , denotando invece con I' l'insieme dei punti di I , a sinistra di x_0 , se essi esistono. Si ha, in I'' ,

$$\begin{aligned} \Phi'_i(x) = M_{i+1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} - f'(x) + f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \dots \\ + f^{(i)}(x_0) \frac{(x-x_0)^{i-1}}{(i-1)!}, \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \Phi_i^{(i)}(x) = M_{i+1}(x-x_0) - f^{(i)}(x) + f^{(i)}(x_0), \\ \Phi_i^{(i+1)}(x) = M_{i+1} - f^{(i+1)}(x), \end{aligned}$$

e poichè

$$\Phi_i(x_0) = \Phi'_i(x_0) = \dots = \Phi_i^{(i)}(x_0) = 0, \quad \Phi_i^{(i+1)}(x) = M_{i+1} - f^{(i+1)}(x) \geq 0,$$

supposto che, in (x_0, x) , non sia identicamente $M_{i+1} = f^{(i+1)}(x)$, nel qual caso (teor. II) la funzione $f(x)$ verrebbe addirittura a coincidere in (x_0, x) con un polinomio di grado $i+1$, risulta, successivamente (cfr. la dimostrazione del teor. X del n° 45) in I''

$$\Phi_i^{(i)}(x) > 0, \quad \Phi_i^{(i-1)}(x) > 0, \dots, \quad \Phi'_i(x) > 0, \quad \Phi_i(x) > 0,$$

cioè

$$(9) \quad f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) < \\ < M_{i+1} \frac{(x - x_0)^{i+1}}{(i+1)!}.$$

Considerando invece la funzione

$$\varphi_i(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) - \\ - m_{i+1} \frac{(x - x_0)^{i+1}}{(i+1)!},$$

si trova, in modo perfettamente analogo, che in I'' risulta

$$(10) \quad f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) > \\ > m_{i+1} \frac{(x - x_0)^{i+1}}{(i+1)!}.$$

Se poniamo $p_0(x) \equiv f(x_0)$ e con $p_i(x)$ indichiamo il polinomio di grado i :

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0),$$

si ha dunque, in I'' ,

$$|f(x) - p_i(x)| < K \frac{|x - x_0|^{i+1}}{(i+1)!}.$$

Alla stessa limitazione si giunge anche quando x appartiene a I' , e si ha pertanto il teorema:

III. *Nell'intorno circolare I di x_0 , su (a', a'') , la funzione reale $y = f(x)$ della variabile reale x , possiede tutte le derivate fino a quella inclusa d'ordine n , continue e limitate, e, fatta al più eccezione del punto x_0 , vi possiede anche la derivata d'ordine $n + 1$. Se la derivata d'ordine $n + 1$ è del pari limitata nell'intorno I , eventualmente privato del punto x_0 , esiste un numero positivo K per il quale risulta, in I ,*

$$(11) \quad |f(x) - p_i(x)| < K \frac{|x - x_0|^{i+1}}{(i+1)!} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

ove:

$$(12) \quad p_i(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0).$$

Il teorema ora ottenuto ci dice che: Nelle ipotesi fatte, l'errore d'approssimazione che si commette sostituendo alla funzione $f(x)$ il polinomio $p_i(x)$, definito dalla (12), è un infinitesimo quando è tale $x - x_0$, ed è un infinitesimo d'ordine $i + 1$ almeno rispetto a $x - x_0$. E pertanto, si ha il diritto di presumere che, nel sostituire il polinomio $p_i(x)$ alla funzione $f(x)$, l'errore d'approssimazione commesso diminuisca al crescere di i , *purchè si mantenga la x in un intorno convenientemente ristretto del punto x_0 .*

Si ha, per esempio, che in un intorno circolare J di x_0 , di raggio

$$\frac{1}{(1+K) \cdot 10},$$

il polinomio $p_i(x)$ può sostituirsi a $f(x)$ con un errore d'approssimazione in modulo certo minore di 10^{-i-1} , cioè, in ogni punto x di J , il valore del polinomio $p_i(x)$ ha in comune col valore di $f(x)$, almeno le prime i cifre decimali. Ma vi sono valori di $x - x_0$ per i quali la (11) non consente affatto la presunzione che l'approssimazione di $f(x)$, mediante il polinomio $p_i(x)$, migliori al crescere di i . Se, per esempio, è contenuto in I il punto $x = x_0 + n + 1$, dalla (11) si trae, per $x = x_0 + n + 1$,

$$|f(x) - p_i(x)| < K \frac{n+1}{1} \frac{n+1}{2} \dots \frac{n+1}{i+1},$$

ed il secondo membro di questa limitazione va crescendo quando i percorre i valori $0, 1, 2, \dots, n$.

Per la considerata questione d'approssimazione della funzione $f(x)$ mediante i polinomi $p_i(x)$ potrà evidentemente riuscire utile una formola che assegni un'espressione semplice alla differenza $f(x) - p_i(x)$. Una tale formola chiamasi *formola di Taylor*. La differenza $f(x) - p_i(x) = R_i(x)$ chiamasi il *resto della formola di Taylor* e il fissato punto x_0 il *punto iniziale*.

Manteniamo le ipotesi fatte, per il teorema III, circa l'esistenza e la continuità delle derivate di $f(x)$ nell'intorno I di x_0 . Un'espressione di $R_i(x)$, che deriva da *Lagrange*, si deduce già dalle limitazioni (9) e (10) se si suppone $i \leq n - 1$ oppure se, per $i = n$, si suppone limitata la derivata d'ordine $n + 1$. In tali ipotesi le derivate $f^{(i+1)}(x)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) sono limitate in (x_0, x) e subito si vede che le relazioni (9) e (10) sussistono anche quando M_{i+1} e m_{i+1} designano, rispettivamente, l'estremo superiore e l'estremo inferiore del-

la derivata $f^{(i+1)}$ nell'intervallo (x_0, x) . Queste relazioni ci dicono che la differenza $f(x) - p_i(x)$ si ottiene moltiplicando la quantità

$$\frac{(x - x_0)^{i+1}}{(i + 1)!}$$

per un numero compreso fra m_{i+1} e M_{i+1} , e da questi distinto, e quindi (teor. IV' del n° 45) per il valore che la derivata $f^{(i+1)}$ assume in un certo punto ξ interno all'intervallo (x_0, x) si ha perciò la prima formola di **Taylor**:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + R_i(x), \\ R_i(x) &= \frac{(x - x_0)^{i+1}}{(i + 1)!} f^{(i+1)}(\xi), \quad x_0 < \xi < x, \end{aligned} \right. \quad (i \leq n).$$

Ma diciamo subito che la formola (13) sussiste, per ogni valore di $i \leq n$, anche quando la derivata $f^{(n+1)}$ non sia limitata. A ciò e ad altre notevolissime espressioni per il resto $R_i(x)$, arriviamo, assai semplicemente, col classico ragionamento che segue.

Si fissi per i uno qualsiasi fra i valori $0, 1, 2, \dots, n$ e per x un qualsiasi valore dell'intorno I , distinto da x_0 . Sia σ un numero positivo, comunque fissato, e si ponga

$$R_i(x) = \frac{(x - x_0)^\sigma}{\sigma} T_i(x).$$

Si ha:

$$(14) \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x) + \frac{(x - x_0)^\sigma}{\sigma} T_i(x).$$

Definiamo in I la funzione $F(u)$, della variabile u ponendo:

$$F(u) = f(u) + (x - u)f'(u) + \dots + \frac{(x - u)^i}{i!} f^{(i)}(u) + \frac{(x - u)^\sigma}{\sigma} T_i(x).$$

In forza della (14) si ha:

$$F(x) = F(x_0) = f(x),$$

mentre la $F(u)$ riesce una funzione continua nell'intervallo J determinato dai punti x_0 e x , e riesce anche derivabile in ogni punto interno ad J . E si ha:

$$F'(u) = \frac{(x - u)^i}{i!} f^{(i+1)}(u) - (x - u)^{\sigma-1} T_i(x).$$

In virtù del teorema di **Rolle** (teor. III, n. 45) esiste un punto ξ interno all'intervallo J per il quale è $F'(\xi) = 0$, e si ha pertanto, poichè $x - \xi \neq 0$,

$$T_i(x) = \frac{(x - \xi)^{i+1-\sigma}}{i!} f^{(i+1)}(\xi),$$

$$R_i(x) = \frac{(x - x_0)^\sigma (x - \xi)^{i+1-\sigma}}{i! \sigma} f^{(i+1)}(\xi).$$

Siamo così pervenuti al *teorema di Schlomlich* :

IV. *Nell'intorno circolare I di x_0 , su (a', a'') , la funzione reale $y = f(x)$ della variabile reale x , possiede tutte le derivate fino a quella inclusa d'ordine n continue, e, fatta al più eccezione del punto x_0 , vi possiede anche la derivata d'ordine $n + 1$. Per ogni punto x di I, distinto da x_0 , si ha la formola di *Taylor* :*

$$(15) \left\{ \begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + R_i(x), \\ R_i(x) &= \frac{(x - x_0)^\sigma (x - \xi)^{i+1-\sigma}}{i! \sigma} f^{(i+1)}(\xi), \end{aligned} \right.$$

ove σ è un qualunque numero positivo, i è uno qualunque dei numeri 0, 1, 2, ..., n e ξ è un certo punto compreso fra i punti x_0 e x , e da questi distinto.

Naturalmente, fissata la funzione $f(x)$, il punto ξ dipenderà, in generale, da σ , da x_0 , da x e da i . Fra le varie espressioni del resto R_i , corrispondenti ai diversi valori di σ , occorre rilevare le seguenti: *l'espressione di Lagrange* (per $\sigma = i + 1$)

$$(16) \quad R_i(x) = \frac{(x - x_0)^{i+1}}{(i + 1)!} f^{(i+1)}(\xi),$$

l'espressione di Cauchy (per $\sigma = 1$)

$$(17) \quad R_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - \xi)^i}{i!} f^{(i+1)}(\xi).$$

L'espressione di *Lagrange* del resto $R_i(x)$ è quella che già trovasi in (13). Forme più espressive della formola (15) sono le seguenti. Posto $x = x_0 + \Delta x$, per il punto ξ che compare in (15) si avrà $\xi = x_0 + \theta \Delta x$, ove θ è un certo numero positivo minore di uno. Ne segue $x - \xi = x - x_0 - \theta \Delta x = (1 - \theta) \Delta x$, e quindi :

$$(15') \left\{ \begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + f'(x_0) \Delta x + \dots + f^{(i)}(x_0) \frac{\Delta x^i}{i!} + R_i(x), \\ R_i(x) &= \frac{\Delta x^{i+1} (1 - \theta)^{i+1-\sigma}}{i! \sigma} f^{(i+1)}(x_0 + \theta \Delta x), \\ &0 < \theta < 1. \end{aligned} \right.$$

Introducendo la notazione differenziale si ha:

$$(15'') \left\{ \begin{aligned} \Delta y &= dy + \frac{d^2y}{2!} + \dots + \frac{d^i y}{i!} + R_i(x), \\ R_i(x) &= \frac{1}{i! \sigma} (1-\theta)^{i+1-\sigma} [d^{i+1}y]_{x_0+\theta\Delta x}, \\ &0 < \theta < 1. \end{aligned} \right.$$

Adunque la formola di *Taylor* opera la decomposizione dell'incremento Δy della funzione nella somma dei successivi differenziali di essa.

Per $x_0 = 0$, si ha, dalla (15), la *formola di Maclaurin*:

$$(15''') \left\{ \begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0) \frac{x}{1} + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(i)}(0) \frac{x^i}{i!} + R_i(x), \\ R_i(x) &= \frac{x^{i+1} (1-\theta)^{i+1-\sigma}}{i! \sigma} f^{(i+1)}(\theta x), \\ &0 < \theta < 1. \end{aligned} \right.$$

Esercizi. 1°) Si scriva la formola di *Maclaurin* per ciascuna delle seguenti funzioni elementari:

$$e^x, \operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x, \log(1+x), (1+x)^\alpha,$$

ove α è una costante reale qualsivoglia.

2°) Si applichino le considerazioni svolte nella prima parte di questo articolo al calcolo approssimato del *seno* dei piccoli archi.

48. Teoremi complementari per la ricerca dei limiti.— Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano definite nell'intervallo (a', a'') e vi siano continue. Supponiamo che nel punto x_0 di (a', a'') sia $f(x_0) = g(x_0) = 0$, laddove in ogni punto x distinto da x_0 e contenuto in un certo intorno circolare I di x_0 , su (a', a'') , riesca sempre $g(x) \neq 0$. Indicheremo con I_0 l'intorno I , privato del punto x_0 . Ponendo

$$(1) \quad h(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

si definisce in I_0 una funzione di x . Il punto x_0 è punto limite di I_0 , ma nulla si può *a priori* affermare sull'esistenza o meno del limite della funzione $h(x)$ nel punto x_0 . Ci proponiamo di investigare tale questione. Supporremo, a tale scopo, che entrambe le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano derivabili in I_0 , e che inoltre risulti sempre

$$(2) \quad g'(x) \neq 0, \text{ in } I_0.$$

In virtù del teorema di *Cauchy* (45, V) applicato alle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, comunque si consideri il punto x di I_0 , esiste sempre un punto ξ , compreso fra i punti x_0 e x e da questi distinto, per il quale è

$$f'(\xi)g(x) - g'(\xi)f(x) = 0,$$

cioè, in virtù delle ipotesi ammesse,

$$(3) \quad h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Il rapporto

$$k(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

fra le derivate di $f(x)$ e di $g(x)$, riesce del pari definito in I_0 . Supponiamo che esista il limite (finito o infinito)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k(x),$$

poichè, al tendere di x verso x_0 , la variabile $k(\xi) = h(x)$, è evidentemente subordinata alla variabile $k(x)$, se ne deduce che avrà pure un limite e lo stesso limite la variabile $h(x)$. Si ha dunque il seguente *primo teorema di l'Hospital*:

I. *Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano continue in (a', a'') , ed in un punto x_0 di (a', a'') si abbia $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Se in un intorno circolare I_0 del punto x_0 , su (a', a'') , privato del punto x_0 , le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili, se ivi $g'(x) \neq 0$, e se inoltre esiste il limite*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

ed è eguale al precedente.

Nell'enunciare il teorema abbiamo taciuto la condizione $g(x) \neq 0$, in I_0 , e ciò perchè avendo supposto $g(x_0) = 0$, essa condizione è conseguenza dell'altra $g'(x) \neq 0$.

Supponiamo ora che le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano entrambe definite nell'insieme A_0 , ottenuto dall'intervallo (a', a'') privandolo del solo punto x_0 ad esso appartenente. Supponiamo che, essendo le due funzioni continue in ogni punto di A_0 , esse siano entrambe in-

finitamente grandi nel punto x_0 . Esiste allora un intorno circolare I di x_0 su A_0 , in ogni punto del quale riesce $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, e ove pertanto risulta definito il rapporto $h(x) = f(x) : g(x)$. Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ saranno entrambe (cfr. l'Oss. dopo il teor. II del n° 31) divergenti nel punto x_0 , tanto a destra che a sinistra, ma potrebbero ivi anche non essere divergenti, su A_0 . Potrebbe, per esempio, risultare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ (a destra)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ (a sinistra)} = -\infty.$$

Vogliamo esaminare la questione, analoga a quella or ora trattata, dell'esistenza o meno del limite del rapporto $h(x)$ nel punto x_0 .

Io dico che se in I le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili, se ivi è $g'(x) \neq 0$, e se esiste il limite del rapporto $k(x) = f'(x) : g'(x)$, nel punto x_0 , esiste anche il limite del rapporto $h(x)$, ed è eguale al precedente. Per una completa e rigorosa dimostrazione di quanto abbiamo asserito conviene trattare separatamente il caso in cui $k(x)$ converge in x_0 e quello in cui ivi diverge.

Se $k(x)$ converge in x_0 verso il limite l , comunque si assegni un numero positivo ε , detto σ il minore fra i due numeri

$$1 \text{ e } \frac{\varepsilon}{2 + |l|},$$

esiste un intorno I' ($< I$) di x_0 su A_0 , in ogni punto del quale riesce $k(x) = l + \theta(x)\sigma$, ove $\theta(x)$ è una certa funzione di modulo mai superiore a uno. Fissiamo, arbitrariamente, due punti y_1 e y_2 in I' , il primo a sinistra di x_0 (se esiste la parte a sinistra di x_0) ed il secondo a destra di x_0 (se esiste la parte a destra di x_0) e poniamo

$$(4) \quad \varphi_1(x) = \frac{1 - \frac{g(y_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y_1)}{f(x)}}, \quad \varphi_2(x) = \frac{1 - \frac{g(y_2)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y_2)}{f(x)}}.$$

Poichè

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_2(x) = 1,$$

esiste un intorno I'' ($< I'$) di x_0 , su A_0 , in ogni punto del quale si ha:

$$\varphi_1(x) = 1 + \theta_1(x)\sigma, \quad \varphi_2(x) = 1 + \theta_2(x)\sigma,$$

essendo sempre $|\theta_1(x)| \leq 1$, $|\theta_2(x)| \leq 1$. Ora io farò vedere che, precisamente in I'' , è sempre

$$(6) \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| \leq \varepsilon,$$

e con ciò avrò dimostrato quanto si era asserito. Per il teorema di *Cauchy* applicato alle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, secondochè il punto x di I'' è a sinistra o a destra di x_0 , si ha:

$$\frac{f(x) - f(y_i)}{g(x) - g(y_i)} = \frac{f'(\xi_i)}{g'(\xi_i)} \quad (i=1 \text{ o } i=2),$$

ove ξ_i è un certo punto compreso fra x e y_i , e quindi

$$h(x) = k(\xi_i) \varphi_i(x) = [l + \theta(\xi_i) \sigma] [1 + \theta_i(x) \sigma] \quad (i=1 \text{ o } i=2)$$

e poichè

$$|\theta(\xi_i) \sigma + l \theta_i(x) \sigma + \theta(\xi_i) \theta_i(x) \sigma^2| \leq \sigma(2 + |l|) \leq \varepsilon,$$

ne segue la (6).

Se $k(x)$ diverge, per esempio positivamente, comunque si assegni un numero positivo P , esiste un intorno $I' (< I)$ di x_0 , su A_0 , in ogni punto del quale riesce $k(x) > 2P$. Fissati i punti y_1 e y_2 di I' , il primo a sinistra ed il secondo a destra di x_0 , ed introducendo le funzioni $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ definite dalle (4), diciamo I'' quell'intorno di x_0 , su A_0 , contenuto in I' , in ogni punto del quale è $\varphi_1(x) > 1/2$, $\varphi_2(x) > 1/2$. Per ogni punto x di I'' , secondochè x è a sinistra o a destra di x_0 , si ha $h(x) = k(\xi_i) \varphi_i(x)$, ove ξ_i è un certo punto compreso fra i punti x e y_i e da questi distinto, e quindi, in ogni caso, risulta sempre in I'' $h(x) > 2P(1/2) = P$, ciò che dimostra la divergenza di $h(x)$ verso $+\infty$. Si ha dunque il seguente *secondo teorema di l'Hospital*:

II. *Nell'insieme A_0 di punti dell'asse delle x , ottenuto dall'intervallo (a', a'') privandolo del suo punto x_0 , siano definite le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e vi siano continue. In un intorno circolare I del punto x_0 , su A_0 , queste funzioni siano derivabili e ivi risulti sempre $g'(x) \neq 0$, se $f(x)$ e $g(x)$ sono in x_0 infinitamente grandi, dall'esistenza del limite*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

segue l'esistenza del limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

e l'eguaglianza di questo al precedente.

Il primo ed il secondo teorema di *L'Hospital*, precedentemente ottenuti, sono suscettibili di essere simultaneamente enunciati, come subito si vede, nel seguente teorema:

III. *Nell'insieme A_0 di punti dell'asse delle x , ottenuto dall'intervallo (a', a'') privandolo del suo punto x_0 , siano definite le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e vi siano continue, mentre in un intorno circolare I del punto x_0 , su A_0 , queste funzioni sono derivabili ed è sempre $g'(x) \neq 0$. Allora se le due funzioni sono in x_0 entrambe infinitesime o entrambe infinitamente grandi, dall'esistenza del limite*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

segue l'esistenza dell'altro limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

e l'eguaglianza di questo al precedente.

Un teorema identico a quello ora enunciato sussiste anche quando si tratta del limite all'infinito. È ciò che andiamo a mostrare. Sia α un numero positivo e le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano definite per ogni valore di x di modulo non inferiore ad α , risultando sempre continue. Si ponga

$$x = \frac{1}{u}, \quad f\left(\frac{1}{u}\right) = f_1(u), \quad g\left(\frac{1}{u}\right) = g_1(u),$$

le due funzioni $f_1(u)$ e $g_1(u)$ riescono definite nell'insieme A_0 ottenuto dall'intervallo $(-1/\alpha, 1/\alpha)$ privandolo del punto zero e ivi continue. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili tali saranno pure le due funzioni f_1 e g_1 , e si avrà

$$f'_1(u) = -f'(x) \frac{1}{u^2}, \quad g'_1(u) = -g'(x) \frac{1}{u^2}.$$

Se al tendere di x verso ∞ , la derivata di $g'(x)$ riesce definitivamente diversa da zero, al tendere di u verso zero la derivata $g'_1(u)$ riescirà pur essa definitivamente diversa da zero, mentre allora si ha:

$$\frac{f'_1(u)}{g'_1(u)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Secondochè le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe infinitesime o infinitamente grandi all'infinito, le due funzioni $f_1(u)$ e $g_1(u)$

saranno entrambe infinitesime o infinitamente grandi nel punto zero. Ciò posto, poichè $f_1(u) : g_1(u) = f(x) : g(x)$, dal teorema III scaturisce evidentemente *l'ultimo teorema di l'Hospital*:

IV. *Nell'insieme illimitato A di punti dell'asse delle x , ottenuto da tale asse privandolo dei punti interni all'intervallo $(-a, a)$, siano definite le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e vi siano continue, mentre per valori di x , di modulo convenientemente elevato, queste funzioni sono derivabili ed è $g'(x) \neq 0$. Allora se le funzioni sono all'infinito o entrambe infinitesime o entrambe infinitamente grandi, dall'esistenza del limite*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

segue l'esistenza dell'altro limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

e l'eguaglianza di questo al precedente.

Sopra i teoremi III e IV si fonda la seguente classica:

Regola di l'Hospital per la ricerca del limite del rapporto di due infinitesimi o di due infinitamente grandi.

Se, tendendo il punto x ad un punto x_0 (su un intervallo al quale il punto x_0 è interno o su un intervallo a destra o a sinistra di x_0) o verso ∞ (oppure verso $+\infty$ o verso $-\infty$) le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe infinitesime od infinitamente grandi, supposte soddisfatte le condizioni del teorema III o IV, la ricerca del limite del rapporto $f(x) : g(x)$ può essere ricondotta a quella del limite del rapporto delle derivate $f'(x) : g'(x)$. Se questo limite esiste, esiste anche il primo ed ha lo stesso valore.

L'applicazione dell'enunciata regola di *l'Hospital* riesce utile quando, il che avviene frequentemente, il rapporto delle derivate è una variabile per la quale diventa più semplice la ricerca del limite, sia per quanto concerne lo stabilire l'esistenza o meno di esso, sia per l'effettivo suo calcolo. Può avvenire però che si pervenga alla conclusione che il rapporto delle derivate non è regolare, in tal caso la regola è **completamente inutilizzabile**. Alcuni esempi chiariranno meglio le cose.

Esempi. 1°) Si voglia ricercare se il rapporto

$$(7) \quad \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^2 \operatorname{sen} x},$$

ha un limite quando x tende a zero. I due termini del rapporto sono entrambi infinitesimi, e poichè sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema I, il limite indicato esiste se esiste il limite del rapporto delle derivate:

$$(8) \quad \frac{x \operatorname{sen} x}{2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x}.$$

Ora tale rapporto può identicamente scriversi (per $x \neq 0$)

$$\frac{1}{2 + \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cos x},$$

e sotto questa forma si constata che esso ha per limite $1/3$. Il rapporto (7) ha dunque per limite $1/3$. Si potrebbe anche procedere al modo seguente. Il rapporto (8) si semplifica nel seguente

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} x + x \cos x},$$

esso è di nuovo il rapporto di due infinitesimi, ed essendo soddisfatte tutte le condizioni del teorema I, si può *di nuovo* applicare, per la ricerca del suo limite la regola di *Hospital*. Il rapporto delle derivate dei due attuali infinitesimi è

$$\frac{\cos x}{3 \cos x - x \operatorname{sen} x},$$

e tale rapporto ha evidentemente per limite $1/3$. Tale è il limite del rapporto (8) e quindi anche di (7).

2°) Si voglia ricercare il limite

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}.$$

Si tratta del limite del rapporto di due infinitamente grandi. Non si può applicare la regola di *Hospital*, poichè al tendere di x all'infinito, la derivata ($= 1 + \cos x$) del denominatore non è mai definitivamente diversa da zero. D'altronde si ha:

$$\frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}},$$

e pertanto il limite (9) esiste ed ha il valore *uno*.

3°) Si voglia ricercare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}.$$

Si tratta del limite del rapporto di due infinitesimi. Sono soddisfatte tutte le condizioni del teorema III. Il rapporto delle derivate dei due infinitesimi è dato da:

$$k(x) = \frac{2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Tale rapporto non ha un limite per x tendente a zero. Ed invero, facendo variare x soltanto per i valori $1/(n\pi)$, ove n è un numero intero e positivo, si ha la variabile subordinata

$$k\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\cos \frac{1}{n\pi}},$$

che ha per massimo limite 1 e per minimo limite -1 . La regola di *Hospital* non è quindi utilizzabile. D'altronde il rapporto di cui si vuole cercare il limite può anche scriversi:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot x \operatorname{sen} \frac{1}{x},$$

e così subito si constata che il limite esiste e che ha il valore zero.

4°) Per le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ (per entrambe in uno stesso punto oppure all'infinito) si abbia

$$\begin{array}{ll} a) & \lim f(x) = 0, \quad \lim g(x) = \infty, \\ b) & \lim f(x) = +\infty, \quad \lim g(x) = +\infty, \\ c) & \lim f(x) = 0, \quad \lim g(x) = 0, \\ d) & \lim f(x) = 1, \quad \lim g(x) = \infty, \\ e) & \lim f(x) = +\infty, \quad \lim g(x) = 0, \end{array}$$

e si vogliono ricercare i seguenti limiti

nel caso *a*), $\lim [f(x) \cdot g(x)],$

nel caso *b*), $\lim [f(x) - g(x)],$

nei casi *c*) *d*) e *e*), supposto che abbia definitivamente senso la potenza $f(x)^{g(x)},$

$$\lim f(x)^{g(x)}.$$

Per la ricerca di questi limiti si può, come si fa d'ordinario, pensare ad utilizzare la regola di *Hospital*, poichè, in ciascuno

dei casi considerati, è facile ricondurre la ricerca indicata a quella del limite del rapporto di due infinitesimi o di due infinitamente grandi. Si ha, inverso,

nel caso *a*) $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)}$: rapporto di due infinitesimi ;

nel caso *b*) $f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$: rapporto di due infinitesimi,

$e^{f(x)-g(x)} = \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}$: rapporto di due infinitamente grandi ;

laddove nei casi *c*), *d*) e *e*), ricercando il limite del logaritmo della funzione $f(x)^{g(x)}$, si ricade nel caso *a*).

Connessione fra i teoremi di l'Hospital e la formola di Taylor. A proposito dello studio della formola di **Taylor**, il teorema III dell'articolo precedente, ci ha assicurato che se nel Piantone circolare *I* di un punto x_0 , su un intervallo (a', a'') , la funzione reale $y=f(x)$ della variabile reale x — definita in (a', a'') — possiede tutte le derivate fino a quella inclusa d'ordine n , continue e limitate, e, fatta al più eccezione del punto x_0 , vi possiede anche la derivata d'ordine $n+1$, del pari limitata, la differenza

$$(10) f(x) - p(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \dots - f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

è in x_0 un infinitesimo almeno d'ordine $n+1$, rispetto a $x - x_0$.

Facendo uso del primo teorema di **l'Hospital** si perviene alla stessa conclusione, nelle diverse ipotesi seguenti. In un intorno circolare *I* di x_0 , su (a', a'') , la funzione $f(x)$ possiede tutte le derivate fino a quella inclusa d'ordine n , e la derivata d'ordine $n+1$ esiste, almeno nel punto x_0 . Ed inverso, in questa ipotesi, ricercando il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \dots - f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}}{(x - x_0)^{n+1}},$$

la ripetuta successiva applicazione del primo teorema di **l'Hospital**, ci conduce alla ricerca del limite seguente:

$$\frac{1}{(n+1)!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(x_0)}{x - x_0},$$

il quale, per ipotesi, esiste ed ha il valore

$$\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0).$$

Si ha dunque il teorema:

V. *Se in un intorno I dal punto x_0 , su (a', a'') , la funzione $f(x)$ possiede tutte le derivate fino a quella inclusa d'ordine n , e possiede nel punto x_0 la derivata d'ordine $n+1$, sussiste, per ogni punto x di I , la seguente formola di Taylor:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \left(f^{(n+1)}(x_0) + \theta_n(x) \right) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

ove $\theta_n(x)$ è un certo infinitesimo con $x - x_0$. E pertanto: la differenza (10) è un infinitesimo, in x_0 , almeno d'ordine $n+1$, rispetto a $x - x_0$; precisamente, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0).$$

In particolare dunque: Nelle ipotesi ora dette, se, inoltre, la funzione $f(x)$ è nulla nel punto x_0 con tutte le sue derivate fino a quella, inclusa, d'ordine n , la funzione $f(x)$ è nel punto x_0 infinitesima almeno d'ordine $n+1$. E viceversa.

Esercizi. 1°) Dedurre dal teorema V il corollario seguente:

VI. *Se la funzione $g(x)$ possiede nel punto x_0 derivate finite fino a quella inclusa d'ordine n , essendo*

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad g^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

per ogni altra funzione $f(x)$ dotata, del pari, di derivate finite nel punto x_0 , fino a quella inclusa d'ordine n , per la quale si abbia anche

$$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

riesce:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

2°) La ripetuta successiva applicazione del teorema di **Cauchy** (del n° 45) dà luogo al seguente:

VII. Se nell'intervallo (a, b) , entrambe le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono dotate di derivate finite e continue, fino a quella inclusa d'ordine n , tutte nulle nel punto a , e se nello stesso intervallo aperto esistono e sono finite le derivate $f^{(n+1)}(x)$ e $g^{(n+1)}(x)$, risultando inoltre sempre $g^{(n+1)}(x) \neq 0$, esiste un punto c interno all'intervallo (a, b) per il quale si ha

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}.$$

49. Curve regolari. Tangenti. Asintoti. — Vogliamo fin da ora, in questo e nel successivo articolo, dei concetti analitici svolti nei precedenti, fare alcune notevoli applicazioni geometriche le quali, da un lato, ci porteranno ad importanti nozioni per la geometria delle curve, e dall'altro varranno a dare un'efficacissima illustrazione dei concetti analitici anzidetti.

Siano $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ tre funzioni derivabili della variabile t , con derivate continue, in tutto l'intervallo (a', a'') dell'asse delle t . Per queste funzioni facciamo le seguenti ulteriori ipotesi:

a) Si ha sempre in (a', a'')

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 > 0,$$

cioè le derivate prime $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ delle funzioni x , y , z , non si annullano mai simultaneamente.

b) Non esiste alcuna coppia t' e t'' di valori distinti di t , nell'intervallo (a', a'') , per cui sia, simultaneamente,

$$x(t') = x(t''), \quad y(t') = y(t''), \quad z(t') = z(t''),$$

cioè, al variare della variabile t , da a' a a'' , il punto dello spazio ambiente di coordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ non riprende mai la stessa posizione.

Nelle ipotesi enunciate, il luogo C dei punti dello spazio ambiente le cui coordinate sono date da

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= x(t), & y &= y(t), & z &= z(t), \\ & & & & & a' \leq t \leq a'', \end{aligned}$$

dicesi *porzione di curva regolare*.

Le (1) diconsi le *equazioni parametriche* della porzione di curva regolare C . Si dice anche che le equazioni (1) danno la *rappresentazione parametrica* di C . La variabile t , dicesi il *parametro* al quale sono riferiti i punti di C e l'intervallo (a', a'') , nel quale varia il parametro, *intervallo base* della curva C .

Evidentemente: Vi è corrispondenza biunivoca fra i punti di C e del suo intervallo base; l'insieme di punti C è un continuo, ed è limitato se l'intervallo base (a', a'') è tale.

Siano P' e P'' due punti distinti di C , corrispondenti ai valori t' e t'' del parametro t , si dirà che P' *precede o segue* P'' secondochè t' è minore o maggiore di t'' . La parte di C percorsa dal punto $P[x(t), y(t), z(t)]$ quando t varia nell'intervallo (t', t'') dicesi *arco di C determinato dai punti P' e P''* , e per esso adotteremo la notazione $C(P', P'')$. Se A' e A'' sono i punti di C corrispondenti ai valori estremi a' e a'' supposti finiti del parametro t , si ha dunque che la notazione $C(A', A'')$ designa l'intera curva C . I punti P' e P'' diconsi i *punti estremi o terminali* dell'arco $C(P', P'')$, ogni altro punto dell'arco dicesi *interno* all'arco.

Il segmento di retta $P'P''$, determinato dai punti P' e P'' , dicesi la *corda* dell'arco determinato da quei punti, la retta congiungente P' con P'' una *segante* di C . Il massimo valore della distanza di un punto dell'arco $C(P', P'')$ dalla segante a cui appartengono gli estremi dell'arco dicesi *freccia* dell'arco stesso.

Veniamo ora alla nozione di *retta tangente* in un punto P di una porzione di curva regolare C . Sia t il valore del parametro che compete al punto P e, dato a t un arbitrario incremento Δt , su (a', a'') , consideriamo il punto P' di C corrispondente al valore $t + \Delta t$ del parametro. Se, come supponiamo, è $\Delta t \neq 0$, il punto P' sarà, in virtù dell'ipotesi b), distinto da P . Ne risulta perciò individuata la segante PP' di C . Essa avrà i coseni direttori proporzionali ai numeri:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Per la derivabilità di $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, si ha:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t) + \alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t) + \beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t} = z'(t) + \gamma.$$

ove α , β , γ sono infinitesimi con Δt .

D'altra parte, in virtù dell'ipotesi a), esiste una ben determinata retta τ passante per P , avente i coseni direttori proporzionali ai numeri $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$. Consideriamo il cono circolare Ω avente il vertice in P , l'asse τ ed un angolo 2ω di apertura, piccolo quanto

si vuole. La segante PP' fa con la retta τ un angolo δ il cui coseno è dato da

$$\frac{(x' + \alpha)x' + (y' + \beta)y' + (z' + \gamma)z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \sqrt{(x' + \alpha)^2 + (y' + \beta)^2 + (z' + \gamma)^2}}$$

Al tendere di Δt a zero, il punto P' tende al punto P , e viceversa, al tendere di P' a P , l'incremento Δt tende a zero. La segante PP' varierà allora ruotando attorno a P , ma io dico che essa sarà definitivamente contenuta entro il cono circolare Ω . Ed invero, poichè evidentemente

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \cos \delta = 1,$$

esiste un intervallo (t_1, t_2) , di (a', a'') , contenente t , in ogni punto del quale riesce $\cos \delta \geq \cos \omega$, e pertanto per ogni punto P' dell'arco $C (P_1, P_2)$ avente per base quell'intervallo, contenente il punto P , la segante PP' è sempre contenuta nel cono Ω .

Per l'osservazione ora fatta è ben naturale considerare la retta τ come la *posizione limite* della segante ruotante PP' , nel mentre che il punto P' tende al punto P . Tale retta τ chiamasi la *retta tangente* nel punto P alla porzione di curva regolare C (cfr. n° 38). Il punto P dicesi *punto di contatto* della tangente τ con la curva C .

Diciamo K quel numero *positivo* il cui quadrato è

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2,$$

i coseni direttori della tangente τ , saranno:

$$(2) \quad \pm \frac{x'(t)}{K}, \quad \pm \frac{y'(t)}{K}, \quad \pm \frac{z'(t)}{K},$$

orbene, chiamasi *asse tangente positivo* nel punto P l'asse sulla tangente avente i coseni direttori (2) presi col segno $+$; chiamasi *asse tangente negativo* l'asse opposto. *Verso positivo* in un punto di C è quello dell'asse tangente positivo in quel punto, *verso negativo* è quello dell'asse tangente negativo.

Se con X, Y, Z designamo le coordinate correnti sopra una retta, le equazioni della tangente τ saranno

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'},$$

od anche, facendo uso della notazione differenziale,

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}.$$

In un punto P di C , dicesi *piano normale* quel piano per esso punto, normale alla tangente ivi. La equazione del piano normale nel punto P sarà

$$(X-x)x' + (Y-y)y' + (Z-z)z' = 0,$$

oppure

$$(X-x)dx + (Y-y)dy + (Z-z)dz = 0.$$

Se nelle precedenti definizioni poniamo $z = z(t) \equiv 0$, si ottengono come caso particolare, le definizioni di *porzioni di curve regolari piane*, di tangente e di normale ad una tale curva.

Equazione della tangente:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'}, \quad \frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy}.$$

Equazione della normale:

$$(X-x)x' + (Y-y)y' = 0, \quad (X-x)dx + (Y-y)dy = 0.$$

Nell'intervallo (a', a'') dell'asse delle x sia definita una funzione derivabile $f(x)$, con derivata continua. Consideriamo l'insieme di punti, del piano (x, y) , descritto dal punto $P(x, y)$ quando si ponga:

$$x = t, \quad y = f(t),$$

e si faccia variare t nell'intervallo (a', a'') . Si ha allora il diagramma della funzione $f(x)$, ma si ha anche, com'è evidente, una porzione di curva regolare. Pertanto: *Il diagramma di una funzione $y=f(x)$, definita in un intervallo (a', a'') , ivi derivabile e con derivata continua, è una porzione di curva regolare.*

Tale porzione di curva regolare presenta però la particolarità che la sua tangente non diviene mai parallela all'asse delle y ; or bene, sussiste la proposizione:

Se una porzione di curva regolare, del piano (x, y) , ha una tangente che non diviene mai parallela all'asse delle y , essa è il diagramma di una funzione della x , derivabile e con derivata continua.

Sia, invero, (a', a'') l'intervallo base della porzione di curva regolare C del piano (x, y) avente le equazioni parametriche.

$$(3) \quad x = x(t), \quad y = y(t).$$

Se la tangente alla C non diviene mai parallela all'asse delle y , sarà sempre $x'(t) \neq 0$, e supporremo, per fissare le idee, che sia $x'(t) > 0$. La funzione $x(t)$ sarà allora sempre crescente in (a', a'') e

sarà quindi propriamente invertibile. Posto $\alpha' = x(\alpha')$, $\alpha'' = x(\alpha'')$, nell'intervallo (α', α'') risulta definita la funzione derivabile $t(x)$, inversa della $x(t)$, e si ha (VI, n° 42).

$$t'(x) = \frac{1}{x'[t(x)]}.$$

La derivata di $t(x)$ è perciò pur essa continua in (α', α'') . Posto

$$y[t(x)] = f(x),$$

la funzione $f(x)$ riesce definita in (α', α'') e ivi derivabile con derivata continua; si ha:

$$f'(x) = y'[t(x)] t'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Il diagramma delle $f(x)$ coincide appunto con la porzione di curva regolare C rappresentata dalle (3). Sulle porzioni di curve regolari nel piano ritorneremo nell'articolo seguente.

Passiamo ora a dare il concetto di *curva regolare continua*.

Siano $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ tre funzioni continue nell'intervallo (α', α'') , tali che si possa dividere questo intervallo, mediante un numero finito di punti $\alpha_0 \equiv \alpha'$, α_1 , α_2 , ..., α_n , $\alpha_{n+1} \equiv \alpha''$, in intervalli parziali (α_i, α_{i+1}) , per ciascuno dei quali il luogo

$$\begin{aligned} x &= x(t), & y &= y(t), & z &= z(t) \\ \alpha_i &\leq t \leq \alpha_{i+1}, \end{aligned}$$

sia una porzione di curva regolare; allora il luogo C dei punti dello spazio, le cui coordinate sono date dalle (1) al variare di t in (α', α'') , si dice una *curva regolare continua di intervallo base* (α', α'') .

Se le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sono di più tali che, per una qualunque coppia t' e t'' di valori di t nell'intervallo (α', α'') , eccettuata al più la coppia α', α'' , non prendono mai simultaneamente lo stesso valore, la curva regolare continua C dicesi *semplice*.

Una curva regolare continua semplice, si dice *chiusa*, se si ha:

$$x(\alpha') = x(\alpha''), \quad y(\alpha') = y(\alpha''), \quad z(\alpha') = z(\alpha'').$$

Diciamo A_1, A_2, \dots, A_n i punti di C corrispondenti ai valori $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ del parametro t , la curva regolare C si comporrà di un numero finito $n + 1$ di porzioni di curve regolari $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$ aventi per intervalli base, rispettivamente, gli intervalli $(\alpha', \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \dots, (\alpha_{n-1}, \alpha_n), (\alpha_n, \alpha'')$. La curva C_i si salda con la curva C_{i+1} nel punto A_i , ove, *in generale*, le due curve avranno due tangenti

distinte. I punti A_1, A_2, \dots, A_n si dicono i punti *singolari* od anche *angolosi* della curva regolare C , gli altri punti si dicono *regolari* od anche *ordinari*.

Se nel punto singolare A_i le due tangenti alla C_i e alla C_{i+1} coincidono, ma sono opposti i due assi tangenti positivi, il punto A_i dicesi, più propriamente, un *punto di regresso* o una *cuspidede*, per evidenti ragioni. Perchè in A_i si presenti un regresso occorre e basta che riesca.

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow a_i} x'(t) \text{ (a sinistra)} = k \cdot \lim_{t \rightarrow a_i} x'(t) \text{ (a destra)}, \\ \lim_{t \rightarrow a_i} y'(t) \text{ (a sinistra)} = k \cdot \lim_{t \rightarrow a_i} y'(t) \text{ (a destra)}, \\ \lim_{t \rightarrow a_i} z'(t) \text{ (a sinistra)} = k \cdot \lim_{t \rightarrow a_i} z'(t) \text{ (a destra)}, \end{array} \right.$$

ove k è un numero *negativo*. Se per $t = a_i$ sono verificate le (4), con k positivo, il punto singolare A_i non viene a presentare alcuna particolarità geometrica, esso ci appare singolare unicamente per la particolare rappresentazione parametrica impiegata per la curva regolare C (cfr. l'osservazione 2^a alla fine dell'articolo).

Sussistono inalterati il criterio per decidere, fra due punti P' e P'' di C , quale è il seguente e quale il precedente, le definizioni di arco $C(P', P'')$ della curva C , determinato da due punti P' e P'' di C , di corda e di freccia di un tale arco, di segante. Osserveremo che non è escluso che un arco $C(A_r, A_{r+1})$ possa avere dei punti comuni con un arco $C(A_s, A_{s+1})$, se P è un tal punto e se $r < s$, il punto P , considerato come appartenente all'arco $C(A_r, A_{r+1})$, precede il punto P , considerato come appartenente all'arco $C(A_s, A_{s+1})$. Un punto P di C dicesi *semplice, doppio, triplo, ..., k^{pl}*, secondochè *una, due, tre, ..., k* sono le porzioni di curve regolari, componenti C , per esso passanti.

Una retta passante per il punto P di C dicesi *ivi tangente alla C* se è tangente ad una delle C_i passanti per il punto.

Siamo ora in grado di dare il concetto della più generale *curva regolare*. Le tre funzioni reali $x(t), y(t), z(t)$ della variabile reale t siano, tutte e tre, definite nell'insieme A ottenuto dall'intervallo (a', a'') togliendogli r certi suoi punti p_1, p_2, \dots, p_r . Se, mediante gli s punti q_1, q_2, \dots, q_s ($s \geq r$), fra i quali sono i punti p_1, p_2, \dots, p_r , è possibile dividere l'intervallo (a', a'') in $s + 1$ intervalli parziali

$(a', q_1), (q_1, q_2), \dots, (q_{s-1}, q_s), (q_s, a'')$ per modo che l'insieme di punti descritto dal punto $P[x(t), y(t), z(t)]$ al variare di t in ogni intervallo contenuto in uno qualsiasi degli intervalli aperti (q_i, q_{i+1}) ($i = 0, 1, 2, \dots, s; q_0 = a', q_{s+1} = a''$), è sempre una *curva regolare continua* e se tutte e tre le funzioni $x(t), y(t), z(t)$ sono, su (q_i, q_{i+1}) , continue in ogni punto di (q_i, q_{i+1}) , allora l'insieme C di punti dello spazio descritto dal punto $P[x(t), y(t), z(t)]$ al variare di t in A dicesi una *curva regolare di base A* e di equazioni parametriche (1).

Si osservi che la più generale curva regolare può non essere un continuo. Lasciamo al lettore la cura di estendere alla più generale curva regolare i concetti e le definizioni precedentemente dati per le curve regolari continue. Rileveremo soltanto che come punti singolari delle curve regolari C sono da considerare quelli delle curve regolari continue di cui essa si compone e quelli che corrispondono ai valori di t coincidenti con uno dei valori q_i ove siano state simultaneamente definite le tre funzioni $x(t), y(t), z(t)$. Un tale valore di t può benissimo essere di continuità per le $x(t), y(t), z(t)$ e per le loro derivate prime e la singolarità può consistere solamente nel fatto che per esso valore si annullano simultaneamente le derivate prime delle indicate tre funzioni.

Ad un punto di A nel quale simultaneamente si annullano le derivate prime delle $x(t), y(t), z(t)$, corrisponde sempre certo un punto singolare di C e non può essere che uno dei punti q_i .

Nello studio delle curve regolari non limitate prestano sovente un utile ufficio descrittivo i *piani asintotici* e le *rette asintotiche* delle dette curve. Andiamo perciò ora a dare la nozione di tali piani e di tali rette e ad indicare, per queste ultime, un metodo per ricercarle e per determinarle.

Detta $R(t) = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2}$ la distanza del punto $P[x(t), y(t), z(t)]$ dall'origine delle coordinate, la curva regolare C , di base A , può essere non limitata nei soli due seguenti casi:

a) se, p designando uno dei punti p_1, p_2, \dots, p_r , nei quali manca la definizione di almeno una delle funzioni $x(t), y(t), z(t)$, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow p} R(t) \text{ (a sinistra)} = \infty, \text{ oppure } \lim_{t \rightarrow p} R(t) \text{ (a destra)} = \infty,$$

$$\text{od anche } \lim_{t \rightarrow p} R(t) = \infty;$$

b) se, essendo l'insieme A non limitato, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \infty, \text{ oppure } \lim_{t \rightarrow -\infty} R(t) = \infty,$$

$$\text{od anche } \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty.$$

Orbene, se in uno di questi casi, esiste un ben determinato piano π o una ben determinata retta a dello spazio, tale che detta $\delta(t)$ la distanza del punto P , della C , dal piano o dalla retta, si abbia

$$\lim \delta(t) = 0,$$

quel piano π o quella retta a dicesi un *piano asintotico* o una *retta asintotica* della curva regolare C . Una retta asintotica si suole anche chiamare, semplicemente, un *asintoto*.

Per effettuare la determinazione degli eventuali asintoti di una curva regolare C non limitata, cominciamo dall'osservare che se una retta è asintotica, ogni piano passante per la retta è asintotico; se due piani non paralleli sono asintotici la loro retta di intersezione è un asintoto. Ciò posto, se $\lim R(t) = \infty$, non potranno conservarsi limitate tutte e tre le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, una almeno di queste dovrà cioè essere divergente. Supponiamo che sia $\lim |x(t)| = \infty$. In tale ipotesi, se la curva ammette un asintoto a , esso non potrà essere parallelo al piano (y, z) , ed allora sarà rappresentato da due equazioni del tipo seguente:

$$(5) \begin{cases} (5') & Y - \alpha X - y_0 = 0, \\ (5'') & Z - \beta X - z_0 = 0. \end{cases}$$

I due piani (5') e (5''), contenenti l'asintoto a , devono essere entrambi asintotici, e perciò deve simultaneamente risultare:

$$\lim [y(t) - \alpha x(t) - y_0] = 0,$$

$$\lim [z(t) - \beta x(t) - z_0] = 0,$$

e quindi, evidentemente, perchè $\lim |x(t)| = \infty$,

$$\alpha = \lim \frac{y(t)}{x(t)}, \quad \beta = \lim \frac{z(t)}{x(t)},$$

$$y_0 = \lim [y(t) - \alpha x(t)], \quad z_0 = \lim [z(t) - \beta x(t)].$$

Si ha dunque il risultato:

Se in un punto di (a', a'') o all'infinito si ha $\lim |x(t)| = \infty$, condizione necessaria e sufficiente affinché la curva regolare non limitata C

possieda, corrispondentemente, un asintoto è che esistano determinati e finiti i due limiti

$$\lim \frac{y(t)}{x(t)}, \quad \lim \frac{z(t)}{x(t)},$$

e che, detti α e β i valori di questi limiti, esistano altresì i due limiti

$$\lim [y(t) - \alpha x(t)], \quad \lim [z(t) - \beta x(t)].$$

Detti x_0 e y_0 i valori di questi due ultimi limiti, le (5) sono le equazioni dell'asintoto.

Se, in particolare, nella precedente ricerca, si fa $z(t) \equiv 0$, si ottengono gli eventuali asintoti per le curve regolari piane.

Esempi. 1°) La curva di equazioni parametriche :

$$x = \frac{\text{sent}}{1+t^2}, \quad y = \frac{\text{cost}}{1+t^2}, \quad z = kt,$$

è una porzione di curva regolare, avente l'intervallo $(-\infty, +\infty)$ per intervallo base. Ha per unico asintoto l'asse delle z .

2°) La curva di equazioni parametriche :

$$x = \frac{\text{sent}}{t}, \quad y = \frac{\text{cost}}{t}, \quad z = kt,$$

è una curva regolare, avente per base l'intervallo $(-\infty, +\infty)$ privato del punto zero. Ha due asintoti: l'asse delle z e la retta ($X=1$, $Z=0$).

Osservazioni. 1°) Siano $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ le più arbitrarie funzioni definite nel più arbitrario insieme A di punti dell'asse delle t . Molte delle definizioni e dei concetti dati in ciò che precede si potrebbero estendere per il luogo C dei punti $P[x(t), y(t), z(t)]$, ottenuto al variare di t in A , facendo, sulle funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ e sull'insieme A , ipotesi più larghe di quelle già fatte. Ma l'estensione non ha alcun interesse per le applicazioni che abbiamo in vista. Nel nostro corso considereremo soltanto, incidentalmente, a proposito della determinazione della lunghezza delle curve, il caso teoricamente interessante in cui l'insieme A è un intervallo e le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sono soltanto supposte ovunque ivi continue. In tal caso il luogo C chiamasi una *curva continua*. Una curva continua è evidentemente un continuo. Si sappia però (osservazione di *Peano*) che una curva continua, ad esempio piana, può anche essere un dominio rettangolare del piano.

2^a) Poniamoci ora il problema seguente:

Dato il più generale luogo C descritto dal punto $[\lambda(\alpha), \mu(\alpha), \nu(\alpha)]$ al variare del parametro α in un certo insieme dell'asse delle α , quando esso può considerarsi una curva regolare?

Evidentemente, quando è possibile trovare una variabile t ed un insieme A dell'asse delle t , ove sia possibile definire tre funzioni $x(t), y(t), z(t)$, per modo che: **a)** al variare di t in A il punto $P[x(t), y(t), z(t)]$ percorra tutto il luogo C e non ne esca; **b)** le funzioni $x(t), y(t), z(t)$ e l'insieme A verifichino le condizioni sotto le quali, secondo le definizioni poste, si può dare a C il nome di curva regolare. Vogliamo osservare che se il problema posto ha una soluzione, esso ne ha infinite. Vogliamo cioè osservare che: *Una curva regolare ammette infinite rappresentazioni parametriche.*

Limitiamoci a considerare il caso semplice che la curva C sia una porzione di curva regolare, avente per base l'intervallo (a', a'') e le equazioni parametriche (1). Nell'intervallo (b', b'') dell'asse ω si definisca una funzione sempre crescente o sempre decrescente $t = t(\omega)$, che sia ovunque derivabile e con derivata continua e mai nulla, e tale che mentre ω percorre l'intervallo (b', b'') il valore della funzione percorra, per intero, l'intervallo (a', a'') . Posto:

$$x[t(\omega)] = \xi(\omega), \quad y[t(\omega)] = \eta(\omega), \quad z[t(\omega)] = \zeta(\omega),$$

il luogo del punto $P[\xi(\omega), \eta(\omega), \zeta(\omega)]$, al variare di ω nell'intervallo (b', b'') , è di nuovo la curva C , per la quale dunque troviamo la nuova rappresentazione parametrica

$$(6) \quad x = \xi(\omega), \quad y = \eta(\omega), \quad z = \zeta(\omega),$$

ed il nuovo intervallo base (b', b'') .

Per coseni direttori dell'asse tangente positivo, relativo alla rappresentazione parametrica (6) della C , posto

$$K = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2},$$

troviamo

$$\frac{x'(t)}{K} \frac{t'(\omega)}{|t'(\omega)|}, \quad \frac{y'(t)}{K} \frac{t'(\omega)}{|t'(\omega)|}, \quad \frac{z'(t)}{K} \frac{t'(\omega)}{|t'(\omega)|},$$

e si ha pertanto: *Il verso positivo determinato su C dalla nuova rappresentazione parametrica (6) coincide con quello determinato dalla (1) o con l'opposto, secondochè è sempre*

$$t'(\omega) > 0 \quad \text{ovvero} \quad t'(\omega) < 0.$$

Basterebbe che la funzione sempre crescente e derivabile $t(\omega)$ avesse la derivata nulla in un punto ω_0 di (b', b'') , perchè nella rappresentazione parametrica (6) la C non apparisse più una porzione di curva regolare, quale essa è.

3ª) È poi immediato che:

Comunque si cangino gli assi coordinati a cui sono riferiti i punti dello spazio, un luogo C al quale si è potuto dare il nome di curva regolare, negli antichi assi, avrà dritto a tale nome anche nei nuovi.

4ª) Supponiamo che le tre funzioni reali $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ della variabile reale t siano, tutte e tre, definite nell'intervallo (a', a'') e che, essendo t_0 un certo punto interno a questo intervallo e ε un'arbitraria quantità positiva, il luogo del punto $P [x(t), y(t), z(t)]$, descritto al variare di t tanto nell'intervallo $(a', t_0 - \varepsilon)$ quanto nell'intervallo $(t_0 + \varepsilon, a'')$, sia sempre, per ogni ε , una porzione di curva regolare. Il luogo C del punto $P[x(t), y(t), z(t)]$, descritto al variare di t nell'intero intervallo (a', a'') è allora una curva regolare avente, al più, il punto $P_0 [x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$ come punto singolare. Vogliamo rilevare un notevole caso, che si presenta frequentemente nelle applicazioni, in cui, non ostante che il punto P_0 sia da riguardarsi come punto singolare per la curva C , purtuttavia, essa curva possiede in P_0 una tangente determinata, esiste, cioè, una ben determinata retta τ_0 per P_0 che può dirsi la retta limite della secante variabile P_0P , condotta per P_0 e per un punto P variabile su C , nel mentre che P tende a P_0 . Tale caso (osservato dal **Dini**) si presenta, per esempio, quando si verifichino le circostanze seguenti:

a) Le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sono nel punto t_0 derivabili n volte almeno ($n \geq 2$), mentre riesce:

$$(7) \quad x^{(i)}(t_0) = y^{(i)}(t_0) = z^{(i)}(t_0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$(8) \quad |x^{(n)}(t_0)| + |y^{(n)}(t_0)| + |z^{(n)}(t_0)| > 0.$$

[Porremo $x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}$, $y^{(i)}(t_0) = y_0^{(i)}$, $z^{(i)}(t_0) = z_0^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$)].

b) Il punto $P [x(t), y(t), z(t)]$ non riprende mai la stessa posizione al variare di t in (a', a'') .

Poichè, [circostanza **a**] $x_0' = y_0' = z_0' = 0$, il punto P_0 è da riguardarsi come un punto singolare per la curva C . Sia Δt un arbitrario incremento non nullo, su (a', a'') , dato a t_0 , e diciamo P il punto di C corrispondente al valore $t_0 + \Delta t$ del parametro, esso [circostan-

za b] sarà sempre distinto da P_0 . Risulta perciò individuata la secante $P_0 P$ di C , ed essa avrà i coseni direttori proporzionali ai numeri

$$\frac{n! \Delta x}{(\Delta t)^n}, \quad \frac{n! \Delta y}{(\Delta t)^n}, \quad \frac{n! \Delta z}{(\Delta t)^n}.$$

Ma si ha per le (7) (teor. V del n° 48)

$$\frac{n! \Delta x}{(\Delta t)^n} = x_0^{(n)} + \alpha, \quad \frac{n! \Delta y}{(\Delta t)^n} = y_0^{(n)} + \beta, \quad \frac{n! \Delta z}{(\Delta t)^n} = z_0^{(n)} + \gamma,$$

ove α, β, γ sono infinitesimi con Δt , e da ciò si deduce, ripetendo il ragionamento fatto in principio per le porzioni di curve regolari, che la ben determinata retta τ_0 , condotta per P_0 , avente i coseni direttori proporzionali ai numeri $x_0^{(n)}, y_0^{(n)}, z_0^{(n)}$ [retta esistente in virtù della (8)] è da considerarsi la posizione limite della secante variabile $P_0 P$, nel mentre che P tende a P_0 . Dunque:

La curva regolare C , nel punto singolare P_0 , ove $x_0' = y_0' = z_0' = 0$, ammette la retta tangente; tale retta ha le equazioni

$$\frac{X - x_0}{x_0^{(n)}} = \frac{Y - y_0}{y_0^{(n)}} = \frac{Z - z_0}{z_0^{(n)}},$$

che possono anche scrivere:

$$\frac{X - x_0}{(d^n x)_0} = \frac{Y - y_0}{(d^n y)_0} = \frac{Z - z_0}{(d^n z)_0}.$$

50. Porzioni di curve regolari nel piano. — Limitiamoci ora a considerare le porzioni di curve regolari nel piano. In questo articolo, parlando, semplicemente, di *curva regolare* intenderemo parlare sempre di porzione di curva regolare.

Lunghezze notevoli per le curve regolari. Data, nel piano (x, y) , una curva regolare C di equazioni parametriche

$$(1) \quad x = x(t), \quad y = y(t),$$

ed una retta r che non passi per il punto P di C , diciamo T e N i punti di incontro di r , rispettivamente, con la tangente e con la normale in P alla C . Le lunghezze dei segmenti PT e PN chiamansi anche, rispettivamente, la *tangente* e la *normale* di C nel punto P , rispetto alla retta r . Le lunghezze delle proiezioni ortogonali di PT e di PN sulla retta r chiamansi, rispettivamente, la *sottotangente* e la *sottonormale* di C , nel punto P , rispetto alla retta r .

Comunemente, la tangente, la normale, la sottotangente, la sottonormale si prendono rispetto all'asse delle x . Si ha allora:

$$\begin{aligned} \text{sottotangente} &= \left| y \frac{x'}{y'} \right|, & \text{sottonormale} &= \left| y \frac{y'}{x'} \right|, \\ \text{tangente} &= \left| \frac{y}{y'} \sqrt{x'^2 + y'^2} \right|, & \text{normale} &= \left| \frac{y}{x'} \sqrt{x'^2 + y'^2} \right|. \end{aligned}$$

Se, in particolare, la curva C è rappresentata dall'equazione

$$(2) \quad y = f(x),$$

si ha, sempre rispetto all'asse delle x ,

$$\begin{aligned} \text{sottotangente} &= \left| \frac{y}{y'} \right|, & \text{sottonormale} &= |yy'|, \\ \text{tangente} &= \left| \frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2} \right|, & \text{normale} &= |y\sqrt{1 + y'^2}|. \end{aligned}$$

Sia Q un punto del piano (x, y) , distinto del punto P di C , dicansi *tangente*, *normale*, *sottotangente*, *sottonormale* di C , nel punto P , rispetto al punto Q , rispettivamente la tangente, la normale, la sottotangente, la sottonormale di C , nel punto P , rispetto alla retta r , condotta per Q , normalmente alla PQ .

Se indichiamo con $\rho(t)$ la distanza del punto P , variabile su C , dall'origine O delle coordinate, se si pone cioè

$$\rho(t) = +\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2},$$

osservando che

$$\rho\rho' = xx' + yy',$$

si trovano, per la sottotangente e per la sottonormale di C , nel punto P , rispetto all'origine O delle coordinate, rispettivamente, le espressioni:

$$(3) \quad \left| \frac{xy' - yx'}{\rho'} \right|, \quad \left| \frac{\rho^2 \rho'}{xy' - yx'} \right|.$$

Ne segue, sempre rispetto all'origine O ,

$$(4) \quad \text{tangente} = +\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{xy' - yx'}{\rho'}\right)^2}, \quad \text{normale} = +\rho\sqrt{1 + \left(\frac{\rho\rho'}{xy' - yx'}\right)^2}.$$

Curve regolari piane in coordinate polari. Riferiamo il piano (x, y) ad un sistema di coordinate polari, assumendo come polo l'origine O delle coordinate cartesiane e come asse polare l'asse

delle x . Dette ρ e θ le coordinate polari di un punto del piano, fra queste e le sue coordinate cartesiane x e y , sussistono le relazioni

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta,$$

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arc} \begin{cases} \cos \frac{x}{\rho} \\ \operatorname{sen} \frac{y}{\rho} \end{cases}.$$

Domandiamo ora: come si potrà rappresentare, parametricamente, una curva regolare in coordinate polari? Si verifica immediatamente che, assunto un intervallo base arbitrario (a', a'') , ed ivi definite due funzioni $\theta(t)$ e $\rho(t)$, derivabili e con derivate continue, tali che:

a) la funzione $\rho(t)$ sia sempre positiva,

b) le derivate $\theta'(t)$ e $\rho'(t)$ non si annullino mai simultaneamente,

c) non esista alcuna coppia t' e t'' di valori distinti di t , per i quali risulti, simultaneamente,

$$\rho(t') = \rho(t''), \quad \theta(t') \equiv \theta(t'') \pmod{2\pi},$$

ponendo

$$(5) \quad \rho = \rho(t), \quad \theta = \theta(t),$$

il luogo descritto dal punto $P[\rho(t), \theta(t)]$, al variare di t in (a', a'') , è una porzione di curva regolare.

In particolare, comunque si definisca in (a', a'') una funzione $f(\theta)$ dell'anomalia θ , sempre positiva, derivabile e con derivata continua, ponendo,

$$(6) \quad \rho = f(\theta),$$

il luogo descritto dal punto $P[f(\theta), \theta]$, al variare di θ in (a', a'') , riesce una porzione di curva regolare, se $f(\theta') \neq f(\theta'')$ quando $\theta' \equiv \theta'' \pmod{2\pi}$.

A proposito della rappresentazione data dalla (6) delle curve regolari vogliamo qui osservare che, comunque si definisca, nel più arbitrario insieme A di punti dell'asse delle θ , la più arbitraria funzione $f(\theta)$ assumente sempre valori non negativi, si può considerare l'insieme C di punti del piano aventi le seguenti coordinate polari:

$$\theta \text{ in } A, \quad \rho = f(\theta);$$

orbene, l'insieme C si chiama il *diagramma polare* della funzione sempre non negativa $f(\theta)$. Inoltre, l'insieme dei punti del

piano caratterizzato dalle condizioni seguenti per le coordinate dei suoi punti

$$\theta \text{ in } A, \quad 0 \leq \rho \leq f(\theta),$$

chiamasi *settoroide* relativo alla funzione sempre positiva $f(\theta)$, avente per base l'insieme A .

Ritornando alle curve regolari, è utile esprimere i coseni direttori dell'asse tangente positivo τ , alla data curva C , relativo alla rappresentazione parametrica polare (5). Poichè:

$$(7) \quad x = \rho(t) \cos \theta(t), \quad y = \rho(t) \sin \theta(t),$$

posto

$$K(t) = + \sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \theta'^2},$$

si trova

$$(8) \quad \begin{cases} \cos(x, \tau) = \frac{1}{K} (\rho' \cos \theta - \theta' \rho \sin \theta), \\ \cos(y, \tau) = \frac{1}{K} (\rho' \sin \theta + \theta' \rho \cos \theta). \end{cases}$$

Detto ω l'angolo che il raggio vettore OP , avente per origine il polo O e per estremo il punto P variabile su C , forma con l'asse tangente positivo τ , segue dalle (8)

$$(9) \quad \begin{aligned} \cos \omega &= \frac{\rho'}{K}, & \sin \omega &= \frac{\rho \theta'}{K} \\ \cot \omega &= \frac{\rho'}{\rho \theta'}. \end{aligned}$$

Dalle (7) e (8) si trae poi

$$xy' - yx' = \rho^2 \theta',$$

e pertanto, dalle (3) e (4), si deduce che la curva C , nel punto P e rispetto al polo O , ha

$$\begin{aligned} \text{la sottotangente} &= \left| \frac{\rho^2 \theta'}{\rho'} \right|, & \text{la sottonormale} &= \left| \frac{\rho'}{\theta'} \right|, \\ \text{la tangente} &= \left| \frac{\rho}{\rho'} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \theta'^2} \right|, & \text{la normale} &= \left| \frac{1}{\theta'} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \theta'^2} \right|. \end{aligned}$$

Si notino le semplificazioni che ricevono queste formole nel caso che la C sia rappresentata dalla (6): si può allora porre, in ciascuna di esse, $\theta' = 1$.

Dalle (9) si deducono le proposizioni seguenti:

Tutte e sole le curve regolari che togliamo ortogonalmente i raggi di un fascio, di centro in O , sono i cerchi aventi il centro in O .

Tutte e sole le curve regolari le cui tangenti passano per un punto fisso O sono le rette passanti per O .

Concavità, convessità, flessi per le curve regolari piane. Si consideri la curva regolare C avente le equazioni parametriche (1) e l'intervallo base (a', a'') . Cominciamo dall'osservare che il teorema di **Cauchy** (teor. V, n° 45), applicato alle due funzioni $x(t)$ e $y(t)$, riceve la notevole interpretazione geometrica espressa dal seguente teorema:

I. *Comunque si prendano due punti A e B sopra una curva regolare C , esiste un punto dell'arco $C(A, B)$, distinto dagli estremi, nel quale la tangente alla C riesce parallela alla secante AB .*

Ed invero, se a e b sono i valori di t che competono ai punti A e B di C , esiste (teor. V, n° 45) un valore c di t , interno all'intervallo (a, b) , per il quale è

$$\begin{vmatrix} x'(c) & y'(c) \\ x(a) - x(b) & y(a) - y(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Sia P_0 un fissato punto di C interno alla curva, a cui compete cioè un valore t_0 del parametro t , interno all'intervallo (a', a'') base della curva. Si dice che, nel punto P_0 , la curva C è *concava* o *convessa* se si può costruire un arco $C(P', P'')$ di C , al quale il punto P_0 sia interno, i cui punti, distinti da P_0 , cadano tutti in uno determinato dei due semipiani aperti secondo i quali la tangente τ_0 in P_0 , alla C , divide il piano.

Se nel punto P_0 la curva C non è concava (non è convessa) si dice che *vi ha un flesso*.

Se t_0 è un valore speciale del parametro t , con le notazioni

$$x_0, y_0, x_0', y_0', x_0'', y_0'', \dots,$$

designeremo, rispettivamente, i valori:

$$x(t_0), y(t_0), x'(t_0), y'(t_0), x''(t_0), y''(t_0), \dots$$

Con questa intesa si può enunciare il teorema:

* II. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la curva C , nel punto $P_0(t_0)$ ad essa interno, sia concava o convessa è che la seguente funzione di t :*

$$(10) \quad \varphi(t) \equiv (x(t) - x_0)y_0' - (y(t) - y_0)x_0',$$

abbia un massimo o un minimo proprio in t_0 .

Ed invero, poichè $\varphi(t_0) = 0$, se $\varphi(t)$ ha, per esempio, un minimo proprio in t_0 , si può determinare un intervallo (t', t'') di (a', a'') , avente nell'interno il valore t_0 , per ogni punto del quale, distinto da P_0 , è

$$(11) \quad \varphi(t) > 0.$$

D'altra parte la tangente τ_0 in P_0 divide il piano in due semipiani aperti π' e π'' , per le coordinate X e Y di un qualsiasi punto di π' si abbia

$$(X - x_0)y_0' - (Y - y_0)x_0' > 0,$$

e, per le coordinate X e Y di un qualsiasi punto di π'' ,

$$(X - x_0)y_0' - (Y - y_0)x_0' < 0.$$

Ne segue, in virtù di (11), che se P' e P'' sono i punti di C corrispondenti, rispettivamente, ai valori t' e t'' del parametro t , ogni punto dell'arco C (P' , P''), distinto da P_0 , è contenuto nel semipiano π' . E viceversa, se è soddisfatta questa condizione, risulta, in (t', t'') e per $t \neq t_0$,

$$\varphi(t) > \varphi(t_0) = 0,$$

la funzione $\varphi(t)$ ha cioè un minimo proprio in t_0 .

Dal teorema ora dimostrato segue immediatamente (teor. XI, n° 45) che:

III. *Se $x(t)$ e $y(t)$ sono in t_0 , derivabili due volte almeno, condizione sufficiente affinchè la curva C nel punto $P_0(t_0)$, ad essa interno, sia concava o convessa, è che riesca*

$$y_0'x_0'' - x_0'y_0'' \neq 0.$$

Per la funzione $\varphi(t)$ definita dalla (10) si ha invero:

$$\varphi'(t) = y_0'x' - x_0'y', \quad \varphi''(t) = y_0'x'' - x_0'y''.$$

IV. *Se $x(t)$ e $y(t)$ sono in t_0 derivabili tre volte almeno, condizione sufficiente affinchè la curva C , nel punto $P_0(t_0)$ ad essa interno, abbia un flesso è che riesca:*

$$y_0'x_0''' - x_0'y_0''' = 0, \quad y_0''x_0''' - x_0'y_0''' \neq 0.$$

Si ha allora invero $\varphi'(t_0) = \varphi''(t_0) = 0$, $\varphi'''(t_0) \neq 0$. Per un tal punto di flesso si può costruire un archetto $C(P', P'')$, al quale il punto P_0 è interno, tale che tutti i punti dell'arco $C(P', P_0)$, distinti da P_0 , sono contenuti in uno determinato dei due semipiani aperti, secondo i quali la tangente τ_0 in P_0 alla C divide il piano, e tutti i punti del-

l'arco $C(P_0, P'')$, distinti da P_0 , sono contenuti nell'altro degli indicati semipiani.

Si osserverà che può benissimo risultare $y_0' x_0'' - x_0' y_0'' = 0$, ed essere sempre la C concava o convessa nel punto P_0 . Basterebbe perciò che esistesse un intorno circolare di t_0 , su (a', a'') , in ogni punto del quale, distinto da t_0 , si avesse, ad esempio,

$$y_0' x'' - x_0' y'' > 0.$$

La C sia in P_0 concava o convessa, esisterà allora un archetto $C(P', P'')$ di C , al quale il punto P_0 è interno, i cui punti distinti da P_0 , cadono in uno determinato dei due semipiani aperti π' e π'' , secondo i quali la τ_0 divide il piano (x, y) . Diciamo π' il semipiano aperto che contiene i punti di $C(P', P'')$, distinti da P_0 . Orbene: si dice allora che la curva C è in P_0 concava rispetto ad ogni punto del semipiano aperto π' , convessa rispetto ad ogni punto del semipiano aperto π'' . È immediato il seguente teorema:

V. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la curva regolare C sia nel punto $P_0(t_0)$ ad essa interno concava (convessa) rispetto al punto $Q(a, b)$ è che la funzione di t :*

$\varphi(t) \equiv [(a - x_0) y_0' - (b - y_0) x_0'] [(x(t) - x_0) y_0' - (y(t) - y_0) x_0']$,
abbia un minimo proprio (un massimo proprio) in t_0 .

Si ha dunque in particolare:

VI. *Se $x(t)$ e $y(t)$ sono, in t_0 , derivabili due volte almeno, condizione sufficiente affinché la curva regolare C sia, nel punto $P_0(t_0)$ ad essa interno, concava (convessa) rispetto al punto $Q(a, b)$, è che riesca:*

$$[(a - x_0) y_0' - (b - y_0) x_0'] (y_0' x_0'' - x_0' y_0'') > 0 (< 0).$$

L'asse di coseni direttori α e β non abbia la direzione della tangente τ_0 in P_0 alla curva C . Se la curva C è concava o convessa in P_0 , si dice che essa volge la concavità (la convessità) nel verso dell'asse (α, β) , se essa è concava (convessa) rispetto al punto Q di coordinate $x_0 + \alpha$ e $y_0 + \beta$. Si ha dunque che:

VII. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la curva regolare C , nel punto $P_0(t_0)$ ad essa interno, volga la concavità (la convessità) nel verso dell'asse (α, β) , è che la funzione di t :*

$$\psi(t) \equiv (\alpha y_0' - \beta x_0') [(x(t) - x_0) y_0' - (y(t) - y_0) x_0'],$$

abbia un minimo proprio (un massimo proprio) in t_0 . Se $x(t)$ e $y(t)$ sono in t_0 derivabili due volte almeno, condizione sufficiente affinché la curva C , nel punto P_0 , volga la concavità (la convessità) nel verso dell'asse (α, β) , è che riesca

$$(\alpha y_0' - \beta x_0')(y_0' x_0'' - x_0' y_0'') > 0 (< 0).$$

Se, in particolare, la curva regolare C ha l'equazione cartesiana (2), con $f(x)$ derivabile due volte almeno, si ha:

VIII. *Secondochè riesce $f''(x_0) > 0$ o < 0 , la curva C volge in P_0 la concavità nel verso dell'asse y o dell'opposto. Se $f(x)$ è, in x_0 , derivabile tre volte almeno, la C vi ha un flesso se è $f''(x) = 0$, $f'''(x) \neq 0$.*

Se poi la curva regolare C ha, in coordinate polari, l'equazione:

$$\rho = f(\theta), \quad (f(\theta) > 0),$$

con $f(\theta)$ derivabile due volte almeno, si ha:

IX. *Secondochè riesce*

$$\rho_0^2 + 2\rho_0'^2 - \rho_0 \rho_0'' > 0 \text{ oppure } < 0,$$

la curva C è nel suo punto $P_0(\theta_0)$ concava oppure convessa rispetto al polo O delle coordinate polari.

Vi sono curve regolari che, in ogni loro punto, sono concave o convesse. Tale è, ad esempio, ogni conica. Vi sono curve regolari dotate simultaneamente di punti di concavità o di convessità e di punti di flesso. Tale è, ad esempio, la curva $y = x^3$ che, in ogni punto a destra dell'origine volge la concavità nel verso dell'asse y e, in ogni punto a sinistra, volge la concavità nel verso opposto, laddove nell'origine ha un flesso.

Domandiamo ora, vi sono curve regolari che in ogni loro punto hanno un flesso? La linea retta è evidentemente una tale curva, ma subito si può dimostrare che:

X. *Se ci si limita a considerare le curve regolari per le quali le funzioni $x(t)$ e $y(t)$, delle equazioni parametriche, sono derivabili due volte almeno, la linea retta è l'unica curva regolare che, in ogni suo punto, ha un flesso.*

Tutto si riduce a dimostrare che una porzione di curva regolare C , per la quale le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ delle sue equazioni pa-

rametriche verificano, nell'intervallo base (a', a'') , identicamente l'equazione

$$y'(t)x''(t) - x'(t)y''(t) = 0,$$

è una linea retta. Vediamo subito, anzitutto, che la curva si compone di segmenti di rette. Ed invero, in un qualsiasi punto $P_0(t_0)$ della curva o $x'(t)$ o $y'(t)$ deve essere diversa da zero, sia $x'(t) \neq 0$. Esisterà un intervallo (t', t'') , contenente t_0 , in ogni punto del quale è $x'(t) \neq 0$, e quindi

$$\frac{d}{dt} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^2} = 0.$$

Sarà dunque, identicamente in (t', t'') , $y'(t) - ax'(t) = 0$, ove a designa una costante; e pertanto, sempre identicamente in (t', t'') , $y(t) - ax(t) = b$, designando b un'altra costante. L'arco C (P', P'') di C , avente per base l'intervallo (t', t'') e contenente il punto P_0 , è dunque un segmento della retta $Y - aX - b = 0$. È così provato che la curva C si compone di segmenti di retta; ma questi segmenti devono essere tutti situati sopra una medesima retta, poichè la curva è, per ipotesi, continua e priva di punti angolosi.

Anche per le applicazioni che ne faremo nell'articolo seguente, è interessante lo studio delle curve regolari del piano che verificano la condizione seguente:

Esiste una ben determinata direzione che non è mai assunta dalla tangente alla curva.

In questo articolo noi faremo sempre, da ora in poi, l'ipotesi che la curva regolare C verifichi tale condizione. Operando, se occorre, una rotazione degli assi coordinati, si può sempre supporre che la direzione che non è mai assunta dalla tangente alla curva, sia quella dell'asse y . Sarà allora sempre $x'(t) \neq 0$; ma in tal caso (cfr. n° 49) la curva C può essere rappresentata dall'unica equazione cartesiana

$$(2) \quad y = f(x),$$

ove $f(x)$ è una funzione derivabile, con derivata continua, in un certo intervallo (a', a'') dell'asse delle x .

Sia r una qualsiasi retta non avente la direzione dell'asse delle y , e perciò di equazione

$$y - ax - b = 0,$$

ogni punto (X, Y) del piano (x, y) , fuori di r , dicesi, per evidente ragione, *al disopra* o *al disotto* di r secondochè riesce

$$Y - aX - b > 0 \quad \text{oppure} \quad Y - aX - b < 0.$$

La retta r divide il piano (x, y) in due semipiani aperti: uno di questi è il luogo dei punti al disopra di r e dicesi perciò il semipiano *al disopra* di r , l'altro si dirà il semipiano *al disotto* di r .

Sussiste il seguente notevole teorema:

XI. *Se per la curva regolare C avente l'equazione (2) e l'intervallo base (a', a'') , la derivata $f'(x)$ è funzione crescente (decescente) in (a', a'') , si verificano le seguenti circostanze: **a)** La tangente alla curva non riprende mai la stessa direzione, e pertanto nell'interno di ogni arco C (A, B) di C vi è un solo punto nel quale la tangente è parallela alla corda AB . **b)** La curva C , in ogni suo punto, volge la concavità nel verso dell'asse y (nel verso opposto); ogni tangente α alla curva ha con essa in comune il solo punto A di contatto, e pertanto ogni punto della curva distinto da A , è al disopra (è al disotto) della tangente α . **c)** Ogni secante s ha in comune con la curva due soli punti; se A e B sono questi due punti, essi dividono la curva in tre archi, ogni punto interno all'arco C (A, B) è al disotto (è al disopra) della secante, ogni punto interno ad uno qualsiasi dei rimanenti due archi è al disopra (è al disotto) della secante; pertanto, e per **b)**, il triangolo formato dalla secante s e dalle due tangenti α e β alla C , in A e in B , contiene intieramente l'arco C (A, B) della curva. **d)** Due tangenti α e β alla curva, in due punti qualsivogliano A e B , di ascissa a e b , si incontrano in un punto la cui ascissa ξ è interna all'intervallo (a, b) ; pertanto da un qualsiasi punto del piano (x, y) non si possono condurre più di due tangenti alla curva.*

Si dimostrano facilmente le varie circostanze affermate dal teorema. Per fissare le idee, supporremo $f'(x)$ crescente in (a', a'') . Perchè in due punti di C , di ascisse a e b , le tangenti abbiano la stessa direzione è necessario e sufficiente che riesca $f'(a) = f'(b)$, e pertanto, poichè è sempre, per ipotesi, $f'(a) \neq f'(b)$, ne risultano le circostanze **a)**. Consideriamo la funzione

$$\varphi(x) \equiv f(x) - f(a) - (x - a)f'(a).$$

Si ha $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$, e quindi, poichè $f'(x)$ è crescente,

$$\varphi'(x) \begin{cases} > 0 & \text{a destra di } a, \\ < 0 & \text{a sinistra di } a, \end{cases}$$

e pertanto, essendo $\varphi(a) = 0$, se ne deduce $\varphi(x) > 0$, tanto a sinistra che a destra di a . Ciò dimostra le circostanze **b**).

Sia $b > a$, e consideriamo la funzione

$$\phi(x) \equiv f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Si ha :

$$\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Diciamo c quell'unico punto, interno all'intervallo (a, b) , per il quale è

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

si ha: $\phi'(x) = f'(x) - f'(c)$, e quindi, poichè $f'(x)$ è crescente,

$$\phi'(x) \begin{cases} > 0 & \text{a destra di } c, \\ < 0 & \text{a sinistra di } c, \end{cases}$$

e pertanto

$$\phi(x) \begin{cases} \text{crescente a destra di } c, \\ \text{decrecente a sinistra di } c, \end{cases}$$

e poichè $\phi(a) = \phi(b) = 0$, se ne deduce

$$\phi(x) \begin{cases} \text{positiva a sinistra di } a, \\ \text{negativa nell'interno di } (a, b), \\ \text{positiva a destra di } b. \end{cases}$$

E con ciò sono dimostrate le circostanze **c**).

Consideriamo le due tangenti α e β nei due punti $A(a)$ e $B(b)$ di C . L'ascissa ξ del loro punto di incontro è la radice della seguente equazione di primo grado:

$$\begin{aligned} \chi(x) &\equiv f(b) - f(a) + (x - b)f'(b) - (x - a)f'(a) \equiv \\ &\equiv (b - a)f'(c) + (x - b)f'(b) - (x - a)f'(a) = 0. \end{aligned}$$

Ma è

$\chi(a) = (b - a)[f'(c) - f'(b)] < 0$, $\chi(b) = (b - a)[f'(c) - f'(a)] > 0$, onde risulta che la radice ξ dell'equazione $\chi(x) = 0$ è interna all'intervallo (a, b) .

Presi ora tre qualsivogliano punti distinti $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ della C , subito si vede che le tangenti α , β , γ alla curva, rispettivamente, in A , in B , in C , non possono mai passare per un medesimo

punto. Poichè, se, per esempio, è $a < b < c$, dette ξ e ζ le ascisse dei punti di incontro di β con α e con γ , si ha: $a < \xi < b < \zeta < c$. E restano così anche dimostrate le circostanze *d*).

Una curva regolare, di equazione $y = f(x)$, che in ogni suo punto volga la concavità (la convessità) nel verso dell'asse y , si dice *concava (convessa) rispetto all'asse y , convessa (concava) rispetto all'asse opposto*.

Il teorema ultimamente dimostrato dà, in particolare, che:

Condizione sufficiente affinché una curva regolare, di equazione $y = f(x)$, sia concava (convessa) rispetto all'asse y è che la sua tangente non riprenda mai la stessa direzione; e precisamente, sarà concava o convessa rispetto all'asse y secondochè il coefficiente angolare della tangente è funzione crescente o decrescente dell'ascissa del punto di contatto.

Si dimostrino, per esercizio, i seguenti due teoremi:

XII. *Se per una curva regolare, di equazione $y = f(x)$, la funzione $f(x)$, è, nell'intervallo base (a', a'') , derivabile due volte almeno, condizione necessaria e sufficiente affinché la curva sia concava (convessa) rispetto all'asse y è che il coefficiente angolare della sua tangente sia funzione crescente (decrescente) dell'ascissa del punto di contatto.*

XIII. *Se per una curva regolare, di equazione $y = f(x)$, la funzione $f(x)$, è, nell'intervallo base (a', a'') , derivabile due volte almeno, condizioni necessarie e sufficienti affinché la curva sia concava (convessa) rispetto all'asse y sono le due seguenti: la derivata seconda $f''(x)$ non deve mai essere negativa (positiva); non deve esistere alcun intervallo di (a', a'') , nel quale questa derivata seconda è sempre nulla.*

Osservazione. Evidentemente, il teorema XI sussiste inalterato se per la funzione $f(x)$ si fa soltanto l'ipotesi che essa sia derivabile in (a', a'') e che la derivata sia una funzione crescente (decrescente) in (a', a'') . Ma poichè una funzione derivata $f'(x)$ prende in qualsiasi intervallo (a, b) ogni valore compreso fra $f'(a)$ e $f'(b)$, dall'ipotesi che $f'(x)$ è crescente (decrescente) in (a', a'') segue (31, VIII) la sua continuità. Il supporre dunque, come è stato fatto nel teorema XI, che il diagramma $y = f(x)$ sia una porzione di curva regolare, non è affatto una restrizione superflua.

51. Calcolo delle radici di un'equazione. — *Nota*, in un intervallo (a', a'') , una funzione reale $f(x)$ della variabile reale x , un valore ξ , in (a', a'') , della x , per il quale riesca $f(\xi) = 0$, dicesi uno *zero della funzione $f(x)$* , oppure una *radice dell'equazione*.

$$(1) \quad f(x) = 0.$$

Una radice ξ dell'equazione (1) dicesi *separata* se si è costruito un intervallo (p, q) di (a', a'') , avente nell'interno ξ , nel quale non cadono altre radici dell'equazione.

Un problema la cui soluzione è di grandissimo interesse anche per le applicazioni alla pratica è il seguente:

Calcolare una radice ξ dell'equazione (1), che sia stata già separata. Detto cioè (p, q) un intervallo di (a', a'') , nel cui interno è contenuta l'unica radice ξ della (1), costruire due successioni contigue (cfr. n° 3, Cap. I.)

$$(2) \quad p_0 = p, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots,$$

$$(3) \quad q_0 = q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots,$$

che abbiano la radice ξ per numero di separazione.

Perchè è sempre

$$p_i \leq \xi \leq q_k, \quad p_i \leq q_k \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots),$$

ogni quantità p_i dicesi un valore di ξ approssimato per difetto con un errore d'approssimazione minore di $q_k - p_i$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) ed ogni quantità q_k dicesi un valore di ξ approssimato per eccesso con un errore d'approssimazione minore di $q_k - p_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$).

Noi vogliamo qui, come semplice ed interessante applicazione dei risultati dell'articolo precedente, brevemente trattare il posto problema del calcolo delle radici separate di un'equazione.

I. *Calcolo della radice ξ dell'equazione (1) nelle ipotesi seguenti: la funzione $f(x)$ è continua in (a', a'') ; per l'intervallo (p, q) che opera la separazione della radice ξ , si ha $f(p)f(q) < 0$; comunque si considerino due punti x' e x'' ($x' < x''$) di (p, q) , i punti del diagramma C della funzione $f(x)$, aventi l'ascissa interna all'intervallo (x', x'') sono sempre al disotto (sono sempre al disopra) della retta r congiungente i punti $[x', f(x')]$ e $[x'', f(x'')]$, mentre i punti di C di ascissa esterna al detto intervallo sono sempre al disopra (sono sempre al disotto) della retta r .*

Per fissare le idee, noi supporremo $f(p) < 0$, $f(q) > 0$ e che, comunque si prendano i due punti x' e x'' , il punto $[x, f(x)]$ di C è al

disotto o al disopra della retta r congiungente i due punti $[x', f(x')]$ e $[x'', f(x'')]$ secondochè x è interna o esterna all'intervallo (x', x'') . Data la continuità di $f(x)$ e poichè (p, q) opera la separazione della radice ξ , si avrà

$$f(x) \begin{cases} < 0, & \text{in } (p, q), \text{ a sinistra di } \xi, \\ > 0, & \text{in } (p, q), \text{ a destra di } \xi. \end{cases}$$

Consideriamo la retta r_1 congiungente i punti $[p, f(p)]$ e $[q, f(q)]$, essa incontra l'asse x nel punto

$$p_1 = \frac{pf(q) - qf(p)}{f(q) - f(p)},$$

interna all'intervallo (p, q) , e poichè ogni punto di C di ascissa interna a (p, q) è al disotto di r_1 , riuscirà $f(p_1) < 0$ e perciò $p < p_1 < \xi$. Poichè $f(p_1) < 0$, la retta r_2 congiungente i punti $[p_1, f(p_1)]$ e $[q, f(q)]$, incontra l'asse x nel punto

$$p_2 = \frac{p_1f(q) - qf(p_1)}{f(q) - f(p_1)},$$

interno all'intervallo (p_1, q) , e riuscirà $p < p_1 < p_2 < \xi$. Il procedimento si può indefinitamente ripetere e si viene così a costruire la successione

$$(2) \quad p_0 = p, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots,$$

mediante le formole ricorrenti

$$(4) \quad \begin{cases} p_0 = p, \\ p_{n+1} = \frac{p_n f(q) - q f(p_n)}{f(q) - f(p_n)}, \end{cases}$$

sempre crescente e superiormente limitata dalla radice ξ . Dico che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \xi.$$

Esiste invero il limite di p_n ed esso non può superare ξ , sia $\xi' (\leq \xi)$ il limite di p_n . Dalle (4) si ricava

$$\xi' = \frac{\xi' f(q) - q f(\xi')}{f(q) - f(\xi')},$$

cioè $(q - \xi') f(\xi') = 0$, e poichè $q - \xi' \geq q - \xi > 0$, ne segue $f(\xi') = 0$, e quindi $\xi' = \xi$.

Poichè $\lim f(p_n) = 0$, si potrà trovare un numero intero e positivo ν tale che, per $n > \nu$, riesca

$$f(p) < f(p_n) < 0.$$

Diciamo s_k la retta congiungente il punto $[p, f(p)]$ col punto $[p_{v+k}, f(p_{v+k})]$ ($k=1, 2, \dots$) e q_k il punto di incontro di s_k con l'asse x , si ha

$$(5) \quad q_k = \frac{pf(p_{v+k}) - p_{v+k}f(p)}{f(p_{v+k}) - f(p)},$$

$$p < p_{v+k} < q_k,$$

e poichè ogni punto di C di ascissa esterna a (p, p_{v+k}) è al di sopra di s_k , sarà

$$q_k > \xi.$$

Risulta inoltre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{pf(p_{v+k}) - p_{v+k}f(p)}{f(p_{v+k}) - f(p)} = \frac{-\xi f(p)}{-f(p)} = \xi.$$

Pertanto con le due successioni contigue: con la (2) definita dalle (4) e con la successione

$$(3) \quad q_0 = p, q_1, q_2, \dots, q_k, \dots,$$

definita dalla (5), si consegue il calcolo della radice ξ della (1) separata dall'intervallo (p, q) .

I'. In particolare (50, XI) alle ipotesi poste per la $f(x)$, si soddisfa se, per l'intervallo (p, q) operante la separazione della radice ξ si ha $f(p)f(q) < 0$, mentre la $f(x)$ è derivabile in (p, q) con derivata ivi crescente (decescente).

Si osservi che allora si avrà $f'(\xi) \neq 0$. Poichè se fosse $f'(\xi) = 0$, supposta, per esempio, $f'(x)$ crescente in (p, q) , ne seguirebbe

$$f'(x) \begin{cases} < 0 \text{ nell'intervallo } (p, \xi) \text{ aperto a destra,} \\ > 0 \text{ nell'intervallo } (\xi, q) \text{ aperto a sinistra,} \end{cases}$$

e quindi

$$f(x) \begin{cases} \text{decescente in } (p, \xi), \\ \text{crescente in } (\xi, q), \end{cases}$$

e pertanto $f(p) > 0$, $f(q) > 0$. Sarà anzi $f'(\xi)$ positiva o negativa secondochè positiva o negativa è $f(q)$.

I''. Più particolarmente ancora (50, XIII) alle ipotesi poste per la $f(x)$ si soddisfa se per l'intervallo (p, q) , operante la separazione della radice ξ , si ha $f(p)f(q) < 0$, mentre, essendo la $f(x)$ derivabile in (p, q) due volte almeno, la derivata seconda $f''(x)$, quando non è

nulla, è sempre di uno stesso segno e non è sempre nulla in alcun intervallo di (p, q) .

Il metodo di calcolo ora dato della radice separata ξ dell'equazione (1) sarà da noi indicato col nome di *metodo delle seganti*. Esso è anche noto sotto i nomi di *metodo della proporzionalità* o di *metodo di falsa posizione*.

Facciamo le ipotesi enunciate in I' e supponiamo inoltre che:

Oltre ad essere nota, in (a', a'') , la funzione $f(x)$, sia ivi pure nota la sua derivata prima $f'(x)$.

Per il calcolo della radice ξ dell'equazione (1), separata dall'intervallo (p, q) , si può allora combinare, nel modo che andiamo a dire, l'esposto metodo delle seganti col cosiddetto *metodo delle tangenti* o di *Newton-Fourier*.

Per fissare le idee, supporremo $f(p) < 0$, $f(q) > 0$ e crescente in (p, q) la derivata $f'(x)$ della $f(x)$. Risulterà allora $f'(\xi) > 0$, e poichè $f'(x)$ è crescente, sarà sempre $f'(x) > 0$, in (ξ, q) .

Consideriamo la tangente t_1 alla curva regolare C , di equazione $y = f(x)$, nel punto $[q, f(q)]$; essa incontra l'asse x nel punto:

$$q_1 = q - \frac{f(q)}{f'(q)}.$$

Poichè ogni punto di C , distinto dal punto $[q, f(q)]$, è al disopra della tangente t_1 (50, XI) e poichè $f(q)$ e $f'(q)$ sono positivi, riesce $\xi < q_1 < q$. Consideriamo ora la tangente t_2 alla C nel punto $[q_1, f(q_1)]$, essa incontra l'asse x nel punto:

$$q_2 = q_1 - \frac{f(q_1)}{f'(q_1)},$$

e riescirà di nuovo $\xi < q_2 < q_1 < q$.

Il procedimento ora indicato si può indefinitamente replicare, e si verrà così a costruire una successione decrescente

$$(3) \quad q_0 = q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots,$$

mediante le formole ricorrenti:

$$(6) \quad \begin{cases} q_0 = q, \\ q_{n+1} = q_n - \frac{f(q_n)}{f'(q_n)}, \end{cases}$$

inferiormente limitata dalla radice ξ dell'equazione (1). Esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n,$$

ed indicatone con ξ' il valore, si ha $\xi' \geq \xi$. Dico che $\xi' = \xi$. Ed invero, dalle (6), per la continuità di $f(x)$ e di $f'(x)$, e per essere $f'(\xi') > 0$, si ricava:

$$\xi' = \xi - \frac{f(\xi')}{f'(\xi')},$$

cioè $f(\xi') = 0$.

La successione (3), data dalle formole ricorrenti (6) è dunque pur essa contigua alla successione (2) data dalle formole ricorrenti (4) del metodo delle seganti; e pertanto, quella successione fornisce con questa un altro modo di calcolare la radice ξ della (1).

II. *Calcolo della radice ξ dell'equazione (1) nelle ipotesi seguenti: la funzione $f(x)$ è continua in (a', a'') ; nell'intervallo (p, q) , che opera la separazione della radice ξ , la $f(x)$ è crescente (è decrescente) ed è derivabile, con derivata decrescente (crescente) in (p, ξ) , crescente (decrescente) in (ξ, q) .*

Il metodo delle tangenti offre subito due successioni (2) e (3) contigue e separate dalla radice ξ . Supposto, per fissare le idee, che la $f(x)$ sia crescente in (p, q) , con derivata decrescente in (p, ξ) e crescente in (ξ, q) , si avrà $f'(\xi) \geq 0$, e quindi $f'(x)$ positiva in (p, q) , tanto a destra che a sinistra di ξ . Mentre è

$$f(x) \begin{cases} > 0 \text{ nell'intervallo } (\xi, q), \text{ aperto a sinistra,} \\ < 0 \text{ nell'intervallo } (p, \xi), \text{ aperto a destra.} \end{cases}$$

Inoltre (50, XI) l'arco della curva C di equazione $y = f(x)$, limitata dai punti di ascisse ξ e q , è tutto al disopra di ogni sua tangente, se si esclude il punto di contatto, e l'arco di C , limitato dai punti p e ξ , è tutto al disotto di ogni sua tangente, se, del pari, si esclude il punto di contatto. Ciò premesso, si vede, come precedentemente, che, posto

$$(7) \begin{cases} p_0 = p, \\ p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}, \end{cases} \quad (8) \begin{cases} q_0 = q, \\ q_{n+1} = q_n - \frac{f(q_n)}{f'(q_n)}, \end{cases}$$

la successione (2) risulta crescente e superiormente limitata dalla radice ξ la successione (3) decrescente e inferiormente limitata dalla ξ . Dico che le due successioni sono contigue, cioè che

$$\lim p_n = \lim q_n = \xi.$$

Dimostriamo che $\lim q_n = \xi$. Posto $\lim q_n = \xi'$, è $\xi' \geq \xi$, e quindi

$$\lim f(q_n) = f(\xi') \begin{cases} > 0 & \text{se } \xi' > \xi, \\ = 0 & \text{se } \xi' = \xi, \end{cases} \quad \lim f'(q_n) = f'(\xi') \begin{cases} > 0 & \text{se } \xi' > \xi, \\ \geq 0 & \text{se } \xi' = \xi. \end{cases}$$

Ma non potrà essere $\xi' > \xi$, perchè allora si dedurrebbe:

$$\lim \frac{f(q_n)}{f'(q_n)} = \frac{f(\xi')}{f'(\xi')} > 0,$$

mentre dalle (8) si ricava:

$$\lim \frac{f(q_n)}{f'(q_n)} = \lim (q_{n+1} - q_n) = \lim q_{n+1} - \lim q_n = \xi' - \xi' = 0.$$

II'. In particolare (50, XIII) alle ipotesi poste per la $f(x)$ si soddisfa, se, nell'intervallo (p, q) operante la separazione della radice ξ , la funzione $f(x)$ è derivabile due volte almeno e crescente (decrescente), mentre la derivata $f''(x)$, quando non è nulla, è negativa (positiva) a sinistra di ξ e positiva (negativa) a destra e non è sempre nulla in alcun intervallo di (p, q) .

Osservazione 1^a. Il metodo ora indicato delle tangenti, teoricamente applicabile, come abbiamo visto, nelle ipotesi enunciate in II, è in pratica affatto sconsigliabile quando sia $f'(\xi) = 0$.

Poichè, in tal caso, $f'(p_n)$ e $f'(q_n)$ hanno per limite zero, e perciò, quando n è abbastanza grande, essi sono molto piccoli. Un piccolissimo errore commesso nel calcolo di $f(p_n)$ o di $f(q_n)$, viene, nel calcolo delle funzioni

$$\frac{f(p_n)}{f'(p_n)}, \quad \frac{f(q_n)}{f'(q_n)},$$

moltiplicato per $1:f'(p_n)$ o per $1:f'(q_n)$, i quali sono numeri che finiscono col diventare più grandi di qualunque numero assegnato!

Se, nell'intervallo (p, q) operante la separazione della radice ξ della (1), la funzione $f(x)$ è derivabile due volte almeno, con derivata seconda limitata, anche se non si verificano le circostanze contemplate in I'', per il calcolo della radice ξ è consigliabile tentare di nuovo il metodo delle tangenti, nel modo che è qui spiegato più avanti, e ciò anche quando si sia nelle ulteriori ipotesi enunciate in II, quando però riesca $f'(\xi) \neq 0$. Dobbiamo premettere il seguente teorema che fornisce un numero positivo limitante superiormente

il modulo dell'errore che si commette nel sostituire ad un arco della curva regolare C la sua corda.

III. Se la funzione $f(x)$ è, in (p, q) , derivabile due volte almeno, con derivata seconda limitata, detto $M(p, q)$ un numero positivo non inferiore all'estremo superiore di $|f''(x)|$ in (p, q) , si ha ivi:

$$(9) \quad \left| f(x) - f(p) - \frac{f(q) - f(p)}{q - p} (x - p) \right| \leq \frac{1}{8} (q - p)^2 M(p, q).$$

Sia, invece, K un numero non inferiore all'estremo superiore di $f''(x)$ in (p, q) e k un numero non superiore all'estremo inferiore di $f''(x)$ in (p, q) . E consideriamo la funzione:

$$\varphi(x) \equiv f(x) - f(p) - \frac{f(q) - f(p)}{q - p} (x - p) + \frac{K}{2} (x - p)(q - x).$$

Si ha:

$$(10) \quad \varphi(p) = \varphi(q) = 0,$$

$$(11) \quad \varphi''(x) = f''(x) - K \leq 0 \text{ in } (p, q).$$

Per le (10) esiste un punto ξ , interno a (p, q) , nel quale è $\varphi'(\xi) = 0$, per le (11) è

$$\varphi'(x) \geq \varphi'(\xi) = 0 \text{ per } x \leq \xi,$$

$$\varphi'(x) \leq \varphi'(\xi) = 0 \text{ per } x \geq \xi,$$

e pertanto, poichè $\varphi(p) = 0$,

$$\varphi(x) \geq 0, \text{ per } x \text{ in } (p, \xi),$$

e poichè $\varphi(q) = 0$,

$$\varphi(x) \geq 0, \text{ per } x \text{ in } (\xi, q).$$

Si ha dunque $\varphi(x) \geq 0$ in (p, q) , cioè ivi:

$$(12) \quad f(x) - f(p) - \frac{f(q) - f(p)}{q - p} (x - p) \geq -\frac{K}{2} (x - p)(q - x).$$

In modo analogo si dimostra che, in (p, q) , riesce:

$$(13) \quad f(x) - f(p) - \frac{f(q) - f(p)}{q - p} (x - p) \leq -\frac{k}{2} (x - p)(q - x).$$

Dalle (12) e (13) segue

$$\left| f(x) - f(p) - \frac{f(q) - f(p)}{q - p} (x - p) \right| \leq \frac{1}{2} M(p, q) (x - p)(q - x),$$

ma

$$(x - p)(q - x) \leq \frac{(q - p)^2}{4},$$

onde si ricava la (9) che si voleva dimostrare.

IV. *Calcolo della radice ξ dell'equazione (1) nelle ipotesi seguenti: la funzione $f(x)$ è continua in (a', a'') ; nell'intervallo (p, q) , che opera la separazione della radice ξ , la $f(x)$ è derivabile due volte almeno, con derivata prima mai nulla e con derivata seconda limitata.*

Sarà, di conseguenza, $f(x)$ crescente o decrescente in (p, q) . Supporremo, per fissare le idee, la $f(x)$ crescente in (p, q) ; sarà allora $f(x) < 0$ a sinistra di ξ , $f(x) > 0$ a destra. Pertanto la corda r_1 dell'arco della curva C , limitato dai punti $[p, f(p)]$ e $[q, f(q)]$ incontrerà l'asse x in un punto α_1 , interno all'intervallo (p, q) , dato da

$$\alpha_1 = \frac{pf(q) - qf(p)}{f(q) - f(p)}.$$

Si ha (teor. III)

$$(14) \quad f(x) = f(p) + \frac{f(q) - f(p)}{q - p}(x - p) + R(x),$$

essendo $|R(x)| \leq 1/8 M(p, q)(q - p)^2$, convenendo di indicare con $M(\alpha, \beta)$ un numero positivo non inferiore all'estremo superiore di $|f''(x)|$ nell'intervallo (α, β) di (p, q) . E quindi, per essere $f(\xi) = 0$, dalla (14) si ricava:

$$\xi = \frac{pf(q) - qf(p)}{f(q) - f(p)} - R(\xi) \frac{q - p}{f(q) - f(p)},$$

e pertanto, detto $m(\alpha, \beta)$ un numero positivo non superiore al minimo di $f'(x)$ in (α, β) , si trae

$$(15) \quad |\xi - \alpha_1| \leq \frac{1}{8}(q - p)^2 \frac{M(p, q)}{m(p, q)}.$$

Tale relazione limita superiormente l'errore che si commette prendendo α_1 come valore approssimato della radice ξ .

La quantità α_1 , se non coincide con ξ , sarà un valore di ξ approssimato per difetto o per eccesso, per difetto se è $f(\alpha_1) < 0$, per eccesso se è $f(\alpha_1) > 0$. Supponiamo, ad esempio, che α_1 sia approssimato per difetto. Si indicherà allora con α_2 il minore dei due numeri:

$$q, \quad \alpha_1 + \frac{1}{8}(q - p)^2 \frac{M(p, q)}{m(p, q)}.$$

La quantità α_2 sarà un valore di ξ approssimato per eccesso. Si conduce la retta r_2 congiungente i punti $[\alpha_1, f(\alpha_1)]$, $[\alpha_2, f(\alpha_2)]$, essa incontra l'asse x in un punto α_3 , interno all'intervallo (α_1, α_2) , dato da

$$\frac{\alpha_1 f(\alpha_2) - \alpha_2 f(\alpha_1)}{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)},$$

mentre si ha :

$$|\xi - \alpha_3| \leq \frac{1}{8} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \frac{M(\alpha_1, \alpha_2)}{m(\alpha_1, \alpha_2)}.$$

Tale relazione limita superiormente l'errore che si commette prendendo α_3 come valore approssimato della radice ξ . Supponiamo, ad esempio, che risulti $f(\alpha_3) > 0$, cioè che α_3 sia un valore di ξ approssimato per eccesso. Indicheremo allora con α_4 il maggiore dei due numeri

$$\alpha_1, \quad \alpha_3 - \frac{1}{8} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \frac{M(\alpha_1, \alpha_2)}{m(\alpha_1, \alpha_2)},$$

e per l'intervallo (α_4, α_3) , operante, del pari, la separazione della radice ξ , si ripeterà il procedimento esposto per gli intervalli (p, q) e (α_1, α_2) , e così via indefinitamente.

Posto

$$\begin{aligned} p_0 &= p, & p_1 &= \alpha_1, & p_2 &= \alpha_4, \dots, \\ q_0 &= q, & q_1 &= \alpha_2, & q_2 &= \alpha_3, \dots, \end{aligned}$$

se per nessuno dei valori p_i o q_k si ha $f(p_i) = 0$ oppure $f(q_k) = 0$, si perviene alla costruzione di due successioni (2) e (3) separate, e la radice ξ cade nell'intervallo di separazione delle due successioni.

Il metodo descritto riesce (teoricamente) se le due successioni che si ottengono riescono contigue.

Osservazioni. 2^a) Nelle sole ipotesi enunciate in IV, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(\alpha_{n+1}) - f(\alpha_n)] = 0,$$

non è consigliabile ripetere molto le successive approssimazioni, per una ragione identica a quella data nell'osservazione 1^a.

3^a) Per l'applicazione del metodo esposto in IV occorre soltanto che sia *nota* la funzione $f(x)$. E basta sapere soltanto che la funzione $f(x)$ è derivabile due volte almeno e, per ogni intervallo (α, β) di (p, q) , anche se $f'(x)$ e $f''(x)$ non sono calcolabili con grande approssimazione, sapere determinare un numero non inferiore all'estremo superiore di $|f''(x)|$ in (α, β) e un numero non superiore al minimo di $|f'(x)|$ in (α, β) .

4^a) Supposta la $f(x)$ derivabile in (p, q) , ai dati metodi di calcolo della radice separata ξ della (1), sia per necessità teoriche che per necessità pratiche, si sottrae sempre il caso, che può ben pre-

sentarsi in pratica, in cui la radice ξ è anche uno zero della derivata prima $f'(x)$. Per il calcolo di una tale radice, supposto che $f'(x)$ sia *nota* in (p, q) , conviene applicare all'equazione

$$f'(x) = 0,$$

i metodi dati per la (1). Supposta la $f(x)$ derivabile due volte almeno in (p, q) , a questi metodi di calcolo sfuggono allora le radici della (1) che, simultaneamente, sono zeri di $f'(x)$ e di $f''(x)$. Per il calcolo di una tale radice, supposto che $f''(x)$ sia *nota* in (p, q) , conviene applicare all'equazione

$$f''(x) = 0,$$

i metodi dati per la (1). Ecc.

5ª) In tutti i casi, la possibilità, per lo meno teorica, di calcolare la radice, separata ξ della (1) si ha nelle sole ipotesi seguenti: *Nell'intervallo (p, ξ) aperto a destra è $f(x) < 0 (> 0)$ e nell'intervallo (ξ, q) aperto a sinistra è $f(x) > 0 (< 0)$.*

Fissato invero un numero n , intero e maggiore di uno, mediante i punti

$$\alpha_{10} = p, \alpha_{11} = p + \frac{q-p}{n}, \alpha_{12} = p + 2 \frac{q-p}{n}, \dots, \alpha_{1n} = q,$$

dividiamo l'intervallo (p, q) in n intervalli eguali. Si determinino poi, successivamente, i segni delle quantità

$$f(\alpha_{11}), f(\alpha_{12}), \dots, f(\alpha_{1, n-1}),$$

se, supposto $f(p) < 0$ e $f(q) > 0$, riesce

$$f(\alpha_{11}) < 0, f(\alpha_{12}) < 0, \dots, f(\alpha_{1, i_1}) < 0, f(\alpha_{1, i_1+1}) > 0, \quad (i_1 \leq n-1),$$

si porrà

$$p_1 = \alpha_{1, i_1}, \quad q_1 = \alpha_{1, i_1+1}.$$

Per l'intervallo (p_1, q_1) opereremo ora come per l'intervallo (p, q) . Mediante i punti

$$\alpha_{20} = p_1, \alpha_{21} = p_1 + \frac{q_1-p_1}{n}, \alpha_{22} = p_1 + 2 \frac{q_1-p_1}{n}, \dots, \alpha_{2n} = q_1,$$

divideremo cioè l'intervallo (p_1, q_1) in n parti eguali, e determineremo, successivamente, i segni delle quantità

$$f(\alpha_{21}), f(\alpha_{22}), \dots, f(\alpha_{2, n-1}).$$

Se riesce

$$f(\alpha_{21}) < 0, f(\alpha_{22}) < 0, \dots, f(\alpha_{2, i_2}) < 0, f(\alpha_{2, i_2+1}) > 0,$$

si porrà

$$p_2 = \alpha_{2, i_2}, \quad q_2 = \alpha_{2, i_2+1}.$$

Per l'intervallo (p_2, q_2) si opererà come per gli intervalli (p, q) e (p_1, q_1) ; e così via di seguito indefinitamente. Si verranno così a costruire le due successioni contigue (2) e (3), riuscendo completamente al calcolo della radice ξ .

Se p e q sono due numeri interi consecutivi, posto $n = 10$, il valore approssimato p_n delle ξ , che si ottiene col metodo ora dato, ha in comune con ξ , le prime v cifre decimali.

Ma, ripetiamolo, questo metodo rappresenta solo una possibilità teorica e ad esso si farà ricorso solo quando si riscontra l'inapplicabilità dei metodi esposti in I, in II e in IV. Questi ultimi, quando sono applicabili, forniscono, in generale, con grande rapidità il calcolo della radice.

52. Derivate e differenziali per le funzioni complesse di una variabile reale. — Nell'insieme perfetto A dell'asse x siano definite le due funzioni reali.

$$u = g(x), \quad v = h(x),$$

della variabile reale x ; in quell'insieme riesce allora definita (23, 7°) la funzione complessa

$$w = f(x) = g(x) + i h(x),$$

della variabile reale x . Sia x_0 un punto di A , in esso punto, proprio come al n° 38, si definiscono le derivate (su A) minima e massima della funzione complessa $f(x)$. Si pone cioè (n° 11)

$$\text{deriv}' f(x) = \lim'_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}, \quad \text{deriv}'' f(x) = \lim''_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

ove Δx è l'incremento, su A , dato a x_0 . Ne segue (n° 11)

$$\text{deriv}' f(x) = \text{deriv}' g(x) + i \text{deriv}' h(x), \dots$$

Proprio come al n° 41 si definiscono le funzioni complesse a derivata unica e le funzioni complesse derivabili. Si ha evidentemente:

I. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione complessa $f(x) = g(x) + ih(x)$ sia a derivata unica (sia derivabile) è che tali siano entrambe le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$. Se $f(x)$ è derivabile si ha:*

$$Df(x) = Dg(x) + iDh(x), \quad f'(x) = g'(x) + ih'(x).$$

Per ogni funzione complessa derivabile $f(x)$, se ne definisce il differenziale, ponendo:

$$df(x) = f'(x)dx,$$

si ha dunque

$$df(x) = dg(x) + ih(x).$$

Proprio come ai numeri 44 e 45 si possono stabilire i concetti di derivate successive e di differenziali successivi per le funzioni complesse di una variabile reale. Si trova:

$$f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x) + ih^{(n)}(x), \quad d^n f(x) = d^n g(x) + id^n h(x).$$

Si dimostra immediatamente che:

II. Ogni combinazione lineare a coefficienti costanti e il prodotto di due o più funzioni complesse derivabili è una funzione complessa derivabile e per il calcolo della derivata della combinazione lineare e del prodotto sussistono le stesse regole date (al n° 43, I e II) per le funzioni reali. Se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono due funzioni complesse derivabili e se $f_2(x_0) \neq 0$, è altresì derivabile, nel punto x_0 , la funzione complessa quoto della $f_1(x)$ per $f_2(x)$, e per il calcolo della derivata del quoto sussiste la stessa regola data (al n° 43, IV) per le funzioni reali.

In algebra per qualunque valore complesso non nullo di z è stato definito il **logaritmo neperiano principale** di z , indicato con $\log z$. Si pone, per definizione,

$$\log z = \log |z| + i \operatorname{arg} z,$$

ove $\operatorname{arg} z$ denota l'**argomento principale** di z , cioè, per $y > 0$, $\operatorname{arg} z$ rappresenta la misura, *positiva e minore di π* , dell'angolo che il raggio positivo dell'asse x fa col raggio vettore \overline{OP} spiccato dall'origine e terminato nel punto P di affissa z ; se $y < 0$, $\operatorname{arg} z$ rappresenta la misura, *negativa e maggiore di $-\pi$* , dello stesso angolo; se $y = 0$ e $x > 0$ è $\operatorname{arg} z = 0$; se $y = 0$ e $x < 0$ è $\operatorname{arg} z = \pi$. Vogliamo qui dimostrare che:

III. Se $f(x) = g(x) + ih(x)$ è una funzione complessa derivabile della variabile reale x , in ogni punto x per il quale **non** è $h = 0$ e $g \leq 0$, si ha:

$$(1) \quad D \log f(x) = \frac{Df(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Si ha invero,

$$\log f = \frac{1}{2} \log(g^2 + h^2) + i \operatorname{arcc} \begin{cases} \cos \frac{g}{\sqrt{g^2 + h^2}} \\ \operatorname{sen} \frac{h}{\sqrt{g^2 + h^2}} \end{cases}, \quad (-\pi < \operatorname{arcc} \leq \pi),$$

e quindi, se per esempio $h \neq 0$,

$$D \log f = \frac{gg' + hh'}{g^2 + h^2} \pm i \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{g^2 + h^2}}} \frac{g' \sqrt{g^2 + h^2} - g \frac{gg' + hh'}{\sqrt{g^2 + h^2}}}{g^2 + h^2},$$

col segno $+$ o col segno $-$ secondochè h è negativo o positivo. Riducendo ne segue la (1).

In algebra per qualunque valore complesso di z è stata definita la potenza di e avente per esponente z . Se $z = x + iy$, si pone, per definizione,

$$e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Si verifica immediatamente che :

IV. Se $f(x)$ è una funzione complessa derivabile della variabile reale x , si ha :

$$D e^{f(x)} = e^{f(x)} D f(x) = e^{f(x)} f'(x).$$

Ed invero, se $f = g + ih$, poichè

$$e^f = e^g (\cosh + i \operatorname{sen} h),$$

risulta :

$$\begin{aligned} D e^f &= e^g (\cosh + i \operatorname{sen} h) g' + e^g (-\operatorname{sen} h + i \cosh) h' = \\ &= e^g (\cosh + i \operatorname{sen} h) (g' + ih') = e^f f'. \end{aligned}$$

Se $a + ib$ è una costante complessa non nulla la **potenza principale** di esponente z e di base $a + ib$, indicata con la notazione $(a + ib)^z$ è definita (*Algebra*, n° 264) dall'eguaglianza :

$$(a + ib)^z = e^{z \log(a + ib)}.$$

Ne segue:

V. Se $a + ib$ è una costante complessa non nulla e $f(x)$ è una funzione complessa derivabile della variabile reale x , si ha :

$$D(a + ib)^{f(x)} = (a + ib)^{f(x)} f'(x) \log(a + ib).$$

VI. Se $a + ib$ è una qualsiasi costante complessa e $f(x)$ è una

funzione complessa derivabile della variabile reale x , per ogni punto x nel quale $f(x) \neq 0$, si ha :

$$Df(x)^{a+ib} = (a + ib)f(x)^{a-1+ib} f'(x).$$

Per qualunque valore complesso di z si definiscono il seno e il coseno di z ponendo

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \operatorname{cos} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

e, per $z \neq (2n + 1)\pi/2$, si definisce la tangente di z ponendo

$$\operatorname{tang} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z} = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

Si verifica immediatamente che :

VII. Se $f(x)$ è una funzione complessa derivabile della variabile reale x , si ha :

$D \operatorname{sen} f(x) = \operatorname{cos} f(x) \cdot Df(x)$, $D \operatorname{cos} f(x) = -\operatorname{sen} f(x) \cdot Df(x)$,
e, per ogni punto x nel quale è $f(x) \neq (2n + 1)\pi/2$,

$$D \operatorname{tang} f(x) = \frac{Df(x)}{\operatorname{cos}^2 f(x)}.$$

Poniamo

$$z = \operatorname{sen} w, \quad e^{iw} = \alpha,$$

della formola che definisce $\operatorname{sen} w$ si trae, per α , l'equazione

$$\alpha^2 - 2iz \cdot \alpha - 1 = 0;$$

delle due radici di questa equazione indichiamo con

$$iz + \sqrt{1 - z^2},$$

quella che si riduce a uno per $z = 0$. Ponendo, come definizione dell'arcoseno di z ,

$$(2) \quad \operatorname{arc} \operatorname{sen} z = \frac{1}{i} \log (iz + \sqrt{1 - z^2}),$$

si trova

$$\operatorname{sen} \operatorname{arc} \operatorname{sen} z = z,$$

$\operatorname{arc} \operatorname{sen} z$ è dunque la funzione inversa di $\operatorname{sen} z$ e riesce definita per qualunque valore complesso di z . Si pone poi

$$(3) \quad \operatorname{arc} \operatorname{cos} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{sen} z = \frac{1}{i} \log (z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

ove con $\sqrt{z^2 - 1}$ abbiamo denotato quella determinazione della radice quadrata di $z^2 - 1$, che si riduce a i per $z = 0$.

Se poniamo ora

$$z = \operatorname{tang} w = \frac{1}{i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}, \quad \alpha = e^{2iw},$$

si trova per α l'equazione

$$iz = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1},$$

la quale, per $z \neq \pm i$, è verificata dal seguente unico valore non nullo di α :

$$\alpha = \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Ponendo, come definizione di *arcotangente* di z , per ogni valore complesso di z diverso da $-i$ e da $+i$,

$$(4) \quad \operatorname{arctang} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

si trova

$$\operatorname{tang} \operatorname{arctang} z = z.$$

La funzione $\operatorname{arctang} z$ è dunque la funzione inversa di $\operatorname{tang} z$.

Dalle (2), (3) e (4), in forza dei teoremi II, III, VI, si deduce:

VIII. Se $f(x)$ è una funzione complessa derivabile della variabile reale x , per ogni valore di x nel quale è $f(x) \neq \pm 1$, si trova

$$D \operatorname{arc} \operatorname{sen} x = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}, \quad D \operatorname{arc} \operatorname{cos} x = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}},$$

e per ogni valore di x nel quale è $f(x) \neq \pm i$,

$$D \operatorname{arc} \operatorname{tang} f(x) = \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}.$$

Lasciamo al lettore il facile compito di verificare che: *Per le funzioni circolari della variabile complessa z , testè definite, $\operatorname{sen} z$, $\operatorname{cos} z$, $\operatorname{tang} z$, valgono le stesse regole di calcolo che sussistono per quelle funzioni nel caso che si considerino, esclusivamente, valori reali di z : per tali valori quelle funzioni si riducono alle ben note funzioni circolari della trigonometria elementare.*

Funzioni iperboliche e loro inverse. Giova talvolta, in pratica, introdurre le funzioni

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}},$$

che, rispettivamente, si chiamano il *seno iperbolico*, il *coseno iperbolico* e la *tangente iperbolica* di z e si designano con le notazioni:

$$\operatorname{senhz}, \operatorname{coshz}, \operatorname{tanghz}.$$

Evidentemente: $\operatorname{tanghz} = \operatorname{senhz} : \operatorname{coshz}$. La reciproca di tanghz si chiama la *cotangente iperbolica* di z e si designa con la notazione coshz . Si ha:

$$(5) \quad \operatorname{senhz} = \frac{\operatorname{sen} iz}{i}, \quad \operatorname{coshz} = \operatorname{cos} iz, \quad \operatorname{tanghz} = \frac{\operatorname{tang} iz}{i}.$$

Si sono così espresse le funzioni iperboliche per mezzo delle funzioni circolari. Le funzioni senhz e coshz riescono definite per ogni valore complesso di z , laddove la funzione tanghz è definita per ogni valore complesso di z che non sia della forma $i(2n+1)\pi/2$. Le funzioni iperboliche assumono valori reali per valori reali di z .

Poichè $\operatorname{cos}^2 iz + \operatorname{sen}^2 iz = 1$, se ne deduce:

$$(6) \quad \operatorname{cosh}^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1.$$

Così pure, in forza delle (5), dalla relazione

$$\operatorname{sen} i(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} iz_1 \operatorname{cos} iz_2 + \operatorname{cos} iz_1 \operatorname{sen} iz_2,$$

si deduce

$$\operatorname{senh} (z_1 + z_2) = \operatorname{senhz}_1 \operatorname{coshz}_2 + \operatorname{coshz}_1 \operatorname{senhz}_2,$$

allo stesso modo si ottiene:

$$\operatorname{cosh} (z_1 + z_2) = \operatorname{coshz}_1 \operatorname{coshz}_2 + \operatorname{senhz}_1 \operatorname{senhz}_2.$$

Si notino le relazioni:

$$\operatorname{senh} (-z) = -\operatorname{senhz}, \quad \operatorname{cosh} (-z) = \operatorname{coshz},$$

$$\operatorname{senh} 2z = 2\operatorname{senhz} \operatorname{coshz}.$$

$$\operatorname{cosh} 2z = \operatorname{cosh}^2 z + \operatorname{senh}^2 z,$$

$$\operatorname{cosh}^2 z = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{cosh} 2z), \quad \operatorname{senh}^2 z = \frac{1}{2} (\operatorname{cosh} 2z - 1).$$

Le funzioni inverse di senhz , coshz , tanghz , si chiamano, rispettivamente, *settore seno iperbolico* di z , *settore coseno iperbolico* di z , *settore tangente iperbolica* di z , e si designano al modo seguente:

$$\operatorname{sett} \operatorname{senhz}, \quad \operatorname{sett} \operatorname{coshz}, \quad \operatorname{sett} \operatorname{tanghz}.$$

Con lo stesso procedimento seguito per ottenere le funzioni inverse dalle funzioni circolari, si trova, per ogni valore di z ,

$$\operatorname{sett} \operatorname{senhz} = \log (z + \sqrt{1+z^2}),$$

$$\operatorname{sett} \operatorname{coshz} = \log (z + \sqrt{z^2-1}),$$

ove, con $\sqrt{1+z^2}$ e $\sqrt{z^2-1}$ abbiamo indicato quella determinazione della radice che si riduce ad un numero positivo per ogni valore reale di z che dia al radicando un valore positivo. E così si trova, per $z \neq \pm 1$,

$$\text{sett tangh}z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}.$$

Si verifica subito che:

IX. Se $f(x)$ è una funzione complessa derivabile della variabile reale x si ha

$$(7) \quad \text{Dsenh}f(x) = \text{cosh}f(x) \cdot \text{D}f(x), \quad \text{Dcosh}f(x) = \text{senh}f(x) \cdot \text{D}f(x),$$

$$\text{Dsett senh}f(x) = \frac{\text{D}f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}, \quad \text{Dsett cosh}f(x) = \frac{\text{D}f(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}},$$

per ogni punto x nel quale è $f(x) \neq i(2n+1)\pi/2$,

$$(8) \quad \text{D tangh}f(x) = \frac{\text{D}f(x)}{\text{cosh}^2f(x)},$$

e per ogni punto x nel quale è $f(x) \neq \pm 1$,

$$\text{D sett tangh}f(x) = \frac{\text{D}f(x)}{1-f^2(x)}.$$

Studio delle funzioni iperboliche per valori reali dell'argomento. Diamo ora alla variabile z esclusivamente valori reali x , e poniamo:

$$(9) \quad \begin{cases} \xi = \text{cosh}x, \\ \eta = \text{senh}x. \end{cases}$$

Dalla (6) si trae, per qualunque valore di x ,

$$\xi^2 - \eta^2 = 1;$$

variando dunque x da $-\infty$ a $+\infty$, il punto (ξ, η) descrive, nel piano (ξ, η) , un ramo di iperbole equilatera di semiassi *uno*, disposti secondo gli assi coordinati. In ciò la ragione del nome di funzioni iperboliche dato alle funzioni che stiamo studiando.

Si ha

$$\text{senh}x \begin{cases} > 0 \text{ per } x > 0, \\ = 0 \text{ per } x = 0, \\ < 0 \text{ per } x < 0, \end{cases} \quad \text{cosh}x \begin{cases} > 1, \text{ per } x \neq 0, \\ = 1, \text{ per } x = 0, \end{cases}$$

$$|\text{senh}x| < \text{cosh}x,$$

$$|\text{tangh}x| < 1.$$

Dalle (7) e (8), quando in luogo di $f(x)$ si ponga x , si deduce che $\operatorname{senh}x$ e $\operatorname{tanh}x$ sono funzioni sempre crescenti della x , laddove $\operatorname{cosh}x$ è sempre decrescente a sinistra di zero e crescente a destra. Mentre x varia da $-\infty$ a $+\infty$, $\operatorname{cosh}x$ varia da 1 a $+\infty$, $\operatorname{senh}x$ da $-\infty$ a $+\infty$, $\operatorname{tanh}x$ da -1 a $+1$.

La ragione della denominazione di *settore* data alle funzioni inverse delle funzioni iperboliche sta in ciò: Se si calcola (cfr. il capitolo iniziale della seconda parte del corso) l'area del settore limitato: *a*) dal ramo di iperbole equilatera di equazioni (9), *b*) dalla retta uscente dal centro di questa e passante per il punto, di detto ramo, corrispondente ad un dato valore $x' > 0$ della variabile x , *c*) dalla retta simmetrica della precedente rispetto all'asse trasverso dell'iperbola; si trova, come valore dell'area, per l'appunto x' .

Ricerca della funzione primitiva. Sia $f(x)$ una funzione complessa della variabile reale x definita nell'intervallo (a', a'') dell'asse delle x ; come per le funzioni reali, chiamasi *funzione primitiva* della $f(x)$ ogni funzione complessa $F(x)$ della variabile reale x , del pari definita in (a', a'') , che ha ivi per derivata la $f(x)$.

Sia $F(x) = G(x) + iH(x)$ una funzione primitiva di

$$f(x) = g(x) + ih(x),$$

si avrà

$$G'(x) = g(x), \quad H'(x) = h(x),$$

e quindi, se $F_0(x) = G_0(x) + iH_0(x)$ è una particolare, arbitrariamente fissata, funzione primitiva di $f(x)$, si avrà, in (a', a'') ,

$$G(x) = G_0(x) + a, \quad H(x) = H_0(x) + b,$$

ove a e b sono costanti, e pertanto

$$F(x) = F_0(x) + a + ib;$$

possiamo dunque asserire che:-

X. Se $F_0(x)$ è una particolare, arbitrariamente fissata, funzione complessa primitiva di $f(x)$, tutte le funzioni primitive di $f(x)$ si ottengono ponendo $F(x) = F_0(x) + c$, ove c è una costante complessa arbitraria.

§ 2. Derivate e differenziali per le funzioni di due o più variabili reali.

53. Derivate per le funzioni di due variabili. — In questo paragrafo, come sempre quando sottoporremo le funzioni di due o più variabili alle operazioni di derivazione delle quali ora parleremo, supporremo l'insieme A di punti di $S(r)$, ove è definita la funzione, dotato di punti interni. Però conviene considerare, insieme ai punti interni ad A , insieme cioè ai punti di $A - FA$, i quali sono i punti di A interni ai domini rettangolari contenuti in A , anche i punti di A che sono, semplicemente, *contenuti* in questi domini. La totalità di questi punti, costituirà un insieme che sarà da noi sempre indicato con la notazione RA . Si ha, evidentemente,

$$A - FA < RA, \quad R(RA) \equiv RA, \quad RA < DA.$$

Se, ad esempio, A è un dominio rettangolare si ha $RA \equiv A$; se A è il semicerchio del piano (x, y) definito dalle limitazioni

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0,$$

i punti di RA sono tutti quelli del semicerchio, eccettuati i punti $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

Sia ora A un insieme di punti del piano (x, y) ed in A sia definita una funzione reale $f(x, y)$ delle due variabili reali x e y . Fissiamo arbitrariamente il punto $P(x, y)$ di RA e conveniamo di indicare con h e k due arbitrarii incrementi, su A , fatti subire alle coordinate x e y di P , per i quali si verifichino sempre le condizioni: *a*) sia $hk \neq 0$; *b*) i punti $P(x, y)$ e $Q(x + h, y + k)$ appartengano ad un dominio rettangolare contenuto in A . Porremo poi $\sigma = |h| + |k|$. Se, in particolare, il punto $P(x, y)$ è interno ad A , detta $d(P)$ la semidimensione di un dominio quadrato di centro in P , contenuto in A , ogni coppia di quantità h e k entrambe non nulle e verificanti la limitazione

$$\sigma = |h| + |k| \leq d(P),$$

è una coppia di incrementi, su A , delle coordinate x e y di P , soddisfacenti alle condizioni *a*) e *b*). Ciò posto si considerino i rapporti

$$\varphi(x, y; h, k) = \frac{1}{hk} [f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)]$$

$$\varphi_1(x, y; h) = \frac{1}{h} [f(x + h, y) - f(x, y)], \quad \varphi_2(x, y; k) = \frac{1}{k} [f(x, y + k) - f(x, y)].$$

Il rapporto $\varphi(x, y; h, k)$ sarà da noi chiamato il **rapporto incrementale totale** della funzione $f(x, y)$ per il punto (x, y) . Il rapporto $\varphi_1(x, y; h)$ [il rapporto $\varphi_2(x, y; k)$] sarà chiamato il **rapporto incrementale parziale** rispetto alla x (rispetto alla y) della funzione $f(x, y)$ per il punto $P(x, y)$. Orbene, si pone la seguente

Definizione delle derivate. Il massimo e il minimo limite per σ infinitesimo dei rapporti incrementali φ, φ_1 (del rapporto φ_2) chiamansi, rispettivamente, la **massima** e la **minima derivata totale** della funzione $f(x, y)$ nel punto P , la **massima** e la **minima derivata parziale** rispetto alla x (rispetto alla y) della funzione $f(x, y)$ nel punto P .

Diremo che in un punto di RA la funzione $f(x, y)$ **possiede la derivata totale o parziale** rispetto alla x (rispetto alla y) se in quel punto coincidono le sue due derivate totali o le sue due derivate parziali rispetto alla x (rispetto alla y). Diremo che in un punto (di RA) la funzione $f(x, y)$ è **totalmente derivabile o parzialmente derivabile** rispetto alla x (rispetto alla y) se in quel punto ha la derivata totale o parziale rispetto alla x (rispetto alla y) e tale derivata è finita.

La funzione f sia totalmente derivabile in ogni punto di RA . La derivata totale di f è allora una nuova funzione, delle due variabili x e y , definita in tutto RA . Essa sarà designata con una delle notazioni seguenti

$$Df(x, y), f'(x, y).$$

La funzione f sia in ogni punto di RA parzialmente derivabile rispetto alla x (rispetto alla y). La derivata parziale di f rispetto alla x (alla y) è allora una nuova funzione, delle due variabili x e y , definita in tutto RA . Essa sarà designata con una delle notazioni seguenti

$$D_x f(x, y), f_x(x, y) [D_y f(x, y), f_y(x, y)].$$

Siano A un dominio rettangolare del piano, di punti estremi (a', b') e (a'', b'') , $X(x)$ la più arbitraria funzione della variabile x definita in (a', a'') e $Y(y)$ la più arbitraria funzione della variabile y definita in (b', b'') . Posto:

$$f(x, y) = X(x) + Y(y),$$

si viene a definire in A una funzione, delle due variabili x e y , che ha ivi, in ogni punto, derivata totale nulla. La funzione può però non essere parzialmente derivabile nè rispetto alla x , nè rispetto alla y .

Derivate totali e parziali successive. La funzione f sia totalmente o parzialmente derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}A$. Può darsi che le funzioni f' , f_x , f_y siano, alla loro volta, totalmente o parzialmente derivabili. In tal caso, la derivata totale di f' sarà designata con una delle notazioni

$$D^2 f(x, y), f''(x, y),$$

e chiamata la *derivata totale seconda o del secondo ordine della f* , dicendo, naturalmente, *derivata totale prima o del primo ordine* la f' . Le derivate parziali di f_x si designeranno con le notazioni

$$f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y); D_{xx}f(x, y), D_{xy}f(x, y),$$

e quelle di f_y con le notazioni

$$f_{yx}(x, y), f_{yy}(x, y); D_{yx}f(x, y), D_{yy}f(x, y). (*)$$

Le quattro funzioni f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} , f_{yy} , definite in $\mathbb{R}A$, si diranno le *derivate parziali seconde o del secondo ordine* della funzione f , dicendo, naturalmente, *derivate parziali prime o del primo ordine* le f_x e f_y . La f_{xx} è la derivata parziale del secondo ordine, ottenuta derivando, parzialmente, due volte rispetto alla x , per ricordare ciò essa si suole anche designare con la notazione f_{x^2} , così la derivata seconda f_{yy} si designa anche con la notazione f_{y^2} . Le derivate parziali seconde f_{xy} e f_{yx} diconsi anche le derivate parziali seconde *miste*, la prima nell'ordine x, y e la seconda nell'ordine y, x .

In modo analogo, ripetendo il procedimento di derivazione totale o parziale per ogni punto di $\mathbb{R}A$ e supponendo che tale procedimento abbia sempre un unico risultato finito, si definiscono le derivate totali terze o del terzo ordine, quarte o del quarto ordine, ecc., le derivate parziali terze o del terzo ordine, quarte o del quarto ordine, ecc. La derivata totale n^{ma} o di n^{mo} ordine verrà designata con una delle notazioni $f^{(n)}(x, y)$, $D^n f(x, y)$. Siano a, b, \dots, c, d, \dots numeri interi, positivi o nulli, e sia $a + b + \dots + c + d + \dots = n$, la derivata parziale della f d'ordine n , ottenuta derivando parzialmente a volte rispetto alla x , poi c volte rispetto alla y , poi b volte, di nuovo, rispetto alla x , indi d volte, di nuovo rispetto alla y , ecc., dovrà denotarsi col simbolo

$$f_{x^a y^c x^b y^d} \dots$$

(*) Per le applicazioni che abbiamo in vista non ci interessa prendere in considerazione le derivate parziali della f' o le derivate totali della f_x e della f_y .

Locuzione abbreviata. In *Analisi* si suol dire brevemente, che una funzione f definita in un insieme A , possiede ivi una certa derivata totale o parziale finita e continua, quando avviene, soltanto, che: **a)** essa possiede, determinata e finita, quella derivata in ogni punto *interno* di A ; **b)** esiste una funzione definita in tutto A e ivi continua che in ogni punto *interno* di A coincide con la derivata in discorso della f . Per la menzionata funzione si suole anche adottare la stessa notazione che designa la derivata della quale si tratta.

Relazioni fra le derivate totali e le derivate parziali. Fra le derivate totali e le derivate parziali sussistono alcune relazioni che consentono, nei casi ordinarii, di esprimere quelle mediante queste. In ipotesi largamente verificantesi in quei casi, si trova appunto: $f^{(n)}(x, y) = f_{x^n y^n}(x, y)$ ($n = 1, 2, \dots$). Cominciamo dal dimostrare il teorema:

I. Se in ogni punto di RA la funzione f è parzialmente derivabile rispetto alla x (alla y), ed è anche nel punto $P(x, y)$ totalmente derivabile, essa è in P dotata di derivata parziale seconda mista nell'ordine x, y (nell'ordine y, x) e questa coincide con la derivata totale.

Nell'ipotesi ammessa della derivabilità parziale, in RA , della f rispetto alla x , si ha:

$$\begin{aligned} & k \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x, y; h, k) = \\ = & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\ & = f_x(x, y+k) - f_x(x, y), \end{aligned}$$

cioè:

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x, y; h, k) = \frac{f_x(x, y+k) - f_x(x, y)}{k}.$$

D'altra parte, per l'esistenza in P della derivata totale f' , comunque si assegni un numero positivo ε , è possibile trovarne un altro σ_ε tale che la limitazione

$$|h| + |k| = \sigma < \sigma_\varepsilon,$$

abbia di conseguenza l'altra

$$|\varphi(x, y; h, k) - f'(x, y)| \leq \varepsilon;$$

ne segue, in virtù della (1), passando al limite per h infinitesimo, che la limitazione $|k| < \sigma_2$ ha di conseguenza l'altra

$$\left| \frac{f_x(x, y+k) - f_x(x, y)}{k} - f'(x, y) \right| \leq \varepsilon,$$

e quindi che:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(x, y+k) - f_x(x, y)}{k} = f'(x, y).$$

Esiste pertanto la derivata parziale seconda mista f_{xy} , e si ha $f_{xy} = f'$.

Per le funzioni di due variabili sussistono teoremi perfettamente analoghi ai teoremi di **Lagrange**, di **Rolle**, di **Cauchy**, dati nel paragrafo precedente per le funzioni di una variabile. Per enunciare i teoremi indicati conviene introdurre ancora una notazione. Dati due punti $P'(x', y')$ e $P''(x'', y'')$ del piano, per i quali è $(x'' - x')(y'' - y') \neq 0$, converremo di indicare con $\mathbf{R}(P', P'')$, il dominio rettangolare contenente i due punti e avente per diametro la lunghezza del segmento $P'P''$. Se $(x'' - x')(y'' - y') > 0$, tale dominio è il dominio rettangolare avente i punti (x', y') e (x'', y'') per punti estremi, è invece il dominio rettangolare di punti estremi (x', y') e (x'', y') nell'altro caso. Ciò posto, andiamo a dare il **teorema di Lagrange (prima forma)** per le funzioni di due variabili:

II. In ogni punto di \mathbf{RA} la funzione $f(x, y)$ sia parzialmente derivabile rispetto alla x (alla y). La derivata f_x (la derivata f_y) sia parzialmente derivabile rispetto alla y (alla x). Presi due qualsivogliano punti $P'(x', y')$ e $P''(x'', y'')$ di \mathbf{A} , se $(x'' - x')(y'' - y') \neq 0$ e se il dominio rettangolare $\mathbf{R}(P', P'')$ è contenuto in \mathbf{A} , il rapporto

$$\frac{f(x'', y'') - f(x', y') - f(x', y'') + f(x'', y')}{(x'' - x')(y'' - y')}$$

rappresenta il valore che la derivata parziale seconda mista della f , nell'ordine x, y (nell'ordine y, x) assume in un certo punto interno a $\mathbf{R}(P', P'')$.

Posto $h = x'' - x'$, $k = y'' - y'$, si ha invero, successivamente,

$$\begin{aligned} & [f(x'', y'') - f(x', y')] - [f(x', y'') - f(x', y')] = \\ & = [f_x(x' + \theta_1 h, y'') - f_x(x' + \theta_1 h, y')] h = \\ & = f_{xy}(x' + \theta_1 h, y' + \theta_2 k) h k, \end{aligned}$$

ove $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$.

In forza del teor. I, si ha dunque in particolare:

II'. *Nell' ipotesi della derivabilità parziale, in ogni punto di RA , rispetto alla x e della totale derivabilità della f , si ha:*

$$\varphi(x, y; h, k) = f'(x + \theta_1 h, y + \theta_2 k), \\ 0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Dal teorema II segue il **teorema di Rolle (prima forma)** per le funzioni di due variabili:

III. *Nelle ipotesi del teorema II, se inoltre*

$$f(x'', y'') - f(x'', y') - f(x', y'') + f(x', y') = 0,$$

esiste un certo punto interno a $R(P', P'')$ in cui si annulla la derivata f_{xy} (la derivata f_{yx}).

Da quest'ultimo teorema si deduce poi subito il **teorema di Cauchy (prima forma)** per le funzioni di due variabili:

IV. *Se anche la funzione $g(x, y)$ verifica le ipotesi poste per la $f(x, y)$ nel teorema II, esiste un punto H interno a $R(P', P'')$ per il quale è*

$$[f(x'', y'') - f(x'', y') - f(x', y'') + f(x', y')] g_{xy}(H) = \\ = [g(x'', y'') - g(x'', y') - g(x', y'') + g(x', y')] f_{xy}(H).$$

Indicando, invero, con M il primo fattore nel primo membro dell'eguaglianza da dimostrare e con N il primo fattore nel secondo membro, si ponga, in $R(P', P'')$,

$$F(x, y) = \\ = M[g(x, y) - g(x, y') - g(x', y) + g(x', y')] - \\ - N[f(x, y) - f(x, y') - f(x', y) + f(x', y')],$$

si ha:

$$F(x'', y'') - F(x'', y') - F(x', y'') + F(x', y') = 0, \\ F_x(x, y) = M[g_x(x, y) - g_x(x, y')] - N[f_x(x, y) - f_x(x, y')], \\ F_{xy}(x, y) = M g_{xy}(x, y) - N f_{xy}(x, y).$$

Il teorema di **Lagrange** ha poi per corollario immediato il seguente:

V. *Se, in ogni punto di RA , la funzione f possiede le derivate f_x, f_{xy} (le derivate f_y, f_{yx}) finite, e la f_{xy} (la f_{yx}) è continua, la f è totalmente derivabile in RA , e ivi è $f' = f_{xy}$ ($f' = f_{yx}$).*

Se ne deduce il **teorema dell'invertibilità dell'ordine di derivazione**:

VI. *Se, in ogni punto di \mathbf{RA} , la funzione f possiede le derivate f_x, f_y, f_{xy} , finite, l'ultima essendo continua, la funzione ha anche la derivata f_{yx} , ed è $f_{yx} = f_{xy}$.*

Ed invero, nelle ipotesi ammesse, la funzione è (teor. V) totalmente derivabile in ogni punto di \mathbf{RA} , ed è $f' = f_{xy}$. Ma se f ha la derivata f_y finita, ed è totalmente derivabile, essa possiede (teor. I) la derivata f_{yx} , ed è $f_{yx} = f' = f_{xy}$.

Proponiamo allo studioso di dedurre che:

VII. *Se a, b, \dots e c, d, \dots sono numeri interi, positivi o nulli, posto $a + b + \dots = p, c + d + \dots = q, p + q = n$, se nelle successive operazioni di derivazione parziale della funzione f , rispetto alle variabili x e y , si ottengano sempre derivate — fino a quelle d'ordine n incluse — finite e continue in ogni punto di \mathbf{RA} , si ha ivi*

$$f_{x^a y^c x^b y^d \dots} = f_{x^p y^q} = f_{y^q x^p},$$

e, se n è pari $= 2m$,

$$f_{x^m y^m} = f^{(m)}.$$

54. Derivate per le funzioni di più variabili. — Nell'insieme \mathbf{A} di punti dello spazio $\mathcal{S}_{(r)}$ a r dimensioni sia definita la funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ delle r variabili x_1, x_2, \dots, x_r . Fissato, arbitrariamente, il punto $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$ di \mathbf{RA} , converremo di indicare con h_1, h_2, \dots, h_r , r arbitrari incrementi, su \mathbf{A} , fatti subire alle coordinate di P , per i quali si verificchino sempre le condizioni: **a)** sia $h_1 h_2 \dots h_r \neq 0$; **b)** i punti $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$ e $Q(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_r + h_r)$ appartengano ad un dominio rettangolare contenuto in \mathbf{A} . Porremo poi $\sigma = \sum_i |h_i|$.

Se $F(x_1, x_2, \dots, x_r)$ è una certa funzione delle r variabili x_1, x_2, \dots, x_r , col simbolo

$$\Delta_{h_i} F$$

converremo di indicare la seguente differenza

$$F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_r) - F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_r).$$

Gli indici p, q, \dots, s siano fra gli indici $1, 2, \dots, r$. In virtù della

convenzione fatta sugli incrementi h_1, h_2, \dots, h_r , fissato il punto $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$ di $\mathbb{R}A$, hanno sempre un ben preciso valore i simboli

$$\Delta_{h_i} f, \quad \Delta_{h_s} \dots \Delta_{h_q} \Delta_{h_p} f, \quad \Delta_{h_r} \dots \Delta_{h_2} \Delta_{h_1} f.$$

Ciò posto, i rapporti

$$(1) \quad \frac{\Delta_{h_i} f}{h_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

$$(2) \quad \frac{\Delta_{h_s} \dots \Delta_{h_q} \Delta_{h_p} f}{h_p h_q \dots h_s}, \quad (p, q, \dots, s = 1, 2, \dots, r)$$

$$(3) \quad \frac{\Delta_{h_r} \dots \Delta_{h_2} \Delta_{h_1} f}{h_1 h_2 \dots h_r},$$

chiamansi, rispettivamente, il *rapporto incrementale parziale rispetto alla x_i* , il *rapporto incrementale totale rispetto al gruppo di variabili (x_p, x_q, \dots, x_s)* , il *rapporto incrementale totale* della funzione f per il punto P .

I limiti, per $\sigma = \sum_i |h_i|$ infinitesimo, dei rapporti (1), (2) e (3) dànno, rispettivamente, le *due* derivate parziali rispetto alla x_i , le *due* derivate totali rispetto al gruppo di variabili (x_p, x_q, \dots, x_s) , le *due* derivate totali della funzione f nel punto P .

Proprio come al n° precedente, si daranno le definizioni delle funzioni che possiedono in P la derivata parziale rispetto alla x_i o la derivata totale rispetto al gruppo (x_p, x_q, \dots, x_s) , oppure che possiedono la derivata totale in P ; delle funzioni totalmente o parzialmente derivabili in P . Se f è una funzione fra queste ultime con i simboli

$$f_{x_i}, f_i, D_{x_i} f; f'_{(x_p x_q \dots x_s)}, D_{(x_p x_q \dots x_s)} f; f', Df,$$

si designano rispettivamente, la derivata parziale rispetto alla x_i , la derivata totale rispetto al gruppo (x_p, x_q, \dots, x_s) , la derivata totale.

Sia, in particolare, A un dominio rettangolare di $\mathcal{S}(r)$, di punti estremi $(a'_1, a'_2, \dots, a'_r)$ e $(a''_1, a''_2, \dots, a''_r)$. Sia X_i la più arbitraria funzione, delle $r-1$ variabili $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r$, definita nel dominio rettangolare di punti estremi

$$(a'_1, \dots, a'_{i-1}, a'_{i+1}, \dots, a'_r) \text{ e } (a''_1, \dots, a''_{i-1}, a''_{i+1}, \dots, a''_r).$$

Posto

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{i=1}^r X_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r)$$

si viene a definire nel dominio rettangolare A una funzione delle r variabili x_1, x_2, \dots, x_r , la quale ha, in ogni punto, la derivata totale nulla.

Ritornando alle nostre considerazioni generali, come al n° precedente, si definiscono in RA le derivate successive della f . Si ha che:

I. Se nelle successive operazioni di derivazione parziale della funzione f , rispetto alle variabili x_1, x_2, \dots, x_r , si ottengono sempre determinate derivate parziali — fino a quelle d'ordine n incluse — finite e continue in ciascun punto di RA , la derivata parziale ottenuta derivando, in tutto e promiscuamente, a volte rispetto alla x_1 , b volte rispetto alla x_2, \dots , c volte rispetto alla x_r , si può denotare col simbolo

$$f_{x_1^a x_2^b \dots x_r^c} (P) \quad (a + b + \dots + c = n).$$

Se n è multiplo di r , ed è $n = mr$, si ha:

$$f^{(m)} = f_{x_1^m x_2^m \dots x_r^m}.$$

Le derivate parziali d'ordine n , nelle ipotesi ora dette, sono tante quante sono le combinazioni con ripetizione di r oggetti ad n ad n , sono cioè

$$\binom{r + n - 1}{n} = \frac{r(r + 1) \dots (r + n - 1)}{n!}.$$

Si ha pure il **Teorema di Cauchy (prima forma)**:

II. Se le funzioni f e g , in ogni punto di RA , possiedono finite le derivate parziali $f_{x_1}, g_{x_1}; f_{x_1 x_2}, g_{x_1 x_2}; \dots; f_{x_1 x_2 \dots x_r}, g_{x_1 x_2 \dots x_r}$, esiste sempre un punto H interno al dominio rettangolare $R(P, Q)$, per il quale si ha:

$$\left| \begin{array}{cc} f_{x_1 x_2 \dots x_r} (H) & g_{x_1 x_2 \dots x_r} (H) \\ \Delta_{h_r} \dots \Delta_{h_2} \Delta_{h_1} f & \Delta_{h_r} \dots \Delta_{h_2} \Delta_{h_1} g \end{array} \right| = 0.$$

La **locuzione abbreviata** della quale abbiamo discorso al n° 53 si adotta, naturalmente, anche per le derivate delle funzioni di più variabili.

Notazioni di uso frequente per le derivate parziali.

Nella teoria e nella pratica è generalmente ed assai frequentemente usata la notazione

$$(5) \quad \frac{\partial^{a+b+\dots+c} f}{\partial x_1^a \partial x_2^b \dots \partial x_r^c} \quad (a+b+\dots+c=n),$$

per indicare la derivata parziale d'ordine n , ottenuta derivando a volte rispetto alla x_1 , b volte rispetto alla x_2 , ..., c volte rispetto alla x_r , già indicata col simbolo $f_{x_1^a x_2^b \dots x_r^c}$. La notazione (5), per quanto di forma frazionaria, non rappresenta affatto, si badi bene, un quoziente.

Distribuitività della derivazione. Osserviamo infine che se $\mathfrak{D}f$ indica il risultato di una qualsiasi operazione di derivazione, di qualsiasi ordine, totale o parziale, fatta sulla funzione f , se c_1, c_2, \dots, c_n sono n costanti arbitrarie e se f_1, f_2, \dots, f_n sono funzioni definite in A , dall'ipotesi che in un punto P di RA il risultato $\mathfrak{D}f_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) è ben determinato e finito, ne segue che in P è pure tale il risultato $\mathfrak{D}\sum_i c_i f_i$, e si ha

$$\mathfrak{D}\sum_i c_i f_i = \sum_i c_i \mathfrak{D}f_i.$$

55. Teoremi di l'Hospital (prima forma) per le funzioni di più variabili. — Sia P_0 un punto limite dell'insieme A di punti dello spazio $S_{(r)}$, a r dimensioni ove sono definite le due funzioni $f(P)$ e $g(P)$; supposto che le due funzioni siano entrambe infinitesime od entrambe infinitamente grandi in P_0 , come immediata applicazione del teorema di *Cauchy* (prima forma) dato nei n° precedenti, vogliamo ora enunciare (soltanto) due teoremi per la ricerca del limite

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P)}{g(P)},$$

i quali sono, anche per le loro dimostrazioni, perfettamente analoghi a quelli di *l'Hospital* dati al n. 48 del § precedente. Ecco i teoremi:

I. Siano A un dominio rettangolare e $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0)$ un punto di A . Diciamo A_0 l'insieme dei punti di A per i quali è $(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) \dots (x_r - x_r^0) \neq 0$. Le due funzioni f e g siano continue in A e, in ogni punto di A_0 , siano finite le derivate parziali $f_{x_1}, g_{x_1}; f_{x_1 x_2}, g_{x_1 x_2}; \dots; f_{x_1 x_2 \dots x_r}, g_{x_1 x_2 \dots x_r}$. Sia inoltre, identicamente,

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \dots, x_r) = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \dots, x_r) = 0,$$

($i=1, 2, \dots, r$),

ed in A_0 ,

$$g_{x_1 x_2 \dots x_r}(P) \neq 0.$$

Si ha allora che se esiste il limite (finito o infinito)

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f_{x_1 x_2 \dots x_r}(P)}{g_{x_1 x_2 \dots x_r}(P)} \text{ (su } A_0),$$

esiste anche il limite

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P)}{g(P)} \text{ (su } A_0),$$

ed è eguale al precedente.

II. Siano A un dominio rettangolare e $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0)$ un punto di A . Diciamo A_0 l'insieme dei punti di A per i quali è $(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) \dots (x_r - x_r^0) \neq 0$. Le due funzioni f e g siano definite in $A - P_0$ e siano continue in ogni punto di $A - P_0$. Le derivate parziali $f_{x_1}, g_{x_1}; f_{x_1 x_2}, g_{x_1 x_2}; \dots; f_{x_1 x_2 \dots x_r}, g_{x_1 x_2 \dots x_r}$, siano finite in ogni punto di A_0 . Sia inoltre:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} |f(P)| = \lim_{P \rightarrow P_0} |g(P)| = \infty,$$

$$g_{x_1 x_2 \dots x_r}(P) \neq 0, \text{ in } A_0.$$

Si ha allora che se esiste il limite determinato (finito o infinito)

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f_{x_1 x_2 \dots x_r}(P)}{g_{x_1 x_2 \dots x_r}(P)} \text{ (su } A_0),$$

esiste anche il limite

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P)}{g(P)} \text{ (su } A_0),$$

ed è eguale al precedente.

Esercizio. Si estendano i teoremi ora enunciati al caso che si tratti di limiti all'infinito.

56. Scomposizioni dell' incremento di una funzione. Funzioni lipschitziane. Funzioni differenziabili. — Sia $u = f(x, y, \dots)$ una funzione di r variabili, definita in un insieme A di punti di $S_{(r)}$, la quale, in ogni punto di RA , sia parzialmente derivabile rispetto a ciascuna variabile. Siano $P(x, y, \dots)$ e $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots)$ due arbitrari punti di A , appartenenti ad un dominio rettangolare

contenuto in A . Vogliamo considerare l'incremento Δu che subisce la u quando si passa dal punto P al punto Q . Per meglio fissare le idee supporremo, nelle dimostrazioni, che l'insieme A sia dello spazio (x, y, z) a tre dimensioni. Si ha:

$$(1) \quad \begin{aligned} \Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = \\ &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) + \\ &+ f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z + \Delta z) + \\ &+ f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z), \end{aligned}$$

ne segue, in forza del teorema di *Lagrange* per le funzioni di una variabile,

$$(2) \quad \Delta u = f_x(x + \alpha \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \Delta x + f_y(x, y + \beta \Delta y, z + \Delta z) \Delta y + f_z(x, y, z + \gamma \Delta z) \Delta z,$$

ovè α, β, γ sono tre certe funzioni, avente ciascuna sempre un valore positivo e minore dell'unità, delle $x, y, z, \Delta x, \Delta y, \Delta z$.

I. La (2) fornisce una prima formola di decomposizione dell'incremento della funzione $u = f(x, y, \dots)$.

Una funzione di più variabili $u = f(x, y, \dots)$ dicesi *lipschitziana* in un punto $P(x, y, \dots)$ dell'insieme A di sua definizione, se esiste un numero positivo $K(P)$ ed un intorno circolare $C(P)$ di P , su A , tali che per ogni punto Q di questo intorno, si abbia

$$|f(Q) - f(P)| \leq K(P) \cdot \overline{PQ}.$$

La funzione dicesi *uniformemente lipschitziana* nell'insieme A di sua definizione se esiste un ben determinato numero positivo K tale che, comunque si prendano due punti P e Q di A , riesce sempre

$$|f(Q) - f(P)| \leq K \cdot \overline{PQ}.$$

Evidentemente: una funzione lipschitziana in un punto P di A . DA è ivi continua; una funzione uniformemente lipschitziana in A è lipschitziana in ciascun punto di A .

Diciamo x, y, \dots e $x + \Delta x, y + \Delta y, \dots$ le coordinate di P e di Q . Poichè

$$\overline{PQ} \leq |\Delta x| + |\Delta y| + \dots \leq r \overline{PQ},$$

segue che:

II. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione f sia lipschitziana in un punto $P(x, y, \dots)$ di A è che si possano assegnare due numeri positivi $\sigma(P)$ e $H(P)$ tali che la limitazione*

$$|\Delta x| + |\Delta y| + \dots \leq \sigma(P),$$

abbia di conseguenza l'altra

$$|f(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots) - f(x, y, \dots)| \leq H(P)(|\Delta x| + |\Delta y| + \dots).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione f sia uniformemente lipschitziana in A è che si possa assegnare un numero positivo H tale che per due qualsivogliano punti (x, y, \dots) e $(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots)$ di A si abbia

$$|f(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots) - f(x, y, \dots)| \leq H(|\Delta x| + |\Delta y| + \dots).$$

Dalla (2) segue il teorema:

• III. *Se $P(x, y, \dots)$ è un punto interno di A e se esiste un intorno circolare $C(P)$ del punto P , contenuto in A , in ogni punto del quale la funzione f è parzialmente derivabile rispetto a ciascuna variabile, con derivate limitate in $C(P)$, la funzione è lipschitziana nel punto P .*

Se, invero, $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ è un qualsiasi punto di $C(P)$, sussiste la (2) e pertanto:

$$|\Delta u| \leq |f_x(x + \alpha\Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)| |\Delta x| + |f_y(x, y + \beta\Delta y, z + \Delta z)| |\Delta y| + |f_z(x, y, z + \gamma\Delta z)| |\Delta z|;$$

detto $H(P)$ un numero positivo per il quale si abbia, in $C(P)$,

$$|f_x| + |f_y| + |f_z| \leq H(P),$$

ne risulta, ivi,

$$|\Delta u| \leq H(P)(|\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|) \leq 3H(P) \cdot \overline{PQ}.$$

Allo stesso modo si dimostra che:

• IV. *Se A è un dominio rettangolare, ogni funzione f , definita in A e ivi, in ogni punto, parzialmente derivabile rispetto a ciascuna variabile, con derivate parziali limitate in A , è ivi uniformemente lipschitziana.*

Supponiamo ora che nel fissato punto P di RA le derivate parziali f_x, f_y, \dots della f siano continue. Comunque si prendano gli incrementi $\Delta x, \Delta y, \dots$, delle coordinate x, y, \dots di P [con la condizione

però che i due punti $P(x, y, \dots)$ e $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots)$ appartengano sempre ad un dominio rettangolare contenuto in A] possiamo porre nella (2)

$$\begin{aligned} f_x(x + \alpha \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) &= f_x(x, y, z) + \xi, \\ f_y(x, y + \beta \Delta y, z + \Delta z) &= f_y(x, y, z) + \eta, \\ f_z(x, y, z + \gamma \Delta z) &= f_z(x, y, z) + \zeta, \end{aligned}$$

ove ξ, η, ζ sono tre certe funzioni di $x, y, z, \Delta x, \Delta y, \Delta z$, simultaneamente infinitesime per $\sigma = |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|$ infinitesimo. Si ha allora per Δu la seguente seconda formola di decomposizione

$$(3) \quad \Delta u = f_x(x, y, z) \Delta x + f_y(x, y, z) \Delta y + f_z(x, y, z) \Delta z + (\xi \Delta x + \eta \Delta y + \zeta \Delta z),$$

ove

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \xi = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \eta = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \zeta = 0.$$

Poniamo

$$\omega = \begin{cases} \xi \frac{\Delta x}{\sigma} + \eta \frac{\Delta y}{\sigma} + \zeta \frac{\Delta z}{\sigma}, & \text{per } \sigma \neq 0, \\ 0, & \text{per } \sigma = 0, \end{cases}$$

si ha pure:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \omega = 0.$$

e la formola (3) si scrive:

$$(4) \quad \Delta u = f_x(x, y, \dots) \Delta x + f_y(x, y, \dots) \Delta y + \dots + \omega \sigma.$$

La formola ora ottenuta conduce alle seguenti definizioni: Una funzione $u = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ delle r variabili x_1, x_2, \dots, x_r , definita nell'insieme A , dicesi **differenziabile** in un punto $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$ di A . DA se esistono r numeri ben determinati $a_1(P), a_2(P), \dots, a_r(P)$ ed un intorno circolare $C(P)$ di P , su A , tali che per ogni punto $Q(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_r + \Delta x_r)$ di $C(P)$ si abbia sempre

$$(5) \quad \begin{aligned} \Delta u &= f(Q) - f(P) = \\ &= a_1(P) \cdot \Delta x_1 + a_2(P) \cdot \Delta x_2 + \dots + a_r(P) \cdot \Delta x_r + \omega \sigma, \end{aligned}$$

ove $\sigma = \sum_i |\Delta x_i|$ e ω è una certa funzione (di P e) di Q definita in $C(P)$, infinitesima in P , per la quale cioè

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \omega = 0.$$

Evidentemente: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione $u = f(P)$ sia differenziabile in P è che in $C(P)$ si abbia*

$$f(Q) - f(P) = a_1(P) \cdot \Delta x_1 + a_2(P) \cdot \Delta x_2 + \dots + a_r(P) \cdot \Delta x_r + \omega \cdot \overline{PQ},$$

ove

$$\lim_{Q \rightarrow P} \omega(P, Q) = 0,$$

oppure

$$(Q) - f(P) = a_1(P) \cdot \Delta x_1 + \dots + a_r(P) \cdot \Delta x_r + a_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + a_r \cdot \Delta x_r,$$

ove

$$\lim_{Q \rightarrow P} a_1(P, Q) = \dots = \lim_{Q \rightarrow P} a_r(P, Q) = 0.$$

Sussistono i teoremi seguenti:

V. Se nel punto P di DA la funzione $u = f(x_1, \dots, x_r)$ è differenziabile essa vi è pure lipschitziana.

Ed invero, fissato un numero positivo ε si può costruire un intorno circolare $C_\varepsilon(P) [< C(P)]$ tale che per ogni punto Q di $C_\varepsilon(P) - P$ si abbia $|\omega| < \varepsilon$. Poichè $f(Q) - f(P) = 0$ se $Q \equiv P$, dalla (5) si ricava:

$$|f(Q) - f(P)| \leq (H + \varepsilon) \sigma \leq r(H + \varepsilon) \overline{PQ}, \text{ se } Q \text{ è in } C_\varepsilon(P),$$

ove H indica il massimo fra i numeri $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_r|$. E ciò dimostra il teorema.

VI. Se nel punto P di RA la funzione $u = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ è differenziabile essa vi è parzialmente derivabile rispetto a ciascuna variabile e la derivata f_{x_i} ha il valore del coefficiente a_i della formola (5) di decomposizione dell'incremento Δu della funzione.

Si trae invero dalla (5)

$$\frac{\Delta_{h_i} f}{h_i} = a_i(P) + \omega_i \frac{|h_i|}{h_i},$$

ove ω_i è ciò che diventa ω per $h_1 = \dots = h_{i-1} = h_{i+1} = \dots = h_r = 0$, e si ha quindi:

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{h_i} f}{h_i} = a_i(P).$$

Si ha dunque che:

VI. Se nel punto P di RA la funzione $u = f(x_1, \dots, x_r)$ è differenziabile, vale la seguente formola di decomposizione di Δu :

$$(6) \quad \Delta u = f_{x_1} \cdot \Delta x_1 + f_{x_2} \cdot \Delta x_2 + \dots + f_{x_r} \cdot \Delta x_r + \omega \cdot \sigma,$$

ove $\sigma = \sum_i |\Delta x_i|$, $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \omega = 0$.

Osservazione. In generale, il teorema reciproco del teorema VI non sussiste. Per le funzioni di una variabile si ha però che la derivabilità e la differenziabilità in un punto sono due proprietà identiche.

Dalla formola (4) di decomposizione di Δu , ottenuta nell'ipotesi della continuità in P delle derivate parziali f_x, f_y, \dots , segue poi immediatamente (con dimostrazione analoga a quella data per il teor. III) il teorema:

VII. *Se $P(x, y, \dots)$ è un punto interno di A e se esiste un intorno circolare $C(P)$ del punto P , contenuto in A , in ciascun punto del quale la funzione f è parzialmente derivabile rispetto a ciascuna variabile, risultando le derivate continue in P , la funzione è ivi differenziabile.*

Si ha pure che:

VIII. *Se l'insieme A è un dominio rettangolare e se la funzione f vi è, in ogni punto, parzialmente derivabile, con derivate continue, la funzione è differenziabile in qualsiasi punto di A .*

Limitandoci, per semplificare, a considerare le funzioni di due variabili, oltre agli esempi forniti dai teoremi VII e VIII di funzioni differenziabili, ne esiste un altro assai notevole dato dal seguente teorema:

IX. *Se la funzione $u = f(x, y)$, delle due variabili x e y , definita nell'insieme A di punti del piano (x, y) , in un punto P interno ad A è parzialmente derivabile rispetto a ciascuna variabile ed inoltre la massima e la minima derivata totale hanno in P valori finiti la funzione è ivi differenziabile.*

Sia $C(P)$ un intorno circolare di P contenuto in A , siano h e k incrementi arbitrari, su $C(P)$, delle coordinate x e y di P . Si ha:

$$(7) \quad \Delta u = f(x+h, y+k) - f(x, y) = \Delta_h f + \Delta_k f + \Delta_h \Delta_k f.$$

Diciamo a e b i valori delle derivate f_x e f_y in P , si può porre:

$$\Delta_h f = (a + \xi)h, \quad \Delta_k f = (b + \eta)k,$$

ove, posto $\sigma = |h| + |k|$,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \xi = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \eta = 0.$$

Segue dalla (7)

$$(8) \quad \Delta u = ah + bk + (\xi h + \eta k + \Delta_h \Delta_k f).$$

Ma poichè le derivate totali massima e minima della f in P hanno valori finiti, esistono una costante positiva p ed un intorno circolare $C'(P) [< C(P)]$ di P tali che per ogni punto $Q(x+h, y+k)$ di questo intorno si ha

$$|\Delta_h \Delta_k f| \leq p |hk|.$$

Per ogni punto di $C'(P)$ si ponga

$$\omega = \begin{cases} \xi \frac{h}{\sigma} + \eta \frac{k}{\sigma} + \frac{\Delta_h \Delta_k f}{\sigma}, & \text{per } \sigma \neq 0, \\ 0 & \text{per } \sigma = 0, \end{cases}$$

si ha per $\sigma \neq 0$,

$$|\omega| \leq |\xi| + |\eta| + p \frac{|hk|}{\sigma} \leq |\xi| + |\eta| + p \sigma.$$

e quindi $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \omega = 0$, laddove la (8) dà

$$\Delta u = ah + bk + \omega \sigma,$$

ciò che dimostra l'asserita differenziabilità in P della funzione.

Esercizio. Si enunci e si dimostri il teorema analogo a quello ora stabilito per le funzioni di tre o più variabili.

57. Regola per la derivazione delle funzioni composte.

Applicazioni. — Siano $x = x(t)$, $y = y(t), \dots, r$ funzioni della variabile t , definite nell'intervallo (t', t'') dell'asse t , ivi sempre derivabili. Nell'insieme A di punti di $S_{(r)}$ sia definita una funzione $u = f(x, y, \dots)$ differenziabile in ogni punto di RA e supponiamo che, mentre t varia in (t', t'') , il punto $(x(t), y(t), \dots)$ non esca mai dall'insieme RA . La funzione

$$u(t) = f(x(t), y(t), \dots)$$

è funzione della t , composta per mezzo della f e delle funzioni $x(t), y(t), \dots$, definita nell'intervallo (t', t'') . Dico che la funzione $u(t)$ è derivabile in ogni punto di (t', t'') . Assegnato, invero, un incremento Δt , su (t', t'') , alla t , indicando con $\Delta x, \Delta y, \dots$ i corrispondenti incrementi subiti dalle funzioni $x(t), y(t), \dots$, le quantità $\Delta x, \Delta y, \dots, \sigma = |\Delta x| + |\Delta y| + \dots$ riescono infinitesime con Δt , mentre i rapporti $\Delta x : \Delta t, \Delta y : \Delta t, \dots$ hanno

rispettivamente i limiti $x'(t), y'(t), \dots$. Indichiamo con Δu l'incremento subito da u , corrispondentemente all'incremento Δt della t . Per la supposta differenziabilità della f nel punto $(x(t), y(t), \dots)$, quando Δt è sufficientemente piccolo si potrà porre

$$\Delta u = f_x(x(t), y(t), \dots) \Delta x + f_y(x(t), y(t), \dots) \Delta y + \dots + \omega \sigma,$$

ove $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega = 0$, ne segue

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = f_x(x(t), y(t), \dots) x'(t) + f_y(x(t), y(t), \dots) y'(t) + \dots,$$

onde la

Regola. *Nelle ipotesi sopra enunciate, se x, y, \dots sono funzioni della t , la derivata di $u = f(x, y, \dots)$ rispetto alla t , è la somma seguente: Il prodotto della derivata parziale di f rispetto alla x per la derivata di x , più il prodotto della derivata parziale di f rispetto alla y per la derivata di y , più...*

Per quanto abbiamo visto (cfr. teor. VII, n° 56) si ha che:

I. *La regola ora enunciata sussiste nell'ipotesi che il punto $(x(t), y(t), \dots)$ non esca dall'insieme \mathbf{RA} ove la f è differenziabile; ed in particolare sussiste nell'ipotesi che il detto punto non esca da $\mathbf{A} - \mathbf{FA}$, ove la f è, in ogni punto, parzialmente derivabile rispetto a ciascuna variabile, con derivate continue.*

Osservazione. Nella enunciata regola di derivazione delle funzioni composte sono contenute tutte le regole date al n° 43 (I, II, III, IV, V).

Supponiamo ora che le variabili x, y, \dots , dalle quali dipende la funzione $u = f(x, y, \dots)$, definita nell'insieme \mathbf{A} di $\mathcal{S}_{(r)}$, siano, alla loro volta, funzioni di altre variabili x', y', \dots , simultaneamente definite in un insieme \mathbf{A}' dello spazio $\mathcal{S}_{(r)}$. Supponiamo anche che mentre il punto (x', y', \dots) varia in \mathbf{RA}' , il punto corrispondente (x, y, \dots) rimanga in \mathbf{RA} . Si ha allora che: *Se la $f(x, y, \dots)$ è, in ogni punto di \mathbf{RA} , differenziabile e se le funzioni $x(x', y', \dots), y(x', y', \dots), \dots$ sono parzialmente derivabili in ogni punto di \mathbf{RA}' , la funzione*

$$u(x', y', \dots) = f[x(x', y', \dots), y(x', y', \dots), \dots],$$

delle variabili x', y', \dots , composta per mezzo della f e delle x, y, \dots , è pur essa parzialmente derivabile rispetto a ciascuna variabile, in ogni punto di RA' . Ed invero, tenendo, ad esempio, fisse le variabili y', z', \dots , potremo riguardare le u, x, y, \dots come funzioni della sola x' , ed allora possiamo senz'altro applicare i risultati e la regola precedente. Si avrà dunque, in ogni punto di RA' ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x'} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \dots, \\ \frac{\partial u}{\partial y'} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} + \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Si dimostra facilmente anche che :

II. *Nelle ipotesi poste, se le funzioni $x_1(x'_1, x'_2, \dots)$, $x_2(x'_1, x'_2, \dots), \dots$ sono differenziabili in un punto P' di RA' , la u è funzione delle x'_1, x'_2, \dots , pur essa differenziabile in P' .*

Ed invero, se

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_i a_i \Delta x_i + \omega \sigma, & \sigma &= \sum_i |\Delta x_i|, \\ \Delta x_i &= \sum_k b_{ik} \Delta x'_k + \omega'_i \sigma', & \sigma' &= \sum_k |\Delta x'_k|, \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0} \omega &= 0, & \lim_{\sigma' \rightarrow 0} \omega'_i &= 0, \end{aligned}$$

indicando con b il massimo fra i numeri $|b_{ik}|$ e con ω' il massimo fra i numeri $|\omega'_i|$, riesce

$$\begin{aligned} |\Delta x_i| &\leq (b + \omega') \sigma', & \sigma &\leq r(b + \omega') \sigma', & \sigma &= \theta r(b + \omega') \sigma', \\ & & & & 0 &\leq \theta \leq 1, \end{aligned}$$

e quindi

$$(1) \quad \Delta u = \sum_k \Delta x'_k \sum_i a_i b_{ik} + \Omega \sigma',$$

ove

$$\Omega = \sum_i a_i \omega'_i + \theta \omega r(b + \omega'), \quad \lim_{\sigma' \rightarrow 0} \Omega = 0.$$

Dalla (1) si trae, di nuovo, che

$$\frac{\partial u}{\partial x'_k} = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}.$$

Evidentemente, una funzione $f(x, y, \dots)$ che abbia valore costante ha *tutte* le derivate parziali nulle in ogni punto di \mathbf{RA} . Dobbiamo ora: Vale la proposizione reciproca? La data regola di derivazione delle funzioni composte consente di rispondere affermativamente in un caso molto importante per le applicazioni, secondo il seguente teorema:

III. Se \mathbf{A} è un dominio internamente connesso, ogni funzione $u = f(x, y, \dots)$ definita in \mathbf{A} ed ivi continua, che abbia nulle tutte le derivate parziali prime in ogni punto interno ad \mathbf{A} , è una costante in \mathbf{A} .

Cominciamo dal dimostrare che la funzione u ha valore costante nei punti di ogni segmento totalmente costituito di punti interni ad \mathbf{A} . Sia $P'P''$ un segmento contenuto in $\mathbf{A} - \mathbf{FA}$, siano a', b', \dots le coordinate di P' e a'', b'', \dots le coordinate di P'' . Al variare del parametro t nell'intervallo $(0,1)$ il punto

$$x = \alpha(t) = a' + (a'' - a')t,$$

$$y = \beta(t) = b' + (b'' - b')t,$$

$$\dots \dots \dots$$

percorre il segmento $P'P''$. Avrò dimostrato che la u è costante su questo segmento se farò vedere che la funzione di t :

$$u(t) = f(\alpha(t), \beta(t), \dots),$$

definita nell'intervallo $(0,1)$, ha ivi sempre la derivata nulla. Ora è

$$u'(t) = f_x(\alpha, \beta, \dots)(a'' - a') + f_y(\alpha, \beta, \dots)(b'' - b') + \dots,$$

e poichè, per ipotesi, $f_x(\alpha, \beta, \dots) = f_y(\alpha, \beta, \dots) = \dots = 0$, ne segue effettivamente, $u'(t) = 0$ in $(0, 1)$.

Dimostriamo ora che la u ha valore costante in $\mathbf{A} - \mathbf{FA}$. Sia P_0 un punto di $\mathbf{A} - \mathbf{FA}$, arbitrariamente fissato, un qualsiasi punto P di $\mathbf{A} - \mathbf{FA}$ può essere congiunto col punto P_0 mediante una poligonale $P_0P_1P_2 \dots P_nP$ totalmente costituita di punti interni ad \mathbf{A} ; ma è, per quanto precede,

$$f(P_0) = f(P_1), f(P_1) = f(P_2), \dots, f(P_n) = f(P),$$

e quindi $f(P) = f(P_0)$.

Sia k il valore costante che $f(P)$ ha in $\mathbf{A} - \mathbf{FA}$; occorre ancora dimostrare che tale valore la funzione $f(P)$ ha pure sempre in

FA. Si ricordi che, essendo A un dominio, anche ogni punto della sua frontiera è punto limite di punti interni, ne segue, poichè la u è continua in A , per ogni punto P_0 di FA ,

$$f(P_0) = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \text{ (su } A - FA) = k.$$

Se ne deduce l'importante teorema :

IV. *Due funzioni simultaneamente definite in un dominio internamente connesso ed ivi continue, parzialmente derivabili in ogni punto interno del dominio, aventi derivate parziali prime, rispetto a ciascuna variabile, eguali in ogni tale punto, hanno differenza costante in A .*

La questione testè trattata induce a porsi la seguente : *Se per la funzione f si ha che in ogni punto di $A - FA$ riesce $f_x = 0$ che cosa si può dire per la funzione ?*

Ordinariamente, si ha l'abitudine di rispondere a questa importante questione affermando, **erroneamente**, che, se A è un dominio connesso, la funzione **non** dipenderà ivi dalla x ; affermando cioè che, comunque si prendano in A due punti (x', y, z, \dots) e (x'', y, z, \dots) , le cui coordinate differiscano soltanto per i valori della x , si ha sempre

$$f(x', y, z, \dots) = f(x'', y, z, \dots).$$

Si può invece, in generale, soltanto affermare quanto esprime il seguente teorema :

V. *Se A è un tale dominio (anche non connesso) che, comunque si prendano due punti $P'(x', y, z, \dots)$, $P''(x'', y, z, \dots)$ di esso, le cui coordinate differiscono solamente per i valori della x , ogni punto interno al segmento $P'P''$ è anche interno al dominio, una funzione f , definita in A , ivi continua, la cui derivata parziale f_x è identicamente nulla in $A - FA$, non dipende dalla x .*

La dimostrazione del teorema è immediata. Altrettanto immediata è la dimostrazione del seguente :

VI. *Se per il dominio A sussiste la relazione $A \equiv RA$, ed è inoltre tale che, comunque si prendano due suoi punti $P'(x', y, z, \dots)$, $P''(x'', y, z, \dots)$, il segmento $P'P''$ è sempre contenuto in A , una funzione f , definita in*

A , la cui derivata parziale f_x è identicamente nulla in A , non dipende dalla x .

Parametro differenziale primo. Gradiente di una funzione. La funzione $f(P)$, definita nell'insieme A dello spazio $S_{(r)}$, sia lipschitziana in ogni punto di A , siano P un fissato punto di A . $D A$ e Q un punto variabile di $A - P$, il rapporto

$$(2) \quad \frac{f(Q) - f(P)}{PQ},$$

avrà un massimo ed un minimo limite finiti quando il punto Q tende su A al punto P ; orbene, noi porremo la seguente definizione. Il prodotto dei moduli del massimo e del minimo limite del rapporto (1) per \overline{PQ} infinitesimo, chiamasi il parametro differenziale primo, su A , della funzione lipschitziana $f(P)$.

Se il punto P è interno all'insieme A e se la funzione $f(P)$ è differenziabile in P , si può, assai semplicemente, esprimere il parametro differenziale primo della f , mediante le sue derivate parziali prime. Giova, a tale scopo, ricordare il seguente teorema di **Cauchy**:

Se $a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_r$ sono quantità reali si ha sempre

$$\sum_i^{1,r} a_i b_i \leq \left(\sum_i^{1,r} a_i^2 \right)^{1:2} \left(\sum_i^{1,r} b_i^2 \right)^{1:2},$$

(avendo convenuto di indicare con $p^{1:2}$ la radice quadrata positiva del numero positivo p) il segno $=$ potendo sussistere allora e allora soltanto che sia $a_i = kb_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) con $k \geq 0$. Sussiste il teorema:

VII. Se il punto P è interno all'insieme A e se la funzione $f(P)$ è differenziabile in P , si ha:

$$\lim'_{Q \rightarrow P} \frac{f(Q) - f(P)}{PQ} = - \left[\sum_i^{1,r} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1:2},$$

$$\lim''_{Q \rightarrow P} \frac{f(Q) - f(P)}{PQ} = + \left[\sum_i^{1,r} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1:2}.$$

Faremo la dimostrazione del teorema per il caso particolare $r = 3$. Esiste un intorno circolare $C(P)$ del punto $P(x, y, z)$, contenuto in A ,

tale che in ogni punto $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ di esso, distinto da P , si ha:

$$\frac{1}{\rho} [f(Q) - f(P)] = a \frac{\Delta x}{\rho} + b \frac{\Delta y}{\rho} + c \frac{\Delta z}{\rho} + \omega \frac{\sigma}{\rho},$$

ove

$$\rho = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1:2}, \quad \sigma = |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|,$$

$$a = f_x, \quad b = f_y, \quad c = f_z,$$

$$(3) \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} \omega = 0.$$

Posto $\sigma : \rho = \theta$, per ogni punto Q di $C(P) - P$ si ha $1 \leq \theta < 3$. Comunque si assegni un numero positivo ε , esiste, in virtù della (3), un intorno circolare $C_\varepsilon(P) [< C(P)]$ del punto P , tale che se Q è in $C_\varepsilon(P) - P$, risulta sempre $|\omega \theta| \leq \varepsilon$, si ha dunque, anche in forza della citata relazione di **Cauchy**,

$$(4) \quad \frac{1}{\rho} [f(Q) - f(P)] \leq (a^2 + b^2 + c^2)^{1:2} + \varepsilon, \text{ se } Q \text{ è in } C_\varepsilon(P) - P.$$

D'altra parte, se $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, spicchiamo per il punto P il raggio λ avente i coseni direttori

$$\alpha = \frac{a}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1:2}}, \quad \beta = \frac{b}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1:2}}, \quad \gamma = \frac{c}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1:2}},$$

e consideriamo i punti Q di $C(P) - P$ per i quali è $\Delta x = \alpha \rho$, $\Delta y = \beta \rho$, $\Delta z = \gamma \rho$ ($\rho > 0$). Per ogni tale punto si ha:

$$\frac{1}{\rho} [f(Q) - f(P)] = (a^2 + b^2 + c^2)^{1:2} + \omega \theta,$$

e si ha pertanto:

$$(5) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} [f(Q) - f(P)] (su \lambda) = (a^2 + b^2 + c^2)^{1:2}.$$

Le (4) e (5) dimostrano appunto che il massimo limite nel punto P del rapporto (1) ha il valore asserito dal teorema.

In fisica matematica e in geometria differenziale la somma

$$\sum_i^{1,r} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2,$$

suole essere indicata, brevemente, col simbolo $\Delta_1 f$. Ne segue:

VIII. Se il punto P è interno all'insieme A e se la funzione $f(P)$ è differenziabile in P , per il parametro differenziale primo della f si ha:

$$\left(\lim'_{Q \rightarrow P} \frac{f(Q) - f(P)}{\overline{PQ}} \right)^2 = \left(\lim''_{Q \rightarrow P} \frac{f(Q) - f(P)}{\overline{PQ}} \right)^2 = \Delta_1 f.$$

Nel punto $P(x, y, z)$ di \mathbf{RA} la funzione $f(P)$ possiede le derivate parziali prime f_x, f_y, f_z , finite. Il vettore \mathbf{g} avente le componenti f_x, f_y, f_z , chiamasi il *gradiente della funzione $f(P)$* e si denota con la notazione

$$\text{grad } f(P).$$

Indicando con g il modulo di \mathbf{g} , si ha

$$g = \text{mod } \mathbf{g} = \text{mod } [\text{grad } f(P)] = (\Delta_1 f)^{1/2}.$$

Sia P un qualsiasi punto di \mathbf{RA} , ove la $f(P)$ sia differenziabile, e spicchiamo per P un raggio λ che *penetri* in \mathbf{RA} , tale cioè che tutti i punti di un conveniente segmento del raggio, terminato nell'origine P del raggio, siano contenuti in \mathbf{RA} (se P fosse interno ad A ogni raggio per P penetrerebbe in \mathbf{RA}). Se α, β, γ sono i coseni direttori di λ , esisterà per questo raggio un numero positivo ρ_λ tale che i punti

$$(5) \quad x + \alpha\rho, \quad y + \beta\rho, \quad z + \gamma\rho,$$

per i valori di ρ verificanti la limitazione $0 \leq \rho \leq \rho_\lambda$, appartengono tutti a \mathbf{RA} . Sia Q un punto variabile sul raggio λ , che dall'origine P del raggio si mantenga ad una distanza ρ non superiore a ρ_λ , il rapporto

$$\frac{1}{\rho} [f(Q) - f(P)],$$

ha sempre un limite determinato e finito per ρ infinitesimo, esso non è che la derivata, nel punto $\rho = 0$, della funzione di ρ :

$$f(x + \alpha\rho, y + \beta\rho, z + \gamma\rho),$$

definita nell'intervallo $(0, \rho_\lambda)$, composta per mezzo della f e delle (5). Si ha pertanto

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} [f(Q) - f(P)] = \alpha f_x + \beta f_y + \gamma f_z.$$

delle variabili reali x_1, x_2, \dots, x_r , e supponiamo che ciascuna funzione della p^{pla} sia, in ogni punto di \mathbf{RA} , parzialmente derivabile rispetto a ciascuna variabile. La seguente matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_p}{\partial x_1} & \frac{\partial u_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial x_r} \end{pmatrix},$$

di p righe e di r colonne, chiamasi la *matrice jacobiana delle p funzioni u_1, u_2, \dots, u_p rispetto alle r variabili x_1, x_2, \dots, x_r* e si denota con la notazione

$$\frac{\partial (u_1, u_2, \dots, u_p)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_r)}.$$

Se $p = r$ si ha il *determinante jacobiano delle r funzioni u_1, u_2, \dots, u_r rispetto alle r variabili x_1, x_2, \dots, x_r* .

Nell'insieme \mathbf{B} di $\mathcal{S}_{(p)}$ sia definita una r^{pla} di funzioni reali

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_p), \\ x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_p), \\ \dots \\ x_r = \varphi_r(y_1, y_2, \dots, y_p), \end{cases}$$

delle p variabili reali y_1, y_2, \dots, y_p , e supponiamo che: **a)** ciascuna funzione di questa r^{pla} sia in ogni punto di \mathbf{RB} , parzialmente derivabile rispetto a ciascuna variabile y_1, y_2, \dots, y_p ; **b)** se il punto $Y(y_1, y_2, \dots, y_p)$ varia comunque in \mathbf{RB} , il punto $X(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r)$ che le (7) gli fanno corrispondere in $\mathcal{S}_{(r)}$ non esca mai da \mathbf{RA} ; **c)** ciascuna funzione f_1, f_2, \dots, f_p della p^{pla} (7) sia differenziabile in ogni punto di \mathbf{RA} .

In virtù delle ipotesi **a), b)** e **c)** la u_i ($i = 1, 2, \dots, p$) riesce funzione delle p variabili y_1, y_2, \dots, y_p , composta per mezzo della f_i e delle $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$, definita in \mathbf{RB} , ed ivi, in ogni punto, parzialmente derivabile rispetto a ciascuna variabile. Vogliamo dare una formola, che avrà in seguito frequenti applicazioni, relativa al determinante

giacobiano delle funzioni u_1, u_2, \dots, u_p , rispetto alle variabili y_1, y_2, \dots, y_p .

Si ha:

$$\frac{\partial u_i}{\partial y_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_k} + \dots + \frac{\partial u_i}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, p),$$

e quindi

$$\frac{\partial (u_1, u_2, \dots, u_p)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_p}{\partial x_1} & \frac{\partial u_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial x_r} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_r}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_r}{\partial y_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_p} & \frac{\partial x_2}{\partial y_p} & \dots & \frac{\partial x_r}{\partial y_p} \end{vmatrix}.$$

Ne segue: Se $r < p$,

$$\frac{\partial (u_1, u_2, \dots, u_p)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_p)} \equiv 0;$$

se $r = p$,

$$\frac{\partial (u_1, u_2, \dots, u_p)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_p)} = \frac{\partial (u_1, u_2, \dots, u_p)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_p)} \cdot \frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_p)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_p)};$$

se $r > p$,

$$\frac{\partial (u_1, u_2, \dots, u_p)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_p)} = \sum \frac{\partial (u_1, u_2, \dots, u_p)}{\partial (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p})} \cdot \frac{\partial (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p})}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_p)},$$

ove la somma del secondo membro si estende a tutte le combinazioni della classe p degli r indici $1, 2, \dots, r$.

In particolare dunque, se

$$u = f(x, y, z)$$

$$v = g(x, y, z),$$

$$x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta), \quad z = \chi(\xi, \eta),$$

si ha:

$$\frac{\partial (u, v)}{\partial (\xi, \eta)} = \frac{\partial (u, v)}{\partial (y, z)} \frac{\partial (y, z)}{\partial (\xi, \eta)} + \frac{\partial (u, v)}{\partial (z, x)} \frac{\partial (z, x)}{\partial (\xi, \eta)} + \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} \frac{\partial (x, y)}{\partial (\xi, \eta)}.$$

Esercizio. Derivata di un determinante. Le funzioni f_{ik} (x_1, x_2, \dots, x_r) ($i, k = 1, 2, \dots, n$), in numero di n^2 , siano parzialmente derivabili rispetto alla variabile x_i ed indichiamo con $f_{ik}^{(l)}$ la derivata parziale di f_{ik} rispetto alla x_l , si dimostri che:

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} = \sum_k^{1, n} \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1, k-1} & f_{1k}^{(l)} & f_{1, k+1} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & \dots & f_{2, k-1} & f_{2k}^{(l)} & f_{2, k+1} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & \dots & f_{n, k-1} & f_{nk}^{(l)} & f_{n, k+1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

58. Porzioni di superficie regolari. Piano tangente. — Dei risultati conseguiti nell'articolo precedente, vogliamo subito fare una importante e istruttiva applicazione geometrica, stabilendo il concetto di *porzione di superficie regolare* e di *piano tangente* ad essa in un punto. Sia D_{uv} un dominio, internamente connesso, del piano (u, v) . Diremo *porzione di superficie regolare di base D_{uv}* , il luogo S dei punti dello spazio (x, y, z) descritto dal punto P di coordinate

$$(1) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

al variare del punto (u, v) nel dominio D_{uv} , quando per le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ risultano verificate le tre proprietà seguenti:

a) Esse sono continue, in tutto D_{uv} , con le loro derivate parziali del primo ordine (cfr. la locuzione abbreviata indicata al n° 53).

b) La matrice jacobiana

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v)}$$

conserva caratteristica 2 in tutto D_{uv} , cioè, posto

$$L = \frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)}, \quad M = \frac{\partial (z, x)}{\partial (u, v)}, \quad N = \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)},$$

si ha sempre, in D_{uv} ,

$$L^2 + M^2 + N^2 > 0.$$

c) Se (u', v') è un punto di D_{uv} , comunque fissato, le equazioni:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= x(u', v'), \\ y(u, v) &= y(u', v'), \\ z(u, v) &= z(u', v'), \end{aligned}$$

nelle incognite u e v , non sono verificate in D_{uv} , che per $u = u'$, $v = v'$.

Le (1) diconsi le *equazioni parametriche* della S . Si dice anche che le (1) forniscono la *rappresentazione parametrica* della S . Le variabili u e v diconsi i *parametri* ai quali sono riferiti i punti della S . Se i parametri u e v hanno tali valori che il punto (u, v) risulti interno al dominio base D_{uv} , il punto corrispondente della superficie dicesi *interno* ad essa. Chiamasi *bordo* della superficie S il luogo descritto dal punto P della superficie, quando il punto (u, v) del dominio base D_{uv} descrive la frontiera di questo. Si badi bene che la nozione ora data di punto interno alla porzione di superficie regolare S , non deve essere confusa con quella già data di punto interno quando si considera la S come un qualsiasi insieme di punti dello spazio a tre dimensioni. Considerando, per esempio, un cerchio dello spazio a tre dimensioni si ha una particolare porzione di superficie regolare, i cui punti costituiscono un insieme dello spazio a tre dimensioni, affatto sprovvisto di punti interni. E si può dimostrare che *la stessa circostanza si verifica per la più generale porzione di superficie regolare.*

Le equazioni

$$u = u(t), \quad v = v(t),$$

diano la rappresentazione parametrica di una porzione di curva regolare C_{uv} del piano (u, v) , il cui corso si svolga per intero nell'interno del dominio D_{uv} ; i punti, di S , di coordinate

$$\begin{aligned} x &= \alpha(t) = x[u(t), v(t)], \\ y &= \beta(t) = y[u(t), v(t)], \\ z &= \gamma(t) = z[u(t), v(t)], \end{aligned}$$

descriverranno, al variare di t , una porzione di curva regolare C dello spazio. Si ha invero (57, I)

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \end{aligned} \right.$$

e poichè $du:dt$ e $dv:dt$ non sono mai insieme nulle, altrettanto si potrà dire — in forza della proprietà *b)* ammessa per le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ — per le derivate $dx:dt$, $d\beta:dt$, $d\gamma:dt$. Inoltre

le funzioni $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ non possono mai, simultaneamente, riprendere lo stesso valore, a meno che non lo riprendano $u(t)$ e $v(t)$, ciò che è escluso. La curva C dicesi *tracciata sulla superficie*.

Si ponga:

$$E(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

dalle (2) si deduce

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Nel secondo membro dell'eguaglianza ora scritta compare una forma quadratica, negli argomenti $du:dt$ e $dv:dt$, che sappiamo già essere definita positiva. Per il discriminante della forma si ha:

$$EG - F^2 = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right\|^2 = L^2 + M^2 + N^2 > 0.$$

Ritroveremo in avvenire tale forma quadratica per la espressione di un elemento geometrico importante della superficie.

In un fissato punto interno $P_0(u_0, v_0)$ di S conduciamo la tangente a ciascuna porzione di curva regolare C tracciata su S e passante per P_0 . Si abbia, per la C , $u = u(t)$, $v = v(t)$, $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$. Ad ogni determinazione della C corrispondono valori ben determinati delle derivate $u'(t)$, $v'(t)$, per $t = t_0$, ed il mutuo rapporto di questi valori fisserà la direzione della tangente in P_0 alla C . Posto $u'(t_0) = u'_0$, $v'(t_0) = v'_0$, i coseni direttori di tale tangente sono proporzionali alle quantità:

$$\lambda = x_u(u_0, v_0)u'_0 + x_v(u_0, v_0)v'_0,$$

$$\mu = y_u(u_0, v_0)u'_0 + y_v(u_0, v_0)v'_0,$$

$$\nu = z_u(u_0, v_0)u'_0 + z_v(u_0, v_0)v'_0,$$

e pertanto, qualunque curva C si consideri, passante per P_0 , si avrà sempre

$$(3) \quad L(v_0, v_0) \cdot \lambda + M(v_0, v_0) \cdot \mu + N(v_0, v_0) \cdot \nu = 0.$$

Indicheremo con $L_0, M_0, N_0, E_0, F_0, G_0$, i valori di L, M, N, E, F, G , per $u = v_0$ e $v = v_0$; non essendo mai le quantità L, M, N insieme nulle, vi è un ben determinato asse di coseni direttori

$$\frac{L_0}{\sqrt{L_0^2 + M_0^2 + N_0^2}} = \frac{L_0}{\sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}}, \frac{M_0}{\sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}}, \frac{N_0}{\sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}},$$

il quale, in virtù della (3), riesce normale a tutte le tangenti considerate. Onde il teorema:

I. Le tangenti in un punto interno $P(x, y, z)$ di una porzione di superficie regolare, alle infinite porzioni di curve regolari, per esso passanti e tracciate sopra la superficie, giacciono in un piano.

Questo piano è, per definizione, il *piano tangente*, nel punto indicato $P(x, y, z)$, alla superficie S . La sua equazione è

$$(4) \quad L(X - x) + M(Y - y) + N(Z - z) = 0,$$

cioè

$$(4) \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(X - x) + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}(Y - y) + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(Z - z) = 0,$$

ove X, Y, Z sono le coordinate correnti. Il considerato punto $P(x, y, z)$ dicesi il *punto di contatto* del piano tangente.

Se P è un punto del bordo della S , chiamasi piano tangente ivi alla S il piano che ha per equazione la (4).

La normale in P al piano tangente ivi alla superficie, si dice la *normale* in P alla superficie. L'asse n che ha i coseni direttori:

$$\cos(x, n) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \cos(y, n) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)},$$

$$\cos(z, n) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

avendo preso la determinazione positiva del radicale, si dice l'*asse normale positivo* in P . L'asse opposto $-n$ si dice l'*asse normale negativo*. La pagina della superficie che è volta verso l'asse normale positivo si dice la *pagina positiva*, l'altra la *pagina negativa*.

Rappresentazione cartesiana delle superficie. Sia D_{xy} un dominio, internamente connesso, del piano (x, y) , e nel dominio

sia definita una funzione $f(x, y)$ delle due variabili x e y , finita e continua in tutto D_{xy} , con le sue derivate parziali del primo ordine. Il luogo S (cfr. n° 25), descritto dal punto $P(x, y, z)$ quando le coordinate di esso verificano le condizioni:

$$\text{il punto } (x, y) \text{ è in } D_{xy}, z = f(x, y),$$

è una particolare porzione di superficie regolare avente per base il dominio D_{xy} . Posto, invero,

$$x = u, y = v, z = f(u, v),$$

si hanno, come subito si verifica, le equazioni parametriche di una porzione di superficie regolare, avente per base il dominio D_{xy} , la quale coincide col luogo S considerato. L'equazione

$$(5) \quad z = f(x, y),$$

è l'equazione cartesiana della porzione di superficie regolare S , la quale dicesi anche *rappresentata cartesianamente* dall'equazione (5).

Poniamo, con *Monge*,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

si avrà:

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2,$$

$$EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

$$\cos(x, n) = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos(y, n) = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos(z, n) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

In tal caso, dunque, l'asse normale positivo fa sempre un angolo acuto con l'asse delle z .

L'equazione del piano tangente alla S , nel punto (x, y, z) , si scrive:

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y).$$

Coordinate curvilinee sopra una porzione di superficie regolare. Della più generale porzione di superficie regolare S , parametricamente rappresentata dalle equazioni (1), avente per base il dominio D_{uv} , consideriamone una parte S_R che abbia per base un

dominio rettangolare $R_{uv} (< D_{uv})$ del quale (a', b') e (a'', b'') sono i punti estremi. Questa superficie S_R è solcata da un doppio sistema di porzioni di curve regolari: le curve di un sistema, quelle che chiameremo le curve u , si ottengono dando al parametro u un valore costante dell'intervallo (a', a'') e i punti di esse vengono riferiti al parametro v variabile in (b', b'') ; le curve dell'altro sistema, quelle che chiameremo le curve v , si ottengono dando al parametro v un valore costante dell'intervallo (b', b'') e i punti di esse vengono riferiti al parametro u variabile in (a', a'') . Per ogni punto P della superficie S_R passano e una curva u e una curva v ; le curve u e v possono pertanto assumersi come *curve coordinate* per i punti della superficie e le quantità u e v diconsi perciò *coordinate curvilinee* per i detti punti.

Nel punto $P(u, v)$ della S_R , le due curve u e v che vi passano hanno rispettivamente le tangenti di coseni direttori

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u},$$

ne segue che le indicate curve u e v si *tagliano sempre* sotto un angolo $\omega \neq 0$ e $\neq \pi$, il cui coseno è dato da

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad \left(\frac{|F|}{\sqrt{EG}} < 1, \text{ poichè } EG - F^2 > 0 \right).$$

Se $F = 0$, le curve u e v si tagliano mutuamente ad angolo retto. Pertanto, se è $F \equiv 0$ in D_{uv} , le coordinate curvilinee diconsi *ortogonali*.

Esempio. La superficie di equazioni parametriche

$$x = r \operatorname{sen} u \cos v$$

$$y = r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$z = r \operatorname{cos} u,$$

$$0 < a' \leq u \leq a'' < \pi, \quad 0 \leq b' \leq v \leq b'' < 2\pi,$$

appartiene ad una sfera di raggio r e di centro nell'origine, essa è una porzione di superficie regolare avente per base il dominio rettangolare $[(a', b'); (a'', b'')]$ del piano (u, v) . Si trova qui

$$E = r^2 \operatorname{sen}^2 u, \quad F \equiv 0, \quad G = r^2.$$

Le curve v sono i meridiani della sfera, di *longitudine* v , le u sono i paralleli di *colatitudine* u . Poichè $F \equiv 0$, vediamo che i meridiani e i paralleli si tagliano mutuamente ad angolo retto.

59. Differenziali totali. — La funzione $u = f(x, y, \dots)$ sia definita nell'insieme A e, in ogni punto di RA , sia parzialmente derivabile rispetto a ciascuna variabile. Siano $\Delta x, \Delta y, \dots$ le più arbitrarie quantità reali; la seguente funzione delle variabili $x, y, \dots, \Delta x, \Delta y, \dots$:

$$f_x(x, y, \dots) \Delta x + f_y(x, y, \dots) \Delta y + \dots,$$

chiamasi il *differenziale totale* della funzione u e si denota con la notazione du . Si ha dunque, per definizione:

$$du = f_x \cdot \Delta x + f_y \cdot \Delta y + \dots,$$

per ogni punto (x, y, \dots) di RA e quali si siano le quantità $\Delta x, \Delta y, \dots$.

La somma di un qualunque gruppo di addendi della somma esprime il du ; ed in particolare ogni addendo, chiamansi *differenziali parziali*.

Si osservi che se, in particolare, $u = x$, si ha;

$$dx = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + 0 \cdot \Delta z + \dots = \Delta x,$$

ed analogamente si trae $dy = \Delta y, dz = \Delta z, \dots$. Potremo dunque scrivere il differenziale totale di u , al modo seguente:

$$du = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy + \dots = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots$$

In virtù dei teoremi VI' e VII del n° 56, si ha il seguente:

Se nel punto (x, y, \dots) di RA la funzione u è differenziabile, in particolare se quel punto è interno ad A e vi sono continue le derivate parziali del primo ordine della u , esiste un numero positivo σ_0 tale che, quali si siano gli incrementi $\Delta x, \Delta y, \dots$, su A , fatti subire alle coordinate x, y, \dots , verificandosi la limitazione

$$\sigma = |\Delta x| + |\Delta y| + \dots \leq \sigma_0,$$

per il corrispondente incremento Δu della funzione vale la formola di decomposizione

$$(1) \quad \Delta u = du + \omega \sigma,$$

ove ω è infinitesimo per σ infinitesimo.

Si suole ricordare la proprietà ora espressa del differenziale di una funzione differenziabile, dicendo, brevemente, che esso è *la parte principale dell'incremento della funzione*. Tale espressiva locuzione è giustificata dalla circostanza che, assunta la variabile σ come infinitesimo campione, l'incremento Δu della funzione è la somma di due infinitesimi: del differenziale du e della quantità $\omega \sigma$ e, mentre quest'ultima è *sempre* un infinitesimo d'ordine superiore (rispetto a σ), il primo, se qualcuna delle derivate f_x, f_y, \dots è diversa da zero, quando gli incrementi $\Delta x, \Delta y, \dots$ tendono *opportunamente* a zero, è un infinitesimo dello stesso ordine di σ . Si ha, inverò,

$$\lim \frac{\omega \sigma}{\sigma} = \lim \omega = 0,$$

e se, per esempio, è $f_x \neq 0$ e (x, y, \dots) interno ad A , ponendo $\Delta x = \varepsilon^2$, $\Delta y = \Delta z = \dots = \varepsilon^4$, con ε infinitesimo, si trova

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{du}{\sigma} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(f_x \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (r-1)\varepsilon^4} + f_y \frac{\varepsilon^4}{\varepsilon^2 + (r-1)\varepsilon^4} + \dots \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f_x}{1 + (r-1)\varepsilon^2} + (f_y + f_z + \dots) \frac{\varepsilon^2}{1 + (r-1)\varepsilon^2} \right) = f_x \neq 0. \end{aligned}$$

Abbiamo visto dunque che l'incremento Δu di una funzione differenziabile u , relativo agli incrementi $\Delta x, \Delta y, \dots$ delle variabili, si decompone nella somma del suo differenziale du e della quantità $\omega \cdot \sigma$, la quale, pur di sopporre la somma σ , dei valori assoluti degli incrementi delle variabili, sufficientemente piccola, è una frazione piccola quanto si vuole di questa somma, laddove il differenziale du può essere una quantità dello stesso ordine di grandezza della detta somma σ . Tale circostanza è molto sfruttata nella pratica più corrente delle scienze applicate (meccanica, fisica, ingegneria). In importantissime questioni della pratica si suole calcolare l'incremento Δu di una funzione u limitandosi al calcolo del suo differenziale du , ponendo senz'altro $\Delta u = du$. Nel far ciò si commette sempre un errore, ma, come abbiamo visto, un errore relativo ch'è tanto più piccolo quanto minore è la somma σ dei valori assoluti degli incrementi delle variabili. La posizione $\Delta u = du$ è però assai comoda in pratica, e tale circostanza ha forse indotto ad adottarla senza assicurarsi, bene spesso, dell'entità dell'errore che si commette. Nessuna meraviglia quindi

quando avviene che, in quei calcoli della pratica ove si fa largamente e spensieratamente la confusione del Δu col du , non si pervenga alla fine a risultati soddisfacenti.

Interpretazione geometrica del differenziale totale.

Nel caso delle funzioni di due variabili indipendenti, è possibile dare una istruttiva interpretazione geometrica del differenziale totale. Sia $z=f(x, y)$ la equazione di una porzione di superficie regolare S . Abbiamo visto al n° 57 che, una tale superficie possiede, in un suo punto (x, y, z) un piano tangente, la cui equazione è:

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y).$$

Se consideriamo il punto di questo piano, le cui coordinate x e y sono rispettivamente $x + dx$ e $y + dy$, troviamo:

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = dz.$$

Nè concludiamo che: il differenziale di una funzione di due variabili, vale l'incremento dell'ordinata del piano tangente, alla superficie rappresentativa, corrispondente agli stessi incrementi delle variabili.

Differenziali totali d'ordine superiore. Il differenziale totale di cui abbiamo finora discorso dicesi del *primo ordine*. Per semplificare, ci limiteremo a definire i *differenziali totali d'ordine superiore* per i punti di RA supponendo che le derivate parziali della u , dei successivi ordini che prenderemo a considerare, siano finite e continue. Il differenziale totale del *secondo ordine* della funzione $u=f(x, y, \dots)$ si designa con la notazione d^2u , ed è il differenziale totale del differenziale totale del primo ordine, con la convenzione che, gl'incrementi dx, dy, \dots rappresentino delle costanti che ricevono i medesimi valori nel passaggio dal primo differenziale al secondo. Supponiamo, per maggiore chiarezza, che le variabili indipendenti siano in numero di tre: x, y, z ; si ha dunque

$$d^2u = d(du) = \frac{\partial du}{\partial x} dx + \frac{\partial du}{\partial y} dy + \frac{\partial du}{\partial z} dz,$$

e sviluppando,

$$\begin{aligned} d^2u &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dz \right) dx + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dz \right) dy + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz \right) dz = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 + \\ &\quad 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz. \end{aligned}$$

Osserviamo che, se nell'ultima espressione trovata per d^2u sostituiamo $\partial^2 f$ con $d^2 f$, quell'espressione viene a coincidere con quella dello sviluppo del quadrato del trinomio

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz;$$

si può dunque scrivere simbolicamente:

$$d^2u = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right)^{(2)},$$

convenendo di sostituire, dopo aver sviluppato il quadrato, $\partial^2 f$ in luogo di $d^2 f$. La rappresentazione simbolica, ora ottenuta, per i differenziali totali del secondo ordine, sussiste per quelli che chiameremo *differenziali totali d'ordine n* e che, sono definiti, per ricorrenza, dopo quelli del primo ordine, con la legge: *il differenziale totale d'ordine n è il differenziale totale del differenziale totale d'ordine $n - 1$* . Sussiste appunto l'eguaglianza simbolica

$$d^n u = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right)^{(n)},$$

ove, dopo lo sviluppo della potenza n^{ma} indicata, occorre sostituire $\partial^n f$ in luogo di $d^n f$. La regola è stata dimostrata per $n = 1$ e per $n = 2$, per dimostrarla in generale, basterà far vedere che essa sussiste per il differenziale di ordine $n + 1$ non appena si sia supposta vera per il differenziale d'ordine n . Supponiamo dunque che sia

$$d^n u = \sum A_{pqr} \frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} dx^p dy^q dz^r,$$

ove

$$n = p + q + r, \quad A_{pqr} = \frac{n!}{p! q! r!}.$$

Si deduce dalla precedente formola, e dalla $d^{n+1}u = d(d^n u)$,

$$d^{n+1}u = \sum A_{pqr} \left(\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{p+1} \partial y^q \partial z^r} dx^{p+1} dy^q dz^r + \frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^p \partial y^{q+1} \partial z^r} dx^p dy^{q+1} dz^r + \frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^{r+1}} dx^p dy^q dz^{r+1} \right);$$

se si sostituisce ora ∂f^{n+1} in luogo di $\partial^{n+1}f$, il secondo membro di questa eguaglianza può scriversi simbolicamente

$$\begin{aligned} \sum A_{pqr} \frac{\partial f^n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} dx^p dy^q dz^r \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) = \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right)^{n+1}, \end{aligned}$$

il che dimostra che $d^{n+1}u$ ha l'espressione simbolica asserita.

60. Differenziali totali del primo ordine e di ordine superiore per le funzioni composte di più variabili. — Sia $u = f(\alpha, \beta, \gamma)$ una funzione composta delle variabili indipendenti x, y, z, t , composta per mezzo della f e delle funzioni α, β, γ di quelle variabili. Scriviamo le espressioni note delle derivate parziali di primo ordine della u rispetto alle variabili x, y, z, t , si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo ambo i membri di ciascuna di queste equazioni, rispettivamente, per dx, dy, dz, dt e poi sommiamole membro a membro. La somma dei primi membri dà il differenziale totale du , mentrechè, la somma dei secondi membri, raccogliendo a fattor comune, le derivate parziali $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma$, dà $f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + f_\gamma d\gamma$.

Si ha dunque:

$$(1) \quad du = \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma} d\gamma.$$

Si ha pertanto l'importante osservazione:

Il differenziale totale du di una funzione di più variabili $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, conserva sempre la stessa espressione, anche se quelle variabili sono funzioni di quante si vogliano altre variabili.

La relazione (1) non dipende dunque, nè dal numero nè dalla scelta delle variabili indipendenti ed essa equivale a tante relazioni distinte, quante sono quelle variabili indipendenti.

Per esempio, se $u = \text{arc tang } \frac{\alpha}{\beta}$, qualunque siano le variabili da cui dipendono le funzioni α e β , si avrà:

$$du = \frac{\beta d\alpha - \alpha d\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Così pure, se a, b, c sono delle costanti, quante e quali si siano le variabili da cui dipendono le funzioni α, β, γ , si avrà:

$$d(a\alpha + b\beta + c\gamma) = a d\alpha + b d\beta + c d\gamma,$$

$$d(\alpha\beta\gamma) = \beta\gamma d\alpha + \gamma\alpha d\beta + \alpha\beta d\gamma,$$

$$d \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta d\alpha - \alpha d\beta}{\beta^2}.$$

Per calcolare il differenziale totale del secondo ordine d^2u , applicheremo la regola, che ora è stata stabilita, a du nella sua espressione data dalla (1), secondo la quale esso è funzione delle variabili indipendenti per il tramite delle sei funzioni $\alpha, \beta, \gamma, d\alpha, d\beta, d\gamma$, si avrà dunque:

$$\begin{aligned} d^2u &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} d\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \alpha} d\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma \partial \alpha} d\gamma \right) d\alpha \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} d\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} d\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma \partial \beta} d\gamma \right) d\beta \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \gamma} d\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \gamma} d\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} d\gamma \right) d\gamma \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \alpha} d^2\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d^2\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma} d^2\gamma, \end{aligned}$$

ed impiegando una già considerata notazione simbolica, si avrà

$$d^2u = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma} d\gamma \right)^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d^2\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d^2\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma} d^2\gamma.$$

La formola è più complicata di quella che si avrebbe nel caso in cui le α , β , γ fossero le variabili indipendenti, per la presenza dei termini in $d^2\alpha$, $d^2\beta$, $d^2\gamma$.

Per avere il differenziale totale del terzo ordine d^3u , bisognerà calcolare, con la solita regola, il differenziale totale di d^2u , tenendo conto che questo è funzione delle variabili indipendenti per il tramite delle nove funzioni α , β , γ , $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d^2\alpha$, $d^2\beta$, $d^2\gamma$, e così di seguito. L'espressione di questi differenziali successivi va ogni volta assai complicandosi nel passaggio da un differenziale al successivo. Si può osservare che $d^n u$ è una funzione intiera dei differenziali $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d^2\alpha$, $d^2\beta$, $d^2\gamma$, ..., $d^{n-1}\alpha$, $d^{n-1}\beta$, $d^{n-1}\gamma$, $d^n\alpha$, $d^n\beta$, $d^n\gamma$, i cui termini in $d^n\alpha$, $d^n\beta$, $d^n\gamma$, costituiscono la combinazione:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} d^n \alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d^n \beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma} d^n \gamma.$$

Se in $d^n u$ si sostituiscono i vari differenziali delle funzioni α , β , γ con le loro espressioni per mezzo dei differenziali delle variabili indipendenti, si avrà un polinomio omogeneo di grado n in questi differenziali, i cui coefficienti sono eguali alle derivate parziali d'ordine n della u moltiplicate per certi fattori numerici. Si hanno così simultaneamente tutte le derivate parziali della funzione composta di cui si tratta. Così ad esempio, volendo le derivate parziali del primo e del secondo ordine della funzione $u = f(\alpha)$, ove α è funzione delle due variabili indipendenti x e y , basterà scrivere:

$$du = \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha, \quad d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} d\alpha^2 + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d^2\alpha,$$

sostituire nei secondi membri, in luogo di $d\alpha$ e di $d^2\alpha$, rispettivamente,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy, \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} dy^2,$$

sviluppare rispetto a dx e dy : i coefficienti dei monomii in questi argomenti, daranno, privati dei coefficienti numerici, le derivate parziali di u rispetto alle variabili indipendenti x e y . Si otterrà così

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y},$$

.....

Osservazione. L'espressione che dà il differenziale totale $d^n u$ si semplifica notevolmente in un caso particolare importante che sarà incontrato spesso. È il caso in cui le funzioni intermedie α, β, γ sono funzioni intere e lineari delle variabili indipendenti x, y, z, t . Si abbia cioè:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 t + a, \\ \beta &= b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 t + b, \\ \gamma &= c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 t + c, \end{aligned}$$

ove i coefficienti a_i, b_i, c_i sono costanti. Si avrà allora

$$\begin{aligned} d\alpha &= a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz + a_4 dt, \\ d\beta &= b_1 dx + b_2 dy + b_3 dz + b_4 dt, \\ d\gamma &= c_1 dx + c_2 dy + c_3 dz + c_4 dt, \end{aligned}$$

mentrechè, tutti i differenziali $d^n \alpha, d^n \beta, d^n \gamma$, d'ordine maggiore al primo, sono nulli. Si avrà pertanto :

$$d^n u = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma} d\gamma \right)^{(n)},$$

come se le α, β, γ fossero variabili indipendenti.

Differenziali di un prodotto. La formola che dà il differenziale totale d'ordine n di una funzione composta, si semplifica anche nel caso, di frequente applicazione, in cui la funzione u è il prodotto di due funzioni α e β . Si ha allora, per i differenziali del primo e del secondo ordine,

$$du = \beta d\alpha + \alpha d\beta, \quad d^2 u = \beta d^2 \alpha + 2d\alpha d\beta + \alpha d^2 \beta,$$

ed evidentemente, per il differenziale d'ordine n si avrà una espressione del tipo

$$(2) \quad d^n u = \beta d^n \alpha + P_1 d\beta d^{n-1} \alpha + \dots + P_{n-1} d\alpha d^{n-1} \beta + \alpha d^n \beta,$$

ove le quantità P_1, P_2, \dots, P_{n-1} sono numeri interi positivi che si tratta di calcolare. A tale calcolo si potrebbe giungere con un metodo di induzione, che si potrà seguire per esercizio, noi qui seguiremo una via diretta che si basa sopra una considerazione che verrà fatta anche in altre occasioni. La considerazione è questa: i numeri P_1, P_2, \dots, P_{n-1} non dipendono dalla scelta particolare

fatta per le funzioni α e β . Facciamo allora il calcolo ponendo $\alpha = e^x$, $\beta = e^y$. Si avrà (per $i=1, 2, \dots, n$)

$$u = e^{x+y}, \quad d^i u = e^{x+y} (dx + dy)^i, \quad d^i \alpha = e^x dx^i, \quad d^i \beta = e^y dy^i.$$

Sostituendo queste espressioni nella (2) e dividendo in seguito ambo i suoi membri, per il fattore comune e^{x+y} , si trova:

$$(dx + dy)^n = dx^n + P_1 dx^{n-1} dy + \dots + P_{n-1} dx dy^{n-1} + dy^n,$$

e per l'arbitrarietà di dx e di dy , se ne deduce $P_i = \binom{n}{i}$. Si ricava pertanto la semplice formola:

$$(3) \quad d^n(\alpha\beta) = \beta d^n \alpha + \binom{n}{1} d\beta d^{n-1} \alpha + \dots + \binom{n}{n-1} d^{n-1} \beta d\alpha + \alpha d^n \beta.$$

Questa formola si applica qualunque sia il numero delle variabili indipendenti. Se, in particolare, α e β sono funzioni di una sola variabile x , si avrà, dividendo per dx^n ambo i membri della (3), l'espressione (di *Leibnitz*) della derivata d'ordine n di un prodotto di due funzioni di una sola variabile. Si potrà per esercizio, trovare la formola analoga alla (3), che dà il differenziale d'ordine n di un prodotto di più fattori.

61. Funzioni omogenee. — La funzione $u = f(x, y, \dots)$ sia definita nell'insieme aperto \mathcal{A} di punti dello spazio $\mathcal{S}_{(r)}$. Per ogni punto P di \mathcal{A} indichiamo con $\rho(P)$ il raggio di un dominio circolare di centro in P , contenuto in \mathcal{A} , e con $d(P)$ la distanza del punto dall'origine O delle coordinate. Se $P(x, y, \dots)$ è un punto di \mathcal{A} , anche il punto di coordinate $\mu x, \mu y, \dots$, omotetico di P , rispetto all'origine O delle coordinate, è contenuto in \mathcal{A} , qualunque sia il fattore μ di omotetia, purchè esso, se $d(P) > 0$, verifichi la limitazione

$$(1) \quad |1 - \mu| \leq \frac{\rho(P)}{d(P)}.$$

Comunque si fissi la costante reale α , la funzione

$$(2) \quad \frac{1}{\mu^\alpha} f(\mu x, \mu y, \dots),$$

delle $r+1$ variabili indipendenti μ, x, y, \dots , riesce definita nell'insieme \mathcal{B} , dello spazio $\mathcal{S}_{(r+1)}$, determinato dalle condizioni:

il punto $P(x, y, \dots)$ è in \mathcal{A} , $\mu > 0$, $|1 - \mu| \leq \frac{\rho(P)}{d(P)}$ (quando $d(P) > 0$).

Orbene, la funzione $f(x, y, \dots)$, definita nell'insieme aperto A , dicesi ivi *omogenea* se è possibile determinare la costante reale α in maniera che la funzione (2) sia, in B , indipendente dalla variabile μ . Questa costante α dà il *grado* della funzione omogenea.

Sussistono i teoremi seguenti.

I. *Se l'origine O delle coordinate appartiene all'insieme aperto A ove è definita una funzione omogenea f di grado $\alpha \neq 0$, la funzione ha nell'origine il valore zero.*

II. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione f sia, nell'insieme aperto A , omogenea e di grado α , è che per ogni fattore μ di omotetia, positivo e verificante la (1), si abbia*

$$(3) \quad f(\mu x, \mu y, \dots) = \mu^\alpha f(x, y, \dots).$$

Ed invero, se la funzione (2) è in B indipendente da μ , essa avrà il valore che le compete per $\mu = 1$. Viceversa, se si verifica la (3) se ne deduce che la funzione (2) è indipendente da μ .

III. *Teorema di Eulero. Se, nell'insieme aperto A di sua definizione, la funzione f è differenziabile, condizione necessaria e sufficiente affinché essa sia in A omogenea e di grado α è che ivi si abbia sempre*

$$(4) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + \dots = \alpha f(x, y, \dots).$$

Ed invero, condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione (2) sia, in B , indipendente da μ , è che sia sempre ivi

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{1}{\mu^\alpha} f(\mu x, \mu y, \dots) \right] = 0,$$

e cioè

$$\mu x f_x(\mu x, \mu y, \dots) + \mu y f_y(\mu x, \mu y, \dots) + \dots - \alpha f(\mu x, \mu y, \dots) = 0,$$

relazione che equivale alla (4), poichè il punto $(\mu x, \mu y, \dots)$ è un qualunque punto di A .

IV. *Se D è un dominio di $S_{(n)}$, e se la funzione f vi è finita e continua con le sue derivate parziali del primo ordine, condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione sia omogenea e di grado α in D — FD è che, in tutto D , risulti verificata la (4).*

62. Teoremi di Cauchy, di Lagrange, di Rolle, di l'Hospital (seconda forma) per le funzioni di più variabili. — Le funzioni $f(x, y, \dots)$ e $g(x, y, \dots)$, entrambe definite nell'insieme \mathcal{A} di $\mathcal{S}(r)$, siano differenziabili in ogni punto di \mathbf{RA} . Siano $P(x, y, \dots)$ e $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots)$ due qualsivogliono punti di \mathbf{RA} , tali che il segmento PQ che li congiunge sia totalmente contenuto in \mathbf{RA} . Ponendo

$$\alpha = x + t \Delta x, \quad \beta = y + t \Delta y, \dots,$$

$$F(t) = f(\alpha, \beta, \dots), \quad G(t) = g(\alpha, \beta, \dots),$$

si ottengono le funzioni $F(t)$ e $G(t)$ della t , definite nell'intervallo $(0, 1)$, ed ivi derivabili, per le quali, dunque, vale il teorema di **Cauchy** (46, V). Esiste cioè un numero positivo θ minore di uno, per il quale si ha:

$$\begin{vmatrix} F'(\theta) & G'(\theta) \\ F(1) - F(0) & G(1) - G(0) \end{vmatrix} = 0.$$

Ma

$$F'(t) = f_x(\alpha, \beta, \dots) \Delta x + f_y(\alpha, \beta, \dots) \Delta y + \dots,$$

$$G'(t) = g_x(\alpha, \beta, \dots) \Delta x + g_y(\alpha, \beta, \dots) \Delta y + \dots,$$

onde segue, denotando con H il punto di coordinate $x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y, \dots$, il teorema di **Cauchy** (seconda forma) per le funzioni di più variabili:

I. Se le funzioni f e g sono entrambe differenziabili in ogni punto di \mathbf{RA} , e se il segmento dei punti $P(x, y, \dots)$ e $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots)$ è totalmente contenuto in \mathbf{RA} , esiste un punto H interno al segmento, per il quale si ha:

$$\begin{vmatrix} f_x(H) \Delta x + f_y(H) \Delta y + \dots & g_x(H) \Delta x + g_y(H) \Delta y + \dots \\ f(Q) - f(P) & g(Q) - g(P) \end{vmatrix} = 0.$$

Assai elegante è la forma vettoriale del teorema enunciato, si ha che:

I'. Se le funzioni f e g sono entrambe differenziali in ogni punto di \mathbf{RA} , e se il segmento dei punti $P(x, y, \dots)$ e $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots)$ è totalmente contenuto in \mathbf{RA} , esiste un punto H interno al segmento, nel quale il vettore

$$\begin{vmatrix} \text{grad} f(H) & \text{grad} g(H) \\ f(Q) - f(P) & g(Q) - g(P) \end{vmatrix}$$

o è nullo o è ortogonale al segmento PQ .

Il teorema di **Lagrange** (46, VI) applicato alla funzione derivabile $F(t)$ e all'intervallo $(0, 1)$ dà poi luogo al seguente *teorema di Lagrange (seconda forma) per le funzioni di più variabili*:

II. Se la funzione f è differenziabile in ogni punto di \mathbf{RA} , e se il segmento dei punti $P(x, y, \dots)$ e $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots)$ è totalmente contenuto in \mathbf{RA} , esiste un punto H interno al segmento per il quale si ha:

$$f(Q) - f(P) = f_x(H)\Delta x + f_y(H)\Delta y + \dots$$

Sotto forma vettoriale, indicando con $Q - P$ il vettore avente la direzione e la grandezza del segmento PQ e il verso del raggio di origine P che contiene il punto Q , si ha che:

II'. Esiste un punto H interno al segmento PQ , per il quale si ha:

$$f(Q) - f(P) = (Q - P) \times \text{grad}f(H).$$

Ne segue il *teorema di Rolle (seconda forma) per le funzioni di più variabili*:

III. Se la funzione f è differenziabile in ogni punto di \mathbf{RA} e se agli estremi del segmento PQ , totalmente contenuto in \mathbf{RA} , essa assume valori eguali, esiste un punto H interno al segmento nel quale il gradiente della funzione o è nullo o è ortogonale al segmento.

Dal teorema di **Cauchy** segue il notevole *teorema di l' Hospital (seconda forma) per le funzioni di più variabili*.

IV. Siano a, b, \dots numeri positivi e le funzioni $f(x, y, \dots), g(x, y, \dots)$ differenziabili in ogni punto interno al dominio rettangolare \mathbf{R} di punti estremi $P_0(x_0, y_0, \dots)$ e $P_1(x_0 + a, y_0 + b, \dots)$. Sia inoltre, in $\mathbf{R} - \mathbf{FR}$, $g(P) \neq 0$, $g_x(P) > 0$, $g_y(P) > 0, \dots$, mentre riesce

$$(1) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \text{ (su } \mathbf{R} - \mathbf{FR}) = \lim_{P \rightarrow P_0} g(P) \text{ (su } \mathbf{R} - \mathbf{FR}) = 0,$$

oppure

$$(2) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} |f(P)| \text{ (su } \mathbf{R} - \mathbf{FR}) = \lim_{P \rightarrow P_0} |g(P)| \text{ (su } \mathbf{R} - \mathbf{FR}) = \infty;$$

si ha allora che se i limiti

$$(3) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f_x(P)}{g_x(P)} \text{ (su } \mathbf{R} - \mathbf{FR}), \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f_y(P)}{g_y(P)} \text{ (su } \mathbf{R} - \mathbf{FR}), \dots,$$

sono, ciascuno, determinati (finiti o infiniti) e se coincidono, esiste (determinato) il limite

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P)}{g(P)} \text{ (su } \mathbf{R} - \mathbf{FR})$$

e coincide con i limiti (3).

Limitiamoci a dimostrare il teorema nell'ipotesi che sussistano le (1) e i limiti (3) abbiano il comune valore finito l . Comunque si assegni il numero positivo ε , si può allora costruire un intorno circolare C_ε di P_0 (su $\mathbf{R} - \mathbf{FR}$) tale che, per un qualsiasi suo punto H , le funzioni

$$(4) \quad \frac{f_x(H)}{g_x(H)}, \frac{f_y(H)}{g_y(H)}, \dots$$

hanno, tutte, valori sempre compresi fra $l - \varepsilon$ e $l + \varepsilon$. Poichè $g_x(H) > 0$, $g_y(H) > 0, \dots$, dette $\Delta x, \Delta y, \dots$ le più arbitrarie quantità positive, si avrà sempre, di conseguenza (in C_ε),

$$(5) \quad l - \varepsilon \leq \frac{f_x(H)\Delta x + f_y(H)\Delta y + \dots}{g_x(H)\Delta x + g_y(H)\Delta y + \dots} \leq l + \varepsilon.$$

Siano ora $P(x, y, \dots)$ un fissato punto di C_ε , affatto arbitrario, e $Q(x - \Delta x, y - \Delta y, \dots)$ un punto comunque variabile nell'interno del dominio rettangolare di punti estremi P_0 e P . Si ha sempre, per il teorema di **Cauchy**, qui ottenuto,

$$\frac{f(P) - f(Q)}{g(P) - g(Q)} = \frac{f_x(H)\Delta x + f_y(H)\Delta y + \dots}{g_x(H)\Delta x + g_y(H)\Delta y + \dots},$$

ove H è un certo punto interno al segmento QP ; ne segue, in virtù della (5),

$$l - \varepsilon \leq \frac{f(P) - f(Q)}{g(P) - g(Q)} \leq l + \varepsilon,$$

donde, passando al limite per Q tendente a P_0 ,

$$l - \varepsilon \leq \frac{f(P)}{g(P)} \leq l + \varepsilon.$$

Tale relazione, sussistendo per ogni punto P di C_ε e qualunque sia il numero positivo ε , dimostra quanto ci eravamo proposto.

Esercizio. Si dimostri che i teoremi I' e III sussistono inalterati quando al segmento PQ , congiungente i punti P e Q di \mathbf{RA} ,

si sostituisca un arco $C(P, Q)$, contenuto in RA , di una qualunque porzione di curva regolare.

63. Formola di Taylor per le funzioni di più variabili.—

La funzione $u = f(x, y, \dots)$, definita nell'insieme A di punti di $S(n)$, sia dotata, in ogni punto di RA , di tutte le derivate parziali d'ordine *comunque elevato*, finite e continue. Siano $P(x, y, \dots)$ e $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots)$ due arbitrarii punti di RA , il segmento dei quali sia totalmente contenuto ivi. Posto, come al n° precedente,

$$\alpha = x + t\Delta x, \quad \beta = y + t\Delta y, \dots, \quad F(t) = f(\alpha, \beta, \dots),$$

per la funzione $F(t)$ sussiste la formola di *Mac Laurin*:

$$(1) \quad F(t) = F(0) + \frac{t}{1!} F'(0) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(0) + \frac{t^n}{n!} F^{(n)}(\theta t),$$

ove t è un qualunque punto dell'intervallo $(0, 1)$ e θ una certa funzione, di t e di n , sempre positiva e minore di uno. La funzione $F(t)$ è funzione di t , composta per mezzo della f e delle funzioni α, β, \dots , lineari in t , si ha allora, in virtù dell'osservazione del n° 60,

$$d^i F = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta + \dots \right)^{(i)} = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial \beta} \Delta y + \dots \right)^{(i)} dt^i,$$

e, dividendo per dt^i , si ha infine:

$$F^{(i)}(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial \beta} \Delta y + \dots \right)^{(i)}.$$

Per $t=0$, le α, β, \dots si riducono, rispettivamente, a x, y, \dots e si ha pertanto, simbolicamente,

$$F^{(i)}(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \dots \right)^{(i)}.$$

Se ora rappresentiamo con ξ, η, \dots , rispettivamente le quantità $x + \theta t \Delta x, y + \theta t \Delta y, \dots$, si potrà porre

$$F^{(n)}(\theta t) = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial \eta} \Delta y + \dots \right)^{(n)},$$

ove, dopo avere sviluppato la potenza n^{ma} simbolica, bisogna pensare sostituiti gli argomenti ξ, η, \dots , rispettivamente, con le quantità $x + \theta t \Delta x, y + \theta t \Delta y, \dots$. Facendo infine nella (1), $t=1$, si ha:

$$(2) \quad f(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots) = f(x, y, \dots) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \dots \right) + \dots \\ + \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \dots \right)^{(n-1)} + R_n,$$

ove

$$R_n = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial \eta} \Delta y + \dots \right) \right]_{\substack{\xi = x + \theta \Delta x \\ \eta = y + \theta \Delta y \\ \dots \dots \dots}}$$

Tale formola costituisce appunto la *formola di Taylor per le funzioni di più variabili*. Facendo uso della notazione differenziale, la formola di *Taylor* si scrive, semplicemente, al modo seguente:

$$\Delta f = df + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \dots + \frac{d^{n-1} f}{(n-1)!} + R_n,$$

$$R_n = \left[\frac{d^n f}{n!} \right]_{\substack{x + \theta \Delta x \\ y + \theta \Delta y \\ \dots \dots \dots}}$$

Se indichiamo con $P_0(x_0, y_0, \dots)$ il punto dianzi indicato con $P(x, y, \dots)$ e con $P(x, y, \dots)$ il punto dianzi indicato con $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots)$, la formola (2) si scrive:

$$(3) \quad f(P) = f(P_0) + \sum_i^{1, n-1} \Pi_i(P) + R_n,$$

ove $\Pi_i(P)$ è un polinomio omogeneo, di grado i , negli argomenti $x - x_0, y - y_0, \dots$, precisamente si ha;

$$\Pi_i(P) = \sum_{pq\dots}^{0, i} \frac{f_{x^p y^q \dots} (P_0)}{p! q! \dots} (x - x_0)^p (y - y_0)^q \dots, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \\ p + q + \dots = i.$$

Si ha poi:

$$R_n = \sum_{pq\dots}^{0, n} \frac{f_{x^p y^q \dots} (H)}{p! q! \dots} (x - x_0)^p (y - y_0)^q \dots, \\ p + q + \dots = n,$$

avendo designato con H un certo punto *interno* al segmento $P_0 P$. Il punto P_0 chiamasi il *punto iniziale* della formola di *Taylor* (3).

Fissato P_0 in \mathbf{RA} , la formola (3) vale per qualunque punto P di \mathbf{RA} , per il quale il segmento $P_0 P$ è totalmente contenuto in \mathbf{RA} .

64*. Derivazione complessa per le funzioni complesse di una variabile complessa. — Sia

$$w = u(x, y, \dots) + i v(x, y, \dots)$$

una funzione complessa delle r variabili reali x, y, \dots , definita nell'insieme A di punti dello spazio $\mathcal{S}_{(r)}$. Se con \mathfrak{D} indichiamo una qualsiasi operazione di derivazione totale o parziale, o di differenziazione, di quelle fino ad ora definite, diremo che tale operazione dà, in un punto di \mathbf{RA} , un risultato determinato e finito sulla funzione complessa w , quando ciò avviene per ciascuna delle due funzioni reali $u(x, y, \dots)$ e $v(x, y, \dots)$. Porremo allora

$$\mathfrak{D}w = \mathfrak{D}u + i\mathfrak{D}v.$$

In particolare, dunque, diremo che la w , in un punto P di \mathbf{RA} , è dotata di derivata parziale di $(p + q + \dots)^{\text{mo}}$ ordine finita, ottenuta derivando p volte rispetto alla x , q volte rispetto alla y, \dots , quando ciò avviene per ciascuna delle due funzioni reali u e v , e porremo allora

$$\frac{\partial^{p+q+\dots} w}{\partial x^p \partial y^q \dots} = \frac{\partial^{p+q+\dots} u}{\partial x^p \partial y^q \dots} + i \frac{\partial^{p+q+\dots} v}{\partial x^p \partial y^q \dots}.$$

Così, si porrà

$$dw = du + idv = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \dots,$$

$$d^2w = d^2u + id^2v = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \dots,$$

.....

La funzione complessa $w = u(x, y, \dots) + iv(x, y, \dots)$ si dice *lipschitziana* (in un punto di A o uniformemente in A) o *differenziabile* (in un punto di $A.DA$) se tali sono le due funzioni reali $u(x, y, \dots)$ e $v(x, y, \dots)$. Una funzione complessa w lipschitziana in un punto di $A.DA$ è ivi continua. Una funzione complessa w differenziabile in un punto di $A.DA$ è ivi lipschitziana.

Supponiamo ora, in particolare, che la funzione complessa $w = u + iv$ sia funzione delle sole due variabili reali x e y , defi-

nita nell'insieme A di punti del piano (x, y) . La w può allora altresì essere concepita come funzione della variabile complessa $z = x + iy$ (cfr. il n° 24 del Cap. I) e si potrà scrivere allora

$$w = f(z),$$

quando si ponga

$$u(x, y) + iv(x, y) = f(z).$$

Del massimo interesse, per i risultati che offre e per le belle e fondamentali applicazioni che ne riceve in *Analisi*, è, per le funzioni complesse di variabile complessa, il procedimento della *derivazione complessa*, del quale ora vogliamo diffusamente trattare.

Cominceremo dall'enunciare il seguente teorema, la cui dimostrazione è immediata:

I. Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione complessa $w = f(z) = u + iv$, della variabile complessa $z = x + iy$, sia lipschitziana in un punto z di A è che si possano determinare due numeri positivi K_z e δ_z tali che, per ogni incremento Δz di z , su A , di modulo non superiore a δ_z il corrispondente incremento $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v$ della funzione, soddisfi alla limitazione

$$|\Delta w| \leq K_z |\Delta z|.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $w = f(z)$ sia uniformemente lipschitziana in A è che si possa assegnare un numero positivo K tale che per due qualsivogliano punti z' e z'' di A si abbia sempre

$$|f(z') - f(z'')| \leq K |z' - z''|.$$

Sia z un punto di A . DA e la funzione $w = f(z)$ sia ivi lipschitziana; i due limiti

$$(1) \quad \lim'_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}, \quad \lim''_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z},$$

diconsi, rispettivamente, la *massima* e la *minima derivata complessa*, su A , della funzione $w = f(z)$, nel punto z .

Se la funzione $w = f(z)$, nel punto z di A . DA , è lipschitziana ed ha ivi coincidenti le sue due derivate complesse; essa dicesi *derivabile (su A) in modo complesso*, nel punto z , od anche *mo-*

nogena (su A) o *sinettica* (su A) nel detto punto. Il valore comune dei due limiti (1), cioè il limite

$$(2) \quad \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z},$$

chiamasi la *derivata complessa* (su A) della funzione $w = f(z)$, nel punto z . Sussiste il *teorema fondamentale*:

II. *Condizione necessaria e sufficiente per le derivabilità complessa (su A) della funzione $w = f(z) = u + iv$, nel punto $z = x + iy$ di RA è che la funzione sia in questo punto differenziabile e che ivi si abbia:*

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

La condizione è necessaria. Ed inverso, se

$$\lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = a + ib,$$

posto

$$\omega(z, \Delta z) \begin{cases} = \frac{\Delta w}{\Delta z} - (a + ib), & \text{per } \Delta z \neq 0, \\ = 0, & \text{per } \Delta z = 0. \end{cases}$$

si ha

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta w = (a + ib)\Delta z + \omega(z, \Delta z)\Delta z, \\ \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \omega(z, \Delta z) = 0. \end{cases}$$

Sia α la parte reale e β il coefficiente dell'immaginario per la funzione ω ; dalle (4) si trae

$$\begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x - b\Delta y + \alpha\Delta x - \beta\Delta y, \\ \Delta v &= b\Delta x + a\Delta y + \beta\Delta x + \alpha\Delta y, \\ \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \alpha &= \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \beta = 0, \end{aligned}$$

ciò che prova la differenziabilità, nel punto z , di u e di v (cioè di w) ed inoltre le (3). La condizione è sufficiente. Ed inverso, se w è differenziabile nel punto z di RA , se cioè sono ivi differenziabili entrambe le funzioni u e v , e se inoltre riescono, in questo punto, verificate le (3), posto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b,$$

si può scrivere che:

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \xi |\Delta z|,$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \eta |\Delta z|,$$

ove

$$\lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \xi = \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \eta = 0.$$

Ne segue

$$\Delta w = (a + ib)\Delta z + (\xi + i\eta) |\Delta z|,$$

e quindi

$$\lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = a + ib.$$

Le equazioni (3) diconsi le *equazioni della derivabilità complessa* (o di *monogenia*). Esse equivalgono all'unica seguente:

$$(3') \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

La derivata complessa nel punto z della funzione complessa $w = f(z)$, si denota con uno dei simboli $f'(z)$, $Df(z)$. Nella dimostrazione del teorema II è contenuta quella del seguente:

III. *Se la funzione $w = f(z)$ è derivabile, in modo complesso, nel punto z di RA , per la sua derivata complessa si ha:*

$$(5) \quad f'(z) = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Sussiste (cfr. 56, VII) il teorema:

IV. *Condizione sufficiente affinché la funzione $w = f(z) = u + iv$, sia derivabile in modo complesso nel punto z interno all'insieme A , è che in un intorno circolare del punto z , contenuto in A , la funzione sia parzialmente derivabile tanto rispetto alla x che rispetto alla y , con derivate parziali continue, nel punto z , ed ivi verificanti la (3').*

Quando non ci sia pericolo di confusione, parlando, in questo e nel successivo articolo, di derivabilità e di derivata per una funzione complessa di variabile complessa, intenderemo sempre di menzionare la derivabilità o la derivata complessa.

La funzione complessa $w = f(z)$ sia derivabile in ogni punto di

A. DA. In questo insieme risulta allora definita una nuova funzione complessa della variabile complessa z : quella che in ciascun punto di **A. DA** ha il valore della derivata di $f(z)$. Tale funzione chiamasi la *funzione derivata della $f(z)$* , oppure, semplicemente, la *derivata della $f(z)$* . Essa risulta indicata con una delle notazioni $f'(z)$ o $Df(z)$. Una funzione complessa che abbia valore costante in un insieme **A**, è derivabile (su **A**) in ogni punto di **A. DA** e vi ha sempre derivata nulla. Viceversa, (57, III) se **D** è un dominio internamente connesso, ogni funzione complessa $w = f(z)$, continua in **D** e derivabile in ogni punto interno a **D**, con derivata sempre nulla, ha valore costante in tutto **D**. Pertanto: *Una funzione complessa $w = f(z)$, continua in tutto **D**, ovunque derivabile nell'interno di **D**, della quale sia assegnata ivi la derivata complessa, è determinata, in tutto **D**, a meno di una costante additiva.* Ma dal citato teorema III del n° 57 segue, di più, che:

V. *Se una funzione complessa $w = f(z)$ della variabile complessa z , definita in un dominio internamente connesso **D**, ivi continua e derivabile in ogni punto interno di **D**, è tale che la sua parte reale u e il coefficiente v dell'immaginario soddisfano, nell'interno di **D**, identicamente ad una relazione del tipo*

$$(6) \quad \varphi(u, v) = 0,$$

ove $\varphi(u, v)$ è una funzione differenziabile con derivate parziali del primo ordine mai simultaneamente nulle, la w ha valore costante in tutto **D**.

Dalla (6) si ricava, invero, in ogni punto interno di **D**,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

cioè, in virtù delle (3),

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

e quindi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

In particolare, dunque, la funzione complessa w non può assu-

mere, nell'interno di D , valori sempre reali (puramente immaginari), senza ridursi, in tutto D , ad una costante reale (puramente immaginaria); non può assumere valori di modulo costante senza ridursi, in tutto D , ad una costante.

Se $f'(z)$, a sua volta, per esempio, in ogni punto di RA , è derivabile in modo complesso, la derivata $f''(z)$ di $f'(z)$ si dirà la *derivata seconda* (o *del secondo ordine*) di $f(z)$, e perciò la $f'(z)$ si dirà anche la *derivata prima* di $f(z)$. E così, successivamente, si perviene, alla definizione, per esempio in RA , della *derivata n^{ma}* (o *d'ordine n*) $f^{(n)}(z)$ della $f(z)$.

Ora un'importante proprietà, scoperta dal **Goursat**, delle funzioni complesse derivabili è la seguente: *Se la funzione complessa $w = f(z)$ della variabile complessa z è derivabile in ogni punto dell'insieme aperto A , essa possiede le derivate, finite e continue, di ordine comunque elevato, in ogni punto di A .*

Noi dimostreremo in seguito, nella seconda parte del corso, la proprietà enunciata, supponendo però non soltanto che la derivata prima $f'(z)$ esiste ed è finita in ogni punto dell'insieme aperto A , ma anche che essa è continua in ogni tale punto. Una tale funzione sarà detta una *funzione analitica monodroma* nell'insieme aperto A . Per semplificare noi diremo che la *funzione è analitica*, omettendo il secondo attributo di *monodroma*. Ma fin da ora possiamo enunciare il teorema seguente che subito discende dal teorema II:

VI. *Se la funzione $w = f(z)$ è derivabile in modo complesso in ogni punto dell'insieme RA , ed è anche, in ogni tale punto, parzialmente derivabile rispetto a ciascuna delle variabili x e y , con tutte le derivate parziali, fino a quelle incluse d'ordine n , finite e continue, la funzione $f(z)$ possiede in RA , le derivate complesse $f''(z)$, $f'''(z)$, ..., $f^{(n)}(z)$, finite e continue.*

Si osservi che, nella definizione di una funzione complessa $w = f(z)$, derivabile in ogni punto di RA , nessuna delle due funzioni u e v può essere arbitrariamente assegnata anche se ci si limita a considerare (ciò che del resto, almeno per i punti interni, è una necessità come vedremo più tardi) le funzioni dotate in RA di derivate parziali prime e seconde finite e continue. Una condizione alla quale devono, di necessità, soddisfare la u e la v è espressa dal teorema seguente:

VII. Se la funzione complessa $w = f(z) = u + iv$ è derivabile in modo complesso in ogni punto di \mathbf{RA} ed inoltre è ivi dotata della derivata parziale $\partial^2 w / \partial x \partial y$, finita e continua, le funzioni u e v possiedono tutte le derivate parziali del secondo ordine, finite e continue in \mathbf{RA} e si ha ivi identicamente

$$(7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Ed invero, in virtù delle ipotesi, poichè, in \mathbf{RA} , sussistono le (3), ne segue

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Si ha inoltre che:

VIII. Una funzione complessa, continua in un dominio \mathbf{D} internamente connesso e derivabile in ogni punto interno di \mathbf{D} , della quale, in ciascuno di tali punti, è assegnata la parte reale (è assegnato il coefficiente dell'immaginario) riesce determinata in tutto \mathbf{D} , a meno di una costante additiva puramente immaginaria (reale).

Ed invero, se, per esempio, le due funzioni complesse $f_1(z)$ e $f_2(z)$, continue in \mathbf{D} e derivabili in ogni punto interno di \mathbf{D} , hanno, in ciascuno di questi punti, la medesima parte reale, la funzione $f_1(z) - f_2(z)$ si riduce (teor. V) in tutto \mathbf{D} ad una costante puramente immaginaria. Così, per esempio, tutte le funzioni complesse derivabili, aventi per parte reale $x^2 - y^2$ sono date dalla formola:

$$x^2 - y^2 + 2xyi + ci = z^2 + ci,$$

ove c è una costante reale arbitraria.

Differenziali per le funzioni complesse derivabili. Sia $w = f(z)$ una funzione complessa derivabile in \mathbf{RA} . Per il differenziale della funzione, in un punto z di \mathbf{RA} , si ha:

$$dw = df = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy = \frac{\partial w}{\partial x} (dx + idy) = f'(z) dz,$$

e quindi

$$(9) \quad dw = df = f'(z) dz,$$

$$(10) \quad f'(z) = \frac{df}{dz}.$$

Si ha poi $dz = \Delta z$ e le (4) danno che:

$$\Delta w = dw + \omega \Delta z, \quad \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \omega = 0;$$

pertanto, se $f'(z) \neq 0$, il differenziale $dw = f'(z)dz$ di una funzione complessa derivabile dà la parte principale dell'incremento della funzione.

La variabile z sin ora funziona delle variabili reali ξ, η, \dots , definita in un certo insieme \mathbf{B} dello spazio $\mathcal{S}_{(q)}$. La funzione z , in ogni punto di \mathbf{RB} , sia parzialmente derivabile rispetto a ciascuna delle variabili ξ, η, \dots . Supporremo che mentre il punto (ξ, η, \dots) varia in \mathbf{RB} , il corrispondente punto z non esca mai dall'insieme \mathbf{RA} , in ogni punto del quale la funzione complessa $w = f(z)$ è derivabile. Sia (ξ, η, \dots) un fissato punto di \mathbf{RB} e diciamo $\Delta \xi$ un incremento della ξ , Δz il corrispondente incremento di z , Δw l'incremento di w ; si ha, per le (4),

$$\frac{\Delta w}{\Delta \xi} = f'(z) \frac{\Delta z}{\Delta \xi} + \omega(z, \Delta z) \frac{\Delta z}{\Delta \xi}, \quad \lim_{|\Delta \xi| \rightarrow 0} \omega = 0,$$

e quindi

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial \xi}.$$

Allo stesso modo si dimostra che

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial \eta}, \dots;$$

ne segue

$$dw = \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta + \dots = f'(z) \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta + \dots \right) = f'(z) dz.$$

Adunque:

IX. La relazione (9) fra il differenziale dw della funzione complessa derivabile $w = f(z)$ e il differenziale dz dell'argomento, sussiste anche se z è funzione di quante si vogliano altre variabili reali, parzialmente derivabile rispetto a ciascuna di queste.

Sia, in particolare, z funzione della sola variabile reale t , e si abbia

$$z = \gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t).$$

Se il luogo $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$ è una curva regolare C , si dice che $z = \gamma(t)$ è l'equazione complessa della curva regolare C . I differenziali

$$dz = [\alpha'(t) + i\beta'(t)] dt, \quad dw = f'(z) dz,$$

diconsi allora presi sulla curva regolare C .

Ritornando alle condizioni generali contemplate nel teorema IX, come conseguenza immediata del teor. II e del teor. II del n.º 57, si ha il seguente:

X. Se z è funzione differenziabile delle variabili reali ξ, η, \dots , lo è pure la funzione complessa derivabile $w = f(z)$.

Derivazione delle funzioni di funzioni. Sia ora B un insieme di punti del piano (ξ, η) e diciamo $\zeta = \xi + i\eta$ la variabile complessa su questo piano. Sia $z = \varphi(\zeta)$ una funzione complessa della ζ , derivabile in RB e tale che mentre il punto ζ varia in RB , il punto $z = \varphi(\zeta)$ varia in RA , ove è derivabile la funzione $w = f(z)$. La w è allora una funzione delle ζ , definita in RB , composta per mezzo della f e della φ . Dico che w riesce una funzione di ζ derivabile in modo complesso. Si ha, invero, per le (4).

$$\frac{\Delta w}{\Delta \zeta} = f'(z) \frac{\Delta z}{\Delta \zeta} + \omega(z, \Delta z) \frac{\Delta z}{\Delta \zeta}, \quad \lim_{|\Delta \zeta| \rightarrow 0} \omega = 0,$$

e quindi

$$\lim_{|\Delta \zeta| \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta \zeta} = f'(z) \varphi'(\zeta).$$

Adunque:

XI. Se $w = f(z)$ e $z = \varphi(\zeta)$, se, nelle ipotesi poste, w è funzione derivabile di z e z è funzione derivabile di ζ , riesce w funzione derivabile di ζ e si ha,

$$\frac{dw}{d\zeta} = f'(z) \varphi'(\zeta), \quad dw = f'(z) dz.$$

Derivazione complessa delle funzioni elementari. Per la derivazione complessa delle funzioni complesse di variabile com-

pressa, sussistono inalterate, con identiche dimostrazioni, le regole di derivazione già date (43; I, II, III, IV, V) per le funzioni reali di variabile reale. Passiamo ora alla derivazione complessa delle funzioni elementari di variabile complessa definite al n° 52.

XII. Se n è un numero intero e positivo, si ha :

$$\frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1} + \binom{n}{2} z^{n-2} \Delta z + \dots$$

e quindi

$$\frac{d(z^n)}{dz} = nz^{n-1},$$

per qualunque punto z del piano complesso.

XIII. Si ha $e^z = e^x \cos y + i e^x \sen y$. Le funzioni $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sen y$ sono entrambe differenziabili (hanno infatti derivate parziali continue) in ogni punto del piano, e verificano le (3). Pertanto la funzione e^z è derivabile in modo complesso per qualunque valore di z e si ha :

$$\frac{de^z}{dz} = \frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y) + i \frac{\partial}{\partial x} (e^x \sen y) = e^z.$$

XIV. Per $z \neq 0$, si ha

$$\log z = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \operatorname{arc} \begin{cases} \cos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sen \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{cases} \quad (-\pi < \operatorname{arco} \leq \pi),$$

e si constata subito perciò la derivabilità complessa di $\log z$, in ogni punto del piano complesso per il qual non sia $y = 0$ e $x \leq 0$. Si trova

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{1}{z}.$$

XV. Si ha $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$, per $z \neq 0$. Quindi, in virtù di XI, XIII, XIV, si può asserire che, qualunque sia la costante reale o complessa α , la funzione z^α è derivabile in modo complesso in ogni punto del piano per il quale non sia $y = 0$ e $x \leq 0$, e si ha

$$\frac{d(z^\alpha)}{dz} = \alpha z^{\alpha-1}.$$

XVI. Si ha $\sen z = \sen(x + iy) = \sen x \cosh y + i \cos x \sen hy$, $\cos z = \cos x \cosh y - i \sen x \sen hy$. E si constata perciò subito la derivabi-

lità complessa di $\operatorname{sen} z$ e di $\operatorname{cos} z$ in ogni punto del piano complesso. Si ha :

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z = \operatorname{cos} z, \quad \frac{d}{dz} \operatorname{cos} z = -\operatorname{sen} z.$$

Ne segue, per la regola di derivazione del quoto, la derivabilità complessa di $\operatorname{tang} z$, in ogni punto del piano complesso che non coincida con nessuno dei punti dell'asse x di ascisse $(2n+1)\pi/2$. Si trova

$$\frac{d}{dz} \operatorname{tang} z = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 z}.$$

XVII. Poichè

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} z = \frac{1}{i} \log(i + z\sqrt{1-z^2}), \quad \operatorname{arc} \operatorname{tang} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz},$$

si trova (in virtù di XIV e XV).

$$\frac{d}{dz} \operatorname{arcsen} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \text{per } y \neq 0 \text{ e per } |x| < 1 \text{ se } y = 0,$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{arctang} z = \frac{1}{1+z^2}, \quad \text{per } x \neq 0 \text{ e per } |y| < 1 \text{ se } x = 0.$$

Le funzioni z^n (n intero non negativo), e^z , $\operatorname{sen} z$, $\operatorname{cos} z$, sono analitiche in tutto il piano. La funzione z^{-n} (n intero positivo) è analitica nell'insieme aperto ottenuto dal piano privato del punto $z=0$. La funzione $\operatorname{tang} z$ è analitica nell'insieme aperto ottenuto dal piano privato dei punti $(2k+1)\pi/2$ (k intero). Le funzioni $\log z$ e z^α (α non intero) sono analitiche nell'insieme aperto ottenuto dal piano privato dei punti $y=0$, $x \leq 0$. La funzione $\operatorname{arcsen} z$ è analitica nell'insieme aperto ottenuto dal piano privato dei punti $y=0$, $|x| \geq 1$. La funzione $\operatorname{arctang} z$ è analitica nell'insieme aperto ottenuto dal piano privato dei punti $x=0$, $|y| \geq 1$.

Funzioni armoniche in due variabili. Ogni funzione reale $u = u(x, y)$, delle due variabili reali x e y , definita in un qualsiasi dominio D , ivi continua e dotata, in ogni punto interno di D , di tutte le derivate parziali dei due primi ordini, finite e continue, risultando inoltre, in tutto $D - FD$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

dicesi *funzione armonica in D* . Due funzioni u e v , entrambe armoniche in D , per le quali si ha sempre, in $D - FD$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

oppure

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

diconsi *fra di loro coniugate*. Si ha dunque, in virtù di II e di VII, che la parte reale u e il coefficiente dell'immaginario v di una funzione complessa $w = f(z)$, continua in D e derivabile in $D - FD$ (nelle ulteriori ipotesi del teorema VII, che sono del resto, come vedremo, una conseguenza della continuità di $f'(z)$ in ogni punto di $D - FD$) sono due funzioni canoniche in D , ivi fra di loro coniugate. Pertanto, la parte reale e il coefficiente dell'immaginario delle funzioni elementari di variabile complessa (XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII) sono altrettanti esempi di funzioni armoniche coniugate.

Funzioni derivabili omogenee di variabile complessa.

Una funzione complessa $w = u(x, y, \dots) + iv(x, y, \dots)$ delle r variabili reali x, y, \dots dicesi *omogenea e di grado α* , quando tali sono le due funzioni reali $u(x, y, \dots)$, $v(x, y, \dots)$. Si dimostri, per esercizio, che: *Tutte le funzioni complesse derivabili della variabile complessa z , omogenee e di grado α , si hanno ponendo*

$$w = kz^\alpha,$$

ove k è una costante qualsiasi. Se α (che è stato supposto sempre reale) è un numero intero e positivo n , la parte reale e il coefficiente dell'immaginario della potenza z^n danno i *polinomi armonici di grado n* . Essi sono omogenei e fra di loro coniugati. I polinomi armonici, rispettivamente, dei gradi 0, 1, 2, 3, ... sono

$$1; x, y; x^2 - y^2, 2xy; x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3; \dots$$

65.* Derivazione complessa per le funzioni complesse di più variabili complesse. — Nei piani complessi $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$, sopra i quali rappresentiamo, rispettivamente, le variabili complesse

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \dots, \quad z_r = x_r + iy_r,$$

siano dati, rispettivamente, gli insiemi di punti A_1, A_2, \dots, A_r . Comunque si prenda un punto z_1 in A_1 , un punto z_2 in A_2, \dots , un punto z_r in A_r , ne risulti sempre, corrispondentemente, determinato un numero complesso w , si ha allora che (Cap. I, n° 24) w è una funzione complessa delle variabili complesse z_1, z_2, \dots, z_r definita negli insiemi A_1, A_2, \dots, A_r . Porremo

$$w = f(z_1, z_2, \dots, z_r).$$

La parte reale u e il coefficiente v dell'immaginario, della funzione w , saranno due funzioni reali:

$u = u(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r)$, $v = v(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r)$, delle $2r$ variabili reali $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r$, definite nell'insieme A di punti, dello spazio $S_{(2r)}$, descritto dal punto $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r)$ al variare, in tutti i modi possibili ed indipendentemente l'uno dall'altro, dei punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_r, y_r)$, rispettivamente, in A_1 , in A_2, \dots , in A_r . Diremo che la r^{pla} di numeri complessi (z_1, z_2, \dots, z_r) rappresenta un punto di A , quando i punti z_1, z_2, \dots, z_r sono, rispettivamente, in A_1 , in A_2, \dots , in A_r . Evidentemente, se (z_1, z_2, \dots, z_r) è un punto di RA , i punti z_1, z_2, \dots, z_r sono, rispettivamente, di RA_1, RA_2, \dots, RA_r , e viceversa. Sia $(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \dots, z_r^{(0)})$ un arbitrario fissato punto di RA ; diremo che la funzione w è in quel punto *parzialmente derivabile in modo complesso, rispetto alla variabile complessa z_k ($k=1, 2, \dots, r$)* se la seguente funzione dell'unica variabile z_k :

$$w_k(z_k) = f(z_1^{(0)}, \dots, z_{k-1}^{(0)}, z_k, z_{k+1}^{(0)}, \dots, z_r^{(0)}),$$

è derivabile, nel punto $z_k^{(0)}$, in modo complesso. La derivata complessa della funzione $w_k(z_k)$ nel punto $z_k^{(0)}$ chiamasi la *derivata (prima) parziale complessa della funzione w rispetto alla variabile z_k* , nel punto $(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \dots, z_k^{(0)})$. Tale derivata della funzione $w = f(z_1, z_2, \dots, z_r)$ si denota con uno dei simboli seguenti:

$$w_{z_k}, \quad \frac{\partial w}{\partial z_k}; \quad f_{z_k}, \quad \frac{\partial f}{\partial z_k}.$$

Si ha, evidentemente, il teorema:

I. *Condizione necessaria e sufficiente affinché, in un punto $(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \dots, z_r^{(0)})$ di RA , la funzione $w = f(z_1, z_2, \dots, z_r) = u + iv$ sia deri-*

vabile, in modo complesso, rispetto a ciascuna variabile, è che, per ogni valore dell'indice k , la w sia, nel punto $(x_k^{(0)}, y_k^{(0)})$, funzione differenziabile di x_k e y_k , e che risulti inoltre

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad \text{in } (x_k^{(0)}, y_k^{(0)}), \\ (k = 1, 2, \dots, r),$$

cioè

$$(1') \quad \frac{\partial w}{\partial x_k} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y_k}, \quad \text{in } (x_k^{(0)}, y_k^{(0)}), \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Si avrà allora

$$(2) \quad \frac{\partial w}{\partial z_k} = \frac{\partial w}{\partial x_k} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y_k}, \quad \text{in } (x_k^{(0)}, y_k^{(0)}), \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Se la funzione $w = f(z_1, z_2, \dots, z_r)$ è, in \mathbf{RA} , parzialmente derivabile, in modo complesso, rispetto a ciascuna variabile z_1, z_2, \dots, z_r , per il differenziale $dw = df$ della funzione si avrà:

$$(3) \quad dw = df = \sum_k^{1, r} \frac{\partial w}{\partial z_k} dz_k = \sum_k^{1, r} \frac{\partial w}{\partial z_k} \Delta z_k;$$

ed invero, $dz_k = \Delta z_k$,

$$dw = \sum_k^{1, r} \left(\frac{\partial w}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial w}{\partial y_k} dy_k \right) = \sum_k^{1, r} \frac{\partial w}{\partial x_k} (dx_k + i dy_k) = \sum_k^{1, r} \frac{\partial w}{\partial z_k} dz_k.$$

La funzione w , supposta parzialmente derivabile rispetto a ciascuna variabile complessa z_1, z_2, \dots, z_k , sia inoltre differenziabile quando venga riguardata come funzione delle $2r$ variabili reali $x_1, y_1, \dots, x_r, y_r$. Se $\Delta z_1 = \Delta x_1 + i \Delta y_1, \dots, \Delta z_r = \Delta x_r + i \Delta y_r$ sono incrementi, su \mathbf{A} , delle coordinate z_1, \dots, z_r di un punto di \mathbf{RA} , si ha allora, se i moduli degli incrementi sono convenientemente limitati,

$$\Delta w = \sum_k^{1, r} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \Delta x_k + \frac{\partial u}{\partial y_k} \Delta y_k \right) + \alpha \sum_k^{1, r} (|\Delta x_k| + |\Delta y_k|) + \\ + i \sum_k^{1, r} \left(\frac{\partial v}{\partial x_k} \Delta x_k + \frac{\partial v}{\partial y_k} \Delta y_k \right) + i\beta \sum_k^{1, r} (|\Delta x_k| + |\Delta y_k|),$$

ove, posto

$$\tau = \sum_k^{1, r} (|\Delta x_k| + |\Delta y_k|),$$

riesce :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\tau \rightarrow 0} \beta = 0.$$

Ne segue [in virtù delle (2) e (3)]

$$(4) \quad \Delta w = dw + \omega \sigma,$$

ove

$$\sigma = \sum_k^{1,r} |\Delta z_k|,$$

$$\omega \begin{cases} = (\alpha + i\beta) \frac{\tau}{\sigma} & \text{per } \sigma \neq 0, \\ = 0 & \text{per } \sigma = 0, \end{cases}$$

$$(5) \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} \omega = 0.$$

Pertanto :

II. Se la funzione $w = u + iv$, delle variabili complesse z_1, z_2, \dots, z_r , è differenziabile nel punto (z_1, z_2, \dots, z_r) di \mathbf{RA} , ed è inoltre ivi parzialmente derivabile, in modo complesso, rispetto a ciascuna variabile, fra il suo incremento e il suo differenziale, dato dalla (3), sussistono le relazioni (4) e (5).

Le variabili z_1, z_2, \dots, z_r siano, alla loro volta, funzioni delle variabili complesse $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1, \zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2, \dots, \zeta_q = \xi_q + i\eta_q$, definite negli insiemi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_q$, e diciamo \mathbf{B} l'insieme dei punti, dello spazio $\mathcal{S}_{(2q)}$ descritto dal punto $(\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_q, \eta_q)$ al variare, in tutti i modi possibili, dei punti $(\xi_1, \eta_1), \dots, (\xi_q, \eta_q)$, rispettivamente, in $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_q$. Supponiamo che, al variare di $(\zeta_1, \dots, \zeta_q)$ in \mathbf{RB} , il corrispondente punto (z_1, \dots, z_r) non esca da \mathbf{RA} . Si ha allora che w riesce una funzione delle variabili ζ_1, \dots, ζ_q , definita negli insiemi $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_q$, composta per mezzo della f e delle z_1, z_2, \dots, z_r . Si deduce, immediatamente dalla (4), al solito modo, il teorema:

III. Se la w è in \mathbf{RA} funzione delle z_1, z_2, \dots, z_r , differenziabile e parzialmente derivabile in modo complesso; se le z_1, z_2, \dots, z_r sono in \mathbf{RB} , funzioni delle $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_q$ parzialmente derivabili in modo complesso, tale sarà pure la funzione w , e si avrà:

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta_h} = \sum_k^{1,r} \frac{\partial w}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial \zeta_h}, \quad (h = 1, 2, \dots, q), \quad dw = \sum_k^{1,r} \frac{\partial w}{\partial z_k} dz_k.$$

Per quanto poi riguarda la parziale derivabilità complessa, d'ordine superiore al primo, della funzione w , dal teorema I subito discende il seguente:

IV. *Se la funzione $w = f(z_1, z_2, \dots, z_r)$ è, una prima volta, parzialmente derivabile, in modo complesso, in ogni punto di RA , rispetto a ciascuna delle variabili z_1, z_2, \dots, z_r , ed è anche, in ogni tale punto, parzialmente derivabile rispetto a ciascuna delle variabili $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r$, con tutte le derivate parziali, fino a quelle d'ordine n , finite e continue, supposto che per i numeri interi non negativi a_1, a_2, \dots, a_r , quali essi si siano, si abbia $a_1 + a_2 + \dots + a_r = n$, sottoponendo la funzione w , alla operazione di parziale derivazione complessa, in tutto e promiscuamente, a_1 volte rispetto alla z_1 , a_2 volte rispetto alla z_2, \dots , a_r volte rispetto alla z_r , si avrà sempre, successivamente, un risultato finito ben determinato, e si arriverà alla ben determinata derivata parziale complessa della w , da denotarsi col simbolo:*

$$\frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_r} w}{\partial z_1^{a_1} \partial z_2^{a_2} \dots \partial z_r^{a_r}}.$$

Sia A un insieme aperto, siano cioè tali gli insiemi A_1, A_2, \dots, A_r . La funzione $w = f(z_1, z_2, \dots, z_r)$, definita in A , si dirà ivi **analitica monodroma** se essa, in ogni punto di A , è dotata delle derivate parziali complesse del primo ordine, finite e continue. Una funzione analitica monodroma è (56, VII) differenziabile in ogni punto dell'insieme aperto A . In altra parte del corso si dimostrerà che: *Ogni funzione analitica monodroma in un insieme (aperto) A è, in ogni punto di A , dotata di derivate parziali rispetto alle variabili reali $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r$, (e di derivate parziali complesse) d'ordine comunque elevato, finite e continue.*



CAPITOLO III.

CALCOLO DELLE FUNZIONI. — FUNZIONI IMPLICITE. — CAMBIAMENTO
DELLE VARIABILI. — MASSIMI E MINIMI.

§ 1. Calcolo delle funzioni.

67 **Preliminari.** — Siano A il più arbitrario insieme di punti dello spazio $S_{(r)}$, a r dimensioni, e $f(P)$ una funzione reale del punto P , definita in A . Si dice che si è *calcolata in A la funzione $f(P)$* oppure che si è *conseguito in A il calcolo della funzione $f(P)$* , quando si siano ottenute due successioni :

$$(1) \quad u_1(P), u_2(P), \dots, u_n(P), \dots,$$

$$(2) \quad v_1(P), v_2(P), \dots, v_n(P), \dots;$$

di funzioni *ben note* in tutto A , tali che, per ogni punto P di A , risulti

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(P) = f(P), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(P) = f(P),$$

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} |f(P) - u_n(P)| \\ |f(P) - v_n(P)| \end{array} \right\} \leq |v_n(P) - u_n(P)| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Si dice allora che la funzione $u_n(P)$ [o la funzione $v_n(P)$] *rappresenta la funzione $f(P)$* o *approssima la funzione $f(P)$* , in A , con un *errore d'approssimazione* non superiore a $|v_n(P) - u_n(P)|$. Se, in un certo punto P di A , è $u_n(P) \leq f(P)$, risulterà $v_n(P) \geq f(P)$, si dice allora che, in P , la u_n *approssima per difetto* la $f(P)$, la v_n *per eccesso*.

Supponiamo che si sia riusciti a costruire due successioni :

$$(1) \quad u_1(P), u_2(P), \dots, u_n(P), \dots,$$

$$(5) \quad \sigma_1(P), \sigma_2(P), \dots, \sigma_n(P), \dots,$$

di funzioni *ben note* in tutto A , tali che, essendo le funzioni della seconda successione mai negative in A , per ogni punto P di A riesca :

$$(6) \quad |f(P) - u_n(P)| \leq \sigma_n(P) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(P) = 0,$$

allora, evidentemente, con le due successioni: Con la (1) e con la seguente:

$$u_1(P) + \sigma_1(P), u_2(P) + \sigma_2(P), \dots, u_n(P) + \sigma_n(P), \dots,$$

si consegue, in \mathcal{A} , il calcolo della f . Viceversa, note le successioni (1) e (2) per le quali si verificano le (3) e (4), posto $\sigma_n = |u_n - v_n|$, le (1) e (5) danno due successioni verificanti le (6). Pertanto, il problema di calcolare, in \mathcal{A} , la funzione $f(P)$, equivale perfettamente a quello di costruire le due successioni (1) e (5), verificanti le (6), di note funzioni.

Se le successioni (1) e (5) verificano le (6), la serie

$$u_1(P) + [u_2(P) - u_1(P)] + \dots + [u_n(P) - u_{n-1}(P)] + \dots,$$

di note funzioni, converge in ogni punto P di \mathcal{A} ed ha per somma $f(P)$, mentre il modulo del resto $R_n(P)$ della serie, relativo al termine n^{mo} , non supera la nota funzione infinitesima $\sigma_n(P)$. Viceversa, se la serie

$$(7) \quad a_1(P) + a_2(P) + \dots + a_n(P) + \dots$$

di funzioni note in tutto \mathcal{A} converge, in ogni punto di \mathcal{A} , verso la funzione $f(P)$, e la successione (5) di funzioni, per esse note in tutto \mathcal{A} , è tale che si abbia sempre ivi:

$$(8) \quad |R_n(P)| = |a_{n+1}(P) + a_{n+2}(P) + \dots| \leq \sigma_n(P), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(P) = 0,$$

posto

$$u_n(P) = a_1(P) + a_2(P) + \dots + a_n(P),$$

le successioni (1) e (5) verificano le (6). Pertanto, il problema di calcolare, in \mathcal{A} , una funzione $f(P)$ equivale perfettamente a quello della costruzione della serie (7) di note funzioni, convergente in \mathcal{A} verso la funzione $f(P)$, e della successione (5) di note funzioni non negative verificanti le (8).

Adunque, nel calcolo di una funzione in un insieme \mathcal{A} , interviene sempre la considerazione di serie e di successioni di funzioni convergenti in ogni punto dell'insieme. Di tali serie e successioni vogliamo diffusamente occuparci in questo paragrafo.

67. Convergenza uniforme delle successioni e delle serie di funzioni. — Supponiamo che la successione

$$(1) \quad u_1(P), u_2(P), \dots, u_n(P), \dots,$$

di funzioni definite nell'insieme A di $S_{(r)}$, sia convergente in ogni punto di A . Si ha allora che (cfr. n° 8, Cap. I) comunque si assegni un punto P di A e un numero positivo ε , esisterà sempre un numero naturale ν tale che, se h e k sono due arbitrari numeri naturali maggiori di ν , riesce

$$|u_h(P) - u_k(P)| \leq \varepsilon.$$

Ogni numero naturale maggiore di ν gode della medesima proprietà, indicheremo con ν il più piccolo numero naturale cosiffatto. Tale numero riesce una funzione $\nu(P, \varepsilon)$ ben definita nell'insieme B di $S_{(r+1)}$ determinato dalle condizioni:

$$P \text{ è in } A, \varepsilon > 0.$$

La funzione $\nu(P, \varepsilon)$ non assume che valori interi e positivi; or bene: Se, comunque si sia fissato il numero positivo ε , avviene sempre che la funzione $\nu(P, \varepsilon)$, al variare di P in tutto A , non assume che un numero limitato di valori, se cioè essa riesce sempre funzione di P , limitata in A , la successione (1), convergente in A , dicesi *ivi convergente uniformemente*.

Una serie

$$(2) \quad \alpha_1(P) + \alpha_2(P) + \dots + \alpha_n(P) + \dots,$$

di funzioni definite in A , convergente in A , dicesi *ivi uniformemente convergente* se tale è la successione delle somme.

Sono immediati i seguenti teoremi:

I. *Condizione necessaria sufficiente affinché la successione (1) sia, in A , uniformemente convergente è che, ad ogni numero positivo ε , si possa far corrispondere un numero naturale $\nu(\varepsilon)$ tale che, qualunque sia il punto P di A e comunque si prendano due numeri naturali h e k maggiore di $\nu(\varepsilon)$, si abbia sempre*

$$(3) \quad |u_h(P) - u_k(P)| \leq \varepsilon.$$

II. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie (2) sia, in A , uniformemente convergente è che, ad ogni numero positivo ε , si possa far corrispondere un numero naturale $\nu(\varepsilon)$ tale che, qualunque siano il punto P di A e il numero naturale k e comunque si prenda il numero naturale h maggiore di $\nu(\varepsilon)$, si abbia sempre*

$$(4) \quad |\alpha_{h+1}(P) + \alpha_{h+2}(P) + \dots + \alpha_{h+k}(P)| \leq \varepsilon.$$

Supponiamo che la successione (1), convergente uniformemente in A , converga ivi verso la funzione $f(P)$. Dalla (3), passando al limite per k divergente, si deduce allora

$$(5) \quad |u_h(P) - f(P)| \leq \varepsilon, \text{ se } h > \nu(\varepsilon) \text{ e per } P \text{ ovunque in } A.$$

Viceversa, se la (5) sussiste per ogni numero positivo ε , ne seguirà

$$|u_h(P) - f(P)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ se } h > \nu\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ e per } P \text{ ovunque in } A,$$

e quindi, comunque si prendano i due numeri naturali h e k maggiore di $\nu(\varepsilon:2)$,

$$\begin{aligned} |u_h(P) - u_k(P)| &= |[u_h(P) - f(P)] + [f(P) - u_k(P)]| \leq \\ &\leq |u_h(P) - f(P)| + |u_k(P) - f(P)| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

per P ovunque in A ; e pertanto segue la uniforme convergenza in A della successione (1). Onde i teoremi:

III. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione (1) converga uniformemente in A verso la funzione $f(P)$ è che ad ogni numero positivo ε si possa far corrispondere un numero naturale $\nu(\varepsilon)$ tale che si abbia:*

$$|u_h(P) - f(P)| \leq \varepsilon, \text{ se } h > \nu(\varepsilon) \text{ e per } P \text{ ovunque in } A.$$

IV. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie (2) converga uniformemente in A è che ad ogni numero positivo ε si possa far corrispondere un numero naturale $\nu(\varepsilon)$ tale che si abbia*

$$|R_h(P)| = |a_{h+1}(P) + a_{h+2}(P) + \dots| \leq \varepsilon, \text{ se } h > \nu(\varepsilon) \text{ e per } P \text{ ovunque in } A.$$

Evidentemente: Se una serie o una successione di funzioni converge uniformemente in un insieme A , essa converge in tal modo in ogni insieme contenuto in A .

Se la successione (1) converge uniformemente in A verso la funzione $f(P)$, assegnamo una successione infinitesima.

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s, \dots,$$

di quantità tutte positive, poniamo

$$\nu(\varepsilon_s) + 1 = p_s, \quad u_{p_s} = v_s,$$

e consideriamo la successione di funzioni:

$$(6) \quad v_1(P), v_2(P), \dots, v_s(P), \dots$$

subordinata alla (1). Risulta:

$$|v_s(P) - f(P)| \leq \varepsilon_s, \text{ in tutto } A, \lim_{s \rightarrow \infty} \varepsilon_s = 0.$$

Si è pertanto conseguito, con la successione (6), il calcolo in A della funzione $f(P)$ e si può altresì asserire che: *La $v_s(P)$ rappresenta la $f(P)$ con un errore d'approssimazione non superiore, in tutto A , alla costante ε_s . Così se, per esempio, si pone $\varepsilon_s = 1:10^{s+1}$, la funzione $v_s(P)$ ha sempre, in ogni punto P di A , in comune con la funzione $f(P)$, della quale si vuole il calcolo, le prime s cifre decimali, almeno.*

Un criterio sufficiente di convergenza uniforme. Giova assai spesso, nelle applicazioni, il seguente criterio sufficiente di convergenza uniforme:

V. Se la successione di funzioni:

$$u_1(P), u_2(P) - u_1(P), \dots, u_n(P) - u_{n-1}(P), \dots,$$

è, definitivamente, di funzioni limitate in A , e se, supposto che riesca, in A ,

$$|u_n(P) - u_{n-1}(P)| \leq L_n, \text{ per } n \geq s,$$

la serie di quantità positive

$$(7) \quad L_s + L_{s+1} + \dots + L_n + \dots$$

è convergente, la successione (1) converge uniformemente in A .

Il teorema è subito dimostrato. Ed inverso, data la convergenza della serie (7), comunque si assegni un numero positivo ε , esiste il corrispondente numero naturale $\nu(\varepsilon)$ ($\leq s$) tale che si abbia:

$$(8) \quad L_{h+1} + L_{h+2} + \dots + L_{h+k} \leq \varepsilon, \text{ se } h > \nu(\varepsilon) \text{ e per } k \text{ qualunque.}$$

Ma è, per $h > s$,

$|u_h(P) - u_{h+k}(P)| = |[u_h(P) - u_{h+1}(P)] + [u_{h+1}(P) - u_{h+2}(P)] + \dots + [u_{h+k-1}(P) - u_{h+k}(P)]| \leq L_{h+1} + L_{h+2} + \dots + L_{h+k}$, per P ovunque in A , e quindi, in virtù della (8),

$$|u_h(P) - u_{h+k}(P)| \leq \varepsilon,$$

se $h > \nu(\varepsilon)$, per k qualunque e per P ovunque in A .

Allo stesso modo si dimostra il seguente analogo criterio sufficiente di convergenza uniforme per le serie:

VI. Se la successione di funzioni $\alpha_1(P), \alpha_2(P), \dots$, è, definitivamente, di funzioni limitate in A , e se, supposto che riesca, in A ,

$$|\alpha_n(P)| \leq L_n, \text{ per } n \geq s,$$

la serie di quantità positive $L_s + L_{s+1} + \dots$ è convergente, la serie di funzione $\sum_n \alpha_n(P)$ converge (assolutamente e) uniformemente in A .

Le funzioni di una successione (1) diconsi uniformemente limitate in A , se esiste un numero positivo L , tale che risulti:

$$|u_n(P)| \leq L,$$

qualunque sia l'indice n e ovunque sia il punto P in A . È facile dimostrare che:

VII. Se le funzioni di una successione uniformemente convergente in un insieme A sono limitate in A , esse sono ivi uniformemente limitate. Condizione necessaria e sufficiente affinché sia limitata in A la funzione limite $f(P)$ di una successione uniformemente convergente in A , è che le funzioni della successione siano definitivamente limitate in A . La funzione limite $f(P)$ di una successione convergente in A , di funzioni ivi uniformemente limitate, è limitata in A .

Esempi. La successione $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ non converge uniformemente nell'intervallo $(0, 1)$. La stessa successione converge uniformemente in ogni intervallo contenuto nell'intervallo $(0, 1 - \varepsilon)$, qualunque sia la frazione positiva ε . Le funzioni della successione ora considerata sono uniformemente limitate nell'intervallo $(-1, 1)$, non lo sono in ogni intervallo che non sia in quello contenuto.

68. Successioni e serie di funzioni complesse. Serie di potenze. — Nell'insieme A dello spazio $S(r)$ siano definite le funzioni complesse

$$(1) \quad w_1(P), w_2(P), \dots, w_n(P), \dots, w_n(P) = u_n(P) + iv_n(P)$$

di parte reale $u_n(P)$ e di coefficiente dell'immaginario $v_n(P)$, formanti una successione. Per ogni tale successione, come il lettore può facilmente constatare, sussistono inalterati i concetti e i teoremi stabiliti per le successioni di funzioni reali. Si ha inoltre:

I. Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione (1) converga uniformemente in A , è che ciò avvenga per entrambe le successioni $u_1(P), u_2(P), \dots; v_1(P), v_2(P), \dots$.

I concetti e i teoremi dell' articolo precedente valgono anche per ogni serie

$$(2) \quad \gamma_1(P) + \gamma_2(P) + \dots + \gamma_n(P) + \dots, \quad \gamma_n(P) = \alpha_n(P) + i\beta_n(P)$$

di funzioni complesse, definite in un insieme A dello spazio S_r . Si ha:

II. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie (2) converga uniformemente in A , è che ciò avvenga per entrambe le serie $\sum \alpha_k(P)$, $\sum \beta_k(P)$, di funzioni reali.*

La serie di potenze (cfr. n° 13 del Cap. I)

$$(3) \quad \sum_k^{0, \infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1 (z - z_0) + \dots + a_n (z - z_0)^n + \dots,$$

ove z_0, a_0, a_1, \dots , sono costanti complesse fissate affatto arbitrariamente (in particolare, costanti reali) e z è la variabile complessa $x + iy$, è una particolarissima serie di funzioni complesse (in particolare, di funzioni reali se z_0, a_0, a_1, \dots sono reali e se si attribuiscono alla z valori esclusivamente reali). Vogliamo fermarci e considerare le serie di potenze, per stabilire, per esse, alcuni risultati classici che troveranno importanti applicazioni. Cominciamo dal dimostrare il teorema:

III. *Se il raggio di convergenza r della serie (3) non è nullo, e se ρ è un qualunque numero positivo minore di r , la serie converge (assolutamente e) uniformemente in ogni insieme A di punti contenuto nel cerchio di raggio ρ , concentrico a quello di convergenza.*

Il teorema è un' immediata conseguenza del teor. VI dell' articolo precedente. Per ogni punto z di A si ha invero

$$|a_k (z - z_0)^k| \leq |a_k| \rho^k,$$

e la serie $\sum |a_k| \rho^k$ è convergente (13, II).

Si ha ancora il seguente *teorema di Abel*:

IV. *Se la serie di potenze (3) converge per un particolare valore $z' \neq z_0$ di z , essa converge uniformemente nel segmento rettilineo congiungente il punto z_0 col punto z' .*

Poniamo

$$R_{n,m}(z) = a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + a_{n+2}(z - z_0)^{n+2} + \dots + a_{n+m}(z - z_0)^{n+m},$$

$$R'_{n,m} = R_{n,m}(z').$$

Poichè la serie (3) converge per $z = z'$, comunque si sia fissato il numero positivo ε , esiste un numero naturale $\nu(\varepsilon)$ tale che, per $n > \nu(\varepsilon)$ e qualunque sia l'indice m , riesce:

$$(4) \quad |R'_{n,m}| \leq \varepsilon.$$

Tutti i punti del segmento rettilineo (z_0, z') si hanno ponendo

$$z - z_0 = \tau(z' - z_0),$$

e facendo variare il parametro reale τ nell'intervallo $(0, 1)$. Ne segue, su quel segmento,

$$\begin{aligned} R_{n,m}(z) &= a_{n+1} \tau^{n+1} (z' - z_0)^{n+1} + a_{n+2} \tau^{n+2} (z' - z_0)^{n+2} + \dots + a_{n+m} \tau^{n+m} (z' - z_0)^{n+m} \\ &= \tau^{n+1} R'_{n,1} + \tau^{n+2} (R'_{n,2} - R'_{n,1}) + \dots + \tau^{n+m} (R'_{n,m} - R'_{n,m-1}) \\ &= (\tau^{n+1} - \tau^{n+2}) R'_{n,1} + (\tau^{n+2} - \tau^{n+3}) R'_{n,2} + \dots + \tau^{n+m} R'_{n,m}, \end{aligned}$$

e pertanto, in virtù di (4) e poichè $0 \leq \tau \leq 1$,

$$|R_{n,m}(z)| \leq \varepsilon \tau^{n+1} \leq \varepsilon, \text{ se } n > \nu(\varepsilon),$$

ciò che dimostra l'asserita uniforme convergenza della (3) sul segmento (z_0, z') .

Per le serie di potenze conviene anche rilevare il teorema seguente, del quale faremo uso fra poco:

V. Se $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$ è una successione di quantità (reali o complesse) per la quale si abbia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n|^{1:n} = 1,$$

le due serie di potenze

$$\sum_k^{0, \infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \sum_k^{0, \infty} \mu_k a_k (z - z_0)^k,$$

hanno lo stesso raggio di convergenza.

Si dimostra invero immediatamente che

$$\lim''_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1:n} = \lim''_{n \rightarrow \infty} |\mu_n a_n|^{1:n}.$$

69. Teoremi della continuità e della derivabilità. — Prendiamo a considerare di nuovo, per facilitare la rappresentazione, la successione

$$(1) \quad u_1(P), u_2(P), \dots, u_n(P), \dots,$$

di funzioni *reali*, convergenti in A verso la funzione $f(P)$. Sono fondamentali i *teoremi della continuità e della derivabilità* che andiamo ora a dare per una tale successione (i quali del resto sussistono anche — con identiche dimostrazioni — per le successioni di funzioni *complesse*).

I. Teorema della continuità. *Le funzioni della successione (1) siano continue nel punto P di A . DA; allora, se la successione converge uniformemente in A verso la funzione $f(P)$, tale funzione è pur essa continua nel punto P .*

Invero, per un punto qualunque Q , variabile in A , si ponga

$$f(Q) = u_n(Q) + \varphi_n(Q);$$

comunque si fissi il numero positivo ε , esiste un numero naturale $\nu(\varepsilon)$, tale che, ovunque in A , riesce

$$(2) \quad |\varphi_n(Q)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \text{ se } n > \nu(\varepsilon).$$

Per la continuità di $u_n(Q)$ in P , esiste un intorno circolare $C_\varepsilon^{(n)}$ di P , su A , tale che per ogni suo punto Q , si ha:

$$|u_n(Q) - u_n(P)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ne segue, per un fissato indice n maggiore di $\nu(\varepsilon)$ e per Q ovunque in $C_\varepsilon^{(n)}$,

$$\begin{aligned} |f(Q) - f(P)| &\leq \\ &\leq |u_n(Q) - u_n(P)| + |\varphi_n(Q)| + |\varphi_n(P)| \leq \varepsilon; \end{aligned}$$

ciò che dimostra appunto l'asserita continuità di $f(Q)$ nel punto P di A . DA.

In sostanza, il teorema ora ottenuto afferma che:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(Q) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{Q \rightarrow P} u_n(Q) \right],$$

esso cioè stabilisce la possibilità di invertire l'ordine di due successive operazioni di passaggio al limite. A questo riguardo giova rilevare i due teoremi seguenti per la dimostrazione dei quali si ripete — quasi — quella data per il teorema precedente.

II. *Se la successione (1) è uniformemente convergente in A e se,*

nel punto P di DA ogni funzione $u_n(Q)$ è convergente, si ha :

$$\lim_{Q \rightarrow P} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(Q) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{Q \rightarrow P} u_n(Q) \right],$$

tutte le volte che il secondo membro sia determinato (finito o infinito).

Poniamo $\lim_{Q \rightarrow P} u_n(Q) = l_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = l =$ quantità finita, $f(Q) = u_n(Q) + \varphi_n(Q)$. Sussista la (2). Diamo ad n un tal valore maggiore di $\nu(\varepsilon)$ da risultare $|l_n - l| \leq \varepsilon : 3$. Così fissato n , determiniamo un intorno circolare $C_\varepsilon^{(n)}$ di P , su A , tale che, se Q è in $C_\varepsilon^{(n)} - P$, riesca $|u_n(Q) - l_n| \leq \varepsilon : 3$. Ne segue, per Q in $C_\varepsilon^{(n)} - P$,

$$\begin{aligned} |f(Q) - l| &= |u_n(Q) + \varphi_n(Q) - l + l_n - l_n| \leq \\ &\leq |u_n(Q) - l_n| + |\varphi_n(Q)| + |l_n - l| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Sia ora $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = +\infty$. Scelto arbitrariamente un numero positivo K , diamo ad n un tale valore ($> \nu(\varepsilon)$) da risultare $l_n > K + 2\varepsilon : 3$. Così fissato n si avrà ora, in $C_\varepsilon^{(n)} - P$,

$$f(Q) > u_n(Q) - \frac{\varepsilon}{3} \geq l_n - \frac{2\varepsilon}{3} > K.$$

III. Se la successione (1) è uniformemente convergente in A e se, essendo tale insieme illimitato, ogni funzione $u_n(Q)$ è convergente all'infinito, si ha :

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(Q) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{Q \rightarrow \infty} u_n(Q) \right],$$

tutte le volte che il secondo membro sia determinato (finito o infinito).

Se l'insieme A è unicamente costituito dai numeri naturali $1, 2, \dots, m, \dots$, come notevole caso particolare dall'ultimo teorema enunciato si ha il seguente :

III'. Se le successioni :

$$u_{n1}, u_{n2}, \dots, u_{nm}, \dots \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$u_{1m}, u_{2m}, \dots, u_{nm}, \dots \quad (m = 1, 2, \dots)$$

sono convergenti, e la seconda lo è uniformemente, al variare dell'indice m , si ha :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} u_{nm} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} u_{nm} \right],$$

tutte le volte che il secondo membro sia determinato (finito o infinito).

Una notevolissima interpretazione del teorema II dà luogo al seguente:

IV. Teorema della derivabilità. *La successione (1) sia convergente in A verso la funzione $f(P) \equiv f(x, y, \dots)$; inoltre ciascuna funzione $u_n(P) \equiv u_n(x, y, \dots)$ possieda, in ogni punto di RA , la derivata parziale del primo ordine rispetto, per esempio, alla x , determinata e finita. Indicata tale derivata con $u'_n(x, y, \dots)$, se la successione*

$$u'_1(x, y, \dots), u'_2(x, y, \dots), \dots, u'_n(x, y, \dots), \dots$$

è uniformemente convergente in RA , allora la funzione $f(x, y, \dots)$ possiede pur essa, in ogni punto di RA , la derivata parziale del primo ordine rispetto alla x e si ha

$$f_x(x, y, \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} u'_n(x, y, \dots).$$

Se $P(x, y, \dots)$ è un fissato punto di RA , si deve dimostrare che

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n(x+h, y, \dots) - u_n(x, y, \dots)}{h} \right] &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_n(x+h, y, \dots) - u_n(x, y, \dots)}{h} \right], \end{aligned}$$

ove h è variabile in un insieme I ottenuto privando del punto zero un certo intervallo dell'asse delle h , contenente detto punto. La (3) sarà dimostrata (teor. II) non appena sarà accertato che la funzione di h :

$$v_n(h) = \frac{1}{h} [u_n(x+h, y, \dots) - u_n(x, y, \dots)],$$

tende in I , per n divergente, uniformemente al suo limite. Ora è effettivamente

$$\begin{aligned} v_p(h) - v_q(h) &= \\ = \frac{1}{h} \{ [u_p(x+h, y, \dots) - u_q(x+h, y, \dots)] - [u_p(x, y, \dots) - u_q(x, y, \dots)] \} &= \\ = u'_p(x+\theta h, y, \dots) - u'_q(x+\theta h, y, \dots), & \\ 0 < \theta < 1; & \end{aligned}$$

pertanto, se per p e q maggiori di $v(\epsilon)$, risulta in RA ,

$$|u'_p(x, y, \dots) - u'_q(x, y, \dots)| \leq \epsilon,$$

si avrà pure, in tutto I ,

$$|v_p(h) - v_q(h)| \leq \epsilon.$$

I teoremi I, II e IV, interpretati per le serie di funzioni, danno luogo ai segmenti di frequentissima applicazione.

V. *Le funzioni della serie*

$$(4) \quad a_1(P) + a_2(P) + \dots + a_n(P) + \dots,$$

siano continue nel punto P di $A \cdot DA$; se la serie converge uniformemente in A verso la funzione $f(P)$, tale funzione è pur essa continua nel punto P .

VI. *Teorema del passaggio al limite termine a termine per le serie.* Se la serie (4) è uniformemente convergente in A e se nel punto P di DA ogni funzione $a_n(Q)$ è convergente, si ha:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \sum_n^{1, \infty} a_n(Q) = \sum_n^{1, \infty} \lim_{Q \rightarrow P} a_n(Q),$$

tutte le volte che la serie del secondo membro sia regolare.

VII. *Regola della derivazione termine a termine per le serie.* La serie (4) sia convergente in A verso la funzione $f(P) = f(x, y, \dots)$, e inoltre ciascuna funzione $a_n(P) = a_n(x, y, \dots)$ sia, una prima volta, parzialmente derivabile in RA , rispetto, per esempio, alla x . Se la serie delle derivate

$$\sum_n^{1, \infty} \frac{\partial a_n}{\partial x},$$

è uniformemente convergente in RA , allora anche la funzione $f(x, y, \dots)$ è in RA parzialmente derivabile, una prima volta, rispetto alla x , e si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sum_n^{1, \infty} a_n = \sum_n^{1, \infty} \frac{\partial a_n}{\partial x}.$$

Serie reali di potenze. Dei risultati testè ottenuti vogliamo subito fare un'importante applicazione considerandoli per le serie reali di potenze, cioè per quelle serie di potenze che hanno reali il punto iniziale e tutti i coefficienti. Sia

$$\sum_k^{0, \infty} a_k (z - x_0)^k,$$

una tale serie, sia r il suo raggio (non nullo) di convergenza. L'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$ dell'asse x chiamasi l'intervallo di conver-

genza della serie. Denoteremo con I l'intervallo aperto $(x_0 - r, x_0 + r)$. Dando alla x un valore reale appartenente ad I , e ponendo:

$$(5) \quad f(x) = \sum_k^{0, \infty} a_k (x - x_0)^k,$$

si viene a definire in I una funzione reale della variabile reale x . Vogliamo studiare tale funzione. La funzione $f(x)$ è continua in ogni punto x' di I . Ed invero, i termini della serie (5) sono funzioni continue in x' , laddove x' è sempre contenuto in un intervallo (chiuso) nel quale (68, III) la serie converge uniformemente. La serie delle derivate dei termini della (5):

$$(6) \quad \sum_k^{1, \infty} k a_k (x - x_0)^{k-1},$$

ha (68, V) lo stesso intervallo di convergenza della (5), e pertanto (teor. VII) la funzione $f(x)$ è anche derivabile in ogni punto di I , e per la sua derivata $f'(x)$ si ha:

$$(7) \quad f'(x) = \sum_k^{1, \infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}.$$

Allo stesso modo, la serie delle derivate prime della (6) ha (68, V) lo stesso intervallo di convergenza della (5), e pertanto (teor. VII) la funzione $f'(x)$ è, a sua volta, derivabile in ogni punto di I e per la sua derivata $f''(x)$ si ha:

$$f''(x) = \sum_k^{2, \infty} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2}.$$

La considerazione si può indefinitamente ripetere, e si ha perciò:

VIII. *La serie reale di potenze (5) converge, con tutte quelle che da esse si deducono con la successiva derivazione termine a termine, (assolutamente e) uniformemente in ogni intervallo contenuto nell'intervallo aperto I di convergenza. La somma $f(x)$ della serie è in ogni punto di I successivamente derivabile quante volte si vuole, mentre si ha*

$$(8) \quad f^{(n)}(x) = \sum_k^{n, \infty} k(k-1) \dots (k-n+1) a_k (x - x_0)^{k-n}.$$

Se nella (8) facciamo $x = x_0$, si trova:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

onde il teorema:

IX. Per la somma $f(x)$ di una serie reale di potenze, in ogni punto dell'intervallo aperto I di convergenza della serie, si ha:

$$f(x) = \sum_k^{0, \infty} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + f'(x_0) \frac{x-x_0}{1!} + f''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots$$

Per una qualsiasi funzione $f(x)$, definita in un intervallo (a, b) , la quale, in un punto x_0 di questo, sia successivamente derivabile quante volte si vuole, chiamasi *serie di Taylor* di punto iniziale x_0 , la seguente serie reale di potenze:

$$f(x) + f'(x_0) \frac{x-x_0}{1!} + f''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots;$$

secondo l'ultimo teorema ottenuto si ha dunque che: *La somma $f(x)$ di una serie di potenze, di punto iniziale x_0 e di intervallo aperto di convergenza I , dà luogo ad una serie di Taylor, di punto iniziale x_0 , ovunque convergente in I verso la funzione $f(x)$.*

Le serie di *Taylor* aventi l'origine per punto iniziale diconsi di *Mac Laurin*.

La serie (5) sia altresì convergente in uno l degli estremi $x_0 - r$ o $x_0 + r$ dell'intervallo di convergenza; allora, in virtù del teorema d' *Abel* (68, IV), essa è uniformemente convergente (ma forse non assolutamente) in ogni intervallo limitato dal detto estremo l e da un qualsiasi punto interno all'intervallo di convergenza. Ne segue che la funzione $f(x)$, somma della serie (5), è continua anche nel punto l . E pertanto:

X. Se la serie reale di potenze (5) converge in uno l degli estremi dell'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$ di convergenza, esiste determinato e finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow l} f(x) \text{ (su } I),$$

ed esso è il valore della somma della serie nel punto l .

essendo x_0 un'assegnata costante. Ottenuta, nell'intervallo (a', a'') , una tale approssimazione della $f(x)$, posto:

$$p_n(x) = a_0^{(0)} + a_1^{(1)}(x - x_0) + \dots + a_n^{(n)}(x - x_0)^n,$$

$p_n(x)$ non è che un polinomio di grado n , e si dice perciò che si è conseguita, in (a', a'') , l'approssimazione della funzione $f(x)$ mediante polinomi. Tale problema fu posto e completamente risolto da **Weierstrass**; al quale si deve il classico risultato: *Per ogni funzione $f(x)$, continua in un intervallo (a', a'') , si può sempre costruire una successione di polinomi tale che, in quell'intervallo, converga uniformemente verso la funzione $f(x)$.* Noi non vogliamo qui dare (per quanto già in grado di farlo) la dimostrazione dell'enunciato teorema di **Weierstrass**, e vogliamo limitarci alla completa trattazione del problema seguente:

Sviluppo in serie di potenze. In un intervallo (a', a'') dell'asse delle x siano assegnati una funzione reale $f(x)$ dell'unica variabile reale x ed un punto x_0 , dare in (a', a'') lo sviluppo della funzione in serie procedente secondo le potenze (3).

Supposto il problema risolto, sia, in (a', a'') ,

$$(4) \quad f(x) = \sum_k^{0, \infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Detto r il raggio di convergenza della serie di potenze, l'intervallo (a', a'') deve, di necessità, essere contenuto nell'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$ di convergenza. Ogni punto interno all'intervallo (a', a'') riuscirà allora, come il punto x_0 , interno all'intervallo di convergenza e pertanto dalla (4) si trae (69, VIII e IX) che l'assegnata funzione $f(x)$ deve, di necessità, in x_0 e in ogni punto interno all'intervallo (a', a'') , essere successivamente derivabile quante volte si vuole, laddove si ha:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Adunque:

I. *Condizione necessaria affinché la funzione $f(x)$, assegnata nell'intervallo (a', a'') , sia ivi sviluppabile in serie di potenze del binomio $x - x_0$, essendo x_0 un assegnato punto di (a', a'') , è che, nel punto x_0 ed in ogni punto interno all'intervallo (a', a'') , la funzione sia*

successivamente derivabile quante volte si vuole. Lo sviluppo non potrà allora essere dato che dalla serie di Taylor, relativa alla $f(x)$, di punto iniziale x_0 :

$$(5) \quad \sum_k^{0, \infty} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!}.$$

Supposto, in tutto l'intervallo (a', a'') , verificata la condizione necessaria espressa da questo teorema, poichè allora, in ogni punto di (a', a'') e qualunque sia il numero intero e positivo n , riesce (Cap. II; 47, IV).

$$f(x) = \sum_k^{0, n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} + \frac{(x - x_0)^\sigma (x - \xi)^{n+1-\sigma}}{n! \sigma} f^{(n+1)}(\xi),$$

ove σ è un fissato arbitrario numero positivo e ξ un certo punto (dipendente da x, σ, n) *interno* all'intervallo limitato dai punti x_0 e x , si ha che:

II. *Assegnata la funzione $f(x)$, successivamente derivabile quante volte si vuole in ogni punto dell'intervallo (a', a'') , ed assegnato il punto x_0 di questo stesso intervallo, condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione sia, in (a', a'') sviluppabile in serie di potenze del binomio $x - x_0$, è che, per ogni punto x di (a', a'') , risulti*

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x - x_0)^\sigma (x - \xi)^{n+1-\sigma}}{n! \sigma} f^{(n+1)}(\xi) = 0;$$

si ha allora, in (a', a'') ,

$$(7) \quad f(x) = \sum_k^{0, \infty} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!}.$$

Per la presenza, nel primo membro della (6), della quantità ξ , di cui si ignora il preciso modo di dipendere dalle variabili x, n e σ , è in generale difficile l'applicazione pratica del criterio di sviluppabilità in serie di potenze fornito dall'ultimo teorema enunciato. Vi è però un caso notevole in cui il criterio indicato assicura la sviluppabilità in serie di potenze, secondo il teorema seguente:

III. *Se la funzione $f(x)$ è, in ogni punto dell'intervallo (a', a'') , successivamente derivabile quante volte si vuole, ed esiste un numero intero e non negativo p tale che le funzioni*

$$f^{(n)}(x) : n^p,$$

siano uniformemente limitate in (a', a'') , comunque si fissi un punto x_0 in (a', a'') , la funzione $f(x)$ è ivi sviluppabile in serie di potenze del binomio $x - x_0$.

Si abbia, infatti, per ogni n e per ogni x in (a', a'') ,

$$|f^{(n)}(x)| \leq L n^p.$$

Prendendo il resto $R_n(x)$ della formola di **Taylor**, di punto iniziale x_0 , relativa alla funzione $f(x)$, nella forma di **Lagrange**, si trova, in ogni punto di (a', a'') ,

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x - x_0|^n}{n!} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{a^n n^p}{n!} L,$$

ove si è posto $a'' - a' = a$. Ma, ponendo $n - p = m$, si ha, per $n > p$,

$$\frac{a^n n^p}{n!} = a^p \frac{a^m}{m!} \frac{n^p}{n(n-1)\dots(n-p+1)};$$

detto ν un fissato numero naturale maggiore di a , risulta, per $m > \nu$,

$$\frac{a^m}{m!} < \frac{a^\nu}{\nu!} \frac{a}{m},$$

e quindi, per $n = m + p$, $m > \nu$, in ogni punto di (a', a'') ,

$$|R_n(x)| < a^p \frac{a^\nu}{\nu!} \frac{a}{m} \frac{L n^p}{n(n-1)\dots(n-p+1)},$$

onde segue $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$.

Prendendo sempre il resto della formola di **Taylor** nella forma di **Lagrange** si dimostra anche immediatamente che:

IV. Se la funzione $f(x)$ è, in ogni punto dell'intervallo (a', a'') , successivamente derivabile quante volte si vuole, ed essendo $a'' - a' \leq 1$, esiste un numero ε non negativo e minore di uno, tale che le funzioni

$$f^{(n)}(x) : [(n-1)! n^\varepsilon]$$

siano uniformemente limitate in (a', a'') , comunque si fissi un punto x_0 in (a', a'') , la funzione $f(x)$ è ivi sviluppabile in serie di potenze del binomio $x - x_0$.

Notevole è pure il teorema seguente, del quale faremo uso:

V. Se la derivata $f'(x)$ della funzione $f(x)$, nell'intervallo (a', a'') è suscettibile dello sviluppo in serie

$$(8) \quad f'(x) = \sum_k^{0, \infty} a_k (x - x_0)^k,$$

si ha allora, in (a', a'') ,

$$(9) \quad f(x) = f(x_0) + \sum_k^{0, \infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}.$$

La serie di potenze (8) converge invero uniformemente (68, IV) nell'intervallo (a', a'') e la serie (9) converge (cfr. *Algebra*, n° 169) pur essa in ogni punto di (a', a'') . Detta $\varphi(x)$ la somma della serie (9) si ha, in virtù del teor. IV del n° 69, $[\varphi(x) - f(x)]' = f'(x) - f'(x) = 0$, in tutto (a', a'') , e poichè $\varphi(x_0) - f(x_0) = 0$, ne segue $\varphi(x) = f(x)$, ovunque in (a', a'') .

VI. *Sviluppo in serie di potenze delle funzioni elementari* e^x , $\text{sen}x$, $\text{cos}x$, $\text{sen}hx$, $\text{cosh}x$. Sia $f(x) = e^x$, avendosi, qualunque sia n , $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$, la serie di *Mac Laurin* relativa alla e^x , si scrive

$$(10) \quad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

D'altra parte, in ogni intervallo (a', a'') dell'asse x , si ha, qualunque sia n , $|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^{a''}$, pertanto (teor. III) la serie (10) converge per ogni valore di x ed ha per somma e^x .

Allo stesso risultato si perviene basandosi sul teor. I. Intanto, la serie (10), avente infinito il raggio di convergenza (per essere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1:(n+1)!}{1:n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0)$$

ha per somma una funzione $\varphi(x)$ ovunque successivamente derivabile quante volte si vuole, per la quale è $\varphi'(x) = \varphi(x)$. Ne segue che il prodotto $\varphi(x)e^{-x}$ ha ovunque nulla la derivata, e poichè per $x=0$ esso vale uno, si ha sempre, come volevasi dimostrare, $\varphi(x) = e^x$.

Poichè $2\text{sen}hx = e^x - e^{-x}$, $2\text{cosh}x = e^x + e^{-x}$, ne segue, per ogni x ,

$$\begin{aligned} \text{sen}hx &= x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \\ \text{cosh}x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \end{aligned}$$

Sia ora $f(x) = \text{sen}x$. Si ha

$$f'(x) = \text{cos}x, f''(x) = -\text{sen}x, f'''(x) = -\text{cos}x, f^{IV}(x) = \text{sen}x,$$

e quindi, qualunque sia il numero naturale n ,

$$f^{(4n)}(x) = \text{sen}x, f^{(4n+1)}(x) = \text{cos}x, f^{(4n+2)}(x) = -\text{sen}x, f^{(4n+3)}(x) = -\text{cos}x,$$

perciò, la serie di **Mac Laurin** relativa a $\text{sen}x$ si scrive:

$$(11) \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

Poichè, qualunque sia n , si ha sempre $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, la serie converge per ogni valore di x , ed ha per somma $\text{sen}x$.

Allo stesso modo si trova che

$$(12) \quad \text{cos}x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

per ogni valore di x . Si può anche dire così: La serie (12) converge perchè è la serie derivata della serie di potenze (11), ed ha per somma $\text{cos}x$, poichè $\text{cos}x$ è la derivata di $\text{sen}x$, somma della serie (11).

Alla somma di ciascuna delle due serie (11) e (12) si può anche pervenire al modo seguente: È intanto subito visto che la serie (11) ha infinito il raggio di convergenza, detta perciò $\varphi(x)$ la somma di essa, questa funzione $\varphi(x)$ è ovunque successivamente derivabile quante volte si vuole, e la somma della (12) è precisamente $\varphi'(x)$. Si ha poi

$$\varphi''(x) = -\varphi(x), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1.$$

Ora, in virtù della prima di queste relazioni, si constata subito che la derivata delle funzioni

$$\varphi(x)\text{cos}x - \varphi'(x)\text{sen}x, \quad \varphi(x)\text{sen}x + \varphi'(x)\text{cos}x$$

sono entrambe identicamente nulle; queste funzioni hanno perciò valori costanti. Facendo $x=0$, si vede che questi valori sono: zero per la prima, uno per la seconda. Dalle equazioni

$$\begin{aligned} \varphi(x)\text{cos}x - \varphi'(x)\text{sen}x &= 0, \\ \varphi(x)\text{sen}x + \varphi'(x)\text{cos}x &= 1, \end{aligned}$$

si ricava, ovunque, $\varphi(x) = \text{sen}x$, $\varphi'(x) = \text{cos}x$.

VII. **Serie binomiale.** Sia α una costante reale quale si voglia, la serie binomiale è la serie di **Mac Laurin** relativa alla funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$. Si ha:

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n},$$

e quindi la serie binomiale si scrive

$$(13) \quad 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \dots$$

Se α è un numero naturale, i coefficienti della serie sono tutti nulli a cominciare dal termine $(\alpha + 1)^{\text{mo}}$, la serie si riduce allora ad un polinomio di grado α che coincide col noto sviluppo di *Newton* della potenza α^{ma} del binomio $1 + x$. Se α non è un numero naturale i coefficienti della serie (13) non sono mai nulli, ed il raggio di convergenza di essa è dato dal reciproco del limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left| \binom{\alpha}{n+1} \right| : \left| \binom{\alpha}{n} \right| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \alpha}{n + 1} = 1.$$

Pertanto la somma $\varphi(x)$ della serie (13) è continua, con tutte le sue derivate d'ordine comunque elevato, nell'interno dell'intervallo $(-1, 1)$. Si ha poi, per $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \alpha + \alpha \binom{\alpha-1}{1}x + \dots + \alpha \binom{\alpha-1}{n}x^n + \dots, \\ \frac{1}{\alpha} \varphi'(x)(1+x) &= \left[1 + \binom{\alpha-1}{1}x + \dots + \binom{\alpha-1}{n}x^n + \dots \right] (1+x) = \\ &= 1 + \left[\binom{\alpha-1}{1} + 1 \right] x + \dots + \left[\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} \right] x^n + \dots = \\ &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \dots = \varphi(x). \end{aligned}$$

Ne segue, per $|x| < 1$,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\varphi(x)}{(1+x)^\alpha} \right] = \frac{\varphi'(x)}{(1+x)^\alpha} - \frac{\alpha\varphi(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0,$$

ma $\varphi(0) = 1$, e pertanto: *La serie binomiale (13), in ogni punto interno al suo intervallo di convergenza, ha per somma $(1+x)^\alpha$.*

Allo stesso risultato si giungerebbe basandosi sul teor. II, quando si faccia ricorso alla forma di *Cauchy* (47, IV) del resto della formola di *Mac Laurin*.

Applicando noti criterii di convergenza dati in algebra (cfr. *Algebra*, n° 214) si trova che: *La serie (13) converge anche per $x=1$, se $\alpha > -1$, per $x=-1$, se $\alpha > 0$.* Ne segue (69, X)

$$2^\alpha = \sum_k^{0, \infty} \binom{\alpha}{k}, \text{ se } \alpha > -1; \quad 0 = \sum_k^{0, \infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k}, \text{ se } \alpha > 0.$$

Si notino i casi particolari: Per $|x| < 1$,

$$(14) \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots,$$

$$(15) \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots,$$

$$(16) \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots,$$

$$(17) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} x^{2n} + \dots$$

$$(18) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 - \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} x^{2n} + \dots$$

VIII. *Sviluppo in serie di potenze delle funzioni elementari* $\log(1+x)$, $\text{arctang}x$, $\text{setttang}x$, $\text{arcsen}x$, $\text{settsen}x$. Gli sviluppi in serie di *Mac Laurin* delle menzionate funzioni elementari si hanno subito, rispettivamente, degli sviluppi (14), (15), (16), (17) e (18) applicando il teorema V. Si trova: Per $|x| < 1$,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots,$$

$$\text{arctang}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,$$

$$\text{setttang}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,$$

$$\text{arcsen}x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,$$

$$\text{settsen}x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Dalle prime due di queste formole si ha poi (69, X)

$$\log 2 = \sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad \frac{\pi}{4} = \sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

71.* *Serie di funzioni analitiche.* — Dati gli insiemi aperti A_1, A_2, \dots, A_r di punti, rispettivamente, dei piani complessi $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_r, y_r)$, diciamo A l'insieme aperto di $S_{(2r)}$, luogo dei punti $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r)$, ottenuto al variare, indipendentemente l'uno dall'altro, dei punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_r, y_r)$, ri-

spettivamente, in A_1 , in A_2, \dots , in A_r . Nell'insieme A siano definite le funzioni complesse analitiche (monodrome)

$$w_0(z_1, z_2, \dots, z_r), w_1(z_1, z_2, \dots, z_r), \dots, w_n(z_1, z_2, \dots, z_r), \dots,$$

delle variabili complesse $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, \dots, z_r = x_r + iy_r$, formanti una successione. Sussiste il seguente notevole teorema:

I. *Se la serie*

$$(1) \quad \sum_k^{0, \infty} w_k(z_1, z_2, \dots, z_r),$$

di funzioni analitiche nell'insieme aperto A , è ivi convergente in ogni punto e se le serie delle derivate parziali

$$(2) \quad \sum_k^{0, \infty} \frac{\partial w_k}{\partial z_l} \quad (l=1, 2, \dots, r),$$

sono uniformemente convergenti in ogni dominio rettangolare contenuto in A , la somma $w(z_1, z_2, \dots, z_r)$ della serie (1) è pur essa una funzione analitica in A , ed inoltre è

$$(3) \quad \frac{\partial w}{\partial z_l} = \sum_k^{0, \infty} \frac{\partial w_k}{\partial z_l} \quad (l=1, 2, \dots, r).$$

Fissato un arbitrario punto $Z(z_1, z_2, \dots, z_r)$ di A , fissiamo pure un dominio rettangolare R contenente il punto e contenuto in A . Si ha in R

$$(4) \quad \frac{\partial w_k}{\partial z_l} = \frac{\partial w_k}{\partial x_l} = \frac{1}{i} \frac{\partial w_k}{\partial y_l},$$

e pertanto dalla uniforme convergenza della serie (2) in R , segue ivi (69, VII)

$$\frac{\partial w}{\partial x_l} = \sum_k^{0, \infty} \frac{\partial w_k}{\partial x_l}, \quad \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y_l} = \frac{1}{i} \sum_k^{0, \infty} \frac{\partial w_k}{\partial y_l},$$

e quindi, per le (4),

$$(5) \quad \frac{\partial w}{\partial x_l} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y_l}, \quad (l=1, 2, \dots, r).$$

Le derivate parziali di w , rispetto a x_l e a y_l , come somma di serie uniformemente convergenti in R di funzioni ivi continue, sono (69, V) pur esse continue; onde segue (64, IV), dalle (5), la derivabilità parziale in modo complesso della funzione w rispetto a z_l ($l=1, 2, \dots, r$).

Sussiste inoltre la (3). La funzione w , dotata in ogni punto Z dell'insieme aperto A di tutte le derivate parziali complesse del primo ordine continue, è analitica in A . Notevole e particolarissimo caso del teorema ora dimostrato è il seguente:

II. *La somma $w(z)$ di una serie di potenze:*

$$(6) \quad \sum_k^{0, \infty} a_k (z - z_0)^k,$$

avente un raggio r di convergenza non nullo è una funzione analitica nell'intorno circolare $C(z_0, r)$, di raggio r del punto z_0 .

La serie delle derivate della (6)

$$\sum_k^{1, \infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$$

ha invero (68, V) lo stesso cerchio di convergenza della (6), e pertanto (68, III) essa converge uniformemente in ogni dominio rettangolare contenuto in $C(z_0, r)$. Ne segue:

III. *In ogni punto di $C(z_0, r)$ si ha, qualunque sia n ,*

$$\frac{d^n w}{dz^n} = w^{(n)}(z) = \sum_k^{n, \infty} k(k-1) \dots (k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n},$$

e pertanto

$$a_n = \frac{w^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad w(z) = \sum_k^{0, \infty} w^{(k)}(z_0) \frac{(z - z_0)^k}{k!}.$$

IV. *Se per la derivata $w'(z)$ della funzione analitica $w(z)$ si ha, nell'intorno circolare $C(z_0, r)$ del punto z_0 ,*

$$w'(z) = \sum_k^{0, \infty} a_k (z - z_0)^k,$$

se ne deduce in $C(z_0, r)$,

$$w(z) = w(z_0) + \sum_k^{0, \infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}.$$

V. *Se r è il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum a_k \zeta^k$, e $w(z)$ è una funzione analitica, in un insieme aperto A , la serie*

$$\sum_k^{0, \infty} a_k [w(z)]^k,$$

ha per somma una funzione analitica in quell'insieme aperto $A^{(r)}$ ($< A$), luogo dei punti z per i quali è $|w(z)| < r$.

In particolare, dunque: La somma della serie

$$\sum_k^{0, \infty} \frac{a_k}{(z - z_0)^k}$$

è una funzione analitica all' esterno dell' intorno circolare $C(z_0, r)$. Se il raggio r_a di convergenza della serie $\sum a_k \zeta^k$ è minore del raggio r_b di convergenza della serie $\sum b_k \zeta^k$, la somma

$$\sum_k^{0, \infty} \frac{a_k}{(z - z_0)^k} + \sum_k^{0, \infty} b_k (z - z_0)^k,$$

è una funzione analitica nell' interno della corona circolare di centro in z_0 e di raggi r_a e r_b .

VI. Sviluppo in serie di potenze delle funzioni elementari, considerate per valori complessi della variabile.

Assai facilmente possiamo ora dimostrare che: *Gli sviluppi in serie di potenze delle funzioni elementari, ottenuti al n° precedente, in VI, VII e VIII, per valori reali della variabile, sussistono inalterati per valori complessi. Si ha, cioè, per ogni valore di $z = x + iy$,*

$$(6) \quad e^z = \sum_k^{0, \infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \operatorname{senh} z = \sum_k^{0, \infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \operatorname{cosh} z = \sum_k^{0, \infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\operatorname{senz} = \sum_k^{0, \infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \operatorname{cos} z = \sum_k^{0, \infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

e per $|z| < 1$, qualunque sia la costante α , reale o complessa,

$$(7) \quad (1+z)^\alpha = \sum_k^{0, \infty} \binom{\alpha}{k} z^k, \quad \log(1+z) = \sum_k^{0, \infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1},$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tang} z = \sum_k^{0, \infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}, \dots$$

Poichè $2 \operatorname{senh} z = e^z - e^{-z}$, $i \operatorname{senz} = \operatorname{senh} iz, \dots$, e poichè sussiste il teorema IV, basterà dimostrare (cfr. n° 70) la prima delle (6) e la prima delle (7). La prima delle serie (6) converge in tutto il piano complesso e poichè la serie delle derivate coincide con essa stessa, dettane $w(z)$ la somma, questa è (teor. I) una funzione analitica in tutto il piano complesso, per la quale si ha sempre $w'(z) = w(z)$. Ne

segue che la funzione analitica $w(z) e^{-z}$ ha (57, III) valore costante, e quindi, per essere $w(0) = 1$, risulta $w(z) = e^z$ (*). Detta ora $w(z)$ la somma della prima delle serie (7), nelle funzioni $w(z)$ e $(1+z)^\alpha$ si hanno due funzioni analitiche nell'intorno circolare $C(0, 1)$ dell'origine. In $C(0, 1)$ si ha (70, VII)

$$w'(z) (1+z) = \alpha w(z),$$

onde segue (come in VII del n° 70) $w(z) = (1+z)^\alpha$, per $|z| < 1$.

72.* Serie multiple. — Nello spazio $S_{(p)}$ a p dimensioni consideriamo l'insieme I , costituito da tutti i punti (n_1, n_2, \dots, n_p) a coordinate intere (positive, negative o nulle). In I sia ben definita una funzione complessa in (particolare reale)

$$\zeta_{n_1 n_2 \dots n_p},$$

chiamasi *serie multipla d'ordine p* oppure *serie p^{pla}* , il seguente simbolo:

$$(1) \quad \sum_{n_1 \dots n_p}^{-\infty, \infty} \zeta_{n_1 \dots n_p}.$$

Le quantità $\zeta_{n_1 n_2 \dots n_p}$ diconsi i *termini* della serie. Se $\zeta_{n_1 n_2 \dots n_p} = 0$ non appena una, almeno, delle coordinate di (n_1, n_2, \dots, n_p) è negativa, la serie può essere anche indicata col simbolo seguente

$$\sum_{n_1 \dots n_p}^{0, \infty} \zeta_{n_1 \dots n_p}.$$

Le serie che abbiamo fino ad ora considerato si potranno chiamare *serie semplici*.

Per ogni dominio rettangolare R di $S_{(p)}$ consideriamo la somma dei moduli dei valori che riceve la ζ nei punti di R . **I.** Tale somma sarà una funzione reale ben determinata del dominio rettangolare R , la quale sarà indicata con $\sigma(R)$. Orbene, noi supporremo sempre che tale somma sia limitata, che esista cioè un numero positivo K per cui risulti

$$\sigma(R) \leq K,$$

(*) Servendosi di mezzi più elementari, si può ragionare anche così: Si constata subito che $w(z') w(z'') = w(z' + z'')$ e che (70, VI), se x e y sono due quali si vogliono numeri reali $w(x) = e^x$, $w(iy) = \cos y + i \sin y$. Ne segue $w(z) = w(x + iy) = w(x) w(iy) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z$.

qualunque sia il dominio rettangolare R di $S_{(p)}$ che si considera. In tale ipotesi, alla quale si fa allusione dicendo, semplicemente, che la serie multipla considerata è *assolutamente convergente*, ci proponiamo di attribuire un valore ben determinato alla serie. Cominciamo dalla serie multipla formata dai moduli dei termini della (1).

$$(2) \quad \sum_{n_1 \dots n_p}^{-\infty, \infty} |\zeta_{n_1 \dots n_p}|.$$

L'estremo superiore dell'insieme numerico descritto dalla funzione $\sigma(R)$, al variare di R in $S_{(p)}$, è il valore (positivo) che attribuiamo alla serie multipla (2). Tale valore chiamasi la *somma* della serie (2), indicatolo con σ , si porrà

$$\sigma = \sum_{n_1 \dots n_p}^{-\infty, \infty} |\zeta_{n_1 \dots n_p}|.$$

Sia n un numero intero e positivo variabile, ed indichiamo con Q_n il dominio quadrato avente il centro nell'origine di $S_{(p)}$ e per semidimensione n . Posto $\sigma(Q_n) = \sigma_n$, si dimostra immediatamente che:

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma.$$

Siano, ad esempio, $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$, p quantità, positive o nulle, tutte minori dell'unità, si deduce dalla (3)

$$\sum_{n_1 \dots n_p}^{0, \infty} \rho_1^{n_1} \dots \rho_p^{n_p} = \frac{1}{1 - \rho_1} \dots \frac{1}{1 - \rho_p};$$

si ha invece

$$\sigma_n = \sum_{n_1 \dots n_p}^{0, n} \rho_1^{n_1} \dots \rho_p^{n_p} = \frac{1 - \rho_1^{n+1}}{1 - \rho_1} \dots \frac{1 - \rho_p^{n+1}}{1 - \rho_p}.$$

Ciò posto, per ogni dominio rettangolare R , indichiamo con $s(R)$ la somma dei valori che riceve la ζ nei punti di $R.I$. Se $R_2 > R_1$ sussiste la relazione

$$|s(R_2) - s(R_1)| \leq \sigma(R_2) - \sigma(R_1).$$

Se ne deduce che esiste, determinata e finita, il limite di $s_n = s(Q_n)$ per n divergente, e ciò in virtù dell'esistenza del limite di σ_n e della relazione

$$|s_{n+p} - s_n| \leq \sigma_{n+p} - \sigma_n.$$

E noi, per definizione, come valore della serie multipla (1) di ordine p prenderemo il limite indicato di s_n , ponendo:

$$(4) \quad s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n_1 \dots n_p}^{-\infty, \infty} \zeta_{n_1 \dots n_p}.$$

Se z_1, z_2, \dots, z_p sono qualsivogliano quantità complesse (in particolare reali) si ha, per esempio,

$$e^{z_1} + \dots + e^{z_p} = \sum_{n_1 \dots n_p}^{0, \infty} \frac{z_1^{n_1}}{n_1!} \dots \frac{z_p^{n_p}}{n_p!}.$$

Dimostriamo l'importante teorema seguente:

I. Se k è una qualunque degli indici $1, 2, \dots, p$, posto

$$Z_{n_1 \dots n_k} = \sum_{n_{k+1} \dots n_p}^{-\infty, \infty} \zeta_{n_1 \dots n_p},$$

si ha:

$$s = \sum_{n_1 \dots n_k}^{-\infty, \infty} Z_{n_1 \dots n_k}.$$

Basta, evidentemente, dimostrare il teorema nel caso particolare che le ζ siano reali. Limitiamoci, per semplificare la scrittura, a fare la dimostrazione per $p = 2$. Consideriamo dunque la seguente serie doppia assolutamente convergente, a termini reali,

$$\sum_{n_1 n_2}^{-\infty, \infty} u_{n_1 n_2}.$$

Facciamo, in primo luogo, l'ipotesi che le $u_{n_1 n_2}$ non siano mai negative. Si ha allora, comunque si prendano i numeri interi e positivi n e m , purchè $m \geq n$,

$$s_n \leq \sum_{n_2}^{-n, n} \sum_{n_1}^{-m, m} u_{n_1 n_2} \leq s,$$

e quindi, per m divergente,

$$s_n \leq \sum_{n_2}^{-n, n} U_{n_2} \leq s,$$

d'onde, per n divergente,

$$s = \sum_{n_2}^{-\infty, \infty} U_{n_2},$$

come appunto volevamo dimostrare. Le quantità reali $u_{n_1 n_2}$ siano ora comunque. Si ponga

$$a_{n_1 n_2} \begin{cases} = u_{n_1 n_2} & \text{se } u_{n_1 n_2} > 0, \\ = 0 & \text{se } u_{n_1 n_2} \leq 0, \end{cases} \quad b_{n_1 n_2} \begin{cases} = 0 & \text{se } u_{n_1 n_2} \geq 0, \\ = |u_{n_1 n_2}| & \text{se } u_{n_1 n_2} < 0. \end{cases}$$

Ne segue $u_{n_1 n_2} = a_{n_1 n_2} - b_{n_1 n_2}$. Indichiamo con $s_a(\mathbf{R})$ e con $s_b(\mathbf{R})$ le somme dei valori delle funzioni $a_{n_1 n_2}$ e $b_{n_1 n_2}$ nei punti di \mathbf{I}, \mathbf{R} , si ha :

$$\sigma(\mathbf{R}) = s_a(\mathbf{R}) + s_b(\mathbf{R}), \quad s(\mathbf{R}) = s_a(\mathbf{R}) - s_b(\mathbf{R}).$$

Poniamo

$$A_{n_2} = \sum_{n_1}^{-\infty, \infty} a_{n_1 n_2}, \quad B_{n_2} = \sum_{n_1}^{-\infty, \infty} b_{n_1 n_2},$$

ne segue $U_{n_2} = A_{n_2} - B_{n_2}$. E pertanto

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{n_2}^{-n, n} \sum_{n_1}^{-n, n} a_{n_1 n_2} - \sum_{n_2}^{-n, n} \sum_{n_1}^{-n, n} b_{n_1 n_2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n_2}^{-n, n} A_{n_2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n_2}^{-n, n} B_{n_2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n_2}^{-n, n} U_{n_2} = \sum_{n_2}^{-\infty, \infty} U_{n_2}. \end{aligned}$$

Una serie multipla d'ordine qualsivoglia p , assolutamente convergente, non può contenere, evidentemente, che un numero finito di termini aventi un valore comune. Ciò osservato, porremo la definizione seguente: Due serie multiple degli ordini p e q , assolutamente convergenti, dicansi fra di loro **equivalenti** o **differenti per il solo ordine dei termini**, se ogni termine dell'una compare nell'altra, ripetuto lo stesso numero di volte. Si dimostra immediatamente che: *Due serie multiple assolutamente convergenti, fra di loro equivalenti, hanno eguali somme.*

Dimostriamo che: *Ogni serie multipla (1) assolutamente convergente è equivalente a quante si vogliono serie semplici.* Diamoci, invece, la più arbitraria successione $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ di insiemi limitati di punti di $S_{(p)}$ per i quali si abbia: **a)** $A_n < A_{n+1}$, **b)** comunque si consideri un dominio rettangolare di $S_{(p)}$ esiste sempre un insieme della successione che contiene quel dominio. Sia h_1 il nu-

mero dei punti di $I. A_1, h_2$ quello dei punti di $I. (A_2 - A_1), \dots, h_n$ quello dei punti di $I. (A_n - A_{n-1}), \dots$. Ordiniamo, nel modo più arbitrario, i punti di $I. A_1$ e diciamo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{h_1}$ i valori che assume la funzione $\zeta_{n_1 n_2 \dots n_p}$, rispettivamente, nel primo, nel secondo, ..., nell' h_1^{mo} punto; ordiniamo, nel modo più arbitrario, i punti di $I. (A_2 - A_1)$ e diciamo $\lambda_{h_1+1}, \lambda_{h_1+2}, \dots, \lambda_{h_1+h_2}$ i valori che assume la funzione ζ , rispettivamente, nel primo, nel secondo, ..., nell' h_2^{mo} punto; ecc... . Si ha, evidentemente, che la serie semplice

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{h_1} + \lambda_{h_1+1} + \dots,$$

è equivalente alla serie multipla (1).

Prodotto di serie. Date le due serie multiple degli ordini p e q :

$$\sum_{n_1 \dots n_p}^{-\infty, \infty} \zeta'_{n_1 \dots n_p}, \quad \sum_{m_1 \dots m_q}^{-\infty, \infty} \zeta''_{m_1 \dots m_q},$$

la serie multipla seguente d'ordine $p + q$:

$$\sum_{n_1 \dots n_p m_1 \dots m_q}^{-\infty, \infty} \zeta'_{n_1 \dots n_p} \zeta''_{m_1 \dots m_q},$$

chiamasi la *serie prodotto delle due prime*. È immediato che: *Se le due prime serie sono assolutamente convergenti, ed hanno, rispettivamente, per somme s' e s'' , è pure assolutamente convergente la serie prodotto, ed ha per somma $s' \cdot s''$.*

Serie multiple di funzioni. I termini $\zeta_{n_1 n_2 \dots n_p}$ della serie multipla (1) d'ordine p siano ora funzioni delle variabili complesse z_1, z_2, \dots, z_r , definite negli insiemi A_1, A_2, \dots, A_r di punti, rispettivamente, dei piani complessi $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_r, y_r)$. Diciamo A l'insieme dello spazio complesso $S_{(2r)}$ descritto dal punto $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r)$. La serie multipla di funzioni

$$(5) \quad \sum_{n_1 \dots n_p}^{-\infty, \infty} \zeta_{n_1 \dots n_p}(z_1, z_2, \dots, z_r),$$

dicesi *convergente in A* se essa è assolutamente convergente in ogni punto di A . Le somme s della serie e s_n sono ora funzioni di z_1, z_2, \dots, z_r , definite in A ; orbene, se $s_n(z_1, z_2, \dots, z_r)$, al divergere di n ,

tende uniformemente in A , al suo limite $s(z_1, z_2, \dots, z_r)$, si dirà che la serie multipla (3) è *uniformemente convergente in A*.

È immediata l'estensione dei teoremi VI del n° 67; V, VI e VII del n° 69; I del n° 71* alle serie multiple di funzioni, uniformemente convergenti.

Serie multiple di potenze. Chiamansi in tal modo le serie multiple di funzioni del seguente tipo particolare

$$(6) \quad \sum_{n_1 \dots n_p}^{0, \infty} a_{n_1 \dots n_p} (z_1 - z_{10})^{n_1} \dots (z_p - z_{p0})^{n_p},$$

ove i coefficienti $a_{n_1 n_2 \dots n_p}$ sono quantità complesse affatto arbitrarie ed il punto iniziale $Z_0(z_{10}, z_{20}, \dots, z_{p0})$ è pur esso arbitrariamente assegnato. Per tali serie sussiste il **teorema Cauchy - Hadanard**:

II. Posto $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$, si consideri il limite:

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty}'' \left| a_{n_1 n_2 \dots n_p} \right|^{1: (n_1 + n_2 + \dots + n_p)}$$

Se tale limite è $+\infty$, e se nessuna delle coordinate del punto $Z(z_1, z_2, \dots, z_p)$ coincide con la corrispondente coordinata di Z_0 , la serie non è assolutamente convergente. Se detto limite è nullo, la serie è assolutamente convergente per ogni punto Z dello spazio complesso $S_{(2p)}$. Se lo stesso limite ha un valore finito l , non nullo, posto $r = 1:l$, la serie è assolutamente convergente per ogni punto dell'intorno quadrato complesso $Q(Z_0, r)$ del punto iniziale Z_0 , definito dalle limitazioni:

$$(8) \quad |z_k - z_{k0}| < r \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

La serie non è, invece, assolutamente convergente se è

$$(9) \quad |z_k - z_{k0}| > r \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

La dimostrazione del teorema non è che una facile estensione di quella già data (al n° 13) per il teorema analogo delle serie semplici di potenze. Limitiamoci ad accennare alla dimostrazione nel caso, più interessante, che il limite (7) abbia il valore finito l . Indicando con $\delta''(Z)$ la massima e con $\delta'(Z)$ la minima fra le p quantità $|z_k - z_{k0}|$, si avrà

$$\begin{aligned} |a_{n_1 \dots n_p}| \delta'(Z)^{n_1 + \dots + n_p} &\leq |a_{n_1 \dots n_p}| |z_1 - z_{10}|^{n_1} \dots |z_p - z_{p0}|^{n_p} \leq \\ &\leq |a_{n_1 \dots n_p}| \delta''(Z)^{n_1 + \dots + n_p}, \end{aligned}$$

e, secondochè si verificano le (8) o le (9), $\delta''(Z) < r$ o $\delta'(Z) > r$. Nel primo caso, per una certa quantità positiva ε , risulterà $\delta''(Z) = 1 : (l + 2\varepsilon)$, e possiamo sempre fissare un numero naturale ν tale che per ogni valore di $n (= \sum n_k)$ maggiore riesca $|a_{n_1 n_2 \dots n_p}|^{1:n} < l + \varepsilon$, onde segue, per $u > \nu$,

$$|a_{n_1 n_2 \dots n_p}| \delta''(Z)^{n_1 + n_2 + \dots + n_p} < \left(\frac{l + \varepsilon}{l + 2\varepsilon}\right)^{n_1 + n_2 + \dots + n_p}.$$

Nel secondo caso, comunque grande si assegni un numero naturale n' , si potranno sempre trovare valori di n maggiori, per ciascuno dei quali riesce

$$|a_{n_1 n_2 \dots n_p}| \delta'(Z)^{n_1 + n_2 + \dots + n_p} > 1.$$

Nel caso che il limite (7) abbia un valore finito l , il numero $r = 1 : l$, chiamasi il **raggio di convergenza** della serie (6), l'intorno quadrato $Q(Z_0, r)$ l'**intorno quadrato di convergenza**. Secondochè il limite (7) è infinito o nullo si dice anche che il raggio di convergenza della (6) è nullo o infinito. In quest'ultimo caso l'intorno quadrato di convergenza è l'intero spazio complesso $S_{(2p)}$.

Lasciamo al lettore il facile compito di estendere alle serie multiple di potenze il teorema V del n° 68. Ne segue (cfr. n° 69 e 71*) il teorema:

III. *La serie di potenze (6), con tutte quelle che se ne deducono mediante la successiva derivazione complessa termine a termine, converge uniformemente in ogni dominio rettangolare contenuto nell'intorno quadrato $Q(Z_0, r)$ di convergenza. La somma di essa $\zeta(z_1, z_2, \dots, z_p)$ è una funzione analitica in $Q(Z_0, r)$ ed è ivi, in ogni punto, successivamente derivabile in modo complesso quante volte si vuole, mentre si ha:*

$$\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_p} \zeta}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_p^{k_p}} = \sum_{n_1}^{k_1, \infty} \dots \sum_{n_p}^{k_p, \infty} \frac{n_1! \dots n_p!}{(n_1 - k_1)! \dots (n_p - k_p)!} a_{n_1 \dots n_p} (z_1 - z_{10})^{n_1 - k_1} \dots (z_p - z_{p0})^{n_p - k_p}.$$

Ne segue :

$$a_{k_1 \dots k_p} = \frac{1}{k_1!} \dots \frac{1}{k_p!} \left[\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_p} \zeta}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_p^{k_p}} \right]_{Z_0},$$

e pertanto, in $C(Z_0, r)$,

$$(10) \zeta(z_1, \dots, z_p) = \sum_{n_1 \dots n_p}^{0, \infty} \left[\frac{\partial^{n_1 + \dots + n_p} \zeta}{\partial z_1^{n_1} \dots \partial z_p^{n_p}} \right]_{Z_0} \frac{(z_1 - z_{10})^{n_1} \dots (z_p - z_{p0})^{n_p}}{n_1! \dots n_p!}$$

Per una qualsiasi funzione $\zeta(z_1, z_2, \dots, z_p)$, definita in un insieme aperto A , la quale in un certo punto $Z_0(z_{10}, z_{20}, \dots, z_{p0})$, sia successivamente derivabile parzialmente, quante volte si vuole, chiamasi **serie di Taylor ad essa relativa, di punto iniziale Z_0** , la serie multipla di potenze che trovasi nel secondo membro della (10). Secondo l'ultimo teorema si ha dunque: *La somma ζ di una serie multipla di potenze, di punto iniziale Z_0 e di intorno quadrato di convergenza $Q(Z_0, r)$, dà luogo ad una serie di Taylor, di punto iniziale Z_0 , ovunque convergente in $Q(Z_0, r)$ verso la funzione ζ . Ma sussiste il teorema più generale seguente che, più tardi, ritroveremo come caso particolare:*

IV. *Detta $\delta(Z)$ la massima fra le quantità $|z_k - z_{k0}|$, la somma ζ di una serie di potenze, di punto iniziale Z_0 e di intorno quadrato di convergenza $Q(Z_0, r)$, essendo Z' un qualsiasi punto di tale intorno, dà luogo ad una serie di Taylor di punto iniziale Z' , la quale, almeno nell'intorno quadrato $Q[Z', r - \delta(Z')]$, di Z' , è sempre convergente verso la funzione ζ .*

Per semplificare la scrittura, limitiamoci a dimostrare il teorema nel caso delle serie semplici di potenze. Si ha:

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \sum_n^{0, \infty} a_n (z - z_0)^n, & \zeta^{(k)}(z') &= \sum_n^{k, \infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z' - z_0)^{n-k}, \\ \zeta(z) &= \sum_n^{0, \infty} a_n (z - z' + z' - z_0)^n = \\ &= \sum_n^{0, \infty} a_n \sum_k^{0, n} \frac{n!}{k!(n-k)!} (z - z')^k (z' - z_0)^{n-k} \end{aligned}$$

Posto $\delta = |z' - z_0|$, è subito visto che per $|z - z'| < r - \delta$ la serie doppia:

$$\sum_n^{0, \infty} \sum_k^{0, n} a_n \frac{n!}{k!(n-k)!} (z - z')^k (z' - z_0)^{n-k},$$

è assolutamente convergente, ne segue (teor. I)

$$\zeta(z) = \sum_k^{0, \infty} \frac{(z - z')^k}{k!} \sum_n^{k, \infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z' - z_0)^{n-k} = \sum_k^{0, \infty} \zeta^{(k)}(z') \frac{(z - z')^k}{k!}.$$

Il teorema ora dimostrato ha grande importanza, esso constitui-

sce il classico punto di partenza per l'edificazione della teoria di *Weierstrass delle funzioni analitiche*.

Sviluppo in serie multiple di potenze per le funzioni reali di due o più variabili reali. La funzione reale $u = f(x, y, \dots)$, delle r variabili reali x, y, \dots , definita nell'insieme A di punti di $S_{(r)}$, sia dotata in ogni punto di RA di tutte le derivate parziali d'ordine comunque elevato, finite e continue. Fissiamo in RA , arbitrariamente, un punto $P_0(x_0, y_0, \dots)$ ed indichiamo con $A(P_0)$ quella porzione di A luogo di tutti i punti P di A , per ciascuno dei quali il segmento P_0P è totalmente contenuto in RA . Al n° 63 abbiamo stabilito la formola di *Taylor*, secondo la quale, per ogni punto P di $A(P_0)$ si ha:

$$f(P) = \sum_{pq\dots}^{0, n-1} \left[\frac{\partial^{p+q+\dots} f}{\partial x^p \partial y^q \dots} \right]_{P_0} \frac{(x-x_0)^p}{p!} \frac{(y-y_0)^q}{q!} \dots + R_n,$$

$$R_n = \sum_{pq\dots}^{0, n} \left[\frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q \dots} \right]_H \frac{(x-x_0)^p}{p!} \frac{(y-y_0)^q}{q!} \dots,$$

avendo designato con H un certo punto interno al segmento P_0P . Ne segue, ben evidentemente, il teorema:

V. Per ogni punto P di $A(P_0)$ per il quale la serie multipla di *Taylor*, relativa alla funzione $f(P)$, di punto iniziale P_0 , è assolutamente convergente, ed inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0,$$

l'indicata serie ha per somma $f(P)$, essa fornisce, come si dice, lo sviluppo in serie di *Taylor* della funzione.

Sussiste il seguente teorema, analogo al teor. III del n° 70:

VI. Se esistono r numeri determinati, interi e non negativi, h, k, \dots , tali che le funzioni:

$$\frac{1}{p^h q^k \dots} \frac{\partial^{p+q+\dots} f}{\partial x^p \partial y^q \dots},$$

risultino uniformemente limitate in ogni porzione limitata di RA , comunque si fissi il punto P_0 in RA , la serie di *Taylor* della $f(P)$, di punto iniziale P_0 , è uniformemente convergente in ogni porzione limitata di RA , ed in ogni punto P di $A(P_0)$ ha per somma $f(P)$.

Definizione delle funzioni reali analitiche di variabili reali. Una funzione reale $u = f(x, y, \dots)$, di quante si vogliono variabili reali definita in un insieme aperto A , dicesi *analitica* in A , quando per ogni punto P_0 di A è possibile determinare un suo intorno quadrato $Q(P_0)$, contenuto in A , ed una serie multipla di potenze.

$$(11) \quad \sum_{pq\dots}^{0, \infty} a_{pq\dots}(P_0) \cdot (x - x_0)^p (y - y_0)^q \dots,$$

la quale converga in $Q(P_0)$ e vi abbia sempre per somma $f(x, y, \dots)$. In virtù della svolta teoria generale delle serie di potenze possiamo dire che: Una funzione reale di variabili reali, analitica in un insieme aperto A , è ivi continua e dotata di derivate parziali d'ordine comunque elevato, pur esse analitiche; ogni serie multipla reale di potenze è analitica nell'intorno quadrato di sua convergenza; la serie (11) non è che la serie di *Taylor* della f di punto iniziale P_0 .

È opportuno osservare che nella definizione di funzione analitica complessa di variabili complesse, parzialmente derivabile in modo complesso, si richiede soltanto la *continuità* delle derivate parziali complesse del primo ordine e non si menziona affatto la possibilità dello sviluppo della funzione in serie di potenze, ma vedremo, in altra parte del corso, che tale possibilità, *per le funzioni derivabili in modo complesso*, è una conseguenza delle proprietà indicate, caratteristiche dell'analiticità della funzione.

Curve regolari e porzioni di superficie regolari analitiche. Una curva regolare (n° 49) dicesi *analitica* quando se ne può trovare una rappresentazione parametrica, $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, tale che le funzioni $x(t), y(t), z(t)$ riescano, in ogni intervallo aperto dell'asse delle t , base di una porzione regolare della curva, funzioni analitiche di t . Una porzione di superficie regolare (n° 58) dicesi *analitica* quando se ne può trovare una rappresentazione parametrica, $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, tale che, detto D_{uv} il corrispondente dominio base nel piano (u, v) , le funzioni $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$, riescano analitiche in $D_{uv} - \text{FD}_{uv}$.

§ 2. Funzioni implicite.

73. Posizione del problema. — Sia A un qualsiasi insieme di punti di uno spazio $S_{(r)}$ a r dimensioni, del quale diciamo x_1, x_2, \dots, x_r le coordinate correnti. Sia i_1, i_2, \dots, i_k una qualsiasi combinazione degli indici $1, 2, \dots, r$, di classe $k < r$; l'insieme di punti dello spazio $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ descritto dal punto $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ al variare del punto (x_1, x_2, \dots, x_r) in A , chiamasi *la proiezione dell'insieme A sull'indicato spazio*. Sia $r = p + q$ ed indichiamo con $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q$ le coordinate correnti di $S_{(p+q)}$. Designamo con $S_{(p)}$ e con $S_{(q)}$ gli spazi, a p e a q dimensioni, dei punti (x_1, \dots, x_p) e (y_1, \dots, y_q) , con C_x e C_y le proiezioni di un dato insieme C di $S_{(p+q)}$ su $S_{(p)}$ e su $S_{(q)}$. In C siano assegnate q funzioni F_1, \dots, F_q delle $p + q$ variabili $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q$, e consideriamo le q equazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_q(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = 0, \end{cases}$$

In molte questioni d'Analisi ed altresì nelle pratiche applicazioni, il problema della risoluzione di un tale sistema di q equazioni, si pone al modo seguente: *Costruire due insiemi A e B , rispettivamente dalle proiezioni C_x e C_y di C su $S_{(p)}$ e su $S_{(q)}$, tali che per ogni punto $X(x_1, \dots, x_p)$, arbitrariamente preso in A , esista sempre uno ed un solo punto $Y(y_1, \dots, y_q)$ in B , per modo che: a) le coordinate di X e di Y appartengano ad un punto di C ; b) quelle coordinate diano un sistema di soluzioni per il sistema (1). Risolto un tale problema, le coordinate y_1, \dots, y_q di Y potranno ben riguardarsi come una q^{pla} di funzioni delle variabili x_1, \dots, x_p definita nell'insieme A . Posto*

$$(2) \quad y_1 = g_1(x_1, \dots, x_p), \dots, y_q = g_q(x_1, \dots, x_p),$$

per le funzioni della indicata q^{pla} , queste danno luogo, in A , alle seguenti q identità:

$$F_i[x_1, \dots, x_p, g_1(x_1, \dots, x_p), \dots, g_q(x_1, \dots, x_p)] = 0, \quad (i = 1, \dots, q).$$

Il sistema di funzioni (2) si dice un sistema di *funzioni implicite* definite dal sistema di equazioni (1). Si dice anche che le (1) definiscono in A *implicitamente* le funzioni (2).

La teoria non ha però, in generale, bisogno, anche nel caso che

le funzioni F_i siano suscettibili di note espressioni elementari, di conoscere le esplicite espressioni delle funzioni g_1, \dots, g_q . Di esse occorre soltanto stabilire l'esistenza, costruendo i due insiemi A e B sopra indicati, e assicurare un certo numero di proprietà, per esempio, di continuità e di derivabilità. Le pratiche applicazioni hanno poi bisogno solamente di metodi di calcolo (cfr. n° 66) che consentano di approssimare, con un noto errore d'approssimazione, ciascuna funzione g_i . Nel presente paragrafo, imitando il *Goursat*, si tratterà appunto da questo punto di vista l'importante argomento delle funzioni implicite. Ci limiteremo sempre, inoltre, al caso che l'insieme C sia un dominio rettangolare R dello spazio $S_{(p+q)}$.

74. Preliminare studio di un caso particolare. — Cominciamo dal dimostrare il teorema seguente: *Le funzioni f_1, \dots, f_q , definite nel dominio rettangolare R di $S_{(p+q)}$, siano ivi continue, con le loro derivate parziali del primo ordine rispetto alle y_1, \dots, y_q . Porremo $\partial f_i / \partial y_k = f_{ik}$. Se esiste un punto $P_0 (x_1^0, \dots, x_p^0, y_1^0, \dots, y_q^0)$ interno al dominio rettangolare R , per il quale è*

$$(1) \quad f_i(P_0) = f_{ik}(P_0) = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, q),$$

si possono determinare $p+q$ numeri positivi $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$, tali che: *a) il dominio rettangolare avente il centro in P_0 e le semidimensioni $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ è contenuto in R ; b) nel dominio rettangolare A di $S_{(p)}$ avente il centro nel punto $X_0(x_1^0, \dots, x_p^0)$ e le semidimensioni a_1, \dots, a_p , esiste uno ed un solo sistema di q funzioni continue $y_i = g_i(x_1, \dots, x_p)$, definite implicitamente dalle q equazioni:*

$$(2) \quad \begin{cases} y_1 = y_1^0 + f_1(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q), \\ \dots \\ y_q = y_q^0 + f_q(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q), \end{cases}$$

e verificanti le limitazioni

$$(3) \quad |y_i - y_i^0| \leq b_i \quad (i = 1, \dots, q).$$

La funzione g_i prende nel punto X_0 il valore y_i^0 .

Per la supposta continuità in R delle funzioni f_{ik} e per le (1), è possibile costruire in R un dominio rettangolare R' , di centro in P_0 , in ogni punto del quale riesce:

$$(4) \quad |f_{ik}(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)| \leq K < 1 : q \quad (i, k = 1, 2, \dots, q),$$

K essendo un numero positivo, arbitrariamente fissato, minore di $1 : q$. Siano $a_1', \dots, a_p', b_1, \dots, b_q$ le semidimensioni di \mathbf{R}' . Osserviamo subito che se $(x_1, \dots, x_p, y_1', \dots, y_q')$ e $(x_1, \dots, x_p, y_1'', \dots, y_q'')$ sono due quali si vogliono punti di \mathbf{R}' , si ha, in virtù delle (4),

$$(5) \quad |f_i(x_1, \dots, x_p, y_1', \dots, y_q') - f_i(x_1, \dots, x_p, y_1'', \dots, y_q'')| \leq K \sum_{i=1}^q |y_i' - y_i''|.$$

Per la continuità delle funzioni f_i e per le (1) è altresì possibile determinare i p numeri positivi $a_1 \leq a_1', \dots, a_p \leq a_p'$, tali che nel dominio rettangolare \mathbf{A} , avente il centro nel punto $X_0(x_1^0, \dots, x_p^0)$ e le semidimensioni a_1, \dots, a_p , si abbia sempre:

$$(6) \quad |f_i(x_1, \dots, x_p, y_1^0, \dots, y_q^0)| \leq (1 - qK)b,$$

ove b designa la minore fra le quantità b_1, \dots, b_q .

Dico che per i $p + q$ numeri positivi $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ ora determinati si verificano le circostanze enunciate dal teorema. Si vede subito intanto che nel dominio rettangolare \mathbf{A}' — e quindi *a fortiori* nel dominio \mathbf{A} — di centro in X_0 e di semidimensioni a_1', \dots, a_p' , non può esistere più di un sistema di funzioni implicite definite dalle (2) e verificanti le limitazioni (3). Ed inverso, per due tali sistemi g_i' e g_i'' si trae

$$g_i'' - g_i' = f_i(x_1, \dots, x_p, g_1', \dots, g_q') - f_i(x_1, \dots, x_p, g_1'', \dots, g_q''),$$

e quindi in virtù della (5),

$$|g_i' - g_i''| \leq K \sum_{k=1}^q |g_k' - g_k''|, \quad (i=1, \dots, q),$$

e sommando membro a membro queste q relazioni

$$\sum_{i=1}^q |g_i' - g_i''| \leq qK \sum_{k=1}^q |g_k' - g_k''|,$$

d'onde, poichè $1 > qK$, segue $g_i' \equiv g_i''$ in \mathbf{A}' .

Alla costruzione, nel dominio \mathbf{A} , delle funzioni $y_i = g_i(x_1, \dots, x_p)$ verificanti le (2) e le (3) si riesce con un metodo di calcolo, detto *per approssimazioni successive*. Si pone, in \mathbf{A} ,

$$(7') \quad g_i' = y_i^0 + f_i(x_1, \dots, x_p, y_1^0, \dots, y_q^0),$$

$$(7'') \quad g_i'' = y_i^0 + f_i(x_1, \dots, x_p, g_1', \dots, g_q'),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(7^{(n+1)}) g_i^{(n+1)} = y_i^0 + f_i(x_1, \dots, x_p, g_1^{(n)}, \dots, g_q^{(n)}),$$

$$\dots \dots \dots$$

$(i=1, 2, \dots, q).$

Tali posizioni, successivamente ripetute quante volte si vuole, hanno sempre ovunque senso in \mathcal{A} . Si ha invero, in \mathcal{A} ,

$$|g'_i - y_i^0| = |f_i(x_1, \dots, x_p, y_1^0, \dots, y_q^0)| \leq (1 - qK)b < b \leq b_i,$$

e, supposto d' avere stabilito che $|g_i^{(n)} - y_i^0| < b$ (in \mathcal{A}) ne segue

$$\begin{aligned} |g_i^{(n+1)} - y_i^0| &\leq |f_i(x_1, \dots, x_p, y_1^0, \dots, y_q^0)| + \\ &+ |f_i(x_1, \dots, x_p, g_1^{(n)}, \dots, g_q^{(n)}) - f_i(x_1, \dots, x_p, y_1^0, \dots, y_q^0)| \leq \\ &\leq b(1 - qK) + K \sum_{k=1}^q |g_k^{(n)} - y_k^0| < b(1 - qK) + bqK = b \leq b_i. \end{aligned}$$

Le g'_i , dalle (7') definite in \mathcal{A} e ivi continue, verificano dunque (in \mathcal{A}) le (3). Le (7'') hanno pertanto senso in \mathcal{A} e definiscono ivi le funzioni continue g''_i verificanti le (3);...; le (7⁽ⁿ⁺¹⁾) hanno senso in \mathcal{A} e definiscono ivi le funzioni continue $g_i^{(n+1)}$ verificanti le (3);... Dico che le $g_i^{(n)}$, per n divergente, convergono uniformemente in \mathcal{A} .

Consideriamo infatti le serie

$$(8) \quad y_i^0 + (g'_i - y_i^0) + (g''_i - g'_i) + \dots + (g_i^{(n)} - g_i^{(n-1)}) + \dots,$$

ed indichiamo con $L^{(n)}$ il massimo modulo in \mathcal{A} delle differenze $g_i^{(n)} - g_i^{(n-1)}$. Si ha:

$$\begin{aligned} |g_i^{(n)} - g_i^{(n-1)}| &= |f_i(x_1, \dots, x_p, g_1^{(n-1)}, \dots, g_q^{(n-1)}) - f_i(x_1, \dots, x_p, g_1^{(n-2)}, \dots, g_q^{(n-2)})| \leq \\ &\leq K \sum_{k=1}^q |g_k^{(n-1)} - g_k^{(n-2)}| \leq qKL^{(n-1)}, \end{aligned}$$

onde

$$L^{(n)} \leq qKL^{(n-1)},$$

e quindi, successivamente,

$$(9) \quad L^{(n)} \leq (qK)^{n-1} L' \leq b(1 - qK)(qK)^{n-1}$$

ciò che (67, V e VI) dimostra quanto abbiamo asserito. Posto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_i^{(n)} = g_i,$$

le funzioni g_i riescono definite in \mathcal{A} ed ivi (69, I e V) continue. Inoltre, passando al limite per n divergente, nelle (7⁽ⁿ⁺¹⁾) e nelle

$$|g_i^{(n)} - y_i^0| \leq b_i, \quad g_i^{(n)}(x_1^0, \dots, x_p^0) = y_i^0,$$

si trova, in tutto \mathcal{A} ,

$$\begin{aligned} g_i &= y_i^0 + f_i(x_1, \dots, x_p, g_1, \dots, g_q), \\ |g_i - y_i| &\leq b_i, \quad g_i(x_1^0, \dots, x_p^0) = y_i^0. \end{aligned}$$

Il teorema enunciato è pertanto in ogni sua affermazione dimostrato.

La dimostrazione ora esposta, dovuta al *Goursat*, dell'esistenza delle funzioni g_i , implicitamente definite dal sistema di equazioni (2), offre anche un effettivo metodo di calcolo delle stesse funzioni che *può benissimo essere adottato nelle pratiche applicazioni numeriche*. Esso è stato chiamato *un metodo per approssimazioni successive*, poichè le successive funzioni $g'_i, g''_i, \dots, g_i^{(n)}, \dots$, che abbiamo costruito in \mathcal{A} , possono ben considerarsi come successive approssimazioni della funzione g_i : Arrestandoci al calcolo della funzione $g_i^{(n)}$, l'errore che si commette ponendo $g_i = g_i^{(n)}$ è dato del resto, relativo al termine $(n + 1)^{\text{mo}}$, della serie (8). Tale errore può variare di segno al variare di $X(x_1, \dots, x_p)$ in \mathcal{A} , ma esso, in virtù di (9), non supera mai, in modulo, la quantità $b(qK)^n$. Adunque:

La funzione $g_i^{(n)}$ è un valore approssimato (per eccesso o per difetto) della funzione g_i , con un errore, in tutto \mathcal{A} , non superiore in modulo alla quantità $b(qK)^n$.

Per esempio, posto $K = 1 : (q \cdot 10)$, e prese le b_1, \dots, b_q in modo che fra di esse ve ne sia una almeno non superiore all'unità, la $g_i^{(n)}$ avrà a comune, in tutto \mathcal{A} , con la g_i , le prime $n - 1$ cifre decimali.

75. Il teorema generale sulle funzioni implicite. — Al problema posto al n° 73 siamo ora in grado di rispondere, in tutta generalità, secondo il seguente *teorema di Dini*:

I. *Le funzioni F_1, \dots, F_q , definite nel dominio rettangolare \mathbf{R} di $\mathcal{S}_{(p+q)}$, siano ivi continue con le loro derivate parziali del primo ordine rispetto alle y_1, \dots, y_q . Se esiste un punto $P_0 (x_1^0, \dots, x_p^0, y_1^0, \dots, y_q^0)$ interno a \mathbf{R} , per il quale è*

$$(1) \quad F_i(P_0) = 0 \quad (i = 1, \dots, q), \quad \left[\frac{\partial (F_1, \dots, F_q)}{\partial (y_1, \dots, y_q)} \right]_{P_0} \neq 0,$$

si possono determinare $p + q$ numeri positivi $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$, tali che:
a) *il dominio rettangolare avente il centro in P_0 e le semidimensioni $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ è contenuto in \mathbf{R} ; b)* *nel dominio rettangolare \mathcal{A} di $\mathcal{S}_{(p)}$ avente il centro nel punto $X_0 (x_1^0, \dots, x_p^0)$ e le semidimensioni a_1, \dots, a_p , esiste uno ed un solo sistema di q funzioni $y_i = g_i(x_1, \dots, x_p)$, definite implicitamente dalle q equazioni:*

$$(2) \quad F_i(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

e verificanti le limitazioni

$$(3) \quad |y_i - y_i^0| \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

La funzione g_i prende nel punto X_0 il valore y_i^0 .

Diciamo J_0 il valore, che si è supposto [nelle (1)] diverso da zero in P_0 , dell' jacobiano delle F_i rispetto alle y_k , e diciamo α_{ik} e α_{ik} i valori in P_0 rispettivamente dell' elemento $\partial F_i / \partial y_k$ dell' indicato jacobiano e del complemento algebrico di quell' elemento nell' jacobiano. Si vede subito che il sistema di equazioni (2) equivale al seguente

$$\alpha_{1i} F_1 + \alpha_{2i} F_2 + \dots + \alpha_{qi} F_q = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

il quale si scrive anche, identicamente,

$$y_i = y_i^0 + \left[y_i - y_i^0 - \frac{1}{J_0} (\alpha_{1i} F_1 + \alpha_{2i} F_2 + \dots + \alpha_{qi} F_q) \right] \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Quest'ultimo sistema è precisamente della forma e nelle condizioni del sistema (2) considerato nel numero precedente, qualora si ponga

$$f_i = y_i - y_i^0 - \frac{1}{J_0} (\alpha_{1i} F_1 + \dots + \alpha_{qi} F_q);$$

si ha invero $f_i(P) = 0$,

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \right]_{P_0} = - \frac{1}{J_0} \sum_{r=1}^q \alpha_{ri} a_{rk} = 0, \text{ per } i \neq k, \quad \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_i} \right]_{P_0} = 1 - \frac{1}{J_0} \sum_{r=1}^q \alpha_{ri} a_{ri} = 0.$$

Possiamo, pertanto, ritenere completamente dimostrato il teorema enunciato. Per le pratiche applicazioni, rileviamo che i numeri positivi $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ menzionati nel teorema, sono quelli per i quali le limitazioni

$$(4) \quad |x_1 - x_1^0| \leq a_1, \dots, |x_p - x_p^0| \leq a_p, \quad |y_1 - y_1^0| \leq b_1, \dots, |y_q - y_q^0| \leq b_q,$$

hanno di conseguenza le seguenti:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{1}{J_0} \sum_r^{1,q} \alpha_{ri} \frac{\partial F_r}{\partial y_k} \right|, \text{ per } i \neq k, \\ \left| 1 - \frac{1}{J_0} \sum_r^{1,q} \alpha_{ri} \frac{\partial F_r}{\partial y_i} \right| \end{array} \right\} \leq K < \frac{1}{q},$$

$$\left| \frac{1}{J_0} \sum_{r=1}^q \alpha_{ri} F_r(x_1, \dots, x_p, y_1^0, \dots, y_q^0) \right| \leq (1 - qK)b,$$

ove b è la minore delle quantità b_1, \dots, b_q . Le funzioni $g_i^{(n)}$, successive approssimazioni della g_i , sono definite dalle eguaglianze:

$$g'_i = y_i^0 - \frac{1}{J_0} \sum_{r=1}^q \alpha_{ri} F_r(x_1, \dots, x_p, y_1^0, \dots, y_q^0),$$

.

$$g_i^{(n+1)} = g_i^{(n)} - \frac{1}{J_0} \sum_{r=1}^q \alpha_{ri} F_r(x_1, \dots, x_p, g_1^{(n)}, \dots, g_q^{(n)}),$$

.

Prolungamento. Per ogni punto $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ di \mathbf{R} , poniamo

$$J(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = \frac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(y_1, \dots, y_q)},$$

la funzione J riesce continua in tutto \mathbf{R} . Sussiste il seguente teorema:

II. *Nell'insieme $\mathbf{C} (< \mathbf{R})$ di $\mathbf{S}_{(p+q)}$, avente le proiezioni \mathbf{C}_x e \mathbf{C}_y su $\mathbf{S}_{(p)}$ e su $\mathbf{S}_{(q)}$, riesca sempre $J \neq 0$, e nel dominio internamente connesso \mathbf{D} (di $\mathbf{S}_{(p)}$) totalmente interno a \mathbf{C}_x siano definite le due q^{plo} di funzioni $y_i = g'_i(X)$, $y_i = g''_i(X)$, verificanti, identicamente in \mathbf{D} , le equazioni (2) e tali che, variando X in \mathbf{D} , i punti $[g'_1(X), \dots, g'_q(X)]$, $[g''_1(X), \dots, g''_q(X)]$ siano sempre interni a \mathbf{C}_y . Si ha allora che se esiste un punto X_0 di \mathbf{D} , per il quale le due q^{plo} di funzioni coincidono, esse coincideranno in tutto \mathbf{D} .*

Per dimostrare il teorema, cominciamo dall'osservare che se, in un punto X di \mathbf{D} , si ha $g'_i(X) = g''_i(X)$, poichè il punto $[x_1, \dots, x_p, g'_1(X), \dots, g'_q(X)]$ è interno a \mathbf{C} , in forza del teor. I si può costruire un dominio rettangolare $\mathbf{A}(X)$, avente il centro in X , tale che in ogni punto di $\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}(X)$ sia sempre $g'_i = g''_i$. In virtù delle ipotesi ammesse esiste pertanto un dominio rettangolare $\mathbf{A}(X_0)$, avente il centro in X_0 , tale che in $\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}(X_0)$ è sempre $g'_i(X) = g''_i(X)$. Poniamo, in \mathbf{D} , $\delta(X) = \sum_i |g'_i(X) - g''_i(X)|$. La funzione $\delta(X)$ è continua in tutto \mathbf{D} , devo dimostrare che è ivi identicamente $\delta(X) \equiv 0$. Indichiamo con \mathbf{D}' l'insieme dei punti di \mathbf{D} per i quali è $\delta(X) = 0$. Tale insieme esiste, esso infatti contiene il dominio $\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}(X_0)$, ed è chiuso in virtù della continuità di $\delta(X)$; inoltre, in forza dell'osservazione premessa, nessun punto di \mathbf{FD}' può essere interno a \mathbf{D} . Pertanto, ciascun punto X , interno a \mathbf{D} , ap-

partiene a D' , diversamente (21, II) su ogni poligonale, totalmente interna a D , congiungente X con un punto X_1 interno a D . $A(X_0)$, sarebbe situato un punto di FD' . È dunque $D' \equiv D$; come volevamo dimostrare.

Ritorniamo ora a considerare le ipotesi del teor. I e i risultati con questo conseguiti. Consideriamo l'insieme C , dei punti del dominio rettangolare R , ove è $J(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \neq 0$; il punto $P_0(x_1^0, \dots, x_p^0, y_1^0, \dots, y_q^0)$ menzionato nel teor. I è interno a C . Indicheremo ora con $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ quei $p + q$ numeri positivi tali che: **a)** il dominio rettangolare avente il centro in P_0 e le semidimensioni $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ sia *interno a C*; **b)** per ogni punto dello stesso dominio siano verificate le limitazioni (5). Il teor. I assicura che nel dominio rettangolare A (di $S_{(p)}$) avente il centro nel punto $X_0(x_1^0, \dots, x_p^0)$ e le semidimensioni a_1, \dots, a_p , si possono calcolare le q funzioni $y_i = g_i(X)$, implicitamente definite dalle (2) e verificanti le limitazioni $|g_i(X) - y_i^0| \leq b_i$. Al variare di X in A il punto $[x_1, \dots, x_p, g_1(X), \dots, g_q(X)]$ si mantiene sempre *interno a C*. Sia $X_1(x_1^{(1)}, \dots, x_p^{(1)})$ un arbitrario punto della frontiera di A , posto $g_i(X_1) = y_i^{(1)}$, il punto $P_1(x_1^{(1)}, \dots, x_p^{(1)}, y_1^{(1)}, \dots, y_q^{(1)})$ viene a trovarsi nelle identiche condizioni del punto P_0 ; esisteranno pertanto $p + q$ numeri positivi $a_1^{(1)}, \dots, a_p^{(1)}, b_1^{(1)}, \dots, b_p^{(1)}$ tali che: **a)** il dominio rettangolare avente il centro in P_1 e le semidimensioni $a_1^{(1)}, \dots, a_p^{(1)}, b_1^{(1)}, \dots, b_q^{(1)}$ sia *interno a C*; **b)** per ogni punto dello stesso dominio siano verificate le limitazioni analoghe alle (5). Nel dominio rettangolare A_1 (di $S_{(p)}$) avente il centro nel punto X_1 e le semidimensioni $a_1^{(1)}, \dots, a_p^{(1)}$ si possono calcolare q funzioni continue $y_i = g_i^{(1)}(X)$, definite implicitamente dalle equazioni (2) e verificanti le limitazioni $|g_i^{(1)}(X) - y_i^{(1)}| \leq b_i^{(1)}$. Poichè $g_i^{(1)}(X_1) = g_i(X_1)$, e pertanto (teor. II) si ha identicamente $g_i^{(1)}(X) = g_i(X)$, in $A \cdot A_1$, ponendo

$$G_i(X) \begin{cases} = g_i(X) & \text{se } X \text{ è in } A, \\ = g_i^{(1)}(X) & \text{se } X \text{ è in } A_1, \end{cases}$$

si viene a costruire nel dominio $A + A_1$ una q^{pla} di funzioni continue $y_i = G_i(X)$, definite implicitamente dalle equazioni (2). Si dice allora, com'è naturale, che con le funzioni $y_i = g_i^{(1)}(X)$ si è operato il *prolungamento* delle funzioni $y_i = g_i(X)$ nel dominio $A + A_1$.

La descritta operazione di prolungamento si può successivamente, con una grande arbitrarietà, indefinitamente riapplicare. I domini rettangolari $A, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, che successivamente si ottengono sono tutti interni a C e sono tali che ognuno di essi ha il centro sulla frontiera del precedente. Può benissimo avvenire che fra i domini A, A_1, \dots, A_{n-2} si trovi taluno A_s per il quale esiste $A_n \cdot A_s$ e non sia

$$\sum_{i=1}^q |g_i^{(n)}(X) - g_i^{(s)}(X)| \equiv 0 \text{ in } A_n \cdot A_s;$$

se, allora, ciò che evidentemente si può fare, si impone inoltre a ciascun dominio A_n di non avere alcun punto comune con nessuno di tali domini A_s , al crescere indefinito di n , si verrà così, *al limite*, a costruire un insieme aperto H internamente connesso, contenuto in C_x , ove si sono calcolate le q funzioni continue $y_i = G_i(X)$, definite implicitamente dalle equazioni (2) e tali che, variando X in H , il punto $[x_1, \dots, x_p, G_1(X), \dots, G_q(X)]$ è sempre interno a C . Possiamo perciò concludere col teorema:

III. *Le funzioni F_1, \dots, F_q , definite nel dominio rettangolare R di $S_{(p+q)}$ siano ivi continue con le loro derivate parziali del primo ordine rispetto alle y_1, \dots, y_q . Sia C quell'insieme di punti di R nel quale lo jacobiano J delle F_i rispetto alle y_k si mantiene diverso da zero e siano C_x e C_y le proiezioni di C su $S_{(p)}$ e su $S_{(q)}$. Se esiste un punto $P_0 (x_1^0, \dots, x_p^0, y_1^0, \dots, y_q^0)$, interno a C , per il quale è $F_i(P_0) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, q$), si può costruire un ben determinato insieme aperto H (di $S_{(p)}$) contenuto in C_x e contenente il punto $X_0 (x_1^0, \dots, x_p^0)$ e calcolare, per ogni punto di esso, un'unica q^{pla} di funzioni continue $y_i = G_i(X)$, implicitamente definite dalle equazioni (2), e per le quali si ha: a) $G_i(X_0) = y_i^0$; b) variando X in H , il punto $[G_1(X), \dots, G_q(X)]$ si mantiene interno a C_y .*

Inversione. Un'interessante ed importante applicazione, che andiamo ora a fare, della teoria generale precedentemente svolta, si ha nella trattazione del cosiddetto *problema dell'inversione* di un sistema di funzioni. Nel dominio limitato D dello spazio $S_{(r)}$, a r dimensioni, siano definite le r funzioni

$$(6) \quad x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_r) \quad (i = 1, \dots, r),$$

finite e continue con le loro derivate parziali del primo ordine e sia inoltre sempre in D

$$(7) \quad J(y_1, \dots, y_r) = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_r)}{\partial(y_1, \dots, y_r)} \neq 0.$$

Sia B un dominio internamente connesso, completamente interno a D . Ad ogni punto $Y(y_1, \dots, y_r)$ di B , le (6) fanno corrispondere un determinato punto $X(x_1, \dots, x_r)$ di $S_{(r)}$; diciamo A_0 l'insieme di punti descritto da X al variare di Y in B . L'insieme A è pur esso limitato, e in virtù del teor. III, ad ogni punto Y interno a B corrisponde un punto X interno ad A ; ne segue, per la supposta continuità delle φ_i , che come ogni punto di B è punto limite di punti ad esso interni, così pure è tale ogni punto di A , dunque anche A è un dominio. Supponiamo che le (6) facciano corrispondere sempre a ciascun punto di FB un punto di FA . In tale ipotesi si vede facilmente che il dominio A è pur esso internamente connesso. Non è escluso che le (6) a due diversi punti di B facciano corrispondere un unico punto di A , ma io dico che: α Se le (6), ad un punto X_0 di $A - FA$ fanno corrispondere non meno di due punti distinti Y_0' e Y_0'' di B , ciò avverrà per ogni punto di A .

Per dimostrare tale proposizione, cominciamo dall'osservare che, in grazia della (7), si potranno costruire (teor. I) tre domini rettangolari H_0, K_0' e K_0'' , il primo interno ad A e i due ultimi a B , aventi, rispettivamente, per centri i punti X_0, Y_0' e Y_0'' , tali che i due domini K_0' e K_0'' non abbiano punti comuni e che ad ogni punto X di H_0 corrispondano, per le (6), un punto Y' in K_0' ed un punto Y'' in K_0'' . Diciamo C l'insieme dei punti di A a ciascuno dei quali corrisponde in B non meno di due punti distinti. Poichè $C \supset H_0$, tale insieme esiste. Esso è chiuso. Sia infatti X , un punto (che può anche essere in FA) limite di C e sia Y_1' un punto di B corrispondente a X_1 . Costruiamo (teor. I) due domini rettangolari H_1 e K_1 aventi i centri in X_1 e in Y_1' e tali che ad ogni punto X in H_1 corrisponda, per le (1), uno ed un solo punto Y in K_1 . Se X è in $C \cdot H_1$, ad esso dovrà corrispondere almeno anche un punto in $B - K_1$. Il punto $X^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) di $C \cdot H_1$ percorra una successione di punti avente per punto limite il punto X_1 , un punto $Y^{(n)}$ di $B - K_1$, corrispondente a $X^{(n)}$, descriverà un insieme limitato di infiniti punti, ed in grazia della continuità

delle φ_i , subito si vede che un punto limite Y_1'' di tale insieme, punto di B certamente non interno a K_1 , corrisponderà pure a X_1 . Il punto X_1 di A , dotato dei due punti corrispondenti Y_1' e Y_1'' certamente distinti, appartiene a C , ciò che prova che C è chiuso. Ripetendo poi il ragionamento fatto sopra per il punto X_0 , si vede altresì che C non ha punti frontiera in $A-FA$, onde, data la connessione interna di A , segue (cfr. la dimostrazione del teor. II) che $C \equiv A$.

Conseguenza evidente della proposizione α) ora dimostrata è che: *Se esiste un punto di A al quale, per le (6), corrisponde in B un unico punto, le (6) pongono una corrispondenza biunivoca fra i punti interni dei due domini A e B .*

Se facciamo, inoltre, l'ulteriore ipotesi che le (6) stabiliscano una corrispondenza biunivoca fra i punti delle frontiere FA e FB , ne segue che: *Le stesse (6) stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra i punti dei due interi domini A e B .* Le coordinate y_1, \dots, y_r dell'unico punto Y che allora corrisponde in B al punto $X(x_1, \dots, x_r)$, sono r ben determinate funzioni $\psi_1(x_1, \dots, x_r), \dots, \psi_r(x_1, \dots, x_r)$ delle x_1, \dots, x_r , definite in tutto A ed ivi (teor. I) continue. Per queste si ha, identicamente in A ,

$$(8) \quad x_i \equiv \varphi_i [\psi_1(x_1, \dots, x_r), \dots, \psi_r(x_1, \dots, x_r)] \quad (i=1, \dots, r).$$

Il sistema di r funzioni:

$$(9) \quad y_i = \psi_i(x_1, \dots, x_r) \quad (i=1, \dots, r),$$

dicesi il *sistema inverso* del sistema di funzioni (6), e nella definizione in A del sistema inverso consiste ciò che si chiama l'*inversione* del sistema (6). Riepilogando taluni dei risultati ottenuti, possiamo, per ora, enunciare il seguente *teorema di Bagnera*:

IV. *Nel dominio limitato D dello spazio $S_{(r)}$ siano assegnate le r funzioni $x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_r)$, finite e continue con le loro derivate parziali del primo ordine, il cui jacobiano si mantiene sempre diverso da zero. Sia A l'insieme di punti di $S_{(r)}$, descritto dal punto $X(x_1, \dots, x_r)$ al variare del punto $Y(y_1, \dots, y_r)$ in un dominio B internamente connesso, completamente interno a D . Allora, se le (6) stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra i punti di FA e di FB , si ha che: 1°) L'insieme A è un dominio limitato internamente connesso; 2°) si può definire in esso uno ed un solo sistema di r funzioni continue $y_i = \psi_i(x_1, \dots, x_r)$*

per le quali sussistono le (8), identicamente in A , e tali inoltre che al variare del punto X in A , il punto $[\psi_1(X), \dots, \psi_r(X)]$ rimane in B , passando una volta ed una sola per ogni prefissato punto di B .

Nel caso particolare interessante che la frontiera del dominio B sia un continuo, per dedurre che le (6) stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra i punti degli interi domini A e B non è necessaria l'ulteriore ipotesi, sulla quale poggia il teorema di *Bagnera*, che le stesse (6) pongano una corrispondenza biunivoca fra i punti di FA e di FB , basta allora supporre che le (6) fanno corrispondere (in D) ai punti di FA esclusivamente punti di FB e che esiste in FA almeno un punto al quale corrisponde un unico punto. Se, infatti, FB è un continuo, data la continuità delle funzioni φ_i , sarà pure FA un continuo e si dimostra la proposizione: *b*) Se le (6) ad un punto X_0 di FA fanno corrispondere non meno di due punti Y'_0 e Y''_0 di FB , ciò avverrà per ogni punto di FA . Ed invero, se ciò non fosse, detto U l'insieme dei punti di FA a ciascuno dei quali corrispondono non meno di due punti, posto $V = FA - U$, i due insiemi U e V risulterebbero entrambi chiusi e privi di punti comuni, FA non sarebbe pertanto un continuo. Onde abbiamo il teorema:

V. Nel dominio limitato D di $S_{(r)}$ siano assegnate le r funzioni $x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_r)$, finite e continue con le loro derivate parziali del primo ordine, il cui jacobiano si mantiene sempre diverso da zero. Sia A l'insieme di punti di $S_{(r)}$, descritto dal punto $X(x_1, \dots, x_r)$ al variare del punto $Y(y_1, \dots, y_r)$ in un dominio B internamente connesso completamente interno a D . Allora, se FB è un continuo e se le (6) fanno corrispondere ai punti di FB punti di FA , e a questi esclusivamente punti di FB , esistendo in FA almeno un punto al quale corrisponde un unico punto, si ha che: 1°) L'insieme A è un dominio limitato internamente connesso; 2°) la frontiera di A è un continuo; 3°) si può definire in A uno ed un solo sistema di funzioni continue $y_i = \psi_i(x_1, \dots, x_r)$ per le quali sussistono le (8), identicamente in A , e tali inoltre che al variare del punto X in A , il punto $[\psi_1(X), \dots, \psi_r(X)]$ rimane in B , passando una volta ed una sola per ogni prefissato punto di B .

76. Derivazione delle funzioni implicite. — Dobbiamo ora stabilire quel gruppo di condizioni sufficienti, sotto le quali è assi-

curata la derivabilità e la differenziabilità delle funzioni implicitamente definite del sistema di equazioni (2) del n° precedente. Usando sempre le notazioni colà introdotte, si ha, a tale riguardo, il seguente teorema fondamentale:

I. Se il punto $P_0(x_1^0, \dots, x_p^0, y_1^0, \dots, y_q^0)$ appartiene al dominio rettangolare \mathbf{R} e se, in P_0 , le funzioni F_1, \dots, F_q sono differenziabili e l'Jacobiano J è diverso da zero, ogni q^{pla} di funzioni $g_1(X), \dots, g_q(X)$, definite in un dominio rettangolare $\mathbf{A} (< \mathbf{R}_x)$ contenente il punto $X_0(x_1^0, \dots, x_p^0)$, continue in X_0 , per le quali $g_i(X_0) = y_i^0$ ed il punto $\{g_1(X), \dots, g_q(X)\}$ si mantiene in \mathbf{R}_y al variare di X in \mathbf{A} , risultando identicamente in \mathbf{A}

$$(1) \quad F_i[x_1, \dots, x_p, g_1(X), \dots, g_q(X)] = 0 \quad (i = 1, \dots, q),$$

è di funzioni differenziabili, su \mathbf{A} , nel punto X_0 , laddove riesce:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k^0} = - \frac{1}{J_0} \frac{\partial (F_0, \dots, F_{i-1}, F_i, F_{i+1}, \dots, F_q)}{\partial (y_1^0, \dots, y_{i-1}^0, x_k^0, y_{i+1}^0, \dots, y_q^0)} \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, \dots, q \\ k = 1, \dots, p \end{array} \right).$$

Denotando con $\Delta x_1, \dots, \Delta x_p$ arbitrari incrementi, su \mathbf{A} , di x_1^0, \dots, x_p^0 , porremo $\sigma = \sum |\Delta x_k|$, $\gamma = \sum |\Delta g_l|$; data la continuità delle g_l in X_0 , le quantità Δg_l e γ risultano infinitesime con σ . Per la supposta differenziabilità delle F_i in P_0 si ha (n° 56)

$$\begin{aligned} \Delta F_i &= \sum_k^{1,p} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k^0} + \lambda_{ik} \right) \Delta x_k + \sum_l^{1,q} \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_l^0} + \mu_{il} \right) \Delta y_l, \\ &= \sum_k^{1,p} \frac{\partial F_i}{\partial x_k^0} \Delta x_k + \sum_l^{1,q} \frac{\partial F_i}{\partial y_l^0} \Delta y_l + \nu_i (\sigma + \sum |\Delta y_l|), \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (i=1, 2, \dots, q),$$

ove Δx_i e Δy_l sono incrementi, su \mathbf{R} , di x_i e di y_l e λ_{ik} , μ_{il} , ν_i sono infinitesimi con $\sigma + \sum |\Delta y_l|$. Ne segue, per le (1),

$$(2) \quad \sum_l^{1,q} \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_l^0} + \beta_{il} \right) \Delta g_l = - \sum_k^{1,p} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k^0} + \alpha_{ik} \right) \Delta x_k, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (i=1, 2, \dots, q),$$

$$(3) \quad \sum_l^{1,q} \frac{\partial F_i}{\partial y_l^0} \Delta g_l = - \sum_k^{1,p} \frac{\partial F_i}{\partial x_k^0} \Delta x_k - \omega_i (\sigma + \gamma), \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

ove le α_{ik} , β_{il} , ω_i sono infinitesime con σ . Denotando con $\{a_{il}\}$ il determinante che ha, nella riga i^{ma} e nella colonna l^{ma} , per elemento a_{il} , poichè $J_0 \neq 0$, si potranno determinare due numeri positivi m e ρ tali che sia

$$\text{mod} \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial y_l^0} + \eta_{il} \right\} > m \quad \text{se} \quad |\eta_{il}| < \rho.$$

E ciò dimostra completamente il teorema, per essere γ/σ limitato e le ω_i infinitesime.

Alle ipotesi sulle quali si basa il teor. III del n° precedente, aggiungiamo quella dell'esistenza in \mathbf{R} e delle continuità delle derivate $\partial F_i / \partial x_k$. Ne seguirà allora che le funzioni F_i sono (56, VIII) differenziabili in ogni punto di \mathbf{R} . Si ponga

$$J_{ik}(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = \frac{\partial(F_1, \dots, F_{i-1}, F_i, F_{i+1}, \dots, F_q)}{\partial(y_1, \dots, y_{i-1}, x_k, y_{i+1}, \dots, y_q)},$$

il teorema testè dimostrato dà luogo al seguente:

II: Se alle ipotesi del teor. III del n° precedente aggiungiamo quella dell'esistenza in \mathbf{R} e della continuità delle derivate $\partial F_i / \partial x_k$, le funzioni $G_1(X), \dots, G_q(X)$, delle quali quel teorema asserisce l'esistenza e la continuità nell'insieme aperto \mathbf{H} , sono ivi parzialmente derivabili, una prima volta, rispetto a ciascuna variabile x_1, \dots, x_p , con derivate continue, e si ha:

$$(4) \quad \frac{\partial G_i}{\partial x_k} = - \frac{J_{ik}(x_1, \dots, x_p, G_1, \dots, G_q)}{J(x_1, \dots, x_p, G_1, \dots, G_q)}, \quad \left(\begin{array}{l} i=1, \dots, q \\ k=1, \dots, p \end{array} \right).$$

Ne segue [cfr. 43, VI, a)], in virtù delle formole di pag. 227 e della (8) del n° precedente:

III. Nelle ipotesi dei teorr. IV e V del n° precedente, il sistema di funzioni $y_i = \phi_i(x_1, \dots, x_r)$ inverso del sistema $x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_r)$, è di funzioni parzialmente derivabili, una prima volta, con derivate continue, si ha:

$$\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)} \times \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_r)}{\partial(y_1, \dots, y_r)} = 1.$$

I secondi membri delle (4) sono funzioni composte delle x_k . Se allora, come ora supporremo, le funzioni F_i posseggono in \mathbf{R} le successive derivate parziali fino a tutte quelle, incluse, d'ordine n , altrettanto si potrà dire delle G_i in \mathbf{H} , e si potrà effettuare il calcolo delle successive derivate parziali delle G_i applicando, successivamente, la nota regola di derivazione delle funzioni composte. Il calcolo si conduce più rapidamente applicando la immediata proposizione seguente:

a) Quando più funzioni verificano una relazione $F = 0$, le loro

derivate parziali rispetto ad una determinata variabile verificano la relazione lineare ottenuta eguagliando a zero la derivata parziale rispetto alla stessa variabile del primo membro, calcolata con la regola — supposta applicabile — di derivazione delle funzioni composte.

Adunque, avendosi, identicamente in H ,

$$F_i(x_1, \dots, x_p, G_1, \dots, G_q) = 0 \quad (i = 1, \dots, q),$$

ne segue, per ogni fissato indice k ,

$$(5) \quad \sum_l^{1, q} \frac{\partial F_i}{\partial G_l} \frac{\partial G_l}{\partial x_k} = - \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \quad (i = 1, \dots, q),$$

e poscia, per ogni fissata coppia di indici h e k ,

$$(6) \quad \sum_l^{1, q} \frac{\partial F_i}{\partial G_l} \frac{\partial^2 G_l}{\partial x_h \partial x_k} = - \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_l^{1, q} \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_h \partial G_l} \frac{\partial G_l}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_k \partial G_l} \frac{\partial G_l}{\partial x_h} \right) - \sum_{w'}^{1, q} \frac{\partial^2 F_i}{\partial G_l \partial G_{w'}} \frac{\partial G_l}{\partial x_h} \frac{\partial G_{w'}}{\partial x_k},$$

(i = 1, ..., q);

ecc.... Le (5) costituiscono un sistema di q equazioni lineari nelle derivate $\partial G_l / \partial x_k$ ($l = 1, \dots, q$) il cui determinante è $J(x_1, \dots, x_p, G_1, \dots, G_q) \neq 0$; esse pertanto determinano quelle derivate e danno per esse le espressioni (4). Una volta ottenute queste derivate prime, le (6) costituiscono un sistema di q equazioni lineari nelle derivate seconde $\partial^2 G_l / \partial x_h \partial x_k$ ($l = 1, \dots, q$), il cui determinante è sempre $J(x_1, \dots, x_p, G_1, \dots, G_q)$. Ecc.

Con maggiore eleganza si conduce il calcolo impiegando i differenziali. Basta perciò valersi della seguente immediata proposizione:

b) Quando più funzioni u, v, \dots delle variabili indipendenti x, y, \dots , verificano una relazione $F = 0$, i loro differenziali verificano la relazione $dF = 0$, ottenuta prendendo il differenziale di F , come se tutte le variabili da cui essa dipende fossero variabili indipendenti.

La relazione $dF = 0$ fra i differenziali del primo ordine delle u, v, \dots , può a sua volta concepirsi come una relazione fra le funzioni $u, v, \dots, du, dv, \dots$, funzioni delle stesse variabili indipendenti x, y, \dots . Applicando a quest'ultima relazione la proposizione osservata, se ne deduce una nuova relazione che verrà a legare i differenziali secondi d^2u, d^2v, \dots , ecc. Ciascuna di queste successive relazioni equivarrà a tante altre, quante se ne ottengono eguaglian-

do a zero i coefficienti dei vari monomii in dx, dy, \dots , che compariranno, compiuti gli sviluppi, nelle relazioni indicate.

Applicando il metodo ora descritto, al calcolo dei successivi differenziali per le funzioni G_i implicitamente definite delle equazioni (2) del n° precedente, si ottengono, per tale calcolo, successivamente le equazioni:

$$\sum_k^{1,p} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_l^{1,q} \frac{\partial F_i}{\partial G_l} dG_l = 0,$$

$$\left(\sum_k^{1,p} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_l^{1,q} \frac{\partial F_i}{\partial G_l} dG_l \right)^{(2)} + \sum_l^{1,q} \frac{\partial F_i}{\partial G_l} d^2 G_l = 0,$$

$$\left(\sum_k^{1,p} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_l^{1,q} \frac{\partial F_i}{\partial G_l} dG_l \right)^{(3)} + 3 \sum_l^{1,q} d^2 G_l d \frac{\partial F_i}{\partial G_l} + \sum_l^{1,q} \frac{\partial F_i}{\partial G_l} d^3 G_l = 0,$$

.....

77. Applicazioni geometriche. — I. Superficie dello spazio e curve del piano. Sia $F(x, y, z)$ una funzione delle tre variabili x, y, z definita in un dominio rettangolare R dello spazio ordinario, ove è finita e continua con le sue derivate parziali del primo ordine F_x, F_y, F_z . Se l'insieme dei punti di R ove

$$|F_x| + |F_y| + |F_z| = 0,$$

è privo di punti interni, chiamasi *superficie di equazione* $F(x, y, z) = 0$, il luogo S dei punti di R , le cui coordinate verificano l'equazione

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0.$$

Sussiste la proposizione: *Se nel punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ di S , interno a R , non si annullano tutte le derivate parziali F_x, F_y, F_z della F , esiste un dominio rettangolare $R' (< R)$ di centro in P_0 , tale che i punti di $S \cdot R'$ formano, secondo una definizione già data (n° 52) una porzione di superficie regolare. Ogni punto di S nelle condizioni del punto P_0 dicesi *punto regolare della superficie*.*

Se, per esempio, supponiamo $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, esistono (75, I e 76, II) tre quantità positive a, b, c tali che tutti i punti le cui coordinate verificano la (1) e le limitazioni $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |z - z_0| \leq c$; cioè tutti i punti di $S \cdot R'$, ove R' è il dominio rettangolare dello spazio avente il centro in P_0 e le semidimensioni a, b, c , si ottengono prendendo un punto arbitrario (x, y) della proie-

zione R'_{xy} di R' sul piano (x, y) e ponendo poi $z = g(x, y)$, essendo g continua con entrambe le sue derivate parziali del primo ordine in R'_{xy} . Ciò dimostra la proposizione enunciata.

Diciamo S' la porzione di S contenuta in R' . Il piano tangente (la retta normale) alla S' in un suo punto, dicesi il *piano tangente* (la *retta normale*) in quel punto alla S . Poichè $\partial g / \partial x = -F_x / F_z$, $\partial g / \partial y = -F_y / F_z$, si ha che: *Il piano tangente alla superficie S , in un suo punto regolare (x, y, z) ha l'equazione:*

$$(X - x)F_x + (Y - y)F_y + (Z - z)F_z = 0.$$

Se in un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ interno ad R , il gradiente di F è diverso da zero, la superficie $S(P_0)$ di equazione $F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0) = 0$, ha in P_0 un punto regolare e la normale ivi alla $S(P_0)$ ha la direzione del gradiente di F .

I punti di S per i quali si ha simultaneamente

$$F_x(x, y, z) = F_y(x, y, z) = F_z(x, y, z) = 0,$$

diconsi *punti singolari* della superficie.

Analogamente, l'equazione

$$F(x, y) = 0,$$

rappresenta nel piano una curva C . Se in un punto $P_0(x_0, y_0)$ di C non entrambe le derivate F_x , F_y (delle quali è supposta l'esistenza e la continuità) sono nulle, si potrà costruire un dominio rettangolare R' del piano, tale che la parte C' di C contenuta in R' , sia una porzione di curva regolare. Ogni punto di C nelle condizioni del punto P_0 dicesi *punto regolare* della curva. Ogni tangente a C' dicesi tangente a C . La tangente a C in un suo punto regolare (x, y) ha l'equazione:

$$(X - x)F_x + (Y - y)F_y = 0.$$

I punti singolari di C sono quelli per cui si ha simultaneamente $F_x = F_y = 0$.

II. *Curve gobbe*. Siano $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$ due funzioni delle tre variabili x, y, z , definite entrambe in un dominio rettangolare R dello spazio ordinario, ove sono finite e continue con le loro derivate parziali del primo ordine. Consideriamo i tre jacobiani

$$A = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}, \quad B = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, x)}, \quad C = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)},$$

se l'insieme dei punti di \mathbf{R} , ove $|A| + |B| + |C| = 0$ è privo di punti interni, chiamasi *curva gobba di equazioni* $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, il luogo C dei punti di \mathbf{R} , le cui coordinate verificano il sistema seguente di equazioni simultanee

$$(2) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Nelle ipotesi poste, i punti di \mathbf{R} per i quali $F_i(x, y, z) = 0$ ($i=1, 2$) costituiscono una superficie S_i . Evidentemente: $C \equiv S_1 \cdot S_2$.

Sussiste la proposizione: *Se nel punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ di C , interno a \mathbf{R} , non si annullano tutti i determinanti jacobiani A, B, C , esiste un dominio rettangolare $\mathbf{R}' (< \mathbf{R})$ di centro in P_0 , tale che i punti di $C \cdot \mathbf{R}'$ formano, secondo una definizione già data (n° 49) una porzione di curva regolare. Ogni punto di C nelle condizioni del punto P_0 dicesi *punto regolare della curva*.*

Se, per esempio, supponiamo $A(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, esistono (75, I e 76, II) tre quantità positive a, b, c tali che tutti i punti le cui coordinate verificano le (2) e le limitazioni $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |z - z_0| \leq c$; cioè tutti i punti di $C \cdot \mathbf{R}'$, ove \mathbf{R}' è il dominio rettangolare dello spazio avente il centro in P_0 e le semidimensioni a, b, c , si ottengono prendendo un punto arbitrario x dell'intervallo $(x_0 - a, x_0 + a)$ e ponendo poi $y = g_1(x)$, $z = g_2(x)$, essendo g_1 e g_2 funzioni delle x entrambe finite e continue, con le loro derivate prime, in $(x_0 - a, x_0 + a)$. Ciò dimostra la proposizione enunciata.

Diciamo C' la porzione di C contenuta in \mathbf{R}' . La retta tangente (il piano normale) alla C' in un suo punto, dicesi *la retta tangente (il piano normale)* in quel punto alla C . Poichè $g_1'(x) = -B/A$, $g_2'(x) = -C/A$, si ha che: *La tangente alla curva C , in un suo punto regolare (x, y, z) ha le equazioni:*

$$\frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C}.$$

Un punto regolare di C è, manifestamente, regolare per entrambe le superficie S_1 e S_2 e poichè riesce, identicamente,

$$A \frac{\partial F_i}{\partial x} + B \frac{\partial F_i}{\partial y} + C \frac{\partial F_i}{\partial z} = 0 \quad (i=1, 2),$$

possiamo asserire che: *Un punto regolare P della curva $C \equiv S_1 \cdot S_2$ è regolare per ambo le superficie S_1 e S_2 e la tangente in P alla C*

è l'intersezione dei due piani rispettivamente tangenti ivi alla S_1 e alla S_2 .

I punti di C per cui si ha simultaneamente

$$(3) \quad A = 0, B = 0, C = 0,$$

diconsi *punti singolari* della curva.

Un punto singolare per C può essere regolare e per S_1 e per S_2 . Occorre e basta perciò che, risultando $|F_{1x}| + |F_{1y}| + |F_{1z}| > 0$ e $|F_{2x}| + |F_{2y}| + |F_{2z}| > 0$, si abbia

$$F_{1x} : F_{2x} = F_{1y} : F_{2y} = F_{1z} : F_{2z}.$$

Ma in tal caso S_1 e S_2 hanno, nel punto di C che si considera, lo stesso piano tangente, esse cioè, come si dice, si *toccano* in quel punto. Adunque:

Se due superficie si toccano in un punto (regolare per entrambe), questo è un punto singolare per la curva intersezione delle due superficie. In particolare: Il piano tangente ad una superficie in un suo punto (regolare) interseca la superficie secondo una curva avente in quel punto un punto singolare.

III. *Porzioni di superficie regolare.* Sia S una porzione di superficie regolare di base D_{uv} (cfr. n° 58) avente le equazioni parametriche

$$x = \lambda(u, v), y = \mu(u, v), z = \nu(u, v).$$

Dimostriamo che: *Ogni punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ interno della superficie S , arbitrariamente fissato, appartiene ad una porzione di superficie regolare $S_0 < S$, suscettibile di una rappresentazione cartesiana. Esiste sempre inoltre un dominio rettangolare R , di centro nel punto P_0 , per il quale si ha $S \cdot R \equiv S_0 \cdot R$.*

Detti u_0 e v_0 i valori dei parametri u e v per il punto P_0 che si considera, si abbia, per esempio, $N(u_0, v_0) \neq 0$, avendo posto (n° 58)

$$N(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Si potranno allora determinare (75, I) quattro numeri positivi a, b e α, β , tali che il dominio rettangolare W del piano (u, v) , avente il centro nel punto (u_0, v_0) e le semidimensioni α e β , sia contenuto in D_{uv} , risultando sempre in esso $N(u, v) \neq 0$, ed inoltre tali che nel dominio rettangolare Z del piano (x, y) avente il centro nel pun-

to (x_0, y_0) e le semidimensioni a e b , esista una ed una sola coppia di funzioni $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ per le quali si abbia

$$x \equiv \lambda[u(x, y), v(x, y)], \quad y \equiv \mu[u(x, y), v(x, y)], \\ |u(x, y) - u_0| \leq \alpha, \quad |v(x, y) - v_0| \leq \beta.$$

Posto $f(x, y) = v[u(x, y), v(x, y)]$, il luogo S_0 dei punti dello spazio per i quali (x, y) è in Z e $z = f(x, y)$ è evidentemente contenuto in S ed è (n° 76) una porzione di superficie regolare, in rappresentazione cartesiana, avente per base il dominio rettangolare Z del piano (x, y) .

Detto W' il dominio ($< W$) del piano (u, v) , descritto dal punto $[u(x, y), v(x, y)]$ nel mentre che (x, y) descrive Z , il punto $[u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)]$ è interno a W' e i punti di S per i quali il punto (u, v) appartiene a W' sono tutti situati su S_0 . Consideriamo il dominio quadrato R_n dello spazio avente il centro nel punto P_0 e la semidimensione $1/n$ ($< a$ e $< b$). Dico che si potrà trovare un valore di n tale che sia $S \cdot R_n \equiv S_0 \cdot R_n$. Ed invero, se, per ogni valore di n si potesse sempre trovare in R_n un punto P_n di S non appartenente a S_0 , il punto (u_n, v_n) di D_{uv} , corrispondente a P_n , sarebbe esterno a W' , e, detto (u', v') un punto limite dell'insieme descritto dal punto (u_n, v_n) , si troverebbe che al punto P_0 di S verrebbero a corrispondere, in D_{uv} , i due punti distinti (u_0, v_0) e (u', v') , ciò che è escluso.

Si osservi ancora la proposizione seguente, immediato corollario del teor. IV del n° 75: *Il determinante jacobiano $N(u, v)$ si mantenga diverso da zero in D_{uv} , sia D'_{uv} un dominio internamente connesso completamente interno a D_{uv} e D'_{xy} il dominio del piano (x, y) descritto dal punto $[\lambda(u, v), \mu(u, v)]$ al variare di (u, v) in D'_{uv} . Allora, se le equazioni: $x = \lambda(u, v)$, $y = \mu(u, v)$ pongono una corrispondenza biunivoca fra i punti di FD'_{uv} e di FD'_{xy} , la parte S' di S avente per base D'_{uv} è completamente suscettibile di una rappresentazione cartesiana del tipo $z = f(x, y)$, avente per base il dominio D'_{xy} , pur esso internamente connesso.*

78*. Funzioni analitiche implicitamente definite. — Le q funzioni complesse $F_1 = G_1 + iH_1, \dots, F_q = G_q + iH_q$ delle $p + q$ variabili complesse $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_p = x_p + iy_p, w_1 = u_1 + iv_1, \dots,$

$x_q = u_q + iv_q$, siano *analitiche* (monodrome) nell'insieme aperto C dello spazio complesso $S_{2(p+q)}$, insieme descritto dal punto $(x_1, y_1, \dots, u_1, v_1, \dots)$ al variare dei punti $(x_1, y_1), \dots, (u_1, v_1), \dots$, indipendentemente l'uno dall'altro, rispettivamente, in determinati insiemi aperti di $p + q$ piani complessi. Sussiste il seguente importante **teorema Cauchy-Weierstrass**:

I. Se esiste un punto $P_0(z_1^0, \dots, w_1^0, \dots)$ di $C(z_1^0 = x_1^0 + iy_1^0, \dots, w_1^0 = u_1^0 + iv_1^0, \dots)$ per il quale è

$$(1) \quad F_h(P_0) = 0 \quad (h = 1, \dots, q) \quad \left[\frac{\partial (F_1, \dots, F_q)}{\partial (w_1, \dots, w_q)} \right]_{P_0} \neq 0,$$

si possono determinare $2(p + q)$ numeri positivi $a_1, b_1, \dots, c_1, d_1, \dots$, tali che: **a)** il dominio rettangolare avente il centro in P_0 e le semidimensioni $a_1, b_1, \dots, c_1, d_1, \dots$ è contenuto in C ; **b)** nel dominio rettangolare A di $S_{(2p)}$ avente il centro nel punto $Z_0(z_1^0, \dots, z_p^0)$ e le semidimensioni $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$, esiste uno ed un solo sistema di q funzioni *analitiche* $w_h = W_h(z_1, \dots, z_p) = U_h(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p) + iV_h(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p)$, definite implicitamente dalle q equazioni

$$(2) \quad F_h(z_1, \dots, z_p, w_1, \dots, w_q) = 0 \quad (h = 1, \dots, q)$$

e verificanti le limitazioni

$$(3) \quad |u_h - u_h^0| \leq c_h, \quad |v_h - v_h^0| \leq d_h \quad (h = 1, \dots, q).$$

La funzione W_h prende nel punto Z_0 il valore w_h^0 .

Il teorema è una conseguenza quasi immediata dei teoremi I del n° 75 e I del n° 76. Si ha, invero, in C

$$(4) \quad \frac{\partial F_h}{\partial x_k} = \frac{1}{i} \frac{\partial F_h}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial F_h}{\partial u_l} = \frac{1}{i} \frac{\partial F_h}{\partial v_l}, \quad (k = 1, \dots, p; h, l = 1, \dots, q)$$

cioè

$$\left. \begin{aligned} (5) \quad \frac{\partial G_h}{\partial x_k} &= \frac{\partial H_h}{\partial y_k}, & \frac{\partial G_h}{\partial y_k} &= -\frac{\partial H_h}{\partial x_k}, \\ (6) \quad \frac{\partial G_h}{\partial u_l} &= \frac{\partial H_h}{\partial v_l}, & \frac{\partial G_h}{\partial v_l} &= -\frac{\partial H_h}{\partial u_l}, \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, \dots, p; h, l = 1, \dots, q).$$

Le equazioni (2) si scrivono:

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} G_h(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p, u_1, v_1, \dots, u_q, v_q) &= 0 \\ H_h(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p, u_1, v_1, \dots, u_q, v_q) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (h = 1, \dots, q).$$

Ora, in virtù delle (6), si ha, com'è noto dalla teoria dei determinanti,

$$\left| \frac{\partial (F_1, \dots, F_q)}{\partial (w_1, \dots, w_q)} \right|^2 = \frac{\partial (G_1, H_1, \dots, G_q, H_q)}{\partial (u_1, v_1, \dots, u_q, v_q)},$$

e pertanto, in forza delle (1), si possono determinare (75, I) i $2(p+q)$ numeri positivi $a_1, b_1, \dots, c_1, d_1, \dots$, in modo che il dominio rettangolare avente il centro in P_0 e le semidimensioni $a_1, b_1, \dots, c_1, d_1, \dots$, sia contenuto in C , risultando anche sempre in esso $J(z_1, \dots, z_p, w_1, \dots, w_q) = \partial(F_1, \dots, F_q) / \partial(w_1, \dots, w_q) \neq 0$, e in modo altresì che nel dominio rettangolare A di $S_{(2p)}$ avente il centro nel punto $Z_0(x_1^0, y_1^0, \dots, x_p^0, y_p^0)$ e le semidimensioni $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$, esista uno ed un solo sistema di $2q$ funzioni $u_h = U_h(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p)$, $v_h = V_h(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p)$, implicitamente definite dalle $2q$ equazioni (7) e verificanti le limitazioni (3). Queste funzioni U_h e V_h prendono nel punto Z_0 rispettivamente i valori u_h^0 e v_h^0 . Posto $W_h = U_h + i V_h$, tali funzioni soddisfano, in A , le (2). In virtù del teor. I del n° 76, le funzioni U_h e V_h sono parzialmente derivabili, una prima volta, in ogni punto di A rispetto a ciascuna variabile, con derivate ivi continue. Il teorema sarà perciò completamente dimostrato se faremo vedere che:

$$(8) \quad \frac{\partial W_h}{\partial x_k} = \frac{1}{i} \frac{\partial W_h}{\partial y_k} \quad (k = 1, \dots, p, h = 1, \dots, q)$$

Si ha, invero, identicamente in A ,

$$F_h(z_1, \dots, z_p, W_1, \dots, W_q) = 0,$$

e quindi (n° 65*)

$$\frac{\partial F_h}{\partial x_k} + \sum_l^{1, q} \frac{\partial F_h}{\partial W_l} \frac{\partial W_l}{\partial x_k} = \frac{\partial F_h}{\partial y_k} + \sum_l^{1, q} \frac{\partial F_h}{\partial W_l} \frac{\partial W_l}{\partial y_k} = 0,$$

onde, per le prime delle (4),

$$\sum_l^{1, q} \frac{\partial F_h}{\partial W_l} \left(\frac{\partial W_l}{\partial x_k} - \frac{l}{i} \frac{\partial W_l}{\partial y_k} \right) = 0 \quad (h = 1, \dots, q),$$

e pertanto, poichè $J(z_1, \dots, z_p, W_1, \dots, W_q) \neq 0$, si giunge alle (8). Posto

$$J_{hk}(z_1, \dots, z_p, w_1, \dots, w_q) = \frac{\partial (F_1, \dots, F_{h-1}, F_h, F_{h+1}, \dots, F_q)}{\partial (w_1, \dots, w_{h-1}, z_k, w_{h+1}, \dots, w_q)},$$

si trova, in A ,

$$\frac{\partial W_h}{\partial z_k} = - \frac{J_{hk}(z_1, \dots, z_p, W_1, \dots, W_q)}{J(z_1, \dots, z_p, W_1, \dots, W_q)}.$$

Con ragionamenti che ripetono quelli mediante i quali abbiamo dimostrato il teor. III del n° 75, si dimostra il seguente:

II. *Nelle ipotesi del teor. precedente, detto C' l'insieme dei punti di C nel quale è $J \neq 0$ e C'_z e C'_w le proiezioni di C' su $S_{(2p)}$ e su $S_{(2q)}$, se esiste un punto $P_0(z_1^0, \dots, z_p^0, w_1^0, \dots, w_q^0)$, interno a C' , per il quale è $F_h(P_0) = 0$ ($h = 1, \dots, q$), si può costruire un ben determinato insieme aperto H (di $S_{(2p)}$) contenuto in C'_z e contenente il punto $Z_0(z_1^0, \dots, z_p^0)$ e calcolare, per ogni punto di esso, un' *unica* q^{pla} di funzioni analitiche $w_h = W_h(z_1, \dots, z_p)$, implicitamente definite dalle equazioni (2) e per le quali si ha: **a**) $W_h(Z_0) = w_h^0$; **b**) variando $Z(z_1, \dots, z_p)$ in H , il punto $[W_1(Z), \dots, W_q(Z)]$ si mantiene interno a C'_w .*

Rappresentazione conforme di un dominio piano su un altro. Nell'insieme aperto B del piano (x, y) sia assegnata la funzione analitica $w = f(z) = a(x, y) + ib(x, y)$, per la quale si abbia sempre $f'(z) \neq 0$. Sia D un dominio limitato internamente connesso contenuto in B . Al variare di z in D il punto $w = u + iv$ [$u = a(x, y)$, $v = b(x, y)$] descriverà nel piano (u, v) un dominio D' ; e se supponiamo che quando il punto z è su FD , il punto w sia su FD' e inoltre che esista un punto determinato di D' col quale viene a coincidere w allora e allora soltanto che z coincida con un unico e ben determinato punto di D , possiamo dire (n° 75, pag. 310) che D' è pur esso internamente connesso e che l'equazione $w = f(z)$ pone una corrispondenza biunivoca fra i punti interni dei domini D e D' . Detta $\varphi(w) = \alpha(u, v) + i\beta(u, v)$ l'affissa dell'unico punto di $A = D - FD$ che corrisponde al punto w di $A' = D' - FD'$, abbiamo visto, in ciò che precede, che: $\varphi(w)$ *riesce una funzione analitica di w e che si ha:*

$$\varphi'(w) f'(z) = 1.$$

La funzione $\varphi(w)$, per la quale è identicamente $w = f[\varphi(w)]$, $z = \varphi[f(z)]$, dicesi **la funzione inversa** della $f(z)$.

Vogliamo stabilire talune notevolissime proprietà della corrispondenza biunivoca che l'equazione $w = f(z)$ [ovvero la coppia di equazioni $u = a(x, y)$, $v = b(x, y)$] pone fra i punti di A e di A' .

Ad ogni porzione C di curva regolare $x = x(s)$, $y = y(s)$, tracciata in A , corrisponde in A' il luogo C' di equazioni parametriche:

$$u = u(s) = a[x(s), y(s)], \quad v = v(s) = b[x(s), y(s)].$$

Posto $|f'(z)| = H(x, y)$, per essere $H(x, y) > 0$ e

$$(9) \quad u'(s) = a_x x'(s) - b_x y'(s), \quad v'(s) = b_x x'(s) + a_x y'(s),$$

e per la corrispondenza biunivoca, posta dalla $w = f(z)$, fra i punti di A e di A' , si ha che C' è pur essa una porzione di curva regolare. Si trae dalle (9) che:

$$(10) \quad (u'(s))^2 + (v'(s))^2 = H^2 [(x'(s))^2 + (y'(s))^2].$$

Diciamo δ l'angolo ben determinato, compreso fra $-\pi$ e π , per il quale è $\cos \delta = a_x : H$, $\sin \delta = b_x : H$. Sia $P(x, y)$ un punto arbitrariamente fissato in A e $P'(u, v)$ il punto corrispondente in A' . Ad ogni porzione di curva regolare C , in A , spiccata da P , corrisponde in A' una porzione di curva regolare C' spiccata da P' , detti θ e θ' gli angoli (fra $-\pi$ e π) che gli assi tangenti positivi t e t' , in P e in P' , a C e a C' , fanno con l'asse delle x , dalle (9) e dalla (10) si ottiene

$$\cos \theta' = \cos(\theta + \delta), \quad \sin \theta' = \sin(\theta + \delta),$$

cioè

$$(11) \quad \theta' = \theta + \delta.$$

Adunque: *L'asse tangente positivo t' alla curva C' si ottiene ruotando, nel verso positivo delle rotazioni, di un angolo costante δ , l'asse tangente positivo t alla C . In altre parole: A due porzioni di curve regolari C_1 e C_2 , in A , intersecantesi sotto un certo angolo, corrispondono in A' due porzioni di curve regolari C_1' e C_2' intersecantesi sotto un angolo eguale ed egualmente orientato. A tale proprietà si fa allusione dicendo semplicemente che:*

III. *L'equazione $w = f(z)$ [l'equazione $z = \varphi(w)$] pone una corrispondenza biunivoca **conforme** fra A e A' . Oppure: *L'equazione $w = f(z)$ [l'equazione $z = \varphi(w)$] opera la **rappresentazione conforme** di A su A' di [A' su A].**

Sia $Q(z + \Delta z)$ un punto variabile in A e $Q'(w + \Delta w)$ il punto corrispondente in A' . Si ha:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = |f'(z)| = H,$$

pertanto, comunque si fissi un numero positivo ε , si potrà, in corrispondenza, sempre determinare un intorno circolare $I_\varepsilon (< A)$ di P , tale che, per ogni punto Q in $I_\varepsilon - P$, risulti

$$H - \varepsilon \leq \overline{P'Q'} : \overline{PQ} \leq H + \varepsilon.$$

Si prenda ora per ε una quantità praticamente inapprezzabile, si potrà allora ritenere praticamente che, comunque si prenda Q in $I_\varepsilon - P$, riesce $\overline{P'Q'} : \overline{PQ} = H$. Siano ora Q_1 e Q_2 due punti di $I_\varepsilon - P$, rispettivamente, sulle porzioni di curve regolari C_1 e C_2 spiccate da P , Q_1' e Q_2' i punti corrispondenti in A' sulle curve C_1' e C_2' . Prendiamo Q_1 e Q_2 tanto prossimi a P che le seganti PQ_1 e PQ_2 , $P'Q_1'$, e $P'Q_2'$ praticamente si confondano con le tangenti alle C_1 e C_2 , C_1' e C_2' . Si avrà allora che l'angolo Q_1PQ_2 è eguale ed egualmente orientato all'angolo $Q_1'P'Q_2'$ ed inoltre la proporzione $PQ_1 : P'Q_1' = PQ_2 : P'Q_2'$. Il triangolo Q_1PQ_2 è dunque direttamente simile al triangolo $Q_1'P'Q_2'$. A tale circostanza si fa allusione dicendo che: *L'equazione $w = f(z)$ pone una similitudine diretta fra le parti infinitesime di A e di A' .*

Lasciamo al lettore la cura di dimostrare che, reciprocamente:

IV. *Se le equazioni $u = a(x, y)$, $v = b(x, y)$, pongono una corrispondenza biunivoca e conforme fra i due insiemi A e A' , aperti e internamente connessi, dei piani (x, y) e (u, v) , e se $\partial(a, b) / \partial(x, y) \neq 0$ in A , la funzione $a(x, y) + ib(x, y)$ è in A funzione analitica di $z = x + iy$, ed è dotata in A' di funzione inversa analitica.*

Esercizii. 1°) Studiare la rappresentazione conforme $w = z^2$.
2°) Se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono costanti (reali o complesse) per le quali è $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, dimostrare che la rappresentazione conforme stabilita dell'equazione:

$$(12) \quad w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

fa corrispondere a cerchi (o rette) del piano z cerchi (o rette) del piano w . La (12) dà la cosiddetta *affinità circolare diretta* di **Möbius**.

§ 3. Cambiamento delle variabili.

79. Funzioni di una sola variabile indipendente. — A proposito del cambiamento delle variabili nel caso delle funzioni reali d'una variabile reale, il problema più generale che si presenta nelle

applicazioni, è il seguente: *La y è funzione della variabile indipendente x, le $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono funzioni di una medesima altra variabile indipendente, ammesso che si possa porre*

$$(1) \quad x = \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad y = \phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

esprimere le derivate successive y', y'', \dots , della y rispetto alla x, per mezzo delle funzioni $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ e dei loro differenziali successivi.

Il problema è subito risolto dalle formole:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{d\phi}{d\varphi}, \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{d \frac{d\phi}{d\varphi}}{d\varphi} = \frac{d^2\phi \, d\varphi - d^2\varphi \, d\phi}{d\varphi^3}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

ove

$$\begin{aligned} d\varphi &= \sum_i^{1, n} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} d\alpha_i, & d\phi &= \sum_i^{1, n} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_i} d\alpha_i \\ d^2\varphi &= \sum_{ik}^{1, n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_k} d\alpha_i d\alpha_k + \sum_i^{1, n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_i^2} d^2\alpha_i, \\ d^2\phi &= \sum_{ik}^{1, n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_k} d\alpha_i d\alpha_k + \sum_i^{1, n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_i^2} d^2\alpha_i, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Perchè le date formole (2) abbiano senso occorre e basta che le α_i siano tali funzioni dell'unica variabile indipendente da cui esse dipendono, da risultare, nell'intervallo in cui occorre tenere questa variabile,

$$\sum_i^{1, n} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} d\alpha_i \neq 0.$$

Le formole (2) lasciano affatto imprecisata la variabile indipendente da cui dipendono le funzioni α_i . Sia t questa variabile, e si rappresenti con $\alpha_i(t)$ l'espressione esplicita della α_i . Le formole (2) forniscono immediatamente le derivate $y'(x), y''(x), \dots$, espresse per mezzo delle α_i e delle loro derivate successive $\alpha'_i(t), \alpha''_i(t), \dots$. Si ha

$$y' = \frac{d\phi}{d\varphi}, \quad y'' = \frac{\frac{d^2\phi}{dt^2} \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d^2\varphi}{dt^2} \frac{d\phi}{dt}}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3}, \dots,$$

ove

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_i^{1,n} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} \alpha'_i(t), \quad \frac{d\psi}{dt} = \sum_i^{1,n} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \alpha'_i(t),$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_{ik}^{1,n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_i \partial\alpha_k} \alpha'_i(t) \alpha'_k(t) + \sum_i^{1,n} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} \alpha''_i(t),$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \sum_{ik}^{1,n} \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_i \partial\alpha_k} \alpha'_i(t) \alpha'_k(t) + \sum_i^{1,n} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \alpha''_i(t),$$

.....

in ogni intervallo dell'asse t in cui risulti

$$\sum_i^{1,n} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} \alpha'_i(t) \neq 0.$$

Primo caso particolare. Essendo t la variabile indipendente, le formole (1) danno $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Si avrà:

$$y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad y'' = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}, \dots$$

In particolare, per $x = \varphi(y)$, $y = t$, si trova

$$y' = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad y'' = -\frac{\varphi''(y)}{[\varphi'(y)]^3}, \dots$$

Secondo caso particolare. Le formole di trasformazione

$$x = \varphi(\alpha, \beta), \quad y = \psi(\alpha, \beta),$$

trasformino un'equazione che implicitamente definisca y come funzione di x , in un'equazione che implicitamente definisca β come funzione di α . Si tratta di esprimere le derivate y', y'', \dots , della y rispetto alla x , per mezzo di α , di β e delle derivate β', β'', \dots , della β rispetto alla α . Si avrà

$$y' = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta} \beta' \right) : \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \beta' \right),$$

$$y'' \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \beta' \right)^3 =$$

$$= \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} + 2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta} \beta' + \frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2} \beta'^2 + \frac{\partial\psi}{\partial\beta} \beta'' \right) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \beta' \right) -$$

$$- \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta} \beta' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} \beta'^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \beta'' \right) \left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta} \beta' \right),$$

.....

In particolare, si hanno le formole per il cambiamento delle coordinate cartesiane in coordinate polari (n° 50). Posto $\alpha = \theta$, $\beta = \rho$, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, si trova

$$y' = \frac{\rho \cos \theta + \rho' \sin \theta}{\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta}, \quad y'' = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta)^3}, \dots$$

80. Funzioni di più variabili indipendenti. — A proposito del cambiamento delle variabili nel caso delle funzioni di più variabili indipendenti, il problema più generale che si presenta nelle applicazioni è il seguente: *La variabile reale z è funzione delle n variabili reali indipendenti x_1, \dots, x_n , le $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sono p funzioni reali dello stesso numero n di altre variabili indipendenti ξ_1, \dots, ξ_n ; ammesso che si possa porre*

$$x_i = \varphi_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ z = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p),$$

esprimere le successive derivate parziali della z rispetto alle x , per mezzo delle α e delle loro successive derivate parziali rispetto alle ξ .

Dimostriamo che: *Il problema è sempre risolvibile nell'ipotesi, nella quale noi ci metteremo, secondo cui, nel dominio di $S_{(n)}$ ove occorre tenere le variabili ξ_1, \dots, ξ_n , le α sono tali funzioni delle ξ che il determinante jacobiano*

$$J(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}$$

risulti sempre diverso da zero.

Dovremo dunque, in particolare, supporre (pag. 227) $p \geq n$.

Unicamente per semplificare la scrittura, ci metteremo nel caso di due sole variabili indipendenti x e y . La z sia dunque funzione delle due variabili indipendenti x e y , ed essendo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ($p \geq 2$) funzioni delle due variabili ξ e η , si possa porre

$$(1) \quad \begin{cases} x = \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_p), & y = \psi(\alpha_1, \dots, \alpha_p), \\ z = f(\alpha_1, \dots, \alpha_p), \end{cases}$$

laddove il punto (ξ, η) è mantenuto in un dominio del piano in cui è sempre

$$(2) \quad J(\xi, \eta) = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} \neq 0.$$

Si osservi anzitutto che le derivate parziali successive

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, \dots$$

delle φ , ϕ e f risultano espresse, in virtù della regola di derivazione delle funzioni composte, per mezzo delle α_i e delle successive derivate parziali di queste rispetto alle variabili ξ e η . Si ha

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

operando in questa relazione la sostituzione (1) risulta

$$(3) \quad df = \frac{\partial z}{\partial x} d\varphi + \frac{\partial z}{\partial y} d\phi,$$

e questa equazione si spezza nelle due seguenti

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta}. \end{cases}$$

Queste, in virtù della (2), sono sempre risolubili nelle incognite z_x e z_y e risolvendole si ottengono appunto le derivate indicate espresse per mezzo delle α_i e delle loro derivate parziali prime rispetto alle ξ e η . Note le espressioni delle derivate prime z_x e z_y , ecco come si ottengono quelle delle derivate seconde z_{xx} , z_{xy} , z_{yy} . Differenziamo l'equazione (3), ne risulta la seguente

$$(5) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} d\varphi^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} d\varphi d\phi + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} d\phi^2 = d^2 f - \frac{\partial z}{\partial x} d^2 \varphi - \frac{\partial z}{\partial y} d^2 \phi,$$

equazione che, posto per brevità $\varphi_\xi = A$, $\varphi_\eta = B$, $\phi_\xi = C$, $\phi_\eta = D$, con che $J = AD - BC$, si spezza nelle tre seguenti

$$\begin{cases} A^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2AB \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + B^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}, \\ AC \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (AD + BC) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + BD \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta}, \\ C^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2CD \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + D^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}. \end{cases}$$

Queste equazioni lineari sono sempre risolubili nelle incognite z_{xx} , z_{xy} , z_{yy} , il determinante dei coefficienti vale infatti J^3 . Risol-

vendole, si ottengono appunto le derivate parziali seconde della z rispetto alle x e y espresse per mezzo delle α_i e delle loro derivate parziali prime e seconde rispetto alle ξ e η . Per il calcolo delle derivate parziali terze della z rispetto alle x e y non si avrà che a differenziare la (5). Si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} d\varphi^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} d\varphi^2 d\phi + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} d\varphi d\psi^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} d\psi^3 = \\ = d^3 f - \frac{\partial z}{\partial x} d^3 \varphi - \frac{\partial z}{\partial y} d^3 \psi - \\ 3 \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} d\varphi d^2 \varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} (d\varphi d^2 \psi + d\psi d^2 \varphi) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} d\psi d^2 \psi \right], \end{aligned}$$

equazione che si spezza in *quattro* equazioni lineari nelle menzionate *quattro* derivate parziali del terzo ordine della z ; il determinante dei coefficienti delle equazioni vale $J^6 \neq 0$.

Il procedimento descritto è indefinitamente applicabile per il calcolo delle successive derivate parziali della z rispetto alle x e y . Il calcolo delle $n+1$ derivate parziali d'ordine n dipende dalla risoluzione di un sistema di $n+1$ equazioni lineari in quelle $n+1$ derivate. Si dimostra che il determinante dei coefficienti di queste equazioni vale

$$[J(\xi, \eta)]^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Caso particolare. Sia z una funzione reale delle n variabili reali indipendenti x_1, x_2, \dots, x_n ; si prendano n nuove variabili indipendenti y_1, y_2, \dots, y_n , legate alle antiche dalle relazioni

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

e mantenute entro un dominio di $S_{(n)}$ ove è sempre

$$J(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \neq 0,$$

si vogliono esprimere le derivate parziali di z rispetto alle x , per mezzo delle y e delle derivate parziali di z rispetto alle nuove variabili y .

Per risolvere questo problema, che è caso particolare di quello già trattato, si può, naturalmente, procedere applicando il metodo generale già dato; ma in questo caso è spesso più celere condurre

il calcolo nel modo che andiamo a spiegare. Le equazioni (4) si scrivono ora :

$$\sum_i^{1, n} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial z}{\partial y_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

esse ci daranno :

$$(6) \quad \frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_r^{1, n} A_{ir} \frac{\partial z}{\partial y_r} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ove le A_{ir} sono note funzioni delle y . Le (6) risolvono il nostro problema per le derivate parziali prime. Ma osserviamo che,

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_s^{1, n} A_{ks} \frac{\partial z}{\partial y_s} = \\ &= \sum_r^{1, n} A_{ir} \frac{\partial}{\partial y_r} \sum_s^{1, n} A_{ks} \frac{\partial z}{\partial y_s} = \sum_{rs}^{1, n} A_{ir} A_{ks} \frac{\partial^2 z}{\partial y_r \partial y_s} + \\ &+ \sum_s^{1, n} \left(\sum_r^{1, n} A_{ir} \frac{\partial A_{ks}}{\partial y_r} \right) \frac{\partial z}{\partial y_s}, \end{aligned}$$

e con ciò è risoluto il problema per le derivate parziali del secondo ordine. Scambiando i con k l'ultimo membro delle (7) deve rimanere inalterato e pertanto fra le A devono sussistere le identità seguenti

$$\sum_r^{1, n} A_{ir} \frac{\partial A_{ks}}{\partial y_r} = \sum_r^{1, n} A_{kr} \frac{\partial A_{is}}{\partial y_r} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

utilissime a tenere presenti per qualche verifica o qualche semplificazione nei calcoli.

Osservando che

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial z}{\partial x_l} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \sum_t^{1, n} A_{lt} \frac{\partial z}{\partial y_t},$$

dalle (7), ponendo in luogo di z la somma $\sum_{t=1}^n A_{lt} \partial z / \partial y_t$, si deducono le richieste espressioni delle derivate parziali terze. Ecc.

Esempi. 1°) Sia u funzione delle due variabili x e y e si voglia operare il cambiamento di variabili $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, cangiare cioè le coordinate cartesiane in coordinate polari. Facendo, nelle formole precedenti $n = 2$ e operando le sostituzioni

$$\begin{pmatrix} x & y \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho & \theta \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

si trova $J = \rho$,

$$\begin{aligned} A_{11} &= \cos\theta, & A_{12} &= -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}, \\ A_{21} &= \operatorname{sen}\theta, & A_{22} &= \frac{\cos\theta}{\rho}. \end{aligned}$$

Ne segue, per il parametro differenziale primo,

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2,$$

e, per il cosiddetto *parametro differenziale secondo*,

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}.$$

2°) Sia u funzione delle *tre* variabili x, y e z e si voglia operare il cambiamento di variabili

$$x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \quad z = \rho \cos\varphi,$$

cangiare cioè le coordinate cartesiane dello spazio in coordinate polari. Facendo nelle formole generali $n = 3$ e operando le sostituzioni

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho & \varphi & \theta \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix},$$

si trova $J = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$,

$$\begin{aligned} A_{11} &= \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, & A_{12} &= \frac{1}{\rho} \cos\varphi \cos\theta, & A_{13} &= -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho \operatorname{sen}\varphi}, \\ A_{21} &= \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, & A_{22} &= \frac{1}{\rho} \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, & A_{23} &= \frac{\cos\theta}{\rho \operatorname{sen}\varphi}, \\ A_{31} &= \cos\varphi, & A_{32} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{sen}\varphi, & A_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Ne segue, per il parametro differenziale primo

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2,$$

e, per il cosiddetto *parametro differenziale secondo*,

$$\begin{aligned} \Delta_2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cot\varphi}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

§ 4. Massimi e minimi.

81. Estremi liberi. — Sia A un qualsiasi insieme di uno spazio $S_{(n)}$ ad un numero qualsiasi n di dimensioni ($n=1, 2, \dots$), ed in A sia definita una funzione reale $u=f(P)=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Il così detto *problema della ricerca degli estremi liberi*, che ci proponiamo dapprima di considerare, si pone al modo seguente: *Trovare i punti M' di A per i quali $f(M')$ ha il valore dell'estremo inferiore di $f(P)$ in A ed i punti M'' per i quali $f(M'')$ ha il valore dell'estremo superiore.*

I punti M' e M'' diconsi *punti di estremo assoluto (su A)*, i primi di *minimo assoluto* ed i secondi di *massimo assoluto*. Indicheremo con M' e M'' , rispettivamente, gli insiemi dei punti M' e M'' . I valori $f(M')$, $f(M'')$ diconsi *estremi assoluti* della funzione $f(P)$, su A , il valore $f(M')$ è il *minimo assoluto*, il valore $f(M'')$ il *massimo assoluto*.

Il problema posto, come ben si sa, e come mostra una folla di esempi, non ammette sempre soluzioni; solo se la funzione $f(P)$ è continua in A e tale insieme è chiuso e limitato è assicurata *a priori* (32, IV: teorema di *Weierstrass*) l'esistenza della soluzione. Il decidere appunto se il problema ha soluzione, il decidere se esiste l'insieme M' dei punti di minimo assoluto e se esiste l'insieme M'' dei punti di massimo assoluto, la determinazione completa (provatane l'esistenza) di ciascuno di tali insiemi, il calcolo del valore di $f(P)$ nei punti di ciascuno di questi insiemi, sono compiti il cui assolvimento è continuamente richiesto in moltissimi problemi di *analisi* e di *geometria* ed anche nelle più modeste applicazioni alla pratica.

Evidentemente: *Se $B < A$, un punto appartenente a B di minimo (massimo) assoluto per $f(P)$ su A , è anche di minimo (massimo) assoluto su B , ma non viceversa.*

Un punto M di A dicesi *estremante* la funzione $f(P)$, su A o *di estremo relativo*, oppure, semplicemente, *di estremo* per la funzione, su A , se esiste un intorno $I.A$ di M , su A , tale che il punto M sia di estremo assoluto per la funzione su $I.A$. Se il punto M è di minimo (massimo) assoluto su $I.A$, esso si dice *minimizzante (massimizzante)* la funzione $f(P)$, su A , o *di minimo (massimo) relativo*, oppure, semplicemente, *di minimo (di massimo)* per la funzione, su A .

L'insieme dei punti minimizzanti (massimizzanti) sarà indicato con M'_r (con M''_r). Il valore $f(M)$ è allora, come si dice, un *minimo* (un *massimo*) *relativo* per la $f(P)$ su A ; si dice anche, semplicemente, che $f(M)$ è un *minimo* (un *massimo*) per la $f(P)$ su A , oppure che esso è un *estremo*.

Evidentemente: $M' < M'_r$, $M'' < M''_r$; se $B < A$, un punto appartenente a B minimizzante (massimizzante) $f(P)$ su A è minimizzante (massimizzante) anche su B , ma non viceversa.

Ciò posto, il metodo classico che si segue per la ricerca degli estremi assoluti della funzione $f(P)$, su A , è il seguente: Si costruiscono in A i due insiemi M'_r e M''_r ; se esiste il minimo (massimo) assoluto di $f(P)$ su A , esso si verificherà in punti appartenenti a M'_r (a M''_r) e sarà anche il minimo (massimo) assoluto di $f(P)$ su M'_r (su M''_r). Può darsi che l'insieme M'_r (l'insieme M''_r) risulti costituito da un numero finito di punti, ed allora sono presto trovati quelli fra questi punti nei quali la funzione assume il più piccolo (il più grande) valore su M'_r (su M''_r). Non è detto però che, in generale, il minimo assoluto su M'_r (il massimo assoluto su M''_r), supposto esistente, sia poi il minimo (massimo) assoluto su A . Ciò avverrà sempre se si sa, a priori, che esiste l'indicato minimo (massimo) assoluto, in particolare, avverrà sempre se l'insieme A è chiuso e limitato e la funzione $f(P)$ vi è continua.

La ricerca dei punti di $M'_r + M''_r$, estremanti $f(P)$, su A , interni all'insieme A riesce facilitata da un teorema che sussiste nell'ipotesi, che andiamo ora a fare, della continuità di $f(P)$ in A e della sua derivabilità parziale rispetto a tutte le variabili x_1, x_2, \dots, x_n , almeno una prima ed una seconda volta, in ogni punto interno ad A , con derivate continue in ciascuno di tali punti. Porremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f_{ik}.$$

Il teorema a cui abbiamo alluso è il seguente:

I. Se M è un punto estremante $f(P)$ su A interno ad A , si deve avere

$$(1) \quad f_1(M) = f_2(M) = \dots = f_n(M) = 0$$

laddove la forma quadratica negli argomenti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

$$(2) \quad \sum_{ik}^{1, n} f_{ik}(M) \lambda_i \lambda_k,$$

deve risultare semidefinita positiva o semidefinita negativa secondoche il punto M è minimizzante o massimizzante.

Supponiamo, per esempio, che nel punto $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, interno ad A , si abbia un minimo; esisterà allora un intorno circolare I di M contenuto in A , tale che $f(M)$ sia il minimo assoluto per $f(P)$ su I . Comunque si assegnino le n quantità reali, non tutte nulle, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, si potrà sempre, in corrispondenza, trovare un numero positivo σ tale che il punto $(x_1 + \lambda_1 t, \dots, x_n + \lambda_n t)$, variando il parametro t nell'intervallo $(-\sigma, \sigma)$ si mantenga in I . Ne segue che ponendo

$$\varphi(t) = f(x_1 + \lambda_1 t, \dots, x_n + \lambda_n t),$$

la funzione $\varphi(t)$ ha il suo minimo assoluto, su $(-\sigma, \sigma)$, per $t = 0$. Si deve di necessità perciò avere (46, II e XI) $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) \geq 0$, e pertanto

$$\sum_i^{1, n} f_i(M) \lambda_i = 0, \quad \sum_{ik}^{1, n} f_{ik}(M) \lambda_i \lambda_k \geq 0,$$

onde, per l'arbitrarietà delle λ , riesce dimostrato il teorema.

Ogni punto P di RA per il quale è $\text{grad } f(P) = 0$, cioè $f_1(P) = f_2(P) = \dots = f_n(P) = 0$, dicesi un **punto estremale** di $f(P)$. In particolare, il teorema testè dimostrato dice che: *Ogni punto estremale $f(P)$ su A , interno ad A , è un punto estremale.* Tale proposizione sussiste, evidentemente, nella sola ipotesi dell'esistenza e della continuità delle derivate parziali del prim'ordine; essa sussiste anche, si noti, nella sola ipotesi della differenziabilità di $f(P)$, e se si osserva che un estremo per $f(P)$ è anche un estremo per la funzione della variabile t : $\phi_i(t) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n)$ si vede che la proposizione vale anche nell'unica ipotesi della prima derivabilità parziale della f in M . Dalla proposizione enunciata segue che:

Detto E l'insieme dei punti estremali di $f(P)$, se esiste il minimo (massimo) assoluto di $f(P)$, su A , esso è il minimo (massimo) assoluto su $E + FA$. Si ha dunque, in particolare, che: *Esso è il minimo*

(massimo) assoluto su E , se A è un insieme aperto. Se l'insieme A è aperto e non esiste in A alcun punto estremale di $f(P)$, la funzione è sprovvista, su A , di ogni estremo (relativo o assoluto).

Si dice (cfr. pag. 139) che un punto M minimizzante (massimizzante) $f(P)$, su A , è *propriamente* tale oppure che esso fornisce un minimo (massimo) *proprio* per $f(P)$, su A , se si può costruire un intorno $I.A$ di M , su A , tale che per ogni punto P appartenente a $I.A - M$, si abbia sempre $f(P) > f(M)$ [$f(P) < f(M)$]. Sussiste il teorema:

II. Se $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è un punto estremale di $f(P)$, interno ad A , e se la forma quadratica (2) riesce definita positiva (negativa), il punto M è minimizzante (massimizzante) propriamente la funzione $f(P)$ su A .

Supponiamo, per esempio, che la forma quadratica (2) riesca definita positiva. Per la continuità della funzione $\sum f_{ik}(P)\lambda_i\lambda_k$, delle variabili $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, è possibile determinare un intorno circolare I di M , contenuto in A , in ogni punto P del quale riesca

$$(3) \quad \sum_{ik}^{1, n} f_{ik}(P)\lambda_i\lambda_k > 0 \quad \text{quando} \quad |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n| = 1.$$

Dico che, e con ciò il teorema è dimostrato, per ogni punto $Q(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n)$ di $I - M$ si ha $f(Q) > f(M)$. Ed invero (n° 63) esiste un punto P , interno al segmento MQ , per il quale, posto $\sigma = \sum |\Delta x_i|$, riesce

$$f(Q) - f(M) = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{ik}^{1, n} f_{ik}(P) \frac{\Delta x_i}{\sigma} \frac{\Delta x_k}{\sigma}.$$

Osserviamo che nella dimostrazione data dal teor. II non occorre che fra i punti P per cui deve valere la (3), si trovi anche il punto M , e pertanto possiamo enunciare il teorema:

III. Se M è un punto estremale di $f(P)$, interno ad A e se esiste un intorno circolare I di M , contenuto in A , tale che, per ogni punto P di $I - M$, la forma quadratica

$$(4) \quad \sum_{ik}^{1, n} f_{ik}(P)\lambda_i\lambda_k$$

sia sempre definita positiva (definita negativa), il punto M è propriamente minimizzante (massimizzante) $f(P)$ su A .

Osservazioni. 1^a) Nelle ipotesi ammesse, se M è un punto estremamente $f(P)$ su A , interno ad A , dal teorema I discende, in particolare, che si deve avere

$$f_i(M) = 0, f_{ii}(M) \begin{cases} \geq 0 & \text{se } M \text{ è minimizzante,} \\ \leq 0 & \text{se } M \text{ è massimizzante} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

2^a) Sono note dall'algebra (cfr. *Algebra*, n.¹ 129 e 131) le condizioni necessarie e sufficienti alle quali devono soddisfare i coefficienti di una forma quadratica affinché essa sia definita positiva o definita negativa. Invocando tali condizioni si possono dare ai teoremi II e III enunciati equivalenti nei quali non figura la forma quadratica (4) ma, invece, figurano n determinate disequaglianze aperte alle quali devono soddisfare le derivate seconde f_{ik} . Nel caso particolare ($n=2$) delle funzioni $f(x, y)$ di due variabili si ottengono così i segmenti teoremi, la cui deduzione diretta dai teorr. II e III è del resto facilissima.

a) Se $M(x_0, y_0)$ è un punto estremale di $f(x, y)$, interno ad A , e se

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0,$$

il punto M è propriamente estremante $f(x, y)$ su A , esso è minimizzante o massimizzante secondo che $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ o $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

b) Se $M(x_0, y_0)$ è un punto estremale di $f(x, y)$, interno ad A , e se esiste un intorno circolare I di M , contenuto in A , tale che per ogni punto (x, y) di $I - M$ si abbia:

$$f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 > 0, \quad f_{xx}(x, y) > 0 [f_{xx}(x, y) < 0],$$

il punto M è propriamente minimizzante (massimizzante) f su A .

Il teorema I dà luogo poi al seguente:

c) Se M è un punto estremante $f(x, y)$ su A , interno ad A , si deve avere

$$f_x(M) = f_y(M) = 0, \quad f_{xx}(M)f_{yy}(M) - [f_{xy}(M)]^2 \geq 0,$$

e $f_{xx}(M) \geq 0, f_{yy}(M) \geq 0$ se M è minimizzante, $f_{xx}(M) \leq 0, f_{yy}(M) \leq 0$ se M è massimizzante.

Il metodo dei minimi quadrati delle scienze sperimentali. Un'applicazione importante della teoria svolta si ha nel cosiddetto metodo dei minimi quadrati impiegato nelle scienze sperimentali per ottenere un'approssimata rappresentazione analitica della

legge di un determinato fenomeno, quando questo sia stato osservato per un certo numero di gruppi di valori dei parametri da cui esso dipende. Il metodo indicato poggia sulla proposizione seguente:

Per la funzione quadratica

$$(1) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{hk}^{1, n} a_{hk} x_h x_k - 2 \sum_h^{1, n} b_h x_h + c,$$

la forma quadratica $\sum a_{hk} x_h x_k$ sia semidefinita (o definita) positiva, se esiste un punto estremaie di f , esso fornisce il minimo assoluto di f , su $S_{(n)}$.

Ed invero, se esiste un punto estremaie $P_0 (x_1^0, \dots, x_n^0)$, si ha

$$(2) \quad \sum_k^{1, n} a_{hk} x_k^0 = b_h,$$

$$(3) \quad f(P_0) = - \sum_{hk}^{1, n} a_{hk} x_h^0 x_k^0 + c, \quad f(P) - f(P_0) = \sum_{hk}^{1, n} a_{hk} (x_h - x_h^0)(x_k - x_k^0).$$

È così dimostrata la proposizione. Si osservi di più che se la forma quadratica $\sum a_{hk} x_h x_k$ è definita positiva, le equazioni (2) sono sempre compatibili, ed esiste perciò un ben determinato punto estremaie; in tal caso dunque la f possiede il minimo assoluto su $S_{(n)}$, esso è anzi, in virtù della seconda delle (3), un minimo proprio. Si osservi ancora che, in ogni caso, la f , se non è costante, non ha massimo su $S_{(n)}$, essa ha sempre l'estremo superiore $+\infty$, e nel caso che non esista alcun punto estremaie, nel caso cioè che le (2) siano incompatibili, essa ha $-\infty$ per estremo inferiore.

Ciò posto, supponiamo, per semplificare, che un certo fenomeno dipenda da un unico parametro t , variabile in un certo intervallo (t' , t''), finito o infinito, e si presuma che l'espressione analitica della legge del fenomeno sia data dall'equazione

$$(4) \quad u = \varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

ove x_1, x_2, \dots, x_n sono costanti numeriche e $\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ è una certa funzione delle $n + 1$ variabili t, x_1, x_2, \dots, x_n , definita quando queste soddisfano alle condizioni seguenti: t è in (t' , t''), il punto (x_1, \dots, x_n) è in un certo insieme A di $S_{(n)}$. Si siano ripetute p esperienze, corrispondenti ai valori t_1, t_2, \dots, t_p del parametro t , le quali abbiano dato, rispettivamente, i valori u_1, u_2, \dots, u_p per la funzione u (valori, naturalmente, affetti dagli inevitabili errori d'osservazione) come espressione analitica della legge del fenomeno si assume allora la (4) pren-

dendo le costanti numeriche x_1, x_2, \dots, x_n in modo da dare alla funzione

$$(5) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_i^{1, p} [\varphi(t_i, x_1, x_2, \dots, x_n) - u_i]^2,$$

il valore del suo minimo assoluto su \mathcal{A} . In ciò consiste il metodo dei minimi quadrati.

Il più spesso si prende la φ della seguente forma:

$$(6) \quad \varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \varphi_1(t) + x_2 \varphi_2(t) + \dots + x_n \varphi_n(t)$$

ove $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ sono determinate funzioni della t definite in (t', t'') . L'insieme \mathcal{A} è allora l'intero spazio $\mathcal{S}_{(n)}$. In tal caso la (5) è una funzione quadratica del tipo della (1), ove

$$a_{hk} = \sum_i^{1, p} \varphi_h(t_i) \varphi_k(t_i), \quad b_h = \sum_i^{1, p} u_i \varphi_h(t_i), \quad c = \sum_i^{1, p} u_i^2.$$

Poichè ora è $f \geq 0$, la f sarà provvista certo di punti estremali e quindi di minimo, diversamente, come abbiamo osservato, essa avrebbe, su $\mathcal{S}_{(n)}$, l'estremo inferiore $-\infty$, cioè che non è. Dalla indicata condizione di minimo verranno però univocamente determinate le costanti x_1, x_2, \dots, x_n solamente nel caso, che è quello che si presenta quasi sempre, che la forma quadratica $\sum a_{hk} x_h x_k$ riesca definita positiva.

Per esempio, nei fenomeni vibratorii, di periodo T , si prende

$$\varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_{2\nu}(t) = \text{sen} \left(\frac{2\nu\pi}{T} t \right), \quad \varphi_{2\nu+1}(t) = \text{cos} \left(\frac{2\nu\pi}{T} t \right) \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Quando nella presunta forma della funzione φ le costanti numeriche x non sono contenute linearmente, alla determinazione approssimata dei più probabili valori di tali costanti si può pervenire col seguente metodo *d'approssimazioni successive*. Sia $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ un primo gruppo di valori delle costanti x che si ha ragione di ritenere vicini ai valori più probabili per esse. Per esempio, se, come sempre avviene, $p > n$, e se fra i risultati sperimentali che meritano più fiducia vi sono quelli relativi ai valori t_1, \dots, t_n del parametro, $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ siano determinati dalla condizione di soddisfare con una certa approssimazione, al sistema $\varphi(t_k, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = u_k$ ($k = 1, \dots, n$). Si pone allora

$$\begin{aligned} u_i - \varphi(t_i, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) &= u_i^{(0)} & (i = 1, \dots, p), \\ \varphi_{x_k}(t, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) &= \varphi_k^{(0)}(t) & (k = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

e, determinate le quantità $\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}$ che rendono minima la somma:

$$\sum_i^{1, p} [\xi_1^{(0)} \varphi_1^{(0)}(t_i) + \dots + \xi_n^{(0)} \varphi_n^{(0)}(t_i) - u_i^{(0)}]^2,$$

si pone $x_k^{(1)} = x_k^{(0)} + \xi_k^{(0)}$ ($k = 1, \dots, n$). Si ripete ora il procedimento, sostituendo le $x^{(1)}$ alle $x^{(0)}$, e così via. Si porrà infine

$$x_k = x_k^{(0)} + \xi_k^{(0)} + \dots + \xi_k^{(m)}.$$

82. Applicazione geometrica: Concavità e convessità per le superficie. — Si abbia una porzione di superficie regolare S , di equazioni parametriche

$$(1) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

e di base D_{uv} . Denoteremo con A, B, C , i coseni direttori dell'asse normale positivo, porremo cioè (n° 58)

$$A = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Sia $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto della superficie, ad essa interno, siano u_0 e v_0 i valori dei parametri u e v che competono al punto P_0 ; ogni parte della superficie S , avente per base un dominio quadrato del piano (u, v) , contenuto nel dominio D_{uv} , col centro nel punto (u_0, v_0) e di semidimensione ρ , si denoti con la notazione $S(P_0, \rho)$ e si chiami un' *areola* (su S) a base quadrata, di centro in P_0 e di semidimensione ρ . Sia π_0 il piano tangente alla S nel punto P_0 , esso divide lo spazio in due semispazii Σ' e Σ'' , orbene, se esiste una areola, su S , avente il centro in P_0 , tale che ogni suo punto, distinto da P_0 , sia contenuto in uno determinato degli indicati due semispazii, si dice che la superficie è in P_0 concava o convessa. La equazione del piano P_0 è

$$A_0(X - x_0) + B_0(Y - y_0) + C_0(Z - z_0) = 0,$$

e secondochè il punto (X, Y, Z) è in uno o nell'altro dei due semispazii Σ' e Σ'' , riesce $A_0(X - x_0) + B_0(Y - y_0) + C_0(Z - z_0)$ positivo o negativo; pertanto, considerando la funzione delle due variabili u e v , definita in D_{uv} ,

$$(2) \quad \varphi(u, v) = A_0[x(u, v) - x_0] + B_0[y(u, v) - y_0] + C_0[z(u, v) - z_0],$$

poichè $\varphi(u_0, v_0) = 0$, si ha il teorema:

I. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la superficie S sia concava o convessa nel suo punto $P_0(u_0, v_0)$, ad essa interno, è che la funzione $\varphi(u, v)$, definita dalla (2), abbia in (u_0, v_0) un massimo o un minimo proprio.*

Supponiamo ora, di più, che le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ possiedano anche tutte le derivate parziali del second' ordine finite e continue. Ciò avverrà anche per la funzione $\varphi(u, v)$, e si ha

$$\varphi_u(u_0, v_0) = \varphi_v(u_0, v_0) = 0,$$

e ponendo, come si fa d'ordinario,

$$D = Ax_{uu} + By_{uu} + Cz_{uu}, \quad D' = Ax_{uv} + By_{uv} + Cz_{uv}, \\ D'' = Ax_{vv} + By_{vv} + Cz_{vv},$$

si trova

$$\varphi_{uu}(u_0, v_0) = D(u_0, v_0) = D_0, \quad \varphi_{uv}(u_0, v_0) = D'(u_0, v_0) = D'_0, \\ \varphi_{vv}(u_0, v_0) = D''(u_0, v_0) = D''_0.$$

Ne segue [teorr. c) e a) del u° prec.]:

II. *Condizione necessaria affinché la superficie S sia concava o convessa nel punto $P_0(u_0, v_0)$, ad essa interno, è che riesca*

$$D_0 D_0'' - D_0'^2 \geq 0.$$

III. *Condizione sufficiente affinché la superficie S sia concava o convessa nel punto $P_0(u_0, v_0)$, ad essa interno, è che riesca*

$$D_0 D_0'' - D_0'^2 > 0.$$

L'espressione $DD'' - D'^2$ è il discriminante della forma quadratica

$$D\lambda^2 + 2D'\lambda\mu + D''\mu^2,$$

questa chiamasi la *seconda forma fondamentale* della superficie S , riservando il nome di *prima forma fondamentale* della superficie alla forma quadratica

$$E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2,$$

già incontrata a pag. 230. Il quoziente

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2},$$

dei discriminanti delle due forme, chiamasi la *curvatura totale*

o di *Gauss* della superficie. Un punto della superficie dicesi *ellittico, parabolico, iperbolico*, secondochè in esso la curvatura totale è positiva, nulla, negativa. Queste definizioni poste, i teoremi II e III possono anche essere enunciati al modo seguente:

Nei soli punti (interni) ellittici o parabolici la superficie S può essere concava o convessa. In un punto ellittico (interno) la superficie è certamente concava o convessa.

Evidentemente: *Se un punto P_0 della superficie S, ad essa interno, è iperbolico, comunque si consideri un' areola, su S, di centro in P_0 , essa contiene punti dei due semispazii aperti Σ' e Σ'' , secondo i quali il piano tangente in P_0 alla superficie divide lo spazio.*

Nel punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ — interno — la superficie S sia concava o convessa e sia Σ' il semispazio aperto che contiene tutti i punti distinti da P_0 , di una certa areola $S(P_0, \rho)$, di centro in P_0 . Si dirà allora che la superficie S volge, in P_0 , la concavità verso ogni punto del semispazio Σ' e la convessità verso ogni punto del semispazio Σ'' ; e se α, β, γ sono i coseni direttori di un asse r , non parallelo al piano tangente in P_0 , si dirà che la superficie volge in P_0 la concavità nel verso dell' asse r (la convessità nel verso dell' asse $-r$) o nel verso dell' asse opposto, secondochè essa volge in P_0 la concavità o la convessità verso il punto $(x_0 + \alpha, y_0 + \beta, z_0 + \gamma)$. Si dirà — semplicemente — che la S è in P_0 concava se essa volge ivi la concavità nel verso dell' asse normale positivo, convessa se essa volge invece la convessità nel verso dello stesso asse. Si ha evidentemente che:

IV. *Se (X, Y, Z) è un punto non appartenente al piano tangente alla S in P_0 , e se α, β, γ sono i coseni direttori di un asse r non parallelo a questo piano, condizione necessaria e sufficiente affinchè la S valga in P_0 la concavità (la convessità) verso il punto (X, Y, Z) o verso l' asse r è che la funzione*

$$[A_0(X - x_0) + B_0(Y - y_0) + C_0(Z - z_0)] \varphi(u, v),$$

oppure l' altra

$$(A_0\alpha + B_0\beta + C_0\gamma) \varphi(u, v),$$

abbia in (u_0, v_0) un minimo (un massimo) proprio. La superficie è in P_0 concava se $\varphi(u, v)$ ha in (u_0, v_0) un minimo proprio, convessa se la stessa $\varphi(u, v)$ ha in (u_0, v_0) un massimo proprio. Se P_0 è un punto

ellittico della S , essa volge la concavità (la convessità) verso tutti i punti dello spazio e verso tutti gli assi per i quali è

$$\begin{aligned} [A_0(X - x_0) + B_0(Y - y_0) + C_0(Z - z_0)] D_0 > 0 \quad (< 0), \\ (A_0 \alpha + B_0 \beta + C_0 \gamma) D_0 > 0 \quad (< 0), \end{aligned}$$

è concava (convessa) in P_0 se $D_0 > 0$ (< 0).

Se, in particolare, la superficie S è data in rappresentazione cartesiana, dall'equazione $z = f(x, y)$, ponendo, con **Monge**,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t,$$

si trova

$$\begin{aligned} D = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad D' = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad D'' = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \\ K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}; \end{aligned}$$

pertanto, secondochè $rt - s^2 >, =, < 0$, il punto della superficie è ellittico, parabolico, iperbolico. Se P_0 è un punto ellittico, secondochè r_0 è > 0 o < 0 , la superficie è in P_0 concava o convessa, e volge ivi la concavità nel verso dell'asse z o nel verso opposto. Si osservi ancora che, nel caso attuale,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = D, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial' \varphi}{\partial x \partial y} = D', \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = D'',$$

pertanto, in virtù del teor. **b)** dell'articolo precedente, si ha che: *In un punto parabolico P_0 della superficie $z = f(x, y)$, centro di un'areola tutta costituita di punti ellittici, in ciascuna dei quali la superficie è concava (è convessa), essa è altresì concava (convessa).*

Esercizi. Si dimostri che: 1°) L'ellissoide, l'iperboloide a due falde e il paraboloido ellittico sono superficie a punti ellittici. L'iperboloide ad una falda e il paraboloido iperbolico sono superficie a punti iperbolici.

2°) Un ellissoide, un iperboloide a due falde e un paraboloido ellittico, volgono in ogni punto la concavità verso i punti interni, la convessità verso i punti esterni.

3°) La sfera di raggio R ha curvatura totale costante $= 1:R^2$.

4°) Una superficie luogo delle tangenti ad una porzione di curva regolare è tutta di punti parabolici.

83. Estremi legati o condizionati. — Nelle applicazioni si presenta assai spesso il cosiddetto *problema della ricerca degli estremi legati o condizionati*, il quale, nel modo più generale, si pone al modo seguente: *Su un insieme A dello spazio $S_{(n+p)}$, a $n+p$ dimensioni, trovare il minimo (massimo) assoluto per una funzione reale $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$ delle $n+p$ variabili reali x_i, y_k , le quali però sono legate fra di loro dalle p equazioni:*

$$(1) \quad \varphi_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) = 0 \quad (k=1, \dots, p).$$

Denotando con A_φ l'insieme dei punti di A per i quali riescono soddisfatte le (1), il posto problema si riduce, evidentemente, a quello della ricerca degli estremi liberi assoluti della f su A_φ , noi lo tratteremo dapprima nelle ipotesi seguenti: Le funzioni $f, \varphi_1, \dots, \varphi_p$ sono definite in tutto A e vi sono continue; le stesse funzioni sono, almeno una prima volta, parzialmente derivabili in ogni punto interno a A , con derivate continue in ciascuno di tali punti; per tutti i punti di A_φ , interni a A , si ha sempre

$$(2) \quad \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial(y_1, \dots, y_p)} \neq 0.$$

Supponiamo che il punto $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_p^0)$ di A_φ ($A - FA$) si abbia, per esempio, il minimo assoluto richiesto. Poichè le coordinate del punto P_0 (interno a A) soddisfano alle (1) e alle (2), nell'insieme A_x , proiezione di A , su $S_{(n)}$, si può costruire (75, I e 70, I) un dominio rettangolare R , avente il centro nel punto $X_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, nel quale dominio si possono calcolare p funzioni continue

$$y_k = y_k(x_1, \dots, x_n) \quad (k=1, \dots, p),$$

dotate di derivate parziali del primo ordine, finite e continue; per le quali funzioni si ha $y_k(X_0) = y_k^0$ e mentre il punto $X(x_1, \dots, x_n)$ varia in R il punto $[x_1, \dots, x_n, y_1(X), \dots, y_p(X)]$ si mantiene in A_φ . Si ha dunque, identicamente in R ,

$$(3) \quad \varphi_k[x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_p(x_1, \dots, x_n)] = 0.$$

Concepite tali funzioni sostituite alle y_k nella f , si ottiene una funzione $F(x_1, \dots, x_n)$ delle n variabili x_1, \dots, x_n , finita e continua con le derivate parziali del primo ordine nel dominio R , la quale, evidentemente, nel centro X_0 di R assume il suo massimo assoluto

su \mathbf{R} . Devono, pertanto, nel punto X_0 , essere soddisfatte le n equazioni

$$(4) \quad F_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ma si ha, in \mathbf{R} , per ogni valore dell'indice i ,

$$F_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_k^{1,p} \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}, \quad 0 = \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} + \sum_k^{1,p} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \quad (h = 1, \dots, p),$$

e quindi, in virtù della (2), ponendo

$$J_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) = \frac{\partial (f, \varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial (x_i, y_1, \dots, y_p)}, \quad (i = 1, \dots, n),$$

deve risultare $J_i(P_0) = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Ogni punto P di \mathbf{RA} per il quale siano simultaneamente verificate le n equazioni $J_i(P) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) sarà da noi chiamato un punto estremale di f relativo alle equazioni (1). Ciò posto, l'analisi che precede, conduce alla proposizione:

Ogni punto P estremante $f(P)$ su A_φ , interno a A , è un punto estremale di f , relativo alle equazioni (1).

Se ne deduce: Detto E_φ l'insieme dei punti (di A) estremali di $f(P)$, rispetto alle equazioni (1), se esiste il minimo (massimo) assoluto, condizionato dalle equazioni (1), della funzione $f(P)$, su A , esso è il minimo (massimo) assoluto della f su

$$E_\varphi \cdot A_\varphi \cdot (A - FA) + A_\varphi \cdot FA.$$

Si ha perciò il seguente metodo per la ricerca del minimo (massimo) assoluto, condizionato dalle equazioni (1), della funzione $f(P)$, su A : Si risolve il sistema di $n + p$ equazioni in $n + p$ incognite:

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) = 0, & (k = 1, \dots, p), \\ J_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) = 0, & (i = 1, \dots, n), \end{cases}$$

detto F l'insieme dei punti, interni a A , le cui coordinate soddisfano a queste equazioni, si trova il minimo (massimo) assoluto libero di $f(P)$ su $F + A_\varphi \cdot FA$.

Se, in particolare, A_φ è un insieme chiuso e limitato — ciò che avverrà sempre se A stesso è chiuso e limitato — esistono, su esso, il minimo e il massimo assoluti della f , esistono, cioè, il minimo e il massimo assoluti, condizionati dalle equazioni (1), della f , su A , e pertanto in tal caso, il problema è subito risoluto se, in partico-

lare, l'insieme A è sprovvisto di frontiera (oppure se essa — quando esiste — non ha punti comuni con A_φ) e se l'insieme F risulta costituito da un numero finito di punti.

Nella pratica è spesso vantaggioso sostituire alla risoluzione del sistema (5) di $n + p$ equazioni, quella di un altro sistema di $n + 2p$ equazioni in altrettante incognite, nel quale le variabili x_i e y_k vengono trattate alla stessa stregua. A questo sistema si giunge come segue. In virtù della diseuguaglianza (2), è sempre possibile, per ogni fissato punto $P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$ di A_φ , determinare p quantità $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tali che si abbia:

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial y_k} + \sum_h^{1,p} \lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, p).$$

D'altra parte, se il punto $P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$ è anche in E_φ , se cioè le sue coordinate verificano le equazioni $J_i = 0$, per ogni valore dell'indice i ($i = 1, \dots, n$) si potranno determinare p quantità $\eta_{1i}, \eta_{2i}, \dots, \eta_{pi}$ per le quali riesce

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_k^{1,p} \frac{\partial f}{\partial y_k} \eta_{ki} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} + \sum_k^{1,p} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_k} \eta_{ki} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (h = 1, \dots, p).$$

Combinando le $p + 1$ equazioni (7), linearmente fra di loro, con i coefficienti $1, \lambda_1, \dots, \lambda_p$, si trae

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_h^{1,p} \lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} + \sum_k^{1,p} \eta_{ki} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} + \sum_h^{1,p} \lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_k} \right) = 0,$$

e quindi, in virtù delle (6),

$$(8) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_h^{1,p} \lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Viceversa, com'è evidente, se per un punto P di A_φ riesce possibile la determinazione delle λ in modo che risultino verificate le (6) e le (8), per esso risultano altresì verificate le (5). Possiamo dunque dire che:

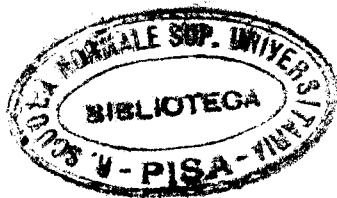
Si ottengono tutti e soli i sistemi di soluzioni del sistema di equazioni (5), prendendo le x_i e le y_k in tutti i sistemi di soluzioni del

seguito sistema di $n + 2p$ equazioni, nelle $n + 2p$ incognite x_i , y_k , λ_h ,

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y_k} + \sum_h^{1,p} \lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_k} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_h^{1,p} \lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (k=1, \dots, p) \\ \\ (i=1, \dots, n). \end{array}$$

Si osservi che i primi membri delle ultime $n + p$ equazioni di questo sistema sono le derivate parziali rispetto a tutte le y_k e x_i della combinazione $f + \sum \lambda_h \varphi_h$, venendo, le λ_h , riguardate come costanti. Si osservi altresì che la forma simmetrica del sistema (9) rispetto alla totalità delle variabili x_i e y_k consente di asserire che: *Per ogni punto estremante $f(P)$, su A_φ , interno ad A , devono di necessità essere verificabili le (9) nella ipotesi più generale, che esista sempre un determinante maggiore, diverso da zero, della matrice jacobiana:*

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)}.$$





INDICE DELLA I^a PARTE

CAPITOLO I.

§ 1. Insiemi ordinati di operazioni. — Limiti per una variabile.

1. L'insieme dei numeri reali	Pag.	3
2. Estremi per un insieme di numeri reali	»	3
3. Coppie di insiemi contigui	»	5
4. Insiemi ordinati di operazioni	»	8
5. Limiti per una variabile ordinata	»	11
6. Primi teoremi sui limiti (<i>variabili subordinate, variabili in corrispondenza</i>).	»	17
7. Variabili regolari (<i>criterio di convergenza di Cauchy, variabili monotone</i>)	»	19
8. Esercizio (<i>limiti per una successione</i>)	»	23
9* Ulteriori teoremi sui limiti	»	25
10. Infinitesimi ed infinitamente grandi	»	30
11. Variabili complesse	»	32
12. Serie	»	37
13. Serie di potenze (<i>teorema Cauchy-Hadamard</i>)	»	39

§ 2. Insiemi di punti.

14. Spazio	»	44
15. Insiemi di punti	»	45
16. Operazioni fra insiemi di punti	»	47
17. Insiemi di punti limitati	»	48
18. Punti limiti di un insieme di punti	»	50
19. Insieme derivato di un dato insieme di punti. Insiemi chiusi. Insiemi perfetti	»	52
20. Continui.	»	57
21. Punti interni, esterni, della frontiera. Insiemi aperti.	»	62
22. Ulteriori definizioni	»	65

§ 3. Funzioni.

23. Concetto generale di funzione	»	66
24. Funzioni di variabili complesse	»	72
25. Rappresentazione geometrica delle funzioni reali di una o di due variabili reali	»	72
26. Generalità sulle funzioni reali di punto	»	73

27. Limiti in un punto per una funzione reale di punto	pag. 76
28. Locuzioni diverse	» 80
29* Estremi e oscillazione in un punto per una funzione reale di punto »	83
30* Semicontinuità	» 87
31. Continuità (<i>distinzione dei punti di discontinuità, caso particolare delle funzioni di una variabile reale, continuità di tutte le funzioni elementari</i>)	» 89
32. Continuità in un insieme chiuso (<i>teorema di Weierstrass, teorema di Cantor</i>)	» 94
33. Teorema degli intorno circolari	» 98
34. Funzioni composte	» 99
35. Principio generale della teoria dei limiti	» 103
36. Limiti all'infinito	» 105
37. Limiti per le funzioni complesse	» 107

CAPITOLO II.

§ 1. Derivate e differenziali per le funzioni di una variabile reale.

38. Definizione delle derivate	» 108
39. Considerazioni geometriche	» 112
40* Derivate della somma e della differenza	» 114
41. Funzioni a derivata unica. Funzioni derivabili	» 115
42. Derivate delle funzioni elementari	» 116
43. Regole di derivazione	» 121
44. Derivate successive	» 128
45. Notazione differenziale. Differenziali	» 130
46. Teoremi di Rolle, di Cauchy, di Lagrange. Massimi e minimi in un punto. Ricerca della funzione primitiva	» 133
47. Formola di Taylor	» 141
48. Teoremi complementari per la ricerca dei limiti (<i>teoremi di l'Hospital, connessione con la formola di Taylor</i>)	» 150
49. Curve regolari. Tangenti. Asintoti	» 160
50. Porzioni di curve regolari nel piano (<i>lunghezze notevoli, coordinate polari, concavità, convessità, flessi</i>)	» 171
51. Calcolo delle radici di un'equazione (<i>metodo delle secanti, metodo delle tangenti, avvertenze per le pratiche applicazioni numeriche</i>)	» 183
52. Derivate e differenziali per le funzioni complesse di una variabile reale	» 193

§ 2. Derivate e differenziali per le funzioni di due o più variabili reali.

53. Derivate per le funzioni di due variabili (<i>derivate totali e derivate parziali, teoremi di Lagrange, di Rolle, di Cauchy — prima forma — per le funzioni di due variabili</i>)	» 201
---	-------

54. Derivate per le funzioni di più variabili	pag. 207
55. Teoremi di l' Hospital (prima forma) per le funzioni di più variabili.	» 210
56. Scomposizione dell'incremento di una funzione. Funzioni lipschitziane. Funzioni differenziabili	» 211
57. Regola per la derivazione delle funzioni composte (<i>parametro differenziale primo, gradiente di una funzione, metrici jacobiane</i>)	» 217
58. Porzioni di superficie regolari. Piano tangente (<i>rappresentazione parametrica, rappresentazione cartesiana, coordinate curvilinee sopra una superficie</i>)	» 228
59. Differenziali totali (<i>loro pratico impiego</i>)	» 234
60. Differenziali totali del primo ordine e d'ordine superiore per le funzioni composte di più variabili.	» 238
61. Funzioni omogenee	» 242
62. Teoremi di Cauchy , di Lagrange , di Rolle , di l' Hospital (seconda forma) per le funzioni di più variabili	» 244
63. Formola di Taylor per le funzioni di più variabili	» 247
64* Derivazione complessa per le funzioni complesse di una variabile complessa (<i>funzioni analitiche, funzioni armoniche in due variabili, funzioni omogenee di una variabile complessa</i>)	» 249
65* Derivazione complessa per le funzioni complesse di più variabili complesse	» 260

CAPITÒLO III.

§ 1. Calcolo delle funzioni.

66. Preliminari.	» 265
67. Convergenza uniforme delle successioni e delle serie di funzioni	» 266
68. Successioni e serie di funzioni complesse. Serie di potenze (<i>teorema d' Abel</i>)	» 270
69. Teoremi della continuità e della derivabilità	» 272
70. Approssimazioni lineari (<i>teorema di Weierstrass, sviluppo in serie di potenze</i>).	» 279
71* Serie di funzioni analitiche (<i>sviluppo in serie di potenze delle funzioni elementari per valori complessi delle variabili</i>)	» 286
72* Serie multiple (<i>serie multiple di funzioni, serie multiple di potenze, teorema Cauchy-Hadamard, serie multiple di Taylor, funzioni reali analitiche di variabili reali, curve regolari e superficie regolari analitiche</i>)	» 290

§ 2. Funzioni implicite.

73. Posizione del problema	» 300
74. Preliminare studio di un caso particolare (<i>approssimazione numerica</i>)	» 301

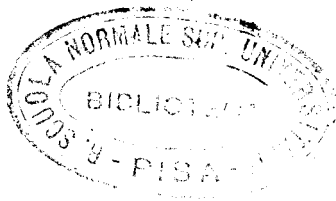
75. Il teorema generale sulle funzioni implicite (<i>teorema di Dini, prolungamento, inversione, teorema di Bagnera</i>)	pag. 304
76. Derivate delle funzioni implicite	» 311
77. Applicazioni geometriche	» 316
78* Funzioni analitiche implicitamente definite (<i>teorema Cauchy-Weierstrass, rappresentazione conforme di un dominio piano sopra un altro</i>) »	320

§ 3. Cambiamento delle variabili.

79. Funzioni di una sola variabile indipendente	» 325
80. Funzioni di più variabili indipendenti.	» 328

§ 4. Massimi e minimi.

81. Estremi liberi (<i>il metodo dei minimi quadrati delle scienze sperimentali</i>) »	333
82. Applicazione geometrica: Concavità e convessità per le superficie (<i>seconda forma fondamentale di una superficie, curvatura di Gauss, punti ellittici, parabolici, iperbolici</i>)	» 340
83. Estremi legati o condizionati	» 344



Legatoria della Scuola
Normale Superiore - Pisa

F. Colucci



033114

BIBLIOTECA
Scuola Normale Superiore