RICERCHE

SOPRA LE SERIE

E SOPRA

LA INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI A DIFFERENZE PARZIALI

DI GIULIANO FRULLANI

P. P. DELLE MATEMATICHE SUPERIORI

NELL'I. E R. UNIVERSITÀ DI PISA.

FIRENZE

Nella Stamperia Magheri da Badia

1816.

C

Al Chiarissimo Signore

PIETRO PAOLI

P. Emerito delle Matematiche Superiori

nell' I., e R. Università di Pisa

R. Consultore e Soprintendente degli Studj del Gran-Ducato,

Cav. dell' Insigne Ordine di S GIUSEPPE,

Uno dei Quaranta della Società Italiana delle Scienze, Socio Corrispondente

dell' Istituto di Francia ec. ec.

Nell' offrirle, Sig. Soprintendente pregiatissimo, questo mio lavoro, più che ad ogni altro motivo, intendo di servire all' alta stima che Ella m' inspira. Il tessere l' Elogio degli Uomini sommi è tale impresa che solamente appartiene a chi gli eguaglia; lontano dal credermi in questa classe nè posso, nè debbo dunque annoverare le cagioni che per Lei mi animano a quel sentimento, di cui i coetanei troveranno la giustificazione nelle di Lei Opere, ed i Posteri in queste medesime, e nella Storia delle Scienze.

Ma forse, parlando di Posterità, mi lusingo di troppa vita per queste mie tenui fatiche; e se pure, perchè fregiate del di Lei Nome illustre, esse vi giungeranno, la mia gloria maggiore sarà l' avere ammirato un Uomo che tanto onora l' Italia, ed averne data pubblica la testimonianza.

Ho intanto l' onore di dichiararmi pieno di rispetto, e di venerazione

Di VS. Illustriss.

Firenze 12 Novembre 1816.

Devotiss. Obbligatiss. Servitore

G. Frullani.

I.

La Teorìa delle Serie, considerata come un semplice mezzo di approssimazione si estende indefinitamente a tutte le parti dell' analisi allorchè vogliono applicarsi ai casi particolari le formule generali, e sotto questo punto di vista le Serie non debbono considerarsi che come trasformate di espressioni per verità più semplici, perchè composte di un limitato numero di termini, ma che non si prestano con facilità al Calcolo numerico. In questo caso la soluzione di qualsivoglia problema naturalmente si compone di due parti, avendo l' una per oggetto l'indagine del rapporto finito tra le variabili e le costanti, e l'altra il modo di esprimere una di queste quantità per le altre. Ma bene spesso succede che l' imperfezione dei metodi analitici non ci concede di giungere al primo scopo, ed in queste circostanze la Teorìa delle Serie è di un uso ancor più apprezzabile; E siccome questa Dottrina ha data l' origine al Calcolo differenziale, ed integrale, così ancora supplisce al loro difetto, ed offre il più semplice mezzo per la soluzione dei problemi che dipendono dalla Integrazione delle Equazioni differenziali, porgendo anche il modo di ottenere se non esatti resultati, almeno tali che possa l' errore ad arbitrio diminuirsi, e talvolta perfino ristringersi entro limiti determinati. Questi vantaggi tanto più sono valutabili, in quanto che, come abbiamo osservato, conviene quasi sempre adottar la forma delle Serie anche quando si giunge ad espressioni finite, la ricerca delle quali pertanto nella pratica soluzione di un problema può sovente considerarsi come superflua.

II.

Ma considerata la Dottrina delle Serie indipendentemente dal suo pratico uso nella soluzione dei problemi che dipendono dalla Integrazione delle Equazioni differenziali, allora essa non è di una utilità così manifesta. Ed infatti il primo, e più importante oggetto dell'analisi quello si è di mettere in evidenza i rapporti che distinguono le varie funzioni, e la loro classazione, in modo che apparisca come le une possono alle altre ridursi, e quali siano le essenzialmente irreducibili, in una parola, assegnandone la indole distintiva. Simile intento non potrebbe, almeno nell'attuale stato dell'analisi, ottenersi, allorchè queste funzioni siano espresse in serie infinite, nelle quali sovente una stessa forma generale può rappresentare funzioni di natura differentissima, e dove forme diverse spesso si riportano a funzioni congeneri.

III.

Quindi è senza dubbio che i primi Geometri dei nostri tempi tanto hanno consacrato del loro studio alla sommazione delle serie, alle quali, dopo averle fatte supplire alla insufficienza del Calcolo Integrale, hanno applicato questo Calcolo stesso per ridurle ad espressione finita. Nell'immenso numero delle ricerche che rendono il nome di Euler sacro ai Cultori dell'analisi, quelle sopra l'esposto oggetto sono le più moltiplici, e le più variate, e dove ha particolarmente sviluppate le prodigiose risorse del suo genio. Ora guidato dall'Induzione, ora afferrando un non osservato rapporto tra le varie trasformazioni che può subire una serie, spesso è pervenuto a singolarissimi resultati. Molte volte introducendo in una serie proposta una nuova variabile, sopra questa operando o per mezzo delle differenziazioni, o delle Integrazioni, ed ottenuta la somma della nuova serie, si riportava alla proposta determinando convenientemente la variabile ausiliaria nella formula ottenuta; Quindi sovente un Integrale definito gli offrì la somma di complicatissime serie.

IV.

La introduzione di questa nuova variabile per assegnare l'espressione finita di cui una serie proposta è suscettibile può riguardarsi come un mezzo sommamente fecondo, e luminoso quando da una Equazione differenziale si tratta di esprimere in modo finito una variabile per l'altra. Sono infatti nelle Equazioni differenziali talvolta le variabili in modo tra di loro connesse, che il ridurle alla separazione trascende le forze dell'analisi, e ciò molte volte dipenderà dall'essere anche nella Equazione finita in modo le variabili tra di loro avviluppate che l'una non possa in modo finito esprimersi per l'altra. Quindi sovente le differenziazioni complicando i mutui rapporti delle variabili, rendendoli più generali, maggiori saranno le difficoltà della separazione nella Equazione differenziale. Spesso avviene per altro che l'introduzione di una nuova variabile, la quale debba sparire dal resultato al fine del Calcolo, in sè comprendendo la relazione trascendente delle variabili primitive, presenti tra queste un rapporto finito. Pertanto tutte le volte che la nuova variabile dovrà subire delle integrazioni nella formula ove è implicata, per toglierla dal resultato finale converrà determinarla dietro stabilite condizioni; il che ricondurrà il Problema alla ricerca di un' Integrale definito.

V.

Dietro simili vedute, la ricerca dell'Integrale delle formule differenziali tra limiti determinati, è divenuta un oggetto di specialissima applicazione per i Geometri dei nostri giorni. Ai numerosi resultati che sopra tale oggetto l'illustre Euler ottenne, debbono aggiungersene una infinità di altri, che i sommi Geometri Laplace, Lagrange, Legendre ec. hanno per differenti strade ottenuti; ed al primo di questi in particolar maniera deve questo ramo di analisi, in quanto chè, conformatosi alle vedute di Euler, ne ha esteso l'uso alla Integrazione delle Equazioni differenziali ordinarie, ed ha ridotto a dipendere dai principj stessi delle classi estesissime di Equazioni a differenze parziali. Possono vedersi le ricerche di questi Illustri promotori dell' analisi nelle Collezioni Accademiche, e nella grand' opera del Celebre Sig. Lacroix sul Calcolo Integrale, ove si trovano con bell' ordine disposte.

VI.

Questo immenso corpo di resultati, ai quali sono stati i Geometri condotti da metodi differentissimi, e particolari, sembra precorrere nell' analisi dei nuovi, e generali metodi, mediante i quali, classate, e riconosciute le vere trascendenti irreducibili, e per conseguenza introdotti dei nuovi segni, tutto quello che su tale oggetto si è presentato ai primi Geometri dei nostri tempi, discenda come caso speciale da una universal Teoria. Percorrendo la Storia dell' analisi, tutte le volte che le forze riunite dei Geometri hanno preparata qualche rivoluzione nella Scienza, s' incontra un fenomeno simile a quello che attualmente si osserva. Prima della invenzione dei nuovi calcoli, Wallis, Barrow, Huyghens, e molti altri, traendo particolare soccorso o dalla imperfetta Dottrina delle Serie, o dalle Geometriche considerazioni, furono condotti a molti analitici resultati, dei quali per altro non seppero riconoscere nè la filiazione, nè la comune sorgente, che la scoperta dell' analisi infinitesimale pose in evidenza. La dotta guerra che tra i Geometri si accese in occasione del celebre problema degli Isoperimetri, fù origine di una moltitudine di scoperte, e di singolari metodi, che primieramente da Euler ridotti ad una stessa, ed uniforme analisi, furono in progresso richiamati dal sommo Lagrange a dipendere dal solo calcolo differenziale. La stessa Teorìa delle Equazioni Algebriche prima di Lagrange, e Ruffini composta di diversi, ed in apparenza non dipendenti metodi, offre ai nostri giorni delle simili considerazioni; siccome anche lo sviluppo delle così dette funzioni Polinomiali che il Sig Paoli ha mostrato dipendere dal solo Calcolo differenziale, e la Teorìa delle funzioni generatrici del Sig. Laplace, che tanto felicemente ha dimostrata l'origine delle Celebri relazioni dei differenziali con le potenze positive, e degli integrali con le potenze negative, relazioni delle quali alcune fino da Leibnitz erano state osservate, e che da Condorcet, e Lagrange in maggior numero scoperte, pure non erano da verun principio generale dedotte. Questi fatti, ed altri molti che la Storia delle Scienze ci presenta dimostrano che lo spirito umano lentamente avanzandosi alla formazione dei metodi generali, solamente vi giunge allorchè essendo al possesso della soluzione di molti casi particolari, ravvisa in questi tutti quel punto di contatto che gli unisce, seguendo le tracce di quella occulta Catena di cui non sono essi che altrettanti anelli; ed a misura che più casi saranno insieme congiunti, e ridotti a dipendere da un minor numero di principj, più facilmente si presterà all'evidenza quella sconosciuta Legge dalla quale tutti dipendono.

VII.

Abbiamo superiormente indicato il felice uso che Euler, ed altri Illustri Geometri han fatto degli Integrali definiti per la Integrazione delle Equazioni differenziali. Un Integrale definito rappresenta sempre la somma di una serie, poichè è noto che sempre può integrarsi per serie una formula differenziale anche indefinitamente. In questo caso la Teorìa delle serie molte volte adempirà al duplice oggetto di determinar l'Integrale di cui la proposta Equazione è suscettibile, e quindi con le approssimazioni valutarlo. Allorchè la ricerca di questo Integrale definito dipenderà dalle funzioni circolari, il Problema sarà meno complicato. La proprietà dei seni, e dei coseni di riprodursi con le differenziazioni, e le Integrazioni successive offre spesso il modo di determinare la natura delle Serie, e quella dell'Integrale definito. Così se una data Equazione differenziale avesse per Integrale $y = \int F(x, \varphi)\, d\varphi$, ove la integrazione dovesse farsi tra i limiti $\varphi = o$, $\varphi = \pi$, ove π denota la mezza periferìa, è chiaro che se potremo sviluppare la funzione $F(x, \varphi)$ in modo che sia

$$F(x,\varphi) = A + A_1 \cos. \varphi + A_2 \cos. 2\varphi + \ldots$$

ove A, A_1, A_2, ec. sono altrettante funzioni di x, noi avremo

$$y = \int F(x,\varphi)\, d\varphi = A\pi.$$

VIII.

Noi ci proponghiamo in queste ricerche di sviluppare le proprietà di questo genere di funzioni con maggiore estensione di quello che non è stato fatto fin'ora. Una rigorosa dimostrazione ci condurrà a molti dei singolari resultati che per induzione hanno i Geometri riconosciuti sopra le serie che dipendono dalle trascendenti circolari; ed assoggettando queste ricerche ad un metodo uniforme, ne vedremo discendere dei corollarj assai interessanti sopra gli Integrali definiti, e sopra la Teorìa generale delle serie. Vedremo dipenderne l'Integrazione di alcune Equazioni differenziali la cui evoluzione sembra oltremodo difficile ad ottenersi per altra via, e le Equazioni a differenze parziali ci offriranno dei casi molto generali che coi metodi stessi potranno completamente risolversi.

IX.

Tutte le trasformazioni che possono subire le funzioni Circolari si appoggiano sopra a quel Teorema mediante il quale dati i seni, ed i coseni di due archi s'insegna a trovare i seni, ed i coseni della loro somma. La soluzione che di questo Problema si dà negli Elementi di Trigonometrìa oltre ad esser complicata, presenta molte difficoltà ove vogliasi applicar la costruzione che esige a degli archi, la cui somma oltrepassi il Quadrante. Per supplire al difetto di questa Dimostrazione il cel. Sig. Legendre si è prevalso di un ingegnoso metodo, mediante il quale, provata la legittimità delle formule nel primo Quadrante, le ha estese al successivo, e così di mano in mano a tutta la periferìa circolare. Ma così componendo la completa Dimostrazione di questo utilissimo Teorema Trigonometrico di due parti egualmente complicate molto si perde dal lato della semplicità, ed eleganza; Onde prima d' inoltrarci nelle Ricerche che formano il nostro oggetto, non sarà inutile quì l' indicarne una nuova, che non presenta alcuna delle difficoltà che nella conosciuta s' incontrano.

Sia l' Arco $HB = x$; l' Arco $BC = y$; unendo il punto B col centro A del Circolo per mezzo del Raggio BA, ed abbassando la Perpendicolare BG sul Raggio HA, e le perpendicolari CE, CF sui raggi AB, AH, noi avremo

$BG = sen.\, x$, $GA = cos.\, x$; $CE = sen.\, y$, $AE = cos.\, y$; $CF = sen.\, (x+y)$; $FA = cos.\, (x+y)$.

Ciò posto condotta la perpendicolare BD sopra la retta CF, facendo $BD = u$, $CD = z$, sarà

$$sen.\, (x+y) = sen.\, x + z$$
$$cos.\, (x+y) = cos.\, x - u.$$

Quadrando ambedue queste Equazioni, ed aggiungendole si avrà

$$(1) \ldots\ldots 2\,(z\; sen.\, x - u\; cos.\, x) + n^2 + z^2 = 0$$

Ma conducendo la corda BC, abbiamo $(BC)^2 = (sen.\, y)^2 + (1 - cos.\, y)^2 = 2(1 - cos.\, y)$; ed anche $(BC)^2 = z^2 + u^2$; Quindi avremo ancora

$$(2) \ldots\ldots 2\,(1 - cos.\, y) = z^2 + u^2$$

Le Equazioni (1), (2) ci daranno eliminando i Valori di z, e di u. Ma per evitare di risolvere una complicata Equazione di secondo grado, vediamo di semplicizzare le due Equazioni otteuute affinchè la di loro soluzione più comodamente riesca. Nella Equazione (1) si sostituisca in luogo di $z^2 + u^2$ il suo valore preso dalla (2), ed otterremo

$$z\; sen.\, x - u\; cos.\, x + 1 = cos.\, y$$

Elevando al quadrato, si otterrà

$$z^2\,(sen.\, x)^2 + u^2 (cos.\, x)^2 + 2\,(z\, sen.\, x - u\, cos.\, x) - 2\, u\, z.\, sen.\, x.\, cos.\, x = -\,(sen.\, y)^2$$

e ponendo per z *sen.* $x - u$ *cos.* x il suo valore $-(z^2+u^2)$, sarà
$$z^2(1-(sen.\,x)^2)+u^2(1-(cos.\,x)^2)+2\,u\,z.\,sen.\,x.\,cos.\,x=(sen.\,y)^2.$$
cioè estraendo la radice quadrata
$$z\ cos.\ x+u\ sen.\ x=\pm\ sen.\ y$$
Questa Equazione, combinata con l'altra
$$z\ sen.\ x-u\ cos.\ x+1=cos.\ y$$
ci condurrà speditamente al resultato. Moltiplicando la prima per *sen.* x, e la seconda per *cos.* x, e sottraendo, avremo
$$u=\pm\ sen.\ x.\ sen.\ y-cos.\ y\ cos.\ x+cos.\ x$$
ed alternando i moltiplicatori ed aggiungendo, sarà anche
$$z=sen.\ x.\ cos.\ y\pm sen.\ y.\ cos.\ x-sen.\ x$$
onde sostituendo nelle Equazioni
$$sen.\ (x+y)=sen.\ x+z$$
$$cos.\ (x+y)=cos.\ x-u$$
avremo immediatamente
$$cos.\ (x+y)=cos.\ x.\ cos.\ y\mp sen.\ x.\ sen.\ y$$
$$sen.\ (x+y)=sen.\ x.\ cos.\ y\pm sen.\ y.\ cos.\ x.$$
E per determinare quale dei due segni convenga preferire, basta che in questa seconda formula suppongasi $x=o$; il che ci darà
$$sen.\ y=\pm\ sen.\ y$$
onde il segno superiore dovrà preferirsi.

Questa Eliminazione potrebbe effettuarsi anche in altre maniere. Nella Equazione
$$z\ sen.\ x-u\ cos\ x+1=cos.\ y$$
si pongano in luogo di u, e di z i loro valori presi dalle Equazioni
$$cos.\ (x+y)=cos.\ x-u$$
$$sen.\ (x+y)=sen.\ x+z$$

ed otterremo

$$sen.\,x\ sen\,(x+y) + cos.\,x.\ cos.\,(x+y) = cos.\,y$$

Senza punto alterare i rapporti possiamo in questa formulà variare x in y, e vice-versa, il che darà

$$sen.\,y\ sen.\,(x+y) + cos.\,y.\ cos.(x+y) = cos.\,x$$

Eliminando il $sen.\,(x+y)$ tra queste due Equazioni, avremo

$$cos.(x+y) = \frac{sen.\,x.\ cos.\,x - sen.\,y.\ cos.\,x}{sen.\,x.\ cos.\,y - cos.\,x.\ sen.\,y}$$

Il Numeratore di questa frazione si moltiplichi nel primo termine per $(cos.\,y)^2 + (sen.\,y)^2$; e nel secondo per $(cos.\,x)^2 + (sen.\,x)^2$, il che non altererà la Equazione, ed avremo

$$cos.\,(x+y) = \frac{sen.\,x.\ cos.\,x.\ (cos.\,y)^2 + sen.\,x.\ cos.\,x.\ (cos.\,y)^2 - sen.\,y.\ cos.\,y.\ (cos.\,x)^2 - sen.\,y.\ cos.\,y.\ (sen.\,x)^2}{sen.\,x.\ cos.\,y. - cos.\,x.\ sen.\,y}$$

$$= \frac{(sen.\,x.\ cos.\,y. - cos.\,x.\ sen.\,y)\,(cos.\,x.\ cos.\,y - sen.\,x.\ sen.\,y)}{sen.\,x.\ cos.\,y - cos.\,x.\ sen.\,y.}$$

ciò è

$$cos.\,(x+y) = cos.\,x.\ cos.\,y - sen.\,x.\ sen.\,y$$

Se poi si eliminerà il $cos.\,(x+y)$, avremo nello stesso modo la espressione del seno.

La costruzione Geometrica che esige questa Dimostrazione si applica indistintamente a tutti i punti della Periferia, come è facile verificare.

X.

Le formule ottenute, combinate con la generale Equazione del circolo basteranno per sviluppare tutte le proprietà delle funzioni di questa curva, e la ricerca dei differenziali dei seni, e coseni, non esigerà nessun nuovo principio, quando siano esposte le proprietà generali delle serie che procedono per le potenze intere, e positive di una variabile, proprietà che bisogna sempre conoscere, quando si tratta di applicare il calcolo differenziale a qualsivoglia quantità dipendente dalle curve. Chiamato φ un arco circolare qualunque, facilmente trovasi $\frac{d.sen.\varphi}{d\varphi}=a.cos.\varphi$; $\frac{d.cos.\varphi}{d\varphi}=-a.sen.\varphi$, ove a è una costante di sconosciuto valore, per determinare il quale convien ricorrere a quelle generali proprietà. Egli è facile infatti il convincersi che il ragionamento impiegato per la prima volta dall'Illustre Lagrange per determinar questa costante, non solo è indipendente da qualsivoglia particolar proprietà del circolo, ma si applica ad ogni curva, ed è indispensabile per la ricerca delle formule della rettificazione, quadratura ec. Pertanto queste formule generali, che implicano quei principj, dovranno condurci alle stesse determinazioni, come facilmente possiamo dimostrare. Sia s l'arco di una curva qualunque riferita alle coordinate ortogonali x, y; abbiamo come è noto

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

ossia

$$1=\sqrt{\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}}$$

nel caso del circolo, si ha $y=sen.\,s$, $x=cos.\,s$; ed abbiamo anche

$$\frac{d.\,sen.\,s}{ds}=a\,cos.\,s$$

$$\frac{d.\,cos.\,s}{ds}=-a\,sen.\,s$$

ove a è indeterminata. Sostituendo questi valori nella formula

$$1=\sqrt{\left(\frac{d.\,sen.\,s}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\,cos.\,s}{ds}\right)^2}$$

avremo

$$1=\sqrt{a^2(sen.\,s^2+cos.\,s^2)}=\pm a$$

Quindi $a = \pm 1$. Sarà pertanto

$$\frac{d.\ sen.\ s}{d\, s} = \pm \cos.\ s$$

$$\frac{d.\ \cos.\ s}{d\, s} = \mp sen.\ s$$

ove nella prima Equazione converrà nel doppio segno preferire il superiore, poichè il seno aumenta al crescere dell'arco: e nella seconda l'inferiore, diminuendo il coseno all'aumentarsi dell'arco.

Ma se per la ricerca dei differenziali delle funzioni circolari supporremo conosciute le generali formule della rettificazione delle curve, potremo ancora risparmiarci la determinazione della costante a, ed ottenere per mezzo della sola equazione del circolo il valore di quei differenziali stessi. Riprendiamo infatti la formula (A)

$$(A) \ldots\ldots \frac{d\, s}{d\, y} = \sqrt{1 + \frac{d\, x^2}{d\, y^2}}$$

se sarà $y = sen.\ s$, $x = \cos.\ s$, avremo la Equazione

$$(sen.\ s)^2 + (\cos.\ s)^2 = 1$$

e quindi differenziando

$$\frac{d\, x}{d\, y} = \frac{d.\ \cos.\ s}{d.\ sen.\ s} = -\frac{sen.\ s}{\cos.\ s}$$

sostituendo ora nella formula (A) troveremo

$$\frac{d\ \ s}{d.\ sen.\ s} = \pm \frac{1}{\cos.\ s}$$

Ed i principj del calcolo delle funzioni ci daranno subito

$$\frac{d.\ sen.\ s}{d\, s} = \pm \cos.\ s$$

e similmente operando

$$\frac{d.\,cos.\,s}{d\,s} = \pm\, sen.\,s$$

ove determineremo come sopra quali segni debbano adottarsi.

Vedesi dunque che la determinazione di questi differenziali manifestamente dipende dalla general Teorìa delle curve, alla quale, per non anticipar nulla, dovrebbe negli Elementi rimettersene la ricerca.

XI.

Premesse queste considerazioni, prenderemo ad esaminare alcune delle meno complicate formule dipendenti dalle funzioni circolari, onde ridurle in serie della forma

$$A + A_1\, cos.\,\varphi + A_2\, cos.\,2\,\varphi + \ldots\ldots$$

forma di cui abbiamo dimostrata (VII) l'utilità per il semplicissimo mezzo che offre per la ricerca degli integrali definiti delle formule differenziali tra i limiti $\varphi = o$, $\varphi = \pi$. E per incominciare dalle cose più semplici, sia proposto di svolgere $log.\,(1 + cos.\,\varphi)$ in una serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici di φ. Noi avremo

$$log.\,(1 + cos.\,\varphi) = cos.\,\varphi - \frac{(cos.\,\varphi)^2}{2} + \frac{(cos.\,\varphi)^3}{3} - \&c.$$

E ponendo in luogo di $(cos.\,\varphi)^2$, $(cos.\,\varphi)^3$ &c. i loro valori espressi per $cos.\,\varphi$, $cos.\,2\,\varphi$ &c. otterremo una serie di questa forma

$$log.\,(1 + cos.\,\varphi) = -A + A_1\, cos.\,\varphi - A_2\, cos.\,2\,\varphi + A_3\, cos.\,3\,\varphi - \&c.$$

Per trovare i coefficienti A, A_1, A_2 differenziamo rapporto a φ, ed avremo

$$\frac{-\,sen.\,\varphi}{1 + cos.\,\varphi} = -A_1\, sen.\,\varphi + 2\,A_2\, sen.\,2\,\varphi - 3\,A_3\, sen.\,3\,\varphi + \&c.$$

Moltiplicando per $1 + cos.\,\varphi$, e riducendo i prodotti dei seni, e coseni in seni di archi multipli, avremo per determinare i coefficienti A, A_1, A_2 &c. la serie seguente di Equazioni

$$(a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{array}{l} 2\,A_2 - 2\,A_1 + 2 = o \\ 3\,A_3 - 4\,A_2 + A_1 = o \\ 4\,A_4 - 6\,A_3 + 2\,A_2 = o \\ 5\,A_5 - 8\,A_4 + 3\,A_3 = o \\ \&c. \end{array}$$

Tutte queste sono rappresentate ad eccezione della prima dalla Equazione

$$x\,A_x - 2\,(x-1)\,A_{x-1} + (x-2)\,A_{x-2} = o$$

La quale non incomincia per conseguenza ad aver luogo che per i valori di $x = 3$. L' Integrale della precedente Equazione a differenze finite si trova essere

$$A_x = \frac{c + c'x}{x}$$

essendo c, c' due costanti arbitrarie. Per determinarle, bisogna conoscere il valore di A_1, e di A_2, e basta di avere quello di A_1, poichè la prima Equazione ci darà allora quello di A_2. Se si prende la somma di tutte le Equazioni (a), è facile il vedere che svaniranno tutti i termini ad eccezione dei seguenti

$$2 - 2\,A_1 + A_1 = o$$

onde $A_1 = 2$, $A_2 = 1$. Sarà dunque $A_1 = 2 = c + c'$;........

$$A_2 = \frac{c + 2\,c'}{2} = 1\text{; e quindi } c' = o,\ c = 2\text{; e perciò } A_x = \frac{2}{x}.$$

Rimane adesso a trovarsi il valore di A; a quest' oggetto si ponga $\varphi = o$, ed avremo

$$log.\,2 = -\,A + 2\,(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \&c.) = -\,A + 2\,log.\,2.$$

E quindi $A = -\,log.\,2$; sarà pertanto

$$log.\,(1 + cos.\,\varphi) = -\,log.\,2 + \tfrac{2}{1}.\,cos.\,\varphi - \tfrac{2}{2}.\,cos.\,2\,\varphi + \tfrac{2}{3}.\,cos.\,3\,\varphi - \&c.$$

Se moltiplicheremo questa Equazione per $d\,\varphi$, avremo integrando

$$\int d\,\varphi\,.\,log.(m + cos.\,\varphi) = cost. - \varphi.\,log.\,2 + \tfrac{2}{1}.\,sen.\,\varphi - \tfrac{2}{4}\,sen.\,2\,\varphi\ \&c.$$

E quindi l'Integrale $\int d\varphi . log. (1 + cos. \varphi)$ tra i limiti $\varphi = o$, $\varphi = \pi$ sarà $- \pi \, log. \, 2$.

XII.

La determinazione delle costanti A_1, A_2, A_3, &c. potrebbe anche più semplicemente effettuarsi mediante una ulterior Differenziazione. Riprendiamo la serie

$$log. (1 + cos \varphi) = - A + A_1 cos. \varphi - A_2 cos. 2\varphi + A_3 cos. 3\varphi - \&c.$$

Differenziando replicatamente rapporto a φ, si avrà

$$\frac{-1}{1 + cos. \varphi} = - A_1 cos. \varphi + 2^2 A_2 cos. 2\varphi - 3^2 A_3 cos. 3\varphi + : \ldots$$

Moltiplicando per $1 + cos. \varphi$, e riducendo i prodotti dei coseni in coseni di archi moltiplici, avremo per determinare le quantità A_1, A_2, &c. le Equazioni

$$(b) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} A_1 = 2 \\ 2^2 A_2 - 2 A_1 = o \\ 3^2 A_3 - 2 . 2^2 A_2 + A_1 = o \\ 4^2 A_4 - 2 . 3^2 A_3 + 2^2 A_2 = o \\ \&c. \end{cases}$$

Le quali tutte, ad eccezione della prima sono rappresentate dalla Equazione

$$x^2 A_x - 2 (x - 1)^2 A_{x-1} + (x - 2)^2 A_{x-2} = o$$

che incomincia ad aver luogo per $x = 2$. Integrandola si troverà

$$A_x = \frac{c x + c'}{x^2}$$

Le prime due Equazioni (b) ci danno $A_1 = 2$, $A_2 = 1$; sarà dunque ancora

$$A_1 = c + c' = 2$$

$$A_2 = \frac{2 c + c'}{4} = 1$$

onde $c = 2$, $c' = o$, ed in conseguenza $A_x = \frac{2}{x}$. Ed il primo termine A lo determineremo come precedentemente.

XIII.

Prendiamo a considerare adesso la formula più generale $log.(1 + n\,cos.\,\varphi)$. Ponghiamo
$log.(1 + cos.\,\varphi) = - A + A_1\,cos.\,\varphi - A_2\,cos.\,2\varphi + A_3\,cos.\,3\,\varphi - \&c.$
Avremo differenziando rapporto $a\,\varphi$

$$\frac{n\,sen.\,\varphi}{1 + n\,cos.\,\varphi} = A_1 - 2\,A_2\,sen.\,2\,\varphi + 3\,A_3\,sen.\,3\,\varphi - \&c.$$

e riducendo i prodotti dei seni e coseni in seni di archi moltiplici, facilmente troveremo dopo aver moltiplicato per $1 + n.\,cos.\,\varphi$ la serie di Equazioni

$$(C)\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} 2\,n\,A_2 - 2\,A_1 + 2\,n = o \\ 3\,n\,A_3 - 4\,A_2 + n\,A_1 = o \\ 4\,n\,A_4 - 6\,A_3 + 2\,n\,A_2 = o \\ 5\,n\,A_5 - 8\,A_4 + 3\,n\,A_3 = o \\ \&c. \end{cases}$$

Le quali, ad eccezione della prima, sono generalmente espresse dall' Equazione

$$n\,x\,A_x - 2\,(x - 1)\,A_{x-1} + n\,(x - 2)\,A_{x-2} = o$$

Si troverà per l' Integrale di questa Equazione a differenze finite

$$A_x = \frac{c}{x}\,\frac{\left((1 + \sqrt{(1 - n^2)}\right)^x}{n} + \frac{c'}{x}\,\frac{\left((1 - \sqrt{(1 - n^2)}\right)^x}{n}$$

ove c, c' sono arbitrarie, per conoscer le quali, convien determinare i valori di A_1, e di A_2. Aggiungendo alla prima delle Equazioni (C) la seconda moltiplicata per la indeterminata h, la terza moltiplicata per h^2, e così in seguito, avremo

$$o = 2\,n - 2\,A_1 + n\,h\,A_1 + 2\,A_2\,(n - 2\,h + n\,h^2) + 3\,A_3\,h\,(n - 2\,h + n\,h^2)$$
$$+ 4\,A_4\,h^2\,(n - 2\,h + n\,h^2) + \ldots$$

A questa Equazione potremo sodisfare, se faremo

$$2n - 2A_1 + nhA_1 = 0$$

$$n - 2h + nh^2 = 0$$

onde si trarrà

$$h = \frac{1 \pm \sqrt{(1-n^2)}}{n}$$

$$A_1 = \frac{2n}{1 \mp \sqrt{(1-n^2)}} = 2\,\frac{(1 \pm \sqrt{(1-n^2)})}{n}$$

Quindi resulta che non può essere $n > 1$, poichè diversamente si avrebbe A_1, ed ogni coefficiente imaginario; ed ivi inoltre dovrà prendersi il segno inferiore, acciò, come deve essere, resulti $A_1 = o$, se $n = o$. Essendo noto A_1, la prima delle Equazioni (c) ci darà

$$A_2 = \frac{A_1 - n}{n} = \frac{2 - 2\sqrt{(1-n^2)} - n^2}{n^2} = \left(\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^2$$

E sostituendo i valori di A_1, e A_2 nel valore generale di A_x, si troverà $c = o$, $c' = 2$. Quindi finalmente

$$A_x = \frac{2}{x}\left(\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^x$$

Conviene adesso determinare il valore di A. Facendo $\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n}$ $= k$, avremo, posto $\phi = o$

$$\log.(1+n) = -A + 2k - \frac{2k^2}{2} + \frac{2k^3}{3} - \frac{2k^4}{4} + \ldots = -A + 2\log.(1+k)$$

Sarà dunque $A = \log.\left\{\frac{(1+k)^2}{1+n}\right\} = \log.\left\{\frac{2(1+n) - 2(1+n)\sqrt{(1-n)}}{n^2(1+n)}\right\}$

$= \log.\frac{2k}{n}$. E quindi

$$\log.(1 + n\cos.\phi) = -\log.\frac{2k}{n} + \frac{2}{1}k.\cos.\phi - \frac{2}{2}k^2\cos.2\phi + \&c.$$

Moltiplicando per $d\,\varphi$, ed integrando, sarà anche

$$\int d\varphi\,.\,log.(1+n\cos.\varphi)=cost.-\varphi\,log.\frac{2\,k}{n}+\frac{2}{1}\,k\,.\,sen.\,\varphi-\frac{2}{4}\,k^2\,sen.\,2\,\varphi+....$$

onde il valore di questo Integrale da $\varphi = o$ sino a $\varphi = \pi$ sarà $-\pi\,log.\,\dfrac{2\,k}{n}$.

XIV.

Il solo Calcolo Differenziale offre anch'esso il mezzo di ottenere la evoluzione di questa formula in un modo assai semplice, ed osservabile. Consideriamo infatti la formula $log.(m+\cos.\varphi)$ alla quale si riduce la precedente facendovi $m=\dfrac{1}{n}$, ed aggiungendovi $log.\,n$. Ponghiamo $log.(m+\cos.\varphi)=z$, ed otterremo differenziando replicatamente rapporto a φ

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right)=-\frac{1+m\cos.\varphi}{(m+\cos.\varphi)^2}\,.................(1)$$

Differenziando rapporto ad m, avremo anche

$$\left(\frac{d\,z}{d\,m}\right)=\frac{1}{m+\cos.\varphi}\,.....................(2)$$

$$\left(\frac{d^2 z}{d\,m^2}\right)=-\frac{1}{(m+\cos.\varphi)^2}\,.........(3)$$

Ed aggiungendo alla Equazione (1) la (2) moltiplicata per m, e la (3) moltiplicata per m^2-1, si troverà la Equazione

$$(D)\,........\left(\frac{d^2 z}{d\,\varphi^2}\right)+m\left(\frac{d\,z}{d\,m}\right)+(m^2-1)\left(\frac{d^2 z}{d\,m^2}\right)=o.$$

Supponghiamo adesso

$$z=log.(m+\cos.\varphi)=-A+A_1\cos.\varphi-A_2\cos.2\varphi+A_3\cos.3\varphi-\&c.......\pm A_x\cos.x\,\varphi,$$

E per determinare i Coefficienti A, A_1, A_2 &c. si sostituisca in luogo di z questa serie nella Equazione (D); supponendola soddisfatta indipendentemente da tutti i diversi coseni degli archi multipli di φ otterremo immediatamente per determinare A_x la Equazione

$$\frac{d^2 A_x}{dm^2} + \frac{m}{m^2-1}\frac{dA_x}{dm} - \frac{x^2}{m^2-1}.\, A_x = o;$$

Per aver con facilità l'Integrale di questa Equazione Differenziale, introduciamovi in luogo di m un'altra variabile q. Abbiamo, q essendo funzione di m

$$\frac{dA_x}{dm} = \frac{dA_x}{dq} . \frac{dq}{dm}$$

$$\frac{d^2 A_x}{dm^2} = \frac{d^2 A_x}{dq^2} . \frac{dq^2}{dm^2} + \frac{dA_x}{dq} . \frac{d^2 q}{dm^2}$$

onde sostituendo

$$\frac{d^2 A_x}{dq^2} . \frac{dq^2}{dm^2} + \frac{dA_x}{dq} . \left\{ \frac{d^2 q}{dm^2} + \frac{m}{m^2-1}\ \frac{dq}{dm} \right\} - \frac{x^2}{m^2-1} A_x = o$$

Facciamo per determinar q

$$\frac{d^2 q}{dm^2} + \frac{m}{m^2-1}\frac{dq}{dm} = o$$

e di questa bastandoci un integrale particolare, prenderemo $q =$ *arc. cos.* m; ossia $m =$ *cos.* q. La nostra trasformata diverrà allora

$$\frac{d^2 A_x}{dy^2} = -x^2 A_x$$

Onde si otterrà

$$A_x = c_x e^{qx\sqrt{-1}} + c'_x e^{-qx\sqrt{-1}}$$

Cioè, essendo $q =$ *Arc. cos.* m

$$A_x = c_x (m + \sqrt{(m^2-1)})^x + c'_x (m - \sqrt{(m^2-1)})^x$$

ove c_x, c'_x sono arbitrarie dependenti da x. Il primo termine A sarà dato dalla Equazione

$$\frac{d^2A}{dm^2}+\frac{m}{m^2-1}\,\frac{dA}{dm}=0$$

e troverassi

$$A=log.\left(m\pm\sqrt{(m^2-1)}\right)e'+m\,e$$

ove e', e sono arbitrarie.

Sostituendo questi valori, avremo

$$log.(m+cos.\phi)=-log.(m\pm\sqrt{m^2-1}).\,e'+me+\left[c_1(m+\sqrt{m^2-1})+c'_1(m-\sqrt{m^2-1})\right]cos\,\phi$$
$$+\left[c_2(m+\sqrt{m^2-1})^2+c'_2(m-\sqrt{m^2-1})^2\right]cos.\,2\phi+\ldots\ldots\pm\left[c_x(m+\sqrt{m^2-1})^x+c'_x(m-\sqrt{m^2-1})^x\right]cos.\,x\,\phi$$
$$\mp\ \&c.$$

Ove il segno superiore conviene ad x pari, e l' inferiore ad x dispari. Per determinare tutte le arbitrarie, ponghiamo $m=\frac{1}{n}$, ed avremo riducendo

$$log.(1+n\,cos.\phi)=-log.\left(\frac{1\pm\sqrt{1-n^2}}{n^2}\right)e'+\frac{e}{n}+\left[c_1\left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right)+c'_1\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)\right]cos.\,\phi$$
$$+\left[c_2\left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n^2}\right)^2+c'_2\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n^2}\right)^2\right]cos.\,2\phi+\ldots\ldots\pm\left[c_x\left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^x+c'_x\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^x\right]cos.\,x\,\phi$$
$$\mp\ \&c.$$

Il secondo membro di questa Equazione dovrà ridursi $=0$ se $n=0$; Ed è chiaro in primo luogo che ciò succederà per i Coefficienti di $cos.\,\phi$, $cos.\,2\phi\ldots cos.\,x\phi$. &c. se tutte le quantità c_1, c_2, c_3, ... c_x &c. saranno $=0$. Parimente dovrà essere $e=0$ per motivo della n nel denominatore. Resta la quantità $log.\left(\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n^2}\right).\,e'$ che nel caso di $n=0$ dovrà essere $=0$, ossia deve sciegliersi il doppio segno, e determinarsi la costante e' in modo che sia, quando $n=0$

$$\left(\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n^2}\right)e'=1$$

Ciò è svolgendo

$$1 = \frac{e'}{n^2} \mp \frac{e'}{n^2} \mp \frac{e'}{2} \mp \frac{e' n^2}{8} \mp \&c.$$

Sarà dunque necessario proferire il segno inferiore, e prendere $e' = 2$.

In conseguenza sarà

$$A = log.\ 2\ (m - \sqrt{m^2 - 1})$$
$$A_x = c_x\ (m - \sqrt{m^2 - 1})^x$$

Queste riduzioni ci daranno

$$log.\ (m + cos.\ \varphi) = -log.\ 2\ (m - \sqrt{(m^2-1)}) + c'_1 (m - \sqrt{(m^2-1)}).\ cos.\ \varphi - c'_2 (m - \sqrt{(m^2-1)})^2\ cos.\ 2\varphi\ \&c. + \&c.$$
$$\pm c_x\ (m - \sqrt{(m^2 - 1)})^x.\ cos.\ x\varphi \mp \&c.$$

Per determinare le costanti che restano, facciamo $m - \sqrt{(m^2 - 1)} = y$, ed avremo $m = \frac{1 + y^2}{2y}$; Quindi sostituendo otterremo

$$log.\ (y^2 + 2y\ cos.\ \varphi + 1) = c'_1\ y\ cos.\ \varphi - c'_2\ y^2\ cos.\ 2y + c'_3\ y^3\ cos.\ 3\varphi - \&c. \ldots \pm c'_x\ y^x\ cos.\ x\varphi \mp \&c.$$

Ed è chiaro che avremo il valore di c'_x se differenzieremo questa Equazione x volte rapporto ad y, e faremo quindi $y = o$ Per eseguire questa Operazione, si osservi che abbiamo

$$y^2 + 2y\ cos.\ \varphi + 1 = \left(y + e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(y + e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)$$

e quindi ancora

$$log.\ (y^2 + 2y\ cos.\ \varphi + 1) = log.\left(y + e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) + log.\left(\varphi + e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)$$

Differenziando questa quantità x volte, ed eguagliandola al differenziale x^{esimo} della serie $c_1\ y\ cos.\ \varphi - c_2\ y^2\ cos.\ 2\varphi + \&c.$ preso nella supposizione stessa, otterremo

$$\pm 2.3.4 \ldots (x-1) \left\{\frac{1}{(y + e^{\varphi\sqrt{-1}})} + \frac{1}{(y + e^{-\varphi\sqrt{-1}})^x}\right\}$$

$$= \pm 2.3.4 \ldots (x-1)\, x.\, c_x.\ cos.\ x\varphi \mp 2.4 \ldots (x+1)\, c_{x+1}\, ;y.\ cos.\ (x+1)\varphi \pm \&c.$$

ciò è facendo $y = o$,

$$x\, c_x.\ cos.\ x\varphi = e^{x\varphi\sqrt{-1}} + e^{x\varphi\sqrt{-1}} = 2\, cos.\ x\varphi$$

Quindi $c_x = \frac{2}{x}$. Conservando dunque ad y il valore convenuto, avremo

$$log.\,(m + cos.\,\varphi) = -\,log.\,2y + \tfrac{2}{1}\,y\,.\,cos.\,\varphi - \tfrac{2}{2}\,y^2\,cos.\,2\varphi + \tfrac{2}{3}\,y^3\,cos.\,3\varphi \ldots = y\,\tfrac{2}{x}\,y\,cos.\,x \pm \&c.$$

La determinazione della costante c'_x potrebbe eseguirsi in un altro semplicissimo modo. Riprendiamo la Equazione

$$log.\,(y^2 + 2y\,cos.\,\varphi + 1) = c'_1\,y\,cos.\,\varphi - c'_2\,y^2\,cos.\,2\varphi + c'^3\,cos.\,3\varphi - \&c. \ldots \pm c'_x\,y^x\,cos.\,x\varphi \mp \&c.$$

e facendovi $\varphi = 0$,

$$2\,log.\,(1 + y) = c_1 y - c_2 y^2 + c_3 y^3 - \ldots \pm c_x y^x = \&c.$$

$$= 2y - \frac{2y^2}{2} + \frac{2y}{3} \ldots \pm \frac{2y^x}{2} \mp \&c.$$

onde $c_x = \frac{2}{x}$, come sopra.

La serie che con due differenti metodi abbiamo rigorosamente dimostrata, fù conosciuta da Euler, che la ottenne per induzione, come può vedersi nel suo *Calcolo Integrale*.

XV.

Abbiamo ottenuto

$$log.\,(m + cos.\,\varphi) = -\,log.\,2y + \frac{2}{1}\,y\,cos.\,\varphi - \frac{2}{2}\,y^2\,cos.\,2\varphi + 2y^3\,cos.\,3\varphi - \&c.$$

Ed avendosi

$$log.\,(1 + y\,cos.\,\varphi) = y\,cos\,\varphi - \frac{1}{2}\,y^2\,(cos.\,\varphi)^2 + \frac{1}{3}\,y^3\,(cos.\,\varphi)^3 - \&c.$$

egli è chiaro che la nostra formula potrà più concisamente essere espressa dalla Equazione

$$(E) \ldots\ldots\, log.\,(m + cos.\,\varphi) = -\,log.\,2\varphi + 2\,log.\,(1 + \varphi\,cos.\,\varphi)$$

purchè dopo di avere sviluppato il secondo membro per le potenze ascendenti di $cos.\,\varphi$: si applichino come multipli di archi gli esponenti di $cos.\,\phi$. Si osservi che essendo $y = m - \sqrt{(m^2 - 1)}$, sarà ancora $\frac{1}{y} = m + \sqrt{(m^2 - 1)}$, onde facilmente potremo dare alla Equazione (E) la forma

$$log.(m + cos.\,\phi) = log.\,\tfrac{1}{2}(m - \sqrt{(m^2 - 1)}) + 2\,log.\,((m + \sqrt{m^2 - 1}) + cos.\,\phi)$$

purchè si usino le stesse avvertenze nella evoluzione del secondo membro.

Sia adesso proposto di svolgere in serie per i coseni degli archi moltiplici la funzione più complicata

$$log.(cos.\,\phi^r + a\,cos.\,\phi^{r-1} + b\,cos.\,\phi^{r-2} + \&c. \ldots + p)$$

Supponendo che $-m, -m', -m'', \ldots -m^{(r)}$ siano le r radici della Equazione

$$t^r + at^{r-1} + bt^{r-2} + \ldots\ldots + p = o$$

potremo supporre

$$log.(cos.\,\phi^r + a\,cos.\,\phi^{r-1} + b\,cos.\,\phi^{r-2} + \ldots + p) = log.(m + cos.\,\phi)$$

$$+ log.(m' + cos.\,\phi) + log\,(m'' + cos.\,\phi) + \ldots\ldots + log.(m^{(r)} + cos.\,\phi)$$

Se adesso con i segni $y,\ y',\ y_2 \ldots y_r$ indicheremo le quantità $m - \sqrt{(m^2 - 1)},\ m' - \sqrt{(m'^2 - 1)},\ m'' - \sqrt{(m''^2 - 1)} \ldots\ m^{(r)} - \sqrt{(m^{(r)2} - 1)}$, avremo generalmente

$$log.(m^{(s)} + cos.\,\phi) = log.\,\tfrac{1}{2}\,y_{(s)} + 2\,log.(y_{(s)} + cos.\,\phi)$$

purchè nella evoluzione del secondo membro si applichi come multiplo di arco ogni esponente di $cos.\,\phi$: con questa stessa condizione, sarà dunque ancora

$$\log.\,(\cos.\varphi^{r}+a\cos.\varphi^{r-1}+b.\cos.\varphi^{r-2}\ldots+p)=\log.\frac{1}{2.y}+\log.\frac{1}{2.y_1}+\log.\frac{1}{2.y_2}+\ldots+\log.\frac{1}{2.y_2}$$
$$+2\left\{\log.(y+\cos.\varphi)+\log.(y_1+\cos.\varphi)+\log.(y_2+\cos.\varphi)+\ldots+\log\,y_r+\cos.\varphi)\right\}$$

ossia

$$\log.(\cos.\,^{r}+a\cos.\varphi^{r-1}+b\cos.\varphi^{r-2}\ldots+p)=\log.\frac{1}{2^{r}.y.y_1.y_2\ldots.y_r}$$
$$+2\log.(y+\cos.\varphi)(y_1+\cos.\varphi)(y_2+\cos.\varphi)\ldots(y_r+\cos.\varphi)$$

Effettuato il prodotto dei fattori

$$(y+\cos.\varphi)(y_1+\cos.\varphi)(y_2+\cos.\varphi)\ldots(y_r+\cos.\varphi)$$

che sono r di numero, giungeremo ad una espressione della forma

$$\cos.\varphi^{r}+a'\cos.\varphi^{r-1}+b'.\cos.\varphi^{r-2}\ldots+p'$$

ove i coefficienti a', b', ... p' saranno tali, che le quantità $y, y_1, y_2, \ldots. y_{(r)}$ rappresenteranno le r radici della Equazione

$$t^{r}+a'\,t^{r-1}+b't^{r-2}+\ldots\ldots+p'=0$$

Sarà dunque $p'=yy_1y_2\ldots.y_r$, e la formula precedente diverrà

$$\log.(\cos.\varphi^{r}+a\cos.\varphi^{r-1}+b.\cos.\varphi^{r-2}+\ldots+p)=\log.\frac{1}{2^{r}.p'}$$
$$+2.\log.(\cos.\varphi^{r}+a'\cos.\varphi^{r-1}+b'\cos.\varphi^{r-2}+\ldots+p')$$

purchè dopo di avere sviluppato il secondo membro per le potenze di $\cos.\varphi$, gli esponenti si applichino come multipli dell'arco.

XVI.

Possiamo fino d'ora mostrare un'uso assai osservabile della serie ottenuta per $\log.(m+\cos.\varphi)$. Noi abbiamo

$$\log.(m+\cos.\varphi)=-\log.2y+\frac{2}{1}.y\cos.\varphi-\frac{2}{2}y^{2}\cos.2\varphi+\frac{2}{3}y^{3}\cos.3\varphi-\&c.\pm\frac{2}{x}y^{x}\cos.x\varphi\mp\&c.$$

Si svolgano attualmente in serie per le potenze dei loro archi tutti i coseni, che sono compresi nel secondo membro di questa Equazione; ed avremo immediatamente, ordinando per le potenze di φ

$$log.(m+cos.\varphi)=-log.2y+2\left\{y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\&c.\right\}$$
$$-\frac{2}{2}\varphi^2\left\{y-2y^2+3y^3-4y^4+\&c.\right\}$$
$$+\frac{2}{2.3.4}\varphi^4\left\{y-2^3y^2+3^3y^3-4^3y^4+\&c.\right\}$$
$$-\frac{2}{2.3.4.5.6}\varphi^6\left\{y-2^5y^2+3^5y^3-4^5y^4+\&c.\right\}$$

cioè, osservando che $y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\&c.=log.(1+y)$

$$log.(m+cos.\varphi)=log.\left\{\frac{y^2+2y+1}{2y}\right\}-\frac{2}{2}\varphi^2\left\{y-2y^2+3y^3-\&c.\right\}$$
$$+\frac{2}{2.3.4}\varphi^4\left\{y-2^3y^2+3^3y^3\ \&c.\right\}$$
$$\frac{-2}{2.3.4.5.6}\varphi^6\left\{y-2^5y^2+3^5y^3-\&c.\right\}$$
$$+\ \&c.$$

abbiamo adesso, come è noto

$$\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-y^3+\&c.$$

Quindi sarà

$$y-2y^2+3y^3-4y^4+\&c.=-y\frac{d\frac{1}{1+y}}{dy}$$

$$y-2^3y^2+3^3y^3-4^3y^4+\&c.=-y\frac{dy\,dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^3}$$

&c.

ove ciascun segno differenziale si riporta a tutte le quantità successive. Sostituendo questi valori nella nuova espressione di $log.(m + cos.\varphi)$, si avrà

$$log.(m + cos.\varphi) = log.\left(\frac{y^2 + 2y + 1}{2y}\right) + \frac{2}{2}\varphi^2 y \frac{d\frac{1}{1+y}}{dy}$$

$$- \frac{2}{2.3.4}\varphi^4 \frac{y\,dy\,dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^3}$$

$$+ \&c. \ldots \ldots \pm \frac{2}{2.3.4\ldots 2n}\varphi^{2n} \frac{y\,dy\,dy.\ldots d\frac{1}{1+y}}{dy^{2n-1}} \mp \&c.$$

ossia, osservando che per supposizione abbiamo

$$m = \frac{y^2 + 1}{2y}$$

otterremo ancora, riducendo

$$\frac{1}{y} log.\left\{\frac{m + cos.\varphi}{m + 1}\right\} = \frac{2}{2}\varphi^2 \frac{d\frac{1}{1+y}}{dy}$$

$$- \frac{2}{2.3.4}\varphi^4 \frac{dy\,dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^3} + \&c.$$

$$\pm \frac{2}{2.3\ldots 2n}.\varphi.^{2n} \frac{dy\,dy\ldots d\frac{1}{1+y}}{dy^{2n-1}} \mp \&c.$$

Moltiplicando per dy, ed integrando, avremo

$$\int \frac{dy}{y} log.\left\{\frac{m + cos.\varphi}{m + 1}\right\} = cost. + \frac{2}{2}\varphi^2 \frac{1}{1+y}$$

$$- \frac{2}{2.3.4}\varphi^4 y \frac{dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^2} + \frac{2}{2.3.4.5.6}\varphi^6 \frac{y\,dy\,dy\,dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^4}$$

$$- \&c. \ldots \ldots \pm \frac{2}{2.3\ldots 2n}.\varphi.^{2n} \frac{y\,dy\,dy.\ldots d\frac{1}{1+y}}{dy^{2n-2}} \mp \&c.$$

La funzione $\frac{y\,d\,y\,d\,y\,\ldots\,d\frac{1}{1+y}}{d\,y^{2b}}$ rappresenta la somma della serie

$$y - 2^{2b}y^2 + 3^{2b}y^3 - 4^{2b}y^4 + \&c.$$

la quale si riduce a zero se $y = 0$, e se $y = 1$, poichè in questo secondo caso è noto che la serie

$$1 - 2^{2b} + 3^{2b} - 4^{2b} + \&c.$$

è sempre $= 0$, come anche avremo luogo di dimostrare in seguito.

In conseguenza, se nella formula

$$\int \frac{d\,y}{y}\,log.\left\{\frac{m + cos.\,\varphi}{m+1}\right\} = cost. + \frac{2}{2}\,\varphi\,\frac{1}{1+y}$$

$$- \frac{2}{2.3.4}\,\varphi^4.\,\frac{y\,d\,y\,d\,\frac{1}{1+y}}{d\,y^2}$$

$$+ \frac{2}{2.3.4.5.6}\,\varphi^6.\,\frac{y\,d\,y\,d\,y\,d\,y\,d\,\frac{1}{1+y}}{d\,y^4} - \&c.$$

prenderemo l'integrale tra i limiti $y = 0$, $y = 1$, a ciascuno di questi limiti svaniranno i coefficienti di φ^4, $\varphi^6 \ldots \varphi^{2n}$,.. all'infinito; ed avremo la formula semplicissima

$$- \frac{\varphi^2}{2} = \int \frac{d\,y}{y}\,log.\left\{\frac{m + cos.\,\varphi}{m+1}\right\}$$

ossia

$$- \frac{\varphi^2}{2} = \int \frac{d\,y}{y}\,log.\,(\,m + cos.\,\varphi\,) - \int \frac{d\,y}{y}\,log.\,(\,m+1\,)$$

Ma avendosi

$$m = \frac{y^2+1}{2\,y}$$

si avrà, sostituendo nel termine $\int \frac{d\,y}{y}\,log.\,(\,m + 1\,)$ questo valore di m, la formula

$$-\frac{\varphi^2}{2} = -2\int\frac{dy}{y}\log.(1+y) + \int\frac{dy}{y}\log.2y$$

$$+\int\frac{dy}{y}\log.(m+\cos.\varphi)$$

nella quale in luogo di $\log.(m+\cos.\varphi)$ potremo sostituire la serie

$$-\log.2y + \tfrac{2}{1}y\cos.\varphi - \tfrac{2}{2}y^2\cos.2\varphi + \&c.$$

ed in luogo di $\log.(1+y)$ il suo valore

$$y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \&c.$$

ed effettuate le integrazioni tra i convenuti limiti di $y=0$, $y=1$, si otterrà con molta facilità

$$\frac{\varphi^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \&c.$$

$$-\cos.\varphi + \tfrac{1}{4}\cos.2\varphi - \tfrac{1}{9}\cos.3\varphi + \&c.$$

Se in questa serie assai osservabile faremo $\varphi=\pi$, troveremo

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \&c.$$

relazione che Euler ottenne il primo per induzione.

XVII.

Riprendiamo la Equazione

$$-\frac{\varphi^2}{2} = -\int\frac{dy}{y}\log.(m+1) + \int\frac{dy}{y}\log.(m+\cos.\varphi)$$

avremo differenziando rapporto a φ

$$\varphi = 2\,\mathrm{sen}\,\varphi\int\frac{dy}{y^2+2y\cos.\varphi+1}$$

Onde apparisce che il rapporto di un arco al suo seno sarà rappresentato dalla formula

$$\frac{\varphi}{sen.\ \varphi} = 2 \int \frac{dy}{y^2 + 2\ y\ cos.\ \varphi + 1}$$

purchè l'Integrale sia preso tra i limiti $y = 0$, $y = 1$.

La funzione $\frac{\varphi}{sen.\ \varphi}$ allorchè $\varphi = 0$ diviene $\frac{0}{0}$; e lo stesso accade in tutti i suoi differenziali all'infinito. Secondo le idee luminose dell'illustre Lagrange, sempre una tal circostanza annunzia un cangiamento di natura nella proposta funzione; e la indole, e la cagione di un tal cangiamento rendesi evidente nella nostra formula, nella quale il resultato $\frac{0}{0}$ indica che i fattori della quantità $y^2 + 2\ \varphi\ cos.\ \varphi + 1$ divengono eguali tra di loro.

XVIII.

Abbiamo ottenuto (13) lo sviluppo in serie per i coseni degli archi moltiplici della funzione $log.\ (1 + n\ cos.\ \varphi)$. Proponghiamoci adesso di svolgere in una serie della stessa natura la funzione $\frac{1}{1 + n\ cos.\ \varphi}$. A tale oggetto facciamo

$$\frac{1}{1 + n\ cos.\ \varphi} = A - A_1\ cos.\ \varphi + A_2\ cos.\ 2\ \varphi - A_3\ cos.\ 3\ \varphi + \&c.$$

E moltiplicando per $1 + n\ cos.\ \varphi$, e riducendo i prodotti dei coseni in coseni di archi multipli, avremo

$$\begin{aligned} 1 = A &+ A\,n.\ cos.\ \varphi - \tfrac{1}{2} A_1.\ n\ cos.\ 2\ \varphi + \tfrac{1}{2} A_2\ n\ cos.\ 3\ \varphi - \&c. \\ &- \tfrac{1}{2} A_1\ n - A_1.\ cos.\ \varphi + A_2\ cos.\ 2\ \varphi - A_3\ cos.\ 3\ \varphi + \&c. \\ &+ \tfrac{1}{2} A_2\ n\ cos.\ \varphi - \tfrac{1}{2} A_3.\ n\ cos.\ 2\ \varphi + \tfrac{1}{2} A_4\ n.\ cos.\ 3\ \varphi - \&c. \end{aligned}$$

Otterremo quindi

$$nA_1 - 2A + 2 = 0$$

$$nA_2 - 2A_1 + 2nA = 0$$

$$(c) \ldots\ldots\ldots nA_3 - 2A_2 + nA_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$nA_x - 2A_{x-1} + nA_{x-2} = 0$$

ove conviene osservare che questa generale Equazione incomincia ad aver luogo per i soli valori di $x > 2$.
Abbiamo da essa.

$$A_x = c\left(\frac{1+\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^x + c'\left(\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^x$$

ove conviene determinare le due costanti arbitrarie c, c'. Alla prima delle Equazioni (c) che sono infinite di numero, aggiungasi la seconda moltiplicata per h, la terza moltiplicata per h^2, e così in seguito. Avremo

$$0 = -2A + 2 + 2nAh + A_1(n - 2h + nh^2) + A_2 h(n - 2h + nh^2)$$
$$+ A_3 h^2 (n - 2h + nh^2) + \&c.$$

Alla quale sodisfaremo facendo

$$(2nh - 2)A + 2 = 0$$

$$n - 2h + nh^2 = 0$$

Di quì abbiamo $h = \frac{1 \pm \sqrt{(1-n^2)}}{n}$; $A = \frac{1}{\pm\sqrt{(1-n^2)}}$; Ma dovendo essere $A = 1$, quando $n = 0$, sarà generalmente $A = \frac{1}{\sqrt{(1-n^2)}}$.

Trovata A, la prima delle Equazioni (c) ci darà $A_1 = 2\,\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n\sqrt{(1-n^2)}}$;

e la seconda $A_2 = 2\,\frac{(1-\sqrt{(1-n^2)})}{n^2\;\sqrt{(1-n^2)}}$.

Sostituiti successivamente questi valori nel generale di A_x, troveremo $c=o$, $c' = \frac{2}{\sqrt{(1-n^2)}}$; onde sarà

$$A_x = \frac{2}{\sqrt{(1-n^2)}}\cdot\left\{\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right\}^x = \frac{2\,k^x}{\sqrt{(1-n^2)}}$$

facendo $\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n} = k$. Sarà quindi

$$\frac{1}{1+n\,.\cos.\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(1-n^2)}}\left\{1-2k.\cos.\varphi+2\,k^2\cos.2\,\varphi-2k^3\cos.3\varphi+\&c.\right\}$$

Moltiplicando per $d\,\varphi$, ed integrando si otterrà

$$\int\frac{d\,\varphi}{1+n\cos.\varphi} = cost. + \frac{1}{\sqrt{(1-n^2)}}\left\{\varphi-2k\,sen.\varphi+\frac{2k^2}{2}sen.2\varphi-\frac{2\,k^3}{3}sen.3\varphi+\&c.\right\}$$

Ed il valore di questo integrale tra i limiti $\varphi=o$, $\varphi=\pi$ sarà $\frac{\pi}{\sqrt{(1-n^2)}}$.

XIX.

Ci sia permesso di osservare quì di passaggio che il metodo con cui abbiamo nel numero precedente determinate le costanti A, A_1 può applicarsi alla integrazione delle Equazioni a differenze finite in un modo più diretto di quello che comunemente si pratica. Sia infatti proposta la Equazione lineare del secondo ordine

$$y_x + A\,y_{x-1} + B\,y_{x-2} = o$$

ove A, B siano costanti. Facendo successivamente $x = 2, 3, 4$ &c. avremo questa serie di Equazioni

$$(A) \quad \begin{array}{l} y_2 + Ay_1 + By_0 = 0 \\ y_3 + Ay_2 + By_1 = 0 \\ y_4 + Ay_3 + By_2 = 0 \\ \vdots \\ y_x + Ay_{x-1} + By_{x-2} = 0 \end{array}$$

Ed è chiaro che otterremo l' integrale primo della proposta se col mezzo di esso potremo eliminare tutte le quantità y_0, y_1, y_2 : . . . y_{x-2}, y_{x-1}, y_x ad eccezione delle due prime, e delle due ultime. Per questo oggetto alla prima delle Equazioni (A) aggiungasi la seconda moltiplicata per $\frac{1}{t}$, la terza moltiplicata per $\frac{1}{t^2}$, la quarta moltiplicata per $\frac{1}{t^3}$, e così in seguito fino all' ultima, ed avremo

$$A + \frac{B}{t}\, y_1 + By_0 + y_2\left\{1 + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2}\right\} + \frac{y_3}{t}\left\{1 + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2}\right\} + \frac{y_4}{t^2}\left\{1 + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2}\right\}$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{y_{x-2}}{t^{x-4}}\left\{1 + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2}\right\} + \frac{y_{x-1}}{t^{x-3}}\left\{1 + \frac{A}{t}\right\} + \frac{y_x}{t^{x-2}} = 0$$

Se adesso facciamo

$$t^2 + At + B = 0$$

e sia t' una radice di questa Equazione, sarà l'Integrale cercato

$$y_x + \left\{t' + A\right\} y_{x-1} + \left\{\left(A + \frac{B}{t'}\right) y_1 + By_0\right\} t'^{\,x-2} = 0$$

Se chiamiamo t'' la seconda radice della Equazione

$$t^2 + At + B = o$$

avremo $A + t' = - t''$; $B = t' . t''$; $A + \frac{B}{t'} = - t'$; e l' integrale primo sarà più semplicemente così espresso

$$y_x - t'' y_{x-1} = (y_1 - t'' y_0)\, t'^{x-1}$$

Cangiando t' in t'' avremo l' altro Integrale primo

$$y_x - t' y_{x-1} = (y_1 - t' y_0)\, t''^{x-1}$$

Ed eliminando da questi l' y_{x-1}, otterremo l' integrale secondo

$$y_x = \frac{y_1 - t'' y_0}{t' - t''} t'^x + \frac{y_1 - t' y_0}{t'' - t'} t''^x$$

Se le due radici t', t'' sono eguali i due Integrali primi essendo affatto simili, non si può da essi eliminare y_{x-1}. Riprendiamo il caso generale, e sia $t'' = t' + \omega$; i due Integrali primi diventeranno

$$y_x - (t' + \omega) y_{x-1} = [y_1 - (t' + \omega) y_0]\, t'^{x-1}$$

$$y_x - t' y_{x-1} = (y_1 - t' y_0) \left\{ t'^{x-1} + (x-1)\, \omega\, t'^{x-2} + \frac{(x-1)(x-2)}{2} \omega^2 t'^{x-3} + \&c. \right\}$$

e sottraendo l' uno dall' altro, e dividendo per ω, avremo

$$y_{x-1} = y_0 t'^{x-1} + \left\{ y_1 - t' y_0 \right\} \left\{ (x-1) t'^{x-2} + \frac{(x-1)(x-2)}{2} \omega t'^{x-3} + \&c. \right\}$$

e ponendo $x + 1$ in luogo di x

$$y_x = y_0 t'^x + (y_1 - t' y_0) \left\{ x t'^{x-1} + x \frac{(x-1)}{2} \omega\, t'^{x-2} + \&c. \right\}$$

Il quale sotto altra forma, rappresenta l'Integrale della proposta. Quando $t' = t''$, è $\omega = o$; dunque in questo caso

$$y_x = y_0 t'^x + x(y_1 - t'y_0) . t'^{x-1}$$

È inutile avvertire che lo stesso metodo si applica senza eccezione a tutte le Equazioni lineari di qualunque ordine a coefficienti costanti.

Qualchè volta può questo metodo stesso applicarsi ancora a quel genere di Equazioni che comprendono le differenze parziali finite, ed infinitesime di una funzione rapporto a due distinte variabili; Equazioni che il primo ha trattate con dottissima analisi il Sig. Paoli, e delle quali ha mostrati i moltiplici, ed importantissimi usi nel Calcolo Integrale. Sia proposta la Equazione

$$z_{x+1} = A_y z_x - A_y C_y \frac{dz_x}{dy} + C_y \frac{dz_{x+1}}{dy}$$

e facendovi successivamente $x = 0, 1, 2, 3$, &c. avremo questa serie di Equazioni

$$z_1 - A_y . z_0 + A_y . C_y . \frac{dz_0}{dy} - C_y \frac{dz_1}{dy} = o$$

$$z_2 - A_y . z_1 + A_y . C_y . \frac{dz_1}{dy} - C_y \frac{dz_2}{dy} = o$$

$$z_3 - A_y . z_2 + A_y . C_y . \frac{dz_2}{dy} - C_y . \frac{dz_3}{dy} = o$$

$$z_4 - A_y . z_3 + A_y . C_y . \frac{dz_3}{dy} - C_y . \frac{dz_4}{dy} = o$$

$$\vdots$$

$$z_{x+1} - A_y . z_x + A_y . C_y . \frac{dz_x}{dy} - C_y . \frac{dz_{x+1}}{dy} = o$$

Se alla prima di queste Equazioni aggiungeremo la seconda moltiplicata per t, la terza moltiplicata per t^2, la quarta moltiplicata per t^3, e così seguitando fino all' ultima, avremo la Equazione

$$-A_y . z_0 + A_y . C_y . \frac{d z_0}{d y} + z_1 (1 - A_y t) + z_2 t (1 - A_y . t)$$

$$+ z_3 t^2 (1 - A_y t) + \&c.$$

$$- C_y \frac{d z_1}{d y} (1 - A_y t) - C_y \frac{d z_2}{d y} . t (1 - A_y t) - C_y \frac{d z_3}{d y} t^2 (1 - A_y t) - \&c.$$

$$+ t^{x-1} z_{x+1} - C_y t^{x-1} \frac{d z_{x+1}}{d y} = o$$

Facciamo $1 - A_y . t = o$; onde $t = \frac{1}{A_y}$; e sostituendo questo valore, si avrà

$$C_y . \frac{d z_{x+1}}{d y} - z_{x+1} + A_y^x \left\{ z_0 - C_y \frac{d z_0}{d y} \right\} = o$$

ove z_0 è una funzione arbitraria di y. Integrando questa Equazione differenziale lineare del primo ordine, si avrà

$$z_{x+1} = e^{\int \frac{d y}{C_y}} \left\{ M + \int A_y^x \, d y \left(C_y \frac{d z_0}{d_y} - z_0 \right) e^{-\int \frac{d y}{C}} . \frac{1}{C_y} \right\}$$

ove M è una costante introdotta dalla Integrazione, e che sarà una funzione di x. Pertanto, facendo per maggior semplicità

$$e^{-\int \frac{d y}{C_y}} . \frac{1}{C_y} \left(C_y \frac{d z_0}{d y} - z_0 \right) = F y$$

essendo Fy una funzione arbitraria di y, e ponendo $M = \Psi x$, sarà ancora

$$z_{x+1} = e^{\int \frac{dy}{C_y}} \int A^x dy\, Fy + \Psi x . e^{\int \frac{dy}{C_y}}$$

la quale Equazione rappresenta il completo integrale della pròposta, perchè comprende le due funzioni arbitrarie $F y, \Psi x$.

Il metodo di cui ci siamo prevalsi per la integrazione della Equazione

$$z_{x+1} = A_y . z_x - A_y . C_y . \frac{d z_x}{d \varphi} + C_y . \frac{d z_{x+1}}{d y}$$

non è per altro il solo che può condurre all'ottenuto completo integrale. Ed infatti la proposta può mettersi sotto la forma

$$z_{x+1} - C_y . \frac{d z_{x+1}}{d \varphi} = A_y \left(z_x - C_y \frac{d z_{x+1}}{d \varphi} \right)$$

Pertanto se faremo

$$z_x - C_y . \frac{d z_x}{d y} = u_x$$

sarà

$$u_{x+1} = A_y\, u_x$$

E quindi la completa evoluzione della proposta è ridotta a dipendere da una Equazione differenziale ordinaria, e da una Equazione a differenze finite.

XX.

Dopo questa digressione, alla quale ci ha condotti il metodo con cui abbiamo determinate la costanti A, A_1 nella serie

$$\frac{1}{1+n\cos.\varphi}=\mathrm{A}-\mathrm{A}_1\cos.\varphi+\mathrm{A}\cos.2\varphi-\mathrm{A}_2\cos.3\varphi+\&c.$$

allorchè i coefficienti A, A_1, A_2, &c. dipendevano da una Equazione a differenze finite, riprendiamo la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\varphi}$ e vediamo di svilupparla in una serie ordinata per i coseni degli Archi moltiplici, prevalendoci del solo Calcolo differenziale, appunto come abbiamo fatto per la funzione $log.(1+n\cos.\varphi)$. (XIV)

Consideriamo a tale oggetto la formula $\frac{1}{m+\cos.\varphi}$ alla quale si riduce agevolmente la proposta; e facendo $z=\frac{1}{m+\cos.\varphi}$, facilmente avremo differenziando

$$z=\frac{1}{m+\cos.\varphi}$$

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)=\frac{2+m\cos.\varphi-(\cos.\varphi)^2}{(m+\cos.\varphi)^3}$$

$$\left(\frac{dz}{dm}\right)=-\frac{1}{(m+\cos.\varphi)^2}$$

$$\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)=\frac{2}{(m+\cos.\varphi)^3}$$

Ed alla somma delle due prime di queste Equazioni aggiungendo la terza moltiplicata per $-3m$, e la quarta moltiplicata per $\frac{m^2-1}{2}$, otterremo la Equazione

$$(E) \ldots . (m^2-1)\left(\frac{d^2 z}{d m^2}\right)+3 m\left(\frac{d z}{d m}\right)+\left(\frac{d^2 z}{d \varphi^2}\right)+z=0$$

Facciamo ora come sopra

$$z=\frac{1}{(m+\cos. \varphi)}=A+A_1 \cos. \varphi+A_2 \cos. 2 \varphi+\ldots\ldots$$

e sostituendo nella Equazione (E) in luogo di z questa serie, e facendo $=0$ separatamente i coefficienti dei diversi coseni, si avrà per determinare A_x

$$\frac{d^2 A_x}{d m^2}-\frac{3 m}{1-m^2} \frac{d A_x}{d m}-\frac{1-x^2}{1-m^2} A_x=0$$

di cui l'Integrale facilmente trovasi essere

$$A_x=\frac{c_x}{\sqrt{(m^2-1)}}\left(m+\sqrt{(m^2-1)}\right)^x+\frac{c'_x}{\sqrt{(m^2-1)}}\left(m-\sqrt{(m^2-1)}\right)^x$$

ed avremo anche

$$A=\frac{e}{\sqrt{(m^2-1)}}+e'$$

Sostituendo questi valori nella serie che abbiamo scelta per $z=\frac{1}{m+\cos. \varphi}$, si avrà

$$\frac{1}{m+\cos.\varphi}=\frac{e}{\sqrt{(m^2-1)}}+e'$$

$$+\frac{1}{\sqrt{(m^2-1)}}\Big[\left\{c_1(m+\sqrt{(m^2-1)})+c'_1(m-\sqrt{(m^2-1)})\right\}\cos.\varphi$$

$$+\left\{c_2(m+\sqrt{(m^2-1)})^2+c'_2(m-\sqrt{(m^2-1)})^2\right\}\cos.2\varphi$$

$$+\ldots\ldots+\left\{c_x(m+\sqrt{(m^2-1)})^x+c'_x(m-\sqrt{(m^2-1)})^x\right\}\cos.x\varphi+\&c.\Big]$$

Per determinare le quantità e, e', c, c_1, $c_2\ldots c'$, c'_1, c'_2 &c. che sono tutte arbitrarie introdotte dalla Integrazione, facciamo in questa Equazione $m=\frac{1}{n}$, ed avremo riducendo

$$\frac{1}{1+n\cos.\varphi}=\frac{e}{\sqrt{(1-n^2)}}+\frac{e'}{n}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{(1-n^2)}}\Big[\left\{c_1\left(\frac{1+\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)+c'_1\left(\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)\right\}\cos.\varphi$$

$$+\left\{c_2\left(\frac{1+\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^2+c'_2\left(\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^2\right\}\cos.2\varphi+\ldots$$

$$+\left\{c_x\left(\frac{1+\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^x+c'_x\left(\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^x\right\}\cos.x\varphi+\&c.\Big]$$

Questa Equazione dovrà ridursi identica se $n=o$; sarà dunque $e'=o$, ed inoltre dovranno esser nulle tutte le quantità c_1, c_2, $c_3\ldots$ &c. per motivo della n nel denominatore; e sarà anche $e=1$. Previe queste determinazioni, sarà

$$\frac{1}{m+\cos.\varphi}=\frac{1}{\sqrt{(m^2-1)}}\,(1+c'_1(m-\sqrt{(m^2-1)})-\cos.\varphi$$

$$c'_2(m-\sqrt{(m^2-1)})^2\cos.2\varphi\ldots.+c'_x(m-\sqrt{(m^2-1)})^x\cos x\varphi+\&c.$$

Facciamo adesso

$$m-\sqrt{(m^2-1)}=y$$

e sarà $m = \frac{1+y^2}{2y}$; sostituendo questi valori, e moltiplicando per $\sqrt{(m^2-1)}$, si avrà trasportando nel primo membro l'unità

$$\frac{y + \cos.\varphi}{y^2 + 2y\cos.\varphi + 1} = -\frac{c'_1}{2}\cos.\varphi - \frac{c'_2}{2}\,y\cos.2\varphi$$

$$-\frac{c'_3}{2}\,y^2\cos.3\ldots\ldots - \frac{c'_x}{2}\,y^{x-1}\cos.x\varphi - \ldots$$

e posto $\varphi = o$

$$\frac{1}{1+y} = -\frac{c'_1}{2} - \frac{c'_2}{2}\,y - \frac{c'_3}{2}\,y^2 + \ldots - \frac{c'_x}{2}\,y^{x-1} - \ldots$$

$$= 1 - y + y^2 - \&c.\ldots \pm y^{x-1} \mp \&c.$$

onde $c'_x = \pm 2$, ove il segno superiore dovrà prendersi se x è pari, e l'inferiore se x è dispari.

Quindi sostituendo, e conservando ad y il valore convenuto, si avrà

$$\frac{1}{m + \cos.\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(m^2-1}}\Big[1 - 2y\cos.\varphi + 2y^2\cos.2\varphi$$

$$- 2y^3\cos.3 + \ldots\ldots \pm 2y^x\cos.x\varphi \mp \&c.\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(m^2-1)}}\,\frac{1 - y\cos.\varphi}{1 + y\cos.\varphi}$$

purchè nella evoluzione di questa frazione per le potenze di $\cos.\varphi$, si pongano gli esponenti di questa quantità come multipli dell'arco φ.

XXI.

Potremo adesso con somma facilità svolgere in una serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici una potenza qualunque di $\frac{1}{m+\cos.\varphi}$. Abbiamo infatti

$$\frac{1}{(m+\cos.\varphi)^n} = \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \, \frac{d^n \, \frac{1}{m+\cos.\varphi}}{d m^n}$$

dove prenderemo il segno positivo se n è pari, ed il negativo se n è dispari. Ed essendo $\pm 2 \frac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}$ il termine generale dello sviluppo di $\frac{1}{m+\cos.\varphi}$, chiamando B_x quello della funzione $\frac{1}{(m+\cos.\varphi)^n}$, sarà nel caso di n pari

$$B_x = + \frac{2}{1.2\ldots(n-1)} \, \frac{d^n \, \frac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}}{d m^n}$$

e nel caso di n dispari

$$B_x = \mp \frac{2}{1.2\ldots(n-1)} \, \frac{d^n \, \frac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}}{d m^n}$$

Ove il segno superiore converrà ad x pari, e l' inferiore ad x dispari.

Avendosi parimente integrando da $\varphi = 0$ fino a $\varphi = \pi$

$$\int \frac{dy}{m+\cos.\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(m^2-1)}}$$

sarà tra i limiti stessi

$$\int \frac{dy}{(m+\cos.\varphi)^n} = \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\, \frac{d^n \frac{1}{\sqrt{(m-1)^2}}}{d\, m^n}$$

Ove il segno superiore conviene ad n pari, e l'inferiore ad n dispari.

Questi risultati sono di poca utilità sotto questa forma, specialmente se n è un numero un poco elevato; ma vedremo in seguito il modo di ottenerli sotto un più comodo aspetto.

XXII.

Noi ci siamo fino ad ora occupati della evoluzione in serie per i coseni degli archi multipli di φ di alcune delle più semplici funzioni comprese nella forma generale $F(m+\cos.\varphi)$. Ma se vorremo esaminare con maggior generalità la natura dei problemi che ci occupano, consideriamo la funzione $F(m+\cos.\varphi)$, e proponghiamoci di svolgerla in serie per i coseni degli archi moltiplici.

Noi abbiamo, come è noto

$$\cos.\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}$$

Quindi, se per maggior semplicità faremo $e^{\varphi\sqrt{-1}} = a$, si avrà

$$\cos.\varphi = \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

e la funzione $F(m+\cos.\varphi)$ diverrà $F\left(m + \tfrac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right)$,

la quale dovrà svolgersi in una serie ordinata per le quantità

$a + \frac{1}{a}$, $a^2 + \frac{1}{a^2}$ &c.

Abbiamo per il Teorema di Taylor

$$F\left(m+\tfrac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right)=F\,m+\left(a+\frac{1}{a}\right)F'm+\tfrac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\cdot\frac{F''m}{2^2}$$

$$+\frac{1}{2\,.\,3}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3\frac{F'''m}{2^3}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2\,.\,3\ldots n}\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right)^n\frac{F^{(n)}m}{2^m}+\ldots.$$

ove $F^{(n)}\ m$ indica la quantità $\frac{d^n\ F^m}{d\ m^n}$. Nel caso di n pari il binomio $\left(a+\frac{1}{a}\right)^n$ conterrà un termine medio indipendente da a; e sarà questo termine medio

$$\frac{n(n-1)\,(n-2)\,\ldots\ldots\frac{n+2}{2}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\frac{n}{2}}$$

Ed in questo caso medesimo, i termini equidistanti dal medio contenendo le medesime potenze di a. e di $\frac{1}{a}$ moltiplicate per uno stesso coefficiente, sarà il termine generale dello sviluppo di $\left(a+\frac{1}{a}\right)^n$ ordinato per le quantità $a+\frac{1}{a}$, $a^2+\frac{1}{a^2}$ &c. della forma

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-h+1)}{2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots h}\left(a^{n-2h}+\frac{1}{a^{n-2h}}\right)$$

Nel caso poi di n dispari, questo termine generale sarà della forma stessa, ma nel totale sviluppo mancherà il termine medio indipendente da a.

Con queste riflessioni, potremo molto semplicemente ordinare la serie.

$$F\left(m+\tfrac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right) = F\ \left(m + \left(a+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{F'm}{2} + \tfrac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\frac{F''m}{2^2}\right.$$

$$+\frac{1}{2\,.\,3}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3\frac{F'''m}{2^3} + \text{\&c.}$$

per le quantità $a+\frac{1}{a}$, $a^2+\frac{1}{a^2}$, $a^3+\frac{1}{a^3}$, &c. E supponendo

$$F\left(m+\tfrac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right) = A + \tfrac{1}{2}A_1\left(a+\frac{1}{a}\right) + \tfrac{1}{2}A_2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}A^3\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$$

$$+\ldots\ldots+\tfrac{1}{2}A_x\left(a^x+\frac{1}{a^x}\right)+\ldots.$$

Facilmente troveremo che i coefficienti A, A_1, A_2...... A_x sono determinati dalle seguenti Equazioni

$$A = Fm + \frac{F''m}{2^2} + \frac{1}{2^2}\,\frac{F^{IV}}{2^4} + \frac{1}{2^2\,.\,3^2}\cdot\frac{F^{VI}m}{2^6} + \frac{1}{2^2\,.\,3^2\,.\,4^2}\cdot\frac{F^{VIII}m}{2^8}+\ldots$$

$$\frac{A_1}{2} = \frac{F'm}{2} + \tfrac{1}{2}\,\frac{F'''m}{2^3} + \frac{1}{2^2\,.\,3}\,\frac{F^{V}m}{2^5} + \frac{1}{2^2\,.\,3^2\,.\,4}\,\frac{F^{VII}m}{2^7}+\ldots.$$

$$\frac{A_2}{2} = \tfrac{1}{2}\,\frac{F''m}{2^2} + \frac{1}{2\,.\,3}\cdot\frac{F^{IV}m}{2^4} + \frac{1}{2^2\,.\,3\,.\,4}\cdot\frac{F^{VI}m}{2^6}+\ldots\ldots.$$

$$(K)\ldots\frac{A_3}{2} = \frac{1}{2\,.\,3}\,\frac{F'''m}{2^3} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}\cdot\frac{F^{V}m}{2^5}+$$

$$\vdots$$

$$\frac{A_x}{2} = \frac{1}{2\,.\,3\ldots x}\,\frac{F^x}{2^x} + \frac{1}{2\,.\,3\ldots(x+1)}\,\frac{F^{(x+1)}}{2^{x+2}}+$$

XXIII.

Queste serie possono facilmente verificarsi, facendo attenzione ad una legge generale che regna tra i coefficienti $A, A_1, A_2 \ldots A_x$. Avendosi infatti

$$F\left(m + \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right) = A + \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)A_1 + \tfrac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a}\right)A_2 + \ldots\ldots$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(a^x + \frac{1}{a^x}\right)A_x + \ldots\ldots$$

sarà, differenziando rapporto ad a

$$\tfrac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)F'\left(m + \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)A_1 + \tfrac{2}{2}\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)A_2$$

$$+ \tfrac{3}{2}\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)A_3 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x}{2}\left(a^x - \frac{1}{a^x}\right)A_x + \ldots\ldots\ldots$$

ma si ha ancora

$$F'\left(m + \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right) = \frac{dA}{dm} + \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\frac{dA_1}{dm}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\frac{dA_2}{dm} + : \&c.$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(a^x + \frac{1}{a^x}\right)\frac{dA_x}{dm} + \&c.$$

Quindi sostituendo nella formula precedente questo valore di

$F\left(m + \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right)$, otterremo la Equazione

$$\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)A_1 + \frac{2}{2}\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)A_2 + \frac{3}{2}\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)A_3 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x}{2}\left(a^x - \frac{1}{a^x}\right)A_x + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\left\{\frac{dA}{dm} + \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\frac{dA_1}{dm} + \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\frac{dA_2}{dm}\right.$$

$$\left. + \ldots\ldots + \frac{1}{2}\left(a^x - \frac{1}{a^x}\right)\frac{dA_x}{dm} + \&c.\right\}$$

osserviamo adesso che qualunque sia n abbiamo

$$\left(a^x + \frac{1}{a^x}\right)\left(a - \frac{1}{a}\right) = a^{x+1} - \frac{1}{a^{x+1}} - \left(a^{x-1} - \frac{1}{a^{x-1}}\right)$$

e facilmente vedremo che la nostra Equazione si trasformerà nella seguente

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)A_1 + 2\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)A_2 + 3\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)A_3 + \ldots\ldots$$

$$+ x\left(a^x - \frac{1}{a^x}\right)A_x + \&c.$$

$$+ (x+1)\left(a^{x+1} - \frac{1}{a^{x+1}}\right)A_{x+3} + \&c.$$

$$= \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\left\{\frac{dA}{dm} - \frac{dA_2}{dm}\right\} + \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)\left\{\frac{dA_1}{dm} - \frac{dA_3}{dm}\right\} + \&c. + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{2}\left(a^{x+1} - \frac{1}{a^{x+1}}\right)\left\{\frac{dA_x}{dm} - \frac{dA_{x+2}}{dm}\right\} + \&c.$$

Confrontando adesso i coefficienti delle quantità $a-\frac{1}{a}$, $a^2-\frac{1}{a^2}$, &c. otterremo

$$2\,(x+1)\,A^{x+1}=\frac{d\,A_x}{d\,m}-\frac{d\,A_{x+1}}{d\,m}+1$$

Equazione alla quale soddisfaranno le serie (K) che nel precedente articolo abbiamo ottenute (XXII).

XXIV.

Ma se vorremo conoscere più da vicino la natura delle quantità A, A_1, A_2 . . . . A_x, ovvero delle serie (K) che le rappresentano, e la scambievole loro dipendenza, prendiamo a considerare la serie infinita

$$z=F\,m+y\,\frac{F''\,m}{2^2}+\frac{y^2}{2^2}\,\frac{F^{IV}m}{2^4}+\frac{y^3}{2^2.3^2}\cdot\frac{F^{VI}m}{2^6}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{y^h}{2^2.3^2.h^2}\cdot\frac{F^{(2h)}}{2^{2h}}+\&c.$$

Se la confronteremo con la prima della serie (K), vedremo che nel caso di $y=1$, sarà $z=A$. Differenziando il valore generale di z rapporto ad y, avremo

$$\left(\frac{d\,z}{d\,y}\right)=\frac{F''m}{2^2}+\frac{y}{2}\,\frac{F^{IV}m}{2^4}+\frac{y^2}{2^2.3}\,\frac{F^{VI}m}{2^6}+\&c.$$

Se vi faremo $y=1$, e paragoneremo il resultato con la seconda delle serie (K), troveremo

$$\left(\frac{d\,z}{d\,y}\right)=\frac{1}{2^2}\,\frac{d\,A_1}{d\,m}$$

onde

$$A_1 = 2^2 \int \left(\frac{d\,z}{d\,y}\right) d\,m$$

purchè si faccia $y = 1$, dopo le differenziazioni. Con questa medesima condizione si avrà

$$\left(\frac{d^2 z}{d\,y^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{F^{IV} m}{2^4} + \frac{1}{2\,.\,3}\,.\,\frac{F^{VI} m}{2^6} + \frac{1}{2^2\,3\,.\,4}\,.\,\frac{F^{VIII} m}{2^8} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2^3}\,\frac{d^2 A_2}{d\,m^2}$$

$$\left(\frac{d^3 z}{d\,y^3}\right) = \frac{1}{2\,.\,3}\,.\,\frac{F^{VI} m}{2^6} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}\,\frac{F^{VIII} m}{2^8} + \ldots\ldots = \frac{1}{2^4}\,\frac{d^3 A_3}{d\,m^3}$$

e generalmente, nel caso di $y = 1$,

$$\left(\frac{d^x z_x}{d\,y^x}\right) = \frac{1}{2^{x+1}}\,\frac{d^x A_x}{d\,m^x}$$

e quindi

$$A_x = 2^{x+1} \int^x \left(\frac{d^x z}{d\,y^x}\right) d\,m^x$$

Pertanto tutto consisterà nella ricerca della somma della serie

$$z = F m + y\,\frac{F'' m}{2^2} + \frac{y^2}{2^2}\,\frac{F^{IV} m}{2^4} + \ldots\ldots$$

XXV.

Abbiamo trovato che il primo termine A è determinato dalla serie

$$A = Fm + \frac{1}{2} F''m + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{F^{IV} m}{2^4} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} \cdot \frac{F^{VI} m}{2^6} + \ldots\ldots$$

Da questa espressione, immediatamente otterremo gli Integrali definiti di una qualsivoglia potenza del coseno. Abbiamo infatti, integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$,

$$A = \int \frac{F(m + cos.\ \varphi)\, d\varphi}{\pi}$$

ovvero

$$A = Fm + \int cos.\ \varphi \,.\, d\varphi \,.\, F'm + \int \frac{(cos.\ \varphi)^2\, d\varphi}{2} \,.\, F''m$$

$$+ \int \frac{(cos.\ \varphi)^3\, d\varphi}{2\,.\,3} \,.\, F'''m + \&c.$$

ove gli integrali devono essere estesi da $\varphi = 0$ fino a $\varphi = \pi$. Confrontando questo valore di A col precedente, sarà, se h è pari

$$\int (cos.\ \varphi)^h\, d\varphi = \frac{\pi}{2^h} \; \frac{(\frac{h}{2}+1)(\frac{h}{2}+2)\ldots\ldots h}{1\,.\,2\,.\,3, \ldots \frac{h}{2}}$$

e se h è impari

$$\int cos.\ \varphi^h\, d\varphi = 0$$

con questi resultati, più facilmente giungeremo alle proprietà della serie

$$z = Fm + y \,.\, \frac{F''m}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} \, \frac{F^{IV} m}{2^4} + \ldots\ldots + \frac{y^h}{2^2\,.\,3^2 \ldots h^2} \,.\, \frac{F^{(2h)} m}{2^{2h}} + \&c.$$

dalla quale dipendono tutti i coefficienti A, A_1, A_2 . . . . . . A_x della espressione

$$F(m+\cos.\varphi)=A+A_1\cos.\varphi+A_2\cos.2\varphi+\ldots+A_x\cos.x\varphi+\ldots$$

XXVI.

Ed infatti, abbiamo primieramente

$$F(m+u\cos.\varphi)=Fm+u\cos.\varphi\,.\,F'm+\frac{u^2\cos.\varphi^2}{2}F''m$$
$$+\frac{u^3\cos.\varphi^3}{2\,.\,3}F'''m+\&c.$$

moltiplicando per $d\varphi$, ed integrando tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ si otterrà, dividendo per π

$$\frac{\int F(m+u\cos.\varphi)\,d\varphi}{\pi}=Fm+u^2\,.\,\frac{F''m}{2}+\frac{u^4}{2^2}\,.\,\frac{F^{IV}m}{2^4}$$
$$+\frac{u^6}{2^2\,.\,3^2}\,.\,\frac{F^{VI}m}{2^6}+\&c.\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{u^{2h}}{2^2\,.\,3\ldots h^2}\,\frac{F^{(2h)}m}{2^{2h}}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ciò è facendo $u=\sqrt{y}$

$$\frac{(Fm+\sqrt{y}\,.\cos.\varphi)}{\pi}\,d\varphi=Fm+y\frac{F''m}{2^2}+\frac{y^2}{2^2}\,.\,\frac{F^{IV}m}{2^4}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{y^h}{2^2\,.\,3^2\ldots.h^2}\,.\,\frac{F^{(2h)}m}{2^{2h}}+\ldots\ldots$$

la quale infinita serie è identica con quella che esprime il valore di z. Sarà pertanto

$$z = \frac{\int F(m + \sqrt{y} \,.\, cos.\, \varphi)}{\pi} .\quad d\varphi$$

integrando al solito tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.

Ottenuto il valore di z, facilmente avremo quello del termine generale A_x della serie che esprime la funzione $F(m + cos.\, \varphi)$ svolta per i coseni degli archi moltiplici. Abbiamo infatti veduto essere (XXIV).

$$A_x = 2^{x+1} \int^x \left(\frac{d^x\, z}{d\, y^x}\right) d\, m^x$$

parchè si faccia $y = 1$ dopo le differenziazioni. Sostituendovi in luogo di z il suo valore, sarà anche

$$A_x = \frac{2^{x+1}}{\pi} \int^x \; d\, m^x \int \left(\frac{d^x\, F(m + \sqrt{y} \,.\, cos.\, \varphi)}{d\, y^x}\right) d\, \varphi$$

Ciò è per l' indipendenza delle variabili

$$A_x = \frac{2^{x+1}}{\pi} \left\{ \frac{d^x \,.\, \int^x d\, m^x \int F(m + \sqrt{y} \,.\, cos.\, \varphi)\, d\, \varphi}{d\, y^x} \right\}$$

ove l' integrale $\int F(m + \sqrt{y} \,.\, cos.\, \varphi)$ deve prendersi tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, e dove deve essere supposto $y = 1$, dopo eseguite le differenziazioni rapporto ad esso.

Vedesi dunque che tutti i coefficienti A, A_1, $A_2 \ldots A_x$ dipendono da uno stesso integrale definito, e che gli uni dagli altri differiscono per le integrazioni e differenziazioni che sopra di questo conviene eseguire rapporto a due distinte variabili.

XXII.

Noi potremo avere il valore del termine generale A_x anche sotto una più semplice forma. A tale oggetto riprendiamo le due

Equazioni

$$A_x = 2^{x+1} \int d^x m^x \left(\frac{d^x z}{d y^x}\right)$$

$$z = \int \frac{F(m + \sqrt{y} . \cos \varphi).d\varphi}{\pi}$$

poi avremo differenziando rapporto ad y questo valore di z,

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \int \frac{\cos.\varphi . d\varphi \, F'(m + \sqrt{y} \cos.\varphi)}{\pi}$$

moltiplicando per dm, ed integrando rapporto a dm, si avrà, osservando che l' indipendenza delle variabili permette di posporre i segni sommatorj

$$\int \left(\frac{dz}{dy}\right) dm = \frac{1}{2\sqrt{y}} \int \frac{\cos.\varphi . d\varphi \, F(m + \sqrt{y}.\cos.\varphi)}{\pi}$$

Ma nel caso di $y = 1$, abbiamo

$$A_1 = 2^2 \int d\,m \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

Quindi sarà

$$A_1 = 2 \int \frac{\cos.\varphi . d\varphi \, F(m + \cos.\varphi)}{\pi}$$

Differenziando adesso rapporto ad y il valore di $\int \left(\frac{dz}{dy}\right) dm$, avremo

$$\int \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) dm = \frac{1}{4\pi y} \left\{ \int \overline{\cos.\,\varphi}^2 . d\varphi \, F'(m + \sqrt{y}.\cos\varphi) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{y}} \int \cos.\varphi . d\varphi \, F(m + \sqrt{y}.\cos.\varphi) \right\}$$

ma tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$, si sia

$$\int \cos.\varphi\, d\varphi\, F(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)=\sqrt{y}\int \overline{\operatorname{sen}.\varphi}^2.d\varphi F'(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)$$

onde sostituendo, si avrà

$$\int\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dm=\frac{1}{4\pi y}\int\left\{\overline{\cos.\varphi}^2-\overline{\operatorname{sen}.\varphi}^2\right\}d\varphi.F'(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)$$

$$=\frac{1}{4\pi y}\int \cos.2\varphi.d\varphi.F'(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)$$

ed integrando rapporto ad m

$$\int^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dm^2=\frac{1}{4\pi y}\int \cos.2\varphi.d\varphi.F(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)$$

ma, facendo $y=1$ dopo le differenziazioni, si ha

$$A_2=2^3\int^2 dm^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

Quindi sarà

$$A_2=2\int\frac{\cos.2\varphi.F(m+\cos.\varphi)}{\pi}$$

Avremo nella stessa maniera differenziando rapporto ad y il valore ottenuto di $\int^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dm^2$

$$\int^2\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)dm^2=\frac{1}{4\pi y}\left\{\int\frac{1}{2.\sqrt{y}}\cos.\varphi.\cos.2\varphi.d\varphi F'(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{y}\int \cos.2\varphi F(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)\right\}$$

ma abbiamo tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$

$$\int \cos.2\varphi.d\varphi\,F(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)$$

$$=\frac{\sqrt{y}}{2}\int \text{sen.}\,\varphi.\text{sen.}\,2\varphi.d\varphi\,F'(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)$$

Quindi sostituendo

$$\int^2\left(\frac{d^3 z}{d y^3}\right) d m^2=\frac{1}{8\pi y^{\frac{3}{2}}}\int(\cos.\varphi.\cos.2\varphi$$

$$-\text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,2\varphi)\,d\varphi.F'(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)$$

ossia

$$\int^2\left(\frac{d^3 z}{d y^3}\right) d m^2=\frac{1}{8\pi y^{\frac{3}{2}}}\int \cos.3\varphi.d\varphi\,F'(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)$$

ed integrando rapporto ad m

$$\int^3\left(\frac{d^3 z}{d y^3}\right) d m^3=\frac{1}{8\pi y^{\frac{3}{2}}}\int \cos.3\varphi.d\varphi.F(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)$$

nel caso di $y=1$, si ha

$$A_3=2^4\int^3\left(\frac{d^3 z}{d y^3}\right) d m^3$$

onde ancora

$$A_3=2\int\frac{\cos.3\varphi.d\varphi.F(m+\cos.\varphi)}{\pi}$$

così seguitando, dedurremo generalmente

$$A_x=2\int\frac{\cos.x\varphi.d\varphi.F(m+\cos.\varphi)}{\pi}$$

prendendo l'integrale da $\varphi=0$ fino a $\varphi=\pi$

XXVIII.

Questo resultato è generale, e per convincersene maggiormente, supponghiamo che siasi ottenuto

$$\int^b \left(\frac{d^b z}{d y^b}\right) d m^b = \frac{1}{2^b . \pi y^{\frac{b}{2}}} \int cos. h \varphi . \mathrm{F}(m + \sqrt{y} . cos. \varphi)$$

Avremo differenziando rapporto ad y

$$\int^b \left(\frac{d^{b+1} z}{d y^{b+1}}\right) d m^b = \frac{1}{2^{b+1} \pi y^{\frac{b}{2}} + 1} \left\{ \int cos. h \varphi . cos. \varphi . \mathrm{F}' (m + \sqrt{y} . cos. \varphi) d\varphi \right.$$

$$\left. - \frac{x}{\sqrt{y}} \int cos. h \varphi . d\varphi \, \mathrm{F} (+ \sqrt{y} . cos. \varphi) \right\}$$

Ma tra i limiti $\varphi = o, \varphi = \pi$, abbiamo

$$\int cos. h \varphi . d \varphi . \mathrm{F}(m + \sqrt{y} . cos. \varphi)$$

$$= \frac{\sqrt{y}}{h} \int sen \varphi . sen. h \varphi . \mathrm{F}'(m + \sqrt{y} cos. \varphi) d \varphi$$

onde sostituendo

$$\int^b \left(\frac{d^{b+1} z}{d y^{b+1}}\right) d m^b = \frac{1}{2^{b+1} \pi y^{\frac{b}{2}}} \left\{ \int (cos. \varphi . cos. h \varphi \right.$$

$$\left. - sen. \varphi . sen. h \varphi) d \varphi . \mathrm{F}' (m + \sqrt{y} . cos. \varphi) \right\}$$

$$= \int \frac{cos. (h + 1) \varphi . d \varphi . \mathrm{F}' (m + \sqrt{y} . cos. \varphi)}{2^{b+1} . \pi . y^{\frac{b}{2}}}$$

ed integrando rapporto ad m

$$\int^{b+1}\left(\frac{d^{b+1}z}{dy^{b+1}}\right)dm^{b+1}=\int\frac{\cos.(h+1)\varphi.d\varphi\,F(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)}{2^{b+1}.\pi.y^{\frac{b}{2}}}$$

Pertanto questa formula verificandosi di ordine in ordine, rimane completamente dimostrata.

XXIX.

La formula $A_x=2\int\frac{\cos.x\varphi\;F(m+\cos.\varphi)\,d\varphi}{\pi}$ potrebbe anche ricavarsi da una semplicissima considerazione.

Abbiamo infatti

$$F(m+\cos.\varphi)=A+A_1\cos.\varphi+A_2\cos.2\varphi+A_3\cos.3\varphi+\ldots$$
$$+A_x\cos.x\varphi+\ldots$$

Moltiplicando per $\cos.x\varphi$, ed integrando tra i limiti $\varphi=0, \varphi=\pi$, si otterrà la quantità $\int\cos.x\varphi.F(m+\cos.\varphi)\,d\varphi$ espressa per una serie di termini della forma

$$A_b\int\cos.x\varphi.\cos.h\varphi.d\varphi$$

ma si ha

$$\cos.x\varphi.\cos.h\varphi=\frac{\cos.(x+h)\varphi+\cos.(x-h)\varphi}{\pi}$$

Quindi questo termine generale farà

$$A_b\left\{\frac{\mathrm{sen}.(x+h)\varphi}{x+h}+\frac{\mathrm{sen}.(x-h)\varphi}{x-h}\right\}$$

Se adesso prenderemo questa quantità nei limiti convenuti, i termini tra le parentesi saranno sempre $=0$, meno nel termine della serie ove $x=h$. Per questo caso infatti esiste il termine

$$\frac{\mathrm{sen}.(x-h)\varphi}{x-h}$$

il quale sebbene sia $\frac{0}{0}$ allorchè $x=h$, pure ha un valore determinato, che trovasi con il conosciuto metodo essere $=\varphi$; quindi nel caso nostro diverrà il solo termine che nella serie non si annulla

$$\frac{\pi}{2} A_h$$

Sarà dunque

$$\int \cos. h\varphi . F(m + \cos.\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2} A_h$$

ossia

$$A_h = 2 \int \frac{\cos. h\varphi\, F(m + \cos.\varphi)\, d\varphi}{\pi}$$

XXX.

Nel cercare le evoluzioni delle formule $\log.(m + \cos.\varphi)\, d\varphi$ $\frac{1}{m + \cos.\varphi}$, &c. siamo sul principio di queste ricerche pervenuti ad assegnare per i termini generali dei respettivi sviluppi altrettante Equazioni differenziali da cui dipendono. Per tanto a queste Equazioni dovranno sodisfare questi termini generali sotto la forma quì sopra assegnata, ossia sotto la forma d'integrale definito.

Per vederne qualche esempio, consideriamo la Equazione

$$\frac{d^2 A_x}{d m^2} + \frac{m}{m^2 - 1} \frac{d A_x}{d m} - \frac{x^2}{m^2 - 1} A_x = o$$

che rappresenta il termine generale A_x dello sviluppo di $\log.(m + \cos.\varphi)$. A quella Equazione dovrà per tanto sodisfare

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int \cos x\varphi . d\varphi \log.(m + \cos\varphi)$$

Abbiamo infatti, integrando per parti

$$\pi\frac{A_x}{2}=\frac{1}{x}\cdot sen.\,x\varphi\,log.\,(m+cos.\,\varphi)+\frac{1}{x}\int\frac{sen.\,\varphi\,sen.\,x\varphi}{m+cos.\,\varphi}\cdot d\varphi$$

quantità, che dovendo esser presa tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ si riduce manifestamente alla più semplice forma

$$\pi\cdot\frac{A_x}{2}=\frac{1}{x}\int\frac{sen.\,\varphi\,.\,sen.\,x\varphi}{m+cos.\,\varphi}\cdot d\varphi$$

e nuovamente integrando per parti, si avrà

$$\pi\frac{A_x}{2}=\frac{1}{x^2}\int cos.\,x\varphi\,.\,\frac{m\,cos.\,\varphi+1}{(m+cos.\,\varphi)^2}\cdot d\varphi$$

ossia

$$A_x=\frac{2}{\pi\,.\,x^2}\int cos.\,x\varphi\,\frac{m\,cos.\,\varphi+1}{(m+cos\,\varphi)^2}\,d\varphi$$

Parimente avremo

$$\frac{dA_x}{dm}=\frac{2}{\pi}\int\frac{d\varphi\,.\,cos.\,x\varphi}{m+cos.\,\varphi}=\frac{2}{\pi}\int\frac{d\varphi\,.\,cos.\,x\varphi\,(m+cos.\,\varphi)}{(m+cos.\,\varphi)^2}$$

$$\frac{d^2A_x}{dm^2}=-\int\frac{d\varphi\,.\,cos.\,x\varphi}{(m+cos.\,\varphi)^2}$$

E sostituendo nella proposta questi valori, si perverrà ad un resultato identico.

Abbiamo di sopra trovato (XXIII) che tra i coefficienti dei coseni degli archi moltiplici ha generalmente luogo la Equazione

$$2\,(x+1)\,x+2\,A_{x+1}=\frac{dA_x}{dm}-\frac{dA_{x+2}}{dm}$$

Pertanto a questa Equazione dovrà sodisfare

$$A_x=\frac{2}{\pi}\int cos.\,x\varphi\,.\,d\varphi\,.\,F\,(m+cos.\,\varphi)$$

Abbiamo infatti

$$A_{x+1}=\frac{2}{\pi}\int cos.(x+1)\varphi.d\varphi.F(m+cos.\varphi)$$

cioè integrando per parti

$$A_{x+1}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{sen.(x+1)\varphi}{x+1}.\ F(m+cos.\varphi)$$
$$+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{x+1}\int sen.(x+1)\varphi.sen.\varphi.F'(m+cos.\varphi)d\varphi$$

che per le condizioni si riduce

$$A_{x+1}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{x+1}\int sen.(x+1).\varphi.sen.\varphi.d\varphi.F'(m+cos.\varphi)$$

Si ha inoltre

$$\frac{1}{2}\ \frac{dA_x}{dm}=\int cos.x\varphi.F'(m+cos.\varphi).d\varphi.$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{dA_{x+2}}{dm}=\int cos.(x+2)\varphi.F'(m+cos.\varphi).d\varphi.$$

Quindi sostituendo questi valori nella proposta Equazione, avremo

$$\int F'(m+cos.\varphi).d\varphi\left\{2.sen.(x+1)\varphi.sen.\varphi-cos.x\varphi+cos.(x+2).\varphi\right\}=0$$

resultato identico, poichè si ha

$$sen.(x+1)\varphi.sen.\varphi=\frac{cos.x\varphi-cos.(x+2)\varphi}{2}$$

Potrebbesi ancora rappresentar l' Integrale di questa Equazione, e di tutte quelle che svolgendo le funzioni $log.(m+cos.\varphi)$, $\frac{1}{m+cos.\varphi}$, &c. abbiamo ottenuto, prevalendoci della formula

$$A_x=\frac{2^{x+1}}{\pi}\left\{\frac{d^x\int^x dm^x\int F(m+\sqrt{y}.cos.\varphi)d\varphi}{dy^x}\right\}$$

ove l' Integrale $\int F\,(m + \sqrt{y}\cos.\phi)\,d\phi$ deve esser preso tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$, e dove, eseguite le differenziazioni rapporto ad y deve supporsi $y = 1$. Abbiamo infatti trovato (XXVI) questa espressione per il termine generale A_x della serie

$$F\,(m + \cos.\phi) = A + A_1\cos.\phi + A_2\cos.2\phi + \ldots\ldots + A_x\cos.x\phi + \ldots\ldots$$

Ed abbiamo successivamente (XXVII) dimostrata l' identità della formula

$$\frac{2^{x+1}}{\pi}\left\{\frac{d^x\int^x dm^x\int F\,(m + \sqrt{y}\,.\cos.\phi)\,d\phi}{dy^x}\right\}$$

con l' altra

$$\frac{2}{\pi}\int\cos.x\phi\,.\,d\phi\,.\,F\,(m + \cos.\phi)$$

prendendo l' integrale da $\phi = 0$ sino a $\phi = \pi$.

XXXI.

Abbiamo pertanto dimostrato che data la formula $F\,(m + \cos.\phi)$ da svolgersi per i coseni degli archi moltiplici di ϕ in modo che si abbia

$$F\,(m + \cos.\phi) = A + A_1\cos.\phi + A_2\cos.2\phi + \ldots + A_x\cos.x\phi + \ldots$$

il termine generale A_x è rappresentato dalla Equazione

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int\cos.x\phi\,.\,d\phi\,F\,(m + \cos.\phi)$$

integrando tra i convenuti limiti. Questo medesimo resultato si otterrà quando più generalmente prenderemo una funzione della forma $F\,(m,\phi)$ da svolgersi in una serie analoga. Egli è facile infatti il convincersi che il ragionamento impiegato (XXIX) per assegnare il termine generale dello sviluppo della funzione $F\,(m + \cos.\phi)$ è affatto indipendente dalla indole di questa funzione stessa, e si applica a qualunque formula dipendente da φ. Se dunque faremo

$$F(m,\varphi) = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + \ldots\ldots + A_x \cos.x\varphi + \ldots\ldots$$

Sarà il termine generale A_x assegnato dalla formula

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int d\varphi.\cos.x\varphi.F(m,\varphi)$$

integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.

Prima per altro di applicar questo metodo a qualsivoglia funzione è necessario assicurarsi della possibilità di ridurla in una serie della forma assegnata; poichè, omettendo questa precauzione, si troverebbero spesso, per i coefficienti dei coseni degli archi multipli, valori infiniti, o imaginarj, appunto come accade nei casi in cui la serie di Taylor è in difetto.

XXXII.

Per dare un semplicissimo esempio di questo metodo, proponghiamoci di svolgere l'arco φ in una serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici. Sarà $F(m,\varphi) = \varphi$, e quindi il termine generale A_x sarà determinato dalla Equazione

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int \varphi \cdot d\varphi.\cos.x\varphi$$

integrando tra i limiti stabiliti. Ora si ha

$$\int \varphi\, d\varphi.\cos.x\varphi = \frac{\text{sen}.x\varphi}{x} - \frac{1}{x}\int d\varphi.\text{sen}.x\varphi$$

che per le condizioni si riduce ad

$$\int \varphi \cdot d\varphi \cdot \cos. x\varphi = -\frac{1}{x}\int d\varphi \,\text{sen.}\, x\varphi = \frac{1}{x^2}(\cos. x\pi - 1)$$

sarà pertanto

$$A_x = \frac{2}{\pi \cdot x^2}(\cos. x\pi - 1)$$

Quindi apparisce che nei casi in cui sia x pari sarà sempre $A_x = 0$; e se sarà x dispari $= 2n + 1$, avremo

$$A_{2n+1} = \frac{-2^2}{\pi(2n+1)^2}$$

Sostituendo questi valori nella serie

$$\varphi = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos. 2\varphi + \ldots\ldots$$

otterremo immediatamente, osservando che $A = \int \frac{\varphi\, d\varphi}{\pi} = \frac{\pi}{2}$,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{2^2}{\pi}\left(\cos.\varphi + \frac{1}{9}\cos. 3\varphi + \frac{1}{25}\cos. 5\varphi + \frac{1}{49}\cos. 7\varphi + \ldots\ldots\right)$$

serie sommamente osservabile, e convergentissima, poichè qualunque sia φ, si ha sempre $\cos. h\varphi < 1$.

Facendovi $\varphi = 0$, otterremo

$$\frac{\pi^2}{2^3} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots\ldots$$

resultato che abbiamo per altra strada ottenuto (XVI), e che Euler il primo riconobbe, deducendolo per induzione dalla decomposizione della formula $e^{\omega} - e^{-\omega}$ nei suoi infiniti fattori.

Se in luogo della prima potenza dell'arco φ, si volesse la evoluzione di una qualunque potestà m dell'arco stesso, in modo che fosse

$$\varphi^m = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + \ldots\ldots + A_x \cos.x\varphi + \ldots\ldots;$$

si otterrebbe il termine generale A_x dalla Equazione

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int \varphi^m \, d\varphi \,.\, \cos.\, x\varphi$$

purchè le integrazioni si eseguiscano tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. Abbiamo integrando per parti

$$\int \varphi^m d\varphi \cos.x\varphi = \frac{\varphi^m \,sen.\, x\varphi}{x} + \frac{m}{x^2}\varphi^{m-1} \,.\, \cos.\, x\varphi - \frac{m(m-1)}{x^2}\int \varphi^{m-2} \,.\, d\varphi \cos x\varphi$$

dalla qual formula mediante le successive sostituzioni, troveremo nel caso di m pari

$$\int \varphi^m d\varphi \,.\, \cos.x\varphi = sen.\,x\varphi\left(\frac{\varphi^m}{x} - \frac{m(m-1)}{x^3}\varphi^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{x^5}\varphi^{m-4} - \&c.\right)$$

$$+ \cos.\,x\varphi\left(\frac{m}{x^2}\varphi^{m-1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{x^4}\varphi^{m-3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{x^6}\varphi^{m-5} - \&c.\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\ldots \pm \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots 3 \,.\, 2}{x^m} \,.\, \varphi\right)$$

ove il segno superiore conviene nel caso di $\frac{m}{2}$ dispari, e l'inferiore dovrà preferirsi se $\frac{m}{2}$ è pari. Prendendo ora questo integrale indefinito tra i limiti determinati $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, avremo moltiplicando per $\frac{2}{\pi}$

$$\frac{2}{\pi}\int \varphi^m \, d\varphi \,.\, \cos.\,x\varphi = \pm 2\left\{\frac{m\pi^{m-2}}{x^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{x^4}\pi^{m-4}\right.$$

$$\left.+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{x^6}\pi^{m-6} - \&c.\ldots\ldots \pm \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.3\,.\,2}{x^m}\right\}$$

dove nel duplice segno premesso alla parentesi dovrà scegliersi il positivo se x è pari, ed il negativo se x è impari. Questa espressione rappresenterà il valore del termine generale A_x nella serie

$$\varphi^m = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos. 2\varphi + \ldots\ldots + A_x \cos. x\varphi + \ldots\ldots$$

ed essendo $A = \int \frac{\varphi^m d\varphi}{\pi}$ tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, sarà

$$A = \frac{1}{m+1} \cdot \pi^m$$

Pertanto sostituendo questi valori nella nostra serie, avremo

$$\begin{aligned}
\varphi^m = \frac{1}{m+1} \cdot \pi^m - 2 \Big\{ & m\,\pi^{m-2} - m(m-1)(m-2)\,\pi^{m-4} \\
& + m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\,\pi^{m-6} - \&c. \Big\} \cos.\varphi \\
& + 2 \Big\{ \frac{m\,\pi^{m-2}}{2^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2^4}\,\pi^{m-4} \\
& + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\,\pi^{m-6}}{2^6} - \&c. \Big\} \cos. 2\varphi \\
& - 2 \Big\{ \frac{m\,\pi^{m-2}}{3^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{3^4}\,\pi^{m-4} \\
& + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\,\pi^{m-6}}{3^6} - \&c. \Big\} \cos. 3\varphi \\
& \vdots \\
& \pm 2 \Big\{ \frac{m\,\pi^{m-2}}{x^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{x^4}\,\pi^{m-4} \\
& + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{x^6}\,\pi^{m-6} - \&c. \Big\} \cos. x\varphi \\
& \mp \&c.
\end{aligned}$$

Se in questa Equazione si farà $\varphi = 0$, e si ordinerà il resultato per le potenze di π, il che molto semplicemente potremo eseguire, essendo le simili potestà di π tutte verticalmente disposte, e con lo stesso coefficiente in m, si avrà

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\pi^m}{m+1} &- 2\, m\, \pi^{m-2} \left\{ 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \&c. \right\} \\
&+ 2\, m\, (m-1)\, (m-2)\, .\, \pi^{m-4} \left\{ 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \&c. \right\} \ldots\ldots\ldots (B) \\
&- 2\, m\, (m-1)(m-2)(m-3)\, (m-4)\, \pi^{m-6} \left\{ 1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \&c. \right\} \\
&+ \&c.
\end{aligned}
$$

Equazione che a priori dimostra le formule per induzione ottenute da Euler per la somma generale della serie infinita

$$1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

Se nella Equazione (B) si facesse $m = 2$, avrebbesi

$$\frac{\pi^2}{3 \,.\, 4} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \ \&c.$$

Risostituendovi questo valore, e facendo quindi successivamente $m = 4$, 6, &c. si otterrà la somma della serie (C).

Questi resultati appartengono al caso di m pari: se ne otterrebbero dei simili se si fosse supposta m dispari; non ci tratteremo a svilupparli, poichè non presentano nessuna difficoltà.

XXXIII.

La general funzione $F.\varphi$, che abbiamo veduto (XXXI) potersi ridurre in serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici, facilmente potrà ancora svolgersi in una serie che proceda per i seni degli archi stessi. Ed in infatti se col segno $\Sigma A_h . sen. h\varphi$ denoteremo la quantità

$$A_1 \, sen.\varphi + A_2 \, sen. 2\varphi + A_3 \, sen\, 3\varphi + \ldots\ldots$$

noi avremo

$$F.\varphi = A + \Sigma A_h \, sen. h\varphi$$

ove il primo termine A sarà sempre conosciuto, ed eguale a $F.\varphi$ ove sia stato fatto $\varphi = o$. Moltiplicando quella Equazione per $sen. x\varphi . d\varphi$, ed integrando, si avrà

$$\int sen. x\varphi . d\varphi . F.\varphi = -\frac{1}{x} A . cos. x\varphi + \Sigma . A_h . \int sen. h\varphi . sen. x\varphi . d\varphi.$$

Se ora prenderemo questi integrali tra i limiti $\varphi = o$, $\varphi = \pi$, è facile il vedere che in queste supposizioni sarà sempre

$$\int sen. h\varphi . sen. x\varphi . d\varphi = o$$

meno nel caso in cui sia $h = x$. Si ha in questa circostanza

$$\int (sen.\, x\varphi)^2 . d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

e quindi la quantità $\Sigma . A_h \int sen. x\varphi \, sen. h\varphi \, d\varphi$ si ridurrà al termine unico $\frac{\pi}{2} A_x$.

Pertanto apparisce che la Equazione

$$\int F.\varphi . sen. x\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{x} A . cos. x\varphi + \Sigma A_h . \int sen\, h . sen. x\varphi . d\varphi$$

si trasformerà nell'altra

$$\int sen.\,x\,\varphi\,.\,d\,\varphi\,.\,\mathrm{F}\,.\,\varphi = \frac{\mathrm{A}}{x}\left(1-cos.\,x\,\pi\right)+\frac{\pi}{2}\,.\,\mathrm{A}_x$$

Quindi nel caso di x pari

$$\mathrm{A}_x = \frac{2}{\pi}\int sen.\,x\,\varphi\,.\,d\,\varphi\,.\,\mathrm{F}\,.\,\varphi$$

e nel caso di x dispari

$$\mathrm{A}_x = \frac{2}{\pi}\int sen.\,x\,\varphi\,.\,d\,\varphi\,.\,\mathrm{F}\,.\,\varphi - 4\,\frac{\mathrm{A}}{\pi\,x}$$

XXXIV.

Riprendiamo l'esempio superiore, e vogliasi l'arco φ svolto in serie per i seni degli archi moltiplici. Facendo

$$\varphi = \mathrm{A} + \mathrm{A}_1\,sen.\,\varphi + \mathrm{A}_2\,sen.\,2\,\varphi + \ldots\ldots + \mathrm{A}_x\,sen.\,x\,\varphi + \ldots\ldots;$$

sarà in primo luogo $\mathrm{A}=0$. Avremo inoltre $\mathrm{F}\,.\,\varphi=\varphi$; e quindi

$$\mathrm{A}_x = \frac{2}{\pi}\int.\,sen.\,x\,\varphi\,.\,d\,\varphi\,.\,\mathrm{F}\varphi = \frac{2}{\pi}\int\varphi\,d\,\varphi\,.\,sen.\,x\,\varphi;$$

integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. In queste supposizioni, abbiamo

$$\int\varphi\,d\varphi\,.\,sen.\,x\,\varphi = -\frac{\pi}{x}\,.\,cos.\,x\,\pi$$

e pertanto

$$\mathrm{A}_x = -\frac{2}{x}\,.\,cos.\,x\,\pi$$

cioè nel caso di x pari, $\mathrm{A}_x = -\frac{2}{x}$; e nel caso di x dispari, $\mathrm{A}_x = \frac{2}{x}$. Sostituendo questi valori nella serie assegnata, otterremo

$$\frac{\varphi}{2} = sen.\,\varphi - \frac{1}{2}\,sen\,2\,\varphi + \frac{1}{3}\,sen.\,3\,\varphi - \frac{1}{4}\,sen.\,4\,\varphi + \&c.$$

serie conosciuta.

Se faremo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ = al quadrante, si avrà

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c.$$

serie parimente nota, e di cui il primo inventore è Leibnitz. Se si volesse una qualsivoglia potenza dell' arco svolta in una serie di questa forma, opereremo come abbiamo precedentemente fatto (XXXII) allorchè la serie assegnata procedeva per i coseni, e giungeremo ad espressioni egualmente osservabili.

XXXV.

Con questo metodo stesso si potranno mettere in evidenza dei nuovi rapporti che passano tra le differenti funzioni del Circolo, dai quali rapporti vedremo discendere come casi particolari tutte quelle interessanti, e curiose espressioni ottenute per induzione dall' illustre Euler per rappresentare in serie la Periferia circolare, e le relazioni che passano tra questa ed alcune sue determinate funzioni. Ad oggetto di evitare una soverchia complicazione ci limiteremo ad indicare i resultati più generali, e più osservabili che derivano dal metodo usato, poichè la di lui uniformità ci dispensa dalle più particolari ricerche, alle quali ognuno potrà supplire.

XXXVI.

Proponghiamoci primieramente di svolgere il seno dell' arco φ in una serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici. Ponghiamo quindi come precedentemente

$$sen.\ \varphi = A + A_1 cos.\varphi + A_2 cos. 2\varphi + A_3 cos. 3\varphi + ... + A_x cos. x\varphi + ...$$

noi avremo (XXXI)

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int sen.\ \varphi\ .\ cos.\ x\ \varphi\ .\ d\ \varphi$$

integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. Abbiamo, come è noto,

$$sen.\ \varphi\ .\ cos.\ x\ \varphi = \frac{sen.\ (x+1)\ \varphi - sen.\ (x-1)\ \varphi}{2}$$

e quindi anche

$$2 \int sen.\ \varphi\ cos.\ x\ \varphi\ d\varphi = -\frac{1}{x+1}.\ cos.\ (x+1)\ \varphi + \frac{1}{x-1}\ cos.\ (x-1)\ \varphi$$

e facilmente vedrassi che nelle condizioni stabilite si avrà nel caso di x pari

$$2 \int sen.\ \varphi\ .\ cos.\ x\ \varphi\ .\ d\ \varphi = \frac{-4}{x^2-1}$$

e nel caso di x dispari

$$2 \int sen.\varphi\ .\ cos.\ x\ \varphi\ .\ d\ \varphi = 0$$

Quindi se x è pari, avremo $A_x = -\frac{4}{\pi\ (x^2-1)}$, e se x è dispari, sarà $A_x = 0$. Abbiamo inoltre

$$A = \int \frac{sen\ \varphi . d\varphi}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

e quindi sostituendo si otterrà

$$sen.\ \varphi = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{cos.\ 2\ \varphi}{2^2-1} + \frac{cos.\ 4\ \varphi}{4^2-1} + \frac{cos.\ 6\ \varphi}{6^2-1} \ .... + \frac{cos.\ 2\ h\ \varphi}{4\ h^2-1} + .. \right\}$$

resultato assai singolare. Ne dedurremo

$$\pi = \frac{2}{sen.\,\varphi}\left\{1 - 2\left(\frac{cos.\,2\varphi}{2^2-1} + \frac{cos.\,4\varphi}{4^2-1} + ..\right)\right\}$$

dalla qual serie ne deriveranno infinite altre tutte convergenti per calcolare il valore di π, poichè qualsivoglia valore abbia φ, è sempre $cos.\,h\varphi < 1$. Se faremo $\varphi = 90^\circ$, si ha

$$\frac{\pi - 2}{4} = \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - ....$$

Facendovi $\varphi = o$, avremo

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + ...$$

cioè aggiungendo con la precedente, otterremo

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{10^2-1} + \frac{1}{14^2-1} + ...$$

serie convergentissima.

Se nella serie ottenuta

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + ...$$

trasporteremo nel primo membro prima un termine del secondo, quindi due, tre, &c., avremo riducendo

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + ...$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + ...$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2(x-1)} = \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{(x+2)^2-1} + ...$$

La quale espressione, offrendo la somma di una nuova serie, porge il modo di sommare un numero qualunque di termini della serie proposta

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \dots$$

Sottraendola infatti da questa, si avrà

$$\frac{x-2}{2(x-1)} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \dots\dots + \frac{1}{(x-2)^2-1}$$

Si può verificare la serie trovata

$$\frac{\pi-2}{4} = \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - \frac{1}{8^2-1} + \dots$$

nella seguente maniera. Cerchiamo la somma U della serie

$$U = \frac{x^{2+1}}{2^2-1} - \frac{x^{4+1}}{4^2-1} + \frac{x^{6+1}}{6^2-1} - \frac{x^{8+1}}{8^2-1} + \&c.$$

noi avremo differenziando

$$\frac{dU}{dx} = x^2 - \frac{x^4}{4-1} + \frac{x^6}{6-1} + \frac{x^8}{8-1} + \&c. = x\, arc.\, tang.\, x$$

Quindi integrando

$$U = e + \int x\,dx\, arc.\ tang.\ x$$

ove e è una arbitraria. Noi abbiamo

$$\int x\,dx\,.arc.tang.\ x = \frac{x^2}{2}\ arc.tang.\ x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$$

ed essendo $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$, sarà $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = x - arc.\ tang.\ x$;

cioè sostituendo

$$U = e + \frac{1}{2}(x^2+1)\,arc.tang.x - \frac{x}{2}$$

ove la indeterminata e sarà $=0$, poichè U divien tale se $x=0$; onde

$$U = \frac{(x^2+1)\,arc.tang.x - x}{2} = \frac{x^3}{2^2-1} - \frac{x^5}{4^2-1} + \frac{x^7}{6^2-1} - \&c.$$

Facendovi $x=1$, sarà $arc.tang.x = 45° = \frac{\pi}{4}$; e quindi

$$\frac{\pi-2}{4} = \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - \&c.$$

come sopra.

XXXVII.

Se per una maggior generalità ci proporremo di svolgere in serie per i coseni degli archi moltiplici di φ la funzione $sen.\,n\varphi$, converrà far distinzione tra il caso di n pari, ed il caso di n dispari. Sarà infatti il termine generale della serie assegnata

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int sen.\,n\varphi . cos.\,x\varphi . d\varphi$$

cioè effettuando la integrazione tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$

$$A_x = \frac{1}{\pi(x+n)}\left\{cos.(x+n)\pi - 1\right\} - \frac{1}{\pi(x-n)}\left\{cos.(x-n)\pi - 1\right\}$$

Supponghiamo adesso che sia n dispari. E' evidente che in tal caso, se x sarà anch'esso dispari, avremo

$$A_x = 0$$

e se x sarà pari

$$A_x = - \frac{4\,n}{\pi\,(x^2 - n^2)}$$

Ed avendosi inoltre

$$A = \frac{1}{\pi} \int sen.\, n\varphi . d\varphi = \frac{2}{n\pi}$$

si avrà sostituendo questi valori nella espressione

$$sen.\, n\varphi = A + A_1\, cos.\, \varphi + A_2\, cos.\, 2\,\varphi + \ldots + A_x\, cos.\, x\,\varphi + \ldots .$$

la seguente osservabile relazione per il caso di n dispari:

$$sen.\, n\varphi = \frac{2}{n\pi} - \frac{4\,n}{\pi} \left\{ \frac{cos.\, 2\,\varphi}{2^2 - n^2} + \frac{cos.\, 4\,\varphi}{4^2 - n^2} + \frac{cos.\, 6\,\varphi}{6^2 - n^2} + \ldots \right\}$$

Facendosi $\varphi = o$, avrassi

$$\frac{1}{2\,n^2} = \frac{1}{2^2 - n^2} + \frac{1}{4^2 - n^2} + \frac{1}{6^2 - n^2} + \ldots$$

serie che si converte nella precedente (XXXVI), facendovi $n = 1$.

Se nella espressione ottenuta per $sen.\, n\,\varphi$ faremo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ si avrà

$$\pi . sen.\, \frac{n}{2}\,\pi = \frac{2}{n} - 4\,n \left(\frac{1}{2^2 - n^2} - \frac{1}{4^2 - n^2} + \frac{1}{6^2 - n^2} - \&c. \right)$$

ma si ha $sen.\, \frac{n}{2}\,\pi = \pm 1$, ove il segno superiore ha luogo quando, essendo per supposizione n dispari, cioè della forma $2\,h + 1$, sarà h un numero pari, ed il segno inferiore deve scegliersi se h è dispari. Con questa osservazione, sarà

$$\pm \pi = \frac{2}{n} - 4\,n \left\{ \frac{1}{2^2 - n^2} - \frac{1}{4^2 - n^2} + \frac{1}{6^2 - n^2} - \&c. \right\}$$

Le cose precedenti appartengono al caso di n dispari. Vediamo adesso il caso di n pari. A tale oggetto riprendiamo il general valore di A_x, che abbiamo veduto essere.

$$A_x = -\frac{1}{\pi(x+n)}\left\{\cos.(x+n)\pi - 1\right\} + \frac{1}{\pi(x-n)}\left\{\cos.(x-n)\pi - 1\right\}$$

Egli è chiaro che essendo n pari, tutte le volte che sarà tale ancora la x, avremo

$$A_x = 0$$

e nel caso di x dispari, sarà

$$A_x = -\frac{4}{\pi(x^2 - n^2)}$$

Sarà inoltre il primo termine A determinato dalla Equazione

$$A = \frac{1}{\pi}\int sen.\, n\,\varphi . d\,\varphi$$

che nel caso di n pari è $= 0$. Sostituendo questi valori nella serie

$$sen.\, n\,\varphi = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + A_3 \cos.3\varphi + \ldots.$$

si avrà immediatamente

$$sen.\, n\,\varphi = -\frac{4n}{\pi}\left\{\frac{\cos.\varphi}{1-n^2} + \frac{\cos.3\varphi}{3^2-n^2} + \frac{\cos.5\varphi}{5^2-n^2} + \&c.\right\}$$

Se da questa formula generale si volesse passare a quella in cui $n = 0$, si avrebbe primieramente

$$\frac{sen.\, n\,\varphi}{n} = -\frac{4}{\pi}\left\{\frac{\cos.\varphi}{1-n^2} + \frac{\cos.3\varphi}{3^2-n^2} + \frac{\cos.5\varphi}{5^2-n^2} + \&c.\right\}$$

nel caso di $n = 0$, si troverà col conosciuto metodo che la frazione $\frac{sen.\, n\,\varphi}{n}$ diviene $= \varphi$; quindi si otterrebbe

$$\varphi = -\frac{4}{\pi}\left\{\cos.\varphi + \frac{\cos.3\varphi}{3^2} + \frac{\cos.5\varphi}{5^2} + \&c.\right\}$$

Resultato differente da quello precedentemente ottenuto (XXXII) La causa di una tal diversità si riscontra nel primo termine A, il di cui valore abbiamo veduto essere

$$A = \int \frac{sen.n\varphi.d\varphi}{\pi} = -\frac{1}{n}\left(\frac{\cos.n\pi - 1}{\pi}\right)$$

Quantità che non è $=o$ allorchè $n=o$; ed il di lei numeratore annullandosi contemporaneamente al denominatore, ne troveremo il valore differenziando questo, e quello rapporto ad n, e facendo in seguito $n=o$; ed otterremo

$$A = \frac{\pi}{2}$$

Converrà in conseguenza aggiungere al valore di φ questo primo termine omesso inopportunamente; ed avremo come già sapevamo

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos.\varphi + \frac{\cos.3\varphi}{3^2} + \frac{\cos.5\varphi}{5^2} + \ldots\right)$$

XXXVIII.

Possiamo quì fare una osservazione assai interessante; ed è, che il metodo usato per ottenere questi sviluppi può aver successo ancora quando nella quantità $sen.n\varphi$ sia n un numero frazionario, irrazionale, o anche trascendente. Se in fatti comunque sia n supporremo

$$sen.\,n\varphi = A + A_1\cos.\varphi + A_2\cos.2\varphi + \ldots\ldots + A_x\cos.x\varphi + \ldots\ldots$$

sarà sempre il termine generale A_x determinato dalla formula

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int sen.\,n\varphi\,.\,\cos.\,x\varphi\,.\,d\varphi$$

integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. Effettuata questa integrazione, facilmente si troverà

$$A_x = -\frac{1}{\pi(n+x)}\left\{\cos.(n+x)\,\pi - 1\right\} - \frac{1}{\pi(n-x)}\left\{\cos.(n-x)\,\pi - 1\right\}$$

ora si ha

$$\cos.(n+x)\,\pi = \cos.x\,\pi\,.\,\cos.n\,\pi$$

$$\cos.(n-x)\,\pi = \cos.x\,\pi\,.\,\cos.n\,\pi$$

Quindi sostituendo, avremo

$$A_x = -\left\{\cos.x\,\pi\,.\,\cos.n\,\pi - 1\right\}\left(\frac{1}{n+x} + \frac{1}{n-x}\right)\cdot\frac{1}{\pi}$$

cioè nel caso di x pari

$$A_x = \frac{2n}{\pi}\left(\cos.n\,\pi - 1\right)\cdot\frac{1}{x^2 - n^2}$$

e nel caso di x dispari

$$A_x = -\frac{2n}{\pi}\left(\cos.n\,\pi + 1\right)\cdot\frac{1}{x^2 - n^2}$$

Inoltre il primo termine A è assegnato dalla Equazione

$$A = \frac{1}{\pi}\int sen.n\,\varphi\,.\,d\,\varphi$$

cioè, effettuata la integrazione tra i soliti limiti,

$$A = -\frac{1}{n\,\pi}\left(\cos.n\,\pi - 1\right)$$

Sostituendo questi valori nella nostra serie, avremo

$$sen.n\,\varphi = -\frac{1}{n\,\pi}(\cos.n\,\pi - 1) + \frac{2n}{\pi}(\cos.n\,\pi - 1)\left(\frac{\cos.2\,\varphi}{2^2 - n^2} + \frac{\cos.4\,\varphi}{4^2 - n^2} + \frac{\cos.6\,\varphi}{6^2 - n^2} + \&c.\right)$$
$$- \frac{2n}{\pi}(\cos.n\,\pi + 1)\left(\frac{\cos.\varphi}{1 - n^2} + \frac{\cos.3\,\varphi}{3^2 - n^2} + \frac{\cos.5\,\varphi}{5^2 - n^2} + \&c.\right)$$

espressione generale, dalla quale come casi particolari tutte le precedenti derivano, come è facilissimo il verificare.

XXXIX.

Non solamente nella supposizione di n qualunque la funzione $sen.\, n\,\varphi$ è suscettibile di essere espressa in una serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici; ma può ancora svilupparsi in una serie ordinata per i seni. Con l' esame di questo esempio, termineremo questa discussione della funzione $sen.\, n\,\varphi$. Facciamo pertanto

$$sen.\, n\varphi = A + A_1\, sen.\,\varphi + A_2\, sen.\, 2\,\varphi + A_3\, sen.\, 3\,\varphi + \ldots + A_x sen.\, x\,\varphi + \ldots$$

Facendo $\varphi = o$, troveremo $A = o$; e dovremo determinare il termine generale A_x (XXXIII) dalla Equazione

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int sen.\; n\varphi\,.\, sen.\; x\varphi\,.\, d\varphi$$

integrando tra i limiti $\varphi = o$, $\varphi = \pi$; poichè in questo caso mancando il primo termine A, vien tolta la differenza che passa tra le due formule

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int sen.\, x\varphi\,.\, d\varphi\,.\, F\,.\,\varphi$$

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int sen.\, x\varphi\,.\; d\varphi\,.\, F\,.\,\varphi - \frac{4}{\pi\,.\,x} A$$

la prima delle quali appartiene generalmente al caso di x pari, e la seconda al caso di x dispari.

Facilmente si troverà nelle condizioni stabilite

$$\int sen.\, n\varphi\,.\, sen\; x\varphi\,.\, d\varphi = \pm \frac{x\,.\, sen.\; n\,\pi}{n^2 - x^2}$$

avvertendo di scegliere il segno superiore se x è pari, e di preferir l' inferiore se x è dispari. Per tanto con questa distinzione sarà

$$A_x = \pm 2 \frac{x \; sen. \; n \pi}{\pi (n^2 - x^2)}$$

Quindi sostituendo nella nostra serie, avremo

$$sen. \, n \varphi = - \frac{2}{\pi} sen. \, n \pi \left(\frac{sen. \varphi}{n^2 - 1} - \frac{2. \, sen. \, 2 \varphi}{n^2 - 2^2} + \frac{3. \, sen. \, 3 \varphi}{n^2 - 3^2} \quad \frac{4 \, sen. \, 4 \varphi}{n^2 - 4^2} + \&c. \right)$$

ove n potendo esser qualunque, ne dedurremo il modo di calcolare il seno del prodotto di due archi qualunque n, e φ.

XL.

Abbiamo negli articoli precedenti assegnate varie espressioni della funzione *sen.* $n\varphi$. Attualmente prendiamo a considerare il coseno dell'arco φ, e vediamo di svolgerlo in una serie che proceda per i seni degli archi moltiplici di φ, in modo che sia

$$cos. \, \varphi = A + A_1 \, sen. \, \varphi + A_2 \, sen. \, 2 \varphi + A_3 \, sen. \, 3 \varphi + \ldots\ldots$$

Ponendo $\varphi = 0$, otterremo $A = 1$; Avremo inoltre, se x è pari (XXXIII)

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int cos. \, \varphi \, . \, sen. \, x \, \varphi \, . \, d \, \varphi$$

e se x è dispari

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int cos. \, \varphi \; sen. \, x \, \varphi \, . \, d \, \varphi - \frac{4}{\pi x}$$

Ma nel primo caso abbiamo, integrando nei limiti convenuti

$$\int cos. \, \varphi \cdot sen. \, x \, \varphi \, . \, d \, \varphi = \frac{2 \, x}{\varphi^2 - 1}$$

e nel secondo

$$\int cos. \, \varphi \, . \, sen. \, x \varphi \, . \, d \varphi = 0$$

sarà dunque nel caso di x pari, $A_x = \frac{4x}{\pi(x^2-1)}$, e nel caso di x dispari, $A_x = -\frac{4}{\pi x}$.

Sostituendo questi valori nella serie assegnata, otterremo la seguente osservabile espressione di $\cos. \varphi$

$$\cos. \varphi = 1 - \frac{4}{\pi}\left\{ \operatorname{sen.} \varphi - \frac{2}{2^2-1}\operatorname{sen.} 2\varphi + \frac{\operatorname{sen.} 3\varphi}{3} - \frac{4}{4^2-1}\operatorname{sen.} 4\varphi + \frac{\operatorname{sen.} 5\varphi}{5} - \&c. \right\}$$

Differenziando questa espressione rapporto a φ, si avrà

$$\operatorname{sen.} \varphi = \frac{4}{\pi}\left\{ \cos. \varphi - \frac{2^2}{2^2-1}\cos. 2\varphi + \cos. 3\varphi - \frac{4^2}{4^2-1}\cos. 4\varphi + \cos. 5\varphi - \&c. \right\}$$

e facendovi $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$, avremo per calcolar la mezza Periferia circolare la serie

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2^2}{2^2-1} - \frac{4^2}{4^2-1} + \frac{6^2}{6^2-1} - \frac{8^2}{8^2-1} + \&c. \ldots \pm \frac{4x^2}{4x^2-1} \mp \&c.$$

dove x essendo della forma $2h+2$, prenderemo il segno superiore se h è pari, e l'inferiore se è dispari. Per altro questa serie non differisce da quella ottenuta (XXXVI); ed infatti può mettersi sotto la forma

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \&c.$$
$$+ \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - \frac{1}{8^2-1} + \ldots$$

Ed avendosi

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.$$

sarà sostituendo, come precedentemente (XXXVI)

$$\frac{\pi-2}{4} = \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - \&c.$$