ZWEITER THEIL.

CAPITEL I.

POLARFLÄCHEN IN BEZUG AUF EINE FLÄCHE BELIEBIGER ORDNUNG.

61. Es sei eine beliebige Oberfläche *(Fundamentalfläche)* F_ν der ν-ten Ordnung gegeben, und es sei $\mathfrak{o}$ ein beliebiger im Raume fixierter Punct. Lässt man nun um $\mathfrak{o}$ eine Transversale rotieren, die in einer beliebigen Lage F_ν in ν Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ trifft, so ist der Ort der harmonischen Mittelpuncte ρ-ten Grades des Systems $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\nu$ in Bezug auf den Pol $\mathfrak{o}$ eine Fläche ρ-ter Ordnung, da sie auf jeder durch $\mathfrak{o}$ gezogenen Transversale ρ Puncte besitzt. Eine solche Fläche nennt man die *$(\nu-\rho)$-te Polarfläche* des Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die Fundamentalfläche F_ν. [1])

Oder lässt man um $\mathfrak{o}$ eine Transversalebene rotieren, die in einer gewissen Lage F_ν in einer Curve c_ν der ν-ten Ordnung schneidet, so ist die $(\nu-\rho)$-te Polare von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf c_ν eine andere Curve ρ-ter Ordnung, und der Ort dieser Curve ist eine Fläche ρ-ter Ordnung: die $(\nu-\rho)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν. [2])

Auf diese Weise entspricht dem Puncte $\mathfrak{o}$ eine Zahl von $\nu-1$ Polarflächen in Bezug auf die gegebene Fläche. Die erste Polarfläche ist von der $(\nu-1)$-ten Ordnung, die zweite Polarfläche von der $(\nu-2)$-ten Ordnung, ..., die vorletzte Polarfläche ist eine Oberfläche zweiter Ordnung *(Quadripolarfläche)*, die letzte oder $(\nu-1)$-te Polarfläche endlich ist eine Ebene *(Polarebene)*.

---

[1]) Grassmann, *Theorie der Centralen* (Crelles Journal, Bd. 24. 1842; S. 272). — *Einleitung*, Nr. 68.

[2]) Ist F_ν ein Kegel, und der Pol ein vom Scheitel verschiedener Punct, so sieht man sogleich, wenn man durch den Scheitel und den Pol eine Transversalebene legt, dass jede beliebige Polarfläche wieder ein Kegel ist mit demselben Scheitel als der gegebene (4).

62. Aus dem bekannten Theoreme: [1]) „Ist $\mathfrak{m}$ ein harmonischer Mittel-„punct ρ-ten Grades für das System $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\nu$ in Bezug auf den Pol $\mathfrak{o}$, so „ist umgekehrt $\mathfrak{o}$ ein harmonischer Mittelpunct $(\nu-\rho)$-ten Grades desselben „Systems $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\nu$ in Bezug auf $\mathfrak{m}$ als Pol" folgt:

Ist $\mathfrak{m}$ ein Punct der $(\nu-\rho)$-ten Polarfläche von $\mathfrak{o}$, so ist umgekehrt $\mathfrak{o}$ auf der ρ-ten Polarfläche von $\mathfrak{m}$ gelegen.

Oder auch:

Der Ort eines Poles, dessen ρ-te Polarfläche durch einen gegebenen Punct $\mathfrak{o}$ geht, ist die $(\nu-\rho)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$.

So ist zum Beispiel die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ der Ort der Puncte, deren Polarebenen durch $\mathfrak{o}$ gehen; die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ ist der Ort der Puncte, deren Quadripolarflächen durch $\mathfrak{o}$ gehen; u. s. w. Umgekehrt ist die Polarebene von $\mathfrak{o}$ der Ort der Puncte, deren erste Polarflächen durch $\mathfrak{o}$ gehen; die Quadripolarfläche von $\mathfrak{o}$ ist der Ort der Puncte, deren zweite Polarflächen durch $\mathfrak{o}$ gehen; u. s. w.

63. Aus dem bekannten Satze: [2]) „Sind $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_\rho$ die harmo-„nischen Mittelpuncte ρ-ten Grades des Systems $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\nu$ in Bezug auf „$\mathfrak{o}$ als Pol, so haben die beiden Systeme $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\nu$ und $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_\rho$ in Be-„zug auf den nämlichen Pol dieselben harmonischen Mittelpuncte σ-ten Grades, $\sigma<\rho$," folgt:

Ein beliebiger Pol hat dieselbe Polarfläche in Bezug auf die gegebene Fläche und in Bezug auf jede Polarfläche höherer Ordnung für denselben Pol als Fundamentalfläche angesehen.

Oder mit anderen Worten:

Für einen gegebenen Pol fällt die σ-te Polarfläche in Bezug auf die σ'-te Polarfläche mit der $(\sigma+\sigma')$-ten Polarfläche in Bezug auf die Fundamentalfläche zusammen.

So fällt zum Beispiel die Polarebene von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν zusammen mit der Polarebene in Bezug auf die $(\nu-2)$-te, $(\nu-3)$-te, $(\nu-4)$-te ... Polarfläche desselben Poles; ...; die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν ist die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die erste Polarfläche desselben Punctes; u. s. w.

64. Wenn der Pol $\mathfrak{o}$ auf der Fundamentalfläche liegt, so dass er also den Platz einer der ν Durchschnittspuncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ (61) vertritt, so fällt der harmonische Mittelpunct ersten Grades mit $\mathfrak{o}$ zusammen. Ist aber die Transversale Tangente von F_ν in $\mathfrak{o}$, so sind zwei Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ in $\mathfrak{o}$ vereinigt, und weil in diesem Falle der harmonische Mittelpunct ersten Grades unbestimmt wird, so kann man in diesem Falle jeden Punct

---

1) *Einleitung*, Nr. 12.
2) *Einleitung*, Nr. 13.

der Transversale als solchen betrachten. [1]) Nun ist der Ort der Tangenten von F_ν in $\mathfrak{o}$ eine Ebene, so lange wenigstens $\mathfrak{o}$ kein vielfacher Punct ist; folglich gilt der Satz:

Die Polarebene eines Punctes der Fundamentalfläche ist die Tangentialebene der Fläche in diesem Puncte.

65. Wenn der Pol nicht auf F_ν liegt, aber die Transversale Tangente dieser Fläche ist, so fallen zwei von den Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ in den Berührungspunct zusammen; dieser ist also einer der harmonischen Mittelpuncte des $(\nu-1)$-ten Grades, [2]) also ein Punct der ersten Polarfläche. Man hat folglich den Satz:

Die erste Polarfläche eines beliebigen Punctes $\mathfrak{o}$ *schneidet die Fundamentalfläche in der Berührungscurve zwischen dieser Fläche und dem umgeschriebenen Kegel, dessen Scheitel* $\mathfrak{o}$ *ist.*

Die erste Polarfläche ist von der $(\nu-1)$-ten Ordnung, sie schneidet also F_ν in einer Curve $\nu(\nu-1)$-ter Ordnung. Diese Zahl drückt also auch die Ordnung des umgeschriebenen Kegels aus. [3])

66. Die Classe von F_ν ist die Zahl der Tangentialebenen, die man an diese Fläche durch eine beliebige Gerade $\mathfrak{oo}'$ legen kann, das heisst die Zahl von Ebenen, die durch $\mathfrak{o}'$ gehen und den umgeschriebenen Kegel vom Scheitel $\mathfrak{o}$ berühren. Mit anderen Worten, die Classe von F_ν ist die Classe eines beliebigen umgeschriebenen Kegels, der seinen Scheitel in einem beliebigen Puncte des Raumes hat.

Die Berührungspuncte der Tangentialebenen, die durch die Puncte $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ gehen, liegen in den ersten Polarflächen dieser beiden Pole. Da diese beiden Polarflächen und die Fläche F_ν drei Flächen $(\nu-1)$-ter, $(\nu-1)$-ter, ν-ter Ordnung sind, so haben sie $\nu(\nu-1)^2$ gemeinschaftliche Durchschnittspuncte. Folglich hat man den Satz: [4])

Eine Fläche ν-ter Ordnung ist im Allgemeinen von der $\nu(\nu-1)^2$-ten Classe.

67. Osculiert eine Gerade, die durch den Pol $\mathfrak{o}$ gezogen ist, die Fläche in $\mathfrak{m}$, so ist dieselbe Gerade auch in $\mathfrak{m}$ Tangente der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$, und auch die zweite Polarfläche dieses Punctes geht durch $\mathfrak{m}$. [5]) Umgekehrt ist klar, wenn $\mathfrak{m}$ ein gemeinschaftlicher Punct zwischen F_ν und der ersten und zweiten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ ist, dass dann die Gerade $\mathfrak{om}$ die Fläche F_ν in $\mathfrak{m}$ osculiert. Die Zahl der Geraden, die sich von $\mathfrak{o}$ an F_ν so ziehen lassen, dass sie diese Fläche osculieren, ist daher so gross als die

---

1) *Einleitung*, Nr. 17, 70.

2) *Einleitung*, Nr. 16.

3) Monge, *Application de l'analyse à la géométrie*, § 3. Man vergleiche auch *Correspondance sur l'école polytechnique.* T. 1. 1806; p. 108.

4) Poncelet, *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques* (Crelles Journal, Bd. 4; S. 30).

5) *Einleitung*, Nr. 80.

Zahl der Puncte, welche F_ν und die erste und zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ gemein haben, das heisst gleich $\nu(\nu-1)(\nu-2)$. Diese Geraden sind offenbar stationäre Generatrixen des umgeschriebenen Kegels.

Da wir jetzt wissen, dass der umgeschriebene Kegel von der Ordnung $\nu(\nu-1)$ ist, von der Classe $\nu(\nu-1)^2$ und dass er $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ stationäre Generatrixen hat, so können wir unter Anwendung der Formeln von Pluecker (3) schliessen, dass derselbe ausserdem

$\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$ Doppelgeneratrixen,
$\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu^3-\nu^2+\nu-12)$ Bitangentialebenen und
$4\nu(\nu-1)(\nu-2)$ stationäre Tangentialebenen

besitzt. Wir haben daher den Satz:

Durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{o}$ kann man an eine Oberfläche F_ν

$$\nu(\nu-1)(\nu-2)$$

Osculierende legen, ferner

$$\tfrac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$$

Bitangenten (Tangenten in zwei verschiedenen Puncten)

$$\tfrac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu^3-\nu^2+\nu-12)$$

Bitangentialebenen (in zwei verschiedenen Puncten) *und*

$$4\nu(\nu-1)(\nu-2)$$

stationäre Tangentialebenen (die in zwei unmittelbar folgenden Puncten berühren).

68. Die parabolischen Puncte bilden auf F_ν eine gewisse Curve, *die parabolische Curve,* die von der ersten Polarfläche des Punctes $\mathfrak{o}$ in den Puncten geschnitten wird, in denen F_ν von den stationären Ebenen berührt wird, die durch $\mathfrak{o}$ gehen. Aus der Zahl dieser Ebenen folgt, dass die parabolische Curve von der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in $4\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Puncten getroffen wird. Also gilt der Satz:

Die parabolische Curve ist von der $4\nu(\nu-2)$-ten Ordnung.

Ebenso schliesst man aus der Zahl der Bitangentialebenen:

Die Curve, welche den Ort der Berührungspuncte zwischen F_ν und ihren Bitangentialebenen darstellt, ist von der Ordnung

$$\nu(\nu-2)(\nu^3-\nu^2+\nu-12).$$

Aus denselben oben betrachteten Zahlen folgert man ferner:

Die stationären Ebenen von F_ν haben eine Developpable von der Classe

$$4\nu(\nu-1)(\nu-2),$$

und die Bitangentialebenen haben eine andere Developpable von der Classe

$$\tfrac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu^3-\nu^2+\nu-12)$$

zur einhüllenden Fläche.

69. Liegt der Pol $\mathfrak{o}$ auf der Fundamentalfläche F_ν, so fällt für jede beliebige Lage der Transversale einer der Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ mit $\mathfrak{o}$ zusammen, und folglich ist $\mathfrak{o}$ ein harmonischer Mittelpunct jedes Grades des

Systems $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\nu$ in Bezug auf den Pol $\mathfrak{o}$. Folglich gehen alle Polarflächen von $\mathfrak{o}$ durch diesen Punct.

Ist die durch $\mathfrak{o}$ gezogene Transversale in diesem Puncte Tangente von F_ν, so fallen von den Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ zwei mit $\mathfrak{o}$ zusammen, dieser Punct vertritt also zwei harmonische Puncte jedes beliebigen Grades. [1]) Jede Tangente in $\mathfrak{o}$ an F_ν ist daher in demselben Puncte auch Tangente aller Polaren von $\mathfrak{o}$.

Ist die durch $\mathfrak{o}$ gezogene Transversale eine der beiden Osculierenden von F_ν, so fallen ausserdem drei harmonische Mittelpuncte auf $\mathfrak{o}$, und wir erhalten folglich den Satz:

Liegt der Pol auf der Fundamentalfläche, so hat diese mit sämmtlichen Polarflächen in diesem Puncte die Tangentialebenen und die Osculierenden gemein. [2])

Daraus folgt, dass die beiden Osculierenden von F_ν in $\mathfrak{o}$ die Generatrixen der Quadripolarfläche von $\mathfrak{o}$ sind, die sich in diesem Puncte kreuzen. Wenn $\mathfrak{o}$ ein parabolischer Punct ist, so fallen die beiden Generatrixen zusammen, und man hat daher den Satz:

Die Quadripolarfläche eines parabolischen Punctes ist ein Kegel, der die entsprechende Wendeebene berührt, und die Berührungsgeneratrix ist die Gerade, die in diesem Puncte die Fundamentalfläche osculiert.

Man sieht ausserdem, dass ein parabolischer Punct der Fundamentalfläche diese Eigenschaft, ein parabolischer Punct zu sein, auch für alle Polarflächen desselben Punctes behält.

70. Fällt auf einer Transversale der Pol $\mathfrak{o}$ mit einem der Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ zum Beispiel mit $\mathfrak{a}_1$ zusammen, so sind die harmonischen Mittelpuncte des $(\nu-1)$-ten Grades des Systems in Bezug auf obengenannten Pol der Punct $\mathfrak{a}_1$ und die harmonischen Mittelpuncte des niederen Systems $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ in Bezug auf denselben Pol. [3]) Daraus folgt, dass die erste Polarfläche, sobald der Pol $\mathfrak{o}$ auf der Fundamentalfläche liegt, der Ort der harmonischen Mittelpuncte des $(\nu-2)$-ten Grades des Systems der $\nu-1$ Puncte ist, in denen F_ν ausser in $\mathfrak{o}$ von einer beliebig durch $\mathfrak{o}$ gelegten Transversale geschnitten wird, und analog ist die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ der Ort der harmonischen Mittelpuncte $(\nu-\rho-1)$-ten Grades für das System der obengenannten $\nu-2$ Puncte.

Die Geraden, die sich von $\mathfrak{o}$ so ziehen lassen, dass sie F_ν anderswo berühren, bilden einen Kegel der $[\nu(\nu-1)-2]$-ten Ordnung; denn eine be-

1) *Einleitung,* Nr. 17.

2) Aus demselben Satze über die harmonischen Mittelpuncte (*Einleitung,* Nr. 17) erhält man den Satz: *Wenn eine Gerade mit der Fundamentalfläche einen μ-punctigen Contact hat, so hat sie eine ebenso hohe Berührung in demselben Puncte mit jeder Polarfläche des Berührungspunctes.*

3) *Einleitung,* Nr. 17.

liebig durch $\mathfrak{o}$ gelegte Ebene schneidet F_ν in einer Curve ν-ter Ordnung, an die sich von $\mathfrak{d}$ aus genau $\nu(\nu-1)-2$ Tangenten legen lassen ausser der Tangente durch $\mathfrak{o}$. Das will sagen, dass der umgeschriebene Kegel, der im Allgemeinen von der $\nu(\nu-1)$-ten Ordnung ist, wenn der Scheitel $\mathfrak{o}$ auf die Fläche selbst fällt, sich in die zweimal gezählte Tangentialebene von F_ν in $\mathfrak{o}$ und in einen wirklichen Kegel $[\nu(\nu-1)-2]$-ter Ordnung auflöst. Dieser Kegel ist die Enveloppe der Ebenen, welche F_ν in den Puncten berühren, in welchen sich F_ν und die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ schneiden. Diese beiden Flächen berühren sich aber in $\mathfrak{o}$ und haben dort dieselben Osculierenden, folglich hat die Durchschnittscurve von F_ν mit den ersten Polarflächen von $\mathfrak{o}$, das heisst die Berührungscurve zwischen F_ν und dem umgeschriebenen Kegel vom Scheitel $\mathfrak{o}$ zwei Zweige, die sich in $\mathfrak{o}$ kreuzen, und dort von der Geraden berührt werden, welche in demselben Puncte F_ν osculieren.

Es folgt weiter, dass die Tangentialebene von F_ν in $\mathfrak{o}$ auch den umgeschriebenen Kegel längs der beiden Osculierenden berührt, wie wir es schon anderweitig (33) gefunden haben. Die Ebene und der Kegel haben ausserdem noch $\nu(\nu-1)-2-2.2=(\nu-3)(\nu+2)$ Gerade gemein, und folglich hat man den Satz:

Unter den Geraden, die F_ν in $\mathfrak{o}$ berühren, gibt es $(\nu-3)(\nu+2)$, die F_ν auch anderweitig berühren.

Berühren sich drei Flächen in einem Puncte und haben sie in ihm dieselben Osculierenden, so ist dieser Punct sechs zusammenfallenden Durchschnittspuncten äquivalent. [1]) Die Fundamentalfläche und die erste und zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ haben daher ausser diesem Puncte nur noch $\nu(\nu-1)(\nu-2)-6$ gemeinschaftliche Durchschnittspuncte; das heisst:

Durch $\mathfrak{o}$ gehen $(\nu-3)(\nu^2+2)$ Gerade, die F_ν anderswo osculieren.

Der umgeschriebene Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{o}$ hat nach den Formeln von Pluecker (3), da seine Ordnungszahl gleich $(\nu+1)(\nu-2)$, seine Classe gleich $\nu(\nu-1)^2$ ist, und da er $(\nu-3)(\nu^2+2)$ Cuspidalgeneratrixen hat,

$\frac{1}{2}(\nu-3)(\nu-4)(\nu^2+\nu-2)$ Doppelgeneratrixen,

$4\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Wendeebenen, und

$\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu^3-\nu^2+\nu-12)$ Bitangentialebenen

ausser der Ebene, welche F_ν in $\mathfrak{o}$ berührt.

Diese Zahlen geben an, wieviel Gerade man durch $\mathfrak{o}$ legen kann, so dass sie F_ν anderweitig in zwei verschiedenen Puncten berühren; wieviele Wendeebenen und wieviele Tangentialebenen durch $\mathfrak{o}$ gehen.

71. Hat F_ν einen σ-fachen Punct $\mathfrak{d}$, und man nimmt diesen als Pol, so schneidet eine beliebig durch $\mathfrak{d}$ gelegte Transversale die Fläche in diesem Puncte in σ zusammenfallenden Puncten; σ harmonische Mittelpuncte jedes

---

1) Dies ist klar, wenn man einer der drei Flächen die Tangentialebene substituiert.

beliebigen Grades fallen auf $\mathfrak{d}$, und dieser Punct ist folglich für jede Polarfläche dieses Punctes ein σ-facher Punct. [1]) Daraus folgt:

Die $(\nu-\sigma)$-te Polarfläche von $\mathfrak{d}$ ist ein Kegel σ-ter Ordnung mit dem Scheitel in $\mathfrak{d}$, und die Polarflächen niederer Ordnung desselben Punctes werden unbestimmt.

Ziehen wir durch $\mathfrak{d}$ eine Transversale, die in ihm mit F_ν einen $(\sigma+1)$-punctigen Contact hat, so sind die harmonischen Mittelpuncte des σ-ten Grades unbestimmt, woraus folgt, dass die Transversale vollständig auf der $(\nu-\sigma)$-ten Polarfläche liegt. Hat aber die Transversale in $\mathfrak{d}$ einen $(\sigma+2)$-punctigen Contact mit F_ν, so sind die harmonischen Mittelpuncte sowohl des σ-ten als $(\sigma+1)$-ten Grades unbestimmt, und die Gerade liegt daher sowohl auf der $(\nu-\sigma)$-ten als der $(\nu-\sigma-1)$-ten Polarfläche des Punctes $\mathfrak{d}$.

Von dieser letzten Art gibt es $\sigma(\sigma+1)$ Transversalen oder auch, die beiden vorgenannten Polarflächen schneiden sich in $\sigma(\sigma+1)$ Geraden. Denn ist $\mathfrak{p}$ ein beiden Polarflächen gemeinsamer Punct, der aber von $\mathfrak{d}$ verschieden ist, so liegt die Gerade $\mathfrak{pd}$ nicht blos in der $(\nu-\sigma)$-ten Polarfläche, da diese ein Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{d}$ ist, sondern auch in der $(\nu-\sigma-1)$-ten Polarfläche, da sie mit ihr $\sigma+2$ Puncte gemein hat. [2]) Wir haben also den Satz:

Sobald eine Fundamentalfläche ν-ter Ordnung einen σ-fachen Punct hat, so ist der Ort der Geraden, die in ihm mit der Fläche einen $(\sigma+1)$-punctigen Contact haben, ein Kegel σ-ter Ordnung, die $(\nu-\sigma)$-te Polarfläche dieses Punctes. Es gibt nun $\sigma(\sigma+1)$ Gerade, die dort mit der Fläche $\sigma+2$ gemeinschaftliche zusammenfallende Puncte haben. Dieselben bilden den Durchschnitt des obengenannten Kegels mit der $(\nu-\sigma-1)$-ten Polarfläche des Punctes.

Ist umgekehrt die $(\nu-\sigma)$-te Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{d}$ ein Kegel von der σ-ten Ordnung mit dem Scheitel in $\mathfrak{d}$, so ist der Punct $\mathfrak{d}$ für die Fundamentalfläche ein σ-facher Punct. Denn zieht man durch $\mathfrak{d}$ eine beliebige Transversale, so findet man, dass die harmonischen Mittelpuncte σ-ten Grades sämmtlich in $\mathfrak{d}$ vereinigt sind, was nur dann geschehen kann, wenn im Pole σ Puncte des Systems $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\nu$ zusammenfallen. [3])

Wenn die $(\nu-\sigma+1)$-te und folglich auch jede andere Polarfläche niederer Ordnung eines Poles $\mathfrak{d}$ unbestimmt ist, so ist die $(\nu-\sigma)$-te Polarfläche ein Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{d}$. Zieht man nämlich durch $\mathfrak{d}$ eine Transversale, so ist jeder Punct derselben ein harmonischer Mittelpunct des $(\sigma-1)$-ten Grades, was nicht eintreten kann, wenn nicht in $\mathfrak{d}$ alle harmonischen Mittelpuncte σ-ten Grades zusammenfallen.

72. Wenn von den Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ σ auf den Punct $\mathfrak{d}$ fallen, und die übrigbleibenden durch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{\nu-\sigma}$ bezeichnet werden, so ist

---

[1]) *Einleitung*, Nr. 17, 72.

[2]) Von diesen sind $\sigma+1$ im Puncte $\mathfrak{d}$ vereinigt, weil jede Generatrix des Kegels in $\mathfrak{d}$ mit F_ν einen $(\sigma+1)$-punctigen Contact hat, und also auch mit jeder Polarfläche von $\mathfrak{d}$ (69).

[3]) *Einleitung*, Nr. 17.

bekannt, [1]) dass die harmonischen Mittelpuncte des $(\rho-\sigma)$-ten Grades $(\rho > \sigma)$ des Systems $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_{\nu-\sigma}$ in Bezug auf den Pol $\mathfrak{d}$ mit dem σ-mal genommenen Punct $\mathfrak{d}$ zusammen die harmonischen Mittelpuncte ρ-ten Grades für das vollständige System $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_\nu$ in Bezug auf denselben Pol bilden. Folglich hat man den Satz:

Die $(\nu-\rho)$-te Polarfläche des σ-fachen Punctes $\mathfrak{d}$ ist der Ort der harmonischen Mittelpuncte des $(\rho-\sigma)$-ten Grades der $\nu-\sigma$ Puncte, in denen F_ν von einer beliebigen Transversale geschnitten wird, die durch $\mathfrak{d}$ gezogen ist.

73. Ist $\mathfrak{d}$ ein vielfacher Punct von F_ν, und $\mathfrak{o}$ ein beliebiger Pol, so fallen, wenn man die Transversale $\mathfrak{o}\mathfrak{d}$ zieht, mindestens zwei von den Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ in den Punct $\mathfrak{d}$ zusammen, und $\mathfrak{d}$ vertritt folglich mindestens einen harmonischen Mittelpunct des $(\nu-1)$-ten Grades. Das heisst aber:

Die erste Polarfläche eines beliebigen Poles geht durch die vielfachen Puncte und folglich auch durch die vielfachen Curven der Fundamentalfläche.

Es folgt daraus, dass, sobald F_ν der Complex von zwei oder mehreren Flächen ist, die erste Polarfläche jedes beliebigen Poles durch die Curven hindurchgeht, längs deren sich die Componentenflächen zu zwei und zwei schneiden.

Wir wollen jetzt als speciellen Fall voraussetzen, F_ν sei aus einem Kegel σ-ter Ordnung und aus einer anderen Fläche $F_{\nu-\sigma}$ zusammengesetzt, und der Pol sei der Scheitel $\mathfrak{o}$ des Kegels. Dann enthält jede Generatrix dieses letzteren als Transversale betrachtet eine unbegrenzte Zahl von Puncten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ und folglich auch unendlich viele harmonische Mittelpuncte eines beliebigen Grades. Die $(\nu-\rho)$-te Polarfläche des Punctes $\mathfrak{o}$ ist folglich (72) aus dem vorgenannten Kegel und der $(\nu-\rho)$-ten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf $F_{\nu-\sigma}$ als Fundamentalfläche betrachtet zusammengesetzt Ist $\sigma = 1$, so wird der Kegel eine Ebene, und der Satz gilt für jeden beliebigen Punct $\mathfrak{o}$ dieser Ebene.

74. *Die Polarflächen derselben $(\nu-\rho)$-ten Ordnung eines festen Poles $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die Flächen eines Büschels ν-ter Ordnung als Fundamentalflächen angesehen bilden ein zweites, dem gegebenen projectivisches Büschel.*

Denn eine beliebig durch $\mathfrak{o}$ gelegte Transversale schneidet die Fundamentalfläche in Gruppen von ν Puncten in Involution (41); und die harmonischen Mittelpuncte ρ-ten Grades dieser Gruppen in Bezug auf den Pol $\mathfrak{o}$ bilden eine neue Involution, die der ersten projectivisch ist. [2]) Aber die harmonischen Mittelpuncte sind die Durchschnitte der Transversale mit den entsprechenden Polarflächen, und folglich geht durch einen beliebigen Punct des Raumes nur eine einzige Polarfläche oder, was dasselbe ist, die Polarflächen bilden ein Büschel u. s. w.

---

1) *Einleitung*, Nr. 17.

2) *Einleitung*, Nr. 23.

Dieses Theorem lässt sich leicht verallgemeineren. Zu diesem Zwecke führen wir den Begriff ein: *Lineares gerades Punctsystem μ-ter Stufe und ν-ten Grades*, indem wir darunter die μ-fach unendliche Reihe der Gruppen von je ν Puncten verstehen, welche $\nu-\mu$ gemeinschaftlichen Bedingungen in der Art genügen, dass, wenn μ Puncte auf der Geraden beliebig angenommen sind, sich mit denselben nur eine einzige Gruppe der Reihe bilden lässt (42). Für $\mu=1$ erhält man die Involution ν-ten Grades.

Zwei lineare Punctsysteme derselben Stufe auf derselben oder auf zwei verschiedenen Geraden heissen *projectivisch*, wenn die Gruppen des einen den Gruppen des andern eindeutig entsprechen, und wenn den Gruppen des ersten Systems, die ein niederes System $(\mu-\mu')$-ter Stufe bilden, im zweiten Systeme ebenfalls Gruppen dieses zweiten Systems entsprechen, welche ein niederes System derselben $(\mu-\mu')$-ten Stufe bilden (44).

Aus dieser Definition [1]) folgt unmittelbar:

Die harmonischen Mittelpuncte ρ-ten Grades der Gruppen eines gegebenen linearen Punctsystems μ-ter Stufe und ν-ten Grades in Bezug auf einen beliebigen Pol, der auf der gegebenen Geraden gewählt ist, bilden ein neues lineares Punctsystem μ-ter Stufe und ρ-ten Grades, das dem gegebenen projectivisch ist.

Es ist ausserdem klar, *dass die Puncte, in welchen die Oberflächen ν-ter Ordnung eines linearen Flächensystems μ-ter Stufe* (42) *von einer beliebigen Transversale geschnitten werden, ein lineares Punctsystem μ-ter Stufe und ν-ten Grades bilden;* und dass umgekehrt, wenn die Oberflächen derselben Ordnung einer μ-fach unendlichen Reihe von einer beliebigen Geraden in den Punctgruppen eines linearen Systems geschnitten werden, diese Flächen ebenfalls ein lineares Flächensystem bilden.

Es sei jetzt ein lineares Flächensystem μ-ter Stufe und ν-ter Ordnung gegeben, und es sei o ein beliebig im Raume fixierter Punct. Zieht man durch o eine beliebige Transversale, so schneidet sie die Fläche in Punctgruppen eines linearen Systems, und die harmonischen Mittelpuncte ρ-ten Grades der Gruppen dieses Systems in Bezug auf o als Pol, bilden ein neues lineares System, das dem ersten projectivisch ist. Folglich haben wir: [2])

Die Polarflächen derselben Ordnung eines festen Poles in Bezug auf die Flächen eines linearen Systems bilden selbst ein lineares System, das dem gegebenen projectivisch ist.

75. Wie viel Flächen gibt es in einem linearen Systeme μ-ter Stufe und ν-ter Ordnung, die mit einer gegebenen Geraden einen $(\mu+1)$-punctigen Contact haben?

---

[1]) Es ist wohl überflüssig, zu bemerken, dass ganz analoge Definitionen sich für lineare Curvensysteme geben lassen, die sämmtlich in ein und derselben Ebene gezeichnet sind.

[2]) Man vergleiche: Bobillier, *Recherches sur les lois générales qui régissent les lignes et les surfaces algébriques.* (Annales de Gergonne. T. 18; 1827—28.)

Eine beliebige von diesen Flächen schneidet die Gerade in ν Puncten, von denen wir $\mu+1$ durch $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\mu+1}$ bezeichnen wollen. Diese $\mu+1$ Puncte sind so beschaffen, dass wenn μ von ihnen beliebig angenommen werden, der überbleibende $\nu-\mu$ mögliche Lagen haben kann. Daraus folgt, dass auf der Geraden $(\mu+1)(\nu-\mu)$-mal die Puncte $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1}$ zusammenfallen werden, [1]) und es ist also $(\mu+1)(\nu-\mu)$ die Anzahl der Flächen des Systems, welche die verlangte Eigenschaft haben.

76. Wir nehmen jetzt an, man habe eine Fläche S_ν der ν-ten Ordnung, einen Kegel K_ν derselben Ordnung ν mit dem Scheitel $\mathfrak{o}$, und man lasse durch die Curve ν^2-ter Ordnung, die den Durchschnitt der Orte S_ν und K_ν bildet, eine andere Fläche S'_ν derselben Ordnung ν gehen; dann trifft jede Generatrix des Kegels K_ν die beiden Flächen S_ν, S'_ν in den nämlichen ν Puncten und folglich sind die ρ harmonischen Mittelpuncte ρ-ten Grades des Systems der ν Puncte in Bezug auf $\mathfrak{o}$ als Pol Puncte der $(\nu-\rho)$-ten Polare von $\mathfrak{o}$ für beide Flächen S_ν, S'_ν. Jede Ebene durch $\mathfrak{o}$ enthält ν Generatrixen des Kegels K_ν und folglich $\nu\rho$ solcher harmonischer Mittelpuncte. Die beiden vorgenannten Polarflächen haben also eine Curve $\nu\rho$-ter Ordnung gemein. Aber zwei getrennte Flächen ρ-ter Ordnung können nur eine Curve ρ^2-ter Ordnung gemein haben, und man kann folglich, weil $\nu > \rho$ ist, schliessen, das die $(\nu-\rho)$-ten Polarflächen von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf S_ν, S'_ν eine einzige Fläche ausmachen. Das heisst:

Befindet sich in einem Flächenbüschel ν-ter Ordnung ein Kegel, so hat der Scheitel dieses Kegels in Bezug auf alle Flächen des Büschels dieselbe Polarfläche jeder beliebigen Ordnung.

77. Es sei $\mathfrak{o}$ ein gegebener Pol, P eine beliebige Ebene, $\mathfrak{a}$ einer der Puncte, in denen die Fundamentalfläche F_ν von dem Strahle geschnitten wird, welcher von $\mathfrak{o}$ nach dem Puncte $\mathfrak{p}$ von P geht, endlich $\mathfrak{a}'$ derjenige Punct desselben Strahles, für welchen das Doppelverhältniss $(\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{a}\mathfrak{a}')$ einen gegebenen Werth λ hat. Der vom Puncte $\mathfrak{a}'$ beschriebene Ort, wenn $\mathfrak{a}$ sich auf F_ν bewegt, ist offenbar eine neue Fläche F'_ν der Ordnung ν, die der gegebenen projectivisch *(homographisch)* ist. Die beiden Flächen werden von der Ebene P in ein und derselben Curve ν-ter Ordnung geschnitten, und haben also (40) noch eine andere Curve der $\nu(\nu-1)$-ten Ordnung gemein, die auf einer Fläche $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ der $(\nu-1)$-ten Ordnung liegt, die in Verbindung mit der Ebene P eine Fläche des Büschels (F_ν, F'_ν) bildet.

---

1) Bezieht man die Puncte x auf einen festen Punct $\mathfrak{o}$ der gegebenen Geraden, so hat unter den Segmenten $\mathfrak{o}x$ eine Gleichung statt, die für jedes derselben vom $(\nu-\mu)$-ten Grade ist, die übrigen als gegeben betrachtet, das heisst eine Gleichung, deren höchstes Glied das Product der $(\nu-\mu)$-ten Potenzen der Segmente $\mathfrak{o}x_1$, $\mathfrak{o}x_2, \ldots, \mathfrak{o}x_{\mu+1}$ enthält. Lässt man jetzt die Puncte x zusammenfallen, so geht dieses Product in die $(\mu+1)(\nu-\mu)$-te Potenz von $\mathfrak{o}x$ über.

Die Fläche F'_ν, die man erhält, indem man sich den Werth des Verhältnisses λ veränderen lässt, bilden eine Reihe vom Index ν. Denn ist $\mathfrak{a}'$ ein beliebiger Punct im Raume, und schneidet der Strahl $\mathfrak{o}\mathfrak{a}'$ die Fläche F_ν in ν Puncten $\mathfrak{a}$ und P im Puncte $\mathfrak{p}$, so geben die ν Werthe des Doppelverhältnisses $(\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{a}\mathfrak{a}')$ ν Flächen F_ν die durch $\mathfrak{a}'$ gehen. Die Reihe enthält die gegebene Fläche F_ν, die ν-mal gezählte Ebene P, und den Kegel, dessen Scheitel in $\mathfrak{o}$ liegt, und dessen Directrix die Curve PF_ν ist. Für $\lambda = 1, 0, \infty$ fällt nämlich der Punct $\mathfrak{a}'$ bezüglich mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{o}$ zusammen.

78. Es sei $\mathfrak{i}$ ein Punct der Durchschnittscurve der Ebene P mit der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν. Die ersten Polarflächen von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν, F'_ν sind offenbar perspectivisch, und folglich ist $\mathfrak{i}$ auch ein Punct der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F'_ν und folglich auch (74) der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf jede Fläche des Büschels (F_ν, F'_ν) Umgekehrt gehen also die Polarflächen von $\mathfrak{i}$ in Bezug auf die Flächen des genannten Büschels durch $\mathfrak{o}$. Unter diesen Flächen betrachten wir diejenige, welche durch $\mathfrak{i}$ geht. Für diese ist $\mathfrak{o}\mathfrak{i}$ entweder Tangente in $\mathfrak{i}$, oder $\mathfrak{i}$ ist ein Doppelpunct. Wäre aber $\mathfrak{i}$ kein Doppelpunct, so würde, da die Fläche, um die es sich handelt, aus der Ebene P und aus $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ zusammengesetzt ist, $\mathfrak{i}\mathfrak{o}$ nicht Tangente sein können; folglich ist $\mathfrak{i}$ ein Doppelpunct, das heisst $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ geht durch $\mathfrak{i}$. Die Fläche $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ geht also durch die Durchschnittscurve der Ebene P und der ersten Polare von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν.

79. Lässt man λ variieren, so bilden die Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ eine Reihe vom Index $\nu-1$. Ist nämlich $\mathfrak{a}_\nu$ ein beliebiger Punct auf F_ν, und der Strahl $\mathfrak{o}\mathfrak{a}_\nu$ schneidet F_ν ausserdem noch in $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{\nu-1}$ und P in $\mathfrak{p}$, so geben die $\nu-1$ Werthe des Doppelverhältnisses $(\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\nu)$ die $\nu-1$ Flächen F_ν die durch $\mathfrak{a}_\nu$ gehen und von F_ν verschieden sind. Ihnen entsprechen ebensoviel Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$, die ebenfalls durch $\mathfrak{a}_\nu$ gehen. Es ist somit bewiesen, dass durch einen beliebigen Punct von F_ν $\nu-1$ Fläche $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ gehen, dieselbe Eigenschaft hat also auch für jeden Punct des Raumes statt.

Nähert sich einer der Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{\nu-1}$ unendlich dem Puncte $\mathfrak{a}_\nu$, so geht die Fläche $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ durch den Berührungspunct von F_ν mit einer Tangente, welche von $\mathfrak{o}$ ausgeht; fällt also F'_ν mit F_ν zusammen, so fällt auch $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ mit der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν zusammen. Wenn $\mathfrak{a}_\nu$ in die Ebene P fällt, das heisst, wenn F'_ν in die ν-mal genommene Ebene P degeneriert, so besteht die entsprechende Fläche $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ aus der nämlichen Ebene $(\nu-1)$-mal genommen.

80. Die Einhüllende (48) der Fläche F'_ν ist der Kegel K der $\nu(\nu-1)$-ten Ordnung, dessen Scheitel $\mathfrak{o}$, und der selbst der Fläche F_ν umgeschrieben ist.

Wenn nämlich zwei von den Flächen F'_ν, die durch denselben Punct $\mathfrak{a}'$ gehen, zusammenfallen sollen, so genügt es, wenn $\mathfrak{oa}'$ mit einer Tangente von F_ν zusammenfällt. Die Doppel- (Knoten-) Curve dieser Einhüllenden besteht aus den $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$ Bitangenten, welche man von $\mathfrak{o}$ aus an F_ν legen kann; die Cuspidalcurve entsteht ebenso aus den $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Osculierenden (67).

Der Kegel K berührt F_ν längs einer Curve der $\nu(\nu-1)$-ten Ordnung, die auf einer Fläche $(\nu-1)$-ter Ordnung — der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ — liegt und also F_ν ausserdem längs einer Curve $\nu(\nu-1)(\nu-2)$-ten Ordnung schneidet, die auf einer Fläche $(\nu-1)(\nu-2)$-ter Ordnung liegt.[1]) Die erste Curve ist der Ort der Puncte, für welche eine der Flächen F'_ν mit F_ν zusammenfällt; dagegen fallen in jedem Puncte der zweiten Curve zwei der F'_ν zusammen, die von F_ν verschieden sind. In jedem dieser Puncte fallen auch die beiden entsprechenden Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ zusammen, und die zweite Curve ist also der Durchschnitt von F_ν und der Einhüllenden der $\mathfrak{F}_{\nu-1}$. Diese Einhüllende ist folglich eine Fläche **S** der $(\nu-1)(\nu-2)$-ten Ordnung.

81. In jedem Puncte der von $\mathfrak{o}$ ausgehenden Osculierenden fallen drei aufeinanderfolgende F'_ν zusammen, und folglich fallen auch in jedem der $\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$ Puncten, in welchen F_ν von diesen Geraden geschnitten wird, drei aufeinanderfolgende Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ zusammen und ebenso gibt es in jedem der $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)$ Durchschnittspuncten der F_ν mit den Bitangenten zwei getrennte Paare zusammenfallender Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$. Die ersten Puncte sind also Stillstandspuncte und die zweiten Doppelpuncte für die Einhüllende **S**, das heisst, diese Einhüllende hat eine Cuspidalcurve von der Ordnung $(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$ und eine Doppelcurve von der Ordnung $\frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)$.

82. Da alle Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ durch dieselbe Curve der $(\nu-1)$-ten Ordnung, die in der Ebene P liegt, gehen, so ist die zwei Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ gemeinschaftliche Curve und folglich auch die Berührungscurve zwischen einer $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ und der Einhüllenden **S** von der Ordnung $(\nu-1)(\nu-2)$. Unter den Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ befindet sich auch die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν, und die Berührungscurve zwischen **S** und genannter ersten Polarfläche hat $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Puncte mit F_ν gemein, die nichts anderes sind, als die Berührungspuncte der Osculierenden. In jedem dieser Puncte fallen nämlich zwei F'_ν, also auch zwei $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ zusammen, und da eine der letzteren die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ ist, so berühren sich in ihnen die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ und **S**. Durch $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ drei Flächen ν-ter, $(\nu-1)$-ter, $(\nu-2)$-ter Ordnung gemeinschaftliche Puncte kann keine weitere Fläche der $(\nu-2)$-ten Ordnung gehen, also berührt **S** die erste Polarfläche längs einer Curve, die auf der zweiten Polarfläche liegt. Diese Curve ist der Ort der Puncte, für welche zwei $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ zusammenfallen, deren eine die erste Polarfläche ist.

---

[1]) Man vergleiche *Einleitung*, No. 138. Anmerkung.

Die erste Polarfläche und die Fläche **S** schneiden sich also noch längs einer andern Curve[1]) der $(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$-ten Ordnung. In jedem Puncte derselben fallen zwei von der ersten Polarfläche verschiedene $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ zusammen, und folglich fallen dort auch zwei Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-2}$ zusammen, wo $\mathfrak{F}_{\nu-2}$ die Fläche der $(\nu-2)$-ten Ordnung ist, welche durch die gemeinschaftliche Durchschnittscurve $(\nu-1)(\nu-2)$-ter Ordnung der ersten Polarfläche und $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ hindurchgeht. Diese Curve der $(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)$-ten Ordnung ist folglich der Durchschnitt der ersten Polarfläche mit der Einhüllenden der $\mathfrak{F}_{\nu-2}$. Diese Einhüllende ist also eine Fläche **S**′ der $(\nu-2)(\nu-3)$-ten Ordnung.

Die Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-2}$ bilden eine Reihe vom Index $\nu-2$. Denn durch einen beliebigen Punct der ersten Polarfläche gehen $\nu-2$ von der ersten Polarfläche verschiedene Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-2}$, denen ebensoviele Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-2}$ entsprechen, die durch den nämlichen Punct gehen.

Die Berührungspuncte der Bitangenten sind also die Durchschnitte dreier Flächen: der gegebene F_ν, der ersten Polarfläche von o und der Fläche **S**′, der Einhüllenden der Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-2}$.

CAPITEL II.

GEMISCHTE POLARFLÄCHEN.

83. Wir kehren zur Fundamentalfläche F_ν zurück. Es seien o, o' zwei beliebig gegebene Puncte. Wir wollen durch $P_o, P_{o'}$ die ersten Polarflächen dieser Puncte in Bezug auf F_ν bezeichnen, durch $P_{oo'}$ die erste Polarfläche von o in Bezug auf $P_{o'}$ als Fundamentalfläche betrachtet, und dem ähnlich durch $P_{o'o}$ die erste Polarfläche von o' in Bezug auf P_o; wir wollen dann beweisen, dass $P_{oo'}$ und $P_{o'o}$ nur eine einzige Oberfläche bilden.

Durch o' lege man eine beliebige Ebene E, und es sei K_ν der Kegel ν-ter Ordnung, der den Scheitel in o und zur Directrix die Curve EF_ν hat, das heisst den Durchschnitt der Ebene E mit der Fläche F_ν. Die beiden Flächen K_ν, F_ν haben dann noch eine andere Curve $\nu(\nu-1)$-ter Ordnung gemein, die in einer Fläche $F_{\nu-1}$ liegt, die von der $(\nu-1)$-ten Ordnung ist. Da F_ν gleichzeitig mit K_ν und dem Systeme $(EF_{\nu-1})$ demselben Büschel angehört, so muss (75) die Polare $P_{o'}$ in dem Büschel enthalten sein, das durch den Kegel $K_{\nu-1}$, der ersten Polarfläche von o' in Bezug auf K_ν,

---

[1]) Von diesen der Fläche **S** und der ersten Polarfläche gemeinschaftlichen Curven trifft die erste F_ν in den Berührungspuncten der Osculirenden; die zweite in den Berührungspuncten der Bitangenten.

und das System $(EF_{\nu-2})$ bestimmt ist, wo $F_{\nu-2}$ die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf $F_{\nu-1}$ darstellt. Diese Fläche $F_{\nu-2}$ bildet in Gemeinschaft mit E die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die zusammengesetzte Fläche $(EF_{\nu-1})$ (74). Da nun in dem zuletzt erwähnten Büschel der Kegel $K_{\nu-1}$ mit dem Scheitel $\mathfrak{o}$ vorkommt, so fällt (76) die Fläche $P_{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'}$ mit der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf den zusammengesetzten Ort $(EF_{\nu-2})$ zusammen, das heisst, sie geht durch die Curve $(\nu-2)$-ter Ordnung, welche den Durchschnitt von $F_{\nu-2}$ mit der Ebene E bildet (73).

Weil F_{ν} durch die Durchschnittscurve der Orte K_{ν} und $(EF_{\nu-1})$ geht, so fällt analogerweise die Fläche $P_{\mathfrak{o}}$ mit der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf $(EF_{\nu-1})$ zusammen, und geht also durch die Durchschnittcurve von $F_{\nu-1}$ und der Ebene E. Die Fläche $P_{\mathfrak{o}'\mathfrak{o}}$ geht folglich durch die Curve $(\nu-2)$-ter Ordnung, welche die erste Polare von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die früher genannte Curve $EF_{\nu-1}$ ist; das heisst, $P_{\mathfrak{o}'\mathfrak{o}}$ geht durch den Durchschnitt von $F_{\nu-2}$ mit der Ebene E.

Das will aber sagen, die Flächen $P_{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'}$ und $P_{\mathfrak{o}'\mathfrak{o}}$ haben eine Curve $(\nu-2)$-ter Ordnung gemein, die in einer beliebigen durch $\mathfrak{o}'$ gelegten Ebene liegt, und sind folglich ein und dieselbe Fläche der $(\nu-2)$-ten Ordnung.

Man habe jetzt im Raume $\mu+1$ beliebige Puncte $\mathfrak{o},\mathfrak{o}',\mathfrak{o}'',\ldots,\mathfrak{o}^{(\mu)}$ und man bezeichne durch $P_{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{o}''}$ die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf $P_{\mathfrak{o}'\mathfrak{o}''}$, mit $P_{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{o}''\mathfrak{o}'''}$ die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf $P_{\mathfrak{o}'\mathfrak{o}''\mathfrak{o}'''}$ u. s. w., so zeigt das eben bewiesene Theorem, mehrfach hinter einander wiederholt, dass die Polarfläche $P_{\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{o}''\ldots\mathfrak{o}^{(\mu)}}$ die nämliche Fläche bleibt, in welcher Ordnung man auch die Pole $\mathfrak{o},\mathfrak{o}',\mathfrak{o}'',\ldots,\mathfrak{o}^{(\mu)}$ auf einander folgen lässt. Setzt man jetzt noch voraus, dass σ dieser Puncte in einen einzigen $\mathfrak{o}$, und die übrigen $\mu+1-\sigma=\sigma'$ sich ebenfalls in einen einzigen Punct $\mathfrak{o}'$ zusammenziehen, so haben wir folgendes Theorem[1]):

Gegeben eine Fundamentalfläche F_{ν}, dann fällt die ρ-te Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die ρ'-te Polarfläche eines andern Punctes $\mathfrak{o}'$ mit der ρ'-ten Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ zusammen.

Solche Polarflächen heissen *gemischte* Polarflächen[2]).

84. Wir wollen jetzt voraussetzen, die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ gehe durch einen Punct $\mathfrak{m}$, oder auch (83) die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ gehe durch $\mathfrak{m}$. Dann geht nach einer schon früher (69) bemerkten Eigenschaft auch die $[(\nu-\rho')-\rho]$-te Polarfläche von $\mathfrak{m}$ in Bezug auf die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ durch $\mathfrak{o}$ oder auch (77), es geht die ν'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Be-

---

1) Pluecker, *Ueber ein neues Coordinatensystem.* (Crelles Journal, Bd. 5; 1830. S. 34).

2) Man sehe des Verfassers Abhandlung: *Sopra alcune quistioni nella teoria delle curve piane.* (Annali di Matematica, T. 6; Roma 1864) oder *Einleitung*, zu No. 69 c; S. 258. Im Original der *Introduzione* ist die entsprechende Ableitung **fehlerhaft.**

zug auf die $[(\nu-\rho)-\rho']$-te Polarfläche von $\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{o}$. Wir erhalten folglich den Satz:

Geht die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{m}$, so geht die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die $(\nu-\rho-\rho')$-te Polarfläche von $\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{o}$.

85. Wir betrachten von Neuem einen Punct $\mathfrak{d}$, der für die Fundamentalfläche σ-fach ist. Es sei $\mathfrak{o}$ ein beliebiger Pol. Zieht man die Transversale $\mathfrak{o}\mathfrak{d}$, so fallen σ der Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ mit $\mathfrak{d}$ zusammen und dieser Punct vertritt also $\sigma-\rho$ harmonische Mittelpuncte vom Grade $\nu-\rho$; die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ geht daher durch $\mathfrak{d}$ — so lange $\rho<\sigma$ ist. — Die $[(\nu-\rho)-(\sigma-\rho)]$-te Polarfläche von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ fällt (83) mit der ρ-ten Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die $(\nu-\sigma)$-te Polarfläche von $\mathfrak{d}$ zusammen. Nun ist aber (71) die $(\nu-\sigma)$-te Polarfläche von $\mathfrak{d}$ ein Kegel mit dem Scheitel in $\mathfrak{d}$ und σ-ter Ordnung, und es ist folglich auch die $[(\nu-\rho)-(\sigma-\rho)]$-te Polarfläche von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ ein Kegel vom Scheitel $\mathfrak{d}$ und $(\sigma-\rho)$-ter Ordnung. Man hat also (71):

Ist ein Punct $\mathfrak{d}$ für die Fundamentalfläche σ-fach, so ist er für die ρ-te Polarfläche eines beliebigen Punctes $\mathfrak{o}$ $(\sigma-\rho)$-fach, und der Berührungskegel dieser Polarfläche in $\mathfrak{d}$ ist die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf den Kegel, der die Fundamentalfläche im Puncte $\mathfrak{d}$ berührt [1]).

Daraus entnimmt man noch den Satz, dass die ρ-ten Polarflächen sämmtlicher Puncte einer Geraden, die durch $\mathfrak{d}$ geht, in $\mathfrak{d}$ den nämlichen Berührungskegel $(\sigma-\rho)$-ter Ordnung haben.

86. Die ersten Polarflächen zweier beliebiger Puncte $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die Fundamentalfläche F_ν schneiden sich in einer Raumcurve $(\nu-1)^2$-ter Ordnung. Da jeder Punct derselben in beiden ersten Polarflächen liegt, so geht seine Polarebene sowohl durch $\mathfrak{o}$ als durch $\mathfrak{o}'$ (62); folglich haben wir:

Der Ort der Puncte, deren Polarebenen durch eine gegebene Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ gehen, ist eine Raumcurve $(\nu-1)^2$-ter Ordnung.

Da die Polarebene jedes Punctes dieser Curve durch die Gerade $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ geht, so geht auch die erste Polarfläche eines beliebigen Punctes der Geraden durch diese Curve. Folglich entsteht:

Die ersten Polarflächen der Puncte einer Geraden bilden ein Büschel.

Die Curve $(\nu-1)^2$-ter Ordnung, die Basis dieses Büschels, nennt man *die erste Polare der gegebenen Geraden* [2]).

87. Die ersten Polarflächen dreier Puncte $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}', \mathfrak{o}''$ haben $(\nu-1)^3$ Puncte gemein. Die Polarebene jedes dieser Puncte geht durch $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}', \mathfrak{o}''$, das heisst, jeder dieser $(\nu-1)^3$ Puncte ist der Pol der Ebene $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'\mathfrak{o}''$. Ungekehrt geht

---

1) Für die Theorie der ebenen Curven substituiere man obigen Beweis für den unzureichenden der *Einleitung*, No. 73.

2) Bobillier, *a. a. O.*

die erste Polarfläche jedes Punctes dieser Ebene durch jeden der obigen $(\nu-1)^3$ Puncte; das heisst:

Eine beliebige Ebene hat $(\nu-1)^3$ *Pole, welche die gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte aller ersten Polarflächen sind, deren Pole Puncte jener Ebene sind* [1]).

Oder auch:

Die ersten Polarflächen der Puncte einer Ebene bilden ein Netz.

Denn suchen wir in der gegebenen Ebene einen Pol, dessen erste Polarfläche durch einen willkürlich im Raume angenommenen Punct $\mathfrak{m}$ geht, so ist der Ort des Poles die Durchschnittsgerade der gegebenen Ebene mit der Polarebene von $\mathfrak{m}$, und folglich (86) bilden diejenigen unter den Polarflächen der Puncte der gegebenen Ebene, welche durch $\mathfrak{m}$ gehen, ein Büschel.

88. Aus dem eben Auseinandergesetzten folgt:

1. Durch drei Puncte geht nur eine einzige Polarfläche. Der Pol derselben ist der Durchschnittspunct der Polarebenen der drei gegebenen Puncte.

2. Die ersten Polarflächen, die durch zwei feste Puncte gehen, bilden ein Büschel, das heisst, sie haben eine Curve $(\nu-1)^2$-ter Ordnung gemein, die durch die beiden gegebenen Puncte geht; ihre Pole liegen auf der Durchschnittsgeraden der Polarebenen der beiden gegebenen Puncte.

3. Die ersten Polarflächen, die durch einen festen Punct gehen, bilden ein Netz, haben also $(\nu-1)^3$ Puncte gemein, den gegebenen eingeschlossen; ihre Pole liegen auf der Polarebene des gegebenen Punctes.

4. Die ersten Polarflächen aller Puncte des Raumes bilden ein lineares System im engeren Sinne, das heisst dritter Stufe [2]).

Vier erste Polarflächen genügen, alle andere zu individualisieren, sobald sie nur nicht demselben Büschel oder demselben Netze angehören. Denn hätte man wirklich vier erste Polarflächen P_1, P_2, P_3, P_4 gegeben, deren Pole weder in gerader Linie, noch in derselben Ebene liegen, und man verlangte diejenige Polarfläche, welche durch drei gegebene Puncte $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}', \mathfrak{o}''$ geht, so hätte man folgendermassen zu verfahren. Die Flächenpaare $P_1 P_2$, $P_1 P_3$, $P_1 P_4$ individualisieren drei Büschel; die Flächen, welche durch $\mathfrak{o}$ gehen und bezüglich zu diesen drei Büscheln gehören, erzeugen ein Netz; die Flächen dieses Netzes, die durch $\mathfrak{o}'$ gehen, bilden ein Büschel, in welchem es nur eine einzige Fläche gibt, die durch $\mathfrak{o}''$ geht; diese ist offenbar die verlangte.

89. Im Allgemeinen besitzen die Flächen eines linearen Systems keine Puncte, die allen Flächen gemein sind. Wenn aber vier erste Polarflächen, deren Pole nicht in ein und derselben Ebene liegen, durch den nämlichen Punct gehen, so gehört dieser allen ersten Polarflächen an und ist für die Fundamentalfläche ein Doppelpunct. Denn, da die Polarebene dieses Punctes

---

1) Bobillier, *a. a. O.*

2) Wo wir im Folgenden von linearen Systemen sprechen, verstehen wir stets, wenn wir keine andere Erklärung abgeben, solche dritter Stufe.

durch jeden beliebigen Punct des Raumes gehen kann (62), so ist sie unbestimmt, und da ausserdem die erste Polarfläche dieses Punctes durch ihn selbst hindurchgehen muss, so gehört er der Fundamentalfläche an; folglich u. s. w.

Haben im Allgemeinen vier erste Polarflächen, deren Pole nicht in derselben Ebene liegen, einen σ-fachen Punct $\mathfrak{d}$ gemein, so ist dieser auch für jede andere erste Polarfläche σ-fach, wie sich aus der Art der Ableitung dieser Polarflächen aus den vier gegebenen (88) unmittelbar ergiebt. Die erste Polarfläche von $\mathfrak{d}$ muss durch $\mathfrak{d}$ gehen, also gehört dieser Punct auch der Fundamentalfläche an. Ausserdem gehen (85) die erste, zweite, . . ., $(\sigma-1)$-te Polarfläche jedes beliebigen Punctes des Raumes in Bezug auf eine beliebige der vorgenannten ersten Polarflächen durch $\mathfrak{d}$, oder mit andern Worten, die zweite, dritte, . . ., σ-te Polarfläche eines beliebigen Punctes des Raumes in Bezug auf F_ν gehen durch $\mathfrak{d}$. Daraus folgt, dass die $(\nu-2)$-te, $(\nu-3)$-te, . . ., $(\nu-\sigma)$-te Polarfläche des Punctes $\mathfrak{d}$ unbestimmt sind, da sie durch jeden beliebigen Punct des Raumes gehen können; die $(\nu-\sigma-1)$-te Polarfläche des Punctes $\mathfrak{d}$ ist ein Kegel $(\sigma+1)$-ter Ordnung. Folglich ist $\mathfrak{d}$ (71) ein $(\sigma+1)$-facher Punct für die Fundamentalfläche.

Dieses Theorem kann man auf andere Weise klar machen. Angenommen, die σ-ten Polarflächen aller Puncte des Raumes hätten einen gemeinschaftlichen Punct $\mathfrak{d}$, so gehört dieser auch der σ-ten Polarfläche des Punctes selbst an, und also auch der Fundamentalfläche. Der Punct $\mathfrak{d}$ hat ferner eine $(\nu-\sigma)$-te Polarfläche, die durch jeden beliebigen Punct des Raumes gehen kann, und also unbestimmt ist. Die $(\nu-\sigma-1)$-te Polarfläche von $\mathfrak{d}$ ist folglich ein Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{d}$, und es ist somit $\mathfrak{d}$ ein $(\sigma+1)$-facher Punct der Fundamentalfläche.

90. Man setze jetzt voraus, die σ-te Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{o}$ habe einen σ-fachen Punct $\mathfrak{o}'$. Nun gehen die $(\rho+1)$-te, $(\rho+2)$-te, . . ., $(\rho+\sigma-1)$-te Polarflächen von $\mathfrak{o}$ sämmtlich durch $\mathfrak{o}'$ und folglich (62) gehen die $(\nu-\rho)$-te, $(\nu-\rho-1)$-te, . . ., $(\nu-\rho-\sigma-1)$-te Polarflächen von $\mathfrak{o}'$ sämmtlich durch $\mathfrak{o}$. Ausserdem geht (85) auch die ϑ-te Polarfläche $(\vartheta=1,2,\ldots,\sigma-1)$ eines beliebigen Punctes $\mathfrak{m}$ in Bezug auf die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ $(\sigma-\vartheta)$-mal durch $\mathfrak{o}'$, und daraus folgt (84), dass die ϑ-te Polarfläche von $\mathfrak{m}$ in Bezug auf die $(\nu-\rho-\vartheta)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ durch $\mathfrak{o}$ geht. Danach ist (89) der Punct $\mathfrak{o}$ für die $(\nu-\rho-\vartheta)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ ein $(\vartheta+1)$-facher Punct; und geben wir ϑ seinen grössten Werth, so erhalten wir aus Allem den Satz:

Wenn die ρ-te Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{o}$ einen σ-fachen Punct $\mathfrak{o}'$ hat, so ist umgekehrt $\mathfrak{o}$ für die $(\nu-\rho-\sigma+1)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ ein σ-facher Punct.

91. Die ρ'-te Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{o}'$ genommen nach der ρ-ten Polarfläche eines andern Punctes $\mathfrak{o}$ möge einen σ-fachen Punct $\mathfrak{o}''$ haben, das heisst, die ρ-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ habe den σ-fachen Punct $\mathfrak{o}''$. Wenden wir nun das eben (90) bewiesene Theorem auf die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ als Fundamentalfläche

betrachtet an, so ergibt sich, dass die $(\nu-\rho'-\rho-\sigma+1)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}''$ in Bezug auf die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ einen σ-fachen Punct in $\mathfrak{o}$ hat. Folglich gilt der Satz:

Hat die ρ'-te Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{o}'$ in Bezug auf die ρ-te Polarfläche eines andern Punctes $\mathfrak{o}$ einen σ-fachen Punct $\mathfrak{o}''$, so hat umgekehrt die $(\nu-\rho-\rho'-\sigma+1)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}''$ in Bezug auf die ρ'-te Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ einen σ-fachen Punct in $\mathfrak{o}$.

92. Wir haben gesehen (69), dass die Quadripolarfläche eines parabolischen Punctes $\mathfrak{o}$ der Fundamentalfläche ein Kegel ist, der die entsprechende Wendeebene berührt, und dass die Berührungsgeneratrix die Osculierende von F_ν in $\mathfrak{o}$ ist. Auf dieser Geraden befindet sich daher der Scheitel $\mathfrak{o}'$ des Kegels. Wenden wir nun auf die beiden Puncte $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}'$ einen früheren Satz (90) an, so folgt, weil $\mathfrak{o}'$ ein Doppelpunct für die $(\nu-2)$-te Polarfläche von $\mathfrak{o}$ ist, dass die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ einen Doppelpunct in $\mathfrak{o}$ hat. Wir haben so den Satz:

Ein parabolischer Punct $\mathfrak{o}$ ist für jede erste Polarfläche ein Doppelpunct, deren Pol auf der Geraden liegt, welche die Fundamentalfläche in $\mathfrak{o}$ osculiert.

Hat ein Punct $\mathfrak{o}$, welcher der Fundamentalfläche angehört, einen Kegel als Quadripolarfläche, so ist er entweder ein Doppelpunct oder ein parabolischer Punct von F_ν. Denn, hat der Polarkegel seinen Scheitel in $\mathfrak{o}$, so ist dieser Punct für die Fundamentalfläche ein Doppelpunct (71). Ist dagegen der Scheitel ein anderer Punct $\mathfrak{o}'$, so muss $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$, weil die Quadripolarfläche von $\mathfrak{o}$ in diesem Puncte die Fundamentalfläche berühren soll, die einzige Gerade sein, die in $\mathfrak{o}$ osculiert, das heisst, $\mathfrak{o}$ ist ein parabolischer Punct.

CAPITEL III.

ENVELOPPEN DER POLAREBENEN UND ORTE DER POLE.

93. Wir wollen jetzt die Enveloppen der Polarebenen der Puncte einer Geraden r in Bezug auf F_ν zu bestimmen versuchen. Die Polarebenen, welche durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{i}$ gehen, haben (62) ihre Pole auf der ersten Polarfläche von $\mathfrak{i}$, welche r in $\nu-1$ Puncten schneidet; das heisst, durch $\mathfrak{i}$ gehen $\nu-1$ Ebenen, von denen jede einen Pol auf r hat; die gesuchte Enveloppe ist folglich eine Developpable $(\nu-1)$-ter Classe. Wir geben ihr den Namen $(\nu-1)$*-te Polarfläche der Geraden* r.

Wenn die erste Polarfläche von $\mathfrak{i}$ durch r berührt wird, so fallen zwei von den $\nu-1$ Ebenen, die durch $\mathfrak{i}$ gehen, zusammen, und dieser Punct gehört also der Developpablen an. Folglich ist die Enveloppe der Polarebenen der Puncte von r gleichzeitig der Ort der Pole der ersten Polarflächen, welche r berühren.

Ist t eine beliebige Gerade, so bilden die ersten Polarflächen der Puncte von t ein Büschel (86), in welchem bekanntlich $2(\nu-2)$ Flächen existieren, die eine beliebige Gerade, z. B. r, berühren. Folglich enthält t $2(\nu-2)$ Puncte des gesuchten Ortes und wir haben also den Satz:

Die $(\nu-1)$-te Polarfläche von r ist eine Developpable $2(\nu-2)$-ter Ordnung.

Ist $\mathfrak{m}$ ein Punct auf r, so haben die ersten Polarflächen, welche r in $\mathfrak{m}$ berühren, ihre Pole auf einer Geraden m, der Generatrix der Developpablen, die wir betrachten. Ist analog $\mathfrak{m}'$ der Punct von r, der auf $\mathfrak{m}$ unmittelbar folgt, so haben die ersten Polarflächen, welche r in $\mathfrak{m}'$ berühren, ihre Pole auf der Geraden m', der auf m unmittelbar folgenden Generatrix. Die erste Polarfläche, welche r in $\mathfrak{m}$ osculiert, hat folglich ihren Pol in dem Puncte, in welchem sich m und m' schneiden, und es ist also die Cuspidalcurve der Developpablen der Ort der Pole derjenigen ersten Polarflächen, welche r osculieren.

In einem Flächennetze $(\nu-1)$-ter Ordnung gibt es $3(\nu-3)$ Flächen, welche eine gegebene Gerade osculieren (75). Nun liegen, wenn die Flächen des Netzes erste Polarflächen in Bezug auf F_ν sind, ihre Pole in einer Ebene (88); eine beliebige Ebene enthält folglich $3(\nu-3)$ Puncte, deren erste Polarflächen r osculieren; das heisst: *Der Ort der Pole der ersten Polarflächen, die von r osculiert werden, ist eine Raumcurve $3(\nu-3)$-ter Ordnung*, welche die Rückkehrkante der obenerwähnten Developpablen bildet.

Da ein ebener Schnitt dieser Developpablen von der Ordnung $2(\nu-1)$ und der Classe $\nu-1$ ist und $3(\nu-3)$ Spitzen hat, so besitzt er $2(\nu-3)(\nu-4)$ Doppelpuncte; das heisst:

Der Ort der Pole der ersten Polarflächen, die r in zwei verschiedenen Puncten berühren, ist eine Raumcurve $2(\nu-3)(\nu-4)$-ter Ordnung; sie ist die Knotencurve der betrachteten Developpablen.

Auf die nämliche Art beweist man, dass *die Enveloppe der Polarebenen der Puncte einer beliebigen gegebenen Curve μ-ter Ordnung eine Developpable der $\mu(\nu-1)$-ten Classe ist, die man auch als Ort der Puncte auffassen kann, deren erste Polarflächen die gegebene Curve berühren.*

94. Wir werden jetzt die $(\nu-1)$-te Polarfläche einer Fläche von gegebener Ordnung μ betrachten, das heisst, die Enveloppe der Polarebenen der Puncte dieser Fläche. Die Ebenen, welche durch eine beliebige Gerade t gehen, haben ihre Pole (86) auf einer Raumcurve $(\nu-1)^2$-ter Ordnung, welche die gegebene Fläche in $\mu(\nu-1)^2$ Puncten schneidet. Die gesuchte Enveloppe ist also eine Fläche der $\mu(\nu-1)^2$-ten Classe.

Fallen zwei von den ebengenannten $\mu(\nu-1)$ Puncten zusammen, so berührt t die Fläche, um die es sich handelt, und wenn folglich zwei Geraden t, t', die durch denselben Punct $\mathfrak{i}$ gehen, zwei Curven entsprechen, welche die gegebene Fläche in demselben Puncte $\mathfrak{i}'$ berühren, so ist $\mathfrak{i}'$ der Pol der

Ebene tt', und diese Ebene berührt die Fläche der $\mu(\nu-1)^2$-ten Ordnung in i. In diesem Falle berührt aber die erste Polarfläche des Punctes i, da sie beide Raumcurven enthält, die gegebene Fläche in i, und wir haben also:

Die Enveloppe der Polarebenen der Puncte einer gegebenen Fläche ist gleichzeitig der Ort der Puncte, deren erste Polarflächen die gegebene Fläche berühren.

Die $(\nu-1)$-te Polarfläche einer Ebene ist eine Fläche $3(\nu-2)^2$-ter Ordnung, da es in einem Büschel von Flächen $(\nu-1)$-ter Ordnung $3(\nu-2)^2$ gibt, die eine gegebene Ebene berühren (41).

95. Was ist der Ort der Pole der Tangentialebenen einer gegebenen Fläche μ-ter Classe? Durch eine beliebige Gerade t gehen μ Tangentialebenen der gegebenen Fläche, die ihre Pole sämmtlich auf der Raumcurve $(\nu-1)^2$-ter Ordnung haben, welche die erste Polare von t bildet (86). Diese Curve hat $\mu(\nu-1)^3$ Durchschnittspuncte mit dem gesuchten Orte, da dies die Anzahl der Pole von μ Ebenen ist. Der gesuchte Ort ist folglich eine Fläche von der $\mu(\nu-1)$-ten Ordnung.

Ist t eine Tangente der gegebenen Fläche, so fallen zwei jener μ Ebenen zusammen, und folglich hat die Raumcurve, welche die erste Polare von t ist, $(\nu-1)^3$ Berührungspuncte mit dem Orte, um den es sich handelt. Und wenn zwei Gerade t, t' in dem nämlichen Puncte i die gegebene Fläche berühren, so berühren die diesen Geraden entsprechenden Raumcurven den Ort in den nämlichen $(\nu-1)^3$ Puncten, und da die beiden Curven gleichzeitig auf der ersten Polarfläche des Punctes i liegen, so sind die $(\nu-1)^3$ Pole der Ebene tt' ebensoviel Berührungspuncte zwischen dem Orte und der ersten Polarfläche des Punctes i; das heisst:

Der Ort der Pole der Tangentialebenen einer gegebenen Fläche ist auch die Enveloppe der ersten Polarflächen der Puncte der gegebenen Fläche.

Jede Eingehüllte hat mit der Einhüllenden $(\nu-1)^3$ Berührungspuncte, welche die Pole der Ebenen sind, die die gegebene Fläche in dem Pole der Eingehüllten berühren.

Die erste Polarfläche des Punctes i schneidet den Ort in einer Curve $\mu(\nu-1)^2$-ter Ordnung, welche offenbar der Ort der Pole derjenigen Ebenen ist, die man durch i so ziehen kann, dass sie die gegebene Fläche berühren, das heisst der Tangentialebenen des Kegels mit dem Scheitel i, welcher der gegebenen Fläche umgeschrieben ist.

Der Fläche $\mu(\nu-1)$-ter Ordnung, die wir eben als Ort und als Enveloppe betrachteten, geben wir den Namen *erste Polarfläche der gegebenen Fläche.*

96. Die gegebene Fläche sei jetzt developpabel und von der μ-ten Classe. Man sucht auch für sie den Ort der Pole ihrer Tangentialebenen. Durch einen beliebigen Punct o kann man μ Tangentialebenen der gegebenen Developpablen legen; diese Ebenen haben ihre $\mu(\nu-1)^3$ Pole alle auf der ersten Polarfläche von o und diese Puncte sind ebensoviele Puncte des Ortes. Der

gesuchte Ort ist also in diesem Falle eine Raumcurve der $\mu(\nu-1)^2$-ten Ordnung.

Liegt o auf der Developpablen, so fallen zwei von den μ Tangentialebenen zusammen, und folglich berührt die erste Polarfläche von o den Ort n $(\nu-1)^3$ Puncten. Der Ort ist daher auch die Enveloppe der ersten Polarflächen der Puncte der gegebenen Fläche in dem Sinne, dass die gefundene Curve von der ersten Polarfläche eines beliebigen Punctes der gegebenen Developpablen in $(\nu-1)^3$ Puncten berührt wird. Dieselbe Curve wird von der ersten Polarfläche eines beliebigen Punctes der Rückkehrcurve der Developpablen in $(\nu-1)^3$ Puncten osculiert, und von der ersten Polarfläche eines beliebigen Punctes der Knotencurve derselben Developpablen in $2(\nu-1)^3$ Puncten berührt.

CAPITEL IV.

ANWENDUNGEN AUF DEVELOPPABLE FLÄCHEN.

97. Wir wollen jetzt annehmen, die Fundamentalfläche F sei eine Developpable von der Ordnung ρ und der Classe μ, mit ω Doppelgeneratrixen, θ stationären Generatrixen, einer Cuspidalcurve ν-ter Ordnung, die β stationäre und ϑ' Doppelpuncte besitzt, und einer Knotencurve von der Ordnung ξ. Es sei ausserdem:

α die Zahl der stationären Tangentialebenen und

γ' die Zahl der Bitangentialebenen von F (das heisst, der längs zweier getrennter Geratrixen berührenden Ebenen);

ϑ die Zahl der Geraden, die man von einem beliebigen Puncte so ziehen kann, dass sie die Curve (ν) zweimal treffen;

γ die Zahl der Geraden die gleichzeitig in einer beliebigen Ebene und in zwei Tangentialebenen von F liegen;

η die Classe der doppeltberührenden Developpablen der Curve (ν);

$\varkappa$ die Zahl der Geraden, welche durch einen beliebigen Punct gehen, und die Curve (ξ) in zwei Puncten schneiden;

λ die Zahl der Puncte der Curve (ν), durch welche Gerade gehen, welche diese Curve anderweitig berühren: diese Puncte sind für die Curve (ξ) stationär;

τ die Zahl der Puncte, die in drei getrennten Generatrixen von F liegen: diese Puncte sind offenbar für die Curve (ξ) dreifach.

Zwischen diesen Zahlen haben wir (10, 12) die Gleichungen:

$$\rho = \mu(\mu-1)-2(\gamma+\gamma')-3\alpha,$$
$$\rho = \nu(\nu-1)-2(\vartheta+\vartheta')-3\beta,$$
$$\mu = \rho(\rho-1)-2(\xi+\omega)-3(\nu+\theta),$$
$$\nu = \rho(\rho-1)-2(\eta+\omega)-3(\mu+\theta),$$
$$3\rho-\theta = 3\mu+\nu-\alpha = 3\nu+\mu-\beta,$$
$$2(\xi+\omega)+\beta = 2(\eta+\omega)+\alpha = \rho(\rho-4)-2\theta,$$

welche sechs unabhängigen Relationen gleichgelten. Wir wollen jetzt drei andere Gleichungen bestimmen, welche zur Bestimmung von λ, τ, $\varkappa$ dienen [1]).

98. Es sei σ ein willkürlicher Punct. Jede Ebene, die durch σ geht, schneidet dann F in einer Curve l von der Ordnung ρ und der Classe μ mit $\xi+\omega$ Doppelpuncten und $\nu+\theta$ Stillstandspuncten (9). Dieselbe Ebene schneidet die erste Polarfläche von σ in Bezug auf F in einer Curve der $(\rho-1)$-ten Ordnung, welche durch die $\xi+\omega$ Doppelpuncte und die $\nu+\theta$ Stillstandspuncte von l hindurchgeht. In diesen letzten Puncten hat sie mit der Curve l dieselben Tangenten[2]). Daraus folgt, dass die Classe der Curve l gleich ist:

$$\mu = \rho(\rho-1)-2(\xi+\omega)-3(\nu+\theta),$$

da dieses die Zahl der Tangenten ist, die man von σ an genannte Curve ziehen kann. Diese Tangenten sind auf der Schnittebene die Spuren der Tangentialebenen von F, die durch σ gehen. Die erste Polarfläche von σ in Bezug auf F schneidet daher F längs der beiden Curven (ξ), (ν), längs der $\omega+\theta$ doppelten und stationären Generatrixen und längs der Berührungsgeneratrixen der μ Tangentialebenen, die durch σ gehen.

Die Gleichung

$$\rho(\rho-1) = \mu+2(\xi+\omega)+3(\nu+\theta)$$

zeigt, dass bei dem vollständigen Durchschnitt von F und der ersten Polarfläche die Curve (ξ) und die ω Geraden zweimal zählen, während die Curve (ν) und die θ Geraden dreimal zu rechnen sind. Die nämliche Gleichung lässt erkennen, dass der umgeschriebene Kegel mit dem Scheitel σ aus den μ Tangentialebenen, dem Perspectivkegel der Curve (ξ) zweimal gezählt, dem dreimal gerechneten Perspectivkegel der Curve (ν) und aus den $\omega+\theta$ Ebenen zusammengesetzt ist, welche durch die doppelten und die stationären Geraden hindurchgehen, jene zweimal und diese dreimal gezählt.

99. Ist die schneidende Ebene, die wir durch σ gelegt haben, eine der μ Tangentialebenen, und ist t die Berührungsgeneratrix und $\mathfrak{m}$ der Punct, in welchem t die Curve (ν) berührt, dann erhält der Schnitt l der Developpa-

---

1) Cfr. SALMON, *Geometry of three dimensions* (2nd ed.) pag. 455 u. ff., wo aber die Singularitäten $\omega, \theta, \vartheta', \gamma'$ nicht beachtet sind. Bei der vorliegenden Untersuchung wurde der Verfasser durch den Rath der Herren CAYLEY und ZEUTHEN unterstützt, denen er hierdurch seinen herzlichsten Dank ausspricht.

2) *Einleitung*, No. 74.

blen F (13) in $\mathfrak{m}$ einen dreifachen Punct mit drei Zweigen, welche von derselben Tangente t berührt werden. Die erste Polarcurve von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf l hat also in $\mathfrak{m}$ eine Spitze mit der Tangente t, und die zweite Polarcurve von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf die nämliche Curve l geht durch $\mathfrak{m}$ und wird in diesem Puncte von der Geraden t berührt. Folglich ist t in $\mathfrak{m}$ Tangente der zweiten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F; oder auch:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf eine developpable Fläche berührt die Cuspidalcurve in den Puncten, wo diese von Ebenen osculiert wird, welche durch $\mathfrak{o}$ gehen.

Der Schnitt l ist aus der Geraden t zweimal genommen und einer Curve $(\rho-2)$-ter Ordnung zusammengesetzt, welche von t in $\mathfrak{m}$ berührt und in anderen $\rho-4$ Puncten geschnitten wird — es sind dies die Puncte, in denen die Curve (ξ) von der Ebene $\mathfrak{o}t$ berührt wird —; diese Puncte sind für l dreifach, also geht durch sie auch die zweite Polarcurve von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf l; wir haben also:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles $\mathfrak{o}$ in Bezug auf eine Developpable berührt die Berührungsgeneratrix jeder Tangentialebene, die durch $\mathfrak{o}$ geht, in dem Puncte, wo sie von der Cuspidalcurve berührt wird, und schneidet sie in den Puncten, wo sie die Knotencurve trifft.

100. Es sei jetzt t eine der θ stationären Generatrixen und $\mathfrak{m}$ der Berührungspunct zwischen t und der Curve (ν). Man lege die Ebene $\mathfrak{o}t$ bis sie F schneidet, dann besteht der Schnitt l aus der Geraden t zweimal genommen und einer Curve l' von der Ordnung $\rho-2$ und der Classe μ, die in $\mathfrak{m}$ mit t einen vierpunctigen Contact hat, weil t in drei unmittelbar folgenden Tangentialebenen liegt, und man also von einem beliebigen Puncte von t aus $\mu-3$ von t verschiedene Tangenten an den Schnitt legen kann; t repräsentiert daher drei unmittelbar folgende Tangenten von l'. Die Ebene $\mathfrak{o}t$ schneidet die Curve (ν) in anderen $\nu-3$ Puncten und die anderen stationären Generatrixen in $\theta-1$ Puncten; l' hat also $\nu+\theta-4$ Spitzen. Diese Curve hat folglich

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-2)(\rho-3)-\mu-3(\nu+\theta-4)]=\xi+\omega-2\rho+9$$

Doppelpuncte (10). Diese Puncte gehören der Linie $(\xi+\omega)$ an; von den andern Durchschnittspuncten der Ebene $\mathfrak{o}t$ mit der Curve (ξ) sind $2(\rho-6)$ in den $\rho-6$ Durchschnittspuncten zwischen l' und t vereinigt, und folglich fallen die drei übrigen mit $\mathfrak{m}$ zusammen. Die ebenerwähnten $\rho-6$ Puncte sind für die Curve (ξ) Stillstandspuncte, weil in jedem derselben zwei unmittelbar folgende Generatrixen — repräsentiert durch die stationären Generatrixen — von einer nicht folgenden Generatrix geschnitten werden.

Schneidet man F durch die Ebene, welche in $\mathfrak{m}$ einen vierpunctigen Contact mit der Curve (ν) hat, so besteht der Schnitt l aus der Geraden t dreimal gezählt und einer Curve $(\rho-3)$-ter Ordnung und $(\mu-1)$-ter Classe, die in $\mathfrak{m}$ einen dreipunctigen Contact mit t hat, weil t in drei unmittelbar folgenden Tangentialebenen liegt, von denen die eine die Ebene der Curve ist, und folglich zwei unmittelbar folgende Tangenten dieser Curve darstellt. Die Ebene schneidet die Curve (ν) in weiteren $\nu-4$ Puncten und die übrigen stationären Generatrixen in $\theta-1$ Puncten; die Curve ($\rho-3$)-ter Ordnung hat also $\nu+\theta-5$ Spitzen und daher

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-3)(\rho-4)-(\mu-1)-3(\nu+\theta-5)]=\xi+\omega-3\rho+14$$

Doppelpuncte. Die Ebene hat also mit der Doppelcurve einen vierpunctigen Contact in $\mathfrak{m}$ und einen dreipunctigen Contact in jedem der $\rho-6$ Durchschnittspuncte von t mit der ebenen Curve ($\rho-3$)-ter Ordnung. Folglich haben die Curven (ν) und (ξ) in $\mathfrak{m}$ dieselbe Singularität, das heisst, dieselbe Tangente t mit dreipunctigem Contact und dieselbe Osculationsebene mit vierpunctigem Contact. Die stationäre Tangente t trifft die Curve (ξ) in $\rho-6$ stationären Puncten, und die Tangenten in diesen Puncten liegen in der Osculationsebene von $\mathfrak{m}$.

Der nämliche Punct $\mathfrak{m}$, in dem die Curven (ν) und (ξ) von der stationären Geraden t osculiert werden, ist für die Developpable F dreifach, weil eine beliebige Ebene durch t F in einer Curve schneidet, die mit drei Zweigen durch $\mathfrak{m}$ geht, das heisst, jede Gerade durch $\mathfrak{m}$ hat hier einen dreipunctigen Contact mit F. Die Geraden, welche in $\mathfrak{m}$ mit F einen vierpunctigen Contact haben, liegen in der Osculationsebene, das heisst (71), der Berührungskegel von F in $\mathfrak{m}$ reduciert sich auf diese Ebene dreimal gezählt. Es folgt noch (85), dass die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles in Bezug auf F durch $\mathfrak{m}$ geht und in ihm jene Ebene zur Tangentialebene hat. Ausserdem bemerke man, dass jeder Punct, der der Geraden t und der Curve l' in der Ebene $\mathfrak{o}t$ gemein ist, für l dreifach sein muss und also auch in der zweiten Polarcurve von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf l liegt; folglich hat die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F in $\mathfrak{m}$ eine vierpunctige Berührung mit t. Man hat also:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles in Bezug auf eine Developpable hat einen vierpunctigen Contact mit der Cuspidalcurve und mit der Knotencurve in dem Puncte, in dem diese Curven von jeder stationären Generatrix osculiert werden.

Die $\rho-6$ Puncte, in denen t die Curve (ξ) trifft, sind für F dreifache Puncte nach dem nämlichen Raisonnement, das wir schon für den Punct $\mathfrak{m}$ angewandt haben; daher geht die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ durch diese Puncte.

Wenn $\mathfrak{r}$ einer dieser Puncte ist, in denen t von der Geraden geschnitten wird, welche die Curve (ν) in $\mathfrak{n}$ berührt, so ist der Tangentialkegel von F in $\mathfrak{r}$ aus der doppeltgezählten Osculationsebene der Curve (ν) in $\mathfrak{m}$ und der Osculationsebene in $\mathfrak{n}$ zusammengesetzt. Die gemeinschaftliche Gerade dieser Ebenen ist die Cuspidaltangente der Curve (ξ) in $\mathfrak{r}$, und durch sie geht die Tangentialebene in $\mathfrak{r}$ der zweiten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F; also zählt $\mathfrak{r}$ für drei Durchschnittspuncte der Curve (ξ) mit der obengenannten zweiten Polarfläche.

101. Es sei jetzt t eine der ω Doppelgeneratrixen, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ ihre Berührungspuncte mit der Curve (ν), und man wende auf sie dieselben Betrachtungen an, die wir für eine stationäre Generatrix durchgeführt haben. Die Ebene $\mathfrak{o}t$ gibt hier eine Curve l' von der Ordnung $\rho-2$ und der Classe μ mit $\nu+\theta-4$ Spitzen, also mit

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-2)(\rho-3)-\mu-3(\nu+\theta-4)]=\xi+\omega-2\rho+9$$

Doppelpuncten, von denen $\omega-1$ in den $\omega-1$ andere Doppelgeneratrixen liegen, während die andern $\xi-2\rho+10$ der Knotencurve angehören. Die Curve l' hat in jedem der Puncte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ mit t einen dreipunctigen Contact, weil diese Gerade in zwei Paar unmittelbar folgenden Tangentialebenen liegt, und folglich fallen von den μ Tangenten von l', die von einem beliebigen Puncte $\mathfrak{p}$ von t ausgehen, zwei mit $\mathfrak{pm}$ und zwei andere mit $\mathfrak{pm}'$ zusammen. Es folgt, dass t die l' in andren $\rho-2-2.3$ Puncten trifft, das heisst, die Doppelgeneratrix t schneidet $\rho-8$ einfache Generatrixen. Die Ebene $\mathfrak{o}t$ hat folglich mit der Knotencurve $2(\rho-8)$ Durchschnittspuncte, die zu zwei und zwei in obengenannten $\rho-8$ Puncten vereinigt sind, und 6 Durchschnittspuncte, die zu drei und drei in die Puncten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ zusammenfallen[1]). Also hat t in $\mathfrak{m}$ und in $\mathfrak{m}'$ einen dreipunctigen Contact mit der Curve (ξ).

Da $\mathfrak{m}$ ein dreifacher Punct von F ist, so geht die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F durch $\mathfrak{m}$. Ausserdem hat diese zweite Polarfläche, da jeder gemeinschaftliche Punct von t und l' für den vollständigen Durchschnitt der Ebene $\mathfrak{o}t$ mit F dreifach ist, in $\mathfrak{m}$ einen dreipunctigen Contact mit t. Diese Gerade hat aber in diesem Puncte eine zweipunctige Berührung mit der Curve (ν) und eine dreipunctige mit der Curve (ξ); folglich hat man:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Punctes in Bezug auf eine Developpable geht durch die Berührungspuncte der Cuspidalcurve mit ihren Doppeltangenten und hat daselbst eine zweipunctige Berührung mit jener Curve und eine dreipunctige mit der Knotencurve.

Die $\rho-8$ für F dreifachen Puncte, in denen t andere Generatrixen schneidet, sind für die Curve (ξ) Doppelpuncte. Ist in der That $\mathfrak{r}$ einer von ihnen, in dem t von der Tangente der Curve (ν) in $\mathfrak{n}$ getroffen wird, so wird dort die Curve (ξ) von den beiden Geraden berührt, längs deren die Osculationsebene in $\mathfrak{n}$ die Osculationsebenen in $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ schneidet. Folglich

---

1) Dass die Curve (ξ) durch $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ geht, ergibt sich auch, wenn man beachtet, dass z. B. $\mathfrak{m}$ für F ein dreifacher Punct ist, weil sich in ihm drei Tangenten der Curve (ν) schneiden, nämlich die Tangenten in $\mathfrak{m}$, im unendlich nahen Puncte von $\mathfrak{m}$ und im Puncte $\mathfrak{m}'$. Also besitzt der von einer beliebig durch $\mathfrak{m}$ gelegte Ebene auf F erzeugte Schnitt hier drei Zweige, von denen zwei durch die Spur der Osculationsebene in $\mathfrak{m}$ und der dritte von der Spur der Osculationsebene in $\mathfrak{m}'$ berührt werden. Es folgt, dass $\mathfrak{m}$ so viel als eine Spitze und zwei Knotenpuncte des Schnittes gilt; und folglich geht ausser der Curve (ν) und einer der ω Doppelgeraden auch die Curve (ξ) durch $\mathfrak{m}$.

stellt jeder dieser $\rho-8$ Puncte zwei Durchschnittspuncte der Knotencurve mit der zweiten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ dar.

Schneidet man die Fläche F durch die Osculationsebene der Curve (ν) in $\mathfrak{m}$, so besteht der Schnitt l aus der Geraden t, dreimal genommen und einer Curve $(\rho-3)$-ter Ordnung und $(\nu-1)$-ter Classe mit $\mu+\theta-5$ Spitzen, welche mit t in $\mathfrak{m}$ eine zweipunctige und in $\mathfrak{m}'$ eine dreipunctige Berührung eingeht. Diese Curve hat also

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-3)(\rho-4)-(\mu-1)-3(\nu+\theta-5)]=\xi+\omega-3\rho+14$$

Doppelpuncte, von denen $\xi-3\rho+15$ der Knotencurve angehören. Die andern Durchschnittspuncte der schneidenden Ebene mit der Curve (ξ) sind die $\rho-8$ genannten Puncte, jeder dreimal gezählt, und die Puncte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ zusammen als 9 Puncte gezählt, nämlich $\mathfrak{m}$ sechsmal und $\mathfrak{m}'$ dreimal. Die Ebene also, welche die Curve (ν) in $\mathfrak{m}$ osculiert, hat dort einen sechspunctigen Contact mit der Curve (ξ) und ausserdem mit derselben Curve einen dreipunctigen Contact in $\rho-7$ andern Puncten, von denen einer $\mathfrak{m}'$ ist.

102. Es sei jetzt $\mathfrak{m}$ ein Doppelpunct der Cuspidalcurve; t, t' die Tangenten und P, P' die Osculationsebenen der beiden Zweige der Curve. Bezeichnen wir durch t_1, t'_1 die zu t, t' unendlich nahen Generatrixen von F, so sieht man unmittelbar, dass $\mathfrak{m}$ ein vierfacher Punct der Fläche F ist, weil er in vier Generatrixen t, t_1, t', t'_1 liegt. Es ist gleichfalls klar, dass $\mathfrak{m}$ auch für die Knotencurve vierfach ist, weil er den Durchschnittspunct von vier Paar nicht unmittelbar folgenden Generatrixen $tt', tt'_1, t't_1, t_1t'_1$ darstellt. Die Geraden, welche in $\mathfrak{m}$ einen fünfpunctigen Contact mit F haben, liegen sämmtlich in den Ebenen P, P'; folglich stellen diese Ebenen, zweimal gezählt, den Berührungskegel von F im vierfachen Puncte dar. Die zweite Polarfläche eines beliebigen Punctes $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F hat in $\mathfrak{m}$ einen Biplanarpunct, und die beiden Tangentialebenen gehen durch die Gerade PP', welche zugleich die Tangente der Curve (ξ) in diesem Puncte ist.

Hieraus ergibt sich gerades Wegs, dass in $\mathfrak{m}$ vier Durchschnittspuncte der Curve (ν) mit der zweiten Polarfläche vereinigt sind.

103. Ein stationärer Punct der Curve (ν) ist für F dreifach, da jede Gerade, die durch diesen Punct gezogen ist, in ihm drei aufeinanderfolgende Generatrixen schneidet. Der Tangentenkegel von F in diesem Puncte besteht aus der dreimal genommenen Ebene, die in ihm einen vierpunctigen Contact mit der Curve (ν) hat, weil diese Ebene der Ort der Geraden ist, die in genanntem Puncte mit F einen vierpunctigen Contact haben; folglich geht die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ durch diesen Punct und hat in ihm genannte Ebene zur Tangentialebene. Also haben wir:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles $\mathfrak{o}$ in Bezug auf eine Developpable, hat mit der Cuspidalcurve in ihren Stillstandspuncten eine vierpunctige Berührung.

104. Die Puncte der Curve (ν), durch welche die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ geht, sind diejenigen, deren Quadripolarflächen durch $\mathfrak{o}$ gehen, und

diejenigen, deren Quadripolarflächen unbestimmt werden. Die ersten Puncte sind diejenigen, in denen die Curve (ν) von den μ Tangentialebenen von F osculiert wird, die durch o gehen. Die zweiten Puncte dagegen sind für die Fläche dreifach oder vierfach (71), das heisst, sie liegen in drei oder vier Generatrixen. Unter diesen Puncten sind in der Cuspidalcurve, ausser den β stationären und den ϑ' Doppelpuncten und ausser den $2\omega + \theta$ Berührungspuncten der doppelten und der stationären Tangenten, auch die λ Puncte, in denen zwei auf einanderfolgende Generatrixen von einer nicht unmittelbar folgenden zugleich geschnitten werden. Diese Puncte sind für die Curve (ξ) stationär, aber für die Curve (ν) nur einfach; und diese wird in ihnen von der zweiten Polarfläche nicht berührt. Also hat man:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles o in Bezug auf eine Developpable schneidet die Cuspidalcurve in den Puncten, in welchen diese von Geraden geschnitten wird, die sie anderswo berühren.

Auf diese Weise sind die Durchschnittspuncte der zweiten Polarfläche von o mit der Curve (ν) dargestellt durch die Gleichung:

$$\nu(\rho-2) = 2\mu + 4\theta + 2.2\omega + 4\vartheta' + 4\beta + \lambda.$$

Aus ihr ergibt sich:

$$\lambda = \nu\rho - 2(\mu + \nu + 2\theta + 2\omega + 2\vartheta' + 2\beta),$$

oder auch mit Hilfe der Formeln von Cayley [1]):

$$\lambda = \nu(\rho + 4) - 6(\rho + \beta) - 4(\omega + \vartheta') - 2\theta.$$

105. Wir haben schon (98) gesehen, dass die zweite Polarfläche von o die Knotencurve (ξ) in den $\mu(\rho-4)$ Puncten schneidet, wo diese von den Berührungsgeneratrixen der μ Tangentialebenen von F, die durch o gehen, getroffen wird. Dies sind diejenigen Puncte der Curve (ξ), deren Quadripolarflächen durch o gehen. Eine solche Polarfläche besteht aus den zwei Ebenen, welche in demselben Puncte die Fläche F berühren und von denen eine durch o geht.

Die übrigen Durchschnittspuncte der zweiten Polarfläche von o sind Puncte, deren Quadripolarfläche unbestimmt ist, das heisst, es sind die dreifachen und vierfachen Puncte von F, deren Zahlen sind:

$$\theta,\ \theta(\rho-6),\ 2\omega,\ \omega(\rho-8),\ \vartheta',\ \beta,\ \lambda,\ \tau.$$

Wir haben schon gesehen, dass jeder der θ, $\theta(\rho-6)$, 2ω, $\omega(\rho-8)$ Puncte bezüglich für 4, 3, 3, 2 Durchschnittspuncte der Knotencurve mit der zweiten Polarfläche von o gilt; jetzt wollen wir zur Betrachtung der anderen Puncte übergehen.

106. Es sei m ein Doppelpunct der Cuspidalcurve und man halte die Benennungen der Nr. 102 fest. Eine beliebig durch m gelegte Ebene M schneidet F in einer Curve l von der Ordnung ρ und der Classe μ, die in

---

1) Das heisst, indem man für μ den gleichgeltenden Ausdruck $3(\rho-\nu)+\beta-\theta$ setzt (97).

m einen vierfachen Punct hat (vier Doppelpuncten und zwei Spitzen gleich geltend); in ihm werden zwei Zweige von der Spur von P und die beiden andern von der Spur von P' berührt. Geht die Schnittebene durch die Tangente t, so zerfällt der Schnitt l in die Gerade t und eine Curve l' der $(\rho-1)$-ten Ordnung und μ-ter Classe, die in m einen dreifachen Punct hat. Dort hat ein Zweig t zur Tangente während die beiden andern von der Spur von P' berührt werden. Die Ebene schneidet die Linie $(\nu+\theta)$ anderswo noch in $\nu+\theta-3$ Puncten, die Spitzen von l' bilden, und da m für zwei Doppelpuncte und eine Spitze zu zählen ist, so hat l' noch andere

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-1)(\rho-2)-\mu-3(\nu+\theta-2)]-2=\xi+\omega-\rho+2$$

Doppelpuncte, von denen $\xi-\rho+2$ in der Curve (ξ) liegen. Von den andern $\rho-2$ Durchschnittspuncten dieser Curve mit der Ebene sind 4 im Puncte m vereinigt und $\rho-6$ befinden sich in den andern Durchschnittspuncten von t und l', das heisst t trifft ausser t' noch $\rho-6$ Generatrixen und hat folglich in m mit l einen fünfpunctigen Contact.

Wir setzen jetzt voraus, die schneidende Ebene fiele mit der Tangentialebene P zusammen. Dann ist der Schnitt l aus der zweimal genommenen Geraden t und einer Curve l'' der $(\rho-2)$-ten Ordnung und $(\mu-1)$-ten Classe zusammengesezt, die in m einen dreifachen Punct hat — weil alle durch m in der Ebene P gezogene Geraden in ihm mit F eine fünfpunctige Berührung eingehen —; in ihm wird ein Zweig von t berührt, und die andern beiden von der Geraden PP'. Die Curve l'' hat andere $\nu+\theta-4$ Spitzen, sie besitzt also ausser den beiden in m vereinigten Doppelpuncten noch

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-2)(\rho-3)-(\mu-1)-3(\nu+\theta-3)]-2=\xi+\omega-2\rho+6$$

andere. Die übrigen $2\rho-6$ Durchschnittspuncte von P mit der Curve (ξ) werden von den $\rho-6$ Puncten, in denen t andere Generatrixen von F als t' schneidet, und dem Puncte m gebildet; folglich hat die Ebene P mit der Curve (ξ) einen zweipunctigen Contact in jedem der genannten $\rho-6$ Puncte und einen sechspunctigen Contact in m. Ein ähnlicher Schluss lässt sich für die Ebene P' machen, und folglich hat die Gerade PP' mit der Curve (ξ) im Puncte m sechs vereinigte gemeinschaftliche Puncte.[1]) Diese Gerade ist aber auch die Durchschnittsgerade der Tangentialebenen der zweiten Polarfläche von o in dem Biplanarpuncte m; und also haben wir:

---

[1]) Eine beliebig durch die Gerade PP' gelegte Ebene schneidet F in einer Curve l von der ρ-ten Ordnung und der μ-ten Classe mit vier in m sich kreuzenden Zweigen und einer einzigen Tangente PP', mit der sie in diesem Puncte einen sechspunctigen Contact hat. Dieselbe Ebene trifft die Cuspidalcurve in andern $\nu-2$ und die Knotencurve in andern $\xi-6$ Puncten. Die Curve l hat also in m eine Singularität, welche 6 Doppelpuncten und 2 damit vereinigten Spitzen entspricht und folglich die Verminderung um $6.2+2.3=18$ in der Classenzahl und von $6.6+2.8=52$ in der Zahl der Wendepuncte hervorbringt.

Ein Doppelpunct der Cuspidalcurve ist für die Knotencurve vierfach und gilt für zwölf Durchschnittspuncte der letzteren Curve mit der zweiten Polarfläche eines beliebigen Poles in Bezug auf die gegebene Developpable.

107. Ist $\mathfrak{m}$ einer der β Stillstandspuncte der Curve (ν), und t die entsprechende Tangente, so schneidet die Ebene, welche F längs t berührt die Curve (ν) in anderen $\nu-4$ Puncten, das heisst, die Curve $(\rho-2)$-ter Ordnung, welche F und genannter Ebene gemein ist, hat wohl noch $\nu+\theta-3$ Spitzen, wie im Allgemeinen für eine ganz beliebige Tangentialebene, aber eine derselben fällt auf $\mathfrak{m}$. Die ebene Curve hat in $\mathfrak{m}$ die Tangente t, von der sie noch in $\rho-5$ anderen Puncten geschnitten wird, und da sie ausserdem von der $(\mu-1)$-ten Classe ist, so hat sie

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-2)(\rho-3)-(\mu-1)-3(\nu+\theta-3)]=\xi+\omega-2\rho+8$$

Doppelpuncte, und folglich berührt die Ebene, welche in $\mathfrak{m}$ einen vierpunctigen Contact mit der Curve (ν) hat, die Curve (ξ) in $\mathfrak{m}$ und in anderen $\rho-5$ Puncten der Geraden t. Die nämliche Ebene berührt in $\mathfrak{m}$ die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$, und man hat also:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles in Bezug auf eine Developpable berührt die Knotencurve in den Stillstandspuncten der Cuspidalcurve.

Eine beliebig durch die Cuspidaltangente t der Curve (ν) gelegte Ebene schneidet F in dieser Geraden t und in einer Curve $(\rho-1)$-ter Ordnung und μ-ter Classe, für welche $\mathfrak{m}$ die Vereinigung einer Spitze und eines Doppelpunctes darstellt[1]); es gibt ausserdem noch $\nu+\theta-3$ andere Spitzen und folglich

$$\tfrac{1}{2}[(\rho-1)(\rho-2)-\mu-3(\nu+\theta-2)]-1=\xi+\omega-\rho+3$$

Doppelpuncte. Die Gerade t trifft nur $\rho-5$ von ihr selbst verschiedene Generatrixen, das heisst, sie schneidet die ebene Curve in $\rho-5$ Puncten — oder hat auch in $\mathfrak{m}$ mit ihr einen vierpunctigen Contact — und folglich hat die Ebene mit der Curve (ξ) einen zweipunctigen Contact in $\mathfrak{m}$. Also erhält man:

---

1) Eine beliebige Ebene schneidet F in einer Curve l der ρ-ten Ordnung und μ-ter Classe mit $\xi+\omega$ Knotenpuncten und $\nu+\theta$ Spitzen, woraus man

$$\mu=\rho(\rho-1)-2(\xi+\omega)-3(\nu+\theta)$$

zieht. Geht die Ebene durch einen der α Berührungspuncte der stationären Ebenen, so haben wir in ihm eine Spitze, einen Knoten- und einen Wendepunct vereinigt. Die Curve l hat in diesem Puncte zwei Zweige, weil der Punct für F ein Doppelpunct ist, mit derselben Tangente, deren Berührung ferner vierpunctig ist, da diese Tangente in der Wendeebene liegt. Man hat so in der Curve l eine Singularität, welche die Verminderung $3+2$ in der Classe und $8+6+1$ in der Zahl der Wendepuncte hervorbringt.

Geht die schneidende Ebene durch einen der β stationären Puncte der Curve (ν), so hat in ihm die Curve l drei Zweige, die von derselben Tangente vierpunctig berührt werden. Diese Singularität umfasst zwei mit einem Knotenpunct vereinigte Spitzen.

In den stationären Puncten der Cuspidalcurve einer Developpablen haben die Cuspidal- und Knotencurve dieselben Tangenten.

108. Es sei jetzt $\mathfrak{m}$ einer der λ Puncte der Curve (ν), die in zwei Tangenten liegen. Es sei t die Tangente in $\mathfrak{m}$ und t' die andre Tangente, die auch durch $\mathfrak{m}$ geht. Der Berührungskegel von F in $\mathfrak{m}$ — oder auch (71) die cubische Polarfläche von $\mathfrak{m}$ — ist dann aus drei Ebenen zusammengesetzt, von denen zwei mit der Ebene zusammenfallen, welche F längs t berührt, und die dritte ist die Tangentialebene längs t'. Die Durchschnittsgerade t'' dieser beiden Tangentialebenen ist die Cuspidaltangente der Knotencurve in $\mathfrak{m}$.

Die zweite Polarfläche von $\mathfrak{o}$ geht durch $\mathfrak{m}$ und wird dort von einer Ebene, die durch t'' geht, berührt, das heisst, von einer Ebene, welche mit der Curve ξ einen dreipunctigen Contact hat; folglich hat man:

Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles in Bezug auf eine Developpable hat mit der Knotencurve in jedem Puncte einen dreipunctigen Contact, welcher für diese ein Stillstandspunct und für die Cuspidalcurve ein einfacher Punct ist.

109. Jeder der dreifachen Puncte von F, in dem drei *getrennte* Generatrixen zusammenlaufen, ist offenbar für die Curve (ξ) ebenfalls dreifach und ist auch ein Punct der zweiten Polarfläche von $\mathfrak{o}$.

Die Durchschnittspuncte der zweiten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ mit der Curve (ξ) werden daher durch folgende Gleichung repräsentiert:

$$\xi(\rho-2)=\mu(\rho-4)+2\beta+3\lambda+3\tau+4\theta+3\theta(\rho-6)+3.2\omega+2\omega(\rho-8)+12\theta'.$$

Setzt man hierin für λ seinen Werth (104), so entsteht:

$$3\tau=(\xi-\mu-3\nu-3\theta-2\omega)(\rho-2)+8\mu+20\theta)+10\beta+18\omega.$$

Mittelst des Princips der Dualität erhält man aus den Zahlen λ, τ folgende andere Zahlen:

$$\lambda_1=\mu(\rho+4)-6(\rho+\alpha)-4(\omega+\gamma')-2\theta,$$
$$3\tau_1=(\eta-\nu-3\mu-3\theta-2\omega)(\rho-2)+8\nu+20\theta)+10\alpha+18\omega,$$

wo λ_1 die Zahl der Ebenen bedeutet, von denen jede die Curve (ν) in einem Puncte osculiert und in einem andern berührt, und τ_1 die Zahl der Ebenen, welche die Curve (ν) in drei getrennten Puncten berühren.

110. Existieren auf einem Kegel ξ-ter Ordnung zwei Curven, die nicht durch den Scheitel gehen und jede Generatrix bezüglich in σ_1, σ_2 Puncten

---

Geht die schneidende Ebene durch einen der λ stationären Puncte der Curve (ξ), so erhalten wir in ihm drei Zweige der Curve l mit zwei verschiedenen Tangenten, eine Singularität, welche der Vereinigung einer Spitze mit zwei Knotenpuncten entspricht.

Geht die schneidende Ebene durch einen der θ Berührungspuncte der Curven (ν), (ξ) mit den stationären Geraden, so hat in ihnen die Curve l zwei Zweige, die von derselben Tangente vierpunctig berührt werden, und diese Singularität entspricht zwei mit einem Knotenpunct vereinigten Spitzen. U. s. w., u. s. w.

schneiden, so ist die Zahl der beiden Curven gemeinschaftlichen Puncte gleich $\xi\sigma_1\sigma_2$. Diese Behauptung, die an sich klar ist, wenn die beiden Curven die Durchschnitte des Kegels mit zwei Flächen bezüglich der σ_1-ten, σ_2-ten Ordnung sind, nehmen wir hier für allgemeingiltig an.

Dies vorausgeschickt bemerke man, dass der Perspectivkegel der Knotencurve (ξ) vom Scheitel $\mathfrak{o}$ mit der Developpablen F die Curve (ξ) gemein hat, die zweimal zu zählen ist, und also diese Fläche noch in einer anderen Curve c der $\xi(\rho-2)$-ten Ordnung schneidet, die mit jeder Generatrix des Kegels $\rho-2$ Puncte gemein hat. Nimmt man auf jeder Generatrix des Kegels die harmonischen Mittelpuncte des $(\rho-3)$-ten Grades des Systems der $(\rho-2)$ Puncte von c in Bezug auf $\mathfrak{o}$ als Pol, so ist der Ort dieser harmonischen Mittelpuncte — genau wie für die ebenen Curven[1]) — eine Curve c' von der $\xi(\rho-3)$-ten Ordnung und hat mit jeder Generatrix des Kegels $\rho-3$ Puncte gemein. Die beiden Curven c, c' haben $\xi(\rho-2)(\rho-3)$ Puncte gemein, und zwar die folgenden:

a. Die Berührungspuncte der Curve c mit Tangenten, welche gleichzeitig Generatrixen des Kegels (ξ) sind. Aber die Tangenten, welche sich von $\mathfrak{o}$ an F ziehen lassen, haben ihre Berührungspuncte auf μ Geraden (Generatrixen von F), welche (13) den Kegel (ξ) in $\mu(\xi-2\rho+8)$ Puncten, die nicht auf der Curve (ξ) liegen, treffen. Diese $\mu(\xi-2\rho+8)$ Puncte sind folglich ebensoviele Durchschnittspuncte der Curven c, c'.

b. Die Puncte, in welchen die Curve (ξ) von den $\varkappa$ Doppelgeneratrixen des Kegels (ξ) getroffen wird. Es seien $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ zwei Puncte der Curve (ξ) mit $\mathfrak{o}$ in gerader Linie. Wir betrachten die Doppelgeneratrix $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ des Kegels wie zwei verschiedene Generatrixen $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_2$. Die erste derselben trifft zunächst die Curve (ξ) in $\mathfrak{p}_1$, schneidet dann F in zwei mit $\mathfrak{p}_2$ zusammenfallenden Puncten und ausserdem noch in anderen $\rho-4$ Puncten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ...; die zweite dagegen schneidet, nachdem sie die Curve (ξ) in $\mathfrak{p}_2$ getroffen, die Fläche F in zwei mit $\mathfrak{p}_1$ zusammenfallenden Puncten und ausserdem noch in anderen $\rho-4$ Puncten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ... Die Ebene, welche durch $\mathfrak{o}$ und durch die Tangenten der Curve (ξ) in $\mathfrak{p}_1$ (oder in $\mathfrak{p}_2$) geht schneidet die beiden Tangentialebenen von F in $\mathfrak{p}_2$ (oder in $\mathfrak{p}_1$) längs zwei Geraden, welche in $\mathfrak{p}_2$ (oder in $\mathfrak{p}_1$) Tangenten der Curve c sind; die beiden Ebenen, die durch $\mathfrak{o}$ und bezüglich durch die Tangenten der Curve (ξ) in den Puncten $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ gehen, schneiden die Tangentialebene von F in $\mathfrak{q}$ in zwei Geraden, welche die Curve c in $\mathfrak{q}$ berühren. Also sind die Puncte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ... sämmtlich für c Doppelpuncte.

Auf der Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1$, findet man als Puncte der c' die $\rho-3$ harmonischen Mittelpuncte des Systems $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ..., und auf $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_2$ hat dieselbe Curve die $\rho-3$ harmonischen Mittelpuncte des Systems $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, .., folglich enthält die Doppelgeneratrix $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ des Kegels $2(\rho-3)$ Puncte von c'. Einer davon ist $\mathfrak{p}_1$, ein andrer $\mathfrak{p}_2$. Jeder dieser Puncte ist für c ein

1) *Einleitung*, No. 68.

Doppelpunct und ein einfacher Punct für c', und vertritt also zwei Durchschnittspuncte der Curven c, c'. Die x Sehnen der Curve (ξ), welche durch $\mathfrak{o}$ gehen, geben folglich $4x$ Durchschnittspuncte der Curven c, c'.

c. Die Puncte, in denen die Cuspidalcurve (ν) und die θ stationären Generatrixen von F den Kegel (ξ) treffen. Die Gerade, welche von $\mathfrak{o}$ nach dem Puncte $\mathfrak{p}$ der Curve (ξ) geht, treffe in $\mathfrak{m}$ die Linie $(\nu+\theta)$ und ausserdem F in weiteren $\rho-4$ Puncten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ... Da $\mathfrak{m}$ zwei Durchschnittspuncte von $\mathfrak{op}$ mit F darstellt, so ist $\mathfrak{m}$ auch einer der harmonischen Mittelpuncte, deren Ort c' ist. Jede Ebene durch $\mathfrak{m}$ trifft in diesem Puncte c in zwei zusammenfallenden Puncten, weil $\mathfrak{m}$ ein gewöhnlicher Punct für den Kegel (ξ) und ein Doppelpunct (Uniplanarpunct) für F ist. Da nun alle Geraden, die mit F einen dreipunctigen Contact in $\mathfrak{m}$ haben, in einer einzigen Ebene liegen, so ist die Durchschnittsgerade dieser Ebene mit derjenigen, welche den Kegel (ξ) längs $\mathfrak{op}$ berührt, die einzige Tangente der Curve c in $\mathfrak{m}$, und $\mathfrak{m}$ ist folglich für c eine Spitze. Eine beliebig durch $\mathfrak{op}$ gezogene Ebene schneidet den Kegel (ξ) in anderen $\xi-1$ Generatrixen, deren eine $\mathfrak{op}'$ die Curve c in den Puncten $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}''$, $\mathfrak{q}_1'$, $\mathfrak{q}_2'$ ... trifft. Nähert sich $\mathfrak{op}'$ unendlich der Geraden $\mathfrak{op}$, das heisst, wird die Ebene Tangentialebene des Kegels, so nähern sich die Puncte $\mathfrak{q}_1'$, $\mathfrak{q}_2'$, ... unendlich den Puncten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ... und die beiden andern $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}''$ nähern sich unendlich dem Puncte $\mathfrak{m}$ und also auch sich selbst untereinander. Wenn sich aber die Puncte $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}''$ in einen vereinigen, so fällt auch einer der harmonischen Mittelpuncte auf $\mathfrak{op}'$ mit ihm zusammen, das heisst, die beiden Curven c, c' haben in $\mathfrak{m}$ dieselbe Tangente $\mathfrak{mm}'$ oder $\mathfrak{mm}''$. Folglich repräsentiert $\mathfrak{m}$ drei Durchschnittspuncte der Curven c, c'. Die Zahl der zu $\mathfrak{m}$ analogen Puncte χ ist gleich der Zahl der scheinbaren Durchschnittspuncte (107) der Curve (ξ) mit der Linie $(\nu+\theta)$. Die Curven (ξ) und (ν) haben gemein:

1. die Berührungspuncte der α stationären Ebenen;
2. die β Cuspidalpuncte der Curve (ν); jeder derselben zählt für drei Durchschnittspuncte der beiden Curven, weil diese in ihm dieselbe Tangente haben (103);
3. die λ Cuspidalpuncte der Curve (ξ); jeder von ihnen zählt für zwei Durchschnittspuncte, weil in ihnen die beiden Curven nicht dieselbe Tangente haben;
4. die θ Berührungspuncte der stationären Tangenten; jeder derselben zählt für drei Durchschnittspuncte, weil in ihnen die beiden Curven drei Puncte in gerader Linie gemein haben;
5. Die 2ω Berührungspuncte der Doppeltangenten; jeder derselben zählt für zwei Durchschnittspuncte, weil in ihnen die beiden Curven (ν) und (ξ) dieselben Tangenten haben;
6. Die ϑ' Doppelpuncte der Curve (ν), welche, als vierfache Puncte der Curve (ξ), $2.4.\vartheta'$ Durchschnittspuncten gleich gelten.

Die Zahl der scheinbaren Durchschnittspuncte der Curven $(\xi), (\nu)$ ist daher

$$\nu\xi - \alpha - 3\beta - 2\lambda - 3\theta - 4\omega - 8\vartheta'.$$

Jede der θ stationären Geraden hat (100) mit der Curve (ξ) einen dreipunctigen Contact und ausserdem $\rho-6$ gemeinschaftliche Puncte, von denen jeder für die Curve (ξ) stationär ist und folglich zwei wirkliche Durchschnittspuncte darstellt. Die Zahl der scheinbaren Durchschnittspuncte der Curve (ξ) mit der stationären Geraden ist also

$$\xi - 2(\rho-6) - 3,$$

und folglich ist die Zahl der scheinbaren Durchschnittspuncte der Curve (ξ) mit der Linie $(\nu+\theta)$ gleich

$$\nu\xi - \alpha - 3\beta - 2\lambda - 3\theta - 4\omega - 8\vartheta' + \theta(\xi - 2\rho + 9).$$

d. Die Puncte, in denen die ω Doppelgeneratrixen von F den Kegel (ξ) treffen. Wenn die von $\mathfrak{o}$ nach einem Puncte $\mathfrak{p}$ der Curve (ξ) gezogene Gerade die Doppelgeneratrix t in $\mathfrak{m}$ trifft, so gilt $\mathfrak{m}$ für zwei Durchschnittspuncte von $\mathfrak{op}$ mit F und ist daher ein Punct der Curve c', des Ortes der harmonischen Mittelpuncte. Ferner ist $\mathfrak{m}$ für die Curve c ein Doppelpunct, weil diese in ihm zwei Tangenten besitzt, welche die Durchschnittsgeraden der Tangentialebene des Kegels (ξ) längs $\mathfrak{op}$ mit den Tangentialebenen von F längs t sind. Die Gerade t hat mit der Curve (ξ) zwei dreipunctige Berührungen und ausserdem noch $\rho-8$ gemeinsame Puncte, die für genannte Curve Doppelpuncte sind; folglich ist die Zahl der scheinbaren Durchschnittspuncte dieser Curve mit den ω Doppelgeneratrixen gleich $\omega[\xi - 2(\rho-8) - 2.3]$ das heisst $\omega(\xi - 2\rho + 10)$. Jeder dieser Puncte zählt für zwei Durchschnittspuncte der Curven c, c'.

e. Die Doppelpuncte der Curve (ν), welche für die Curve (ξ) vierfach sind. Ist $\mathfrak{m}$ einer dieser Puncte, so ist $\mathfrak{om}$ eine vierfache Generatrix des Kegels (ξ). Wir wollen diese Gerade so ansehen, als sei sie durch Uebereinanderlagern von vier verschiedenen Generatrixen erzeugt: in jeder derselben fallen zwei von den $\rho-6$ Puncten der Curve c mit $\mathfrak{m}$ zusammen, folglich ist $\mathfrak{m}$ auch ein harmonischer Mittelpunct, das heisst ein Punct von c'. Der Punct $\mathfrak{m}$ repräsentiert für die Curve c und auf jeder der vier Generatrixen einen Doppelpunct mit zusammenfallenden Tangenten, weil die Tangenten die Durchschnittsgeraden der Tangentialebene des Kegels (ξ) längs $\mathfrak{om}$ mit den Tangentialebenen der Developpablen in $\mathfrak{m}$ sein würden, und diese Geraden zusammenfallen, da diese drei Ebenen durch ein und dieselbe Gerade gehen. (In der That ist die einzige Tangente der Curve (ξ) in $\mathfrak{m}$ genau der Durchschnitt der beiden Tangentialebenen von F). Also gilt $\mathfrak{m}$ für 3.4 Durchschnittspuncte der Curven c, c'.

111. Die Durchschnittspuncte der Curven c, c' sind also durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\xi(\rho-2)(\rho-3)=\mu(\xi-2\rho+8)+4\varkappa+3(\nu\xi-\alpha-3\beta-2\lambda-3\theta-4\omega-8\vartheta')$$
$$+3\theta(\xi-2\rho+9)+2\omega(\xi-2\rho+10)+12\vartheta'.$$

Aus der dritten Gleichung der Nr. 97 erhält man aber:

$$\rho(\rho-1)-\mu-3(\nu+\theta)-2\omega=2\xi,$$

also:

$$2\xi(\xi-2\rho+3)=-2\mu(\rho-4)+4\varkappa-3(\alpha+3\beta+2\lambda)-6\theta(\rho-3)-4\omega(\rho-2)-12\vartheta'.$$

Addiert man diese Gleichung zu der mit 4 multiplicierten ersten Gleichung in Nr. 109, und setzt für β den äquivalenten Ausdruck (97):

$$6\rho-8\mu+3\alpha-2\theta,$$

so erhält man:

$$\xi(\xi-1)-2\varkappa-2\omega(\rho-8)-3\lambda-3\theta(\rho-6)-6\tau-18\vartheta'=\rho(\mu-3)-3\alpha.$$

112. Daraus ergibt sich sogleich die Classe der Curve (ξ). Diese Curve hat $\varkappa$ scheinbare Doppelpuncte, $\omega(\rho-8)$ wirkliche Doppelpuncte, $\lambda+\theta(\rho-6)$ stationäre Puncte, τ dreifache und ϑ' vierfache Puncte, von denen jeder sechs Doppelpuncten und zwei Spitzen gleich gilt (106, *Anmerkung*). Ausserdem hat die Curve (ξ) noch weitere γ' Doppelpuncte entsprechend den Ebenen, welche F längs zwei verschiedener Generatrixen berühren.

Betrachten wir nähmlich eine solche Ebene, welche die Curve (ν) in zwei Puncten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ osculiert und F längs der beiden Geraden $\mathfrak{nm}$, $\mathfrak{nm}'$ berührt. Diese Ebene schneidet F längs einer Curve l der $(\rho-4)$-ten Ordnung und $(\mu-2)$-ter Classe, mit $\nu+\theta-6$ Spitzen also im Besitz von

$$\tfrac{1}{2}[\rho-4)(\rho-5)-(\mu-2)-3(\nu+\theta-6)]=\xi+\omega-4(\rho-5)$$

Doppelpuncten. Der Punct $\mathfrak{n}$ ist für den vollständigen Schnitt vierfach und stellt also vier Durchschnittspuncte der Ebene $\mathfrak{mm'n}$ mit der Knotencurve dar, und folglich fallen die übrigen $4(\rho-6)$ Durchschnittspuncte zu zwei und zwei auf die Durchschnittspuncte von l mit der Geraden $\mathfrak{mn}$, $\mathfrak{m'n}$; das heisst, jede von diesen Geraden berührt l in einem Puncte ($\mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{m}'$) und schneidet sie noch in andern $\rho-6$ Puncten. Die Ebene $\mathfrak{mm'n}$ hat also mit der Knotencurve in $\mathfrak{n}$ eine vierpunctige Berührung und noch $2(\rho-6)$ andere zweipunctige Contacte, und jede der Geraden $\mathfrak{nm}$, $\mathfrak{nm}'$ trifft nicht mehr als $\rho-6$ andere Generatrixen. Schneiden wir also die Curve (ξ) durch eine Ebene, die durch $\mathfrak{nm}$ geht oder auch durch $\mathfrak{nm}'$, so gilt $\mathfrak{n}$ immer für zwei zusammenfallende Durchschnittspuncte; das heisst $\mathfrak{n}$ ist ein Doppelpunct für die Curve (ξ). Man sieht nun leicht, dass die beiden Tangenten dieser Curve in $\mathfrak{n}$ in der Ebene $\mathfrak{mm'n}$ enthalten sind und mit den beiden Generatrixen $\mathfrak{nm}$, $\mathfrak{nm}'$ ein harmonisches Büschel bilden [1]).

---

1) Die correlative Eigenschaft ist: Wenn die Curve (ν) einen Doppelpunct $\mathfrak{m}$ hat, so berührt die Ebene der beiden Tangenten die doppeltberührende Developpable (die von der Classe η ist) längs zwei Geraden, welche durch $\mathfrak{m}$ gehen, und den beiden Tangenten der Cuspidalcurve harmonisch conjugiert sind. Diese beiden Geraden sind die Spuren der Ebenen, welche in $\mathfrak{m}$ mit der Knotencurve einen siebenpunctigen Contact haben.

Dies vorausgesetzt, ist mit Rücksicht auf die letzte Gleichung der Nr. 111 die Classe der Knotencurve, das heisst die Ordnung der Developpablen, welche von ihren Tangenten erzeugt wird, gleich

$$\rho(\mu-3)-3\alpha-2\gamma'.$$

Gemäss dem Dualitätsprincip ist dann die Ordnung der doppeltberührenden Developpablen der Curve (ν) gleich

$$\rho(\nu-3)-3\beta-2\vartheta'.$$

CAPITEL V.

PROJECTIVISCHE FLÄCHENBÜSCHEL.

113. Es sind zwei projectivische Flächenbüschel bezüglich ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung gegeben; was ist der Ort der Durchschnittscurve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung zweier entsprechender Flächen?

Ist x ein beliebiger Punct einer Geraden t, so geht durch x eine Fläche des ersten Büschels. Die entsprechende Fläche des zweiten Büschels schneidet t in ν_2 Puncten x'. Umgekehrt geht durch einen Punct x' eine Fläche des zweiten Büschels, und die entsprechende Fläche des ersten Büschels schneidet t in ν_1 Puncten x. Wir haben daher auf t zwei Reihen von Puncten x, x' mit der Beziehung (ν_1, ν_2) und die Zahl der zusammenfallenden Puncte ist daher $\nu_1 + \nu_2$. *Der gesuchte Ort ist also eine Fläche* $\nu^1 + \nu_2$)*-ter Ordnung.*

Oder auch: Eine beliebige Ebene schneidet die gegebenen Flächen in Curven, die zwei projectivische Büschel bilden. Nun ist der Ort der Durchschnittspuncte entsprechender Curven eine Curve $(\nu_1 + \nu_2)$-ter Ordnung[1]), also wird der gesuchte Ort von jeder beliebigen Ebene in einer Curve $(\nu_1 + \nu_2)$-ter Ordnung geschnitten.

Diese Fläche geht durch die Curven $\nu_1{}^2$-ter, $\nu_2{}^2$-ter Ordnung, welche die Basen der beiden Büschel bilden, weil jeder Punct dieser Curven in allen Flächen des einen Büschels und in einer Fläche des andern liegt.

Sei o ein Punct der Curve $(\nu_1{}^2)$, S_2 diejenige Fläche des zweiten Büschels, die durch o geht, S_1 die entsprechende Fläche des ersten Büschels und P die Ebene, welche S_1 in o berührt. Dann schneidet P die S_1 in einer Curve, welche in o einen Doppelpunct hat, und S_2 in einer Curve, die

---

1) Grassmann, *Die höhere Projectivität in der Ebene.* (Crelles Journal, Bd. 42; 1851. S. 202). — *Einleitung,* No. 50.

durch σ geht. Folglich[1] ist σ auch für die Curve $(\nu_1 + \nu_2)$, der Durchschnittscurve der Fläche $(\nu_1 + \nu_2)$ mit der Ebene P, ein Doppelpunct, das heisst, diese Fläche wird in σ von der Ebene P berührt.

114. Auf einer Fläche **S** der $(\nu_1 + \nu_2)$-ten Ordnung denken wir uns eine Curve c_1 der ν_1^2-ten Ordnung gezogen, welche die Basis eines Flächenbüschels ν_1-ter Ordnung bildet, und nehmen zunächst an, es sei $\nu_1 > \nu_2$. Es seien S_1, S_1' zwei Flächen dieses Büschels. Da die Flächen S_1, **S** die Curve c_1 gemein haben, die auf einer Fläche S_1' der ν_1-ten Ordnung liegt, so schneiden sie sich ausserdem noch in einer Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung, die auf einer Fläche S_2 der ν_2-ten Ordnung liegt[2], die nur eine sein kann, weil zwei Flächen ν_2-ter Ordnung keine Curve gemein haben können, deren Ordnungszahl $\nu_1\nu_2 > \nu_2^2$ ist. Ebenso schneiden sich die Flächen S_1', **S**, da sie beide durch die Curve c_1 gehen, die auf einer Fläche S_1 der ν_1-ten Ordnung liegt, ausserdem längs einer Curve der $\nu_1\nu_2$-ten Ordnung, die auf einer völlig bestimmten Fläche S_2' der ν_2-ten Ordnung liegt. Die Puncte, in denen die gemeinschaftliche Curve c_2 der Flächen S_2, S_2' die Flächen S_1, S_1' trifft, gehören bezüglich zu den Curven S_1S_2, $S_1'S_2'$; das heisst, sie liegen sämmtlich auf der Fläche **S**. Ihre Zahl $2\nu_1\nu_2^2$ übersteigt aber die Zahl $(\nu_1 + \nu_2)\nu_2^2$ der Durchschnittspuncte einer Curve ν_2^2-ter Ordnung mit einer Fläche der $(\nu_1 + \nu_2)$-ten Ordnung, und es liegt daher die Curve S_2S_2' vollständig auf **S** und bildet dort die Basis eines Büschels ν_2-ter Ordnung. Wir haben somit auf **S** zwei Curven c_1, c_2, welche die Basiscurven zweier Büschel $(S_1, S_1', \ldots)$, $(S_2, S_2', \ldots)$ der ν_1-ten und ν_2-ten Ordnung bilden. Jede Fläche des ersten Büschels schneidet **S** längs einer Curve der $\nu_1\nu_2$-ten Ordnung, durch welche eine ganz bestimmte Fläche des zweiten Büschels geht, und umgekehrt, die zweite Fläche individualisiert die erste. Die beiden Büschel sind daher projectivisch und der Ort der Durchschnittscurven entsprechender Flächen ist **S**.

Es sei zweitens $\nu_1 \leqq \nu_2$. Eine beliebige Fläche S_1 der Ordnung ν_1 welche durch die Curve c_1 geht, schneidet **S** längs einer andern Curve der $\nu_1\nu_2$-ten Ordnung, durch welche (20, *Anmerkung*) eine unbegrenzte Zahl von Flächen ν_2-ter Ordnung geht. Es sei S_2 eine derselben, welche dadurch bestimmt ist, dass auf der Fläche **S** ausserhalb der Curve c_1 noch $\mathfrak{N}(\nu_2 - \nu_1) + 1$ beliebige Puncte fixiert sind. Dann schneidet S_2 die **S** in einer andern Curve c_2 der ν_2^2-ten Ordnung, welche die Basis eines Büschels ν_2-ter Ordnung bildet[3]. Eine andere Fläche S_1 der ν_1-ten Ordnung, die auch durch c_1 geht, schneidet **S** in einer andern Curve der $\nu_1\nu_2$-ten Ord-

---

1) *Einleitung*, No. 51, b.

2) Diese Behauptung ist eine unmittelbare Folge der analogen Eigenschaft, welche (*Einleitung*, 44) für die Curven besteht, die bei Durchschneiden der Flächen in Rede durch eine Ebene entstehen.

3) Man sehe die Bemerkung der letzten *Note*.

nung, welche $\nu_1\nu_2^2$ Puncte mit c_2 gemein hat, nämlich die Puncte, in denen c_2 von S_1 getroffen wird; folglich enthält die Fläche S_2' der ν_2-ten Ordnung, die durch c_2 und einen neuen beliebig auf der letzten Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung angenommenen Punct geht, diese letztere Curve vollständig. Auf diese Weise haben wir wie im ersten Falle auf **S** zwei Curven c_1, c_2, welche die Basiscurven zweier projectivischer Büschel bilden, deren entsprechende Flächen sich in Curven schneiden, die sämmtlich auf **S** liegen[1]).

115. Es seien wieder zwei projectivische Flächenbüschel gegeben, das erste von der Ordnung ν', das zweite von der Ordnung $\nu-\nu''<\nu'$. In ihnen mögen die Flächen $S_{\nu'}$, $S_{\nu''}+S_{\nu'-\nu''}$ des ersten Büschels — $S_{\nu''}+S_{\nu'-\nu''}$ ist hierbei der Complex der beiden Flächen $S_{\nu''}$, $S_{\nu'-\nu''}$ — respective den Flächen $S_{\nu-\nu''}$, $S_{\nu-\nu'}+S_{\nu'-\nu''}$ des zweiten Büschels entsprechen. Als Ort der gemeinschaftlichen Durchschnittscurven der entsprechenden Flächen erhält man dann den Complex der Fläche $S_{\nu'-\nu''}$ und einer zweiten Fläche S_ν der ν-ten Ordnung und kann damit das vorhergehende Theorem auf folgende Weise darstellen:

Man habe die drei Flächen S_ν, $S_{\nu'}$, $S_{\nu''}$, deren erste durch die Durchschnittscurve $\nu'\nu''$-ter Ordnung der beiden andern Flächen geht, und es sei $\nu \gtreqless \nu'$, $\nu<\nu'+\nu''$ und $\nu' \gtreqless \nu''$. Die Fläche $S_{\nu'}$ schneidet S_ν längs einer anderen Curve der $\nu'(\nu-\nu'')$-ten Ordnung, die auf einer Fläche $S_{\nu-\nu''}$ liegt, welche vollständig und eindeutig bestimmt ist, weil $\nu-\nu''<\nu'$ ist. Eenso haben $S_{\nu''}$ und S_ν eine andere Curve der $\nu''(\nu-\nu')$-ten Ordnung gemein, die auf einer Fläche $S_{\nu-\nu'}$ liegt, die gleichfalls eindeutig bestimmt ist, da $\nu-\nu'<\nu''$ ist. Nun schneiden sich $S_{\nu-\nu'}$ und $S_{\nu-\nu''}$ längs einer Curve, die auf S_ν liegt gemäss dem allgemeinen Theorem (114). Auf diese Weise sind also, wenn S_ν, $S_{\nu'}$, $S_{\nu''}$ gegeben sind, die Flächen $S_{\nu-\nu'}$, $S_{\nu-\nu''}$ vollständig und nur auf eine Weise individualisiert, und S_ν gehört zu demselben Büschel, zu welchem die zusammengesetzten Flächen $S_{\nu'}+S_{\nu-\nu'}$, $S_{\nu''}+S_{\nu-\nu''}$ gehören. Sind also jetzt nur die Flächen $S_{\nu'}$, $S_{\nu''}$ gegeben, so kann S_ν, da $S_{\nu-\nu'}$, $S_{\nu-\nu''}$ genau

$$\mathfrak{N}(\nu-\nu')+\mathfrak{N}(\nu-\nu'')$$

Bedingungen genügen können, und man, um eine Fläche eines Büschels festzulegen, einer neuen Bedingung genügen muss,

$$\mathfrak{N}(\nu-\nu')+\mathfrak{N}(\nu-\nu'')+1$$

Bedingungen erfüllen. Man hat daher den Satz:

Soll S_ν durch die Curve $S_{\nu'}S_{\nu''}$ hindurchgehen, so gilt das gleich, als sollte sie durch

$$\mathfrak{N}(\nu)-\mathfrak{N}(\nu-\nu')-\mathfrak{N}(\nu-\nu'')-1$$

beliebig gegebene Puncte gehen.

Oder auch:

---

1) CHASLES, *Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres.* (Compte rendu du 28 décembre 1857).

Jede Fläche ν-ter Ordnung, welche durch

$$\mathfrak{N}(\nu) - \mathfrak{N}(\nu - \nu') - \mathfrak{N}(\nu - \nu'') - 1$$

beliebige Puncte der Durchschnittscurve zweier Flächen ν'-ter und ν''-ter Ordnung ($\nu < \nu' + \nu''$) geht, enthält diese Curve vollständig.

Eine Fläche ν-ter Ordnung, die durch

$$\mathfrak{N}(\nu) - \mathfrak{N}(\nu - \nu') - \mathfrak{N}(\nu - \nu'') - 2$$

beliebige Puncte der Curve ($\nu' \nu''$) geht, schneidet sie noch in

$$\nu\nu'\nu'' - \mathfrak{N}(\nu) + \mathfrak{N}(\nu - \nu') + \mathfrak{N}(\nu - \nu'') + 2$$

weiteren Puncten, die durch die ersten mit bestimmt sein müssen, da sie nicht beliebig sein können, ohne dass die Fläche die Curve vollständig enthielte. Alle Flächen also, welche durch die ersten Puncte gehen, enthalten auch die anderen. Man hat daher den Satz:

Die $\nu\nu'\nu''$ Durchschnittspuncte dreier Flächen von den respectiven Ordnungen ν, ν', ν'' sind durch

$$\mathfrak{N}(\nu) - \mathfrak{N}(\nu - \nu') - \mathfrak{N}(\nu - \nu'') - 2$$

von ihnen bestimmt, vorausgesetzt, dass die grösste der Zahlen ν, ν', ν'' kleiner ist als die Summe der beiden andern.

116. Es sei jetzt die zusammengesetzte Fläche $S_\nu + S_{\nu' - \nu''}$ mittelst zwei projectivischer Flächenbüschel erzeugt, in denen den Flächen $S_{\nu'}$, $S_{\nu''} + S_{\nu' - \nu''}$ des ersten Büschels die Flächen $S_{\nu - \nu''}$, $S_{\nu - \nu'} + S_{\nu' - \nu''}$ des zweiten der Reihe nach entsprechen, aber es sei jetzt $\nu \geqq \nu' + \nu''$, $\nu' \geqq \nu''$.

Es seien die Flächen S_ν, $S_{\nu'}$, $S_{\nu''}$ gegeben. Die Fläche $S_{\nu'}$ schneidet S_ν in einer Curve der $\nu'(\nu - \nu'')$-ten Ordnung durch welche zusammen mit $\mathfrak{N}(\nu - \nu' - \nu'') + 1$ weiteren Puncten, die wir auf S_ν nehmen, eine Fläche $S_{\nu - \nu''}$ der ($\nu - \nu''$)-ten Ordnung geht (114). Ebenso schneidet $S_{\nu''}$ die S_ν in einer Curve $\nu''(\nu - \nu')$-ter Ordnung, durch welche im Verein mit den obigen weiteren Puncten eine Fläche $S_{\nu - \nu'}$ der ($\nu - \nu'$)-ten Ordnung geht. Die beiden Flächen $S_{\nu - \nu'}$, $S_{\nu - \nu''}$ schneiden sich auf S_ν, welche folglich zusammen mit $S_{\nu'} + S_{\nu - \nu'}$ und $S_{\nu''} + S_{\nu - \nu''}$ demselben Büschel angehört. Sind ausser der Curve $S_{\nu'} S_{\nu''}$ auch die weiteren Puncte im Raume gegeben, aber S_ν nicht gegeben, so kann die Fläche $S_{\nu - \nu'}$, die durch diese Puncte gehen muss, noch andern

$$\mathfrak{N}(\nu - \nu') - \mathfrak{N}(\nu - \nu' - \nu'') - 1$$

Bedingungen genügen, und ebenso $S_{\nu - \nu''}$ noch andern

$$\mathfrak{N}(\nu - \nu'') - \mathfrak{N}(\nu - \nu' - \nu'') - 1$$

Bedingungen. Also kann S_ν auch

$$[\mathfrak{N}(\nu - \nu') - \mathfrak{N}(\nu - \nu' - \nu'') - 1] + [\mathfrak{N}(\nu - \nu'') - \mathfrak{N}(\nu - \nu' - \nu'') - 1] + 1$$

Bedingungen Genüge leisten. Es folgt also, dass für S_ν die Bedingung, durch die Curve $S_{\nu'} S_{\nu''}$ und die weiteren Puncte zu gehen, so viel gilt als

$$\mathfrak{N}(\nu) - \mathfrak{N}(\nu - \nu') - \mathfrak{N}(\nu - \nu'') + 2\,\mathfrak{N}(\nu - \nu' - \nu'') + 1$$

Bedingungen. Das Enthalten der Curve $S_{\nu'} S_{\nu''}$ entspricht folglich

$$\mathfrak{N}(\nu)-\mathfrak{N}(\nu-\nu')-\mathfrak{N}(\nu-\nu'')+\mathfrak{N}(\nu-\nu'-\nu'')=\tfrac{1}{2}\nu'\nu''(2\nu-\nu'-\nu''+4)$$

Bedingungen.

Geht also unter der jetzigen Voraussetzung eine Fläche ν-ter Ordnung durch

$$\mathfrak{N}(\nu)-\mathfrak{N}(\nu-\nu')-\mathfrak{N}(\nu-\nu'')+\mathfrak{N}(\nu-\nu'-\nu'')$$

beliebige Puncte der Durchschnittscurve zweier Flächen ν'-ter, ν''-ter Ordnung, so enthält sie dieselbe vollständig,

und man hat folglich den Satz:

Jede Fläche ν-ter Ordnung, welche durch

$$\mathfrak{N}(\nu)-\mathfrak{N}(\nu-\nu')-\mathfrak{N}(\nu-\nu'')+\mathfrak{N}(\nu-\nu'-\nu'')-1$$

beliebige Puncte der Curve $(\nu'\nu'')$ geht, trifft dieselbe noch in andern

$$\nu\nu'\nu''-\mathfrak{N}(\nu)+\mathfrak{N}(\nu-\nu')+\mathfrak{N}(\nu-\nu'')-\mathfrak{N}(\nu-\nu'-\nu'')+1=\frac{\nu'\nu''(\nu'+\nu''-4)}{1.2}+1$$

Puncten, die durch die ersten mit bestimmt sind.

Oder auch:

Die $\nu\nu'\nu''$ Durchschnittspuncte dreier Flächen bezüglich von den Ordnungen ν, ν', ν'' sind durch $\frac{\nu'\nu''(2\nu-\nu'-\nu''+4)}{1.2}-1$ von ihnen vollständig bestimmt, vorausgesetzt, dass die grösste der Zahlen ν, ν', ν'' nicht kleiner ist als die Summe der beiden andern [1]).

117. Gegeben zwei Flächen ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung. Was ist der Ort eines Punctes $\mathfrak{x}$, dessen Polarebenen in Bezug auf jene Flächen sich auf einer gegebenen Geraden r schneiden?

Gehen durch einen Punct $\mathfrak{i}$ von r die Polarebenen von $\mathfrak{x}$, so schneiden sich umgekehrt die ersten Polarflächen von $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{x}$ (62). Lässt man $\mathfrak{i}$ sich auf r bewegen, so bilden die ersten Polarflächen zwei projectivische Büschel (86) bezüglich von der (ν_1-1)-ten, (ν_2-1)-ten Ordnung und diese erzeugen (113) eine Fläche der $(\nu_1+\nu_2-2)$-ten Ordnung, welche der gesuchte Ort ist.

Jeder gemeinschaftliche Punct dieser Fläche und der Duchschnittscurve der beiden gegebenen Flächen hat zu Polarebenen die Tangentialebenen der beiden Flächen in diesem Puncte und folglich ist die Durchschnittsgerade dieser beiden Ebenen die Tangente der Curve $(\nu_1\nu_2)$ im nämlichen Puncte. Diese Durchschnittsgerade trifft aber die Gerade r, und es gibt also so viele Durchschnittspuncte der Fläche $(\nu_1+\nu_2-2)$-ter Ordnung mit der Curve $(\nu_1\nu_2)$ als es Tangenten von $(\nu_1\nu_2)$ gibt, die von r getroffen werden. Nehmen wir jetzt an, die Curve $(\nu_1\nu_2)$ hätte δ Doppelpuncte und σ Spitzen, das heisst, die beiden gegebenen Flächen hätten in δ Puncten eine einfache und in σ Puncten eine stationäre Berührung, so gehören diese Puncte offenbar auch der Fläche

1) Jacobi, *a. a. O.*

$(\nu_1+\nu_2-2)$ an, und die Zahl der überbleibenden Durchschnittspuncte ist

$$\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-2\delta-3\sigma\ldots \quad [1]).$$

Man hat also:

Die Tangenten der Durchschnittscurve zweier Flächen ν_1-ter, ν_2-ter Ordnung, die δ einfache und σ stationäre Berührungen haben, bilden eine Developpable von der Ordnung

$$\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-2\delta-3\sigma.$$

Auf diese Weise kennen wir von der Curve $(\nu_1\nu_2)$ die Ordnung $\nu=\nu_1\nu_2$, die Ordnung der osculierenden Developpablen $\rho=\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-2\delta-3\sigma$ und die Zahl der stationären Puncte $\beta=\sigma$. Die Formeln von Cayley (12, 79) geben nun die übrigen Charakteristiken:

$$2\vartheta=\nu_1\nu_2(\nu_1-1)(\nu_2-1),$$
$$\mu=3\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-3)-6\delta-8\sigma,$$
$$\alpha=2\nu_1\nu_2(3\nu_1+3\nu_2-10)-3(4\delta+5\sigma),$$
$$2\gamma=\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-3)\left\{9\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-3)-6(6\delta+8\sigma)-22\right\}$$
$$+5\nu_1\nu_2+(6\delta+8\sigma)(6\delta+8\sigma+7),$$
$$2\xi=\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)\left\{\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-2(2\delta+3\sigma)-4\right\}$$
$$+(2\delta+3\sigma)^2+8\delta+11\sigma,$$
$$2\eta=\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)\left\{\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-2(2\delta+3\sigma)-10\right\}$$
$$+8\nu_1\nu_2+(5\delta+3\sigma)^2+20\delta+27\sigma.$$

Hierin ist ϑ die Zahl der scheinbaren Doppelpuncte der Curve, die Zahl der wirklichen Doppelpuncte, welche δ ist, nicht eingerechnet.

Das Geschlecht der Curve ist

$$\tfrac{1}{2}(\nu_1\nu_2-1)(\nu_1\nu_2-2)-(\vartheta+\delta+\sigma)=\tfrac{1}{2}\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-4)-(\delta+\sigma-1)$$

und ist gleich Null, wenn die Curve ihre grösste Zahl von Doppelpuncten hat. Folglich entsteht der Satz:

Die grösste Zahl der Puncte, in denen zwei Flächen ν_1-ter, ν_2-ter Ordnung sich berühren können, ist

$$\tfrac{1}{2}\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-4)+1.$$

---

[1]) Die Zahl der überbleibenden Durchschnittspuncte sei

$$\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-\xi\delta-\eta\sigma,$$

wo ξ und η noch zu bestimmende Coefficienten sind. Zu diesem Zwecke setze man $\nu_1=\nu$, $\nu_2=1$, dann wird die Fläche $(\nu_1+\nu_2-2)$ die erste Polarfläche des Punctes σ, in dem r eine Ebene P trifft, in Bezug auf eine gegebene Fläche F_ν. Die Tangenten der Curve PF_ν, welche durch r getroffen werden, sind diejenigen, welche durch σ gehen, also muss die Zahl

$$\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-\xi\delta-\eta\sigma$$

die Classe der Curve PF_ν ausdrücken. Diese ist aber gleich $\nu(\nu-1)-2\delta-3\sigma$ und folglich ist $\xi=2$ und $\eta=3$.

118. Die Zahl θ der Geraden, die durch einen festen Punct $\mathfrak{o}$ gehen, und jede die Durchschnittscurve zweier Flächen F_{ν_1}, F_{ν_2} in zwei Puncten treffen, kann man auch direct, wie folgt, bestimmen.

Wie es schon anderswo (77—79) gezeigt ist, bilde man für jede der beiden gegebenen Flächen die Reihe der perspectivischen Flächen F'_{ν_1}, F'_{ν_2} und die Reihe der abgeleiteten Flächen $\mathfrak{F}_{\nu_1-1}, \mathfrak{F}_{\nu_2-1}$ entsprechend den verschiedenen Werthen eines gewissen Doppelverhältnisses und zwar unter Benutzung des Poles $\mathfrak{o}$ und einer willkürlichen Ebene P. Die so bestimmten vier Reihen von Flächen sind projectivisch, wenn man nur als entsprechende Elemente diejenigen Flächen annimmt, die ein und demselben Werthe des Doppelverhältnisses entsprechen.

Die Ordnung und der Index der Reihen, die durch die Flächen F'_{ν_1}, F'_{ν_2} gebildet werden, sind ν_1, ν_2, und also ist [1]) der Ort der gemeinschaftlichen Curve zweier entsprechender Flächen dieser Reihen von der $2\nu_1\nu_2$-ten Ordnung. In diesem Orte ist ferner die Ebene P $\nu_1\nu_2$-mal enthalten. Denn die ν_1 Flächen der ersten Reihe und die ν_2 Flächen der zweiten Reihe, welche durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{p}$ von P gehen, fallen mit der Ebene P zusammen, weil alle Flächen jeder Reihe durch ein und dieselbe Curve, die in der Ebene P liegt, gehen. Der Punct $\mathfrak{p}$ gehört daher ν_1 Flächen der ersten und ν_2 Flächen der zweiten Reihe an, und jede beliebige der letzten kann als jeder beliebigen der ersten entsprechend angenommen werden; also ist auch $\mathfrak{p}$ ein $(\nu_1\nu_2)$-facher Punct für den durch diese beiden Reihen erzeugten Ort.

Dieser Ort ist, von der Ebene P abgesehen, aus einer Fläche $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung gebildet, die nichts Anderes ist, als der Kegel K, dessen Scheitel in $\mathfrak{o}$ liegt, und dessen Directrix die Curve $(\nu_1\nu_2)$ ist, welche beiden Flächen gemein ist; denn dieser Kegel geht durch die gemeinsame Curve irgend zwei entsprechender Flächen F_{ν_1}, F_{ν_2}.

In ähnlicher Weise erzeugen die beiden Reihen der $\mathfrak{F}_{\nu_1-1}, \mathfrak{F}_{\nu_2-1}$ eine Fläche $\mathbf{S}$ von der Ordnung $(\nu_1-1)(\nu_2-1)$. Nun gehört jeder den Flächen F_{ν_1} und $\mathfrak{F}_{\nu_1-1}$ gemeinschaftliche Punct auch der entsprechenden Fläche F'_{ν_1} an, und ebenso jeder den Flächen F_{ν_2} und $\mathfrak{F}_{\nu_2-1}$ gemeinschaftliche Punct auch der entsprechenden F'_{ν_2}, und so muss also jeder Punct $\mathfrak{a}'$, der auf dem Orte $\mathbf{S}$ liegt — und daher in zwei entsprechenden Flächen $\mathfrak{F}_{\nu_1-1}, \mathfrak{F}_{\nu_2-1}$ — und in der Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$, auch in zwei entsprechenden Flächen F'_{ν_1}, F'_{ν_2}, liegen. Der Strahl $\mathfrak{o}\mathfrak{a}'$ enthält folglich ausserdem noch einen Punct $\mathfrak{a}$, der F_{ν_1} und F_{ν_2} gemein ist, das heisst, dieser Strahl trifft die Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$ in zwei *getrennten* Puncten. Ich sage getrennt, weil zwei homologe Puncte der Flächen F_ν, F'_ν nur zusammenfallen, wenn sie in der ersten Polarfläche von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf F_ν liegen; die beiden Puncte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ fallen daher nur dann zusammen, wenn F_{ν_1}, F_{ν_2} mit ihrer ersten Polarfläche einen gemeinsamen Punct

1) *Einleitung*, Nr. 83.

haben, oder auch — wegen der Willkürlichkeit des Poles o — wenn F_{ν_1} und F_{ν_2} einen vielfachen Punct gemein haben.

Halten wir also fest, dass o ein ganz beliebig gegebener Punct ist, und das F_{ν_1}, F_{ν_2} keine gemeinschaftlichen vielfachen Puncte besitzen, wenn sie auch Berührungspuncte haben, so sind die $\nu_1\nu_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)$ Durchschnittspuncte von **S** mit der Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$ zu zwei und zwei mit dem Pole o in gerader Linie, das heisst, durch o gehen

$$h = \tfrac{1}{2}\nu_1\nu_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)$$

Sehnen der Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$.

119. Wenn die Flächen F_{ν_1}, F_{ν_2} einen gemeinschaftlichen Punct a haben, der bezüglich π_1-fach, π_2-fach ist, so ist im Allgemeinen a für die gemeinschaftliche Durchschnittscurve beider Flächen $\pi_1\pi_2$-fach. Da nun der Strahl oa die Fläche F_{ν_1} anderswo nur noch in $\nu_1-\pi_1$ und F_{ν_2} nur noch in $\nu_2-\pi_2$ Puncten trifft, so werden in a

$$(\nu_1-1)-(\nu_1-\pi_1)=\pi_1-1$$

Flächen $\mathfrak{F}_{\nu_1-1}$ mit der ersten Polarfläche von o in Bezug auf F_{ν_1} zusammenfallen und ebenso

$$(\nu_2-1)-(\nu_2-\pi_2)=\pi_2-1$$

Flächen $\mathfrak{F}_{\nu_2-1}$ mit der ersten Polarfläche von o in Bezug auf F_{ν_2}.

Eine beliebige von diesen π_1-1 Flächen $\mathfrak{F}_{\nu_1-1}$ kann man als correspondierende Fläche für jede beliebige der π_2-1 Flächen $\mathfrak{F}_{\nu_2-1}$ ansehen, und folglich ist a für **S** ein $(\pi_1-1)(\pi_2-1)$-facher Punct und stellt in Folge dessen $\pi_1\pi_2(\pi_1-1)(\pi_2-1)$ Durchschnittspuncte von **S** und der Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$ dar. Die Zahl der Sehnen dieser Curve, welche durch o gehen ist also

$$h=\tfrac{1}{2}\left\{\nu_1\nu_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)-\pi_1\pi_2(\pi_1-1)(\pi_2-1)\right\}$$

Unter derselben Voraussetzung, wie wir sie oben gemacht haben, ist der Punct a für alle ersten Polarflächen in Bezug auf F_{ν_1}, F_{ν_2} bezüglich (π_1-1)-fach und (π_2-1)-fach (92) und ist also für die Fläche $(\nu_1+\nu_2-2)$-ter Ordnung, den Ort der Puncte, deren Polarebene für die gegebenen Flächen sich auf einer festen Geraden schneiden (107), ein $(\pi_1+\pi_2-2)$-facher Punct. Die Tangenten der Curve $F_{\nu_1}F_{\nu_2}$ bilden also in diesem Falle eine Developpable von der Ordnung

$$\rho=\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)-2\delta-3\sigma-\pi_1\pi_2(\pi_1+\pi_2-2).$$

120. Wir setzen jetzt voraus, dass die beiden Flächen (ν_1), (ν_2) sich in zwei Curven schneiden, deren Ordnungszahlen φ, φ' $(\varphi+\varphi'=\nu_1\nu_2)$, und deren Classen ρ, ρ' sind. Wir bezeichnen durch h, δ; h', δ' die Zahl ihrer scheinbaren und wirklichen Doppelpuncte; durch σ, σ' die Zahl ihrer stationären Puncte, und durch x die Zahl ihrer scheinbaren Durchschnittspuncte, das heisst die Zahl der Geraden, die man durch einen beliebigen Punct des Raumes so ziehen kann, dass sie beide Curven schneiden. Nun haben wir (117, 12):

$$\begin{cases} (\varphi+\varphi')(\nu_1-1)(\nu_2-1)=2(\text{в}+\text{в}'+\varkappa), \\ \rho=\varphi(\varphi-1)-2(\text{в}+\delta)-3\sigma \\ \rho'=\varphi'(\varphi'-1)-2(\text{в}'+\delta')-3\sigma' \end{cases}$$

und hieraus

$$\rho-\rho'=(\varphi-\varphi')(\nu_1\nu_2-1)-2(\text{в}-\text{в}')-2(\delta-\delta')-3(\sigma-\sigma').$$

Wir bemerken ferner, dass die Fläche der $(\nu_1+\nu_2-2)$-ten Ordnung, der Ort der Puncte, deren Polarebenen in Bezug auf die beiden gegebenen Flächen sich auf einer gegebenen Geraden r treffen (117), die Curve (φ) nicht nur in den Puncten schneidet, in denen dieselbe von Geraden berührt wird, die durch r geschnitten werden, sondern auch in den Puncten, in denen die Curve (φ) von der Curve (φ') geschnitten wird, da jeder solcher Punct ein Berührungspunct beider Flächen ist. Wenn also ι die Zahl der wirklichen Durchschnittspuncte der beiden Curven (φ), (φ') ist, so haben wir:

$$(\nu_1+\nu_2-2)\,\varphi=\rho+\iota+2\delta+3\sigma,$$

und analog

$$(\nu_1+\nu_2-2)\varphi'=\rho'+\iota+2\delta'+3\sigma'.$$

Folglich auch

$$(\nu_1+\nu_2-2)(\varphi-\varphi')=(\rho-\rho')+2(\delta-\delta')+3(\sigma-\sigma')$$

Aus dieser Gleichung und einer vorhergehenden erhält man nun:

$$(\varphi-\varphi')(\nu_1-1)(\nu_2-1)=2(\text{в}-\text{в}')$$

und hieraus

$$\begin{cases} \varphi(\nu_1-1)(\nu_2-1)=2\text{в}+\varkappa, \\ \varphi'(\nu_1-1)(\nu_2-1)=2\text{в}'+\varkappa. \end{cases}$$

Mittelst dieser Gleichungen erhält man $\text{в}'$ und $\varkappa$, wenn в gegeben ist, und, wenn ρ bekannt ist, ρ' und ι, wo man entweder die Zahlen δ, σ, δ', σ', gleich Null setzen muss oder als bekannt betrachten. Eins der gefundenen Resultate lässt sich folgendermassen aussprechen:

Schneiden sich zwei Flächen ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung auf einer Curve φ-ter Ordnung, deren Tangenten eine Developpable ρ-ter Ordnung bilden, so haben die gegebenen Flächen noch eine andre Curve von der Ordnung $\varphi'=\nu_1\nu_2-\varphi$ gemein, welche die erste in

$$\iota=(\nu_1+\nu_2-2)\varphi-\rho$$

Puncten schneidet, und die Rückkehrcurve einer Developpablen von der Ordnung

$$\rho'=(\nu_1+\nu_2-2)(\varphi-\varphi')+\rho$$

ist [1]).

121. Wir wollen voraussetzen, durch die Curve (φ) ginge eine dritte Fläche (ν_3). Diese trifft die Curve (φ') nicht blos in den obengenannten ι Puncten, sondern noch in andern

$$\nu_3\varphi'-\iota=\nu_1\nu_2\nu_3-\varphi(\nu_1+\nu_2+\nu_3-2)+\rho$$

Puncten, die nicht auf der Curve φ liegen; folglich hat man den Satz:

1) Salmon, *Geometry of three dimensions*, p. 274.

Wenn drei Flächen ν_1-ter, ν_2-ter, ν_3-ter Ordnung eine Curve φ-ter Ordnung gemein haben, deren Tangenten eine Developpable ρ-ter Ordnung bilden, so schneiden sie sich in

$$\nu_1\nu_2\nu_3-\varphi(\nu_1+\nu_2+\nu_3-2)+\rho$$

Puncten, die nicht auf dieser Curve liegen [1]).

Haben die beiden Flächen (ν_1), (ν_2) einen gemeinschaftlichen Punct $\mathfrak{a}$, der für die Flächen bezüglich π_1-fach, π_2-fach ist und ψ-fach, ψ'-fach für die Curven (φ), (φ'), so dass also $\psi+\psi'=\pi_1\pi_2$ ist, so erhalten wir an Stelle der obigen Gleichungen (120) folgende anderen:

$$\begin{aligned}
&\nu_1\nu_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)-\pi_1\pi_2(\pi_1-1)(\pi_2-1)=2(\vartheta+\vartheta'+\varkappa),\\
&\rho=\varphi(\varphi-1)-2(\vartheta+\delta)-3\sigma-\psi(\psi-1),\\
&\rho'=\varphi'(\varphi'-1)-2(\vartheta'+\delta')-3\sigma'-\psi'(\psi'-1),\\
&(\nu_1+\nu_2-2)\varphi=\rho+\iota+2\delta+3\sigma+(\pi_1+\pi_2-2)\psi,\\
&(\nu_1+\nu_2-2)\varphi'=\rho'+\iota+2\delta'+3\sigma'+(\pi_1+\pi_2-2)\psi',\\
&\varphi(\nu_1-1)(\nu_2-1)-\psi(\pi_1-1)(\pi_2-1)=2\vartheta+\varkappa,\\
&\varphi'(\nu_1-1)(\nu_2-1)-\psi'(\pi_1-1)(\pi_2-1)=2\vartheta'+\varkappa,
\end{aligned}$$

Es hat keine Schwierigkeit die analogen Gleichungen für den Fall aufzustellen, dass die beiden Flächen sich längs drei getrennter Curven schneiden; u. s. w.

122. Es seien drei projectivische Flächenbüschel ν_1-ter, ν_2-ter, ν_3-ter Ordnung gegeben. Die beiden ersten Büschel erzeugen in der Art wie es oben (113) gezeigt ist, eine Fläche $(\nu_1+\nu_2)$-ter Ordnung, und in ähnlicher Weise erzeugen das erste und dritte Büschel eine andere Fläche $(\nu_1+\nu_3)$-ter Ordnung. Beide Flächen gehen durch die Curve ν_1^2-ter Ordnung, welche die Basis des ersten Büschels bildet, sie schneiden sich also ausserdem in einer Curve der Ordnung $(\nu_1+\nu_2)(\nu_1+\nu_3)-\nu_1^2$, und man hat folglich den Satz:

Der Ort der Puncte, in denen sich zwei entsprechende Flächen dreier projectivischer Büschel bezüglich von den Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3 schneiden, ist eine Raumcurve von der $(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)$-ten Ordnung.

Diese Curve liegt auf den drei Flächen $(\nu_2+\nu_3)$-ter, $(\nu_3+\nu_1)$-ter, $(\nu_1+\nu_2)$-ter Ordnung, die durch die drei Büschel zu zwei und zwei genommen entstehen. Sie hat ausserdem offenbar die Eigenschaft durch die $\nu_1^2(\nu_2+\nu_3)$ Puncte zu gehen, in der die Basis des ersten Büschels die von den beiden andern erzeugte Fläche schneidet; u. s. w.

123. Es sind gegeben ein Flächenbüschel ν-ter Ordnung und auf einer gegebenen Ebene P drei Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ nicht in gerader Linie. Ist $\mathfrak{m}$ ein

---

[1]) Man könnte die allgemeine Frage behandeln: In wieviel Puncten schneiden sich drei Flächen (ν_1), (ν_2), (ν_3), welche eine Curve (φ, ρ) gemein haben, die für die drei Flächen der Reihe nach δ_1-fach, δ_2-fach, δ_3-fach ist?

gemeinschaftlicher Punct der ersten Polarflächen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in Bezug auf irgend eine Fläche des Büschels, so ist $\mathfrak{m}$ ein Pol der Ebene P in Bezug auf diese Fläche (87). Nun bilden die ersten Polarflächen der Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in Bezug auf die Flächen des Büschels drei neue projectivische Büschel (74) von der Ordnung $\nu-1$, und der Ort eines Punctes $\mathfrak{m}$, durch den drei entspsrechende Flächen dieser drei Büschel gehen ist (122) eine Raumcurve der $3(\nu-1)^2$-ten Ordnung. Also gilt der Satz:

Der Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf die Flächen eines Büschels ν-ter Ordnung ist eine Raumcurve der $3(\nu-1)^2$-ten Ordnung.

Diese Curve geht offenbar durch die Puncte, in denen die gegebene Ebene Flächen des gegebenen Büschels berührt (4).

124. Man hat vier projectivische Flächenbüschel von den respectiven Ordnungszahlen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4. Die drei ersten Büschel erzeugen (122) eine Curve der $(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)$-ten Ordnung, während das erste und vierte Büschel einer Fläche der $(\nu_1+\nu_4)$-ten Ordnung Entstehung geben (113), welche durch die Basiscurve des ersten Büschels geht und folglich $\nu_1^2(\nu_2+\nu_3)$ Durchschnittspuncte mit der Curve hat, welche durch die ersten drei Büschel entsteht. Diese Curve und die vorgenannte Fläche haben also noch

$$(\nu_1+\nu_4)(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)-\nu_1^2(\nu_2+\nu_3)$$

andere Puncte gemein. Das liefert den Satz:

Es gibt

$$\nu_2\nu_3\nu_4+\nu_3\nu_4\nu_1+\nu_4\nu_1\nu_2+\nu_1\nu_2\nu_3$$

Puncte, durch die jedesmal vier entsprechende Flächen von vier projectivischen Büscheln von den respectiven Ordnungszahlen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 hindurchgehen.

Diese Puncte liegen auf den sechs Flächen, die durch die gegebenen Büschel zu zwei und zwei genommen entstehen und auch auf den vier Raumcurven, welche dieselben Büschel zu drei und drei genommen erzeugen.

125. In einem Flächenbüschel ν-ter Ordnung existieren wie viel Flächen mit einem Doppelpunct? Man nehme beliebig im Raume vier Puncte an, dann bilden ihre ersten Polarflächen in Bezug auf die Flächen des Büschels (74) vier projectivische Büschel $(\nu-1)$-ter Ordnung. Hat eine der gegebenen Flächen einen Doppelpunct, so gehen durch ihn die ersten Polarflächen jedes beliebigen Poles (73), und die Doppelpuncte der gegebenen Flächen sind also diejenigen Puncte des Raumes, durch welche vier entsprechende Flächen der genannten vier Büschel gehen. Folglich hat man (124) den Satz:

In einem Flächenbüschel ν-ter Ordnung gibt es $4(\nu-1)^3$ Flächen mit einem Doppelpunct.

Die Polarebenen eines festen Poles in Bezug auf die Flächen eines Büschels bilden ein dem ersten projectivischen Büschel. Ist aber der Pol ein Doppelpunct einer dieser Flächen, so ist für diese die Polarebene unbestimmt. *Jeder der $4(\nu-1)^3$ Doppelpuncte hat daher dieselbe Polarebene in Bezug auf alle Flächen des Büschels* [1]).

CAPITEL VI.

PROJECTIVISCHE FLÄCHENNETZE.

126. Hat man zwei projectivische Netze ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung, so erzeugt ein beliebiges Büschel des ersten Netzes und das entsprechende Büschel des zweiten eine Fläche **P** der $(\nu_1+\nu_2)$-ten Ordnung. Die Flächen **P** bilden ein neues Netz. Es seien nämlich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei beliebige Puncte des Raumes, dann gehen durch $\mathfrak{a}$ eine unbegrenzte Zahl von Flächen des ersten Netzes, die ein Büschel bilden; die entsprechenden Flächen des zweiten Netzes bilden ein anderes Büschel, unter dessen Flächen sich eine findet, welche durch $\mathfrak{a}$ geht. Durch $\mathfrak{a}$ gehen also zwei entsprechende Flächen P, P' der beiden Netze, desgleichen durch $\mathfrak{b}$ zwei entsprechende Flächen Q, Q' und die Flächen (P, Q), (P', Q') bestimmen zwei projectivische Büschel [2]), welche eine Fläche $\mathbf{P}_3$ erzeugen, die einzige, welche gleichzeitig durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ geht.

Es sei R, R' ein anderes Paar entsprechender Flächen der beiden Netze, die nicht zu den obigen Büscheln (P, Q), (P', Q') gehören. Die Büschel (P, R), $(P', R',)$ erzeugen dann eine zweite Fläche $\mathbf{P}_2$, und ähnlich die Büschel (Q, R), (Q', R') eine dritte Fläche $\mathbf{P}_1$. Die Flächen $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ haben die Curve PP' der $\nu_1\nu_2$-ten Ordnung gemein, schneiden sich also noch in einer anderen Curve der Ordnung

$$(\nu_1+\nu_2)^2-\nu_1\nu_2=\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2.$$

Ein beliebiger Punct dieser letzteren Curve gehört der Fläche $\mathbf{P}_2$ an, und ist folglich auch zwei entsprechenden Flächen T, T' der beiden Büschel (R, P), (R', P') gemein, und da er auch auf der Fläche $\mathbf{P}_3$ liegen muss, gehört er auch zwei entsprechenden Flächen U, U' der Büschel (P, Q), (P', Q') an. Die beiden Büschel (Q, R), (T, U) gehören zu demselben Netze, und haben folglich eine gemeinschaftliche Fläche S, der eine andre Fläche S' entspricht, welche den beiden Büscheln (Q', R'), (T', U') gemein ist. Jeder

1) Es ist klar, sobald in zwei gegebenen projectivischen Büscheln einem bestimmten Elemente des einen ein unbestimmtes Element des andern entspricht, dass dann jedem andern Element des ersten Büschels im zweiten Büschel ein festes Element entspricht. Dieses letzte Büschel enthält daher nur ein einziges Element.

2) In dem Sinne, dass die entsprechenden Flächen der beiden Büschel auch entsprechende Flächen der beiden gegebenen Netze sind.

gemeinsame Punct der Flächen $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, das heisst der Flächen T, T'; U, U' ist also ein Basispunct der Büschel (T, U), (T', U') und gehört deshalb auch den Flächen S, S' an, also auch $\mathbf{P}_1$. Die Curve der Ordnung $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2$, welche zusammen mit der Curve PP' den Durchschnitt der Flächen $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ bildet, liegt daher auch auf $\mathbf{P}_1$ und bildet folglich die Basis des Netzes der Flächen $\mathbf{P}$. Dieses Netz ist durch die Flächen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ bestimmt, die nicht zu demselben Netze gehören, weil die Curve PP' nicht auf $\mathbf{P}_1$ liegt. Wir erhalten so den Satz:

Die Flächen $(\nu_1+\nu_2)$-ter Ordnung, welche die Durchschnittscurven entsprechender Flächen zweier projectivischer Flächennetze ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung enthalten, bilden ein neues Netz und gehen sämmtlich durch dieselbe Raumcurve $(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)$-ter Ordnung.

Zwei Flächen des ersten Netzes schneiden sich in einer Curve ν_1^2-ter Ordnung, welcher im zweiten Netze eine Curve ν_2^2-ter Ordnung entspricht [1]. Zwei solche Curven schneiden sich im Allgemeinen nicht, diejenigen aber, welche sich treffen, bilden durch ihre Durchschnittspuncte die obengenannte Curve $(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)$-ter Ordnung. Mit andern Worten, diese Curve ist der Ort der gemeinschaftlichen Puncte der Basiscurven zweier entsprechender Büschel; im Allgemeinen jedoch geht durch einen beliebigen Punct des Raumes nur ein Paar entsprechender Flächen.

127. Man habe drei projectivische Flächennetze von den respectiven Ordnungszahlen ν_1, ν_2, ν_3; was ist dann der Ort eines Punctes, durch den drei entsprechende Flächen gehen?

Es sei t eine beliebige Transversale, $\mathfrak{i}$ ein beliebiger Punct auf t; dann gehen durch $\mathfrak{i}$ zwei entsprechende Flächen der beiden ersten Netze, die entsprechende Fläche des dritten Netzes aber schneidet t in ν_3 Puncten $\mathfrak{i}'$. Nehmen wir umgekehrt auf t einen Punct $\mathfrak{i}'$, so bilden die Flächen des dritten Netzes, welche durch $\mathfrak{i}'$ gehen, ein Büschel, welchem in den beiden ersten Büscheln zwei projectivische Büschel entsprechen, welche (113) eine Fläche der $(\nu_1+\nu_2)$-ten Ordnung erzeugen, und diese trifft t in $(\nu_1+\nu_2)$ Puncten $\mathfrak{i}$. Man hat somit den Satz:

Der Ort der gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte von drei entsprechenden Flächen dreier projectivischer Flächennetze, deren Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3 sind, ist eine Fläche der $(\nu_1+\nu_2+\nu_3)$-ten Ordnung.

Diese Fläche geht

1. Durch die ν_1^3 Basispuncte des ersten Netzes und die analogen ν_2^3, ν_3^3 Puncte der beiden andern Netze;

2. Durch eine unbegrenzte Zahl von Raumcurven von der Ordnung $\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2$, welche (122) durch je drei entsprechende Büschel der drei Netze entstehen;

---

[1]) Indem man zwei Curven *entsprechend* nennt, welche aus dem Durchschnitt zweier entsprechender Flächenpaare entstehen.

3. Durch die Curve $(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)$-ter Ordnung, welche durch die beiden ersten Netze erzeugt wird (126), und durch die analogen Curven der $(\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3)$-ten und der $(\nu_3^2+\nu_1^2+\nu_3\nu_1)$-ten Ordnung.

128. Was ist der Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf die Flächen eines Netzes ν-ter Ordnung? Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ drei Puncte der gegebenen Ebene nicht in gerader Linie (123), so bilden die ersten Polarflächen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ drei projectivische Netze der $(\nu-1)$-ten Ordnung und folglich hat man den Satz (127):

Der Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf die Flächen eines Netzes ν-ter Ordnung ist eine Fläche $3(\nu-1)$-ten Ordnung.

Diese Fläche enthält eine unbegrenzte Zahl Raumcurven $3(\nu-1)^2$-ter Ordnung, von denen jede der Ort der Pole der gegebenen Ebene in Bezug auf die Flächen eines Büschels ist, das in dem gegebenen Netze enthalten ist.

Jeder Punct des Ortes, der auf der gegebenen Ebene liegt, ist augenscheinlich (64) ein Berührungspunct zwischen dieser Ebene und einer Fläche des Netzes; man hat also den Satz:

Der Ort der Berührungspuncte zwischen einer Ebene und den Oberflächen eines Netzes ν-ter Ordnung ist eine Curve der $3(\nu-1)$-ten Ordnung.

Diese Curve ist die *Jacobiana* [1]) des Netzes, welches durch die Curven entsteht, in denen die Flächen des Netzes von der gegebenen Ebene geschnitten werden.

129. Man hat vier projectivische Flächennetze der ν_1-ten, ν_2-ten, ν_3-ten, ν_4-ten Ordnung; was ist dann der Ort der Puncte, in welchen sich vier entsprechende Flächen schneiden? Die beiden ersten Netze erzeugen nach und nach mit dem dritten und vierten Netze combiniert (127) zwei Flächen von den respectiven Ordnungen $\nu_1+\nu_2+\nu_3$, $\nu_1+\nu_2+\nu_4$. Diese beiden Flächen haben die Curve der $(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)$-ten Ordnung gemein, welche von den beiden ersten Netzen erzeugt wird (126), sie schneiden sich ausserdem noch längs einer Curve von der Ordnung

$$(\nu_1+\nu_2+\nu_3)(\nu_1+\nu_2+\nu_4)-(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2);$$

das heisst:

Der Ort eines Punctes, durch welchen vier entsprechende Flächen von vier projectivischen Netzen hindurchgehen, deren Ordnungszahlen bezüglich ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 sind, ist eine Raumcurve von der Ordnung

$$\nu_1\nu_2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_4+\nu_4\nu_1+\nu_1\nu_3+\nu_4\nu_2.$$

Diese Curve enthält offenbar eine unbegrenzte Zahl von Gruppen aus je $\nu_2\nu_3\nu_4+\nu_3\nu_4\nu_1+\nu_4\nu_1\nu_2+\nu_1\nu_2\nu_3$ Puncten, die durch je vier entsprechende Büschel der vier Netze entstehen (124).

---

1) *Einleitung*, Nr. 95.

130. Was ist der Ort der Doppelpuncte der Flächen eines Netzes ν-ter Ordnung? Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ vier beliebig im Raum, aber nicht in derselben Ebene angenommene Puncte. Ihre ersten Polarflächen in Bezug auf die gegebenen Flächen bilden (74) vier dem gegebenen Netze also auch unter sich projectivische Netze, und der gesuchte Ort ist (125) der Ort der Puncte, durch welche je vier entsprechende Flächen dieser vier Netze hindurchgehen. Folglich hat man (129):

Der Ort der Doppelpuncte der Flächen eines Netzes ν-ter Ordnung ist eine Raumcurve der $6(\nu-1)^2$-ten Ordnung.

Diese Curve enthält unendlich viele Gruppen von je $4(\nu-1)^3$ Puncten, von denen jede Gruppe aus den Doppelpuncten eines Büschels besteht, das in dem Netze enthalten ist (125).

Die Flächen eines Netzes, welche durch den nämlichen beliebigen Punct gehen, bilden ein Büschel; ist nun dieser Punct ein Doppelpunct für eine dieser Flächen, so haben die andren in ihm die nämliche Tangentialebene; *man kann also die obenerwähnte Curve $6(\nu-1)^2$-ter Ordnung auch als den Ort der Puncte definieren, in denen sich die Flächen des Netzes berühren.*

131. Gegeben fünf projectivische Flächennetze, deren Ordnungszahlen bezüglich $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ sind; wieviel Puncte gibt es dann, durch welche je fünf entsprechende Flächen gehen? Combiniert man die beiden ersten Netze zunächst mit dem dritten, dann mit dem vierten und endlich mit dem fünften Netze, so entstehen dadurch (127) drei Flächen, deren Ordnungszahlen bezüglich $\nu_1+\nu_2+\nu_3$, $\nu_1+\nu_2+\nu_4$, $\nu_1+\nu_2+\nu_5$ sind. Diese Flächen haben diejenige Curve $(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)$-ter Ordnung gemein, welche (126) den beiden ersten Netzen zugehört. Man berechne jetzt die Ordnung der osculierenden Developpablen dieser Curve, indem man beachtet, dass sie (126) mit einer andern Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen der $(\nu_1+\nu_2)$-ten Ordnung bildet. Diese letzte Curve ist der vollständige Durchschnitt zweier Flächen der ν_1-ten und ν_2-ten Ordnung und hat folglich (117) als osculierende Developpable eine Fläche von der $\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)$-ten Ordnung; die Ordnung der osculierenden Developpablen der Curve $(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)$ ist also (120) gleich

$$2(\nu_1+\nu_2-1)(\nu_1^2+\nu_2^2)+\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2).$$

Dies vorausgeschickt, haben diejenigen drei Flächen der bezüglichen Ordnungen

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3,\ \nu_1+\nu_2+\nu_4,\ \nu_1+\nu_2+\nu_5,$$

welche gleichzeitig durch die vorgenannte Curve $(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)$ gehen ausserdem noch (121)

$$\begin{aligned}&(\nu_1+\nu_2+\nu_3)(\nu_1+\nu_2+\nu_4)(\nu_1+\nu_2+\nu_5)\\&-(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2)\{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)+(\nu_1+\nu_2+\nu_4)+(\nu_1+\nu_2+\nu_5)-2\}\\&+2(\nu_1+\nu_2-1)(\nu_1^2+\nu_2^2)+\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2-2)\end{aligned}$$

andere gemeinschaftliche Puncte; wir erhalten also den Satz:

Die Zahl der Puncte, durch welche je fünf entsprechende Flächen von fünf projectivischen Netzen bezüglich von den Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 hindurchgehen ist:

$$\nu_1\nu_2\nu_3+\nu_1\nu_2\nu_4+\ldots+\nu_3\nu_4\nu_5.$$

Diese Puncte liegen auf den zehn Flächen, welche durch die Netze zu drei und drei genommen entstehen (127) und auch auf den fünf Curven, welche die Netze zu vier und vier genommen erzeugen (129).

132. Was ist der Ort eines Punctes, welcher dieselbe Polarfläche hat sowohl in Bezug auf eine gegebene Fläche ν_1-ter Ordnung als in Bezug auf irgend eine Fläche eines Flächennetzes ν_2-ter Ordnung? Es sei x ein beliebiger Punct einer Transversale, X die Polarebene von x in Bezug auf die Fläche (ν_1); der Ort der Pole von X in Bezug auf die Flächen (ν_2) ist dann (128) eine Fläche $3(\nu_2-1)$-ter Ordnung, welche die Transversale in $3(\nu_2-1)$ Puncten x' trifft. Nimmt man umgekehrt beliebig auf der Transversale den Punct x' an, so bilden (74), die Polarebenen von x' in Bezug auf die Flächen (ν_2) ein Netz (ein Ebenenbündel), das heisst, sie gehen sämmtlich durch den nämlichen Punct, und es gibt also unter ihnen ν_1-1, welche die Developpable berühren (93), welche von den Polarebenen der Puncte der Transversale in Bezug auf die Fläche (ν_1) eingehüllt wird. Diese ν_1-1 Ebenen sind die Polarebenen in Bezug auf die Fläche (ν_1) von ebensovielen Puncten x der Transversale; man hat also auch den Satz:

Der Ort eines Punctes, welcher dieselbe Polarebene in Bezug auf eine feste Fläche ν_1-ter Ordnung hat und in Bezug auf eine beliebige Fläche eines Netzes ν_2-ter Ordnung, ist eine Fläche der $(\nu_1+3\nu_2-4)$-ten Ordnung.

Offenbar geht diese Fläche durch die Raumcurve der $6(\nu_1-1)^2$-ten Ordnung, welche der Ort der Doppelpuncte der Flächen des Netzes ist (130), weil jeder Punct dieser Curve eine unbestimmte Polarebene in Bezug auf jede beliebige Fläche des Netzes besitzt.

Jeder gemeinschaftliche Punct zwischen dem gefundenen Orte und der gegebenen Fläche (ν_1) ist in Bezug auf diese der Pol der Tangentialebene in demselben Puncte. Dieser Punct muss aber in Bezug auf eine Fläche des Netzes dieselbe Polarebene haben, folglich ist (64) jeder gemeinschaftliche Punct des Ortes und der festen Fläche ein Berührungspunct der letztern mit einer Fläche des Netzes. Das liefert den Satz:

Der Ort der Berührungspuncte zwischen einer festen Fläche ν_1-ter Ordnung und den Flächen eines Netzes der ν_2-ten Ordnung ist eine Raumcurve der $\nu_1(\nu_1+3\nu_2-4)$-ten Ordnung.

133. Gegeben ein Flächenbüschel ν_1-ter Ordnung und ausserdem ein Flächennetz ν_2-ter Ordnung; was ist dann der Ort eines Punctes, in dem eine Fläche des Büschels eine Fläche des Netzes berührt?

Der Ort geht durch die Basiscurve ν_1^2-ter Ordnung des Büschels, weil [1]) die Flächen (ν_2), die durch einen Punct dieser Curve gehen, ein Büschel bilden, in dem eine Fläche existiert, welche in diesem Puncte eine der Flächen (ν_1) berührt. Ausserdem enthält jede Fläche (ν_1) eine Curve der $\nu_1(\nu_1+3\nu_2-4)$-ten Ordnung, welche aus den Puncten entsteht (132), in denen sie von den Flächen (ν_2) berührt wird. Folglich ist der vollständige Durchschnitt einer Fläche (ν_1) mit dem gesuchten Orte eine Curve von der Ordnung

$$\nu_1^2+\nu_1(\nu_1+3\nu_2-4),$$

und es entsteht daher der Satz:

Der Ort der Puncte, in denen sich die Flächen eines Büschels ν_1-ter Ordnung und die Flächen eines Netzes ν_2-ten Ordnung berühren, ist eine Fläche der $(2\nu_1+3\nu_2-4)$-ten Ordnung.

Ist $\nu_2=\nu_1=\nu$, und haben ausserdem das Netz und das Büschel eine Fläche gemein, was zum Beispiel der Fall ist, wenn sie demselben linearen Systeme angehören, so zerfällt der Ort in diese Fläche und in eine andere von der Ordnung:

$$2\nu+3\nu-4-\nu=4(\nu-1).$$

Wenn aber eine Fläche des Netzes und eine des Büschels sich in einem Puncte berühren, so individualisieren sie ein Büschel, dessen Flächen sich sämmtlich in demselben Puncte berühren, und die dem linearen Systeme angehören, welches durch das gegebene Netz und das gegebene Büschel bestimmt wird. Unter diesen Flächen ist nun eine, für welche der Berührungspunct ein Doppelpunct ist (17, 114 Anmerkung [1])); also gilt der Satz:

Der Ort der Berührungspuncte oder auch der Doppelpuncte der Flächen eines linearen Systems ν-ter Ordnung ist eine Fläche $4(\nu-1)$-ter Ordnung.

CAPITEL VII.

PROJECTIVISCHE LINEARE FLÄCHENSYSTEME DRITTER STUFE.

134. Man habe zwei lineare projectivische Flächensysteme ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung, und es seien P, P'; Q, Q'; R, R'; S, S' vier Paar entsprechender Flächen; die projectivischen Büschel (P, Q), (P', Q') aus ent-

[1]) Haben zwei Flächenbüschel einen Basispunct o gemein, so gibt es immer eine Fläche des ersten Büschels, welche in ihm eine Fläche des zweiten berührt. Die Tangentialebenen der Flächen des ersten Büschels in o gehen nämlich durch ein und dieselbe Gerade, die Tangente der Basiscurve dieses Büschels in o, und in derselben Weise ist die Tangente der Basiscurve des zweiten Büschels in o diejenige Gerade, durch welche in diesem Puncte die Tangentialebenen der Flächen dieses zweiten Büschels gehen. Die Ebene der beiden Tangenten berührt also in o eine Fläche des ersten Büschels und ebenso eine des zweiten.

sprechenden Flächen der beiden Systeme gebildet erzeugen (113) eine Fläche $(\nu_1+\nu_2)$-ter Ordnung. Eine analoge Fläche wird durch die zwei Büschel (P, R), (P', R') erzeugt, und eine dritte von den Büscheln (P, S), (P', S'). Diese drei Flächen $(\nu_1+\nu_2)$-ter Ordnung haben diejenige Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung gemein, welche den Durchschnitt der Flächen (P', P) bildet und schneiden sich also (121) noch in $(\nu_1+\nu_2)(\nu_1^2+\nu_2^2)$ andern Puncten. Ein beliebiger Punct $\mathfrak{x}$ von diesen liegt auf gewissen Flächen Q_0, R_0, S_0, welche bezüglich den Büscheln (P, Q), (P, R), (P, S) angehören, und auch den entsprechenden Flächen Q'_0, R'_0, S'_0, welche bezüglich den Flächenbüscheln (P', Q'), (P', R'), (P', S') angehören. Der Punct $\mathfrak{x}$ ist also ein gemeinsamer Basispunct der Büschel (Q_0, R_0), (Q_0', R'_0). Von diesen Büscheln hat das erste mit dem Büschel (Q, R) eine Fläche gemein, und das zweite eine Fläche mit dem Büschel (Q', R'), und diese beiden Flächen sind entsprechend. Der Punct $\mathfrak{x}$ liegt daher auch auf der Fläche, welche durch die projectivischen Büschel (Q, R), (Q', R') entsteht; also gilt der Satz:

Hat man zwei projectivische lineare Flächensysteme ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung, so gehen die Flächen $(\nu_1+\nu_2)$-ter Ordnung, welche durch je zwei Büschel erzeugt werden die aus entsprechenden Flächen beider Systeme bestehen, sämmtlich durch die nämlichen

$$(\nu_1+\nu_2)(\nu_1^2+\nu_2^2)$$

Puncte.

Diese Puncte sind diejenigen, durch welche eine unbegrenzte Zahl von entsprechenden Flächenbüscheln hindurchgehen, oder es ist auch jeder von ihnen ein gemeinschaftlicher Basispunct zweier entsprechender Netze.

135. Wie viel Puncte gibt es, welche in Bezug auf zwei Flächen ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung dieselbe Polarebene besitzen? Die ersten Polarflächen aller Puncte des Raumes in Bezug auf die eine und die andere der beiden gegebenen Flächen bilden (88) zwei projectivische lineare Systeme der (ν_1-1)-ten, (ν_2-1)-ten Ordnung. Hat ein Punct $\mathfrak{o}$ für beide Flächen dieselbe Polarebene, so müssen die ersten Polarflächen aller Puncte der Ebene durch $\mathfrak{o}$ gehen, das heisst $\mathfrak{o}$ ist ein gemeinschaftlicher Basispunct zweier entsprechender Netze der beiden Systeme. Folglich ist (134) der Satz bewiesen:

Die Zahl der Puncte, welche in Bezug auf zwei Flächen ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung dieselbe Polarebene besitzen, ist:

$$(\nu_1+\nu_2-2)[\nu_1^2+\nu_2^2-2(\nu_1+\nu_2)+2].$$

Den Complex dieser Puncte kann man *die Jacobiana der beiden gegebenen Flächen* nennen.

Ist $\nu_1=\nu_2=\nu$, so findet man (125) die Zahl der Doppelpuncte eines Flächenbüschels ν-ter Ordnung; folglich bilden die $4(\nu-1)^3$ Doppelpuncte eines Büschels die *Jacobiana* zweier beliebiger Flächen des Büschels.

Ist $\nu_2=1$, $\nu_1=\nu$, so finden wir (87) die $(\nu-1)^3$ Pole einer gegebenen Ebene in Bezug auf eine gegebene Fläche ν-ter Ordnung wieder, das heisst:

Die $(\nu-1)^3$ Pole einer Ebene in Bezug auf eine Fläche ν-ter Ordnung *stellen die Jacobiana zweier Flächen dar, nämlich der gegebenen Ebene und der Fundamentalfläche.*

136. Es seien drei lineare projectivische Flächensysteme gegeben, deren Ordnungszahlen bezüglich ν_1, ν_2, ν_3 sind. Ein beliebiges Netz des ersten Systems erzeugt in Gemeinschaft mit den entsprechenden Netzen der andern beiden Systeme (127) eine Fläche **P** der $(\nu_1+\nu_2+\nu_3)$-ten Ordnung. Die so entstandenen Flächen **P** bilden ein neues lineares System. In der That, sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ drei beliebig im Raume angenommene Puncte, so bilden die Flächen des ersten Systems, welche durch $\mathfrak{a}$ gehen, ein Netz; im entsprechenden Netze des zweiten Systems gibt es ein Büschel von Flächen, die durch $\mathfrak{a}$ gehen, welchen im dritten Netze ein Büschel entspricht, von dem eine Fläche durch $\mathfrak{a}$ geht. Es gibt also drei entsprechende Flächen P, P', P'', die durch $\mathfrak{a}$ gehen, ebenso drei Flächen Q, Q', Q'' durch $\mathfrak{b}$ und drei andere R, R', R'', die durch $\mathfrak{c}$ gehen. Diese Flächen individualisieren drei projectivische Netze (P, Q, R), (P', Q', R'), (P'', Q'', R''), und diese erzeugen eine Fläche **P**, die einzige, welche durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ geht.

Es seien S, S', S'' ein anderes Tripel correspondierender Flächen der drei Systeme, welche bezüglich nicht zu den drei vorgedachten Netzen gehören; dann erzeugen die Netze (P, Q, S), (P', Q', S'), (P'', Q'', S'') eine andere Fläche $\mathbf{P}_1$, die Netze (P, R, S), (P', R', S'), (P'', R'', S'') ebenso eine dritte Fläche $\mathbf{P}_2$, und endlich die Netze (Q, R, S), (Q', R', S'), (Q'', R'', S'') eine vierte Fläche $\mathbf{P}_3$.

Die beiden Flächen $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1$ gehen durch die Curve von der Ordnung $\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2$, welche (122) von den drei projectivischen Büscheln (P, Q), (P', Q'), (P'', Q'') erzeugt wird, sie schneiden sich also noch in einer andern Curve der Ordnung:

$$(\nu_1+\nu_2+\nu_3)^2-(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)=\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_2\nu_1.$$

Ein beliebiger Punct $\mathfrak{x}$ dieser letzteren Curve ist, da er der Fläche **P** angehört, drei correspondierenden Flächen A, A', A'' der drei Netze (P, Q, R), (P', Q', R'), (P'', Q'', R'') gemein, und weil er auch $\mathbf{P}_1$ angehört, ist derselbe Punct auch auf drei entsprechenden Flächen B, B', B'' der drei Netze (P, Q, S), (P', Q', S'), (P'', Q'', S'') gelegen. Das Netz (P, Q, S) und das Büschel (A, B) gehören demselben linearen Systeme an und haben folglich eine Fläche C gemein. Dieser entspricht im zweiten Systeme eine Fläche C', welche dem Netze (P', R', S') und dem Büschel (A', B') gemein ist, und im dritten Systeme eine Fläche C'', die dem Netze (P'', R'', S'') und dem Büschel (A'', B'') angehört. Der Punct $\mathfrak{x}$ ist also ein gemeinsamer Basispunct der Büschel (A, B), (A', B'), (A'', B'') und ist deshalb auch den Flächen C, C', C'' gemeinschaftlich. Dies sind aber drei entsprechende Flächen der drei projectivischen Netze (P, R, S), (P', R', S'), (P'', R'', S''), das heisst, $\mathfrak{x}$ ist ein Punct der Fläche $\mathbf{P}_2$. In analoger Weise zeigt man, dass der nämliche Punct auch auf der Fläche $\mathbf{P}_3$ liegt. Wir haben daher den Satz:

Der Ort eines Punctes, durch welchen eine unbegrenzte Zahl von Tripeln *entsprechender Flächen dreier gegebener projectivischer linearer Systeme von den respectiven Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3 hindurchgehen, ist eine Raumcurve von der Ordnung*

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2.$$

Diese Curve kann auch als Ort der gemeinschaftlichen Basispuncte dreier entsprechender Büschel, oder als Ort der Durchschnittspuncte zwischen den entsprechenden Curven der Ordnungen ν_1^2, ν_2^2, ν_3^2 definiert werden. Sie liegt auf allen Flächen $(\nu_1+\nu_2+\nu_3)$-ter Ordnung, die ein lineares System bilden, von denen jede durch drei entsprechende Netze der drei Systeme erzeugt wird.

137. Was ist der Ort eines Punctes $\mathfrak{x}$, dessen Polarebenen in Bezug auf drei gegebene Flächen der ν_1-ten, ν_2-ten, ν_3-ten Ordnung durch dieselbe Gerade x gehen?

Die ersten Polarflächen der Puncte des Raumes in Bezug auf die gegebenen Flächen bilden drei projectivische lineare Systeme von den betreffenden Ordnungszahlen ν_1-1, ν_2-1, ν_3-1. Nach der gemachten Voraussetzung ist $\mathfrak{x}$ der Durchschnittspunct der ersten Polarflächen jedes Punctes von x, also ein Punct, durch den eine unbegrenzte Zahl von Tripeln entsprechender Flächen der drei obengenannten projectivischen Systeme hindurchgehen, folglich ist (126) der gesuchte Ort eine Raumcurve von der Ordnung

$$(\nu_1-1)^2+(\nu_2-1)^2+(\nu_3-1)^2+\left|\begin{array}{l}(\nu_2-1)(\nu_3-1)\\(\nu_3-1)(\nu_1-1),\\(\nu_1-1)(\nu_2-1)\end{array}\right.$$

welcher wir den Namen *Jacobiana der drei gegebenen* Flächen beilegen. Wir haben also den Satz:

Die Jacobiana dreier Flächen der ν_1-ten, ν_2-ten, ν_3-ten Ordnung, das heisst der Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf die gegebenen Flächen durch dieselbe Gerade gehen, ist eine Raumcurve mit der Ordnungszahl:

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2-4(\nu_1+\nu_2+\nu_3)+6.$$

Offenbar geht diese Curve durch die Berührungspuncte der gegebenen Flächen und durch ihre Doppelpuncte, wenn solche existieren.

Dieselbe Curve geht auch durch die Puncte, welche in Bezug auf zwei der gegebenen Flächen dieselbe Polarebene haben; das heisst:

Die Jacobiana dreier Flächen geht auch durch die Jacobianen derselben Flächen zu zwei und zwei combiniert (135).

Ist $\nu_3=\nu_2$, so muss die Polarebene des Punctes $\mathfrak{x}$ in Bezug auf die Fläche (ν_1) durch die Gerade gehen, in der sich die Polarebenen des nämlichen Punctes in Bezug auf die Flächen des Büschels schneiden, das durch die beiden gegebenen Flächen der ν_2-ten Ordnung bestimmt wird, und fällt daher mit der Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf eine Fläche des Büschels zusammen. Man hat folglich den Satz:

Der Ort eines Punctes, welcher in Bezug auf eine feste Fläche ν_1-ter Ordnung und in Bezug auf irgend eine Fläche eines Büschels ν_2-ter Ordnung dieselbe Polarebene hat, ist eine Raumcurve von der Ordnung:

$$\nu_1^2+3\nu_2^2+2\nu_1\nu_2-4\nu_1-8\nu_2+6,$$

welche durch die Doppelpuncte des Büschels geht.

Die Puncte, in denen diese Curve die feste Fläche trifft, sind offenbar diejenigen Puncte, in denen letztere Fläche von irgend einer Fläche des Büschels berührt wird; man hat also den Satz:

Die Zahl der Flächen eines Büschel ν_2-ter Ordnung, welche eine feste Fläche ν_1-ter Ordnung berühren, ist:

$$\nu_1(\nu_1^2+3\nu_2^2+2\nu_1\nu_2-4\nu_1-8\nu_2+6).$$

Ist $\nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu$, so bestimmen die drei gegebenen Flächen ein Netz, und die Polarebenen des Punctes x in Bezug auf die Flächen dieses Netzes gehen durch die nämliche Gerade. Wir kommen so auf ein schon früher (130) bewiesenes Theorem zurück und haben daher den Satz:

Der Ort der Puncte, deren Polarebenen in Bezug auf die Flächen eines Netzes durch dieselbe Gerade gehen, oder auch der Ort der Doppelpuncte der Flächen dieses Netzes, oder endlich der Ort der Berührungspuncte zwischen den Flächen desselben Netzes ist eine Raumcurve $6(\nu-1)^2$-ter Ordnung.

Dieser Curve können wir den Namen *Jacobiana des Netzes* geben.

Ist eine von den Flächen eine Ebene, so fällt die Polarebene in Bezug auf sie mit ihr selbst zusammen, und man erhält so den Satz:

Der Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf zwei gegebene Flächen ν_1-ter, ν_2-ter Ordnung sich längs einer Geraden schneiden, die in einer festen Ebene liegt, ist eine Raumcurve von der Ordnung

$$(\nu_1-1)^2+(\nu_2-1)^2+(\nu_1-1)(\nu_2-1)=\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_1\nu_2-3(\nu_1+\nu_2)+3.$$

Ist $\nu_1=\nu_2=\nu$, so fällt man auf ein schon früher (123) bewiesenes Theorem zurück, man hat also den Satz:

Die Curve der $3(\nu-1)^2$-ten Ordnung, Ort der Pole einer gegebenen Ebene in Bezug auf die Flächen eines Büschels ν-ter Ordnung, ist die Jacobiana der drei Flächen, von denen die eine die gegebene Ebene ist, und die beiden andern zwei beliebige Flächen des Büschels.

Wird $\nu_2=\nu_3=1$, $\nu_1=\nu$, so geht die Polarebene von x in Bezug auf die Fläche ν-ter Ordnung durch eine feste Gerade, den Durchschnitt zwei gegebener Ebenen; folglich hat man (86):

Die Curve der $(\nu-1)^2$-ten Ordnung, Ort der Puncte, deren Polarebenen in Bezug auf eine gegebene Fläche ν-ter Ordnung durch eine gegebene Gerade gehen, ist die Jacobiana folgender drei Flächen: der Fundamentalfläche und zwei beliebiger Ebenen, welche durch die gegebene Gerade gehen.

138. Indem wir vier lineare projectivische Systeme von den resp. Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 als gegeben annehmen, suchen wir den Ort der Puncte, durch welche je vier entsprechende Flächen hindurchgehen.

Auf einer beliebigen Transversale nehme man einen beliebigen Punct i an, durch den drei entsprechende Flächen der drei ersten Systeme hindurchgehen; die entsprechende Fläche des vierten Systems schneidet dann die Transversale in ν_4 Puncten i'. Nimmt man umgekehrt auf der Transversale beliebig einen Punct i' an, so bilden die Flächen des vierten Systems, welche durch i' gehen, ein Netz, und die drei entsprechenden Netze in den andern Systemen erzeugen (127) eine Fläche $(\nu_1+\nu_2+\nu_3)$-ter Ordnung, welche die Transversale in ebensovielen Puncten i trifft. Man erhält somit das Theorem:

Der Ort eines Punctes, durch welchen vier entsprechende Flächen von vier linearen projectivischen Systemen von den resp. Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 hindurchgehen, ist eine Fläche von der Ordnung $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4$.

Diese Fläche enthält offenbar die unbegrenzte Zahl von Curven, die durch je vier entsprechende Netze der vier Systeme entstehen (128), und ebenso unendlich viele andere Curven, die durch je drei der gegebenen Systeme entstehen (126); u. s. w.

139. Man hat vier Flächen bezüglich von der Ordnung ν_1, ν_2, ν_3, ν_4; was ist dann der Ort eines Punctes x, dessen Polarebenen in Bezug auf jene Flächen durch den nämlichen Punct x' gehen?

Die ersten Polarflächen von x' gehen durch x, und andererseits bilden die ersten Polarflächen der Puncte des Raumes in Bezug auf die vier gegebenen Flächen vier lineare projectivische Systeme bezüglich von den Ordnungen ν_1-1, ν_2-1, ν_3-1, ν_4-1; folglich erhält man (138) den Satz:

Der Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf vier gegebene Flächen von den Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 durch denselben Punct gehen, ist eine Fläche mit der Ordnungszahl:

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4-4.$$

Diese Fläche, der wir den Namen *Jacobiana der vier gegebenen Flächen* geben, *geht offenbar durch die Doppelpuncte dieser Flächen und durch die Jacobianen der nämlichen Flächen zu drei und drei oder zu zwei und zwei genommen.*

Ist $\nu_4=\nu_3$, so erhalten wir eine Fläche der $[\nu_1+\nu_2+2(\nu_3-2)]$-ten Ordnung, Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf zwei Flächen der Ordnungen ν_1, ν_2 und in Bezug auf alle Flächen eines Büschels ν_3-ter Ordnung durch denselben Punct gehen. Ist x ein gemeinschaftlicher Punct des Ortes und der Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung, Durchschnitt der beiden gegebenen Flächen, so bestimmen die Tangente dieser Curve in x und die Gerade, durch welche die Polarebenen von x in Bezug auf die Flächen des Büschels gehen, eine Ebene, die in x eine Fläche des Büschels berührt; also hat man den Satz:

In einem Flächenbüschel ν_3-ter Ordnung gibt es

$$\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2+2\nu_3-4)$$

Flächen, welche die Durchschnittscurve zweier Flächen ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung berühren.

Es sei $\nu_4=\nu_3=\nu_2$. Dann folgt, dass die Polarebene von x in Bezug auf die Fläche (ν_1) durch den Punct geht, in welchem die Polarebene desselben Punctes in Bezug auf alle Flächen des Netzes, das durch die drei gegebenen Flächen ν_2-ter Ordnung gebildet wird, zusammenlaufen, und ebenso jene Ebene auch die Polarebene von x in Bezug auf irgend eine Fläche des Netzes sein muss. Wir erhalten so ein schon bewiesenes Theorem (132) wieder und damit den Satz:

Die Fläche $(\nu_1+3\nu_2-4)$-ter Ordnung, Ort der Puncte, welche in Bezug auf eine feste Fläche ν_1-ter Ordnung und auf irgend eine Fläche eines Netzes ν_2-ter Ordnung dieselbe Polarebene besitzen, ist die Jacobiana folgender vier Flächen: der gegebenen Fläche ν_1-ter Ordnung und drei beliebiger Flächen des Netzes, die aber kein Büschel bilden dürfen.

Ist $\nu_4=\nu_3=\nu_2=\nu_1=\nu$, so bestimmen die vier gegebenen Flächen ein lineares System, und durch x' geht also die Polarebene von x in Bezug auf eine beliebige Fläche des Systems (74); das liefert den Satz:

Der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Flächen eines linearen Systems ν-ter Ordnung durch denselben Punct gehen, ist eine Fläche der $4(\nu-1)$-ten Ordnung.

Die Fläche, Jacobiana von vier beliebigen Flächen des Systems, die also kein Netz bilden, kann auch als Ort der Doppelpuncte der Flächen des Systems definiert werden oder als Ort der Berührungspuncte zwischen diesen Flächen.

Wir legen dieser Fläche den Namen *Jacobiana des linearen Systems* bei.

Ist $\nu_4=1$, so erhalten wir den Satz:

Der Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf drei Flächen der ν_1-ten, ν_2-ten, ν_3-ten Ordnung sich auf einer festen Ebene schneiden, ist eine Fläche der $(\nu_1+\nu_2+\nu_3-3)$-ten Ordnung.

Ist ausserdem $\nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu$, so treffen wir auf ein schon bewiesenes Theorem (128); daher der Satz:

Die Fläche der $3(\nu-1)$-ten Ordnung, Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf die Flächen eines Netzes ν-ter Ordnung, ist die Jacobiana von folgenden vier Flächen: der gegebenen Ebene und drei beliebiger Flächen des Netzes, die aber kein Büschel bilden.

Wenn $\nu_3=\nu_4=1$ ist, finden wir ein anderes bekanntes Theorem (117) und erhalten so:

Die Fläche der $(\nu_1+\nu_2-2)$-ten Ordnung, Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf zwei Flächen der ν_1-ten, ν_2-ten Ordnung sich auf *einer gegebenen Geraden schneiden, ist die Jacobiana von folgenden vier Flächen, der beiden gegebenen Flächen und zwei beliebiger Ebenen, welche durch die gegebene Gerade gehen.*

Nimmt man ausserdem $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ an, so trifft die gegebene Gerade jene Gerade, in welcher sich die Polarebenen des Punctes x in Bezug auf die Flächen des Büschels schneiden, welches durch die beiden gegebenen Flächen ν-ter Ordnung bestimmt ist, und die beiden Geraden liegen daher in einer Ebene, welche die Polarebene von x in Bezug auf eine Fläche des Büschels ist; daher der Satz:

Der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf eine Fläche eines Büschels ν-ter Ordnung durch eine gegebene Gerade geht, ist eine Fläche der $2(\nu-1)$-ten Ordnung. Sie ist die Jacobiana folgender vier Flächen: zwei beliebiger Flächen des Büschels und zwei beliebiger Ebenen, welche durch die gegebene Gerade gehen.

Endlich erhalten wir unter der Bedingung $\nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 1$, $\nu_1 = \nu$ das Theorem (62) wieder, dass nämlich der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf eine Fläche ν-ter Ordnung durch einen festen Punct geht, eine Fläche der $(\nu-1)$-ten Ordnung ist, die erste Polarfläche des festen Punctes. Man hat daher den Satz:

Die erste Polarfläche eines gegebenen Punctes ist die Jacobiana folgender vier Flächen: der Fundamentalfläche und drei beliebiger Ebenen, die durch den gegebenen Punct gehen.

140. Was ist der Ort eines Punctes, in welchem sich je fünf entsprechende Flächen von fünf gegebenen projectivischen linearen Systemen von den respectiven Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ schneiden?

Die drei ersten Systeme mit dem vierten Systeme und dann mit dem fünften combiniert erzeugen (132) zwei Flächen von den Ordnungen

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4,\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5.$$

Sie haben die Curve von der Ordnung

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2$$

gemein, welche durch die ersten drei Systeme erzeugt wird (136), und schneiden sich also ausserdem noch längs einer Curve von der Ordnung

$$(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4)(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5)-(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_2\nu_1).$$

Wir erhalten daher den Satz:

Der Ort eines Punctes, durch den fünf entsprechende Flächen von fünf linearen projectivischen Systemen von den resp. Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ hindurchgehen, ist eine Raumcurve von der Ordnung

$$\nu_1\nu_2+\nu_1\nu_3+\ldots+\nu_4\nu_5.$$

Natürlich liegt diese Curve auf den fünf Flächen, die durch die fünf Systeme zu vier und vier genommen entstehen (138) und enthält eine unbegrenzte Zahl von Gruppen aus je

$$\nu_1\nu_2\nu_3+\nu_1\nu_3\nu_4+\dots+\nu_3\nu_4\nu_5$$

Puncten, von denen jede durch fünf entsprechende Netze der fünf gegebenen Systeme entsteht (125).

141. Hat man fünf Flächen bezüglich von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$, so bilden die ersten Polarflächen der Puncte des Raumes in Bezug auf jene Flächen fünf lineare projectivische Systeme von den Ordnungen ν_1-1, ν_2-1, ν_3-1, ν_4-1, ν_5-1; Man hat also den Satz (134):

Der Ort eines Punctes, dessen erste Polarflächen in Bezug auf fünf gegebene Flächen von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ durch denselben Punct gehen, ist eine Raumcurve von der Ordnung

$$\nu_1\nu_2+\nu_1\nu_3+\dots+\nu_4\nu_5-4(\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_5)+10.$$

Diese Raumcurve, *die Jacobiana der fünf gegebenen Flächen*, liegt offenbar auf den Jacobianen der gegebenen Flächen zu vier und vier genommen.

Ist $\nu=\nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu_4=\nu_5$, so erhält man eine Curve von der $10(\nu-1)^2$-ten Ordnung, den Ort der Puncte, deren Polarebenen in Bezug auf die Flächen eines linearen Systems vierter Stufe und ν-ter Ordnung durch den nämlichen Punct gehen. Diese Curve kann man *die Jacobiana des linearen Systems* nennen.

Ist $\nu_5=1$, so erhält man eine Curve von der Ordnung

$$\nu_1\nu_2+\dots+\nu_3\nu_4-3(\nu_1+\dots+\nu_4)+6,$$

Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf vier gegebene Flächen auf einer gegebenen Ebene zusammenlaufen. Sind sie alle von derselben Ordnung ν, so findet man, dass der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Flächen eines linearen Systems dritter Stufe und ν-ter Ordnung in einen Punct einer festen Ebene zusammenlaufen, eine Raumcurve der $6(\nu-1)^2$-ten Ordnung ist.

Für $\nu_4=\nu_5=1$ erhält man den Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf drei Flächen sich auf einer gegebenen Geraden treffen. Sind die drei Flächen von der nämlichen Ordnung ν, so ist der Ort eine Curve der $3(\nu-1)^2$-ten Ordnung.

Wäre $\nu_3=\nu_4=\nu_5=1$, so erhielte man den Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf zwei gegebene Flächen durch einen festen Punct gehen, das heisst, wir erhalten den Satz:

Die Curve der $(\nu_1-1)(\nu_2-1)$-ten Ordnung, Durchschnitt der ersten Polarflächen eines gegebenen Punctes in Bezug auf zwei gegebene Flächen ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung, ist die Jacobiana folgender fünf Flächen: der beiden gegebenen und drei beliebiger Ebenen, welche durch den gegebenen Punct gehen.

142. Man hat sechs lineare projectivische Systeme von den betreffenden Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$; man sucht die Zahl der Puncte, in denen sich je sechs entsprechende Flächen schneiden.

Die drei ersten Systeme mit dem vierten, dem fünften und endlich mit dem sechsten combiniert erzeugen (138) drei Flächen von den Ordnungen

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4,\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5,\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_6,$$

welche die Curve der Ordnung

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2$$

gemein haben, die durch die drei ersten Systeme erzeugt wird (136). Diese Curve gehört zwei Flächen der $(\nu_1+\nu_2+\nu_3)$-ten Ordnung an, die sich also ausserdem noch in einer Curve der Ordnung $\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2$ schneiden, die ihrerseits im Verein mit einer dritten Curve ν_1^2-ter Ordnung den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen der $(\nu_1+\nu_2)$-ten und $(\nu_1+\nu_3)$-ten Ordnung bildet. Die Ordnung der osculierenden Developpablen (117) der Curve (ν_1^2) ist

$$\rho=2\nu_1^2(\nu_1-1),$$

und folglich (120) ist die Ordnung der osculierenden Developpablen der Curve $(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)$ gleich

$$\begin{aligned}\rho'&=[(\nu_1+\nu_2)+(\nu_1+\nu_3)-2][(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)-\nu_1^2]+\rho\\&=(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)(\nu_1+\nu_2+\nu_3-2)-\nu_1\nu_2\nu_3.\end{aligned}$$

Hieraus schliesst man (120), dass die osculierende Developpable der Curve der Ordnung

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2$$

von der Ordnung

$$\begin{aligned}\rho''=&[(\nu_1+\nu_2+\nu_3)+(\nu_1+\nu_2+\nu_3)-2]\times\\&\times[(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)-(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)]+\rho'\\=&2(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2)+(\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)(\nu_1+\nu_2+\nu_3-2)+\nu_1\nu_2\nu_3\end{aligned}$$

ist, und folglich haben die drei Flächen von den Ordnungen

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4,\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5,\ \nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_6$$

ausser der vorgenannten Curve noch (121)

$$\left.\begin{aligned}&(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4)(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5)(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_6)\\&-(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)\{[(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4)]\\&\qquad+(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5)\\&\qquad+(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_6)\end{aligned}\right\}+\rho''=$$

$$\begin{aligned}&(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4)(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5)(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_6)\\&-(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1+\nu_1\nu_2)(\nu_4+\nu_5+\nu_6)\\&-(\nu_1+\nu_2+\nu_3)^3+\nu_1\nu_2\nu_3=\nu_1\nu_2\nu_3+\ldots+\nu_4\nu_5\nu_6\end{aligned}$$

gemeinschaftliche Puncte, und wir erhalten also den Satz:

Die Zahl der Puncte des Raumes, durch welche je sechs entsprechende Flächen von sechs projectivischen linearen Systemen von den Ordnungen ν_1, ν_2, ..., ν_6 hindurchgehen, ist

$$\nu_1\nu_2\nu_3+\nu_1\nu_2\nu_4+\ldots+\nu_4\nu_5\nu_6.$$

143. Auch hier kann man als Anwendung dieses Satzes *die Jacobiana von sechs gegebenen Flächen* betrachten, die aus den

$$\nu_1\nu_2\nu_3+\nu_1\nu_2\nu_4+\ldots+\nu_4\nu_5\nu_6-4(\nu_1\nu_2+\ldots)+10(\nu_1+\ldots)-20$$

Puncten besteht, von denen jeder die Eigenschaft hat, dass seine Polarebenen in Bezug auf die sechs gegebenen Flächen der Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_6$ durch den nämlichen Punct gehen. Hierin ist als Specialfall die Zahl der Puncte enthalten, deren Polarebenen in Bezug auf je fünf, vier und drei der gegebenen Flächen sich bezüglich auf einer gegebenen Ebene, einer gegebenen Geraden und in einem gegebenen Puncte treffen. Zum Beispiel findet man den Satz:

Die $(\nu_1-1)(\nu_2-1)(\nu_3-1)$ gemeinschaftlichen Puncte der ersten Polarflächen eines Punctes in Bezug auf drei gegebene Flächen bilden die Jacobiana folgender sechs Flächen: der drei gegebenen und dreier Ebenen, die durch den gegebenen Punct gehen.

CAPITEL VIII.

PROJECTIVISCHE LINEARE FLÄCHENSYSTEME BELIEBIGER STUFE.

144. Was ist der Ort eines Punctes, durch welchen je $\mu+1$ entsprechende Flächen von $\mu+1$ linearen projectivischen Flächensystemen μ-ter Stufe und den respectiven Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{\mu+1}$ hindurchgehen [1])?

Auf einer beliebigen Transversale fixieren wir einen Punct $\mathfrak{i}$. Durch ihn gehen μ entsprechende Flächen der μ ersten gegebene Systeme [2]), und die entsprechende Fläche des letzten Systems trifft die Transversale in $\nu_{\mu+1}$ Puncten $\mathfrak{i}'$. Nimmt man umgekehrt auf der Transversale einen Punct $\mathfrak{i}'$ beliebig an, so bilden die Flächen des letzten Systems, welche durch diesen

---

[1]) Der Kürze wegen wollen wir durch das Symbol $\mathfrak{S}_{\mu,\rho}$ die Summe der Producte von je ρ der Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\mu$ bezeichnen.

[2]) Die Flächen des μ-ten Systems, die durch $\mathfrak{i}$ gehen, bilden ein System $(\mu-1)$-ter Stufe, dem in den ersten $\mu-1$ gegebenen Systemen $\mu-1$ niedere Systeme derselben $(\mu-1)$-ten Stufe entsprechen. Angenommen von diesen Systemen gingen $\mu-1$ entsprechende Flächen durch $\mathfrak{i}$, so haben auch die ersten μ gegebene Systeme μ entsprechende Flächen, die durch $\mathfrak{i}$ gehen. Wenn also die Behauptung für $\mu-1$ richtig ist, so ist sie es auch für μ; folglich u. s. w.

gehen, ein niederes System $(\mu-1)$-ter Stufe, dem in den gegebenen andern μ Systemen ebenfalls niedere Systeme von derselben $(\mu-1)$-ten Stufe entsprechen. Diese Systeme sind projectivisch, und wir wollen annehmen, dass der Ort eines Punctes, durch den μ entsprechende Flächen gehen eine Fläche von der Ordnung $\mathfrak{S}_{\mu,1}$ sei. Diese schneidet die Transversale in $\mathfrak{S}_{\mu,1}$ Puncten i, und also haben wir $\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1}$ als Zahl der zusammenfallenden Puncte i, i'; das heisst, wenn der Satz „der gesuchte Ort ist eine Fläche der $\mathfrak{S}_{\mu+1,1}$-ten Ordnung" wahr ist für $\mu=\mu-1$, so ist er auch für $\mu=\mu$ richtig. Wir haben denselben aber schon für $\mu=1,2,3$ bewiesen (107, 116, 138) und erhalten also den Satz:

Der Ort eines Punctes, durch welchen je $\mu+1$ entsprechende Flächen ebensovieler projectivischer linearer Systeme von den respectiven Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu+1}$ und μ-ter Stufe hindurchgehen, ist eine Fläche $\mathfrak{S}_{\mu+1,1}$-ter Ordnung.

145. Gegeben $\mu+2$ lineare projectivische Flächensysteme bezüglich von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu+2}$ und μ-ter Stufe, man verlangt den Ort eines Punctes, durch den je $\mu+2$ entsprechende Flächen hindurchgehen.

Die ersten μ Systeme nach und nach mit dem vorletzten und letzten Systeme combiniert erzeugen (144) zwei Flächen von den Ordnungen $\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1}$, $\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+2}$. Diese haben offenbar diejenige Curve gemein, welche den Ort der Puncte bildet, durch welche eine unbegrenzte Zahl von je μ entsprechenden Flächen der ersten μ gegebenen Systeme hindurchgehen. Wir wollen voraussetzen, die Ordnung dieser Curve sei $\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2}$. Die beiden Flächen schneiden sich dann noch längs einer andern Curve von der Ordnung:

$$(\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1})(\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+2})-(\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2}),$$

also von der Ordnung $\mathfrak{S}_{\mu+2,2}$, wenn man folgende Identitäten beachtet:

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_{\mu+2,1}=\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1}+\nu_{\mu+2}, \\ \mathfrak{S}_{\mu+2,2}=\mathfrak{S}_{\mu,2}+(\nu_{\mu+1}+\nu_{\mu+2})\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1}\nu_{\mu+2}, \\ \mathfrak{S}_{\mu+2,3}=\mathfrak{S}_{\mu,3}+(\nu_{\mu+1}+\nu_{\mu+2})\mathfrak{S}_{\mu,2}+\nu_{\mu+1}\nu_{\mu+2}\mathfrak{S}_{\mu,1}. \end{cases}$$

Die zweite Curve ist der gesuchte Ort.

146. Es seien $\mu+2$ lineare projectivische Flächensysteme von den respectiven Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu+2}$ und $(\mu+2)$-ter Stufe gegeben; ein niederes System $(\mu+1)$-ter Stufe, das im ersten gegebenen Systeme enthalten ist, und die niederen Systeme, welche ihm in den andern gegebenen Systemen entsprechen, erzeugen eine Fläche von der Ordnung $\mathfrak{S}_{\mu+2,1}$ (144). Zwei so erhaltene Flächen $\mathfrak{S}_{\mu+2,1}$-ter Ordnung entsprechen für jedes gegebene System zwei niederen Systemen von der $(\mu+1)$-ten Stufe, die in demselben gegebenen Systeme enthalten sind, und ein niederes System μ-ter Stufe gemein haben. Die beiden Flächen enthalten folglich die Curve $\mathfrak{S}_{\mu+2,2}$-ten Ordnung, die durch die $\mu+2$ entsprechenden niederen Systeme μ-ter Stufe erzeugt wird (145), und schneiden sich also längs einer andern Curve von der Ordnung

$$\mathfrak{S}^2_{\mu+2,1}-\mathfrak{S}_{\mu+2,2}.$$

Dieselbe liegt in allen analogen Flächen $\mathfrak{S}_{\mu+2,1}$-ter Ordnung [1]), und ist folglich der Ort der Puncte, durch die eine unbegrenzte Zahl von je $\mu+2$ entsprechende Flächengruppen ebensovieler linearer projectivischer Flächensysteme $(\mu+2)$-ter Stufe hindurchgehen.

Wenn also μ Systeme μ-ter Stufe eine Curve von der Ordnung $\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2}$ erzeugen, so erzeugen auch $\mu+2$ Systeme der $(\mu+2)$-ten Stufe eine Curve der $(\mathfrak{S}^2_{\mu+2,1}-\mathfrak{S}_{\mu+2,2})$-ten Ordnung, und die Ordnung der Curve, die durch $\mu+2$ Systeme μ-ter Ordnung erzeugt wird, ist $\mathfrak{S}_{\mu+2,2}$. Die gemachte Voraussetzung hat nun aber für $\mu=1, 2, 3$ statt, also ist sie allgemein.

147. Angenommen, die Ordnung der osculierenden Developpablen der Curve $\mathfrak{S}_{\mu,2}$-ter Ordnung, die (146) durch μ lineare projectivische Systeme $(\mu-2)$-ter Stufe erzeugt wird, sei

$$(\mathfrak{S}_{\mu,1}-2)\mathfrak{S}_{\mu,2}+\mathfrak{S}_{\mu,3}\ ,$$

dann bildet diese Curve zugleich mit derjenigen von der Ordnung $\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2}$, welche durch μ lineare projectivische Systeme der μ-ten Stufe erzeugt wird, von denen die obengenannten Systeme $(\mu-2)$-ter Stufe als niedere entsprechende Systeme einen Theil bilden, den vollständigen Durchschnitt von zwei Flächen $\mathfrak{S}_{\mu,1}$-ter Ordnung, und die Ordnung der osculierenden Developpablen dieser letzteren Curve ist also gleich

$$2(\mathfrak{S}_{\mu,1}-1)(\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-2\mathfrak{S}_{\mu,2})+(\mathfrak{S}_{\mu,1}-2)\mathfrak{S}_{\mu,2}+\mathfrak{S}_{\mu,3}\ .$$

Die letzte Curve in Verbindung mit derjenigen, von der Ordnung $\mathfrak{S}_{\mu+2,2}$, welche durch $\mu+2$ lineare projectivische Systeme μ-ter Stufe gebildet wird, deren μ erste die schon genannten sind, bildet den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen von den respectiven Ordnungen $\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1}, \mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+2}$ (146), und daher ist (120) die Ordnung der osculierenden Developpablen der Curve $\mathfrak{S}_{\mu+2,2}$ gleich

$$\begin{aligned}(\mathfrak{S}_{\mu,1}+\mathfrak{S}_{\mu+2,1}-2)(\mathfrak{S}_{\mu+2,2}-\mathfrak{S}^2_{\mu,1}+\mathfrak{S}_{\mu,2})\\ +2(\mathfrak{S}_{\mu,1}-1)(\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-2\mathfrak{S}_{\mu,2})+(\mathfrak{S}_{\mu,1}-2)\mathfrak{S}_{\mu,2}+\mathfrak{S}_{\mu,3}\end{aligned}$$

oder auch:

$$(\mathfrak{S}_{\mu+2,1}-2)\mathfrak{S}_{\mu+2,2}+\mathfrak{S}_{\mu+2,3}\ ,$$

wenn man auf die oben (145) angegebenen Identitäten Rücksicht nimmt. Die Richtigkeit der angenommenen Voraussetzung ist aber im Falle $\mu=1, 2, 3$ schon bewiesen, und wir haben daher den Satz:

Der Ort eines Punctes, durch welchen eine unbegrenzte Zahl von Gruppen aus je μ entsprechenden Flächen ebensovieler projectivischer Systeme respective von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu$ und μ-ter Stufe [2]) *bestehend hindurchgehen, ist eine Raumcurve von der Ordnung*

$$\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2}\ ,$$

---

[1]) Man beweist dies wie im Falle der Systeme dritter Stufe (136).

[2]) Das heisst, der Ort der gemeinschaftlichen Basispuncte von μ entsprechenden Büscheln.

und die Ordnung ihrer osculierenden Developpablen ist:

$$2(\mathfrak{S}_{\mu,1}-1)(\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2})-\mathfrak{S}_{\mu,1}\mathfrak{S}_{\mu,2}+\mathfrak{S}_{\mu,3}\ .$$

Der Ort eines Punctes, durch welchen je $\mu+2$ *entsprechende Flächen ebensovieler linearer projoctivischer Systeme der respectiven Ordnungen* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu+2}$ *und* μ*-ter Stufe hindurchgehen, ist eine Raumcurve von der Ordnung* $\mathfrak{S}_{\mu+2,2}$. *Die Ordnung ihrer osculierenden Developpablen ist:*

$$(\mathfrak{S}_{\mu+2,1}-2)\mathfrak{S}_{\mu+2,2}+\mathfrak{S}_{\mu+2,3}\ .$$

148. Es seien jetzt $\mu-1$ lineare projectivische Flächensysteme gegeben von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}$ und μ-ter Stufe. In einem derselben nehmen wir drei niedere Systeme $(\mu-2)$-ter Stufe an, die ein und dasselbe niedere System $(\mu-3)$-ter Stufe in sich schliessen. Jedes der drei niedern Systeme erzeugt in Gemeinschaft mit den entsprechenden niederen Systemen der andern gegebenen Systeme eine Fläche $(\mathfrak{S}_{\mu-1,1})$-ter Ordnung (144). Die so entstandenen drei Flächen gehen gleichzeitig durch die Curve $\mathfrak{S}_{\mu-1,2}$-ter Ordnung, welche durch die $\mu-1$ niedern entsprechenden Systeme $(\mu-3)$-ter Stufe erzeugt wird (145). Da nun die Ordnung der osculierenden Developpablen dieser Curve (147) gleich ist:

$$(\mathfrak{S}_{\mu-1,1}-2)\mathfrak{S}_{\mu-1,2}+\mathfrak{S}_{\mu-1,3}\ ,$$

so haben (121) die drei Flächen ausser dieser Curve noch

$$\mathfrak{S}_{\mu-1,1}(\mathfrak{S}_{\mu-1,1}-2\mathfrak{S}_{\mu-1,2})+\mathfrak{S}_{\mu-1,3}$$

gemeinschaftliche Puncte.

Diese Puncte sind allen analogen Flächen $\mathfrak{S}_{\mu-1,1}$-ter Ordnung gemein [1]), welche den verschiedenen niedern Systemen $(\mu-2)$-ter Stufe entsprechen, die in den vorgelegten Systemen enthalten sind; also gilt der Satz:

Die Zahl der Puncte, welche einen gemeinsamen Basispunct von $\mu-1$ *entsprechenden Netzen in* $\mu-1$ *gegebenen linearen projectivischen Flächensystemen* μ*-ter Stufe und von den respectiven Ordnungen* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}$ *darstellen ist*

$$\mathfrak{S}_{\mu-1,1}(\mathfrak{S}^2_{\mu-1,1}-2\mathfrak{S}_{\mu-1,2})+\mathfrak{S}_{\mu-1,3}\ .$$

149. Gegeben $\mu+3$ lineare projectivische Flächensysteme μ-ter Stufe und von den respectiven Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{\mu+3}$; man sucht die Zahl der Puncte, welche je $\mu+3$ entsprechenden Flächen gemeinschaftlich sind.

Die μ ersten Systeme nach und nach mit dem $(\mu+1)$-ten, $(\mu+2)$-ten, $(\mu+3)$-ten Systeme combiniert erzeugen (144) drei Flächen von den respectiven Ordnungen

$$\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1}\,,\ \mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+2}\,,\ \mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+3}\ .$$

Diese Flächen haben die Curve von der Ordnung

$$\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2}$$

---

1) Man beweist dies wie im Falle der Systeme dritter Stufe (135).

gemein, deren osculierende Developpable die Ordnungszahl

$$2(\mathfrak{S}_{\mu,1}-1)(\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2})-\mathfrak{S}_{\mu,1}\mathfrak{S}_{\mu,2}+\mathfrak{S}_{\mu,3}$$

hat, und welche durch die ersten μ Systeme erzeugt wird (147). Die drei Flächen haben also (121) noch folgende Zahl von Puncten gemein:

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1})(\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+2})(\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+3})\\ &-(\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2})(2\mathfrak{S}_{\mu,1}+\mathfrak{S}_{\mu+3,1}-2)\\ &+2(\mathfrak{S}_{\mu,1}-1)(\mathfrak{S}^2_{\mu,1}-\mathfrak{S}_{\mu,2})-\mathfrak{S}_{\mu,1}\mathfrak{S}_{\mu,2}+\mathfrak{S}_{\mu,3}\end{aligned}$$

oder $\mathfrak{S}_{\mu+3,3}$ vermöge der Identitäten:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{\mu+3,1}&=\mathfrak{S}_{\mu,1}+\nu_{\mu+1}+\nu_{\mu+2}+\nu_{\mu+3}\,,\\ \mathfrak{S}_{\mu+3,3}&=\mathfrak{S}_{\mu,3}+(\nu_{\mu+1}+\nu_{\mu+2}+\nu_{\mu+3})\mathfrak{S}_{\mu+2}\\ &\qquad+(\nu_{\mu+2}\nu_{\mu+3}+\nu_{\mu+3}\nu_{\mu+1}+\nu_{\mu+1}\nu_{\mu+2})\mathfrak{S}_{\mu,1}\\ &\qquad+\nu_{\mu+1}\nu_{\mu+2}\nu_{\mu+3}\,.\end{aligned}$$

Wir haben also den Satz [1]:

Die Zahl der Puncte des Raumes, durch welche je $\mu+3$ entsprechende Flächen ebensovieler linearer projectivischer Flächensysteme von den respectiven Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu+3}$ und μ-ter Stufe hindurchgehen, ist $\mathfrak{S}_{\mu+3,3}$.

CAPITEL IX.

SYMMETRISCHE COMPLEXE.

150. Es seien $\mu+1$ lineare projectivische Systeme μ-ter Stufe gegeben. Wir fixieren im ersten Systeme $\mu+1$ Flächen, die hinreichend sind, dasselbe vollständig zu individualisieren, und betrachten jedes andere durch die $\mu+1$ Flächen festgelegt, welche den obigen projectivisch entsprechen. Jede beliebige dieser $(\mu+1)^2$ Flächen, welche auf die eben aus einander gesetzte Art die $\mu+1$ Systeme bestimmen, kann man dann durch das Symbol $P_{\rho\sigma}$ bezeichnen, wo der Index ρ allen Flächen desselben Systems gemein ist, der Index σ dagegen $\mu+1$ entsprechenden Flächen.

Dies vorausgesetzt, sagen wir, die $\mu+1$ Systeme bilden einen *symmetrischen Complex*, wenn sie sämmtlich von der ν-ten Ordnung sind und ausserdem die Symbole $P_{\rho\sigma}$ und $P_{\sigma\rho}$ ein und dieselbe Fläche ausdrücken.

151. Es sei $\mu=1$, das heisst, man habe den symmetrischen Complex:

$$\begin{matrix}P_{11}\,, P_{12}\\ P_{21}\,, P_{22}\end{matrix}$$

gebildet durch die beiden projectivischen Büschel

$$(P_{11}\,, P_{12}\,, \ldots)\,, (P_{21}\,, P_{22}\,, \ldots)\,,$$

1) Man vergleiche Salmon, *a. a. O.*, p. 492—495.

welche die Fläche $P_{12} \equiv P_{21}$ gemein haben, die sich aber nicht selbst entspricht. Auf dieser Fläche liegen die Basiscurven beider Büschel, welche sich in den ν^3 Puncten schneiden, die den drei Flächen P_{11}, P_{12}, P_{22} gemein sind.

Die Fläche $\mathbf{P}$ der 2ν-ten Ordnung, erzeugt (107) durch die gegebenen zwei Büschel, wird längs der Basiscurve des ersten Büschels von der Fläche P_{11} dieses Büschels berührt. $\mathbf{P}$ wird in der That (107) in einem beliebigen Puncte genannter Curve von einer Fläche des ersten Büschels berührt, die derjenigen Fläche des zweiten Büschels entspricht, welche durch den nämlichen Punct geht. Aber P_{21} ist eine Fläche des zweiten Büschels und enthält die Basiscurve des ersten Büschels vollständig; folglich u. s. w.

In ähnlicher Weise wird die Fläche $\mathbf{P}$ auch von derjenigen Fläche P_{22} längs der Basiscurve des zweiten Büschels berührt, welche der Fläche P_{12} des ersten Büschels entspricht. In den gemeinschaftlichen Puncten der beiden Basiscurveu wird $\mathbf{P}$ also von beiden Flächen P_{11}, P_{12} berührt. Diese Flächen sind aber beliebig gewählt, und haben daher im Allgemeinen keinen Berührungspunct, und es sind mithin die gemeinschaftlichen Puncte der drei Flächen P_{11}, P_{12}, P_{22} für $\mathbf{P}$ Doppelpuncte. Dies liefert den Satz:

Die von zwei projectivischen Flächenbüscheln ν-ter Ordnung, die einen symmetrischen Complex bilden, erzeugte Fläche hat ν^3 Doppelpuncte.

Die Flächen ν-ter Ordnung, welche durch die obigen ν^3 Puncte gehen bilden ein Netz, und folglich bilden diejenigen, welche ausserdem noch durch einen andern beliebigen Punct — den wir auf $\mathbf{P}$ annehmen — gehen, ein Büschel. Die Basiscurve ν^2-ter Ordnung dieses Büschels hat daher $2\nu^3+1$ gemeinschaftliche Durchschnittspuncte mit $\mathbf{P}$, die von der 2ν-ten Ordnung ist, und liegt daher vollständig auf dieser Fläche. *Jede Fläche ν-ter Ordnung also, welche durch die ν^3 Doppelpuncte von $\mathbf{P}$ geht, schneidet diese Fläche in zwei getrennten Curven ν^2-ter Ordnung, die sich in den genannten Puncten schneiden. Durch jeden Punct von $\mathbf{P}$ geht eine der vorgenannten Curven, welche die Basis eines Flächenbüchels ν-ter Ordnung bildet. Zwei beliebige von diesen Curven liegen stets auf der nämlichen Fläche ν-ter Ordnung und können also ausser den ν^3 Puncten keinen weitern Punct gemein haben.*

Die beiden Curven bilden die Basiscurven zweier Büschel ν-ter Ordnung, zwischen denen man eine solche projectivische Abhängigkeit herstellen kann, dass die durch sie erzeugte Fläche genau $\mathbf{P}$ ist. Jede Fläche des Büschels, welche durch die Basiscurve desselben hindurchgeht, schneidet in der That $\mathbf{P}$ in einer Curve ν^2-ter Ordnung, die in Gemeinschaft mit der Basis des andern Büschels die entsprechende Fläche dieses letztern bestimmt. Es gibt aber eine Fläche, die beide Basiscurven enthält, und daher sowohl dem einen als dem andern Büschel angehört. Als Theil des ersten Büschels schneidet sie $\mathbf{P}$ in einer neuen Curve, welche mit der Basis des zweiten Büschels identisch ist. *Die Fläche also, welche in diesem zweiten Büschel ihr entspricht, schneidet $\mathbf{P}$ längs zwei mit der Basis eben dieses zweiten Büschels zusammenfallenden Curven, das heisst, berührt $\mathbf{P}$ in dieser Curve.* Auf diese Weise ist klar, *dass die Curven ν^2-ter Ordnung, welche durch die ν^3 Doppelpuncte gehen, Berührungscurven — Charakteristiken — zwischen* **P** *und gewissen Flächen ν-ter Ordnung sind die dem genannten Netze angehören.* **P** ist also (50) die einhüllende Fläche einer einfach unendlichen Reihe von Flächen, von denen je zwei durch einen beliebigen Punct des Raumes gehen; unter ihnen befindet sich auch P_{11}, P_{22}.

152. Es sei jetzt $\mu = 2$, man betrachte also den symmetrischen Complex

$$\begin{array}{l} P_{11}, P_{12}, P_{13} \\ P_{21}, P_{22}, P_{23} \\ P_{31}, P_{32}, P_{33} \end{array}$$

dargestellt durch die drei projectivischen Flächennetze ν-ter Ordnung

$$\begin{array}{l} (P_{11}, P_{12}, P_{13}, \ldots), \\ (P_{21}, P_{22}, P_{23}, \ldots), \\ (P_{31}, P_{32}, P_{33}, \ldots), \end{array}$$

worin $P_{23} \equiv P_{32}, P_{31} \equiv P_{13}, P_{12} \equiv P_{21}$ ist. Es sei $\mathfrak{P}$ die Fläche 3ν ter Ordnung, die den Ort eines Punctes bildet, in dem sich je drei entsprechende Flächen der drei Netze schneiden (121), dann kann man diese Fläche in folgender Weise construieren.

Die beiden projectivischen Büschel $(P_{22}, P_{23}, \ldots), (P_{32}, P_{33}, \ldots)$, die einen symmetrischen Complex bilden, erzeugen (151) eine Fläche $\mathbf{P}_{11}$ der 2ν-ten Ordnung, welche von P_{33} längs der Curve $P_{32}P_{33}$, der Basis des zweiten Büschels, berührt wird. Analog geben die projectivischen Büschel $(P_{11}, P_{13}, \ldots), (P_{31}, P_{33}, \ldots)$, die ebenfalls einen symmetrischen Complex bilden, eine Fläche $\mathbf{P}_{22}$ der 2ν-ten Ordnung, die von P_{33} in der Curve $P_{31}P_{33}$ berührt wird; und die beiden projectivischen Büschel $(P_{21}, P_{23}, \ldots)$, $(P_{31}, P_{33}, \ldots)$ oder, was dasselbe ist [1]), die projectivischen Büschel $(P_{12}, P_{13}, \ldots), (P_{32}, P_{33}, \ldots)$ erzeugen eine Fläche $\mathbf{P}_{12}$ oder $\mathbf{P}_{21}$ der 2ν-ten Ordnung die von P_{33} längs der zwei Curven $P_{13}P_{33}, P_{23}P_{33}$ geschnitten wird, und also in den beiden Curven gemeinschaftlichen Puncten von P_{33} berührt, das

---

[1]) Eine Fläche 2ν-ter Ordnung, die (107) mittels zweier projectivischer Büschel $(U, V), (U', V')$, erzeugt ist, die von derselben Ordnung ν sind, lässt sich auch aus zwei projectivischen Büscheln $(U, U'), (V, V')$ herleiten, in denen zwei Flächen U'', V'' sich entsprechen wie folgt: Man nehme beliebig die Fläche U'' unter denen, welche durch UU' gehen. Diese Fläche schneidet die Fläche (2ν) längs einer andern Curve k der ν^2-ten Ordnung, durch welche man in Gemeinschaft mit VV' eine Fläche V'' der ν-ten Ordnung legen kann. In der That hat k mit der Basis VV' eine Zahl von ν^3 Puncten gemein — die gemeinschaftlichen Puncte der Flächen U'', V, V' — und eine Fläche der ν-ten Ordnung, die durch die Basis VV' und durch einen Punct von k, der nicht dieser Basis angehört, geht, hat also ν^3+1 Puncte mit k gemein, und enthält also diese Curve vollständig.

heisst in den gemeinschaftlichen Puncten der drei Flächen P_{13}, P_{23}, P_{33}. Diese Puncte bilden die Basispuncte des dritten gegebenen Netzes.

Die mit $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}$ analogen Flächen, die mittelst Büscheln entstehen, die sich im zweiten und dritten Netze entsprechen, bilden ein neues Netz (120), und jede von ihnen kann man durch diejenigen Büschel des dritten Netzes individualisiert denken, welche zur Construction benutzt wurden. Dasselbe gilt für die zu $\mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22}$ analogen Flächen, die durch entsprechende Büschel des ersten und dritten Netzes entstehen. Es folgt somit, dass die Netze $(\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \ldots), (\mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22}, \ldots)$ projectivisch sind, und besonders die Büschel $(\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}), (\mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22})$ projectivisch, welche sich in diesen Netzen entsprechen.

Die Fläche $\mathbf{P}_{11}$ des Netzes $(\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \ldots)$ und die Fläche $\mathbf{P}_{21}$ des Netzes $(\mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22}, \ldots)$ entsprechen demselben Büschel (P_{32}, P_{33}) des dritten Netzes und bezüglich den Büscheln $(P_{22}, P_{23}), (P_{12}, P_{13})$ des zweiten und ersten Netzes, und diese Flächen enthalten daher ausser der Curve $P_{32}P_{33}$ diejenige Curve $3\nu^2$-ter Ordnung, welche den Ort der Puncte bildet, in denen sich drei entsprechende Flächen dieser drei projectivischen Büschel schneiden. Diese zweite Curve gehört auch der Fläche $\mathfrak{P}$ an, da die obigen drei Büschel sich in den gegebenen drei Netzen entsprechen.

Analog entsprechen die Flächen $\mathbf{P}_{12}$ des Netzes $(\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \ldots)$ und $\mathbf{P}_{22}$ des Netzes $(\mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22}, \ldots)$ demselben Büschel (P_{31}, P_{33}) des dritten gegebenen Netzes und bezüglich den Büscheln $(P_{21}, P_{23}), (P_{11}, P_{13})$ des zweiten resp. ersten Netzes. Sie enthalten daher ausser der Curve $P_{31}P_{33}$ die Curve $3\nu^2$-ter Ordnung, welche durch die genannten drei Büschel entsteht, die ebenfalls projectivisch sind. Die fragliche Curve liegt auch auf der Fläche $\mathfrak{P}$, da die drei Büschel in den drei gegebenen Netzen sich correspondieren.

Genau in derselben Weise hat eine beliebige Fläche $\mathbf{P}_{1\rho}$ des Büschels $(\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12})$ mit der entsprechenden Fläche $\mathbf{P}_{2\rho}$ des projectivischen Büschels $(\mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22})$ — beide Flächen entsprechen demselben Büschel des dritten gegebenen Netzes — nicht nur eine Curve ν^2-ter Ordnung — Basis dieses Büschels — gemein, die auf P_{33} und auf einer Fläche des Büschels (P_{31}, P_{33}) liegt, sondern auch eine Curve $3\nu^2$-ter Ordnung, die durch drei entsprechende Büschel entsteht und also auf $\mathfrak{P}$ liegt. Es folgt noch, dass $\mathfrak{P}$ und P_{33} zusammen den vollständigen Ort darstellen, der durch die projectivischen Büschel $(\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}), (\mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22})$ erzeugt wird.

Da nun diese Büschel einen symmetrischen Complex bilden, *so wird* (151) *die Fläche $\mathfrak{P}$ von $\mathbf{P}_{11}$ und $\mathbf{P}_{22}$ längs zweier Curven von der $3\nu^2$-ten Ordnung berührt, welche auf $\mathbf{P}_{12}$ liegen;* und die Doppelpuncte von $\mathfrak{P}$ sind die gemeinschaftlichen Puncte der drei Flächen $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{22}$. Wir haben aber oben gesehen, dass diese Flächen gleichzeitig von P_{33} in den ν^3 Basispuncten des dritten gegebenen Netzes berührt werden, und da jeder dieser Berührungspuncte (21) vier Durchschnittspuncte der Flächen $\mathbf{P}$ absorbiert, so *hat die Fläche $\mathfrak{P}$*

$$(2\nu)^3 - 4\nu^3 = 4\nu^3$$

Doppelpuncte, durch welche alle Flächen $\mathbf{P}$ gehen.

Aus dem eben Bewiesenen folgt ausserdem:

1. $\mathfrak{P}$ ist zugleich mit P_{33} die einhüllende Fläche einer einfach unendlichen Reihe von Flächen $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{22}, \ldots$ Jede Fläche $\mathbf{P}_{\rho\rho}$ ist die einhüllende Fläche einer analogen Reihe von Flächen ν-ter Ordnung wie $P_{\rho\rho}$. Umgekehrt gibt jede Fläche $P_{\rho\rho}$ einer Reihe von Flächen $\mathbf{P}_{\rho\rho}$ Entstehung, deren einhüllende Fläche durch $\mathfrak{P}$ und durch $P_{\rho\rho}$ dargestellt wird. Jede Fläche $\mathbf{P}_{\rho\rho}$ berührt $\mathfrak{P}$ längs einer Charakteristik der $3\nu^2$-ten Ordnung, während $P_{\rho\rho}$ die Fläche $\mathfrak{P}$ in ν^2 Puncten berührt, den Basispuncten eines Netzes von Flächen $P_{\rho\sigma}$.

2. $\mathfrak{P}$ *ist auch der Ort der Doppelpuncte der Flächen* $\mathbf{P}_{\rho\rho}$. Denn ein Doppelpunct von $\mathbf{P}_{11}$ ist in allen Flächen des Büschels (P_{22}, P_{33}) und in allen denen des Büschels (P_{32}, P_{33}) gelegen, und durch ihn geht auch eine Fläche des Büschels (P_{12}, P_{13}); folglich ist dieser Punct, da er drei entsprechenden Flächen der drei genannten Büschel angehört, die in den gegebenen Netzen enthalten sind, ein Punct des Ortes $\mathfrak{P}$.

153. In ähnlicher Weise kann man die Fläche $\mathfrak{P}$ construieren, die den Ort der Puncte bildet, in denen sich je drei entsprechende Flächen der drei projectivischen Netze

$$(P, Q, R, \ldots),$$
$$(P', Q', R', \ldots),$$
$$(P'', Q'', R'', \ldots)$$

von den respectiven Ordnungen ν, ν', ν'' schneiden, die keinen symmetrischen Complex bilden (127).

Die beiden projectivischen Büschel (Q', R'), (Q'', R'') erzeugen eine Fläche $\mathbf{P}_1$ von der $(\nu'+\nu'')$-ten Ordnung, welche durch R'' in den beiden Curven $R''Q''$, $R''R'$ geschnitten wird.

Die beiden projectivischen Büschel (Q'', R''), (Q, R) erzeugen eine Fläche $\mathbf{P}'_1$ der Ordnung $\nu''+\nu$, die von R'' längs der beiden Curven $R''Q''$, $R''R$ geschnitten wird.

Die beiden projectivischen Büschel (P', R'), (P'', R'') erzeugen eine Fläche $\mathbf{P}_2$ von der Ordnung $\nu'+\nu''$, die von R'' in den beiden Curven $R''P''$, $R''R'$ geschnitten wird.

Endlich erzeugen die beiden projectivischen Büschel (P'', R''), (P, R) eine Fläche $\mathbf{P}'_2$ der $(\nu''+\nu)$-ten Ordnung, welche von R'' längs der beiden Curven $R''P''$, $R''R$ geschnitten wird.

Die Flächen $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ bestimmen ein Büschel $(\nu'+\nu'')$-ter Ordnung, welches dem Büschel (Q'', P'') projectivisch ist. Ist S'' eine beliebige Fläche dieses letzten Büschels, so erzeugen die entsprechenden und daher projectivischen Büschel (S', R'), (S'', R'') diejenige Fläche $\mathbf{P}$ des Büschels $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, welche S'' entspricht.

Analog bestimmen die Flächen $\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2$ ein Büschel von der $(\nu''+\nu)$-ten Ordnung, das ebenfalls dem Büschel (Q'', P'') projectivisch ist. Die S'' entsprechende Fläche $\mathbf{P}'$ wird von den entsprechenden projectivischen Büscheln (S'', R'') (S, R) erzeugt.

Die Flächen $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ enthalten offenbar ausser der Curve $R''S''$ die Curve der $(\nu\nu' + \nu'\nu'' + \nu''\nu)$-ten Ordnung, Ort eines Punctes (122) in dem sich drei entsprechende Flächen der drei projectivischen Büschel (S, R), (S', R'), (S'', R'') schneiden. Diese Curve liegt auf $\mathfrak{P}$, da die drei obigen Büschel sich in den drei gegebenen Netzen entsprechen. Wir haben daher das Endergebniss: *Die projectivischen Büschel* $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, $(\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2)$ *erzeugen einen Ort, der aus den Flächen* R'' *und* $\mathfrak{P}$ *zusammengesetzt ist.*

154. Wir setzen jetzt voraus, es sei $\nu'' = \nu' = \nu$. In diesem Falle schneidet (152, *Anmerkung*) eine beliebige Fläche R_0 des Büschels (R', R'') die Flächen $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ in zwei Curven, die bezüglich auf zwei Flächen Q_0, P_0 liegen, welche den Büscheln (Q', Q''), (P', P'') angehören. Daraus folgt, dass die projectivischen Netze

$$\begin{gathered}(P, Q, R, \ldots), \\ (P_0, Q_0, R_0, \ldots), \\ (P'', Q'', R'', \ldots)\end{gathered}$$

denselben Flächen $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2$ Entstehung geben, und eine Fläche 3ν-ter Ordnung erzeugen, welche mit $\mathfrak{P}$ vier Curven der $3\nu^2$-ten Ordnung gemein hat, und also vollständig mit dieser Fläche zusammenfällt. Das heisst:

Wird eine Fläche 3ν*-ter Ordnung durch drei projectivische Netze*

$$\begin{gathered}(P, Q, R, \ldots), \\ (P', Q', R', \ldots), \\ (P'', Q'', R'', \ldots),\end{gathered}$$

ν*-ter Ordnung erzeugt, so kann man für ein beliebiges dieser Netze, z. B. für das zweite, ein neues Netz*

$$(P_0, Q_0, R_0, \ldots)$$

substituieren, das den gegebenen projectivisch ist, und aus Flächen gebildet wird, die bezüglich den Büscheln (P', P''), (Q', Q''), (R', R''), ... *angehören.*

Analog können wir einem der drei gegebenen Netze

$$(P, Q, R, \ldots)$$

ein neues Netz

$$(P_1, Q_1, R_1, \ldots)$$

substituieren, wo die Flächen $P_1, Q_1, R_1, \ldots$ bezüglich den Büscheln (P', P_0), (Q', Q_0), (R', R_0), ... angehören oder, was dasselbe ist, den Netzen (P, P', P''), (Q, Q', Q''), (R, R', R''). Man kann endlich *dieselbe Fläche* $\mathfrak{P}$ *auch mittelst drei neuer Netze*

$$\begin{gathered}(P_1, Q_1, R_1, \ldots), \\ (P_2, Q_2, R_2, \ldots), \\ (P_3, Q_3, R_3, \ldots),\end{gathered}$$

erzeugen, die den gegebenen projectivisch sind und aus Flächen

$$P_1, P_2, P_3, \ldots;\ Q_1, Q_2, Q_3, \ldots;\ R_1, R_2, R_3, \ldots$$

gebildet werden, welche bezüglich den Netzen

$$(P, P', P'', \ldots),$$
$$(Q, Q', Q'', \ldots),$$
$$(R, R', R'', \ldots),$$

angehören.

Aber noch mehr: Die projectivischen Netze

$$(P, P', P'', P_1, \ldots),$$
$$(Q, Q', Q'', Q_1, \ldots),$$
$$(R, R', R'', R_1, \ldots),$$

erzeugen eine Fläche $3\nu^2$-ter Ordnung, welche die vier Curven

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2,\ \mathbf{P}_1\mathbf{P}'_1,\ \mathbf{P}'_1\mathbf{P}'_2,\ \mathbf{P}_2\mathbf{P}'_2$$

der $3\nu^2$-ten Ordnung enthält und also mit $\mathfrak{C}$ zusammenfällt. Die Projectivität dieser drei Netze lässt sich sehr leicht bestimmen. Es sei P_1 eine beliebige Fläche des Büschels (P, P'); die entsprechende Fläche Q_1 bestimmt sich dann in der Art, dass die von den projectivischen Büscheln (P, P', P_1), (Q, Q', Q_1) erzeugte Fläche mit derjenigen zusammenfällt, die durch die Büschel (P, Q), (P', Q') erzeugt wird. Dadurch ist aber das Gesetz des gegenseitigen Entsprechens gegeben. Man gelangt also so stufenweise zur Auflösung des allgemeineren Problems: Man nimmt im Netze (P, P', P'') beliebig eine Fläche an, und sucht die entsprechenden Flächen der andern beiden Netze (Q, Q', Q''), (R, R', R'').

155. Wir gehen über zur Betrachtung des symmetrischen Complexes

$$\begin{array}{l} P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14} \\ P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{24} \\ P_{31}, P_{32}, P_{33}, P_{34} \\ P_{41}, P_{42}, P_{43}, P_{44}\,. \end{array}$$

bestehend aus vier projectivischen linearen Flächensystemen dritter Stufe und ν-ter Ordnung, in denen

$$P_{12} \equiv P_{21},\ P_{13} \equiv P_{31},\ P_{14} \equiv P_{41},\ P_{23} \equiv P_{32},\ P_{24} \equiv P_{42},\ P_{34} \equiv P_{43}\ .$$

Die Fläche $\mathbf{D}$ der 4ν-ten Ordnung, Ort der Puncte, welche vier entsprechenden Flächen gemein sind (138), lässt sich in folgender Weise construieren.

Die drei projectivischen Netze

$$(P_{22}, P_{23}, P_{24}), (P_{32}, P_{33}, P_{34}), (P_{42}, P_{43}, P_{44})$$

ergeben (152) eine Fläche $\mathfrak{C}_{11}$ der 3ν-ten Ordnung, welche durch die Fläche $\mathbf{P}$, erzeugt durch die Büschel $(P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44})$, längs einer Curve $3\nu^2$-ter

Ordnung berührt wird — dieselbe liegt auf der Fläche, die durch die Büschel (P_{32}, P_{34}), (P_{42}, P_{44}) oder durch die Büschel (P_{23}, P_{24}), (P_{43}, P_{44}) erzeugt wird — und der Ort eines Punctes ist, in dem sich je drei entsprechende Flächen der projectivischen Büschel (P_{23}, P_{24}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}) schneiden.

In ähnlicher Weise erzeugen die drei projectivischen Netze

$$(P_{11}, P_{13}, P_{14}), (P_{31}, P_{33}, P_{34}), (P_{41}, P_{43}, P_{44})$$

eine Fläche $\mathfrak{P}_{22}$ der 3ν-ten Ordnung, welche von der Fläche $\mathbf{P}$ in einer Curve $3\nu^2$-ter Ordnung berührt wird, die auf der durch die Büschel (P_{13}, P_{14}), (P_{34}, P_{44}) oder die Büschel (P_{31}, P_{34}), (P_{41}, P_{44}) erzeugten Fläche liegt und der Ort eines Punctes ist, der je drei entsprechenden Flächen der projectivischen Büschel (P_{13}, P_{14}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}) gemeinschaftlich ist.

Endlich erzeugen die drei projectivischen Netze:

$$(P_{21}, P_{23}, P_{24}), (P_{31}, P_{33}, P_{34}), (P_{41}, P_{43}, P_{44})$$

oder, was dasselbe sagen will (154), die drei projectivischen Netze:

$$(P_{12}, P_{13}, P_{14}), (P_{32}, P_{33}, P_{34}), (P_{42}, P_{43}, P_{44})$$

eine Fläche $\mathfrak{P}_{12}$ oder $\mathfrak{P}_{21}$ der 3ν-ten Ordnung, welche von der Fläche $\mathbf{P}$ in den beiden obenerwähnten Curven $3\nu^2$-ter Ordnung geschnitten wird. Daraus folgt, dass die gemeinschaftlichen Puncte dieser beiden Curven, also die $4\nu^3$ Puncte, durch welche (124) je vier entsprechende Flächen der projectivischen Büschel

$$(P_{13}, P_{14}), (P_{23}, P_{24}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44})$$

hindurchgehen, so beschaffen sind, dass in jedem derselben die Fläche $\mathbf{P}$ alle drei Flächen $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{22}, \mathfrak{P}_{12}$ berührt.

Die Flächen $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{12}$ bestimmen ein zu dem Büschel (P_{42}, P_{41}) projectivisches Büschel. Ist $P_{4\rho}$ eine beliebige Fläche dieses letztern Büschels und sind $P_{3\rho}, P_{2\rho}, P_{1\rho}$ die entsprechenden Flächen der Büschel (P_{32}, P_{31}), (P_{22}, P_{21}), (P_{12}, P_{11}), so entsteht die entsprechende Fläche $\mathfrak{P}_{1\rho}$ des Büschels $(\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{12})$ durch die projectivischen Netze

$$(P_{2\rho}, P_{23}, P_{24}), (P_{3\rho}, P_{33}, P_{34}), (P_{4\rho}, P_{43}, P_{44}) .$$

Die Flächen $\mathfrak{P}_{21}, \mathfrak{P}_{22}$ bestimmen ein anderes demselben vorgenannten Büschel (P_{42}, P_{41}) projectivisches Büschel. Die Fläche $\mathfrak{P}_{2\rho}$ des Büschels $(\mathfrak{P}_{21}, \mathfrak{P}_{22})$, welche $P_{4\rho}$ entspricht, entsteht durch die drei projectivischen Netze

$$(P_{1\rho}, P_{13}, P_{14}), (P_{3\rho}, P_{33}, P_{34}), (P_{4\rho}, P_{43}, P_{44}) .$$

Die beiden Flächen $\mathfrak{P}_{1\rho}, \mathfrak{P}_{2\rho}$ der 3ν-ten Ordnung gehen gleichzeitig durch die Curve der $3\nu^2$-ten Ordnung, die durch die Büschel $(P_{\rho3}, P_{\rho4})$, (P_{33}, P_{34}) erzeugt wird, und auf der Fläche $\mathbf{P}$ liegt, und schneiden sich also ausserdem noch in einer Curve $6\nu^2$-ter Ordnung, Ort eines Punctes (129), der je vier entsprechenden Flächen der vier projectivischen Netze

$$(P_{1\rho}, P_{13}, P_{14}), (P_{2\rho}, P_{23}, P_{24}), (P_{3\rho}, P_{33}, P_{34}), (P_{4\rho}, P_{43}, P_{44})$$

angehört. Diese Curve liegt auch auf der Fläche **D**, weil diese vier Netze in den gegebenen Systemen sich entsprechen, und die beiden projectivischen Büschel $(\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{12}), (\mathfrak{P}_{21}, \mathfrak{P}_{22})$ erzeugen also einen Ort, der aus der Fläche **P** 2ν-ter Ordnung und der Fläche **D** der 4ν-ten Ordnung zusammengesetzt ist.

Die Doppelpuncte des zusammengesetzten Ortes sind also (151) die Durchschnittspuncte der drei Flächen $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{22}, \mathfrak{P}_{12}$. Diese drei Flächen besitzen aber $4\nu^3$ Berührungspuncte, welche $4.4\nu^3$ Durchschnittspuncten gleichgelten, und also ist die Zahl der Doppelpuncte gleich

$$(3\nu)^3 - 4.4\nu^3 = 11\nu^3 .$$

Nun sind die Doppelpuncte von **P** die ν^3 Durchschnittspuncte der Flächen P_{33}, P_{44}, P_{34} und folglich hat die Fläche **D** eine Zahl von $10\nu^3$ Doppelpuncten, die auf allen zu $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{22}, \mathfrak{P}_{12}$ analogen Flächen liegen.

Da die Fläche **D** zugleich mit **P** vermittelst zweier projectivischer Büschel entsteht, welche einen symmetrischen Complex bilden, so wird sie von den Flächen $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{22}$ und allen ähnlichen längs ebensovielen Charakteristiken $6\nu^2$-ter Ordnung berührt, und die Berührungspuncte zweier Flächen $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{22}$ liegen beide auf ein und derselben Fläche $\mathfrak{P}_{12}$.

Man kann ausserdem **D** *als den Ort der Doppelpuncte der Flächen* $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{22}, \ldots$ *definieren.* Die Doppelpuncte von $\mathfrak{P}_{11}$ sind nämlich (152) diejenigen, welche einer unbegrenzten Zahl von Flächen gemein sind, z. B. diejenigen, welche durch die Paare von projectivischen Flächenbüscheln

$$\begin{array}{ll} \lambda) & (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}) ; \\ \rho) & (P_{32}, P_{33}), (P_{42}, P_{43}) ; \\ \sigma) & (P_{22}, P_{24}), (P_{42}, P_{44}) ; \\ \varkappa) & (P_{22}, P_{23}), (P_{42}, P_{43}) \end{array}$$

erzeugt werden, mit Ausnahme der gemeinschaftlichen Puncte der Flächen P_{42}, P_{43}, P_{44}. Ist also $\mathfrak{x}$ einer dieser Doppelpuncte, so gehen durch $\mathfrak{x}$ zwei entsprechende Flächen A_3, A_4 der Büschel λ), zwei entsprechende Flächen B_3, B_4 der Büschel ρ), zwei entsprechende Flächen C_3, C_4 der Büschel σ) und zwei entsprechende Flächen B_2, B_4 der Büschel $\varkappa$). Die Büschel der Colonne rechts sind in ein und demselben Netze (P_{42}, P_{43}, P_{44}) enthalten, und die Flächen eines Netzes, welche durch ein und denselben Punct $\mathfrak{x}$, der kein Basispunct des Netzes ist, gehen, bilden ein Büschel; folglich gehören die Flächen A_4, B_4, C_4 demselben Büschel an, das in dem vierten gegebenen Systeme enthalten ist. Den Büscheln, welche dem letztern im zweiten und dritten gegebenen Systeme entsprechen, gehören bezüglich die Flächenpaare $(B_2, C_2), (A_3, B_3)$ an; und der Punct $\mathfrak{x}$, der allen diesen Flächen gemein ist, ist daher ein gemeinschaftlicher Basispunct drei entsprechender Netze in drei der gegebenen Systeme (dem zweiten, dritten und vierten). Durch

$\mathfrak{x}$ geht auch eine Fläche des Büschels, welche jenen im ersten Systeme entspricht. Der Punct $\mathfrak{x}$ liegt also in vier entsprechenden Flächen der vier gegebenen Systeme und ist daher ein Punct des Ortes $\mathbf{D}$; w. z. b. w.

156. Wir wollen zuletzt die Fläche $\mathbf{D}$ der $\mu\nu$-ten Ordnung betrachten, die der Ort eines Punctes ist, durch den je μ entsprechende Flächen von μ linearen projectivischen Flächensystemen $(\mu-1)$-ter Stufe und ν-ter Ordnung hindurchgehen. Den Complex der μ Systeme setzen wir vorläufig als nicht symmetrisch voraus; dann erhalten wir durch die Flächen, welche diese Systeme individualisieren, die quadratische Matrix

$$\begin{array}{c} P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{1\mu} \\ P_{21}, P_{22}, \ldots, P_{2\mu} \\ \cdot \quad \cdot \ \cdots \ \cdot \\ \cdot \quad \cdot \ \cdots \ \cdot \\ \cdot \quad \cdot \ \cdots \ \cdot \\ P_{\mu 1}, P_{\mu 2}, \ldots, P_{\mu\mu}\,, \end{array}$$

die μ Zeilen und μ Colonnen besitzt. Die Flächen derselben Zeile gehören demselben Systeme an, während die Flächen derselben Colonne sich entsprechen.

Lassen wir in der Matrix die ρ-te Zeile und σ-te Colonne aus, so erhalten wir einen niederen Complex aus $\mu-1$ niedern projectivischen Systemen $(\mu-2)$-ter Stufe. Wir wollen durch $\mathbf{D}_{\rho\sigma}$ die Fläche $(\mu-1)\nu$-ter Ordnung bezeichnen, die von ihnen erzeugt wird (144).

Lässt man nur die σ-te Colonne aus, so erhält man einen Complex von μ niedern projectivischen Systemen der $(\mu-2)$-ten Stufe; es sei hier k_σ die Curve der $\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\nu^2$-ten Ordnung, die sie erzeugen (147), eine Curve, die offenbar auf $\mathbf{D}$ liegt und auf allen Flächen $\mathbf{D}_{1\sigma}, \mathbf{D}_{2\sigma}, \ldots, \mathbf{D}_{\mu\sigma}$.

Lassen wir nur die ρ-te Zeile in derselben Matrix aus, so behalten wir $\mu-1$ projectivische Systeme $(\mu-1)$-ter Stufe übrig. Es sei l_ρ die von ihnen erzeugte Curve (147) der Ordnung:

$$\left[(\mu-1)^2 - \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2}\right]\nu^2 = \frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}\nu^2\,.$$

Diese Curve liegt auf $\mathbf{D}$ und auf allen Flächen $\mathbf{D}_{\rho 1}, \mathbf{D}_{\rho 2}, \ldots, \mathbf{D}_{\rho\mu}$.

Vertauschen wir jetzt in der gegebenen Matrix die Zeilen mit den Colonnen, so dass wir die neue Matrix

$$\begin{array}{c} P_{11}, P_{21}, \ldots, P_{\mu 1} \\ P_{12}, P_{22}, \ldots, P_{\mu 2} \\ \cdot \quad \cdot \ \cdots \ \cdot \\ \cdot \quad \cdot \ \cdots \ \cdot \\ \cdot \quad \cdot \ \cdots \ \cdot \\ P_{1\mu}, P_{2\mu}, \ldots, P_{\mu\mu} \end{array}$$

erhalten, so stellt diese einen neuen Complex von μ linearen projectivischan Systemen der $(\mu-1)$-ten Stufe dar[1]). Es sei $\mathfrak{C}$ die Fläche $\mu\nu$-ter Ordnung, die diese Systeme erzeugen, und man bezeichne durch $\mathfrak{C}_{\rho\sigma}$ die Fläche der $(\mu-1)\nu$-ten Ordnung, die aus der inversen Matrix auf dieselbe Weise entsteht, wie $\mathbf{D}_{\rho\sigma}$ aus der primitiven Matrix erhalten wurde; durch h_ρ, m_σ aber die zu k_σ, l_ρ analogen Curven.

Nimmt man an, es sei $\mathbf{D}_{\rho\sigma}$ und $\mathfrak{C}_{\rho\sigma}$ eine einzige Fläche, dann fällt auch die Curve k_σ, die den Flächen $\mathbf{D}_{1\sigma}, \mathbf{D}_{2\sigma}, \ldots, \mathbf{D}_{\mu\sigma}$ gemein ist, mit der Curve m_σ zusammen, die den Flächen $\mathfrak{C}_{\sigma 1}, \mathfrak{C}_{\sigma 2}, \ldots, \mathfrak{C}_{\sigma\mu}$ gemeinschaftlich angehört; und in ähnlicher Weise fällt l_ρ mit h_ρ zusammen. Folglich haben die Flächen $\mathbf{D}$ und $\mathfrak{C}$ alle Curven k und l gemein, und fallen daher in eine einzige Fläche zusammen, die von $\mathbf{D}_{\rho\sigma}$ in zwei Curven k_σ, h_ρ beide von der Ordnung $\frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}\nu^2$ geschnitten wird. Die eine derselben liegt auf allen Flächen $\mathbf{D}_{1\sigma}, \mathbf{D}_{2\sigma}, \ldots$, die andere auf allen Flächen $\mathbf{D}_{\rho 1}, \mathbf{D}_{\rho 2}, \ldots$ Die angenommene Voraussetzung ist aber für $\mu = 2$ und $\mu = 3$ bewiesen (152, 154); folglich gilt sie allgemein.

Lassen wir in der gegebenen Matrix die ρ-te und σ-te Colonne aus, so erhalten wir μ niedere projectivische Systeme $(\mu-3)$-ter Stufe, und die Zahl der von ihnen erzeugten Puncte ist (149)

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\nu^3 .$$

Diese Puncte sind offenbar h_ρ und k_σ gemein, und daher wird in diesen Puncten die Fläche $\mathbf{D}$ von der Fläche $\mathbf{D}_{\rho\sigma}$ berührt.

157. Es sei jetzt der durch die gegebene Matrix dargestellte Complex symmetrisch, das heisst es sei $P_{\rho\sigma} \equiv P_{\sigma\rho}$, und daher auch $\mathbf{D}_{\rho\sigma} \equiv \mathbf{D}_{\sigma\rho}$, $h_\rho \equiv k_\rho$. Jetzt fallen die beiden Curven, in denen die Fläche $\mathbf{D}_{\rho\rho}$ die Fläche $\mathbf{D}$ schneidet, in eine einzige Curve zusammen, das heisst $\mathbf{D}_{\rho\rho}$ berührt $\mathbf{D}$ längs einer Curve k_ρ der $\frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}\nu^2$-ten Ordnung, die allen Flächen $\mathbf{D}_{1\rho}$, $\mathbf{D}_{2\rho}, \ldots, \mathbf{D}_{\mu\rho}$ gemein ist, und folglich schneidet $\mathbf{D}_{\rho\sigma}$ die Fläche $\mathbf{D}$ in zwei Curven k_ρ, k_σ, welche die Berührungscurven (Charakteristiken) zwischen $\mathbf{D}$ und $\mathbf{D}_{\rho\rho}$ und $\mathbf{D}_{\sigma\sigma}$ sind.

Die beiden Flächen $\mathbf{D}_{\rho\rho}, \mathbf{D}_{\sigma\sigma}$ schneiden sich ausser in der Curve k_ρ, die sie mit $\mathbf{D}$ gemein haben, in einer andern Curve von der Ordnung $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2}\nu^2$, die durch die $\mu-1$ niedern projectivischen Systemen $(\mu-3)$-ter Stufe erzeugt wird, die man erhält, wenn man in der gegebenen Matrix die ρ-te Zeile und die ρ-te und σ-te Colonne weglässt. Diese Curve liegt offenbar auch auf der Fläche $\mathbf{X}$ der $(\mu-2)\nu$-ten Ordnung, die von den $\mu-2$ niedern projectivischen Systemen $(\mu-3)$-ter Stufe erzeugt wird, welche da-

[1]) In Betreff der Bestimmung des projectivischen Entsprechens der neuen Systeme sehe man den Schluss der No. 154.

durch entstehen, dass man die ρ-te und σ-te Zeile und die ρ-te und σ-te Colonne in der vorgelegten Matrix auslässt.

Dieselbe Eigenschaft lässt sich für jedes Paar entsprechender Flächen der Büschel $(\mathbf{D}_{\rho\rho}, \mathbf{D}_{\rho\sigma}), (\mathbf{D}_{\sigma\rho}, \mathbf{D}_{\sigma\sigma})$ nachweisen, die projectivisch sind, da sie (155) beide dem Büschel $(P_{\mu\sigma}, P_{\mu\rho})$ projectivisch sind. Die beiden vorgenannten Büschel erzeugen also einen aus den beiden Flächen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{D}$ zusammengesetzten Ort. Da dieselben beiden Büschel einen symmetrischen Complex bilden, so sind (151) die Doppelpuncte des zusammengesetzten Ortes die gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der drei Flächen $\mathbf{D}_{\rho\rho}$, $\mathbf{D}_{\sigma\sigma}, \mathbf{D}_{\rho\sigma}$.

Nun ist $\mathbf{X}$ dasselbe in Bezug auf die beiden Flächen $\mathbf{D}_{\rho\rho}, \mathbf{D}_{\sigma\sigma}$, was diese in Bezug auf $\mathbf{D}$ sind; folglich berührt $\mathbf{X}$ die $\mathbf{D}_{\rho\rho}, \mathbf{D}_{\sigma\sigma}$ längs zweier Curven jede von der Ordnung $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1 \,.\, 2}\nu^3$, die man durch die Complexe der niedern Systeme erzeugen kann, welche man aus der gegebenen Matrix erhält, wenn man in beiden die ρ-te und σ-te Zeile und bezüglich die ρ-te und σ-te Colonne auslässt. Die nämlichen beiden Curven bilden auch den Durchschnitt zwischen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{D}_{\rho\sigma}$, wie man beweisen kann, indem man auf diese beiden Flächen das Raisonnement anwendet, das man oben (156) bei den Flächen $\mathbf{D}_{\rho\sigma}$ und $\mathbf{D}$ benutzt hat. Die drei Flächen $\mathbf{D}_{\rho\rho}, \mathbf{D}_{\sigma\sigma}, \mathbf{D}_{\rho\sigma}$ werden daher von ein und derselben Fläche $\mathbf{X}$ berührt, und berühren sich daher selbst untereinander in den

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\nu^3$$

gemeinschaftlichen Puncten der obigen beiden Curven, das heisst, in den Puncten, die durch die niedern Systeme erzeugt werden, welche die vorgelegte Matrix liefert, wenn man die ρ-te und σ-te Zeile auslässt. Jeder dieser Berührungspuncte zählt für vier Durchschnittspuncte, und folglich ist die gemeinschaftliche Zahl der Doppelpuncte von $\mathbf{D}$ und $\mathbf{X}$ gleich

$$\left[(\mu-1)^3-4\,.\,\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\right]\nu^3 = \frac{\mu(\mu^2-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\nu^3 + \frac{(\mu-2)[(\mu-2)^2-1]}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\nu^3 \,.$$

Wir haben somit den Satz: *Die durch μ lineare projectivische Systeme $(\mu-1)$-ter Stufe und ν-ter Ordnung, die einen symmetrischen Complex bilden, erzeugte Fläche* $\mathbf{D}$ *hat* $\frac{\mu(\mu^2-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\nu^3$ *Doppelpuncte* [1].

Wie im Falle $\mu=3$ oder $\mu=4$ (152, 155) würde man noch beweisen können, *dass* $\mathbf{D}$ *auch der Ort der Doppelpuncte der zu* $\mathbf{D}_{\rho\rho}$ *analogen Flächen ist.*

---

[1]) SALMON, *a. a. O*, S. 496.

CAPITEL X.

EIGENSCHAFTEN DER CONJUGIERTEN KERNFLÄCHEN.

158. Wir kehren zu der Betrachtung der Fundamentalfläche F_ν der ν-ten Ordnung zurück, die wir als ganz allgemein, also ohne vielfache Puncte voraussetzen. Wir haben gesehen (88), dass die ersten Polarflächen aller Puncte des Raumes ein lineares System im engern Sinne der $(\nu-1)$-ten Ordnung bilden. Die Jacobiana dieses Systems, das heisst der Ort der Doppelpuncte der ersten Polarflächen, oder auch (90) der Ort der Puncte, deren Quadripolarflächen Kegel sind, ist (139) eine Fläche der $4(\nu-2)$-ten Ordnung. Man nennt diese Fläche die *Hessiana* oder die *Kernfläche* der Fundamentalfläche.

Es seien P_1, P_2, P_3, P_4 die ersten Polarflächen vier beliebiger Puncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$, die nicht in derselben Ebene liegen; man kann dann (139) die Hessiana als Jacobiana dieser vier Flächen $(\nu-1)$-ter Ordnung ansehen Die ersten Polarflächen aller Puncte des Raumes in Bezug auf diese vier Flächen bilden nun (83) einen symmetrischen Complex aus vier linearen projectivischen Systemen dritter Stufe und $(\nu-2)$-ter Ordnung. Man hat dadurch den Satz:

Die Hessiana besitzt $10(\nu-2)^3$ *Doppelpuncte, die auf einer unbegrenzten Zahl von Flächen* $3(\nu-2)$*-ter Ordnung* $(\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{12}, \ldots)$ *liegen.*

Wir bezeichnen durch $P_{\rho\sigma}$ die zweite gemischte Polarfläche der beiden Puncte $\mathfrak{a}_\rho, \mathfrak{a}_\sigma$ und bedienen uns im Uebrigen der schon oben (155) angewendeten Symbole. Man sieht dann sogleich, *dass* $\mathfrak{P}_{12}$ *der Ort der Pole der Ebene* $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ *ist in Bezug auf die ersten Polarflächen der Puncte der Ebene* $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ (128), *und auch der Ort der Pole der Ebene* $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ *in Bezug auf die ersten Polarflächen der Puncte der Ebene* $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$. Wenn aber (83) die Ebene $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ die $(\nu-2)$-te Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{x}$ ist in Bezug auf die erste Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{a}_\rho$ der Ebene $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$, so ist dieselbe Ebene $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ auch die erste Polarfläche von $\mathfrak{a}_\rho$ in Bezug auf die $(\nu-2)$-te Polarfläche von $\mathfrak{x}$, das heisst, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ ist die Polarebene von $\mathfrak{a}_\rho$ in Bezug auf die Quadripolarfläche von $\mathfrak{x}$. $\mathfrak{P}_{12}$ *ist also der Ort eines Punctes* $\mathfrak{x}$, *für den die Ebenen* $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ *in Bezug auf die Quadripolarfläche von* $\mathfrak{x}$ *conjugiert sind* [1]).

Man hat den speciellen Fall: $\mathfrak{P}_{11}$ *ist der Ort der Pole der Ebene*

---

1) Der Schnitt von $\mathfrak{P}_{11}$ durch eine der Ebenen $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ ist offenbar der Ort der Berührungspuncte der einen Ebene mit den ersten Polarflächen der Puncte der andern.

$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ *in Bezug auf die ersten Polarflächen der Puncte derselben Ebene und auch der Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche die Ebene* $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ *berührt;* $\mathfrak{P}_{22}$ wird die nämliche Bedeutung in Bezug auf die Ebene $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ haben. Wir nennen die Flächen $\mathfrak{P}_{11}, \mathfrak{P}_{22}$ *gemeine Polarflächen* der respectiven Ebenen $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ und die Fläche $\mathfrak{P}_{12}$ die *gemischte Polarfläche* derselben beiden Ebenen. Wir haben so (155) den Satz:

Die Hessiana wird von der gemeinen Polarfläche einer beliebigen Ebene längs einer Raumcurve $6(\nu-2)^2$*-ter Ordnung berührt, welche der Ort der Doppelpuncte der ersten Polarflächen ist, deren Pole in der gegebenen Ebene liegen. Die beiden Berührungscurven der Hessiana mit den gemeinen Polarflächen zwei beliebiger Ebenen liegen beide auf der gemischten Polarfläche dieser beiden Ebenen. Alle gemeinen und gemischten Polarflächen und folglich auch alle derartigen Raumcurven* $6(\nu-2)^2$*-ter Ordnung gehen durch die* $10(\nu-2)^3$ *Doppelpuncte der Hessiana.*

159. Die gemeine Polarfläche $\mathfrak{P}$ einer beliebigen Ebene $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ hat $4(\nu-2)^3$ Doppelpuncte (152), die auf einer unbegrenzten Zahl von Flächen $2(\nu-2)$-ter Ordnung ($\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \ldots$) liegen. Sind $\mathfrak{a}_\rho, \mathfrak{a}_\sigma$ zwei auf einer gegebenen Geraden fixierte Puncte, und ist $\mathfrak{a}_\xi$ ein auf einer andern Geraden g beweglicher Punct, so bilden die Flächen $P_{\rho\xi}, P_{\sigma\xi}$ zwei projectivische Büschel, *die eine Fläche* $\mathbf{P}$ *der* $2(\nu-2)$*-ten Ordnung erzeugen, welche der Ort der Polarcurven* $(\nu-2)^2$*-ter Ordnung der Geraden* $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$ *in Bezug auf die ersten Polarflächen der Puncte von* g *ist* (86). Wenn aber (84) die ersten Polarflächen von $\mathfrak{a}_\rho, \mathfrak{a}_\sigma$ in Bezug auf die erste Polarfläche von $\mathfrak{a}_\xi$ durch einen Punct $\mathfrak{a}_\eta$ gehen, so geht umgekehrt die erste Polarfläche von $\mathfrak{a}_\xi$ in Bezug auf die $(\nu-2)$-te Polarfläche von $\mathfrak{a}_\eta$ durch $\mathfrak{a}_\rho, \mathfrak{a}_\sigma$, das heisst, die Polarebene von $\mathfrak{a}_\xi$ in Bezug auf die Quadripolarfläche von $\mathfrak{a}_\eta$ geht durch die Gerade $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$. $\mathbf{P}$ *ist daher der Ort eines Punctes* $\mathfrak{a}_\eta$, *für den die in Bezug auf die Quadripolarfläche von* $\mathfrak{a}_\eta$ *Conjugierte von* g *durch die Gerade* $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$ *geschnitten wird.* In dieser Definition kann man offenbar die Geraden $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$ und g mit einander vertauschen, und $\mathbf{P}$ *ist also auch der Ort der Polarcurven von* g *in Bezug auf die ersten Polarflächen der Puncte von* $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$. Nach dem Vorhergehenden schneidet die Fläche $P_{\rho\xi}$ die Fläche $\mathbf{P}$ in zwei Curven $(\nu-2)^2$-ter Ordnung deren eine die Polarcurve der Geraden $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$ in Bezug auf die erste Polarfläche des Punctes $\mathfrak{a}_\xi$ von g, und die andere die Polarcurve von g in Bezug auf die erste Polarfläche des Punctes $\mathfrak{a}_\rho$ der Geraden $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$ ist. Die $(\nu-2)^2$ gemeinschaftlichen Puncte dieser beiden Curven sind aber ebensoviele Berührungspuncte zwischen $P_{\rho\xi}$ und $\mathbf{P}$, und $\mathbf{P}$ *ist daher auch die einhüllende Fläche der zweiten gemischten Polarfläche zweier beweglicher Pole, eines auf* g, *des anderen auf* $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$. Wir nennen diese Fläche $\mathbf{P}$ die *gemischte Polarfläche* der Geraden g und $\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_\sigma$.

Für die Fläche $\mathfrak{P}$ sieht man leicht, dass die $\mathbf{P}_{12}$ die gemischte Polarfläche der Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ ist. $\mathbf{P}_{11}$ hat ebenso die nämliche Bedeutung in Bezug auf zwei zusammenfallende Geraden, das heisst, $\mathbf{P}_{11}$ *ist der Ort* *der Pole, deren Quadripolarflächen die Gerade* $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ *berühren,* u. s. w. Wir nennen diesen Ort die *gemeine Polarfläche* der Geraden $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$. Aus Allem erhält man schliesslich (152):

Die gemeine Polarfläche einer gegebenen Ebene wird von der gemeinen Polarfläche einer beliebigen in dieser Ebene gelegenen Geraden längs einer Raumcurve $3(\nu-2)^2$*-ter Ordnung berührt, die der Ort der Pole der Ebene in Bezug auf die ersten Polarflächen der Puncte der Geraden ist. Die beiden Berührungscurven zwischen der Polarfläche der Ebene und den gemeinen Polarflächen zweier Geraden, die in dieser Ebene gezogen sind, liegen auf der gemischten Polarfläche der beiden Geraden. Alle jene gemeinen und gemischten Polarflächen der Geraden der Ebene, und folglich auch alle obigen Raumcurven* $3(\nu-2)^2$*-ter Ordnung gehen durch die* $4(\nu-2)^3$ *Doppelpuncte der Polarfläche der gegebenen Ebene.*

160. Die Fläche $P_{\rho\sigma}$, zweite gemischte Polarfläche der Puncte $\mathfrak{a}_\rho$, $\mathfrak{a}_\sigma$ lässt selbst wieder eine Definition zu, die derjenigen für die Flächen $\mathfrak{P}_{12}$ und $\mathbf{P}_{12}$ analog ist. Geht nämlich die erste Polarfläche von $\mathfrak{a}_\rho$ in Bezug auf die erste Polarfläche von $\mathfrak{a}_\sigma$ durch einen Punct $\mathfrak{a}_\xi$, so geht umgekehrt (84) die erste Polarfläche von $\mathfrak{a}_\sigma$ in Bezug auf die $(\nu-2)$-te Polarfläche von $\mathfrak{a}_\xi$ durch $\mathfrak{a}_\rho$, das heisst, die Polarebene von $\mathfrak{a}_\sigma$ in Bezug auf die Quadripolarfläche von $\mathfrak{a}_\xi$ geht durch $\mathfrak{a}_\rho$. $\mathbf{P}_{\rho\sigma}$ *ist also der Ort eines Punctes* $\mathfrak{a}_\xi$, *für den die Puncte* $\mathfrak{a}_\rho$, $\mathfrak{a}_\sigma$ *in Bezug auf die Quadripolarfläche von* $\mathfrak{a}_\xi$ *conjugiert sind.* Fallen die Puncte $\mathfrak{a}_\rho$, $\mathfrak{a}_\sigma$ zusammen, so kommt man auf die Erklärung von $P_{\rho\rho}$ zurück (*gemeine zweite Polarfläche* des Punctes $\mathfrak{a}_\rho$).

161. Die gemeine Polarfläche $\mathbf{P}$ einer beliebigen Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ hat $(\nu-2)^3$ Doppelpuncte (151), die in einer unbegrenzten Zahl von Flächen $(\nu-2)$-ter Ordnung (P_{11}, P_{12}, ...) liegen. Man wird so auf folgenden Satz geführt:

Die gemeine Polarfläche einer gegebenen Geraden wird von der zweiten gemeinen Polarfläche eines beliebigen Punctes dieser Geraden längs einer Raumcurve $(\nu-2)^2$*-ter Ordnung berührt, welche die Polarcurve der Geraden in Bezug auf die erste Polarfläche des Punctes ist. Die beiden Berührungscurven zwischen der Polarfläche der Geraden und den zweiten gemeinen Polarflächen zweier beliebiger Puncte der nämlichen Geraden liegen auf der zweiten gemischten Polarfläche beider Puncte. Alle jene gemeinen und gemischten Polarflächen der Puncte der Geraden, und folglich auch alle obigen Curven* $(\nu-2)^2$*-ter Ordnung gehen durch die* $(\nu-2)^3$ *Doppelpuncte der Polarfläche der gegebenen Geraden.*

162. Aus dem Vorhergehenden (159, 161) folgert man: *Die gemeine Polarfläche einer Ebene ist die einhüllende Fläche der gemeinen Polarflächen der Geraden in dieser Ebene,* und: *Die gemeine Polarfläche einer Geraden ist die einhüllende Fläche der gemeinen zweiten Polarflächen der Puncte dieser*

Geraden. Man kann noch hinzufügen (152, 155). *Die gemeinen und gemischten Polarflächen zweier Geraden, die in derselben Ebene liegen, werden von der zweiten gemeinen Polarfläche des Durchschnittspunctes dieser Geraden in den nämlichen* $(\nu-2)^3$ *Puncten berührt.* (Es folgt daraus noch, dass *die gemeine Polarfläche einer Ebene auch die einhüllende Fläche der gemeinen zweiten Polarflächen der Puncte der Ebene ist*); und: die gemeinen und gemischten Polarflächen zweier Ebenen werden von der gemeinen Polarfläche der gemeinschaftlichen Geraden beider Ebenen in denselben $4(\nu-2)^3$ Puncten berührt. Ausserdem auch noch (153): Die Raumcurve $3(\nu-2)^2$-ter Ordnung, Ort der Pole einer gegebenen Ebene in Bezug auf die ersten Polarflächen der Puncte einer gegebenen Geraden, liegt auf der gemischten Polarfläche dieser Ebene und einer beliebigen andern Ebene, welche durch die gegebene Gerade geht, und ebenso auf der gemischten Polarfläche dieser Geraden und einer andern beliebigen Geraden, die in der gegebenen Ebene liegt. U. s. w.; u. s. w.

163. Die ersten Polarflächen der Puncte einer beliebigen Geraden bilden ein Büschel, welches $4(\nu-2)^3$ Flächen enthält, die einen Doppelpunct besitzen (125). Folglich der Satz:

Der Ort der Pole, deren erste Polarflächen einen Doppelpunct haben, ist eine Fläche $4(\nu-2)^3$*-ten Ordnung.*

Man nennt sie *conjugierte Kernfläche* oder *Steineriana.*

Wir können sagen (90), *die Hessiana ist der Ort der Puncte, deren Quadripolarflächen Kegel sind,* und *die Steineriana ist der Ort der Scheitel dieser Kegel.*

Die Hessiana und die Steineriana entsprechen sich Punct für Punct. Ist $\mathfrak{o}$ ein Doppelpunct der ersten Polarfläche eines Punctes $\mathfrak{o}'$, das heisst, ist $\mathfrak{o}$ der Pol eines Quadrikegels mit dem Scheitel $\mathfrak{o}'$, so sind die Puncte $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ zwei entsprechende Puncte der *Hessiana* und *Steineriana.*

164. *Die Hessiana ist auch der Ort der Berührungspuncte zwischen den ersten Polarflächen* (133). Es seien $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ zwei entsprechende Puncte der beiden conjugierten Kernflächen, dann bestimmt die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}'$ in Gemeinschaft mit einer andern ersten Polarfläche, die durch $\mathfrak{o}$ geht, ein Flächenbüschel, dessen Flächen in $\mathfrak{o}$ von derselben Ebene E berührt werden. Jeder Punct $\mathfrak{p}$, der dieser Ebene und der Polarebene von $\mathfrak{o}$ gemein ist, besitzt eine zweite Polarfläche, die durch $\mathfrak{o}$ geht — die Gerade $\mathfrak{po}$ ist in der That Tangente der ersten Polarfläche von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{o}$. — Nun besitzt der Punct $\mathfrak{o}'$ aber selbst diese Eigenschaft, also liegt $\mathfrak{o}'$ auf dem Durchschnitt der Ebene E mit der Polarebene von $\mathfrak{o}$, das heisst, *die Ebene E geht stets durch die Gerade* $\mathfrak{oo}'$.

165. Es seien $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}_1$ zwei unendlich nahe Puncte der Hessiana; $\mathfrak{o}', \mathfrak{o}'_1$ die ihnen entsprechenden Puncte der Steineriana. Sobald die ersten Polarflächen von $\mathfrak{o}', \mathfrak{o}'_1$ unmittelbar aufeinander folgen und je einen Doppelpunct

$\mathfrak{o}, \mathfrak{o}_1$ besitzen, geht ihre Durchschnittscurve durch $\mathfrak{o}$, und folglich muss die Polarebene von $\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{o}'\mathfrak{o}'_1$ gehen, welche Gerade die Steineriana in $\mathfrak{o}'$ berührt. Dies ist stets richtig, was auch die Richtung dieser Tangente ist, *und folglich ist die Polarebene eines Punctes der Hessiana Tangentialebene der Steineriana im entsprechenden Puncte.*

Man leitet hieraus ab, dass *die Steineriana eine Fläche von der* $4(\nu-1)^2(\nu-2)$-*ten Classe ist*, denn dies ist die Zahl der Durchschnittspuncte der Hessiana mit der Polarcurve einer beliebigen Geraden.

166. Die Pole einer Ebene in Bezug auf die Fundamentalfläche sind (87) die $(\nu-1)^3$ Durchschnittspuncte der ersten Polarflächen dreier Puncte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ dieser Ebene. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Punct der Steineriana, und $\mathfrak{abc}$ die Tangentialebene dieser Fläche in $\mathfrak{a}$; in diesem Falle besitzt die erste Polarfläche von $\mathfrak{a}$ einen Doppelpunct $\mathfrak{a}'$, und die ersten Polarflächen von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gehen durch $\mathfrak{a}'$. Daraus folgt der Satz: *Die Tangentialebene der Steineriana hat in einem ihrer Puncte zwei mit dem correspondierenden Puncte der Hessiana zusammenfallende Pole.*

167. Ein Doppelpunct $\mathfrak{w}$ der Hessiana liegt auf der gemischten Polarfläche zweier beliebiger Ebenen (158), das heisst, es gibt auf einer beliebigen Ebene einen solchen Punct, dass die Polarebene von $\mathfrak{w}$ in Bezug auf die erste Polarfläche dieses Punctes unbestimmt ist, oder anders ausgedrückt: es gibt in einer beliebigen Ebene einen Punct, dessen erste Polarfläche in $\mathfrak{w}$ einen Doppelpunct hat. Folglich ist $\mathfrak{w}$ ein Doppelpunct einer unbegrenzten Zahl erster Polarflächen, deren Pole, die natürlich der Steineriana angehören, (163) in gerader Linie liegen, denn es gibt einen solchen Pol in jeder beliebigen Ebene. *Dem Puncte* $\mathfrak{w}$ *entspricht also auf der Steineriana* anstatt eines einzigen Punctes *eine Gerade*, von der daher jeder Punct für die Quadripolarfläche von $\mathfrak{w}$ ein Doppelpunct ist. Das heisst: *Die Quadripolarfläche von* $\mathfrak{w}$ *ist ein Ebenenpaar, welches durch diese Gerade geht, und die Polarebene von* $\mathfrak{w}$ *berührt die Steineriana längs dieser ganzen Geraden.*

Man hat folglich den Satz:

Die Steineriana enthält $10(\nu-2)^3$ *Gerade, die einzeln den Doppelpuncten der Hessiana entsprechen.*

168. Zwei bezüglich auf der Hessiana und Steineriana gelegene Curven kann man *entsprechend* nennen, sobald die eine der Ort der entsprechenden Puncte der Puncte der andern ist. So sind zum Beispiel die ebene Curve $4(\nu-2)^3$-ter Ordnung, in der die Steineriana durch eine beliebige Ebene E geschnitten wird, und die Raumcurve $6(\nu-2)^2$-ter Ordnung, längs deren die Hessiana von der gemeinen Polarfläche von E berührt wird (158), zwei entsprechende Curven, weil die zweite Curve der Ort der Doppelpuncte der ersten Polarflächen der Puncte von E ist.

Man kann auch sehr leicht die Curve bestimmen, welche der Durchschnittscurve der Hessiana mit einer beliebigen Fläche S_μ der μ-ten Ordnung entspricht. Es sei K die einhüllende Fläche der Polarebenen der Puncte von S_μ, eine Fläche, die auch der Ort der Puncte ist, deren erste Polarflächen S_μ berühren (94). Ist $\mathfrak{o}$ ein gemeinschaftlicher Punct von S_μ und der Hessiana, so berührt die Polarebene von $\mathfrak{o}$ gleichzeitig K und die Steineriana im entsprechenden Puncte $\mathfrak{o}'$ (165). Nun berührt die erste Polarfläche von $\mathfrak{o}'$, da sie in $\mathfrak{o}$ einen Doppelpunct besitzt, S_μ in diesem Puncte; $\mathfrak{o}'$ gehört also auch K an, und folglich haben die Steineriana und die Fläche K einen Berührungspunct in $\mathfrak{o}$. *K berührt daher die Steineriana längs der Curve, welche der Durchschnittscurve der Hessiana mit S_μ entspricht* [1]).

Die Puncte, in denen diese Berührungscurve von einer beliebigen Ebene geschnitten wird, entsprechen den gemeinschaftlichen Puncten von S_μ und einer Curve $6(\nu-2)^2$-ter Ordnung. *Die Ordnung der Berührungscurve ist daher* $6\mu(\nu-2)^2$.

Man kann auch nach der Ordnung von K fragen. Die Puncte, in denen diese Fläche von einer beliebigen Geraden getroffen wird, sind die Pole ebensovieler Flächen eines Büschels, welche S_μ berühren; folglich (137) *ist K von der Ordnung*

$$\mu[3(\nu-2)^2+(\mu-1)^2+2(\nu-2)(\mu-1)] \ .$$

Ist $\mu=1$, so ist K, Ort eines Punctes, dessen erste Polarfläche eine gegebene Ebene berührt, von der Ordnung $3(\nu-2)^2$, wie man schon früher (94) gefunden hat.

169. Wir haben oben (69) gesehen, dass die Quadripolarfläche eines parabolischen Punctes der Fundamentalfläche ein Kegel ist. Umgekehrt ist es klar, dass jeder Punct der Fundamentalfläche, dessen Quadripolarfläche ein Kegel ist, der aber seinen Scheitel nicht im Pole haben darf, da man sonst einen Doppelpunct hätte, ein parabolischer Punct sein muss. *Folglich ist der Ort der parabolischen Puncte diejenige Raumcurve $4\nu(\nu-2)$-ter Ordnung, welche den Durchschnitt der Fundamentalfläche mit der Hessiana darstellt.* Diese Curve theilt natürlich die Fläche F_ν in zwei Regionen, deren eine die hyperbolischen Puncte, die andern die elliptischen Puncte enthält. (25. *Anmerkung* [2])). Das heisst, die Tangentialebene eines Punctes der Fundamentalfläche F_ν schneidet diese in einer Curve, für die der Berührungspunct ein Knotenpunct oder ein isolierter Punct ist, jenachdem derselbe der ersten oder zweiten Region angehört.

170. Eine Tangentialebene von F_ν ist stationär, wenn der Berührungspunct parabolisch ist. Nun trifft die erste Polarfläche eines beliebigen Punctes des Raumes die parabolische Curve in $4\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Puncten; die Zahl drückt

---

[1]) Das nämliche Raisonnement zeigt, dass auch die developpable Polarfläche einer Geraden die Steineriana in den entsprechenden Puncten der Durchschnittspuncte der Hessiana mit dieser Geraden berührt. Dieselbe Eigenschaft gilt für eine beliebige Curve.

also aus, wieviel stationäre Ebenen durch den beliebigen Punct gehen, wie man schon anderweitig gefunden (67).

171. Man setze jetzt voraus, die Fundamentalfläche F_ν enthalte eine Gerade a. Eine beliebig durch a gelegte Ebene schneidet F_ν in einer Curve $(\nu-1)$-ter Ordnung; und eine Fläche $(\nu-1)$-ter Ordnung, die man ebenfalls beliebig durch diese Curve legt, schneidet F_ν nochmals in einer Raumcurve c der $(\nu-1)^2$-ten Ordnung, die man als Basis eines Büschels $(\nu-1)$-ter Ordnung nehmen kann. Eine beliebige Fläche S dieses Büschels schneidet F_ν in einer ebenen Curve $(\nu-1)$-ter Ordnung, deren Ebene E durch die Gerade a geht, denn die letztere Curve muss die $\nu-1$ Durchschnittspuncte von S und a enthalten. Man kann also F_ν mit Hilfe zweier projectivischer Büschel erzeugen, eins das Büschel der Ebenen E durch a, das andere der Flächen S durch c.

Jede Ebene E berührt F_ν in $\nu-1$ Puncten, nämlich in den Puncten, in denen a die E entsprechende Fläche S trifft, denn diese Puncte sind für die Schnittcurve von F_ν und E Doppelpuncte. Man kann die Zahl der Ebene E verlangen, welche F_ν ausserhalb der Geraden a berühren. Eine Ebene E beliebig durch a gelegt berührt $3(\nu-2)^2$ Flächen S', denn diese bilden ein Büschel, denen ebensoviel Ebenen E' entsprechen. Umgekehrt ist die einer beliebigen Ebene E' entsprechende Fläche S' von der Classe $(\nu-1)(\nu-2)^2$ und wird also von ebensovielen Geraden E berührt. Es geschieht also $3(\nu-2)^2+(\nu-1)(\nu-2)^2$ mal, das zwei Ebenen E und E' zusammenfallen; das heisst, *es gibt* $(\nu+2)(\nu-2)^2$ *Ebenen* E, *deren jede* F_ν *in einer Curve* $(\nu-1)$-*ter Ordnung mit einem Doppelpuncte schneidet.*

In dem Büschel der Flächen S gibt es $2(\nu-2)$, welche a berühren. Die Berührungspuncte sind die Doppelpuncte der Involution $(\nu-1)$-ten Gerades, die durch die Flächen S auf a erzeugt wird, oder, was dasselbe ist, durch die Curven $(\nu-1)$-ter Ordnung, die den Durchschnitt von F_ν mit den Ebenen E bilden. Diese $2(\nu-2)$ Puncte sind die einzigen parabolischen Puncte, die sich auf a befinden; denn, ist ein Punct von a parabolisch, so muss die Tangentialebene E von F_ν in diesem Puncte letztere Fläche längs einer Curve $(\nu-1)$-ter Ordnung schneiden, die in obigem Puncte durch a berührt wird. Da aber andererseits die Hessiana von der $4(\nu-2)$-ten Ordnung ist, so müssen die $2(\nu-2)$ genannten Puncte die $4(\nu-2)$ Durchschnittspuncte dieser Fläche mit der Geraden a repräsentieren. Daher der Satz:

Jede Gerade, die auf der Fundamentalfläche liegt, berührt die Hessiana in $2(\nu-2)$ *Puncten und folglich auch die parabolische Curve.*

172. Was ist die Ordnung des Ortes der Paare osculierender Geraden der Fundamentalfläche in den Puncten der Durchschnittscurve dieser Fläche mit einer andern Fläche S_μ der μ-ten Ordnung? Erinnern wir uns, dass die Osculierenden in einem Puncte von F_ν den Durchschnitt der Polarebene mit der Quadripolarfläche dieses Punctes bilden (69). Es sei daher g eine

beliebige Gerade; x ein beliebiger Punct dieser Geraden. Wenn eine Quadripolarfläche durch x geht, so ist der Ort des Poles die zweite Polarfläche von x, welche die Curve $(\mu\nu)$ in $\mu\nu(\nu-2)$ Puncten schneidet; und die Polarebenen dieser Puncte treffen g in $\mu\nu(\nu-2)$ Puncten x'. Umgekehrt haben die Polarebenen, die durch einen beliebigen Punct x' von g gehen, ihre Pole auf der ersten Polarfläche von x', welche die Curve $(\mu\nu)$ in $\mu\nu(\nu-1)$ Puncten treffen, deren Quadripolarflächen $2\mu\nu(\nu-1)$ Puncte x auf g bestimmen. Es gibt also auf g

$$\mu\nu(\nu-2)+2\mu\nu(\nu-1)=\mu\nu(3\nu-4)$$

Puncte, in denen ein Punct x mit einem Puncte x' zusammenfällt. Man erhält so den Satz:

Der Ort der Osculierenden der Fundamentalfläche in den Puncten der Durchschnittscurve derselben mit einer andern Fläche S_μ μ-ter Ordnung ist eine Fläche der $\mu\nu(3\nu-4)$-ten Ordnung.

Für diese im Allgemeinen windschiefe Fläche ist die Curve $(\mu\nu)$ doppelt, denn jeder Punct derselben ist der Durchschnitt zweier gradliniger Generatrixen. Ist $\mu=1$, so schneidet der fragliche Ort die Ebene S in dem Schnitte der Fläche F_ν durch S und in den $3\nu(\nu-2)$ stationären Tangenten dieser ebenen Curve.

Ist $\mu=4(\nu-2)$, so geht die Ordnung des Ortes in $4\nu(\nu-2)(3\nu-4)$ über; ist aber S_μ die Hessiana, so darf man nur die Hälfte dieser Zahl nehmen, da in diesem Falle die Curve $(\mu\nu)$ die parabolische Curve ist (169), und folglich in jedem ihrer Puncte die beiden Osculierenden zusammenfallen.

In demselben Falle ist der Ort eine Developpable, da die Tangentialebene eines parabolischen Punctes von F_ν stationär ist, das heisst, da sie als eine Bitangentialebene betrachtet werden muss, deren beide Berührungspuncte unendlich nahe sind, und da zwei stationäre Ebenen, die unmittelbar auf einander folgen, durch die Osculierende gehen (31). Daraus folgt: *Der Ort der Osculierenden längs der parabolischen Curve fällt mit der einhüllenden Fläche der stationären Ebenen zusammen* [1]), deren Classe wir schon früher bestimmt haben (67).

173. Man verlangt *die der Fundamentalfläche längs der Durchschnittscurve ν-ter Ordnung mit einer Ebene E umgeschriebene Developpable.*

Die erste Polarfläche eines beliebigen Punctes x des Raumes trifft die Curve (ν) in $\nu(\nu-1)$ Puncten, also ist *die Classe der Developpablen* gleich $\nu(\nu-1)$.

Wenn zwei dieser $\nu(\nu-1)$ Puncte zusammenfallen, so gehört der Punct

---

1) *Diese Developpable ist der Steineriana längs der Curve von der Ordnung $6\nu(\nu-2)^2$ umgeschrieben, welche der parabolischen Curve entspricht* (168). In der That, ist ρ ein parabolischer Punct, so berührt die — hier stationäre — Polarebene von ρ in diesem Puncte die Fundamentalfläche und im correspondierenden Puncte die Steineriana (165).

$\mathfrak{x}$ der Developpablen an. Wieviel solcher Puncte gibt es nun auf einer beliebigen Geraden g? Die ersten Polarflächen der Puncte von g bilden ein Büschel und schneiden also die Ebene E in einem Curvenbüschel $(\nu-1)$-ter Ordnung in dem es $\nu(3\nu-5)$ Curven gibt [1]), welche die Curve (ν) berühren, sobald man diese ohne vielfache Puncte voraussetzt. Hat diese Curve δ Doppelpuncte und $\varkappa$ Spitzen (das heisst, hat E δ gewöhnliche und $\varkappa$ stationäre Berührungen mit F_ν), so geht obige Zahl über in $\nu(3\nu-5)-(2\delta+3\varkappa)$ [2]). *Diese Zahl drückt daher die Ordnung unsrer Developpablen aus.*

Gibt es unter den $\nu(\nu-1)$ Durchschnittspuncten der ersten Polarfläche von $\mathfrak{x}$ mit der Curve (ν) drei zusammenfallende Puncte, so liegt $\mathfrak{x}$ auf der Cuspidalcurve der Developpablen; hat dagegen die erste Polarfläche von $\mathfrak{x}$ zwei Berührungen mit der Curve (ν), so ist $\mathfrak{x}$ ein Punct der Doppelcurve der Developpablen. Man kann daher nach der Zahl derartiger Puncte $\mathfrak{x}$ auf einer beliebigen Ebene fragen. Die ersten Polarflächen der Puncte dieser Ebene schneiden E in einem Curvennetze $(\nu-1)$-ter Ordnung, in dem es

$$6\nu(\nu-2)-(6\delta+8\varkappa)$$

Curven gibt, welche die Curve (ν) osculieren, und

$$\tfrac{1}{2}[\nu(3\nu-5)-(2\delta+3\varkappa)]^2-\nu(11\nu-21)+10\delta+\frac{27}{2}\varkappa \quad {}^{3})$$

Curven, welche die nämliche Curve in zwei getrennten Puncten berühren. *Diese Zahlen drücken die Ordnung der Cuspidalcurve und die Ordnung der Knotencurve der Developpablen aus,* um die es sich handelt.

174. Was ist der *Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche in Bezug auf F_ν durch die Scheitel eines Tetraeders geht, das einer gegebenen Fläche S zweiter Ordnung conjugiert ist?* Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei beliebige Puncte des Raumes; c die Curve $(\nu-2)^2$-ter Ordnung, die der Durchschnitt der zweiten Polarflächen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ist, und folglich Ort der Pole der Quadripolarflächen, welche durch diese Puncte gehen; $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ die Puncte, in denen S die in Bezug auf S reciproke Gerade von $\mathfrak{ab}$ schneidet. Die Quadripolarflächen die durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gehen, bilden eine Reihe, von der $(\nu-2)^3$ durch einen dritten beliebig gegebenen Punct gehen. Es wird daher auch $(\nu-2)^3$ Quadriflächen dieser nämlichen Reihe geben, welche das Segment $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ harmonisch theilen, das heisst, die Curve c trifft den gesuchten Ort in $(\nu-2)^3$ Puncten. *Folglich ist dieser Ort eine Fläche von der Ordnung*

$$(\nu-2)^3:(\nu-2)^2=\nu-2\ .$$

Jeder Punct, der diesem Orte und der Hessiana gemein ist, ist dann der Pol eines Quadripolarkegels, der einem S conjugierten Trieder umgeschrieben ist. Folglich hat man (168): *Der Ort der Scheitel der Quadrikegel, welche*

1) *Einleitung*, Nr. 87.

2) *Einleitung*, Nr. 103.

3) *Einleitung*, Nr. 103.

den der gegebenen Quadrifläche conjugierten Triedern umgeschrieben sind, ist eine Raumcurve der $6(\nu-2)^3$*-ten Ordnung.*

175. Was ist der *Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche einem Tetraeder eingeschrieben ist, das einer gegebenen Fläche S zweiter Ordnung conjugiert ist?* Es seien A, B zwei beliebige Ebenen; c die Curve $9(\nu-2)^2$-ter Ordnung, die den Durchschnitt der gemeinen Polarflächen der Ebenen A, B darstellt, und somit Ort der Pole der Quadripolarflächen, welche beide obigen Ebenen berühren; A', B' die Tangentialebenen von S, welche durch die in Bezug auf S reciproke Gerade von AB gelegt sind. Die Quadripolarflächen, die A und B berühren, bilden eine Reihe, von der je $27(\nu-2)^3$ eine beliebige dritte Ebene berühren; es gibt daher auch $27(\nu-2)^3$ solcher Flächen, welche zu den Ebenen A', B' conjugiert sind. Die Curve c enthält also $27(\nu-2)^3$ Puncte des gesuchten Ortes, und dieser ist daher *eine Fläche von der Ordnung:*

$$27(\nu-2)^3:9(\nu-2)^2=3(\nu-2)\,.$$

Liegt ein Scheitel $\mathfrak{x}$ des zu S conjugierten Tetraeders auf S selbst, so ist seine Gegenfläche die Tangentialebene dieser Fläche in $\mathfrak{x}$, und von den drei übrigen Seitenflächen fällt eine mit derselben Tangentialebene zusammen, und die beiden übrigen sind zwei beliebige Ebenen, die man durch zwei conjugierte Tangenten von S in $\mathfrak{x}$ gezogen hat. Ein solches Tetraeder kann man daher stets als einem Quadrikegel vom Scheitel $\mathfrak{x}$ umgeschrieben ansehen. Ist folglich $\mathfrak{x}$ ein gemeinschaftlicher Punct von S und der Hessiana, so gehört der Pol des Polarkegels vom Scheitel $\mathfrak{x}$ dem Orte an, um den es sich handelt; das heisst: *dieser Ort schneidet die Hessiana in der Curve, welche der Durchschnittscurve der Steineriana mit S entspricht.*

Wenn S das System zweier Ebenen ist, so wird der betrachtete Ort offenbar die gemischte Polarfläche dieser Ebenen (158).

176. Wir suchen den *Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche in Bezug auf die Fundamentalfläche* F_ν *durch die Scheitel eines Tetraeders geht, welches der Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf die Hessiana conjugiert ist.*

Es sei g eine beliebige Gerade; $\mathfrak{x}$ ein Punct auf g. Der Ort der Pole der Quadripolarflächen in Bezug auf F_ν, die den Tetraedern umgeschrieben sind, welche der Quadripolarfläche des Punctes $\mathfrak{x}$ nach der Hessiana genommen conjugiert sind, schneidet die Gerade g in $(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}'$ (172). Soll umgekehrt eine Quadripolarfläche in Bezug auf die Hessiana einem Tetraeder conjugiert sein, das der Quadripolarfläche des Punctes $\mathfrak{x}'$ in Bezug auf F_ν eingeschrieben ist, (das heisst, wenn die erste Quadrifläche einem der zweiten conjugierten Tetraeder eingeschrieben sein soll), so ist der Ort (175) eine Fläche von der Ordnung $3[4(\nu-2)-2]$, welche g in ebensovielen Puncten $\mathfrak{x}$ schneidet. Diese Gerade enthält also $\nu-2+12(\nu-2)-6$ zusammenfallenden Puncte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, oder mit andern Worten, *der gesuchte Ort ist eine Fläche der* $(13\nu-32)$*-sten Ordnung.*

Betrachtet man die gemeinschaftlichen Puncte dieser Fläche und der Hessiana, so können wir weiter behaupten: Der Ort eines Punctes der Hessiana, dessen Polarkegel einem der Quadripolarfläche des nämlichen Punctes conjugierten Trieder umgeschrieben ist, diese Fläche nach der Hessiana genommen, ist eine Raumcurve von der Ordnung $4(\nu-2)(13\nu-32)$.

177. In ähnlicher Weise findet man den Satz: *Der Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche nach F_ν einem Tetraeder eingeschrieben ist, das der Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf die Hessiana conjugiert ist, ist eine Fläche T der Ordnung*

$$4(\nu-2)-2+3(\nu-2)=7\nu-16\ .$$

Diese Fläche schneidet die Hessiana in einer Curve, von der jeder Punct in Bezug auf F_ν der Pol eines Quadrikegels ist, dessen Scheitel auf der Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf die Hessiana liegt. *Folglich ist der Ort eines Punctes der Hessiana, dessen Quadripolarfläche nach der Hessiana genommen, durch den entsprechenden Punct der Steineriana geht, eine Raumcurve der $4(\nu-2)(7\nu-16)$-ten Ordnung, die auf der Fläche T liegt.* Diese Curve geht zweimal durch die $10(\nu-2)^3$ Doppelpuncte der Hessiana, denn jeder Punct derselben hat eine unbegrenzte Zahl entsprechender Puncte in gerader Linie (167), welche die Quadripolarfläche dieses Punctes nach der Hessiana genommen zweimal schneidet.

178. *Was ist der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana die Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf F_ν berührt?* Es sei g eine beliebige Gerade; $\mathfrak{x}$ ein Punct auf g; X die Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf die Hessiana. Die Quadripolarflächen nach F_ν, welche die Ebene X berühren, haben ihre Pole auf der gemeinen Polarfläche dieser Ebene (158), welche g in $3(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}'$ schneidet. Soll umgekehrt eine Polarfläche durch $\mathfrak{x}'$ gehen, so ist die entsprechende Ebene Tangentialebene der Quadripolarfläche von $\mathfrak{x}'$. Nun liegen aber die Pole — nach der Hessiana genommen — der Tangentialebenen einer Quadrifläche auf einer Fläche der $2[4(\nu-2)-1]$-ten Ordnung (96), die g in ebensovielen Puncten $\mathfrak{x}$ schneidet. Die Gerade g enthält also

$$3(\nu-2)+8(\nu-2)-2=11\nu-24$$

zusammenfallende Puncte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$, und *der gesuchte Ort ist also eine Fläche $\mathfrak{S}$ der $(11\nu-24)$-sten Ordnung.*

Ein Punct $\mathfrak{x}$ der Fläche T (177) ist der Scheitel eines der Quadripolarfläche von $\mathfrak{x}$ nach F_ν genommen umgeschriebenen Tetraeders, das zugleich der Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf die Hessiana conjugiert ist, wenn nur der Punct $\mathfrak{x}$ auf der reciproken Polarfläche der ersten Quadrifläche in Bezug auf die zweite liegt, in welchem Falle die Polarebene von $\mathfrak{x}$, nach der Hessiana genommen, die Quadripolarfläche desselben Punctes für F_ν berührt. Das heisst, unter dieser Voraussetzung ist $\mathfrak{x}$ auch ein Punct von $\mathfrak{T}$. *Der Ort eines Punctes also, der ein Scheitel eines Tetraeders ist, das bezüglich den Quadripolarflächen desselben Punctes nach F_ν und nach der Hessiana genommen umgeschrieben und conjugiert ist, ist eine Raumcurve von der Ordnung* $(11\nu-24)(7\nu-16)$, *die den Durchschnitt der Flächen $\mathfrak{T}$ und T bildet.*

179. *Was ist der Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana einer gegebenen Ebene E_λ in Bezug auf die Quadripolarfläche desselben Punctes conjugiert ist, letztere Fläche nach F_ν genommen?* Ist $\mathfrak{x}$ ein Punct einer Geraden g, und X die Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf die Hessiana, so schneidet der Ort der Pole der Quadripolarflächen nach F_ν, für welche E_λ und X zwei conjugierte Ebenen sind, g in $3(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}'$ (152); umgekehrt, ist $\mathfrak{y}$ der Pol der Ebene E_λ in Bezug auf die Quadripolarfläche eines Punctes $\mathfrak{x}'$, diese Fläche nach der Fundamentalfläche genommen, so schneidet die erste Polarfläche von $\mathfrak{y}$ in Bezug auf die Hessiana g in $4(\nu-2)-1$ Puncten $\mathfrak{x}$. Die Gerade g enthält also $3(\nu-2)+4(\nu-2)-1$ zusammenfallende Puncte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$, das heisst *der gesuchte Ort ist eine Fläche $\mathfrak{S}_\lambda$ von der Ordnung* $7\nu-15$.

Ist $\mathfrak{x}$ ein Punct der Hessiana, für dessen Polarkegel der Scheitel auf der gegebenen Ebene liegt oder auf der Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf die Hessiana, so gehört dieser Punct $\mathfrak{x}$ dem Orte $\mathfrak{S}_\lambda$ an, denn, da die durch den Scheitel gehende Ebene eine unbegrenzte Zahl Pole hat — auf der Polargeraden der Ebene in Bezug auf den Kegel —, so ist sie für jede beliebige andere Ebene conjugiert. Der erste Fall hat statt für die Pole der Polarkegel, deren Scheitel auf der Durchschnittscurve der Steineriana mit der Ebene E_λ liegen; folglich geht der Ort $\mathfrak{S}_\lambda$ durch die Raumcurve $6(\nu-2)^2$-ter Ordnung, welche dem ebenen Schnitte E_λ der Steineriana entspricht [1]).

Die zweite Voraussetzung tritt dagegen ein, wenn die Tangentialebene der Hessiana in $\mathfrak{x}$ durch den Scheitel $\mathfrak{x}'$ des Polarkegels geht. In diesem Falle gehört der Punct $\mathfrak{x}$ offenbar auch der Fläche $\mathfrak{T}$ an (178). Was also auch die Ebene E_λ ist, stets geht der Ort $\mathfrak{S}_\lambda$ durch die gemeinschaftliche Curve von $\mathfrak{T}$ und der Hessiana [2]). Diese Curve ist von der Ordnung

$$4(\nu-2)(7\nu-15)-6(\nu-2)^2=2(\nu-2)(11\nu-24)$$

und diese Zahl ist die Hälfte des Productes aus den Ordnungszahlen der

---

1) Der Ort $\mathfrak{S}_\lambda$ und die gemeine Polarfläche der Ebene E_λ schneiden sich noch in einer andern Raumcurve von der Ordnung $3(\nu-2)(5\nu-11)$, die offenbar der Ort eines Punctes ist, dessen Quadripolarfläche in Bezug auf F_ν die Ebene E_λ berührt, und dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana durch den Berührungspunct geht.

2) Jeder gemeinschaftliche Punct der Fläche $\mathfrak{T}$ und der Hessiana gehört auch $\mathfrak{S}$ an, denn sobald die Polarebene nach der Hessiana den Polarkegel berühren muss, so geht sie durch den Scheitel desselben. Im Falle $\nu=3$ ist die Durchschnittscurve zwischen $\mathfrak{T}$ und der Hessiana die der parabolischen Curve entsprechende.

Fläche $\mathfrak{T}$ und der Hessiana, *folglich berühren sich diese beiden Flächen überall, wo sie sich treffen, und zwar längs einer Raumcurve der* $2(\nu-2)(11\nu-24)$-*sten Ordnung, Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana durch den entsprechenden Punct der Steineriana geht.*

Alle diese Flächen $\mathfrak{S}$ der $(7\nu-15)$-ten Ordnung bilden, da sie durch die nämliche Curve $2(\nu-2)(11\nu-24)$-ten Ordnung gehen, ein lineares System. In der That, sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ drei beliebig gegebene Puncte des Raumes; A, B, C die Polarebenen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ in Bezug auf die Hessiana; und $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ die Pole der Ebenen A, B, C in Bezug auf die Quadripolarflächen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ nach F_ν genommen, so bestimmt die Ebene $E \equiv \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ die einzige Fläche $\mathfrak{S}$, die durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ geht.

180. Man sucht den *Ort eines Punctes, für den die gemeinsame Gerade einer gegebenen Ebene E_λ und der Polarebene des Punctes in Bezug auf die Hessiana die Quadripolarfläche des nämlichen Punctes nach der Fundamentalfläche genommen berührt.* Um die Aufgabe zu lösen, nehmen wir auf einer beliebigen Geraden g einen Punct $\mathfrak{x}$ an; dann schneidet die Polarebene von $\mathfrak{x}$ nach der Hessiana genommen E_λ in einer gewissen Geraden, und der Ort der Pole derjenigen Quadripolarflächen in Bezug auf F_ν, welche diese Gerade berühren, schneidet g in $2(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}'$ (159). Umgekehrt wird die Quadripolarfläche für F_ν eines Punctes $\mathfrak{x}$ von der Ebene E_λ in einem Kegelschnitte getroffen, der $2(4\nu-9)$ gemeinschaftliche Tangenten mit demjenigen Schnitte hat, den die nämliche Ebene in der einhüllenden Fläche $[4(\nu-2)-1]$-ter Classe (93) der Polarbenen der Puncte von g nach der Hessiana genommen macht. *Der gesuchte Ort ist also eine Fläche $\mathfrak{X}_\lambda$ von der Ordnung*

$$2(\nu-2)+2(4\nu-9)=2(5\nu-11) .$$

Die Fläche $\mathfrak{T}$ und die Fläche $\mathfrak{S}_\lambda$ in Bezug auf die Ebene E_λ (179) haben eine Curve der Ordnung $2(\nu-2)(11\nu-24)$ gemein, und schneiden sich also in einer andern Raumcurve von der Ordnung

$$(7\nu-15)(11\nu-24)-2(\nu-2)(11\nu-24)=(5\nu-11)(11\nu-24) .$$

Jeder Punct $\mathfrak{x}$ dieser Curve ist so beschaffen, dass seine Polarebene für die Hessiana die Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf F_ν berührt (178), und dass genannte Ebene der Ebene E_λ in Bezug auf die nämliche Quadripolarfläche conjugiert ist; folglich geht E_λ durch den Berührungspunct der Polarebene mit der Quadrifläche, und also ist der Durchschnitt von E_λ mit der Polarebene eine Tangente der Quadrifläche. Es folgt daraus, dass $\mathfrak{x}$ ein Punct des Ortes $\mathfrak{X}_\lambda$ ist. Dasselbe Raisonnement zeigt ebenfalls, dass jeder Punct der Curve $3(\nu-2)(5\nu-11)$-ten Ordnung, welche der gemeinen Polarfläche der Ebene E_λ und dem Orte $\mathfrak{S}_\lambda$ gleichzeitig angehört, auch auf $\mathfrak{X}_\lambda$ liegt; und also schneidet $\mathfrak{X}_\lambda$ die $\mathfrak{S}_\lambda$ in einer Curve der $(5\nu-11)(11\nu-24)$-ten Ordnung, die auf $\mathfrak{T}$ liegt, und in einer andern Curve von der Ordnung $3(\nu-2)(5\nu-11)$, welche auf der gemeinen Polarfläche der Ebene E_λ liegt.

Nun sieht man aber leicht nach den Definitionen des betreffenden Ortes, dass jeder gemeinsame Punct von $\mathfrak{X}_\lambda$ und $\mathfrak{T}$, und ebenso jeder gemeinsame Punct von $\mathfrak{X}_\lambda$ und der Polarfläche von E_λ nothwendigerweise auch auf $\mathfrak{S}_\lambda$ liegt, *und folglich wird die Fläche $\mathfrak{X}_\lambda$ durch die Fläche $\mathfrak{T}$ längs der Raumcurve* $(5\nu-11)(11\nu-24)$*-ster Ordnung berührt, und von der gemeinen Polarfläche der Ebene E_λ längs der Raumcurve* $3(\nu-2)(5\nu-11)$*-ter Ordnung; beide Berührungscurven liegen gleichzeitig auf der Fläche $\mathfrak{S}_\lambda$* [1]).

181. Man verlangt den *Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana die Quadripolarfläche des nämlichen Punctes in Bezug auf F_ν und zwei gegebenen Ebenen E_λ, E_λ' in einem Kegelschnitt und zwei zu demselben conjugierten Geraden schneidet.* Es sei $\mathfrak{x}$ ein Punct einer beliebigen Geraden g; X die Polarebene von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf die Hessiana, dann ist der Ort der Pole der Quadripolarflächen in Bezug auf F_ν, welche die Ebene E_λ in Kegelschnitten schneiden, die zu den Geraden XE_λ, XE_λ' conjugiert sind, die gemischte Polarfläche dieser Geraden (159), die g in $2(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}'$ schneidet. Umgekehrt sei Q die Quadripolarfläche eines Punctes $\mathfrak{x}'$ in Bezug auf F_ν, dann weiss man, dass die Ebenen, welche die Quadrifläche Q und die gegebenen Ebenen E_λ, E_λ' längs eines Kegelschnittes und zwei conjugierter Geraden schneiden, eine andere Quadrifläche umhüllen. Diese Fläche und die Einhüllende der Polarebenen der Puncte von g in Bezug auf die Hessiana haben $2[4(\nu-2)-1]$ gemeinschaftliche Tangentialebenen, denen ebensoviele Pole $\mathfrak{x}$ auf g entsprechen. *Der verlangte Ort ist also eine Fläche $\mathfrak{X}_{\lambda\lambda'}$ der Ordnung*

$$2(\nu-2)+2(4\nu-9)=2(5\nu-11)\ .$$

Jeder gemeinsame Punct $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{X}_\lambda$ ist so beschaffen (180), dass seine Polarebene in Bezug auf die Hessiana die Quadripolarfläche von $\mathfrak{x}$ nach F_ν genommen und die Ebene E_λ in drei durch ein und denselben Punct gehenden Geraden schneidet. Die letzte von diesen Geraden hat eine unbegrenzte Anzahl Pole in gerader Linie in Bezug auf den Kegelschnitt, der durch die beiden ersten Geraden gebildet wird. Daraus folgt, dass die letztere Gerade in Bezug auf genannten Kegelschnitt jeder Geraden conjugiert ist, die in der erwähnten Polarebene von $\mathfrak{x}$ gezogen werden kann; also ist $\mathfrak{x}$ auch ein Punct des Ortes $\mathfrak{X}_{\lambda\lambda'}$. Das heisst aber: *Dieser Ort geht durch die beiden Curven der* $(5\nu-11)(11\nu-24)$*-sten Ordnung, in denen sich die Flächen $\mathfrak{T}$ und bezüglich $\mathfrak{X}_\lambda$ und $\mathfrak{X}_\lambda'$ berühren.*

182. Man verlangt den *Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf F_ν und die Hessiana, und dessen Quadrioplarfläche in Bezug auf F_ν*

---

[1]) Es folgt hieraus, dass der Verein der Hessiana, von $\mathfrak{X}_\lambda$ und einer beliebigen Fläche $\mathfrak{P}$ der $(4\nu-9)$-ten Ordnung mittelst zweier projectivischer Büschel erzeugt werden kann, nämlich $(\mathfrak{T}, \mathfrak{S}_\lambda\mathfrak{P}, \ldots)$ der $(11\nu-24)$-ten Ordnung und $(\mathfrak{S}_\lambda, S_\lambda\mathfrak{P}, \ldots)$ der $(7\nu-15)$-ten Ordnung. Hierin bezeichnet S_λ die gemeine Polarfläche der Ebene E_λ.

einen Punct auf einer gegebenen Ebene E gemein haben. Es sei $\mathfrak{x}$ ein Punct einer beliebigen Geraden g, dann trifft die den beiden Polarebenen von $\mathfrak{x}$ gemeinschaftliche Gerade die Ebene E in einem Puncte $\mathfrak{p}$, und die Pole der Quadripolarflächen in Bezug auf F_ν, welche durch $\mathfrak{p}$ gehen, liegen auf der zweiten Polarfläche dieses Punctes. Diese letzte Fläche schneidet g in $\nu-2$ Puncten $\mathfrak{x}'$. Umgekehrt schneidet die Quadripolarfläche eines Punctes $\mathfrak{x}'$ nach F_ν genommen die Ebene E in einem gewissen Kegelschnitte k; es gibt nun aber auf g eine Zahl von $10(\nu-2)$ Puncten $\mathfrak{x}$, von denen jeder die Eigenschaft besitzt, dass seine Polarebenen in Bezug auf F_ν und die Hessiana sich auf k schneiden [1], der gesuchte Ort ist also eine Fläche $11(\nu-2)$-ter Ordnung.

Was auch die Ebene E ist, immer geht diese Fläche durch die $2(\nu-2)$ Puncte $\mathfrak{a}$, in denen die Hessiana von einer Geraden a berührt wird, die auf der Fundamentalfläche liegt (171); denn die Polarebenen und die Quadripolarfläche von $\mathfrak{a}$ gehen gleichzeitig durch die Gerade a und haben daher mit jeder gegebenen Ebene einen Punct gemein.

---

[1]) Durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{i}$ einer Geraden r kann man zwei erste Polarflächen in Bezug auf F_ν legen, deren Pole die Durchschnittspuncte von k mit der Polarebene von $\mathfrak{i}$ sind. Die ersten Polarflächen dieser Pole in Bezug auf die Hessiana treffen ferner r in $2(4\nu-9)$ Puncten $\mathfrak{i}'$. Umgekehrt kann man durch einen Punct $\mathfrak{i}'$ zwei erste Polarflächen in Bezug auf die Hessiana legen, deren Pole die Durchschnittspuncte von k mit der Polarebene von $\mathfrak{i}'$ in Bezug auf die Hessiana sind Die ersten Polarflächen dieser Pole in Bezug auf F_ν schneiden r in $2(\nu-1)$ Puncten. $\mathfrak{i}'$. Auf r fallen also

$$2(4\nu-9)+2(\nu-1)=10(\nu-2)$$

mal zwei Puncte $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{i}'$ zusammen, w. z. b. w.