GRUNDZÜGE

EINER

ALLGEMEINEN THEORIE

DER

OBERFLÄCHEN

IN

SYNTHETISCHER BEHANDLUNG.

VON

DR. LUDWIG CREMONA,
PROFESSOR DER HÖHEREN GEOMETRIE AN DER KÖNIGL. POLYTECHNISCHEN SCHULE ZU MAILAND.

UNTER MITWIRKUNG DES VERFASSERS INS DEUTSCHE ÜBERTRAGEN

VON

MAXIMILIAN CURTZE,
ORDENTLICHEM LEHRER AM GYMNASIUM ZU THORN.

AUTORISIERTE AUSGABE.

BERLIN 1870.
S. CALVARY & COMP.
OBERWASSER-STRASSE 11.

HERRN GEHEIMEN-REGIERUNGSRATH UND PROFESSOR

DR. JOHANN AUGUST GRUNERT

IN

GREIFSWALD,

SEINEM VEREHRTEN LEHRER

GEWIDMET

VOM

ÜBERSETZER.

Hochverehrtester Herr Professor!

Als Sie mir vor fast drei Jahren als Geschenk des Herrn Verfassers die erste Abtheilung des Werkes übersandten, das ich in deutschem Gewande Ihnen darzubringen mir erlaube, sprachen Sie in der begleitenden Zuschrift gegen mich den Wunsch einer Uebersetzung aus, den ich hierdurch verwirklicht habe. Ihr Rath kam meiner Neigung entgegen, der Herr Verfasser gab mit liebenswürdiger Bereitwilligkeit seine Einwilligung zur Uebersetzung und verschaffte mir auch die Zustimmung der ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL ISTITUTO DI BOLOGNA zu diesem Unternehmen, in deren *Memorie* (II^a Serie, T. 6^0, p. 91—136; T. 7^0, p. 19—78) das italiänische Original zunächst erschienen ist. Der Titel desselben lautet in der Separatausgabe »PRELIMINARI DI UNA TEORIA GEOMETRICA DELLE SUPERFICIE. DI LUIGI CREMONA Professore presso il R. Istituto Tecnico Superiore di Milano. Si vende presso il Tipografo FRANCESCO ZANETTI Milano, via del Senato, 26.« Dasselbe bildet die Fortsetzung zu dem früher erschienenen Werke desselben Verfassers »INTRODUZIONE AD UNA TEORIA GEOMETRICA DELLE CURVE PIANE. PEL DR. LUIGI CREMONA, *Professore di Geometria Superiore nella R. Università di Bologna.* BOLOGNA, TIPI GAMBERINI E PARMEGGIANI. 1862.« Jener gelehrten Körperschaft und dem Herrn Verfasser erlaube ich mir bei dieser Gelegenheit für ihre gütige Erlaubniss meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

Mein verehrter Freund, Herr Professor CREMONA, ging aber noch weiter. Er hat dem Original eine grössere Zahl handschriftlicher Zusätze beigefügt, die im Vereine mit dem dritten Theile, der ebenfalls im Originale nicht vorhanden ist, der Uebersetzung in Bezug auf Vollständigkeit der Untersuchungen wohl einigen Vorzug vor jenem geben, wenn es auch unmöglich sein dürfte, in der Uebertragung den glänzenden, gefälligen Stil des Originals zu erreichen.

Das letzte Capitel des zweiten Theiles und der ganze dritte Theil sind die Uebersetzung der Capitel IV—XI der grossen Abhandlung des Herrn Verfassers über die Flächen dritter Ordnung, welcher 1866 die Hälfte des Steinerschen Preises durch die Berliner Akademie zuerkannt wurde[1]), und die in den ersten beiden Heften des 68. Bandes des »*Journals für die reine und angewandte Mathematik*« unter dem Titel erschienen ist: **Mémoire de Géometrie pure sur les surfaces du troisième ordre.** (Par L. Cremona à Milan).« Die ersten drei Capitel dieser Abhandlung kann man als einen kurzen, nur das für die cubischen Flächen Nöthige zusammenfassenden Auszug aus dem italiänischen Werke ansehen.

Dass mir vergönnt war, diese wichtige Abhandlung meiner Uebersetzung einverleiben zu dürfen, verdanke ich zunächst dem Herrn Verfasser, der mir die Erlaubniss zu dieser Arbeit von dem Herausgeber des *Crelle-Borchardtschen Journals* Herrn Professor Borchardt und dem Verleger desselben, Herrn Buchhändler Reimer in *Berlin* erwirkte. Beide Herren haben dazu ihre freund-

[1]) Die andern Hälfte wurde Herrn Dr. Rudolf Sturm zuerkannt, dessen Werk, höchst instructiv und reich an Resultaten, unter dem Titel veröffentlicht ist: *Syntetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung,* Leipzig 1867.

liche Einwilligung bereitwilligst ertheilt, wofür ich ihnen hierdurch meinen verbindlichsten Dank auszusprechen nicht unterlassen kann.

Um Ihnen einen schnellen Ueberblick über den Umfang der Zusätze zu geben, durch welche die deutsche Ausgabe gegen das italiänische Original erweitert ist, erlaube ich mir hier eine Gegenüberstellung der Nummern oder Paragraphen des Originals und der Uebersetzung folgen zu lassen.

Original:		Uebersetzung:
No. 1—44	=	No. 1—44
———	. . . .	No. 45—47 (Neu).
No. 45—57	=	No. 48—60.
No. 61 [1])—76	=	No. 61—76.
———	. . . .	No. 77—82 (Neu).
No. 77—90	=	No. 83—96.
———	. . . .	No. 97—112 (Neu).
No. 91—95	=	No. 113—117.
———	. . . .	No. 118—119 (Neu).
No. 96—116	=	No. 120—140
———	. . . .	No. 141 (Neu).
No. 117	=	No. 142.
———	. . . .	No. 143 (Neu).
No. 118—131	=	No. 144—157.
———	. . . .	No. 158—289 (Neu).

Herr Professor Cremona hat die weitere Freundlichkeit gehabt, auf meine Bitte die Probeabzüge einer genauen Correctur zu unter-

1) Die Nummern 58—60 fehlen im Originale.

ziehen, damit dadurch etwaige Missverständnisse meinerseits vermieden würden. Welcher Dienst der Uebersetzung dadurch geleistet ist, kann nur ich hinreichend würdigen.

Was die Uebersetzung selbst anbetrifft, so habe ich mich streng an das Original gehalten, ich habe nur mit Billigung des Herrn Verfassers die Bezeichnung durch das ganze Werk in der Art einheitlich gemacht, dass ich Puncte durch kleine deutsche Buchstaben, Curven durch dergleichen lateinische, Flächen durch grosse lateinische Buchstaben bezeichnete. Zahlenwerthe, also auch die Zahlen für die Singularitäten der Curven und Flächen, sind durch griechische Typen gegeben, Abkürzungssymbole, wie Summenzeichen u. dgl., durch grosse deutsche Buchstaben.

Da in der Abhandlung über die Flächen dritter Ordnung die Litteraturnachweisungen nur spärlich unter dem Texte gegeben, dagegen die benutzten Schriften in der Einleitung zusammengestellt sind, so glaube ich im Sinne des Herrn Verfassers zu handeln, wenn ich diesen Quellennachweis Ihnen hier ebenfalls vorlege.

Ausser der Abhandlung STEINERS, die den Gegenstand der Preisfrage bildete (*Ueber die Flächen dritten Grades*, 1856) und den Werken und Memoirs allgemeinen Inhalts von CHASLES, HESSE, JONQUIÈRES und Anderen, sind speciell folgende Abhandlungen über die Theorie der cubischen Flächen benutzt worden:

AUGUST, *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis* (Dissertatio inauguralis. Berolini 1862);

BRIOSCHI, *Intorno ad alcune proprietà delle superficie del terzo ordine* (Annali di scienze matematiche e fisiche, Roma 1855);

CAYLEY, *On the triple tangent planes of surfaces of the third order* (Cambridge and Dublin mathematical Journal, T. 4. 1849);

CLEBSCH, *Zur Theorie der algebraischen Flächen* (Crelles Journal, Bd. 58, 1860);

CLEBSCH, *Ueber eine Transformation der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Veränderlichen* (Ebendaselbst);

CLEBSCH, *Ueber die Knotenpunkte der Hesseschen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung* (Crell. Journ., Bd. 59, 1861);

CLEBSCH, *Zur Theorie der algebraischen Flächen* (Crelles Journal, Bd. 63, 1863);

GRASSMANN, *Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen* (Crelles Journal, Bd. 49, 1854);

HESSE, *Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung* (Crelles Journal, Bd. 49, 1854);

SALMON, *On the triple tangent planes to a surface of the third order* (Cambridge and Dublin mathematical Journal. T. 4, 1849);

SALMON, *On quaternary cubics* (Philosophical Transactions, 1860);

SALMON, *Analytic geometry of three dimensions* (2d ed. Dublin 1865);

SCHIAPARELLI, *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica* (Memorie dell' Accademia di Torino, 1862);

SCHLÄFLI, *An attempt to determine the twenty-seven lines upon*

a surface of the third order etc. (Quarterly Journal of Mathemetics, T. 2, 1858);

SCHLÄFLI, *On the distribution of surfaces of the third order into species etc.* (Philosophical Transactions, 1863);

SCHRÖTER, *Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung* (Crelles Journal, Bd. 62, 1863);

SYLVESTER, *On elimination, transformation and canonical forms* (Cambridge and Dublin math. Journal, T. 6. 1851).

Damit übergebe ich denn Ihnen und dem Publicum auch dieses treffliche Werk meines verehrten Freundes in deutscher Uebertragung und wünsche nur, dass es auch in dieser neuen Gestalt bei Ihnen und anderwärts eine gleich wohlwollende Aufnahme finden möge, wie sie meiner Uebersetzung der *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* zu Theil geworden ist.

Thorn den 1. September 1869.

M. CURTZE.

VORREDE DES VERFASSERS.

„Nisi utile est, quod facimus, stulta est gloria."
PHAEDRI *Fabulae, III.* 17.

Die wohlwollende Aufnahme, die meine *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* [1]) bei dieser Akademie und den Geometriebeflissenen gefunden, haben mich angespornt, dasselbe Unternehmen für die Geometrie des Raumes mit drei Dimensionen zu versuchen. Hier ist natürlich der Stoff um Vieles zusammengesetzter, und das Feld ohne Vergleich viel weiter; es ist mir daher Bedürfniss, des Lesers Verzeihung für die Lücken und Versehen mir zu erbitten, denen er nur zu häufig, nicht nur bei Unbedeutendem, sondern auch bei schwer Wiegendem begegnen wird.

Der Hauptzweck dieser Arbeit besteht darin, mit synthetischer Methode die wichtigsten Sätze der höhern Geometrie zu beweisen, die der Theorie der Oberflächen beliebiger Ordnung angehören, und die man in den Werken und Abhandlungen von SALMON, CHASLES, STEINER, CLEBSCH, ... analytisch bewiesen, oder wenig-

---

[1]) Memorie dell' Accademia di Bologna, T. 12. (Prima Serie) 1862. Fortsetzung der *Introduzione* bilden einige kurze Abhandlungen, die in den *Annali di Matematica,* welche Professor TORTOLINI in *Rom* herausgegeben, veröffentlicht sind, nämlich: *Sulla teoria delle coniche* (T. 5, p. 330); *Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane* (T. 6, p. 153); *Sulla teoria delle coniche* (T. 6., p. 179). Von der *Introduzione* und diesen *Zusätzen* ist von dem Uebersetzer vorliegenden Werkes gleichfalls eine deutsche Ausgabe erschienen (*Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven*, Greifswald 1865).

stens ausgesprochen findet [1]), und dieselben mit den Resultaten meiner eigenen Untersuchungen theils zu verknüpfen, theils durch dieselben zu vervollständigen. Um aber der Schrift eine geziemende Gestalt zu geben, und um auch Jünglingen den Zugang zu ihr möglich zu machen, musste ich mich überzeugen, dass es vortheilhaft wäre, den Rahmen zu erweitern, und in denselben einige einleitende Begriffe eintreten zu lassen, welche die Gelehrten ohne Zweifel für zu bekannt und zu elementar ansehen werden. Im Gegentheil hoffe ich, dass diejenigen, welche das Studium der descriptiven Geometrie anfangen, in ihnen diejenigen Lehren finden werden, welche gegenwärtig das wirksamste Hilfsmittel darstellen, um in diese Wissenschaft einzudringen.

---

1) Ausserdem benutzte ich die Arbeiten von Monge, Dupin, Poncelet, Jacobi, Pluecker, Hesse, Grassmann, Kummer, Schlaefli, Staudt, Jonquières, La Gournerie, Bellavitis, Schröter, Painvin, Bischof, Battaglini, Schwarz, Fiedler, Reye u. A.

INHALTS-VERZEICHNISS.

NB! Die wesentlich veränderten oder neuen Nummern der deutschen Ausgabe sind durch einen Stern kenntlich gemacht.

VORREDE DES VERFASSERS XI

ERSTER THEIL.

[Cap. I—VIII; No. 1—60.]

No.		Seite
	CAPITEL I: **Kegel** (No. 1—5)	1— 5
1.	Kegel ν-ter Ordnung	1
2.	Tangenten und Tangentialebenen eines Kegels; Classe desselben	—
3.	Singularitäten eines Kegels	2
4.	Theorie der Kegel mit gemeinsamen Scheitel	—
5.	Quadrikegel	4
	CAPITEL II: **Developpable Flächen und Raumcurven** (No. 6—14)	5—15
6.	Ordnung und Classe einer Raumcurve	5
7.	Ordnung und Classe einer Developpablen	6
8.	Singularitäten	7
9.	Cuspidalcurve und Knotencurve einer Developpablen	8
10.*	Formeln von CAYLEY	9
11.	Osculierende und doppeltberührende Developpable einer Raumcurve	—
12.*	Formeln von CAYLEY, Fortsetzung	11
13.	Perspectivkegel und ebene Schnitte	12
14.*	Beispiel	14
	CAPITEL III: **Oberflächen beliebiger Ordnung** (No. 15—21)	15—25
15.	Oberflächen ν-ter Ordnung	15
16.	Osculierende Gerade; Tangentialebene	16
17.	Doppelpuncte	17
18.	Vielfache Puncte und Linien; Zahl der Bedingungen, welche eine Fläche ν-ter Ordnung bestimmen	18
19.	Berührung zweier Flächen	20
20.	Durchschnitt zweier Flächen; Flächenbüschel; Zahl der Bedingungen, welche die Durchschnittscurve zweier Flächen von gegebener Ordnung bestimmen	21

No.		Seite
21.	Gemeinschaftliche Puncte dreier Flächen	23
22.	Satz von Dupin	24
	Capitel IV: **Oberflächen zweiter Ordnung** (No. 23—30)	25—32
23. 24.	Die beiden Systeme geradliniger Generatrixen einer Fläche zweiter Ordnung	25
25.	Classification der Flächen zweiter Ordnung	26
26.	Oberfläche zweiter Ordnung als Erzeugniss zweier gerader projectivischer Punctreihen oder zweier projectivischer Ebenenbüschel	27
27.	Pole und Polarebenen	29
28.	Conjugierte Gerade	30
29.	Classe einer Fläche zweiter Ordnung	31
30.	Umgeschriebener Kegel	—
	Capitel V: **Oberflächen beliebiger Classe. Reciproke Polaren** (No. 31—40)	33—43
31.	Conjugierte Tangenten	33
32.	Umgeschriebener Kegel	34
33.	Einhüllende ν-ter Classe	—
34.	Oberflächen zweiter Classe	35
35.	Dualitätsgesetz	36
36.	Reciproke Polarfiguren	37
37.	Die Raumurve als Einhüllende von Ebenen betrachtet	—
38.	Singuläre Tangentialebenen	38
39.	Umgeschriebene Developpable	39
40.	Zwei Flächen, die sich in zwei getrennten Curven schneiden; Anwendung auf Flächen zweiter Ordnung; cubische Raumcurve	40
	Capitel VI: **Lineare Flächensysteme** (No. 41—47)	43—48
41.	Zahl der Flächen eines Büschels die eine Gerade oder eine Ebene berühren	43
42.	Lineares System μ-ter Stufe	44
43.	Niedere lineare Systeme; Zahl der Flächen, welche ein lineares System bestimmen	—
44.	Projectivische lineare Systeme	46
45.*	Reciproke Ebenennetze und reciproke ebene Punctreihen	47
46.*	Flächen zweiter Ordnung als Erzeugniss zweier reciproker Ebenennetze (Ebenenbündel)	47
47.*	Dieselben Flächen als Erzeugniss reciproker ebener Punctreihen	48
	Capitel VII: **Einhüllende Flächen** (No. 48—50)	49—51
48.	Einhüllende Fläche einer einfach unendlichen Reihe von Flächen; Charakteristiken	49
49.	Cuspidalcurve und Doppelcurve der einhüllenden Fläche	—
50.	Anwendung auf den Fall, dass durch einen beliebigen Punct des Raumes zwei Flächen der eingehüllten Reihe gehen	50
	Capitel VIII: **Windschiefe Flächen** (No. 51—60)	51—60
51.	Regelflächen, Developpable und windschiefe Flächen	51
52.	Theorem Chasles' über das Doppelverhältniss von vier Puncten auf derselben Generatrix	—

No.		Seite
53.	Zwei windschiefe Flächen mit gemeinsamer Generatrix	52
54.	Die Classe einer windschiefen Fläche ist ihrer Ordnung gleich	—
55.	Doppelcurve einer windschiefen Fläche	—
56.	Singuläre Generatrixen; doppeltberührende Developpable	53
57.	Krumme projectivische Punctreihen; Satz von RIEMANN und CLEBSCH	54
58.	Eintheilung der Curven, der Developpablen und der windschiefen Flächen in Geschlechter	56
59.	Windschiefe Flächen vom Geschlechte Null	57
60.	Windschiefe Flächen mit zwei geradlinigen Directrixen; Satz von MOUTARD	58

ZWEITER THEIL.

[Cap. I—X; No. 61—182.]

CAPITEL I: **Polarflächen in Bezug auf eine Fläche beliebiger Ordnung** (No. 61—82) . . . . 61—73

No.		Seite
61.	Polarflächen	61
62.	Reciprocität zwischen der ρ-ten und $(\nu-\rho)$-ten Polarfläche	62
63.	Polarflächen in Bezug auf Polarflächen	—
64.	Polarebene eines Punctes der Fundamentalfläche	—
65.	Berührungscurve zwischen der Fundamentalfläche und den durch den Pol gezogenen Tangenten	63
66.	Classe einer Oberfläche ν-ter Ordnung	—
67.	Osculierende, Doppeltangenten, Bitangentialebenen, stationäre Ebenen	—
68.	Parabolische Curve	64
69.	Polarflächen eines Punctes der Fundamentalfläche	—
70.	Osculierende, Doppeltangenten, Bitangentialebenen, stationäre Ebenen	65
71. 72.	Polarflächen eines vielfachen Punctes der Fundamentalfläche	66 67
73.	Einfluss eines vielfachen Punctes auf Polarflächen eines andern Poles	68
74.	Polarflächen eines festen Poles in Bezug auf die Flächen eines linearen Systems	—
75.	Zahl der Flächen ν-ter Ordnung eines linearen Systems μ-ter Stufe, die einen $(\mu+1)$-punctigen Contact mit einer gegebenen Geraden haben	69
76.	Flächenbüschel, das einen Kegel einschliesst	70
77.*	Reihe von Flächen F'_ν; die Fläche $\mathfrak{F}_{\nu-1}$	—
78.*	Nähere Bestimmung der Fläche $\mathfrak{F}_{\nu-1}$	71
79.*	Die Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-1}$ bilden eine Reihe vom Index $\nu-1$	—
80.*	Einhüllende der Reihe der F'_ν und Einhüllende **S** der Reihe der $\mathfrak{F}_{\nu-1}$	—
81.*	Ordnung der Cuspidal- und der Doppelcurve von **S**	72
82.*	Die Flächen $\mathfrak{F}_{\nu-2}$ und ihre Einhüllende **S'**	—

CAPITEL II: **Gemischte Polarflächen** (No. 83—92) . . . . 73—78

No.		Seite
83. 84.	Sätze über gemischte Polarflächen	73 74

No.		Seite
85.	Einfluss der vielfachen Puncte auf gemischte Polarflächen . . .	75
86.	Büschel der ersten Polarflächen der Puncte einer Geraden . . .	—
87.	Pole einer Ebene	—
88.	Lineares System der ersten Polarflächen	76
89.	Die gemeinschaftlichen Puncte der ersten Polarflächen sind für die Fundamentalfläche Doppelpuncte	—
90. 91.	Vielfache Puncte der Polarflächen	77 —
92.	Eigenschaften der parabolischen Puncte	78
	CAPITEL III: **Enveloppen der Polarebenen und Orte der Pole** (No. 93—96)	78—81
93.	Enveloppe der Polarebenen der Puncte einer Geraden	78
94.	Enveloppe der Polarebenen der Puncte einer Fläche	79
95.	Ort der Pole der Tangentialebenen einer Fläche	80
96.	Specialfall, wenn diese Fläche developpabel ist	—
	*CAPITEL IV: **Anwendungen auf developpable Flächen** (No. 97—112)	81—95
97.* 98.*	Gleichungen zwischen den Singularitäten einer Developpablen und Folgerungen aus denselben	81 82
99.*	Die zweite Polarfläche berührt die Berührungsgeneratrix einer Tangentialebene in Puncten der Cuspidalcurve und schneidet sie in Puncten der Knotencurve	—
100.*	In dem Berührungspunct einer stationären Generatrix mit der Cuspidal- und Knotencurve hat die zweite Polarfläche einen vierpunctigen Contact mit diesen Curven	83
101.*	Dieselbe Fläche hat in dem Berührungspuncte der Doppeltangenten der Cuspidalcurve mit ihr eine zweipunctige Berührung und eine dreipunctige mit der Knotencurve.	85
102.*	Ein Doppelpunct der Cuspidalcurve ist für die Developpable vierfach	86
103.*	Jede zweite Polarfläche hat in den Stillstandspuncten mit der Cuspidalcurve einen vierpunctigen Contact.	—
104.*	Die Durchnittspuncte der Tangenten der Cuspidalcurve mit dieser selbst liegen auf der zweiten Polarfläche jedes beliebigen Poles .	—
105.*	Zahl der doppelten, drei- und vierfachen Puncte der Fundamentalfläche	87
106.*	Ein Doppelpunct der Cuspidalcurve ist ein vierfacher Punct der Knotencurve	—
107.*	Die Tangenten der Cuspidalcurve in den Stillstandspuncten sind auch Tangenten der Knotencurve.	89
108.*	Jede zweite Polarfläche hat in einer Spitze der Knotencurve in dieser einen dreipunctigen Contact	90
109.*	Gleichungen für die Singularitäten τ, λ_1, τ_1	—
110.*	Gemeinschaftliche Puncte der Curven c, c'	—
111.*	Gleichung für diese gemeinschaftlichen Puncte	93
112.*	Classe der Knotencurve und Ordnung der doppeltberührenden Developpablen der Curve (ν)	94

No. Seite

Capitel V: **Projectivische Flächenbüschel** (No. 113–125) . 95–106

113. Die Oberfläche, welche durch zwei projectivische Flächenbüscchel entsteht 95
114. Sätze von Charles 96
115. } Sätze von Jacobi 97
116. } 98
117. Charakteristiken der gemeinschaftlichen Curve zweier Flächen . 99
118.* Directe Bestimmung von ϑ 101
119.* Werth von ϑ, wenn die Flächen einen gemeinschaftlichen Punct haben, der bezüglich π_1-fach, π_2-fach ist 102
120. Charakteristiken der Durchschnittscurve zweier Flächen, die sich schon in einer andern Curve schneiden . . . . —
121.* Zahl der gemeinsamen Puncte dreier Flächen, welche durch die nämliche Curve gehen 103
122. Ort eines Punctes, in dem sich drei entsprechende Flächen dreier projectivischer Büschel schneiden 104
123. Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf die Flächen eines Büshels —
124. Zahl der Puncte, in denen sich vier entsprechende Flächen von vier projectivischen Büscheln schneiden 105
125. Zahl der Doppelpuncte der Flächen eines Büschels . . . . . —

Capitel VI: **Projectivische Flächennetze** (No. 126–133) 106–111

126. Die Curve, welche durch zwei projectivische Flachennetze entsteht 106
127. Ort der gemeinschaftlichen Puncte drei entsprechender Flächen von drei projectivischen Netzen 107
128. Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf die Flächen eines Netzes 108
129. Ort der gemeinschaftlichen Puncte von vier entsprechenden Flächen von vier projectivischen Netzen . . . . —
130. Ort der Doppelpuncte der Flächen eines Netzes 109
131. Zahl der gemeinschaftlichen Punkte zwischen fünf entsprechenden Flächen von fünf projectivischen Netzen . . . . —
132. Ort der Berührungspuncte zwischen einer festen Fläche und den Flächen eines Netzes 110
133. Ort der Berührungspuncte zwischen den Flächen eines Büschels und denen eines Netzes . . . . —

Capitel VII: **Projectivische lineare Flächensysteme dritter Stufe** (No. 134–143) 111–121

134. Die durch zwei lineare Systeme erzeugten Puncte 111
135. Puncte, welche die Jacobiana zweier Flächen darstellen 112
136. Curve, welche drei projectivische lineare Systeme erzeugen . . 113
137. Jacobiana dreier Flächen; Zahl der Flächen eines Büschels, die eine feste Fläche berühren 114
138. Ort eines Punctes, der vier entsprechenden Flächen von vier projectivischen linearen Systemen gemein ist 116
139. Jacobische Fläche von vier gegebenen Flächen; Zahl der Flächen eines Büschels, welche eine feste Curve berühren . . . . . —
140. Ort eines Punctes, durch den fünf entsprechende Flächen von fünf projectivischen linearen Systemen hindurchgehen 118

No. Seite

141.* Jacobiana von fünf gegebenen Flächen 119

142. Zahl der Puncte, durch welche je sechs entsprechende Flächen von sechs projectivischen linearen Systemen hindurchgehen . . —

143.* Jacobiana von sechs gegebenen Flächen 121

Capitel VIII: **Projectivische lineare Flächensysteme beliebiger Stufe** (No. 144—149) . . . . 121—125

144. Ordnung der Fläche, die durch $\mu+1$ lineare projectivische Systeme μ-ter Stufe entsteht 121

145.–147. Ordnung der Curve und ihrer osculierenden Developpablen, die durch μ lineare projectivische Systeme μ-ter Stufe erzeugt wird, und der Curve, die durch $\mu+2$ analoge Systeme μ-ter Stufe entsteht . . . . 122 — 123

148. Zahl der Puncte, die durch $\mu+1$ lineare projectivische Systeme μ-ter Stufe erzeugt werden 124

149. Zahl der Puncte, die durch $\mu+3$ lineare projectivische Systeme μ-ter Stufe erzeugt werden . . . . —

Capitel IX: **Symmetrische Complexe** (No. 150—157) . . . 125—136

150. Symmetrischer Complex von $(\mu+1)^2$ Flächen μ-ter Ordnung . . 125

151. Doppelpuncte und charakteristische Curven der Fläche, die durch zwei projectivische Büschel entsteht, die einen symmetrischen Complex bilden . . . . —

152. Doppelpuncte und charakteristische Curven der Fläche, welche durch drei projectivische Netze erzeugt wind, die einen symmetrischen Complex bilden 127

153.–154. Die Fläche, welche durch einen symmetrischen Complex dreier projectivischer Netze entsteht 129 130

155. Doppelpuncte und charakteristische Curven der Fläche, welche vier lineare projectivische Systeme dritter Stufe erzeugen, die einen symmetrischen Complex bilden 131

156. Die durch einen nicht symmetrischen Complex von μ linearen projectivischen Systemen $(\mu-1)$-ter Stufe erzeugte Fläche . . . 134

157. Doppelpuncte und charakteristische Curven der durch einen symmetrischen Complex von μ linearen projectivischen Systemen $(\mu-1)$-ter Stufe erzeugten Fläche 135

*Capitel X: **Eigenschaften der conjugierten Kernflächen** (No. 158—182) . . . . 137—151

158.* Die Hessiana hat $10(\nu-2)^3$ Doppelpuncte. Gemeine und gemischte Polarflächen von Ebenen 137

159.* Gemeine gemischte Polarflächen von Geraden 138

160.* Zweite und gemischte Polarfläche zweier Puncte 139

161.* Die gemeine Polarfläche einer Geraden ist die Einhüllende der zweiten gemeinen Polarflächen der Puncte dieser Geraden . . —

162.* Die gemeine Polarfläche einer Ebene wird von den zweiten gemeinen Polarflächen der Puncte dieser Ebenen berührt . . . —

63.* Steinersche Fläche oder Steineriana 140

No. Seite

164.* Tangentialebenen der ersten Polarflächen, die durch einen Punct der Hessiana gehen . . . . —

165.* Die Polarebenen der Puncte der Hessiana berühren die Steineriana —

166.* Die Steineriana ist die Enveloppe der Ebenen, die zwei zusammenfallende Pole besitzen 141

167.* Den $10(\nu-2)^3$ Doppelpuncten der Hessiana entsprechen ebensoviele Gerade auf der Steineriana . . . . —

168.* Entsprechende Curven . . . . —

169.* Parabolische Curve 142

170.* Zahl der stationären Ebenen, die durch einen beliebigen Punct gehen . . . . —

171.* Liegt auf F_ν eine Gerade, so gehen durch diese $(\nu+2)(\nu-1)^2$ Ebenen, die F_ν noch anderswo berühren. Die Gerade berührt die Hessiana in $2(\nu-2)$ Puncten 143

172.* Ort der Osculierenden von F_ν in den Durchschnittspuncten mit einer gegebenen Fläche . . . . —

173.* Die F_ν längs eines ebenen Schnittes umgeschriebene Developpable 144

174.*, 175.* Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche um- oder eingeschrieben ist einem einer gegebenen Quadrifläche conjugierten Tetraeder . . 145, 146

176.*, 177.* Ort eines Punctes, dessen Quadripolarfläche nach F_ν einem Tetraeder ein- oder umgeschrieben ist, das der Quadripolarfläche in Bezug auf die Hessiana conjugiert ist . . . . — , 147

178.* Ort eines Punctes, dessen Polarebene in Bezug auf die Hessiana die Quadripolarfläche nach F_ν genommen berührt 147

179.* Die Flächen $\mathfrak{S}$ 148

180.*, 181.* Die Flächen $\mathfrak{X}$ 149, 150

182.* Ort eines Punctes, dessen Polarebenen in Bezug auf F_ν und die Hessiana mit der Quadripolarfläche in Bezug auf F_ν einen Punct auf einer gegebenen Ebene gemein haben . . . . —

*DRITTER THEIL.

[Cap. I—VII; No. 183—289.]

*Capitel I: **Anwendung der allgemeinen Theorie auf eine Fundamentalfläche dritter Ordnung** (No. 183-189) 152—155

183.* Die Hessiana einer cubischen Fläche F_3 152

184.* Enveloppe der Polarebenen eines Punctes in Bezug auf die Polarkegel . . . . —

185.* Polarhyperboloid zweier Geraden 153

186.* Polarkegel einer Geraden . . . . —

187.* Gemischte Polarfläche zweier Ebenen 154

188.* Gemeine Polarfläche einer Ebene . . . . —

189.* Büschel von gemischten Polarflächen einer festen und einer variablen Ebene 155

*Capitel II: **Eigenschaften der Hessiana einer Fundamentalfläche dritter Ordnung** (No. 190—219) . . . 155—172

190.* Tangentialebenen der Hessiana von einem Puncte aus 155

No.		Seite
191.*	Umgeschriebener Kegel der Hessiana	—
192.* 192.*	Zahl der Raumcurven vierter Ordnung, die in einem Netze auf einer Quadrifläche zwei Doppelpuncte oder einen Rückkehrpunct haben	156 157
194.*	Die zehn Doppelpuncte $\mathfrak{p}$ der Hessiana vertheilen sich zu drei und drei auf den zehn entsprechenden Geraden p	—
195.*	Die Hessiana hat *im Allgemeinen* nur die zehn Doppelpuncte $\mathfrak{p}$	158
199.*	Jede Gerade, die zwei entsprechende Puncte $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ der Hessiana verbindet, hat die Eigenschaft, dass die Polarebenen ihrer Puncte durch eine und dieselbe Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ gehen	—
197.*	Berührt $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ die Hessiana, so hat die Gerade $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ mit der Hessiana in $\mathfrak{u}'$ einen vierpunctigen Contact	159
198.*	Wendepunct der Durchschnittscurve von F_3 mit einer stationären Ebene	—
199.*	Zahl der Geraden $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$ in einer gegebenen Ebene	—
200.*	Die Polarebene eines Punctes von F_3 in Bezug auf die Hessiana geht durch die Wendepuncte der cubischen Durchschnittscurve von F_3 mit der Tangentialebene	160
201.*	Zahl der Geraden $\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'$ in einer gegebenen Ebene	161
202.*	Schneidet eine Gerade die Hessiana in $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, so bilden die entsprechenden Puncte $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ ein Tetraeder, dessen Seitenflächen bezüglich durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ gehen	—
203.*	Eigenschaften der Tangenten der Hessiana	—
204.*	Der Polarkegel der Geraden p osculiert die Hessiana in $\mathfrak{p}$	162
205.*	Die Hessiana und der Polarkegel von p haben längs der drei Geraden p_1, p_2, p_3, die in $\mathfrak{p}$ zusammenlaufen, dieselben Tangentialebenen	—
206.*	Derselbe Kegel schneidet die Hessiana in einem Kegelschnitte, der in der Polarebene von $\mathfrak{p}$ liegt	—
207.*	Polarfläche der Ebene $\mathfrak{p}p$	163
208.*	Schneidet eine Gerade durch $\mathfrak{p}$ die Hessiana in $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$, so sind die entsprechenden Puncte $\mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ mit $\mathfrak{p}$ in gerader Linie	164
209.*	Die Geraden p liegen zu vier und vier und die Puncte $\mathfrak{p}$ zu sechs und sechs in fünf Ebenen. Das Pentaeder SYLVESTERS	—
210.*	Die Quadripolarflächen der Puncte jeder der fünf Ebenen des Pentaeders sind dem Tetraeder conjugiert, das die vier andern Ebenen bilden	165
211.*	Eigenschaften der Kanten und Diagonalen des Pentaeders	166
212.* 213.*	Entsprechende Figuren gebildet von den Geraden und Ebenen durch $\mathfrak{p}$	— 167
214.* 215.*	Cubischer Kegel, der sich selbst entspricht und die Hessiana in zwei ebenen Curven schneidet. Involution der Ebenen dieser Curven	— 168
216.*	Polarfläche einer Ebene die durch $\mathfrak{p}$ geht	169
217.*	Andere Eigenschaften des Pentaeder. Neues Pentaeder	—
218.*	Polargeraden einer Ebene in Bezug auf die Quadrikegel, deren Scheitel in dieser Ebene liegen. Axen der Polarcylinder	170
219.*	Ebenen, die F_3 in harmonischen oder äquianharmonischen cubischen Curven schneiden	171

No. Seite

*CAPITEL III: **Die siebenundzwanzig Geraden einer Fläche dritter Ordnung** (No. 220—230) . . . . 173—185

220.* Die 27 Geraden; 5 dreifache Tangentialebenen durch jede Gerade; Involution; die 45 Tritangentialebenen 173

221.* Erzeugung von F_3 durch zwei Trieder . . . . —

212.* 223.* Erzeugung durch zwei projectivische Büschel 174, 175

224.* 225.* Projectivität zweier Räume, wo einem Puncte ein Punct und einer Ebene eine cubische Fläche entspricht 176, 177

226.* Die 27 Geraden; Bezeichnung; Regel zur Entscheidung, ob zwei Gerade sich schneiden oder nicht; die 45 Ebenen 178

227.* Die 45 Tripel von Geraden in den 45 Ebenen 179

228.* Beziehungen zwischen den Geraden; das Doppelsechs SCHLAEFLIS . 180

229.* Tabelle der 36 Doppelsechs . . . . —

230.* Jede cubische Fläche lässt sich mittelst drei projectivischer Netze erzeugen 182

*CAPITEL IV: **Abbildung einer Fläche dritter Ordnung auf einer Ebene** (No. 231-246) . . . . 185—195

231.* Geometrie der auf F_3 gezogenen Curven 185

232.* Ebene Curven auf F_3 186

233.* Durchschnittscurve von F_3 mit einer Fläche ν-ter Ordnung . . —

234.* Curve $\mathfrak{c}_{6,4}$ 187

235.* Curve $\mathfrak{c}_{5,2}$ . . . . —

236.* Curve $\mathfrak{c}_{4,0}$ . . . . —

227.* Curve $\mathfrak{c}_{4,1}$ 188

238.* Systeme cubischer Raumcurven auf F_3 189

239.* Durchschnitt von F_3 mit einer andern cubischen Fläche . . . —

240.* Die Curven $\mathfrak{c}_{5,1}$ und $\mathfrak{c}_{5,0}$ 191

241.* Die Curven $\mathfrak{c}_{6,3}$, $\mathfrak{c}_{6,2}$, $\mathfrak{c}_{6,1}$ 192

242.* Die Curve $\mathfrak{c}_{6,0}$ 193

243.* Die Curven $\mathfrak{c}_{7,5}$, $\mathfrak{c}_{7,4}$, $\mathfrak{c}_{8,7}$, $\mathfrak{c}_{7,1}$, $\mathfrak{c}_{8,1}$, $\mathfrak{c}_{9,1}$ . . . . —

244.* Raumcurven auf F_3, die den Geraden, Kegelschnitten und cubischen Curven der Ebene entsprechen . . . . —

245.* 246.* Raumcurve, die einer beliebigen Plancurve entspricht 194, 195

CAPITEL V: **Quadriflächen, welche aus einer Fläche dritter Ordnung Kegelschnitte ausschneiden** (No. 247—259) 195—205

247.* Gemeinschaftliche Puncte zweier Kegelschnitte auf F_3 196

248.* Sind a, b, c drei Gerade in einer Tritangentialebene, so liegen drei Kegelschnitte, deren Ebenen A, B, C bezüglich durch a, b, c gehen, auf derselben Quadrifläche 299

249.* Hyperboloid J_A 197

250.* Ist A die Tritangentialebene abc, so ist J_A die erste Polarfläche des Punctes bc 198

251.* System der Geraden g . . . . —

252.* 253.* Puncte, in denen die beiden Geraden g zusammenfallen . . . 199, 200

No.		Seite
254.*	Die Enveloppe jeder der Hyperboloidreihen J_A, J_B, J_C fällt mit dem Orte der Scheitel der Quadrikegel (ABC) zusammen . .	200
255.*	Büschel der Quadriflächen S_A	201
256.*	Der Ort der Scheitel der Kegel (ABC) ist auch der Ort der Durchschnittscurve der Quadriflächen J_A, S_A; etc.	202
257.*	Die sechs Kegelschnitte von F_3, welche die drei Geraden a, b, c berühren, liegen auf vier Kegeln, deren Scheitel in gerader Linie sind	203
258.*	Hyperboloide, die F_3 in sechs Geraden schneiden	204
259.*	Tripel conjugierter Geraden, die sich nicht schneiden	205
	*Capitel VI: **Verschiedene Eigenschaften** (No. 260–266) .	205—210
260.*	Conjugierte Trieder	205
261.*	Tripel conjugierter Trieder, welche alle 27 Geraden enthalten .	206
262.*	Die Scheitel zweier conjugierter Trieder sind zwei entsprechende Puncte der Hessiana	207
263.*	Eigenschaften der Puncte $\mathfrak{d}$, in denen sich die 27 Geraden zu zwei und zwei schneiden	—
264.*	Die beiden Puncte, in denen die Hessiana von einer Geraden von F_3 berührt wird, sind entsprechende Puncte der Hessiana . .	208
265.*	Die Fläche zehnter Ordnung, welche durch die 135 Puncte $\mathfrak{d}$ geht	—
266.*	Eigenschaften der Durchschnittscurve der Hessiana mit einer beliebigen Ebene	209
	*Capitel VII: **Classification der Flächen dritter Ordnung unter Berücksichtigung der Realität der 27 Geraden** (No. 267—289)	210—227
267.*	Jede reelle cubische Fläche lässt sich durch zwei Trieder erzeugen, die jedes einen reellen Complex bilden	210
268.*	Die beiden Trieder durch sechs reelle Ebenen gebildet	212
269.*	Ein Trieder ist reell; das andere enthält zwei imaginär conjugierte Ebenen	213
270.*	Jedes Trieder enthält zwei imaginär conjugierte Ebenen . . .	215
271.*	Die fünf Arten der allgemeinen cubischen Fläche	217
272.*	Die Erzeugung durch drei projectivische Netze gibt nur die vier ersten Arten	218
273.*	Die Curve $\mathfrak{c}_4$, Durchschnitt zweier Quadriflächen	219
274.*	Das Doppelverhältniss von $\mathfrak{c}_4$ ist das der vier Ebenen, welche die Curve in demselben beliebigen Puncte berühren und bezüglich durch die Scheitel der vier Quadrikegel gehen, auf denen die Curve liegt	220
275.*	Die cubische Plancurve, Perspectivcurve von $\mathfrak{c}_4$	—
276.*	Die drei Fälle des Durchschnitts zweier Quadriflächen, die sich nicht berühren	—
277.*	Monogrammische Curve	221
278.*	Digrammische Curve; zwei Fälle zu unterscheiden	—
279.*	Digrammische Curve, imaginäres Tetraeder	222
280.*	Digrammische Curve, reelles Tetraeder	223
281.*	Imaginärer Durchschnitt	224

No.		Seite
282.*	Die drei Arten von $\mathfrak{c}_4$	224
283.*	Erzeugung von F_3 durch zwei Büschel	225
284.*	Die erste Art	—
285.*	Die fünfte Art	226
286.*	Die dritte Art	—
287.*	Die zweite Art	—
288.*	Die vierte Art	227
289.*	Die Tritangentialebene hat zwei imaginär conjugierte Gerade	—
Zusatz zu No. 214		228

DRUCKFEHLER.

Seite	6,	Zeile	1:	Für „durch“ setze man „auch“.
-	6,	-	21:	- „Curven“ - - „Curve“.
-	11,	-	17:	- „biosculierende Ebenen“ setze man „Doppelgeneratrixen“.
-	45,	-	17:	- „$\varkappa\rho+1 U\rho+1 + \varkappa\rho+2 U\rho+2 + \ldots + \varkappa\mu+1 U\mu+1 = 0$“ setze man: $\varkappa_{\rho+1} U_{\rho+1} + \varkappa_{\rho+2} U_{\rho+2} + \ldots + \varkappa_{\mu+1} U_{\mu+1} = 0$“.
-	60,	-	26:	- „Dreht man die Ebene r“, setze man: „Dreht man die Ebene um r“.
-	65,	-	7:	- „Polaren“ setze man „Polarflächen“.
-	66,	-	25:	- „$(\nu-1)(\nu-2)-6$“ setze man: $\nu(\nu-1)(\nu-2)-6$“.
-	75,	-	19:	- „$(\rho-\sigma)$-fach“ - - „$(\sigma-\rho)$-fach“.
-	92,	-	25:	tilge man am Ende der Zeile den Buchstaben χ.
-	95,	-	20:	für $\nu^1+\nu_2)$-ter“ setze man „$(\nu_1+\nu_2)$-ter“.
-	99,	-	20:	- „auf“ - - „in“
-	104,	-	27:	- „zwei“ - - „drei“.
-	117,	-	1 v. u.	- „auf“ - - „in“.
-	125,	-	10:	- „$\mathfrak{S}_{\mu+2}$“ - - „$\mathfrak{S}_{\mu,2}$“.
-	126,	-	24:	- „ν_2-ter“ - - „ν^2-ter“.
-	128,	-	39:	„ν_3“ - - „ν^3“.
-	165,	-	13:	- „p^4“ - - „p_4“.
-	206,	-	28:	- „b^1“ - - „b_1“.

ERSTER THEIL.

CAPITEL I.

KEGEL.

1. *Kegel* ist der Ort einer Geraden (*Generatrix, Erzeugende*), die sich um einen festen Punct oder Scheitel $\mathfrak{v}$ nach einem gegebnen Gesetze continuierlich bewegt, zum Beispiel, indem sie stets eine gegebne Curve schneidet.

Ein Kegel heisst von der *ν-ten Ordnung*, wenn eine beliebig durch den Scheitel gelegte Ebene ihn in ν (reellen, imaginairen, getrennten, zusammenfallenden) Generatrixen schneidet.

Ein Kegel ν-ter Ordnung wird von einer beliebigen Geraden in ν Puncten getroffen, und eine willkürliche Ebene schneidet ihn in einer Curve ν-ter Ordnung.

Ein Kegel erster Ordnung ist eine Ebene.

2. Trifft eine Gerade r einen Kegel in zwei unendlich nahen Puncten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$, so heisst sie *Tangente* des Kegels in $\mathfrak{m}$. Jede Ebene, welche durch r gelegt ist, schneidet den Kegel in einer Curve, die r in eben diesem Puncte $\mathfrak{m}$ berührt. Wenn r umgekehrt einen Schnitt des Kegels berührt, so ist sie auch eine Tangente des Kegels.

Die Ebene, welche durch $\mathfrak{v}$ und die Tangente r gelegt ist, enthält natürlich zwei unendlich nahe Generatrixen $\mathfrak{v}\,\mathfrak{m}$, $\mathfrak{v}\,\mathfrak{m}'$. Also liegen die Tangenten des Kegels in den verschiedenen Puncten ein und derselben Generatrix $\mathfrak{v}\,\mathfrak{m}$ sämmtlich in ein und derselben Ebene. Diese Ebene heisst *Tangentialebene* des Kegels und die Gerade $\mathfrak{v}\,\mathfrak{m}$ *Berührungsgeneratrix*.

Ebenso wie zwei unmittelbar auf einander folgende Generatrixen $\mathfrak{v}\,\mathfrak{m}$, $\mathfrak{v}\,\mathfrak{m}'$ in der Ebene liegen, welche längs $\mathfrak{v}\,\mathfrak{m}$ berührt, schneiden sich zwei unmittelbar folgende Tangentialebenen, nämlich längs $\mathfrak{v}\,\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{v}\,\mathfrak{m}'$, in der Erzeugenden $\mathfrak{v}\,\mathfrak{m}'$. Man kann folglich den Kegel sowohl als *Ort von Geraden* (Generatrixen) als auch als *Enveloppe von Ebenen* (Tangentialebenen) auffassen.

Classe eines Kegels ist die Zahl derjenigen Tangentialebenen desselben, die durch einen beliebig im Raume angenommenen Punct hindurchgehen, oder auch durch eine Gerade, welche beliebig durch den Scheitel gelegt ist. Ein Kegel erster Classe ist eine Gerade, das heisst ein *Büschel von Ebenen,* die sämmtlich durch dieselbe Gerade gehen.

Schneidet man den Kegel durch eine beliebige Ebene, so erhält man eine Curve oder einen Schnitt, dessen Puncte und Tangenten die Spuren der Erzeugenden und der Tangentialebenen des Kegels sind. Diese Curve ist daher nicht nur von derselben Ordnung als der Kegel, sondern auch von der nämlichen Classe.

3. Den Singularitäten der Curve entsprechen ebensoviele Singularitäten des Kegels und umgekehrt. Wir nennen diejenigen Erzeugenden *Doppel-* (Knoten- oder conjugierte), *dreifache, . . . , Stillstands-* oder *Rückkehrgeneratrixen,* welche den Doppelpuncten, den dreifachen Puncten, . . . , und den Spitzen des Schnittes entsprechen; dagegen *Doppeltangentialebenen, dreifache Tangentialebenen, ... , Wendeebenen* diejenigen Ebenen, welche durch $\mathfrak{v}$ gehen, und deren Spuren die Doppeltangenten, dreifachen Tangenten, . . . , Wendetangenten des Schnittes sind. Eine Doppelgeneratrix ist die Durchschnittsgerade zweier Schalen der Fläche, die reell oder imaginär sein können. Werden diese beiden Schalen von ein und derselben Ebene berührt, so geht die Doppelgeneratrix in die Rückkehrgeneratrix über. Eine Doppeltangentialebene berührt den Kegel in zwei verschiedenen Generatrixen; eine Wendeebene berührt denselben in zwei unmittelbar folgenden Generatrixen *(Beugung);* u. s. w.

Man bezeichne durch:

ν die Ordnung und durch
μ die Classe des Kegels; es sei ferner
δ die Zahl der Doppelgeneratrixen,
$\varkappa$ „ „ „ Rückkehrgeneratrixen,
τ „ „ „ Doppeltangentialebenen und
ι „ „ „ Wendeebenen.

Da diese nämlichen Zahlen die analogen Singularitäten der ebenen Curven ausdrücken, so greifen für sie die Formeln von Plücker[1]) Platz:

$$\begin{aligned}
\mu &= \nu(\nu-1) - 2\delta - 3\varkappa,\\
\nu &= \mu(\mu-1) - 2\tau - 3\iota,\\
\iota &= 3\nu(\nu-2) - 6\delta - 8\varkappa,\\
\varkappa &= 3\mu(\mu-2) - 6\tau - 8\iota,
\end{aligned}$$

von denen eine jede die Folge aus den drei übrigen ist.

4. Die Eigenschaften der Kegel und im Allgemeinen der Figuren, die aus Geraden und Ebenen zusammengesetzt sind, welche sämmtlich durch einen festen Punct, den Scheitel, gehen, lassen sich aus denen der ebenen Curven und der aus Puncten und Geraden zusammengesetzten Figuren, welche

---

[1]) Cremona, *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven,* Nr. 99 u. 100.

in einer festen Ebene gezeichnet sind, herleiten entweder mittelst der Lehre von den Projectionen oder der Perspective, oder vermittelst des Princips der Dualität. In letzterm Falle entsprechen den Puncten und den Geraden der ebenen Figur bezüglich die Ebenen und die Geraden der conischen Figur.

Wir fügen hier den Ausspruch einiger Lehrsätze hinzu, die aus der Theorie der ebenen Curven hergeleitet sind. In ihnen hat man sich vorzustellen, dass alle Geraden und Ebenen durch den nämlichen festen Punct gelegt sind, welcher der gemeinsame Scheitel aller Kegel ist, deren noch Erwähnung geschehen wird.

Zwei Kegel von den Ordnungen ν, ν' und den Classen μ, μ' haben $\nu\nu'$ gemeinschaftliche Erzeugende und $\mu\mu'$ gemeinschaftliche Tangentialebenen. Besitzen die beiden Kegel längs einer gemeinsamen Generatrix dieselbe Tangentialebene, so haben sie ausserdem nur noch $\nu\nu'-2$ gemeinschaftliche Generatrixen und $\mu\mu'-2$ gemeinschaftliche Tangentialebenen.

Ein Kegel der ν-ten Ordnung oder Classe, dessen Scheitel gegeben ist, wird durch $\frac{\nu(\nu+3)}{1.2}$ Bedingungen bestimmt. Durch $\frac{\nu(\nu+3)}{1.2}$ beliebig gegebene Gerade geht nur ein einziger Kegel ν-ter Ordnung, und $\frac{\nu(\nu+3)}{1.2}$ beliebig gegebne Ebenen berühren einen einzigen Kegel ν-ter Classe. Durch die gemeinschaftlichen Generatrixen zweier Kegel ν-ter Ordnung gehen unendlich viele Kegel derselben Ordnung hindurch, die einen Complex bilden, welchen man *Kegelbüschel* ν-ter Ordnung nennt. Ein Kegel ν-ter Ordnung kann nicht mehr als $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2}$ Doppelgeneratrixen besitzen — die Rückkehrgeneratrixen eingeschlossen —, ohne in Kegel niederer Ordnung zu zerfallen. U. s. w.

Eine Ebene, die man beliebig durch eine feste Gerade gelegt hat, schneidet einen gegebenen Kegel ν-ter Ordnung in ν Erzeugenden. Dann ist der Ort der harmonischen Axen [1]) ρ-ten Grades des Systems der ν Generatrixen in Bezug auf die feste Gerade ein Kegel ρ-ter Ordnung, den man den $(\nu-\rho)$-ten *Polarkegel* der festen Geraden *(Polargeraden)* in Bezug auf den gegebenen Kegel *(Fundamentalkegel)* nennen kann. Auf diese Weise gibt eine gerade Linie $\nu-1$ Polarkegeln Entstehung, deren Ordnungszahlen der Reihe nach $\nu-1$, $\nu-2$, . . . , 2, 1 sind. Der letzte Polarkegel ist eine Ebene. Wenn der ρ-te Polarkegel einer Geraden durch eine andere Gerade geht, so enthält umgekehrt der $(\nu-\rho)$-te Polarkegel dieser letzeren Geraden die erstere. Die Polarkegel einer Generatrix des Fundamentalkegels berühren denselben längs dieser Generatrix. Die Polarkegel $(\nu-1)$-ter Ordnung der Geraden einer festen Ebene bilden ein Büschel. Die Geraden, welche Doppelgeneratrixen von Polarkegeln $(\nu-1)$-ten Ordnung

[1]) *Einleitung*, Nr. 19, 68.

sind, bilden einen Kegel (den *Hesseschen*) von der Ordnung $3(\nu-2)$, welcher den Fundamentalkegel in den Inflexionsgeneratrixen des letzern schneidet, u. s. w.[1])

5. Ein Kegel zweiter Ordnung ist auch zweiter Classe und umgekehrt. Die Theorie dieser Kegel *(Quadrikegel)* ist eine unmittelbare Folge der Theorie der Kegelschnitte.[2])

Ein Kegel dieser Art kann sowohl als Ort der Durchschnittsgeraden zweier entsprechender Ebenen in zwei projectivischen Ebenenbüscheln [3]) — die immer als durch denselben festen Punct gehend angenommen werden — erzeugt werden, und auch als Enveloppe der Ebenen, welche durch zwei entsprechende Strahlen zweier projectivischer Strahlenbüschel hindurchgehen. Diese Strahlenbüschel liegen in verschiedenen Ebenen, haben aber denselben Mittelpunct. Umgekehrt erzeugen in einem Quadrikegel die Ebenen, welche durch dieselbe variable Generatrix und bezüglich durch zwei feste Generatrixen gehen, zwei projectivische Büschel; und eine variable Tangentialebene schneidet zwei feste Tangentialebenen in Geraden, welche zwei projectivische Strahlenbüschel bilden.[4]) .

Wir nennen zwei Gerade *conjugiert*, von denen die eine in der Polarebene der andern liegt, und zwei Ebenen heissen *conjugiert*, von denen eine jede die Polargerade der andern enthält. Zwei conjugierte Gerade bilden mit den beiden Generatrixen des Fundamentalkegels, die in ihrer Ebene enthalten sind, ein harmonisches System, und der Winkel zweier conjugierter Ebenen wird von *den* Tangentialebenen des Kegels harmonisch getheilt, welche durch die gemeinschaftliche Durchschnittsgerade der beiden ersten Ebenen gehen.

Ein Trieder heisst einem Quadrikegel *conjugiert*, wenn jede Kante desselben die entgegenstehende Seitenebne als Polarebene hat. Zwei demselben Kegel conjugierte Trieder sind einem zweiten Kegel eingeschrieben und einem dritten umgeschrieben. Ist ein Kegel einem Trieder umgeschrieben, das einem andern Kegel conjugiert ist, so ist umgekehrt der letztere Kegel einem Trieder eingeschrieben, welches dem ersten Kegel conjugiert ist. Zwei Kegel haben ein conjugirtes Trieder gemein, dessen Seitenebenen die Diagonalebenen des vollständigen Tetraeders sind, das durch die gemeinschaftlichen Tangentialebenen der beiden Kegel gebildet wird, und dessen Kanten die

---

[1]) *Einleitung*, §. 13 u. 15.

[2]) *Einleitung*, §. 11 u. 18.

[3]) Zwei Ebenenbüschel heissen *projectivisch*, wenn man jedes durch eine Ebene, die nicht zu dem Büschel gehört, schneidet, und die dadurch entstehenden Strahlenbüschel projectivisch sind. *Doppelverhältniss von vier Ebenen des Ebenenbüschels* ist das Doppelverhältniss der vier entsprechenden Strahlen des auf die obige Weise entstandenen Strahlenbüschels.

[4]) Chasles, *Mémoire de géométrie pure sur les propriétés générales des cônes du second degré.* (Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles, T. 6; 1830).

Durchschnittsgeraden der entgegengesetzten Ebenenpaare sind, welche durch die denselben beiden Kegeln gemeinschaftlichen Erzeugenden hindurchgehen; u. s. w.

Ein Kegel zweiter Ordnung, der eine Doppelgerade enthält, ist das System zweier Ebenen, die durch diese Gerade gehen. Ein Kegel zweiter Classe, der eine Bitangentialebene besitzt, besteht aus dem Systeme zweier Geraden, die in dieser Ebene liegen.

Diejenigen Quadrikegel, welche drei gemeinschaftlichen Bedingungen unterworfen sind und so beschaffen, dass jeder Kegel durch zwei Gerade nur auf eine einzige Weise bestimmt ist, bilden einen Complex, den man ein *Netz* nennen kann. In einem Netze von Quadrikegeln gibt es eine unbegrenzte Zahl, die sich in Ebenenpaare auflösen, das heisst, eine Doppelgerade besitzen. Die Enveloppe dieser Ebenen ist ein Kegel dritter Classe, und der Ort der Doppelgeraden ein Kegel dritter Ordnung. U. s. w. [1])

CAPITEL II.

DEVELOPPABLE FLÄCHEN UND RAUMCURVEN.

6. Wir betrachten eine Curve als den Ort aller Lagen eines Punctes, welcher sich continuierlich im Raume nach einem solchen Gesetze bewegt, dass eine beliebige Ebene nur ein System getrennter Lagen des Mobils enthält. [2]) Die Curve heisst *gewunden* oder eine *Raumcurve*, wenn vier *ganz beliebige* Puncte derselben nicht in ein und derselben Ebene enthalten sind.

Die Curve heisst von der *ν-ten Ordnung*, wenn eine beliebige Ebene sie in ν Puncten — die reell, imaginär, verschieden, zusammenfallend sein können — schneidet. Es folgt aus dieser Definition, dass eine *Raumcurve* mindestens von der dritten Ordnung ist.

Die Gerade, welche den Punct $\mathfrak{m}$ der Curve mit dem unmittelbar folgenden Puncte $\mathfrak{m}'$ verbindet, heisst *Tangente* der Curve in $\mathfrak{m}$. Jede Ebene, welche durch die Gerade $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'$ hindurchgeht, heisst ebenfalls *Tangentialebene* der Curve in $\mathfrak{m}$ und kann anderswo die Curve nur noch in $\nu-2$ Puncten treffen.

Classe einer Raumcurve ist die Zahl ihrer Tangentialebenen, welche

---

[1]) Um Zweideutigkeiten zu vermeiden, wiederhole ich, dass in den Sätzen dieser Nummer und in denen der vorhergehenden, die Kegel, von denen die Rede ist, sämmtlich denselben Scheitel besitzen, durch den alle Geraden und alle Ebenen hindurchgehen, die in Betracht gekommen.

[2]) Das heisst in der Art, dass alle auf einanderfolgende Lagen des sich bewegenden Punctes von der Veränderung eines einzigen Parameters abhängen. Eine Curve kann man daher eine *einfach unendliche Reihe von Puncten* nennen.

durch eine beliebige Gerade hindurchgehen, oder durch die Zahl ihrer Tangenten, welche durch die willkürliche Gerade geschnitten werden.

Es seien $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}', \mathfrak{m}'', \mathfrak{m}''', \ldots$ unendlich nahe auf einander folgende Puncte der Curve. Dann haben die beiden unmittelbar folgenden Tangenten $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}'\,\mathfrak{m}''$ den Punct $\mathfrak{m}'$ gemein und bestimmen eine Ebene $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'\,\mathfrak{m}''$, die man, weil sie eine dreipunctige Berührung mit der Curve hat, *Osculationsebene* in $\mathfrak{m}$ nennt. Zwei auf einander folgende Osculationsebenen $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'\,\mathfrak{m}''$, $\mathfrak{m}'\,\mathfrak{m}''\,\mathfrak{m}'''$ schneiden sich in der Tangente $\mathfrak{m}'\,\mathfrak{m}''$, und drei unmittelbar folgende Osculationsebenen $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'\,\mathfrak{m}''$, $\mathfrak{m}'\,\mathfrak{m}''\,\mathfrak{m}'''$, $\mathfrak{m}''\,\mathfrak{m}'''\,\mathfrak{m}^{IV}$ treffen sich im Puncte $\mathfrak{m}''$ der Curve.

Es ist folglich ein Punct der Curve sowohl durch zwei unmittelbar folgende Tangenten bestimmt, als durch drei unmittelbar folgende Osculationsebenen; ebenso eine Tangente entweder durch zwei unendlich nahe Puncte der Curve oder durch zwei unmittelbar folgende Osculationsebenen; eine Osculationsebene endlich ist bestimmt durch drei unmittelbar folgende Puncte oder durch zwei unmittelbar folgende Tangenten.

7. Man nennt den Ort der Tangenten einer Curve eine *abwickelbare Fläche* oder eine *Developpable;* die Tangenten sind die *Generatrixen* der abwickelbaren Fläche. *Ordnung* der Developpablen ist die Zahl der Puncte, in denen dieselbe von einer willkürlichen Geraden geschnitten wird, daher ist diese Zahl gleich der Classenzahl der Curven. Die Osculationsebene $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'\,\mathfrak{m}''$, der Curve im Puncte $\mathfrak{m}$ heisst die *Tangentialebene* der Developpablen längs der Generatrix $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'$, denn sie enthält die beiden unmittelbar folgenden Erzeugenden $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}'\,\mathfrak{m}''$, und es ist folglich jede in der Ebene gezogene Gerade Tangente der abwickelbaren Fläche — das heisst sie trifft sie in zwei unendlich nahen Puncten — in einem Puncte der *Berührungsgeneratrix* $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'$ und umgekehrt, jede Tangente der Developpablen in einem Puncte dieser Generatrix liegt in der genannten Ebene. Wie jede Tangentialebene der abwickelbaren Fläche zwei unmittelbar folgende Erzeugende enthält, so liegt jede Generatrix in zwei unmittelbar folgenden Tangentialebenen; die abwickelbare Fläche ist also gleichzeitig *der Ort der Tangenten der Curve* und *die Enveloppe der Osculationsebenen* derselben.

Wir haben den Begriff der *Developpablen* aus dem der *Curve* entwickelt, wir können aber auch die Curve aus der abwickelbaren Fläche herleiten. Wir denken uns eine Ebene, die sich stetig im Raume nach einem solchen Gesetze bewegt, dass durch einen beliebig gewählten Punct nur ein System getrennter Lagen der beweglichen Ebene hindurchgeht. [1]) Die Enveloppe der Lagen der sich bewegenden Ebene oder auch der Ort der Geraden, in

---

[1]) Das heisst in der Art, dass alle Lagen der beweglichen Ebene von der Veränderung eines einzigen Parameters abhängen. Eine abwickelbare Fläche ist daher eine *einfach unendliche Reihe von Ebenen.* Die Kegel stellen einen speciellen Fall davon dar.

welchen sich zwei unmittelbar folgende Lagen dieser Ebene schneiden, ist das, was man eine *abwickelbare Fläche* nennt.[1])

Es seien P, P', P'', P''' . . . auf einander folgende Lagen der sich bewegenden Ebene. Die Ebene P enthält dann die beiden unmittelbar folgenden Geraden PP', $P'P''$. Die drei Ebenen P, P', P'' schneiden sich in einem Puncte, dessen Ort eine gewisse auf der Developpablen gelegene Curve ist. Der Punct $PP'P''$ liegt in den beiden unmittelbar folgenden Erzeugenden PP', $P'P''$, und umgekehrt enthält die Generatrix $P'P''$ die beiden unmittelbar folgenden Puncte $PP'P''$, $P'P''P'''$ der Curve. Die Generatrixen der Developpablen sind folglich Tangenten der Curve. Die Ebene P'' enthält die drei unmittelbar folgenden Puncte $PP'P''$, $P'P''P'''$, $P''P'''P^{IV}$, und es sind daher die Tangentialebenen der abwickelbaren Fläche Osculationsebenen der Curve.

Classe der abwickelbaren Fläche ist die Zahl ihrer Tangentialebenen, welche durch einen willkürlich im Raume angenommenen Punct gelegt werden können.

8. Wir können bei den Developpablen die analogen Singularitäten betrachten, die wir schon bei den Kegeln bemerkt haben (3). Eine Tangentialebene heisst *doppelt*, wenn sie die abwickelbare Fläche längs zweier verschiedener Erzeugenden berührt und folglich die Curve, deren Tangenten die Generatrixen der abwickelbaren Fläche sind, in zwei getrennten Puncten osculiert; sie heisst eine *stationäre* oder *Wendeebene*, wenn sie die Developpable längs zweier unmittelbar folgender Erzeugenden berührt, oder, was dasselbe ist, längs dreier unmittelbar folgender Generatrixen schneidet und folglich mit der Curve einen vierpunctigen Contact hat. Eine Generatrix ist *doppelt*, wenn längs derselben die Developpable zwei verschiedne Tangentialebenen hat, weshalb sie auch die Curve in zwei verschiedenen Puncten berührt. In dem Schnitte, der durch eine beliebige durch sie gelegte Ebene entsteht, zählt sie für *zwei* Gerade, und in den beiden Schnitten, welche durch die beiden Tangentialebenen entstehen für *drei*. Eine Generatrix heisst *stationär*, wenn durch sie drei unmittelbar folgende Tangentialebenen der Developpablen hindurchgehen; in ihr liegen daher drei unmittelbar folgende Puncte der Curve. Eine solche zählt in dem Schnitte, der durch eine beliebige Ebene entsteht, welche durch sie hindurchgeht, für *zwei* und für *drei* Gerade in dem von der Tangentialebene gebildeten Schnitte.

Den beiden ersten Singularitäten entsprechen die folgenden Singularitäten der Raumcurve. Ein Punct der Curve heisst *doppelt*, wenn in demselben zwei verschiedne Tangenten existieren und folglich zwei verschiedne Osculationsebenen; er heisst *Stillstandspunct (Spitze)*, wenn sich in ihm drei aufeinanderfolgende Tangenten schneiden, oder auch vier aufeinanderfolgende Osculationsebenen. Ein Doppelpunct — und ebenso eine Spitze — vertritt

---

[1]) Monge, *Application de l'analyse à la géométrie*, §. XII.

vier Durchschnittspuncte mit jeder Osculationsebene und mit der Ebene der beiden Tangenten; er vertritt *drei* Schnittpuncte für jede andere Ebene, welche durch eine der beiden Tangenten geht, und nur *zwei* für jede andere Ebene, welche durch den Punct selbst hindurchgeht.

Die Developpable und die Curve können andere Singularitäten höherer Art haben, die wir aber jetzt nicht in Betracht ziehen wollen.

9. Wir schneiden die abwickelbare Fläche durch eine Ebene **P**; der entstehende Schnitt ist dann eine Curve von der nämlichen Ordnung als die abwickelbare Fläche. Die Puncte derselben sind die Spuren der Generatrixen und ihre Tangenten die Spuren der Tangentialebenen, weil, wie schon früher bemerkt wurde, jede Gerade, die in einer Tangentialebene einer abwickelbaren Fläche gezogen ist, auch Tangente dieser Fläche ist. Es folgt daher, dass auch die Classe des Schnittes mit der Classe der abwickelbaren Fläche zusammenfällt, denn die Tangenten, die sich an dieselbe durch einen beliebigen Punct ihrer Ebene ziehen lassen, sind die Spuren der Ebenen, welche von dem nämlichen Puncte ausgehend die Developpable berühren. Die Doppeltangenten der Schnittcurve bestehen ausser den Spuren der doppelten Tangentialebenen aus den Geraden der Ebene **P**, durch welche zwei Tangentialebenen gehen, und die Wendetangenten endlich sind die Spuren der Wendeebenen.

Jeder Punct **m** der Raumcurve, deren Tangenten die Erzeugenden der developpablen Fläche sind, der in der Ebnen **P** liegt, ist eine Spitze des Schnittes. Da nämlich dieser Punct der Durchschnitt von drei unmittelbar folgenden Tangentialebenen ist, so müssen sich in ihm drei aufeinanderfolgende Tangenten des Schnittes schneiden. Dieser Eigenschaft wegen gibt man der Raumcurve den Namen *Rückkehrkante* oder *Cuspidalcurve* der Developpablen. Dem entsprechend nennt man die Enveloppe der Osculationsebene einer Raumcurve ihre *osculierende Developpable.*

Die Geraden, die in der Ebene **P** willkürlich durch den Punct **m** gezogen sind, treffen in ihm die Schnittcurve in zwei zusammenfallenden Puncten, aber es gibt eine Gerade, die Rückkehrtangente, das heisst die Spur der Osculationsebene der Raumcurve in **m**, für welche der Punct **m** drei zusammenfallende Schnittpuncte darstellt. Es trifft folglich eine willkürlich durch einen Punct der Cuspidalcurve gelegte Gerade dort die Developpable in zwei zusammenfallenden Puncten, unter diesen Geraden gibt es aber eine unbegrenzte Zahl, für welche dieser Punct einen dreifachen Berührungspunct darstellt, und der Ort dieser Geraden ist die Ebene, welche in jenem Puncte die Curve osculiert.

Schneiden sich zwei nicht unmittelbar folgende Generatrixen auf der Ebene **P**, so ist der Schnittpunct für die Schnittcurve ein Doppelpunct, weil diese in ihm von den Spuren der beiden Ebenen berührt wird, welche die abwickelbare Fläche längs jener Erzeugenden berühren. Diese Spuren sind die einzigen Geraden, welche in jenem Puncte eine dreifache Berührung mit dem Schnitte haben, während jede andere in der Ebene **P** durch den nämlichen Punct gezogene Gerade dort den Schnitt nur in zwei zusammenfallenden Puncten trifft. Alle analogen Puncte, nämlich die Durchschnittspuncte zweier nicht aufeinander folgenden Erzeugenden, bilden auf der abwickelbaren Fläche eine Curve, welche wir wegen der eben angemerkten Eigenschaft die *Doppelcurve* oder die *Knotencurve* der Developpablen nennen. Die Tangente der Doppelcurve in einem beliebigen ihrer Puncte ist offenbar die Durchschnittsgerade der beiden Ebenen, welche in diesem Puncte die Developpable berühren.

Eine Gerade also, welche willkürlich durch einen Punct der Doppelcurve gelegt ist, trifft dort die Developpable in zwei zusammenfallenden Puncten, aber unter den analogen Geraden gibt es eine unbegrenzte Zahl für welche dieser Punct drei vereinigte Durchschnittspuncte repräsentiert, und der Ort derselben wird von den beiden Ebenen gebildet, welche die abwickelbare Fläche längs der Generatrixen berühren, die sich in diesem Puncte kreuzen.

Dagegen liegen, wie schon bemerkt wurde, die Geraden, welche die Developpable in einem gewöhnlichen Puncte berühren, sämmtlich in einer einzigen Ebene, der Tangentialebene längs der einzigen Generatrix, die durch jenen Punct geht, und haben mit der abwickelbaren Fläche eine zweipunctige Berührung.

Ausserdem enthält der Schnitt eine Spitze in der Spur jeder stationären Generatrix und einen Doppelpunct in der Spur jeder Doppelgeneratrix.

10. Es bezeichne jetzt:

ν die Ordnung der gegebenen Raumcurve,

μ die Classe des osculierenden Developpablen,

ρ die Ordnung dieser Fläche oder auch die Classe der Raumcurve,

γ die Zahl der Geraden, die in einer beliebigen Ebene **P** liegen, und durch welche jedesmal zwei Tangentialebenen der Developpablen gehen, die Zahl der doppelten Tangentialebenen eingeschlossen, wenn es solche gibt,

ξ die Zahl der Puncte der Ebene **P**, durch welche jedesmal zwei Generatrixen der abwickelbaren Fläche gehen, also die Ordnung der Doppelcurve, die Zahl der Doppelgeneratrixen eingeschlossen, wenn es solche gibt,

α die Zahl der Wendeebenen und

θ die Zahl der stationären Generatrixen.

Nun ist der Schnitt, der durch die Ebene **P** in der Developpablen erzeugt wird, eine Curve ρ-ter Ordnung und μ-ter Classe, die ξ Doppelpuncte besitzt und $\nu+\theta$ Spitzen, γ Doppeltangenten und α Wendepuncte. Also erhalten wir mit Hilfe der Formeln von Plücker:

$$\begin{cases} \mu = \rho(\rho-1) - 2\xi - 3(\nu+\theta), \\ \rho = \mu(\mu-1) - 2\gamma - 3\alpha, \\ \nu + \theta - \alpha = 3(\rho-\mu). \end{cases}$$

11. Man betrachte einen beliebigen Punct σ des Raumes als Scheitel eines Kegels, der durch die gegebne Raumcurve geht *(Perspectivkegel).* Die

Erzeugenden dieses Kegels sind die Geraden, welche vom Puncte $\mathfrak{o}$ nach den Puncten der Curve gehen, und die Tangentialebenen des Kegels sind diejenigen Ebenen, die durch den Scheitel und die Tangente der Curve hindurchgehen. Eine durch $\mathfrak{o}$ gelegte Ebene schneidet den Kegel in so vielen Generatrixen, als die Curve Puncte in dieser Ebene besitzt. Die Ordnung des Kegels ist also gleich der Ordnung der Curve. Durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{o}'$ des Raumes gehen so viele Tangentialebenen des Kegels, als es Tangenten der Curve gibt, welche durch die Gerade $\mathfrak{o}\,\mathfrak{o}'$ geschnitten werden; die Classe des Kegels ist also gleich der Classe der Curve oder auch gleich der Ordnung der osculierenden Developpablen.

Doppelgeneratrixen des Kegels sind die Geraden, welche den Punct $\mathfrak{o}$ mit den Doppelpuncten der Curve verbinden, und dann noch die Geraden, welche durch $\mathfrak{o}$ gehen und sich in zwei verschiednen Puncten auf die Curve stützen, weil in beiden Fällen der Kegel längs derselben Generatrix zwei Tangentialebenen besitzt. — Ferner sind diejenigen Geraden stationäre Generatrixen, welche den Scheitel $\mathfrak{o}$ mit den Spitzen der Curve verbinden.

Ist eine durch $\mathfrak{o}$ gelegte Ebene eine Osculationsebene der Curve, so ist sie für den Kegel eine Wendeebene, weil sie drei aufeinanderfolgende Erzeugende enthält. Zieht man durch $\mathfrak{o}$ willkürlich in der Wendeebene eine Gerade, so zählt diese Ebene für *zwei* der ρ Ebenen, welche durch die Gerade gehen und den Kegel berühren; aber es gibt eine Gerade, die Berührungsgeneratrix der Wendeebene, für welche diese Ebene *dreimal* [1]) gezählt wird. Ziehen wir also in einer Osculationsebene der Curve eine beliebige Gerade, so zählt die Osculationsebene unter den Ebenen, welche sich durch diese Gerade so ziehen lassen, dass sie die Curve berühren, für *zwei*, aber es gibt eine unbegrenzte Zahl von Geraden, für welche die Osculationsebene *dreimal* zählt. Alle diese Geraden gehen durch den Osculationspunct.

Berührt eine Ebene, welche durch $\mathfrak{o}$ geht, die Curve in zwei verschiedenen Puncten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, so berührt sie den Kegel längs zwei Erzeugenden $\mathfrak{o}\,\mathfrak{m}$, $\mathfrak{o}\,\mathfrak{n}$ und ist folglich eine doppelte Tangentialebene des Kegels. Die Bitangentialebene zählt für *zwei* unter den Tangentialebenen des Kegels, welche durch eine beliebige in der Bitangentialebene selbst durch $\mathfrak{o}$ gelegte Gerade gehen; sie zählt für *drei*, wenn die Gerade eine der beiden Berührungsgeneratrixen ist. Zieht man daher in einer Bitangentialebene der Raumcurve eine beliebige Gerade, so zählt diese Ebene für *zwei* Ebenen, welche durch diese Gerade gehen und die Curve berühren, aber sie zählt für *drei* in Bezug auf die unbegrenzte Zahl von Geraden, die man in besagter Ebene durch den einen oder andern Berührungspunct ziehen kann.

Alle analogen Ebenen, von denen eine jede die Raumcurve in zwei Puncten berührt oder, was dasselbe ist, zwei nicht unmittelbar folgende Tangenten enthält, haben zur Enveloppe eine abwickelbare Fläche, welche man

[1]) Dies ergibt sich aus der entsprechenden Eigenschaft der ebenen Curven. *Einleitung*, Nr. 31.

die *doppeltumgeschriebne* oder *doppeltberührende* Developpable der Curve nennt. Jede dieser Ebenen berührt die Developpable längs der Geraden, welche die beiden Berührungspuncte der Ebene und der gegebnen Curve mit einander verbindet.

Ausserdem ist jede Ebene, welche durch eine doppelte Tangente geht eine Bitangentialebene des Kegels, und jede Gerade, welche durch eine Wendetangente gelegt ist, eine Wendeebene des Kegels.

12. Bezeichnen wir also durch:

ϑ die Zahl der Geraden, welche sich von einem willkürlichen Puncte σ so ziehen lassen, dass sie die Raumcurve zweimal treffen unter Hinzunahme der Zahl der Doppelpuncte dieser Curve, oder mit andern Worten die Zahl der *scheinbaren* und *wirklichen* Doppelpuncte; durch

η die Zahl der Ebenen, die durch σ gehen, und zwei nicht unmittelbar folgende Tangenten der Curve enthalten oder auch die Classe der doppeltberührenden Developpablen unter Hinzunahme der Zahl der bioseulierenden Ebenen; und mit

β die Zahl der Spitzen der Curve,

so ist der Perspectivkegel, dessen Scheitel σ ist, von der ν-ten Ordnung, der ρ-ten Classe, er hat ϑ Doppelgeneratrixen, β stationäre Generatrixen, η Bitangentialebenen und $\mu+\theta$ Wendeebenen. Wir haben folglich (3):

$$\begin{cases} \rho = \nu(\nu-1) - 2\vartheta - 3\beta, \\ \nu = \rho(\rho-1) - 2\eta - 3(\mu+\theta), \\ \mu + \theta - \beta = 3(\rho-\nu). \end{cases}$$

Die sechs vorstehenden Gleichungen verdankt man CAYLEY [1]. Mittelst derselben oder anderer, die sich aus ihnen ableiten lassen, wie zum Beispiel die folgenden:

$$\begin{cases} \alpha-\beta = 2(\mu-\nu), \\ \xi-\eta = \mu-\nu, \\ 2(\gamma-\vartheta) = (\mu-\nu)(\mu+\nu-7), \end{cases}$$

kann man jedesmal, wenn vier von den zehn Grössen

$$\nu,\ \mu,\ \rho,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \vartheta,\ \xi,\ \eta,\ \theta$$

gegeben sind, die andren sechs bestimmen. Die gegebenen Zahlen dürfen aber weder ρ, θ, ξ, β noch ρ, θ, η, α sein, weil man aus den obigen Gleichungen die folgenden Relationen herleiten kann:

$$\rho(\rho-4) - 2\theta = 2\xi + \beta = 2\eta + \alpha. \text{[2]}$$

Die vorhergehenden Betrachtungen zeigen, dass die Untersuchung der Raumcurven nicht von der der developpablen Flächen getrennt werden kann. Man darf sagen, dass eine Developpable mit ihrer Cuspidalcurve ein *einziges*

---

[1]) *Mémoire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables* (Journal de Liouville, T. 10; 1845). — *On a special sextic developable* (Quarterly Journal of mathematics, T. 7; 1866).

[2]) ZEUTHEN, *Sur les singularités des courbes géométriques à double courbure* (Compte rendu, 27 juillet 1868).

System bildet, in dem man Puncte (die Puncte der Curve), Gerade (die Tangenten der Curve oder die Generatrixen der Fläche) und Ebenen (die Tangentialebenen der Developpablen) zu betrachten hat. Endlich kann man in der nämlichen Weise, wie die Eigenschaften der Kegel sich aus denen der ebenen Curven mittelst des Princips der Dualität ableiten lassen, die Raumcurven und die abwickelbaren Flächen, die nicht Kegel sind, in Correlation setzen, das heisst, die Eigenschaften des einen Systems, dessen Charakteristiken

$$\nu,\ \mu,\ \rho,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varkappa,\ \xi,\ \eta,\ \theta$$

sind, aus den Eigenschaften des reciproken Systems herleiten, dessen Charakteristiken heissen:

$$\mu,\ \nu,\ \rho,\ \beta,\ \alpha,\ \varkappa,\ \gamma,\ \eta,\ \xi,\ \theta.$$

13. Wir haben gesehen, wie die Charakteristiken des Perspectivkegels einer Raumcurve und eines Schnittes der Developpablen bestimmt werden können, wenn der Scheitel des Kegels und die Schnittebene vollständig willkürlich sind. In entsprechender Weise geht man vor, wenn jener Punct oder jene Ebene eine specielle Lage haben. Wir wollen hier einige Beispiele geben.

Geht die schneidende Ebene durch eine Gerade t des Systems, so ist der Schnitt aus dieser Geraden und einer Curve $(\rho-1)$-ter Ordnung zusammengesetzt. Die Classe dieser Curve ist μ wie im allgemeinen Falle. Die Zahl der Spitzen ist $\nu+\theta-2$, weil die schneidende Ebene, da sie die Cuspidalcurve berührt, diese nur noch in andern $\nu-2$ Puncten trifft. Die Formeln von Plücker lehren nun, dass die Schnittcurve $\alpha+1$ Wendepuncte, $\gamma-1$ Doppeltangenten und $\xi-\rho+4$ Doppelpuncte besitzt. Wir haben also einen Wendepunct mehr als in dem allgemeinen Falle, und dieser neue Wendepunct ist der Punct $\mathfrak{m}$, in welchem die Gerade t die Cuspidalcurve berührt. Dass die Gerade t die Schnittcurve im Puncte $\mathfrak{m}$ berührt, folgt daraus, dass $\mathfrak{m}$ für den vollständigen Schnitt eine Spitze sein muss. Da ferner t der Durchschnitt zweier unmittelbar folgender Tangentialebenen des Systems ist, so gehen durch einen beliebigen Punct von t nur $\mu-2$ Tangenten der Schnittcurve und durch $\mathfrak{m}$ gehen ausser t nur noch $\mu-3$. Also ist t eine Wendetangente für diese Curve. Im gegenwärtigen Falle hat die Schnittcurve nur $\xi-\rho+4$ Doppelpuncte, während die Doppelcurve ξ Puncte auf der schneidenden Ebene besitzen muss. Die fehlenden $\rho-4$ Puncte sind die Durchschnittspuncte der Geraden t mit der Schnittcurve. Eine beliebige Generatrix einer Developpablen ρ-ter Ordnung trifft also $\rho-4$ andere nicht unmittelbar folgende Erzeugende.

Ist die schneidende Ebene eine der Ebenen P des Systems, so ist der Schnitt aus einer Geraden t (der Berührungsgeneratrix der Ebene P und der Developpablen), die zweimal gezählt ist, und einer Curve $(\rho-2)$-ter Ordnung zusammengesetzt. Durch einen beliebigen Punct der Ebene gehen weitere $\mu-1$ Ebenen des Systems, also ist die Schnittcurve von der $(\mu-1)$-ten Classe. Die Ebene osculiert die Cuspidalcurve und schneidet sie in weitern

$\nu-3$ Puncten; der Schnitt hat folglich $\nu+\theta-3$ Spitzen. Aus den Formeln von PLÜCKER ergibt sich nun, dass diese Curve α Wendepuncte, $\gamma-\mu+2$ Doppeltangenten und $\xi-2\rho+8$ Doppelpuncte besitzt. In dem eben betrachteten Falle, ist der Punct $\mathfrak{m}$, in welchem die Ebnen P die Cuspidalcurve osculiert, kein Wendepunct der Schnittcurve mehr, sondern ein einfacher Berührungspunct mit der Geraden t, weil jetzt die Zahl $\mu-2$ der Tangenten, die von einem Puncte von t sich ausser t selbst an die Curve legen lassen, nur um eine einzige Einheit geringer ist als die Classe derselben. Die Schnittcurve hat $\xi-2\rho+8$ Doppelpuncte; die Durchschnittspuncte der Geraden t mit der Schnittcurve sind weitere $\rho-4$ Puncte der Doppelcurve, aber jeder von ihnen muss als zwei Doppelpuncte des Gesammtschnittes gezählt werden, weil dieser die Gerade t zweimal enthält. In diesen $\rho-4$ Puncten wird also die Doppelcurve von der Ebene P berührt. Das heisst auch, jede Ebene des Systems enthält $\rho-4$ Tangenten der Doppelcurve, und die Berührungspuncte liegen auf der Geraden des Systems, welche in dieser Ebene liegt. [1])

Die schneidende Ebene P sei eine der Wendeebenen des Systems. Dann repräsentiert die Gerade t im Schnitte drei zusammenfallende Gerade, wir haben also ausserdem eine Curve $(\rho-3)$-ter Ordnung. Diese ist von der $(\mu-2)$-ten Classe, weil eine Wendeebene zwei unmittelbar folgende Ebenen des Systems ersetzt, und also durch jeden Punct derselben nur noch $\mu-2$ andere Ebenen hindurchgehen. Die Ebene P hat mit der Cuspidalcurve eine vierpunctige Berührung und schneidet sie daher in weiteren $\nu-4$ Puncten, das heisst die Schnittcurve hat $\nu+\theta-4$ Spitzen. Nach den Formeln von PLÜCKER hat also die Curve $\alpha-1$ Wendepuncte, $\gamma-2\mu+6$ Doppeltangenten und $\xi-3\rho+13$ Doppelpuncte. Dieselbe Curve wird von der Geraden t, welche sie im Puncte $\mathfrak{m}$ berührt in weitern $\rho-5$ Puncten getroffen, von denen jeder dreimal unter den Doppelpuncten des Gesammtschnittes gezählt werden muss, weil die Gerade t als eine dreifache Gerade in diesem Schnitte gerechnet wird. Jede Wendeebene osculiert daher die Doppelcurve in $\rho-5$ Puncten, die auf der Geraden des Systems liegen, welche sich in jener Ebene befindet. Auch der Punct $\mathfrak{m}$ gehört der Doppelcurve an, da sich in ihm drei auf einander folgende Gerade des Systems schneiden, und also dieser Punct als Durchschnitt der ersten mit der dritten Tangente betrachtet in der Doppelcurve liegen muss. In diesem Puncte wird die Doppelcurve von der Ebene P berührt, wie man aus einer oben gemachten Bemerkung folgert. Die Puncte also, in welchen die Cuspidalcurve von den Wendeebenen berührt wird, gehören auch der Doppelcurve an, welche in ihnen von den nämlichen Ebenen berührt wird. [2])

---

[1]) Dies folgt auch aus der Bemerkung, dass die Doppelcurve in einem beliebigen ihrer Puncte diejenige Gerade als Tangente hat, welche den Durchschnitt der beiden Ebenen bildet, die in jenem Puncte die Developpable berühren. Daraus folgert sich ausserdem noch, dass die $\rho-4$ erwähnten Tangenten der Doppelcurve auch Tangenten der Schnittcurve $(\rho-2)$-ter Ordnung sind.

[2]) Es gibt noch andere gemeinschaftliche Puncte der Cuspidal- und der

In analoger Weise können wir die Charakteristiken der Perspectivkegel bestimmen oder sie aus dem Vorhergehenden mittelst des Princips der Dualität ableiten. Wir begnügen uns damit, die Resultate auszusprechen.

Wird der Scheitel auf einer Geraden des Systems genommen, so ist der Perspectivkegel von der ν-ten Ordnung, von der $(\rho-1)$-ten Classe, er hat $\mu+\theta-2$ Inflexionsgeneratrixen, $\beta+1$ Cuspidalgeneratrixen, $\eta-\rho+4$ Bitangentialebenen und $\vartheta-1$ Doppelgeneratrixen. Man sieht also, dass eine Tangente der gegebenen Raumcurve für denjenigen Perspectivkegel eine Cuspidalgeneratrix ist, der seinen Scheitel in einem Puncte dieser Geraden hat.

Wenn der Scheitel ein Punct des Systems ist, so hat der Perspectivkegel die Ordnungszahl $\nu-1$, er ist von der $(\rho-2)$-ten Classe, er besitzt ferner $\mu+\theta-3$ Inflexionsgeneratrixen, β Cuspidalgeneratrixen, $\eta-2\rho+8$ Bitangentialebenen und $\vartheta-\nu+2$ Doppelgeneratrixen. Es folgert sich hieraus, dass sich in jedem ganz beliebigen Puncte der gegebnen Raumcurve $\rho-4$ Generatrixen der doppeltberührenden Developpablen kreuzen, und dass die respectiven Tangentialebenen durch diejenige Gerade gehen, welche in jenem Puncte die gegebne Curve berührt. Diese $\rho-4$ Generatrixen liegen auch auf dem Perspectivkegel, dessen Scheitel der betrachtete Punct ist.

Ist der Scheitel ein Rückkehrpunct [1]) des Systems, so ist der Perspectivkegel von der $(\nu-2)$-ten Ordnung und der $(\rho-3)$-ten Classe, er hat ferner $\mu+\theta-4$ Inflexionsgeneratrixen, $\beta-1$ Cuspidalgeneratrixen, $\eta-3\rho+13$ Bitangentialebenen und $\vartheta-2\nu+6$ Doppelgeneratrixen. Man findet folglich, dass eine Spitze der gegebnen Raumcurve für die Rückkehrkante der doppeltberührenden Developpablen ein $(\rho-5)$-facher Punct ist, und dass die entsprechenden $\rho-5$ Tangentialebenen dieser Developpablen durch die Cuspidaltangente der gegebnen Curve gehen. Diese Developpable wird auch von den Osculationsebenen der gegebnen Curve in den Spitzen berührt.

14. Um ein Beispiel zu geben, denken wir uns eine Developpable μ-ter Classe gegeben, deren Tangentialebenen den Puncten einer Geraden a projectivisch entsprechen. Von welcher Ordnung ist dann diese abwickelbare Fläche? Nimmt man eine beliebige Gerade r, so gehen durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{w}$ derselben μ Tangentialebenen, denen auf a eine Gruppe von μ Puncten $\mathfrak{t}$ entspricht. Nehmen wir dagegen auf a einen Punct $\mathfrak{t}$, so ent-

---

Doppelcurve ausser den Puncten, in denen die erstere von den Wendeebenen berührt wird. Es sind nämlich die Spitzen der Cuspidalcurve ebenfalls in der Doppelcurve gelegen, weil in jeder derselben sich drei aufeinanderfolgende Gerade des Systems schneiden. Wenn ausserdem die Tangente in einem Puncte der Cuspidalcurve diese Curve noch in einem andern Puncte trifft, der nicht unmittelbar folgt, so ist dieser für die Doppelcurve eine Spitze, weil in ihm zwei unmittelbar folgende Gerade des Systems von einer dritten nicht benachbarten geschnitten werden.

[1]) Wäre der Scheitel ein ρ-facher Punct der Curve, so wäre der Perspectivkegel von der $(\nu-\rho)$-ten Ordnung, weil jede Ebene durch diesen Punct die Curve nur noch in $\nu-\rho$ andern Puncten träfe.

spricht diesem eine Tangentialebene, die r in einem Puncte $\mathfrak{w}$ schneidet, und die andern $\mu-1$ Tangentialebenen, die durch $\mathfrak{w}$ gehen, bestimmen die andern $\mu-1$ Puncte der Gruppe auf a. Es folgt also, dass, wenn $\mathfrak{w}$ sich auf r bewegt, die Gruppe der Puncte $\mathfrak{t}$ auf a eine Involution μ-ten Grades erzeugt, die der einfachen von den Puncten $\mathfrak{w}$ gebildeten Punctreihe projectivisch ist. [1]) Diese Involution hat $2(\mu-1)$ Doppelpuncte, das heisst $2(\mu-1)$ Gruppen, deren jede zwei zusammenfallende Puncte $\mathfrak{t}$ besitzt. Jeder solchen Gruppe entspricht auf r ein Punct, in welchem zwei der μ Tangentialebenen zusammen fallen, das heisst ein Punct, der entweder einer Wendeebene oder dem Durchschnitt zweier unmittelbar folgender Tangentialebenen angehört, das heisst der Developpablen. Wir haben also, $\alpha=0, \theta=0$ vorausgesetzt,

$$\rho = 2(\mu-1),$$

und man zieht nun aus den Formeln von Cayley:

$$\left\{\begin{aligned} \nu &= 3(\mu-2), \\ \beta &= 4(\mu-3), \\ \gamma &= \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}, \\ x &= \frac{9\mu^2-53\mu+80}{1.2}, \\ \xi &= 2(\mu-2)(\mu-3), \\ \eta &= 2(\mu-1)(\mu-3), \ldots \text{[2])} \end{aligned}\right.$$

CAPITEL III.

OBERFLÄCHEN BELIEBIGER ORDNUNG.

15. Wir wollen eine beliebige *Oberfläche* als den Ort aller Lagen eines Punctes betrachten, der sich continuierlich im Raume nach einem solchen Gesetze bewegt, dass eine willkürliche Gerade ein System getrennter Lagen des Mobils enthält. [3])

---

[1]) *Einleitung*, Nr. 21.

[2]) Salmon, *On the classification of curves of double curvature* (Cambridge and Dublin Math. Journal, T. 5; 1850). Man sehe ausserdem den ausgezeichneten *Treatise on the analytic geometry of three dimensions* (2d. ed. Dublin 1865) desselben Verfassers oder die deutsche Ausgabe, welche Prof. Fiedler davon gemacht hat mit reichen Zusätzen. (*Analytische Geometrie des Raumes*, Leipzig 1863—65).

[3]) Das heisst in der Art, dass alle aufeinanderfolgende Lagen des sich bewegenden Punctes von der Variation zweier unabhängiger Parameter abhängen. Eine Oberfläche ist folglich eine *doppelt unendliche Reihe von Puncten.* Es folgt noch, dass die zwei Flächen gemeinschaftlichen Puncte eine einfach unendliche Reihe, das heisst eine Curve bilden (6).

Die Oberfläche heisst von der ν-ten Ordnung, wenn eine beliebige Gerade sie in ν (reellen, imaginären, verschiednen, zusammenfallenden) Puncten trifft. Hat folglich eine Gerade mehr als ν Puncte mit einer Fläche ν-ter Ordnung gemein, so liegt die Gerade vollständig auf der Fläche.

Eine Fläche erster Ordnung ist eine Ebene.

Eine Ebene schneidet eine Oberfläche ν-ter Ordnung in einer Curve ebenfalls von der ν-ten Ordnung.

Eine Gerade heisst *Tangente* einer Fläche, wenn sie dieselbe in zwei unendlich nahen Puncten trifft (zweipunctige Berührung), sie heisst eine *Osculierende,* wenn sie dieselbe in drei oder mehr unmittelbar folgenden Puncten schneidet (dreipunctige, . . . Berührung).

16. Durch einen Punct $\mathfrak{m}$ einer gegebenen Oberfläche ziehe man zwei Gerade r, r', die in ihm die Fläche berühren mögen. Die Ebene rr' schneidet die Fläche in einer Curve l die in $\mathfrak{m}$ eine doppelte Berührung sowohl mit r als mit r' hat. Es ist folglich $\mathfrak{m}$ ein Doppelpunct für die Curve l [1]). Alle Geraden also, die in der Ebene rr' durch $\mathfrak{m}$ gezogen werden können, haben in diesem Puncte eine zweipunctige Berührung mit l, das heisst, sie sind Tangenten der Fläche. Unter ihnen gibt es nur zwei, die Tangenten an die beiden Zweige von l, welche in $\mathfrak{m}$ eine dreipunctige Berührung mit l eingehen und also auch mit der Fläche. Wir nennen sie die *Osculierenden* im Puncte $\mathfrak{m}$. [2]) Jede Ebene, die durch eine dieser Geraden gelegt ist, schneidet die Fläche in einer Curve, die in $\mathfrak{m}$ eine dreipunctige Berührung mit dieser Geraden hat, das will sagen, in einer Curve, für welche $\mathfrak{m}$ ein Wendepunct und die Gerade eine Wendetangente ist.

Die beiden Osculierenden sind reell oder imaginär, jenachdem $\mathfrak{m}$ für l ein wirklicher Knotenpunct oder ein conjugierter Punct ist. Im ersten Falle heisst $\mathfrak{m}$ ein *hyperbolischer Punct,* im zweiten Falle ein *elliptischer.* Ist $\mathfrak{m}$ eine Spitze für die Curve l, so fallen die beiden Osculierenden in eine einzige Gerade zusammen, und $\mathfrak{m}$ heisst ein *parabolischer Punct.* [3])

Im Allgemeinen liegen alle Tangenten der Oberfläche im Puncte $\mathfrak{m}$ in der Ebene rr', das heisst, eine durch $\mathfrak{m}$ ausserhalb dieser Ebene gelegte Gerade hat dort im Allgemeinen nur einen einzigen Punct mit der Fläche gemein. [4]) Verhielte es sich aber mit einer so gezogenen Geraden r'' anders, so hätte dies für jede andere Gerade r''' ebenfalls statt, die durch $\mathfrak{m}$ geht. In der That, hat r'' in $\mathfrak{m}$ einen zweipunctigen Contact mit der Fläche, so schneidet die Ebene $r''r'''$ die Fläche in einer Curve, welche in $\mathfrak{m}$ von r'' berührt wird und auch von der Durchschnittsgeraden der beiden Ebenen

---

[1]) *Einleitung,* Nr. 31.

[2]) *Inflexional tangents* nach SALMON, *Haupttangenten* nach CLEBSCH. Enthält die Fläche eine Gerade, so ist diese eine Osculierende für jeden ihrer Puncte.

[3]) In einer Developpablen, die Kegel eingeschlossen, sind alle Puncte parabolisch. Die Osculierenden fallen mit den Erzeugenden zusammen.

[4]) DUPIN, *Développement de géométrie,* Paris 1813, p. 59.

$r''r'''$ und rr', also auch durch r'''. Unter dieser Voraussetzung haben also alle durch $\mathfrak{m}$ gelegte Geraden in ihm einen zweipunctigen Contact mit der Fläche, und alle Ebenen durch $\mathfrak{m}$ schneiden die Fläche in Curven, die in $\mathfrak{m}$ einen Doppelpunct haben. Diese Sache findet aber nur in singulären Puncten der Fläche statt.

Die Ebene rr', in der alle Gerade, welche die Oberfläche in einem *gewöhnlichen Puncte* $\mathfrak{m}$ berühren, enthalten sind, heisst die *Tangentialebene der Fläche* in $\mathfrak{m}$. Eine Tangentialebene in einem beliebigen Punct einer Fläche schneidet daher diese in einer Curve, die zwei reelle oder imaginäre Zweige besitzt, welche sich im Berührungspuncte durchkreuzen. [1])

Mann kann auch sagen, dass die Tangentialebene der Fläche in $\mathfrak{m}$ der Ort der Geraden ist, welche in ihm die auf der Fläche gezogenen Linien berühren.

Classe der Oberfläche nennen wir die Zahl der Tangentialebenen, die man durch eine beliebige im Raum gegebene Gerade legen kann.

17. Wenn drei Gerade, die nicht in derselben Ebene liegen, und damit auch alle Geraden durch $\mathfrak{m}$, dort die Fläche in zwei zusammenfallenden Puncten treffen, so heisst $\mathfrak{m}$ ein *Doppelpunct* für diese Fläche. Jede durch ihn gelegte Ebene schneidet die Fläche in einer Curve, für welche er ein Doppelpunct ist; die Tangenten an die beiden Zweige haben mit der Curve eine dreipunctige Berührung. Es gibt daher eine unbegrenzte Zahl von Geraden, die im Doppelpuncte $\mathfrak{m}$ einen dreipunctigen Contact mit der Fläche haben, und der Ort derselben ist ein Kegel zweiter Ordnung (1). Jede Tangentialebene dieses Kegels schneidet die gegebene Fläche in einer Curve, für welche $\mathfrak{m}$ eine Spitze bildet. Wir werden im Folgenden zeigen, dass es sechs Erzeugende dieses Kegels gibt, von denen jede in $\mathfrak{m}$ eine vierpunctige Berührung mit der Fläche hat.

Es kann sich ereignen, dass der Kegel sich in zwei Ebenen P, Q auflöst. In diesem Falle sind die Osculierenden diejenigen Geraden, welche durch $\mathfrak{m}$ gehen und in P oder Q liegen. Die Ebenen, welche durch die Gerade PQ gehen, schneiden die Fläche in Curven, für welche $\mathfrak{m}$ eine Spitze ist. Der Schnitt, den jede der Ebenen P, Q macht, ist eine Curve mit einem dreifachen Puncte in $\mathfrak{m}$. Dies ist sogleich klar, wenn man beachtet, dass jede Gerade, die durch $\mathfrak{m}$ geht und in einer dieser Ebenen liegt, die Oberfläche und folglich auch die Curve in drei Puncten schneidet, die sämmtlich mit $\mathfrak{m}$ zusammenfallen. Die Tangenten an die drei Zweige sind ebensoviele Gerade, die in $\mathfrak{m}$ mit der Fläche einen vierpunctigen Contact besitzen.

Es kann ferner vorkommen, dass die Ebenen P, Q in eine einzige zusammenfallen, die dann die einzige ist, welche die Fläche in einer Curve

[1]) Plücker, *Ueber die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben.* (Crelles Journal, Bd. 4; 1829. S. 359).

mit dreifachem Puncte $\mathfrak{m}$ schneidet. Jede Ebene durch $\mathfrak{m}$ gibt in diesem Falle eine Curve mit einer Spitze in diesem Puncte.

Um diese drei Arten von Doppelpuncten zu unterscheiden, pflegt man sie *conischen Punct*, *Biplanarpunct*, *Uniplanarpunct* zu nennen.[1])

Man kann noch weitere Verschiedenheiten des Biplanarpunctes unterscheiden, je nachdem eine oder zwei oder drei Gerade, die einen vierpunctigen Contact mit der Fläche haben, mit der Durchschnittsgeraden der beiden Tangentialebenen zusammenfallen; und ebenso des Uniplanarpunctes, je nachdem die drei Geraden mit vierpunctigem Contact verschieden sind oder zusammenfallen.[2])

18. Eine Fläche kann auch *dreifache, vierfache, . . . , beliebig vielfache* Puncte haben. Ein Punct $\mathfrak{m}$ heisst ρ-fach, wenn eine beliebig durch $\mathfrak{m}$ gelegte Gerade in ihm die Fläche in ρ zusammenfallenden Puncten schneidet. Jede durch $\mathfrak{m}$ gelegte Ebene schneidet dann die Fläche in einer Curve mit einem ρ-fachen Punct in $\mathfrak{m}$, und die Tangenten an die ρ Zweige haben dort eine $(\rho+1)$-punctige Berührung mit der Fläche. Es gibt folglich eine unbegrenzte Zahl von Geraden, die mit der Fläche eine $(\rho+1)$-punctige Berührung in $\mathfrak{m}$ haben, und der Ort derselben ist ein Kegel ρ-ter Ordnung. Wir werden später zeigen, dass $\rho(\rho+1)$ Erzeugende dieses Kegels mit der Fläche eine $(\rho+2)$-punctige Berührung haben. Der Kegel kann in gewissen Fällen in Kegel niederer Ordnung zerfallen oder auch in ρ Ebenen, die noch von einander verschieden sein können, oder zum Theil oder sämmtlich zusammenfallen, und so vielerlei Arten von ρ-fachen Puncten Entstehung geben.

Eine Fläche kann aber niemals einen vielfachen Punct haben, dessen Grad der Multiplicität die Ordnung derselben übersteigt, denn in solchem Falle würde jede Gerade, die durch diesen Punct ginge, mehr Puncte mit der Fläche gemein haben, als deren Ordnungszahl zulässt, das heisst, sie würde vollständig auf der Fläche liegen.

Hat eine Oberfläche ν-ter Ordnung einen ν-fachen Punct $\mathfrak{o}$, so ist sie nothwendigerweise ein Kegel mit dem Scheitel in $\mathfrak{o}$. Denn es würde jede Gerade, welche $\mathfrak{o}$ mit einem andern Puncte der Fläche verbindet, vollständig auf derselben liegen, da sie $\nu+1$ Puncte mit derselben gemein hat.[3])

---

[1]) Der Scheitel eines Kegels zweiter Ordnung, ein beliebiger Punct der Doppelcurve und ein beliebiger Punct der Cuspidalcurve einer Developpablen sind Beispiele dieser drei Arten von Doppelpuncten.

[2]) Schlaefli, *On the distribution of surfaces of the third order into species* (Philosophical Transactions, 1863) p. 198.

[3]) Welche Zahl von Bedingungen bestimmt eine Oberfläche ν-ter Ordnung? Es sei $\xi_{\rho-1}$ die Zahl der Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit die Fläche einen $(\rho-1)$-fachen Punct $\mathfrak{m}$ hat. Die Geraden, die in $\mathfrak{m}$ einen ρ-fachen Contact haben, bilden dann einen Kegel $(\rho-1)$-ter Ordnung, der durch $\frac{(\rho-1)(\rho+2)}{1.2}$ Erzeugende individualisiert wird. Wenn man folglich festsetzt, die Oberfläche solle

Eine Oberfläche kann auch vielfache Linien haben, das heisst Linien, von denen alle Puncte vielfache Puncte der Fläche sind.[1]) So haben wir zum Beispiel schon gesehen, dass eine Developpable im Allgemeinen eine Doppelcurve und eine Cuspidalcurve hat. Besitzt eine Fläche eine ρ-fache Curve ν-ter Ordnung und eine Cuspidalcurve ν'-ter Ordnung, so hat der Schnitt, den eine beliebige Ebene auf der Fläche bewirkt, eine Zahl von ν ρ-fachen Puncten und ν' Spitzen. Eine Fläche ν-ter Ordnung, die nicht der Complex mehrerer Oberflächen niederer Ordnung ist, kann keine Doppelcurve besitzen, deren Ordnungszahl grösser wäre als $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2}$, da eine ebene Curve nicht mehr als diese Zahl von Doppelpuncten haben kann, ohne in Curven niederer Ordnung zu zerfallen.[2])

---

in $\mathfrak{m}$ mit $\frac{(\rho-1)(\rho+2)}{1.2}+1$ beliebig durch $\mathfrak{m}$ gelegten Geraden, die nicht auf einem Kegel $(\rho-1)$-ter Ordnung liegen, eine ρ-punctige Berührung haben, so wird $\mathfrak{m}$ ein ρ-facher Punct. Daraus folgt, dass $\xi_\rho = \xi_{\rho-1} + \frac{(\rho-1)(\rho+2)}{1.2} + 1$, oder $\xi_\rho = \frac{\rho(\rho+1)(\rho+2)}{1.2.3}$ ist. Hat aber eine Fläche ν-ter Ordnung einen ν-fachen Punct, so ist sie ein Kegel, der, sobald der Scheitel gegeben ist, durch $\frac{\nu(\nu+3)}{1.2}$ Bedingungen bestimmt ist. Daher ist die Zahl der Bedingungen, die eine Fläche ν-ter Ordnung bestimmen:

$$\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.2.3}+\frac{\nu(\nu+3)}{1.2}=\frac{\nu(\nu^2+6\nu+11)}{1.2.3}=\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{1.2.3}-1.$$

Diese Zahl bezeichnen wir im Folgenden durch das Symbol $\mathfrak{N}(\nu)$. In der That ist $\mathfrak{N}(\nu)+1$ genau die Zahl der Coefficienten in einem vollständigen Polynom ν-ten Grades zwischen drei Variablen.

[1]) Eine Curve ist ρ-fach, wenn sich in derselben ρ Schalen der Oberfläche schneiden, und diese hat folglich in jedem Puncte der ρ-fachen Linie ρ Tangentialebenen, das heisst, der Ort der Geraden, welche in diesem Puncte einen $(\rho+1)$-fachen Contact mit der Fläche haben, ist aus ρ Ebenen gebildet. Hat also eine Fläche ν-ter Ordnung z. B. eine Doppelgerade r, so ist jeder Punct derselben ein Biplanarpunct. Eine beliebig durch r gelegte Ebene P schneidet nämlich die Fläche in einer Curve $(\nu-2)$-ter Ordnung, die $(\nu-2)$ Puncte mit r gemein hat. Es sei $\mathfrak{a}$ einer dieser Puncte. Jede Gerade durch $\mathfrak{a}$ in der Ebene P gezogen hat dort drei zusammenfallende Puncte mit der Fläche gemein, folglich zerfällt der Osculationskegel in $\mathfrak{a}$ in zwei Ebenen, deren eine P ist. Legen wir nun durch $\mathfrak{a}$ eine beliebige Ebene E, so schneidet diese die Fläche in einer Curve mit Doppelpunct in $\mathfrak{a}$; eine der respectiven Tangenten ist die Gerade PE, die andere bestimmt sich als Durchschnitt von E und der zweiten Tangentialebene P' der Oberfläche in $\mathfrak{a}$. Die Ebenen P, P' sind derart verbunden, dass jeder Lage der einen $\nu-2$ Lagen der andern entsprechen, folglich finden $2(\nu-2)$ Lagen statt, für welche P, P' zusammenfallen (*Einleitung*, Nr. 83), es gibt also $2(\nu-2)$ Uniplanarpuncte auf der Doppelgeraden r.

[2]) *Einleitung*, Nr. 35.

Hat ein Kegel ausser seinem Scheitel $\mathfrak{o}$ noch einen andern ρ-fachen Punct $\mathfrak{d}$, so ist die Gerade $\mathfrak{od}$ eine ρ-fache Gerade. Dies ist augenscheinlich, wenn man beachtet, dass der durch eine Ebene, die beliebig durch $\mathfrak{od}$ gelegt ist, entstehende Schnitt in $\mathfrak{d}$ einen ρ-fachen Punct haben muss, und dass ausserdem der Kegel aus Geraden besteht, die sämmtlich in $\mathfrak{o}$ zusammenlaufen, dass also ρ dieser Geraden mit $\mathfrak{od}$ zusammenfallen.

19. Wir haben gesehen, dass die Tangentialebene einer Fläche in einem gewöhnlichen Puncte derselben die Fläche in einer Curve schneidet, für welche der Berührungspunct ein Doppelpunct ist. Schneidet umgekehrt eine Ebene die Fläche in einer Curve mit Doppelpunct in $\mathfrak{m}$, und ist dieser kein Doppelpunct der Fläche [1]), so berührt die Ebene die Fläche in $\mathfrak{m}$, weil alle Geraden, die in der Ebene durch $\mathfrak{m}$ gehen, dort einen zweipunctigen Contact mit der Curve also auch mit der Fläche haben.

Aber es besteht ein weit allgemeineres Theorem. Haben zwei beliebige Flächen einen gemeinschaftlichen Punct $\mathfrak{m}$ und in ihm dieselbe Tangentialebene, das heisst, *berühren sich die beiden Flächen im Puncte* $\mathfrak{m}$, so schneidet jede Ebene, die durch diesen Punct geht, die beiden Flächen in zwei Linien, die sich in $\mathfrak{m}$ berühren; diese Ebene hat also in $\mathfrak{m}$ mit der Durchschnittscurve der beiden Flächen eine zweipunctige Berührung, das heisst soviel, als, die Curve hat in $\mathfrak{m}$ einen Doppelpunct [2]). Die gemeinschaftliche Tangentialebene schneidet beide Flächen in Curven, die in $\mathfrak{m}$ einen Doppelpunct besitzen, und hat folglich dort eine vierpunctige Berührung mit der Durchschnittscurve beider Flächen. In dieser Ebene liegen die Tangenten an die beiden Zweige der Curve, und diese beiden Geraden haben jede, wenn man durch sie eine schneidende Ebene legt, mit der Schnittcurve eine dreipunctige Berührung in $\mathfrak{m}$, das heisst, die Schnitte der beiden Flächen osculieren sich in diesem Puncte. Fallen beide Tangenten zusammen, das heisst, hat die Curve im Puncte $\mathfrak{m}$ eine Spitze, so sagt man, die beiden Flächen haben eine *stationäre Berührung*.

Gäbe es in der Tangentialebene durch $\mathfrak{m}$ noch eine dritte Gerade, so dass die durch selbe gelegten Ebenen die beiden Flächen in Curven schnitten, die sich osculierten, so hätte die Schnittcurve beider Flächen in $\mathfrak{m}$ einen dreifachen Punct, folglich hätte jede Ebene durch $\mathfrak{m}$ in ihm einen dreipunctigen Contact mit der Curve, dass heisst, sie schnitte die beiden Flächen in

---

[1]) So schneidet zum Beispiel eine Ebene, die durch eine Generatrix einer Developpablen ρ-ter Ordnung geht, diese Fläche in der Erzeugenden und einer Curve $(\rho-1)$-ter Ordnung, welche von der Geraden in einem Puncte osculiert wird und in $\rho-4$ andern Puncten geschnitten. Aber diese Puncte sind keine wirklichen Berührungspuncte. Der erste gehört der Cuspidalcurve, die andern der Doppelcurve an.

[2]) Hat umgekehrt die gemeinschaftliche Curve zweier Flächen einen Doppelpunct, der weder für die eine noch die andere Fläche ein Doppelpunct ist, so berühren sich die beiden Oberflächen in diesem Puncte.

Curven, die sich osculieren. In diesem Falle sagt man, *die beiden Flächen osculieren sich* in $\mathfrak{m}$.[1]) Sie haben in $\mathfrak{m}$ die beiden Osculierenden gemein, und die Tangentialebene hat in diesem Puncte, da sie beide Flächen in Curven mit Doppelpunct in $\mathfrak{m}$ und denselben Tangenten in diesem Puncte schneidet, einen sechspunctigen Contact mit der Durchschnittscurve beider Flächen. Die Tangenten an die drei Zweige dieser Curve sind die Geraden, durch welche die Ebenen gehen, welche die Flächen in Curven mit vierpunctigem Contact in $\mathfrak{m}$ schneiden.

20. Zwei Flächen von den Ordnungen ν, ν' werden von einer willkürlichen Ebene in zwei Curven geschnitten, welche $\nu\nu'$ Puncte gemein haben. Beide Flächen schneiden sich also in einer Curve $\nu\nu'$-ter Ordnung.[2]) Da die

---

[1]) Im Allgemeinen sagt man, zwei Flächen haben in einem Puncte $\mathfrak{m}$ einen Contact der Ordnung ρ, wenn eine willkürliche Ebene, die durch $\mathfrak{m}$ geht, dieselbe in zwei Curven schneidet, die dort eine $(\rho+1)$-punctige Berührung haben. Die Durchschnittscurve beider Flächen hat dann in $\mathfrak{m}$ einen $(\rho+1)$-fachen Punct (Plücker, *a. a. O.* S. 351.) Man sieht leicht, dass, wenn eine Fläche mit einer andern gegebenen Fläche eine Berührung ρ-ter Ordnung in einem ebenfalls gegebenen Puncte eingehen soll, dies dasselbe ist, als ob sie durch $\frac{(\rho+1)(\rho+2)}{1.2}$ (hier unendlich nahe) Puncte gehen müsste.

[2]) Durch die Curve der Ordnung ν^2, Durchschnitt zweier Flächen ν-ter Ordnung, geht eine unbegrenzte Zahl anderer Flächen derselben Ordnung. Dies beweist man, indem man beachtet, dass entweder die gleiche Eigenschaft für die Curve Platz greift, die aus dem Durchschnitt beider Flächen durch eine beliebige Ebene entsteht, oder auch, dass, wenn $U=0$, $V=0$ die Gleichungen dieser Flächen sind, die Gleichung $U+\lambda V = 0$ für jeden Werth des Parameters λ eine Fläche repräsentiert, welche durch sämmtliche gemeinschaftliche Puncte der beiden gegebenen hindurchgeht.

Wir haben anderwärts (18) bewiesen, dass eine Fläche ν-ter Ordnung durch $\mathfrak{N}(\nu)$ Bedingungen gegeben ist. Durch $\mathfrak{N}(\nu)$ beliebig im Raume gegebene Puncte geht also eine Fläche ν-ter Ordnung, aber auch nur eine einzige, weil, sobald durch diese Puncte zwei Flächen dieser Ordnung gingen, in Gemäss der eben bemerkten Eigenschaft, sich eine unbegrenzte Zahl anderer ebenfalls durch dieselben beschreiben liessen.

Durch $\mathfrak{N}(\nu)-1$ gegebene Puncte lässt sich eine unbegrenzte Zahl von Flächen ν-ter Ordnung legen, von denen zwei sich in einer Curve ν^2-ter Ordnung schneiden, die durch alle jene Puncte geht. Durch diese Curve gehen unzählig viele andere Flächen derselben Ordnung, nämlich die, welche die gegebenen Puncte enthalten. Also haben wir den Satz:

Alle Flächen ν-ter Ordnung, welche durch $\mathfrak{N}(\nu)-1$ beliebig gegebene Puncte gehen, schneiden sich auf einer und derselben Curve ν^2-ter Ordnung,

oder auch: $\mathfrak{N}(\nu)-1$ beliebig gegebene Puncte bestimmen eine Curve der ν^2-ten Ordnung, durch die eine unbegrenzte Zahl von Flächen ν-ter Ordnung geht. Plücker, *Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés* (Annales de Mathématiques par Gergonne, T. 19; 1828—1829).

Der Complex aller Flächen ν-ter Ordnung, die durch dieselbe Curve ν^2-ter

Tangente dieser Curve in einem beliebigen ihrer Puncte dort beide Flächen berühren muss, so ist sie der Durchschnitt der Ebenen, welche in demselben Puncte beide Flächen berühren. Die Doppelpuncte der Curve sind, wenn sie nicht Doppelpuncte für eine der beiden Flächen sind, Berührungspuncte derselben. Schneiden sich die Flächen in zwei getrennten Curven, so ist jeder gemeinschaftliche Punct dieser Curven ein Berührungspunct der Flächen.

Ist ein gemeinschaftlicher Punct zweier Flächen für die erste ein ρ-facher für die zweite ein ρ'-facher Punct, so ist er für die beiden Flächen gemein-

---

Ordnung gehen, heisst ein *Flächenbüschel ν-ter Ordnung.* Durch einen beliebig im Raum gegebenen Punct geht nur eine Fläche des Büschels. Ist umgekehrt ein Complex von Flächen ν-ter Ordnung $\mathfrak{N}(\nu)-1$ gemeinschaftlichen Bedingungen unterworfen und so beschaffen, dass durch einen willkürlichen Punct des Raumes nur eine Fläche geht, so ist die Curve, die zweien von ihnen gemein ist, allen gemein, und der Complex bildet ein Büschel. Die Tangente der *Basis-Curve*, gemeinschaftliche Curve aller Flächen des Büschels, in einem beliebigen ihrer Puncte liegt in der Tangentialebene jeder Oberfläche des Büschels; also gehen die Ebenen, welche die Flächen eines Büschels in demselben Puncte $\mathfrak{t}$ der Basis-Curve berühren, durch ein und dieselbe Gerade t, das heisst, sie bilden ein Ebenenbüschel. Jeder Fläche des Büschels entspricht eine Tangentialebene, ebenso entspricht umgekehrt jeder Ebene durch t eine Fläche des Büschels, nämlich diejenige Fläche, welche durch einen Punct der Ebene geht, der unmittelbar benachbart $\mathfrak{t}$ ist, aber ausserhalb t liegt. Wir sagen deshalb, das Flächenbüschel und das Büschel der Tangentialebenen sind projectivisch, und wir verstehen unter *Doppelverhältniss von vier Flächen des Büschels* das Doppelverhältniss der vier entsprechenden Tangentialebenen in einem beliebigen Puncte der Basiscurve. Zwei Flächenbüschel kann man *projectivisch* nennen, wenn das Büschel der Tangentialebenen in einem Puncte der Basiscurve des ersten Büschels dem Büschel der Tangentialebenen in einem Puncte der Basiscurve des zweiten Büschels projectivisch ist, oder auch, wenn die Flächen des ersten Büschels eindeutig den Flächen des andern Büschels entsprechen.

Ein Flächenbüschel wird offenbar durch eine Ebene in Curven geschnitten, die ein Büschel bilden.

Man kann ferner leicht die Zahl der Puncte finden, welche die Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung bestimmen, die den Durchschnitt zweier Flächen der ν_1-ten und ν_2-ten Ordnung bildet, $\nu_1 > \nu_2$ vorausgesetzt. Die beiden Flächen seien F_1, F_2 und es sei F eine beliebige Fläche von der Ordnung $\nu_1-\nu_2$. Die Curve $\nu_1{}^2$-ter Ordnung in welcher die Fläche F_1 das System der Flächen F_2F schneidet, ist die Basis eines Büschels ν_1-ter Ordnung, man kann also durch sie und durch einen andern beliebig im Raume gewählten Punct eine neue Fläche ν_1-ter Ordnung legen. F kann aber, da sie ganz willkürlich ist, $\mathfrak{N}(\nu_1-\nu_2)$ Bedingungen genügen, folglich kann man durch die Curve F_1F_2 und durch $\mathfrak{N}(\nu_1-\nu_2)+1$ Puncte eine Fläche ν_1-ter Ordnung legen. Aber eine Fläche dieser Ordnung ist durch $\mathfrak{N}(\nu_1)$ Bedingungen gegeben, folglich enthalten alle Flächen ν_1-ter Ordnung, die durch $\mathfrak{N}(\nu_1)-\mathfrak{N}(\nu_1-\nu_2)-1$ beliebige Puncte der Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung gehen, diese vollständig. Diese Curve ist also durch obige Zahl von Bedingungen gegeben. Jacobi, *De relatio-*

schaftliche Curve ein $\rho\rho'$-facher Punct. Denn eine beliebig durch ihn gelegte Ebene schneidet beide Flächen längs zweier Curven, die in diesem Puncte bezüglich ρ und ρ' sich kreuzende Zweige besitzen und also dort $\rho\rho'$ zusammenfallenden Puncten haben. Wäre der gemeinschaftliche Punct für beide Flächen ein ρ-facher Punct, und hätten beide daselbst den nämlichen Osculationskegel, das ist den Ort der Geraden, welche dort die Fläche in $\rho+1$ unmittelbar folgenden Puncten treffen, so hätten beide Schnittlinien den ρ-fachen Punct und die ρ Tangenten gemein also auch $\rho^2+\rho$ zusammenfallende gemeinsame Puncte; es wäre folglich dieser Punct für die beiden Flächen gemeinsame Curve ein $\rho(\rho+1)$-facher Punct.

Wenn zwei Flächen sich berühren, sich osculieren, . . . längs einer Curve, das heisst in allen Puncten einer Curve, so muss diese zweimal, dreimal, . . . bei den vollständigen Durchschnitt gezählt werden. Das ist klar, wenn man beachtet, dass eine beliebige Transversalebene beide Flächen in Curven schneidet, die unter sich soviele zweipunctige, dreipunctige, . . . Contacte haben, als die Ordnung dieser Curve gross ist.

Ist eine Curve für eine Fläche eine ρ-fache Curve und für eine andere Fläche ρ'-fach, so muss man sie bei der Durchschnittscurve beider Flächen $\rho\rho'$-mal zählen.

21. Nimmt man als für sich klar an, dass die Zahl der Puncte, in denen eine Curve ν-ter Ordnung von einer Fläche ν'-ter Ordnung geschnitten wird, nur von den Zahlen ν und ν' abhängt, so kann man schliessen, dass die Fläche die Curve in $\nu\nu'$ Puncten schneidet, weil dies die Zahl der Durchschnittspuncte wäre, im Falle die zweite Oberfläche aus ν' Ebenen zusammengesetzt wäre. Es folgt daraus, dass, wenn eine Curve ν-ter Ordnung mehr als $\nu\nu'$ Puncte mit einer Fläche ν'-ter Ordnung gemein hat, dieselbe vollständig auf der Fläche liegt.

Ist ein Punct für die Curve ρ-fach, für die Fläche ρ'-fach, so zählt er für $\rho\rho'$ Durchschnittspuncte. So trifft zum Beispiel ein Kegel ρ'-ter Ordnung, dessen Scheitel in einem ρ-fachen Punct einer Curve ν-ter Ordnung liegt, diese letztere in noch weiteren $\nu\rho'-\rho\rho'$ Puncten. Der Perspectivkegel der Curve nämlich, der seinen Scheitel in diesem Puncte hat (13), ist von der $(\nu-\rho)$-ten Ordnung und schneidet folglich den ersten Kegel längs $\rho'(\nu-\rho)$ Generatrixen.

---

nibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis etc. (Crelles Journal, Bd. 15; 1836).

So ist zum Beispiel eine ebene Curve ν-ter Ordnung durch $\frac{\nu(\nu+3)}{1.2}$ Puncte bestimmt; die Durchschnittscurve einer Quadrifläche mit einer Fläche ν-ter Ordnung ist bestimmt durch $\nu(\nu+2)$ Puncte; die Durchschnittscurve einer cubischen Fläche, das heisst einer Fläche dritter Ordnung, mit einer Fläche ν-ter Ordnung ist bestimmt durch $\frac{3\nu(\nu+1)}{1.2}$ Puncte; u. s. w.

Man sagt *eine Curve und eine Fläche haben einen zweipunctigen Contact*, wenn sie zwei unendlich nahe Puncte gemein haben, das heisst, wenn eine Gerade sie beide in demselben Puncte zweipunctig berührt; sie haben ferner *einen dreipunctigen Contact*, wenn sie drei unendlich nahe Puncte gemein haben, das heisst, wenn eine Ebene die Curve in demselben Puncte osculiert, in dem sie die Fläche berührt; u. s. w.

Der Durchschnitt zweier Flächen ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung ist eine Curve $\nu_1\nu_2$-ter Ordnung, welche mit einer Fläche ν_3-ter Ordnung $\nu_1\nu_2\nu_3$ Puncte gemein hat. Drei Flächen von den Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3 haben daher $\nu_1\nu_2\nu_3$ gemeinschaftliche Durchschnittspuncte. [1])

Hätten drei Flächen einen gemeinschaftlichen Berührungspunct, so zählte dieser als *vier* Durchschnittspuncte. Denn die Curve, die den beiden ersten Flächen gemein ist, hat mit der gemeinschaftlichen Tangentialebene und also auch mit der dritten Fläche eine vierpunctige Berührung.

22. Zwei Flächen ν-ter und ν'-ter Ordnung mögen eine Berührung $(\rho-1)$-ter Ordnung längs einer Curve μ-ter Ordnung haben, dann schneiden sie sich ausserdem noch in einer Curve $(\nu\nu'-\rho\mu)$-ter Ordnung. Eine Fläche der ν''-ten Ordnung, die mit der ersten Curve im Puncte o eine σ-punctige Berührung hat, schneidet diese in andern $\nu''\mu-\sigma$ Puncten, und trifft die zweite Curve in $\nu''(\nu\nu'-\rho\mu)$ Puncten. Folglich haben die beiden Curven, in denen die dritte Fläche die beiden ersten schneidet, $\nu''\mu-\sigma$ ρ-punctige Contacte und $\nu''(\nu\nu'-\rho\mu)$ einfache Durchschnittspuncte. Da nun die gemeinschaftlichen Puncte dieser Curven diejenigen sind, in welchen sich die drei Flächen schneiden, so haben die Curven

$$\nu\nu'\nu''-\rho(\nu''\mu-\sigma)-\nu''(\nu\nu'-\rho\mu)=\rho\sigma$$

aufeinanderfallende Durchschnittspuncte in o: das heisst die beiden Curven haben in o einen $\rho\sigma$-punctigen Contact. [2])

Der Satz lässt sich nicht anwenden, wenn $\mu=1$ und $\nu''=1$ ist. Eine Developpable ν-ter Ordnung wird zum Beispiel von einer ihrer Tangentialebenen längs einer Generatrix berührt und von derselben in einer Curve $(\nu-2)$-ter Ordnung geschnitten, welche die Generatrix in einem Puncte o berührt und sie in andern $\nu-4$ Puncten schneidet. Eine andere Ebene, die auch durch die Generatrix geht, schneidet die abwickelbare Fläche in einer Curve der $(\nu-1)$-ten Ordnung, die in o mit der Generatrix $\nu-1-(\nu-4)$ Puncte gemein hat, das heisst, diese Curve wird durch die Generatrix osculiert, wie wir schon anderweitig gesehen haben (13).

1) Dies entspricht dem analytischen Factum, dass drei algebraischen Gleichungen des ν_1-ten, ν_2-ten, ν_3-ten Grades zwischen drei Variablen gleichzeitig durch $\nu_1\nu_2\nu_3$ Systeme von Werthen dieser Unbekannten genügt wird.

2) Dupin, *Développements*, p. 231.

CAPITEL IV.

OBERFLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG.

23. Eine Fläche heisst von der zweiten Ordnung, oder eine *Quadrifläche* (15), wenn eine beliebige Gerade sie in zwei (reellen, imaginären, getrennten, zusammenfallenden) Puncten trifft, oder auch, wenn eine beliebige Ebene sie in einem Kegelschnitt oder einer Linie zweiter Ordnung (die reell oder imaginär sein kann) schneidet.

Hat eine Gerade mit der Fläche drei Puncte gemein, so liegt sie vollständig auf derselben, und eine Fläche enthält also die beiden Geraden vollständig, welche sie in einem beliebigen Puncte $\mathfrak{m}$ (16) osculieren. Diese Geraden bilden den Durchschnitt der Fläche mit der Tangentialebene in $\mathfrak{m}$, da eine Curve zweiter Ordnung mit einem Doppelpunct sich nothwendigerweise in zwei (reelle, imaginäre, getrennte, zusammenfallende) Gerade g, g' auflöst.

Wir nehmen zuerst an, die Geraden g, g' fielen zusammen. In diesem Falle berührt die Ebene die Fläche in allen Puncten der Gerade g. Eine andere durch g gelegte Ebene schneidet die Fläche in einer neuen Geraden, welche die erste in einem Puncte $\mathfrak{d}$ schneidet, der für die Fläche ein Doppelpunct ist, da diese in ihm von beiden Ebenen berührt wird (17). Aber eine Fläche zweiter Ordnung mit einem Doppelpunct ist ein Kegel mit dem Scheitel in diesem Puncte (18), und es fallen daher in jedem Puncte $\mathfrak{m}$ die beiden Geraden g, g' in eine einzige zusammen. Hieraus folgert sich: Hat eine Quadrifläche einen parabolischen Punct, so sind alle andern Puncte derselben ebenfalls parabolische Puncte, und die Fläche ist ein Kegel.

24. Es seien jetzt die Geraden g, g', die dem Puncte $\mathfrak{m}$ zugehören, beide reell und von einander verschieden. Eine Ebene, welche durch g gelegt ist und durch einen beliebigen Punct $\mathfrak{n}$ der Fläche, schneidet diese längs einer neuen Geraden h', die durch $\mathfrak{n}$ geht; und die Tangentialebene in $\mathfrak{n}$, die schon die Gerade h' enthält, enthält ausserdem noch eine zweite Gerade h, die durch $\mathfrak{n}$ geht und auf der Fläche liegt. Hat folglich eine Quadrifläche einen hyperbolischen Punct, so sind ihre sämmtlichen Puncte hyperbolisch. Wenn daher eine Quadrifläche eine reelle Gerade enthält, so liegen auf ihr auch noch eine unbegrenzte Zahl anderer und, den Fall ausgenommen, dass die Fläche ein Kegel ist, gehen durch jeden Punct derselben zwei Gerade.

Lassen wir, wie früher, um die Gerade g eine Ebene rotieren, so haben wir für jede Lage dieser Ebene eine Gerade h', die g in einem Puncte trifft, in welchem die Ebene die Fläche berührt. Dieser Punct ist für zwei Lagen der Ebene nicht mehr derselbe, also auch nicht für zwei Gerade h', weil die Fläche, da sie kein Kegel ist, nicht drei Gerade zulässt, welche auf ihr liegen und in demselben Puncte zusammen laufen. Daraus, dass zwei Gerade h' die Gerade g in verschiedenen Puncten treffen, folgt, dass sie niemals in dieselbe Ebene fallen können. Wir sagen, dass alle diese Geraden h', zu denen auch g' gehört, *ein System geradliniger Generatrixen* der Fläche bilden.

Lassen wir jetzt ebenso eine Ebene um g' rotieren, so erhalten wir analog *ein anderes System geradliniger Generatrixen* derselben Fläche, die ebenfalls zu zwei und zwei nicht mehr in derselben Ebene liegen und die sämmtlich von den Erzeugenden des ersten Systems verschieden sind, weil sie sämmtlich g' schneiden. Unter diesen neuen Geraden befindet sich auch g.

Auf diese Weise enthält die Fläche zwei Systeme von Geraden.[1]) Durch jeden Punct der Fläche geht eine Gerade des einen und eine Gerade des andern Systems, und es enthält also jede Tangentialebene eine Gerade aus jedem Systeme. Der Durchschnittspunct zweier Geraden aus verschiedenen Systemen ist der Punct, in welchem die Fläche von der Ebene berührt wird, welche die beiden Geraden enthält. Zwei Gerade desselben Systemes liegen nicht in derselben Ebene, aber jede Gerade des einen Systems schneidet alle Geraden des andern.

Um Confusion in der Sprache zu vermeiden, ist es gut, die Geraden des einen Systems *Generatrixen*, die des andern Systems *Directrixen* zu nennen.

25. Wenn wir jetzt den dritten Fall betrachten, dass nämlich die Geraden g, g' imaginär conjugiert sind mit reellem Durchschnittspunct, so können wir geraden Wegs schliessen, dass, wenn eine Quadrifläche einen elliptischen Punct hat, alle ihre Puncte elliptisch sind.[2]) In diesem Falle kann man sagen, dass die Fläche zwei Systeme von Geraden enthält, die sämmtlich imaginär sind, und dass jede Tangentialebene die Fläche in zwei imaginären Geraden schneidet, die sich in dem reellen Berührungspuncte kreuzen.[3])

Dadurch zerfallen die Quadriflächen in drei wohlunterschiedene Arten: Flächen mit hyperbolischen Puncten, Flächen mit elliptischen Puncten, Flächen mit parabolischen Puncten oder Kegel.

Die Flächen der ersten Art bilden das einfachste Beispiel derjenigen Flächen, welche durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden und nicht abwickelbar sind *(Windschiefe Flächen)*. Die Oberflächen der drei Arten

---

1) Wren, *Generatio corporis cylindroidis hyperbolici etc.* (Philos. Trans. 1669, p. 961). Man vgl. Journal de l'école polyt. cah. 1 (1794) p. 5.

2) Dupin, *Développements*, p. 209. Im Allgemeinen haben die Flächen von höherer Ordnung als der zweiten eine Region, deren Puncte sämmtlich hyperbolisch, und eine andere, deren Puncte alle elliptisch sind. Beide Regionen werden durch die parabolische Curve, den Ort der parabolischen Puncte, getrennt. Gergonne, *De la courbure des surfaces courbes* (Annales de Gergonne, T. 21. 1830—31, p. 233).

3) Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures.* (Paris 1822). Art. 594.

lassen verschiedene Formen zu, die sich nach der Art des Schnittes classificieren lassen, den die unendlich entfernte Ebene macht, wie es bei den Kegelschnitten der Fall ist. [1])

Die Flächen der ersten Art erstrecken sich, da sie aus Geraden gebildet sind, ins Unendliche, aber die Ebene im Unendlichen kann entweder in einer Curve schneiden, oder berühren, das heisst, in zwei Geraden schneiden. Im ersten Falle heisst die Fläche *windschiefes* oder *einmanteliges Hyperboloid;* im zweiten Falle *windschiefes* oder *hyperbolisches Paraboloid.*

Die Flächen der zweiten Art erstrecken sich entweder nicht ins Unendliche *(Ellipsoid)*, oder werden von der unendlich entfernten Ebene in einer Curve geschnitten *(Zweimanteliges Hyperboloid)*, oder werden von derselben in einem Puncte berührt *(Elliptisches Paraboloid)*.

Die Flächen der dritten Art haben entweder den Scheitel in endlicher Entfernung, (*Kegel* in der eigentlichen Bedeutung des Wortes), oder ihre Erzeugenden sind parallel *(Cylinder)*. Im letzern Falle heisst der Cylinder, jenachdem die unendlich entfernte Ebene die Fläche in zwei reellen verschiedenen, in zwei imaginären oder in zwei reellen zusammenfallenden Geraden schneidet, *hyperbolisch, elliptisch, parabolisch.* [2])

26. Wir wollen jetzt die Quadriflächen der ersten Art betrachten. Drei Gerade des einen Systems, die wir als Directrixen ansehen wollen, genügen dann, dieselbe zu individualisieren. Denn durch jeden Punct der einen von den drei Geraden, kann man eine Transversale legen, welche die andern beiden trifft, und alle analogen Transversalen sind die Generatrixen der Fläche. [3]) Aus drei Generatrixen leiten wir in ähnlicher Weise die Directrixen ab. [4])

Zwei beliebig gewählte Directrixen werden von allen Generatrixen in Puncten geschnitten, welche zwei projectivische Punctreihen bilden. Dies

---

1) Ein Kegelschnitt heisst *Hyperbel, Ellipse, Parabel,* je nachdem seine Puncte im Unendlichen reell und verschieden, imaginär sind oder zusammenfallen.

2) Euler, *Introductio in analysin infinitorum.* Tom. 2. app. cap. 5.

3) Es ist sehr leicht auf die Frage zu antworten, von welcher Ordnung der Ort der Geraden x ist, welche drei Gerade g, h, k schneiden. Es sei t eine beliebige Transversale, dann ist die Ordnung der Fläche gleich der Zahl der Geraden x, welche die vier Geraden g, h, k, t schneiden. Von einem beliebigen Puncte $\mathfrak{g}$ von g ziehe man eine Gerade, die h und auch t in $\mathfrak{t}$ trifft, und aus demselben Puncte $\mathfrak{g}$ ziehe man eine zweite Gerade, welche k und auch t in $\mathfrak{t}'$ trifft. Lässt man $\mathfrak{g}$ auf g variieren, so erzeugen die Puncte $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$ zwei projectivische Punctreihen. Die beiden gemeinschaftlichen Puncte derselben geben die beiden Geraden, die alle vier gegebenen g, h, k, t schneiden. Die Fläche ist also von der zweiten Ordnung.

4) Es folgt auch, dass die Fläche durch zwei Directrixen und drei Puncte ebenfalls bestimmt ist, da man, wenn man durch diese drei Puncte die Generatrixen zieht, die drei Paare entsprechender Puncte erhält, die nothwendig aber auch hinreichend sind, um die projectivischen Punctreihen zu individualisieren.

ist klar, wenn man beachtet, dass von einem beliebigen Punct dieser Directrix nur eine einzige Generatrix ausgeht.[1]) Es ist folglich das Doppelverhältniss von vier Puncten, in welchen vier feste Generatrixen eine Directrix schneiden, constant für jede beliebige Directrix.

Dem analog bestimmen zwei Directrixen mit allen Generatrixen zwei projectivische Ebenenbüschel. Es ist also das Doppelverhältniss von vier Ebenen, welche bezüglich durch vier feste Generatrixen gehen und sich sämmtlich in derselben Directrix schneiden, constant für jede beliebige Directrix.

Umgekehrt bilden die Geraden, welche die entsprechenden Puncte zweier projectivischer Punctreihen verbinden, die nicht in derselben Ebene liegen, eine Fläche zweiter Ordnung. Es seien g, h die beiden Geraden, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ irgend zwei entsprechende Puncte, und $\mathfrak{g}'$ der Punct, in welchem g von der Geraden getroffen wird, die von $\mathfrak{h}$ ausgeht und eine willkürlich fixierte Transversale t schneidet. Lassen wir $\mathfrak{h}$ variieren, so erzeugen die Puncte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ zwei projectivische Punctreihen auf g, und die denselben gemeinschaftlichen Puncte geben die beiden Geraden, welche correspondierende Puncte von g, h verbinden und von t geschnitten werden.

Sobald die beiden Geraden in den entsprechenden Puncten in proportionale Stücke getheilt werden, so ist die erzeugte Fläche das windschiefe Paraboloid.[2])

Auch die Durchschnittsgeraden der entsprechenden Ebenen zweier projectivischer Büschel bilden eine Fläche zweiter Ordnung. Denn eine willkürliche Ebene schneidet die Ebene der beiden Büschel in Geraden, die zwei projectivische Strahlenbüschel bilden. Die entsprechenden Strahlen derselben erzeugen, indem sie sich schneiden, eine Curve zweiter Ordnung, es wird also die fragliche Fläche von einer beliebigen Ebene in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten.[3])

---

1) Beachten wir, dass jede Directrix einen Punct im Unendlichen hat, durch den eine Generatrix gehen muss, so sehen wir, dass für das windschiefe Hyperboloid jede Directrix unter den Generatrixen eine Parallele hat. Die Ebene, welche zwei parallele Gerade enthält, eine Generatrix und eine Directrix, berührt in einem unendlich entfernten Puncte, und heisst deshalb *Asymptotenebene*. Im windschiefen Paraboloid dagegen enthält die unendlich entfernte Ebene, da sie die Fläche berührt, eine Generatrix, auf der alle unendlich entfernten Puncte sämmtlicher Directrixen, und eine Directrix, auf der alle unendlich entfernten Puncte sämmtlicher Generatrixen liegen. In diesem Falle schneidet also jede Asymptotenebene die Fläche in einer einzigen Geraden in endlicher Entfernung und alle Asymptotenebenen bilden zwei parallele Ebenenbüschel.

2) Weil die Fläche, da die unendlich entfernten Puncte der beiden projectivischen Punctreihen correspondierende Puncte sind, eine Generatrix in unendlicher Entfernung hat.

3) Steiner, *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander.* Berlin 1832. § 51.

Liegen die beiden gegebenen Geraden, durch welche die Ebenen der beiden projectivischen Büschel hindurchgehen, in derselben Ebene, die sich nicht selbst entsprechen möge, so ist die erzeugte Fläche ein Quadrikegel, dessen Scheitel in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der gegebenen Geraden liegt (5).

27. Zieht man von einem beliebigen festen Puncte $\mathfrak{o}$ als *Pol* eine Transversale die eine gegebene Quadrifläche in zwei Puncten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ schneidet, und sucht den in Bezug auf $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ conjugierten harmonischen Punct $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{o}$, was ist dann der Ort der Puncte, die allen Transversalen entsprechen, welche von $\mathfrak{o}$ ausgehen?

Jede Transversale enthält einen einzigen Punct $\mathfrak{m}$, und dieser Punct kann auch nicht auf $\mathfrak{o}$ fallen, weil $\mathfrak{o}$ als nicht auf der Fläche befindlich angenommen war. Der gesuchte Ort ist also von der ersten Ordnung, das heisst, eine Ebene. Man nennt sie die *Polarebene* des Poles $\mathfrak{o}$. [1])

Nimmt man den Pol $\mathfrak{o}$ auf der Fläche an, so fällt einer der beiden Schnittpuncte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ mit dem Pole zusammen. Für alle Transversalen, die die Fläche in einem zweiten von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Puncte treffen, fällt der harmonische Punct $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{o}$. Wird aber die Transversale Tangente der Fläche in $\mathfrak{o}$, so wird $\mathfrak{m}$ unbestimmt, weil in diesem Falle der Pol und beide Puncte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ zusammenfallen, es kann also ein beliebiger Punct der Transversale sein. [2]) Der Ort des Punctes $\mathfrak{m}$ ist daher der Ort der Geraden, welche in $\mathfrak{o}$ die Fläche berühren. Wenn also der Pol ein Punct der Fläche selbst ist, so ist die Polarebene die Tangentialebene der Fläche in diesem Puncte. Umgekehrt kann ein Punct nur dann in seiner Polarebene liegen, wenn er ein Punct der Fläche ist.

Betrachtet man auf der Transversale, welche die vier Puncte $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ enthält, $\mathfrak{m}$ als Pol, so ist $\mathfrak{o}$ der harmonisch conjugierte Punct. Geht also die Polarebene von $\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{m}$, so geht umgekehrt die Polarebene von $\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{o}$. Ist daher eine Ebene gegeben, und man bestimmt die Polarebeen dreier Puncte derselben, so ist der Punct, in welchem sich diese drei Ebenen schneiden der Pol der gegebenen Ebene. Diese kann niemals zwei verschiedene Pole $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$ haben, [3]) denn wenn die Gerade $\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_2$ die Fläche in $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und die Ebenen in $\mathfrak{m}$ trifft, so kann der Punct $\mathfrak{m}$ nicht zwei verschiedene conjugierte harmonische Puncte in Bezug auf dasselbe Paar $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ haben.

So kommt es, dass jeder Punct des Raumes seine Polarebene hat, und umgekehrt jede Ebene ihren Pol. Für alle Puncte, die in einer festen Ebene liegen, geht die Polarebene durch den Pol der festen Ebene, und

---

1) Offenbar schneidet eine beliebige durch $\mathfrak{o}$ gelegte Ebene die Polarebene in einer Geraden, welche die Polare von $\mathfrak{o}$ in Bezug auf den Durchschnittskegelschnitt der Fläche ist.

2) *Einleitung*, Nr. 17.

3) Nämlich im allgemeinen Falle, dass die Quadriflächen keinen Doppelpunct haben. Man sehe die Anmerkung [1]) auf Seite 31.

alle Ebenen, die durch einen festen Punct gehen, haben ihren Pol auf der Polarebene des festen Punctes.

28. Es seien M, N die Polarebenen der beiden Puncte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$. Für jeden Punct der Geraden MN, die natürlich in beiden Ebenen M, N liegt, geht die Polarebene sowohl durch $\mathfrak{m}$ als durch $\mathfrak{n}$, das heisst durch die Gerade $\mathfrak{mn}$. Also ist der Ort eines Punctes, dessen Polarebenen durch eine feste Gerade $\mathfrak{mn}$ gehen, eine andere Gerade MN. Die Polarebene eines beliebigen Punctes von MN geht durch jeden Punct der Geraden $\mathfrak{mn}$, folglich geht die Polarebene jedes Punctes von $\mathfrak{mn}$ durch die Gerade MN. Die Geraden $\mathfrak{mn}$ und MN sind mithin so untereinander verknüpft, dass jede die Pole der Ebenen enthält, welche durch die andern sich legen lassen, und dass jede in der Polarebene der Puncte der andern liegt. Zwei Gerade, welche diese Beziehung zu einander haben, heissen *conjugiert* oder *reciprok* in Bezug auf die Quadrifläche. Man nennt wohl auch die eine die Polare der andern.

Jede Gerade hat ihre Conjugierte. Geht eine Gerade r durch einen Punct $\mathfrak{m}$, so liegt die conjugierte Gerade r' in der Polarebene M von $\mathfrak{m}$, und umgekehrt [1]). Folglich sind die Geraden, welche durch $\mathfrak{m}$ gehen, die conjugierten Geraden aller Geraden der Ebene M, und es können daher zwei conjugierte Gerade nicht gleichzeitig in einer Ebene M liegen, ohne dass sie beide durch den Pol $\mathfrak{m}$ gehen. In diesem Falle ist aber $\mathfrak{m}$ ein Punct der Fläche, M ist die Tangentialebene, und die beiden Conjugierten sind beide Tangenten der Fläche. Berührt umgekehrt eine Gerade die Quadrifläche in $\mathfrak{m}$, so liegt die Conjugierte in der Ebene M, welche in $\mathfrak{m}$ berührt, und da die erste Gerade auch in M liegt, so geht die zweite ebenfalls durch $\mathfrak{m}$, das heisst die beiden Geraden sind Tangenten der Fläche im nämlichen Puncte. Es trifft also im Allgemeinen eine Gerade ihre Conjugierte nicht, wenn aber der Durchschnitt statt hat, so sind beide Gerade Tangenten in demselben Puncte der Fläche.

Die Geraden, welche die Fläche in $\mathfrak{m}$ berühren, sind zu zwei und zwei conjugiert, sie bilden also eine Involution zweiten Grades. [2]) Diese hat zwei Doppelstrahlen, das heisst, es gibt unter diesen Tangenten zwei, die sich selbst conjugierte Gerade sind. Eine sich selbst conjugierte Gerade liegt in der Polarebene ihrer eigenen Puncte, das heisst alle ihre Puncte liegen in den entsprechenden Polarebenen oder auf der Fläche; das will sagen, eine sich selbst conjugierte Gerade ist nothwendigerweise eine Gerade, die auf

---

1) *Centrum* heisst der Pol der unendlich entfernten Ebene. In ihm halbieren sich alle Sehnen der Fläche, die durch denselben gehen. *Durchmesser* ist eine Gerade durch das Centrum. Eine Ebene heisst *Diametralebene*, wenn ihr Pol im Unendlichen liegt. Ein Durchmesser und eine Diametralebene heissen *conjugiert*, wenn die letztere die conjugierten Geraden der ersteren enthält; die Ebene halbiert die zum Durchmesser parallelen Sehnen. Drei Durchmesser heissen *conjugiert*, wenn jeder derselben der Ebene der beiden andern conjugiert ist.

2) *Einleitung*, Nr. 25.

der Fläche selbst liegt. Die Doppelstrahlen der Involution, die durch die in $\mathfrak{m}$ conjugierten Tangenten gebildet wird, sind mithin die in $\mathfrak{m}$ sich kreuzenden Geraden auf der Fläche. Es ergibt sich also, dass zwei conjugierte Tangenten mit den im Berührungspuncte sich kreuzenden Geraden der Fläche ein harmonisches System bilden.

Ist die Quadrifläche ein Kegel, so fallen die beiden Doppelstrahlen der Involution mit der Generatrix, die durch den betrachteten Punct geht, zusammen. Diese Generatrix ist nicht blos sich selbst conjugiert, sondern auch jeder beliebigen Geraden, welche den Kegel in einem ihrer Puncte berührt.

29. Wir wollen jetzt untersuchen, von welcher Classe (16) eine Fläche zweiter Ordnung ist. Die Tangentialebenen, die durch eine gegebene Gerade r gehen, haben ihre Pole, die Berührungspuncte, auf der conjugierten Geraden r'. Man kann also durch r soviele Ebenen ziehen, die die Fläche berühren, als diese Fläche Durchschnittspuncte mit r' hat. Eine Fläche zweiter Ordnung ist also auch zweiter Classe.

Fallen die beiden Schnittpuncte $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ der Fläche und r' in einen Punct zusammen, so fallen auch die Tangentialebenen durch $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ zusammen, das heisst die Tangentialebenen, welche durch r' gehen. Unter dieser Voraussetzung sind aber die Geraden r, r' conjugierte Tangenten (28), und eine Tangente ist also nicht blos die Gerade, welche zwei unendlich nahe Puncte verbindet, sondern auch der Durchschnitt zweier unmittelbar folgender Tangentialebenen. Ebenso ist von zwei conjugierten Tangenten eine jede der Durchschnitt der Ebenen, welche die Fläche in den unendlich nahen Puncten berühren, welche auf der andern Geraden liegen.

30. Ziehen wir durch einen Punct $\mathfrak{o}$ des Raumes den wir als Pol (27) betrachten, eine Gerade, welche die Fläche in einem Puncte $\mathfrak{a}$ berührt, der beide Durchschnittspuncte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ vertritt, so fällt der conjugierte harmonische Punct $\mathfrak{m}$ ebenfalls auf $\mathfrak{a}$, das heisst, $\mathfrak{a}$ ist ein Punct der Polarebene von $\mathfrak{o}$. [1]) Der Ort der Puncte, in welchen die Quadrifläche von Geraden berührt wird, die vom Pole ausgehen, ist also die Curve zweiter Ordnung, die den Durchschnitt der Fläche mit der Polarebene bildet. Die Tangente dieser Curve in $\mathfrak{a}$ hat, da sie in der Polarebene liegt, als ihre Conjugierte, die Gerade

---

1) Daraus folgt: Ist die Quadrifläche ein Kegel mit dem Scheitel $\mathfrak{v}$, so geht die Polarebene jedes Punctes $\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{v}$. Diese Polarebene verändert sich nicht, wenn der Pol sich auf der Geraden $\mathfrak{ov}$ bewegt. Die Polarebene ist in der That in diesem Falle der Ort der conjugierten harmonischen Geraden von $\mathfrak{ov}$ in Bezug auf die beiden Generatrixen des Kegels, die man erhält, wenn man ihn durch eine um $\mathfrak{ov}$ variable Ebene schneidet. Wenn die Gerade $\mathfrak{ov}$ sich in einer festen Ebene, die durch den Scheitel geht, bewegt, so rotiert die Polarebene um eine Gerade, deren Puncte die Pole der festen Ebene sind. Wir finden so das System von Geraden und Polarebenen wieder, das wir schon aus der Theorie der Kegelschnitte abgeleitet hatten (5). Die Polarebene des Scheitels ist offenbar unbestimmt.

$\mathfrak{a o}$, die nach dem Pole gerichtet ist, und die Ebene dieser beiden Geraden ist gleichzeitig Tangentialebene der Quadrifläche in $\mathfrak{a}$, und längs $\mathfrak{o a}$ die des Kegels, welcher der Ort der Geraden $\mathfrak{a o}$ ist. Dieser Kegel, der von der zweiten Ordnung ist, da einer seiner ebenen Schnitte von der zweiten Ordnung ist, heisst der Quadrifläche *umgeschrieben.* [1])

Folglich ist der Ort der Geraden, die durch einen gegebenen Punct gehen, und die Quadrifläche berühren, oder auch die Enveloppe der Ebenen, welche durch denselben gegebenen Punct gehen, und die Fläche berühren, ein Kegel zweiter Ordnung. [2]) Die Berührungscurve ist eben, und ihre Ebene ist die Polarebene des Kegelscheitels. Umgekehrt umhüllen die Tangentialebenen der Fläche in den Puncten eines ebenen Schnittes einen Kegel, dessen Scheitel der Pol der Schnittebene ist. [3])

---

1) Berühren sich zwei Quadriflächen längs einer Curve, so ist diese immer eben. Denn, sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ drei Puncte der Berührungscurve, so schneidet die Ebene $\mathfrak{abc}$ beide Flächen in zwei Kegelschnitten, die, weil sie drei Berührungspuncte unter sich haben, nothwendiger Weise zusammenfallen; ausser diesem Berührungskegelschnitt haben die beiden Flächen keinen weiteren Punct gemein (20). Eine Ebene, die durch eine Tangente dieses Kegelschnittes gelegt ist, schneidet beide Quadriflächen in zwei Kegelschnitten, die einen vierpunctigen Contact haben (22).

2) Folglich umhüllen die Ebenen, die durch einen festen Punct und durch die Geraden gehen, welche die entsprechenden Puncte zweier gegebener projectivischer Punctreihen verbinden (26), einen Quadrikegel. (Steiner, *Systemat. Entwickelungen.* S. 187.)

3) Hieraus folgt, dass die Asymptotenebenen (Tangentialebenen im unendlich entfernten Puncte) einen Kegel umhüllen, dessen Scheitel der Pol der unendlich entfernten Ebene ist, das heisst das Centrum der Fläche. Hieraus erschliesst man eine sehr einfache Regel, um das Centrum eines Hyperboloids zu finden, von dem drei Directrixen gegeben sind. (Hachette, *Einige Bemerkungen über Flächen zweiter Ordnung*, Crelles Journal T. 1. 1826; S. 345.)

Combinieren wir den Satz in Nr. 30 mit denen in Nr. 27, 28, so können wir sagen: Bewegt sich der Scheitel eines einer gegebenen Quadrifläche ungeschriebenen Kegels so, dass er eine Gerade oder eine Ebene durchläuft, so geht die Ebene der Berührungscurve beständig durch eine feste Gerade oder einen festen Punct. Diesen Satz verdankt man Monge, *Géométrie déscriptive*, Art. 40.

CAPITEL V.

OBERFLÄCHEN BELIEBIGER CLASSE. RECIPROKE POLAREN.

31. Es sei $\mathfrak{m}$ ein beliebiger Punct einer gegebenen Fläche, M die Tangentialebene in diesem Puncte, und $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ seien in dieser Ebene die auf $\mathfrak{m}$ nach drei verschiedenen Richtungen hin folgenden Puncte, das heisst, es seien $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_3$ drei Tangenten in $\mathfrak{m}$. Legt man durch die Puncte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ eine Fläche zweiter Ordnung, so wird diese in $\mathfrak{m}$ von der Ebene M berührt, sie wird also auch den Punct $\mathfrak{m}_3$ enthalten, was auch die Richtung von $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_3$ auf M ist. Die beiden Flächen besitzen also in $\mathfrak{m}$ eine gemeinschaftliche Tangentialebene. Wir wollen jetzt annehmen, die Fläche werde durch eine Ebene, die $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1$ enthält, durch eine zweite Ebene, die $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_2$ enthält, und durch eine dritte Ebene, die $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_3$ enthält in der Art geschnitten, dass dadurch drei Curven entstehen. In diesen Schnitten seien $\mathfrak{m}_1'$, $\mathfrak{m}_2'$, $\mathfrak{m}_3'$ die auf $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1$; $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2$; $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_3$ folgenden Puncte. Denken wir uns jetzt, dass obengenannte Quadrifläche auch durch die Puncte $\mathfrak{m}_1'$, $\mathfrak{m}_2'$, $\mathfrak{m}_3'$ gehen soll, so osculieren sich die Flächen in $\mathfrak{m}$, das heisst, die Schnitte beider, die man durch eine beliebig durch $\mathfrak{m}$ gelegte Ebene erhält, haben in diesem Puncte einen dreipunctigen Contact (19), und speciell liegen die Osculierenden der beliebigen Fläche vollständig auf der Quadrifläche. Die beiden Flächen haben folglich nicht nur in $\mathfrak{m}$ die Tangentialebene gemein, sondern in jedem Puncte $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$ der unmittelbar auf $\mathfrak{m}$ folgt. Es besteht also, wie für jede Quadrifläche, die Beziehung, dass jede Tangente in $\mathfrak{m}$ der Durchschnitt zweier unmittelbar folgender Tangentialebenen ist, deren Berührungspuncte in einer andern Tangente liegen, und dass umgekehrt in den beiden unmittelbar folgenden Puncten, die der ersten Tangente und der Fläche gemein sind, diese von zwei Ebenen berührt wird, die durch die zweite Tangente gehen. Die Tangenten der beliebigen Fläche in $\mathfrak{m}$ sind also zu zwei und zwei in der Art *conjugiert*, dass von zwei Conjugierten jede die Berührungspuncte der beiden unmittelbar folgenden Tangentialebenen enthält, welche durch die andere gehen.[1]) Die conjugierten Tangentenpaare bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen die Geraden auf der Quadrifläche sind, das heisst die Osculierenden der beliebigen Fläche.

Ist $\mathfrak{m}$ ein parabolischer Punct der gegebenen Fläche, so fallen in ihm die beiden Osculierenden zusammen, die osculierende Quadrifläche ist also ein Kegel. In $\mathfrak{m}$ und im Puncte $\mathfrak{m}'$, der unmittelbar auf $\mathfrak{m}$ in der Osculieren-

1) Dupin, *Développements*, p. 44.

den, das heisst in der Generatrix des Kegels folgt, haben beide Flächen die Tangentialebenen gemein. Da aber der Kegel in **m** und **m'** von derselben Ebene berührt wird, so berührt also die Ebene, welche die Fläche in **m** berührt, auch in **m'**. Eine Tangentialebene in einem parabolischen Puncte muss also als eine Tangentialebene in zwei unendlich nahen Puncten betrachtet werden. Wegen dieser Eigenschaft heisst sie *stationäre Ebene*. Da in diesem Falle jede Tangente durch **m** der Osculierenden conjugiert ist, so geht die Tangentialebene in einem beliebigen auf **m** unmittelbar folgenden Puncte durch die letztern Gerade. [1])

Berühren sich zwei Flächen in einem Puncte **m**, so bilden die conjugierten Tangenten zwei Involutionen, und da diese ein einziges Paar conjugierter Strahlen gemein haben, [2]) so haben im Allgemeinen die beiden Flächen nur ein einziges Paar gemeinschaftlicher conjugierter Tangenten. Gäbe es zwei Paar gemeinschaftlicher conjugierter Tangenten, so fielen die beiden Involutionen zusammen, jede Tangente hätte für beide Flächen dieselbe Conjugierte und sie hätten folglich auch die Osculierenden gemein.

32. Man denke sich jetzt alle Geraden, die von einem Puncte **o** im Raume so gezogen werden können, dass sie eine gegebene willkürliche Fläche berühren, auf der natürlich die Berührungspuncte eine gewisse Curve bilden. Sind **m** und **m'** zwei unmittelbar folgende Puncte dieser Curve, so sind die Geraden **om**, **mm'**, als conjugierte Tangenten der in **m** osculierenden Quadrifläche, dies auch für die beliebige Fläche. Die Ebene, welche in **m** diese Fläche berührt, ist längs **om** auch Tangentialebene des ihr *umgeschriebenen* Kegels, das heisst des Kegels, der von Tangenten gebildet wird, die durch **o** gehen. Dieser Kegel ist also die Enveloppe der Ebenen, die sich durch **o** so ziehen lassen, dass sie die Fläche berühren.

33. Die eben auseinandergesetzten Betrachtungen zeigen, dass eine Fläche beliebiger Ordnung auch als *Enveloppe* ihrer Tangentialebenen definiert werden kann. Eine *Enveloppe* kann man durch eine Ebene entstanden denken, die sich continuierlich im Raume so bewegt, dass eine beliebige Gerade in einer Zahl getrennter Lagen der variablen Ebene liegt. [3]) Die Enveloppenfläche heisst von der *ν-ten Classe*, [4]) wenn durch eine beliebige Gerade ν ihrer (reellen, imaginären, getrennten, zusammenfallenden) Ebenen hindurch gehen. Gehen daher durch eine Gerade mehr als ν Tangentialebenen einer Fläche

---

1) Salmon, *On the condition that a plane should touch a surface etc.* (Cambridge and Dublin. Math. Journal, T. 3; 1848. p. 45).

2) *Einleitung*, Nr. 25b.

3) Das heisst in der Art, dass alle successiven Lagen der variablen Ebene sich erhalten lassen, wenn man sich zwei unabhängige Parameter verändert denkt. Eine Enveloppe, die Developpablen ausgeschlossen, ist also eine *doppelt unendliche Reihe von Ebenen*.

4) Gergonne, *Rectification de quelques théorèmes etc.* (Annales de Gergonne, T. 18; 1827—28. p. 151).

ν-ter Classe, so gehören alle Ebenen, die durch diese Gerade gehen, der Enveloppe an, das heisst, die Gerade liegt vollständig auf der Fläche.

Die Enveloppe erster Classe ist ein einfacher Punct.

Die Tangentialebenen einer Fläche ν-ter Classe, die durch einen festen Punct gehen, umhüllen einen umgeschriebenen Kegel derselben Classe.

Man sagt, dass eine Gerade *Tangente* der Fläche in einer Ebene M ist, die die Fläche ebenfalls berührt, wenn zwei der durch sie gehenden Tangentialebenen mit M zusammenfallen. Es seien r, r' zwei Tangenten in der Ebene M und man betrachte ihren Durchschnittspunct $\mathfrak{m}$ als Scheitel eines umgeschriebenen Kegels. Da zwei von den Tangentialebenen, die man durch r und r' an den Kegel ziehen kann, mit M zusammenfallen, so ist diese eine Bitangentialebene des Kegels und vertritt also zwei unmittelbar folgende Tangentialebenen desselben, und folglich auch der Fläche für irgend eine andere durch $\mathfrak{m}$ in genannter Ebene gezogene Gerade. Das heisst, alle diese Geraden sind Tangenten der Fläche in der Ebene M. Daraus folgt, dass die Geraden, welche die Fläche in der Ebene M berühren, das heisst die Geraden, für welche M zwei aufeinander folgende Tangentialebenen darstellt, durch denselben Punct $\mathfrak{m}$ gehen, den man *Berührungspunct* der Ebene M nennt. Unter diesen Geraden gibt es zwei, die Berührungsgeneratrixen des Kegels mit der Bitangentialebene, für welche M drei aufeinander folgende Tangentialebenen darstellt. Die Tangenten sind ferner zu zwei in der Art conjugiert, dass von je zweien die eine alle Berührungspuncte der unmittelbar folgenden Tangentialebenen enthält, welche durch die andere gehen. Die Doppelstrahlen der Involution, die durch diese Tangentenpaare erzeugt wird, sind die Geraden, für welche M drei aufeinander folgende Tangentialebenen darstellt. Diese Geraden sind also auch die nämlichen, welche in $\mathfrak{m}$ mit der Fläche einen dreipunctigen Contact haben (16).

34. In solcher Weise kann man eine beliebige Fläche sowohl als *Ort von Puncten* und auch als *Enveloppe von Ebenen* betrachten. Wenden wir die vorhergehenden Untersuchungen auf eine Fläche zweiter Classe an, das heisst auf eine Fläche, an die sich durch eine beliebige Gerade zwei Tangentialebenen ziehen lassen, so finden wir, dass die Tangentialebenen, die durch einen Punct $\mathfrak{m}$ der Fläche gehen, einen Kegel zweiter Classe umhüllen, der eine Bitangentialebene M hat. Diese Ebenen gehen also durch zwei Gerade g, g', die sich in $\mathfrak{m}$ schneiden, und in der Ebene M liegen, welche in diesem Puncte die Fläche berührt (5). Iede dieser Geraden liegt also in einer unbegrenzten Zahl von Tangentialebenen und folglich ihrer ganzen Ausdehnung nach auf der Fläche.

Eine beliebig durch g gelegte Ebene ist eine Tangentialebene der Fläche, und schneidet sie daher in einer neuen Geraden h'. In ähnlicher Weise enthält jede durch g' gelegte Ebene eine andere Gerade h der Oberfläche. Auf dieser gibt es folglich zwei Systeme von Generatrixen $(g, h, \ldots)$,

$(g', h', \ldots)$, und durch jeden Punct der Fläche geht eine Gerade des einen und eine Gerade des andern Systems.

Von welcher Ordnung ist diese Fläche? Diese Frage ist gleichbedeutend mit der andern, wie viele Generatrixen ein und desselben Systems werden von einer beliebigen Geraden geschnitten. Durch die letztere Gerade gehen nur zwei Tangentialebenen, das heisst nur zwei Ebenen, von denen jede eine Generatrix des Systems enthält, also ist eine Fläche zweiter Classe auch zweiter Ordnung.

In einer beliebig gegebenen Ebene O ziehe man eine ganz beliebige Transversale, durch die zwei Ebenen A_1, A_2 gehen, welche eine gegebene Quadrifläche, das heisst eine Fläche zweiter Classe und zweiter Ordnung berühren. Es sei nun M die in Bezug auf A_1 und A_2 zu O conjugierte harmonische Ebene. Da man durch jede Lage der Transversale nur eine einzige Ebene M erhält, und da M nicht mit der Ebene O zusammenfallen kann, vorausgesetzt, dass diese nicht die Fläche berührt, so ist die Enveloppe aller zu M analoger Ebenen von der ersten Classe, alle diese Ebenen gehen also durch einen festen Punct $\mathfrak{o}$.

Ist die Transversale in der Art geführt, dass sie die Fläche in einem Puncte $\mathfrak{a}$ des Schnittes berührt, den die Ebene O bildet, so fallen die Ebenen A_1, A_2 in eine zusammen, nämlich in die Ebene A, welche in $\mathfrak{a}$ berührt. Es fällt dann auch die Ebene M mit A zusammen. Die Ebenen also, welche die Fläche in den Puncten des Schnittes berühren, der durch die Ebene O entsteht, gehen sämmtlich durch $\mathfrak{o}$. Es folgt hieraus, dass $\mathfrak{o}$ der Pol der Ebene O ist, nach der anderswo gegebenen Definition (27).

35. Es hat wohl jeder bemerkt, dass das Raisonnement hier vollständig mit dem parallel läuft, das wir für die Flächen, als Ort von Puncten betrachtet, eingehalten haben, und gleichwohl, ohne dass die eine Untersuchung nothwendigerweise die andere voraussetzt. Hierin besteht das Gesetz der *geometrischen Dualität*, dem zufolge neben einer Eigenschaft, die sich auf Puncte, Gerade, Ebenen bezieht, noch eine andere analoge besteht in Bezug auf Ebenen, Gerade, Puncte. [1])

Anstatt aber zwei reciproke Theoreme unabhängig von einander zu beweisen, oder das eine aus dem andern zu erschliessen, indem man das *Princip der Dualität*, a priori als absolutes Gesetz betrachtet, in Anwendung bringt, kann man den einen Satz auch aus dem andern mittelst der Theorie der Pole in Bezug auf eine gegebene Fläche zweiter Ordnung herleiten. Nimmt man von jedem Puncte, jeder Geraden, jeder Ebene einer gegebenen Figur die Polarebene, die conjugierte Gerade und den Pol in Bezug auf die

---

1) Gergonne, *Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue* (Annales de Gergonne, T. 16; 1825–26. p. 209). — Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Mémoires couronnés par l'Académie de Bruxelles, T. 11; 1827. Notes 5 und 34).

feste Quadrifläche, so erhält man eine zweite Figur, in der die Puncte, Geraden, Ebenen in derselben Folge den Ebenen, Geraden, Puncten der ersten Figur entsprechen. Den Puncten einer Geraden entsprechen die Ebenen durch eine andere Gerade, das heisst, einer geraden Punctreihe entspricht ein Ebenenbüschel, und es ist offenbar, dass diese beiden Formen projectivisch sind, dass also das Doppelverhältniss von vier Puncten in gerader Linie gleich dem der entsprechenden vier Ebenen ist.

Zwei so beschaffene Figuren nennt man *reciproke Polaren.* Einem Satze für die eine Figur entspricht das reciproke Theorem für die andere. In dieser Weise zeigt sich das Princip der Dualität als eine Folgerung der Theorie der Flächen zweiter Ordnung. — *Methode der reciproken Polaren.* [1]) —

36. Beschreibt in der ersten Figur ein Punct eine Fläche ν-ter Ordnung S, so bleibt die entsprechende Ebene in der zweiten Figur stets Tangentialebene einer Fläche ν-ter Classe S'. [2]) Einem Puncte $\mathfrak{p}$ der ersten Fläche entspricht eine Ebene P', die S' berührt. Den Tangenten von S in $\mathfrak{p}$ entsprechen die Tangenten von S' in P'. Die ersten Tangenten liegen nun aber in der Ebene P, welche S in $\mathfrak{p}$ berührt, und die zweiten gehen durch den Punct $\mathfrak{p}'$, in welchem S' von P' berührt wird, und es ist also P genau die Ebene, welche dem Punct $\mathfrak{p}'$ entspricht. Daraus folgt, dass, wenn in der zweiten Figur ein Punct die Fläche S' beschreibt, die entsprechende Ebene fortwährend die Oberfläche S berührt. Ist also S von der μ-ten Classe, so ist S' von der μ-ten Ordnung, und so sieht man die vollkommene Reciprocität zwischen den Flächen S, S', die deswegen *reciproke Polaren* heissen. [3])

37. Ist in der ersten Figur eine abwickelbare Fläche $\mathbf{S}$ gegeben, das heisst eine einfach unendliche Reihe von Ebenen, so entspricht ihr in der zweiten Figur eine einfach unendliche Reihe von Puncten, also eine Curve $\mathfrak{s}'$, und umgekehrt entspricht einer Curve eine Developpable. Den Generatrixen von $\mathbf{S}$, das heisst den Geraden, durch welche je zwei unendlich nahe Tangentialebenen gehen, entsprechen die Geraden, welche zwei unmittelbar folgende Puncte von $\mathfrak{s}'$ verbinden, das heisst die Tangenten dieser Curve.

---

1) Poncelet, *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques.* (Crelles Journal, Th. 4; 1829).

2) Beschreibt also der Pol eine Fläche zweiter Ordnung, so ist eine Fläche derselben Ordnung die Enveloppe der Polarebenen. Livet, *Propriétés des surfaces du second degré;* und Brianchon, *Mémoire sur les surfaces du second degré* (Journal de l'école polytechnique, Cah. 10; 1806).

3) Monge, *Mémoire* (inédit) *sur les surfaces reciproques* (M. s. Aperçu, Note 30. S. 405 der deutschen Uebersetzung). Wir haben schon früher (18) gesehen, wie viele Puncte nöthig sind, um eine Ortsfläche ν-ter Ordnung zu bestimmen. Dieselbe Zahl von Tangentialebenen bestimmt auch eine Enveloppenfläche ν-ter Classe.

Den Puncten einer Generatrix von **S** entsprechen die Ebenen, welche durch die entsprechende Tangente von **s**' gehen, das heisst die Ebenen, welche **s**' in denselben Puncten berühren. Da nun eine Developpable eine doppelt unendliche Reihe von Puncten ist, das heisst ein specieller Fall der Ortsflächen, so ist eine Curve eine doppelt unendliche Reihe von Ebenen, das heisst ein Specialfall der Enveloppenflächen.

Es sei P eine Tangentialebene von **S**, **p**' der entsprechende Punct von **s**'. Dann enthält die Ebene P zwei unmittelbar folgende Erzeugende von **S**, und dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte **p** derselben entspricht die Ebene P', die durch zwei unmittelbar folgende Tangenten von **s**' bestimmt wird, die sich in **p**' schneiden. Also entspricht dem Puncte **p** der Cuspidalcurve von **S** die Osculationsebene P' von **s**' in **p**'. Durchläuft daher ein Punct die Cuspidalcurve von **S**, so bleibt die entsprechende Ebene Osculationsebene von **s**', das heisst ihre Enveloppe ist die osculierende Developpable von **s**'. Den Durchschnittspuncten zweier nicht benachbarter Erzeugenden von **S** entsprechen die Ebenen, welche zwei nicht benachbarte Tangenten von **s**' enthalten, das heisst der Knotencurve von **S** entspricht die doppeltberührende Developpable von **s**'; u. s. w. Ist folglich für **S** die Ordnung gleich ρ, die Classe gleich μ, die Ordnung der Cuspidalcurve gleich ν, die Ordnung der Doppelcurve gleich ξ, die Zahl der stationären Ebenen gleich α, γ die Zahl der Geraden, die in einer Ebene liegen, und durch deren jede zwei Tangentialebenen gehen, u. s. w., dann ist die Curve **s**' von der Ordnung μ, ihre osculierende Developpable hat die Ordnung ρ und die Classe ν, ihre doppeltberührende Developpable ist von der Classe ξ; **s**' hat α Spitzen und γ Sehnen, die durch denselben beliebigen Punct gehen; u. s. w.

Ist als specieller Fall die Developpable **S** ein Kegel, das heisst, gehen alle Ebenen der Reihe durch einen festen Punct, so liegen die entsprechenden Puncte alle in einer festen Ebene, das heisst **s**' ist eine ebene Curve. [1])

38. Wir betrachten von Neuem die reciproken Flächen S, S'. Den ebenen Schnitten der ersten entsprechen dann die umgeschriebenen Kegel der anderen Fläche. Hat die Fläche S einen *Doppelpunct*, in dem sie von einer unbegrenzten Zahl von Geraden osculiert wird, die einen Quadrikegel bilden, so besitzt S' eine *Doppeltangentialebene*, in welcher *zwei* Tangentialebenen für jede Gerade, die beliebig auf derselben gezogen ist, zusammenfallen und *drei* für jede Tangente eines gewissen Kegelschnittes, welcher die Berührungscurve zwischen der Fläche und der Ebene ist. Dieser Kegel

---

1) Livet und Brianchon, *a. a. O.*

Ist **S** ein Quadrikegel, so ist **s**' ein Kegelschnitt. Wie also ein Quadrikegel ein Specialfall einer Fläche zweiter Ordnung ist, so ist ein Kegelschnitt ein Specialfall unter den Oberflächen zweiter Classe. Man erhält diesen Fall, wenn in einer Tangentialebene und folglich in allen die beiden Osculirenden in eine einzige Gerade zusammenfallen, welche die Tangente der Curve ist Alle Ebenen, die durch diese Gerade gehen, haben denselben Berührungspunct.

kann in zwei getrennte Ebenen zerfallen *(Biplanarpunct)* oder in zwei zusammenfallende degenerieren *(Uniplanarpunct)*. Ebenso kann der Kegelschnitt in zwei getrennte Puncte degenerieren *(Bitangentialebene)* oder in zwei unmittelbar folgende *(stationäre Ebene)* (31).

Hat allgemein S einen ρ-fachen Punct, das heisst einen Punct, der ρ zusammenfallende Durchschnittspuncte für jede beliebige durch ihn gelegte Gerade darstellt, aber $\rho+1$ Durchschnitte für die Generatrixen eines gewissen Osculationskegels ρ-ter Ordnung, so besitzt S' eine ρ-fache Tangentialebene, das heisst eine Ebene, welche die Stelle von ρ zusammenfallenden Tangentialebenen für jede in ihr beliebig gezogene Gerade und $\rho+1$ zusammenfallende Tangentialebenen für jede Gerade vertritt, welche durch eine gewisse Curve ρ-ter Classe (die Berührungscurve) berührt wird. Und jenachdem der osculierende Kegel sich in kleinere Kegel oder auch in Ebenen spaltet, wird sich auch die Berührungscurve in Curven niederer Classe oder auch in Puncte auflösen.

Wie ein Ort ν-ter Ordnung mit einem ν-fachen Punct ein Kegel ist, so bildet eine Enveloppe ν-ter Classe mit einer ν-fachen Tangentialebene eine ebene Curve. [1])

39. Einer Curve **s**$'$ auf S' gezogen entspricht eine Developpable **S**, die von den Tangentialebenen von S gebildet wird *(die S umgeschriebene Developpable)*, und der Curve der Berührungspuncte zwischen **S** und S entspricht die Developpable, die von den Tangentialebenen von S' in den Puncten von **s**$'$ gebildet wird, das heisst die S' längs **s**$'$ umgeschriebene Developpable. Ist **s**$'$ eine Doppelcurve für S', das heisst eine Curve, von der jeder Punct ein Biplanarpunct der Fläche ist, so ist die Developpable **S** die doppeltberührende von S, das heisst, sie wird von den Ebenen gebildet, welche jede mit S zwei getrennte Berührungspuncte haben. Ist **s**$'$ die Cuspidalcurve von S', das heisst die Curve, in deren jedem Puncte die Fläche zwei zusammenfallende Tangentialebenen hat, so ist die Developpable

---

1) Später findet sich, dass durch einen Doppelpunct einer Fläche vier Polarflächen gehen müssen, die, im Falle die Fläche in ihrer Ordnung vollständig allgemein ist, keinen Punct gemein haben. Daraus folgt, dass die allgemeinste Fläche einer gegebenen Ordnung keine Doppelpuncte hat. Damit eine Ebene die Fläche in einem Puncte, in zwei (getrennten oder unmittelbar folgenden) Puncten, in drei Puncten berühre, muss man, wenn die Berührungspuncte nicht gegeben sind, einer, zwei, drei Bedingungen Genüge leisten. Nun ist eine Ebene gerade durch drei Bedingungen bestimmt, und eine in ihrer Ordnung allgemeine Fläche hat daher eine einfach unendliche Reihe Bitangentialebenen, eine einfach unendliche Reihe stationärer Ebenen und eine endliche Reihe dreifacher Tangentialebenen.

Reciprok: Eine völlig allgemeine Fläche, was die Classe betrifft, hat keine vielfachen Tangentialebenen, wohl aber unendlich viele Biplanarpuncte, die eine Knotencurve bilden, eine unbegrenzte Zahl Uniplanarpuncte, die eine Cuspidalcurve erzeugen, und eine endliche Zahl *Triplanarpuncte* (dreifache Puncte mit den Osculierenden in drei verschiedenen Ebenen).

S die osculierende von S, das heisst, sie wird von solchen Ebenen gebildet, die zwei unmittelbar folgende Berührungspuncte mit S haben. Diese Ebenen sind die sogenannten *stationären*, und ihre Berührungspuncte sind die parabolischen Puncte (31) der Fläche.

Der Curve, in welcher sich zwei Flächen S, T schneiden, entspricht die Developpable, die durch die gemeinschaftlichen Tangentialebenen der entsprechenden Flächen S', T' entsteht. [1]) Den gemeinschaftlichen Schnittpuncten dreier Flächen entsprechen die Ebenen, welche die drei entsprechenden Flächen zugleich berühren; den Flächen, welche durch ein und dieselbe Curve gehen, die Flächen, welche von ein und derselben Developpablen berührt werden; u. s. w.

Berühren sich zwei Flächen S, T in einem Puncte $\mathfrak{p}$, das heisst, haben sie einen gemeinsamen Punct $\mathfrak{p}$ mit derselben Tangentialebene P, so haben die reciproken Flächen S', T' die Tangentialebene P' gemein mit demselben Berührungspuncte $\mathfrak{p}'$, das heisst, auch S', T' berühren sich in einem Puncte $\mathfrak{p}'$. Wenn S, T sich längs einer Curve berühren, so thun dies S', T' längs einer anderen Curve; u. s. w.

40. Haben zwei Flächen ν-ter Ordnung eine Curve $\nu\rho$-ter Ordnung gemein, die auf einer Fläche ρ-ter Ordnung ($\rho < \nu$) liegt, so schneiden sie sich ausserdem in einer anderen Curve $\nu(\nu-\rho)$-ter Ordnung, die auf einer Fläche der $(\nu-\rho)$-ten Ordnung liegt. [2]) Aus diesem Satze erhält man mittelst der Methode der reciproken Polaren folgendes andere Theorem: Sind zwei Flächen ν-ter Classe in eine Developpable $\nu\rho$-ter Classe eingeschrieben, in welche auch eine Fläche ρ-ter Classe eingeschrieben ist, so gibt es eine andere Developpable $\nu(\nu-\rho)$-ter Classe, welche beiden Flächen ν-ter Classe und einer neuen Fläche $(\nu-\rho)$-ter Classe umgeschrieben ist.

So hat man zum Beispiel für $\nu=2$, $\rho=1$:

Gehen zwei Quadriflächen durch dieselbe ebene Curve, so schneiden sie sich noch in einer anderen ebenen Curve. [3]) Und sind zwei Quadri-

---

[1]) Wir haben früher die Anzahl der Puncte gefunden, welche die gemeinsame Curve zweier Flächen von den Ordnungen ν_1, ν_2 individualisieren, ebenso viele Tangentialebenen bestimmen die zwei Oberflächen ν_1-ter und ν_2-ter Classe gleichzeitig umgeschriebene Developpable.

[2]) Man beweist dieses Theorem, indem man die gegebenen Flächen durch eine beliebige Ebene schneidet und beachtet, dass für die entstandenen Curven folgender Satz Platz greift: Wenn zwei Curven ν-ter Ordnung sich in $\nu\rho$ Puncten schneiden, die auf einer Curve ρ-ter Ordnung liegen, so haben sie noch $\nu(\nu-\rho)$ andere Puncte gemein, die auf einer Curve $(\nu-\rho)$-ter Ordnung liegen. (*Einleitung*, Nr. 43).

[3]) Dies findet statt, wenn die beiden Quadriflächen sich in zwei Puncten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, die nicht auf einer gemeinschaftlichen Geraden liegen, berühren. Die Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sind dann für den vollständigen Durchschnitt beider Flächen Doppelpuncte (19); folglich schneidet sie die durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und durch einen anderen gemeinschaftlichen

flächen demselben Kegel eingeschrieben, der natürlich von der zweiten Ordnung sein muss, so haben sie noch einen anderen umgeschriebenen Kegel gemein.

Punct gelegte Ebene in ein und demselben Kegelschnitte, weil zwei Kegelschnitte, die drei Puncte gemein haben und in zwei derselben dieselben Tangenten, zusammenfallen. Die durch $\mathfrak{ab}$ und einen neuen gemeinschaftlichen Punct, der nicht im obigen Kegelschnitt liegt, gelegte Ebene schneidet somit die Fläche in einem andern Kegelschnitt. Umgekehrt, wenn zwei Quadriflächen einen und folglich zwei Kegelschnitte gemein haben, so schneiden sich letztere in zwei Puncten in der Durchschnittsgeraden ihrer Ebenen; in diesen Puncten berühren sich beide Flächen.

Der reciproke Satz lautet: Berühren sich zwei Quadriflächen in zwei Puncten, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, so sind sie in zwei Kegel eingeschrieben, deren Scheitel auf der Durchschnittsgeraden der Ebenen A, B liegt, welche in jenen Puncten berühren, und umgekehrt, sind zwei Quadriflächen in einen und folglich auch in zwei Kegel eingeschrieben, so berühren sie sich in zwei Puncten, u. s. w.

Aus der Combination beider reciproker Sätze folgt: *Gehen zwei Quadriflächen durch zwei ebene Curven, so sind sie auch in zwei Kegel eingeschrieben und umgekehrt.*

Ein etwas allgemeineres Theorem ist das folgende: *Sind zwei Quadriflächen in ein und dieselbe Quadrifläche eingeschrieben, so haben sie zwei Kegelschnitte gemein.* Die beiden Berührungscurven schneiden sich nämlich in zwei Puncten, die auf der gemeinschaftlichen Durchschnittsgeraden ihrer Ebenen liegen. In jedem dieser Puncte berühren sich die drei Quadriflächen, also hat die erwähnte Eigenschaft statt. Die Ebenen der beiden gemeinschaftlichen Kegelschnitte der beiden ersten Flächen gehen durch die beiden Berührungspuncte, das heisst durch die Durchschnittsgerade der Ebenen der Berührungscurven mit der dritten Fläche. Aus dem reciproken Satze findet man ausserdem noch, dass die Scheitel der Kegel, welche den beiden ersten Flächen gleichzeitig umgeschrieben sind, mit den Scheiteln der Kegel in derselben Ebene liegen, welche denselben Flächen separat längs der Berührungscurve mit der dritten Fläche umgeschrieben sind. Schneiden sich umgekehrt zwei Quadriflächen in zwei Kegelschnitten, so sind sie gleichzeitig in eine unbegrenzte Zahl anderer Quadriflächen eingeschrieben, unter denen zwei Kegel sind; u. s. w. Diese Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung verdankt man Monge, (Correspondance sur l'école polytechnique, T. 2; p. 321 u. f.) Man vergleiche Poncelet, *Propriétés projectives des figures,* Paris 1822. Supplément.

Es seien Q_1, Q_2, Q_3 drei Quadriflächen, die sich in denselben Puncten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ berühren, und A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3 die Ebenenpaare, die durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gehen und die Kegelschnitte enthalten, in denen sich bezüglich Q_2 und Q_3, Q_3 und Q_1, Q_1 und Q_2 schneiden. Es seien jetzt A, B die Ebenen, die ebenfalls durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gehen und in denen die Kegelschnitte liegen, welche Q_1 mit einer beliebigen Quadrifläche Q des Büschels (Q_2, Q_3) gemein hat; dann behaupte ich, dass die Ebenenpaare $(A_2, B_2;\ A_3, B_3;\ A, B;\ \ldots)$ in Involution sind. Eine Ebene A, die durch $\mathfrak{ab}$ beliebig gelegt ist, schneidet nämlich Q_1 in einem Kegelschnitte, welcher in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ alle Flächen des Büschels (Q_2, Q_3) berührt. Die Quadrifläche dieses Büschels also, welche durch einen beliebigen Punct dieses Kegelschnittes geht, Zwei Quadriflächen schneiden sich im Allgemeinen in einer Raumcurve vierter Ordnung. Haben sie aber eine Gerade (Directrix) gemein, so ist die übrigbleibende Durchschnittscurve eine Raumcurve dritter Ordnung *(Cubische Raumcurve)*, welche jene Gerade in zwei Puncten schneidet. [1]) Diese Curve kann man auch *als Ort der Puncte* erhalten, *in welchen sich drei entsprechende Ebenen dreier projectivischer Ebenenbüschel schneiden.* Die Geraden, in welchen sich die entsprechenden Ebenen des ersten und zweiten Büschels schneiden, bilden ein Hyperboloid, ebenso erzeugen das erste und dritte Büschel ein anderes Hyperboloid, und diese beiden Hyperboloide, welche die Axe des ersten Büschels gemein haben, schneiden sich ausserdem in einer Raumcurve dritter Ordnung.

Der reciproke Satz sagt aus, dass zwei Quadriflächen im Allgemeinen

---

enthält ihn ganz, und diese Quadrifläche schneidet Q_1 in einem neuen Kegelschnitt, der die Ebene B individualisiert. Die Ebenen A, B bestimmen sich eine aus der anderen in der nämlichen Weise, also hat die ausgesprochene Eigenschaft statt. Unter den Flächen des Büschels (Q_2, Q_3) ist es die aus den Ebenen A_1, B_1 zusammengesetzte, für welche die entsprechenden Ebenen A, B eben mit diesen A_1, B_1 zusammenfallen; folglich sind die drei Ebenenpaare A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3 in Involution.

Dieses Theorem führt zu einer Eigenschaft der Flächen beliebiger Ordnung. Gegeben zwei Flächen, die sich in einem Puncte $\mathfrak{a}$ berühren, man sucht die Geraden, welche in diesem Puncte die Schnittcurve der Flächen berühren. Man kann offenbar bei dieser Untersuchung jeder Fläche eine osculierende Quadrifläche durch $\mathfrak{a}$ substituieren, weil, sobald eine Ebene durch $\mathfrak{a}$ die beiden osculierenden Quadriflächen in Curven schneidet, welche mindestens drei Paar gemeinschaftliche zusammenfallende Puncte haben, auch mit den Schnittcurven derselben Ebene mit den gegebenen Flächen eine dreifache Berührung statt hat. Da nun eine osculierende Quadrifläche einer gegebenen Fläche in einem gegebenen Puncte nur sechs Bedingungen unterworfen ist, und folglich noch drei weiteren Bedingungen genügen kann, so dürfen wir annehmen, dass die beiden Quadriflächen sich nicht allein in $\mathfrak{a}$, sondern auch noch in einem anderen Puncte $\mathfrak{b}$ berühren. Nun schneiden sich die beiden Quadriflächen in zwei Kegelschnitten, deren Ebenen die Tangentialebene in $\mathfrak{a}$ längs den gesuchten Geraden schneiden. (Olivier, *Sur la construction des tangents en un point multiple etc.* Journal de l'école polytechnique, Cah. 21. 1832; p. 307). Hat man endlich drei Flächen, die sich in $\mathfrak{a}$ berühren, so erhält man aus dem oben bewiesenen Satze von den Quadriflächen als Corollar: *Die Tangentenpaare der drei Curven in $\mathfrak{a}$, in welchen sich die Flächen zu zwei und zwei schneiden, sind in Involution.* (Chasles, *Aperçu* Note 10. S. 340 der deutschen Uebersetzung).

[1]) Diese Zerlegung der Curven vierter Ordnung hat statt, wenn die beiden Flächen sich in zwei Puncten berühren, die auf einer gemeinsamen Directrix beider Flächen liegen. Jede Ebene, welche durch diese Gerade geht, schneidet die beiden Quadriflächen in zwei Generatrixen, eine für jede Fläche, und der Ort der Puncte, welche diesen beiden Geraden gemein sind, ist die Curve, welche zugleich mit der gegebenen Directrix den vollständigen Durchschnitt der Oberflächen bildet. Diese Curve muss also von der dritten Ordnung sein, und die Directrix in den beiden Puncten schneiden, in denen die beiden Quadriflächen sich berühren.

in eine Developpable vierter Classe eingeschrieben sind, die von ihren gemeinschaftlichen Tangentialebenen erzeugt wird. Haben aber die beiden Quadriflächen eine Gerade gemein, so haben diejenigen gemeinschaftlichen Tangentialebenen, die nicht durch jene Gerade gehen, als Enveloppe eine Developpable dritter Classe, von der zwei Tangentialebenen durch die genannte Gerade gehen. [1]) Diese abwickelbare Fläche kann auch als *Enveloppe der Ebenen* erhalten werden, *welche durch drei correspondierende Puncte dreier gerader projectivischer Punctreihen hindurchgehen*, die nicht je zwei in derselben Ebene liegen.

CAPITEL VI.

LINEARE FLÄCHENSYSTEME.

41. In derselben Weise wie für die ebenen Curven [2]) beweist man für die Flächen, dass die Punctgruppen, in denen eine beliebige Gerade die Flächen eines Büschels ν-ter Ordnung schneidet, eine Involution des ν-ten Grades bilden. [3]) Diese Involution hat $2(\nu-1)$ Doppelpuncte, folglich hat man den Satz:

In einem Büschel der ν-ten Ordnung gibt es $2(\nu-1)$ Flächen, die eine gegebene Gerade berühren.

---

[1]) Dies ist der Fall, wenn die beiden Flächen sich in zwei Puncten einer gemeinschaftlichen Directrix berühren. Gehen daher zwei Quadriflächen durch dieselbe cubische Raumcurve, so sind sie auch in dieselbe Developpable dritter Classe eingeschrieben und umgekehrt.

Durch einen beliebigen Punct der gemeinsamen Geraden geht eine Generatrix der ersten und eine Generatrix der zweiten Quadrifläche. Die Ebene der beiden Generatrixen hat die Developpable dritter Classe zur Enveloppe. Die Tangentialebenen derselben entsprechen projectivisch den Puncten einer Geraden. Man beachte ausserdem, dass diese Developpable keine Doppeltangentialebene oder Wendeebene haben kann, weil der Punct, in dem eine solche Ebene zwei andere Ebenen schneiden würde, in vier Tangentialebenen läge, was dem widersprechen würde, dass es eine Developpable dritter Classe ist. Die Charakteristiken derselben sind daher (14):

$$\mu=3,\ \nu=3,\ \rho=4,\ \alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=1,\ \varepsilon=1,\ \xi=0,\ \eta=0,\ \theta=0.$$

Man sehe des Verfassers Abhandlung: *Sur les cubiques gauches* (Nouvelles Ann. de Math. 2e. série, T. 1. Paris; 1862).

[2]) *Einleitung*, Nr. 49.

[3]) Umgekehrt gehören die Flächen derselben Ordnung einer einfach unendlichen Reihe, welche von irgend einer Geraden in Punctgruppen in Involution geschnitten werden, zu dem nämlichen Büschel, weil in Gemässheit der Voraussetzung ein Punct des Raumes entweder in einer oder in allen Flächen der Reihe liegt.

Eine Ebene schneidet die Fläche eines Büschels in Curven, die ein anderes Büschel bilden, dessen Basispuncte die Durchschnitte der Transversalebene mit der Basis-Curve des ersten Büschels sind. Nun gibt es in einem ebenen Curvenbüschel ν-ter Ordnung $3(\nu-1)^2$, die einen Doppelpunct haben [1]); man hat folglich den Satz:

In einem Büschel ν-ter Ordnung gibt es $3(\nu-1)^2$ Flächen, welche eine gegebene Ebene berühren.

42. Ich nenne diejenige μ-fach unendliche Reihe von Flächen ν-ter Ordnung *ein lineares System μ-ter Stufe und ν-ter Ordnung*, welche $\mathfrak{N}(\nu)-\mu$ gemeinschaftlichen Bedingungen in der Art genügen, dass durch μ beliebig im Raume angenommene Puncte nur eine einzige Fläche geht, welche den obengenannten Bedingungen Genüge leistet. [2])

Für $\mu=1$, 2, 3 heisst die Reihe in derselben Folge *Büschel*, *Netz* und *lineares System* im engeren Sinne. [3])

43. Aus den vorhergehenden Definitionen folgt sofort, dass alle Flächen eines Systemes μ-ter Stufe, welche durch ρ beliebig gegebene Puncte gehen, ein niederes lineares System $(\mu-\rho)$-ter Stufe bilden, welches in dem gegebenen Systeme enthalten ist.

Diejenigen Flächen desselben ersten Systems, welche durch andere ρ' gegebene Puncte gehen, bilden ein zweites niederes lineares System $(\mu-\rho')$-ter Stufe. Haben die beiden Gruppen von ρ und ρ' Puncten σ Puncte gemein, und ist $\rho+\rho'-\sigma<\mu$, so bilden die Flächen, welche durch die $\rho+\rho'-\sigma$ verschiedenen Puncte gehen, ein lineares System $(\mu-\rho-\rho'+\sigma)$-ter Stufe, welches sowohl im Systeme $(\mu-\rho)$-ter Stufe als in dem $(\mu-\rho')$-ter Stufe enthalten ist. Ist aber $\rho+\rho'-\sigma=\mu$, so bestimmen die $\rho+\rho'-\sigma$ verschiedenen Puncte eine einzige Fläche, welche den beiden niederen Systemen $(\mu-\rho)$-ter und $(\mu-\rho')$-ter Stufe gemein ist. [4])

Ein lineares System der μ ten Stufe ist durch $\mu+1$ Flächen derselben Ordnung bestimmt, welche nicht ein und demselben linearen System niederer Stufe angehören. Es seien nämlich $U_1, U_2, \ldots, U_{\mu+1}$ die $\mu+1$ gegebenen Flächen, und man suche die Fläche des Systems, welche durch die Puncte $\mathfrak{o}_1\ \mathfrak{o}_2, \mathfrak{o}_3, \ldots, \mathfrak{o}_{\mu-1}, \mathfrak{o}_\mu$ geht. Die Flächenpaare $(U_1U_2), (U_1U_3)$,

---

1) *Einleitung*, Nr. 88.

2) Jonquières, *Études sur les singularités des surfaces algébriques* (Journal de Liouville, 2e (Exp.) série. T. 7; 1862).

3) Die Ebenen, welche durch eine Gerade gehen, bilden ein Büschel; die Ebenen, die sämmtlich durch einen festen Punct gehen, bilden ein Netz (Bündel), und alle Ebenen des Raumes bilden ein lineares System im engern Sinne

4) Hieraus ergibt sich zum Beispiel, dass zwei in einem Netz enthaltene Büschel eine Fläche gemein haben; dass ein Büschel und ein Netz, die in einem linearen Systeme im engern Sinne enthalten sind, eine Fläche gemein haben; dass zwei Netze, die in einem linearen Systeme im engern Sinne sich befinden, eine unbegrenzte Zahl von Flächen gemein haben, die ein Büschel bilden; u. s. w.

$\ldots, (U_1 U_\mu)(U_1 U_{\mu+1})$, individualisieren μ Büschel, in denen es μ Flächen gibt, die sämmtlich durch o_μ gehen. Nehmen wir an, dass diese μ Flächen ein lineares System der $(\mu-1)$-ten Stufe bestimmen, so ist diejenige Fläche dieses Systems, welche ausserdem noch durch $o_1, o_2, \ldots, o_{\mu-1}$ geht, die verlangte. Also ist der Satz für μ bewiesen, wenn er für $\mu-1$ besteht, er findet aber statt für $\mu=1$, folglich gilt er allgemein. [1])

---

[1]) Sind

$$U_1=0,\ U_2=0, \ldots, U_\mu=0,\ U_{\mu+1}=0$$

die Gleichungen der gegebenen Flächen, so werden alle Flächen des Systems durch die Gleichung dargestellt:

$$\varkappa_1 U_1+\varkappa_2 U_2+\ldots+\varkappa_\mu U_\mu+\varkappa_{\mu+1} U_{\mu+1}=0$$

wo die $\varkappa$ unbestimmte Parameter sind. Diese Gleichung zeigt, dass eine beliebige Fläche des Systems ein Theil des Büschels ist, das von zwei Flächen gebildet wird, deren eine dem niederen Systeme $(\rho-1)$-ter Stufe

$$\varkappa_1 U_1+\varkappa_2 U_2+\ldots+\varkappa_\rho U_\rho=0$$

angehört, und die andern dem linearen Systeme $(\mu-\rho)$-ter Stufe

$$\varkappa_{\rho+1} U_{\rho+1}+\varkappa_{\rho+2} U_{\rho+2}+\ldots+\varkappa_{\mu+1} U_{\mu+1}=0.$$

Theilt man also die gegebenen Flächen in zwei Gruppen, die eine von ρ die andere von $\mu-\rho+1$ Flächen, die zwei lineare niedere Systeme $(\rho-1)$-ter und $(\mu-\rho)$-ter Stufe individualisieren, und man nimmt beliebig aus jedem dieser niederen Systeme eine Fläche als ein Büschel bestimmend an, so gehören sämmtliche Flächen des Büschels dem vollständigen Systeme an, und umgekehrt können alle Flächen des vollständigen Systems in dieser Weise erhalten werden. Macht man zum Beispiel $\rho=1$, so erhält man den Satz, dass eine beliebige Fläche des Systems die Fläche $U_1=0$ in einer Curve schneidet, durch welche eine Fläche des niedern Systems geht, das durch $U_2=0, U_3=0, \ldots U_{\mu+1}=0$ bestimmt ist.

Aus dem Vorhergehenden resultiert ausserdem noch: Wenn man in einem gegebenen linearen Systeme $\rho+1$ Flächen, die nicht demselben Systeme $(\rho-1)$-ter Stufe angehören, annimmt, so dass sie ein System der ρ-ten Stufe bestimmen, so gehören auch alle Flächen dieses Systems dem gegebenen Systeme an.

Es ist auch sogleich klar, dass, wenn die Flächen, welche ein lineares System individualisieren, einen Punct gemein haben, derselbe in allen Flächen des Systems liegt. So gehen für $\mu=1$ die Flächen eines Büschels ν-ter Ordnung sämmtlich durch dieselbe Curve der Ordnung ν^2, und folglich schneiden sich die Flächen eines linearen Systems μ-ter Stufe, die durch $\mu-1$ beliebig gegebene Puncte gehen, längs einer Curve ν^2-ter Ordnung. Für $\mu=2$ erhält man: Die Flächen eines Netzes haben im Allgemeinen ν^3 gemeinschaftliche Puncte, also schneiden sich die Flächen eines Systems μ-ter Stufe, die durch $\mu-2$ beliebig gegebene Puncte gehen in andern $\nu^3-\mu+2$ Puncten. (Wir sagen *im Allgemeinen*, weil die Basis eines Netzes auch eine Curve sein kann, die dann offenbar nothwendig von niederer Ordnung als ν^2 sein muss. So bilden zum Beispiel die Quadriflächen die durch sieben gegebene Puncte gehen ein Netz, und haben im Allgemeinen nur noch einen achten Punct gemein, wenn aber diese sieben Puncte auf einer cubischen Raumcurve liegen, so liegt diese auch auf allen Quadriflächen des Netzes.)

44. Zwei lineare Systeme derselben μ-ten Stufe heissen projectivisch, wenn die Flächen des einen den einzelnen Flächen des andern in der Art entsprechen, dass den Flächen des ersten Systems, welche ein niederes System $(\mu-\rho)$-ter Stufe bilden im zweiten Systeme ebenfalls Flächen entsprechen, die ein anderes System derselben $(\mu-\rho)$-ten Stufe bilden. Die beiden niederen sich entsprechenden Systeme sind offenbar projectivisch.

Da ein Büschel eine einfach unendliche Reihe von Elementen ist, so ist die gegenseitige Projectivität zweier Büschel durch drei Paare entsprechender Flächen, die beliebig gegeben oder festgelegt sind, bestimmt. [1]) Nehmen wir im Allgemeinen für zwei lineare Systeme μ-ter Stufe an, dass den Flächen $U_1, U_2, \ldots, U_{\mu+1}$ des ersten Systems, die nicht demselben niedern Systeme angehören, der Reihe nach die Flächen $V_1, V_2, \ldots, V_{\mu+1}$ des zweiten Systems, die ebenfalls nicht zu demselben niederen Systeme gehören, entsprechen und lassen wir, unter $\mathbf{U}_\rho$ eine Fläche des Büschels $(U_\rho\, U_{\mu+1})$ und unter $\mathbf{V}_\rho$ eine solche des Büschels $(V_\rho\, V_{\mu+1})$ verstanden, die Flächen $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \ldots, \mathbf{U}_\mu$ bezüglich den Flächen $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_\mu$ entsprechen, so ist die projectivische Beziehung zwischen den beiden gegebenen Systemen vollständig bestimmt, das heisst, einer beliebigen Fläche des ersten Systemes entspricht eine vollständig bestimmte Fläche des zweiten. Denn eine beliebige Fläche des ersten Systems bildet einen Theil (43) des Systems niederer $(\mu-1)$-ter Stufe, das durch Oberflächen gebildet wird, die bezüglich zu den Büscheln $(U_1, U_{\mu+1}), (U_2\, U_{\mu+1}) \ldots, (U_\mu\, U_{\mu+1})$ gehören. Es seien diese Flächen die oben durch $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_\mu$ bezeichneten. Die Büschel $(\mathbf{U}_\rho\, \mathbf{U}_\sigma), (U_\rho\, U_\sigma)$, die zu demselben Netze $(U_\rho\, U_\sigma\, U_{\mu+1})$ gehören, haben eine Fläche gemein, der diejenige Fläche entspricht, welche die Büschel $(\mathbf{V}_\rho\, \mathbf{V}_\sigma), (V_\rho\, V_\sigma)$ gemein haben. Auf diese Weise besteht für die niederen Systeme $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots \mathbf{U}_\mu), (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots \mathbf{V}_\mu)$ dieselbe Beziehung, wie für die gegebenen Systeme μ-ter Stufe. Der Satz gilt also für die Systeme

---

Da ein Netz durch drei Flächen individualisiert wird, so gehen durch ν^3 gemeinschaftliche Puncte dreier Flächen ν-ter Ordnung eine unbegrenzte Zahl von Flächen, die ein Netz bilden. Eine Fläche der ν-ten Ordnung ist durch $\mathfrak{N}(\nu)$ Puncte gegeben, also geht durch $\mathfrak{N}(\nu)-2$ gegebene Puncte ein Netz von Flächen derselben Ordnung; drei beliebige dieser Flächen schneiden sich in ν^3 Puncten, die gegebenen eingeschlossen, und durch diese ν^3 Puncte geht eine unbegrenzte Zahl von Flächen derselben Ordnung, nämlich die, welche die gegebenen Puncte enthalten. Folglich schneiden sich alle Flächen ν-ter Ordnung, welche $\mathfrak{N}(\nu)-2$ gegebene Puncte enthalten, in andern $\nu^3-\mathfrak{N}(\nu)+2$ Puncten, die durch die ersten mit bestimmt sind. $\mathfrak{N}(\nu)-2$ beliebig gegebene Puncte bestimmen daher alle Basispuncte eines Flächennetzes ν-ter Ordnung. Lamé, *Examen des différentes méthodes etc.* Paris 1848. — Pluecker, *Recherches sur les surfaces algébriques.* (Annales de Gergonne. T. 19).

1) *Einleitung*, Nr. 8.

μ-ter Stufe, wenn er für Systeme $(\mu-1)$-ter Stufe statt hat. Er ist aber für Büschel bewiesen, das heisst für $\mu=1$, folglich besteht er allgemein.[1])

45. Ein Ebenennetz besteht aus allen Ebenen, welche durch ein und denselben Punct *(Mittelpunct)* gehen. *Strahlen* des Netzes heissen die Geraden die durch den Mittelpunct gehen.

Zwei Ebenennetze heissen *reciprok*, wenn die Ebenen des einen den Strahlen des andern einzeln entsprechen, in der Art, dass den Ebenen des einen Netzes, die ein Büschel bilden, das heisst, die durch ein und denselben Strahl gehen, im andern Netze die Strahlen eines Büschels entsprechen, das heisst die Strahlen, die in ein und derselben Ebene durch denselben Punct gehen. Das Ebenenbüschel und das entsprechende Strahlenbüschel sind projectivisch.

Ebene Punctreihe ist der Complex aller an Zahl zweimal unendlicher Puncte einer Ebene. *Strahlen* einer ebenen Punctreihe sind die Geraden, die sie enthält.

Zwei ebene Punctreihen heissen *reciprok*, wenn den Puncten der einen die Strahlen der andern in der Art entsprechen, dass den Puncten der einen Ebene, die eine gerade Punctreihe bilden, das heisst sämmtlich auf einem Strahle liegen, in der andern Ebene die Strahlen eines Büschels, das heisst, die Strahlen entsprechen, die sich in einem Puncte kreuzen. Die gerade Punctreihe und das entsprechende Strahlenbüschel sind projectivisch.

46. Gegeben zwei reciproke Ebenennetze deren Mittelpuncte $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1$ sind. Man verlangt den Ort P der Puncte, in welchen die Strahlen des ersten Netzes die entsprechenden Ebenen des zweiten Netzes schneiden. Eine Ebene A die beliebig durch $\mathfrak{s}$ gelegt ist, enthält ein Strahlenbüschel des ersten Netzes und schneidet die entsprechende Ebene des Netzes $(\mathfrak{s}_1)$ in einem zweiten Strahlenbüschel, dessen Mittelpunct der Punct $\mathfrak{a}$ ist, in welchem die Ebene A von dem Strahle a_1 getroffen wird, der ihr im Netze $(\mathfrak{s}_1)$ entspricht. Da beide Strahlenbüschel projectivisch sind, so erzeugen sie einen Kegelschnitt, der durch $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a}$ geht, das heisst, jede beliebige Ebene durch $\mathfrak{s}$ schneidet P in einem Kegelschnitte. Da der Punct $\mathfrak{a}$ auf dem Kegelschnitte liegt, so geht die Ebene A_1, welche dem Strahle $\mathfrak{s}\mathfrak{a} \equiv a$ entspricht, durch $\mathfrak{a}$; dieser Punct ist aber auch der Durchschnitt der Ebene A mit dem Strahle $\mathfrak{s}_1\mathfrak{a} \equiv a_1$, und folglich ist die Fläche P auch der Ort der Puncte,

---

[1]) Angenommen den Flächen

$$U_1=0,\ U_2=0, \ldots, U_{\mu+1}=0;\ \mathfrak{U}_1 \equiv U_1+U_{\mu+1}=0,\ \mathfrak{U}_2 \equiv U_2+U_{\mu+1}=0, \ldots, \mathfrak{U}_\mu \equiv U_\mu+U_{\mu+1}=0$$

des ersten Systems entsprächen die Flächen

$$V_1=0,\ V_2=0, \ldots, V_{\mu+1}=0;\ \mathfrak{V}_1 \equiv V_1+V_{\mu+1}=0,\ \mathfrak{V}_2 \equiv V_2+V_{\mu+1}=0, \ldots, \mathfrak{V}_\mu \equiv V_\mu+V_{\mu+1}=0$$

des zweiten, so sind zwei beliebige entsprechende Flächen durch die Gleichungen dargestellt:

$$\begin{cases} x_1 U_1+x_2 U_2+\ldots+x_{\mu+1} U_{\mu+1}=0, \\ x_1 V_1+x_2 V_2+\ldots+x_{\mu+1} V_{\mu+1}=0. \end{cases}$$

in denen die Strahlen des zweiten Netzes die entsprechenden Ebenen des ersten treffen. Man kann daher in derselben Art beweisen, dass P auch von jeder Ebene, die durch $\mathfrak{s}_1$ geht, in einem Kegelschnitte getroffen wird. Die Fläche kann nicht mehr als zwei Puncte mit einer beliebigen Geraden g gemein haben. Denn der Kegelschnitt, welcher P und der Ebene $\mathfrak{s}g$ gemein ist, schneidet g nur in zwei Puncten. Folglich ist P eine Fläche zweiter Ordnung.

Ein Strahl g des ersten Netzes trifft P ausser in $\mathfrak{s}$ noch in einem zweiten Puncte, dem Durchschnittspuncte von g mit der entsprechenden Ebene G_1 des zweiten Netzes. Dieser zweite Punct ist dem Puncte $\mathfrak{s}$ unendlich nahe, wenn G_1 durch $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ geht, folglich entspricht dem Strahle $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ des zweiten Netzes die Tangentialebene von P in $\mathfrak{s}$, und dem analog entspricht die Tangentialebene in $\mathfrak{s}_1$ dem Strahle $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}$ des ersten Netzes.

Es sei S die Tangentialebene in $\mathfrak{s}$. Dann bilden die Strahlen, die in dieser Ebene durch $\mathfrak{s}$ gehen, ein Büschel und entsprechenden Ebenen, die durch $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}$ gehen. Diese scheiden S in Geraden, die ein Büschel bilden. Die Büschel sind projectivisch und haben entweder zwei reelle verschiedene Strahlen gemein, oder zwei zusammenfallende gemeinsame Strahlen, oder keine zusammenfallende Strahlen, oder es fallen endlich alle Strahlen zusammen. Im ersten Falle ist die Fläche windschief, im zweiten ist sie ein Kegel, im dritten ist sie eine Fläche mit elliptischen Puncten (25). Im letzten Falle besteht die Fläche P aus der Ebene S und einer zweiten Ebene. [1])

47. Umgekehrt beweist man leicht, dass jede beliebige gegebene Fläche zweiter Ordnung auch auf unendlich verschiedene Arten mittelst zweier reciproker Ebenennetze erzeugt werden kann, deren Mittelpuncte zwei beliebig auf ihr angenommene Puncte sind. Und hieraus ergibt sich die Construction einer Quadrifläche von der neun Puncte gegeben sind. [2])

Analog kann man den Satz aussprechen. Sind zwei ebene Punctreihen reciprok, so ist die Enveloppe der Ebenen, die durch einen beliebigen Punct der einen Ebene und den entsprechenden Strahl der anderen Ebene bestimmt werden, eine Oberfläche zweiter Classe. Eine Fläche zweiter Classe kann umgekehrt immer auf unendlich verschiedene Arten mittelst zwei beliebiger von ihren Tangentialebenen erzeugt werden, die reciproke ebene Punctreihen sind.

---

1) Seidewitz, *Konstruktion und Klassifikation der Flächen des zweiten Grades mittelst projektivischer Gebilde* (Grunert's Archiv für Math. und Phys. Bd. 9 S. 187). — Man vergleiche auch Reye, *Geometrie der Lage* (Hannover; 1868) 2. Abth. S. 26.

2) Schroeter, *Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova* (Vratislaviae; 1862).

CAPITEL VII.

EINHÜLLENDE FLÄCHEN.

48. Hat man eine einfach unendliche Reihe von Flächen ν-ter Ordnung, die $\mathfrak{N}(\nu)-1$ gemeinschaftlichen Bedingungen unterworfen sind, so kann man diese Flächen als ebensoviele Lagen einer Fläche betrachten, welche gleichzeitig die Lage und die Gestalt im Raume nach einem gegebenen Gesetze verändert. [1])

Es seien $S, S', S'', S''', \ldots$ aufeinanderfolgende Flächen der Reihe oder auch aufeinanderfolgende Lagen der variablen Fläche und **S** der Ort aller zu $SS', S'S'', S''S''', \ldots$ analogen Curven. Die Fläche **S** wird dann durch S' längs der beiden unmittelbar folgenden unendlich nahen Curven $SS', S'S''$ geschnitten. Dieser Eigenschaft halber heissen die Flächen S *eingehüllte Flächen;* **S** heisst die *einhüllende Fläche* und der Curve, in welcher sich zwei unmittelbar folgende eingehüllte Flächen schneiden, das heisst der Berührungscurve zwischen der einhüllenden Fläche und einer der eingehüllten Flächen gibt man den Namen *Charakteristik* der Einhüllenden. [2])

Sind die Flächen S Ebenen, so ist **S** eine Developpable und ihre Charakteristiken sind die Generatrixen (7).

49. Die Fläche **S** ist offenbar der Ort der Puncte, durch welche zwei unmittelbar folgende Eingehüllte gehen. Daher ist jeder Punct, in dem sich zwei, drei, ... verschiedene Paare successiver eingehüllter Flächen schneiden, das heisst zwei, drei, ... verschiedene Charakteristiken, für **S** respective ein Doppelpunct (Biplanarpunct), ein dreifacher Punct (Triplanarpunct) ... Die Fläche **S** hat also im Allgemeinen eine Doppel- oder Knotencurve, den Ort der Puncte, in denen sich zwei nicht unmittelbar folgende Charakteristiken schneiden, und auf dieser Curve gibt es eine bestimmte Zahl von dreifachen Puncten.

Ebenso ist ein Punct für **S** ein Uniplanarpunct, wenn sich in ihm zwei unmittelbar folgende Charakteristiken schneiden. Die Fläche besitzt folglich eine Cuspidalcurve, den Ort der Durchschnittspuncte aufeinanderfolgender Charakteristiken. Diese Curve wird von jeder Charakteristik in dem Puncte berührt, den dieselbe mit der nächstfolgenden Charakteristik gemein hat.

Die Cuspidalcurve ist der Ort der Puncte, in denen sich drei aufeinanderfolgende Eingehüllte treffen. Es können darunter eine bestimmte Zahl

---

1) In der Art, dass die successiven Lagen der variablen Fläche von den Werthen abhängen, die ein veränderlicher Parameter annehmen kann.

2) Monge, *Application de l'analyse à la géométrie,* §. VI.

von Puncten sein, von denen jeder in vier aufeinanderfolgenden Eingehüllten liegt, das heisst in drei unmittelbar folgenden Charakteristiken. Diese Puncte würden offenbar Spitzen der Cuspidalcurve sein und würden wegen des Durchschnitts der ersten mit der dritten Charakteristik auch der Doppelcurve angehören. Die Puncte, in denen sich zwei unmittelbar folgende Charakteristiken und eine andere nicht unmittelbar folgende schneiden, sind Spitzen der Doppelcurve und liegen auch in der Cuspidalcurve.

50. Um ein Beispiel zu geben, möge die Reihe der Flächen S so beschaffen sein, dass durch einen beliebigen Punct des Raumes zwei dieser Flächen gehen. Dann ist die Fläche **S** der Ort der Puncte, für welche die beiden Flächen S zusammenfallen. Da jeder Punct der Fläche **S** auf einer einzigen eingehüllten Fläche liegt, und zwar auf der, welche **S** im besagten Puncte berührt, so folgt, dass alle gemeinschaftlichen Puncte zwischen **S** und einer Eingehüllten Berührungspuncte dieser beiden Flächen sind. Aber die Berührungscurve zwischen **S** und einer Fläche S ist der Durchschnitt dieser letztern mit der nächstfolgenden Eingehüllten, und ist daher eine Curve ν^2-ter Classe. **S** ist also eine Fläche 2ν-ter Ordnung. Auf derselben existiert weder eine Doppelcurve, noch eine Cuspidalcurve, weil kein Punct des Raumes nur in drei Flächen S liegt.

Drei eingehüllte Flächen schneiden sich in ν^3 Puncten, die nothwendig allen Flächen S angehören, da sie nicht in einer endlichen Zahl von Flächen, die grösser als 2 ist, liegen können. In jedem dieser Puncte wird **S** von der Ebene berührt, die in ihm eine der eingehüllten Flächen berührt. Folglich sind alle diese Puncte für die Fläche **S** Doppelpuncte, und durch dieselben gehen nicht blos die Flächen S, sondern auch alle Berührungscurven der Fläche **S** mit den Eingehüllten.

Da die Berührungscurve zwischen **S** und der Eingehüllten S der Durchschnitt der letzteren Curve mit der nächstfolgenden Eingehüllten ist, so ist die genannte Curve — das heisst eine beliebige Charakteristik von **S** — die Basis eines Flächenbüschels ν-ter Ordnung (20). Die Berührungscurven zweier beliebiger Eingehüllten haben ν^3 Puncte gemein, und folglich hat die Fläche ν-ter Ordnung, die durch die erste Curve und einen beliebigen Punct der zweiten geht, mit letzterer ν^3+1 Puncte gemein, das heisst, sie enthält sie vollständig. Zwei nicht unmittelbar folgende Charakteristiken der Fläche **S** liegen also auf ein und derselben Fläche ν-ter Ordnung.

Lässt man durch eine Charakteristik von **S** eine Fläche ν-ter Ordnung gehen, so schneidet diese **S** in einer andern Curve ν^2-ter Ordnung. Es sei $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punct dieser Curve. Dann enthält die Oberfläche ν-ter Ordnung, die durch die gegebene Charakteristik und durch $\mathfrak{x}$ geht, auch die Charakteristik, auf der $\mathfrak{x}$ liegt, und jede Fläche ν-ter Ordnung also, die durch eine Charakteristik gelegt ist, schneidet **S** längs einer andern Charakteristik.

Alle analogen Flächen, deren jede **S** in zwei Charakteristiken schneidet, gehen durch die ν^3 Doppelpuncte der einhüllenden Fläche. Diese Puncte, entstanden durch den Durchschnitt dreier Flächen ν-ter Ordnung, bilden die Basis eines Netzes (43). Umgekehrt schneidet jede Fläche des Netzes **S** in zwei Charakteristiken. Denn denken wir uns eine solche Fläche durch zwei Puncte, die beliebig auf **S** angenommen sind, bestimmt, so liegen die beiden Charakteristiken, die durch diese Puncte gehen, auf derselben Fläche ν-ter Ordnung, folglich u. s. w. Zu dem Netze gehören auch die Eingehüllten S. Diese sind davon diejenigen Flächen, welche **S** in zwei unmittelbar folgenden Charakteristiken schneiden.

CAPITEL VIII.

WINDSCHIEFE FLÄCHEN.

51. Eine Fläche heisst eine *Regelfläche*, wenn sie durch Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden kann. Eine Regelfläche ist also eine einfach unendliche Reihe von Geraden *(Generatrixen)*.

Liegen zwei unmittelbar folgende Generatrixen stets in derselben Ebene, so bilden die Durchschnitte der aufeinanderfolgenden Generatrixen eine Curve, deren Tangenten eben diese Generatrixen sind. Die Regelfläche ist also in diesem Falle eine *Developpable* (abwickelbare Fläche).

Die Regelflächen, die nicht abwickelbar sind, heissen *windschief (gobbe, gauches, skew)* oder *geradlinig*, [1]) das heisst eine windschiefe Fläche ist ein Ort, der durch eine Gerade erzeugt wird, von der zwei unmittelbar folgende Lagen im Allgemeinen nicht mehr in derselben Ebene enthalten sind.

Die windschiefe Fläche der zweiten Ordnung lässt zwei Systeme geradliniger Generatrixen zu, das heisst zwei einfach unendliche Reihen von Geraden (24).

52. Es sei S eine gegebene windschiefe Fläche, g eine ihrer Generatrixen, $\mathfrak{m}$ ein Punct beliebig auf g gelegen; es seien ferner g', g'' die auf g folgenden Generatrixen. Die Gerade g ist offenbar eine der beiden Osculierenden der Fläche in $\mathfrak{m}$ (16) und es geht folglich die Tangentialebene durch g, was auch der Berührungspunct $\mathfrak{m}$ ist. Die Gerade, welche durch $\mathfrak{m}$ geht und g' und g'' schneidet, enthält drei unendlich nahe Puncte der Fläche, ist also die zweite Osculierende und bestimmt in Verbindung mit g die Berührungsebene M in $\mathfrak{m}$.

Umgekehrt berührt jede beliebig durch g gelegte Ebene M die Fläche

---

[1]) Bellavitis, *Geometria descrittiva* (Padova 1851; p. 90).

in einem Puncte dieser Generatrix. Die Gerade, welche in der Ebene M so gezogen ist, dass sie g' und g'' schneidet, trifft g im Berührungspuncte $\mathfrak{m}$. [1])

Es ist auf diese Weise klar, dass längs der Generatrix g jeder Punct eine einzige Ebene M individualisiert, und umgekehrt jede Ebene M nur einen einzigen Punct $\mathfrak{m}$. Die Reihe der Puncte $\mathfrak{m}$ und das Büschel der Ebenen M sind also zwei projectivische Gebilde, und es ist folglich das Doppelverhältniss von vier Tangentialebenen, die durch dieselbe Generatrix gehen, gleich dem Doppelverhältniss der vier Berührungspuncte. [2])

53. Zwei windschiefe Flächen mögen jetzt eine gemeinschaftliche Generatrix g haben. Eine durch g beliebig gelegte Ebene M berührt die eine Fläche in einem Puncte $\mathfrak{m}$ und die andere in einem zweiten Puncte $\mathfrak{m}'$. Lässt man M variieren, so erzeugen die beiden Puncte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ zwei projectivische Punctreihen, bei denen zwei Puncte mit ihren bezüglich entsprechenden Puncten zusammenfallen; die beiden Flächen berühren sich folglich in zwei Puncten der gemeinschaftlichen Generatrix. Wenn sie sich nun in drei Puncten von g berührten, so fielen die Puncte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ immer zusammen, das heisst, die beiden Flächen würden sich längs der ganzen gemeinsamen Generatrix berühren. [3])

54. Ist eine windschiefe Fläche von der Ordnung ν, so trifft eine beliebige Gerade ν Generatrixen und jede von ihnen bestimmt mit jener Geraden eine Tangentialebene. Es gibt also ν Tangentialebenen, die man durch die beliebige Gerade legen kann, das heisst, eine windschiefe Fläche ν-ter Ordnung ist auch ν-ter Classe und umgekehrt. [4]) Um die Begriffe Ordnung und Classe auf einmal zu umfassen, sagen wir, eine windschiefe Fläche ist vom *ν-ten Grade*, wenn eine beliebige Gerade ν Generatrixen trifft.

55. Eine Ebene M, die eine gegebene windschiefe Fläche ν-ten Grades in einem Puncte $\mathfrak{m}$ berührt, schneidet die Fläche in einer geradlinigen Generatrix g und einer Curve $(\nu-1)$-ter Ordnung. Diese trifft g in $\mathfrak{m}$ und in $\nu-2$ anderen Puncten. Jeder derselben ist ein Doppelpunct der Fläche, da er kein wirklicher Berührungspunct der Ebene mit der Fläche sein kann, und verändert sich nicht, wie auch die Ebene M um g rotiert. Die Curve $(\nu-1)$-ter Ordnung ist in der That der Ort der Puncte, in denen die Ebene

---

1) Die Fläche S und das durch die Directrixen g, g', g'' bestimmte Hyperboloid osculieren sich längs der Geraden g. In jedem Puncte derselben haben sie die nämliche Tangentialebene und die nämlichen Osculierenden. Jedes andere Hyperboloid, das durch die Geraden g, g' geht, hat längs g mit S einen Contact erster Ordnung. (Hachette, *Supplément à la géométrie descriptive de Monge*, 1811.)

2) Chasles, *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite etc.* (Correspondence mathématique et physique de Bruxelles, T. 11).

3) Hachette, *a. a. O.*; — *Traité de géométrie descriptive*, Paris 1822. p. 84.

4) Cayley, *On the theory of skew surfaces* (Cambridge and Dublin mathematical Journal, T. 7; 1852).

M von Generatrixen ausser g geschnitten wird. Die auf g folgende Generatrix trifft M in dem auf den Berührungspunct m der Tangentialebene mit der Fläche unmittelbar folgenden Puncte der Curve; durch die anderen $\nu-2$ gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der Geraden g mit der Curve gehen also ebensoviele nicht unmittelbar folgende Generatrixen. Ein Punct, in dem sich zwei getrennte Generatrixen schneiden, ist für die Fläche ein Doppelpunct, weil man, wenn man, wie es oben (52) geschehen ist, die auf obengenannte Generatrixen jedesmal folgenden Generatrixen betrachtet, findet, dass in diesem Puncte die Fläche zwei verschiedene Tangentialebenen zulässt. Oder man kann auch darauf Rücksicht nehmen, dass der Durchschnittspunct zweier Generatrixen, die nicht unmittelbar aufeinander folgen, zwei zusammenfallende Durchschnittspuncte der Fläche mit jeder beliebigen Geraden darstellt, die durch ihn gezogen ist, da diese Gerade nicht mehr als $\nu-2$ andere Generatrixen schneiden kann. Die Fläche hat daher eine Doppelcurve, die von jeder Generatrix in $\nu-2$ Puncten getroffen wird.[1] In jedem Puncte dieser Curve hat die Fläche zwei Tangentialebenen, die respective durch die beiden Generatrixen gehen, welche sich in dem Puncte kreuzen und sich in einer Geraden schneiden, welche die Tangente der Doppelcurve ist.

Aus der reciproken Eigenschaft zieht man den Satz, dass die Ebenen, die zwei nicht unmittelbar folgende Generatrixen enthalten, zur Enveloppe eine doppelt berührende — der windschiefen Fläche doppelt umgeschriebene — Developpable haben, die $\nu-2$ Tangentialebenen besitzt durch jede Generatrix der gegebenen Fläche. Jede Ebene, die zwei nicht unmittelbar folgende Generatrixen enthält, berührt die gegebene Fläche in zwei Puncten, nämlich in denjenigen, in welchen die vorgedachten Generatrixen von der Berührungsgeneratrix zwischen der doppeltberührenden Developpablen und besagter Ebene geschnitten werden.

56. Eine windschiefe Fläche hat im Allgemeinen einige singulären Generatrixen, die von den unmittelbar folgenden Generatrixen getroffen werden. Treffen sich zwei unmittelbar folgende Generatrixen g, g', so berührt die Ebene, die sie enthält, die Fläche in allen Puncten von g, wie es bei den Developpablen eintritt. Diese Ebene kann also als eine stationäre Ebene angesehen werden, die eine unbegrenzte Zahl — parabolischer — Berührungspuncte besitzt, die längs einer Geraden continuierlich aufeinander folgen. Jede Gerade, die in dieser Ebene liegt, ist Tangente der Oberfläche in einem Puncte der Generatrix g, und der Punct gg' kann als ein stationärer Punct mit unendlich vielen Tangentialebenen angesehen werden, die sämmtlich durch g gehen; jede Gerade, die durch den Punct gg' geht, ist Tangente der Fläche in einer Ebene, welche die Gerade g enthält. Die Zahl dieser

---

1) Cayley, *a. a. O.* An Stelle der $\nu-2$ Doppelpuncte auf jeder Generatrix kann man in gewissen Fällen eine äquivalente Zahl dreifacher, vierfacher .... Puncte haben; das heisst die Doppelcurve kann durch eine äquivalente Curve von höherer Multiplicität ersetzt werden.

singulären Puncte und Ebenen ist für eine Fläche gegebener Ordnung endlich, und folglich lässt dieselbe weder eine Cuspidalcurve noch eine osculierende Developpable zu. Das heisst, der durch eine *beliebige* Ebene erzeugte Schnitt hat keine Spitze, und der umgeschriebene Kegel, dessen Scheitel ein *beliebiger* Punct ist, hat keine Wendeebenen.

In gewissen Fällen hat die Fläche auch *Doppelgeneratrixen.* Eine solche repräsentiert zwei zusammenfallende Generatrixen für jede Ebene, die durch sie hindurchgeht. Jede Gerade, die sie schneidet, trifft im Schnittpuncte die Fläche in zwei zusammenfallenden Puncten.

Die Classe eines umgeschriebenen Kegels ist (38) gleich der der gegebenen Fläche, das heisst gleich ν. Ist daher $\mathfrak{d}$ die Zahl der Bitangentialebenen des Kegels, das heisst die Zahl der Ebenen, die durch den Scheitel gehen und zwei Generatrixen der Fläche enthalten, so ist die Ordnung des Kegels gleich $\nu(\nu-1)-2\mathfrak{d}$. Aber die Ordnung des Kegels ist offenbar gleich der Classe der Curve, die man erhält, wenn man die windschiefe Fläche durch eine Ebene schneidet, die durch den Kegelscheitel geht. Die Classe dieser Curve ist $\nu(\nu-1)-2\delta$, wo δ die Zahl der Doppelpuncte derselben ist. Folglich hat man $\mathfrak{d}=\delta$, das heisst, *die Classe der doppeltberührenden Developpablen einer windschiefen Fläche ist gleich der Ordnung der Doppelcurve.* [1])

57. Zwei krumme Linien — ebene oder Raumcurven — heissen *projectivische krumme Punctreihen,* wenn die Puncte der einen den Puncten der anderen einzeln in der Art entsprechen, dass man die beiden Curven sich gleichzeitig durch die Bewegung zweier Puncte erzeugt denken kann und dabei einer beliebigen Lage des ersten oder zweiten Mobils nur eine einzige Lage des zweiten oder des ersten Mobils entspricht.

Wir nehmen jetzt an, in zwei Ebenen P, P' seien zwei projectivische krumme Punctreihen gegeben; es sei ν' die Ordnung der ersten, δ' die Zahl der Doppelpuncte mit verschiedenen Tangenten, und $\varkappa'$ die Zahl der Doppelpuncte mit zusammenfallenden Tangenten — Spitzen —; ν'', δ'', $\varkappa''$ die analogen Zahlen für die zweite Curve. [2]) Was ist dann der Grad der windschiefen Fläche, die der Ort der Geraden ist, welche zwei entsprechende Puncte $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ der beiden Curven verbindet? Das heisst, wie viele Gerade $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''$ werden von einer beliebigen Geraden r geschnitten? Eine beliebig durch r gelegte Ebene schneidet die erste Curve in ν' Puncten $\mathfrak{x}'$, denen ebensoviel Puncte $\mathfrak{x}''$ entsprechen, die im Allgemeinen in ν' verschiedenen Ebenen des Büschels (r) liegen. Eine beliebige Ebene durch r schneidet umgekehrt die zweite Curve in ν'' Puncten $\mathfrak{x}''$, denen ν'' Puncte $\mathfrak{x}'$ entsprechen, die in ebensovielen Ebenen des zweiten Büschels (r) liegen. Jeder Lage der Ebene $r\mathfrak{x}'$, sieht man also, entsprechen ν' Lagen der Ebene $r\mathfrak{x}''$, und jeder Lage der Ebene $r\mathfrak{x}''$ in ähnlicher Weise ν'' Lagen der Ebene $r\mathfrak{x}'$.

---

1) Cayley, *a. a. O.*

2) Ist darunter ein ρ-facher Punct, so zählt dieser für $\frac{\rho(\rho-1)}{1\cdot 2}$ Doppelpuncte.

Doch gibt es $\nu'+\nu''$ Fälle, dass zwei entsprechende Ebenen $r\mathfrak{x}'$, $r\mathfrak{x}''$ zusammenfallen. Durch r gehen also $\nu'+\nu''$ Ebenen, von denen jede zwei entsprechende Puncte beider Curven verbindet, und es ist demnach der Grad der windschiefen Fläche, welche der Ort der Geraden $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''$ ist, gleich $\nu'+\nu''$. — Offenbar verändern sich der Beweis und die sonstigen Schlüsse nicht im Mindesten, wenn man an Stelle der beiden ebenen Curven zwei Raumcurven oder eine Raumcurve und eine ebene Curve annimmt, deren Ordnungszahlen bezüglich ν' und ν'' sind.

Die Curve (ν'') trifft die Ebene P' in ν'' Puncten $\mathfrak{x}''$ und die Geraden, welche diese Puncte mit den entsprechenden Puncten $\mathfrak{x}'$ verbinden, sind ebensoviele Generatrixen der Fläche. Da die Ebene P' ν'' Generatrixen enthält, so ist sie für ν'' Puncte — einen für jede Generatrix — Tangentialebene, und der durch sie erzeugte Schnitt der Fläche besteht aus diesen ν'' Geraden und der Curve (ν'). Dieser Schnitt hat

$$\nu'\nu''+\frac{\nu''(\nu''-1)}{1\,.\,2}+\delta'+\varkappa'$$

Doppelpuncte; zieht man hiervon die ν'' Berührungspuncte ab, so drückt der Rest

$$\nu'\nu''+\frac{\nu''(\nu''-3)}{1\,.\,2}+\delta'+\varkappa'$$

die Ordnung der Doppelcurve der Fläche aus. Betrachtet man analog den Schnitt der durch P'' entsteht, so erhält man die Ordnung der Doppelcurve ausgedrückt durch

$$\nu''\nu'+\frac{\nu'(\nu'-3)}{1\,.\,2}+\delta''+\varkappa''.$$

Man findet also identisch

$$\frac{\nu''(\nu''-3)}{1\,.\,2}+\delta'+\varkappa'=\frac{\nu'(\nu'-3)}{1\,.\,2}+\delta''+\varkappa''$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{(\nu'-1)(\nu'-2)}{1\,.\,2}-(\delta'+\varkappa')=\frac{(\nu''-1)(\nu''-2)}{1\,.\,2}-(\delta''+\varkappa'').$$

Bezeichnen wir nun mit dem Namen *Geschlecht* einer Curve (ν') die Zahl

$$\frac{(\nu'-1)(\nu'-2)}{1\,.\,2}-(\delta'+\varkappa'),$$

so können wir schliessen: *Zwei ebene projectivische krumme Punctreihen sind von demselben Geschlecht.*

Da nach den Formeln von Plücker

$$\frac{(\nu'-1)(\nu'-2)}{1\,.\,2}-(\delta'+\varkappa')=\frac{(\mu'-1)(\mu'-2)}{1\,.\,2}-(\tau'+\iota')$$

ist, [1]) wo μ' die Classe der Curve (ν'), τ' die Zahl ihrer Doppeltangenten,

---

[1]) Diese Gleichung kann auch als eine Folgerung aus dem eben bewiesenen Theorem angesehen werden, da zwei reciproke ebene Curven augenscheinlich projectivische Punctreihen sind.

und ι' die der Wendetangenten ist, so ist das Geschlecht der Curve auch ausgedrückt durch

$$\frac{(\mu'-1)(\mu'-2)}{1\,.\,2} - (\tau' + \iota').$$

Es ist klar, dass zwei ebene Schnitte derselben windschiefen Fläche projectivische Punctreihen sein müssen, wenn man nur als entsprechende Puncte diejenigen annimmt, welche auf derselben Generatrix liegen, und sie sind also auch Curven von demselben Geschlecht. Ist die Fläche vom Grade ν und hat sie eine Doppelcurve, deren Ordnungszahl δ ist, so ist das Geschlecht eines beliebigen ebenen Schnittes gleich $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2} - \delta$.

Ist also eine windschiefe Fläche vom ν-ten Grade und vom Geschlechte π, das heisst ist π das Geschlecht eines ebenen Schnittes, so ist die Ordnung der Doppelcurve gleich $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2} - \pi$. Diese Zahl kann nun nicht kleiner sein als $\nu-2$, da dieses die Zahl der Puncte ist, in denen die Doppelcurve von jeder Generatrix getroffen wird. Wenn die Fläche keine Doppelgeraden enthält, durch welche die Ebenen gehen müssen, welche zwei verschiedene Generatrixen enthalten, so muss die Ordnung der Doppelcurve sogar mindestens $2\nu-5$ sein, da zwei Generatrixen, die sich schneiden, diese Zahl von Doppelpuncten besitzen.

58. Unter *Geschlecht einer Raumcurve* wollen wir das Geschlecht irgend einer Perspectivcurve verstehen. Es sei nun ν die Ordnung der Curve, ϑ die Zahl ihrer scheinbaren und wirklichen Doppelpuncte und β die Zahl der stationären Puncte; dann ist die Perspectivcurve [1]) von der ν-ten Ordnung und besitzt ϑ Doppelpuncte und β Spitzen, sie ist also eine Curve vom Geschlechte

$$\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2} - (\vartheta + \beta).$$

Aus den Formeln Cayley's hat man nun [2]):

$$\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2} - (\vartheta+\beta) = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2} - (\gamma + \alpha)$$
$$= \frac{(\rho-1)(\rho-2)}{1\,.\,2} - (\eta+\mu+\theta) = \frac{(\rho-1)(\rho-2)}{1\,.\,2} - (\xi+\nu+\theta).$$

Dies sind also ebensoviele Ausdrücke für das Geschlecht einer Raumcurve.

Da eine Raumcurve und ihre Perspectivcurve offenbar zwei projectivische Punctreihen bilden, so können wir schliessen: *Zwei beliebige ebene oder Raumcurven, die projectivische Punctreihen bilden, sind von demselben Geschlecht.* [3])

Die Eintheilung der ebenen und Raumcurven und damit auch der Kegel und der Developpablen, sowie der windschiefen Flächen als Reihen von

---

1) Das heisst ein ebener Schnitt eines Perspectivkegels der Raumcurve (12).

2) Hier bedeuten die Zeichen

$$\mu,\ \rho,\ \alpha,\ \gamma,\ \xi,\ \eta,\ \theta$$

dieselben Zahlen, wie sie oben (10, 12) auseinander gesetzt sind.

3) Clebsch, *Ueber die Singularitäten algebraischer Curven* (Crelles Journal, Bd. 64; 1865).

Geraden in *Geschlechter*, die von Professor Clebsch vorgeschlagen [1]), ist von der höchsten Wichtigkeit. Durch sie näheren und verknüpfen sich die anscheinend verschiedenartigsten Eigenschaften der geometrischen Formen. Demgemäss ist das Maass der Schwierigkeit, welches das Studium einer einfach unendlichen Reihe von Elementen — Puncten, Geraden, Ebenen — darbieten kann, weder die Ordnung noch die Classe, sondern vielmehr das Geschlecht. [2])

59. Die einfachsten unter den windschiefen Flächen sind die, deren Geschlecht Null ist. Nennen wir ν den Grad der Fläche, so ist die Ordnung der Knotencurve gleich $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2}$ und es hat also ein beliebiger ebener Schnitt der Fläche die grösste Zahl der Doppelpuncte, die in einer ebenen Curve existieren können. Durch einen beliebigen Punct x des ebenen

[1]) Man vgl. auch Schwarz, *De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum* (Crelles Journal, Bd. 64) und *Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades* (ibid. Bd. 67).

[2]) Eine ebene Curve ist vom Geschlechte *Null*, sobald $\delta + \varkappa = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2}$ ist, das heisst, sobald sie die grösste Zahl von Doppelpuncten besitzt (*Einleitung*, Nr. 35). In diesem Falle kann man die Puncte der Curve einzeln mittelst der Curven eines Büschels $(\nu-1)$-ter Ordnung erhalten. Denn die Doppelpuncte und $2\nu-3$ andere beliebig in der Curve fixirte Puncte bestimmen ein System von $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2} - 1$ Puncten, das heisst, sie bestimmen (*Einleitung*, Nr. 41) die Basis eines Büschels $(\nu-1)$-ter Ordnung. Von diesem schneidet jede Curve die gegebene Curve *in einem einzigen neuen Puncte.* Die Curve ist in Gemäss der Formeln von Plücker von der Classe $2(\nu-1)-\varkappa$ und hat $3(\nu-2)-2\varkappa$ Wendepuncte und $2(\nu-3)(\nu-2-\varkappa)-\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1\,.\,2}$ Doppeltangenten. Daraus folgt, dass eine Curve der ν-ten Ordnung nicht mehr als $\frac{3(\nu-2)}{1\,.\,2}$ Spitzen haben kann. Clebsch, *Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind.* (Crelles Journal, Bd. 64; 1865).

Da die Curven eines Büschels einzeln den einzelnen Puncten einer Geraden entsprechend aufgefasst werden können, so kann man also auch eine Curve vom Geschlechte Null als eine jeder Geraden projectivische Punctreihe auffassen. Dies gilt auch für eine Raumcurve, da man für diese stets ihre Perspectivcurve setzen kann. Hieraus ergeben sich viele wichtige Folgerungen. Zum Beispiel, wenn in einer Curve vom Geschlecht 0 zwei Reihen entsprechender Puncte existieren in der Art, dass einem beliebigen Puncte der ersten Reihe β Puncte der zweiten, und einem beliebigen Puncte der zweiten β' Puncte der ersten Reihe entsprechen, so ist $\beta+\beta'$ die Zahl von Puncten, in denen je zwei entsprechende zusammenfallen. Das heisst auch, um es kurz zu sagen: *Gibt es in einer Curve vom Geschlecht* 0 *zwei Reihen von Puncten mit der Beziehung* (β, β'), *so ist die Zahl der zusammenfallenden Puncte gleich* $\beta+\beta'$. Um dieses Theorem zu beweisen, genügt es, zu beachten, dass dasselbe für eine gerade Punctreihe richtig ist, die der gegebenen Curve projectivisch ist. Cayley, *Note sur la correspondance de deux points sur une courbe* (Comptes rendus, 12 mars 1866).

Schnittes geht eine Generatrix, welche die Doppelcurve in $\nu-2$ Puncten trifft. Von jedem dieser Puncte geht eine neue Generatrix aus. Es sei $\mathfrak{x}'$ der Punct, in dem dieselbe den ebenen Schnitt trifft; dann entsprechen also dem Puncte $\mathfrak{x}$ je $\nu-2$ Puncte $\mathfrak{x}'$, und ebenso bestimmt der Punct $\mathfrak{x}'$ andere $\nu-2$ Puncte, von denen einer $\mathfrak{x}$ ist. In dem ebenen Schnitte also, der eine Curve vom Geschlechte 0 darstellt, existieren zwei Reihen von Puncten mit der Beziehung $(\nu-2, \nu-2)$; es gibt folglich $2(\nu-2)$ vereinigte Puncte, das heisst, in der Raumcurve existieren $2(\nu-2)$ Cuspidalpuncte — Puncte, in welchen die beiden Generatrixen zusammenfallen — oder auch, es gibt $2(\nu-2)$ Generatrixen, von denen jede durch die unmittelbar folgende Generatrix geschnitten wird.

60. Wir beschränken uns hier auf den Fall einer windschiefen Fläche ν-ten Grades, die zwei gerade Directrixen a, b hat. Es sei k die Curve ν-ter Ordnung, die man erhält, wenn man die Fläche durch eine beliebig fixierte Ebene schneidet, dann ist die Fläche der Ort der Geraden, welche auf den drei Directrixen a, b, k hingleitet. Die Geraden a, b mögen auf der Fläche etwa ρ-fach und σ-fach sein, dann werden folglich die Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, in denen sie k treffen, für diese Curve bezüglich ρ-fache und σ-fache Puncte sein. Die Geraden, die durch einen Punct $\mathfrak{x}$ von a gehen und b treffen, liegen in einer Ebene; diejenigen, welche $\mathfrak{x}$ mit den Puncten von k verbinden, bilden einen Kegel ν-ter Ordnung, für welchen die Gerade $\mathfrak{x}\mathfrak{b}$ eine σ-fache Generatrix ist. Der Kegel und die Ebene haben noch andere $\nu-\sigma$ Gerade gemein, die ebensoviel Generatrixen der windschiefen Fläche sind, die durch $\mathfrak{x}$ gehen. Es ist folglich $\rho=\nu-\sigma$.

Jede Ebene durch a schneidet k ausser in $\mathfrak{a}$ noch in σ Puncten, oder auch sie schneidet die Fläche in σ Generatrixen, die, weil sie b treffen müssen, sämmtlich durch denselben Punct gehen. In gleicher Weise schneidet jede durch b gelegte Ebene die Fläche in ρ Generatrixen, die sich in *einem* Puncte von a schneiden. Die Generatrixen, welche von dem nämlichen Puncte $\mathfrak{x}$ von a ausgehen, treffen k in ρ Puncten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}'_1$, ..., die auf einer Geraden x liegen, welche durch $\mathfrak{b}$ geht, so dass die Puncte $\mathfrak{x}$ von a projectivisch den Geraden x oder den Gruppen der Puncte $\mathfrak{x}_1$, die in diesen Geraden liegen, entsprechen. Jedem Puncte $\mathfrak{x}$ von a entsprechen ρ Puncte $\mathfrak{x}_1$ von k, die mit $\mathfrak{b}$ in gerader Linie liegen, aber dem Puncte $\mathfrak{a}$ von a entsprechen ρ in dem Punct $\mathfrak{a}$ selbst zusammenfallende Puncte, weil die Ebene von k keine Generatrix der Fläche enthält; das heisst, dem Puncte $\mathfrak{x}=\mathfrak{a}$ entspricht die Gerade $x=\mathfrak{b}\mathfrak{a}$. Den Tangenten der σ Zweige von k, die sich in $\mathfrak{b}$ kreuzen, entsprechen die Puncte, in denen a von Generatrixen getroffen wird, die von $\mathfrak{b}$ ausgehen.

Haben wir umgekehrt eine ebene Curve k der ν-ten Ordnung, die einen ρ-fachen Punct $\mathfrak{a}$ und einen σ-fachen Punct $\mathfrak{b}$ hat $(\rho+\sigma=\nu)$, und eine Gerade a, die auf k im Puncte $\mathfrak{a}$ aufsteht, deren Puncte $\mathfrak{x}$ projectivisch den Geraden x entsprechen, die in der Ebene von k liegen und in $\mathfrak{b}$ zusammenlaufen, und setzen wir voraus, dass dem Puncte $\mathfrak{x}=\mathfrak{a}$ die Gerade $x=\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ entspricht, was ist dann der Ort der Geraden $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$, welche die Puncte von a mit den Puncten verbinden, in welchen k von den entsprechenden

Geraden x geschnitten wird? Man nehme eine beliebige Gerade t als Axe eines Büschels von Ebenen, die durch die verschiedenen Puncte $\mathfrak{x}$ von a gehen. Dieses Büschel und das Büschel der entsprechenden Geraden x sind projectivisch und erzeugen daher durch die Durchschnitte der entsprechenden Strahlen einen Kegelschnitt, der durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ geht, also k in noch weitern $2\nu-\rho-\sigma=\nu$ Puncten $\mathfrak{x}_1$ schneidet. Verbindet man $\mathfrak{x}_1$ mit demjenigen Puncte $\mathfrak{x}$ von a, welcher dem Strahle $x=\mathfrak{b}\mathfrak{x}_1$ entspricht, so erhält man eine Gerade, die in der Ebene $t\mathfrak{x}$ liegt. Die gesuchte Fläche ist also vom ν-ten Grade. Jede Ebene durch a schneidet k in $\mathfrak{a}$ und in anderen σ Puncten $\mathfrak{x}_1$, denen der Reihe nach der Punct $\mathfrak{a}$ und andere σ Puncte $\mathfrak{x}$ von a entsprechen; die beiden Punctreihen sind projectivisch und zwei entsprechende Puncte fallen zusammen; die Geraden $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ schneiden sich daher sämmtlich in einem festen Puncte $\mathfrak{y}$ der Ebene. Geht die Ebene durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, so fällt der Punct $\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{b}$ zusammen und folglich hat die Fläche ausser a noch eine andere geradlinige Directrix, die σ-fach ist und durch den Punct $\mathfrak{b}$ geht.

Wir wollen jetzt annehmen, die Gerade b rücke der Geraden a unendlich nahe, also auch der Punct $\mathfrak{b}$ dem Puncte $\mathfrak{a}$. Nehmen wir ρ nicht kleiner als σ, so gibt es unter den ρ Zweigen von k, die sich in $\mathfrak{a}$ kreuzen, σ, die auch durch $\mathfrak{b}$ gehen und die also von der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ berührt werden. [1]) In diesem Falle entsprechen die Puncte $\mathfrak{x}$ von a denjenigen Geraden x projectivisch, die in der Ebene von k durch $\mathfrak{a}$ gezogen sind; der Punct $\mathfrak{a}$ entspricht der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, und die Fläche ist auch der Ort der Geraden, die von dem Puncte $\mathfrak{x}$ nach den Puncten $\mathfrak{x}_1$ gehen, in denen k von den entsprechenden Geraden x getroffen wird. Jede Ebene durch a enthält σ Generatrixen, die in *einen* Punct der Directrix a zusammenlaufen, die für die Fläche eine ρ-fache Gerade ist. Es folgt hieraus, dass durch einen beliebigen Punct von a eine Zahl von $\rho-\sigma$ Generatrixen geht, die sämmtlich mit a zusammenfallen, und in jedem der $\rho-\sigma$ Puncte von a, welche den Tangenten an die Zweige von k entsprechen, die nicht von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ berührt werden, fallen $\rho-\sigma+1$ Generatrixen mit a zusammen.

Umgekehrt: Gegeben eine ebene Curve k von der Ordnung $\nu=\rho+\sigma$ die einen $\rho(+\sigma)$-fachen Punct $\mathfrak{a}$ hat, ferner gegeben eine Gerade a, deren Puncte $\mathfrak{x}$ eine projectivische Punctreihe in Bezug auf das Büschel von Geraden x bilden, die in der Ebene von k durch $\mathfrak{a}$ gehen, in der Art, dass dem Puncte $\mathfrak{x}=\mathfrak{a}$ die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ entspricht, die σ Zweige von k in a berührt und in diesem Puncte $\rho+\sigma$ gemeinschaftliche Puncte mit der Curve hat, dann ist der Ort der Geraden $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$, welche die Puncte von a mit den Puncten verbinden, in denen k von den entsprechenden Strahlen x getroffen

---

[1]) Man hat so einen vielfachen Punct $\mathfrak{a}$, durch den ρ Zweige der Curve gehen, der aber für

$$\frac{\rho(\rho-1)}{1.2}+\frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2}$$

Doppelpuncte gilt, da er durch das Zusammenfallen eines ρ-fachen und eines σ-fachen Punctes entsteht. CAYLEY nennt ihn einen $\rho(+\sigma)$-fachen Punct, um ihn von einem $(\rho+\sigma)$-fachen Puncte zu unterscheiden.

wird, eine Fläche des ν-ten Grades. Denn zieht man eine beliebige Transversale t, so erhält man wie im allgemeinen Falle einen Kegelschnitt, der durch $\mathfrak{a}$ geht und dort $\mathfrak{ab}$ berührt, also k nur noch in anderen ν Puncten x_1 trifft. [1])

In beiden Fällen, mögen die Directrixen a, b verschieden sein oder zusammenfallen, ist die windschiefe Fläche vom Geschlecht

$$\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2} - \frac{\rho(\rho-1)}{1.2} - \frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2} = (\rho-1)(\sigma-1).$$

Diese Zahl kann sich aber noch erniedrigen, wenn die Curve k andere vielfache Puncte und folglich die Fläche vielfache Generatrixen besitzt.

Macht man $\nu = 3$, also $\rho = 2, \sigma = 1$, so hat man das einfachste Beispiel der eben betrachteten Flächen. Die windschiefe Fläche dritten Grades hat im Allgemeinen zwei geradlinige Directrixen, von denen eine eine Doppelgerade ist. Beide Directrixen können aber auch in eine einzige Gerade zusammenfallen. [2])

---

[1]) Cayley, *Second memoir on skew surfaces otherwise scrolls.* (Philosophical Transactions, 1864; p. 559).

[2]) Man sehe des Verfassers Abhandlungen: *Sulle superficie gobbe del terz' ordine.* (Atti del R. Istituto Lombardo. Milano 1861). — *Sur les surfaces gauches du troisième degré.* (Crelles Journal, Bd. 60; 1861). — *Rappresentazione della superficie di Steiner e delle superficie gobbe di 3° grado sopra un piano* (Rendiconti del R. Ist. Lomb. Milano, gennajo 1867). — *Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano, ecc.* (Annali di Matematica, 2ª Serie, T. 1°, Milano 1868). Man vergleiche auch die Philosophical Transactions 1863; p. 241.

Wenn eine nicht windschiefe Fläche ν-ter Ordnung eine Gerade r enthält, so berührt im Allgemeinen jede Ebene, die ganz beliebig durch r gelegt ist, die Fläche in $\nu-1$ verschiedenen Puncten. Es sind dies die Durchschnittspuncte von r mit derjenigen Curve, welche mit r zusammen den vollständigen Durchschnitt der Fläche und der Ebene bildet. Dreht man die Ebene r, so erzeugen die $\nu-1$ Berührungspuncte eine Involution $(\nu-1)$-ten Grades, deren Doppelpuncte offenbar parabolische Puncte der Fläche sind, da die Tangentialebene in jedem derselben die Fläche in zwei unmittelbar folgenden Puncten berührt. Haben zwei nicht geradlinige Flächen von den Ordnungen ν, ν' eine Gerade r gemein, so haben wir auf dieser zwei projectivische Involutionen, wenn man die Puncte als entsprechende ansieht, in denen die beiden Flächen von derselben Ebene berührt werden. Beide Involutionen haben (*Einleitung*, Nr. 24, b) $\nu+\nu'$ gemeinschaftliche Puncte, das heisst, beide Flächen berühren sich in $\nu+\nu'$ Puncten von r und schneiden sich folglich in einer Curve, welche r in diesen $\nu+\nu'$ Puncten trifft. Wenden wir dieses Resultat auf eine nicht geradlinige Fläche ν-ter Ordnung an, die durch ν Generatrixen desselben Systems eines Hyperboloids gehen, so findet man, dass der überbleibende Schnitt dieser beiden Flächen eine Curve ν-ter Ordnung ist, die mit jeder der ν Generatrixen ν Puncte gemein hat. Die Fläche schneidet also das Hyperboloid ausserdem noch in ν Generatrixen des andern Systems. Diesen Satz verdankt man Moutard (Man sehe Poncelet, *Propriétés projectives des figures,* annotation de la 2e édition, Paris 1865; p. 418).

Reciprok gilt dasselbe Theorem für eine nicht geradlinige Fläche ν-ter Classe.