XLI.

Per la formula più generale *cos. n* φ, avremo per il termine generale della serie ordinata per i seni degli archi moltiplici

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int \cos.\, n\,\varphi . \operatorname{sen}.\, x\,\varphi . d\,\varphi$$

per il caso di x pari; e nella supposizione di x dispari,

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int \cos.\, n\,\varphi . \operatorname{sen}.\, x\,\varphi . d\,\varphi - \frac{4}{\pi x}$$

Essendo n un numero intero comunque, converrà distinguere il caso in cui è pari, da quello in cui è dispari. Abbiamo pertanto integrando tra i limiti $\varphi = o$, $\varphi = \pi$,

$$\int \cos.n\,\varphi . \operatorname{sen}.x\,\varphi . d\,\varphi = \frac{1}{2(x+n)} \Big(1 - \cos.(x+n)\pi\Big)$$

$$+ \frac{1}{2(x-n)} \Big(1 - \cos.(x-n)\pi\Big)$$

Se sarà n pari, avremo nel caso di x pari

$$\int \cos.\, n\,\varphi . \operatorname{sen}.\, x\,\varphi . d\,\varphi = o$$

e se la x sarà dispari, sarà

$$\int \cos.\, n\,\varphi . \operatorname{sen}.\, x\,\varphi . d\,\varphi = \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

Quindi essendo x pari, si avrà $A_x = o$, e se sarà dispari, il valore di A_x sarà dato dalla Equazione

$$A_x = \frac{4x}{\pi(x^2 - n^2)} - \frac{4}{\pi . x}$$

Sostituendo questi valori nella serie

$$\cos.n\,\varphi = A + A_1 \operatorname{sen}.\varphi + A_2 \operatorname{sen}.2\,\varphi + \ldots + A_x \operatorname{sen}.\, x\,\varphi + \ldots$$

troveremo la espressione assai elegante

$$\cos. n\varphi = 1 + \frac{4}{\pi}\left\{ \left(\frac{1}{1-n^2} - 1\right) sen.\, \varphi + \left(\frac{3}{3^2-n^2} - \frac{1}{3}\right) sen.\, 3\varphi \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5}{5^2-n^2} - \frac{1}{5}\right) sen.\, 5\varphi + \&c. \right\}$$

Questo resultato ha luogo nel caso di n pari. Per esaminare il caso di n dispari, riprendiamo la formula

$$\int \cos.\, n\varphi . sen.\, x\varphi . d\varphi = \frac{1}{2(x+n)}\left\{1 - \cos.\,(x+n)\pi\right\}$$

$$\mp \frac{1}{2(x-n)}\left\{1 - \cos.(x-n)\pi\right\}$$

Egli è chiaro che se ancora la x sarà dispari, sarà

$$\int \cos. n\varphi . sen. x\varphi . d\varphi = 0$$

e se sarà la x pari, avremo

$$\int \cos.\, n\varphi . sen. x\varphi . d\varphi = \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

Sostituendo questi valori nelle formule

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int \cos.\, n\varphi . sen. x\varphi . d\varphi - \frac{4}{\pi x}$$

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int \cos. n\varphi . sen. x\varphi . d\varphi$$

la prima delle quali ha luogo se x è dispari, e la seconda se x è pari, avremo per il primo caso

$$A_x = -\frac{4}{\pi x}$$

e per il secondo

$$A_x = \frac{4x}{\pi(x^2 - n^2)}$$

Sostituendo questi valori nella nostra serie, si avrà

$$\cos. n\varphi = 1 - \frac{4}{\pi}\left\{ sen.\,\varphi - \frac{2}{2^2 - n^2}\, sen.\,2\varphi + \frac{1}{3}\, sen.\,3\varphi - \frac{4}{4^2 - n^2}\, sen.\,4\varphi + \frac{1}{5}\, sen.\,5\varphi + \&c. \right\}$$

XLII.

Se poi fosse n un numero fratto, irrazionale, o trascendente, si potrà sempre svolgere per i seni degli archi moltiplici di φ la funzione $\cos.\,n\,\varphi$, in modo che sia

$$\cos. n\,\varphi = 1 + A_1\, sen.\,\varphi + A_2\, sen.\,2\,\varphi + \ldots + A_x\, sen.\,x\,\varphi + \&c.$$

avremo infatti (XXXIII) nel caso di x pari

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int \cos. n\,\varphi . sen.\,x\,\varphi . d\,\varphi$$

e se x è dispari

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int \cos. n\,\varphi\, . sen.\,x\,\varphi . d\,\varphi - \frac{4}{\pi . x}$$

Abbiamo adesso

$$\cos.\,n\,\varphi\,.\,sen.\,x\,\varphi = \frac{1}{2}\, sen.(x+n).\,\varphi + \frac{1}{2}\, sen.(x-n).\,\varphi$$

Quindi moltiplicando per $d\,\varphi$, e prendendo gli integrali da $\varphi = o$ fino a $\varphi = \pi$

$$\int \cos. n\,\varphi\, sen.\,x\,\varphi . d\varphi = -\,(\cos. x\,\pi . \cos. n\pi - 1)\,\frac{x}{x^2 - n^2}$$

cioè se x è pari

$$\int \cos. n\,\varphi . sen.\,x\,\varphi\,.\,d\varphi = -(\cos. n\,\pi - 1).\,\frac{x}{x^2 - n^2}$$

e se x è dispari

$$\int \cos. n\,\varphi . sen.\,x\,\varphi .\,d\varphi = (\cos. n\,\pi + 1).\,\frac{x}{x^2 - n^2}$$

Sostituendo queste espressioni nei valori di A_x, avremo, essendo x pari

$$A_x = -(\cos. n\pi - 1) \cdot \frac{2x}{\pi(x^2 - n^2)}$$

ed essendo x dispari

$$A_x = (\cos. n\pi + 1) \cdot \frac{2x}{\pi(x^2 - n^2)} - \frac{4}{\pi x}$$

onde sostituendo nella serie stabilita per $\cos. n\varphi$, si otterrà la formula generalissima

$$\cos. n\varphi = 1 + \frac{2}{\pi}\left\{ \left(\frac{\cos. n\pi + 1}{1 - n^2} - \frac{2}{1}\right) \text{sen.}\,\varphi + \left(\frac{3(\cos. n\pi + 1)}{3^2 - n^2} - \frac{2}{3}\right) \text{sen.}\, 3\varphi \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5(\cos. n\pi + 1)}{5^2 - n^2} - \frac{2}{5}\right) \text{sen.}\, 5\varphi + \left(\frac{7(\cos. n\pi + 1)}{7^2 - n^2} - \frac{2}{7}\right) \text{sen.}\, 7\varphi + \&c. \right\}$$

$$- \frac{2}{\pi}(\cos. n\pi - 1)\left(\frac{2\,\text{sen.}\, 2\varphi}{2^2 - n^2} + \frac{4\,\text{sen}\, 4\varphi}{4^2 - n^2} + \frac{6\,\text{sen.}\, 6\varphi}{6^2 - n^2} + \&c.\right)$$

della quale le precedenti sono casi particolari.

XLIII.

Tutte le volte che n sarà fratto, o irrazionale, o trascendente potremo svolgere la funzione $\cos. n\varphi$ anche per i coseni degli archi moltiplici di φ. In questo caso, facendo

$$\cos. n\varphi = A + A_1 \cos. \varphi + A_2 \cos. 2\varphi + \ldots\ldots + A^x \cos. x\varphi + \ldots\ldots$$

il valore del termine generale A_x sarà assegnato (XXXI) dalla formula

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int \cos. n\varphi \cdot \cos. x\varphi \cdot d\varphi$$

senza che debba farsi distinzione tra il caso di x pari, o dispari come conviene allorchè le serie procedono per i seni degli archi moltiplici (XXXIII).

Facilmente troveremo, integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$,

$$\int \cos. n\varphi . \cos. x\varphi . d\varphi = \frac{1}{2(n+x)} . sen. (n+x)\pi + \frac{1}{2(n-x)} sen. (n-x)\pi$$

Abbiamo adesso

$$sen. (n+x) . \pi = sen. (n-x)\pi = \pm sen. n\pi$$

ove il segno superiore conviene ad x pari, e l'inferiore ad x dispari. Sostituendo, troveremo

$$\int \cos. n\varphi . \cos. x\varphi . d\varphi = \pm \frac{n . sen. n\pi}{n^2 - x^2}$$

e quindi

$$A_x = \pm \frac{2n}{\pi} . \frac{sen. n\pi}{n^2 - x^2}$$

Si ha inoltre

$$A = \int \cos. n\varphi . d\varphi = \frac{1}{n\pi} . sen. n\pi .$$

Quindi sostituendo nella nostra serie, si avrà

$$\cos n\varphi = \frac{1}{n\pi} . sen. n\pi - \frac{2n}{\pi} sen. n\pi \left\{ \frac{\cos. \varphi}{n^2 - 1} + \frac{\cos. 3\varphi}{n^2 - 3^2} + \frac{\cos. 5\varphi}{n^{23} - 5^2} + \&c. \right\}$$

$$+ \frac{2n}{\pi} sen. n\pi \left\{ \frac{\cos. 2\varphi}{n^2 - 2^2} + \frac{\cos. 4\varphi}{n^2 - 4^2} + \frac{\cos. 6\varphi}{n^2 - 6^2} + \&c. \right\}$$

ossia più semplicemente

$$\cos. n\varphi = \frac{sen. n\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{n} - 2n \left(\frac{\cos. \varphi}{n^2 - 1} - \frac{\cos. 2\varphi}{n^2 - 2^2} + \frac{\cos. 3\varphi}{n^2 - 3^2} - \frac{\cos. 4\varphi}{n^2 - 4^2} + \&c. \right) \right\}$$

Facendovi $\varphi = 0$, otterremo mediante una agevole riduzione

$$\frac{1}{2n^2}-\frac{\pi}{2n.sen.n\pi}=\frac{1}{n^2-1}-\frac{1}{n^2-2^2}+\frac{1}{n^2-3^2}-\frac{1}{n^2-4^2}+\&c.$$

Se in questo resultato supporremo $n=\frac{h}{k}$, avrassi riducendo la serie

$$\frac{1}{2h^2}-\frac{\pi}{2hk.}sen.\frac{h.\pi}{k}=\frac{1}{h^2-k^2}-\frac{1}{h^2-2^2k^2}+\frac{1}{h^2-3^2k^2}-\&c.$$

resultato che per induzione Euler dedusse dalla considerazione degli infiniti fattori nei quali si decompone la funzione esponenziale $e^{\omega}+e^{-\omega}$.

Se nella serie

$$cos.n\phi=\frac{sen.n\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{n}-2n\left(\frac{cos.\phi}{n^2-1}-\frac{cos.2\phi}{n^2-2^2}+\frac{cos.3\phi}{n^2-3^2}-\&c.\right)\right\}$$

faremo $\phi=\pi$, troveremo

$$\frac{\pi}{2n}.\frac{cos.n\pi}{sen.n\pi}=\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2-2^2}+\frac{1}{n^2-3^2}+\ldots.$$

cioè facendovi $n=\frac{h}{k}$

$$\frac{1}{2h^2}-\frac{\pi}{2h.k}; cot.\frac{h}{k}.\pi=\frac{1}{k^2-h^2}+\frac{1}{2^2k^2-h^2}+\frac{1}{3^2k^2-h^2}+\&c.$$

serie che come la precedente dedusse Euler dalla decomposizione della esponenziale $e^{\omega}+e^{-\omega}$, e che in tal modo si trova direttamente dimostrata, e dedotta da una più generale.

XLIV.

Prima di sviluppare alcune proprietà assai osservabili di queste formule, riprendiamo la generale espressione

$$\cos.n\phi = \frac{sen.n\pi}{\pi}\left(\frac{1}{n} - 2n\left\{\frac{\cos.\phi}{n^2-1} - \frac{\cos.2\phi}{n^2-2^2} + \frac{\cos.3\phi}{n^2-3^2} - \frac{\cos.4\phi}{n^2-4^2} + \&c.\right\}\right)$$

Differenziandola due volte rapporto a ϕ, avremo

$$-n^2.\cos.n\phi = 2n.\frac{sen.n\pi}{\pi}\left(\frac{\cos.\phi}{n^2-1^2} - 2^2\frac{\cos.2\phi}{n^2-2^2} + 3^2\frac{\cos.3\phi}{n^2-3^2} - \&c.\right)$$

cioè facendovi $\phi = o$

$$-\frac{1}{2}.\frac{n\pi}{sen.n\pi} = \frac{1}{n^2-1} - \frac{2^2}{n^2-2^2} + \frac{3^2}{n^2-3^2} - \frac{4^2}{n^2-4^2} + \&c.$$

onde se l'arco qualunque y avrà il rapporto n con la mezza periferia, cioè se sarà $y = n\pi$, otterremo

$$\frac{y}{sen.y} = 2\left\{\frac{1}{1-n^2} - \frac{2^2}{2^2-n^2} + \frac{3^2}{3^2-n^2} - \frac{4^2}{4^2-n^2} + \&c.\right\}$$

formula dalla quale potremo speditamente calcolare il rapporto di un arco al suo seno.

Abbiamo trovato (XVII) che questo rapporto è assegnato anche dalla formula integrale

$$\frac{y}{sen.y} = 2\int\frac{dx}{x^2+2x\cos.y+1}$$

purchè la integrazione si eseguisca tra i limiti $x=o, x=1$; confrontando per tanto questa relazione con la superiore, si avrà

$$\int\frac{dx}{x^2+2x.\cos.y+1} = \frac{1}{1-n^2} - \frac{2^2}{2^2-n^2} + \frac{3^2}{3^2-n^2} - \&c.$$

ove $y = \pi n$.

Se supporremo $n = \frac{1}{2}$, sarà $\cos.y = \cos.\frac{1}{2}\pi = o$; e quindi

$$\int\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = \frac{2^2}{2^2-1} - \frac{4^2}{4^2-1} + \frac{6^2}{6^2-1} - \&c.$$

come precedentemente abbiamo trovato (XL).

Queste formule sono tutte altrettanti corollarj della serie riportata in principio di questo articolo

$$\cos. n\varphi = \frac{sen. n\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{n} - 2n \left(\frac{\cos.\varphi}{n^2-1} - \frac{\cos.2\varphi}{n^2-2^2} + \frac{\cos.3\varphi}{n^2-3^2} - \&c. \right) \right\}$$

dalla quale, oltre le indicate, si possono dedurre molte altre conseguenze. Così differenziandola $2m$ volte rapporto a φ, avremo facendovi $\varphi = 0$,

$$\pm \frac{n^{2m-1}\pi}{2 . sen. n\pi} = \mp \left\{ \frac{1}{n^2-1} - \frac{2^{2m}}{n^2-2^2} + \frac{3^{2m}}{n^2-3^2} - \&c. \right\}$$

ove il segno superiore conviene ad m pari, e l'inferiore ad m dispari. Facendovi $n = 0$, ne ricaveremo

$$0 = 1 - 2^{2m} + 3^{2m} - 4^{2m} + \&c.$$

serie conosciuta, della quale abbiamo precedentemente fatto uso (XVI).

XLV.

Nell'articolo (XLIII) siamo pervenuti alla formula

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{\pi}{2n . sen. n\pi} = \frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n^2-2^2} + \frac{1}{n^2-3^2} - \frac{1}{n^2-4^2} + \&c.$$

Se svolgeremo per le potenze di n così il primo, come il secondo membro di questa Equazione, potremo dal paragone dei termini moltiplicati per le medesime potestà della n dedurne tutte le potenze pari di π, svolte in serie numeriche. Facciamo per maggior semplicità

$$1 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \&c. = \Sigma \frac{1}{x^m}$$

ciò posto, è chiaro che la nostra equazione potrà prendere la forma

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{\pi}{2n.sen.n\pi} = -\Sigma.\frac{1}{x^2} - n^2\Sigma.\frac{1}{x^4} - n^4\Sigma\frac{1}{x^6} - \&c.$$

Pertanto tutto si ridurrà a svolgere in serie per le potenze di n il primo membro di questa equazione, o più semplicemente, ad ordinare per le potestà di $n\,\pi$ la funzione $\frac{1}{sen.\,n\,\pi}$. Se dunque faremo

$$\frac{1}{sen.\,n\,\pi} = \frac{1}{n\,\pi} + A\,n\,\pi + A_3\,n^3\,\pi^3 + A_5\,n^5\,\pi^5 + \ldots + A_{2h+1}\,n^{2h+1}.\,\pi^{2h+1} + \&c.$$

avremo, sostituendo nella precedente equazione, dal confronto dei termini la generale relazione

$$\frac{A_{2h+1}}{2}.\,\pi^{2h+2} = \Sigma.\frac{1}{x^{2h+2}}$$

ossia, cambiando h in $h-1$

$$\tfrac{1}{2}\,A_{2h-1}.\,\pi^{2h} = \Sigma.\frac{1}{x^{2h}}$$

sostituendo adesso in luogo di $\Sigma\frac{1}{x^{2h}}$ la serie che rappresenta, avremo

$$\tfrac{1}{2}\,A_{2h-1}.\,\pi^{2h} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^{2h}} - \frac{1}{4^{2h}} + \frac{1}{5^{2h}} - \&c.$$

Egli è chiaro adesso che il secondo membro di questa Equazione all'accrescersi di h converge sempre verso l'unità, in modo che rapporto all'indefinito incremento di questa quantità, l'unità è il limite della espressione

$$1 - \frac{1}{2^{2h}} + \frac{1}{3^{2h}} - \&c.$$

Quindi per un valore assai grande di h, avremo prossimamente

$$\frac{1}{2} A_{2h-1} \cdot \pi^{2h} = 1$$

cioè

$$\pi = \sqrt[2h]{\frac{2}{A_{2h-1}}}$$

Il che offre una proprietà assai osservabile dei coefficienti numerici della funzione $\frac{1}{sen.\,u}$ svolta per le potenze di u, ossia della cosecante di un' arco. Converrà pertanto esaminare, come una tale evoluzione possa effettuarsi.

XLVI.

Facciamo per tanto

$$\frac{1}{sen.\,u} = \frac{1}{u} + A\,u + A_3\,u^3 + A_5\,u^5 + \ldots\ldots + A_{2h-1}\,u^{2h-1} + \ldots\ldots$$

Moltiplicando per u, avremo

$$\frac{u}{sen.\,u} = 1 + A\,u^2 + A_3\,u^4 + A_5\,u^6 + \ldots\ldots + A_{2h-1}\,u^{2h} + \ldots\ldots:$$

Ed il general coefficiente A_{2h-1} sarà determinato dalla Equazione

$$A_{2h-1} = \frac{d^{2h} \cdot \frac{u}{sen.\,u}}{1.2.3\ldots\ldots 2h.\,d\,u^{2h}}$$

facendo $u=0$ dopo le differenziazioni. Ma se queste si effettuassero, facile si è a vedersi che sempre si otterrebbero dei resultati della forma $\frac{0}{0}$, onde converrebbe mettere in opera una moltiplicità di operazioni, che permetterebbero difficilmente di conoscere la legge dei termini. Per evitar questo inconveniente riprendiamo la formula $\frac{u}{sen.\,u}$; abbiamo

$$sen.\ u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

onde sostituendo, sarà, facendo per semplicità maggiore, $\frac{u}{sen.\,u} = \mathrm{K}$,

$$\mathrm{K} = \frac{2u\sqrt{-1}}{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}$$

cioè, ponendo $u\sqrt{-1} = z$,

$$\mathrm{K} = \frac{2z\,e^{z}}{e^{2z} - 1}$$

Questa ultima frazione si decompone facilmente in due, in modo che si ha

$$\mathrm{K} = \frac{z}{e^{z} - 1} + \frac{z}{e^{z} + 1}$$

E tutto per conseguenza si ridurrà a cercar lo sviluppo per le potenze di z del secondo membro di questa Equazione; Egli è chiaro adesso che il termine $\frac{z}{e^{z}-1}$ presenta la stessa difficoltà che nella proposta funzione s'incontra, ma la eviteremo, impiegando un artifizio di calcolo dovuto al sig. Laplace, che si è imbattuto nella funzione $\frac{z}{e^{z}-1}$ cercando di sviluppare le analogie dei differenziali con le potenze. La funzione $\frac{z}{e^{z}-1}$ facilmente si decompone nelle due $\frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}-1} - \frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}+1}$; ed è inoltre evidente che nel caso di $z = 0$ si ha

$$\frac{d^{q}\left(\frac{p\,z}{e^{pz} \pm 1}\right)}{(p\,d\,z)^{q}} = p^{q}\,\frac{d^{q}\left\{\frac{z}{e^{z} \pm 1}\right\}}{d\,z^{q}}$$

poichè impunemente possiamo in luogo di z sostituire un suo multiplo, che svanisce contemporaneamente a quella quantità. Quindi facendo $p=\frac{1}{2}$, $q=n$, avrassi

$$\frac{d^n\left\{\frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}-1}\right\}}{dz^n}-\frac{d^n\left\{\frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}+1}\right\}}{dz^n}=\frac{1}{2^n}\frac{d^n\left\{\frac{z}{e^z-1}\right\}}{dz^n}-\frac{1}{2^n}\frac{d^n\left\{\frac{z}{e^z+1}\right\}}{dz^n}$$

$$=\frac{d^n\frac{z}{e^z-1}}{dz^n}$$

onde immediatamente dedurremo

$$\frac{d^n\frac{z}{e^z-1}}{dz^n}=-\frac{1}{2^n-1}\frac{d^n\frac{z}{e^z+1}}{dz^n}$$

Riprendendo ora la Equazione

$$K=\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{e^z+1}$$

si avrà, mediante le riduzioni ottenute

$$\frac{d^nK}{dz^n}=\frac{d^n\frac{z}{e^z+1}}{dz^n}\left(1-\frac{1}{2^n-1}\right)=\frac{2^n-2}{2^n-1}\cdot\frac{d^n\frac{z}{e^z+1}}{dz^n}$$

dalla qual formula potremo facilmente avere lo sviluppo della funzione K per le potenze di z.

Si può ancora il differenziale n^{esimo} di K maggiormente semplicizzare, osservando che avendosi

$$\frac{z}{e^z+1}=z\,(e^z+1)^{-1}$$

sarà anche

$$d^n z\,(e^z+1)^{-1} = d^n z\,.\,(e^z+1)^{-1} + n\,.\,d^{n-1} z\,.\,d\,(e^z+1)^{-1} + \ldots\ldots$$

$$+\, n\,dz\,.\,d^{n-1}(e^z+1)^{-1} + z\,d^n(e^z+1)^{-1}$$

La supposizione di $z = 0$ riduce manifestamente questa quantità ad $n\,dz.\,d^{n-1}(e^z+1)^{-1}$, poichè nella ipotesi di dz costante, le quantità $d^2 z$, $d^3 z$, &c. sono tutte nulle. Sarà pertanto, nella supposizione di $z=0$,

$$\frac{d^n \frac{z}{e^z+1}}{dz^n} = n\,\frac{d^{n-1}\frac{1}{e^z+1}}{d\,z^{n-1}}$$

e quindi sostituendo

$$\frac{d^n K}{d\,z^n} = \frac{n\,(2^n-2)}{2^n-1}\,\frac{d^{n-1}\frac{1}{e^z+1}}{d\,z^{n-1}}$$

Dalla qual formula potremo ottenere facilmente la evoluzione della funzione K per le potenze ascendenti di z, ed essendo $z = u\sqrt{-1}$, e $K = \frac{u}{sen.\,u}$ si avrà in conseguenza lo sviluppo della funzione $\frac{u}{sen.\,u}$, che ci si siamo proposti di ottenere. Non ci tratterremo ad esaminar davvantaggio un tale sviluppo, poichè vedremo in seguito un' altra maniera per ottenerlo, e perchè si potrà esserne pienamente istrutti nella bella memoria del Sig. Laplace inserita negli atti dell' Accademia delle Scienze di Parigi dell' anno 1777.

XLVII.

Pertanto essendo, come sul principio del precedente articolo abbiamo veduto,

$$A_{2h-1} = \frac{1}{2.3\ldots.2h} \cdot d^{2h} \frac{\frac{u}{sen.\,u}}{d\,u^{2h}}$$

purchè si faccia $u=0$ dopo le differenziazioni, sarà ancora

$$A_{2h-1} = \frac{1}{2.3\ldots.2h} \cdot \frac{2h.(2^{2h}-2)}{2^{2h}-1}\, d^{2h-1} \frac{\frac{1}{e^z+1}}{d\,z^{2h-1}}$$

facendo $z=0$ dopo le differenziazioni. E da questa formula ritrarremo il modo di aver la somma della serie

$$1 - \frac{1}{2^{2h}} + \frac{1}{3^{2h}} - \frac{1}{4^{2h}} + \&c.$$

poichè si ha (XLV)

$$\tfrac{1}{2} A_{2h-1} \cdot \pi^{2h} = 1 - \frac{1}{2^{2h}} + \frac{1}{3^{2h}} - \frac{1}{4^{2h}} + \ldots\ldots$$

Dal modo con cui abbiamo determinata la quantità A^{2h-1}, vedremo discendere le celebri zrelaioni che passano tra le serie

$$1 - \frac{1}{2^{2h}} + \frac{1}{3^{2h}} - \frac{1}{4^{2h}} + \ldots.$$

$$1 - 2^{2h-1} + 3^{2h-1} - 4^{2h-1} + \&c.$$

Di quest' ultima si può infatti rappresentar la somma (XVI) mediante la formula

$$\frac{y\,d\,y\,d\,y\ldots\ldots.d\,\frac{1}{1+y}}{d\,y^{2h-1}}$$

purchè si faccia $y=1$ dopo le differenziazioni. La general funzione $\frac{y\,d\,y\,d\,y\ldots d\,y\,d,\frac{1}{1+y}}{d\,y^n}$ si può ridurre adesso ad una più comoda forma mediante una trasformazione di variabile. Supponsgasi infatti

$$\frac{y\,d\,y\,d\,y\ldots d\,y\,d\frac{1}{1+y}}{d\,y^n} = \frac{d^n\,P}{d\,z^n} \quad \ldots\ldots(b)$$

ove P è funzione di z, e z è funzione di y. Facciamo $y=\Psi\,z$, e differenziando la Equazione (b) rapporto ad y, e moltiplicando quindi per y, avremo

$$\frac{y\,d\,y\,d\,y\ldots d\,y\,d\frac{1}{1+y}}{d\,y^{n+1}} = \frac{y\,d^{n+1}\,P}{d\,y\,.\,d\,z^n}$$

ma essendo $y=\Psi\,z$, sarà $d\,y=\frac{d\,\Psi\,z}{d\,z}\,d\,z$; onde sostituendo si otterrà

$$\frac{y\,d\,y\,d\,y\ldots d\,y\,d\frac{1}{1+y}}{d\,y^{n+1}} = \frac{\Psi\,z}{\frac{d\,\Psi\,z}{d\,z}} \cdot \frac{d^{n+1}\,P}{d\,z^{n+1}}$$

ma se nella Equazione (b) varieremo n in $n+1$, sarà ancora

$$\frac{y\,d\,y\,d\,y\ldots d\,y\,d\frac{1}{1+y}}{d\,y^{n+1}} = \frac{d^{n+1}\,P}{d\,z^{n+1}}$$

onde paragonando questi due resultati, sarà

$$\frac{d^{n+1}\,P}{d\,z^{n+1}} = \frac{\Psi\,z}{\frac{d\,\Psi\,z}{d\,z}} \cdot \frac{d^{n+1}\,P}{d\,z^{n+1}}$$

ossia

$$\frac{d\,\Psi\,z}{d\,z} = \Psi\,z$$

e quindi $\Psi\,z = ae^z$, o più semplicemente $\Psi\,z = e^z$. Avremo dunque $y=\Psi\,z=e^z$. Per avere il valore di P, riprendiamo la Equazione (b)

$$(b)\ldots\ldots \frac{y\,d\,y\,d\,y\ldots d\,y\,d\frac{1}{1+y}}{d\,y^n} = \frac{d^n\,P}{d\,z^n}$$

e facendovi $n = 0$, sarà

$$P = \frac{1}{1+y}$$

cioè $P = \frac{1}{1+e^z}$. Pertanto, supponendo $y = e^z$, avremo

$$\frac{y\,dy\,dy \ldots dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^n} = \frac{d^n \frac{1}{1+e^z}}{dz^n}.$$

Abbiamo ora, facendo $y = 1$ dopo le differenziazioni

$$\frac{y\,dy \ldots dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^{2h-1}} = 1 - 2^{2h-1} + 3^{2h-1} - 4^{2h-1} + \ldots\ldots$$

e per conseguenza, essendo $y = e^z$, sarà ancora

$$\frac{d^{2h-1}\frac{1}{1+e^z}}{dz^{2h-1}} = 1 - 2^{2h-1} + 3^{2h-1} - 4^{2h-1} + \&c.$$

purchè si faccia $z = 0$ dopo le differenziazioni.

Ma supponendo $z = 0$ dopo le differenziazioni, noi abbiamo

$$A_{2h-1} = \frac{1}{2.3\ldots(2h-1)} \cdot \frac{(2^{2h}-2)}{2^{2h}-1}\, \frac{d^{2h-1}\frac{1}{1+e^z}}{dz^{2h-1}}$$

quindi, sostituendovi il precedente valore di $\frac{d^{2h-1}\frac{1}{1+e^z}}{dz^{2h-1}}$, sarà

$$A_{2h-1} = \frac{1}{2.3\ldots(2h-1)}\, \frac{2^{2h}-2}{2^{2h}-1} \left\{ 1 - 2^{2h-1} + 3^{2h-1} - 4^{2h-1} + \&c. \right\}$$

ed avendosi

$$\frac{1}{2} A_{2h-1} \cdot \pi^{2h} = 1 - \frac{1}{2^{2h}} + \frac{1}{3^{2h}} - \frac{1}{4^{2h}} + \ldots.$$

sarà anche, sostituendovi il trovato valore di A_{2-1}

$$\frac{\pi^{2h}}{2.3\ldots(2h-1)}\;\frac{(2^{2h-1}-1)}{(2^{2h}-1)}\left\{1-2^{2h-1}+3^{2h-1}-4^{2h-1}+\cdots\right\}$$

$$=-1\,h\,\frac{1}{2^{2h}}+\frac{1}{3^{2h}}-\frac{1}{4^{2h}}+\ldots$$

celebre relazione, che Euler ritrovò per induzione, e che inseguito è stata da varj illustri Geometri dimostrata.

La serie

$$1-2^{2h-1}+3^{2h-1}-4^{2h-1}+\&c.$$

moltiplicata per il coefficiente $\pm\frac{2h}{(2^{2h}-1)2^{2h}}$, ove il segno superiore appartiene ad h dispari, e l'inferiore ad h pari, rappresenta, come è noto, il termine generale dei numeri di Bernoulli, che tanto influiscono nella general Teoria delle serie. Abbiamo veduto che la quantità

$$1-2^{h-1}+3^{2h-1}-4^{2h-1}+\&c.$$

può essere espressa dalla formula $\frac{d^{2h-1}\frac{1}{1+e^z}}{dz^{2h-1}}$, purchè si faccia $z=0$ dopo le differenziazioni. Chiamando dunque U il termine generale dei numeri di Bernoulli, sarà

$$U=\pm\frac{2h}{(2^{2h}-1)2^{2h}}\;\frac{d^{2h-1}\frac{1}{1+e^z}}{dz^{2h-1}}$$

essendo U determinato come sopra, effettuate le differenziazioni.

XLVIII.

Abbiamo nel precedente articolo veduto come la funzione $\frac{y\,d\,y\,d\,y\ldots d\,y\,d\frac{1}{1+y}}{d\,y^n}$ si può sempre ridurre alla forma $\frac{d^n\,P}{d\,z^n}$ essendo P una funzione conosciuta di z, e z una funzione parimente conosciuta di y. Una simile riduzione ha luogo ancora per la funzione molto più complicata $\frac{s\,d\,s\,d\,s\ldots d\,F\,y}{d\,y^n}$ ove s è una qualunque funzione di y. Facciamo infatti

$$\frac{s\,d\,s\,d\,s\ldots\ldots d\,F\,y}{d\,y^n}=\frac{d^n\,P}{d\,z^n}$$

Noi avremo differenziando rapporto ad y, e moltiplicando per s,

$$\frac{s\,d\,s\,d\,s\ldots\ldots d\,F\,y}{d\,y^{n+1}}=\frac{s\,d^{n+1}P}{d\,y.d\,z^n}$$

Ma variando n in $n+1$ abbiamo ancora

$$\frac{s\,d\,s\,d\,s\,.\,.\,.\,.\,.\,d\,F\,y}{d\,y^{n+1}}=\frac{d^{n+1}\,P}{d\,z^{n+1}}$$

Onde si otterrà la Equazione

$$\frac{d^{n+1}\,P}{d\,z^{n+1}}=\frac{s\,d^{n+1}\,P}{d\,y\,d\,z^n}$$

Ma essendo y una funzione di z, che denoteremo Ψz, avremo anche

$$d\,y=\frac{d\,\Psi\,z}{d\,z}\,.\,d\,z$$

E quindi sostituendo, sarà

$$\frac{d^{n+1}\,P}{d\,z^{n+1}}=s.\frac{d^{n+1}\,P}{d\,z^{n+1}}\,.\,\frac{1}{\frac{d\,\Psi\,z}{d\,z}}$$

dovrà essere dunque

$$s = \frac{d\,\Psi\, z}{d\, z}$$

Da questa Equazione, sostituendo nella quantità s in luogo di y il suo valore $\Psi\, z$ troveremo integrando il valore di $\Psi\, z$ espresso per z, ed in tal modo sarà conosciuto il valore di y. Facendo poi nella Equazione

$$\frac{s\, d\, s \ldots\ldots d\, \mathrm{F}\, y}{d\, y^n} = \frac{d^n\, \mathrm{P}}{d\, z^n}$$

la $n = 0$, avremo $\mathrm{P} = \mathrm{F}y$, cioè $\mathrm{P} = \mathrm{F}\,.\,\Psi\, z$ il che darà la completa soluzione del problema.

IL.

Le cose precedenti ci saranno molto utili quando parleremo della integrazione delle Equazioni a differenze parziali. Ma non possiamo quì dispensarci dall'indicare un modo assai semplice di ottenere sotto una nuova forma l' espressione del termine generale dei numeri di Bernoulli, che discende da queste trasformazioni.

Consideriamo la formula generale

$$\frac{y\, d\, y\, d\, y \ldots . d\, \mathrm{F}\, y}{d\, y^n}$$

Facilmente ci persuaderemo dalle successive operazioni indicate in questa formula, che potremo metterla sotto la forma

$$\frac{y\, d\, y \ldots d\, \mathrm{F}\, y}{d\, y^n} = y^n \frac{d^n\, \mathrm{F}\, y}{d y^n} + \mathrm{A}_n \frac{d^{n-1}\, \mathrm{F}\, y}{d\, y^{n-1}} . y^{n-1} + \mathrm{B}_n \frac{d^{n-2}\, \mathrm{F}\, y}{d\, y^{n-2}} . y^{n-2}$$
$$+ \mathrm{C}_n\, y^{n-3} \frac{d^{n-3} .\, \mathrm{F}\, y}{d\, y^{n-3}} + \ldots\ldots (\lambda)$$

Differenziando rapporto ad y, e moltiplicando quindi per y, si otterrà

$$\frac{y\,d\,y\,d\,y\,.....d\,Fy}{d\,y^{n+1}} = y^{n+1}\,\frac{d^{n+1}\,Fy}{d\,y^{n+1}} + n\,y^{n}\,\frac{d^{n}\,Fy}{dy^{n}} + (n-1)\,A_{n}\,y^{n-1}\,\frac{d^{n-1}\,Fy}{dy^{n-1}}$$

$$+ (n-2)\,B_{n}\,y^{n-2}\,\frac{d^{n-2}\,Fy}{d\,y^{n-2}} + \&c.$$

$$+ A_{n}\,y^{n}\,\frac{d^{n}\,Fy}{d\,y^{n}} + B_{n}\cdot y^{n-1}\,\frac{d^{n-1}\,Fy}{d\,y^{n-1}} + C_{n}\,y^{n-2}\,\frac{d^{n-2}\,Fy}{d\,y^{n-2}} + \&c.$$

Ma variando nella formula (λ) n in $n+1$, si avrà ancora

$$\frac{y\,d\,y\,d\,y\,...\,d\,Fy}{d\,y^{n+1}} = y^{n+1}\,\frac{d^{n+1}\,Fy}{d\,y^{n+1}} + A_{n+1}\,y^{n}\,\frac{d^{n}\,Fy}{d\,y^{n}} + B_{n+1}\,y^{n-1}\,\frac{d^{n-1}\,Fy}{d\,y^{n-1}}$$

$$+ C_{n+1}\,y^{n-2}\,\frac{d^{n-2}\,Fy}{d\,y^{n-2}} + \&c.$$

ossia, paragonando i diversi coefficienti delle quantità della forma $y^{m}\,\frac{d^{m}\,Fy}{d\,y^{m}}$, avremo per determinarli la serie seguente di Equazioni

$$\begin{aligned}
A_{n} + n &= A_{n+1}\\
B_{n} + (n-1)\,A_{n} &= B_{n+1}\\
C_{n} + (n-2)\,B_{n} &= C_{n+1}\\
D_{n} + (n-3)\,C_{n} &= D_{n+1}\\
&\vdots\\
&\&c.
\end{aligned}$$

cioè integrando, ed avvertendo per la determinazione delle arbitrarie che tutto deve ridursi a zero se $n=0$, si avrà

$$A_n = \Sigma\, n = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$B_n = \Sigma(n-1)\,\Sigma\, n = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{2\,.\,3\,.\,4}$$

$$C_n = \Sigma(n-2)\,\Sigma(n-1)\,\Sigma\, n = \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

$$D_n = \Sigma(n-3)\,\Sigma(n-2)\,\Sigma(n-1)\,\Sigma\, n = \&c.$$

Sostituendo questi valori nella general formula (λ) si avrà

$$\frac{ydydy....d\,Fy}{dy^n} = y^n \frac{d^n\,Fy}{dy^n} + \Sigma\, n\; y^{n-1} \frac{d^{n-1}\,Fy}{dy^{n-1}} + \Sigma(n-1)\,\Sigma n\; y^{n-2} \frac{d^{n-2}\,Fy}{dy^{n-2}}$$

$$+ \Sigma(n-2)\,\Sigma(n-1)\,\Sigma\, n\,.\,y^{n-3} \frac{d^{n-3}\,Fy}{dy^{n-3}} + \&c.$$

Se fosse $Fy = \frac{1}{1+y}$, e si volesse il valore della funzione $\frac{ydydy....d\frac{1}{1+y}}{dy^n}$ nel caso di $y = 1$, si avrebbe in primo luogo $\frac{d^n\,Fy}{dy^n} = \pm \frac{1\,.\,2\,.\,3\,...\,n}{(1+y)^{n+1}}$, ove il segno superiore appartiene al caso di n pari, e l' inferiore al caso di n dispari. Onde, se $y = 1$, avremo $\frac{d^n\,Fy}{dy^n} = \pm \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.....\,n}{2^{n+1}}$. E sostituendo sarà

$$\frac{ydydy....d\frac{1}{1+y}}{dy^n} = \pm \left\{ \frac{1.2.3..n}{2^{n+1}} - \frac{1.2.3..n-1}{2^n}\,\Sigma n + \frac{1.2.3..n-2}{2^{n-1}}\,.\,\Sigma(n-1)\,\Sigma\, n \right.$$

$$\left. - \frac{1.2.3......n-3}{2^{n-2}}\,.\,\Sigma(n-2)\,\Sigma(n-1)\,\Sigma\, n + \&c. \right\}$$

e questo sarà in conseguenza ancora il valore della funzione

$\frac{d^n \frac{1}{1+e^z}}{d z^n}$, facendo $z=0$ dopo le differenziazioni. Abbiamo adesso veduto (XLVII) che il termine generale dei numeri di Bernoulli è espresso dalla Equazione

$$s = \pm \frac{2h}{(2^{2h}-1)\,2^{2h}} \; \frac{d^{2h-1} \frac{1}{1+e^z}}{d z^{2h-1}}$$

facendovi $z=0$ dopo le differenziazioni; Se dunque nel precedente valore di $\frac{d^n \frac{1}{1+e^z}}{d z^n}$ metteremo in luogo di n, la quantità $2h-1$, avremo, avvertendo che $2h-1$ è dispari, questa nuova espressione dei numeri di Bernoulli:

$$s = \mp \frac{2h}{(2^{2h}-1)2^{2h}} \left\{ \frac{1.2.3...(2h-1)}{2^{2h}} - \frac{1.2.3..(2h-2)}{2^{2h-1}} . \Sigma(2h-1) + \frac{1.2.3..(2h-3)}{2^{2h-1}} \Sigma(2h-2)\Sigma(2h-1) - \&c. \right\}$$

L.

A tutti questi resultati siamo stati condotti dall' esame delle serie assai osservabili che abbiamo ottenute per i seni, e coseni degli archi circolari (XXXV, *e seg.*). Si potrebbero moltiplicare quelle ricerche, e ricavarne altre formule egualmente curiose, ed eleganti; ma, per servire alla brevità, piuttosto passeremo ad applicare quel metodo di cui ci siamo serviti alla generale Teoria delle serie.

Consideriamo in primo luogo una funzione z di x tale che si abbia svolgendola in serie per le potenze ascendenti di questa variabile

$$z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$$

Noi avremo, come è noto dal calcolo differenziale

$$a_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{d^n z}{d x^n}$$

facendo $x = 0$ dopo le differenziazioni. Egli è chiaro adesso che sostituendo in z in luogo di x la quantità $\frac{1}{x}$, se chiameremo z' la funzione che ne resulta, si avrà

$$z' = a + a_1 \cdot \frac{1}{x} + a_2 \cdot \frac{1}{x^2} + a_3 \cdot \frac{1}{x^3} + \ldots\ldots$$

Aggiungendo con la serie precedente, otterremo

$$\frac{z + z'}{2} = a + a_1 \left(x + \frac{1}{x}\right) + a_2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a_3 \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \&c.$$

ossia facendovi $x = e^{\phi\sqrt{-1}}$, e chiamando u, u' quello che dopo tali sostituzioni diverranno z, z', avremo

$$\frac{u + u'}{2} = a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \ldots\ldots + a_n \cos.n\phi + \ldots\ldots$$

Il termine generale di questa serie sarà determinato, come sappiamo (XXIX) dalla formula

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int (u + u') \, d\phi . \cos. n\phi$$

integrando tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$; ed essendo

$$a_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{d^n z}{d x^n}$$

facendo $x = 0$ dopo le differenziazioni, sarà anche

$$\frac{d^n z}{d x^n} = \frac{1.2.3....n}{\pi} \int (u + u')\, d\varphi . \cos . n\varphi .$$

Se adesso in luogo di x si porrà $x + y$, avremo con tal mezzo i differenziali di qualunque ordine di una funzione z, rapporto ad y, sempre espressi da un' integrale definito.

LI.

Questo Teorema può anche estendersi ad un numero qualunque di variabili. Consideriamo infatti una funzione z di x, ed y; e supponghiamo che svolgendola per le potenze di x si abbia

$$z = a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + a_n x^n + \&c.$$

noi avremo

$$a_n = \frac{1}{2.3..n} \left(\frac{d^n z}{d x^n} \right)$$

facendo $x = 0$ dopo le differenziazioni. Allorchè noi vorremo la funzione z svolta in serie per le potenze, ed i prodotti delle due variabili x, ed y, converrà svolgere in serie per le potenze di y tutte le quantità a, a_1, $a_2 \ldots a_n$, &c. cioè le quantità z, $\left(\frac{d z}{d x}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$, $\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3 z}{d x^3}\right) \ldots\ldots\ldots \frac{1}{2.3....n}\left(\frac{d^n z}{d x^n}\right)$, ove dopo le differenziazioni è stato posto $x = 0$.

Quindi resulta che nella evoluzione della funzione n, il coefficiente di $x^n y^m$ sarà

$$\frac{1}{2.3....n.1.2.3...m} \left(\frac{d^{m+n} z}{d x^n . d y^m} \right)$$

facendovi dopo le differenziazioni $x = y = 0$.

Se dunque in luogo di x sostituiremo nella funzione z la quantità $e^{\varphi\sqrt{-1}}$, quindi $e^{-\varphi\sqrt{-1}}$, e chiameremo u, u' i resultati di queste sostituzioni, avremo per le cose precedenti (L)

$$\frac{1}{2\,3\,...n}\cdot\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)=\frac{1}{\pi}\int(u+u')\cos.n\,\varphi.d\,\varphi$$

Facendo inoltre nella funzione $\frac{1}{\pi}\int(u+u')\cos.n\,\varphi.d\,\varphi$ prima $y=e^{\Psi\sqrt{-1}}$, quindi $y=e^{-\Psi\sqrt{-1}}$, e chiamando k, k' quello che si otterrà, avremo evidentemente

$$\frac{1}{2.3..n.2.3...m}\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^n.dy^m}\right)=\frac{1}{\pi}\int(k+k')\cos.m\,\Psi.d\Psi$$

integrando al solito tra i limiti $\Psi=0$, $\Psi=\pi$.

Facciamo $z=F(x,y)$; e sarà

$$u=F\left(e^{\varphi\sqrt{-1}},y\right)$$

$$u'=F\left(e^{-\varphi\sqrt{-1}},y\right)$$

ed avremo anche

$$k=\int\left\{F\left(e^{\varphi\sqrt{-1}},e^{\Psi\sqrt{-1}}\right)+F\left(e^{-\varphi\sqrt{-1}},e^{\Psi\sqrt{-1}}\right)\right\}\cos.n\varphi.d\varphi$$

$$k'=\int\left\{F\left(e^{-\varphi\sqrt{-1}},e^{-\Psi\sqrt{-1}}\right)+F\left(e^{-\varphi\sqrt{-1}},e^{-\Psi\sqrt{-1}}\right)\right\}\cos.n\varphi.d\varphi.$$

Onde sostituendo, sarà per l'indipendenza delle variabili

$$\frac{\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^n.dy^m}\right)}{1.2.3...n.1.2.3...m}=\int\int\left\{F\left(e^{\varphi\sqrt{-1}},e^{\Psi\sqrt{-1}}\right)+F\left(e^{-\varphi\sqrt{-1}},e^{\Psi\sqrt{-1}}\right)\right.$$

$$\left.+F\left(e^{-\varphi\sqrt{-1}},e^{-\Psi\sqrt{-1}}\right)+F\left(e^{\varphi\sqrt{-1}},e^{-\Psi\sqrt{-1}}\right)\right\}\cos\,n\,\varphi.\cos.m\Psi\,d\varphi.d\Psi.$$

Quindi facilmente apparisce come dovremo contenerci se il numero delle variabili sarà maggiore. Sia data la formula $F(x, y, u, t, \&c.)$; noi aggiungeremo insieme altrettante funzioni della forma

$$F\left(e^{\pm\varphi\sqrt{-1}}, e^{\pm\Psi\sqrt{-1}}, e^{\pm\delta\sqrt{-1}}, \ldots\right)$$

in quanti modi è possibile il permutare tra di loro i segni delle quantità $\pm\varphi\sqrt{-1}$, $\pm\Psi\sqrt{-1}$, $\pm\delta\sqrt{-1}$, &c. chiamata Σ questa somma, avremo

$$\frac{\left(\dfrac{d^{m+n+p+\ldots} z}{d x^m\, d y^n\, d u^p \ldots}\right)}{1.2..m.1.2..n.1.2..p\ldots} = \int^K \Sigma.\cos.m\varphi.\cos.n\Psi.\cos.p\delta\ldots\ldots d\varphi.d\Psi.d\delta\ldots$$

ove $k =$ al numero delle variabili, e dove le integrazioni vanno estese da $\varphi = \Psi = \delta = \cdots = 0$, fino a $\varphi = \Psi = \delta = \cdots = \pi$, purchè si faccia $x = y = u = \cdots = 0$ dopo le differenziazioni.

LII.

Consideriamo attualmente le serie infinite

$$z = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

$$z' = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

e supponghiamo che vogliasi la somma della serie infinita

$$A a + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \ldots + A_n a_n + \ldots$$

Per le cose precedenti (L) facilmente giungeremo alle Equazioni

$$(1)\quad \frac{u+u'}{2} = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + \ldots + A_n \cos.n\varphi + \ldots$$

$$(2)\quad \frac{k+k'}{2} = a + a_1 \cos.\varphi + a_2 \cos.2\varphi + \ldots + a_n \cos.n\varphi + \ldots$$

ove u, u' sono quello che z diviene facendovi successivamente $x = e^{\varphi\sqrt{-1}}$, $x = e^{-\varphi\sqrt{-1}}$; e lo stesso dicasi di k, e k' relativamente alla funzione z'. Moltiplicando adesso la serie (1) per $\frac{k+k'}{2}\, d\varphi$, ed integrando, avremo

$$x = \frac{1}{4}\int (u+u')(k+k')\,d\varphi = \mathrm{A}\int \frac{k+k'}{2}\,d\varphi$$

$$+ \mathrm{A}_1 \int \frac{k+k'}{2} \cos.\varphi\,.\,d\varphi + \mathrm{A}_2 \int \frac{k+k'}{2} \cos.\,2\varphi\, d\varphi$$

$$\ldots\ldots + \mathrm{A}_n \int \frac{k+k'}{2} \cos.n\varphi\,.\,d\varphi + \ldots.$$

Se prenderemo questi integrali tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, avremo, dividendo per π

$$\frac{\int (k+k')\cos.n\varphi\,.\,d\varphi}{\pi} = a_n$$

Quindi sostituendo, avremo immediatamente

$$\frac{1}{2\pi}\int (u+u')(k+k')\,d\varphi - \mathrm{A}\,a = \mathrm{A}\,a + \mathrm{A}_1 a_1 + \mathrm{A}_2 a_2 + \ldots + \mathrm{A}_n a_n + \ldots$$

Il problema di cui ci siamo occupati è stato per la prima volta risoluto dal Cel. Parseval, per una strada diversa da quella da noi impiegata. Egli lo ha con successo applicato alla integrazione di alcune Equazioni a differenze parziali, e particolarmente a quella che rappresenta le generali condizioni del moto dei fluidi.

LIII.

Col metodo stesso con cui abbiamo dimostrato questo Teorema, potremo anche generalizzarlo, ed applicarlo al caso in cui le due serie proposte dipendano da più variabili. Siano infatti proposte le due serie

$$R = a_{0,0} + a_{1,0}\,y + a_{0,1}\,x + a_{2,0}\,y^2 + a_{1,1}\,xy + a_{0,2}\,x^2 + \&c.$$

$$R' = b_{0,0} + b_{1,0}\,y + b_{0,1}\,x + b_{2,0}\,y^2 + b_{1,1}\,xy + b_{0,2}\,x^2 + \&c.$$

facendo $y = e^{\theta\sqrt{-1}}$, quindi $y = e^{-\theta\sqrt{-1}}$, avremo, chiamando S, S′ quello che diviene R per queste sostituzioni, e T, T′ quello che diviene R′

$$\frac{S + S'}{2} = a_{0,0} + a_{1,0}\cos.\theta + a_{0,1}\,x + a_{2,0}\cos 2\theta + a_{1,1}\,x\cos.\theta + a_{0,2}\,x^2 + \ldots$$

$$\frac{T + T'}{2} = b_{0,0} + b_{1,0}\cos.\theta + b_{0,1}\,x + b_{2,0}\cos.2\theta + b_{1,1}\,x\cos.\theta + b_{0,2}\,x^2 + \ldots$$

Parimente in queste Equazioni facendo $x = e^{\delta\sqrt{-1}}$, $x = e^{-\delta\sqrt{-1}}$ avremo, chiamando μ, μ' le rispettive somme dei parziali resultati che otterremo con tali sostituzioni per ciascuno dei primi membri di queste Equazioni

$$\mu = a_{0,0} + a_{1,0}\cos.\theta + a_{0,1}\cos.\delta + a_{2,0}\cos.2\theta + a_{1,1}\cos.\delta.\cos.\theta + a_{0,2}\cos.2\delta + \ldots$$

$$\mu' = b_{0,0} + b_{1,0}\cos.\theta + b_{0,1}\cos.\delta + b_{2,0}\cos.2\theta + b_{1,1}\cos.\delta.\cos.\theta + b_{0,2}\cos.2\delta + \&c.$$

Moltiplicando adesso la prima di queste equazioni per $\mu'd\theta.d\delta$, ed integrando prima rapporto a θ, quindi a δ da $\theta = 0$ sino a $\theta = \pi$, e da $\delta = 0$ sino a $\delta = \pi$, noi avremo

$$\frac{\int^2 \mu.\mu'.d\theta.d\delta}{\pi^2} = a_{2,0}\,\frac{\int^2 \mu'.d\theta.d\delta}{\pi^2} + a_{1,0}\,\frac{\int^2 \mu'.d\theta.d\delta.\cos.\theta}{\pi^2}$$

$$+ a_{0,1}\,\frac{\int^2 \mu'\,d\theta.d\delta.\cos.\delta}{\pi^2} + a_{2,0}\,\frac{\int^2 \mu'\,d\theta.d\delta.\cos.2\delta}{\pi^2} + \&c.$$

Ma si ha per le cose precedenti (LI)

$$\frac{\int^2 \mu'\cos.n\theta.\cos.m\delta.d\theta.d\delta}{\pi^2} = a_{n,m}$$

Quindi sarà ancora

$$\frac{\int^2 \mu.\mu'.d\theta.d\delta}{\pi^2} - a\,b = a_{0,0}b_{0,0} + a_{1,0}b_{1,0} + a_{0,1}b_{0,1} + a_{..}b_{..} + \ldots$$

Egli è evidente, che qualunque sia il numero delle variabili giungeremo a dei resultati simili.

LIV.

Abbiamo veduto, come date le due serie ordinate per le potenze ascendenti della variabile x

(1) $z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$

(2) $z' = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \dots$

è sempre possibile di ottenere la somma della serie che nasce dalla addizione dei prodotti $ab, a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots,$
Questo Teorema è utile quando vogliasi ottenere sotto forma finita l'integrale di una Equazione a differenze parziali che sia espresso in serie infinita, ed in una serie tale che si possa decomporre in altre due di cui sia nota la somma, e che moltiplicate termine per termine la riproducano appunto nella maniera con cui la serie

$$ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots$$

dipende dalle serie (1), (2). Ma può spesso succedere che la serie proposta non sia suscettibile di esser decomposta in altre due conosciute, ma che per altro si possa risolvere in numero di serie maggiore di due. Date pertanto le serie

$$z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \&c$$

$$z' = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \&c.$$

$$z'' = c + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \&c.$$

$$\vdots$$

$$\&c.$$

conviene esaminare se sia possibile di ritrovar la somma della serie

$$abc\dots + a_1 b_1 c_1 \dots + a_2 b_2 c_2 \dots.$$

Vedremo adesso brevemente che anche questo caso è suscettibile di una generale evoluzione.

LV.

Supponghiamo che le serie conosciute siano tre, e da questo caso particolare vedremo come dobbiamo contenerci essendo il numero di esse qualunque. Sia dunque

$$(m)\qquad z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

$$z' = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

$$z'' = c + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

Si sostituisca nella serie (m) in luogo di x la quantità $e^{(\phi+k)\sqrt{-1}}$, e quindi $e^{-(\phi+k)\sqrt{-1}}$; avremo, chiamando R, R' i resultati, ed aggiungendoli

$$\frac{R+R'}{2} = a + a_1 \cos.(\phi+k) + a_2 \cos.2(\phi+k) + a_3 \cos.3(\phi+k) + \&c.$$

Parimente nella stessa serie (m) si sostituisca prima $x = e^{(\phi-k)\sqrt{-1}}$, e dipoi $x = e^{-(\phi-k)\sqrt{-1}}$; chiamando R'', R''' i resultati di queste sostituzioni, avremo, aggiungendoli

$$\frac{R''+R'''}{2} = a + a_1 \cos.(\phi-k) + a_2 \cos.2(\phi-k) + a_3 \cos.3(\phi-k) + \&c.$$

E sommando questo valore di $\frac{R''+R'''}{2}$ con l' altro di $\frac{R+R'}{2}$, si avrà

$$\frac{R+R'+R''+R'''}{2} = 2\left[a + a_1\left\{\frac{\cos.(\phi+k)+\cos.(\phi-k)}{2}\right\}\right.$$
$$\left. + a_2\left\{\frac{\cos.2(\phi+k)+\cos.2(\phi-k)}{2}\right\} + a_3\left\{\frac{\cos.3(\phi+k)+\cos.3(\phi-k)}{2}\right\} + \ldots\right]$$

Ma avendosi

$$\frac{\cos. p(\varphi+k)+\cos. p(\varphi-k)}{2}=\cos. p\,\varphi.\cos. pk$$

si avrà sostituendo

$$\frac{R+R'+R''+R'''}{4}=a+a_1\cos.\varphi.\cos.k+a_2\cos.2\varphi.\cos.2k$$
$$+a_3\cos.3\varphi.\cos.3k+\&c.$$

Ottenuto questo resultato, riprendiamo le altre due serie

$$(m') \qquad z'=b+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\&c.$$

$$(m'') \qquad z''=c+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\&c.$$

Si faccia nella serie (m') $x=e^{\varphi\sqrt{-1}}$, e quindi $x=e^{-\varphi\sqrt{-1}}$; aggiungendo i resultati, e facendo questa somma $=H$, si avrà

$$\frac{H}{2}=b+b_1\cos.\varphi+b_2\cos.2\varphi+b_3\cos.3\varphi+\&c.$$

Parimente nella serie (m'') ponghiamo $x=e^{k\sqrt{-1}}$, $x=e^{-k\sqrt{-1}}$, e si aggiunga; facendo il resultato $=H'$, si avrà

$$\frac{H'}{2}=c+c_1\cos.k+c_2\cos.2k+c_3\cos.3k+\&c.$$

Ed avremo dalle cose precedenti (XXIX)

$$\frac{2}{\pi}\int\frac{H.\cos.s\varphi}{2}.d\varphi=b_s=\frac{1}{\pi}\int H\cos.s\varphi.d\varphi$$

$$\frac{2}{\pi}\int\frac{H'\cos.sk}{2}\,dk=c_s=\frac{1}{\pi}\int H'\cos.sk.dk$$

purchè gli Integrali siano presi tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ e sarà ancora nei limiti stessi

$$\frac{1}{\pi}\int\frac{H}{2}\,d\varphi=b$$
$$\frac{1}{\pi}\int\frac{H'}{2}\,dk=c$$

Riprendiamo adesso la Equazione sopra ottenuta

$$\frac{R+R'+R''+R'''}{4}=a+a_1\cos.\varphi.\cos.k+a_2\cos.2\varphi.\cos.2k$$

$$+a_3\cos.3\varphi.\cos.3k+\&c.$$

Moltiplicando da ambe le parti per $H\,d\varphi$, ed integrando tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$, si avrà

$$\frac{1}{\pi}\int\left\{\frac{R+R'+R''+R'''}{4}\right\}H\,d\varphi=\frac{a}{\pi}\int H\,d\varphi+a_1\cos.k\int H\cos.\varphi.d\varphi+\ldots$$

$$+a_2\cos.2k\int H\cos.2\varphi.d\varphi+a_3\cos.3k\int H\cos.3\varphi.d\varphi+\ldots$$

$$+a_s\cos.sk\int H\cos.s\varphi\cdot d\varphi+\ldots$$

Ed essendo

$$\frac{1}{\pi}\int H\,d\varphi=2b$$

$$\frac{1}{\pi}\int H\cdot\cos.s\varphi.d\varphi=b_s$$

otterremo, sostituendo

$$\frac{1}{\pi}\int\left\{\frac{R+R'+R''+R'''}{4}\right\}H\,d\varphi=2ab+a_1b_1\cos.k+a_2b_2\cos.2k$$

$$+a_3b_3\cos.3k+\ldots.+a_sb_s\cos.sk+\&c.$$

Se moltiplicheremo adesso da ambe le parti per $\frac{1}{\pi}H'.dk$, avremo integrando tra i limiti $k=0$, $k=\pi$,

$$\frac{1}{\pi^2}\iint\left\{\frac{R+R'+R''+R'''}{4}\right\}H.H'd\varphi.dk=\frac{2ab}{\pi}\int H'd\,k+\frac{a_1b_1}{\pi}\int H'\cos.k.dk$$

$$+\frac{a_2b_2}{\pi}\int H'\cos\,2k.dk+\cdots+\frac{a_sb_s}{\pi}\int H'\cos.sk.dk+\&c$$

Ma abbiamo veduto essere

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{H}' \, d\,k = 2\;c$$

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{H}' \, cos.\; s\,k\; d\,k = c_s$$

Quindi avrassi sostituendo

$$\frac{1}{\pi}\iint\left\{\frac{\mathrm{R}+\mathrm{R}'+\mathrm{R}''+\mathrm{R}'''}{4}\right\}.\;\mathrm{H}\;.\;\mathrm{H}'.\;d\varphi\;.\;d\,k = 4\,a\,b\,c + a_1\,b_1\,c_1$$

$$+\;a_2\,b_2\,c_2 + \&c. + a_s\,b_s\,c_s + \&c.$$

formula che dà la completa soluzione del nostro Problema. Facilmente vedesi che questo metodo si può estèndere ad un numero qualunque di serie.

LVI.

Abbiamo (L) applicato il nostro metodo alle proprietà delle serie in genere; vediamo adesso di qual uso ci sarà per la evoluzione di alcuna delle funzioni semplici comprese nella forma $\mathrm{F}(m + cos.\,\varphi)$ di cui altre ne abbiamo sviluppate sul principio di queste ricerche. Ed avendo già considerate le funzioni $log.\,(\,m + cos.\;\varphi\,)$, $\frac{1}{m + cos.\,\varphi}$ attualmente per non ritornare sulle cose stesse prenderemo ad esaminare la funzione $(\,m + cos.\,\varphi\,)^n$, e ci proporremo di svolgerla in una serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici di φ.

LVII.

Supponghiamo pertanto

$$(m + cos.\varphi)^n = A_{n,0} + A_{n,1} cos.\varphi + A_{n,2} cos. 2\varphi + A_{n,3} cos. 3\varphi + \ldots$$

$$+ A_{n,x} cos\, x\varphi + \&c.$$

E facendo

$$z = (m + cos.\varphi)^n$$

noi avremo differenziando

$$\left(\frac{dz}{dm}\right) = n(m + cos.\varphi)^{n-1}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) = n(n-1)(m + cos.\varphi)^{n-2}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) = n(n-1)(m + cos.\varphi)^{n-2} - n(n-1) cos.^2 \varphi (m + cos.\varphi)^{n-2}$$

$$- n\, cos.\varphi (m + cos.\varphi)^{n-1}$$

Se adesso tra queste quattro Equazioni elimineremo i termini che comprendono i coseni, si avrà riducendo la equazione lineare a differenze parziali

$$(1 - m^2)\left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) + m(2n - 1)\left(\frac{dz}{dm}\right) - \left(n^2 z + \left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right)\right) = 0$$

nella quale se in luogo di z sostituiremo la serie assegnata

$$z = A_{n,0} + A_{n,1} cos.\varphi + A_{n,2} cos. 2\varphi + A_{n,3} cos. 3\varphi + \&c.$$

otterremo per determinare $A_{n,x}$ la Equazione

$$\text{H)} \ldots \frac{d^2 A_{n,x}}{dm^2} + \frac{m(2n-1)}{1-m^2}\frac{dA_{n,x}}{dm} - \frac{(n^2-x^2)}{1-m^2}A_{n,x} = 0$$

la quale sarà in conseguenza soddisfatta dalla formula

$$A_{n,x} = \frac{2}{\pi}\int (m + cos.\,\varphi)^n \,.\, cos.\; x\varphi \,.\, d\varphi$$

purchè si estendano gli integrali da $\varphi = 0$ sino a $\varphi = \pi$. Pertanto la integrazione della equazione (H) fornirà la evoluzione di questo caso.

LVIII.

Riprendiamo dunque la Equazione (H)

$$\frac{d^2 A_{n,x}}{dm^2} + \frac{m(2n-1)}{1-m^2}\frac{dA_{n,x}}{dm} - \frac{(n^2-x^2)}{1-m^2}A_{n,x} = 0$$

ed introduciamo in luogo di m, un'altra variabile $\frac{1}{h}$. Si avrà sostituendo la trasformata

$$h^2(h^2-1)\frac{d^2 A_{n,x}}{dh^2} + h\,(2h^2 - (2n+1))\frac{dA_{n,x}}{dh} - (n^2-x^2)A_{n,x} = 0$$

Facciamo adesso

$$A_{n,x} = a\,h^\lambda + a_1\,h^{\lambda+1.2} + a_2\,h^{\lambda+2.2}\;a_3\,h^{\lambda+3.2} + \&c.$$

E sostituendo questa serie nella nostra trasformata si troverà λ determinato dalla Equazione

$$\lambda(\lambda-1) + (2n+1)\lambda + n^2 - x^2 = 0$$

onde si trae immediatamente

$$\lambda = \pm x - n$$

Vedremo ancora dalla sostituzione che il coefficiente costante a_s del termine $h^{\lambda + 2.s}$ sarà dato dalla formula

$$a_s = \frac{\lambda\,(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+2s-1).\,a_{n,x}}{4^s.\,1.2.3\ldots s.(\lambda+n+1)\,(\lambda+n+2)\ldots(\lambda+n+s)}$$

ove $a_{n,x}$ è arbitraria, e dipendente da n, ed x.

Se prenderemo $\lambda = x - n$, otterremo

$$a_s = \frac{(x-n)\,(x-n+1)\,(x-n+2)\ldots(x-n+2s-1)}{4^s.1.2.3\ldots s.(x+1)\,(x+2)\,(x+3)\ldots(x+s)}\,.\,a_{n,x}$$

Sostituendo questo valore nella nostra serie, avremo avvertendo di porre in luogo di h il suo valore $\frac{1}{m}$

$$A_{n,x} = a_{n,x}\left\{m^{n-x} + \frac{(x-n)\,(x-n+1)}{4\cdot(x+1)}m^{n-x-2} + \frac{(x-n)(x-n+1)(x-n+2)(x-n+3)}{4^2\cdot1\cdot2\cdot(x+1)\,(x+2)}m^{n-x-4} + \&c.\right.$$

$$\ldots\ldots + \frac{(x-n)\,(x-n+1)\cdots\cdots(x-n+2s-1)}{4^s\cdot1\cdot2\cdot3\cdots s\,(x+1)(x+2)\,(x+3)\cdots\cdots(x+s)}m^{n-x-2\cdot s} + \&c.$$

Questo valore di $A_{n,x}$ non è completo, poichè comprende una sola arbitraria $a_{n,x}$; e se si prendesse per λ l' altro suo valore, cioè se si facesse $\lambda = -x-n$, il termine generale a_s sarebbe dato dalla formula

$$a_s = \pm\frac{(x+n)\,(x+n-1)\,(x+n-2)\ldots(x+n-(2s-1))}{4^s\cdot1\cdot2\cdot3\cdots s\,(x-1)\,(x-2)\cdots(x-s)}\cdot b_{n,x}$$

ove il segno superiore conviene ad s pari, e l' inferiore ad s dispari. Ma siccome tanto x che s sono necessariamente numeri intieri, ed s cominciando dal valore o và di termine in termine accrescendosi di una unità, in qualcuno di questi termini vi sarà nel deno·

minatore il fattore $x - x$, e quindi questo termine, e tutti i successivi diverranno infiniti. Ma facilmente ci convinceremo che per il nostro oggetto l'integrale particolare ottenuto è sufficiente. Abbiamo infatti

$$A_{n,x} = \frac{2}{\pi} \int (m + \cos. \varphi)^n \cdot \cos. x\varphi \cdot d\varphi$$

purchè si eseguisca la integrazione tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. Si ha inoltre

$$(m + \cos. \varphi)^n = m^n + n\, m^{n-1} \cos. \varphi + n \frac{(n-1)}{2} m^{n-2} \cdot (\cos. \varphi)^2 + \&c.$$

Moltiplicando per $\cos. x\varphi . d\varphi$ da ambe le parti, e quindi integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, troveremo che il valore di $\frac{2}{\pi} \int (m + \cos. \varphi)^n \cos. x\varphi . d\varphi$, ossia di $A_{n,x}$, è tutto composto di termini della forma

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-h+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots h} \int (\cos. \varphi)^h \cdot \cos. x\varphi \cdot d\varphi$$

Ma h, ed x essendo numeri interi, sarà sempre, allorchè $h < x$

$$\int (\cos. \varphi)^h . \cos. x\varphi . d\varphi = 0$$

Onde è manifesto che il valore della formula $\frac{2}{\pi} \int (m + \cos. \varphi)^n . \cos. x\varphi . d\varphi$ sarà espresso da una serie della forma

$$p\, m^{n-x} + q\, m^{n-x-2} + \&c.$$

ordinata per le potenze decrescenti di m, in modo che la più elevata potenza di questa quantità sia $n - x$, il che combina con quello che ci vien dato dal nostro integrale particolare. E' dunque inutile l'occuparsi della ricerca dell'Integrale completo, poichè alla espressione precedente di $A_{n,x}$ troveremmo che converrebbe aggiungere la quantità

$$c_{n,x}\,(r + v.\,log.\,m)$$

essendo v l'Integrale particolare trovato, ed r una serie della forma

$$k\;m^{x+n} + i\;m^{x+n-2} + \&c.$$

la quale espressione, come abbiamo veduto, non può esser complicata nel valore di $A_{n,x}$, ossia di $\frac{2}{\pi}\int(m + cos.\varphi)^n\,cos.\;x\,\varphi.\,d\,\varphi$, ove l'integrale è preso tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.

Riprendiamo adesso il valore trovato di $A_{n,x}$

$$A_{n,x} = a_{n,x}\left\{ m^{n-x} + \frac{(x-n)(x-n+1)}{4\cdot(x+1)}\,m^{n-x-2} + \frac{(x-n)(x-n+1)(x-n+2)(x-n+3)}{4^2\cdot 1\cdot 2\;(x+1)\;(x+2)}\,m^{x-x-4} + \&c. \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{(x-n)\;(x-n+1)\;(x-n+2)\cdots(x-n+2\,s-1)}{4^s.\,1.2.3\ldots s\;(x+1)\;(x+2)\;(x+3)\ldots(x+s)}\,m^{n-x-2s} + \&c. \right\}$$

e per determinare l'arbitraria $a_{n,x}$ conviene avvertire, che avendosi

$$A_{n,x} = \frac{2}{\pi}\int(m + cos.\;\varphi)^n\;cos.\;x\,\varphi\;.\;d\,\varphi$$

dovremo nella serie superiore giungere allo stesso resultato, o differenziandola rapporto ad m, e moltiplicando il resultato per n, oppure variando n in $n-1$. Troveremo con molta facilità, paragonando il coefficiente di m^{n-x-1}, che la quantità $a_{n,x}$ è determinata dalla equazione

$$(n+1)\;a_{n,x} = a_{n+1,x}\;\;(n-x+1)$$

e quindi integrando

$$a_{n,x} = p_x \cdot n(n-1)\;(n-2)\ldots\ldots(n-x+1)$$

Sarà dunque con queste determinazioni

$$A_{n,x}=p_x\, n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)\left\{m^{n-x}+\frac{(x-n)(x-n+1)}{4(x+1)}\,m^{n-x-2}+\&c.\right.$$

$$\left.+\frac{(x-n)(x-n+1)\ldots(x-n+2s-1)}{4^s.1.2.3\ldots s(x+1)(x+2)..(x+s)}\cdot m^{n-x-2s}+\&c.\right\}$$

Si determinerà inoltre l'arbitraria p_x rammentandoci che la funzione $A_{n,x}$ deve sodisfare alla Equazione a differenze miste

$$2(x+1).A_{n,x+1}=\frac{dA_{n,x}}{dm}-\frac{dA_{n,x+2}}{dm}$$

nella quale sostituendo l'assegnato valore di $A_{n,x}$, avremo dal confronto dei coefficienti delle varie potenze di m la Equazione

$$p_x=2(x+1)\cdot p_{x+1}$$

cioè, integrando

$$p_x=\frac{q}{2^{x-1}.1.2.3\ldots(x-1).x}$$

ed è evidente che nel caso di $x=0$, sarà $p_0=2q$. Avremo pertanto

$$A_{n,x}=q.n\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{2^{x-1}.1.2.3\ldots(x-1)x}\left\{m^{n-x}+\frac{(x-n)(x-n+1)}{4.(x+1)}m^{n-x-2}+\&c.\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int(m+\cos.\varphi)^n.\cos.x\varphi.d\varphi$$

ove è chiaro, che posto $x=0$, ed $n=0$, si avrà $2q=\frac{2}{\pi}\int d\varphi$, integrando tra i convenuti limiti. Quindi sarà $q=1$. Finalmente avremo

$$A_{n,x}=n\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{2^{x-1}.1.2.3\ldots(x-1)x}.m^{n-x}\left\{1+\frac{(x-n)(x-n+1)}{4.(x+1)}m^{-2}\right.$$

$$+\frac{(x-n)(x-n+1)(x-n+2)(x-n+3)}{4^2.1.2.(x+1)(x+2)}m^{-4}+\&c.$$

$$\left.+\frac{(x-n)(x-n+1)\ldots(x-n+2s-1)}{4^s.1.2.3..s.(x+1)(x+2)\ldots(x+s)}.m^{-2s}+\&c.\right\}$$

la quale espressione sarà composta di un limitato numero di termini, semprechè sia n un numero intiero.

Il termine generale $A_{n,x}$ della serie

$$(m+cos.\varphi)^n = A_{n,0} + A_{n,1}\, cos.\varphi + A_{n,2}\, cos.\, 2\varphi \ldots + A_{n,x} .\, cos.\, x\varphi + \&c.$$

fù noto al sommo Euler, che il primo vi pervenne mediante la sola induzione. E quantunque il precedente sviluppo di $(m+cos.\varphi)^n$ sia molto complicato, perchè composto di un infinito numero di termini, ciascuno dei quali è una serie infinita, pure la eminente utilità che porge per le approssimazioni dei moti celesti, e per la Teoria delle loro perturbazioni, ci compensa bastantemente della sua complicazione. Può vedersene una applicazione assai importante nella Meccanica celeste del Sig. Laplace al Cap. VI. del secondo Libro.

LIX.

Dalla generale espressione di $A_{n,x}$ si potranno ottenere varj altri resultati. Prima di tutto avendosi $A_{n,x} = \frac{2}{\pi} \int (m+cos.\varphi)^n .\, cos.\, x\varphi . d\varphi$ se differenzieremo rapporto ad n, e supporremo quindi $n=0$, avrassi

$$\frac{d\,A_{n,x}}{dn} = \frac{2}{\pi} \int (m+cos.\varphi)^n .\, cos.\, x\varphi . d\varphi .\, log.\, (m+cos.\varphi)$$

e supponendovi $n=0$, si avrà per resultato

$$\frac{2}{\pi} \int log. (m+cos.\varphi)^n .\, cos.\, x\varphi . d\varphi$$

Avremo dunque il valore di questo integrale tra i soliti limiti, se differenzieremo rapporto ad n la serie ottenuta per $A_{n,x}$, e quindi supporremo $n=0$. Si eseguirà molto semplicemente questa operazione, osservando che fatta la differenziazione del primo fattore n del termine fuori delle parentesi, potremo risparmiarci le altre, le quali conservando tutte il multiplo n daranno dei termini $=0$ allorchè vi supporremo $n=0$, come dobbiamo. Con questa osservazione si troverà immediatamente

$$\frac{2}{\pi}\int log.(m+cos.\varphi).cos.x\varphi.d\varphi=\pm\frac{1}{2^{x-1}}\cdot\frac{1}{m^x}\Big\{1+\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{x(x+3)}{4^2.1.2}\frac{1}{m^4}$$

$$+\frac{x(x+4)(x+5)}{4^3.1.2.3}\cdot\frac{1}{m^6}+\frac{x(x+5)(x+6)(x+7)}{4^4.1.2.3.4}\cdot\frac{1}{m^8}+\&c.$$

$$+\frac{x(x+s+1)(x+s+2)(x+s+3)\ldots(x+2s-1)}{4^s.1.2.3\ldots s}\cdot\frac{1}{m^{2s}}+\&c.\Big\}$$

ove il segno superiore conviene ad x dispari, e l'inferiore ad x pari. Ma abbiamo fino di sul principio trovato che

$$\frac{2}{\pi}\int log.(m+cos.\varphi).cos.x\varphi.d\varphi=\pm\frac{2}{\pi}(m-\sqrt{(m^2-1)})^x$$

dove il duplice segno deve essere determinato come quì sopra; sarà pertanto, paragonando i due valori di

$$\frac{2}{\pi}\int log.(m+cos.\varphi).cos.x\varphi.d\varphi,$$

$$(m-\sqrt{(m^2-1)})^x=\frac{1}{2^x}\cdot\frac{1}{m^x}\Big\{1+\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{x(x+3)}{4^2.1.2}\cdot\frac{1}{m^4}$$

$$+\frac{x(x+4)(x+5)}{4^3.1.2.3}\cdot\frac{1}{m^6}+\&c.\Big\}$$

formula assai osservabile per la sua semplicità.

Differenziando da ambe le parti rapporto ad m, si avrà, dividendo per dm

$$-\frac{x(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}=-\frac{1}{2^x}\cdot\frac{1}{m^x}\Big\{\frac{x}{m}+\frac{x(x+2)}{4}\cdot\frac{1}{m^3}$$

$$+\frac{x(x+3)(x+4)}{4^2.1.2}\frac{1}{m^5}+\&c.\Big\}$$

e dividendo membro per membro la equazione superiore per la inferiore, si avrà, togliendo il divisore comune x, e riducendo

$$\sqrt{(m^2-1)}=\frac{1+\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{x(x+3)}{4^2.1.2}\cdot\frac{1}{m^4}+\frac{x(x+4)(x+5)}{4^3.1.2.3}\cdot\frac{1}{m^6}+\&c}{\frac{1}{m}+\frac{(x+2)}{4}\cdot\frac{1}{m^3}+\frac{(x+3)(x+4)}{4^2.1.2}\cdot\frac{1}{m^5}+\frac{(x+4)(x+5)(x+6)}{4^3.1.2.3}\cdot\frac{1}{m^7}+}$$

ove è notabile che x è arbitrario, e può esser qualsivoglia numero intero.

LX.

Riprendiamo ora il general valore di $A_{n,x}$, che abbiamo trovato così espresso

$$A_{n,x}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{2^{x-1}.1.2.3\dots(x-1)x}\cdot m^{n-x}\left\{1+\frac{(x-n)(x-2+1)}{4\cdot(x+1)}\cdot\frac{1}{m^2}\right.$$

$$\left.+\frac{(x-n)(x-n+1)(x-n+2)(x-n+3)}{4^2.1.2.(x+1)(x+2)}\cdot\frac{1}{m^4}+\&c.\right\}\dots\dots(E)$$

Questo è il termine generale della serie

$$(m+\cos.\varphi)^n=A+A_{n,1}\cos.\varphi+A_{n,2}\cos.2\varphi+\dots+A_{n,x}\cos.x\varphi+\&c.$$

Se nel valore di $A_{n,x}$ si supponesse n negativo, quantunque intero, la serie (E) sempre anderebbe all'infinito. Pure abbiamo veduto, che nel caso di n negativo, la formula $(m+\cos.\varphi)^n$, ossia $\frac{1}{(m+\cos.\varphi)^n}$ allorchè n è intero, si può sempre svolgere per i coseni degli archi multipli di φ in modo da ottenere sotto forma finita tutti i termini A, A_1, A_2, &c. della serie

$$\frac{1}{(m+\cos.\varphi)^n}=A+A_1\cos.\varphi+A_2\cos.2\varphi+\&c.$$

ed abbiamo in particolare osservato, che si ha

$$A=\pm\frac{1}{1.2.3\dots(n-1)}\,\frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{(m^2-1)}}}{dm^{n-1}}$$

ove il segno superiore conviene ad n dispari, e l'inferiore ad n pari.

Prima di vedere come dal metodo usato possa sotto altra forma aversi questo valore, avvertiremo che col segno $A_{n,x}$ indicheremo il termine generale dello sviluppo per i coseni degli archi moltiplici della funzione $\frac{1}{(m+\cos\varphi)^n}$, avendo indicato col segno $A_{n,x}$ il termine generale dela funzione $(m+\cos.\varphi)^n$. Con questo modo di scrivere sarà

$$A_{-n,0} = \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \; \frac{d^{n-1} \frac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{d m^{n-1}}$$

ove il segno superiore deve preferirsi se n è dispari, e l'inferiore se è pari.

Riprendiamo dunque la generale Equazione (H)

$$(\mathrm{H})\ldots\ldots \frac{d^2 A_{n,x}}{dm^2} + \frac{m(2n-1)}{1-m^2}\frac{dA_{n,x}}{dm} - \frac{(n^2-x^2)}{1-m^2} A_{n,x} = 0$$

e facendovi $x=0$, ed n negativo, si avrà per esprimere il valore di $A_{-n,0}$ la Equazione

$$\frac{d^2 A_{-n,0}}{dm^2} + \frac{m(2n+1)}{m^2-1}\frac{dA_{-n,0}}{dm} + \frac{n^2}{m^2-1} A_{-n,0} = 0$$

In luogo di $A_{-n,0}$ si sostituisca la quantità $\frac{y}{(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}$, ed avremo la trasformata

$$\frac{d^2y}{dm^2} + \frac{m(3-2n)}{m^2-1}\frac{dy}{dm} + \frac{(n-1)^2}{m^2-1}\cdot y = 0$$

Questa Equazione, confrontata con la generale (H), ci offre una osservabile relazione. Se infatti nella Equazione (H) si farà $x=0$, e si varierà n in $n-1$, otterremo per esprimere $A_{n-1,0}$ la Equazione

$$\frac{d^2 A_{n-1,0}}{d\,m^2} + \frac{m\,(3=2n)}{m^2-1}\,\frac{d\,A_{n-1,0}}{d\,m} + \frac{(n-1)}{m^2-1}\,A_{n-1,0} = 0$$

che è affatto simile alla Equazione in y. Sarà dunque generalmente

$$c\;y = A_{n-1,0}$$

essendo c una costante arbitraria, ed y, ed $A_{n-1,0}$ i completi valori che sodisfanno alle Equazioni a cui appartengono. Ma abbiamo per supposizione

$$y = (m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,A_{-n,0}$$

Quindi sarà sostituendo

$$A_{n-1,0} = c\,(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,A_{-n,0}$$

Vedremo in appresso qual uso possa avere questa relazione; per ora riprendiamo la Equazione in y, e tentiamo d'integrarla.

LXI.

Questa Equazione in y è la seguente

$$\frac{d^2 y}{d\,m^2} + \frac{m\,(3-2\,n)}{m^2-1}\,\frac{d\,y}{d\,m} + \frac{(n-1)^2}{m^2-1}\,y = 0$$

Introduciamovi in luogo di m la variabile $\frac{1}{h}$, ed incontreremo la trasformata

$$h^2(1-h^2)\frac{d^2y}{dh^2} + h\,(2n-1-2h^2)\,.\,\frac{d\,y}{d\,h} + (n-1)^2\,.\,y = 0$$

E facendovi

$$y = a_n h^{\lambda} + a_{1,n}\,h^{\lambda+2} + a_{2,n}\,h^{\lambda+2.2} + a_{3,n}\,.\,h^{\lambda+3.2} + \&c.$$

troveremo λ determinato dalla Equazione

$$(\lambda+n-1)^2 = 0$$

ed il termine generale $a_{s,n}$ dato dalla formula

$$a_{s,n} = a_n \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots.(\lambda+2s-1)}{4^s.1.2.3\ldots s(\lambda+n)(\lambda+n+1)(\lambda+n+2)\ldots.(\lambda+n+s-1)}$$

ossia ponendovi $\lambda = -(n-1)$

$$a_{s,n} = a_n \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(n+2s-2)}{4^s.1.2^2.3^2\ldots s^2}$$

ove a_n è arbitraria, dipendente da n

Sostituendo questi valori nella Serie assegnata per y, ed avvertendo che $h = \frac{1}{m}$, sarà

$$y = a_n \left\{ m^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{4} m^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4^2.1.2^2} m^{n-5} + \&c. \right\}$$

Questo valore di y, quantunque particolare, perchè comprende una sola arbitraria, pure al nostro oggetto è sufficiente. Per convincersene conviene osservare che il valore unico di λ dato dalla Equazione

$$(\lambda+n-1)^2 = 0$$

indica, come è noto, che nell' Integrale completo deve esser compresa una parte trascendente, e che all' integrale particolare ottenuto deve aggiungersi la quantità

$$b_n(p+q\log.m)$$

essendo b_n una nuova arbitraria, p l' integrale particolare trovato, e q una funzione di m. Ma nel nostro caso il valore di y bisognandoci soltanto per ottenere $A_{-n,0}$ dalla Equazione

$$A_{-n,0} = \frac{y}{(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}$$

ove $A_{-n,0}=\frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi}{(m+\cos.\varphi)^n}$ tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$, conviene che questo stesso valore di y soddisfaccia alla Equazione sopra ottenuta (LX)

$$a\,y = A_{n-1,0}$$

ove per $A_{n-1,0}$ non già sia stato preso il completo valore dato dalla Equazione Differenziale che la rappresenta, ma bensì quello che conviene al primo termine della serie che esprime la funzione $(m+\cos.\varphi)^{n-1}$ svolta per i coseni degli archi moltiplici. Ora questo valore di $A_{n-1,0}$ sappiamo che non può comprendere alcuna parte trascendente, poichè come ci è noto (LVIII), non può contenerla neppure la quantità più generale $A_{n,x}$; Quindi acciò con tali condizioni sia sodisfatta la Equazione

$$a\,y = A_{n-1,0}$$

è necessario assumere per y quell'integrale particolare che non comprende la trascendente

Riprendiamo dunque il trovato valore di y

$$y=a_n\left\{m^{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{4}.m^{n-3}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4^2.1.2^2}.m^{n-5}+\&c.\right\}$$

ora noi abbiamo per supposizione

$$A_{-n,0}=\frac{y}{(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}$$

Quindi sarà ancora

$$A_{-n,0}=\frac{a_n}{(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}\left\{m^{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{4}m^{n-3}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4^2.1.2^2}.m^{n-5}+\&c.\right\}$$

la costante a_n si determinerà osservando al solito che

$$A_{-n,0} = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\varphi}{(m+\cos.\varphi)^n}$$

e che in conseguenza si giungerà al resultato stesso o variando nella quantità $A_{n,0}\, n$ in $n+1$, e moltiplicando per n oppure prendendo negativamente il differenziale di questa quantità medesima rapporto ad m. Facilmente troveremo assoggettando a questa condizione la serie trovata per $A_{-n,0}$, dal confronto dalle varie potenze di m, la Equazione

$$n a_n = n a_{n+1}$$

Cioè $a_n = q$, essendo q indipendente da n. Quindi

$$A_{-n,0} = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\varphi}{(m+\cos.\varphi)^n} = \frac{q}{(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}\left\{ m^{n-1} + \frac{(n-1)(n-1)}{4} . m^{n-3} + \&c. \right\}$$

onde facendo $n = 1$, sarà

$$\frac{1}{\pi} . \int \frac{d\varphi}{m+\cos.\varphi} = \frac{q}{(m^2-1)}$$

Ma abbiamo (XVIII)

$$\frac{1}{\pi}\int \frac{d\varphi}{m+\cos.\varphi} = \frac{1}{(m^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

Quindi $q = 1$. Con questa determinazione sarà finalmente

$$A_{-n,0} = \frac{1}{(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}\left\{ m^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{4} . m^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4^2 .\, 1 .\, 2^2} m^{n-5} + \&c. \right\}$$

La quale espressione terminerà sempre che sia n un numero intero. Ma in questa supposizione abbiamo

$$A_{-n,0} = \pm \frac{1}{1.2.3\ldots.(n-1)} \frac{d^{n-1} \frac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{d m^{n-1}}$$

ove il segno superiore ha luogo se n è dispari, e l'inferiore se è pari; sostituendo dunque questo valore di $A_{-1,0}$ nella Equazione qui sopra, avremo

$$\frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{dm^{n-1}} = \mp\frac{1.2.3.\ldots.(n-1)}{(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}\left\{m^{n-1}+\frac{(n-2)(n-2)}{4}.m^{n-3}\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4^2.1.2^2}.m^{n-5}+\&c.\right\}$$

Se da ambe le parti divideremo per $\sqrt{-1}$, si ha primieramente

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}.\frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{dm^{n-1}} = \frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}}{dm^{n-1}}$$

ed inoltre essendo

$$(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{2n-1}{2}}(1-m^2)^{n-\frac{1}{2}} = (\sqrt{-1})^{2n-1}(1-m^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

sarà ancora

$$\sqrt{-1}.(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = \mp(1-m^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

ove il segno superiore dovrà prendersi se n è dispari e l' inferiore se n è pari. Sostituendo qnesti valori nella formula

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{dm^{n-1}} = \mp\frac{1.2.3\ldots.(n-1)}{(\sqrt{-1})(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}\left\{m^{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{4}m^{n-3}\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4.1.2^2}.m^{n-5}+\&c.\right\}$$

ove per i segni convien attenersi alla regola stessa che vale nella Equazione

$$(\sqrt{-1})(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = \mp (1-m^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

noi otterremo immediatamente

$$\frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}}{d\,m^{n-1}} = -\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1-m^2)^{n-\frac{1}{2}}}\left\{ m^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{4}\, m^{n-3} + \&c. \right\}$$

Serie che Euler ottenne il primo per induzione, e che in seguito con diversi metodi Lagrange, e Laplace dimostiarono.

LXII.

Il valore di $A_{-n,0}$ si è pertanto ottenuto sotto due differenti forme, una delle quali è $\pm\, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots (n-1)\, \frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{m^{2-1}}}}{d\,m^{n-1}}$; e sic-come $A_{-n,0}$ è dato dalla Equazione (LXVII)

$$\frac{d^2 A_{-n,0}}{d\,m^2} + \frac{m(2n-1)}{m^2-1}\,\frac{d\,A_{-n,0}}{d\,m} + \frac{n^2}{m^2-1}\,A_{-n,0} = 0$$

così a questa soddisfarà il valore più generale

$$A_{-n,0} = a\, \frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{m^{2-1}}}}{d\,m^{n-1}}$$

e conosciuto un integrale particolare di questa Equazione, ne otterremo l'integrale completo prevalendoci dei noti analitici artifizj, e lo troveremo così espresso.

$$A_{-n,0} = d^{n-1}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{m^2-1}}{d\,m^{n-1}}}\left\{a + a'\int\frac{d\,m}{(m^2-1)\,\frac{2\,n+1}{2}\left\{d^{n-1}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{m^2-1}}{d\,m^{n-1}}}\right\}^2}\right\}$$

Resultato che sarebbe molto difficile ottenere a *priori*. Quindi apparisce che qualunque numero intero sia n, potrà sempre aversi sotto forma finita l'integrale della Equazione

$$\frac{d\,y^2}{d\,m^2}+\frac{m\,(2\,n-1)}{m^2-1}\,\frac{d\,y}{d\,m}+\frac{n^2}{m^2-1}\,y = M$$

ove M è una qualunque funzione di m.

LXIII.

Osservammo poc' anzi (LX) che tra le Funzioni $A_{n,0}$, $A_{-n,0}$ passa un rapporto assai osservabile, determinato dalla Equazione.

$$A_{n-1,0} = a\,(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,A_{-n,0}$$

purchè ciascuna della quantità $A_{n-1,0}$, $A_{-n,0}$ rappresenti il valore completo che in luogo di esse sostituito nelle respettive Equazioni differenziali a cui appartengono le riduca identiche. Abbiamo quì sopra trovato.

$$A_{-n,0} = d^{n-1}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{m^2-1}}{d\,m^{n-1}}}\left\{a + a'\int\frac{d\,m}{(m^2-1)\,\frac{2\,n+1}{2}\left\{d^{n-1}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{m^2-1}}{d\,m^{n-1}}}\right\}^2}\right\}$$

E sostituendo questo valore nella Equazione

$$A_{n-1,0} = a\,(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,A_{-n,0}$$

si avrà

$$A_{n-1,0} = (m^2-1)^{n-\frac{1}{2}} \frac{d^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{d m^{n-1}} \left\{ c + c' \int \frac{d\,m}{(m^2-1)^{\frac{2n+1}{2}} \left\{ \dfrac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{d\,m^{n-1}} \right\}^2} \right\}$$

formula che rappresenterà il completo integrale della Equazione

$$\frac{d^2 A_{n-1,0}}{d\,m^2} + \frac{m\,(3-2n)}{m^2-1}\;\frac{d\,A_{n-1,0}}{d\,m} + \frac{(n-1)^2}{m^2-1}\;A_{n-1,0} = 0$$

LXIV.

Le due Equazioni quì sopra trattate non sono che casi particolari della generale Equazione (H)

$$(\mathrm{H})\ldots\ldots\;\frac{d^2 A_{n,x}}{d\,m^2} + \frac{m\,(2n-1)}{1-m^2}\;\frac{d\,A_{n,x}}{d\,m} + \frac{(n^2-x^2)}{m-1^2}\;A_{n,x} = 0$$

Ed ambedue si sono da questa dedotte supponendovi $x = o$; e nella prima n negativo, ed n positivo per la seconda. Ma la Equazione (H) è anch' essa capace di una Evoluzione generale, ed è suscettibile di un integrale completo, come abbiamo veduto succedere nei di lei casi particolari quì sopra assegnati. Per convincersene, osserveremo in primo luogo che la funzione $A_{n,x}$ essendo il termine generale dello sviluppo di $(m + cos.\,\varphi)^n$ per i coseni degli archi multipli, si ha

$$A_{n,x} = \frac{2}{\pi}\int (m + cos.\,\varphi)^n\; cos.\; x\,\varphi\;.\;d\,\varphi$$

Se adesso supporremo, n intero, e negativo, abbiamo

$$A_{-n,x} = \pm \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} \frac{d^{n-1} \dfrac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}}{d\, m^{n-1}}$$

come fino di sul principio si è veduto ottenersi dalle successive differenziazioni della Equazione

$$\frac{1}{m+\cos.\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(m^2-1)}}\left(1-2\,(m-\sqrt{(m^2-1)})\cos.\varphi+2\,(m-\sqrt{(m^2-1)})^2\cos.\,2\varphi-\&c.\right)$$

Facciamo dunque nella generale Equazione (H) n negativo ed otterremo

$$\frac{d^2 A_{-n,x}}{d\, m^2} + \frac{m\,(2\,n+1)}{m^2-1}\,\frac{d\,A_{-n,x}}{d\,m} + \frac{(n^2-x^2)}{m^2-1} A_{-n,x} = 0$$

alla quale soddisfarà in conseguenza anche il valore più generale

$$A_{-} = a\, \frac{d^{n-1}\dfrac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}}{d\, m^{n-1}}$$

E da questo integrale particolare dedurremo col solito metodo l'integrale completo, che sarà

$$A_{-n,x} = \frac{d^{n-1}\dfrac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}}{d\, m^{n-1}} \left\{ c + c' \int \frac{d\,m}{(m^2-1)^{\frac{2n+1}{2}} \left\{ \dfrac{d^{n-1}\dfrac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}}{d\, m^{n-1}} \right\}^2} \right\}$$

Ed osservando che si ha

$$\frac{d\,(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{d\,m} = -\,x\,\frac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}$$

otterremo, mutate le costanti

$$A_{-n,x} = d^n \frac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{d\,m^n} \left\{ c + c' \int \frac{d\,m}{(m^2-1)^{\frac{2n+1}{2}} \left\{ \frac{d^n\,(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{d\,m^n} \right\}^2} \right\}$$

LXV.

Pertanto la Equazione generale (H) è suscettibile di un integrale completo, e finito nel caso di n negativo. Se fosse n positivo, se ne otterrebbe parimente il completo Integrale, deducendolo dal caso precedente, ed appunto come il valore di $A_{n,o}$ si è dedotto dal valore di $A_{-n,o}$, così esprimeremo la funzione di $A_{n,x}$ per mezzo della funzione $A_{-n,x}$. Per dimostrar ciò, riprendiamo la Equazione (H)

$$(H) \qquad \frac{d^2 A_{n,x}}{d\,m^2} + m\frac{(2n-1)}{1-m^2}\frac{d\,A_{n,x}}{d\,m} - \frac{(n^2-x^2)}{1-m^2}A_{n,x} = 0$$

Cambiandovi n in $-n$, sarà $A_{-n,x}$ determinato dalla Equazione

$$\frac{d^2 A_{-n,x}}{d\,m^2} + m\,\frac{(2\,n+1)}{m^2-1}\,\frac{d A_{-n,x}}{d\,m} + \frac{(n^2-x^2)}{m^2-1}A_{-n,x} = 0$$

Ponghiamo adesso

$$A_{-n,x} = \frac{y}{(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}$$

ed avremo la trasformata

$$\frac{d^2 y}{d\,m^2} + \frac{(3-2\,n)m}{m^2-1} \cdot \frac{d\,y}{d\,m} + \frac{(n-1)^2-x^2}{m^2-1}\,y = 0$$

che è affatto simile alla proposta (H), ove in luogo di n è stato sostituito $n-1$. Quindi generalmente avremo

$$A_{n-1,x} = a\,y$$

Ma si ha

$$y = (m^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} A_{-n,x}$$

cioè, eliminando y tra queste due Equazioni

$$A_{n-1,x} = a\,(m^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} A_{-n,x}$$

Quindi cambiando n in $n+1$, avremo

$$A_{n,x} = a'\,(m^2 - 1)^{n+\frac{1}{2}} A_{-(n+1),x}$$

Abbiamo quì sopra (LXIV) ottenuto il completo valore di $A_{-n,x}$; cambiandovi n in $n+1$, e sostituendo il resultato in questa Equazione, si avrà

$$A_{n,x} = (m^2-1)^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^{n+1}(m-\sqrt{m^2-1})^x}{d\,m^{n+1}} \left\{ c + c' \int \frac{d\,m}{(m^2-1)^{\frac{2n+3}{2}} \left\{ \frac{d^{n+1}(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{d\,m^{n+1}} \right\}} \right\}$$

che sarà il completo integrale della Equazione (H) nel caso di n intero, e positivo.

LXVI.

Se fosse proposta dunque la Equazione differenziale

$$\frac{d^2 y}{d\,m^2} + \frac{m\,(2\,n-1)}{1-m^2}\,\frac{d\,y}{d\,m} - \frac{(n^2 - x^2)}{1-m^2}\,y = M$$

ove M è una funzione qualunque di m, coi metodi precedenti se ne otterrebbe sempre l' integrale completo, purchè sia x un numero intero positivo, e n parimente intero, positivo, o negativo, poichè è noto che nelle Equazioni Lineari l'esistenza di un termine indipendente da y non accresce la difficoltà della integrazione. I resultati ai quali siamo pervenuti, oltre ad esser difficilissimi a dimostrarsi a priori offrono una singolarità molto osservabile, ed è di presentare nell' integrale di una Equazione differenziale una delle costanti in questa contenuta, come esponente di differenziazione. Se nella Equazione

$$\frac{d^2 y}{d m^2} + \frac{m(2n-1)}{1-m^2} \frac{dy}{dm} - \frac{(n^2-x^2)}{1-m^2} y = \mathrm{M}$$

introdurremo in luogo di m la variabile $\frac{1}{\sqrt{h}}$, avremo la trasformata

$$(\mathrm{V}) \ldots 4h^2(h-1)\frac{d^2 y}{d h^2} + h(6h-4(n+1))\frac{dy}{dh} + (x^2-n^2)y = \mathrm{H}$$

essendo H funzione di h; e questa Equazione ammetterà un integrale finito se n, ed x saranno numeri interi. La Equazione (V) è un caso particolare della Equazione

$$z^2(a+bz^k)\frac{d^2 y}{dz^2} + z(c+ez^k)\frac{dy}{dz} + (f+gz^k)y = \mathrm{Z}$$

la quale, posto $z^k = s$ si riduce alla più semplice forma

$$s^2(a+bs)\frac{d^2 y}{ds^2} + s(c'+e's)\frac{dy}{ds} + (f'+g's)y = \mathrm{S}$$

Di questa Equazione molto si sono occupati Euler, Pfaff, ed altri Geometri per sviluppare i casi in cui ammette un integrale finito;

e le cose precedenti aggiungono ai già conosciuti, dei casi d'integrabilità assai estesi.

Anche la equazione

$$(g\,m^2 + b)\,\frac{d^2 y}{d m^2} + k\,m\,\frac{d y}{d m} + c\,y = \mathrm{M}$$

o la sua Equivalente

$$(g'\,m^2 - 1)\,\frac{d^2 y}{d m^2} + k'\,m\,\frac{d y}{d m} + c'\,y = \mathrm{M}'$$

ove $g' = -\frac{g}{b}$, $k' = -\frac{k}{b}$, $c' = -\frac{c}{b}$, $\mathrm{M}' = -\frac{M}{b}$, si può ridurre alla forma della Equazione (V). Introducendovi infatti la variabile $\frac{a}{h}$ in luogo di m, avremo facendo $a^2\,g' = 1$

$$h^2\,(h^2 - 1)\,\frac{d^2 y}{d h^2} + \left\{2\,h^2 - \left(2 - \frac{k'}{g'}\right)\right\}\frac{d y}{d h} - c'\,y = \mathrm{H}$$

che è ridotta alla forma (V). Potremo assai moltiplicare queste riduzioni, ma quì non ci tratterremo davvantaggio sopra tale oggetto.

LXVII.

La Equazione differenziale (H) esprime il termine generale della funzione $(m + cos.\,\varphi)^n$ svolta in serie per i coseni degli archi multipli; E così come ci siamo contenuti in questa ricerca, abbiamo in maniera analoga operato sviluppando in una serie della indole medesima le funzioni $log.\,(m + cos.\,\varphi)$, &c. le quali tutte si comprendono sotto la forma generale $\mathrm{F}\,(m + cos.\,\varphi)$, e individualmente per ciascuna abbiamo ottenuta una Equazione differenziale, dalla quale abbiamo dedotta la natura del termine generale A_x della serie

$$A + A_1 \cos. \varphi + A_2 \cos. 2\varphi \ldots\ldots + A_x \cos. x\varphi + \ldots\ldots$$

Proponghiamoci adesso il seguente problema. Data la funzione $F(m + \cos.\varphi)$, determinare generalmente la natura della funzione F, acciocchè sviluppando $F(m + \cos.\varphi)$ in serie procedente per i coseni degli archi multipli in modo che sia

$$F(m + \cos.\varphi) = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos. 2\varphi + \ldots\ldots + A_x \cos. x\varphi + \ldots$$

possa il termine generale A_x esser rappresentato da una Equazione differenziale lineare del secondo ordine.

Supponghiamo a tale oggetto

$$z = F(m + \cos.\varphi)$$

ed avremo

$$\left(\frac{dz}{dm}\right) = F'(m + \cos.\varphi)$$

$$\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right) = F''(m + \cos.\varphi)$$

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) = F''(m+\cos.\varphi) - (\cos.\varphi^2)\, F''(m+\cos.\varphi) - \cos.\varphi \,.\, F'(m+\cos.\varphi)$$

moltiplicando la terza equazione per P, la seconda per Q, la prima per R, essendo P, Q, R funzioni di m indeterminate, ed aggiungendo la loro somma alla quarta, avremo, chiamando F per maggior semplicità la funzione $F(m + \cos.\varphi)$,

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) + P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dm}\right) + Rz$$

$$= F'' - (\cos.\varphi)^2 F'' + P F'' + Q F' + R F - \cos.\varphi\, F' \ldots\ldots (K)$$

Abbiamo ora per il Teorema di Taylor

$$F(m+\cos.\varphi)=Fm+\cos.\varphi\, F'm+\frac{\cos.^2\varphi}{2}F''m+\&c.$$

onde avremo, sostituendo nel secondo membro della Equazione (K) dopo semplici riduzioni

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)+P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dm}\right)+Rz$$

$$=(P+1)F''m+(P+1)F'''m\cos.\varphi+\frac{(P+1)}{2}F^{\text{iv}}m\,.\cos.^2\varphi$$

$$+\frac{(P+1)}{2\,.\,3}F^{\text{v}}m\,.\cos.^3\varphi+\ldots+\frac{P+1}{2.3\ldots x}F^{(x+2)}m\,.\cos.^x\varphi+\ldots$$

$$+QF'm+QF''m\,.\cos.\varphi+\frac{QF'''m}{2}\,.\cos.^2\varphi$$

$$+\frac{QF^{\text{iv}}m}{2.3}\,.\cos.^3\varphi+\ldots+\frac{Q}{2.3\,.\,.x}F^{(x+1)}m\,.\cos.^x\varphi+\ldots$$

$$+RFm+(R-1)F'm\,.\cos\varphi+\frac{(R-2^2)}{2}F''m\,.\cos.^2\varphi$$

$$+\frac{(R-3^2)}{2\,.\,3}F'''m\,.\cos.^3\varphi+\ldots+\frac{R-x^2}{2.3\,.\,.x}F^{(x)}m\cos.^x\varphi+\ldots$$

Se ora, qualunque sia x, faremo

$$(P+1)F^{(x+2)}m+QF^{(x+1)}m+(R-x^2)F^{(x)}m=0$$

svanirà il secondo membro della Equazione superiore, ed avremo

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)+P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dm}\right)+Rz=0$$

alla quale equazione lineare a differenze parziali soddisfarà

$$z=F(m+\cos.\varphi)$$

purchè sia Fm in modo determinato che si abbia

$$(P+1)\frac{d^{(x+2)}Fm}{dm^{x+2}}+Q\frac{d^{(x+1)}Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\frac{d^xFm}{dm^x}=0$$

Facendo $y=\frac{d^xFm}{dm^x}$, sarà $Fm=\int^x y\,dm^x$, ed y dipenderà dalla Equazione lineare

$$(P+1)\frac{d^2y}{dm^2}+Q\frac{dy}{dm}+(R-x^2)y=0$$

Integrando questa Equazione avremo il valore di y che sostituito nella formula

$$Fm=\int^x y\,dm^x$$

ci darà Fm con $x+2$ costanti arbitrarie. Quì conviene avvertire che il valore di Fm così ottenuto conterrà nella sua espressione la costante x; ma dovendo esserne Fm indipendente, converrà in modo determinar le costanti che la x non vi apparisca, poichè la Equazione (R) deve esser sodisfatta indipendentemente da x.

LXVIII.

Questa osservazione ci condurrà alla soluzione del nostro problema. Data la funzione $F(m+\cos.\varphi)$, se dovrà soddisfare ad una Equazione a differenze parziali della forma

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)+P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dm}\right)+Rz=0$$

conviene che la funzione Fm soddisfaccia indipendentemente da x alla Equazione (R)

$$(R)\ldots\ldots(P+1)\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}}+Q\frac{d^{x+1}.Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\frac{d^xFm}{dm^x}=0$$

e se potremo determinare P, Q, R in modo che una tal condizione sia verificata, facendo

$$z = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + \ldots$$

potremo sostituire questo valore nella Equazione

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) + P\left(\frac{d^2 z}{d m^2}\right) + Q\left(\frac{d z}{dm}\right) + R z = 0$$

ed eseguita la operazione, troveremo che A_x dipenderà dalla Equazione lineare del 2.° ordine

$$P\,\frac{d^2 A_x}{d m^2} + Q\,\frac{d A_x}{d m} + (R - x^2)\,A_x = 0$$

Sia proposta per esempio la funzione

$$z = (m + \cos.\varphi)^n$$

avremo $F m = m^n$; sostituendo questo valore nella Equazione (R), sarà

$$\frac{P+1}{m^2}\,(n-x)(n-x-1) + \frac{Q}{m}\,(n-x) + R - x^2 = 0$$

che può verificarsi indipendentemente da x purchè le funzioni P, Q, R soddisfacciano alle condizioni

$$\frac{P+1}{m^2}\,n\,(n-1) + \frac{Q n}{m} + R = 0$$

$$(1-2n)\,\frac{P+1}{m^2} - \frac{Q}{m} = 0$$

$$\frac{P+1}{m^2} - 1 = 0$$

onde ricaveremo

$$P = m^2 - 1$$

$$Q = (1-2n)\,m$$

$$R = n^2$$

E sostituendo questi valori nella Equazione

$$P\frac{d^2 A_x}{dm^2}+Q\frac{dA_x}{dm}+(R-x^2)A_x=0$$

troveremo che il termine generale A_x dello sviluppo di $(m+cos.\varphi)^n$ per i coseni degli archi moltiplici sarà rappresentato dalla Equazione

$$\frac{d^2 A_x}{dm^2}+m\frac{(2n-1)}{1-m^2}\frac{dA_x}{dm}-\frac{(n^2-x^2)}{1-m^2}A_x=0$$

come abbiamo già ritrovato (LXII).

LXIX.

Viceversa, se sia proposta la Equazione

$$P\frac{d^2 A_x}{dm^2}+Q\frac{dA_x}{dm}+(R-x^2)A_x=0$$

dove siano P, Q, R funzioni comunque di m, ed x un numero intiero, acciò essa ammetta un integrale particolare della forma

$$A_x=\int F(m+cos.\varphi)\,cos.x\varphi\,d\varphi$$

integrando tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$; converrà che Fm soddisfaccia qualunque sia x alla Equazione (R)

$$(R)\ldots\ldots(P+1)\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}}+Q\frac{d^{x+1}Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\frac{d^x Fm}{dm^x}=0.$$

Per dedurre il valore di Fm, incominceremo dal ridurla più semplice, dividendola per $P+1$, e fatto $\frac{Q}{P+1}=H$, $\frac{R}{P+1}=K$,

$\frac{1}{P+1} = L$, la nostra Equazione (R) prenderà la forma

$$\frac{d^{x+2}\,Fm}{d\,m^{x+2}} + H\,\frac{d^{x+1}\,Fm}{d\,m^{x+1}} + \left\{ K - L\;x^2 \right\} \frac{d^x\,Fm}{d\,m^x} = 0$$

Questa Equazione deve aver luogo qualunque numero intero, e positivo sia x; se dunque varieremo x in $x+1$, avremo la Equazione

$$\frac{d^{x+3}\,Fm}{d\,m^{x-3}} + H\,\frac{d^{x+2}\,Fm}{d\,m^{x+2}} + \left\{ K - L\,(x+1)^2 \right\} \frac{d^{x+1}\,Fm}{d\,m^{x+1}} = 0$$

Ma differenziandola rapporto ad m avremo ancora

$$\frac{d^{x+3}\,Fm}{dm^{x+3}} + H\,\frac{d^{x+2}\,Fm}{d\,m^{x+2}} + \left\{ \frac{dH}{dm} + K - L\,x^2 \right\} \frac{d^{x+1}\,Fm}{d\,m^{x+1}}$$

$$+ \left\{ \frac{dK}{dm} - x^2\,\frac{dL}{dm} \right\} \frac{d^x\,Fm}{d\,m^x} = 0$$

E sottraendo l'una dall'altra, otterremo

$$\frac{d^{x+1}\,Fm}{d\,m^{x+1}} - \frac{\left\{ x^2\,\frac{dL}{dm} - \frac{dK}{d\,m} \right\}}{\frac{dH}{d\,m} + (2x+1)L}\,\frac{d^x\,Fm}{dm^x} = 0$$

E quindi

$$\frac{d^x\,Fm}{d\,m^x} = C\,e^{\int \frac{x^2\,\frac{dL}{dm} - \frac{dK}{dm}}{\frac{dH}{dm} + (2x+1)L}\,dm}$$

Da questa formula otterremo integrando il valore di Fm con $x+1$ contanti arbitrarie, le quali se sarà possibile in modo determinare che $\mathrm{F}\,m$ indipendentemente da x sodisfaccia alla Equazione

$$(\mathrm{P}+1)\,\frac{d^{x+2}\,\mathrm{F}m}{d\,m^{x+2}}+\mathrm{Q}\,\frac{d^{x+1}\,\mathrm{F}m}{d\,m^{x+1}}+(\mathrm{R}-x^2)\,\frac{d^{x}\,\mathrm{F}m}{d\,m^{x}}=0$$

avremo allora

$$\mathrm{A}_x=\int \mathrm{F}(m+\cos.\varphi)\,d\varphi\cdot\cos.\,x\,\varphi$$

che soddifarà alla Equazione

$$\mathrm{P}\,\frac{d^2\,\mathrm{A}_x}{d\,m^2}+\mathrm{Q}\,\frac{d\,\mathrm{A}_x}{d\,m}+(\mathrm{R}-x^2)\,\mathrm{A}_x=0$$

purchè l'integrale sia preso tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$.

LXX.

Abbiamo osservato (LXVIII) che se nella Equazione a differenze parziali

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)+\mathrm{Q}\left(\frac{dz}{dm}\right)+\mathrm{R}\,z=0$$

si sostituirà in luogo di z la serie

$$z=\mathrm{A}+\mathrm{A}_1\cos.\varphi+\mathrm{A}_2\cos.2\varphi+\mathrm{A}_3\cos.3\varphi+\ldots+\mathrm{A}_x\cos.x\varphi+\&c.$$

otterremo, sodisfacendovi indipendentemente dai coseni degli archi moltiplici la Equazione differenziale

$$\mathrm{P}\frac{d^2\mathrm{A}_x}{dm^2}+\mathrm{Q}\,\frac{d\mathrm{A}_x}{dm}+(\mathrm{R}-x^2)\,\mathrm{A}_x=0$$

la quale determinerà il termine generale A_x della serie che esprime il valore di z. Questo valore essendo determinato da una Equazione lineare del secondo ordine, sarà generalmente della forma $A_x = c_x\,\delta_x + c'_x . \gamma_x$, ove c_x, c'_x sono costanti arbitrarie dipendenti da x, e δ_x, γ_x sono funzioni di m, ed x. Sostituendo questo valore di A_x nella serie

$$z = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos. 2\varphi + A_3 \cos. 3\varphi + \&c.$$

noi avremo un' integrale della Equazione a differenze parziali

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) + P\left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dm}\right) + Rz = 0$$

con una infinità di costanti arbitrarie.

LXXI.

Ma per giudicare della generalità di questa soluzione, riprendiamo a considerare la Equazione

$$P\frac{d^2 A_x}{dm^2} + Q\frac{dA_x}{dm} + (R - x^2)A_x = 0$$

Facciamovi $A_x = q_x . p^x$, ove sia q_x funzione di m, ed x, e p funzione solamente di m. Noi avremo

$$\frac{dA_x}{dm} = p^x\frac{dq_x}{dm} + xp^{x-1}q_x\frac{dp}{dm}$$

$$\frac{d^2 A_x}{dm^2} = p^x\frac{d^2 q_x}{dm^2} + 2xp^{x-1}\frac{dp}{dm}.\frac{dq_x}{dm} + x(x-1)p^{x-2}.q_x.\frac{dp^2}{dm^2}$$
$$+ xp^{x-1}q_x.\frac{d^2 p}{dm^2}$$

Sostituendo quindi nella nostra Equazione, avremo la trasformata

$$p^x.P\frac{d^2q_x}{dm^2}+\left(2xp^{x-1}\frac{dp}{dm}.P+Q\ p^x\right)\frac{dq_x}{dm}+P.x^2.p^{x-2}.q_x\frac{dp^2}{dm^2}+(R-x^2)p^x.q_x$$

$$+xq_x\left\{Qp^{x-1}\frac{dp}{dm}-Pp^{x-2}\frac{dp^2}{dm^2}+Pp^{x-1}\frac{d^2p}{dm^2}=o\right\}$$

Facciamo per sodisfarvi

$$Pp\frac{d^2q}{dm^2}+\left(2x\frac{dp}{dm}.P+Qp\right)\frac{dq}{dm}+\left\{Px^2\frac{dp^2}{dm^2}+(R-x^2)p^2\right\}q=o$$

$$Qp\frac{dp}{dm}-P\frac{dp^2}{dm^2}+Pp\frac{d^2p}{dm^2}=o$$

Supponghiamo adesso che da questa seconda Equazione si abbiano due valori particolari di p, che chiameremo u, s, e dalla prima si siano parimente ottenuti due valori particolari di q_x, che suppongo h_x, k_x; egli è chiaro che avendosi $A_x = q_x p^x$, sarà il valore completo di A_x

$$A_x = c_x h_x . u^x + c'_x . k_x . s^x$$

essendo c_x, c'_x due costanti arbitrarie. Sostituendo questo valore nella serie

$$z = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + A_3 \cos.3\varphi + \&c.$$

noi avremo

$$z = c_0.h_0 + c_1 h_1.u.\cos.\varphi + c_2 h_2 u^2.\cos.2\varphi + c_3.h_3.u^3\cos.3\varphi + \&c.$$

$$+ c'_0 k_0 + c'_1 k_1.s\cos\varphi + c'_2.k_2 s^2.\cos.2\varphi + c'_3.k_3.s^3.\cos.3\varphi + \&c.$$

Espressione che soddisfarà alla Equazione a differenze parziali

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) + P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dm}\right) + R\ z = c$$

LXXII.

Consideriamo adesso la serie

$$E = c_0 h_0 + c_1 h_1 . u . \cos.\varphi + c_2 h_2 . u^2 . \cos. 2\varphi + c_3 h_3 u^3 . \cos. 3\varphi + \&c.$$

svolgendo i coseni degli archi moltiplici per le potenze dell' arco, ed ordinando il resultato per le potenze di φ, avremo

$$E = c_0 . h_0 + c_1 . h_1 . u + c_2 h_2 . u^2 + c_3 h_3 u^3 + \&c.$$

$$- \frac{\varphi^2}{2} \left\{ c_1 h_1 u + 2^2 . c_2 h_2 . u^2 + 3^2 . c_3 h_3 u^3 + \&c. \right\}$$

$$\frac{+\varphi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left\{ c_1 h_1 u + 2^4 . c_2 . h_2 . u^2 + 3^4 . c_3 h_3 . u^3 + \&c. \right\}$$

$$- \&c.$$

Supponghiamo ora che con qualsivoglia metodo siasi trovata la somma Σ_u della serie

$$\Sigma_u = c_0 h_0 + c_1 h_1 u + c_2 . h_2 . u^2 + c_3 h_3 u^3 + \&c.$$

noi avremo anche

$$c_1 h_1 u + 2^2 c_2 h_2 u^2 + 3^2 c_3 h_3 u^3 + \&c. = \frac{u d u d \Sigma_u}{d u^2}$$

$$c_1 h_1 u + 2^4 c_2 h_2 u^2 + 3^4 c_3 h_3 u^3 + \&c. = \frac{u d u d u d u d \Sigma_u}{d u^4}$$

&c.

Sostituendo questi valori nella espressione di E ordinata per le potenze di φ, avremo

$$E = \Sigma_u - \frac{\varphi^2}{2} \frac{u d u d \Sigma_u}{d u^2} + \frac{\varphi^4}{2 \cdot 3 . 4} \frac{u d u d u d u d \Sigma_u}{d u^4} - \&c.$$

Se adesso prenderemo a considerare l' altra serie

$$E' = c'_0 k_0 + c'_1 k_1 . s . \cos. \phi + c'_2 k_2 s_2 \cos. 2 \phi + \&c.$$

noi potremo effettuarvi le stesse trasformazioni. E facilmente si vedrà che facendo

$$\Psi_s = c'_0 k_0 + c'_1 k_1 . s + c'_2 k_2 s^2 + c'_3 k_3 s^3 + \ldots$$

noi avremo

$$E' = \Psi_s - \frac{\phi^2}{2} \frac{sdsd}{ds_2} \Psi_s + \frac{\phi^4}{2.3.4} \frac{sdsdsdsd}{ds^4} \Psi_s - \&c.$$

Abbiamo veduto che alla Equazione a differenze parziali

$$\left(\frac{d^2 z}{d\phi^2}\right) + P \left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) + Q \left(\frac{dz}{dm}\right) + R z = 0$$

si sodisfà mediante il valore di z

$$z = c_0 h_0 + c_1 h_1 u . \cos. \phi + c_2 h_2 . u^2 \cos. 2 \phi + \&c.$$

$$+ c'_0 k_0 + c'_1 k_1 s . \cos. \phi + c'_2 k_2 . s^2 \cos. 2 \phi + \&c.$$

ossia mediante il valore

$$z = E + E'$$

Quindi sostituendo per E, ed E' le espressioni trovate, si avrà

$$z = \Sigma_u - \frac{\phi^2}{2} \frac{udud}{du^2} \Sigma_u + \frac{\phi^4}{2.3.4} \frac{udududud}{du^4} \Sigma_u - \&c.$$

$$+ \Psi_s - \frac{\phi^2}{2} \frac{sdsd}{ds^2} \Psi_s + \frac{\phi^4}{2.3.4} \frac{sdsdsdsd}{ds_4} \Psi_s - \&c.$$

LXXIII.

Tutto pertanto consisterà nel ritrovare i valori di Σ_u, e di Ψ_s, ossia nel sommare generalmente una serie della forma

$$c_0 h_0 + c_1 h_1 u + c_2 h_2 u^2 + c_3 h_3 u^3 + \&c.$$

nella qual ricerca il Teorema di Parseval che abbiamo precedentemente dimostrato, e generalizzato può spesso esserci utilissimo. Resulta infatti la nostra serie dalla somma dei prodotti dei coefficienti di y nelle due serie

$$c_0 + c_1 u y + c_2 u^2 y^2 + c_3 u^3 y^3 + c_4 u^4 y^4 + \&c.$$

$$h_0 + h_1 y + h_2 y^2 + h_3 y^3 + h_4 y^4 + \ldots$$

La prima di esse, a cagione delle infinite arbitrarie rappresenta un'arbitraria funzione di $p\,y$, che chiameremo $F\,p\,y$; ed ottenuta la somma della seconda serie, la quale sarà una funzione determinata di m, ed y, è chiaro che nella espressione della quantità

$$\Sigma_u = c_0 h_0 + c_1 h_1 u + c_2 h_2 u^2 + \&c.$$

sempre sarà compresa una funzione arbitraria di u. Lo stesso deve dirsi per la funzione Ψ_s

LXXIV.

Riprendiamo attualmente la espressione di z precedentemente trovata

$$z = \Sigma_u - \frac{\phi^2}{2} \frac{udud}{du^2} \Sigma_u + \frac{\phi^4}{2.3.4} \frac{udududud}{du^4} \Sigma_u \;\&c.$$

$$+ \Psi_s - \frac{\phi^2}{2} \frac{sdsd}{ds^2} \Psi_s + \frac{\phi^4}{2.3.4} \frac{sdsdsdsd}{ds^4} \Psi_s \;-\&c.$$

noi abbiamo veduto, artic. (LIV) che posto $u = e^y$, si ha sempre

$$\frac{ududu\ldots}{du^n} d\,\Sigma_u = \frac{d^n}{dy^n}\,\Sigma_e^y$$

Quindi la prima linea del valore di z potrà mettersi sotto la forma

$$\Sigma_e^y - \frac{\varphi^2}{2}\,\frac{d^2\,\Sigma_e^y}{dy^2} + \frac{\varphi^4}{2.3.4}\,\frac{d^4\,\Sigma_e^y}{dy^4} - \&c.$$

cioè facendo $\Sigma_e^y = P_y$

$$P_y - \frac{\varphi^2}{2}\,\frac{d^2\,P_y}{dy^2} + \frac{\varphi^4}{2.3.4}\,\frac{d^4\,P_y}{dy^4} - \&c.$$

serie che rappresenta lo sviluppo della funzione

$$\frac{1}{2}\left\{P_{y+\varphi\sqrt{-1}} + P_{y-\varphi\sqrt{1}}\right\}$$

Ma essendo $u = e^y$, la prima linea del valore di z sarà rappresentata dalla formula

$$\frac{1}{2}\left\{P_{log.\,u+\varphi\sqrt{-1}} + P_{log.\,u-\varphi\sqrt{-1}}\right\}$$

E similmente per la seconda linea troveremo

$$\frac{1}{2}\left\{Q_{log.\,s+\varphi\sqrt{-1}} + Q_{log.\,s-\varphi\sqrt{-1}}\right\}$$

essendo Q in modo determinato, che facendo $s = e^y$, si abbia $\Psi_e^y = Q_y$

In tal maniera il valore di z potrà più concisamente essere espresso dalla formula

$$z = P_{log.u+\varphi\sqrt{-1}} + P_{log.u-\varphi\sqrt{-1}} + Q_{log.s+\varphi\sqrt{-1}} + Q_{log.s-\varphi\sqrt{-1}}.$$

LXXV.

Ma per ottenere sotto forma finita l'integrale della Equazione

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) + \mathrm{P}\left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) + \mathrm{Q}\left(\frac{d z}{dm}\right) + \mathrm{R}\, z = 0$$

si può anche tenere una più semplice strada. Abbiamo infatti veduto (LXXVII) che ad essa soddisfà la serie

$$z = c_0 h_0 + c_1 h_1 . u . \cos. \varphi + c_2 h_2 . u^2 . \cos. 2\,\varphi + \&c.$$

$$+ c'_0 k_0 + c'_1 k_1 . s . \cos. \varphi + c'_2 . k_2 . s^2 . \cos. 2\,\varphi + \&c.$$

Supponghiamo ora di aver trovata la somma R_y della serie

$$\mathrm{R}_y = c_0 h_0 + c_1 h_1 . u . y + c_2 h_2 u^2 . y^2 + c_3 h_3 u^3 . y_3 + \ldots.$$

Egli è chiaro che avremo

$$\tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{R}_{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + \mathrm{R}_{e^{-\varphi\sqrt{-1}}}\right\} = c_0 h_0 + c_1 h_1 u . \cos\,\varphi + c_2 h_2 u^2 \cos. 2\,\varphi + \&c.$$

e similmente se chiameremo $\mathrm{R'}_y$ la somma della serie

$$\mathrm{R'}_y = c'_0 k_0 + c'_1 k_1 \cdot s \cdot y + c'_2 \cdot k_2 \cdot s^2 \cdot y^2 + \&c.$$

noi avremo anche

$$\tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{R'}_{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + \mathrm{R'}_{e^{-\varphi\sqrt{-1}}}\right\} = c'_0 k_0 + c'_1 k_1 s \cdot \cos. \varphi + c'_2 k_2 \cdot s^2 \cos. 2\varphi + \&c.$$

Quindi sostituendo questi valori nella precedente espressione di z, sarà

$$z = \tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{R}_{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + \mathrm{R}_{e^{-\varphi\sqrt{-1}}} + \mathrm{R'}_{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + \mathrm{R'}_{e^{-\varphi\sqrt{-1}}}\right\}$$

LXXVI.

La funzione R_y rappresenta la somma della serie

$$c_0 h_0 + c_1 h_1 \, u \, y + c_2 h_2 \, u^2 \, y^2 + \&c.$$

ed a motivo delle infinite arbitrarie c_0, c_1, c_2, &c. nella di lei espressione può supporsi (LXXIII) complicata una funzione arbitraria di $u y$. Chiamandola $F \cdot u y$, nelle quantità $\frac{R}{e^{\phi\sqrt{-1}}}$, $\frac{R}{e^{-\phi\sqrt{-1}}}$, verranno comprese le funzioni arbitrarie $F u e^{\phi\sqrt{-1}}$, $F u e^{-\phi\sqrt{-1}}$; ed è chiaro che sostituendo nella proposta Equazione a differenze parziali in luogo di z la quantità

$$z = \frac{1}{2} \left\{ \frac{R}{e^{\phi\sqrt{-1}}} + \frac{R}{e^{-\phi\sqrt{-1}}} \right\}$$

tra le funzioni arbitrarie $F u e^{\phi\sqrt{-1}}$, $F u e^{-\phi\sqrt{-1}}$ non si potrà eseguire nessuna riduzione a motivo del multiplo differente di u. Quindi quelle funzioni potranno tutte supporsi differenti, ed alla proposta sodisfaranno parzialmente le quantità $\frac{R}{e^{\phi\sqrt{-1}}}$, $\frac{R}{e^{-\phi\sqrt{-1}}}$, $\frac{R'}{e^{\phi\sqrt{-1}}}$, $\frac{R'}{e^{-\phi\sqrt{-1}}}$.

Quindi apparisce che il completo valore di z si otterrà ancora nel caso in cui non potremo conoscere la quantità R'_y, cioè la somma della serie

$$c'_0 \, k_0 + c'_1 \, k_1 \, s \cdot y + c'_2 \, k_2 \, s^2 \cdot y^2 + \&c.$$

poichè dalla cognizione del solo valore di R_y si ha la maniera di introdurre nella espressione di z due funzioni arbitrarie, quali convengono acciò sia completo l' integrale di una Equazione a parziali differenze del secondo ordine.

LXXVII.

Per vedere una applicazione di questo metodo, prendiamo a considerare la Equazione

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) + (m^2 - 1)\left(\frac{d\ z}{d\ m^2}\right) + m\,(1-2\,n)\left(\frac{d\,z}{d\,m}\right) + n^2\,z = 0$$

ove sia n un numero intiero e positivo. Facendovi

$$z = A + A_1\,cos.\,\varphi + A_2\,cos.\,2\,\varphi + A_3\,cos.\,3\,\varphi + \&c.$$

troveremo A_x determinato dalla Equazione

$$\frac{d^2 A_x}{dm^2} + \frac{m(2n-1)}{1-m^2}\,\frac{d\,A_x}{d\,m} - \frac{(n^2-x^2)}{1-m^2}\,A_x = 0$$

dalla quale avremo per A_x un integrale particolare così espresse (LXV)

$$A_x = (m^2-1)^{n+\frac{1}{2}}\,c_x\cdot\frac{d^{n+1}\,p^x}{d\,m^{n+1}}$$

essendo $p = m - \sqrt{(m^2-1)}$. Sostituendo questo valore nella serie proposta, si avrà

$$z = (m^2-1)^{n+\frac{1}{2}}\,\frac{d^{n+1}}{dm^{n+1}}\left\{c_1\,p\ cos.\,\varphi + c_2\,p^2\,cos.\,2\,\varphi + c_3\,p^3\,cos.\,3\,\varphi + \&c.\right\}$$

La serie compresa tra le parentesi equivale a $Fp\,e^{\varphi\sqrt{-1}} + Fpe^{-\varphi\sqrt{-1}}$, essendo F una funzione arbitraria; quindi sostituendo, avremo

$$z = (m^2 - 1)^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^{n+1}}{d\, m^{n+1}} \left\{ \mathrm{F} p e^{\phi\sqrt{-1}} + \mathrm{F} p e^{-\phi\sqrt{-1}} \right\}$$

ove, come sappiamo (LXXVI), possiamo supporre diverse le due funzioni arbitrarie. Essendo inoltre $p = m - \sqrt{(m^2-1)} = \frac{1}{m + \sqrt{(m^2-1)}}$, sarà ancora, mutando le caratteristiche delle funzioni,

$$z = (m^2-1)^{n+\frac{1}{2}} \, d^{n+1} \left\{ \frac{\mathrm{F}(m+\sqrt{(m^2-1)})\, e^{\phi\sqrt{-1}} + \Psi\,(m-\sqrt{(m^2-1)})\, e^{\phi\sqrt{-1}}}{d\, m^{n+1}} \right\}$$

E questo rappresenterà il completo integrale della proposta. L'applicazione di questo metodo non essendo di veruna difficoltà non ci tratterremo sopra altri esempj.

LXXVIII.

In questo caso abbiamo ottenuto il valore di z sotto la forma d'infinita serie, e sotto la forma finita, ma ordinariamente le serie che si otterranno non saranno suscettibili così facilmente di essere sommate, e converrà contentarsi della forma d'infinita serie. Prendiamo per esempio a considerar la Equazione

$$\left(\frac{d^2 z}{d\phi^2}\right) + a\left(\frac{d\, z}{d\phi}\right) + b\left(\frac{dz}{d\, m}\right) + c\, z = 0$$

ove siano a, b, c quantità costanti. Facciamovi per ridurla più semplice

$$z = e^{h\phi + \mathrm{K}m} \cdot p$$

essendo h, K quantità costanti; ed avremo sostituendo, e dividendo per $e^{h\varphi + Km}$ la trasformata

$$\left(\frac{d^2 p}{d\varphi}\right) + \left\{ 2h + a \right\} \left(\frac{dp}{d\varphi}\right) + b\left(\frac{dp}{dm}\right) + \left\{ h^2 + ah + bK + c \right\} p = 0$$

Ponghiamo adesso

$$2h + a = 0$$

$$h^2 + ah + bK + c = 0$$

ed avremo

$$h = -\frac{a}{2}$$

$$K = \frac{a^2 - 4c}{b}$$

E la nostra trasformata si ridurrà alla semplicissima forma

$$\left(\frac{d^2 p}{d\varphi^2}\right) + b\left(\frac{dp}{dm}\right) = 0$$

Dalla quale dovrà determinarsi il valore di p

Facciamovi per tanto

$$p = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + A_3 \cos.3\varphi + \ldots + A_x \cos.x\varphi + \ldots$$

e sostituendo, immediatamente si vedrà che il termine generale A_x dovrà sodisfare alla Equazione

$$b\frac{dA_x}{dm} - x^2 A_x = 0$$

Onde ritrarremo

$$A_x = q_x e^{x^2 \frac{m}{b}}$$

ove q_x è l'arbitraria introdotta dalla Integrazione, che per maggior generalità si suppone funzione di x. Sostituendo questo valore nella serie che esprime il valore di p si avrà

$$p = q + q_1 e^{\frac{m}{b}} . cos. \phi + q_2 e^{2\frac{m}{b}} . cos. 2\phi + q_3 e^{3\frac{m}{b}} . cos. 3\phi + \ldots\ldots$$

Dove le infinite arbitrarie $q, q_1, q_2 \ldots\ldots$ mostrano la presenza di una funzione arbitraria, che può mettersi in evidenza come precedentemente abbiamo fatto (LXXVIII). Ordinando in fatti per le potenze di ϕ, si avrà

$$p = q + q_1 e^{\frac{m}{b}} + q_2 e^{2\frac{m}{b}} + q_3 e^{3\frac{m}{b}} + \ldots$$

$$- \frac{\phi^2}{2} \left\{ q_1 e^{\frac{m}{b}} + 2^2 q_2 e^{2\frac{m}{b}} + 3^2 q_3 e^{3\frac{m}{b}} + \ldots \right\}$$

$$+ \frac{\phi^4}{2.3.4.} \left\{ q_1 e^{\frac{m}{b}} + 2^4 . q_2 e^{2\frac{m}{b}} + 3^4 . q_3 e^{3\frac{m}{b}} + \ldots \right\}$$

$$- \&c.$$

e facendo

$$q + q_1 e^{\frac{m}{b}} + q_2 e^{2\frac{m}{b}} + q_3 e^{3\frac{m}{b}} + \ldots = F . e^{\frac{m}{b}}$$

ove F rappresenta una funzione arbitraria, si avrà sostituendo, e facendo $u = e^{\frac{m}{b}}$

$$p = Fu - \frac{\phi^2}{2} \frac{u\, d F u}{d u} + \frac{\phi^4}{2.3.4.} \frac{u\, d u\, d F u}{d u^2} - \&c.$$

Ma avendosi

$$z = e^{-\frac{a}{2}\varphi + \frac{a^2-4c}{b}m} \cdot p$$

sarà ancora

$$z = e^{-\frac{a}{2}\varphi + \frac{a^2-4c}{b}.m} \left\{ Fu - \frac{\varphi^2}{2}\frac{udFu}{du} + \frac{\varphi^4}{2.3.4.}\frac{ududFu}{du} - \&c. \right\}$$

che rapprenterà l' integrale della Equazione

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) + a\left(\frac{dz}{d\varphi}\right) + b\left(\frac{dz}{dm}\right) + cz = 0$$

con una funzione arbitraria di u, ossia di $e^{\frac{m}{b}}$

LXXIX.

La Equazione a parziali Differenze di cui ci siamo occupati è stata per lungo tempo dai Geometri creduta non suscettibile di ammettere nel suo Integrale veruna funzione arbitraria; ed invalse tale opinione finchè il sommo Sig. Paoli ne dimostrò la erroneità con dottissima analisi, prevalendosi di un ramo di calcolo Integrale di cui fù il primo promotore, quello cioè delle Equazioni che comprendono le differenze parziali finite, ed infinitesime di una funzione; Equazioni delle quali abbiamo già veduto qualche esempio (XIX), ed ottenne l' Integrale della proposta con due funzioni arbitrarie. Posteriormente essendosi i Geometri rivolti con maggiore attenzione a considerare il numero delle funzioni arbitrarie assolutamente irreducibili che nell' Integrale delle Equazioni a Differenze Parziali sono comprese, hanno riconosciuto che senza limitare la generalità dell' Integrale potevano le due funzioni arbitrarie dal Sig. Paoli ottenute nell' Integrale della Equazione

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) + a\left(\frac{dz}{d\varphi}\right) + b\left(\frac{dz}{dm}\right) + cz = 0$$

ridursi ad una sola, e questa osservazione che il Sig. Poisson fece il primo, è stata per differenti strade confermata dal Sig. Laplace, e dal Sig. Paoli stesso.

LXXX.

Scegliendo per integrare la proposta in luogo di una serie ordinata per i coseni una serie che proceda per i seni, si otterrà appunto una nuova espressione per z la quale aggiunta alla precedente offre una più general soluzione di quella ottenuta. Riprendiamo la Equazione

$$\left(\frac{d^2p}{d\varphi^2}\right) + b\left(\frac{dp}{dm}\right) = 0$$

dalla quale abbiamo veduto (LXXVIII) che la proposta dipende. In luogo di p facciamovi

$$p = M_1\,sen.\,\varphi + M_2\,sen.\,2\varphi + M_3\,sen.\,3\varphi + \ldots + M_x\,sen.\,x\varphi + \ldots$$

e troveremo per determinare M_x la stessa Equazione che sopra abbiamo incontrata (LXXVIII), cioè

$$\frac{b\,d\,M_x}{d\,m} - x^2\,M_x = 0$$

onde

$$M_x = c_x\,e^{x^2 \frac{m}{b}}$$

quindi sostituendo, si avrà

$$p = c_1\,e^{\frac{m}{b}} \,.\, sen\,\varphi + c_2\,e^{2^2 \frac{m}{b}} \,.\, sen.\,2\,\varphi + c_3\,e^{3^2 \frac{m}{b}} \cdot sen.\,3\,\varphi + \ldots$$

cioè ordinando per le potenze di φ, e facendo, come sopra (LXXVIII) $u = e^{\frac{m}{b}}$, si avrà anche

$$\begin{aligned} p = \varphi & \left\{ c_1 u + 2\,c_2 u^{2^2} + 3\,c_3\,u^{3^2} + 4\,c_4 u^{4^2} + \ldots \right\} \\ \frac{-\varphi^3}{2\,.\,3} & \left\{ c_1\,u + 2^3\,c_2\,u^{2^2} + 3^3\,c_3\,u^{3^2} + 4^3\,.\,c_4\,u^{4^2} + \ldots \right\} \\ \frac{+\ \varphi^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} & \left\{ c_1\,u + 2^5\,c_2\,u^{2^2} + 3^5\,c_3\,u^{3^2} + 4^5\,c_4\,u^{4^2} + \ldots \right\} \\ & -\ \&c.\ldots \end{aligned}$$

onde facendo

$$c_1\,u + 2\,c_2\,u^{2^2} + 3\,c_3\,u^{3^2} + 4\,c_4\,u^{4^2} + \ldots = \Psi\,u$$

si otterrà

$$c_1\,u + 2^3\,c_2\,u^{2^2} + 3^3\,c_3\,u^{3^2} + \ldots = \frac{u\,d\,\Psi\,u}{d\,u^2}$$

$$c_1\,u + 2^5\,c_2\,u^{2^2} + 3^5\,c_3\,u^{3^2} + \ldots = \frac{u\,d\,u\,d\,\Psi\,u}{d\,u^2}$$

&c.

e sostituendo

$$p = \phi \Psi u - \frac{\phi^3}{2.3} \frac{u d \Psi u}{du} + \frac{\phi^5}{2.3.4.5} \frac{u d u d \Psi u}{d u^2} - \&c.$$

ma abbiamo

$$z = e^{\frac{-a}{2} \phi + \frac{a^2 - 4c}{b} . m} . p$$

quindi sarà anche

$$z = e^{-\frac{a}{2} \phi + \frac{a^2 - 4c}{b} . m} \left\{ \phi . \Psi u - \frac{\phi^3}{2.3} \frac{u d \Psi u}{d u} + \frac{\phi^5}{2.3.4.5} \frac{u d u d \Psi u}{d u^2} - \&c. \right.$$

Se aggiungeremo questo valore di z a quello precedentemente ottenuto (LXXVIII) si avrà per l'integrale della Equazione

$$\left(\frac{d^2 z}{d \phi^2}\right) + a \left(\frac{d z}{dm}\right) + b \left(\frac{d z}{dm}\right) + c z = 0$$

la più generale espressione

$$z = e^{-\frac{a}{2} \phi + \frac{a^2 - 4c}{b} m} \left\{ F u + \phi \Psi u - \frac{\phi^2}{2} u \frac{d F u}{d u} - \frac{\phi^3}{2.3} \frac{u d \Psi u}{d u} + \&c. \right\}$$

ove sebbene nella quantità compresa tra le parentesi appariscano due funzioni arbitrarie, pure essa non dipende che da una sola arbitraria funzione, come può vedersi dimostrato nella memoria sulle soluzioni particolari del Sig. Poisson, e nella opera sulle Probabilità del Sig. Laplace.

LXXXI.

E' molto osservabile che lo stesso metodo con cui può integrarsi la Equazione

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) + a\left(\frac{dz}{dm}\right) + bz = c$$

nel caso di a, b, c costanti, può ancora applicarsi al caso in cui più generalmente siano a, b, c funzioni comunque di m. Facciamo in fatti nella nostra Equazione

$$z = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + A_3 \cos.3\varphi + \ldots + A_x \cos.x\varphi + \ldots$$

ed avremo sostituendo

$$\frac{a\,dA}{dm} + \frac{a\,dA_1}{dm}.\cos.\varphi + \frac{a\,dA_2}{dm}\cos.2\varphi + \frac{a\,dA_3}{dm}\cos.3\varphi + \ldots + \frac{a\,dA_x}{dm}.\cos.x\varphi + \ldots$$

$$+ bA + bA_1 \cos.\varphi + bA_2 \cos.2\varphi + bA_3 \cos.3\varphi + \ldots + bA_x.\cos.x\varphi + \ldots$$

$$- A_1 \cos.\varphi - 2^2 A_2 \cos.2\varphi - 3^2 A_3 \cos.3\varphi - \&c - x^2 A_x \cos.x\varphi - \&c.$$

$$- c = 0.$$

Supponghiamo ora primieramente per sodisfarvi

$$a\,\frac{dA}{dm} + bA - c = 0$$

onde avrassi

$$A = e^{-\int \frac{b}{a} dm} \left\{ B + \int e^{\int \frac{b}{a}.dm} \frac{c}{a} dm \right\}$$

ove R è una arbitraria. Sia inoltre

$$\frac{a\,dA_x}{dm}+(b-x^2)A_x=0.$$

e sarà integrando

$$A_x=B_x\,e^{x^2\int\frac{dm}{a}-\int\frac{b}{a}.dm}$$

con le quali determinazioni la trasformata ottenuta sarà completatamente sodisfatta.

Sostituendo questi valori nella serie assegnata per z, si avrà

$$z=e^{-\int\frac{b}{a}dm}\left\{B+B_1\,e^{\int\frac{dm}{a}}\cos.\varphi+B_2\,e^{2^2\int\frac{dm}{a}}\cos.2\varphi+B_3\,e^{3^2\int\frac{dm}{a}}\cos.3\varphi+\ldots\right\}$$

$$+e^{-\int\frac{b}{a}.dm}\int e^{\int\frac{b}{a}.dm}\frac{c}{a}\,dm$$

Possiamo operare come precedentemente sulla quantità compresa tra le parentesi affine di porre in evidenza la funzione arbitraria che dalle infinite indeterminate B, B_1, B_2, viene annunziata; e facendo $e^{\int\frac{dm}{a}}=u$, si troverà facilmente eseguendo le operazioni indicate (LXXVIII)

$$z=e^{-\int\frac{b}{a}.dm}\left\{F\,u-\frac{\varphi^2}{2}\,\frac{u\,dFu}{du}+\frac{\varphi^4}{2\cdot3\cdot4}\,\frac{u\,du\,dFu}{du^2}-\&c.\right\}$$

$$+e^{-\int\frac{b}{a}.dm}\int e^{\int\frac{b}{a}.dm}\frac{c}{a}\,dm$$

LXXXII.

Se l' ultimo termine c della Equazione

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) + a\left(\frac{dz}{dm}\right) + b\,z = c$$

fosse funzione non solo di m ma ancora di m, e φ, la integrazione della proposta non ammetterebbe nessuna nuova difficoltà. Incominceremo ad applicare alla funzione c i metodi precedenti affine di svolgerla in serie per i coseni degli archi moltiplici, e sarà generalmente (XXIX)

$$c = \frac{1}{\pi}\int c\,d\varphi + \frac{2}{\pi}.\cos.\varphi\int c\,d\varphi.\cos.\varphi + \frac{2}{\pi}\cos.2\varphi\int c\,d\varphi\cos.2\varphi + .$$

integrando tra i limiti $\varphi = o$, $\varphi = \pi$. E facendo per semplicità

$$p_x = \frac{2}{\pi}\int c\,d\varphi.\cos.x\varphi$$

avremo

$$c = \frac{1}{2}p_0 + p_1\cos.\varphi + p_2\cos.2\varphi + \ldots\ldots + p_x\cos.x\varphi + \ldots\ldots$$

Facciamo inoltre

$$z = A + A_1\cos.\varphi + A_2\cos.2\varphi + A_3\cos.4\varphi + \ldots + A_x\cos.x\varphi + \ldots\ldots$$

ed ambe questi valori si sostituiscano nella Equazione proposta

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) + a\left(\frac{dz}{dm}\right) + b\,z = c$$

ed avremo

$$a\frac{dA}{dm}+a\frac{dA_1}{dm}.\cos.\varphi+a\frac{dA_2}{dm}.\cos.2\varphi+a\frac{dA_3}{dm}.\cos.3\varphi+\ldots+a\frac{dA_x}{dm}.\cos.x\varphi+\ldots$$

$$-A_1\cos.\varphi-2^2A_2\cos.2\varphi-3^2A_3\cos.3\varphi\ldots\ldots-x^2A_x\cos.x\varphi\ldots\ldots$$

$$+bA+bA_1\cos.\varphi\quad+bA_2\cos.2\varphi\quad+bA_3\cos.3\varphi+\ldots\ldots+bA_x\cos.x\varphi+\ldots$$

$$-\tfrac{1}{2}p_0-p_1\cos.\varphi-p_2\cos.2\varphi-p_3\cos.3\varphi\ldots\ldots-p_x\cos.x\varphi-\&c.$$

per sodisfarvi facciamo

$$a\frac{dA}{dm}+bA-\tfrac{1}{2}p_0=0$$

onde si trarrà

$$A=e^{-\int\frac{b}{a}.dm}\left\{B+\tfrac{1}{2}\int e^{\int\frac{b}{a}dm}\frac{p_0}{a}.dm\right\}$$

Si faccia inoltre, qualunque sia x

$$a\frac{dA_x}{dm}+(b-x^2)A_x-p_x=0$$

cioè integrando

$$A_x=e^{x^2\int\frac{dm}{a}-\int\frac{b}{a}.dm}\left\{B_x+\int e^{\int\frac{b}{a}dm+x^2\int\frac{dm}{a}}\frac{p_x}{a}.dm\right\}$$

ossia, facendo per semplicità

$$e^{\int\frac{dm}{a}}=u$$

$$\int e^{\int \frac{b}{a} dm - x^2 \int \frac{dm}{a}} \frac{px}{a} . dm = \delta_x$$

avremo più semplicemente

$$A = e^{-\int \frac{b}{a} . dm} \left\{ B + \tfrac{1}{2} \delta_0 \right\}$$

$$A_x = u^{x^2} e^{-\int \frac{b}{a} . dm} \left\{ B_x + \delta_x \right\}$$

Sostituendo questi valori nella serie

$$z = A + A_1 \cos. \varphi + A_2 \cos. 2 \varphi + \ldots\ldots + A_x \cos. x \varphi + \ldots.$$

facilmente vedremo che per semplicità facendo

$$u^{x^2} e^{-\int \frac{b}{a} . dm} \delta_x = \lambda_x$$

Il resultato della sostituzione potrà mettersi sotto la forma

$$z = \frac{1}{2} \lambda_0 + \lambda_1 \cos. \varphi + \lambda_2 \cos. 2 \varphi + \lambda_3 \cos. 3 \varphi + \&c.$$

$$+ e^{-\int \frac{b}{a} . dm} \left\{ B + B_1 u . \cos. \varphi + B_2 . u^{2^2} \cos. 2\varphi + B_3 u^{3^2} \cos. 3 \varphi + \&c. \right.$$

La quantità compresa tra le parentesi è suscettibile delle riduzioni stesse che abbiamo praticate in casi analoghi (LXXVIII); ed ordinandola per le potenze di φ, e ponendo in evidenza la funzione arbitraria che le infinite indeterminate B, B_1, B_2 &c. ci annunziano, si otterrà facilmente

$$z = \frac{1}{2}\lambda_0 + \lambda_1 \cos.\varphi + \lambda_2 \cos. 2\varphi + \lambda_3 \cos. 3\varphi + \&c.$$

$$+ e^{-\int \frac{b}{a} \cdot dm} \left\{ F u - \frac{\varphi^2}{2} \frac{u\, d F u}{d u} + \frac{\varphi^4}{2.3.4.} \frac{u\, d u\, d F u}{d u^2} - \&c. \right\}$$

ove F u è una funzione arbitraria

Così in questo caso, come nei precedenti due, se si fosse scelta una serie ordinata per i seni, noi saremmo pervenuti ad un differente valore di z che aggiunto al precedente ci offrirebbe le considerazioni stesse che ci presenta il caso più semplice che nell' articolo (LXXX) abbiamo trattato.

LXXXIII.

Questo metodo può ancora con successo applicarsi alle Equazioni della forma stessa di quelle finora trattate, ma ad un maggior numero di variabili. Prendiamo infatti a considerare la Equazione a 4 variabili

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) = a\left(\frac{dz}{dm}\right) + b\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

ove siano a, b quantità costanti. Facciamovi al solito

$$z = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos. 2\varphi + A_3 \cos. 3\varphi + \ldots + A_x \cos. x\varphi + \&c.$$

essendo A, A_1, A_2 &c. funzioni di m, e t. Sostituendo nella proposta, e sodisfacendovi indipendentemento dai differenti coseni, troveremo che il termine generale A_x della nostra serie è rappresentato dalla Equazione

$$a\left(\frac{dA_x}{dm}\right) + b\left(\frac{dA_x}{dt}\right) + x^2 A_x = 0$$

cioè integrando

$$A_x = e^{-\frac{x^2}{b}t} F_x(bm - at)$$

ove F_x dinota una funzione arbitraria. Quindi avremo sostituendo

$$z = F + e^{-\frac{1}{b}t} F_{,} cos.\varphi + e^{-\frac{2^2}{b}t} F_{,,} cos.\, 2\varphi + e^{-\frac{3^2}{b}} F_{,,,} cos.3\varphi + \&c.$$

ove F, $F_{,}$, $F_{,,}$ &c. sono tutte funzioni arbitrarie di $bm - at$ tra di loro differenti, ed infinite di numero.

LXXXIV.

La Equazione più generale

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) = a\left(\frac{dz}{dm}\right) + b\left(\frac{dz}{dt}\right) + c\,z$$

ove a, b, c siano funzioni di m, e t, ammette un integrale della specie stessa di quello che per la Equazione precedentemente sviluppata abbiamo ottenuto. Facciamo infatti

$$z = A + A_1 cos.\varphi + A_2 cos.\, 2\,\varphi, + A_3 cos.\, 3\,\varphi + \ldots + A_x\, cos.\, x\,\varphi + \&c.$$

essendo A, A_1, A_2 &c. funzioni di m, e t. Sostituendo nella proposta questo valore di z, e sodisfacendovi indipendentemente dai differenti coseni, troveremo che il termine generale A_x dipende dalla Equazione

$$a\left(\frac{dA_x}{dm}\right) + b\left(\frac{dA_x}{dt}\right) + (c + x^2)A_x = 0$$

Per integrarla, dovremo, secondo il conosciuto metodo dovuto al

Sig. Lagrange, formare le due Equazioni

$$b\,dm - a\,dt = 0$$

$$b\,d\,A_x - (x^2 + b)\,dt = 0$$

La prima Equazione a due variabili m, t supponghiamo che integrata dia

$$h = R$$

ove h è l'arbitraria introdotta dalla Integrazione. Se mediante questa Equazione elimineremo m dall'altra

$$b\,d\,A_x - (x^2 + b)\,dt$$

si otterrà immediatamente

$$A_x = e^{x^2 \int \frac{dt}{b} + \int \frac{c}{b}\,dt}\; k$$

ove k è l'arbitraria, e dove nelle quantità b, c è stato in luogo di m sostituito il suo valore preso dalla Equazione

$$h = R$$

L'integrale della Equazione

$$a\left(\frac{dA_x}{dm}\right) + b\left(\frac{dA_x}{dt}\right) + (c + x^2)\,A_x = 0$$

è, come sappiamo

$$k = F\,.\,h$$

essendo F una funzione arbitraria. Eliminando dunque k, ed h mediante le Equazioni ottenute, si avrà

$$A_x = e^{x^2 \int \frac{dt}{b} + \int \frac{c}{b}\,dt}\,.\,FR$$

purchè gli integrali $\int \frac{dt}{b}$, $\int \frac{c}{b}\, dt$ siano presi nella ipotesi di R costante, secondo l'espressivo modo di dire che il Sig. Paoli ha posto in uso il primo.

Si sostituisca adesso questo valore di A_x nella serie

$$z = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + \ldots + A_x \cos.x\varphi + \ldots$$

ed avvertendo che questo valore di z sodisfà per le determinazioni precedenti alla Equazione

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) = a\left(\frac{dz}{dm}\right) + b\left(\frac{dz}{dt}\right) + c\,z$$

indipendentemente dai diversi coséni, potremo per maggior generalità supporre che di termine in termine sia differente la composizione della funzione arbitraria F.R. In tal maniera si avrà, fatta la sostituzione

$$z = e^{\int \frac{c}{b} dt} \left\{ FR + e^{\int \frac{dt}{b}}.F_1R.\cos.\varphi + e^{2\int \frac{dt}{b}}.F_{2}R.\cos.2\varphi + \ldots \right\}$$

LXXXV.

Se vi fosse ancora un ultimo termine e funzione di m, t, φ in modo che dovesse integrarsi la Equazione

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) = a\left(\frac{dz}{dm}\right) + b\left(\frac{dz}{dt}\right) + c\,z + e$$

il metodo stesso precedentemente posto in uso ci sarà assai utile. S'incomincerà da svolgere la quantità e in una serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici di φ, e facendo per semplicità

$$p_x = \frac{2}{\pi}\int d\varphi.e.\cos.x\varphi$$

ove l'integrale sia preso tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, noi avremo

$$e=\tfrac{1}{2}p_0+p_1\cos.\phi+p_2\cos.2\phi+p_3\cos.3\phi+..+p_x\cos.x\phi+\ldots$$

Supponghiamo ora

$$z=\mathrm{A}+\mathrm{A}_1\cos.\phi+\mathrm{A}_2\cos.2\phi+\mathrm{A}_3\cos.3\phi+..-+\mathrm{A}_x\cos.x\phi+\ldots$$

e questo valore di z, e quello di e si sostituiscano nella proposta

$$\left(\frac{d^2z}{d\phi^2}\right)=a\left(\frac{dz}{dm}\right)+b\left(\frac{dz}{dt}\right)+cz+e$$

alla quale se sodisfaremo con le sosti tuzioni indicate indip endentemente dai differenti coseni, si troverà che il termine generale A_x dipende dalla Equazione

$$\left(\frac{d\mathrm{A}_x}{dt}\right)+a\left(\frac{d\mathrm{A}_x}{dm}\right)+(x^2+c)\mathrm{A}_x+p_x=0$$

dalla quale dedurremo le solite due Equazioni

$$b\,dm-a\,dt=0$$

$$b\,d\mathrm{A}_x-(x^2+c)\mathrm{A}_x\,dt-p_x\,dt$$

e se $h=\mathrm{R}$ rappresenterà l'integrale della prima Equazione, ove h è arbitraria, ed R funzione di m, e t, noi avremo dalla secon da

$$\mathrm{A}_x=\mathrm{F}\cdot\mathrm{R}\cdot e^{x^2\int\frac{dt}{b}+\int\frac{c}{b}dt}+e^{x^2\int\frac{dt}{b}+\int\frac{c}{b}dt}\int e^{-x^2\int\frac{dt}{b}-\int\frac{c}{b}dt}\cdot\frac{1}{b}\cdot p_x\,.dt$$

purchè tutti gli integrali si prendano nella supposizione di R costante. Facendo per maggior semplicità

$$q_x=e^{x^2\int\frac{dt}{b}}\int e^{-x^2\int\frac{dt}{b}-\int\frac{c}{b}dt}\frac{1}{b}\,.\,p_x\,.dt$$

sarà anche

$$A_x = F.R.e^{x^2\int\frac{dt}{b} + \int\frac{c}{b}\,dt} + e^{\int\frac{c}{b}\,dt}.q_x$$

Il primo termine A lo troveremo espresso dalla formula

$$A = e^{\int\frac{c}{b}\,dt}\,\tfrac{1}{2}q_0 + e^{\int\frac{c}{b}\,dt}.F R$$

e sostituendo questi valori nella serie

$$z = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos 2\varphi + .. + A_x \cos.x\varphi + \ldots$$

si troverà, previe le solite avvertenze sulla diversità che impune
mente possiamo ammettere tra le funzioni arbitrarie comprese nell
quantità A, A_1, A_2, ..., che il valore di z sarà dato dalla serie

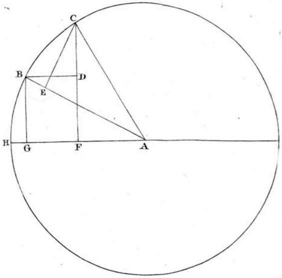
$$z = e^{\int\frac{c}{b}dt}\left\{\tfrac{1}{2}q_0 + q_1 \cos.\varphi + q_2 \cos.2\varphi + q_3 \cos.3\varphi + \&c.\right.$$

$$+ e^{\int\frac{c}{b}dt}\left\{F R + e^{\int\frac{dt}{b}}\cos.\varphi\cdot F_1 R + e^{2\int\frac{dt}{b}}\cos.2\varphi.F_{,,}R + \&\right.$$

La quale espressione sodisfarà alla proposta

Molto facilmente si potrebbero moltiplicare gli esempi di qu
sto metodo, ed estenderne l'applicazione ad Equazioni di ordi
più elevati, ma la di lui semplicità, ed uniformità ci dispensa
un ulteriore sviluppo.

FINE.


C
B
D
E
H
G
F
A