DRITTER THEIL.

CAPITEL I.

ANWENDUNG DER ALLGEMEINEN THEORIE AUF EINE FUNDAMENTALFLÄCHE DRITTER ORDNUNG.

183. Die Fundamentalfläche sei jetzt eine Fläche F_3 der dritten Ordnung, die wir als ganz allgemein, das heisst ohne vielfache Puncte und Linien voraussetzen. Die im zweiten Theile bewiesenen Sätze enthalten schon eine grosse Zahl von Eigenschaften der cubischen Flächen, aber wir halten uns nicht dabei auf, die speciellen Sätze auszusprechen; wir haben nur im Sinne dasjenige zu entwickeln, was es für die Flächen der dritten Ordnung Specielles oder Charakteristisches gibt.

Da im gegenwärtigen Falle die erste Polarfläche zugleich die Quadripolarfläche ist, *so fallen die Hessiana und Steineriana in eine und dieselbe Fläche vierter Ordnung und sechszehnter Classe zusammen* (163, 165). *Die Puncte dieser Fläche entsprechen sich zu zwei und zwei. Sind* $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ *zwei entsprechende Puncte, so ist jeder der Scheitel eines Polarkegels, dessen Pol der andere Punct ist, und in jedem dieser Puncte hat die Hessiana die Polarebene des andern Punctes zur Tangentialebene.* Dieselben Puncte sind für jede Quadripolarfläche conjugiert (139).

184. Die zweite gemischte Polarfläche zweier Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ wird eine Ebene, und zwar der Ort eines solchen Punctes, dass die Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ in Bezug auf seine Quadripolarfläche conjugiert sind (160). Denkt man sich einen der Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und ihre gemischte Polarebene gegeben, so findet man den andern Punct auf folgende Weise: Die Quadripolarflächen der Puncte der gegebenen Ebene bilden ein Netz, und die Polarebenen von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf diese Flächen gehen sämmtlich durch denselben Punct $\mathfrak{b}$, welcher der gesuchte Punct ist.

Denkt man $\mathfrak{a}$ fest, und lässt die gemischte Polarebene um eine gegebene Gerade g rotieren, so beschreibt der Punct $\mathfrak{b}$ eine andere Gerade g', Durchschnitt der Polarebenen von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte von g. Nun schneidet g die Hessiana in vier Puncten, und *folglich umhüllen die Polarebenen eines gegebenen Punctes $\mathfrak{a}$ in Bezug auf die Polarkegel eine Fläche vierter Classe.* Ist $\mathfrak{a}$ ein Punct der Hessiana, so geht die gemischte Polarebene immer durch $\mathfrak{a}'$ (Scheitel des Polarkegels von $\mathfrak{a}$); in diesem Falle also umhüllen die Polarebenen von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf die Polarkegel einen Kegel vierter Klasse.

Ist $\mathfrak{a}$ beliebig im Raume gegeben, und $\mathfrak{b}$ bewegt sich in einer festen Ebene E, so geht die gemischte Polarebene immer durch einen festen Punct $\mathfrak{c}$, den Pol von E in Bezug auf die Quadripolarfläche von $\mathfrak{a}$. Beschreibt also $\mathfrak{b}$ die Durchschnittscurve der Hessiana mit der Ebene E, so umhüllt die gemischte Polarebene einen Kegel vom Scheitel $\mathfrak{c}$ vierter Classe, der derjenigen Fläche umschrieben ist, die man erhält, wenn $\mathfrak{b}$ die Hessiana durchläuft; das heisst: *die Polarebenen eines festen Punctes in Bezug auf alle Polarkegel, deren Scheitel auf derselben Ebene liegen, umhüllen einen Kegel vierter Classe.*

185. Was wir im Allgemeinen *gemischte Polarfläche* zweier Geraden g, g' genannt haben, wird hier eine Quadrifläche (ein Hyperboloid), und da im gegenwärtigen Falle die Polarcurve einer Geraden in Bezug auf eine erste Polarfläche (86) die reciproke Gerade der gegebenen Geraden in Bezug auf eine Quadripolarfläche ist, so ergibt sich, *dass das Polarhyperboloid zweier Geraden g, g' der Ort der reciproken Geraden für jede der gegebenen Geraden in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte der andern ist,* oder auch der Ort eines Punctes, für welchen die Reciproke einer der beiden Geraden in Bezug auf die Quadripolarfläche dieses Punctes die andere gegebene Gerade schneidet.

Ist $\mathfrak{i}$ ein variabler Punct auf g, und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei feste Puncte von g', so ist das Polarhyperboloid durch zwei projectivische Büschel erzeugt (159), in denen die gemischten Polarebenen der Puncte $\mathfrak{a}, \mathfrak{i}$ den gemischten Polarebenen der Puncte $\mathfrak{b}, \mathfrak{i}$ entsprechen. Die beiden Puncte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ können natürlich durch zwei andere beliebige Puncte von g' ersetzt werden, und *das Polarhyperboloid zweier Geraden ist also auch die einhüllende Fläche der gemischten Polarebene zweier auf den gegebenen Geraden variabler Puncte, eines auf jeder Geraden.*

186. Wenn g, g' zusammenfallen, erhalten wir eine gemeine Polarfläche einer Geraden g, die *ein Kegel zweiter Ordnung* ist (93, 159), dessen Scheitel der Pol der Quadripolarfläche ist, welche durch g geht, und dessen Generatrixen die zu g reciproken Geraden in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte von g sind. *Dieser Kegel ist die Enveloppe der Polarebenen der Puncte von g,* und daher auch der Ort der Pole derjenigen Quadripolarflächen, welche g berühren. Wir geben dieser Fläche den Namen *Polarkegel der Geraden g,* den man aber nicht mit dem Polarkegel eines Punctes der Hessiana verwechseln darf.

187. *Die gemischte Polarfläche zweier Ebenen E, E'* ist von der dritten Ordnung (158), und *ist der Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte der andern Ebene oder auch*, was auf dasselbe hinausläuft, *der Ort der Pole einer Quadripolarfläche, in Bezug auf welche die Ebenen E, E' conjugiert sind.*

Der Ort der Pole einer Ebene E in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte einer Geraden g (128) *ist eine cubische Raumcurve* (Raumcurve dritter Ordnung); sie liegt auf dem Polarhyperboloid von g und einer andern beliebigen auf E befindlichen Geraden und ebenfalls auf der gemischten Polarfläche von E und einer andern beliebigen Ebene, die durch g geht (162). Daraus folgt, dass das Polarhyperboloid zweier Geraden g, g', wenn g fest ist und g' variabel in einer Ebene E, ein Büschel von Flächen erzeugt, die durch eine feste cubische Raumcurve gehen.

188. Fallen die Ebenen E, E' zusammen, so erhält man *die gemeine Polarfläche einer Ebene E*, welche die einhüllende Fläche der Polarkegel der Geraden sind, die in der gegebenen Ebene liegen (159), und gleichzeitig der Ort der Pole der Ebene in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte derselben Ebene (158). Diese zweite Definition kommt darauf zurück, dass die genannte Fläche der Ort eines Punctes ist, dessen Quadripolarfläche die gegebene Ebene berührt. Folglich fällt (94, 162) dieselbe Fläche mit *der Enveloppe der Polarebenen der Puncte der gegebenen Ebene* zusammen. Sie ist von der dritten Ordnung, von der vierten Classe und besitzt vier Doppelpuncte, die auf den Polarkegeln und den Polarhyperboloiden aller Geraden der gegebenen Ebene liegen [1]).

Es sei $\mathfrak{a}$ ein Punct dieser Fläche. Die Quadripolarfläche von $\mathfrak{a}$ berührt dann die Ebene E und schneidet folglich diese Ebene in zwei Geraden, die sich im Berührungspuncte $\mathfrak{a}'$ kreuzen. Die Polarebenen der Puncte dieser Geraden müssen durch $\mathfrak{a}$ gehen und anderswo die Fläche berühren; *ein beliebiger Punct der Fläche ist also der Scheitel zweier der Fläche umgeschriebener Quadrikegel* (es sind dies die Polarkegel zweier in $\mathfrak{a}'$ sich kreuzender Geraden). Die Polarebene von $\mathfrak{a}'$ berührt die Fläche in $\mathfrak{a}$.

Ist $\mathfrak{a}$ einer der Doppelpuncte der Fläche, so müssen die beiden Berührungskegel zusammenfallen; folglich schneidet die Quadripolarfläche von $\mathfrak{a}$ die Ebene E in zwei zusammenfallenden Geraden. *Unter den Quadripolarflächen, die eine Ebene E berühren, gibt es also vier Kegel; ihre Pole*, die auch der Hessiana angehören, *sind die Doppelpuncte der gemeinen Polarfläche der Ebene.*

Diese Fläche ist die Reciproke der *Römischen Fläche* Steiners [2]).

---

[1]) Liegt ein Punct im Unendlichen, so ist seine Polarebene eine Diametralebene der Fundamentalfläche. *Die Enveloppe der Diametralebenen ist also die gemeine Polarfläche der unendlich entfernten Ebene.* Diese Fläche ist der der F_ν längs des Schnittes im Unendlichen umgeschriebenen Developpablen eingeschrieben (100).

[2]) Man sehe die Monatsberichte der K. Akademie zu Berlin (Juli und November 1863) und Crelle-Borchardt's Journal, Bd. 63, S. 315.

189. Ist eine Ebene E fest und die andere Ebene E' um eine Gerade g variabel, so bilden die gemischten Polarflächen der Ebenen E, E' ein Büschel. In der That, muss eine solche Fläche durch einen gegebenen Punct $\mathfrak{x}$ gehen, so geht die Ebene E' durch den Pol von E in Bezug auf die erste Polarfläche von $\mathfrak{x}$. Die Basis des Büschels ist aus einer Raumcurve sechster Ordnung (Ort der Doppelpuncte der Quadripolarflächen der Puncte der festen Ebene) und einer cubischen Raumcurve (Ort der Pole der festen Ebene in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte der gegebenen Geraden) zusammengesetzt (158, 187).

Die gemischte Polarfläche der beiden Ebenen E, E' und ihre gemeinen Polarflächen werden gleichzeitig (164) durch den Polarkegel der Geraden EE' berührt und zwar in vier Puncten der Hessiana (entsprechend den Durchschnittspuncten dieser Fläche mit der Geraden EE'), und gehen durch die zehn Doppelpuncte der Hessiana (158). Diese Puncte sind $4.4+10$ Durchschnittspuncten äquivalent, und folglich haben die drei genannten Flächen, die sämmtlich von der dritten Ordnung sind, nur noch e i n e n andern Punct gemein; es ist dies der Pol der Quadripolarfläche, welche durch die Gerade EE' geht.

CAPITEL II.

EIGENSCHAFTEN DER HESSIANA EINER FUNDAMENTALFLÄCHE DRITTER ORDNUNG.

190. Die Pole der Polarebenen, die durch einen gegebenen Punct $\mathfrak{p}$ gehen, liegen auf der Quadripolarfläche von $\mathfrak{p}$. Sollen diese Ebenen die Hessiana berühren, so sind die Pole auf der Curve achter Ordnung vertheilt, die den Durchschnitt der Hessiana mit der Quadripolarfläche von $\mathfrak{p}$ darstellt (183). Die Berührungspuncte bilden eine Curve der zwölften Ordnung, den Durchschnitt der Hessiana mit der ersten Polarfläche von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die Hessiana. Die beiden Curven achter und zwölfter Ordnung sind also entsprechende Curven (168).

191. Wir wollen die Geraden betrachten, welche durch $\mathfrak{p}$ gehen und die Hessiana berühren. Den Geraden, die durch $\mathfrak{p}$ gehen, entspricht ein Netz [1]) von Raumcurven vierter Ordnung (87), die sämmtlich auf einer Fläche S zweiter Ordnung liegen (der Quadripolarfläche von $\mathfrak{p}$). Jede dieser Raum-

[1]) Ein solches Netz entsteht durch den Durchschnitt von S mit einem Netze anderer Quadripolarflächen.

curven entsteht als Durchschnitt von S mit einer andern Quadripolarfläche und folglich (190) liegen die Doppelpuncte dieser Curven (Berührungpuncte zwischen S und den andern Quadripolarflächen) auf der Curve c der achten Ordnung, Durchschnitt der Hessiana mit S. Den Curven des Netzes, die ein Büschel bilden, entsprechen gerade Linien durch $\mathfrak{p}$, die in einer Ebene liegen. In diesem Büschel gibt es zwölf Curven mit Doppelpunct [1]), das heisst: *die Geraden durch* $\mathfrak{p}$, *denen die Raumcurven vierter Ordnung mit Doppelpunct entsprechen, bilden einen Kegel* $\mathfrak{S}$ *der zwölften Ordnung.* Einem beliebigen Punct $\mathfrak{o}$ der Curve c entspricht eine Generatrix von $\mathfrak{S}$, welche den Punct $\mathfrak{p}$ mit dem Puncte $\mathfrak{o}'$ verbindet, welcher in der Hessiana dem Puncte $\mathfrak{o}$ entspricht. Der Ort der Puncte $\mathfrak{o}'$ ist also eine Curve c' der zwölften Ordnung (190). Die Polarebene von $\mathfrak{o}$ geht durch $\mathfrak{p}$ und berührt die Hessiana in $\mathfrak{o}'$ (183) und enthält folglich die Tangente von c' in $\mathfrak{o}'$. Diese Ebene ist daher die Tangentialebene des Kegels $\mathfrak{S}$ längs der Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{o}'$, das heisst: der Kegel $\mathfrak{S}$ ist der Hessiana längs der Curve c' umgeschrieben.

Die Quadripolarfläche eines beliebigen Punctes schneidet c in sechszehn Puncten. Daraus folgt, dass $\mathfrak{S}$ und folglich auch die Hessiana von der sechszehnten Classe ist (165).

Betrachtet man eine Gerade g durch $\mathfrak{p}$ als Durchschnitt zweier Tangentialebenen des Kegels $\mathfrak{S}$, so hat jede dieser Ebenen einen Pol auf c und die Raumcurve des Netzes auf S, die durch diese beiden Pole geht, ist die entsprechende Curve von g. Fallen beide Pole zusammen, so wird die Raumcurve von c berührt. Daraus folgt, dass den Geraden, die auf dem Kegel $\mathfrak{S}$ und in seinen stationären Ebenen gezogen sind, Raumcurven des Netzes auf S ensprechen, welche c berühren.

192. Die Puncte, in denen die Hessiana von Geraden osculiert wird, die von $\mathfrak{p}$ ausgehen, sind die Durchschnittspuncte dieser Fläche mit der ersten und zweiten Polarfläche von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf dieselbe Fläche. Unter den Raumcurven des Netzes auf S gibt es also $4.3.2 = 24$, die eine Spitze haben.

Der Kegel $\mathfrak{S}$ ist daher von der 12-ten Ordnung und der 16-ten Classe und hat ausserdem 24 stationäre Generatrixen, also hat er gemäss den Formeln von Plücker (3) 22 Doppelgeneratrixen. Von diesen Doppelgeneratrixen entstehen zehn durch die Doppelpuncte der Hessiana und entsprechen denjenigen Curven des Netzes, die aus zwei Kegelschnitten bestehen — jeder Doppelpunct hat in der That ein Ebenenpaar als Quadripolarfläche (169) —, die andern zwölf Doppelgeneratrixen dagegen entsprechen ebensovielen Curven des Netzes, die aus einer cubischen Raumcurve und einer Geraden zusammengesetzt sind.

Um diese Behauptung zu beweisen, betrachten wir das Netz von Raumcurven vierter Ordnung auf der Quadrifläche S und nennen wie früher (24)

---

[1]) Denn ein Netz von Quadriflächen enthält zwölf Flächen, welche S berühren (131).

der Kürze wegen die Geraden der beiden Systeme, die auf dieser Fläche existieren, bezüglich *Generatrixen* und *Directrixen*. Es seien l, m, n drei Generatrixen von S; jede auf S gezogene Curve vierter Ordnung schneidet dann jede dieser Geraden in zwei Puncten, und fallen drei dieser Puncte, einer für jede Gerade, in eine gerade Linie, so zerfällt die Curve in zwei Theile, eine cubische Raumcurve und eine Gerade (Directrix). Ist $\mathfrak{l}$ ein beliebiger Punct von l, so schneidet die Directrix, welche durch $\mathfrak{l}$ geht, m und n in zwei Puncten $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ und die Curve des Netzes, welche durch $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ geht trifft l in zwei Puncten $\mathfrak{l}'$. Ist umgekehrt $\mathfrak{l}'$ ein beliebiger Punct von l, so bilden die Curven des Netzes, die durch $\mathfrak{l}'$ gehen, ein Büschel und bestimmen so auf m und n zwei projectivische quadratische Involutionen. Schneidet eine Curve des Netzes m in $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ und n in $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}'$, so ist der Ort der zu $\mathfrak{mn}, \mathfrak{mn}', \mathfrak{m}'\mathfrak{n}, \mathfrak{m}'\mathfrak{n}'$ analogen Geraden eine Fläche vierter Ordnung — m und n sind für dieselbe Doppelgeraden —, welche l in vier Puncten $\mathfrak{l}$ schneidet. Es fällt also sechsmal auf l ein Punct $\mathfrak{l}$ mit $\mathfrak{l}'$ zusammen, das heisst, es gibt sechs Curven des Netzes, von denen jede aus einer cubischen Raumcurve und einer Directrix zusammengesetzt ist. Analog gibt es sechs andere Curven, die aus einer cubischen Raumcurve und einer Generatrix bestehen.

In einem Curvennetze von Raumcurven vierter Ordnung, die auf einer Quadrifläche gezogen sind, gibt es also:

1. *zwölf Curven, die aus einer cubischen Raumcurve und einer Geraden bestehen;* 2. *zehn Curven aus zwei Kegelschnitten zusammengesetzt;* 3. *vierundzwanzig Curven mit einer Spitze.*

193. Ist $\mathfrak{p}$ ein Punct der Hessiana, so ist der Kegel $\mathfrak{S}$ von der 10-ten Ordnung, der 16-ten Classe mit 10 Doppelgeneratrixen (nach den Doppelpuncten der Hessiana gerichtet) und 18 stationären Generatrixen. Das heisst: *In einem Netze von Raumcurven vierter Ordnung, die auf einem Kegel (der Quadripolarfläche von* $\mathfrak{p}$) *gezogen sind, gibt es:* 1. *zehn, die aus zwei Kegelschnitten bestehen;* 2. *achtzehn mit einer Spitze;* 3. *sechs aus einer cubischen Raumcurve und einer Geraden zusammengesetzte* (entsprechend den sechs Geraden, welche die Hessiana ausser in $\mathfrak{p}$ noch anderswo berühren (70)); 4. *zwei mit einer Spitze im Kegelscheitel.* Letztere entsprechen den beiden Geraden, welche die Hessiana in $\mathfrak{p}$ osculieren.

194. Ist $\mathfrak{p}$ ein Doppelpunct der Hessiana, so wird diese Gerade in $\mathfrak{p}$ durch eine unbegrenzte Zahl von Ebenen berührt, deren Enveloppe ein Quadrikegel ist; die erste Polarfläche von $\mathfrak{p}$ hat daher eine unbegrenzte Zahl Doppelpuncte in gerader Linie, das heisst, sie ist das System zweier Ebenen, die sich in einer Geraden p schneiden, die auf der Hessiana liegt, wie es aus der allgemeinen Theorie resultiert (167). Die Puncte dieser Geraden sind die Pole ebensovieler Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{p}$. Diese Kegel bilden daher ein Büschel und gehen durch vier Gerade, deren Gesammtheit die Polarcurve von p darstellt. In diesem Büschel gibt es drei Systeme von je zwei Ebenen;

diese drei Systeme sind die Quadripolarflächen von drei speciellen Puncte der Geraden p, welche für die Hessiana Doppelpuncte sind. *Die zehn Doppelpuncte* $\mathfrak{p}$ *vertheilen sich also zu drei und drei auf die zehn Geraden* p, *und diese gehen zu drei und drei durch die zehn Puncte* $\mathfrak{p}$.

195. Da die Hessiana *im Allgemeinen* von der sechszehnten Classe ist, so hat sie ausser den zehn Puncten $\mathfrak{p}$ keine weiteren Doppelpuncte. Ebenso enthält sie ausser den zehn Geraden p keine andern Geraden. In der That entsprechen die vier Durchschnittspuncte einer Geraden g mit der Hessiana den vier Kegeln, die durch die Polarcurve vierter Ordnung von g gehen. Gehört g vollständig der Hessiana an, so entsprechen der unbegrenzten Zahl von Puncten von g eine unbegrenzte Zahl von Kegeln, die ein Büschel bilden und folglich denselben Scheitel haben. Dieser Scheitel ist für die Hessiana ein Doppelpunct, denn diese Fläche wird dort von den Polarebenen aller Puncte von g berührt.

Ein Doppelpunct $\mathfrak{p}$ liegt im Allgemeinen nicht auf seiner entsprechenden Geraden p; wenn dies der Fall wäre, so wäre die erste Polarfläche von $\mathfrak{p}$ ein Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{p}$, und dieser Punct wäre also für die Fundamentalfläche ein Doppelpunct.

196. Es seien $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ zwei entsprechende Puncte der Hessiana. Die Polarkegel von $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ haben ihren Scheitel bezüglich in $\mathfrak{o}', \mathfrak{o}$ und durchdringen sich gegenseitig in einer Raumcurve vierter Ordnung. Die beiden andern Quadrikegel, welche durch diese Curve gehen, sind die ersten Polarflächen der Puncte $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$, in denen die Hessiana durch die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ nochmals geschnitten wird. Die Scheitel dieser andern Kegel liegen in den Puncten $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$, welche $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ entsprechen. Die Puncte $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}', \mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$ sind also die Scheitel des Tetraeders, welches den Quadriflächen conjugiert ist, welche durch die Curve vierter Ordnung hindurchgehen, und folglich sind die Ebenen $\mathfrak{o}'\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{o}\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ bezüglich die Polarebenen von $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$. Deshalb *gehen die Tangentialebenen der Hessiana in* $\mathfrak{o}$ *und* $\mathfrak{o}'$ *durch die Gerade* $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$.

Da die Polarebenen von $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ durch $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$ gehen, so gehen umgekehrt die Polarkegel von $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$, deren Scheitel $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ sind, durch $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$, enthalten daher die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{u}\mathfrak{v}$ vollständig und schneiden sich also noch in einer cubischen Raumcurve.

Daraus, dass die Polarkegel von $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$ durch die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ gehen, folgt, dass der Polarkegel dieser Geraden seinen Scheitel in $\mathfrak{u}'$ und in $\mathfrak{v}'$ hat (186), dass heisst, er reduciert sich auf die Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$. *Die Polarebenen der Puncte von* $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ *gehen sämmtlich durch die Gerade* $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$.

Die Puncte, in denen $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ die Hessiana trifft, sind die Pole der vier Quadrikegel, die durch die Curve vierter Ordnung gehen, welche die Polarcurve der betrachteten Geraden ist. Nun zerlegt sich aber diese Curve in zwei Theile (eine Gerade und eine cubische Raumcurve), und es gibt also nur zwei Quadrikegel, die durch dieses System gehen. Die Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ ist somit Tangente der Hessiana in $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{v}'$.

Jede Gerade also, welche zwei correspondierende Puncte der Hessiana verbindet, besitzt daher die Eigenschaft, dass die Polarebenen ihrer Puncte durch eine feste Gerade gehen, die eine Doppeltangente der obigen Fläche ist.

197. Wenn $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ zusammenfallen, das heisst, wenn die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ die Hessiana berührt (natürlich in einem Puncte $\mathfrak{u}$, der von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ verschieden ist), so gehen die Polarflächen der Puncte von $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ durch dieselbe Gerade, die mit der Hessiana in $\mathfrak{u}'$ einen vierpunctigen Contact hat.

Fallen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ in einem Doppelpuncte $\mathfrak{p}$ zusammen, so werden die Puncte $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$ unbestimmt auf der entsprechenden Geraden p (194); da aber die Polarkegel aller Puncte dieser Geraden durch $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ gehen müssen (196), so folgt, *dass* $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ *eine der vier Geraden ist, welche die Polarcurve von* p *bilden* (191).

198. Im Falle, dass $\mathfrak{o}$ ein parabolischer Punct der Fundamentalfläche ist, so liegt der Scheitel des Polarkegels im entsprechenden Puncte $\mathfrak{o}'$; ausserdem geht er durch $\mathfrak{o}$ und berührt die Polarebene von $\mathfrak{o}$ längs $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ (16), das heisst diejenige Ebene, welche die Hessiana in $\mathfrak{o}'$ berührt. Da der Polarkegel von $\mathfrak{o}'$ seinen Scheitel auf $\mathfrak{o}$ hat, so folgt, dass die Polarkegel dieser beiden Puncte sich längs einer Raumcurve schneiden, für welche $\mathfrak{o}$ ein Doppelpunct ist. Einer der Puncte $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ fällt mit $\mathfrak{o}'$ zusammen; der andere sei der Punct $\mathfrak{v}$. Dann ist also die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{v}'$ ($\equiv \mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$) Tangente der Hessiana in $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{v}'$ (196). Die Ebenen, welche die Fundamentalfläche und die Hessiana in $\mathfrak{o}$ berühren, schneiden sich längs $\mathfrak{o}\mathfrak{v}'$, das heisst, *diese Gerade ist Tangente der parabolischen Curve der Fundamentalfläche in* $\mathfrak{o}$.

Es sei $\mathfrak{w}$ der Punct, in welchem die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{v}'$ die Fundamentalfläche nochmals trifft. Die erste Polarfläche von $\mathfrak{w}$ geht dann durch $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ und trifft also die Ebene $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{v}'$ in zwei Geraden, deren eine $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ ist, und die andere geht duch $\mathfrak{w}$. *Dieser Punct* $\mathfrak{w}$ *ist also der* (*einzige*) *Wendepunct der Curve dritter Ordnung* (*mit Spitze in* $\mathfrak{o}$), *längs deren die Fundamentalfläche von der stationären Ebene* $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{v}'$ *berührt wird* [1]).

199. *Wieviel Gerade gibt es in einer beliebigen Ebene* E, *die zu* $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ *analog sind* (*sie verbindet zwei entsprechende Puncte der Hessiana*)? Die Ebene E schneidet die Hessiana in einer Curve vierter Ordnung, welcher die windschiefe Berührungscurve sechster Ordnung zwischen der Hessiana und der gemeinen Polarfläche der Ebene E entspricht (168). Sei $\mathfrak{o}$ einer der Puncte, in denen E diese letztere Curve trifft. Dieser Punct hat, da er E angehört, seinen entsprechenden Punct $\mathfrak{o}'$ auf der Curve sechster Ordnung, und weil er dieser Curve angehört, muss sein entsprechender Punct auf E liegen. Es folgt daraus, dass die sechs Durchschnittspuncte der Ebene E mit der Raum-

---

1) Und $\mathfrak{w}\mathfrak{v}$ ist die stationäre Tangente.

curve sechster Ordnung, sich zu zwei und zwei entsprechen. Anderseits sind aber zwei entsprechende Puncte der Hessiana in Bezug auf eine beliebige Quadripolarfläche conjugiert, und die sechs Puncte, um die es sich handelt, sind also nach einer bekannten Theoreme, das man Hesse verdankt, die Scheitel eines vollständigen Vierseits. *Die Diagonalen dieses letztern sind die einzigen mit* $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ *analogen Geraden, welche in der gegebenen Ebene* E *liegen.* Die zu $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ analogen Geraden (196), welche den Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ der Ebene E entsprechen, liegen auf der Polarfläche von E (und in der nämlichen dreifachen Tangentialebene dieser Fläche), weil die Polarflächen der Puncte von E die Polarfläche dieser Ebene berühren (188).

200. Das betrachtete Vierseit ist bestimmt durch die Durchschnitte von vier beliebigen Quadripolarflächen, die nicht einem und demselben Netze angehören, mit der Ebene E; man weiss in der That, dass wenn vier Kegelschnitte in einer Ebene gegeben sind, es nur ein einziges Vierseit gibt, dessen Diagonalen durch jeden der gegebenen Kegelschnitte harmonisch getheilt wird [1].

Zwei Gegenscheitel des Vierseits sind in Bezug auf die Kegelschnitte conjugiert, in denen die Ebene E die Quadripolarflächen dieser Puncte schneidet, und folglich ist das Vierseit der Curve dritter Ordnung eingeschrieben, welche die Jacobiana des von den genannten Kegelschnitten gebildeten Netzes und gleichzeitig der Schnitt der Polarfläche der Ebene E durch eben dieselbe Ebene ist. Die nämlichen sechs Puncte — die Scheitel des Vierseits — sind auch auf der ebenen Curve vierter Ordnung gelegen, welche E und der Hessiana gemein ist, welche letztere Fläche von der Polarfläche dieser Ebene in allen Puncten der Curve sechster Ordnung berührt wird. Diese sechs Puncte sind also ebenso viele Berührungspuncte zwischen den Curven, in denen E die Polarfläche und die Hessiana schneidet.

Es folgt hieraus, dass die Seiten des Vierseits die ebene Curve vierter Ordnung nochmals in vier Puncten auf einer geraden Linie g treffen. Diese Plancurve gehört dem Büschel an, welches durch das System der vier Geraden, welche das Viereck bilden, und das System der Curve dritter Ordnung und der Geraden g bestimmt ist. Hat daher diese letzte Curve einen Doppelpunct $\mathfrak{a}$, was eintritt, wenn E in $\mathfrak{a}$ die Fundamentalfläche berührt [2]), so fällt die Polargerade von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf die Plancurve vierter Ordnung mit der Polargeraden desselben Punctes in Bezug auf das System der vier Seiten des Vierseits zusammen (der harmonischen Polare von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf das Vierseit).

Man weiss aber, wenn eine cubische Plancurve mit Doppelpunct durch die Scheitel eines vollständigen Vierseits geht, dass dann die Gerade, welche

---

1) *Mathematical questions from the Educational Times.* T. IV., London 1866; p. 110.

2) Hat eine cubische Raumcurve einen Doppelpunct, so gehen alle Polarkegelschnitte durch diesen Punct, der daher auch für die Jacobiana des Netzes der Polaren ein Doppelpunct ist.

die drei Wendepuncte verbindet, die harmonische Polare des Doppelpunctes in Bezug auf das Vierseit ist. Die Polargerade von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf die Plancurve vierter Ordnung geht daher durch die Wendepuncte der Curve dritter Ordnung, welche gleichzeitig die Wendepuncte des Schnittes der Fundamentalfläche durch E sind.

Folglich der Satz: *Die Durchschnittsgerade einer Tangentialebene der Fundamentalfläche mit der Polarebene des Berührungspunctes in Bezug auf die Hessiana geht durch die drei Wendepuncte des Schnittes, der durch die Tangentialebene auf der Fundamentalfläche erzeugt wird.*

Ist die Tangentialebene stationär, so kommt man auf ein schon bewiesenes Theorem (198) zurück.

201. Auf einer beliebigen Ebene E gibt es wieviel zu $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ analoge Gerade (das heisst Gerade, deren Polarcurve das System einer Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ und einer cubischen Raumcurve sind)? Die in der Ebene E gezogenen Geraden entsprechen den Raumcurven vierter Ordnung, welche durch die acht Pole der Ebene gehen. Es ist bekannt, dass diese acht Pole so unter einander verbunden sind, dass diejenige cubische Raumcurve, welche durch sechs von ihnen beschrieben ist, die Gerade, welche die beiden andern verbindet, zweimal schneidet. Die acht Puncte zu zweien combiniert geben nun $\frac{7.8}{2} = 28$ Curven vierter Ordnung, zusammengesetzt aus einer Geraden und einer cubischen Raumcurve. *Die gegebene Ebene enthält also* 28 *zu* $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ *analoge Gerade*; sie sind die 28 Doppeltangenten des Schnittes der Hessiana durch die Ebene E.

Dieser Schnitt ist von der 12-ten Classe und hat 24 Wendepuncte. Man findet so die Eigenschaft wieder (191), dass es in einem Büschel von Raumcurven vierter Ordnung 12 mit Doppelpunct gibt, und weiter, *dass unter den Raumcurven dieser Ordnung, welche durch die acht Durchschnittspuncte dreier Quadriflächen gehen,* 24 *mit einer Spitze enthalten sind.*

202. Eine beliebige Gerade g trifft die Hessiana in vier Puncten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$; es seien $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ die vier entsprechenden Puncte. Da $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ die Scheitel der vier Kegel desselben Büschels von Quadriflächen sind, so ist der Punct $\mathfrak{a}'$ der Pol der Ebene $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ in Bezug auf die Polarkegel von $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, das heisst $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ ist die gemischte Polarebene der Punctenpaare $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}$; $\mathfrak{a}', \mathfrak{c}$; $\mathfrak{a}', \mathfrak{d}$ oder auch, $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ ist die Polarebene jedes der Puncte $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{a}'$. Dieser Kegel hat aber den Scheitel $\mathfrak{a}$, und folglich geht die Ebene $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ durch $\mathfrak{a}$.

Wenn also $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ *vier Puncte der Hessiana in gerader Linie sind, so sind die entsprechenden Puncte* $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ *die Scheitel eines Tetraeders, dessen Seitenflächen* $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{d}'\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ *bezüglich durch* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ *gehen.*

203. Alle Quadripolarflächen, welche durch einen Punct $\mathfrak{o}$ gehen, bilden ein Netz; darunter gibt es eine, welche in $\mathfrak{o}$ eine beliebig gegebene Ebene

berührt. Ist aber $\mathfrak{o}$ ein Punct der Hessiana und $\mathfrak{o}'$ der entsprechende Punct, so werden alle Polarflächen von $\mathfrak{o}$ in ihm von Ebenen berührt, die durch die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ gehen (164); diejenigen, welche in $\mathfrak{o}$ dieselbe Ebene berühren, bilden ein Büschel, und ihre Pole liegen auf einer Tangente der Hessiana in $\mathfrak{o}'$. Daraus ergibt sich die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ als Polare der Tangentialebene der Hessiana in $\mathfrak{o}$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{o}'$ und zugleich als Polare der Tangentialebene derselben Fläche in $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{o}$. Mit andern Worten: *Die Tangentialebene der Hessiana in $\mathfrak{o}$ und die Tangentialebene im nämlichen Puncte einer beliebigen Quadripolarfläche, welche durch ihn geht, sind conjugiert in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{o}'$.*

Umgekehrt: *Jede Tangente der Hessiana in $\mathfrak{o}'$ enthält die Pole einer unbegrenzten Zahl von Quadripolarflächen, die in $\mathfrak{o}$ von ein und derselben Ebene berührt werden.*

204. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Doppelpunct der Hessiana und p die entsprechende Gerade (194). Sobald jeder Punct von p dem Puncte $\mathfrak{p}$ entspricht, sind die Polarebenen aller Puncte von p Tangentialebenen der Hessiana in $\mathfrak{p}$ (183), das heisst, *der osculierende Quadrikegel, den die Osculierenden der Hessiana in $\mathfrak{p}$ bilden, ist der Polarkegel der Geraden p.* Dieser Kegel enthält die drei Geraden p_1, p_2, p_3 (analog zu p (194)), welche durch $\mathfrak{p}$ gehen, denn jeder Punct dieser Geraden ist der Pol eines Polarkegels, dessen Scheitel einer der drei Doppelpuncte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ der Hessiana ist, die auf p liegen.

205. Die Polarebene von $\mathfrak{p}$ berührt die Hessiana in der ganzen Länge der Geraden p (167) und schneidet also diese Fläche in einem Kegelschnitte c. Ebenso berührt die Polarebene von $\mathfrak{p}_1$ die Hessiana längs p_1; nun ist aber $\mathfrak{p}_1$ ein Punct von p; also: *Die Hessiana und der Polarkegel von p werden längs der drei gemeinschaftlichen Geraden p_1, p_2, p_3 durch dieselben Ebenen berührt, die Polarebenen von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$.*

206. Der Punct $\mathfrak{p}$ und ein beliebiger Punct von p sind zwei entsprechende Puncte der Hessiana, also ist die Gerade, welche diese Puncte verbindet, der Ort der Pole, deren Polarebenen durch ein und dieselbe Gerade gehen, die eine Doppeltangente der Hessiana ist und in der Polarebene von $\mathfrak{p}$ liegt (196). Einer der Berührungspuncte liegt auf p, der andere gehört dem Kegelschnitt c an. Das heisst, jeder Geraden, die durch $\mathfrak{p}$ in der Ebene $\mathfrak{p}p$ gezogen ist und als Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ (196) angesehen wird, entspricht als Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ eine Tangente von c. Es sei $\mathfrak{o}$ der Punct, in dem die erste Gerade von p getroffen wird und $\mathfrak{u}$ der Punct, in welchem dieselbe Gerade die Hessiana nochmals schneidet (die Puncte $\mathfrak{o}'$ und $\mathfrak{v}$ fallen mit $\mathfrak{p}$ zusammen); $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{v}'$ die Puncte, in denen die zweite Gerade bezüglich c berührt und p schneidet. Man sieht, dass der Kegelschnitt c zur entsprechenden Curve die cubische Plancurve (Ort der Puncte $\mathfrak{u}$) hat, in welcher die Ebene $\mathfrak{p}p$ die Hessiana schneidet.

Die Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ liegt in der Polarebene von $\mathfrak{o}$; nun berührt diese Ebene den Polarkegel von p, und letzterer Kegel wird daher durch die zu $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ analogen Geraden berührt; das heisst, der Kegelschnitt c ist die Spur des Kegels auf der Polarebene von $\mathfrak{p}$. Also:

Der Osculationskegel der Hessiana in einem Doppelpuncte berührt diese Fläche in drei Geraden und schneidet sie ausserdem noch in einem Kegelschnitt, der in der Polarebene des Doppelpunctes liegt.

207. Es gibt weitere Eigenschaften der Ebene $\mathfrak{p}p$, die erwähnt werden müssen.

Der Polarkegel von $\mathfrak{u}'$ geht durch $\mathfrak{p}$, ausserdem ist die Polarebene von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf diesen Kegel (nämlich die Tangentialebene dieses Kegels längs $\mathfrak{pu}$) die Polarebene von $\mathfrak{u}'$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{p}$ (83), das heisst die Ebene $\mathfrak{p}p$. Die letztere Ebene berührt also die Polarkegel sämmtlicher Puncte des Kegelschnittes c, und die Berührungsgeneratrixen gehen durch $\mathfrak{p}$.

Sobald die Ebene $\mathfrak{p}p$ in $\mathfrak{o}$ die ersten Polarflächen der Puncte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{u}'$ berührt, so berührt sie im nämlichen Puncte die ersten Polarflächen aller Puncte der Geraden $\mathfrak{pu}'$, und schneidet sie in Geradenpaaren in Involution, deren Doppelstrahlen $\mathfrak{op}$ und p sind. Zwei conjugierte Gerade r, r' dieser Involution gehören einer ersten Polarfläche an, deren Pol $\mathfrak{q}$ sei (ein Punct von $\mathfrak{pu}'$). Denken wir uns eine Ebene durch $\mathfrak{q}$ und eine beliebige Tangente $\mathfrak{u}'_1\mathfrak{v}'_1$ von c. Die ersten Polarflächen von $\mathfrak{u}'_1, \mathfrak{v}'_1$ gehen zusammen (196) durch die Gerade $\mathfrak{pu}_1$, welche $\mathfrak{u}'_1\mathfrak{v}'_1$ entspricht (wie $\mathfrak{pu}$ der Geraden $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$), also sind die Puncte, in denen diese Gerade r, r' trifft, zwei Pole der Ebene $\mathfrak{qu}'_1\mathfrak{v}'_1$. Das heisst, die Polarebenen der Puncte der Geraden r, r' umhüllen ein und denselben Kegel $\mathfrak{q}c$. Alle analogen Kegel gehen durch den Kegelschnitt c, und dieser stellt daher, und zwar er allein, die Enveloppe der Polarebenen der Puncte der Ebene $\mathfrak{p}p$ vor. Man kann dies auch auf folgende Weise zeigen.

Der Doppelpunct $\mathfrak{p}$ hat die Eigenschaft, dass alle Quadripolarflächen, die durch ihn gehen, in ihm durch dieselbe Ebene $\mathfrak{p}p$ berührt werden (203). Daraus folgt, dass, wenn man durch $\mathfrak{p}$ die beiden Geraden zieht, welche jede die windschiefe Polarcurve vierter Ordnung einer beliebigen Geraden t des Raumes in zwei Puncten trifft, diese beiden Geraden stets in der Ebene $\mathfrak{p}p$ liegen, das heisst, die Polarcurve einer beliebigen Geraden hat stets zwei Sehnen, die von $\mathfrak{p}$ ausgehen und in der Ebene $\mathfrak{p}p$ gelegen sind. Es sei $\mathfrak{pu}$ eine dieser Sehnen. Jeder der Puncte, in welchem sie auf der Raumcurve aufsteht, hat eine Polarebene, die durch t und $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ geht (daraus folgt, dass t die Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ schneidet); diese beiden Geraden geben aber eine einzige Ebene, also sind die beiden Puncte, in denen $\mathfrak{pu}$ die Raumcurve schneidet, die Pole ein und derselben Ebene, die durch t geht. Zwei dieser Polarebenen (in Bezug auf die beiden Geraden $\mathfrak{pu}$) werden durch die beiden Geraden $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ bestimmt, welche man in der Ebene von c so ziehen kann, dass sie die Spur von t enthalten und den Kegelschnitt berühren; durch eine Gerade t

gehen also nur zwei Ebenen, deren Pole auf der Ebene $\mathfrak{p}p$ liegen, und diese Ebenen berühren c; mit andern Worten, *dieser Kegelschnitt ist die vollständige Enveloppe der Polarebenen der Puncte der Ebene* $\mathfrak{p}p$.

Ein beliebiger Punct der Polarebene von $\mathfrak{p}$ gehört zwei Geraden $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ (Tangenten von c) an, und folglich geht die Quadripolarfläche dieses Punctes durch die beiden entsprechenden Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{u}$ (196), das heisst, sie berührt in $\mathfrak{p}$ die Ebene $\mathfrak{p}p$. *Der Ort der Puncte, deren erste Polarflächen die Ebene* $\mathfrak{p}p$ *berühren, ist also zusammengesetzt:* 1. *Aus dem Kegel* $\mathfrak{p}c$, *dessen Puncte Quadripolarflächen besitzen, welche* $\mathfrak{p}p$ *berühren, und zwar in einem Puncte von* $\mathfrak{p}$; 2. *Aus der Polarebene von* $\mathfrak{p}$, *in welcher die Puncte des Kegelschnittes* c *die Pole der Polarkegel sind, welche die Ebene* $\mathfrak{p}p$ *in Geraden berühren, die von* $\mathfrak{p}$ *ausgehen, während die Quadripolarflächen der andern Puncte dieser Ebene die Ebene* $\mathfrak{p}p$ *in* $\mathfrak{p}$ *berühren.*

Nach dem Vorhergehenden ist es klar, dass die Raumcurve sechster Ordnung, welche im Allgemeinen die Berührungscurve der Hessiana mit der Polarfläche einer Ebene ist (158), sich, wenn diese Ebene die Ebene $\mathfrak{p}p$ ist, auf das System der vier Geraden p, p_1, p_2, p_3 und den Kegelschnitt c reduciert.

208. Eine beliebig durch den Doppelpunct $\mathfrak{p}$ gelegte Gerade trifft die Hessiana in zwei weiteren Puncten $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$; es seien $\mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ die entsprechenden Puncte. Die ersten Polarflächen der Puncte der Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ gehen durch zwei Kegelschnitte die in zwei Ebenen liegen, welche die Quadripolarfläche von $\mathfrak{p}$ bilden und durch p gehen (194). In dem Büschel dieser ersten Polarflächen sind folgende Puncte diejenigen, deren Polarebene in Bezug auf diese Flächen constant ist: 1. die Puncte $\mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ (Scheitel der Kegel des Büschels), deren Polarebenen in Bezug auf die Quadriflächen des Büschels bezüglich $p\mathfrak{d}'$ und $p\mathfrak{c}'$ sind, und 2. die Puncte von p, deren Polarebenen in Bezug auf die nämlichen Quadriflächen durch die Gerade $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ gehen. Die Ebene $p\mathfrak{d}'$ ist also die gemischte Polarebene der Puncte $\mathfrak{d}, \mathfrak{c}'$, das heisst, sie ist die Polarebene von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{c}'$, dessen Scheitel $\mathfrak{c}$ ist. Daraus folgt, dass die Ebene $p\mathfrak{d}'$ durch $\mathfrak{c}$ geht, und analog die Ebene $p\mathfrak{c}'$ durch $\mathfrak{d}$.

Ist ausserdem $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punct von p, so geht die Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$; mit andern Worten, $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ liegt in der Polarebene von $\mathfrak{c}$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{x}$, dessen Scheitel $\mathfrak{p}$ ist, das heisst, die Puncte $\mathfrak{p}, \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ sind in gerader Linie. Also:

Wenn eine durch einen Doppelpunct $\mathfrak{p}$ *gezogene Gerade die Hessiana in* $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ *schneidet, so liegen die entsprechenden Puncte* $\mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ *ebenfalls mit* $\mathfrak{p}$ *in gerader Linie, und die Geraden* $\mathfrak{c}\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}$ *treffen sich auf der Geraden* p.

209. Diese Schlüsse gelten auch dann noch, wenn der Punct $\mathfrak{c}$ auf eine Gerade p_4 fällt, eine der Geraden auf der Hessiana aber von p (der $\mathfrak{p}$ entsprechenden) verschieden, ebenso von p_1, p_2, p_3 (die durch $\mathfrak{p}$ gehen), nämlich einem Puncte $\mathfrak{p}_4$ entsprechend, der etwa auf p_1 liegt. Nun wird $\mathfrak{c}'$

der Doppelpunct $\mathfrak{p}_4$ und $\mathfrak{d}'$ ist ein Punct der Geraden p_1. Der nämliche Punct $\mathfrak{d}'$ ist der Pol einer ersten Polarfläche mit einem Doppelpunct in $\mathfrak{d}$; nun haben aber die Nichtdoppelpuncte von p_1 als Quadripolarflächen Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{p}_1$, also ist $\mathfrak{d}'$ der dritte Doppelpunct $\mathfrak{p}_5$ der auf p_1 liegt, und folglich fällt $\mathfrak{d}$ auf die Gerade p_5.

Ist der Punct $\mathfrak{c}$ auf p_4 variabel, so bleiben die Puncte $\mathfrak{c}'$ ($\equiv \mathfrak{p}_4$) und $\mathfrak{d}'$ ($\equiv \mathfrak{p}_5$), die beide auf der festen Geraden p_1 liegen, unverändert, also wird $\mathfrak{d}$ nicht aus p_5 herausgehen. Daraus folgt, dass die Geraden p_4 und p_5 in einer Ebene liegen, die durch $\mathfrak{p}$ geht. Diese Ebene muss ausserdem die Hessiana in einer Curve zweiter Ordnung mit Doppelpunct in $\mathfrak{p}$ schneiden; letztere Curve ist also das System zweier Geraden, die nothwendigerweise mit p_2 und p_3 zusammenfallen.

Der gemeinschaftliche Punct der Geraden p^4, p_5 ist der Pol einer Quadripolarfläche mit Doppelpunct in $\mathfrak{p}_4$ und $\mathfrak{p}_5$, das heisst einer Quadrifläche, die aus zwei Ebenen besteht, die durch p_1 gehen; also ist der p_4 und p_5 gemeinschaftliche Punct der Punct $\mathfrak{p}_1$ (der auf p liegt).

Die Geraden p_2, p_3, p_4, p_5 bilden also ein vollständiges ebenes Vierseit, dessen Scheitel sechs Doppelpuncte der Hessiana sind. Zwei Gegenscheitel sind entsprechende Puncte, das heisst, jeder derselben liegt auf der entsprechenden Geraden des andern.

Wie gross ist die Zahl der Ebenen, die derjenigen analog sind, welche die vier Geraden p_2, p_3, p_4, p_5 enthält? Durch jeden der Puncte $\mathfrak{p}$ gehen drei solche Ebenen, und jede Ebene enthält sechs Puncte $\mathfrak{p}$, die Zahl der Ebenen ist also $\frac{3 \cdot 10}{6} = 5$.

Oder auch anders: Zwei dieser Ebenen gehen durch jede der Geraden p und jede Ebene enthält vier Gerade p, die Zahl der Ebenen ist folglich $\frac{2 \cdot 10}{4} = 5$.

Diese fünf Ebenen bilden einen **Pentaeder** (zuerst von Sylvester entdeckt), *dessen Scheitel und Kanten bezüglich die zehn Puncte $\mathfrak{p}$ und die zehn Geraden p sind.*

Von diesen fünf Ebenen gehen drei durch $\mathfrak{p}$ und die andern durch p, also hat der gemeinschaftliche Scheitel dreier Seitenflächen des Pentaeders den Durchschnitt der beiden übrigen Seitenflächen zur entsprechenden Geraden.

210. Will man das System dieser fünf Ebenen studieren, so ist es am Besten, dieselben durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 zu bezeichnen, in der Art, dass die zehn Scheitel $\mathfrak{p}$ (Doppelpuncte der Hessiana) und die bezüglichen zehn Gegenkanten (entsprechen den Geraden p) bezeichnet sind durch:

$$\begin{array}{cccccccccc} 123, & 124, & 125, & 134, & 135, & 145, & 234, & 235, & 245, & 345 \\ 45, & 35, & 34, & 25, & 24, & 23, & 15, & 14, & 13, & 12. \end{array}$$

Ein beliebiger Punct der Geraden 12 hat zur Quadripolarfläche einen Kegel, der dem Trieder conjugiert ist (194), das durch die Ebenen 3, 4, 5 gebildet wird. Ebenso sind die Polarkegel, deren Pole beliebig auf den

Geraden **13, 14, 15** angenommen sind, den Triedern **245, 235, 234** bezüglich conjugiert. Daraus folgt, dass alle Quadripolarflächen des durch diese vier Kegel bestimmten Netzes, nämlich die Quadripolarflächen aller Puncte der Ebene **1**, ein und demselben Tetraeder conjugiert sind, nämlich dem Tetraeder **2345**.

Die Ebenen **1, 2, 3, 4, 5** *sind die einzigen, welche die Eigenschaft besitzen, dass die Quadripolarflächen aller Puncte einer jeden von ihnen demselben Tetraeder (das durch die vier andern gebildet wird) conjugiert sind;* weil man beweisen kann, dass, wenn die Quadripolarflächen eines Netzes ein und demselben Tetraeder conjugiert sind, die Kanten desselben in der Hessiana liegen. In der That ist diese Fläche die Jacobiana (139) des linearen Systems, das durch genanntes Netz und eine andere nicht zum Netze gehörige Quadripolarfläche S bestimmt ist. Nimmt man auf einer Kante des Tetraeders einen Punct $\mathfrak{o}$ an, auf der Gegenkante dort den Punct $\mathfrak{o}'$, wo dieselbe durch die Polarebene von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf S geschnitten wird, so sind die Puncte $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ in Bezug auf alle Flächen des Systems conjugiert, und gehören also der Hessiana an.

211. Wir haben oben (196, 201) bewiesen, dass jede Bitangente der Hessiana die Eigenschaft besitzt, die Enveloppe der Polarebenen der Puncte einer andern Geraden zu sein, welche die beiden entsprechenden Puncte der Fläche verbindet. Unter den Geraden, welche diese Eigenschaft besitzen, befinden sich die zehn Kanten des Pentaeders und die fünfzehn Diagonalen seiner Seitenflächen. Jede Kante, wie **12**, entspricht einem Büschel Polarkegel (194), dessen Basis das System der vier Geraden ist, welche im entsprechenden Puncte **345** zusammenlaufen; und umgekehrt (87): *die Polarebenen der Puncte jeder dieser vier Geraden gehen durch die Gerade* **12**. Jede Diagonale, wie $\{123\}\{145\}$, entspricht einem Büschel von Quadripolarflächen, die nicht Kegel sind, deren Basis das System der vier Geraden ist, gebildet durch den Durchschnitt der beiden Ebenenpaare, welche die Quadripolarflächen der Puncte **123, 145** darstellen, und umgekehrt: *Die Polarebenen der Puncte dieser vier Geraden gehen sämmtlich durch die betrachtete Diagonale.*

212. Wir haben gezeigt, dass einer beliebigen Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ durch den Doppelpunct $\mathfrak{p}$ eine Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ entspricht (208), und aus dem Vorhergehenden (209) folgt, dass, wenn die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ in eine Seitenfläche des Trieders $p_1p_2p_3$ fällt, die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ mit der Gegenkante desselben Trieders zusammenfällt. Ist umgekehrt $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ eine der Geraden p_1, p_2, p_3, so ist $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ eine beliebige unter den Geraden, welche durch $\mathfrak{p}$ gehen und in der Ebene der beiden andern Geraden p liegen.

Fällt $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ zusammen, das heisst, sind $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ zwei entsprechende Puncte, so ist $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ (197) eine der vier Geraden, durch welche die Polarkegel vom Scheitel $\mathfrak{p}$ gehen.

Ist $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ in der Ebene $\mathfrak{p}p$ gezogen, so fällt $\mathfrak{c}'$ mit $\mathfrak{p}$ zusammen, und folglich osculiert die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ die Hessiana in $\mathfrak{p}$; also erzeugt, wenn $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ um $\mathfrak{p}$ variabel ist in der Ebene $\mathfrak{p}p$, die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ den Polarkegel von p; und während $\mathfrak{c}$ die Gerade p durchläuft, und $\mathfrak{d}$ eine cubische Plancurve mit Doppelpunct in $\mathfrak{p}$ beschreibt, erzeugt der Punct $\mathfrak{d}'$ den Kegelschnitt c, Durchschnitt des genannten Kegels mit der Hessiana (206). Sobald $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ die Hessiana osculiert, das heisst, wenn sie in $\mathfrak{p}$ einen der Zweige der cubischen Plancurve berührt, so fällt $\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{p}$ zusammen, und folglich auch $\mathfrak{d}'$ auf p. Daraus ergibt sich, dass die beiden Durchschnittspuncte des Kegelschnittes c mit der Geraden p den beiden Puncten der cubischen Plancurve entsprechen, welche unendlich nahe $\mathfrak{p}$ liegen.

213. Verschiebt sich die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ in einer Ebene E durch $\mathfrak{p}$, so erzeugt die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ einen Kegel, der durch p_1, p_2, p_3 geht, wegen der drei Geraden, in denen E die Seitenflächen des Trieders $p_1p_2p_3$ schneidet (212). Dieser Kegel ist durch zwei andere Generatrixen bestimmt, weil zwei Gerade, die durch $\mathfrak{p}$ gehen, die Ebene E bestimmen. Die Kegel, welche in dieser Weise zwei Ebenen E, E_1 entsprechen, haben eine einzige gemeinschaftliche Generatrix (ausser p_1, p_2, p_3) nämlich die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$, welche der Durchschnittslinie $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ der beiden Ebenen entspricht. Die Kegel, welche den Ebenen E entsprechen, sind also zweiter Ordnung.

Wir haben so *eine Transformation der Figuren erhalten, welche aus Geraden (also auch aus Ebenen und Kegeln) gebildet werden, die von* $\mathfrak{p}$ *ausgehen. Einer Geraden entspricht eine Gerade, einer Ebene entspricht ein Quadrikegel, der dem Trieder* $p_1p_2p_3$ *umgeschrieben ist, und umgekehrt.*

Sobald die Puncte $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$ und ebenso $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}'$ in Bezug auf jede Quadrifläche conjugiert sind, *so sind die Geraden* $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ *in Bezug auf sämmtliche Polarkegel vom Scheitel* $\mathfrak{p}$ *conjugiert.* Diese Kegel bilden ein Büschel und gehen durch die vier Geraden, welche ihnen entsprechen, und diese vier Geraden bilden ein vollständiges Vierkant, dessen Diagonalgerade p_1, p_2, p_3 sind (Durchschnitte der Ebenenpaare, welche dem Büschel angehören, und die Quadripolarflächen der Puncte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ sind). Also: *Der Quadrikegel, der dem Trieder* $p_1p_2p_3$ *umgeschrieben ist und einer Ebene* E *entspricht, ist der Ort der Polargeraden dieser Ebene in Bezug auf die Kegel jenes Büschels.* Folglich schneidet obiger Kegel die Ebenen p_2p_3, p_3p_1, p_1p_2 längs der conjugierten Geraden der Durchschnittsgeraden derselben mit E in Bezug auf die respectiven Geradenpaare p_1, p_2; p_3, p_1; p_1, p_2. Derselbe Kegel trifft die Ebene E längs zweier entsprechender Geraden, von denen jede eine Berührungsgeneratrix zwischen E und einem Kegel des Büschels ist; die Ebenen, welche durch p_1 gehen und bezüglich durch zwei entsprechende Gerade, bilden ein harmonisches System mit den Ebenen p_1p_2, p_1p_3; u. s. w.

214. Wir betrachten einen Cubikegel (Kegel dritter Ordnung), der durch die sechs Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}\mathfrak{p}_3, p_1, p_2, p_3$ geht und längs der drei letzten

durch die Polarebenen von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ berührt wird [1]). Es sei $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ eine Generatrix dieses Kegels. Die Ebene $p\mathfrak{c}$ schneidet die Hessiana und diesen Kegel längs zwei cubischen Plancurven, die sieben Puncte gemein haben, von denen drei dieselben Tangenten besitzen; diese cubischen Curven fallen also zusammen. Das heisst: *Der Cubikegel trifft die Hessiana in einer Plancurve* (dritter Ordnung), deren Ebene $p\mathfrak{c}$ ist, *und also noch in einer andern Plancurve* (derselben Ordnung), deren Ebene $p\mathfrak{d}$ ist. Jede dieser beiden Ebenen genügt offenbar, um auf eine einzige Weise den Cubikegel und die andere Ebene zu bestimmen; *also bilden diese Ebenenpaare, die die Durchschnittscurven der Hessiana mit den Cubikegeln des Büschels*, um das es sich handelt, *enthalten, eine Involution;* die Doppelebenen derselben enthalten die Berührungscurven zwischen der Hessiana und zwei Kegeln des Büschels. Das heisst: *Die Tangenten, welche man vom Puncte* $\mathfrak{p}$ *aus an die Hessiana ziehen kann, bilden zwei Cubikegel, und die Berührungscurven befinden sich in zwei durch p gehenden Ebenen;* das System dieser beiden Ebenen ist folglich die Quadripolarfläche des Punctes $\mathfrak{p}$. Also: *Die Quadripolarfläche von* $\mathfrak{p}$ *besteht aus zwei Ebenen, welche mit denjenigen beiden Ebenen ein harmonisches System bilden, welche die beiden cubischen Plancurven enthalten, die ein und demselben Cubikegel des Büschels angehören.*

Unter den Kegeln dieses Büschels gibt es auch den, welcher durch die Ebene $\mathfrak{p}p$ und den Polarkegel von p gebildet wird. Die Ebenen der Schnitte, welche denselben entsprechen, sind die Ebenen $\mathfrak{p}p$ und die Polarebene von $\mathfrak{p}$. Ein anderer Kegel desselben Büschels ist das Trieder $p_1p_2p_3$, das durch diejenigen drei Seitenflächen des Pentaeders gebildet wird, welche in $\mathfrak{p}$ zusammenlaufen. Die entsprechenden Schnitte liegen in den beiden andern Seitenebenen des Pentaeders, welche durch p gehen, und jeder von ihnen ist das System dreier Geraden. Hieraus zieht man, *dass die beiden Ebenen, welche die Quadripolarfläche von* $\mathfrak{p}$ *darstellen, und die beiden Seitenflächen des Pentaeders, welche durch p gehen, ein harmonisches System bilden.*

215. Die Ebenen $p\mathfrak{c}, p\mathfrak{d}$ gehen bezüglich durch $\mathfrak{d}', \mathfrak{c}'$ (208), folglich geht der Cubikegel des erwähnten Büschels, welcher durch $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ geht, auch durch $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$, das heisst (113), *dieser Kegel entspricht sich selbst.* Man schliesst hieraus und aus bekannten Eigenschaften der cubischen Plancurven [2]), dass die Tangentialebenen unseres Kegels längs zweier entsprechender Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ sich in einer Generatrix des nämlichen Kegels schneiden; dass jeder

---

1) Die analogen Cubikegel bilden ein Büschel, denn die gemeinsamen Bedingungen sind neun Geraden äquivalent, durch welche das System der drei Ebenen p_2p_3, p_3p_1, p_1p_2 und das System der Ebene $\mathfrak{p}p$ und des Polarkegels der Geraden p gehen.

2) Man kann in der That den Cubikegel als Jacobiana eines Netzes von Quadrikegeln vom Scheitel p betrachten, dem das Polarkegelbüschel der Puncte von p angehört.

Quadrikegel, der dem Trieder $p_1 p_2 p_3$ umgeschrieben ist, den Cubikegel längs der drei Berührungsgeneratrixen schneidet, welche dieser Kegel mit ein und demselben Kegel zweiter Ordnung besitzt; und dass diese drei Generatrixen ein Trieder bilden, dessen Seitenflächen den Cubikegel in drei neuen Geraden schneiden, welche in der Ebene liegen, welche dem ersten Quadrikegel entspricht. U. s. w.; u. s. w.

216. Wir wollen jetzt noch einige Bemerkungen über die Polarfläche einer beliebigen Ebene E machen, welche durch den Doppelpunct $\mathfrak{p}$ geht. Da dieser Punct der Scheitel einer unbegrenzten Zahl von Polarkegeln ist, deren Pole die Puncte von p sind, *so geht die Polarfläche durch diese Gerade* und ist längs derselben durch die Polarebene von $\mathfrak{p}$ berührt. Dieselbe Fläche geht ausserdem noch durch $\mathfrak{p}$ und wird in diesem Puncte von der Polarebene des Punctes $\mathfrak{i}$ berührt, in dem E von p getroffen wird. Unter den Polarkegeln vom Scheitel $\mathfrak{p}$ gibt es zwei, welche die Ebene E berühren; also (188): *Die Polarfläche hat zwei Doppelpuncte auf* p.

Die Quadripolarflächen, die durch $\mathfrak{p}$ gehen, treffen E in Kegelschnitten, die in $\mathfrak{p}$ durch ein und dieselbe Gerade $\mathfrak{pi}$ (Durchschnitt der Ebenen E und $\mathfrak{p}p$) berührt werden. Ein beliebiger Punct dieser Geraden ist für einen dieser Kegelschnitte ein Doppelpunct, das heisst, er ist ein Berührungspunct zwischen E und einer ersten Polarfläche durch $\mathfrak{p}$. Alle analogen ersten Polarflächen gehen daher durch die Gerade $\mathfrak{pi}$, und ihre Pole sind auf der Geraden gelegen, welche den Durchschnitt der Polarebenen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{i}$ bilden. Daraus ergibt sich, *dass diese letztere Gerade der Polarfläche von E angehört.*

Diese Polarfläche berührt die Hessiana längs einer Raumcurve sechster Ordnung (158), die sich in unserem speciellen Falle in zwei Theile theilt, die Gerade p und eine Raumcurve fünfter Ordnung, die durch $\mathfrak{p}$ geht. Diese Curve, als dem Schnitte der Ebene E auf der Hessiana entsprechend, bildet in Verbindung mit den Geraden p_1, p_2, p_3 den vollständigen Durchschnitt dieser Fläche mit dem Quadrikegel, welcher der Ebene E entspricht (213). Der letztere Kegel schneidet daher die Polarfläche von E nochmals in einer Geraden. In der That, sobald die Ebene E durch die entsprechenden Puncte $\mathfrak{p}, \mathfrak{i}$ der Hessiana geht, berührt sie in $\mathfrak{i}$ ein Büschel von Quadripolarflächen (203), deren Pole auf einer Geraden durch $\mathfrak{p}$ sich befinden, die in der Polarfläche liegt; und diese Fläche wird längs jener Geraden durch die Polarebene von $\mathfrak{i}$ berührt. Dieselbe Gerade enthält die beiden andern Doppelpuncte der Fläche, welche die Pole der beiden Kegel sind, die zu dem Büschel gehören. Diese beiden Kegel haben daher ihre Scheitel auf einer in der Ebene E durch $\mathfrak{p}$ gehenden Geraden, welche der ersten Geraden entspricht.

217. Indem man diese Betrachtungen auf die Ebenen des Pentaeders **12345** (210) anwendet, sieht man, dass die Kanten des Tetraeders **2345** die Curve sechster Ordnung (entsprechend dem Vierseit mit den Seiten **12**, **13**,

14, 15) bilden, längs dessen die Hessiana durch die Polarfläche der Ebene 1 berührt wird. Diese Fläche hat daher die Puncte 234, 235, 245, 345 (die Scheitel des Tetraeders) zu Doppelpuncten. Dieselbe Fläche enthält als reciproke Fläche der *Steinerschen* Fläche (188) drei andere Gerade die in derselben Ebene liegen. Diese Geraden sind (216) die Durchschnitte der Polarebenen der Punctenpaare (123, 145), (124, 135), (143, 125), der Gegenscheitel des Vierseits. Sie bilden gleichzeitig ein Dreieck $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, von dem jeder Scheitel der Pol einer ersten Polarfläche ist, die die Ebene 1 berührt, und durch zwei Gegenscheitelpaare des Vierseits geht; also sind die Diagonalen dieses Vierseits zu zweien combiniert die Durchschnitte der Ebene 1 mit den ersten Polarflächen der Puncte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$; das heisst, die Scheitel $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{c}'_1$ des Diagonaldreiecks sind die Pole der Ebene $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$.

Der Ebene 2 entspricht ebenso eine Ebene $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2$, welche die Polarebene jedes Scheitels des Dreiecks $\mathfrak{a}'_2\mathfrak{b}'_2\mathfrak{c}'_2$ ist, das durch die Diagonalen des Vierseits (21, 23, 24, 25) gebildet wird; u. s. w. für die übrigen Ebenen des Pentaeders. Nun gehen aber die Ebenen, die vom Puncte 345 aus durch die Diagonalen

$$\}123\{\}145\{\equiv \mathfrak{b}'_1\mathfrak{c}'_1,\ \}124\{\}135\{\equiv \mathfrak{c}'_1\mathfrak{a}'_1,\ \}125\{\}134\{\equiv \mathfrak{a}'_1\mathfrak{b}'_1$$

gezogen sind, auch durch die Diagonalen

$$\}123\{\}245\{\equiv \mathfrak{b}'_2\mathfrak{c}'_2,\ \}124\{\}235\{\equiv \mathfrak{c}'_2\mathfrak{a}'_2,\ \}125\{\}234\{\equiv \mathfrak{a}'_2\mathfrak{b}'_2,$$

weil die Punctenpaare

$$(145, 245),\ (135, 235),\ (134, 234)$$

mit 345 in gerader Linie liegen; also treffen sich die Geraden $\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2$, $\mathfrak{b}'_1\mathfrak{b}'_2$, $\mathfrak{c}'_1\mathfrak{c}'_2$ in demselben Puncte 345.

Da die Ebene $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ die Polarebene der Puncte $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{c}'_1$ ist, so folgt daraus, dass die Quadripolarfläche des gemeinschaftlichen Punctes dieser Ebene und der Geraden 12 ein Kegel ist, der durch die Puncte $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{c}'_1$ und durch die vier Geraden (durch 345) geht, welche die Basis des Polarkegelbüschels der Puncte von 12 bilden. Ebenso ist die Quadripolarfläche des Punctes, in welchem $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2$ die Gerade 12 schneidet ein Kegel, der durch die Puncte $\mathfrak{a}'_2$, $\mathfrak{b}'_2$, $\mathfrak{c}'_2$ und durch dieselben vier Geraden geht. Nun liegen aber die Puncte $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{a}'_2$; $\mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{b}'_2$; $\mathfrak{c}'_1$, $\mathfrak{c}'_2$ mit dem Puncte 345, dem gemeinschaftlichen Scheitel beider Kegel, in gerader Linie; die beiden Kegel fallen also zusammen, das heisst, die Ebenen $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2$ treffen die Gerade 12 in demselben Puncte. Also: *Die Ebenen* $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2$, ..., *welche den Seitenflächen* 1, 2, ... *des Pentaeders entsprechen, bilden ein neues Pentaeder, dessen Kanten die entsprechenden Kanten des ersten treffen, und daher liegen die fünf Geraden, in denen sich die entsprechenden Seitenebenen der beiden Pentaeder schneiden, in einer einzigen Ebene.*

218. Wir haben oben bewiesen, dass dem Schnitte der Hessiana durch eine Ebene E eine Raumcurve k sechster Ordnung entspricht (168). Es sei $\mathfrak{o}$ ein Punct von k, $\mathfrak{o}'$ der entsprechende Punct von E. Die Polargerade

der Ebene E in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{o}$ trifft die Hessiana nicht blos in $\mathfrak{o}'$, sondern auch in drei anderen Puncten $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$. Die Ebene E ist also die gemischte Polarebene der Punctenpaare $\mathfrak{o}, \mathfrak{l}$; $\mathfrak{o}, \mathfrak{m}$; $\mathfrak{o}, \mathfrak{n}$, das heisst, sie ist die Polarebene von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die Polarkegel von $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$. E enthält daher die Scheitel dieser drei Kegel, und folglich gehören die Puncte $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ der k an. Also: *Die Polargeraden der Ebene E in Bezug auf die Polarkegel, deren Scheitel in dieser Ebene liegen, treffen jede die Raumcurve k in drei Puncten.*

Wie viel solcher Polargeraden der Ebene E gehen durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{o}$ von k? Man muss einen Punct suchen, welcher mit $\mathfrak{o}$ als gemischte Polarebene die E hat; solcher Punct ist jeder Punct der Polargeraden von E in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{o}$. Diese Gerade trifft, wie man vorhin gesehen, die Curve k in drei Puncten $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$; und die Polargeraden von E in Bezug auf die Polarkegel von $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ gehen durch $\mathfrak{o}$. *Es gibt also drei Polargerade, welche durch einen beliebigen Punct von k gehen.*

Wie viel dieser Polargeraden trifft eine willkürliche Gerade g? Oder anders, wie viel Puncte gibt es auf g, welche E als Polarebene haben in Bezug auf einen Polarkegel, dessen Pol auf k liegt? Die Pole der Quadripolarflächen, in Bezug auf welche die Puncte von g die Pole von E sind (187), liegen auf einer cubischen Raumcurve, welche mit k acht Puncte gemein hat (121). Also: *Die Polargeraden der Ebene E in Bezug auf die Polarkegel, deren Scheitel sich in dieser Ebene befinden, bilden eine Fläche achter Ordnung. Für diese Fläche ist k eine dreifache Curve,* denn in jedem ihrer Puncte kreuzen sich drei Generatrixen. *Die nämliche Fläche geht durch die zehn Geraden p,* weil jede dieser letztern als Polargerade einer beliebigen Ebene in Bezug auf die Quadripolarfläche des entsprechenden Punctes $\mathfrak{p}$ betrachtet werden kann.

Die Generatrixen der Fläche treffen die Ebene E in den Scheiteln der Polarkegel, also *enthält die Fläche den ebenen Schnitt der Hessiana auf E.* Sie enthält ausserdem noch vier Gerade, die auch auf E liegen. Es sind dies die Berührungsgeneratrixen von E mit den vier Polarkegeln, deren Pole die Doppelpuncte der Polarfläche von E sind (188).

Ist E die Ebene im Unendlichen, so sind die Polarkegel der Puncte von k Cylinder, unter denen diejenigen, welche E berühren, vier an der Zahl, parabolisch sind. Die Polargeraden von E werden die Axen dieser Cylinder.

219. Von welcher Classe ist die *Enveloppe der Ebenen, welche die Fundamentalfläche F_3 in harmonischen cubischen Curven schneidet* [1])? Es sei g eine willkürliche Gerade, $\mathfrak{r}$ ein Punct, welcher g und der Fundamentalfläche

---

1) Eine Plancurve dritter Ordnung heisst *harmonisch* oder *äquianharmonisch* nach den Specialwerthen des constanten Doppelverhältnisses von vier Tangenten, die von einem beliebigen Puncte der Curve ausgehen. *Einleitung*, No. 27, 131 b.

gemein ist; man muss nun eine solche Ebene, welche durch g geht, suchen, dass die vier Tangenten, die man von $\mathfrak{x}$ an F_3 in dieser Ebene ziehen kann, ein harmonisches System bilden. Nun bilden die Tangenten, die man von $\mathfrak{x}$ an F_3 ziehen kann (67) einen Kegel vierter Ordnung, welcher, da er im Allgemeinen keine Doppelgeneratrixen hat, noch stationäre, von der zwölften Classe ist. Indem man diesen Kegel und die Gerade g durch eine Ebene schneidet, erhält man eine allgemeine Curve c vierter Ordnung und einen Punct $\mathfrak{g}$. Es handelt sich nun darum, von $\mathfrak{g}$ eine Gerade zu ziehen, welche c in vier harmonischen Puncten schneidet. Man weiss aber [1]), dass dieses Problem sechs Auflösungen zulässt, also ist die gesuchte Enveloppe *eine Fläche von der sechsten Classe.*

Auf die nämliche Weise findet man den Satz: *Die Ebenen, welche die Fundamentalfläche in äquianharmonischen cubischen Curven schneiden, umhüllen eine Fläche vierter Classe.*

Eine cubische Curve mit einer Spitze ist gleichzeitig ein Specialfall der harmonischen cubischen Curve und der äquianharmonischen. Also *sind die beiden Flächen sechster und vierter Classe,* welche wir eben betrachtet haben, *in die Developpable* (172) *eingeschrieben, die durch die stationären Tangentialebenen gebildet wird* (das heisst, die der Fundamentalfläche längs der parabolischen Curve umgeschrieben ist).

Unter den Ebenen, welche die Fundamentalfläche in äquianharmonischen cubischen Curven schneiden, befinden sich auch die zehn zu $\mathfrak{p}p$ analogen Ebenen (207), dass heisst diejenigen, welche durch einen Doppelpunct und die entsprechende Gerade gehen. In der That ist die erste Polarfläche von $\mathfrak{p}$ ein Ebenenpaar, dass durch p geht, und die ersten Polarflächen der Puncte von p sind Kegel, welche die Ebene $\mathfrak{p}p$ längs Geradenpaaren durch $\mathfrak{p}$ in Involution schneiden. Die Doppelstrahlen dieser Involution und die Gerade p bilden also die Jacobiana des Netzes von Kegelschnitten, längs deren die Ebene $\mathfrak{p}p$ die Quadripolarflächen dieser Puncte schneidet. (Diese Jacobiana ist der Schnitt der Ebene $\mathfrak{p}p$ durch die Polarfläche dieser Ebene). Wenn aber die Jacobiana des Netzes der Polarkegelschnitte das System dreier Geraden ist, so ist die Fundamentalcurve äquianharmonisch, folglich trifft die Ebene $\mathfrak{p}p$ die Fundamentalfläche in einer äquianharmonischen cubischen Curve.

[1]) Steiner, *Ueber solche algebraische Curven u. s. w.* (Crelles Journal, Bd. 47. S. 102).

CAPITEL III.

DIE SIEBENUNDZWANZIG GERADEN EINER FLÄCHE DRITTER ORDNUNG.

220. Eine Bitangentialebene der Fundamentalfläche F_3 schneidet diese Fläche in einer cubischen Curve mit zwei Doppelpuncten (den beiden Berührungspuncten), dass heisst in einer Geraden und einem] Kegelschnitte. Die Zahl der auf F_3 liegenden Geraden ist also gleich der Zahl der Bitangenten, welche durch einen beliebigen Punct des Raumes gehen, oder auch gleich der Classe der developpablen Fläche, welche die Enveloppe der Bitangentialebenen ist. Diese Classe ist nun (67) gleich 27, *also enthält eine Fläche dritter Ordnung im Allgemeinen* 27 *Gerade.*

Ist a eine dieser Geraden, so schneidet jede durch a gelegte Ebene die Fläche in einem Kegelschnitt und berührt sie in den beiden Durchschnittspuncten dieses Kegelschnittes mit a (171). Lässt man die Ebene um a rotieren, *so erzeugen die beiden Berührungspuncte eine Involution*, deren Doppelpuncte die Berührungspuncte von a mit der Hessiana sind, oder was auf dasselbe hinausläuft, mit der parabolischen Curve. Unter den Ebenen, die durch a gelegt sind, gibt es (171) fünf, welche F_3 in einem Kegelschnitt mit Doppelpunct (zwei Gerade ausser a) schneiden; das heisst, *durch jede auf der Fläche gelegene Gerade gehen fünf Tritangentialebenen* (zwei Berührungspuncte auf der Geraden, der dritte ausserhalb). Umgekehrt muss jede Tritangentialebene die Fläche längs dreier Geraden schneiden (eine cubische Curve mit drei Doppelpuncten); also: *Eine beliebige Gerade auf der Fläche trifft* $2.5 = 10$ *andere Gerade* derselben Fläche, und *die Zahl der Tritangentialebenen ist* $\frac{5.27}{3} = 45$.

Sind a, b, c drei Gerade, die in derselben Tritangentialebene liegen, so gehen durch jede solche Gerade vier dreifache Tangentialebenen ausser abc, jede dieser Ebenen enthält zwei neue Gerade, und man erhält so die $3.4.2 = 24$ Geraden, welche mit a, b, c die Zahl 27 vervollständigen.

221. Die neun Geraden, in denen sich die Seitenebenen zweier gegebener Trieder schneiden, bilden die Basis eines Büschels cubischer Flächen, zu denen auch die beiden Trieder gehören. Die Fläche des Büschels, welche durch einen gegebenen Punct $\mathfrak{p}$ geht, erhält man auf folgende Weise: Eine beliebig durch $\mathfrak{p}$ gelegte Ebene schneidet die neun Geraden in neun Puncten, welche als Durchschnittspuncte der Seiten zweier Dreiecke (Schnitte der beiden Trieder) die Basis eines Curvenbüschels dritter Ordnung bilden. Eine dieser Curven geht durch $\mathfrak{p}$ und *der Ort aller analogen Curven, welche man erhält, wenn man die Ebene um* $\mathfrak{p}$ *dreht, ist* offenbar *die gesuchte cubische*

beliebige Gerade; x ein beliebiger Punct dieser Geraden. Wenn eine Quadripolarfläche durch x geht, so ist der Ort des Poles die zweite Polarfläche von x, welche die Curve $(\mu\nu)$ in $\mu\nu(\nu-2)$ Puncten schneidet; und die Polarebenen dieser Puncte treffen g in $\mu\nu(\nu-2)$ Puncten x'. Umgekehrt haben die Polarebenen, die durch einen beliebigen Punct x' von g gehen, ihre Pole auf der ersten Polarfläche von x', welche die Curve $(\mu\nu)$ in $\mu\nu(\nu-1)$ Puncten treffen, deren Quadripolarflächen $2\mu\nu(\nu-1)$ Puncte x auf g bestimmen. Es gibt also auf g

$$\mu\nu(\nu-2)+2\mu\nu(\nu-1)=\mu\nu(3\nu-4)$$

Puncte, in denen ein Punct x mit einem Puncte x' zusammenfällt. Man erhält so den Satz:

Der Ort der Osculierenden der Fundamentalfläche in den Puncten der Durchschnittscurve derselben mit einer andern Fläche S_μ μ-ter Ordnung ist eine Fläche der $\mu\nu(3\nu-4)$-ten Ordnung.

Für diese im Allgemeinen windschiefe Fläche ist die Curve $(\mu\nu)$ doppelt, denn jeder Punct derselben ist der Durchschnitt zweier gradliniger Generatrixen. Ist $\mu=1$, so schneidet der fragliche Ort die Ebene S in dem Schnitte der Fläche F_ν durch S und in den $3\nu(\nu-2)$ stationären Tangenten dieser ebenen Curve.

Ist $\mu=4(\nu-2)$, so geht die Ordnung des Ortes in $4\nu(\nu-2)(3\nu-4)$ über; ist aber S_μ die Hessiana, so darf man nur die Hälfte dieser Zahl nehmen, da in diesem Falle die Curve $(\mu\nu)$ die parabolische Curve ist (169), und folglich in jedem ihrer Puncte die beiden Osculierenden zusammenfallen.

In demselben Falle ist der Ort eine Developpable, da die Tangentialebene eines parabolischen Punctes von F_ν stationär ist, das heisst, da sie als eine Bitangentialebene betrachtet werden muss, deren beide Berührungspuncte unendlich nahe sind, und da zwei stationäre Ebenen, die unmittelbar auf einander folgen, durch die Osculierende gehen (31). Daraus folgt: *Der Ort der Osculierenden längs der parabolischen Curve fällt mit der einhüllenden Fläche der stationären Ebenen zusammen* [1]), deren Classe wir schon früher bestimmt haben (67).

173. Man verlangt *die der Fundamentalfläche längs der Durchschnittscurve ν-ter Ordnung mit einer Ebene E umgeschriebene Developpable.*

Die erste Polarfläche eines beliebigen Punctes x des Raumes trifft die Curve (ν) in $\nu(\nu-1)$ Puncten, also ist *die Classe der Developpablen* gleich $\nu(\nu-1)$.

Wenn zwei dieser $\nu(\nu-1)$ Puncte zusammenfallen, so gehört der Punct

---

1) *Diese Developpable ist der Steineriana längs der Curve von der Ordnung $6\nu(\nu-2)^2$ umgeschrieben, welche der parabolischen Curve entspricht* (168). In der That, ist o ein parabolischer Punct, so berührt die — hier stationäre — Polarebene von o in diesem Puncte die Fundamentalfläche und im correspondierenden Puncte die Steineriana (165).

$\mathfrak{x}$ der Developpablen an. Wieviel solcher Puncte gibt es nun auf einer beliebigen Geraden g? Die ersten Polarflächen der Puncte von g bilden ein Büschel und schneiden also die Ebene E in einem Curvenbüschel $(\nu-1)$-ter Ordnung in dem es $\nu(3\nu-5)$ Curven gibt [1]), welche die Curve (ν) berühren, sobald man diese ohne vielfache Puncte voraussetzt. Hat diese Curve δ Doppelpuncte und $\varkappa$ Spitzen (das heisst, hat E δ gewöhnliche und $\varkappa$ stationäre Berührungen mit F_ν), so geht obige Zahl über in $\nu(3\nu-5)-(2\delta+3\varkappa)$ [2]). *Diese Zahl drückt daher die Ordnung unsrer Developpablen aus.*

Gibt es unter den $\nu(\nu-1)$ Durchschnittspuncten der ersten Polarfläche von $\mathfrak{x}$ mit der Curve (ν) drei zusammenfallende Puncte, so liegt $\mathfrak{x}$ auf der Cuspidalcurve der Developpablen; hat dagegen die erste Polarfläche von $\mathfrak{x}$ zwei Berührungen mit der Curve (ν), so ist $\mathfrak{x}$ ein Punct der Doppelcurve der Developpablen. Man kann daher nach der Zahl derartiger Puncte $\mathfrak{x}$ auf einer beliebigen Ebene fragen. Die ersten Polarflächen der Puncte dieser Ebene schneiden E in einem Curvennetze $(\nu-1)$-ter Ordnung, in dem es

$$6\nu(\nu-2)-(6\delta+8\varkappa)$$

Curven gibt, welche die Curve (ν) osculieren, und

$$\tfrac{1}{2}[\nu(3\nu-5)-(2\delta+3\varkappa)]^2-\nu(11\nu-21)+10\delta+\frac{27}{2}\varkappa \quad {}^{3})$$

Curven, welche die nämliche Curve in zwei getrennten Puncten berühren. *Diese Zahlen drücken die Ordnung der Cuspidalcurve und die Ordnung der Knotencurve der Developpablen aus,* um die es sich handelt.

174. Was ist der *Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche in Bezug auf F_ν durch die Scheitel eines Tetraeders geht, das einer gegebenen Fläche S zweiter Ordnung conjugiert ist?* Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei beliebige Puncte des Raumes; c die Curve $(\nu-2)^2$-ter Ordnung, die der Durchschnitt der zweiten Polarflächen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ist, und folglich Ort der Pole der Quadripolarflächen, welche durch diese Puncte gehen; $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ die Puncte, in denen S die in Bezug auf S reciproke Gerade von $\mathfrak{ab}$ schneidet. Die Quadripolarflächen die durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gehen, bilden eine Reihe, von der $(\nu-2)^3$ durch einen dritten beliebig gegebenen Punct gehen. Es wird daher auch $(\nu-2)^3$ Quadriflächen dieser nämlichen Reihe geben, welche das Segment $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ harmonisch theilen, das heisst, die Curve c trifft den gesuchten Ort in $(\nu-2)^3$ Puncten. *Folglich ist dieser Ort eine Fläche von der Ordnung*

$$(\nu-2)^3:(\nu-2)^2=\nu-2\ .$$

Jeder Punct, der diesem Orte und der Hessiana gemein ist, ist dann der Pol eines Quadripolarkegels, der einem S conjugierten Trieder umgeschrieben ist. Folglich hat man (168): *Der Ort der Scheitel der Quadrikegel, welche*

---

1) *Einleitung,* Nr. 87.

2) *Einleitung,* Nr. 103.

3) *Einleitung,* Nr. 103.

den der gegebenen Quadrifläche conjugierten Triedern umgeschrieben sind, ist eine Raumcurve der $6(\nu-2)^3$*-ten Ordnung.*

175. Was ist der *Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche einem Tetraeder eingeschrieben ist, das einer gegebenen Fläche S zweiter Ordnung conjugiert ist?* Es seien A, B zwei beliebige Ebenen; c die Curve $9(\nu-2)^2$-ter Ordnung, die den Durchschnitt der gemeinen Polarflächen der Ebenen A, B darstellt, und somit Ort der Pole der Quadripolarflächen, welche beide obigen Ebenen berühren; A', B' die Tangentialebenen von S, welche durch die in Bezug auf S reciproke Gerade von AB gelegt sind. Die Quadripolarflächen, die A und B berühren, bilden eine Reihe, von der je $27(\nu-2)^3$ eine beliebige dritte Ebene berühren; es gibt daher auch $27(\nu-2)^3$ solcher Flächen, welche zu den Ebenen A', B' conjugiert sind. Die Curve c enthält also $27(\nu-2)^3$ Puncte des gesuchten Ortes, und dieser ist daher *eine Fläche von der Ordnung:*

$$27(\nu-2)^3 : 9(\nu-2)^2 = 3(\nu-2)\,.$$

Liegt ein Scheitel $\mathfrak{x}$ des zu S conjugierten Tetraeders auf S selbst, so ist seine Gegenfläche die Tangentialebene dieser Fläche in $\mathfrak{x}$, und von den drei übrigen Seitenflächen fällt eine mit derselben Tangentialebene zusammen, und die beiden übrigen sind zwei beliebige Ebenen, die man durch zwei conjugierte Tangenten von S in $\mathfrak{x}$ gezogen hat. Ein solches Tetraeder kann man daher stets als einem Quadrikegel vom Scheitel $\mathfrak{x}$ umgeschrieben ansehen. Ist folglich $\mathfrak{x}$ ein gemeinschaftlicher Punct von S und der Hessiana, so gehört der Pol des Polarkegels vom Scheitel $\mathfrak{x}$ dem Orte an, um den es sich handelt; das heisst: *dieser Ort schneidet die Hessiana in der Curve, welche der Durchschnittscurve der Steineriana mit S entspricht.*

Wenn S das System zweier Ebenen ist, so wird der betrachtete Ort offenbar die gemischte Polarfläche dieser Ebenen (158).

176. Wir suchen den *Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche in Bezug auf die Fundamentalfläche* F_ν *durch die Scheitel eines Tetraeders geht, welches der Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf die Hessiana conjugiert ist.*

Es sei g eine beliebige Gerade; $\mathfrak{x}$ ein Punct auf g. Der Ort der Pole der Quadripolarflächen in Bezug auf F_ν, die den Tetraedern umgeschrieben sind, welche der Quadripolarfläche des Punctes $\mathfrak{x}$ nach der Hessiana genommen conjugiert sind, schneidet die Gerade g in $(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}'$ (172). Soll umgekehrt eine Quadripolarfläche in Bezug auf die Hessiana einem Tetraeder conjugiert sein, das der Quadripolarfläche des Punctes $\mathfrak{x}'$ in Bezug auf F_ν eingeschrieben ist, (das heisst, wenn die erste Quadrifläche einem der zweiten conjugierten Tetraeder eingeschrieben sein soll), so ist der Ort (175) eine Fläche von der Ordnung $3[4(\nu-2)-2]$, welche g in ebensovielen Puncten $\mathfrak{x}$ schneidet. Diese Gerade enthält also $\nu-2+12(\nu-2)-6$ zusammenfallenden Puncte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, oder mit andern Worten, *der gesuchte Ort ist eine Fläche der* $(13\nu-32)$*-sten Ordnung.*

Betrachtet man die gemeinschaftlichen Puncte dieser Fläche und der Hessiana, so können wir weiter behaupten: Der Ort eines Punctes der Hessiana, dessen Polarkegel einem der Quadripolarfläche des nämlichen Punctes conjugierten Trieder umgeschrieben ist, diese Fläche nach der Hessiana genommen, ist eine Raumcurve von der Ordnung $4(\nu-2)(13\nu-32)$.

177. In ähnlicher Weise findet man den Satz: *Der Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche nach F_ν einem Tetraeder eingeschrieben ist, das der Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf die Hessiana conjugiert ist, ist eine Fläche T der Ordnung*

$$4(\nu-2)-2+3(\nu-2)=7\nu-16\ .$$

Diese Fläche schneidet die Hessiana in einer Curve, von der jeder Punct in Bezug auf F_ν der Pol eines Quadrikegels ist, dessen Scheitel auf der Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf die Hessiana liegt. *Folglich ist der Ort eines Punctes der Hessiana, dessen Quadripolarfläche nach der Hessiana genommen, durch den entsprechenden Punct der Steineriana geht, eine Raumcurve der $4(\nu-2)(7\nu-16)$-ten Ordnung, die auf der Fläche T liegt.* Diese Curve geht zweimal durch die $10(\nu-2)^3$ Doppelpuncte der Hessiana, denn jeder Punct derselben hat eine unbegrenzte Zahl entsprechender Puncte in gerader Linie (167), welche die Quadripolarfläche dieses Punctes nach der Hessiana genommen zweimal schneidet.

178. *Was ist der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana die Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf F_ν berührt?* Es sei g eine beliebige Gerade; $\mathfrak{x}$ ein Punct auf g; X die Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf die Hessiana. Die Quadripolarflächen nach F_ν, welche die Ebene X berühren, haben ihre Pole auf der gemeinen Polarfläche dieser Ebene (158), welche g in $3(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}'$ schneidet. Soll umgekehrt eine Polarfläche durch $\mathfrak{x}'$ gehen, so ist die entsprechende Ebene Tangentialebene der Quadripolarfläche von $\mathfrak{x}'$. Nun liegen aber die Pole — nach der Hessiana genommen — der Tangentialebenen einer Quadrifläche auf einer Fläche der $2[4(\nu-2)-1]$-ten Ordnung (96), die g in ebensovielen Puncten $\mathfrak{x}$ schneidet. Die Gerade g enthält also

$$3(\nu-2)+8(\nu-2)-2=11\nu-24$$

zusammenfallende Puncte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$, und *der gesuchte Ort ist also eine Fläche $\mathfrak{S}$ der $(11\nu-24)$-sten Ordnung.*

Ein Punct $\mathfrak{x}$ der Fläche T (177) ist der Scheitel eines der Quadripolarfläche von $\mathfrak{x}$ nach F_ν genommen umgeschriebenen Tetraeders, das zugleich der Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf die Hessiana conjugiert ist, wenn nur der Punct $\mathfrak{x}$ auf der reciproken Polarfläche der ersten Quadrifläche in Bezug auf die zweite liegt, in welchem Falle die Polarebene von $\mathfrak{x}$, nach der Hessiana genommen, die Quadripolarfläche desselben Punctes für F_ν berührt. Das heisst, unter dieser Voraussetzung ist $\mathfrak{x}$ auch ein Punct von $\mathfrak{T}$. *Der Ort eines Punctes also, der ein Scheitel eines Tetraeders ist, das bezüglich den Quadripolarflächen desselben Punctes nach F_ν und nach der Hessiana genommen umgeschrieben und conjugiert ist, ist eine Raumcurve von der Ordnung* $(11\nu-24)(7\nu-16)$, *die den Durchschnitt der Flächen $\mathfrak{T}$ und T bildet.*

179. *Was ist der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana einer gegebenen Ebene E_λ in Bezug auf die Quadripolarfläche desselben Punctes conjugiert ist, letztere Fläche nach F_ν genommen?* Ist $\mathfrak{x}$ ein Punct einer Geraden g, und X die Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf die Hessiana, so schneidet der Ort der Pole der Quadripolarflächen nach F_ν, für welche E_λ und X zwei conjugierte Ebenen sind, g in $3(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}'$ (152); umgekehrt, ist $\mathfrak{y}$ der Pol der Ebene E_λ in Bezug auf die Quadripolarfläche eines Punctes $\mathfrak{x}'$, diese Fläche nach der Fundamentalfläche genommen, so schneidet die erste Polarfläche von $\mathfrak{y}$ in Bezug auf die Hessiana g in $4(\nu-2)-1$ Puncten $\mathfrak{x}$. Die Gerade g enthält also $3(\nu-2)+4(\nu-2)-1$ zusammenfallende Puncte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$, das heisst *der gesuchte Ort ist eine Fläche $\mathfrak{S}_\lambda$ von der Ordnung* $7\nu-15$.

Ist $\mathfrak{x}$ ein Punct der Hessiana, für dessen Polarkegel der Scheitel auf der gegebenen Ebene liegt oder auf der Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf die Hessiana, so gehört dieser Punct $\mathfrak{x}$ dem Orte $\mathfrak{S}_\lambda$ an, denn, da die durch den Scheitel gehende Ebene eine unbegrenzte Zahl Pole hat — auf der Polargeraden der Ebene in Bezug auf den Kegel —, so ist sie für jede beliebige andere Ebene conjugiert. Der erste Fall hat statt für die Pole der Polarkegel, deren Scheitel auf der Durchschnittscurve der Steineriana mit der Ebene E_λ liegen; folglich geht der Ort $\mathfrak{S}_\lambda$ durch die Raumcurve $6(\nu-2)^2$-ter Ordnung, welche dem ebenen Schnitte E_λ der Steineriana entspricht [1]).

Die zweite Voraussetzung tritt dagegen ein, wenn die Tangentialebene der Hessiana in $\mathfrak{x}$ durch den Scheitel $\mathfrak{x}'$ des Polarkegels geht. In diesem Falle gehört der Punct $\mathfrak{x}$ offenbar auch der Fläche $\mathfrak{T}$ an (178). Was also auch die Ebene E_λ ist, stets geht der Ort $\mathfrak{S}_\lambda$ durch die gemeinschaftliche Curve von $\mathfrak{T}$ und der Hessiana [2]). Diese Curve ist von der Ordnung

$$4(\nu-2)(7\nu-15)-6(\nu-2)^2 = 2(\nu-2)(11\nu-24)$$

und diese Zahl ist die Hälfte des Productes aus den Ordnungszahlen der

---

[1]) Der Ort $\mathfrak{S}_\lambda$ und die gemeine Polarfläche der Ebene E_λ schneiden sich noch in einer andern Raumcurve von der Ordnung $3(\nu-2)(5\nu-11)$, die offenbar der Ort eines Punctes ist, dessen Quadripolarfläche in Bezug auf F_ν die Ebene E_λ berührt, und dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana durch den Berührungspunct geht.

[2]) Jeder gemeinschaftliche Punct der Fläche $\mathfrak{T}$ und der Hessiana gehört auch $\mathfrak{S}$ an, denn sobald die Polarebene nach der Hessiana den Polarkegel berühren muss, so geht sie durch den Scheitel desselben. Im Falle $\nu=3$ ist die Durchschnittscurve zwischen $\mathfrak{T}$ und der Hessiana die der parabolischen Curve entsprechende.

Fläche $\mathfrak{T}$ und der Hessiana, *folglich berühren sich diese beiden Flächen überall, wo sie sich treffen, und zwar längs einer Raumcurve der $2(\nu-2)(11\nu-24)$-sten Ordnung, Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana durch den entsprechenden Punct der Steineriana geht.*

Alle diese Flächen $\mathfrak{S}$ der $(7\nu-15)$-ten Ordnung bilden, da sie durch die nämliche Curve $2(\nu-2)(11\nu-24)$-ten Ordnung gehen, ein lineares System. In der That, sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ drei beliebig gegebene Puncte des Raumes; A, B, C die Polarebenen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ in Bezug auf die Hessiana; und $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ die Pole der Ebenen A, B, C in Bezug auf die Quadripolarflächen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ nach F_ν genommen, so bestimmt die Ebene $E \equiv \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ die einzige Fläche $\mathfrak{S}$, die durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ geht.

180. Man sucht den *Ort eines Punctes, für den die gemeinsame Gerade einer gegebenen Ebene E_λ und der Polarebene des Punctes in Bezug auf die Hessiana die Quadripolarfläche des nämlichen Punctes nach der Fundamentalfläche genommen berührt.* Um die Aufgabe zu lösen, nehmen wir auf einer beliebigen Geraden g einen Punct $\mathfrak{x}$ an; dann schneidet die Polarebene von $\mathfrak{x}$ nach der Hessiana genommen E_λ in einer gewissen Geraden, und der Ort der Pole derjenigen Quadripolarflächen in Bezug auf F_ν, welche diese Gerade berühren, schneidet g in $2(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}'$ (159). Umgekehrt wird die Quadripolarfläche für F_ν eines Punctes $\mathfrak{x}$ von der Ebene E_λ in einem Kegelschnitte getroffen, der $2(4\nu-9)$ gemeinschaftliche Tangenten mit demjenigen Schnitte hat, den die nämliche Ebene in der einhüllenden Fläche $[4(\nu-2)-1]$-ter Classe (93) der Polarbenen der Puncte von g nach der Hessiana genommen macht. *Der gesuchte Ort ist also eine Fläche $\mathfrak{X}_\lambda$ von der Ordnung*

$$2(\nu-2)+2(4\nu-9)=2(5\nu-11) .$$

Die Fläche $\mathfrak{T}$ und die Fläche $\mathfrak{S}_\lambda$ in Bezug auf die Ebene E_λ (179) haben eine Curve der Ordnung $2(\nu-2)(11\nu-24)$ gemein, und schneiden sich also in einer andern Raumcurve von der Ordnung

$$(7\nu-15)(11\nu-24)-2(\nu-2)(11\nu-24)=(5\nu-11)(11\nu-24) .$$

Jeder Punct $\mathfrak{x}$ dieser Curve ist so beschaffen, dass seine Polarebene für die Hessiana die Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf F_ν berührt (178), und dass genannte Ebene der Ebene E_λ in Bezug auf die nämliche Quadripolarfläche conjugiert ist; folglich geht E_λ durch den Berührungspunct der Polarebene mit der Quadrifläche, und also ist der Durchschnitt von E_λ mit der Polarebene eine Tangente der Quadrifläche. Es folgt daraus, dass $\mathfrak{x}$ ein Punct des Ortes $\mathfrak{X}_\lambda$ ist. Dasselbe Raisonnement zeigt ebenfalls, dass jeder Punct der Curve $3(\nu-2)(5\nu-11)$-ten Ordnung, welche der gemeinen Polarfläche der Ebene E_λ und dem Orte $\mathfrak{S}_\lambda$ gleichzeitig angehört, auch auf $\mathfrak{X}_\lambda$ liegt; und also schneidet $\mathfrak{X}_\lambda$ die $\mathfrak{S}_\lambda$ in einer Curve der $(5\nu-11)(11\nu-24)$-ten Ordnung, die auf $\mathfrak{T}$ liegt, und in einer andern Curve von der Ordnung $3(\nu-2)(5\nu-11)$, welche auf der gemeinen Polarfläche der Ebene E_λ liegt.

Nun sieht man aber leicht nach den Definitionen des betreffenden Ortes, dass jeder gemeinsame Punct von $\mathfrak{X}_\lambda$ und $\mathfrak{T}$, und ebenso jeder gemeinsame Punct von $\mathfrak{X}_\lambda$ und der Polarfläche von E_λ nothwendigerweise auch auf $\mathfrak{S}_\lambda$ liegt, *und folglich wird die Fläche* $\mathfrak{X}_\lambda$ *durch die Fläche* $\mathfrak{T}$ *längs der Raumcurve* $(5\nu-11)(11\nu-24)$*-ster Ordnung berührt, und von der gemeinen Polarfläche der Ebene* E_λ *längs der Raumcurve* $3(\nu-2)(5\nu-11)$*-ter Ordnung; beide Berührungscurven liegen gleichzeitig auf der Fläche* $\mathfrak{S}_\lambda$ [1]).

181. Man verlangt den *Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana die Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf* F_ν *und zwei gegebenen Ebenen* E_λ, E_λ' *in einem Kegelschnitt und zwei zu demselben conjugierten Geraden schneidet.* Es sei $\mathfrak{x}$ ein Punct einer beliebigen Geraden g; X die Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf die Hessiana, dann ist der Ort der Pole der Quadripolarflächen in Bezug auf F_ν, welche die Ebene E_λ in Kegelschnitten schneiden, die zu den Geraden XE_λ, XE_λ' conjugiert sind, die gemischte Polarfläche dieser Geraden (159), die g in $2(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}'$ schneidet. Umgekehrt sei Q die Quadripolarfläche eines Punctes $\mathfrak{x}'$ in Bezug auf F_ν, dann weiss man, dass die Ebenen, welche die Quadrifläche Q und die gegebenen Ebenen E_λ, E_λ' längs eines Kegelschnittes und zwei conjugierter Geraden schneiden, eine andere Quadrifläche umhüllen. Diese Fläche und die Einhüllende der Polarebenen der Puncte von g in Bezug auf die Hessiana haben $2[4(\nu-2)-1]$ gemeinschaftliche Tangentialebenen, denen ebensoviele Pole $\mathfrak{x}$ auf g entsprechen. *Der verlangte Ort ist also eine Fläche* $\mathfrak{X}_{\lambda\lambda'}$ *der Ordnung*

$$2(\nu-2)+2(4\nu-9)=2(5\nu-11)\ .$$

Jeder gemeinsame Punct $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{X}_\lambda$ ist so beschaffen (180), dass seine Polarebene in Bezug auf die Hessiana die Quadripolarfläche von $\mathfrak{x}$ nach F_ν genommen und die Ebene E_λ in drei durch ein und denselben Punct gehenden Geraden schneidet. Die letzte von diesen Geraden hat eine unbegrenzte Anzahl Pole in gerader Linie in Bezug auf den Kegelschnitt, der durch die beiden ersten Geraden gebildet wird. Daraus folgt, dass die letztere Gerade in Bezug auf genannten Kegelschnitt jeder Geraden conjugiert ist, die in der erwähnten Polarebene von $\mathfrak{x}$ gezogen werden kann; also ist $\mathfrak{x}$ auch ein Punct des Ortes $\mathfrak{X}_{\lambda\lambda'}$. Das heisst aber: *Dieser Ort geht durch die beiden Curven der* $(5\nu-11)(11\nu-24)$*-sten Ordnung, in denen sich die Flächen* $\mathfrak{T}$ *und bezüglich* $\mathfrak{X}_\lambda$ *und* $\mathfrak{X}_\lambda'$ *berühren.*

182. Man verlangt den *Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf* F_ν *und die Hessiana, und dessen Quadrioplarfläche in Bezug auf* F_ν

---

[1]) Es folgt hieraus, dass der Verein der Hessiana, von $\mathfrak{X}_\lambda$ und einer beliebigen Fläche $\mathfrak{P}$ der $(4\nu-9)$-ten Ordnung mittelst zweier projectivischer Büschel erzeugt werden kann, nämlich $(\mathfrak{T}, \mathfrak{S}_\lambda\mathfrak{P}, \ldots)$ der $(11\nu-24)$-ten Ordnung und $(\mathfrak{S}_\lambda, S_\lambda\mathfrak{P}, \ldots)$ der $(7\nu-15)$-ten Ordnung. Hierin bezeichnet S_λ die gemeine Polarfläche der Ebene E_λ.

einen Punct auf einer gegebenen Ebene E gemein haben. Es sei $\mathfrak{x}$ ein Punct einer beliebigen Geraden g, dann trifft die den beiden Polarebenen von $\mathfrak{x}$ gemeinschaftliche Gerade die Ebene E in einem Puncte $\mathfrak{p}$, und die Pole der Quadripolarflächen in Bezug auf F_ν, welche durch $\mathfrak{p}$ gehen, liegen auf der zweiten Polarfläche dieses Punctes. Diese letzte Fläche schneidet g in $\nu-2$ Puncten $\mathfrak{x}'$. Umgekehrt schneidet die Quadripolarfläche eines Punctes $\mathfrak{x}'$ nach F_ν genommen die Ebene E in einem gewissen Kegelschnitte k; es gibt nun aber auf g eine Zahl von $10(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}$, von denen jeder die Eigenschaft besitzt, dass seine Polarebenen in Bezug auf F_ν und die Hessiana sich auf k schneiden [1]), der gesuchte Ort ist also eine Fläche $11(\nu-2)$-ter Ordnung.

Was auch die Ebene E ist, immer geht diese Fläche durch die $2(\nu-2)$ Puncte $\mathfrak{a}$, in denen die Hessiana von einer Geraden a berührt wird, die auf der Fundamentalfläche liegt (171); denn die Polarebenen und die Quadripolarfläche von $\mathfrak{a}$ gehen gleichzeitig durch die Gerade a und haben daher mit jeder gegebenen Ebene einen Punct gemein.

---

1) Durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{i}$ einer Geraden r kann man zwei erste Polarflächen in Bezug auf F_ν legen, deren Pole die Durchschnittspuncte von k mit der Polarebene von $\mathfrak{i}$ sind. Die ersten Polarflächen dieser Pole in Bezug auf die Hessiana treffen ferner r in $2(4\nu-9)$ Puncten $\mathfrak{i}'$. Umgekehrt kann man durch einen Punct $\mathfrak{i}'$ zwei erste Polarflächen in Bezug auf die Hessiana legen, deren Pole die Durchschnittspuncte von k mit der Polarebene von $\mathfrak{i}'$ in Bezug auf die Hessiana sind Die ersten Polarflächen dieser Pole in Bezug auf F_ν schneiden r in $2(\nu-1)$ Puncten. $\mathfrak{i}'$. Auf r fallen also

$$2(4\nu-9)+2(\nu-1)=10(\nu-2)$$

mal zwei Puncte $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{i}'$ zusammen, w. z. b. w.

DRITTER THEIL.

CAPITEL I.

ANWENDUNG DER ALLGEMEINEN THEORIE AUF EINE FUNDAMENTALFLÄCHE DRITTER ORDNUNG.

183. Die Fundamentalfläche sei jetzt eine Fläche F_3 der dritten Ordnung, die wir als ganz allgemein, das heisst ohne vielfache Puncte und Linien voraussetzen. Die im zweiten Theile bewiesenen Sätze enthalten schon eine grosse Zahl von Eigenschaften der cubischen Flächen, aber wir halten uns nicht dabei auf, die speciellen Sätze auszusprechen; wir haben nur im Sinne dasjenige zu entwickeln, was es für die Flächen der dritten Ordnung Specielles oder Charakteristisches gibt.

Da im gegenwärtigen Falle die erste Polarfläche zugleich die Quadripolarfläche ist, *so fallen die Hessiana und Steineriana in eine und dieselbe Fläche vierter Ordnung und sechszehnter Classe zusammen* (163, 165). *Die Puncte dieser Fläche entsprechen sich zu zwei und zwei. Sind* $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ *zwei entsprechende Puncte, so ist jeder der Scheitel eines Polarkegels, dessen Pol der andere Punct ist, und in jedem dieser Puncte hat die Hessiana die Polarebene des andern Punctes zur Tangentialebene.* Dieselben Puncte sind für jede Quadripolarfläche conjugiert (139).

184. Die zweite gemischte Polarfläche zweier Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ wird eine Ebene, und zwar der Ort eines solchen Punctes, dass die Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ in Bezug auf seine Quadripolarfläche conjugiert sind (160). Denkt man sich einen der Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und ihre gemischte Polarebene gegeben, so findet man den andern Punct auf folgende Weise: Die Quadripolarflächen der Puncte der gegebenen Ebene bilden ein Netz, und die Polarebenen von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf diese Flächen gehen sämmtlich durch denselben Punct $\mathfrak{b}$, welcher der gesuchte Punct ist.

Denkt man $\mathfrak{a}$ fest, und lässt die gemischte Polarebene um eine gegebene Gerade g rotieren, so beschreibt der Punct $\mathfrak{b}$ eine andere Gerade g', Durchschnitt der Polarebenen von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte von g. Nun schneidet g die Hessiana in vier Puncten, und *folglich umhüllen die Polarebenen eines gegebenen Punctes* $\mathfrak{a}$ *in Bezug auf die Polarkegel eine Fläche vierter Classe.* Ist $\mathfrak{a}$ ein Punct der Hessiana, so geht die gemischte Polarebene immer durch $\mathfrak{a}'$ (Scheitel des Polarkegels von $\mathfrak{a}$); in diesem Falle also umhüllen die Polarebenen von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf die Polarkegel einen Kegel vierter Klasse.

Ist $\mathfrak{a}$ beliebig im Raume gegeben, und $\mathfrak{b}$ bewegt sich in einer festen Ebene E, so geht die gemischte Polarebene immer durch einen festen Punct $\mathfrak{c}$, den Pol von E in Bezug auf die Quadripolarfläche von $\mathfrak{a}$. Beschreibt also $\mathfrak{b}$ die Durchschnittscurve der Hessiana mit der Ebene E, so umhüllt die gemischte Polarebene einen Kegel vom Scheitel $\mathfrak{c}$ vierter Classe, der derjenigen Fläche umschrieben ist, die man erhält, wenn $\mathfrak{b}$ die Hessiana durchläuft; das heisst: *die Polarebenen eines festen Punctes in Bezug auf alle Polarkegel, deren Scheitel auf derselben Ebene liegen, umhüllen einen Kegel vierter Classe.*

185. Was wir im Allgemeinen *gemischte Polarfläche* zweier Geraden g, g' genannt haben, wird hier eine Quadrifläche (ein Hyperboloid), und da im gegenwärtigen Falle die Polarcurve einer Geraden in Bezug auf eine erste Polarfläche (86) die reciproke Gerade der gegebenen Geraden in Bezug auf eine Quadripolarfläche ist, so ergibt sich, *dass das Polarhyperboloid zweier Geraden g, g' der Ort der reciproken Geraden für jede der gegebenen Geraden in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte der andern ist,* oder auch der Ort eines Punctes, für welchen die Reciproke einer der beiden Geraden in Bezug auf die Quadripolarfläche dieses Punctes die andere gegebene Gerade schneidet.

Ist $\mathfrak{i}$ ein variabler Punct auf g, und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei feste Puncte von g', so ist das Polarhyperboloid durch zwei projectivische Büschel erzeugt (159), in denen die gemischten Polarebenen der Puncte $\mathfrak{a}, \mathfrak{i}$ den gemischten Polarebenen der Puncte $\mathfrak{b}, \mathfrak{i}$ entsprechen. Die beiden Puncte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ können natürlich durch zwei andere beliebige Puncte von g' ersetzt werden, und *das Polarhyperboloid zweier Geraden ist also auch die einhüllende Fläche der gemischten Polarebene zweier auf den gegebenen Geraden variabler Puncte, eines auf jeder Geraden.*

186. Wenn g, g' zusammenfallen, erhalten wir eine gemeine Polarfläche einer Geraden g, die *ein Kegel zweiter Ordnung* ist (93, 159), dessen Scheitel der Pol der Quadripolarfläche ist, welche durch g geht, und dessen Generatrixen die zu g reciproken Geraden in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte von g sind. *Dieser Kegel ist die Enveloppe der Polarebenen der Puncte von g,* und daher auch der Ort der Pole derjenigen Quadripolarflächen, welche g berühren. Wir geben dieser Fläche den Namen *Polarkegel der Geraden g,* den man aber nicht mit dem Polarkegel eines Punctes der Hessiana verwechseln darf.

187. *Die gemischte Polarfläche zweier Ebenen E, E'* ist von der dritten Ordnung (158), und *ist der Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte der andern Ebene oder auch*, was auf dasselbe hinausläuft, *der Ort der Pole einer Quadripolarfläche, in Bezug auf welche die Ebenen E, E' conjugiert sind.*

Der Ort der Pole einer Ebene E in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte einer Geraden g (128) *ist eine cubische Raumcurve* (Raumcurve dritter Ordnung); sie liegt auf dem Polarhyperboloid von g und einer andern beliebigen auf E befindlichen Geraden und ebenfalls auf der gemischten Polarfläche von E und einer andern beliebigen Ebene, die durch g geht (162). Daraus folgt, dass das Polarhyperboloid zweier Geraden g, g', wenn g fest ist und g' variabel in einer Ebene E, ein Büschel von Flächen erzeugt, die durch eine feste cubische Raumcurve gehen.

188. Fallen die Ebenen E, E' zusammen, so erhält man *die gemeine Polarfläche einer Ebene E*, welche die einhüllende Fläche der Polarkegel der Geraden sind, die in der gegebenen Ebene liegen (159), und gleichzeitig der Ort der Pole der Ebene in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte derselben Ebene (158). Diese zweite Definition kommt darauf zurück, dass die genannte Fläche der Ort eines Punctes ist, dessen Quadripolarfläche die gegebene Ebene berührt. Folglich fällt (94, 162) dieselbe Fläche mit *der Enveloppe der Polarebenen der Puncte der gegebenen Ebene* zusammen. Sie ist von der dritten Ordnung, von der vierten Classe und besitzt vier Doppelpuncte, die auf den Polarkegeln und den Polarhyperboloiden aller Geraden der gegebenen Ebene liegen [1]).

Es sei $\mathfrak{a}$ ein Punct dieser Fläche. Die Quadripolarfläche von $\mathfrak{a}$ berührt dann die Ebene E und schneidet folglich diese Ebene in zwei Geraden, die sich im Berührungspuncte $\mathfrak{a}'$ kreuzen. Die Polarebenen der Puncte dieser Geraden müssen durch $\mathfrak{a}$ gehen und anderswo die Fläche berühren; *ein beliebiger Punct der Fläche ist also der Scheitel zweier der Fläche umgeschriebener Quadrikegel* (es sind dies die Polarkegel zweier in $\mathfrak{a}'$ sich kreuzender Geraden). Die Polarebene von $\mathfrak{a}'$ berührt die Fläche in $\mathfrak{a}$.

Ist $\mathfrak{a}$ einer der Doppelpuncte der Fläche, so müssen die beiden Berührungskegel zusammenfallen; folglich schneidet die Quadripolarfläche von $\mathfrak{a}$ die Ebene E in zwei zusammenfallenden Geraden. *Unter den Quadripolarflächen, die eine Ebene E berühren, gibt es also vier Kegel; ihre Pole*, die auch der Hessiana angehören, *sind die Doppelpuncte der gemeinen Polarfläche der Ebene.*

Diese Fläche ist die Reciproke der *Römischen Fläche* Steiners [2]).

---

1) Liegt ein Punct im Unendlichen, so ist seine Polarebene eine Diametralebene der Fundamentalfläche. *Die Enveloppe der Diametralebenen ist also die gemeine Polarfläche der unendlich entfernten Ebene.* Diese Fläche ist der der F_ν längs des Schnittes im Unendlichen umgeschriebenen Developpablen eingeschrieben (100).

2) Man sehe die Monatsberichte der K. Akademie zu Berlin (Juli und November 1863) und Crelle-Borchardt's Journal, Bd. 63, S. 315.

189. Ist eine Ebene E fest und die andere Ebene E' um eine Gerade g variabel, so bilden die gemischten Polarflächen der Ebenen E, E' ein Büschel. In der That, muss eine solche Fläche durch einen gegebenen Punct $\mathfrak{x}$ gehen, so geht die Ebene E' durch den Pol von E in Bezug auf die erste Polarfläche von $\mathfrak{x}$. Die Basis des Büschels ist aus einer Raumcurve sechster Ordnung (Ort der Doppelpuncte der Quadripolarflächen der Puncte der festen Ebene) und einer cubischen Raumcurve (Ort der Pole der festen Ebene in Bezug auf die Quadripolarflächen der Puncte der gegebenen Geraden) zusammengesetzt (158, 187).

Die gemischte Polarfläche der beiden Ebenen E, E' und ihre gemeinen Polarflächen werden gleichzeitig (164) durch den Polarkegel der Geraden EE' berührt und zwar in vier Puncten der Hessiana (entsprechend den Durchschnittspuncten dieser Fläche mit der Geraden EE'), und gehen durch die zehn Doppelpuncte der Hessiana (158). Diese Puncte sind $4.4+10$ Durchschnittspuncten äquivalent, und folglich haben die drei genannten Flächen, die sämmtlich von der dritten Ordnung sind, nur noch einen andern Punct gemein; es ist dies der Pol der Quadripolarfläche, welche durch die Gerade EE' geht.

CAPITEL II.

EIGENSCHAFTEN DER HESSIANA EINER FUNDAMENTALFLÄCHE DRITTER ORDNUNG.

190. Die Pole der Polarebenen, die durch einen gegebenen Punct $\mathfrak{p}$ gehen, liegen auf der Quadripolarfläche von $\mathfrak{p}$. Sollen diese Ebenen die Hessiana berühren, so sind die Pole auf der Curve achter Ordnung vertheilt, die den Durchschnitt der Hessiana mit der Quadripolarfläche von $\mathfrak{p}$ darstellt (183). Die Berührungspuncte bilden eine Curve der zwölften Ordnung, den Durchschnitt der Hessiana mit der ersten Polarfläche von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die Hessiana. Die beiden Curven achter und zwölfter Ordnung sind also entsprechende Curven (168).

191. Wir wollen die Geraden betrachten, welche durch $\mathfrak{p}$ gehen und die Hessiana berühren. Den Geraden, die durch $\mathfrak{p}$ gehen, entspricht ein Netz [1]) von Raumcurven vierter Ordnung (87), die sämmtlich auf einer Fläche S zweiter Ordnung liegen (der Quadripolarfläche von $\mathfrak{p}$). Jede dieser Raum-

[1]) Ein solches Netz entsteht durch den Durchschnitt von S mit einem Netze anderer Quadripolarflächen.

curven entsteht als Durchschnitt von S mit einer andern Quadripolarfläche und folglich (190) liegen die Doppelpuncte dieser Curven (Berührungpuncte zwischen S und den andern Quadripolarflächen) auf der Curve c der achten Ordnung, Durchschnitt der Hessiana mit S. Den Curven des Netzes, die ein Büschel bilden, entsprechen gerade Linien durch $\mathfrak{p}$, die in einer Ebene liegen. In diesem Büschel gibt es zwölf Curven mit Doppelpunct [1]), das heisst: *die Geraden durch $\mathfrak{p}$, denen die Raumcurven vierter Ordnung mit Doppelpunct entsprechen, bilden einen Kegel $\mathfrak{S}$ der zwölften Ordnung.* Einem beliebigen Punct $\mathfrak{o}$ der Curve c entspricht eine Generatrix von $\mathfrak{S}$, welche den Punct $\mathfrak{p}$ mit dem Puncte $\mathfrak{o}'$ verbindet, welcher in der Hessiana dem Puncte $\mathfrak{o}$ entspricht. Der Ort der Puncte $\mathfrak{o}'$ ist also eine Curve c' der zwölften Ordnung (190). Die Polarebene von $\mathfrak{o}$ geht durch $\mathfrak{p}$ und berührt die Hessiana in $\mathfrak{o}'$ (183) und enthält folglich die Tangente von c' in $\mathfrak{o}'$. Diese Ebene ist daher die Tangentialebene des Kegels $\mathfrak{S}$ längs der Geraden $\mathfrak{po}'$, das heisst: der Kegel $\mathfrak{S}$ ist der Hessiana längs der Curve c' umgeschrieben.

Die Quadripolarfläche eines beliebigen Punctes schneidet c in sechszehn Puncten. Daraus folgt, dass $\mathfrak{S}$ und folglich auch die Hessiana von der sechszehnten Classe ist (165).

Betrachtet man eine Gerade g durch $\mathfrak{p}$ als Durchschnitt zweier Tangentialebenen des Kegels $\mathfrak{S}$, so hat jede dieser Ebenen einen Pol auf c und die Raumcurve des Netzes auf S, die durch diese beiden Pole geht, ist die entsprechende Curve von g. Fallen beide Pole zusammen, so wird die Raumcurve von c berührt. Daraus folgt, dass den Geraden, die auf dem Kegel $\mathfrak{S}$ und in seinen stationären Ebenen gezogen sind, Raumcurven des Netzes auf S ensprechen, welche c berühren.

192. Die Puncte, in denen die Hessiana von Geraden osculiert wird, die von $\mathfrak{p}$ ausgehen, sind die Durchschnittspuncte dieser Fläche mit der ersten und zweiten Polarfläche von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf dieselbe Fläche. Unter den Raumcurven des Netzes auf S gibt es also $4.3.2 = 24$, die eine Spitze haben.

Der Kegel $\mathfrak{S}$ ist daher von der 12-ten Ordnung und der 16-ten Classe und hat ausserdem 24 stationäre Generatrixen, also hat er gemäss den Formeln von Plücker (3) 22 Doppelgeneratrixen. Von diesen Doppelgeneratrixen entstehen zehn durch die Doppelpuncte der Hessiana und entsprechen denjenigen Curven des Netzes, die aus zwei Kegelschnitten bestehen — jeder Doppelpunct hat in der That ein Ebenenpaar als Quadripolarfläche (169) —, die andern zwölf Doppelgeneratrixen dagegen entsprechen ebensovielen Curven des Netzes, die aus einer cubischen Raumcurve und einer Geraden zusammengesetzt sind.

Um diese Behauptung zu beweisen, betrachten wir das Netz von Raumcurven vierter Ordnung auf der Quadrifläche S und nennen wie früher (24)

[1]) Denn ein Netz von Quadriflächen enthält zwölf Flächen, welche S berühren (131).

der Kürze wegen die Geraden der beiden Systeme, die auf dieser Fläche existieren, bezüglich *Generatrixen* und *Directrixen*. Es seien l, m, n drei Generatrixen von S; jede auf S gezogene Curve vierter Ordnung schneidet dann jede dieser Geraden in zwei Puncten, und fallen drei dieser Puncte, einer für jede Gerade, in eine gerade Linie, so zerfällt die Curve in zwei Theile, eine cubische Raumcurve und eine Gerade (Directrix). Ist $\mathfrak{l}$ ein beliebiger Punct von l, so schneidet die Directrix, welche durch $\mathfrak{l}$ geht, m und n in zwei Puncten $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ und die Curve des Netzes, welche durch $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ geht trifft l in zwei Puncten $\mathfrak{l}'$. Ist umgekehrt $\mathfrak{l}'$ ein beliebiger Punct von l, so bilden die Curven des Netzes, die durch $\mathfrak{l}'$ gehen, ein Büschel und bestimmen so auf m und n zwei projectivische quadratische Involutionen. Schneidet eine Curve des Netzes m in $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ und n in $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}'$, so ist der Ort der zu $\mathfrak{mn}, \mathfrak{mn}', \mathfrak{m}'\mathfrak{n}, \mathfrak{m}'\mathfrak{n}'$ analogen Geraden eine Fläche vierter Ordnung — m und n sind für dieselbe Doppelgeraden —, welche l in vier Puncten $\mathfrak{l}$ schneidet. Es fällt also sechsmal auf l ein Punct $\mathfrak{l}$ mit $\mathfrak{l}'$ zusammen, das heisst, es gibt sechs Curven des Netzes, von denen jede aus einer cubischen Raumcurve und einer Directrix zusammengesetzt ist. Analog gibt es sechs andere Curven, die aus einer cubischen Raumcurve und einer Generatrix bestehen.

In einem Curvennetze von Raumcurven vierter Ordnung, die auf einer Quadrifläche gezogen sind, gibt es also:

1. *zwölf Curven, die aus einer cubischen Raumcurve und einer Geraden bestehen;* 2. *zehn Curven aus zwei Kegelschnitten zusammengesetzt;* 3. *vierundzwanzig Curven mit einer Spitze.*

193. Ist $\mathfrak{p}$ ein Punct der Hessiana, so ist der Kegel S von der 10-ten Ordnung, der 16-ten Classe mit 10 Doppelgeneratrixen (nach den Doppelpuncten der Hessiana gerichtet) und 18 stationären Generatrixen. Das heisst: *In einem Netze von Raumcurven vierter Ordnung, die auf einem Kegel (der Quadripolarfläche von $\mathfrak{p}$) gezogen sind, gibt es:* 1. *zehn, die aus zwei Kegelschnitten bestehen;* 2. *achtzehn mit einer Spitze;* 3. *sechs aus einer cubischen Raumcurve und einer Geraden zusammengesetzte* (entsprechend den sechs Geraden, welche die Hessiana ausser in $\mathfrak{p}$ noch anderswo berühren (70)); 4. *zwei mit einer Spitze im Kegelscheitel.* Letztere entsprechen den beiden Geraden, welche die Hessiana in $\mathfrak{p}$ osculieren.

194. Ist $\mathfrak{p}$ ein Doppelpunct der Hessiana, so wird diese Gerade in $\mathfrak{p}$ durch eine unbegrenzte Zahl von Ebenen berührt, deren Enveloppe ein Quadrikegel ist; die erste Polarfläche von $\mathfrak{p}$ hat daher eine unbegrenzte Zahl Doppelpuncte in gerader Linie, das heisst, sie ist das System zweier Ebenen, die sich in einer Geraden p schneiden, die auf der Hessiana liegt, wie es aus der allgemeinen Theorie resultiert (167). Die Puncte dieser Geraden sind die Pole ebensovieler Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{p}$. Diese Kegel bilden daher ein Büschel und gehen durch vier Gerade, deren Gesammtheit die Polarcurve von p darstellt. In diesem Büschel gibt es drei Systeme von je zwei Ebenen;

diese drei Systeme sind die Quadripolarflächen von drei speciellen Puncte der Geraden p, welche für die Hessiana Doppelpuncte sind. *Die zehn Doppelpuncte* $\mathfrak{p}$ *vertheilen sich also zu drei und drei auf die zehn Geraden* p, *und diese gehen zu drei und drei durch die zehn Puncte* $\mathfrak{p}$.

195. Da die Hessiana *im Allgemeinen* von der sechszehnten Classe ist, so hat sie ausser den zehn Puncten $\mathfrak{p}$ keine weiteren Doppelpuncte. Ebenso enthält sie ausser den zehn Geraden p keine andern Geraden. In der That entsprechen die vier Durchschnittspuncte einer Geraden g mit der Hessiana den vier Kegeln, die durch die Polarcurve vierter Ordnung von g gehen. Gehört g vollständig der Hessiana an, so entsprechen der unbegrenzten Zahl von Puncten von g eine unbegrenzte Zahl von Kegeln, die ein Büschel bilden und folglich denselben Scheitel haben. Dieser Scheitel ist für die Hessiana ein Doppelpunct, denn diese Fläche wird dort von den Polarebenen aller Puncte von g berührt.

Ein Doppelpunct $\mathfrak{p}$ liegt im Allgemeinen nicht auf seiner entsprechenden Geraden p; wenn dies der Fall wäre, so wäre die erste Polarfläche von $\mathfrak{p}$ ein Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{p}$, und dieser Punct wäre also für die Fundamentalfläche ein Doppelpunct.

196. Es seien $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ zwei entsprechende Puncte der Hessiana. Die Polarkegel von $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ haben ihren Scheitel bezüglich in $\mathfrak{o}', \mathfrak{o}$ und durchdringen sich gegenseitig in einer Raumcurve vierter Ordnung. Die beiden andern Quadrikegel, welche durch diese Curve gehen, sind die ersten Polarflächen der Puncte $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$, in denen die Hessiana durch die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ nochmals geschnitten wird. Die Scheitel dieser andern Kegel liegen in den Puncten $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$, welche $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ entsprechen. Die Puncte $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}', \mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$ sind also die Scheitel des Tetraeders, welches den Quadriflächen conjugiert ist, welche durch die Curve vierter Ordnung hindurchgehen, und folglich sind die Ebenen $\mathfrak{o}'\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{o}\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ bezüglich die Polarebenen von $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$. Deshalb *gehen die Tangentialebenen der Hessiana in* $\mathfrak{o}$ *und* $\mathfrak{o}'$ *durch die Gerade* $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$.

Da die Polarebenen von $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ durch $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$ gehen, so gehen umgekehrt die Polarkegel von $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$, deren Scheitel $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ sind, durch $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$, enthalten daher die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{u}\mathfrak{v}$ vollständig und schneiden sich also noch in einer cubischen Raumcurve.

Daraus, dass die Polarkegel von $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$ durch die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ gehen, folgt, dass der Polarkegel dieser Geraden seinen Scheitel in $\mathfrak{u}'$ und in $\mathfrak{v}'$ hat (186), dass heisst, er reduciert sich auf die Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$. *Die Polarebenen der Puncte von* $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ *gehen sämmtlich durch die Gerade* $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$.

Die Puncte, in denen $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ die Hessiana trifft, sind die Pole der vier Quadrikegel, die durch die Curve vierter Ordnung gehen, welche die Polarcurve der betrachteten Geraden ist. Nun zerlegt sich aber diese Curve in zwei Theile (eine Gerade und eine cubische Raumcurve), und es gibt also nur zwei Quadrikegel, die durch dieses System gehen. Die Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ ist somit Tangente der Hessiana in $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{v}'$.

Jede Gerade also, welche zwei correspondierende Puncte der Hessiana verbindet, besitzt daher die Eigenschaft, dass die Polarebenen ihrer Puncte durch eine feste Gerade gehen, die eine Doppeltangente der obigen Fläche ist.

197. Wenn $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ zusammenfallen, das heisst, wenn die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ die Hessiana berührt (natürlich in einem Puncte $\mathfrak{u}$, der von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ verschieden ist), so gehen die Polarflächen der Puncte von $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ durch dieselbe Gerade, die mit der Hessiana in $\mathfrak{u}'$ einen vierpunctigen Contact hat.

Fallen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ in einem Doppelpuncte $\mathfrak{p}$ zusammen, so werden die Puncte $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$ unbestimmt auf der entsprechenden Geraden p (194); da aber die Polarkegel aller Puncte dieser Geraden durch $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ gehen müssen (196), so folgt, *dass $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ eine der vier Geraden ist, welche die Polarcurve von p bilden* (191).

198. Im Falle, dass $\mathfrak{o}$ ein parabolischer Punct der Fundamentalfläche ist, so liegt der Scheitel des Polarkegels im entsprechenden Puncte $\mathfrak{o}'$; ausserdem geht er durch $\mathfrak{o}$ und berührt die Polarebene von $\mathfrak{o}$ längs $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ (16), das heisst diejenige Ebene, welche die Hessiana in $\mathfrak{o}'$ berührt. Da der Polarkegel von $\mathfrak{o}'$ seinen Scheitel auf $\mathfrak{o}$ hat, so folgt, dass die Polarkegel dieser beiden Puncte sich längs einer Raumcurve schneiden, für welche $\mathfrak{o}$ ein Doppelpunct ist. Einer der Puncte $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ fällt mit $\mathfrak{o}'$ zusammen; der andere sei der Punct $\mathfrak{v}$. Dann ist also die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{v}'$ ($\equiv \mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$) Tangente der Hessiana in $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{v}'$ (196). Die Ebenen, welche die Fundamentalfläche und die Hessiana in $\mathfrak{o}$ berühren, schneiden sich längs $\mathfrak{o}\mathfrak{v}'$, das heisst, *diese Gerade ist Tangente der parabolischen Curve der Fundamentalfläche in $\mathfrak{o}$.*

Es sei $\mathfrak{w}$ der Punct, in welchem die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{v}'$ die Fundamentalfläche nochmals trifft. Die erste Polarfläche von $\mathfrak{w}$ geht dann durch $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ und trifft also die Ebene $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{v}'$ in zwei Geraden, deren eine $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ ist, und die andere geht duch $\mathfrak{w}$. *Dieser Punct $\mathfrak{w}$ ist also der (einzige) Wendepunct der Curve dritter Ordnung (mit Spitze in $\mathfrak{o}$), längs deren die Fundamentalfläche von der stationären Ebene $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{v}'$ berührt wird* [1]).

199. *Wieviel Gerade gibt es in einer beliebigen Ebene E, die zu $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ analog sind (sie verbindet zwei entsprechende Puncte der Hessiana)?* Die Ebene E schneidet die Hessiana in einer Curve vierter Ordnung, welcher die windschiefe Berührungscurve sechster Ordnung zwischen der Hessiana und der gemeinen Polarfläche der Ebene E entspricht (168). Sei $\mathfrak{o}$ einer der Puncte, in denen E diese letztere Curve trifft. Dieser Punct hat, da er E angehört, seinen entsprechenden Punct $\mathfrak{o}'$ auf der Curve sechster Ordnung, und weil er dieser Curve angehört, muss sein entsprechender Punct auf E liegen. Es folgt daraus, dass die sechs Durchschnittspuncte der Ebene E mit der Raum-

---

[1]) Und $\mathfrak{w}\mathfrak{v}$ ist die stationäre Tangente.

curve sechster Ordnung, sich zu zwei und zwei entsprechen. Anderseits sind aber zwei entsprechende Puncte der Hessiana in Bezug auf eine beliebige Quadripolarfläche conjugiert, und die sechs Puncte, um die es sich handelt, sind also nach einer bekannten Theoreme, das man Hesse verdankt, die Scheitel eines vollständigen Vierseits. *Die Diagonalen dieses letztern sind die einzigen mit* $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ *analogen Geraden, welche in der gegebenen Ebene E liegen.* Die zu $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ analogen Geraden (196), welche den Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ der Ebene E entsprechen, liegen auf der Polarfläche von E (und in der nämlichen dreifachen Tangentialebene dieser Fläche), weil die Polarflächen der Puncte von E die Polarfläche dieser Ebene berühren (188).

200. Das betrachtete Vierseit ist bestimmt durch die Durchschnitte von vier beliebigen Quadripolarflächen, die nicht einem und demselben Netze angehören, mit der Ebene E; man weiss in der That, dass wenn vier Kegelschnitte in einer Ebene gegeben sind, es nur ein einziges Vierseit gibt, dessen Diagonalen durch jeden der gegebenen Kegelschnitte harmonisch getheilt wird [1]).

Zwei Gegenscheitel des Vierseits sind in Bezug auf die Kegelschnitte conjugiert, in denen die Ebene E die Quadripolarflächen dieser Puncte schneidet, und folglich ist das Vierseit der Curve dritter Ordnung eingeschrieben, welche die Jacobiana des von den genannten Kegelschnitten gebildeten Netzes und gleichzeitig der Schnitt der Polarfläche der Ebene E durch eben dieselbe Ebene ist. Die nämlichen sechs Puncte — die Scheitel des Vierseits — sind auch auf der ebenen Curve vierter Ordnung gelegen, welche E und der Hessiana gemein ist, welche letztere Fläche von der Polarfläche dieser Ebene in allen Puncten der Curve sechster Ordnung berührt wird. Diese sechs Puncte sind also ebenso viele Berührungspuncte zwischen den Curven, in denen E die Polarfläche und die Hessiana schneidet.

Es folgt hieraus, dass die Seiten des Vierseits die ebene Curve vierter Ordnung nochmals in vier Puncten auf einer geraden Linie g treffen. Diese Plancurve gehört dem Büschel an, welches durch das System der vier Geraden, welche das Viereck bilden, und das System der Curve dritter Ordnung und der Geraden g bestimmt ist. Hat daher diese letzte Curve einen Doppelpunct $\mathfrak{a}$, was eintritt, wenn E in $\mathfrak{a}$ die Fundamentalfläche berührt [2]), so fällt die Polargerade von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf die Plancurve vierter Ordnung mit der Polargeraden desselben Punctes in Bezug auf das System der vier Seiten des Vierseits zusammen (der harmonischen Polare von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf das Vierseit).

Man weiss aber, wenn eine cubische Plancurve mit Doppelpunct durch die Scheitel eines vollständigen Vierseits geht, dass dann die Gerade, welche

---

[1]) *Mathematical questions from the Educational Times.* T. IV., London 1866; p. 110.

[2]) Hat eine cubische Raumcurve einen Doppelpunct, so gehen alle Polarkegelschnitte durch diesen Punct, der daher auch für die Jacobiana des Netzes der Polaren ein Doppelpunct ist.

die drei Wendepuncte verbindet, die harmonische Polare des Doppelpunctes in Bezug auf das Vierseit ist. Die Polargerade von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf die Plancurve vierter Ordnung geht daher durch die Wendepuncte der Curve dritter Ordnung, welche gleichzeitig die Wendepuncte des Schnittes der Fundamentalfläche durch E sind.

Folglich der Satz: *Die Durchschnittsgerade einer Tangentialebene der Fundamentalfläche mit der Polarebene des Berührungspunctes in Bezug auf die Hessiana geht durch die drei Wendepuncte des Schnittes, der durch die Tangentialebene auf der Fundamentalfläche erzeugt wird.*

Ist die Tangentialebene stationär, so kommt man auf ein schon bewiesenes Theorem (198) zurück.

201. Auf einer beliebigen Ebene E gibt es wieviel zu $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ analoge Gerade (das heisst Gerade, deren Polarcurve das System einer Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ und einer cubischen Raumcurve sind)? Die in der Ebene E gezogenen Geraden entsprechen den Raumcurven vierter Ordnung, welche durch die acht Pole der Ebene gehen. Es ist bekannt, dass diese acht Pole so unter einander verbunden sind, dass diejenige cubische Raumcurve, welche durch sechs von ihnen beschrieben ist, die Gerade, welche die beiden andern verbindet, zweimal schneidet. Die acht Puncte zu zweien combiniert geben nun $\frac{7.8}{2} = 28$ Curven vierter Ordnung, zusammengesetzt aus einer Geraden und einer cubischen Raumcurve. *Die gegebene Ebene enthält also* 28 *zu* $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ *analoge Gerade*; sie sind die 28 Doppeltangenten des Schnittes der Hessiana durch die Ebene E.

Dieser Schnitt ist von der 12-ten Classe und hat 24 Wendepuncte. Man findet so die Eigenschaft wieder (191), dass es in einem Büschel von Raumcurven vierter Ordnung 12 mit Doppelpunct gibt, und weiter, *dass unter den Raumcurven dieser Ordnung, welche durch die acht Durchschnittspuncte dreier Quadriflächen gehen,* 24 *mit einer Spitze enthalten sind.*

202. Eine beliebige Gerade g trifft die Hessiana in vier Puncten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$; es seien $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ die vier entsprechenden Puncte. Da $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ die Scheitel der vier Kegel desselben Büschels von Quadriflächen sind, so ist der Punct $\mathfrak{a}'$ der Pol der Ebene $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ in Bezug auf die Polarkegel von $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, das heisst $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ ist die gemischte Polarebene der Punctenpaare $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}$; $\mathfrak{a}', \mathfrak{c}$; $\mathfrak{a}', \mathfrak{d}$ oder auch, $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ ist die Polarebene jedes der Puncte $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{a}'$. Dieser Kegel hat aber den Scheitel $\mathfrak{a}$, und folglich geht die Ebene $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ durch $\mathfrak{a}$.

Wenn also $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ *vier Puncte der Hessiana in gerader Linie sind, so sind die entsprechenden Puncte* $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ *die Scheitel eines Tetraeders, dessen Seitenflächen* $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{d}'\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ *bezüglich durch* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ *gehen.*

203. Alle Quadripolarflächen, welche durch einen Punct $\mathfrak{o}$ gehen, bilden ein Netz; darunter gibt es eine, welche in $\mathfrak{o}$ eine beliebig gegebene Ebene

berührt. Ist aber $\mathfrak{o}$ ein Punct der Hessiana und $\mathfrak{o}'$ der entsprechende Punct, so werden alle Polarflächen von $\mathfrak{o}$ in ihm von Ebenen berührt, die durch die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ gehen (164); diejenigen, welche in $\mathfrak{o}$ dieselbe Ebene berühren, bilden ein Büschel, und ihre Pole liegen auf einer Tangente der Hessiana in $\mathfrak{o}'$. Daraus ergibt sich die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ als Polare der Tangentialebene der Hessiana in $\mathfrak{o}$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{o}'$ und zugleich als Polare der Tangentialebene derselben Fläche in $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{o}$. Mit andern Worten: *Die Tangentialebene der Hessiana in $\mathfrak{o}$ und die Tangentialebene im nämlichen Puncte einer beliebigen Quadripolarfläche, welche durch ihn geht, sind conjugiert in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{o}'$.*

Umgekehrt: *Jede Tangente der Hessiana in $\mathfrak{o}'$ enthält die Pole einer unbegrenzten Zahl von Quadripolarflächen, die in $\mathfrak{o}$ von ein und derselben Ebene berührt werden.*

204. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Doppelpunct der Hessiana und p die entsprechende Gerade (194). Sobald jeder Punct von p dem Puncte $\mathfrak{p}$ entspricht, sind die Polarebenen aller Puncte von p Tangentialebenen der Hessiana in $\mathfrak{p}$ (183), das heisst, *der osculierende Quadrikegel, den die Osculierenden der Hessiana in $\mathfrak{p}$ bilden, ist der Polarkegel der Geraden p.* Dieser Kegel enthält die drei Geraden p_1, p_2, p_3 (analog zu p (194)), welche durch $\mathfrak{p}$ gehen, denn jeder Punct dieser Geraden ist der Pol eines Polarkegels, dessen Scheitel einer der drei Doppelpuncte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ der Hessiana ist, die auf p liegen.

205. Die Polarebene von $\mathfrak{p}$ berührt die Hessiana in der ganzen Länge der Geraden p (167) und schneidet also diese Fläche in einem Kegelschnitte c. Ebenso berührt die Polarebene von $\mathfrak{p}_1$ die Hessiana längs p_1; nun ist aber $\mathfrak{p}_1$ ein Punct von p; also: *Die Hessiana und der Polarkegel von p werden längs der drei gemeinschaftlichen Geraden p_1, p_2, p_3 durch dieselben Ebenen berührt, die Polarebenen von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$.*

206. Der Punct $\mathfrak{p}$ und ein beliebiger Punct von p sind zwei entsprechende Puncte der Hessiana, also ist die Gerade, welche diese Puncte verbindet, der Ort der Pole, deren Polarebenen durch ein und dieselbe Gerade gehen, die eine Doppeltangente der Hessiana ist und in der Polarebene von $\mathfrak{p}$ liegt (196). Einer der Berührungspuncte liegt auf p, der andere gehört dem Kegelschnitt c an. Das heisst, jeder Geraden, die durch $\mathfrak{p}$ in der Ebene $\mathfrak{p}p$ gezogen ist und als Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ (196) angesehen wird, entspricht als Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ eine Tangente von c. Es sei $\mathfrak{o}$ der Punct, in dem die erste Gerade von p getroffen wird und $\mathfrak{u}$ der Punct, in welchem dieselbe Gerade die Hessiana nochmals schneidet (die Puncte $\mathfrak{o}'$ und $\mathfrak{v}$ fallen mit $\mathfrak{p}$ zusammen); $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{v}'$ die Puncte, in denen die zweite Gerade bezüglich c berührt und p schneidet. Man sieht, dass der Kegelschnitt c zur entsprechenden Curve die cubische Plancurve (Ort der Puncte $\mathfrak{u}$) hat, in welcher die Ebene $\mathfrak{p}p$ die Hessiana schneidet.

Die Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ liegt in der Polarebene von $\mathfrak{o}$; nun berührt diese Ebene den Polarkegel von p, und letzterer Kegel wird daher durch die zu $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ analogen Geraden berührt; das heisst, der Kegelschnitt c ist die Spur des Kegels auf der Polarebene von $\mathfrak{p}$. Also:

Der Osculationskegel der Hessiana in einem Doppelpuncte berührt diese Fläche in drei Geraden und schneidet sie ausserdem noch in einem Kegelschnitt, der in der Polarebene des Doppelpunctes liegt.

207. Es gibt weitere Eigenschaften der Ebene $\mathfrak{p}p$, die erwähnt werden müssen.

Der Polarkegel von $\mathfrak{u}'$ geht durch $\mathfrak{p}$, ausserdem ist die Polarebene von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf diesen Kegel (nämlich die Tangentialebene dieses Kegels längs $\mathfrak{pu}$) die Polarebene von $\mathfrak{u}'$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{p}$ (83), das heisst die Ebene $\mathfrak{p}p$. Die letztere Ebene berührt also die Polarkegel sämmtlicher Puncte des Kegelschnittes c, und die Berührungsgeneratrixen gehen durch $\mathfrak{p}$.

Sobald die Ebene $\mathfrak{p}p$ in $\mathfrak{o}$ die ersten Polarflächen der Puncte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{u}'$ berührt, so berührt sie im nämlichen Puncte die ersten Polarflächen aller Puncte der Geraden $\mathfrak{pu}'$, und schneidet sie in Geradenpaaren in Involution, deren Doppelstrahlen $\mathfrak{op}$ und p sind. Zwei conjugierte Gerade r, r' dieser Involution gehören einer ersten Polarfläche an, deren Pol $\mathfrak{q}$ sei (ein Punct von $\mathfrak{pu}'$). Denken wir uns eine Ebene durch $\mathfrak{q}$ und eine beliebige Tangente $\mathfrak{u}'_1\mathfrak{v}'_1$ von c. Die ersten Polarflächen von $\mathfrak{u}'_1, \mathfrak{v}'_1$ gehen zusammen (196) durch die Gerade $\mathfrak{pu}_1$, welche $\mathfrak{u}'_1\mathfrak{v}'_1$ entspricht (wie $\mathfrak{pu}$ der Geraden $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$), also sind die Puncte, in denen diese Gerade r, r' trifft, zwei Pole der Ebene $\mathfrak{qu}'_1\mathfrak{v}'_1$. Das heisst, die Polarebenen der Puncte der Geraden r, r' umhüllen ein und denselben Kegel $\mathfrak{q}c$. Alle analogen Kegel gehen durch den Kegelschnitt c, und dieser stellt daher, und zwar er allein, die Enveloppe der Polarebenen der Puncte der Ebene $\mathfrak{p}p$ vor. Man kann dies auch auf folgende Weise zeigen.

Der Doppelpunct $\mathfrak{p}$ hat die Eigenschaft, dass alle Quadripolarflächen, die durch ihn gehen, in ihm durch dieselbe Ebene $\mathfrak{p}p$ berührt werden (203). Daraus folgt, dass, wenn man durch $\mathfrak{p}$ die beiden Geraden zieht, welche jede die windschiefe Polarcurve vierter Ordnung einer beliebigen Geraden t des Raumes in zwei Puncten trifft, diese beiden Geraden stets in der Ebene $\mathfrak{p}p$ liegen, das heisst, die Polarcurve einer beliebigen Geraden hat stets zwei Sehnen, die von $\mathfrak{p}$ ausgehen und in der Ebene $\mathfrak{p}p$ gelegen sind. Es sei $\mathfrak{pu}$ eine dieser Sehnen. Jeder der Puncte, in welchem sie auf der Raumcurve aufsteht, hat eine Polarebene, die durch t und $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ geht (daraus folgt, dass t die Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ schneidet); diese beiden Geraden geben aber eine einzige Ebene, also sind die beiden Puncte, in denen $\mathfrak{pu}$ die Raumcurve schneidet, die Pole ein und derselben Ebene, die durch t geht. Zwei dieser Polarebenen (in Bezug auf die beiden Geraden $\mathfrak{pu}$) werden durch die beiden Geraden $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ bestimmt, welche man in der Ebene von c so ziehen kann, dass sie die Spur von t enthalten und den Kegelschnitt berühren; durch eine Gerade t

gehen also nur zwei Ebenen, deren Pole auf der Ebene $\mathfrak{p}p$ liegen, und diese Ebenen berühren c; mit andern Worten, *dieser Kegelschnitt ist die vollständige Enveloppe der Polarebenen der Puncte der Ebene* $\mathfrak{p}p$.

Ein beliebiger Punct der Polarebene von $\mathfrak{p}$ gehört zwei Geraden $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ (Tangenten von c) an, und folglich geht die Quadripolarfläche dieses Punctes durch die beiden entsprechenden Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{u}$ (196), das heisst, sie berührt in $\mathfrak{p}$ die Ebene $\mathfrak{p}p$. *Der Ort der Puncte, deren erste Polarflächen die Ebene* $\mathfrak{p}p$ *berühren, ist also zusammengesetzt:* 1. *Aus dem Kegel* $\mathfrak{p}c$, *dessen Puncte Quadripolarflächen besitzen, welche* $\mathfrak{p}p$ *berühren, und zwar in einem Puncte von* $\mathfrak{p}$; 2. *Aus der Polarebene von* $\mathfrak{p}$, *in welcher die Puncte des Kegelschnittes* c *die Pole der Polarkegel sind, welche die Ebene* $\mathfrak{p}p$ *in Geraden berühren, die von* $\mathfrak{p}$ *ausgehen, während die Quadripolarflächen der andern Puncte dieser Ebene die Ebene* $\mathfrak{p}p$ *in* $\mathfrak{p}$ *berühren.*

Nach dem Vorhergehenden ist es klar, dass die Raumcurve sechster Ordnung, welche im Allgemeinen die Berührungscurve der Hessiana mit der Polarfläche einer Ebene ist (158), sich, wenn diese Ebene die Ebene $\mathfrak{p}p$ ist, auf das System der vier Geraden p, p_1, p_2, p_3 und den Kegelschnitt c reduciert.

208. Eine beliebig durch den Doppelpunct $\mathfrak{p}$ gelegte Gerade trifft die Hessiana in zwei weiteren Puncten $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$; es seien $\mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ die entsprechenden Puncte. Die ersten Polarflächen der Puncte der Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ gehen durch zwei Kegelschnitte die in zwei Ebenen liegen, welche die Quadripolarfläche von $\mathfrak{p}$ bilden und durch p gehen (194). In dem Büschel dieser ersten Polarflächen sind folgende Puncte diejenigen, deren Polarebene in Bezug auf diese Flächen constant ist: 1. die Puncte $\mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ (Scheitel der Kegel des Büschels), deren Polarebenen in Bezug auf die Quadriflächen des Büschels bezüglich $p\mathfrak{d}'$ und $p\mathfrak{c}'$ sind, und 2. die Puncte von p, deren Polarebenen in Bezug auf die nämlichen Quadriflächen durch die Gerade $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ gehen. Die Ebene $p\mathfrak{d}'$ ist also die gemischte Polarebene der Puncte $\mathfrak{d}, \mathfrak{c}'$, das heisst, sie ist die Polarebene von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{c}'$, dessen Scheitel $\mathfrak{c}$ ist. Daraus folgt, dass die Ebene $p\mathfrak{d}'$ durch $\mathfrak{c}$ geht, und analog die Ebene $p\mathfrak{c}'$ durch $\mathfrak{d}$.

Ist ausserdem $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punct von p, so geht die Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$; mit andern Worten, $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ liegt in der Polarebene von $\mathfrak{c}$ in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{x}$, dessen Scheitel $\mathfrak{p}$ ist, das heisst, die Puncte $\mathfrak{p}, \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ sind in gerader Linie. Also:

Wenn eine durch einen Doppelpunct $\mathfrak{p}$ *gezogene Gerade die Hessiana in* $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ *schneidet, so liegen die entsprechenden Puncte* $\mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ *ebenfalls mit* $\mathfrak{p}$ *in gerader Linie, und die Geraden* $\mathfrak{c}\mathfrak{d}', \mathfrak{c}'\mathfrak{d}$ *treffen sich auf der Geraden* p.

209. Diese Schlüsse gelten auch dann noch, wenn der Punct $\mathfrak{c}$ auf eine Gerade p_4 fällt, eine der Geraden auf der Hessiana aber von p (der $\mathfrak{p}$ entsprechenden) verschieden, ebenso von p_1, p_2, p_3 (die durch $\mathfrak{p}$ gehen), nämlich einem Puncte $\mathfrak{p}_4$ entsprechend, der etwa auf p_1 liegt. Nun wird $\mathfrak{c}'$

der Doppelpunct $\mathfrak{p}_4$ und $\mathfrak{d}'$ ist ein Punct der Geraden p_1. Der nämliche Punct $\mathfrak{d}'$ ist der Pol einer ersten Polarfläche mit einem Doppelpunct in $\mathfrak{d}$; nun haben aber die Nichtdoppelpuncte von p_1 als Quadripolarflächen Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{p}_1$, also ist $\mathfrak{d}'$ der dritte Doppelpunct $\mathfrak{p}_5$ der auf p_1 liegt, und folglich fällt $\mathfrak{d}$ auf die Gerade p_5.

Ist der Punct $\mathfrak{c}$ auf p_4 variabel, so bleiben die Puncte $\mathfrak{c}'$ ($\equiv \mathfrak{p}_4$) und $\mathfrak{d}'$ ($\equiv \mathfrak{p}_5$), die beide auf der festen Geraden p_1 liegen, unverändert, also wird $\mathfrak{d}$ nicht aus p_5 herausgehen. Daraus folgt, dass die Geraden p_4 und p_5 in einer Ebene liegen, die durch $\mathfrak{p}$ geht. Diese Ebene muss ausserdem die Hessiana in einer Curve zweiter Ordnung mit Doppelpunct in $\mathfrak{p}$ schneiden; letztere Curve ist also das System zweier Geraden, die nothwendigerweise mit p_2 und p_3 zusammenfallen.

Der gemeinschaftliche Punct der Geraden p^4, p_5 ist der Pol einer Quadripolarfläche mit Doppelpunct in $\mathfrak{p}_4$ und $\mathfrak{p}_5$, das heisst einer Quadrifläche, die aus zwei Ebenen besteht, die durch p_1 gehen; also ist der p_4 und p_5 gemeinschaftliche Punct der Punct $\mathfrak{p}_1$ (der auf p liegt).

Die Geraden p_2, p_3, p_4, p_5 bilden also ein vollständiges ebenes Vierseit, dessen Scheitel sechs Doppelpuncte der Hessiana sind. Zwei Gegenscheitel sind entsprechende Puncte, das heisst, jeder derselben liegt auf der entsprechenden Geraden des andern.

Wie gross ist die Zahl der Ebenen, die derjenigen analog sind, welche die vier Geraden p_2, p_3, p_4, p_5 enthält? Durch jeden der Puncte $\mathfrak{p}$ gehen drei solche Ebenen, und jede Ebene enthält sechs Puncte $\mathfrak{p}$, die Zahl der Ebenen ist also $\frac{3 \cdot 10}{6} = 5$.

Oder auch anders: Zwei dieser Ebenen gehen durch jede der Geraden p und jede Ebene enthält vier Gerade p, die Zahl der Ebenen ist folglich $\frac{2 \cdot 10}{4} = 5$.

Diese fünf Ebenen bilden einen **Pentaeder** (zuerst von SYLVESTER entdeckt), *dessen Scheitel und Kanten bezüglich die zehn Puncte $\mathfrak{p}$ und die zehn Geraden p sind.*

Von diesen fünf Ebenen gehen drei durch $\mathfrak{p}$ und die andern durch p, also hat der gemeinschaftliche Scheitel dreier Seitenflächen des Pentaeders den Durchschnitt der beiden übrigen Seitenflächen zur entsprechenden Geraden.

210. Will man das System dieser fünf Ebenen studieren, so ist es am Besten, dieselben durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 zu bezeichnen, in der Art, dass die zehn Scheitel $\mathfrak{p}$ (Doppelpuncte der Hessiana) und die bezüglichen zehn Gegenkanten (entsprechen den Geraden p) bezeichnet sind durch:

$$\begin{array}{cccccccccc} 123, & 124, & 125, & 134, & 135, & 145, & 234, & 235, & 245, & 345 \\ 45, & 35, & 34, & 25, & 24, & 23, & 15, & 14, & 13, & 12. \end{array}$$

Ein beliebiger Punct der Geraden 12 hat zur Quadripolarfläche einen Kegel, der dem Trieder conjugiert ist (194), das durch die Ebenen 3, 4, 5 gebildet wird. Ebenso sind die Polarkegel, deren Pole beliebig auf den

Geraden **13, 14, 15** angenommen sind, den Triedern **245, 235, 234** bezüglich conjugiert. Daraus folgt, dass alle Quadripolarflächen des durch diese vier Kegel bestimmten Netzes, nämlich die Quadripolarflächen aller Puncte der Ebene **1**, ein und demselben Tetraeder conjugiert sind, nämlich dem Tetraeder **2345**.

Die Ebenen **1, 2, 3, 4, 5** *sind die einzigen, welche die Eigenschaft besitzen, dass die Quadripolarflächen aller Puncte einer jeden von ihnen demselben Tetraeder (das durch die vier andern gebildet wird) conjugiert sind;* weil man beweisen kann, dass, wenn die Quadripolarflächen eines Netzes ein und demselben Tetraeder conjugiert sind, die Kanten desselben in der Hessiana liegen. In der That ist diese Fläche die Jacobiana (139) des linearen Systems, das durch genanntes Netz und eine andere nicht zum Netze gehörige Quadripolarfläche S bestimmt ist. Nimmt man auf einer Kante des Tetraeders einen Punct $\mathfrak{o}$ an, auf der Gegenkante dort den Punct $\mathfrak{o}'$, wo dieselbe durch die Polarebene von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf S geschnitten wird, so sind die Puncte $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ in Bezug auf alle Flächen des Systems conjugiert, und gehören also der Hessiana an.

211. Wir haben oben (196, 201) bewiesen, dass jede Bitangente der Hessiana die Eigenschaft besitzt, die Enveloppe der Polarebenen der Puncte einer andern Geraden zu sein, welche die beiden entsprechenden Puncte der Fläche verbindet. Unter den Geraden, welche diese Eigenschaft besitzen, befinden sich die zehn Kanten des Pentaeders und die fünfzehn Diagonalen seiner Seitenflächen. Jede Kante, wie **12**, entspricht einem Büschel Polarkegel (194), dessen Basis das System der vier Geraden ist, welche im entsprechenden Puncte **345** zusammenlaufen; und umgekehrt (87): *die Polarebenen der Puncte jeder dieser vier Geraden gehen durch die Gerade* **12**. Jede Diagonale, wie $\{123\}\{145\}$, entspricht einem Büschel von Quadripolarflächen, die nicht Kegel sind, deren Basis das System der vier Geraden ist, gebildet durch den Durchschnitt der beiden Ebenenpaare, welche die Quadripolarflächen der Puncte **123, 145** darstellen, und umgekehrt: *Die Polarebenen der Puncte dieser vier Geraden gehen sämmtlich durch die betrachtete Diagonale.*

212. Wir haben gezeigt, dass einer beliebigen Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ durch den Doppelpunct $\mathfrak{p}$ eine Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ entspricht (208), und aus dem Vorhergehenden (209) folgt, dass, wenn die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ in eine Seitenfläche des Trieders $p_1p_2p_3$ fällt, die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ mit der Gegenkante desselben Trieders zusammenfällt. Ist umgekehrt $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ eine der Geraden p_1, p_2, p_3, so ist $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ eine beliebige unter den Geraden, welche durch $\mathfrak{p}$ gehen und in der Ebene der beiden andern Geraden p liegen.

Fällt $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ zusammen, das heisst, sind $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ zwei entsprechende Puncte, so ist $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ (197) eine der vier Geraden, durch welche die Polarkegel vom Scheitel $\mathfrak{p}$ gehen.

Ist $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ in der Ebene $\mathfrak{p}p$ gezogen, so fällt $\mathfrak{c}'$ mit $\mathfrak{p}$ zusammen, und folglich osculiert die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ die Hessiana in $\mathfrak{p}$; also erzeugt, wenn $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ um $\mathfrak{p}$ variabel ist in der Ebene $\mathfrak{p}p$, die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ den Polarkegel von p; und während $\mathfrak{c}$ die Gerade p durchläuft, und $\mathfrak{d}$ eine cubische Plancurve mit Doppelpunct in $\mathfrak{p}$ beschreibt, erzeugt der Punct $\mathfrak{d}'$ den Kegelschnitt c, Durchschnitt des genannten Kegels mit der Hessiana (206). Sobald $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ die Hessiana osculiert, das heisst, wenn sie in $\mathfrak{p}$ einen der Zweige der cubischen Plancurve berührt, so fällt $\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{p}$ zusammen, und folglich auch $\mathfrak{d}'$ auf p. Daraus ergibt sich, dass die beiden Durchschnittspuncte des Kegelschnittes c mit der Geraden p den beiden Puncten der cubischen Plancurve entsprechen, welche unendlich nahe $\mathfrak{p}$ liegen.

213. Verschiebt sich die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ in einer Ebene E durch $\mathfrak{p}$, so erzeugt die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ einen Kegel, der durch p_1, p_2, p_3 geht, wegen der drei Geraden, in denen E die Seitenflächen des Trieders $p_1p_2p_3$ schneidet (212). Dieser Kegel ist durch zwei andere Generatrixen bestimmt, weil zwei Gerade, die durch $\mathfrak{p}$ gehen, die Ebene E bestimmen. Die Kegel, welche in dieser Weise zwei Ebenen E, E_1 entsprechen, haben eine einzige gemeinschaftliche Generatrix (ausser p_1, p_2, p_3) nämlich die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$, welche der Durchschnittslinie $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ der beiden Ebenen entspricht. Die Kegel, welche den Ebenen E entsprechen, sind also zweiter Ordnung.

Wir haben so *eine Transformation der Figuren erhalten, welche aus Geraden (also auch aus Ebenen und Kegeln) gebildet werden, die von* $\mathfrak{p}$ *ausgehen. Einer Geraden entspricht eine Gerade, einer Ebene entspricht ein Quadrikegel, der dem Trieder $p_1p_2p_3$ umgeschrieben ist, und umgekehrt.*

Sobald die Puncte $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$ und ebenso $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}'$ in Bezug auf jede Quadrifläche conjugiert sind, *so sind die Geraden* $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ *in Bezug auf sämmtliche Polarkegel vom Scheitel* $\mathfrak{p}$ *conjugiert.* Diese Kegel bilden ein Büschel und gehen durch die vier Geraden, welche ihnen entsprechen, und diese vier Geraden bilden ein vollständiges Vierkant, dessen Diagonalgerade p_1, p_2, p_3 sind (Durchschnitte der Ebenenpaare, welche dem Büschel angehören, und die Quadripolarflächen der Puncte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ sind). Also: *Der Quadrikegel, der dem Trieder $p_1p_2p_3$ umgeschrieben ist und einer Ebene E entspricht, ist der Ort der Polargeraden dieser Ebene in Bezug auf die Kegel jenes Büschels.* Folglich schneidet obiger Kegel die Ebenen p_2p_3, p_3p_1, p_1p_2 längs der conjugierten Geraden der Durchschnittsgeraden derselben mit E in Bezug auf die respectiven Geradenpaare p_1, p_2; p_3, p_1; p_1, p_2. Derselbe Kegel trifft die Ebene E längs zweier entsprechender Geraden, von denen jede eine Berührungsgeneratrix zwischen E und einem Kegel des Büschels ist; die Ebenen, welche durch p_1 gehen und bezüglich durch zwei entsprechende Gerade, bilden ein harmonisches System mit den Ebenen p_1p_2, p_1p_3; u. s. w.

214. Wir betrachten einen Cubikegel (Kegel dritter Ordnung), der durch die sechs Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}\mathfrak{p}_3, p_1, p_2, p_3$ geht und längs der drei letzten

durch die Polarebenen von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ berührt wird [1]). Es sei $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ eine Generatrix dieses Kegels. Die Ebene $p\mathfrak{c}$ schneidet die Hessiana und diesen Kegel längs zwei cubischen Plancurven, die sieben Puncte gemein haben, von denen drei dieselben Tangenten besitzen; diese cubischen Curven fallen also zusammen. Das heisst: *Der Cubikegel trifft die Hessiana in einer Plancurve* (dritter Ordnung), deren Ebene $p\mathfrak{c}$ ist, *und also noch in einer andern Plancurve* (derselben Ordnung), deren Ebene $p\mathfrak{d}$ ist. Jede dieser beiden Ebenen genügt offenbar, um auf eine einzige Weise den Cubikegel und die andere Ebene zu bestimmen; *also bilden diese Ebenenpaare, die die Durchschnittscurven der Hessiana mit den Cubikegeln des Büschels,* um das es sich handelt, *enthalten, eine Involution;* die Doppelebenen derselben enthalten die Berührungscurven zwischen der Hessiana und zwei Kegeln des Büschels. Das heisst: *Die Tangenten, welche man vom Puncte* $\mathfrak{p}$ *aus an die Hessiana ziehen kann, bilden zwei Cubikegel, und die Berührungscurven befinden sich in zwei durch* p *gehenden Ebenen;* das System dieser beiden Ebenen ist folglich die Quadripolarfläche des Punctes $\mathfrak{p}$. Also: *Die Quadripolarfläche von* $\mathfrak{p}$ *besteht aus zwei Ebenen, welche mit denjenigen beiden Ebenen ein harmonisches System bilden, welche die beiden cubischen Plancurven enthalten, die ein und demselben Cubikegel des Büschels angehören.*

Unter den Kegeln dieses Büschels gibt es auch den, welcher durch die Ebene $\mathfrak{p}p$ und den Polarkegel von p gebildet wird. Die Ebenen der Schnitte, welche denselben entsprechen, sind die Ebenen $\mathfrak{p}p$ und die Polarebene von $\mathfrak{p}$. Ein anderer Kegel desselben Büschels ist das Trieder $p_1 p_2 p_3$, das durch diejenigen drei Seitenflächen des Pentaeders gebildet wird, welche in $\mathfrak{p}$ zusammenlaufen. Die entsprechenden Schnitte liegen in den beiden andern Seitenebenen des Pentaeders, welche durch p gehen, und jeder von ihnen ist das System dreier Geraden. Hieraus zieht man, *dass die beiden Ebenen, welche die Quadripolarfläche von* $\mathfrak{p}$ *darstellen, und die beiden Seitenflächen des Pentaeders, welche durch* p *gehen, ein harmonisches System bilden.*

215. Die Ebenen $p\mathfrak{c}, p\mathfrak{d}$ gehen bezüglich durch $\mathfrak{d}', \mathfrak{c}'$ (208), folglich geht der Cubikegel des erwähnten Büschels, welcher durch $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ geht, auch durch $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$, das heisst (113), *dieser Kegel entspricht sich selbst.* Man schliesst hieraus und aus bekannten Eigenschaften der cubischen Plancurven [2]), dass die Tangentialebenen unseres Kegels längs zweier entsprechender Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{p}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ sich in einer Generatrix des nämlichen Kegels schneiden; dass jeder

---

[1]) Die analogen Cubikegel bilden ein Büschel, denn die gemeinsamen Bedingungen sind neun Geraden äquivalent, durch welche das System der drei Ebenen $p_2 p_3, p_3 p_1, p_1 p_2$ und das System der Ebene $\mathfrak{p}p$ und des Polarkegels der Geraden p gehen.

[2]) Man kann in der That den Cubikegel als Jacobiana eines Netzes von Quadrikegeln vom Scheitel p betrachten, dem das Polarkegelbüschel der Puncte von p angehört.

Quadrikegel, der dem Trieder $p_1 p_2 p_3$ umgeschrieben ist, den Cubikegel längs der drei Berührungsgeneratrixen schneidet, welche dieser Kegel mit ein und demselben Kegel zweiter Ordnung besitzt; und dass diese drei Generatrixen ein Trieder bilden, dessen Seitenflächen den Cubikegel in drei neuen Geraden schneiden, welche in der Ebene liegen, welche dem ersten Quadrikegel entspricht. U. s. w.; u. s. w.

216. Wir wollen jetzt noch einige Bemerkungen über die Polarfläche einer beliebigen Ebene E machen, welche durch den Doppelpunct $\mathfrak{p}$ geht. Da dieser Punct der Scheitel einer unbegrenzten Zahl von Polarkegeln ist, deren Pole die Puncte von p sind, *so geht die Polarfläche durch diese Gerade* und ist längs derselben durch die Polarebene von $\mathfrak{p}$ berührt. Dieselbe Fläche geht ausserdem noch durch $\mathfrak{p}$ und wird in diesem Puncte von der Polarebene des Punctes $\mathfrak{i}$ berührt, in dem E von p getroffen wird. Unter den Polarkegeln vom Scheitel $\mathfrak{p}$ gibt es zwei, welche die Ebene E berühren; also (188): *Die Polarfläche hat zwei Doppelpuncte auf* p.

Die Quadripolarflächen, die durch $\mathfrak{p}$ gehen, treffen E in Kegelschnitten, die in $\mathfrak{p}$ durch ein und dieselbe Gerade $\mathfrak{pi}$ (Durchschnitt der Ebenen E und $\mathfrak{p}p$) berührt werden. Ein beliebiger Punct dieser Geraden ist für einen dieser Kegelschnitte ein Doppelpunct, das heisst, er ist ein Berührungspunct zwischen E und einer ersten Polarfläche durch $\mathfrak{p}$. Alle analogen ersten Polarflächen gehen daher durch die Gerade $\mathfrak{pi}$, und ihre Pole sind auf der Geraden gelegen, welche den Durchschnitt der Polarebenen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{i}$ bilden. Daraus ergibt sich, *dass diese letztere Gerade der Polarfläche von E angehört.*

Diese Polarfläche berührt die Hessiana längs einer Raumcurve sechster Ordnung (158), die sich in unserem speciellen Falle in zwei Theile theilt, die Gerade p und eine Raumcurve fünfter Ordnung, die durch $\mathfrak{p}$ geht. Diese Curve, als dem Schnitte der Ebene E auf der Hessiana entsprechend, bildet in Verbindung mit den Geraden p_1, p_2, p_3 den vollständigen Durchschnitt dieser Fläche mit dem Quadrikegel, welcher der Ebene E entspricht (213). Der letztere Kegel schneidet daher die Polarfläche von E nochmals in einer Geraden. In der That, sobald die Ebene E durch die entsprechenden Puncte $\mathfrak{p}, \mathfrak{i}$ der Hessiana geht, berührt sie in $\mathfrak{i}$ ein Büschel von Quadripolarflächen (203), deren Pole auf einer Geraden durch $\mathfrak{p}$ sich befinden, die in der Polarfläche liegt; und diese Fläche wird längs jener Geraden durch die Polarebene von $\mathfrak{i}$ berührt. Dieselbe Gerade enthält die beiden andern Doppelpuncte der Fläche, welche die Pole der beiden Kegel sind, die zu dem Büschel gehören. Diese beiden Kegel haben daher ihre Scheitel auf einer in der Ebene E durch $\mathfrak{p}$ gehenden Geraden, welche der ersten Geraden entspricht.

217. Indem man diese Betrachtungen auf die Ebenen des Pentaeders **12345** (210) anwendet, sieht man, dass die Kanten des Tetraeders **2345** die Curve sechster Ordnung (entsprechend dem Vierseit mit den Seiten **12**, **13**,

14, 15) bilden, längs dessen die Hessiana durch die Polarfläche der Ebene 1 berührt wird. Diese Fläche hat daher die Puncte 234, 235, 245, 345 (die Scheitel des Tetraeders) zu Doppelpuncten. Dieselbe Fläche enthält als reciproke Fläche der *Steinerschen* Fläche (188) drei andere Gerade die in derselben Ebene liegen. Diese Geraden sind (216) die Durchschnitte der Polarebenen der Punctenpaare (123, 145), (124, 135), (143, 125), der Gegenscheitel des Vierseits. Sie bilden gleichzeitig ein Dreieck $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, von dem jeder Scheitel der Pol einer ersten Polarfläche ist, die die Ebene 1 berührt, und durch zwei Gegenscheitelpaare des Vierseits geht; also sind die Diagonalen dieses Vierseits zu zweien combiniert die Durchschnitte der Ebene 1 mit den ersten Polarflächen der Puncte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$; das heisst, die Scheitel $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{c}'_1$ des Diagonaldreiecks sind die Pole der Ebene $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$.

Der Ebene 2 entspricht ebenso eine Ebene $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2$, welche die Polarebene jedes Scheitels des Dreiecks $\mathfrak{a}'_2\mathfrak{b}'_2\mathfrak{c}'_2$ ist, das durch die Diagonalen des Vierseits (21, 23, 24, 25) gebildet wird; u. s. w. für die übrigen Ebenen des Pentaeders. Nun gehen aber die Ebenen, die vom Puncte 345 aus durch die Diagonalen

$$\}123\{\}145\{\equiv \mathfrak{b}'_1\mathfrak{c}'_1,\ \}124\{\}135\{\equiv \mathfrak{c}'_1\mathfrak{a}'_1,\ \}125\{\}134\{\equiv \mathfrak{a}'_1\mathfrak{b}'_1$$

gezogen sind, auch durch die Diagonalen

$$\}123\{\}245\{\equiv \mathfrak{b}'_2\mathfrak{c}'_2,\ \}124\{\}235\{\equiv \mathfrak{c}'_2\mathfrak{a}'_2,\ \}125\{\}234\{\equiv \mathfrak{a}'_2\mathfrak{b}'_2,$$

weil die Punctenpaare

$$(145, 245),\ (135, 235),\ (134, 234)$$

mit 345 in gerader Linie liegen; also treffen sich die Geraden $\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2$, $\mathfrak{b}'_1\mathfrak{b}'_2$, $\mathfrak{c}'_1\mathfrak{c}'_2$ in demselben Puncte 345.

Da die Ebene $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ die Polarebene der Puncte $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{c}'_1$ ist, so folgt daraus, dass die Quadripolarfläche des gemeinschaftlichen Punctes dieser Ebene und der Geraden 12 ein Kegel ist, der durch die Puncte $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{c}'_1$ und durch die vier Geraden (durch 345) geht, welche die Basis des Polarkegelbüschels der Puncte von 12 bilden. Ebenso ist die Quadripolarfläche des Punctes, in welchem $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2$ die Gerade 12 schneidet ein Kegel, der durch die Puncte $\mathfrak{a}'_2$, $\mathfrak{b}'_2$, $\mathfrak{c}'_2$ und durch dieselben vier Geraden geht. Nun liegen aber die Puncte $\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}'_2$; $\mathfrak{b}'_1, \mathfrak{b}'_2$; $\mathfrak{c}'_1, \mathfrak{c}'_2$ mit dem Puncte 345, dem gemeinschaftlichen Scheitel beider Kegel, in gerader Linie; die beiden Kegel fallen also zusammen, das heisst, die Ebenen $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2$ treffen die Gerade 12 in demselben Puncte. Also: *Die Ebenen* $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2, \ldots$, *welche den Seitenflächen* 1, 2, ... *des Pentaeders entsprechen, bilden ein neues Pentaeder, dessen Kanten die entsprechenden Kanten des ersten treffen, und daher liegen die fünf Geraden, in denen sich die entsprechenden Seitenebenen der beiden Pentaeder schneiden, in einer einzigen Ebene.*

218. Wir haben oben bewiesen, dass dem Schnitte der Hessiana durch eine Ebene E eine Raumcurve k sechster Ordnung entspricht (168). Es sei $\mathfrak{o}$ ein Punct von k, $\mathfrak{o}'$ der entsprechende Punct von E. Die Polargerade

der Ebene E in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{o}$ trifft die Hessiana nicht blos in $\mathfrak{o}'$, sondern auch in drei anderen Puncten $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$. Die Ebene E ist also die gemischte Polarebene der Punctenpaare $\mathfrak{o}, \mathfrak{l}$; $\mathfrak{o}, \mathfrak{m}$; $\mathfrak{o}, \mathfrak{n}$, das heisst, sie ist die Polarebene von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die Polarkegel von $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$. E enthält daher die Scheitel dieser drei Kegel, und folglich gehören die Puncte $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ der k an. Also: *Die Polargeraden der Ebene E in Bezug auf die Polarkegel, deren Scheitel in dieser Ebene liegen, treffen jede die Raumcurve k in drei Puncten.*

Wie viel solcher Polargeraden der Ebene E gehen durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{o}$ von k? Man muss einen Punct suchen, welcher mit $\mathfrak{o}$ als gemischte Polarebene die E hat; solcher Punct ist jeder Punct der Polargeraden von E in Bezug auf den Polarkegel von $\mathfrak{o}$. Diese Gerade trifft, wie man vorhin gesehen, die Curve k in drei Puncten $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$; und die Polargeraden von E in Bezug auf die Polarkegel von $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ gehen durch $\mathfrak{o}$. *Es gibt also drei Polargerade, welche durch einen beliebigen Punct von k gehen.*

Wie viel dieser Polargeraden trifft eine willkürliche Gerade g? Oder anders, wie viel Puncte gibt es auf g, welche E als Polarebene haben in Bezug auf einen Polarkegel, dessen Pol auf k liegt? Die Pole der Quadripolarflächen, in Bezug auf welche die Puncte von g die Pole von E sind (187), liegen auf einer cubischen Raumcurve, welche mit k acht Puncte gemein hat (121). Also: *Die Polargeraden der Ebene E in Bezug auf die Polarkegel, deren Scheitel sich in dieser Ebene befinden, bilden eine Fläche achter Ordnung. Für diese Fläche ist k eine dreifache Curve,* denn in jedem ihrer Puncte kreuzen sich drei Generatrixen. *Die nämliche Fläche geht durch die zehn Geraden p,* weil jede dieser letztern als Polargerade einer beliebigen Ebene in Bezug auf die Quadripolarfläche des entsprechenden Punctes $\mathfrak{p}$ betrachtet werden kann.

Die Generatrixen der Fläche treffen die Ebene E in den Scheiteln der Polarkegel, also *enthält die Fläche den ebenen Schnitt der Hessiana auf E.* Sie enthält ausserdem noch vier Gerade, die auch auf E liegen. Es sind dies die Berührungsgeneratrixen von E mit den vier Polarkegeln, deren Pole die Doppelpuncte der Polarfläche von E sind (188).

Ist E die Ebene im Unendlichen, so sind die Polarkegel der Puncte von k Cylinder, unter denen diejenigen, welche E berühren, vier an der Zahl, parabolisch sind. Die Polargeraden von E werden die Axen dieser Cylinder.

219. Von welcher Classe ist die *Enveloppe der Ebenen, welche die Fundamentalfläche F_3 in harmonischen cubischen Curven schneidet* [1])? Es sei g eine willkürliche Gerade, $\mathfrak{r}$ ein Punct, welcher g und der Fundamentalfläche

---

[1]) Eine Plancurve dritter Ordnung heisst *harmonisch* oder *äquianharmonisch* nach den Specialwerthen des constanten Doppelverhältnisses von vier Tangenten, die von einem beliebigen Puncte der Curve ausgehen. *Einleitung*, No. 27, 131 b.

gemein ist; man muss nun eine solche Ebene, welche durch g geht, suchen, dass die vier Tangenten, die man von $\mathfrak{x}$ an F_3 in dieser Ebene ziehen kann, ein harmonisches System bilden. Nun bilden die Tangenten, die man von $\mathfrak{x}$ an F_3 ziehen kann (67) einen Kegel vierter Ordnung, welcher, da er im Allgemeinen keine Doppelgeneratrixen hat, noch stationäre, von der zwölften Classe ist. Indem man diesen Kegel und die Gerade g durch eine Ebene schneidet, erhält man eine allgemeine Curve c vierter Ordnung und einen Punct $\mathfrak{g}$. Es handelt sich nun darum, von $\mathfrak{g}$ eine Gerade zu ziehen, welche c in vier harmonischen Puncten schneidet. Man weiss aber [1]), dass dieses Problem sechs Auflösungen zulässt, also ist die gesuchte Enveloppe *eine Fläche von der sechsten Classe.*

Auf die nämliche Weise findet man den Satz: *Die Ebenen, welche die Fundamentalfläche in äquianharmonischen cubischen Curven schneiden, umhüllen eine Fläche vierter Classe.*

Eine cubische Curve mit einer Spitze ist gleichzeitig ein Specialfall der harmonischen cubischen Curve und der äquianharmonischen. Also *sind die beiden Flächen sechster und vierter Classe,* welche wir eben betrachtet haben, *in die Developpable* (172) *eingeschrieben, die durch die stationären Tangentialebenen gebildet wird* (das heisst, die der Fundamentalfläche längs der parabolischen Curve umgeschrieben ist).

Unter den Ebenen, welche die Fundamentalfläche in äquianharmonischen cubischen Curven schneiden, befinden sich auch die zehn zu $\mathfrak{p}p$ analogen Ebenen (207), dass heisst diejenigen, welche durch einen Doppelpunct und die entsprechende Gerade gehen. In der That ist die erste Polarfläche von $\mathfrak{p}$ ein Ebenenpaar, dass durch p geht, und die ersten Polarflächen der Puncte von p sind Kegel, welche die Ebene $\mathfrak{p}p$ längs Geradenpaaren durch $\mathfrak{p}$ in Involution schneiden. Die Doppelstrahlen dieser Involution und die Gerade p bilden also die Jacobiana des Netzes von Kegelschnitten, längs deren die Ebene $\mathfrak{p}p$ die Quadripolarflächen dieser Puncte schneidet. (Diese Jacobiana ist der Schnitt der Ebene $\mathfrak{p}p$ durch die Polarfläche dieser Ebene). Wenn aber die Jacobiana des Netzes der Polarkegelschnitte das System dreier Geraden ist, so ist die Fundamentalcurve äquianharmonisch, folglich trifft die Ebene $\mathfrak{p}p$ die Fundamentalfläche in einer äquianharmonischen cubischen Curve.

[1]) STEINER, *Ueber solche algebraische Curven u. s. w.* (Crelles Journal, Bd. 47. S. 102).

CAPITEL III.

DIE SIEBENUNDZWANZIG GERADEN EINER FLÄCHE DRITTER ORDNUNG.

220. Eine Bitangentialebene der Fundamentalfläche F_3 schneidet diese Fläche in einer cubischen Curve mit zwei Doppelpuncten (den beiden Berührungspuncten), dass heisst in einer Geraden und einem Kegelschnitte. Die Zahl der auf F_3 liegenden Geraden ist also gleich der Zahl der Bitangenten, welche durch einen beliebigen Punct des Raumes gehen, oder auch gleich der Classe der developpablen Fläche, welche die Enveloppe der Bitangentialebenen ist. Diese Classe ist nun (67) gleich 27, *also enthält eine Fläche dritter Ordnung im Allgemeinen 27 Gerade.*

Ist a eine dieser Geraden, so schneidet jede durch a gelegte Ebene die Fläche in einem Kegelschnitt und berührt sie in den beiden Durchschnittspuncten dieses Kegelschnittes mit a (171). Lässt man die Ebene um a rotieren, *so erzeugen die beiden Berührungspuncte eine Involution*, deren Doppelpuncte die Berührungspuncte von a mit der Hessiana sind, oder was auf dasselbe hinausläuft, mit der parabolischen Curve. Unter den Ebenen, die durch a gelegt sind, gibt es (171) fünf, welche F_3 in einem Kegelschnitt mit Doppelpunct (zwei Gerade ausser a) schneiden; das heisst, *durch jede auf der Fläche gelegene Gerade gehen fünf Tritangentialebenen* (zwei Berührungspuncte auf der Geraden, der dritte ausserhalb). Umgekehrt muss jede Tritangentialebene die Fläche längs dreier Geraden schneiden (eine cubische Curve mit drei Doppelpuncten); also: *Eine beliebige Gerade auf der Fläche trifft* $2.5 = 10$ *andere Gerade* derselben Fläche, und *die Zahl der Tritangentialebenen ist* $\frac{5.27}{3} = 45$.

Sind a, b, c drei Gerade, die in derselben Tritangentialebene liegen, so gehen durch jede solche Gerade vier dreifache Tangentialebenen ausser abc, jede dieser Ebenen enthält zwei neue Gerade, und man erhält so die $3.4.2 = 24$ Geraden, welche mit a, b, c die Zahl 27 vervollständigen.

221. Die neun Geraden, in denen sich die Seitenebenen zweier gegebener Trieder schneiden, bilden die Basis eines Büschels cubischer Flächen, zu denen auch die beiden Trieder gehören. Die Fläche des Büschels, welche durch einen gegebenen Punct $\mathfrak{p}$ geht, erhält man auf folgende Weise: Eine beliebig durch $\mathfrak{p}$ gelegte Ebene schneidet die neun Geraden in neun Puncten, welche als Durchschnittspuncte der Seiten zweier Dreiecke (Schnitte der beiden Trieder) die Basis eines Curvenbüschels dritter Ordnung bilden. Eine dieser Curven geht durch $\mathfrak{p}$ und *der Ort aller analogen Curven, welche man erhält, wenn man die Ebene um* $\mathfrak{p}$ *dreht, ist* offenbar *die gesuchte cubische*

Fläche. Es seien a_1, b_1, c_{12}; b_3, c_{23}, a_2; c_{31}, a_3, b_1 die Geraden, in denen die erste, zweite, dritte Seitenfläche des ersten Trieders bezüglich die Seitenflächen des zweiten schneidet; oder anders, es seien a_1, b_3, c_{31}; b_2, c_{23}, a_3; c_{12}, a_2, b_1 die Geraden, in welchen bezüglich die erste, zweite, dritte Seitenfläche des zweiten Trieders die Seitenflächen des ersten schneidet; dann können wir folgende Tripel aufstellen

$$a_1, b_1, c_{23}; \; a_2, b_2, c_{31}; \; a_3, b_3, c_{12};$$
$$b_1, b_2, b_3; \; c_{23}, c_{31}, c_{12}; \; a_1, a_2, a_3,$$

in jedem derselben hat man drei Gerade, welche sich nicht schneiden; die drei Geraden a_1, b_1, c_{23} bestimmen ein Hyperboloid, welches die cubische Fläche nochmals längs einer Curve l (dieselbe ist nicht eben) dritter Ordnung schneidet. Eine beliebig durch a_1 gelegte Ebene berührt das Hyperboloid in einem Puncte $\mathfrak{x}$ und die cubische Fläche in zwei Puncten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$. Lässt man die Ebene um a_1 rotieren, so ergeben die Puncte $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ eine der einfachen Reihe der Puncte $\mathfrak{x}$ projectivische Involution, und es gibt also drei Fälle, dass ein Punct $\mathfrak{x}$ mit einem der entsprechenden Puncte $\mathfrak{y}$ zusammenfällt. Das heisst: Das Hyperboloid und die cubische Fläche berühren sich in drei Puncten von a_1, ebenso in drei Puncten von b_1 und in drei Puncten von c_{23}. Die Berührungspuncte zweier Flächen sind aber die Doppelpuncte ihrer Schnitte, also schneidet l jede der Geraden a_1, b_1, c_{23} in drei Puncten. Daraus folgt, dass l das System dreier Geraden ist, die a_1, b_1, c_{23} schneiden [1]). Analog schneidet jedes der Hyperboloide, welches den fünf andern Tripeln entspricht, die cubische Fläche in drei neuen Geraden; wir erhalten so $3.6 = 18$ Gerade, welche mit den neun Durchschnitten der Seitenflächen der gegebenen Trieder *das System der 27 Geraden* bilden.

222. Ein Büschel von Flächen S zweiter Ordnung, dessen Basis eine Curve $\mathbf{c}$ vierter Ordnung sei, sei einem Büschel von Ebenen E, die sämmtlich durch eine Gerade a gehen, projectivisch. *Der Ort der Kegelschnitte, in denen die Flächen S durch die entsprechenden Ebenen E geschnitten werden, ist* (113) *eine Fläche F_3 dritter Ordnung.* Ihre Durchschnittspuncte mit einer beliebigen Geraden g erhält man auf folgende Weise. Die Gerade g trifft S in zwei Puncten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ und E in einem Puncte $\mathfrak{x}$; die Punctenpaare $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ geben eine der einfachen Reihe der Puncte $\mathfrak{x}$ projectivische Involution und es gibt, also dreimal ein Zusammenfallen eines Punctes $\mathfrak{x}$ mit einem entsprechenden Puncte $\mathfrak{y}$.

Die Fläche F_3 geht durch die Basis der beiden erzeugenden Büschel (113), nämlich durch die Raumcurve $\mathbf{c}$ und die Gerade a. Jede Ebene E berührt F_3 in zwei Puncten; es sind dies die beiden Puncte, in denen die Gerade a die E entsprechende Fläche S schneidet. Unter den Flächen

---

1) Eine Verallgemeinerung dieses Satzes von Moutard sehe man oben 60. *Anmerkung* 2).

S gibt es zwei, welche a berühren, das heisst, *es gibt zwei Ebenen E, welche stationäre Ebenen sind.* Jede Fläche S berührt F_3 in vier Puncten, nämlich in denjenigen, in welchen die Raumcurve $\mathfrak{c}$ durch die S entsprechende Ebene getroffen wird.

Unter den Ebenen E gibt es fünf (171), *welche die entsprechende Fläche S berühren*; jede dieser Ebenen ist also eine Tangentialebene von F_3 in drei Puncten und schneidet diese Fläche in zwei Geraden ausser a. Indem man von einer beliebigen solchen Tritangentialebene ausgeht, findet man das vollständige System der 27 Geraden wieder, wie oben (220).

223. Wir wollen jetzt voraussetzen, die Ebenen E seien die Polarebenen eines festen Punctes $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die Quadriflächen S; *dann ist der Ort der Berührungscurven zwischen den Quadriflächen des Büschels und den umgeschriebenen Kegeln vom Scheitel $\mathfrak{p}$ eine cubische Fläche F_3*, welche durch die Basis $\mathfrak{c}$ des Büschels geht und auch durch den Punct $\mathfrak{p}$, wegen derjenigen Quadrifläche S, welche durch $\mathfrak{p}$ geht. Die Ebenen E der Berührungscurven gehen durch ein und dieselbe Gerade a, welche also auf der Fläche F_3 liegt.

In dem Büschel Quadriflächen gibt es vier Kegel, und für jeden derselben zerfällt die Berührungscurve in zwei Gerade, die in einer Ebene durch a liegen. Die Fläche S, die durch $\mathfrak{p}$ geht, wird von der Polarebene von $\mathfrak{p}$ in zwei Geraden geschnitten, die sich in $\mathfrak{p}$ kreuzen, und deren Ebene durch a geht. Wir haben so 10 Gerade erhalten, welche paarweise in Ebenen liegen, welche durch a gehen.

Indem wir die beiden in $\mathfrak{p}$ gekreuzten Geraden betrachten, sehen wir jede in zwei Puncten auf der Raumcurve $\mathfrak{c}$ aufstehen, und durch die Gerade, welche sie verbindet, kann man vier Tangentialebenen von $\mathfrak{c}$ ziehen. Jede dieser Ebenen berührt in demselben Puncte, in dem sie $\mathfrak{c}$ berührt, auch die Fläche F_3, weil die Gerade, welche $\mathfrak{p}$ mit dem Berührungspuncte verbindet, in dem letztern Puncte F_3 berührt, und mit der Tangente von $\mathfrak{c}$ die Tangentialebene von F_3 bestimmt. Jede dieser Ebenen ist also dreifache Tangentialebene und schneidet folglich F_3 in zwei neuen Geraden. Wir erhalten so $2.4.2 = 16$ Gerade, welche mit den 10 schon erhaltenen und mit a zusammen das System der 27 Geraden vervollständigen.

224. Wir wollen ein lineares Ebenensystem dem Systeme der Puncte des Raumes projectivisch nennen, sobald einem beliebigen Puncte $\mathfrak{x}$ eine einzige Ebene X entspricht, und umgekehrt jeder Ebene X ein einziger Punct $\mathfrak{x}$; wenn ferner den Puncten $\mathfrak{x}$ einer Ebene X' die Ebenen X eines Netzes entsprechen, welche durch ein und denselben Punct $\mathfrak{x}'$ gehen, und folglich den Puncten $\mathfrak{x}$ einer Geraden die Ebenen X eines Büschels. Umgekehrt entsprechen den Ebenen X eines Büschels die Puncte $\mathfrak{x}$ einer Geraden, und den Ebenen X, welche durch einen Punct $\mathfrak{x}'$ gehen, die Puncte $\mathfrak{x}$ einer Ebene X'. Die Puncte $\mathfrak{x}'$ und die Ebenen X' bilden zwei neue projectivische Systeme.

Man habe drei lineare Ebenensysteme, die sowohl unter sich als auch mit dem Systeme der Puncte des Raumes projectivisch sind, in der Art, dass jedes der vier homologen Elemente X_1, X_2, X_3, $\mathfrak{x}$ die drei andern eindeutig bestimmt. Es sei $\mathfrak{x}'$ der gemeinschaftliche Punct der drei Ebenen X_1, X_2, X_3, dann bestimmen sich die Puncte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ einer aus dem andern eindeutig; denn wenn $\mathfrak{x}'$ gegeben ist, so geht durch diesen Punct im Allgemeinen ein einziges Tripel entsprechender Ebenen X_1, X_2, X_3, denen ein einziger Punct $\mathfrak{x}$ entspricht (er entsteht durch den Durchschnitt der drei Ebenen X'_1, X'_2, X'_3, welche dem Puncte $\mathfrak{x}'$ entsprechen). *Man kann $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ als homologe Puncte zweier projectivischer Räume auffassen,* und wir wollen die Curven und Flächen zu bestimmen suchen, welche in einem dieser Räume den Geraden und Ebenen des andern ensprechen.

Durchläuft $\mathfrak{x}$ eine Ebene E, so erzeugt jede der Ebenen X ein Netz; man erhält so drei projectivische Netze, von denen drei entsprechende Ebenen sich in $\mathfrak{x}'$ schneiden. Der Ort von $\mathfrak{x}'$ ist also (127) eine Fläche F_3 dritter Ordnung. Daraus folgt, *dass die Puncte dieser Fläche einzeln den Puncten der Ebene E entsprechen.*

Alle cubischen Flächen F_3, entsprechend den Ebenen E des ersten Raumes, bilden ein lineares System und gehen durch dieselbe Raumcurve k der sechsten Ordnung (136), *Ort eines Punctes, durch welchen drei entsprechende Büschel von Ebenen X hindurchgehen. Also entspricht einem beliebigen Puncte $\mathfrak{x}'$ von k anstatt eines einfachen Punctes $\mathfrak{x}$ eine Gerade x.*

Beschreibt $\mathfrak{x}$ eine Gerade, dann bilden die Ebenen X drei projectivische Büschel; folglich (122), *ist der Ort von $\mathfrak{x}'$ eine cubische Raumcurve.* Diese Curve bildet mit k zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen F_3, welche zwei Ebenen E entsprechen, welche durch die gegebene Gerade gehen.

Eine Gerade und eine Ebene des ersten Raumes haben einen Punct $\mathfrak{x}$ gemein; der Punct $\mathfrak{x}'$, welcher ihm entspricht, muss auch auf eine einzige Weise aus dem Durchschnitte der Curve und der Fläche, welche bezüglich der Geraden und der Ebene entsprechen, sich ergeben. Diese Curve und Fläche sind aber beide von der dritten Ordnung, und haben also neun Puncte gemein. Von ihnen gehören (121) acht der Curve k an, und der neunte ist $\mathfrak{x}'$.

Daraus, dass die cubische Raumcurve, die einer beliebigen Geraden entspricht, k achtmal trifft, folgt, dass diese Gerade von allen Geraden x getroffen wird, welche den acht Puncten $\mathfrak{x}'$ von k entsprechen. Das heisst, *die Geraden x des ersten Raumes, welche den Puncten der Raumcurve k entsprechen, bilden eine Fläche achten Grades.*

Drei Ebenen E schneiden sich in einem Puncte $\mathfrak{x}$, also haben drei Flächen F_3 ausser der Curve k nur noch einen einzigen Punct $\mathfrak{x}'$ gemein.

Umgekehrt: Beschreibt der Punct $\mathfrak{x}'$ im zweiten Raume eine Gerade, so erzeugt der Punct $\mathfrak{x}$ eine cubische Raumcurve, denn der Ort von $\mathfrak{x}$ wird von einer willkürlichen Ebene E in ebensovielen Puncten getroffen, als die gegebene Gerade mit der Fläche F_3 Durchschnittspuncte hat, welche dieser

Ebene entspricht. Ist $\mathfrak{x}'$ auf einer Ebene E variabel, so erzeugt $\mathfrak{x}$ eine cubische Fläche F'_3; in der That wird der Ort von $\mathfrak{x}$ durch eine beliebige Gerade in den Puncten getroffen, welche den Durchschnittspuncten der Ebene E' mit der Curve entsprechen, welche dieser Geraden entspricht. Und sobald der Punct $\mathfrak{x}$ der Durchschnitt dreier homologer Ebenen X'_1, X'_2, X'_3 dreier zu dem Systeme der Puncte $\mathfrak{x}'$ des zweiten Raumes projectivischer Systeme ist, so folgt, dass F'_3 als Ort der Puncte $\mathfrak{x}$ construiert werden kann, die drei entsprechenden Ebenen dreier projectivischer Netze gemein sind. Folglich bilden die Flächen F'_3, welche den Ebenen des zweiten Raumes entsprechen, selbst ein lineares System und gehen durch ein und dieselbe Raumcurve k' sechster Ordnung. Jedem Puncte $\mathfrak{x}$ derselben entsprechen die Puncte $\mathfrak{x}'$ einer Geraden x' [1]).

225. Es sei $\mathfrak{x}'$ ein Punct von k, der allen Ebenen X_1, X_2, X_3 dreier entsprechender Büschel gemein sei, deren Axen a_1, a_2, a_3 sein mögen; und es sei x die Gerade, welche die diesen Ebenen entsprechenden Puncte $\mathfrak{x}$ enthält, das heisst die gemeinsame Gerade der Ebenen X'_1, X'_2, X'_3, welche $\mathfrak{x}'$ entsprechen. Jedes Tripel homologer Ebenen, die bezüglich durch a_1, a_2, a_3 gezogen sind, entspricht einem Puncte $\mathfrak{x}$ von x, in der Art, dass der auf x variable Punct $\mathfrak{x}$ stets den festen Punct $\mathfrak{x}'$ als homologen Punct hat; unter diesen Tripeln gibt es aber drei, von denen jedes aus drei Ebenen durch ein und dieselbe Gerade besteht. In der That, der durch die projectivischen Büschel $(a_1), (a_2)$ erzeugte Kegel (151), und der Kegel, welcher in analoger Weise durch die $(a_1), (a_3)$ erzeugt wird, haben drei Gerade gemein ausser der gemeinschaftlichen Axe a_1; jede derselben ist folglich der Durchschnitt dreier entsprechender Ebenen X_1, X_2, X_3. Also besitzt x drei Puncte, von denen jeder einer Geraden entspricht, die durch $\mathfrak{x}'$ geht, oder mit andern Worten, x steht auf k' in drei Puncten auf, denen drei Gerade x' die durch $\mathfrak{x}'$ gehen, entsprechen. Analog findet man: *Jedem Puncte $\mathfrak{x}$ von k' entspricht eine Gerade x', die auf k in drei Puncten aufsteht, und die Geraden x, welche diesen Puncten entsprechen, kreuzen sich in $\mathfrak{x}$.* Das heisst: *Trifft eine Gerade die Curve k in drei Puncten, so gehen die drei Geraden, welche diesen Puncten entsprechen, durch ein und denselben Punct $\mathfrak{x}$ von k' und bilden für sich allein die der gegebenen Geraden entsprechende cubische Curve, in der Art, dass jedem andern Puncte derselben der feste Punct $\mathfrak{x}$ entspricht.*

Beschreibt der Punct $\mathfrak{x}'$ eine Gerade g, so geben die Ebenen X'_1, X'_2, X'_3

---

1) In dem speciellen Falle, dass X_1, X_2, X_3 die Polarebenen des Punctes $\mathfrak{x}$ in Bezug auf drei feste Quadriflächen sind, haben die Puncte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ eine völlig reciproke (*involutorische*) Beziehung, und einer Ebene E entspricht, zu welchem Raume man sie auch als angehörend betrachtet, eine einzige Fläche F_3, Ort der Pole der Ebene E in Bezug auf die Flächen des durch die drei gegebenen Quadriflächen bestimmten Netzes (128). Unter dieser Bedingung fallen auch die Curven k, k' zusammen, und es würde unnütz sein, die beiden Räume zu unterscheiden.

drei projectivischen Büscheln Entstehung, und folglich ist der Ort von $\mathfrak{x}$, wie wir es schon oben (224) bewiesen haben, eine cubische Raumcurve, die den drei Hyperboloiden gemein ist, welche die drei Büschel zu zwei und zwei genommen erzeugen. Diese Curve zerlegt sich: 1. in einen Kegelschnitt und eine Gerade x, sobald g die Curve k einmal trifft; 2. in drei Gerade (zwei derselben x_1, x_2, die sich nicht schneiden, werden durch die dritte geschnitten), sobald g die Curve k zweimal trifft; 3. in drei Gerade x_1, x_2, x_3 (von demselben Puncte von k' ausgehend), wenn g die Curve k dreimal schneidet. Abstrahieren wir von den Geraden x, welche den Puncten von k entsprechen, so können wir sagen, *dass der Geraden g eine cubische Raumcurve, ein Kegelschnitt, eine Gerade oder ein Punct entspricht, je nachdem g mit k 0, 1, 2, 3 Puncte gemein hat.*

Hieraus folgt, dass g, wenn sie auf der Fläche F_3 liegt, k wenigstens einmal trifft, da die g entsprechende Linie auf der Ebene E liegen muss, welche F_3 entspricht. Also: *Betrachtet man drei Gerade, die in derselben dreifachen Tangentialebene von F_3 liegen, so können nur folgende zwei Fälle eintreten: entweder treffen die drei Geraden k in je 2 Puncten, oder sie treffen diese Curve bezüglich in* 1, 2, 3 *Puncten.*

226. Es sei F_3 die cubische Fläche, welche einer gegebenen Ebene E entspricht; diese Ebene schneidet die Raumcurve k' in sechs Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6$, welche wir *Fundamentalpuncte* nennen wollen. Betrachten wir nun diese Puncte als ebensoviele Lagen von $\mathfrak{x}$, *so liegen die sechs entsprechenden Geraden* $x' = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ (Orte der homologen Puncte $\mathfrak{x}'$) *auf* F_3 *und stehen jede auf k in drei Puncten auf.* Man sieht auch leicht, dass den verschiedenen Puncten der Geraden a_ρ die Puncte der Ebene E entsprechen, welche dem Fundamentalpuncte $\mathfrak{a}_\rho$ unendlich nahe sind, das heisst, dass die Reihe der Puncte $\mathfrak{x}'$ auf a_ρ dem Büschel von Geraden projectivisch ist, welche in der Ebene E durch $\mathfrak{a}_\rho$ gehen.

Die übrigen Geraden von F_3 treffen k entweder in zwei oder in einem Puncte, und entsprechen also bezüglich geraden Linien oder Kegelschnitten in der Ebene E (225). Im ersten Falle muss die Gerade in E ebenfalls zweimal k' treffen. Nun gibt es in der Ebene E fünfzehn Gerade, die mit dieser Raumcurve zwei Puncte gemein haben, nämlich:

$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \mathfrak{a}_6\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_6, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_6, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_6$$

und F_3 *enthält also auch fünfzehn Gerade:*

$$c_{23}, c_{31}, c_{12}, c_{56}, c_{64}, c_{45}, c_{14}, c_{15}, c_{16}, c_{24}, c_{25}, c_{26}, c_{34}, c_{35}, c_{36},$$

von denen jede auf k in zwei Puncten aufsteht.

Die Geraden a_ρ und $c_{\rho\sigma}$ (wo ρ, σ die Indices zweier Fundamentalpuncte sind) treffen sich in einem Puncte, welcher der Richtung $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$, die von $\mathfrak{a}_\rho$ ausgeht, angehört; die Ebene dieser Geraden, trifft folglich F_3 in einer dritten Geraden, die nur einen einzigen Punct mit k gemein hat; wir wollen sie durch b_σ bezeichnen. Dieselbe Ebene trifft die sechs Geraden a, von denen zwei, a_ρ, a_σ, durch $c_{\rho\sigma}$ geschnitten werden, da die entsprechende Gerade durch die Puncte $\mathfrak{a}_\rho, \mathfrak{a}_\sigma$ geht; folglich wird b_σ ausser a_ρ noch vier andere Gerade mit Ausnahme von a_σ schneiden. Daraus folgt, dass der b_σ entsprechende Kegelschnitt durch fünf Fundamentalpuncte geht, mit Ausnahme von $\mathfrak{a}_\sigma$. Also *enthält F_3 sechs neue Gerade*

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad b_4, \quad b_5, \quad b_6$$

die k nur in je einem Puncte treffen, und den Kegelschnitten

$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_6, \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$$

entsprechen, welche man durch die Fundamentalpuncte zu je fünf genommen beschreiben kann.

227. Das sind also die 27 Geraden der Fläche F_3. Nach dem Vorhergehenden (225) enthält jede dreifache Tangentialebene entweder eine Gerade a, eine Gerade b und eine Gerade c oder drei Gerade c, und folglich liegen zwei Gerade a oder zwei Gerade b niemals in ein und derselben Ebene.

Trifft eine Gerade b oder c die Gerade a_ρ, so muss der entsprechende Kegelschnitt von b oder die entsprechende Gerade von c durch den Fundamentalpunct $\mathfrak{a}_\rho$ gehen. Also treffen sich zwei Gerade a_ρ, b_σ immer, sobald die Indices ρ, σ verschieden sind, und treffen sich nicht, wenn sie denselben Index haben. Jede Gerade a_ρ trifft ausser den fünf Geraden b mit anderm Index die fünf Geraden $c_{\rho\sigma}$, welche einen Index haben, der gleich ρ ist.

Haben zwei Linien auf E einen gemeinschaftlichen Punct $\mathfrak{x}$, so haben die entsprechenden Linien auf F_3 den homologen Punct $\mathfrak{x}'$ gemein; gehen aber die ersten Linien zugleich durch einen Fundamentalpunct $\mathfrak{a}_\rho$, so zeigt das nur an, dass die Linien auf F_3 beide durch die Gerade a_ρ in den Puncten getroffen werden, welche den Richtungen der ersten Linien im Puncte $\mathfrak{a}_\rho$ entsprechen.

Es folgt hieraus, dass zwei Gerade c, und ebenso eine Gerade b und eine Gerade c sich treffen, wenn die entsprechenden Linien einen von den sechs Fundamentalpuncten verschiedenen Durchschnittspunct haben. *Die Gerade b_ρ trifft also alle Geraden c die einen Index ρ haben; und zwei Gerade c schneiden sich, wenn alle Indices derselben verschieden sind.*

Es ist jetzt sehr leicht, die 45 Combinationen von je drei Geraden zu finden, welche in derselben Ebene liegen. *Die Ebene, welche durch a_ρ und b_σ geht, enthält auch $c_{\rho\sigma}$, und letztere Gerade liegt auch in der Ebene $a_\sigma b_\rho$*, denn die Symbole $c_{\rho\sigma}$ und $c_{\sigma\rho}$ drücken ein und dieselbe Gerade aus, nämlich die, welche der Geraden entspricht, die durch die Puncte $\mathfrak{a}_\rho, \mathfrak{a}_\sigma$ geht. *Endlich sind drei Gerade c in einer Ebene, wenn ihre Indices alle sechs Zahlen* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *enthalten.*

Wir geben hier eine Zusammenstellung der fünfundvierzig Tripel von Geraden, welche in den dreifachen Tangentialebenen liegen.

$a_1 b_2 c_{12}$	$a_2 b_1 c_{21}$	$a_3 b_1 c_{31}$	$a_4 b_1 c_{41}$	$a_5 b_1 c_{51}$	$a_6 b_1 c_{61}$
$a_1 b_3 c_{13}$	$a_2 b_3 c_{23}$	$a_3 b_2 c_{32}$	$a_4 b_2 c_{42}$	$a_5 b_2 c_{52}$	$a_6 b_2 c_{62}$
$a_1 b_4 c_{14}$	$a_2 b_4 c_{24}$	$a_3 b_4 c_{34}$	$a_4 b_3 c_{43}$	$a_5 b_3 c_{53}$	$a_6 b_3 c_{63}$
$a_1 b_5 c_{15}$	$a_2 b_5 c_{25}$	$a_3 b_5 c_{35}$	$a_4 b_5 c_{45}$	$a_5 b_4 c_{54}$	$a_6 b_4 c_{64}$
$a_1 b_6 c_{16}$	$a_2 b_6 c_{26}$	$a_3 b_6 c_{36}$	$a_4 b_6 c_{46}$	$a_5 b_6 c_{56}$	$a_6 b_5 c_{65}$

$c_{12} c_{34} c_{56}$	$c_{13} c_{24} c_{56}$	$c_{14} c_{23} c_{56}$	$c_{15} c_{23} c_{46}$	$c_{16} c_{23} c_{45}$
$c_{12} c_{35} c_{46}$	$c_{13} c_{25} c_{46}$	$c_{14} c_{25} c_{36}$	$c_{15} c_{24} c_{36}$	$c_{16} c_{24} c_{35}$
$c_{12} c_{36} c_{45}$	$c_{13} c_{26} c_{45}$	$c_{14} c_{26} c_{35}$	$c_{15} c_{26} c_{34}$	$c_{16} c_{25} c_{34}$

228. Man zieht hieraus mehrere interessante Bemerkungen. Zum Beispiel: *Zwei Gerade, die nicht in derselben Ebene liegen*, wie a_1, b_1, *werden von den nämlichen fünf Geraden geschnitten* ($c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}$). Unter den andern zwanzig Geraden gibt es fünf, welche nur a_1 schneiden, fünf, welche nur b_1 schneiden, und zehn, welche weder die eine noch die andere Gerade a_1, b_1 treffen.

Drei Gerade, welche sich nicht schneiden, wie a_1, a_2, a_3, *werden durch die nämlichen drei Geraden* (b_4, b_5, b_6) *getroffen*, und es gibt sechs Gerade ($a_4, a_5, a_6, c_{56}, c_{64}, c_{45}$), welche weder a_1 noch a_2 noch a_3 schneiden.

Vier Gerade, welche sich nicht schneiden, wie a_1, a_2, a_3, a_4, *werden von zwei Geraden getroffen* (b_5, b_6), *und werden von drei Geraden nicht geschnitten* (a_5, a_6, c_{56}).

Zwei Systeme von je sechs Geraden, wie

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$$
$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6,$$

in denen je zwei homologe Gerade sich nicht schneiden und zwei nicht homologe Gerade sich stets schneiden, bilden das, was man nach Schläfli [1]), ein *Doppelsechs* nennt. *Fünf Gerade*, wie a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, *welche demselben* S*echstupel angehören, werden von einer einzigen Geraden* (b_6) *geschnitten* und eine andere Gerade (a_6) trifft sie nicht. Aber *fünf Gerade, welche, ohne sich zu schneiden, nicht demselben Sechstupel angehören*, wie $a_1, a_2, a_3, a_4, c_{56}$, *werden von zwei Geraden* (b_5, b_6) *geschnitten*, und es gibt keine Gerade, welche nicht eine oder die andere dieser fünf Geraden schnitte.

229. Die Erzeugungsweise, welcher wir uns für die Fläche F_3 bedient haben, hat uns ganz natürlich auf das *Doppelsechs* geführt, welches aus den

1) *An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order etc.* (Quarterly Journal of Mathematics. T. II., 1858).

Geraden a, b gebildet ist. Man kann aber die 27 Geraden noch auf andere Weise verbinden, um dadurch ein Doppelsechs zu bilden. *Ein Doppelsechs ist durch zwei homologe Gerade, wie a_1, b_1, bestimmt,* denn die fünf Geraden, welche b_1 schneiden ohne a_1 zu treffen, und die fünf Geraden, welche a_1 treffen ohne b_1 zu schneiden, vervollständigen die beiden Sechstupel des Doppelsechs. Daraus lässt sich die Zahl der Doppelsechs ableiten, die man aus den 27 Geraden bilden kann. Jede dieser Geraden wird von sechszehn andern Geraden nicht getroffen; es gibt also $\frac{27.16}{2}$ Geradenpaare, welche sich nicht treffen. Jedes Paar bestimmt ein Doppelsechs; jedes Doppelsechs enthält aber sechs homologe Geradenpaare; *also ist die Zahl der Doppelsechs gleich* $\frac{27.16}{2.6} = 36$. Hier eine Tabelle dieser sechsunddreissig Doppelsechs:

$a_1\,b_1\,c_{23}\,c_{21}\,c_{25}\,c_{26}$ $a_2\,b_2\,c_{13}\,c_{14}\,c_{15}\,c_{16}$	$a_1\,b_1\,c_{32}\,c_{34}\,c_{35}\,c_{36}$ $a_3\,b_3\,c_{12}\,c_{14}\,c_{15}\,c_{16}$	$a_1\,b_1\,c_{42}\,c_{43}\,c_{45}\,c_{46}$ $a_4\,b_4\,c_{12}\,c_{13}\,c_{15}\,c_{16}$	$a_1\,b_1\,c_{52}\,c_{53}\,c_{54}\,c_{56}$ $a_5\,b_5\,c_{12}\,c_{13}\,c_{14}\,c_{16}$	$a_1\,b_1\,c_{62}\,c_{63}\,c_{64}\,c_{65}$ $a_6\,b_6\,c_{12}\,c_{13}\,c_{14}\,c_{15}$	$a_2\,b_2\,c_{31}\,c_{34}\,c_{35}\,c_{36}$ $a_3\,b_3\,c_{21}\,c_{24}\,c_{25}\,c_{26}$
$a_2\,b_2\,c_{41}\,c_{43}\,c_{45}\,c_{46}$ $a_4\,b_4\,c_{21}\,c_{23}\,c_{25}\,c_{26}$	$a_2\,b_2\,c_{51}\,c_{53}\,c_{54}\,c_{56}$ $a_5\,b_5\,c_{21}\,c_{23}\,c_{24}\,c_{26}$	$a_2\,b_2\,c_{61}\,c_{63}\,c_{64}\,c_{65}$ $a_6\,b_6\,c_{21}\,c_{23}\,c_{24}\,c_{25}$	$a_3\,b_3\,c_{41}\,c_{42}\,c_{45}\,c_{46}$ $a_4\,b_4\,c_{31}\,c_{32}\,c_{34}\,c_{36}$	$a_3\,b_3\,c_{51}\,c_{52}\,c_{54}\,c_{56}$ $a_5\,b_5\,c_{31}\,c_{32}\,c_{34}\,c_{36}$	$a_3\,b_3\,c_{61}\,c_{62}\,c_{64}\,c_{65}$ $a_6\,b_6\,c_{31}\,c_{32}\,c_{34}\,c_{35}$
$a_4\,b_4\,c_{51}\,c_{52}\,c_{53}\,c_{56}$ $a_5\,b_5\,c_{41}\,c_{42}\,c_{43}\,c_{46}$	$a_4\,b_4\,c_{61}\,c_{62}\,c_{63}\,c_{65}$ $a_6\,b_6\,c_{41}\,c_{42}\,c_{43}\,c_{45}$	$a_5\,b_5\,c_{61}\,c_{62}\,c_{63}\,c_{64}$ $a_6\,b_6\,c_{51}\,c_{52}\,c_{53}\,c_{54}$	$a_1\,a_2\,a_3\,c_{56}\,c_{64}\,c_{45}$ $c_{23}\,c_{31}\,c_{12}\,b_4\,b_5\,b_6$	$a_1\,a_2\,a_4\,c_{56}\,c_{63}\,c_{35}$ $c_{24}\,c_{41}\,c_{12}\,b_3\,b_5\,b_6$	$a_1\,a_2\,a_5\,c_{46}\,c_{63}\,c_{34}$ $c_{25}\,c_{51}\,c_{12}\,b_3\,b_4\,b_6$
$a_1\,a_2\,a_6\,c_{45}\,c_{53}\,c_{34}$ $c_{26}\,c_{61}\,c_{12}\,b_3\,b_4\,b_5$	$a_1\,a_3\,a_4\,c_{56}\,c_{62}\,c_{25}$ $c_{34}\,c_{41}\,c_{31}\,b_2\,b_5\,b_6$	$a_1\,a_3\,a_5\,c_{46}\,c_{62}\,c_{24}$ $c_{35}\,c_{51}\,c_{13}\,b_2\,b_4\,b_6$	$a_1\,a_3\,a_6\,c_{45}\,c_{52}\,c_{21}$ $c_{36}\,c_{61}\,c_{31}\,b_2\,b_4\,b_5$	$a_1\,a_4\,a_5\,c_{36}\,c_{62}\,c_{23}$ $c_{45}\,c_{51}\,c_{14}\,b_2\,b_3\,b_6$	$a_1\,a_4\,a_6\,c_{35}\,c_{52}\,c_{23}$ $c_{46}\,c_{61}\,c_{14}\,b_2\,b_3\,b_5$
$a_1\,a_5\,a_6\,c_{34}\,c_{42}\,c_{23}$ $c_{56}\,c_{61}\,c_{15}\,b_2\,b_3\,b_4$	$a_2\,a_3\,a_4\,c_{56}\,c_{61}\,c_{15}$ $c_{34}\,c_{42}\,c_{23}\,b_1\,b_5\,b_6$	$a_2\,a_3\,a_5\,c_{46}\,c_{61}\,c_{14}$ $c_{53}\,c_{52}\,c_{23}\,b_1\,b_4\,b_6$	$a_2\,a_3\,a_6\,c_{45}\,c_{51}\,c_{14}$ $c_{36}\,c_{62}\,c_{23}\,b_1\,b_4\,b_5$	$a_2\,a_4\,a_5\,c_{36}\,c_{61}\,c_{13}$ $c_{45}\,c_{52}\,c_{24}\,b_1\,b_3\,b_6$	$a_2\,a_4\,a_6\,c_{35}\,c_{51}\,c_{13}$ $c_{46}\,c_{62}\,c_{24}\,b_1\,b_3\,b_5$
$a_2\,a_5\,a_6\,c_{34}\,c_{41}\,c_{13}$ $c_{56}\,c_{62}\,c_{25}\,b_1\,b_3\,b_4$	$a_3\,a_4\,a_5\,c_{16}\,c_{62}\,c_{21}$ $c_{45}\,c_{53}\,c_{34}\,b_2\,b_1\,b_6$	$a_3\,a_4\,a_6\,c_{25}\,c_{51}\,c_{12}$ $c_{46}\,c_{63}\,c_{34}\,b_1\,b_2\,b_5$	$a_3\,a_5\,a_6\,c_{24}\,c_{41}\,c_{12}$ $c_{56}\,c_{63}\,c_{35}\,b_1\,b_2\,b_4$	$a_4\,a_5\,a_6\,c_{23}\,c_{31}\,c_{12}$ $c_{56}\,c_{64}\,c_{45}\,b_1\,b_2\,b_3$	$a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6$ $b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,b_6$

230. Wir haben gesehen, dass der Ort des drei entsprechenden Ebenen dreier projectivischer Netze von Ebenen gemeinschaftlichen Punctes eine Fläche dritter Ordnung ist, deren Puncte einzeln den Puncten einer festen Ebene entsprechen. Umgekehrt kann man beweisen, dass *eine beliebige* (allgemeine) *Fläche F_3 dritter Ordnung durch drei projectivische Ebenennetze erzeugt werden kann* (und zwar auf unendlich viel verschiedene Arten)[1].

Seien a_1, a_2, a_3 drei Gerade der gegebenen Fläche F_3, die sich nicht schneiden (221). Eine beliebig durch a_1 gezogene Ebene A_1, und eine zweite Ebene A_2 durch a_2 gezogen, treffen F_3 in zwei Kegelschnitten, die einen Punct gemein haben, (denn die Puncte, in welchen die Gerade A_1A_2 die beiden Kegelschnitte schneidet, müssen die drei Durchschnittspuncte dieser Geraden mit F_3 darstellen); durch diesen Punct und durch a_3 legen wir eine Ebene A_3. Man erhält so drei Ebenenbüschel, welche unter sich diejenige Beziehung haben, welche August[2] *duploprojectivisch* nennt; das heisst: Nimmt man in zwei Büscheln beliebig je eine Ebene an, so ist die entsprechende Ebene des dritten Büschels auf eine einzige Art bestimmt. Die Fläche F_3 ist der Ort des drei entsprechenden Ebenen gemeinsamen Punctes.

Eine Tritangentialebene, die durch a_1 gelegt ist, trifft a_2 und a_3 in zwei Puncten, welche den beiden Geraden der Fläche F_3 angehören, welche die Ebene ausser a_1 enthält. Es gibt nun zwei mögliche Fälle: Entweder die dreifache Tangentialebene enthält eine Gerade, welche a_2 und a_3 schneidet, und eine andere, welche weder a_2 noch a_3 trifft; oder aber sie enthält zwei Gerade, deren eine a_2 schneidet und die andere a_3. Es gibt (221) drei Gerade, welche a_1, a_2 und a_3 schneiden, also ist die Zahl der Ebenen zweiter Art gleich *zwei*. Es seien b_3, c_{13}; c_{12}, b_2 die in diesen Ebenen enthaltenen Geraden, und zwar seien b_3, c_{12} durch a_2 geschnitten und die andern durch a_3. Die Geraden b_2, a_3 treffen b_3, a_2 nicht, und es liegt also die Gerade c_{23}, welche den Ebenen b_2a_3, b_3a_2 gemein ist, auf der Fläche. Ebenso treffen sich die Ebenen $c_{12}a_2, c_{13}a_3$ in einer Geraden b_1 der Fläche. Man bezeichne die sechs Ebenen

$$a_1b_2c_{12},\ a_1b_3c_{13};\quad a_2b_3c_{23},\ a_2b_1c_{12};\quad a_3b_1c_{13},\ a_3b_2c_{23}$$

bezüglich durch die Buchstaben

$$\mathfrak{A}_1,\quad \mathfrak{A}'_1;\qquad \mathfrak{A}_2,\quad \mathfrak{A}'_2;\qquad \mathfrak{A}_3,\quad \mathfrak{A}'_3.$$

Den Ebenen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}'_2$ entspricht (bei duploprojectivischer Beziehung) eine unbestimmte Ebene durch a_3, denn diese beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden der Fläche. Ebenso entspricht den Ebenen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}'_3$ eine beliebige Ebene durch a_2; u. s. w.

---

[1]) Man abstrahiert hierbei von der Realität der in Betracht kommenden Elemente.

[2]) *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis* (Dissert. inaug.; Berolini 1862).

Es sei E eine feste Ebene und $\mathfrak{mn}$, $\mathfrak{nl}$, $\mathfrak{lm}$ drei in dieser Ebene gezogene Gerade. Man nehme an, die Gerade $\mathfrak{mn}$ sei dem Büschel (a_1), d. h. dem Büschel, dessen Axe a_1 ist, projectivisch (homographisch) getheilt, in der Art, dass den Puncten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{l}_0$ die drei Ebenen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}'_1$, A^0_1 entsprechen; ebenso sei die Gerade $\mathfrak{nl}$ dem Büschel (a_2) so projectivisch getheilt, dass den Puncten $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}_0$ die Ebenen $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}'_2$, A^0_2 entsprechen; und die Gerade $\mathfrak{lm}$ so projectivisch dem Büschel (a_3), dass die Puncte $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}_0$ den Ebenen $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}'_3$, A^0_3 entsprechen, und man nehme ausserdem noch an, dass die Ebenen A^0_1, A^0_2, A^0_3 in der duploprojectivischen Beziehung sich entsprechen (das heisst, dass sie sich in einem Puncte $\mathfrak{x}'_0$ von F_3 schneiden), und dass die Geraden $\mathfrak{ll}_0$, $\mathfrak{mm}_0$, $\mathfrak{nn}_0$ in demselben Puncte $\mathfrak{x}_0$ von E zusammenlaufen.

Nun gibt ein beliebiger Punct $\mathfrak{x}$ der Ebene E mit den Puncten $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ verbunden drei neuen Geraden Entstehung, welche $\mathfrak{mn}$, $\mathfrak{nl}$, $\mathfrak{lm}$ in drei neuen Puncten $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ treffen; diesen Puncten entsprechen dann in den Büscheln (a_1), (a_2), (a_3) drei Ebenen A_1, A_2, A_3, deren gemeinsamer Durchschnittspunct $\mathfrak{x}'$ sei. Was ist dann der Ort des Punctes $\mathfrak{x}'$?

Wenn $\mathfrak{i}$ ein beliebiger Punct einer willkürlich im Raume angenommenen Geraden ist, so kann man durch diesen Punct eine Ebene des Büschels (a_1) und eine des Büschels (a_2) legen. Die entsprechende Ebene des dritten Büschels schneidet dann die willkürliche Gerade in einem Puncte $\mathfrak{i}'$. Nimmt man aber umgekehrt auf dieser Geraden beliebig den Punct $\mathfrak{i}'$ an, und lässt dadurch eine Ebene des dritten Büschels gehen, so bestimmen die Ebenenpaare der beiden andern Büschel, welche man als entsprechend betrachten kann, auf den Geraden zwei homographischer Punctreihen. Jeder der beiden sich selbst entsprechenden Puncte dieser Reihen ist ein Punct $\mathfrak{i}$, durch den je zwei Ebenen der Büschel (a_1) und (a_2) gehen, entsprechend der durch $\mathfrak{i}'$ gelegten Ebene des dritten Büschels. Auf der willkürlichen Geraden gibt es danach dreimal den Fall, dass ein Punct $\mathfrak{i}$ mit einem Puncte $\mathfrak{i}'$ zusammentrifft, das heisst drei Puncte des Ortes; mit andern Worten, der Ort des Punctes $\mathfrak{x}'$ ist eine Fläche dritter Ordnung.

Diese Fläche geht durch die drei Geraden a_1, a_2, a_3, die Axen der drei duploprojectivischen Büschel, denn jeder Punct dieser Geraden liegt offenbar in drei entsprechenden Ebenen. Aber das ist noch nicht genug. Wenn die Puncte $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ bezüglich die Lagen $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ annehmen, so wird der Punct $\mathfrak{n}$ unbestimmt. Nun entsprechen den Puncten $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{mn}$ und $\mathfrak{l}$ von $\mathfrak{nl}$ die Ebenen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}'_2$ der Büschel (a_1), (a_2), also ist die Ebene des dritten Büschels, welche diesen Ebenen entspricht, unbestimmt. Daraus schliesst man, dass die Gerade c_{12}, die den Ebenen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}'_2$ gemein ist, vollständig auf dem Orte von $\mathfrak{x}'$ liegt. Das nämliche Raisonnement besteht für die andern Geraden in denen die Ebenen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ die Ebenen $\mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{A}'_3$ treffen. Der Ort von $\mathfrak{x}'$ und die gegebene Fläche haben also neun Gerade und einen Punct $\mathfrak{x}'_0$ gemein, das heisst, der Ort von $\mathfrak{x}'$ fällt mit der Fläche F_3 zusammen.

Einem beliebigen Puncte $\mathfrak{x}$ der Ebene E entspricht auf diese Weise ein Punct von F_3. Umgekehrt bestimmt ein beliebiger Punct $\mathfrak{x}'$ dieser Fläche drei Ebenen

$$\mathfrak{x}'a_1 \equiv A_1, \mathfrak{x}'a_2 \equiv A_2, \mathfrak{x}'a_3 \equiv A_3,$$

denen drei Puncte auf $\mathfrak{mn}, \mathfrak{nl}, \mathfrak{lm}$ entsprechen. Diese Puncte bezüglich mit $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ verbunden geben drei im Puncte $\mathfrak{x}$ zusammenlaufende Gerade.

Man betrachte die drei Tripel correspondierender Ebenen

$$\begin{array}{ll} (a_1) & A_1, A'_1, A''_1; \\ (a_2) & A_2, A'_2, A''_2; \\ (a_3) & A_3, A'_3, A''_3, \end{array}$$

von denen jedes durch die beiden andern, die willkürlich bleiben, bestimmt ist. Sind aber diese Tripel einmal gewählt und festgelegt, so kann man sie als drei projectivische Netze bestimmend ansehen, worin der eigenthümliche Umstand statt hat, dass die Ebenen eines Netzes eine Gerade gemein haben, anstatt einen einfachen Punct. Mit andern Worten ist A'''_1 eine neue willkürliche Ebene durch a_1 und man bestimmt die Ebenen A'''_2, A'''_3 in der Art, dass die Gruppen

$$A_1A'_1A''_1A'''_1, \; A_2A'_2A''_2A'''_2, \; A_3A'_3A''_3A'''_3$$

projectivisch sind, so behaupte ich, dass A'''_3 genau die Ebene des dritten Büschels ist, welche den Ebenen A'''_1, A'''_2 in der duploprojectivischen Beziehung entspricht. In der That, die Geraden jedes der Tripel von Geraden

$$(\mathfrak{ll}, \mathfrak{mm}, \mathfrak{nn}), \; (\mathfrak{ll}', \mathfrak{mm}', \mathfrak{nn}'), \; (\mathfrak{ll}'', \mathfrak{mm}'', \mathfrak{nn}'')$$

laufen in einem Puncte auf der Ebene E zusammen, und die drei Gruppen von je vier Geraden

$$\mathfrak{l}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}'', \mathfrak{l}'''), \; \mathfrak{m}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}', \mathfrak{m}'', \mathfrak{m}'''), \; \mathfrak{n}(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}', \mathfrak{n}'', \mathfrak{n}''')$$

haben dasselbe Doppelverhältniss, weil sie drei Gruppen von Ebenen A projectivisch sind, also schneiden sich die drei Geraden $\mathfrak{ll}''', \mathfrak{mm}''', \mathfrak{nn}'''$ in demselben Puncte, und folglich gehen die Ebenen A'''_1, A'''_2, A'''_3 durch denselben Punct der Fläche F_3, das heisst, es sind drei entsprechende Ebenen in den duploprojectivischen Büscheln.

Nachdem wir so die drei duploprojectivischen Büschel in drei projectivische Büschel umgesetzt haben, als Specialfall dreier projectivischer Netze, können wir auf sie die früher auseinandergesetzte Methode (154) in Anwendung bringen; das heisst, wir können, ohne die erzeugte Fläche zu verändern, den projectivischen Reihen

$$\begin{array}{l} A_1, A'_1, A''_1, \ldots . \\ A_2, A'_2, A''_2, \ldots . \\ A_3, A'_3, A''_3, \ldots . \end{array}$$

die projectivischen Netze unterschieben:

$$
\begin{array}{l}
A_1, \ A_2, \ A_3, \ \ldots, \ P, \ \ldots \\
A'_1, \ A'_2, \ A'_3, \ \ldots, \ P', \ldots \\
A''_1, \ A''_2, \ A''_3, \ \ldots, \ P'', \ldots
\end{array}
$$

worin drei entsprechende Ebenen im Allgemeinen nicht mehr als einen einzigen Punct gemein haben (dessen Ort die vorgelegte Fläche ist). Aber es gibt sechs Tripel von entsprechenden Ebenen (wie A_1, A'_2, A''_3), welche durch eine Gerade gehen [1]).

Auch hier können wir wieder die Puncte der Fläche einzeln den Puncten einer beliebig gegebenen Ebene $\mathcal{E}$ entsprechen lassen. Dazu genügt nämlich die Herstellung einer projectivischen (reciproken) Beziehung zwischen den Puncten der Ebene $\mathcal{E}$ und den Ebenen eines der drei Netze, in der Art, dass einem Puncte von $\mathcal{E}$ eine Ebene des Netzes und den Puncten einer Geraden auf $\mathcal{E}$ die Ebenen eines Büschels in dem Netze entsprechen, und umgekehrt. Jedem beliebigen Puncte von $\mathcal{E}$ entspricht nun eine Ebene in jedem Netze und folglich ein Punct von F_3, und umgekehrt.

CAPITEL IV.

ABBILDUNG EINER FLÄCHE DRITTER ORDNUNG AUF EINER EBENE.

231. Wir haben eben (230) bewiesen, dass jede allgemeine Fläche dritter Ordnung F_3 auf einer gegebenen Ebene E in der Art abgebildet werden kann, dass die Puncte $\mathfrak{x}$ von E und die Puncte $\mathfrak{x}'$ von F_3 sich eindeutig entsprechen. Daraus folgt aber, *dass man auf der Ebene die Geometrie der Linien studieren kann, die auf einer Fläche dritter Ordnung gezogen sind.*

Bei dieser Abbildung entsprechen den 27 Geraden von F_3 auf E: 1. sechs Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6$, die wir *Fundamentalpuncte* genannt haben; 2. die sechs Kegelschnitte, welche man durch je fünf der Fundamentalpuncte legen kann; 3. die fünfzehn Geraden, welche die Fundamentalpuncte zu zwei und zwei verbinden. Die Geraden a, welche den sechs Puncten, und die Geraden b, welche den sechs Kegelschnitten entsprechen, bilden die beiden Sechstupel eines Doppelsechs (227).

---

1) Man beweist dies durch die oben (224) angewendeten Betrachtungen oder auch mittelst der Methode, welche Schroeter in seiner Abhandlung über die 27 Geraden benutzt hat (*Nachweiss der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung.* Crelles Journal, Bd. 63; 1863).

Wir wollen nun versuchen, wenigstens in den interessantesten Fällen, folgende beiden Fragen aufzulösen: 1. die Natur der Plancurve zu finden, welche einer gegebenen Curve auf F_3 entspricht; 2. zu bestimmen, welche Curve auf F_3 einer gegebenen Plancurve entspricht.

232. Einer beliebigen Ebene $\mathcal{E}'$ entspricht eine Fläche $\mathfrak{F}'_3$ dritter Ordnung (224), welche durch die Curve k' geht; also entspricht dem Durchschnitte von F_3 mit $\mathcal{E}'$ der Durchschnitt von E mit $\mathfrak{F}'_3$, das heisst: *einer auf F_3 gezogenen cubischen Plancurve entspricht auf E eine cubische Curve, welche durch die sechs Fundamentalpuncte geht*; und umgekehrt, einer beliebigen cubischen Curve, welche durch diese sechs Fundamentalpuncte geht, entspricht ein ebener Schnitt von F_3. Zwei cubische Curven durch diese sechs Puncte auf E gezogen, schneiden sich in drei neuen Puncten, welche den Durchschnittspuncten von F_3 mit einer beliebigen Geraden (der Durchschnittsgeraden zweier Ebenen $\mathcal{E}'$) entsprechen.

Berührt $\mathcal{E}'$ die Fläche F_3 im Puncte $\mathfrak{x}'$, so hat die entsprechende cubische Curve auf E einen Doppelpunct im entsprechenden Puncte $\mathfrak{x}$. Gehört $\mathfrak{x}'$ der Geraden a_ρ an, so wird $\mathfrak{x}$ der dieser Geraden entsprechende Fundamentalpunct $\mathfrak{a}_\rho$. In diesem Falle enthält die Ebene $\mathcal{E}'$ die Gerade a und schneidet F_3 noch in einem Kegelschnitt, also: Eine cubische Curve, die durch die Fundamentalpuncte beschrieben ist, und für welche einer dieser Puncte ein Doppelpunct ist, entspricht einem Kegelschnitt, der F_3 und einer Bitangentialebene gemein ist, welche durch eine Gerade a geht. Alle analogen cubischen Curven, welche den Knoten im nämlichen Fundamentalpuncte $\mathfrak{a}_\rho$ haben, bilden ein Büschel. Die Involution der Tangentenpaare im Knotenpuncte entspricht der Involution der Punctenpaare in denen a_ρ von den Kegelschnitten der Bitangentialebenen geschnitten wird, und die Doppelstrahlen der ersten Involution entsprechen den Doppelpuncten der zweiten; das heisst, *die beiden cubischen Curven des Büschels, für welche der Doppelpunct $\mathfrak{a}_\rho$ ein Rückkehrpunct ist, entsprechen den beiden Kegelschnitten von F_3, welche die Gerade a_ρ berühren.*

Ebenso findet man leicht: *Dem Kegelschnitt in einer Bitangentialebene welche durch die Gerade $c_{\rho\sigma}$ geht, entspricht ein Kegelschnitt, der durch vier Fundamentalpuncte beschrieben ist, ausgenommen $\mathfrak{a}_\rho, \mathfrak{a}_\sigma$*; dieser Kegelschnitt und die Gerade $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$ bilden die cubische Curve, welche dem vollständigen Durchschnitt der Bitangentialebene entspricht. *Dem Kegelschnitt, der in einer Bitangentialebene liegt, welche durch die Gerade b_ρ geht, entspricht eine Gerade, welche durch den Punct $\mathfrak{a}_\rho$ hindurchläuft.* Diese Gerade und der Kegelschnitt, welcher durch die übrigen fünf Fundamentalpuncte beschrieben ist, bilden die cubische Curve, welche dem vollständigen Schnitte der Bitangentialebene entspricht.

233. *Der Raumcurve $\mathfrak{c}_{3\nu}$, in der F_3 von einer Fläche ν-ter Ordnung geschnitten wird, entspricht eine Plancurve die ν-mal durch jeden Fundamentalpunct geht,* wegen der ν Puncte, in denen die Fläche ν-ter Ordnung durch jede der

Geraden a geschnitten wird. Diese Plancurve wird von einer beliebig durch die Fundamentalpuncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6$ beschriebenen cubischen Curve in diesen Puncten, welche als 6ν Durchschnitte gelten, und in 3ν andern Puncten geschnitten, die denjenigen entsprechen, in welchen $\mathfrak{c}_{3\nu}$ von einer Ebene getroffen wird. Die Plancurve, welche $\mathfrak{c}_{3\nu}$ entspricht, ist also von der Ordnung 3ν und dem Geschlecht $\frac{1}{2}(3\nu^2-3\nu+2)-(\delta+\sigma)$, vorausgesetzt, dass die beiden Flächen in δ Puncten eine einfache und in σ Puncten eine stationäre Berührung haben (58, 117).

234. Sei $\nu=2$. In diesem Falle schneidet eine Quadrifläche die Fläche F_3 *in einer Raumcurve* $\mathfrak{c}_{6,4}$ *sechster Ordnung und vom Geschlechte* 4, welche jede der 27 Geraden zweimal trifft. Ihr entspricht auf E eine Plancurve von derselben Ordnung, welche zweimal durch jeden der Puncte $\mathfrak{a}_1, .., \mathfrak{a}_6$ geht. Diese Curve kann noch ausserdem vier Doppelpuncte haben, also *kann eine Quadrifläche die Fläche F_3 höchstens in vier Puncten berühren, ohne dass die Durchschnittscurve sich in niedere Curven auflöst.*

235. Geht die Quadrifläche durch Gerade von F_3, z. B. durch b_1, so zerfällt die Curve $\mathfrak{c}_{6,4}$ in zwei Theile, *deren zweiter eine Curve $\mathfrak{c}_{5,2}$ der fünften Ordnung und vom Geschlechte* 2 *ist.* Während b_1 dem Kegelschnitt $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ entspricht, entspricht der Curve $\mathfrak{c}_{5,2}$ eine Plancurve $\mathfrak{a}_1{}^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ (das heisst, die zweimal durch $\mathfrak{a}_1$ geht und einmal durch $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, .., \mathfrak{a}_6$) der vierten Ordnung. Diese Plancurve trifft (ausser in den Fundamentalpuncten) den Kegelschnitt $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ in drei Puncten, die andern Kegelschnitte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6, \ldots$ in zwei Puncten, die Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_6$ in einem Puncte und die andern Geraden $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ in zwei Puncten, und also trifft die Raumcurve $\mathfrak{c}_{5,2}$ dreimal die Gerade b_1, zweimal die Geraden $a_1, b_2, b_3, \ldots, b_6, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{56}$ und nur einmal die Geraden $a_2, \ldots, a_6, c_{12}, \ldots, c_{16}$.

Wenn die Quadrifläche, statt durch b_1 zu gehen, durch eine Gerade c_{12} oder eine Gerade a_1 geht, so erhält man eine Plancurve fünfter Ordnung $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3{}^2\mathfrak{a}_4{}^2\mathfrak{a}_5{}^2\mathfrak{a}_6{}^2$ oder eine Plancurve sechster Ordnung $\mathfrak{a}_1{}^3\mathfrak{a}_2{}^2\mathfrak{a}_3{}^2\mathfrak{a}_4{}^2\mathfrak{a}_5{}^2\mathfrak{a}_6{}^2$, die immer einer Raumcurve entsprechen, welche $\mathfrak{c}_{5,2}$ analog ist.

Jede Gerade auf F_3 bestimmt auf dieser Fläche ein System zu $\mathfrak{c}_{5,2}$ analoger Curven. Alle Curven eines Systems treffen dieselbe Gerade dreimal. *Jede Curve* eines gegebenen Systems *ist durch sechs Puncte bestimmt*, denn die Plancurve $\mathfrak{a}_1{}^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ kann durch sechs beliebige Puncte gehen. *Zwei Curven desselben Systems schneiden sich in sieben Puncten*; zwei Curven aus verschiedenen Systemen entsprechend zwei Geraden, $\left\{\begin{matrix}\text{die sich nicht treffen}\\ \text{die sich treffen}\end{matrix}\right\}$, haben $\left\{\begin{matrix}\text{acht}\\ \text{neun}\end{matrix}\right\}$ Puncte gemein.

236. Geht die Quadrifläche durch zwei Gerade, die nicht in derselben Ebene liegen, wie b_1, b_2, so schneidet sie F_3 nochmals *in einer Raumcurve* $\mathfrak{c}_{4,0}$ *vierter Ordnung und vom Geschlechte* 0, die nicht der Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung ist. Die gegebene Quadrifläche hat in der

That zwei Systeme geradliniger Generatrixen; das eine gebildet aus Geraden, welche b_1 und b_2 schneiden, das anderen, aus Geraden, die weder b_1 noch b_2 treffen. Nun trifft jede Generatrix des erstens Systems F_3 in zwei Puncte der Geraden b_1, b_2 und also $\mathfrak{c}_{4,0}$ in einem einzigen Puncte, welcher der dritte Durchschnittspunct mit der Fläche ist. Dagegen trifft jede Generatrix des andern Systems F_3 (ausserhalb b_1, b_2) und folglich auch $\mathfrak{c}_{4,0}$ in drei Puncten. Es gibt daher keine andere Quadrifläche, die durch $\mathfrak{c}_{4,0}$ geht, weil die Durchschnittscurve zweier Flächen zweiter Ordnung jede geradlinige Generatrix jeder der Quadriflächen, welche durch diese Curven gehen, in zwei Puncten schneiden muss. [1])

Der Curve $\mathfrak{c}_{4,0}$ entspricht auf E ein Kegelschnitt, der durch die Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ geht, und mit den den Geraden b_1, b_2 entsprechenden Kegelschnitten eine Curve $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$ der sechsten Ordnung bildet. Aus den Durchschnittspuncten des Kegelschnitts $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ mit den entsprechenden Curven der Geraden von F_3 beweist man, dass die Curve $\mathfrak{c}_{4,0}$ die Geraden b_1, b_2 in drei Puncten, die zehn Geraden $b_3, b_4, b_5, b_6, c_{34}, c_{35}, \ldots, c_{56}$ in zwei Puncten, und die zehn Geraden $a_1, a_2, c_{13}, c_{14}, \ldots, c_{26}$ in einem einzigen Puncte schneidet. Die fünf noch übrigen $a_3, a_4, a_5, a_6, c_{12}$ werden von $\mathfrak{c}_{4,0}$ gar nicht getroffen. Daraus, dass durch die Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ und drei beliebige andere Puncte der Geraden E nur ein einziger Kegelschnitt geht, folgt, *dass durch drei gegebene Puncte von F_3 sich nur eine einzige Raumcurve vierter Ordnung und vom Geschlechte 0 legen lässt, welche durch zwei gegebene Gerade der cubischen Fläche, die nicht in derselben Ebene liegen, dreimal getroffen werden soll.* [2])

Lässt man die Quadrifläche durch b_1 und c_{23} oder durch c_{12} und c_{13} oder durch a_1 und b_1 oder durch a_1 und c_{23} oder endlich durch a_1 und a_2 gehen, so erhält man auf der Ebene E bezüglich eine Curve $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ dritter Ordnung, oder eine Curve $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$ der vierten Ordnung, oder eine Curve $\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ der vierten Ordnung, oder eine Curve $\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$ fünfter Ordnung, oder endlich eine Curve $\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_2^3\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$ der sechsten Ordnung, denen auf F_3 stets eine zu $\mathfrak{c}_{4,0}$ analoge Curve entspricht.

237. Wenn die Quadrifläche die Fläche F_3 in einem Kegelschnitte schneidet, der z. B. in einer Ebene liegt, die durch a_1 geht, so haben die beiden Flächen ausserdem noch *eine Raumcurve $\mathfrak{c}_{4,1}$ vierter Ordnung und vom Geschlechte* 1 gemein, die von jeder Geraden zweimal geschnitten wird, welche auf der Quadri-

---

1) Die von Steiner in Betreff dieser Raumcurve gegebenen Sätze sind schon mit mehreren anderen geometrisch bewiesen in einer Abhandlung des Verfassers in den Annali di Matematica, T. 4; p. 71.

2) Zwei Kegelschnitte, welche durch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ gehen, schneiden sich in zwei weitern Puncten, folglich schneiden sich auch zwei Curven vierter Ordnung und vom Geschlechte 0, die auf F_3 gezogen sind und dieselben zwei Geraden (b_1, b_2) dreimal treffen, in zwei Puncten.

fläche liegt; denn diese Gerade hat mit dem Kegelschnitt einen Punct gemein, und trifft also die cubische Fläche noch in zwei weiteren Puncten. Jede durch die Gerade a_1 gelegte Ebene schneidet F_3 in einem Kegelschnitte, der mit $\mathfrak{c}_{4,1}$ vier Puncte gemein hat; durch diesen Kegelschnitt und durch $\mathfrak{c}_{4,1}$ kann man also eine Fläche zweiter Ordnung legen. Die Curve $\mathfrak{c}_{4,1}$ ist daher die Basis eines Büschels Quadriflächen.

Der Curve $\mathfrak{c}_{4,1}$ entspricht auf E eine Curve $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ dritter Ordnung, (da der Kegelschnitt als entsprechende Curve eine cubische Curve $\mathfrak{a}_1{}^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ hat); folglich trifft die Raumcurve $\mathfrak{c}_{4,1}$ die Gerade a_1 nicht; sie trifft die zehn Geraden $b_2, \ldots, b_6, c_{12}, \ldots, c_{16}$ in je zwei Puncten und die sechszehn noch übrigen in je einem Puncte.

Die zehn Geraden, welche die Raumcurve zweimal schneidet, werden auch durch die einzige Gerade, welche der Curve nicht begegnet, getroffen. *Also enthält F_3 27 Systeme von Curven $\mathfrak{c}_{4,1}$*; die Curven ein und desselben Systems werden nicht von derselben Geraden getroffen. *Vier Puncte bestimmen eine Curve eines gegebenen Systems. Zwei Curven desselben Systems haben vier Puncte gemein, zwei Curven aus verschiedenen Systemen dagegen schneiden sich in fünf Puncten.*

Vertauscht man die Gerade a_1 mit einer andern, so kann man andere Plancurven von höherer Ordnung erhalten (aber sie sind immer vom Geschlecht 1), die zu $\mathfrak{c}_{4,1}$ analogen Raumcurven entsprechen.

238. Die Durchschnittscurve von F_3 mit einer Quadrifläche kann auch in zwei cubische Raumcurven $\mathfrak{c}_{3,0}$ zerfallen; entspricht davon die eine einer beliebigen Geraden (224) in E, so entspricht die zweite einer Curve $\mathfrak{a}_1{}^2\mathfrak{a}_2{}^2\mathfrak{a}_3{}^2\mathfrak{a}_4{}^2\mathfrak{a}_5{}^2$ fünfter Ordnung. Die Untersuchung dieser Plancurven lässt augenblicklich erkennen, *dass eine cubische Raumcurve, (die auf F_3 liegt) sechs Gerade zweimal trifft, sechs andere Gerade nicht trifft und die übrigen in einem Puncte schneidet.* Die beiden Gruppen von je sechs Puncten sind die conjugierten *Sechstupel* desselben Doppelsechs, in der Art, *dass jedes Doppelsechs zwei conjugierte Systeme cubischer Raumcurven bestimmt,* in denen jede Curve zweimal die Geraden des einen Sechstupel trifft und die Geraden des andern Sechstupel nicht schneidet. *Zwei cubische Raumcurven, welche durch dieselbe Quadrifläche entstehen, gehören stets zwei conjugierten Systemen an, und umgekehrt,* und treffen sich in fünf Puncten. Zwei cubische Raumcurven desselben Systemes haben einen einzigen Punct gemein.

239. Wir wollen jetzt die Curven betrachten, welche aus dem Durchschnitt von F_3 mit einer andern Fläche F_3^0 derselben Ordnung entsteht. Im Allgemeinen ist dieser Schnitt *eine Raumcurve neunter Ordnung,* welche jede der 27 Geraden dreimal trifft. Die entsprechende Plancurve ist von derselben Ordnung und geht dreimal durch jeden Fundamentalpunct. Daraus folgt, dass diese Curve ebenso wie *die Raumcurve vom Geschlecht*

$$\frac{8.7}{2} - 3.6 = 10$$

ist. Die Plancurve kann höchstens noch andere zehn Doppelpuncte haben, *also können sich zwei cubische Flächen höchstens in zehn Puncten berühren, ohne dass ihre Durchschnittscurve sich in niedere Curven spaltet.*

Drei cubische Raumcurven bilden den Durchschnitt von F_3 mit einer cubischen Fläche, wenn ihre entsprechenden Plancurven zusammen eine Linie $\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_2^3\mathfrak{a}_3^3\mathfrak{a}_4^3\mathfrak{a}_5^3\mathfrak{a}_6^3$ neunter Ordnung bilden; dergleichen cubische Raumcurven sind zum Beispiel die, welche einer beliebigen Geraden und zwei Curven $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$ vierter Ordnung entsprechen.

Unter derselben Bedingung können zwei Raumcurven vierter Ordnung und eine Gerade die F_3 und F_3^0 gemeinschaftliche Curve bilden. Sind die beiden Raumcurven vom Geschlechte 0 ohne Doppelpunct [1]), so schneiden sie sich in acht Puncten und treffen jede die Gerade zweimal. Sind beide Raumcurven vom Geschlechte 1 [2]), so gehören sie zwei Systemen an, die zwei in derselben Ebene liegenden Geraden entsprechen; die dritte Gerade dieser Ebene ist diejenige, welche den Durchschnitt beider cubischen Flächen vervollständigt. Die beiden Raumcurven schneiden sich in sechs Puncten, und jede von ihnen trifft die vervollständigende Gerade zweimal. Ist endlich von den beiden Curven die eine vom Geschlechte 0 ohne Doppelpunct, die zweite vom Geschlechte 1 [3]), so schneiden sie sich in sieben Puncten, und die Ergänzungsgerade trifft die erste Curve in drei Puncten und die andere in einem einzigen.

Unter derselben Bedingung kann der Schnitt von F_3 und F_3^0 sich aus einer Raumcurve vierter Ordnung, einer cubischen Raumcurve und einem Kegelschnitt zusammensetzen (oder zwei Geraden, die selbst nicht in einer Ebene zu liegen brauchen). Wir haben aber hier nicht die Absicht, uns bei allen Specialfällen aufzuhalten.

Angenommen F_3 und F_3^0 hätten die Raumcurve $\mathfrak{c}_{5,2}$ gemein (229), welche einer Plancurve $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ vierter Ordnung entspricht, dann schneiden sich die beiden Flächen noch ausserdem in einer Raumcurve vierter Ordnung, deren entsprechende Plancurve eine Curve $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$ fünfter Ordnung ist; also ist die zweite Raumcurve vom Geschlechte 1. *Daher können zwei Raumcurven $\mathfrak{c}_{5,2}$ und $\mathfrak{c}_{4,1}$ den Durchschnitt von F_3 mit einer andern cubischen Fläche bilden, wenn nur die Systeme* (235, 237), *denen sie angehören, derselben Geraden entsprechen;* das heisst unter der Bedingung, dass die erste

---

1) Z. B. diejenigen, welche der cubischen Curve $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6^2$ und der Curve $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$ vierter Ordnung entsprechen; die Gerade ist b_1.

2) Z. B. die, welche einer cubischen Curve $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$ und einer Curve $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6^2$ vierter Ordnung entsprechen; die Ergänzungsgerade ist b_1.

3) Z. B. diejenigen, welche zwei Curven $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4^2\mathfrak{a}_5^2\mathfrak{a}_6^2$, $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ vierter Ordnung entsprechen; die Ergänzungsgerade ist hier c_{12}.

Raumcurve diejenige Gerade in drei Puncten schneidet, welche die zweite Curve nicht trifft. Die beiden Raumcurven haben acht Puncte gemein. Aber es ist nicht möglich, dass zwei Curven $\mathfrak{c}_{5,2}$ und $\mathfrak{c}_{4,0}$ (ohne Doppelpunct) gleichzeitig auf zwei Flächen dritter Ordnung liegen.

Als Specialfall des Vorhergehenden kann der Schnitt der Flächen F_3, F_3° zusammengesetzt sein aus einer Curve $\mathfrak{c}_{5,2}$, einer cubischen Raumcurve und einer Geraden, die von jeder Curve zweimal getroffen wird. Diese letztern haben sechs Puncte gemein.

240. Man kann aber auch noch andere Raumcurven fünfter Ordnung betrachten, die von $\mathfrak{c}_{5,2}$ verschieden sind. In der That, geht F_3° durch eine Gerade und durch eine cubische Raumcurve, die auf F_3 liegen, so wird der Schnitt durch eine Raumcurve fünfter Ordnung vervollständigt, welche (239) vom Geschlecht 2 ist, wenn die Gerade und die cubische Raumcurve zwei Puncte gemein haben. Schneidet aber die Gerade die cubische Raumcurve nur einmal oder gar nicht, so erhält man Raumcurven von niederem Geschlecht.

Der erste Fall tritt z. B. ein, wenn die Plancurve sechster Ordnung, die dem vollständigen Schnitte von F_3 und F_3° entspricht, aus dem Kegelschnitt $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ (der der Geraden b_1 entspricht), einer Curve vierter Ordnung $\mathfrak{a}_1{}^2\mathfrak{a}_2{}^2\mathfrak{a}_3{}^2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ (die einer cubischen Raumcurve entspricht, die auf b_1 in einem Puncte aufsteht) und einer cubischen Curve $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ zusammengesetzt ist. Der letzteren entspricht also *eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{5,1}$ *fünfter Ordnung und vom Geschlechte* 1, welche die cubische Raumcurve in neun Puncten und die Gerade in drei Puncten trifft. Man erhält dieselbe Curve $\mathfrak{c}_{5,1}$, wenn die beiden cubischen Flächen eine Curve $\mathfrak{c}_{4,0}$ gemein haben, die beiden Raumcurven haben dann zehn Puncte gemein, und die erste Raumurve trifft diejenigen Geraden in 0, 1, 2, 3 Puncten, welche die andere bezüglich in 3, 2, 1, 0 Puncten schneiden.

Man erhält den letzten Fall, wenn z. B. die Plancurve sechster Ordnung in folgende drei Linien zerfällt: den Kegelschnitt $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$, der der Geraden b_1 entspricht; eine Curve $\mathfrak{a}_1{}^2\mathfrak{a}_2{}^2\mathfrak{a}_3{}^2\mathfrak{a}_4{}^2\mathfrak{a}_5{}^2\mathfrak{a}_6{}^2$ fünfter Ordnung, Bild einer cubischen Raumcurve, die mit der Geraden b_1 keinen Punct gemein hat; endlich einen Kegelschnitt der durch den Punct $\mathfrak{a}_1$ geht, und dem folglich *eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{5,0}$ *fünfter Ordnung und vom Geschlechte* 0 entspricht. Diese Raumcurve schneidet die cubische Raumcurve in acht Puncten, die Gerade b_1 in vier Puncten, die Geraden $b_2, \ldots, b_6$ in drei Puncten, die Geraden $c_{23}, \ldots, c_{56}$ in zwei Puncten, die Geraden $a_1, c_{12}, \ldots, c_{16}$ in nur einem Puncte und die andern Geraden $a_2, \ldots, a_6$ in keinem Puncte.

Von den drei Raumcurven $\mathfrak{c}_{5,2}$, $\mathfrak{c}_{5,1}$, $\mathfrak{c}_{5,0}$ fünfter Ordnung liegt nur die erste auf einer Quadrifläche. Sie hat vier scheinbare Doppelpuncte (d. h. durch einen beliebigen Punct des Raumes kann man vier Gerade ziehen, welche die Curve zweimal treffen), dagegen hat die zweite deren fünf und die dritte sechs. Die dritte ist die einzige, welche eine Gerade der cubischen Fläche zulässt, die sie in vier Puncten schneidet.

241. Diese Methode, auf der Ebene E die Eigenschaften der auf F_3 gezogenen Curven zu untersuchen, ist so einleuchtend und so leicht, dass wir uns jetzt begnügen werden, nur die Resultate auszusprechen. Um so die Raumcurven sechster Ordnung zu erhalten, welche einen Theil des Durchschnitts zweier cubischer Flächen bilden, muss man folgende Fälle betrachten:

1. Die Flächen F_3, F_3^0 haben einen ebenen Schnitt gemein, dann ist der andere Theil des Schnittes *eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{6,4}$ *sechster Ordnung und vom Geschlechte* 4, die auch beim Durchschnitt der Fläche F_3 mit einer Quadrifläche entsteht (234).

2. Die Flächen F_3, F_3^0 haben eine cubische Raumcurve gemein und schneiden sich ausserdem noch in *einer Raumcurve* $\mathfrak{c}_{6,3}$ *sechster Ordnung und vom Geschlechte* 3, welche mit der cubischen Curve acht Puncte gemein hat, und diejenigen Geraden in 1, 2, 3 Puncten schneidet, welche die cubische Curve bezüglich in 2, 1, 0 Puncten trifft. Daraus folgt, dass $\mathfrak{c}_{6,3}$ sowie die cubische Curve einem gewissen Doppelsechs entsprechen.

3. Die Flächen F_3, F_3^0 gehen zugleich durch eine Gerade und einen Kegelschnitt, die keinen Punct gemein haben. Dann wird der Schnitt durch *eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{6,2}$ *sechster Ordnung und vom Geschlecht* 2 vervollständigt, welche den Kegelschnitt in sechs Puncten und die gegebene Gerade in vier Puncten trifft. Unter den andern Geraden gibt es 8, 9, 8, 1 die bezüglich in 3, 2, 1, 0 Puncten geschnitten werden.

4. Die Flächen F_3, F_3^0 haben drei Gerade die sich nicht schneiden gemein; sie schneiden sich dann noch in *einer Raumcurve* $\mathfrak{c}_{6,1}$ *sechster Ordnung und vom Geschlechte* 1, welche jede von den drei gegebenen Geraden in vier Puncten schneidet, u. s. w.

Von diesen vier Curven sechster Ordnung ist nur die erste auf einer Quadrifläche gelegen. Sie haben bezüglich sechs, sieben, acht, neun scheinbare Doppelpuncte.

Die Curve $\mathfrak{c}_{6,3}$ ist diejenige, welche wir auch anderweitig schon gefunden haben (130, 189, 218) und zwar als Ort der Scheitel der Quadrikegel eines Netzes. Die entsprechende Plancurve kann eine allgemeine Curve vierter Ordnung sein (durch sämmtliche sechs Fundamentalpuncte); es folgt daraus, da z. B. diese Plancurve 28 Doppeltangenten und 24 stationäre Tangenten hat, dass auch unter den cubischen Raumcurven, welche in zwei Puncten diejenigen Geraden von F_3 schneiden, welche $\mathfrak{c}_{6,3}$ dreimal treffen, 28 existieren, welche $\mathfrak{c}_{6,3}$ in zwei Puncten berühren, und 24, welche mit derselben einen dreipunctigen Contact haben.

In derselben Weise wie für die cubischen Raumcurven *bestimmt jedes Doppelsechs zwei conjugierte Systeme von Raumcurven sechster Ordnung und vom Geschlecht* 3. Zwei Curven, die zwei conjugierten Systemen angehören haben 20 Puncte gemein und bilden den vollständigen Durchschnitt zwischen F_3 und einer Fläche vierter Ordnung.

242. Es gibt auch *eine Raumcurve sechster Ordnung vom Geschlecht* 0, aber dieselbe liegt nicht gleichzeitig auf zwei cubischen Flächen. Man erhält diese Curve, wenn man eine Fläche vierter Ordnung durch drei Gerade, wie b_1, b_2, b_3, die sich nicht schneiden, und eine cubische Raumcurve (entsprechend einer Curve $\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ vierter Ordnung) legt, welche jede Gerade in einem Puncte schneidet. Die daraus resultierende Curve $\mathfrak{c}_{6,0}$ entspricht einem Kegelschnitt, der durch keinen der Fundamentalpuncte geht, und schneidet die cubische Raumcurve in acht Puncten. Unter den 27 Geraden von F_3 gibt es 6, 6, 15, die von $\mathfrak{c}_{6,0}$ bezüglich in 4, 0, 2 Puncten geschnitten werden. Diese Curve $\mathfrak{c}_{6,0}$ hat zehn scheinbare Doppelpuncte.

243. Aus dem Durchschnitt zweier cubischer Flächen F_3, F_3^0 können sich nur *zwei Raumcurven siebenter Ordnung* $\mathfrak{c}_{7,5}$ *und* $\mathfrak{c}_{7,4}$ und *eine einzige Raumcurve achter Ordnung* $\mathfrak{c}_{8,7}$ ergeben. Man erhält diese Curven, wenn man F_3^0 bezüglich entweder durch einen Kegelschnitt oder durch zwei sich nicht schneidende Gerade oder durch eine Gerade (von F_3) gelegt denkt.

Auf F_3 gibt es 27 Systeme von zu $\mathfrak{c}_{8,7}$ analogen Curven, jedes System ist einer Geraden von F_3 zugeordnet. Ist das System gegeben, so ist die Curve durch vierzehn Puncte bestimmt. Zwei Curven desselben Systems haben zwanzig Puncte gemein.

Der Durchschnitt von F_3 mit Flächen höherer Ordnung gibt andere Curven 7., 8., 9., ... Ordnung. Lässt man z. B. durch zwei Gerade, die sich nicht schneiden, und durch eine cubische Raumcurve, die keine dieser Geraden trifft, eine Fläche vierter Ordnung gehen, so erhält man *eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{7,1}$ *siebenter Ordnung und vom Geschlechte* 1, welche die cubische Curve in eilf Puncten und jede gegebene Gerade in fünf Puncten schneidet. Legt man durch drei Gerade, die sich nicht schneiden, und durch eine Curve $\mathfrak{c}_{4,0}$, welche zwei jener Geraden in einem Puncte trifft und die dritte gar nicht, eine Fläche fünfter Ordnung, so wird der Schnitt durch *eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{8,1}$ *achter Ordnung und vom Geschlechte* 1 vervollständigt, welche $\mathfrak{c}_{4,0}$ in sechszehn Puncten, die beiden ersten Geraden in fünf Puncten und die dritte in sechs Puncten trifft. Endlich erhält man *eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{9,1}$ *neunter Ordnung und vom Geschlechte* 1, sobald der Durchschnitt von F_3 mit einer Fläche sechster Ordnung sich in zwei Curven derselben Ordnung auflöst; u. s. w., u. s. w.

244. Wir haben gesehen, dass ein und derselben Curve auf F_3, deren Ordnung und Geschlecht bekannt ist, auf E Plancurven verschiedener Ordnung entsprechen, die aber stets von demselben Geschlechte sind (54). Indem wir uns darauf beschränken, für jedes Geschlecht die Plancurve von der kleinst möglichen Ordnungszahl zu betrachten, können wir folgende Uebersicht geben.

1. *Einer Geraden auf E entspricht auf* F_3 *ein Kegelschnitt oder eine cubische Raumcurve, jenachdem die Gerade durch einen Fundamentalpunct geht oder nicht.*

2. *Einem Kegelschnitt auf E entspricht auf F_3 eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{4,0}$ *oder* $\mathfrak{c}_{5,0}$ *oder* $\mathfrak{c}_{6,0}$, *jenachdem der Kegelchnitt durch* 2, 1, 0 *Fundamentalpuncte geht.*

3. *Einer allgemeinen cubischen Curve auf E entspricht auf F_3 eine cubische Plancurve* $\mathfrak{c}_{3,1}$ *oder eine Raumcurve* $\mathfrak{c}_{4,1}$ *oder* $\mathfrak{c}_{5,1}$ *oder* $\mathfrak{c}_{6,1}$ *oder* $\mathfrak{c}_{7,1}$ *oder* $\mathfrak{c}_{8,1}$ *oder* $\mathfrak{c}_{9,1}$, *jenachdem die gegebene cubische Curve durch* 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 *Fundamentalpuncte hindurchgeht.* U. s. w.; u. s. w.

245. Es sei jetzt auf E im Allgemeinen eine Curve ν-ter Ordnung gegeben, welche bezüglich $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ mal durch die Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_6$ geht und mit δ Doppelpuncten und $\varkappa$ Spitzen versehen ist, die anderswo liegen. Die Ordnung der Raumcurve, die ihr auf F_3 entspricht, ist offenbar $3\nu - \mathfrak{S}\alpha$ [1]) und ihr Geschlecht ist genau das nämliche als das der Plancurve, also

$$\tfrac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}\alpha(\alpha-1) - (\delta+\varkappa),$$

Nun ist aber eine Raumcurve der $(3\nu-\mathfrak{S}\alpha)$-ten Ordnung mit δ Doppelpuncten $\varkappa$ Spitzen und ϑ scheinbaren Doppelpuncten von dem durch folgende Formel gegebenen Geschlecht:

$$\tfrac{1}{2}(3\nu-\mathfrak{S}\alpha-1)(3\nu-\mathfrak{S}\alpha-2) - (\vartheta+\delta+\varkappa),$$

also ist

$$\vartheta = 4\nu^2 - 3\nu(\mathfrak{S}\alpha+1) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}\alpha+1)^2 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}\alpha^2-1).$$

Da wir so die Ordnung der Raumcurve, die wir kurz durch ν_1 bezeichnen wollen, die Zahl der wirklichen und scheinbaren Doppelpuncte kennen, so können wir nach den Formeln Cayley's (10, 12) die andern Charakteristiken der Curve berechnen, nämlich:

Die Ordnung der osculierenden Developpablen

$$\rho = \nu_1(\nu_1-1) - 2(\vartheta+\delta) - 3\varkappa = \nu(\nu+3) - \mathfrak{S}\alpha(\alpha+1) - (2\delta+3\varkappa);$$

die Classe dieser Developpablen

$$\mu = 3\nu_1(\nu_1-2) - 6(\vartheta+\delta) - 8\varkappa = 3(\nu^2-\mathfrak{S}\alpha^2) - (6\delta+8\varkappa);$$

die Zahl der stationären Osculationsebenen

$$\sigma = \varkappa + 2(\mu-\nu_1) = 6\nu(\nu-1) - 2\mathfrak{S}\alpha(3\alpha-1) - 3(4\delta+5\varkappa);$$

die Classe der doppeltberührenden Developpablen

$$\begin{aligned}\eta &= \vartheta + \tfrac{1}{2}(\rho-\nu_1)(\rho+\nu_1-9) + \delta \\ &= \tfrac{1}{2}\nu(\nu^2-1)(\nu+6) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}\alpha^2(\mathfrak{S}\alpha+1) \\ &\qquad - \tfrac{1}{2}[2\delta+3\varkappa+\mathfrak{S}\alpha(\alpha+1)][2\nu^2+6\nu-9-2\delta-3\varkappa-\mathfrak{S}\alpha^2] \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}\alpha(2\delta+3\varkappa+\mathfrak{S}\alpha-7) + \delta;\end{aligned}$$

die Zahl der Ebenen, welche die Curve in drei Puncten berühren,

$$\tau = \tfrac{1}{3}[(\rho-2)\eta - \rho(3\mu+\nu_1) + 6\mu + 10(\sigma+\nu_1)];$$

u. s. w., u. s. w.

Umgekehrt drücken diese Zahlen auch die Eigenschaften der gegebenen Plancurve aus, nämlich: In dem Systeme der cubischen Curven, welche durch die sechs Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6$ gehen, gibt es σ, die mit der gegebenen Curve

[1]) $\mathfrak{S}$ ist als Summenzeichen gebraucht worden.

eine vierpunctige Berührung haben, und τ, welche in drei verschiedenen Puncten berühren; in einem Netze dieser cubischen Curven gibt es μ, die mit der Curve einen Contact zweiter Ordnung haben, und η, welche sie in zwei verschiedenen Puncten berühren; in einem Büschel derselben cubischen Curven gibt es ρ, welche die gegebene Curve berühren.

Man beachte ausserdem, dass die gegebene Plancurve a_ρ-mal durch den Fundamentalpunct $\mathfrak{a}_\rho$ geht, den Kegelschnitt, welcher durch die Fundamentalpuncte mit Ausnahme von $\mathfrak{a}_\rho$ geht, in $2\nu-(\mathfrak{S}\alpha-a_\rho)$ von den Fundamentalpuncten verschiedenen Puncten schneidet, und die Gerade $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$ in $\nu-(a_\rho+a_\sigma)$ Puncten (ebenfalls von den Fundamentalpuncten verschieden) trifft, und daher die entsprechende Raumcurve mit der Geraden a_ρ a_ρ Puncte, mit der Geraden b_ρ ebenso $2\nu+a_\rho-\mathfrak{S}\alpha$ Puncte und mit $c_{\rho\sigma}$ endlich $\nu-(a_\rho+a_\sigma)$ Puncte gemein hat.

246. Es sei noch erlaubt, speciell auf den Fall einzugehen, dass alle α gleich Null sind, das heisst, dass die Plancurve durch keinen der Fundamentalpuncte geht. *Dann entspricht die Raumcurve, die von der Ordnung 3ν ist, einem gewissen Doppelsechs; sie schneidet die Geraden des einen Sechstupel je 2ν-mal und die Geraden des andern Sechstupel gar nicht; jede der fünfzehn andern Geraden wird von der Raumcurve in ν Puncten getroffen. Jedes Doppelsechs bestimmt somit zwei conjugierte Systeme analoger Raumcurven*; ist das System gegeben, so gibt es nur eine Curve, welche durch $\frac{\nu(\nu+3)}{1.2}$ beliebig gegebene Puncte geht. Zwei Curven desselben Systems haben ν^2 Durchschnittspuncte.

Die Raumcurve 3ν-ter Ordnung, entsprechend der Plancurve ν-ter Ordnung, welche durch keinen der Fundamentalpuncte geht, und die Raumcurve derselben Ordnung, die der Plancurve 5ν-ter Ordnung entspricht, die 2ν-mal durch jeden Fundamentalpunct geht, bilden zusammen den vollständigen Durchschnitt zwischen F_3 und einer Fläche 2ν-ter Ordnung und gehören zwei in Bezug auf das nämliche Doppelsechs conjugierten Systemen an. Diese beiden Raumcurven haben $5\nu^2$ Puncte gemein. Wenn sie keine Doppelpuncte besitzen (das heisst, wenn die entsprechenden Plancurven keine solche haben ausser den Fundamentalpuncten), oder auch, wenn sie solche in gleicher Zahl haben, so sind sämmtliche Charakteristiken für beide Curven dieselben. Unter Annahme, dass keine Doppelpuncte vorhanden sind, hat man folgende Charakteristiken:

Ordnung 3ν,
Geschlecht $\frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)$,
Zahl der scheinbaren Doppelpuncte $\nu(4\nu-3)$,
Ordnung der osculierenden Developpablen $\nu(\nu+3)$,
Classe derselben $3\nu^2$,
Zahl der stationären Osculationsebenen $6\nu(\nu-1)$,
Classe der doppeltberührenden Developpablen $\frac{1}{2}\nu(\nu^2-1)(\nu+6)$
Zahl der dreifachen Tangentialebenen $\frac{1}{6}\nu(\nu-1)(\nu^4+10\nu^3+7\nu^2-74\nu+48)$

u. s. w.

CAPITEL V.

QUADRIFLÄCHEN, WELCHE AUS EINER FLÄCHE DRITTER ORDNUNG KEGELSCHNITTE AUSSCHNEIDEN.

247. *Zwei Kegelschnitte die auf einer gegebenen Fläche F_3 dritter Ordnung liegen und zugleich in zwei Ebenen, welche durch zwei Gerade der Fläche gehen, die sich schneiden* (wie a_1, b_2), *haben stets zwei Puncte gemein*, weil die gemeinsame Gerade beider Ebenen jeden Kegelschnitt in zwei Puncten trifft, und ausserdem diese Gerade die Fläche F_3, ausser im Puncte $a_1 b_2$, nur in zwei Puncten schneidet; diese beiden Puncte sind also beiden Kegelschnitten gemein. Umgekehrt, haben zwei Kegelschnitte auf der Fläche zwei Puncte gemein, so schneidet die Gerade, welche diese Puncte verbindet, als Durchschnitt der Ebenen beider Kegelschnitte, die Fläche in einem dritten Puncte, welche den beiden Geraden der Fläche gemein ist, die in diesen Ebenen liegen.

Dagegen haben zwei Kegelschnitte auf der Fläche, die in zwei Ebenen liegen, welche durch zwei Gerade, wie a_1, a_2, gehen, die sich nicht schneiden, einen einzigen Punct gemein, wie schon früher (229) bemerkt ist. Zwei Kegelschnitte, die in zwei Ebenen liegen, welche durch dieselbe Gerade a_1 gehen, haben gar keinen Punct gemein, denn sie schneiden a_1 in zwei conjugierten Punctenpaaren einer Involution (220).

Folglich trifft eine Gerade der Fläche, wie a_1 jeden Kegelschnitt in zwei Puncten, der in einer Ebene liegt, die durch a_1 geht, dagegen jeden Kegelschnitt, der in einer Ebene liegt, welche durch eine Gerade geht, die a_1 nicht schneidet, in einem Puncte; aber die Gerade a_1 trifft die Kegelschnitte nicht, deren Ebenen durch Gerade gehen, welche auf a_1 aufstehen.

248. Zwei Kegelschnitte von F_3, die in zwei Ebenen bezüglich durch a_1, b_2 liegen, haben zwei Puncte gemein und bilden so die Basis eines Büschels von Quadriflächen, von denen eine jede F_3 in einem dritten Kegelschnitt trifft, der in einer Ebene liegt, welche durch die Gerade c_{12} geht, die a_1 und b_2 schneidet [1]). Dieser dritte Kegelschnitt kann beliebig angenommen werden. Denn, da die Basis des Büschels vier Puncte jedes Kegelschnittes enthält, der in einer Ebene durch c_{12} liegt, so genügt ein anderer beliebiger Punct dieser letzten Ebene um die Quadrifläche des Büschels zu bestimmen, die durch diesen Kegelschnitt geht. Es gibt also *eine einzige Quadrifläche, die*

---

[1]) Die Ebenen der drei Kegelschnitte bilden eine cubische Fläche, welche F_3 in drei Kegelschnitten und drei Geraden schneidet. Da die drei Kegelschnitte auf derselben Quadrifläche liegen, so sind die drei Geraden in einer Ebene enthalten (40).

durch drei Kegelschnitte geht, welche in drei beliebig durch a_1, b_2, c_{12} *gelegten Ebenen liegen.* Umgekehrt, trifft eine Quadrifläche die Fläche F_3 in drei Kegelschnitten, so schneiden die Ebenen derselben F_3 in drei Geraden, die in derselben Ebene liegen (40). Daraus folgt, dass drei beliebige conjugierte Punctenpaare der Involutionen, welche durch die Kegelschnitte der Fläche bezüglich auf a_1, b_2, c_{12} gebildet werden (220), ein und derselben Curve zweiter Ordnung angehören, die nicht auf F_3 liegt.

249. Es seien A, B zwei Bitangentialebenen von F_3, die eine durch a_1, die zweite durch b_2 gelegt. Durch die beiden Kegelschnitte (A), (B), die in diesen Ebenen enthalten sind, kann man zwei Quadrikegel legen, deren Scheitel auf der reciproken Geraden der Durchschnittsgeraden AB in Bezug auf eine beliebige Fläche zweiter Ordnung liegen, die durch (A) und (B) geht. Wir können beliebig eine Ebene C fixieren, die durch c_{12} geht, dann genügt die Quadrifläche (ABC), welche durch die Kegelschnitte (A), (B), (C) geht, um die Gerade, welche die Scheitel der beiden Kegel verbindet, zu bestimmen.

Lässt man die Ebene B um b_2 rotieren, so erzeugt die Quadrifläche (ABC) ein Büschel (AC), und die Gerade AB erzeugt in der Ebene A und um den Punct a_1b_2 herum ein anderes dem ersten projectivisches Büschel. Die Geraden dieses Büschels werden von der Geraden AC in Puncten geschnitten, deren Polarebenen in Bezug auf die entsprechenden Flächen des Büschels (AC) durch dieselbe Gerade gehen, die Reciproke von AC in Bezug auf die Quadriflächen (AC); in ähnlicher Weise gehen die Polarebenen des Punctes a_1b_2 in Bezug auf die Quadriflächen (AC) durch ein und dieselbe Gerade. Also erzeugen die Polarebenen der Puncte a_1b_2 und ABC in Bezug auf die Fläche (ABC), wenn B als variabel betrachtet wird, zwei projectivische Büschel, und folglich *ist der Ort der reciproken Geraden von* AB *ein Hyperboloid* J_A; *die Generatrixen des andern Systems desselben sind offenbar die zu* AC *in Bezug auf die Quadrifläche* (ABC) *reciproken Geraden, wenn die Ebene* C *um* c_{12} *variabel ist.* Die Geraden AB, AC schneiden sich im Puncte ABC, ihre Reciproken sind daher auf der Polarebene dieses Punctes in Bezug auf die Fläche (ABC). *Das Hyperboloid* J_A *ist also die Enveloppe der Polarebene des Punctes* ABC *in Bezug auf die Quadrifläche* (ABC), *wenn* A *fest ist, und* B *und* C *variabel.*

Ein beliebiger Punct des Raumes ist der Durchschnitt von drei Ebenen A, B, C, welche eine Quadrifläche (ABC) bestimmen; umgekehrt bestimmt jede Fläche (ABC) einen Punct des Raumes. Also: *Das Hyperboloid* J_A *ist die Enveloppe der Polarebenen der Puncte der Ebene* A *in Bezug auf die Quadriflächen* (ABC), *welche diesen Puncten entsprechen.*

Sobald die reciproken Geraden von AB, AC in der Polarebene des Punctes ABC in Bezug auf die Quadrifläche (ABC) liegen, so ist der Durchschnittspunct dieser Reciproken der Pol der Ebene A in Bezug auf diese

Fläche; also *ist das Hyperboloid J_A der Ort der Pole der festen Ebene A in Bezug auf die Quadriflächen* (ABC).

Die Flächen (ABC) gehen durch den festen Kegelschnitt (A), und also schneiden sich die Polarebenen des Punctes $a_1 b_2$ in der Polargeraden dieses Punctes in Bezug auf den Kegelschnitt (A). Daraus folgt, dass das Hyperboloid J_A die Ebene A in der Polargeraden des Punctes $a_1 b_2$ in Bezug auf den Kegelschnitt (A) trifft und analog in der Polargeraden des Punctes $a_1 c_{12}$ in Bezug auf denselben Kegelschnitt.

250. Man bezeichne durch $\mathfrak{o}$ den Punct $b_2 c_{12}$, dann ist eine beliebige Gerade $\mathfrak{ol}$ der Durchschnitt von zwei Ebenen B, C. Es seien $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ die zu $\mathfrak{o}$ conjugierten harmonischen Puncte in Bezug auf die Punctenpaare, die den Durchschnitt der Kegelschnitte (B), (C) mit den Geraden $\mathfrak{ol}$, b_2, c_{12} bilden, dann sind die Geraden $\mathfrak{lm}$, $\mathfrak{ln}$ die Polaren des Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf diese Kegelschnitte, und es ist also $\mathfrak{lmn}$ die Polarebene von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die Quadriflächen des Büschels (BC). Zieht man ausserdem in der Ebene B durch $\mathfrak{o}$ eine beliebige Gerade, welche den Kegelschnitt (B) und folglich auch die Fläche F_3 in zwei Puncten trifft, so ist der harmonische conjugierte Punct von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf diese Durchschnittspuncte auf der Geraden $\mathfrak{lm}$ gelegen; folglich gehört $\mathfrak{lm}$ und ebenso $\mathfrak{ln}$ der Quadrifläche O, ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_3 an; mit andern Worten, die Ebene $\mathfrak{lmn}$ berührt in $\mathfrak{l}$ diese Quadripolarfläche. Daraus ergibt sich endlich, dass *die Polarebenen des Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf alle Quadriflächen (ABC), was auch A, B, C sind, die Quadripolarfläche von $\mathfrak{o}$ umhüllen.*

Ich erinnere daran, dass das Hyperboloid J_A die Enveloppe der Polarebene des Punctes ABC in Bezug auf die Quadriflächen (ABC) ist, A als fest angesehen; lässt man nun A mit der dreifachen Tangentialebene $a_1 b_2 c_{12}$ zusammenfallen (in diesem Falle reduciert sich die Quadrifläche (ABC) auf die beiden Ebenen B, C), so fallen alle Puncte ABC auf $\mathfrak{o}$, also: *Dasjenige Hyperboloid J_A welches der Ebene $A \equiv a_1 b_2 c_{12}$ entspricht, ist nichts Anderes als die Quadripolarfläche O von $\mathfrak{o}$.*

251. Ist die Ebene $\mathfrak{lmn}$ um einen festen Punct $\mathfrak{i}$ des Raumes drehbar, so ist ihre Enveloppe ein der Quadrifläche O umgeschriebener Kegel; der Punct $\mathfrak{l}$ beschreibt den Berührungskegelschnitt und folglich ist der Ort der Geraden $\mathfrak{ol}$ ein Quadrikegel, der stets auch durch b_2 und c_{12} geht, denn da diese Geraden auf O liegen, so berühren die Ebenen $\mathfrak{i}b_2$, $\mathfrak{i}c_{12}$, was auch $\mathfrak{i}$ sei, diese Fläche in zwei Puncten, die den Geraden b_2, c_{12} angehören.

Es sei $\mathfrak{p}$ der Punct ABC, in dem die Gerade $\mathfrak{ol}$ eine feste Ebene A schneidet, die durch a_1 geht. Wenn $\mathfrak{ol}$ um $\mathfrak{o}$ sich dreht, so umhüllt die Polarebene von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die Quadrifläche (ABC) das Hyperboloid J_A. Da nun die Tangentialebenen von O projectivisch den Geraden durch $\mathfrak{o}$ entsprechen (der Ebene, welche O in $\mathfrak{l}$ berührt, entspricht die Gerade $\mathfrak{ol}$ und umgekehrt), so werden auch den Tangentialebenen von J_A die Geraden durch $\mathfrak{o}$ projectivisch entsprechen in folgender Weise: Eine Tangentialebene von J_A schneidet A in einer Geraden, deren Pol $\mathfrak{p}$ in Bezug auf den Kegelschnitt (A) die entsprechende Gerade $\mathfrak{op}$ bestimmt. Umgekehrt trifft eine Gerade durch $\mathfrak{o}$ die Ebene A in einem Puncte $\mathfrak{p}$; durch die Polargerade von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf den Kegelschnitt (A) geht ausser A noch eine Tangentialebene von J_A, welche die entsprechende Ebene der durch $\mathfrak{o}$ gezogenen Geraden ist.

Die Tangentialebenen von J_A, die durch den Punct $\mathfrak{i}$ gehen, umhüllen einen Kegel, welcher A in einem Kegelschnitte trifft; die reciproke Polare dieses Kegelschnittes in Bezug auf den Kegelschnitt (A), wird vom Puncte $\mathfrak{o}$ aus unter einem Kegel gesehen, welcher durch die Geraden b_2, c_{12} geht, was auch $\mathfrak{i}$ ist, wegen der beiden Ebenen, welche durch $\mathfrak{i}$ und bezüglich durch die Polargeraden der Puncte a_1b_2, a_1c_{12} in Bezug auf den Kegelschnitt (A) gelegt sind (249). Dieser Kegel und der andere, der durch die entsprechenden Geraden $\mathfrak{ol}$ der Tangentialebenen von O, die durch $\mathfrak{i}$ gehen, gebildet wird, schneiden sich in zwei Geraden (ausser in b_2 und c_{12}). Das heisst: *Durch einen beliebigen Punct* $\mathfrak{i}$ *gehen zwei entsprechende Paare Tangentialebenen von* O *und* J_A, wo man zwei Ebenen *entsprechend* nennt, welche ein und derselben Geraden $\mathfrak{ol}$ entsprechen.

Es sei g die Gerade, in welcher sich zwei entsprechende Tangentialebenen von O und J_A schneiden, das heisst die Polarebenen der Puncte $\mathfrak{o}$ und ABC in Bezug auf ein und dieselbe Fläche (ABC); oder besser, sei g die Reciproke der Geraden BC in Bezug auf die Fläche (ABC), wo die Ebene A beliebig gewählt ist; dann erhält man aus dem Vorhergehenden, *dass die Geraden* g, *welche allen möglichen Paaren von Ebenen* B, C *entsprechen* (g ist von A unabhängig) *ein solches System bilden, dass durch einen beliebigen Punct* $\mathfrak{i}$ *im Raume zwei Gerade* g *gehen.*

252. Wir wollen jetzt diejenigen Puncte des Raumes finden, für welche die beiden Geraden g zusammenfallen.

Ist die Gerade $\mathfrak{ol}$ in $\mathfrak{l}$ Tangente der cubischen Fläche F_3, und folglich auch aller Quadriflächen des Büschels (BC), so geht die Polarebene von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf eine solche Quadrifläche durch $\mathfrak{l}$, also gibt es unter den Tangentialebenen von J_A, die durch $\mathfrak{l}$ gehen, eine, deren entsprechende Gerade $\mathfrak{op}$ ist. Man lege jetzt den Punct $\mathfrak{i}$ auf $\mathfrak{l}$. Dann gehen die durch den Punct $\mathfrak{o}$ an die Fläche O gelegten Tangentialebenen durch die beiden Generatrixen $\mathfrak{lm}$, $\mathfrak{ln}$ und haben also ihre Berührungspuncte auf diesen Geraden; die entsprechenden von $\mathfrak{o}$ ausgehenden Geraden bilden daher zwei Ebenen $\mathfrak{olm}$ und $\mathfrak{oln}$ (d. h. B und C). Nun entspricht dem Kegel vom Scheitel $\mathfrak{l}$, der J_A umgeschrieben ist, ein Kegel vom Scheitel $\mathfrak{o}$, der durch $\mathfrak{ol}$ geht, wie man eben gesehen hat. Die beiden Geraden also, welche für einen beliebigen Punct $\mathfrak{i}$ aus dem Durchschnitt der beiden Kegel vom Scheitel $\mathfrak{o}$ entstehen (251), reduciren sich in diesem Falle auf die einzige Gerade $\mathfrak{ol}$. Also: *Durch die gemeinsamen Puncte von* F_3 *und* O *geht nur je eine einzige Gerade* g.

253. Sei zweitens der Punct i der Scheitel eines Quadrikegels, der durch die Kegelschnitte (B), (C) geht. Da die Wahl der Ebene A für die Bestimmung der Geraden g willkürlich ist, so kann man voraussetzen, dass diese Ebene durch i geht. Weil nun i auf der reciproken Geraden von BC oder olp in Bezug auf jede Quadrifläche des Büschels (BC) liegt, so geht die Polarebene von o in Bezug auf die Quadrifläche (ABC) durch i; ferner ist dieselbe Polarebene Tangentialebene der Fläche O in l; es geht also durch i eine Tangentialebene von O, deren Berührungspunct l ist, daher ist olp die entsprechende Gerade.

In analoger Weise liegt i in den Polarebenen aller Puncte von ol in Bezug auf die Quadrifläche (ABC), und deshalb sind die Puncte i, p in Bezug auf den Kegelschnitt (A) conjugiert.

Was das Hyperboloid J_A anbetrifft, so schneiden seine durch i gelegten Tangentialebenen A in Geraden, die sich in i kreuzen, und deren Pole in Bezug auf den Kegelschnitt (A) sich auf der Polare von i befinden, die aus einer Geraden durch p besteht. Daraus folgt, dass dem O umgeschriebenen Kegel vom Scheitel i ein Kegel K vom Scheitel o entspricht, der durch ol geht; und dem, dem Hyperboloid J_A umgeschriebenen Kegel vom Scheitel i entspricht (ausser der Ebene $a_1 b_2 c_{12}$) eine Ebene E, die durch op und die Polargerade von i in Bezug auf den Kegelschnitt (A) geht. Man kann nun beweisen, dass die Ebene E den Kegel K längs op berührt.

In der That, die Ebene, welche durch i geht und O in l berührt, enthält eine Gruppe von vier harmonischen Strahlen, nämlich die Geraden lm, ln, Generatrixen der Fläche, die Gerade li, Generatrix des umschriebenen Kegels vom Scheitel i, und die Gerade lj, Tangente des Berührungskegelschnittes in l (j sei ihre Spur auf der Ebene A). Projiciert man vom Puncte o aus diese vier harmonischen Strahlen auf die Ebene A, so erhält man die Geraden p(u, v, i, j) [1]), die ebenfalls eine harmonische Gruppe bilden. Andererseits aber gehört das Ebenenpaar BC, der Kegel (BC) und die Quadrifläche (ABC) zu demselben Büschel, also muss der Kegelschnitt (A) durch die vier Puncte gehen, wo die Durchschnittsgeraden des Kegels mit A die Geraden AB und AC (d. h. pu und pv) treffen. Daher ist also die Polargerade von i in Bezug auf den Kegelschnitt (A) die conjugierte harmonische Gerade pi in Bezug auf die Geraden pu, pv, oder mit andern Worten, die Gerade pj ist die Polare von i in Bezug auf den Kegelschnitt (A).

Also ist die Ebene E Tangentialebene des Kegels längst op, und folglich *liegt der Punct* i *nur auf einer einzigen Geraden* g.

254. Die Gerade g, die Reciproke der Geraden (BC) in Bezug auf alle Flächen des Büschels (BC), liegt (249) auf den Hyperboloiden J_B und J_C. Umgekehrt ist J_B der Ort der reciproken Geraden von BC (wo B fest ist, und C variabel) in Bezug auf die Flächen des Büschels (BC) und auch der Ort der reciproken Geraden von BA (wo B wieder fest ist und

[1]) Hier bezeichnen u, v die Puncte $a_1 b_2$, $a_1 c_{12}$.

A variabel) in Bezug auf die Flächen (BA). Ebenso verhält es sich mit J_C. Wir haben nun bewiesen, dass durch jeden Punct des Raumes zwei Gerade g gehen, die Reciproken von BC, und dem analog zwei reciproke Gerade von CA, und zwei reciproke Gerade von AB. Also: *Durch jeden Punct des Raumes kann man zwei Hyperboloide J_A, zwei Hyperboloide J_B und zwei Hyperboloide J_C legen.* Aus dem Vorhergehenden folgt weiter, dass, wenn $\mathfrak{i}$ der Scheitel eines Quadrikegels ist, welcher F_3 in drei Kegelschnitten (A), (B), (C) schneidet, durch $\mathfrak{i}$ nur eine einzige Reciproke von BC, ebenso nur eine Reciproke von CA und eine einzige reciproke Gerade von AB geht; durch $\mathfrak{i}$ geht also nur ein Hyperboloid J_A, ein Hyperboloid J_B und ein Hyperboloid J_C. Das heisst: *Der Ort der Scheitel der Quadrikegel, welche die cubische Fläche F_3 in drei Kegelschnitten $(A),(B),(C)$ schneiden, fällt mit der einhüllenden Fläche der Hyperboloide jeder der drei Reihen J_A, J_B, J_C zusammen. Dieser Ort geht durch die drei Raumcurven vierter Ordnung in denen F_3 von den Quadripolarflächen der Puncte $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ geschnitten wird* (252).

Da bewiesen, dass durch jeden Punct dieses Ortes eine einzige eingehüllte Fläche jeder Reihe geht, so folgt, dass die einhüllende und die eingehüllte Fläche sich überall berühren, wo sie sich treffen. Die Berührungscurve ist der Durchschnitt zweier unmittelbar folgender eingehüllten Flächen und ist also von der vierten Ordnung. *Die einhüllende Fläche ist also von der vierten Ordnung; die Berührungscurven zweier eingehüllter Flächen derselben Reihe liegen auf ein und derselben Fläche zweiter Ordnung* (50) *u. s. w.*

255. Wir betrachten jetzt das Büschel von Quadriflächen S, welche durch die Curve vierter Ordnung gehen, die den Durchschnitt von F_3 mit O, der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$, bildet. Zwei Flächen S schneiden die cubische Fläche nochmals in zwei Kegelschnitten; da aber die gemeinschaftliche Gerade der Ebenen dieser Kegelschnitte vier Puncte mit F_3 gemein hat (nämlich die vier Puncte, in denen dieselbe die beiden Kegelschnitte trifft), so liegt sie vollständig auf der Fläche. Nun ist eine der Flächen S auch die Quadrifläche O, für welche der resultierende Kegelschnitt das Geradenpaar b_2, c_{12} ist, und die Gerade, in der die Ebene dieser beiden nochmals F_3 schneidet, ist die Gerade a_1, also schneiden die Flächen S die Flächen F_3 in Kegelschnitten, deren Ebenen durch die Gerade a_1 gehen. Umgekehrt trifft jede durch a_1 gezogene Ebene A, F_3 in einem Kegelschnitte, der auf einer Fläche S_A des Büschels liegt, das man betrachtet. Die Ebene A und die Quadriflächen S_A bilden offenbar zwei projectivische Büschel, welche die gegebene Fläche F_3 durch ihre Durchschnittscurven erzeugen können (222).

Die Polarebenen des Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die Quadriflächen S bilden ein projectivisches Büschel zu dem dieser Quadriflächen, also ist der Ort der Berührungskegelschnitte der Quadriflächen S mit den umgeschriebenen Kegeln vom Scheitel $\mathfrak{o}$ (223) eine Fläche $\mathbf{J}$ dritter Ordnung, welche durch die Basis des Büschels (S) und durch die Geraden b_2, c_{12} geht (letztere Geraden der Durchschnitt von O durch die entsprechende Polarebene). Ausserdem ist die Basiscurve des Büschels (S) der Durchschnitt von **J** mit der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf **J**, nämlich mit der Quadrifläche $S(\equiv O)$, die durch $\mathfrak{o}$ geht; die beiden cubischen Flächen **J** und F_3 berühren sich also längs einer Curve vierter Ordnung und schneiden sich in zwei Geraden; sie fallen daher in eine einzige Fläche zusammen. Das heisst: *Jede Quadrifläche S_A schneidet F_3 in einem Kegelschnitt dessen Ebene A die Polarebene des Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf S_A ist;* mit andern Worten, die cubische Fläche F_3 ist der Ort der Berührungscurven zwischen den Quadriflächen S und den umgeschriebenen Kegeln vom Scheitel $\mathfrak{o}$. Es folgt noch daraus, dass die Scheitel der vier Kegel des Büschels (S) auf F_3 liegen, und dass diejenigen Ebenen, welche die Fläche in diesen vier Puncten berühren, die dreifachen Tangentialebenen sind, welche durch a_1 gehen.

256. Sind A und B zwei gegebene Ebenen bezüglich durch a_1 und b_2 gelegt, dann bilden die Quadriflächen (AB) ein Büschel, dem auch das Ebenenpaar A, B angehört. Der Ort der Berührungscurven zwischen den Quadriflächen und den umgeschriebenen Kegeln vom Scheitel $\mathfrak{o}$ ist nach dem allgemeinen Satze (223) eine cubische Fläche, aber für die Quadrifläche, die aus den Ebenen A, B besteht, kann man die Berührungscurve als auf der Ebene B ausgebreitet ansehen, und die Ebene gehört also vollständig der cubischen Fläche an. Das heisst, diese reducirt sich auf die Ebene B und eine Quadrifläche $\mathfrak{S}$, welche den Kegelschnitt (A) und die Kegelschnitte enthält, welche aus dem Durchschnitt der Flächen (AB) mit den Polarebenen von $\mathfrak{o}$ entstehen.

Weiter muss die Basis des Büschels (AB) die Durchschnittscurve der cubischen Fläche $B\mathfrak{S}$ mit der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf diese Fläche sein, also ist A die Polarebene von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf $\mathfrak{S}$. Es folgt ferner daraus, dass $\mathfrak{S}$ durch die Scheitel der beiden Kegel des Büschels (AB) geht und in ihnen von den beiden Ebenen berührt wird, welche dem Büschel der Polarebenen von $\mathfrak{o}$ angehören, und sich daher in einer Geraden schneiden, die in der Ebene B liegt.

Hiernach gehen die Flächen $\mathfrak{S}$ und S_A zugleich durch den Kegelschnitt (A) und haben A als Polarebene von $\mathfrak{o}$. Wenn man nun vom Puncte $\mathfrak{o}$ die Tangenten an den Kegelschnitt (B) zieht, so liegen die Berührungspuncte auf $\mathfrak{S}$, denn sie müssen einer beliebigen Quadrifläche des Büschels (AB) angehören und der entsprechenden Polarebene von $\mathfrak{o}$. Die nämlichen Puncte gehören aber auch der Berührungscurve von F_3 mit dem umgeschriebenen Kegel vom Scheitel $\mathfrak{o}$ an, und folglich auch S_A. Die Quadriflächen $\mathfrak{S}$ und S_A bilden also nur eine einzige Fläche. Das heisst: *S_A ist der Ort der Berührungscurven aller Quadriflächen (ABC), wo A fest ist, mit den umgeschriebenen Kegeln vom Scheitel* $\mathfrak{o}$. Also enthält S_A die Scheitel sämmtlicher Kegel des Systems (ABC), wo A fest gehalten wird.

Ist die Ebene A gegeben, dann sind die Scheitel der Kegel (ABC) auf jeder der Flächen S_A, J_A gelegen (249), also: *Der Ort dieser Scheitel ist die Raumcurve vierter Ordnung, Durchschnitt dieser beiden Quadriflächen.* Lässt man nun A seine Lage ändern, *so ist der Ort dieser Raumcurve, die den beiden entsprechenden Flächen S_A und J_A gemein ist, eine Fläche vierter Ordnung (vollständiger Ort der Scheitel aller Kegel (ABC))*, die wir schon als Enveloppe der Hyperboloide J gefunden haben. Natürlich ist dieselbe Fläche vierter Ordnung auch der Ort der Raumcurve vierter Ordnung, die zwei Flächen S_B und J_B oder S_C und J_C gemein ist. S_B und S_C haben hier in Bezug auf $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ und die Ebenen B, C dieselbe Bedeutung, welche S_A in Bezug auf den Punct $\mathfrak{o}$ und die Ebene A hat [1]).

257. Betrachten wir von Neuem die drei Geraden a_1, b_2, c_{12} die in derselben Tritangentialebene liegen. Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zwei Ebenen, die bezüglich durch a_1, b_2 gehen und die Fläche F_3 in zwei Kegelschnitten treffen, die a_1, b_2 in den Puncten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ berühren. Die Quadriflächen des Büschels $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ treffen die Ebene a_1b_2 in Kegelschnitten, die in den Puncten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ einen doppelten Contact haben, und umgekehrt jeder Kegelschnitt, der in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von den Geraden a_1, b_2 berührt wird, ist die Spur einer Fläche des Büschels. Nun befindet sich unter diesen Kegelschnitten der unendlich abgeplattete Kegelschnitt $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2$ gebildet durch die zweimal gezählte Berührungssehne, und in dem Büschel $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ gibt es daher einen Kegel, welcher die Gerade a_1b_2 längs der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ berührt. Diese Gerade trifft c_{12} in einem Puncte $\mathfrak{c}$ und in diesem berührt c_{12} den obigen Kegel und folglich auch einen Kegelschnitt, der gleichzeitig auf F_3, auf dem Kegel und in einer Ebene $\mathfrak{C}$ (durch c_{12}) liegt. Also: *Die sechs Puncte, in denen die Geraden a_1, b_1, c_{12} die parabolische Curve von F_3 berühren* (220) *liegen zu drei und drei auf vier Geraden, welche die Berührungsgeneratrixen der Ebene $a_1b_2c_{12}$ mit vier Quadrikegeln sind, welche zu drei und drei die sechs Kegelschnitte $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$ enthalten, welche die Geraden a_1, b_2, c_{12} in genannten Puncten berühren.* Die beiden zu $\mathfrak{a}$ analogen Puncte sind die Doppelelemente einer Involution, in der die Puncte a_1b_2, a_1c_{12} conjugiert sind (220). Die Geraden a_1, b_2, c_{12} sind daher die Diagonalen des Vierseits, das aus vier Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ gebildet wird.

Es gibt noch einen zweiten Kegel, der durch die Kegelschnitte $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ geht, ausser demjenigen, welcher die Ebene a_1b_2 längs $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ berührt. Die beiden Kegelschnitten gemeinsamen Tangenten umhüllen diese beiden Kegel; der Scheitel des neuen Kegels ist also der gemeinschaftliche Durchschnittspunct folgender drei Ebenen: Der Ebene a_1b_2, der Ebene der Tangenten, die man vom Puncte a_1b_2 an die beiden Kegelschnitte ziehen kann ausser a_1 und b_2 und die Ebene der Polargeraden des nämlichen Punctes in Bezug auf die beiden Kegelschnitte.

Wir wollen die vier Berührungskegel der Ebene a_1b_2 und die sechs Kegelschnitte, in denen sie die Fläche F_3 schneiden, in folgender Weise bezeichnen

$$\mathfrak{K} \equiv (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}),\ \mathfrak{K}' \equiv (\mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'),\ \mathfrak{K}'' \equiv (\mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{C}'),\ \mathfrak{K}''' \equiv (\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C})$$

---

1) Jede von den 45 dreifachen Tangentialebenen gibt einer analogen Fläche vierter Ordnung Entstehung.

Die Kegel $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'$ schneiden sich in dem Kegelschnitt $(\mathfrak{A})$ und folglich noch in einem andern Kegelschnitt, der nicht auf F_3 liegt. Sie haben also zwei gemeinschaftliche Tangentialebenen; eine ist $a_1 b_2 c_{12}$, die andere sei P. Die Ebene P berührt die fünf Kegelschnitte $(\mathfrak{A}), (\mathfrak{B}), (\mathfrak{C}), (\mathfrak{B}'), (\mathfrak{C}')$ die auf $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ liegen, sie berührt daher auch die Kegel $\mathfrak{H}''$ und $\mathfrak{H}'''$. Die vier Kegel $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}', \mathfrak{H}'', \mathfrak{H}'''$ haben folglich zwei gemeinschaftliche Tangentialebenen $a_1 b_2 c_{12}$ und P, daraus folgt, *dass ihre Scheitel auf ein und derselben Geraden liegen* (der Durchschnittsgeraden der Ebenen $a_1 b_2 c_{12}$ und P).

258. Wir gehen zur Betrachtung der Kegelschnitte (A), (B), (C) über, die sich in gerade Linien auflösen.

Unter den Ebenen A gibt es vier, ausser $a_1 b_2 c_{12}$, welche F_3 in Geradenpaaren schneiden, dasselbe gilt für die Ebenen B und C. Wenn wir die Ebene A betrachten, welche die Geraden $b_3 c_{13}$ enthält, und die Ebene B, in der $a_3 c_{32}$ liegt, so müssen sich die Kegelschnitte $(b_3 c_{13})$, $(a_3 c_{32})$ in zwei Puncten schneiden (247), die auf der Geraden AB liegen. Die Gerade b_3 trifft daher c_{23}, und c_{13} schneidet a_3. Die Ebenen $b_3 c_{32}$, $a_3 c_{13}$ schneiden F_3 in zwei neuen Geraden a_2 und b_1. Nun liegen von den neun Geraden $(a_1 b_2 c_{13})$, $(a_2 b_3 c_{32})$, $(a_3 b_1 c_{13})$, welche durch den Durchschnitt von F_3 mit drei Ebenen entstehen, drei, nämlich a_1, b_3, c_{13} in der Ebene A, drei andere a_3, b_2, c_{32} in der Ebene B, folglich liegen die drei übrigen a_2, b_1, c_{12} in ein und derselben Ebene C.

Hieraus folgt, dass die 24 Geraden, die in den 12 dreifachen Tangentialebenen liegen, welche ausser $a_1 b_2 c_1$ durch a_1, b_2, c_{12} gehen, auch noch in 16 andern Paaren von dreifachen Tangentialebenen liegen. Jedes dieser Paare ist durch zwei beliebig gewählte dreifache Tangentialebenen A und B bestimmt. Mittelst dieser beiden Ebenen ist auch eine entsprechende Ebene C mit bestimmt.

Denken wir uns drei Ebenen A, B, C die F_3 ausser in a_1, b_2, c_{12} in sechs Geraden schneiden, die nicht in Ebenenpaaren gelegen seien, so gehören diese sechs Geraden einem Hyperboloide (ABC) aus dem vorhin betrachteten Systemen an (248). Jede von den vier Ebenen A lässt sich mit jeder von den vier Ebenen B und mit jeder der vier Ebenen C combiniren, aber man muss die 16 Combinationen weglassen, welche sechs Gerade ergeben, die auf zwei Ebenen liegen; *das System der Quadriflächen (ABC) enthält also* $4.4.4-16=48$ *Hyperboloide H, von denen ein jedes die cubische Fläche F_3 in sechs Geraden schneidet.*

Von den sechs Geraden, die F_3 und einem Hyperboloide H gemein sind, gehören drei demselben Systeme von Generatrixen des letzteren an, und die drei übrigen dem andern Systeme [1]), man kann also auf sechs ver-

---

[1]) Eine cubische Fläche kann niemals vier Gerade eines Hyperboloids aus demselben Systems von Generatrixen enthalten, denn dann hätte jede Generatrix des andern Systems vier Puncte mit der cubischen Fläche gemein und läge folglich vollständig auf derselben.

schiedene Arten diese Geraden in drei Paare zerlegen, so dass die Geraden jedes Paares in einer Ebene liegen. Jede Art gibt drei Ebenen, welche alle sechs Geraden enthalten und F_3 in drei neuen Geraden schneiden, die in einer Ebene liegen, denn die sechs ersten Geraden gehören einer Fläche zweiter Ordnung an. *Jedes Hyperboloid H ist also ein Glied von sechs Systemen von Quadriflächen, dem der Flächen (ABC) analog, das durch die Ebene $a_1 b_2 c_{12}$ gegeben ist.* Die Zahl dieser Systeme ist 45, jedes derselben entspricht einer dreifachen Tangentialebene, *die Gesammtzahl der Hyperboloide, welche F_3 in sechs Geraden schneiden, ist also* $\frac{48.45}{6} = 360$.

259. Ein Hyperboloid H ist durch drei Gerade von F_3 bestimmt, die sich nicht treffen. Nun werden aber drei Gerade von F_3, die sich nicht treffen, von drei andern Geraden geschnitten, die sich ebenfalls nicht schneiden (228); diese sechs Geraden bilden also den Durchschnitt von H und F_3. Das heisst: *Jedes Hyperboloid, das F_3 in drei Geraden schneidet, die sich nicht treffen, schneidet diese Fläche noch in drei andern Geraden.*

Es gibt also 2.360 *Gruppen von drei Geraden auf F_3, welche keine Durchschnittspuncte haben. Diese Gruppen sind zu zwei und zwei conjugiert* [1]). *Die Geraden der einen Gruppe treffen die Geraden der conjugierten Gruppe, und die sechs Geraden der beiden conjugierten Gruppen gehören ein und demselben Hyperboloide an.*

CAPITEL VI.

VERSCHIEDENE EIGENSCHAFTEN.

260. Es seien T, T' zwei dreifache Tangentialebenen der cubischen Fläche F_3, die sich in einer Geraden, die nicht auf F_3 liegt, treffen, und es seien a_1, b_2, c_{12}; a_2, b_3, c_{23} die Geraden der Fläche, die in diesen Ebenen liegen. Da die Gerade TT' die Fläche F_3 nur in drei Puncten schneidet, so müssen diese den Geradenpaaren $a_1 b_3$, $b_2 c_{23}$, $a_2 c_{12}$ gemein sein. Die Ebenen $a_1 b_3$, $b_2 c_{23}$, $a_2 c_{12}$ treffen F_3 in drei neuen Geraden bezüglich c_{13}, a_3, b_1, die in einer Ebene liegen, denn von diesen neun Geraden, die durch den Durchschnitt von F_3 mit drei Ebenen entstehen, liegen sechs in zwei anderen Ebenen T, T'.

Also bestimmen die Dreiecke $a_1 b_2 c_{12}$, $a_2 b_3 c_{23}$ vier andere, und die Seiten

---

1) R. Sturm, (*Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung,* Leipzig 1868.) nennt zwei conjugierte Systeme von drei Geraden ein *Doppeldrei* und die Hyperboloide *H Doppeldreihyperboloide.*

dieser sechs Dreiecke sind die gegenseitigen Durchschnittspuncte zweier Gruppen von drei Ebenen, das heisst der Seitenflächen zweier Trieder, die wir *conjugiert* nennen wollen.

Zwei beliebige dreifache Tangentialebenen, deren Durchschnittsgerade nicht auf F_3 liegt, können als Seitenflächen eines Trieders dienen, dann ist dadurch die dritte Seitenfläche mit bestimmt. Diese drei Ebenen bestimmen neun Gerade, welche sich in neun Puncten schneiden, die den Kanten des Trieders und F_3 gemein sind. Dieselben neun Geraden sind auch noch in drei andere Ebenen vertheilt, welche das conjugierte Trieder bilden.

Man hat schon früher (258) gesehen, dass, wenn man die drei Geraden a_1, b_2, c_{12}, die in der Ebene T liegen, betrachtet, die andern 24 Geraden von F_3 in 16 Ebenenpaaren vertheilt liegen. Jedes Paar bildet mit T ein Trieder, das heisst, jede Ebene T liegt in 16 Triedern. Jedes Trieder enthält aber drei Tritangentialebenen, *also ist die Gesammtzahl der Trieder* $\frac{45.16}{3} = 240$. Diese Trieder sind zu zwei und zwei conjugiert; *es gibt daher* 120 *conjugierte Triederpaare.*

261. Die neun Geraden

$$\begin{vmatrix} a_1, & b^1, & c_{23} \\ a_2, & b_2, & c_{31} \\ a_3, & b_3, & c_{12} \end{vmatrix}$$

sind, wie wir eben bewiesen haben, auf sechs Tritangentialebenen gelegen, die zwei conjugierte Trieder bilden. Durch jede dieser Geraden kann man drei neue dreifache Tangentialebenen legen; es gibt also 27 Ebenen, von denen jede eine der neun Geraden enthält und also auch noch zwei andere Gerade, das heisst, die andern 18 Geraden liegen zu zwei und zwei in diesen 27 Ebenen vertheilt in der Art, dass diese Ebenen $\frac{2.27}{18} = 3$-mal durch jede der 18 Geraden gehen. Es bleiben noch $45-6-27=12$ Ebenen, welche ausschliesslich die 18 Geraden jede zweimal enthalten.

Nun muss jede der drei Geraden a_1, b_2, c_{12}, die in derselben Ebene liegen, ausser den Geraden der obigen Matrix noch sechs Gerade schneiden, die von den beiden andern nicht getroffen werden; also werden die 18 Geraden durch eine oder die andere der Geraden a_1, b_2, c_{12} geschnitten. Ausserdem werden aber auch drei Gerade wie a_1, b_1, c_{23}, die sich nicht schneiden, durch die obigen Geraden ebenfalls geschnitten, ebenso a_1, a_2, a_3, u. s. w. Man kann daher die 18 Geraden in zwei neue Matrixen

$$\begin{vmatrix} b_4, & a_4, & c_{56} \\ b_5, & a_5, & c_{64} \\ b_6, & a_6, & c_{45} \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} c_{14}, & c_{24}, & c_{34} \\ c_{15}, & c_{25}, & c_{35} \\ c_{16}, & c_{26}, & c_{36} \end{vmatrix}$$

so vertheilen, dass die Geraden einer Colonne der ersten Matrix die Geraden der entsprechenden Colonnen der zweiten Matrix treffen, und die Geraden einer Zeile der ersten Matrix die Geraden der entsprechenden Colonne der dritten Matrix. Dann ist leicht zu zeigen: 1. dass die Geraden einer Zeile der zweiten Matrix die Geraden der entsprechenden Zeile der dritten Matrix schneiden; 2. dass die neun Geraden jeder der zwei letzten Matrixen die Durchschnittsgeraden der Seitenflächen zweier conjugierter Trieder sind.

Also: *Jedes conjugierte Triederpaar bestimmt zwei neue Paare in der Art, dass die drei Paare zweimal sämmtliche 27 Gerade enthalten.* Natürlich ist die Zahl dieser Gruppen von je drei conjugierten Triederpaaren gleich $\frac{120}{3} = 40$.

262. Die 240 Trieder haben 3.240 = 720 Kanten k und 240 Scheitel $\mathfrak{t}$. Jede Kante k trifft die Fläche F_3 in drei Puncten $\mathfrak{d}$, Durchschnitte der Geradenpaare auf der Fläche. Man kann also sagen, *die* 135 *Puncte* $\mathfrak{d}$, *Scheitel der* 45 *Dreiecke, die von den* 27 *Geraden auf den dreifachen Tangentialebenen gebildet werden, sind zu drei und drei auf* 720 *Geraden* k *vertheilt, die sich zu drei und drei in* 240 *Puncten* $\mathfrak{t}$ *schneiden.* Dieselben 135 Puncte liegen zu zehn und zehn auf den 27 Geraden von F_3.

Betrachten wir den Punct $\mathfrak{d}$, der den Geraden a_1, b_2 angehört. Durch jede dieser Geraden gehen ausser der Ebene $a_1 b_2$ vier andere dreifache Tangentialebenen und daher 16 Gerade k. *Jeder Punct* $\mathfrak{d}$ *ist also auf* 16 *Geraden* k *gelegen.*

Die Ebene $a_1 b_3 c_{13}$ schneidet die vier dreifachen Tangentialebenen, welche durch b_2 gehen, mit Ausnahme von $a_1 b_2$, in vier Geraden k welche b_3 und c_{13} in acht Puncten $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$ treffen. Auf jeder dieser vier Geraden k denke man sich den harmonischen Punct $\mathfrak{l}$ von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}''$ genommen, dann gehören die vier Puncte $\mathfrak{l}$ der Polargeraden von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf den Kegelschnitt an, der durch die Geraden $b_3 c_{13}$ gebildet wird, und sie liegen auch auf der Quadripolarfläche von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf F_3. *Die* 16 *Puncte* $\mathfrak{l}$, *entsprechend den* 16 *Geraden* k, *die von* $\mathfrak{d}$ *ausgehen, liegen zu vier und vier auf vier Geraden vertheilt, die in vier Ebenen liegen, welche durch* a_1 *gehen und folglich auch auf vier anderen Geraden, die in vier Ebenen durch* b_2 *liegen. Alle diese acht Gerade sind Generatrixen ein und desselben Hyperboloids, welches die Quadripolarfläche des Punctes* $\mathfrak{d}$ *ist.* Diese Quadrifläche geht offenbar durch die Geraden a_1 und b_2.

263. Sei $\mathfrak{t}$ der Scheitel eines Trieders, das aus dreifachen Tangentialebenen gebildet ist (262). Dann schneidet die Quadripolarfläche von $\mathfrak{t}$ nach F_3 genommen jene Ebenen in den Polarkegelschnitten von $\mathfrak{t}$ bezüglich der Dreiecke, welche von den Geraden von F_3 gebildet werden, die in diesen Ebenen liegen, das heisst, in Kegelschnitten, die bezüglich diesen Dreiecken umgeschrieben sind. Diese Dreiecke entstehen aber durch den Durchschnitt der drei betrachteten Ebenen durch die Seitenflächen des conjugierten Trieders (260), folglich treffen die Kanten dieses Trieders die Quadripolarfläche von

$\mathfrak{t}$ in je drei Puncten. Mit andern Worten: *Die Quadripolarfläche von* $\mathfrak{t}$ *ist ein dem conjugierten Trieder umgeschriebener Kegel. Also sind die Scheitel zweier conjugierter Trieder entsprechende Puncte der Hessiana* (183).

264. Es ist früher bewiesen, dass jede Gerade, die auf F_3 liegt, so wie a_1, eine Doppeltangente der Hessiana ist (171), und dass die Berührungspuncte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ die Doppelpuncte der Involution sind, welche auf a_1 durch die Kegelschnitte bestimmt wird, in denen F_3 durch die Bitangentialebenen, welche durch a_1 gehen, geschnitten wird. Da aber die Gerade a_1 auf F_3 liegt, so muss die Quadripolarfläche jedes Punctes dieser Geraden durch diese selbst hindurch gehen, also liegen die Scheitel der Polarkegel von $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ auf a_1. Diese Scheitel sind aber auch Puncte der Hessiana, folglich ist $\mathfrak{a}'$ der Scheitel des Polarkegels von $\mathfrak{a}$ und umgekehrt; das heisst, *die Puncte* $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ *sind zwei entsprechende Puncte der Hessiana.*

265. Eine beliebig gegebene Ebene E schneidet die Fundamentalfläche F_3 in einer Curve $\mathfrak{c}_3$ der dritten Ordnung. Die Ebene M, welche F_3 in einem Puncte $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{c}_3$ berührt, und die Polarebene von $\mathfrak{m}$ in Bezug auf die Hessiana treffen sich in einer Geraden, welche F_3 in den Wendepuncten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ des Schnittes dieser Fläche durch die Ebene M durchbohrt (200). Was ist nun der Ort der Geraden $\mathfrak{mx}, \mathfrak{my}, \mathfrak{mz}$, wenn $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{c}_3$ seine Lage verändert? Zunächst ist die Curve $\mathfrak{c}_3$ für den Ort dreifach, denn jeder Punct $\mathfrak{m}$ dieses Ortes ist den drei Generatrixen $\mathfrak{mx}, \mathfrak{my}, \mathfrak{mz}$ gemeinschaftlich. Wir suchen zweitens, wieviele Generatrixen in die Ebene E fallen. Die Polarebenen der Puncte $\mathfrak{m}$ in Bezug auf die Hessiana treffen E in Geraden, deren einhüllende Curve von der 9-ten Classe ist (93). Die Tangenten dieser Enveloppe entsprechen einzeln den Tangenten von $\mathfrak{c}_3$, denn die einen sowohl als die anderen entsprechen den Puncten dieser Curve; und nach einen bekannten Theorem [1]) ist die Ordnung des Ortes des gemeinschaftlichen Punctes zweier entsprechender Tangenten gleich der Summe der Classen der beiden Enveloppen, nämlich $9+6=15$. Für diesen Ort sind die 12 gemeinschaftlichen Puncte von $\mathfrak{c}_3$ und der Hessiana Doppelpuncte, denn in jedem dieser Puncte treffen sich zwei unmittelbar folgende Tangenten von $\mathfrak{c}_3$ und die entsprechenden Tangenten der Enveloppe 9-ter Classe. Der Ort fünfzehnter Ordnung schneidet also $\mathfrak{c}_3$ noch in $3.15-2.12=21$ andern Puncten, von denen jeder ein den Puncten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ analoger Punct ist. Es folgt daraus, dass die Ebene E 21 zu $\mathfrak{mx}, \mathfrak{my}, \mathfrak{mz}$ analoge Gerade enthält, und hieraus, *dass der Ort dieser Geraden eine Fläche der Ordnung* $3.3+21=30$ *ist.*

Dieser Ort trifft eine beliebige Gerade g in 30 Puncten. Daraus folgt: *Wenn der Punct* $\mathfrak{m}$ *die Fläche* F_3 *mit der Bedingung durchläuft, dass eine der Geraden* $\mathfrak{mx}, \mathfrak{my}, \mathfrak{mz}$ *die gegebene Gerade* g *schneidet, so ist der Ort von* $\mathfrak{m}$ *eine Raumcurve der 30-sten Ordnung.*

---

1) *Einleitung*, Nr. 83 a.

Diese Raumcurve geht, was auch g sei, durch die 135 *Puncte* $\mathfrak{d}$, *in denen sich die* 27 *Geraden der Fundamentalfläche zu zwei und zwei schneiden.* In der That, betrachten wir die dreifache Tangentialebene, welche die Geraden a_1, b_2, c_{12} enthält, so geht die Polarebene des Punctes a_1b_2 in Bezug auf die Hessiana durch c_{12} [1]), und jede durch diesen Punct so gezogene Gerade, dass sie c_{12} schneidet, ist eine zu $\mathfrak{mr}$ analoge Gerade. Nun trifft die Ebene $a_1b_2c_{12}$ eine beliebige Gerade g, also geht die Raumcurve 30-ster Ordnung, in Bezug auf diese Gerade, durch den Punct a_1b_2. Daher trifft die Raumcurve, um die es sich handelt, jede der 27 Geraden von F_3 in zehn Puncten.

Hieraus folgt, wenn man die cubische Fläche auf einer Ebene in der oben (231) angegebenen Weise abbildet, dass dann die Plancurve, welche die Raumcurve 30-ster Ordnung in Bezug auf g darstellt, ebenfalls von der 30-sten Ordnung ist, zehnmal durch jeden Fundamentalpunct geht und in denselben die den Geraden b und c von F_3 entsprechenden Linien berührt. Also (233, 245) *ist die Raumcurve der vollständige Durchschnitt von* F_3 *mit einer Fläche* 10-*ter Ordnung.*

Es gibt also eine unbegrenzte Zahl von Flächen 10-*ter Ordnung, welche durch die* 135 *Puncte* $\mathfrak{d}$ *gehen. Das vollständige System dieser Puncte ist durch den Durchschnitt irgend einer dieser Flächen mit den* 27 *Geraden von* F_3 *gegeben.*

266. Wir wollen jetzt noch eine Eigenschaft des Schnittes der Hessiana durch eine beliebige Ebene E auseinandersetzen.

Diese Ebene schneidet die Fundamentalfläche F_3 in einer cubischen Curve $\mathfrak{c}_3$; es sei $\mathfrak{o}$ einer der Pole von E in Bezug auf F_3, der nicht auf E liegt. Weil nun der Kegel $\mathfrak{oc}_3$ die Fläche F_3 in einer Plancurve $\mathfrak{c}_3$ trifft, so schneidet er dieselbe Fläche noch in einer Raumcurve sechster Ordnung, die auf einer Quadrifläche $\mathfrak{P}_2$ liegt (40). Da die Fläche F_3 dem durch den Kegel $\mathfrak{oc}_3$ und den zusammengesetzten Ort $E\mathfrak{P}_2$ gebildeten Büschel angehört, so geht die Quadripolarfläche eines beliebigen Punctes $\mathfrak{i}$ in Bezug auf F_3 durch den Durchschnitt des Polarkegels $\mathfrak{oc}_2$ in Bezug auf den Kegel $\mathfrak{oc}_3$ mit der Quadripolarfläche in Bezug auf $E\mathfrak{P}_2$. Wird $\mathfrak{i}$ auf der Ebene E genommen, so ist die Quadripolarfläche von $\mathfrak{i}$ in Bezug auf $E\mathfrak{P}_2$ das System zweier Ebenen, deren eine E ist, und die andere $\mathfrak{P}_1$ ist die Polarebene von $\mathfrak{i}$ in Bezug auf $\mathfrak{P}_2$. Folglich geht die Quadripolarfläche von $\mathfrak{i}$ in Bezug auf

---

[1]) Dies ergibt sich aus dem allgemeinen Theoreme (200) und auch aus folgender Ueberlegung: Die vier Durchschnittspuncte der Hessiana mit der Geraden a_1 sind in zwei Berührungspuncte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ vereinigt, und folglich fällt der harmonische Mittelpunct dieser vier Durchschnittspuncte in Bezug auf den Pol a_1b_2 mit dem Puncte a_1c_{12} zusammen, dem harmonisch conjugierten Puncte von a_1b_2 in Bezug auf die Puncte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$. Ebenso verhält es sich für b_2, also u. s. w.

F_3 durch die beiden Durchschnittskegelschnitte des Kegels $\mathfrak{oc}_2$ mit den Ebenen E und $\mathfrak{P}_1$. Der erste dieser Kegelschnitte ist offenbar $\mathfrak{c}_2$, erste Polare von $\mathfrak{i}$ nach $\mathfrak{c}_3$; der andere ist ein Geradenpaar, weil die Ebene $\mathfrak{P}_1$ durch $\mathfrak{o}$ geht [1]). Wenn nun aber $\mathfrak{P}_1$ den Kegel $\mathfrak{oc}_2$ berührte, so wäre die Quadripolarfläche von $\mathfrak{i}$ nach F_3 genommen ein Kegel, und $\mathfrak{i}$ würde auf der Hessiana liegen. *Also ist die Durchschnittscurve der Hessiana mit der Ebene E der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Quadrifläche $\mathfrak{P}_2$ die conische Polarcurve in Bezug auf die cubische Curve $\mathfrak{c}_3$ berührt.*

Auf folgende Weise kann man zeigen, dass dieser Ort von der vierten Ordnung ist. Die Polarkegelschnitte der Puncte einer Geraden g auf E in Bezug auf $\mathfrak{c}_3$ und die Polargeraden derselben Puncte in Bezug auf den Kegelschnitt $(E\mathfrak{P}_2)$ bilden zwei projectivische Büschel, welche eine cubische Curve erzeugen, die durch den Pol von g in Bezug auf den Kegelschnitt $(E\mathfrak{P}_2)$ geht. Durch diesen Pol kann man vier Tangenten an die cubische Curve legen, es gibt also vier Gerade des zweiten Büschels, welche die entsprechenden Kegelschnitte des ersten Büschels berühren, daher enthält g vier Puncte des Ortes.

. . . .

—

CAPITEL VII.

CLASSIFICATION DER FLÄCHEN DRITTER ORDNUNG MIT RÜCKSICHT AUF DIE REALITÄT DER SIEBENUNDZWANZIG GERADEN.

267. Wir haben bewiesen, dass wir durch die 27 Geraden einer allgemeinen Fläche F_3 dritter Ordnung 120 conjugierte Triederpaare legen können (260), und dass umgekehrt die Fläche construiert werden kann, wenn zwei conjugierte Trieder und ein Punct der Fläche gegeben sind (221). Daraus folgt, dass, abgesehen von der Realität der gegebenen oder gesuchten Ele-

[1]) Die Polarebene von $\mathfrak{o}$ in Bezug den Kegel $\mathfrak{oc}_3$ ist unbestimmt, und $\mathfrak{o}$ hat also dieselbe Polarebene E in Bezug auf F_3 und in Bezug auf den zusammengesetzten Ort $E\mathfrak{P}_2$. Die Ebene E ist daher die Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf $\mathfrak{P}_2$, und folglich geht die Polarebene eines beliebigen Punctes von E in Bezug auf die nämliche Quadrifläche durch $\mathfrak{o}$.

mente, es möglich ist, eine beliebige cubische Fläche mit Hilfe zweier Trieder auf die früher (221) gegebene Weise zu erhalten. Wir wollen jetzt auf die Realität oder Nichtrealität der 27 Geraden einer reellen cubischen Fläche Rücksicht nehmen. Indem wir die beiden Trieder zu bilden suchen, die die Fläche zu erzeugen genügen, werden wir ganz natürlich auf die Classification der allgemeinen reellen cubischen Flächen nach der Methode SCHÄFLIS[1]) gelangen.

Um zwei conjugierte Trieder zu construieren, die einen reellen Complex bilden, genügt es zwei dreifache Tangentialebenen T, T' zu finden (260), die reell oder imaginär conjugiert sind, und sich in einer nothwendigerweise reellen Geraden schneiden, die nicht auf der Fläche liegt. Die drei Geraden der Fläche auf T und die drei in T' enthaltenen Geraden schneiden sich zu zwei und zwei in den drei Puncten, in denen die Gerade TT' die Fläche durchdringt und bestimmen auf diese Weise drei Ebenen $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}', \mathfrak{T}''$, die sämmtlich reell sind, oder wenigstens die eine reell und die beiden andern imaginär conjugiert, genau wie die genannten drei Puncte. Jede dieser Ebenen $\mathfrak{T}$ schneidet die Fläche in einer andern Geraden, und diese drei neuen Geraden liegen in einer einzigen reellen Ebene T''. Die beiden Tripel von Ebenen $TT'T''$, $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{T}''$ bilden die gesuchten Trieder.

Nun behaupte ich, dass, solange die Fläche als reell vorausgesetzt wird, es immer möglich ist, zwei dreifache Tangentialebenen zu finden, welche der vorgeschriebenen Bedingung genügen. Dies ist klar, wenn die 27 Geraden sämmtlich reell sind; wir nehmen deshalb an, es gäbe imaginäre Gerade, die natürlich zu zwei und zwei imaginär conjugiert sind.

Zunächst seien a_1, b_3 zwei imaginär conjugierte Gerade, die in derselben Ebene [2]) liegen, die reell sein muss, dann gehen durch a_1 vier andere imaginäre Ebenen und durch b_3 ihre Conjugierten. Zwei dieser conjugierten Ebenen, eine durch a_1 und die andere durch b_3, genügen offenbar der Aufgabe. Denn die beiden Ebenen gemeinsame Gerade kann nicht auf der Fläche liegen, da andernfalls drei Gerade sich in demselben Puncte der Fläche schneiden müssten, der also für die Fläche ein Doppelpunct wäre.

Seien zweitens b_2, b_3 zwei imaginäre conjugierte Gerade, die nicht in derselben Ebene liegen; $a_1, a_4, a_5, a_6, c_{23}$ die fünf Geraden, welche dieselben schneiden, und die einen reellen Complex bilden. Es muss also unter denselben eine ungerade Zahl reeller Geraden geben. Sind die fünf Geraden sämmtlich reell, so geht durch jede von ihnen wenigstens eine reelle Ebene; unter diesen fünf Ebenen ist es nun immer möglich, zwei auszuwählen, welche der verlangten Bedingung Genüge leisten. Sei in der That $a_1 b_2 c_{14}$ die reelle Ebene durch a_1; wäre dann die Ebene $c_{23} c_{15} c_{64}$ oder die Ebene $c_{23} c_{16} c_{45}$

[1]) *On the distribution of surfaces of the third order into species etc.* (Philosophical Transactions 1863).

[2]) Man lese stets *dreifache Tangentialebene.*

14*

reell, so hätte man schon die beiden gesuchten Ebenen. Wäre dagegen nur die Ebene $c_{23}c_{14}c_{56}$ durch c_{23} reell, so müsste die Gerade c_{14}, da sie auf zwei reellen Ebenen läge, reell sein. Also ist auch c_{56} eine reelle Gerade und daher wäre die Ebene $a_5b_6c_{56}$ reell. Somit würden die Ebenen $a_1b_4c_{14}$, $a_5b_6c_{56}$ das verlangte Paar bilden.

Gibt es unter den fünf Geraden, die b_2 und b_3 schneiden, zwei imaginär conjugierte a_1, c_{23}, so sind die Ebenen a_1b_3, b_3c_{23} imaginär conjugiert und schneiden sich in einer Geraden, die nicht auf der Fläche liegt.

Wir schliessen daher, dass jede reelle allgemeine Fläche dritter Ordnung mit Hilfe zweier Trieder gebildet werden kann, welche folgende drei Fälle darbieten.

1. Die Trieder sind aus sechs reellen Ebenen gebildet; 2. das eine Trieder ist vollständig reell, während das andere aus einer reellen Ebene und zwei imaginär conjugierten Ebenen besteht; 3. jedes Trieder besitzt eine reelle Ebene und zwei imaginär conjugierte Ebenen.

268. Erster Fall. Da die beiden Trieder von sechs reellen Ebenen gebildet werden, so schneiden sich diese in neun reellen Geraden:

$$\begin{array}{l} a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ; \\ b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3\ ; \\ c_{23},\ c_{31},\ c_{12}. \end{array}$$

Das reelle durch die drei Geraden b_1, b_2, b_3 bestimmte Hyperboloid schneidet die cubische Fläche in drei neuen Geraden a_4, a_5, a_6 (258), die entweder sämmtlich reell sind, oder die eine reell die beiden andern imaginär conjugiert. Wir unterscheiden beide Fälle.

α) Die Geraden a_4, a_5, a_6 sind reell. Dann geben die Ebenen

$$\begin{array}{l} b_1a_4,\ b_1a_5,\ b_1a_6\ ; \\ b_2a_4,\ b_2a_5,\ b_2a_6\ ; \\ b_3a_4,\ b_3a_5,\ b_3a_6 \end{array}$$

neun weitere reelle Gerade:

$$\begin{array}{l} c_{14},\ c_{15},\ c_{16}\ ; \\ c_{24},\ c_{25},\ c_{26}\ ; \\ c_{34},\ c_{35},\ c_{36}\ , \end{array}$$

und die Ebenen

$$\begin{array}{l} c_{13}c_{24},\ c_{13}c_{25},\ c_{13}c_{26} \\ a_3c_{34},\ a_3c_{35},\ a_3c_{36} \end{array}$$

schneiden die Fläche in sechs neuen reellen Geraden:

$$\begin{array}{l} c_{56},\ c_{46},\ c_{45}\ ; \\ b_4,\ b_5,\ b_6\ . \end{array}$$

In diesem Falle hat man also 27 reelle Gerade.

β) Es sei a_5 eine reelle Gerade und a_4, a_6 imaginär conjugiert. Die reellen Ebenen

$$b_1 a_5\,,\ b_2 a_5\,,\ b_3 a_5$$

geben drei weitere reelle Gerade:

$$c_{15}\,,\ c_{25}\,,\ c_{35}\,,$$

und die reellen Ebenen

$$c_{13} c_{25}\,,\ a_3 c_{35}$$

geben zwei andere reelle Gerade:

$$c_{46}\ ,\ b_5 .$$

Die imaginär conjugierten Ebenenpaare

$$b_1 a_4\,,\ b_1 a_6;$$
$$b_2 a_4\,,\ b_2 a_6\,;$$
$$b_3 a_4\,,\ b_3 a_6$$

geben die imaginär conjugierten Geradenpaare:

$$c_{14}, c_{16};$$
$$c_{24}, c_{26};$$
$$c_{34}, c_{36}.$$

Endlich geben die imaginär conjugierten Ebenenpaare

$$a_1 c_{14}\,, a_1 c_{16}\,;$$
$$c_{23} c_{14}, c_{23} c_{16}$$

zwei andere Paare imaginär conjugierter Geraden:

$$b_4,\ b_6$$
$$c_{56}, c_{54} .$$

Man hat also 15 reelle Gerade und 15 reelle Ebenen: 3 reelle Ebenen durch jede reelle Gerade und 3 reelle Gerade in jeder reellen Ebene. Zwei imaginär conjugierte Gerade schneiden sich nicht.

269. Zweiter Fall. Ein Trieder ist vollständig reell, das zweite hat eine reelle Seitenfläche, die beiden andern sind imaginär conjugiert. Die Ebenen des ersten Trieders werden von der reellen Seitenfläche des zweiten in drei reellen Geraden:

$$b_1\,,\ c_{13}\,, a_3$$

geschnitten, und von den imaginären Seitenflächen desselben Trieders in drei imaginär conjugierten Geradenpaaren:

$$b_2\,,\ c_{23}\,;$$
$$b_3\,,\ a_1\ ;$$
$$a_2\,,\ c_{12} .$$

Die imaginär conjugierten Hyperboloide, die durch die Geraden (b_1, b_2, b_3), (b_1, c_{23}, a_1) bestimmt sind, schneiden die cubische Fläche in zwei Tripeln imaginärer Geraden

$$(a_4, a_5, a_6), (c_{14}, c_{15}, c_{16}),$$

die zu zwei und zwei conjugiert sind. Dieselben bestimmen drei Ebenen $a_4 c_{14}, a_5 c_{15}, a_6 c_{16}$. Wir unterscheiden zwei Fälle, jenachdem diese drei Ebenen sämmtlich reell sind, oder nur eine reell und die beiden andern imaginär conjugiert.

α). Die drei Ebenen sind reell, und also enthält jede von ihnen zwei conjugierte Gerade:

$$a_4, c_{14};$$
$$a_5, c_{15};$$
$$a_6, c_{16}.$$

Die imaginär conjugierten Ebenenpaare

$$b_2 a_4, c_{23} c_{14};$$
$$b_2 a_5, c_{23} c_{15};$$
$$b_2 a_6, c_{23} c_{16};$$
$$b_3 a_4, a_1 c_{14};$$
$$b_3 a_5, a_1 c_{15};$$
$$b_3 a_6, a_1 c_{16}$$

liefern die sechs conjugiert imaginären Geradenpaare:

$$c_{24}, c_{56};$$
$$c_{25}, c_{64};$$
$$c_{26}, c_{45};$$
$$c_{34}, b_4;$$
$$c_{35}, b_5;$$
$$c_{36}, b_6,$$

die in sechs reellen Ebenen liegen, von denen die drei ersten durch c_{13}, die drei andern durch a_3 gehen.

So haben wir in diesem Falle 3 reelle Gerade und 13 reelle Ebenen, von denen eine die 3 reellen Geraden enthält. Die andern gehen zu 4 und 4 durch eben diese 3 Geraden. Zwei imaginär conjugierte Gerade liegen stets in einer (reellen) Ebene.

β). Die sechs imaginären Geraden $a_4, a_5, \ldots, c_{16}$ seien auf folgende Art conjugiert:

$$a_4, c_{14};$$
$$a_5, c_{16};$$
$$a_6, c_{15},$$

woraus folgt, dass die Ebene $a_4 c_{14}$ reell ist, während $a_5 c_{15}$, $a_6 c_{16}$ zwei imaginär conjugierte Ebenen sind. Nun geben die imaginär conjugierten Ebenenpaare

$$\begin{array}{l} b_2 a_4\,,\ c_{23} c_{14}\,; \\ b_3 a_4\,,\ a_1 c_{14}\,; \\ b_2 a_5\,,\ c_{23} c_{16}\,; \\ b_3 a_5\,,\ a_1 c_{16}\,; \\ b_2 a_6\,,\ c_{23} c_{15}\,; \\ b_3 a_6\,,\ a_1 c_{15} \end{array}$$

die sechs imaginär conjugierten Geradenpaare:

$$\begin{array}{l} c_{24}\,,\ c_{56}\,; \\ c_{34}\,,\ b_4\,; \\ c_{25}\,,\ c_{45}\,; \\ c_{35}\,,\ b_6\,; \\ c_{26}\,,\ c_{64}\,; \\ c_{36}\,,\ b_5\,, \end{array}$$

von denen nur die beiden ersten aus Geraden, die sich schneiden, gebildet sind, indem sie so die reellen Ebenen $c_{24} c_{56}$, $c_{34} b_4$ bilden, die bezüglich durch c_{13}, a_3 gehen.

Dieser Fall bietet also 3 reelle Gerade und 7 reelle Ebenen. Eine dieser Ebenen enthält die 3 reellen Geraden, die andern gehen zu 2 und 2 durch eben diese Geraden. Unter den imaginär conjugierten Geraden gibt es 6 conjugierte Geradenpaare, die sich schneiden, und 6 andere conjugierte Geradenpaare, die sich nicht schneiden.

270. Dritter Fall. Jedes der beiden Trieder besitzt eine reelle und zwei imaginär conjugierte Seitenflächen. Die reelle Ebene des ersten Trieders schneidet die Ebenen des zweiten Trieders in einer reellen Geraden:

$$b_1$$

und zwei imaginär conjugierten Geraden:

$$a_3\,,\ c_{13}\,.$$

Die reelle Ebene des zweiten Trieders trifft die imaginären Seitenflächen des ersten Trieders in zwei imaginär conjugierten Geraden:

$$a_2\,,\ c_{12}\,,$$

und die imaginären Ebenen beider Trieder treffen sich gegenseitig in zwei Paaren imaginär conjugierter Geraden:

$$\begin{array}{l} b_2\,,\ b_3\,; \\ a_1\,,\ c_{23}\,. \end{array}$$

Hierbei treffen sich die Geraden desselben Paares nicht.

Das durch die Geraden b_1, b_2, b_3 bestimmte reelle Hyperboloid schneidet die cubische Fläche in drei neuen Geraden a_4, a_5, a_6, für die man zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden hat:

α) Wenn die Geraden

$$a_4\,,\; a_5\,,\; a_6$$

alle drei reell sind, so geben die reellen Ebenen

$$b_1a_4\,,\; b_1a_5\,,\; b_1a_6$$

drei andere reelle Gerade:

$$c_{14}\,,\quad c_{15}\,,\quad c_{16}\,.$$

Die imaginär conjugierten Ebenen

$$\begin{gathered} b_2a_4\,,\; b_3a_4\,;\\ b_2a_5\,,\; b_3a_5\,;\\ b_2a_6\,,\; b_3a_6 \end{gathered}$$

dagegen liefern die drei imaginär conjugierten Geradenpaare:

$$\begin{gathered} c_{24}\,,\; c_{34}\,;\\ c_{25}\,,\; c_{35}\,;\\ c_{26}\,,\; c_{36}\,, \end{gathered}$$

und die imaginär conjugierten Ebenen

$$\begin{gathered} a_1c_{14}\,,\; c_{23}c_{14}\,;\\ a_1c_{15}\,,\; c_{23}c_{15}\,;\\ a_1c_{16}\,,\; c_{23}c_{16} \end{gathered}$$

ergeben drei andere Paare imaginär conjugierter Geraden:

$$\begin{gathered} b_4\,,\; c_{56}\,;\\ b_5\,,\; c_{64}\,;\\ b_6\,,\; c_{45}\,. \end{gathered}$$

Man erhält so 7 reelle Gerade und 5 reelle Ebenen. Diese fünf Ebenen gehen durch eine Gerade; es gibt 3, von denen jede 2 andere reelle Geraden enthält, während jede der 2 andern Ebenen 2 imaginär conjugierte Gerade enthält. Die imaginär conjugierten Geraden der 8 andern Paare schneiden sich nicht.

β) Wenn

$$a_4$$

eine reelle Gerade und

$$a_5\,,\; a_6$$

zwei imaginär conjugierte Gerade sind, so gibt die reelle Ebene b_1a_4 eine dritte reelle Gerade:

$$c_{14}\,,$$

und die imaginär conjugierten Ebenen

$$b_1a_5,\ b_1a_6;$$
$$b_2a_5,\ b_3a_6;$$
$$b_2a_6,\ b_3a_5;$$
$$b_2a_4,\ b_3a_4$$

geben die vier Paar imaginär conjugierte Geraden:

$$c_{15},\ c_{16};$$
$$c_{25},\ c_{36};$$
$$c_{26},\ c_{35};$$
$$c_{24},\ c_{34}.$$

Die imaginär conjugierten Ebenen

$$a_1c_{14},\ c_{23}c_{14};$$
$$a_1c_{16},\ c_{23}c_{15};$$
$$a_1c_{15},\ c_{23}c_{16}$$

geben endlich die drei Paar imaginär conjugierter Geraden:

$$b_4,\ c_{56};$$
$$b_6,\ c_{46};$$
$$b_5,\ c_{45}.$$

Man kommt somit auf einen schon betrachteten Fall zurück (Zweiter Fall, β).

271. Wir können also schliessen, *dass die allgemeine Fläche dritter Ordnung nur fünf verschiedene Arten zulässt unter Berücksichtigung der Realität der 27 Geraden*, nämlich:

1. Art:	27	reelle	Gerade	und	45	reelle	Ebenen,
2. Art:	15	„	„	„	15	„	„ ,
3. Art:	7	„	„	„	5	„	„ ,
4. Art:	3	„	„	„	7	„	„ ,
5. Art:	3	„	„	„	13	„	„ .

Man kann für jede Art die Zahl der Doppelsechs verlangen, die durch zwei reelle oder imaginär conjugierte Sechstupel gebildet sind. Mit Hilfe der Tabelle, die wir oben (229) gegeben haben, findet man leicht Folgendes:

Erste Art. — Alles ist reell.

Zweite Art. — Es gibt 15 reelle Doppelsechs, von denen jedes Sechstupel reell ist und aus 4 reellen und 2 imaginär conjugierten Geraden gebildet wird. Es gibt ein anderes reelles Doppelsechs, dessen Sechstupel imaginär conjugiert sind.

Dritte Art. — Es gibt 6 reelle Doppelsechs, von denen jedes Sechstupel reell ist und aus 2 reellen Geraden und 2 imaginär conjugierten Geradenpaaren besteht. Es existieren 2 andere reelle Doppelsechs, von denen jedes zwei imaginär conjugierte Sechstupel besitzt.

Vierte Art. — Es gibt nur ein reelles Doppelsechs, das aus zwei reellen Sechstupeln besteht. Jedes Sechstupel enthält 3 Paar imaginär conjugierter Geraden. Ausserdem gibt es 3 reelle Doppelsechs, die aus imaginär conjugierten Sechstupeln zusammengesetzt sind.

Fünfte Art. — Es gibt kein reelles Sechstupel, sondern nur 12 reelle Doppelsechs, die sämmtlich aus je zwei imaginär conjugierten Sechstupeln zusammengesetzt sind.

272. Wir haben oben (234) gesehen, dass eine cubische Fläche im Allgemeinen mit Hilfe dreier projectivischer Ebenennetze erzeugt werden kann. Bei dieser Erzeugungsweise leitet man die 27 Geraden aus den sechs Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6$ ab, in denen eine Ebene E durch eine gewisse Raumcurve sechster Ordnung getroffen wird. In der That entsprechen die 27 Geraden (226) den sechs Puncten:

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6,$$

den sechs Kegelschnitten:

$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_6,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$$

und den fünfzehn Geraden:

$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \qquad \mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6,\ \mathfrak{a}_6\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5$$

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_5,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_6,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_5,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_6,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_5,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_6\ .$$

Da der Complex der drei Netze als reell vorausgesetzt ist, ebenso wie die Ebene E, so ist das System der sechs Puncte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6$ ebenfalls reell, und man kann daher folgende Fälle unterscheiden:

1. Wenn die Puncte sämmtlich reell sind, so sind sämmtliche 27 Gerade reell (*Erste Art*).

2. Sind vier Puncte reell und die beiden andern imaginär conjugiert, so erhält man $4+4+6+1=15$ reelle Gerade, die andern sind imaginär und zwar treffen sich je zwei conjugierte Gerade nicht (*Zweite Art*).

3. Sind zwei Puncte reell und die beiden andern paarweise imaginär conjugiert, so erhält man $2+2+1+2=7$ reelle Gerade, 2 Paar imaginär conjugierte Gerade, die sich schneiden, und 8 Paar imaginär conjugierte Gerade, die sich nicht treffen (*Dritte Art*).

4. Sind die sechs Puncte sämmtlich imaginär und paarweise conjugiert, so hat man $1+1+1=3$ reelle Gerade; 6 Paar imaginär conjugierte Gerade, die sich schneiden, und 6 Paar imaginär conjugierte Gerade, die sich nicht treffen (*Vierte Art*).

Es ist nicht möglich die fünfte Art mittelst dieser Erzeugungsweise zu erhalten. Dies entspringt auch aus der Bemerkung, dass bei der fünften Art kein reelles Sechstupel existiert; während die Erzeugung mittelst dreier projectivischer Netze (deren Complex reell ist), uns auf ein Doppelsechs führt, dessen Sechstupel (durch die Geraden gebildet, welche den sechs Puncten und den sechs Kegelschnitten entsprechen) nothwendigerweise reell sind [1]).

Wir wollen jetzt zu beweisen versuchen, dass, obgleich die Erzeugung durch projectivische Netze nur die vier ersten Arten ergibt, es eine andere Erzeugungsweise gibt, die geeignet ist, alle fünf Arten zu liefern. Hierzu müssen wir aber vorher die möglichen Fälle discutieren, die bei dem Durchschnitt zweier Quadriflächen eintreten können, die sich in keinem Puncte berühren.

273. Zwei Flächen zweiter Ordnung, die keinen Berührungspunct haben, schneiden sich in einer Raumcurve vierter Ordnung, durch welche vier Quadrikegel gehen. Die Scheitel dieser Kegel sind zugleich die Scheitel des allen durch die Raumcurve gehenden Quadriflächen gemeinsamen conjugierten Tetraeders. Diese Flächen bilden ein Büschel, das heisst, durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{x}$ des Raumes und durch die Raumcurve geht eine einzige Quadrifläche. Die beiden geradlinigen Generatrixen dieser Fläche, die durch $\mathfrak{x}$ gehen, sind die beiden Geraden, welche man vom Puncte $\mathfrak{x}$ aus so ziehen kann, dass sie die Curve zweimal schneiden.

Jeder Kegel der durch die Raumcurve geht und seinen Scheitel in einem Puncte der Curve hat, ist dritter Ordnung und folglich ist die Centralprojection der Raumcurve auf einer Ebene, wenn das Auge auf der Curve angenommen ist, eine allgemeine Curve dritter Ordnung.

Aus den Eigenschaften dieser ebenen Perspectivcurve kann man eine grosse Zahl von Eigenschaften der Raumcurve vierter Ordnung (und vom Geschlecht 1 (237)) herleiten. Z. B.: Durch einen beliebigen Punct der cubischen Plancurve kann man an dieselbe vier Tangenten ziehen, deren Doppelverhältniss constant ist (Doppelverhältniss der cubischen Plancurve). Man kann folglich durch jede Gerade, welche auf der Raumcurve in zwei Puncten $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ aufsteht, an dieselbe vier Tangentialebenen legen. Ist $\mathfrak{o}$ das Auge und man lässt $\mathfrak{o}'$ sich bewegen, so bleibt das Doppelverhältniss dieser vier Ebenen unveränderlich, und wird also auch nicht variieren, wenn $\mathfrak{o}'$ fest ist und $\mathfrak{o}$ veränderlich. Das Verhältniss bleibt also auch dann dasselbe, wenn man

[1]) Betrachtet man eine cubische Fläche F_3 als gemischte Polarfläche zweier Ebenen E, E' in Bezug auf eine Fundamentalfläche derselben Ordnung (187), so kommt man auf ein Doppelsechs, dessen Geraden den Durchschnitten der gegebenen Ebenen mit zwei Raumcurven sechster Ordnung bezüglich entsprechen. Sind die gegebenen Ebenen imaginär conjugiert, so ist es ebenso mit den beiden Sechstupeln und folglich könnte es möglich scheinen, dass man auf diese Weise auch die fünfte Art erhalten könnte. Diese Illusion verschwindet aber sogleich, wenn man beachtet, dass die homologen Geraden zweier Doppelsechs, die imaginär conjugiert sind, sich nicht schneiden, während bei der fünften Art zwei imaginär conjugierte Gerade stets in derselben Ebene liegen.

die Sehne $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ auf irgend welche Weise verrückt. Daraus folgt, dass, wenn das Auge die Raumcurve durchläuft, das Doppelverhältniss der cubischen Perspectivcurve constant bleibt. Man kann dieser constanten Zahl den Namen *Doppelverhältniss der Raumcurve* geben.

274. Man kann eine Raumcurve $\mathfrak{c}_4$ vierter Ordnung (Geschlecht 1) als unvollständigen Durchschnitt einer Fläche S zweiter Ordnung und eines Kegels K dritter Ordnung ansehen, dessen Scheitel $\mathfrak{o}$ ein Punct von $\mathfrak{c}_4$ ist. Die beiden Generatrixen von S, die durch $\mathfrak{o}$ gehen, schneiden die Raumcurve nochmals und gehören also auch dem Kegel K an; das heisst, sie bilden mit $\mathfrak{c}_4$ den vollständigen Durchschnitt der Orte S und K. Die Ebene dieser Generatrixen berührt S in $\mathfrak{o}$ und enthält also die Tangente t von $\mathfrak{c}_4$ in diesem Puncte, eine Gerade, die ebenfalls eine Generatrix des Kegels K ist. Die Osculationsebene von $\mathfrak{c}_4$ in $\mathfrak{o}$ schneidet die Curve in einem andern Puncte $\mathfrak{o}'$, also berührt diese Ebene den Kegel K längs t und schneidet ihn in der Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$.

Liegt das Auge in $\mathfrak{o}$, so ist die Centralprojection von $\mathfrak{c}_4$ eine cubische Curve (Basis des Kegels K). Es sei $\mathfrak{w}$ die Spur von t auf der Zeichnungsebene, dann sind die Tangenten der cubischen Plancurve, die von $\mathfrak{w}$ ausgehen, die Spuren der vier Tangentialebenen von $\mathfrak{c}_4$, die man durch t legen kann. Nun berühren diese Ebenen die Raumcurve in zwei Puncten, von denen einer $\mathfrak{o}$ ist, sie gehen also bezüglich durch die Scheitel der vier Quadrikegel, auf denen $\mathfrak{c}_4$ liegt, da diese Kegel die vollständige Enveloppe der Bitangentialebenen von $\mathfrak{c}_4$ bilden. Folglich haben wir den Satz: *Das Doppelverhältniss von vier Ebenen, welche $\mathfrak{c}_4$ in einem beliebigen Puncte berühren und bezüglich durch die Scheitel der vier Quadrikegel gehen, ist gleich dem Doppelverhältniss der Raumcurve* und ist also eine constante Zahl.

275. Umgekehrt kann eine gegeb enecubische Plancurve als Centralprojection einer Raumcurve vierter Ordnung (Geschlecht 1) angesehen werden, die durch den Augenpunct $\mathfrak{o}$ geht. Sei $\mathfrak{w}$ ein beliebiger Punct der cubischen Plancurve, und es schneide eine durch $\mathfrak{w}$ gezogene Gerade die Curve in zwei andern Puncten $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2$, dann trifft der Kegel, dessen Scheitel der Punct $\mathfrak{o}$ ist, und dessen Basis die cubische Plancurve darstellt, eine beliebig durch die Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{w}_1, \mathfrak{o}\mathfrak{w}_2$ gelegte Quadrifläche in einer Raumcurve vierter Ordnung, welche in $\mathfrak{o}$ von der Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{w}$ berührt wird.

276. Sind die beiden Quadriflächen (273) reell, so kann ihr Durchschnitt reell oder imaginär sein. Unter der ersten Voraussetzung, besteht er entweder in *einem einzigen Zug* (aus *einem Stück*), oder er kann auch der Complex zweier zusammengehöriger *Züge* (*Stücke*) sein, welche keinen Punct gemein haben, selbst nicht in unendlicher Entfern ıng. Wir müssen diese drei Fälle separat untersuchen.

277. Ist der Durchschnitt $\mathfrak{c}_4$ zweier Quadriflächen eine *monogrammische* Curve (das heisst mit einem Zug), so besteht ihre Perspectivcurve (das Auge liegt immer in einem Puncte der Raumcurve) auch aus einem Zuge, das heisst, sie bildet eine Schlangenlinie mit drei Wendepuncten [1]. Man weiss nun aber [2], dass eine solche cubische Plancurve ein imaginäres Doppelverhältniss hat, das heisst mit andern Worten, durch einen beliebigen Punct der cubischen Curve kann man an dieselbe nur zwei reelle Tangenten ziehen. Also (274) gibt es unter den vier Tangentialebenen von $\mathfrak{c}_4$ in einem beliebigen ihrer Puncte, die bezüglich durch die Scheitel der vier Quadrikegel gehen (welche den Büschel angehören, dessen Basis $\mathfrak{c}_4$ ist), nur zwei relle, das heisst, *von den vier Kegeln sind nur zwei reell.*

Aus der Eigenschaft der cubischen Perspectivcurve nur zwei reelle Tangenten von einem beliebigen ihrer Puncte zuzulassen, folgt ausserdem, *dass man durch jede auf* $\mathfrak{c}_4$ *in zwei* reellen, verschiedenen oder zusammenfallenden *Puncten aufstehende Gerade an diese Curve zwei und zwar nur zwei reelle Tangentialebenen legen kann.* Nach dem Gesetze der Continuität besteht diese Eigenschaft auch noch für eine Gerade, die auf $\mathfrak{c}_4$ in zwei imaginär conjugierten Puncten aufsteht.

Das conjugierte Tetraeder hat zwei reelle Scheitel und folglich zwei reelle Seitenebenen. Jede reelle Ebene enthält einen reellen Scheitel. Also schneidet jede reelle Seitenfläche $\mathfrak{c}_4$ in zwei reellen Puncten, das heisst, sie schneidet den Quadrikegel, dessen Scheitel auf dieser Seitenfläche liegt in zwei Geraden, von denen eine den Schnitt des andern Kegels in zwei reellen Puncten trifft.

Die reellen Kegel zweiter Ordnung, die durch $\mathfrak{c}_4$ gehen, bilden die Grenze zwischen den windschiefen Flächen und den nicht geradlinigen Flächen des Büschels, dessen Basis $\mathfrak{c}_4$ ist. Im vorliegenden Falle ist es leicht zu sehen, *dass jede Quadrifläche des Büschels, welche durch einen Punct des Raumes ausserhalb oder innerhalb beider reeller Kegel geht, windschief ist, während die Quadrifläche, die durch einen beliebigen Punct des Raumes innerhalb des einen Kegels und ausserhalb des andern geht, keine Regelfläche ist.*

278. Der Durchschnitt $\mathfrak{c}_4$ sei jetzt eine *digrammische* Curve (das heisst, aus zwei Stücken). In diesem Falle ist die cubische Perspectivcurve aus einem Oval [3]) und einer Schlangenlinie mit drei Wendepuncten zusammengesetzt. Es sei $\mathfrak{w}$ auf der Zeichenebene die Spur der Geraden, welche $\mathfrak{c}_4$ im Augenpuncte $\mathfrak{o}$ berührt (275), dann sind die von $\mathfrak{w}$ an die cubische Curve gezogenen Tangenten die Spuren der vier Ebenen, welche $\mathfrak{c}_4$ in $\mathfrak{o}$ berühren

1) Wir betrachten die Stetigkeit der Curve durch den Durchgang durch das Unendliche nicht unterbrochen. Eine typische Form dieser Gattung von cubischen Plancurven ist NEWTON's *parabola pura (Enumeratio linearum tertii ordinis).*

2) Giornale di Matematiche, T. 2.° (Napoli 1864) p. 78.

3) Wir wenden diese Benennung nach BELLAVITIS auch auf hyperbolische und parabolische Formen an. Eine typische Form dieser Gattung ist NEWTON's *parabola campaniformis cum ovali.*

und bezüglich durch die Scheitel des conjugierten Tetraeders gehen (274). Nun sind die vier Tangenten der cubischen Curve, die von $\mathfrak{w}$ ausgehen, alle imaginär oder alle reell, je nachdem dieser Punct dem Oval oder der Schlangenlinie angehört; also *sind die Scheitel des conjugierten Tetraeders* (das heisst, die Scheitel der vier Quadrikegel die durch $\mathfrak{c}_4$ gehen) *sämmtlich imaginär oder sämmtlich reell, jenachdem das Perspectivbild des Zuges auf welchem das Auge gedacht wird, ein Oval oder eine Schlangenlinie ist.*

Es folgt daraus, dass, wenn die Curve $\mathfrak{c}_4$ gegeben ist, das Perspectivbild des Zuges, auf dem das Auge sich befindet, was auch der gewählte Zug ist, immer ein Oval oder immer eine Schlangenlinie ist. Wir haben also zwei Fälle zu unterscheiden jenachdem das conjugierte Tetraeder vollständig reell oder vollständig imaginär ist.

279. Ist das Tetraeder ganz imaginär, ist also $\mathfrak{w}$ ein Punct des Ovals, so schneidet eine beliebige, durch den Punct des Auges gelegte Ebene die Curve $\mathfrak{c}_4$ in drei weitern Puncten (von denen zwei imaginär werden können), und ihre Perspectivbilder gehören entweder sämmtlich der Schlangenlinie an, oder einer gehört diesem Zweige an, und die beiden andern dem Oval. *Trifft also eine Ebene die Curve $\mathfrak{c}_4$ in vier reellen Puncten, so gehören drei dieser Puncte ein und demselben Zuge an und der vierte dem andern Zuge; trifft aber eine Ebene die Curve $\mathfrak{c}_4$ nur in zwei reellen Puncten, so liegt davon stets auf jedem Stücke ein Punct.* Daraus folgt, dass eine Tangentialebene in einem Puncte die Curve in zwei weitern Puncten schneidet, die auf verschiedenen Stücken liegen; dass eine Osculationsebene des einen Stückes das andere Stück schneidet, und dass keine reelle Ebene existiert, welche die Curve in zwei Puncten berührt oder dieselbe in vier sämmtlich imaginären oder sämmtlich zusammenfallenden Puncten trifft.

Weiter folgt aus dem eben für die cubische Perspectivcurve Bemerkten, *dass durch keine Gerade, welche auf der Curve in zwei* (reellen oder imaginär conjugierten) *Puncten desselben Stückes aufsteht, eine reelle Tangentialebene geht, welche noch anderswo die Curve berührt, und dass durch jede Gerade, die auf beiden Stücken aufsteht, sich immer vier reelle Tangentialebenen legen lassen.*

Ist ein Tetraeder einer Quadrifläche conjugiert, so trifft jede Generatrix der Fläche, wenn sie eine Kante schneidet, auch die Gegenkante, und folglich enthält die Fläche die vier Geraden, in denen sich die vier Tangentialebenen schneiden, welche man durch zwei Gegenkanten legen kann. Wenn das Tetraeder (wie wir jetzt voraussetzen wollen) aus zwei Paar imaginär conjugierten Ebenen besteht, so gibt es nichtsdestoweniger zwei reelle Gegenkanten, von denen jede der Durchschnitt zweier Tangentialebenen der Fläche ist. Diese Ebenen sind aber reell, denn sie müssen mit zwei Seitenebenen des Tetraeders, die imaginär conjugierte Ebenen sind, ein harmonisches System bilden. Folglich sind die vier Durchschnittsgeraden der beiden Paare von Tangentialebenen reell, und also die Fläche windschief.

Somit sind im gegenwärtigen Falle alle durch $\mathbf{c}_4$ *gehenden Quadriflächen windschief,* das heisst, durch jeden Punct des Raumes kann man zwei reelle Gerade legen, welche die Curve zweimal schneiden, und zwar mindestens die eine in zwei reellen Puncten.

280. Wir setzen jetzt voraus, unsere digrammische Raumcurve $\mathbf{c}_4$ entspreche einem völlig reellen conjugierten Tetraeder, das heisst, sie möge auf vier reellen Quadrikegeln liegen. Eine durch das Auge willkürlich gelegte Ebene schneidet dann $\mathbf{c}_4$ in drei andern Puncten (zwei können imaginär werden) und ihre Perspectivbilder fallen entweder alle drei auf die Schlangenlinie oder eines auf diesen Zweig, und die beiden andern auf das Oval. *Wenn also eine Ebene die Curve* $\mathbf{c}_4$ *in vier reellen Puncten schneidet, so können dieselben sämmtlich ein und demselben Zweige angehören, oder zwei dem einen und zwei dem andern, und wenn eine Ebene die Curve nur in zwei reellen Puncten trifft, so gehören dieselben stets zu einem Zug.* Daraus folgt, dass eine Osculationsebene eines Zuges denselben Zug nochmals trifft.

Aus der Betrachtung der vier Tangenten der cubischen Perspectivcurve, die von einem ihrer Puncte ausgehen, zieht man weiter das Resultat, *dass man durch jede Gerade, welche auf der Curve in zwei* (reellen oder imaginär conjugierten) *Puncten desselben Zuges aufsteht, vier Tangentialebenen legen kann, von denen zwei den einen Zug und zwei den andern berühren, während durch eine Gerade, die auf beiden Zügen aufsteht, keine reelle Tangentialebene hindurchgeht.*

Jede Ebene des conjugierten Tetraeders schneidet die Curve $\mathbf{c}_4$ in vier Puncten, Scheitel eines vollständigen Vierecks, dessen Gegenseiten sich in drei reellen Puncten (Scheitel des Tetraeders) treffen. Diese vier Durchschnittspuncte sind daher alle reell oder alle imaginär. Wenn aber andererseits ein Trieder einem Quadrikegel conjugiert ist, so gibt es eine Fläche des Trieders, welche den Kegel nicht trifft; also *schneiden zwei Seitenebenen des Tetraeders die Curve* $\mathbf{c}_4$ *in vier reellen Puncten und die beiden andern in vier imaginären Puncten*

Es ist leicht zu sehen, dass *jede Quadrifläche* des Büschels, dessen Basis $\mathbf{c}_4$ ist, *die durch einen beliebigen Punct des Raumes gelegt ist, der innerhalb oder ausserhalb sämmtlicher vier Kegel sich befindet, oder auch des Raumes, der innerhalb zweier Kegel liegt, aber ausserhalb der beiden andern, eine Regelfläche ist; während jede Quadrifläche, welche durch einen Punct gelegt ist, der* $\left\{\begin{matrix}\textit{innerhalb}\\ \textit{ausserhalb}\end{matrix}\right\}$ *des einen Kegels und* $\left\{\begin{matrix}\textit{ausserhalb}\\ \textit{innerhalb}\end{matrix}\right\}$ *der drei andern liegt, eine nicht windschiefe Fläche darstellt.* Weiter kann man durch einen beliebigen Punct des Raumes, der innerhalb oder ausserhalb sämmtlicher vier Kegel liegt, zwei Gerade ziehen, die jede in zwei reellen oder imaginär conjugierten Puncten desselben Zuges der Curve $\mathbf{c}_4$ aufsteht, während durch jeden Punct des Raumes, der innerhalb zweier Kegel liegt und ausserhalb der beiden andern, zwei Gerade gehen, die jede den einen und den andern Zug schneidet.

281. Wir nehmen endlich an, die Curve $\mathfrak{c}_4$ sei imaginär. In diesem Falle schneidet jede reelle Ebene die Curve $\mathfrak{c}_4$ in vier imaginären Puncten, Scheiteln eines vollständigen Vierecks, welches zwei reelle Seiten besitzt, während die beiden andern Paare von Gegenseiten nur den Durchschnittspunct reell haben. Es gibt also im Raume eine unbegrenzte Zahl von Puncten, durch die man zwei reelle Gerade ziehen kann, welche die Curve in zwei (natürlich imaginär conjugierten) Puncten treffen; und es gibt auch eine unbegrenzte Zahl von Puncten, für welche diese Geraden imaginär conjugiert sind. Es gibt daher eine reelle Fläche, den Ort der Puncte, für welche dieselben zwei Geraden zusammenfallen. Dieser Ort ist im Allgemeinen durch die vier Quadrikegel gebildet, welche durch $\mathfrak{c}_4$ gehen; in unsrem Falle gibt es daher wenigstens zwei reelle Kegel.

Das conjugierte Tetraeder ist vollständig reell. In der That, ist $\mathfrak{a}$ der Scheitel eines reellen Kegels, so schneidet die Polarebene von $\mathfrak{a}$ (in Bezug auf die Quadriflächen des Büschels von dem $\mathfrak{c}_4$ die Basis bildet) die Curve $\mathfrak{c}_4$ in einem imaginären Viereck, dessen Gegenseitenpaare drei reelle Durchschnittspuncte $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ haben. Nun ist aber $\mathfrak{abcd}$ gerade das conjugierte Tetraeder.

Beachtet man ferner, dass jede Seitenebene des Tetraeders einen der drei Kegel, deren Scheitel sie enthält, in zwei reellen Geraden schneidet und jeden der beiden andern in zwei imaginär conjugierten Geraden, und dass von den drei in den Scheitel eines reellen Kegels zusammenlaufenden Ebenen nur zwei diesen Kegel in reellen Geraden schneiden können, so sieht man leicht, dass *nur zwei Kegel reell sind*; die beiden andern, obwohl ihre Scheitel reell sind, sind imaginär.

Die beiden reellen Kegel liegen völlig ausser einander. *Die Flächen* des Büschels, dessen Basis $\mathfrak{c}_4$ ist, *welche durch die Puncte des Raumes, der ausserhalb beider Kegel liegt, gehen, sind windschief, dagegen gehen durch die innerhalb beider Kegel liegenden Puncte nur nicht geradlinige Quadriflächen des Büschels.*

282. *Somit gibt es drei verschiedene Arten der allgemeinen Raumcurve vierter Ordnung und vom Geschlechte* 1, nämlich:

1. Fall. — Reelle *monogrammische* Curve: Das conjugierte Tetraeder besitzt zwei reelle Scheitel; es gibt zwei reelle Quadrikegel, die durch die Curve gehen.

2. Fall. — Reelle *digrammische* Curve: Kein Scheitel des Tetraeders ist reell; es existiert kein reeller Kegel.

3. Fall. — Reelle *digrammische* Curve: Das Tetraeder hat alle vier Scheitel reell, welche auch vier reelle Kegel ergeben.

Weiter liefert die Durchschnittscurve zweier reeller Quadriflächen, die sich in keinem Puncte berühren, einen andern möglichen Fall:

4. Fall. — Imaginäre Curve: Das Tetraeder hat alle vier Scheitel reell, aber es gibt nur zwei reelle Kegel.

283. Wir kehren jetzt zu der allgemeinen cubischen Fläche F_3 zurück und bemerken nochmals, dass in allen fünf Arten, welche dieselbe darbieten kann (271), es immer drei reelle Gerade gibt, die in derselben Ebene liegen. Diese Geraden seien a, b, c. Die erste Polarfläche des Durchschnittspunctes $\mathfrak{o}$ von b und c ist eine windschiefe Quadrifläche, die nicht blos durch die Geraden b, c geht, sondern F_3 auch noch in einer Raumcurve $\mathfrak{c}_4$ vierter Ordnung (Geschlecht 1) schneidet, Ort der Puncte, in denen F_3 von Geraden berührt wird, die von $\mathfrak{o}$ ausgehen. Diese Raumcurve trifft jede der Geraden b, c in zwei Puncten, die offenbar diejenigen sind, in welchen eine solche Gerade zwei Kegelschnitte auf der Fläche berührt.

Die Curve $\mathfrak{c}_4$ ist die Basis eines Büschels von Quadriflächen, die F_3 in Kegelschnitten schneiden, deren Ebenen durch die Gerade a gehen (255): also bilden diese Quadriflächen und die Ebenen durch a zwei projectivische Büschel, die zur Erzeugung der Fläche F_3 benutzt werden können. Wir weisen weiter darauf hin (255), dass die Ebenen durch a die Polarebenen des Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die entsprechenden Quadriflächen sind, dass also die cubische Fläche durch die Raumcurve $\mathfrak{c}_4$ und den Punct $\mathfrak{o}$ vollständig bestimmt ist.

Die andern 24 Geraden liegen zu zwei und zwei in den 12 dreifachen Tangentialebenen, welche durch a, b, c gehen. Unter diesen sind die 4 Ebenen durch a durch die Scheitel der 4 Quadrikegel bestimmt, die durch $\mathfrak{c}_4$ gehen, die andern sind die Ebenen, welche man durch b und c so ziehen kann, dass sie $\mathfrak{c}_4$ anderswo berühren (223).

Jetzt gilt es, den Beweis zu führen, dass man, wenn man die Curve $\mathfrak{c}_4$ und den Punct $\mathfrak{o}$ zweckmässig wählt, alle fünf Arten der cubischen Flächen mittelst dieser Erzeugungsweise herleiten kann.

284. *Es sei die Curve* $\mathfrak{c}_4$ *reell, digrammisch und liege auf vier Quadrikegeln; der Punct* $\mathfrak{o}$ *sei ausserhalb aller vier Kegel gewählt:* In diesem Falle gehen durch $\mathfrak{o}$ nicht blos zwei reelle Sehnen b, c von $\mathfrak{c}_4$ (280), sondern die Polarebenen von $\mathfrak{o}$ schneiden sich in einer Geraden a, welche jeden Kegel in reellen Puncten schneidet. Daraus folgt, dass durch a vier reelle dreifache Tangentialebenen von F_3 gehen (die Polarebenen von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die vier Kegel), von denen jede ausser a noch zwei reelle Gerade enthält. Man kann noch hinzufügen, dass (280) jede der Geraden b, c ein und denselben Zug von $\mathfrak{c}_4$ in zwei (reellen oder imaginären) Puncten schneidet, dass man also durch jede dieser Geraden vier Tangentialebenen an die Raumcurve legen kann, die daher für F_3 dreifach sind. Das ist aber ausschliessliche Eigenschaft der ersten Art der cubischen Flächen (268), und also enthält jede von diesen acht dreifachen Tangentialebenen durch b oder durch c zwei neue reelle Gerade. *Die erzeugte Fläche hat somit 27 reelle Gerade.*

Umgekehrt kann man beweisen, dass die für $\mathfrak{c}_4$ und für den Punct $\mathfrak{o}$ angenommene Lage nothwendig ist, damit die erzeugte Fläche von der ersten Art sei.

285. *Ist die Curve wieder reell, digrammisch und auf vier reellen Quadrikegeln gelegen, aber der Punct* $\mathfrak{o}$ *liegt innerhalb sämmtlicher vier Kegel,* so haben wir noch vier reelle dreifache Tangentialebenen durch jede der Geraden a, b, c (280). Da aber in diesem Falle die Gerade a (Durchschnittsgerade der Polarebenen von $\mathfrak{o}$) vollständig ausserhalb sämmtlicher Kegel liegt, so folgt, dass jede von den vier Ebenen durch diese Gerade, da sie den entsprechenden Kegel nicht in reellen Geraden trifft, F_3 in zwei imaginär conjugierten Geraden schneidet. Dieses Resultat ist eine ausschliessliche Eigenschaft der fünften Art (269), es enthält also jede von den acht Ebenen durch b und c ebenfalls ein imaginär conjugiertes Geradenpaar. *Die erzeugte Fläche enthält somit drei reelle Gerade und zwölf Paar imaginär conjugierte Gerade, die sich schneiden.*

Umgekehrt kann man beweisen, dass man zur Erzeugung einer cubischen Fläche der fünften Art die Curve $\mathfrak{c}_4$ und den Punct $\mathfrak{o}$ auf die eben auseinandergesetzte Weise wählen muss.

286. *Die Curve* $\mathfrak{c}_4$ *sei wieder reell, digrammisch, und liege auf vier reellen Kegeln; der Punct* $\mathfrak{o}$ *aber sei innerhalb zweier Kegel und ausserhalb der beiden andern angenommen;* dann trifft die Gerade a nur die beiden letzten Kegel in zwei reellen Puncten und jede der beiden Geraden b, c steht auf beiden Zügen von $\mathfrak{c}_4$ auf. Daraus folgt (280), dass durch a vier reelle dreifache Tangentialebenen gehen, von denen nur zwei die Fläche F_3 in zwei andern reellen Geraden schneiden; durch b und c aber geht keine einzige reelle dreifache Tangentialebene. Dies ist eine ausschliessliche Eigenschaft der dritten Art. *Die erzeugte Fläche hat also sieben reelle Gerade, zwei Paar imaginär conjugierte Gerade, die sich schneiden, und acht Paar imaginär conjugierte Gerade, die sich nicht schneiden.*

Es gibt noch zwei andere Weisen die cubische Fläche dritter Art zu erhalten: 1. *Wenn* $\mathfrak{c}_4$ *reell, digrammisch und ohne reellen Quadrikegel ist;* $\mathfrak{o}$ *ist in diesem Falle völlig willkürlich;* 2. *Wenn* $\mathfrak{c}_4$ *imaginär ist und der Punct* $\mathfrak{o}$ *ausserhalb der beiden reellen Kegel liegt.*

287. *Es sei* $\mathfrak{c}_4$ *eine reelle monogrammische Curve, und der Punct* $\mathfrak{o}$ *liege ausserhalb der beiden reellen Quadrikegel, welche durch die Curve gehen:* in diesem Falle gibt es (277) zwei reelle Ebenen durch a, von denen jede zwei andere reelle Gerade enthält; ebenso gibt es durch jede der Geraden b, c zwei reelle Ebenen. Das ist eine ausschliessliche Eigenschaft der zweiten Art, und es folgt also, dass jede von den vier reellen Ebenen durch b oder durch c die Fläche F_3 in zwei andern reellen Geraden schneidet. *Die erzeugte Fläche hat also fünfzehn reelle Gerade und sechs Paar imaginär conjugierte Gerade, die sich nicht schneiden.*

Umgekehrt kann man beweisen, dass die für $\mathfrak{c}_4$ und den Punct $\mathfrak{o}$ getroffene Wahl nothwendig ist, um eine cubische Fläche zweiter Art zu erhalten.

288. Endlich nehme man an, *es sei die Curve* $\mathfrak{c}_4$ *reell und monogrammisch, und der Punct* $\mathfrak{o}$ *liege innerhalb beider reeller Kegel.* In diesem Falle gehen (277) durch jede der Geraden a, b, c nur zwei reelle Ebenen, und jede von diesen beiden Ebenen durch a enthält zwei imaginär conjugierte Gerade. Wir treffen hier also auf die vierte Art, und folglich liefert auch jede reelle Ebene durch b oder c zwei imaginär conjugierte Gerade. *Die erzeugte Fläche hat also drei reelle Gerade, sechs Paar imaginär conjugierte Gerade, die sich schneiden, und sechs Paar imaginär conjugierte Gerade, die sich nicht schneiden.*

Und umgekehrt, will man eine cubische Fläche vierter Art erhalten, so muss man die Curve $\mathfrak{c}_4$ und den Punct $\mathfrak{o}$ in der Art auswählen, die wir soeben auseinandergesetzt haben.

289. In dem Vorhergehenden ist überall vorausgesetzt, dass man als Grundlage der Operationen eine dreifache Tangentialebene mit drei *reellen* Geraden ausgewählt habe, und wir haben dann gezeigt, *dass es sodann möglich ist, alle fünf Arten der allgemeinen cubischen Fläche zu erzeugen.*

Wollte man aber von einer reellen dreifachen Tangentialebene ausgehen, die nur eine reelle Gerade a enthält und zwei imaginär conjugierte Gerade b, c, so wäre es nicht mehr möglich, die erste und zweite Art zu erhalten, denn diese Arten lassen kein Paar imaginärer Geraden zu, die sich schneiden. Dagegen kann man die drei andern Arten, wie folgt, construieren:

Die dritte Art: $\mathfrak{c}_4$ *ist reell und digrammisch mit vier reellen Kegeln; der Punct* $\mathfrak{o}$ *liegt ausserhalb dreier Kegel aber innerhalb des vierten;*

Die vierte Art: $\mathfrak{c}_4$ *ist reell und monogrammisch und der Punct* $\mathfrak{o}$ *liegt innerhalb des einen der beiden Kegel und ausserhalb des andern;* endlich

Die fünfte Art: $\mathfrak{c}_4$ *ist reell und digrammisch mit vier reellen Kegeln; der Punct* $\mathfrak{o}$ *liegt innerhalb dreier Kegel und ausserhalb des vierten;* man erhält sie auch, *wenn* $\mathfrak{c}_4$ *imaginär ist, und* $\mathfrak{o}$ *innerhalb des einen reellen Kegels liegt und ausserhalb des andern.*

ZUSATZ ZU NO. 214.

Von den beiden cubischen Curven, welche der Hessiana und zwei conjugierten Ebenen der Involution gemeinschaftlich sind, enthält die eine die Puncte $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}'$ und die andere die Puncte $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}$ (208); folglich sind die beiden cubischen Curven entsprechende Curven (168). Dem ebenen Schnitte, der aus der ersten cubischen Curve und der Geraden p besteht, entspricht (199) das durch die andere cubische Curve und die drei Geraden p_1, p_2, p_3 die im Puncte $\mathfrak{p}$ zusammenlaufen, gebildete System. Folglich:

Die cubischen Curven, die man aus der Hessiana mittelst Ebenen schneidet, welche durch die Gerade p gehen, sind zu zwei und zwei correspondierende Curven. Zwei entsprechende cubische Curven werden vom Puncte $\mathfrak{p}$ aus mittelst desselben Kegels gesehen, der folglich die gemischte cubische Polarfläche der Ebenen beider Curven ist.

Ist die schneidende Ebene eine der Doppelebenen der Involution, so entspricht die cubische Curve, welche dann als Durchschnitt mit der Hessiana resultiert, sich selbst; das heisst, ihre Puncte $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$ sind zu zwei und zwei entsprechend. Offenbar ist diese Curve die Hessiana der cubischen Curve, längs deren die nämliche Ebene die Fundamentalfläche schneidet. Die Polarebene von $\mathfrak{c}$ berührt die Hessiana in $\mathfrak{c}'$ (183) und geht folglich durch $\mathfrak{p}$; also liegen (6) alle Puncte $\mathfrak{c}$ auf der ersten Polarfläche von $\mathfrak{p}$. Daraus schliesst man, dass die erste Polarfläche von $\mathfrak{p}$ aus den Doppelebenen der Involution zusammengesetzt ist, von denen in No. 214 gesprochen wurde.

Wir fügen noch hinzu, dass sämmtliche gemeine und gemischte cubische Polarflächen der durch p gehenden Ebenen in $\mathfrak{p}$ einen Doppelpunct und ausserdem drei andere Doppelpuncte besitzen, die in ein und derselben Ebene durch p und bezüglich auf den Geraden p_1, p_2, p_3 liegen. Eine solche Fläche geht in einen Kegel über, wenn sie sich auf zwei conjugierte Ebenen der obengenannten Involution bezieht.

Druck von J. Drägers Buchdruckerei (C. Feicht) in Berlin.