RICERCHE GENERALI

SOPRA

I SISTEMI LINEARI DI CURVE PIANE

MEMORIA

DI

GUIDO CASTELNUOVO

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1891

Estratto dalle *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*
Serie II, Tom. XLII

Torino, Stamperia Reale-Paravia
672 (C) 4-VII-91

RICERCHE GENERALI

SOPRA

I SISTEMI LINEARI DI CURVE PIANE

Nella Geometria proiettiva dei sistemi lineari di curve piane algebriche, assunse, negli ultimi tempi, la massima importanza quel capitolo così vasto in cui si ricercano le proprietà dei sistemi lineari in relazione colle trasformazioni birazionali del piano. I numerosi lavori che ora si hanno sull'argomento partono tutti dalle classiche Memorie del Prof. Cremona sulle trasformazioni birazionali; le quali, mentre stabiliscono le basi di quella Geometria, il cui gruppo di trasformazioni fondamentali si compone appunto delle trasformazioni birazionali, offrono pure notevoli esempi di particolari sistemi lineari (reti omaloidiche). Si vide allora l'opportunità di considerare come *identici* due sistemi lineari deducibili l'uno dall'altro mediante una trasformazione birazionale; opportunità la quale fu messa in piena luce dallo studio delle superficie rappresentabili univocamente sul piano (Cremona, Clebsch, Nöther, Caporali), le cui proprietà *proiettive* si riflettono in proprietà *invariantive per trasformazioni univoche* dei sistemi lineari rappresentativi.

Gli svariati esempi di sistemi lineari che così si presentarono, indussero a scegliere tra gli infiniti aspetti che (dal punto di vista proiettivo) uno stesso sistema può assumere, quello che potesse facilmente distinguersi dagli altri per qualche particolare carattere proiettivo, il quale sistema doveva essere *il tipo* di una intera famiglia di sistemi (birazionalmente identici). Ed il carattere proiettivo su cui si fissò l'attenzione dei Geometri fu l'*ordine*, assumendo come sistema tipo quello che aveva l'ordine più basso. E così ebbero origine le ricerche sull'*abbassamento* (di ordine) *di un sistema* *lineare* (inaugurate con un noto procedimento del sig. NÖTHER (1), proseguite poi dai sigg. BERTINI, GUCCIA, JUNG, MARTINETTI) (2).

Dei notevoli servigi che questo metodo rese alla scienza basterà ricordare la scomposizione di ogni trasformazione birazionale in fattori quadratici, la determinazione completa delle superficie a sezioni razionali, e la classificazione delle trasformazioni involutorie del piano (e dei corrispondenti piani doppi). La riduzione all'ordine minimo valse pure ad assegnare, in corrispondenza ai primi valori del genere, tutti i sistemi lineari minimi possibili, e permise di leggere sui tipi *ridotti* proprietà che poi si estendevano ai tipi trasformati. Ma le difficoltà della *riduzione* che andavano crescendo col crescere del genere, la varietà e la complicazione sempre maggiore dei tipi ridotti, lasciavano ben capire che non era quella la via più appropriata per ottenere proprietà generali dei sistemi lineari; per lo studio di un sistema lineare lo abbassamento d'ordine riesce poco vantaggioso (in generale) quando esso porti di conseguenza una complicazione nella natura dei punti base (3).

Bisognava quindi (imitando ciò che si è fatto in tutte le altre Geometrie) cercare un metodo, il quale potesse nell'*identico modo* applicarsi a più sistemi *identici* dal punto di vista delle trasformazioni birazionali. E si presentava spontanea l'idea di ricorrere al sussidio della *Geometria sopra una curva*, i cui teoremi (così importanti per la loro generalità) si applicano appunto nell'*identico modo* a tutte le curve trasformate univoche di una stessa, senza tener conto delle particolari proprietà proiettive che quelle possono presentare. Già quattro anni or sono, il sig. SEGRE aveva accennato ai vantaggi che la teoria dei sistemi lineari può risentire dalla Geometria sulla curva, mostrando in una breve Nota (4) come un teorema dimostrato dal sig. GUCCIA per sistemi lineari particolari, rientrasse in un teorema generale, il quale discendeva immediatamente da una proprietà delle serie non speciali. Ed in alcune ricerche da me fatte su certe famiglie di superficie razionali, come pure in una Nota sulla massima dimensione di un sistema lineare (5), mi apparve evidente l'intima connessione fra le

---

(1) *Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen* (Math. Annalen Bd. 5).

(2) BERTINI, *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano* (Annali di Matem., serie 2ª, tomo 8).

GUCCIA, *Generalizzazione di un teorema di Nöther; Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche* (Rendic. Circolo Matem. di Palermo, t. I).

JUNG, *Ricerche sui sistemi lineari* (in due Note nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo, marzo 87, e maggio 88, e in due Memorie pubblicate nei tomi XV e XVI, serie II, degli Annali di Matematica).

MARTINETTI, *Sui sistemi lineari di genere* 1 (Rendic. Ist. Lombardo, marzo 87). — *Sopra alcuni sistemi lineari di genere* 2 (Rendic. Circolo Matem. di Palermo, t. I).

(3) Se per la ricerca di proprietà generali dei sistemi lineari di genere elevato, la riduzione all'ordine minimo può talvolta riuscire inefficace, si potrebbe però ritenere conveniente di fondare sopra di essa una classificazione dei sistemi lineari di dato genere. Ora, di una tale classificazione furono recentemente rilevati gli inconvenienti (v. una Nota del sig. SEGRE alla mia Memoria *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve iperellittiche*; Rendic. Circolo Matem. di Palermo, t. IV) che vengono certo attenuati, ma forse non interamente tolti, mediante il concetto di *sistemi associati* proposto dal sig. JUNG (*Delle famiglie associate*, Rendic. Circolo Mat., t. IV).

(4) *Sui sistemi lineari* (Rendic. Circolo Mat. di Palermo, t. I); il teorema a cui alludo si trova riportato nel § 19 della presente Memoria.

(5) *Sulle superficie le cui sezioni sono curve iperellittiche* (l. c.); *Sulle superficie le cui sezioni sono curve di genere* 3 (Atti dell'Accad. delle Scienze di Torino, vol. XXV); *Massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere* (Annali di Matematica, t. XVIII, serie 2ª).

due nominate teorie. Perciò mi sono prefisso di porre in maggior rilievo questa connessione, e di mostrare con alcune applicazioni il partito che si può trarre dalla Geometria sulle curve nello studio delle proprietà generali dei sistemi lineari; e così è sorto il presente lavoro. Quali concetti mi abbiano guidato, in quale ordine li abbia svolti, è ciò che ora dirò.

Il primo capitolo è una semplice introduzione allo studio dei sistemi lineari. Per ottenere teoremi generali sui sistemi lineari, per evitare distinzioni ed eccezioni, vidi la necessità di dare la massima estensione (per curve semplici e composte) ad alcuni noti concetti di Geometria sulle curve. Un semplice esempio basterà per mostrarne l'opportunità.

Siano b_1, $b_2 \ldots b_{10}$ i dieci punti in cui una quartica piana C dotata di un punto doppio a viene segata da una cubica γ condotta per a; si riconosce allora che le quartiche passanti doppiamente per a e semplicemente per $b_1 \ldots b_{10}$ formano una rete; sicchè delle 13 condizioni imposte alle quartiche dai punti base a, b_1, $b_2 \ldots b_{10}$ *una* è conseguenza delle rimanenti, e ciò dipende dal fatto che la curva γ ha il genere *uno*. Volendo esprimere questa riduzione nel numero delle condizioni, diremo che una tal rete di quartiche è *sovrabbondante*. Ora, è da notarsi che ad una rete sovrabbondante di quartiche si arriva ancora quando si prenda per curva γ (anzichè una cubica generale) una cubica *dotata di un punto doppio, purchè questo punto doppio non cada sopra la quartica* C. Se invece la quartica primitiva C si sega con una cubica *passante doppiamente per* a, nel qual caso si hanno, oltre ad a, 8 intersezioni $b_1 \ldots b_8$, il sistema ∞^3 di quartiche che passano doppiamente per il punto a, e semplicemente per $b_1 \ldots b_8$ non è più *sovrabbondante*: le condizioni che i punti base a, $b_1 \ldots b_8$ impongono alle quartiche *sono tutte indipendenti fra loro.* In modo alquanto vago, ma vantaggioso, si può dire che il carattere *ellittico* di γ rispetto al sistema lineare, non viene alterato quando γ assume un punto doppio fuori dei punti base del sistema, ma invece si perde quando il punto doppio di γ cade in un punto base del sistema (1).

Ma una tale considerazione non dà l'intima ragione della diversità dei due casi, e perde anche la semplicità quando la cubica γ si spezza.

Si riesce invece a dare una completa spiegazione in questo caso ed in altri più complicati, dimostrando come molte proprietà delle serie lineari segate sopra una curva dalle sue curve aggiunte, permangano quando alle curve aggiunte si sostituiscano curve passanti per punti fissati ad arbitrio sulla curva primitiva. Questa osservazione fu già fatta dal sig. Nöther, ed appunto la Memoria in cui essa è contenuta, ed un altro lavoro dello stesso Geometra (2) (in cui alle curve degeneri si estendono proprietà delle curve irriduttibili) sono i punti di partenza degli argomenti trattati nel primo capitolo. I quali mi sembrano interessanti anche quando si faccia astrazione dalle loro applicazioni ai sistemi lineari, così che ritengo farebbe cosa utile alla scienza chi tentasse di procedere sulla via segnata. E fu appunto questa consi-

(1) Nell'esempio ho scelto un punto base *doppio* per evitare la considerazione di punti base infinitamente vicini, la quale esigerebbe maggior cura.

(2) *Ueber die nicht-adjungirten Curven* (Math. Annalen Bd. 15).
Ueber die reductiblen algebraischen Curven (Acta Mathem., 8).

derazione che mi indusse ad esporre in due lunghe note (ai §§ 14, 15) alcuni teoremi complementari a quelli che si trovano nel testo, sebbene non necessari per il secondo capitolo.

Il secondo capitolo, ben più del primo, può dare una idea dei legami fra la *Geometria sulla curva* e la teoria dei sistemi lineari. I due enti che permettono di tradurre i risultati dell'una teoria nei risultati dell'altra, sono: *la serie caratteristica* (ossia la serie di gruppi segata sopra una curva del sistema dalle rimanenti curve), ed il *sistema aggiunto* (locuzione colla quale brevemente indico il sistema costituito dalle curve d'ordine $n-3$ aggiunte alla curva generica, supposta d'ordine n, del sistema primitivo). Quanto alla *serie caratteristica*, della quale già il Segre aveva approfittato, come dissi sopra, non rimaneva che a seguire la via tracciata; il profitto che se ne può trarre mi sembra sufficientemente dimostrato dai §§ 18, 19, 20, sebbene molti risultati che ad essa si collegano non abbiano potuto trovar posto in questa Memoria. Ma l'applicazione metodica del sistema aggiunto nella teoria dei sistemi lineari, serve veramente a *caratterizzare* il mio lavoro, perchè negli scritti precedenti, a quanto mi pare, non se ne fa parola [1].

Per giudicare l'importanza del nuovo concetto basterà confrontare i teoremi generali sulle curve fondamentali qui dati (§§ 23, 24) coi risultati particolari che prima si avevano [2], l'applicazione che di questi teoremi si fa ai sistemi sovrabbondanti con nove o dieci punti base (§ 26), e le varie proposizioni sul *sistema aggiunto puro* (§ 27 e segg.). Con tale locuzione intendo il sistema aggiunto spogliato dalle curve fisse che possono eventualmente esser comuni ad ogni curva aggiunta d'ordine $n-3$ (v. per la definizione precisa il § 27). Ora, la grande importanza del sistema aggiunto puro sta in ciò, che esso è legato al sistema primitivo da una relazione invariantiva per trasformazioni birazionali: sicchè ad es. il genere della curva generica del sistema aggiunto puro è un carattere invariantivo del sistema proposto. Quale intima relazione passi fra questo genere e l'*eccesso* di un sistema lineare definito dal sig. Jung (Mem. citate), mostrerò altrove. Qui mi parve importante di stabilire una disuguaglianza che lega i caratteri di un sistema col genere del sistema aggiunto puro (§§ 29, 30), dalla quale scendono teoremi molto notevoli sulla curva generica di un sistema lineare, la cui dimensione supera una certa funzione del genere (§ 31 e seg.) [3].

---

(1) Va fatta eccezione per una breve Nota del sig. S. Kantor (*Sur une théorie des courbes et des surfaces admettant des correspondances univoques.* Comptes-rendus de l'Ac. d. Sc., 9 février 1885), in cui si mostra come il sistema aggiunto, l'aggiunto dell'aggiunto..., possano applicarsi allo studio delle trasformazioni birazionali cicliche del piano. Sebbene a qualche considerazione di quella Nota si possano forse muovere degli appunti, sembra tuttavia indiscutibile la fecondità del concetto ivi esposto, il quale, a quanto scrive il K. nella prefazione ai *Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques* (Atti dell'Accad. delle Scienze fis. e mat. di Napoli, 1888), troverà il suo pieno sviluppo nella 4ª parte della Memoria stessa, ora in corso di stampa negli Atti di quella Accademia.

(2) Caporali, *Sopra i sistemi lineari* (Collectanea Mathematica, 1881); Bertini, *Sulle curve fondamentali dei sistemi lineari* (Rendic. Circolo Matem. di Palermo, t. III).

(3) I teoremi a cui alludo costituiscono una estensione di una proposizione dimostrata nella mia Nota già citata sulla *Massima dimensione...*: *Ogni sistema lineare la cui dimensione superi* $3p+5$, *si compone o delle* ∞^9 *cubiche piane* ($p=1$) *o di curve razionali* ($p=0$). Ho pensato che una tale estensione potesse trovar posto in questo lavoro poichè essa si presentava come una conseguenza immediata della formola (23), la quale sembra fondamentale nella teoria dei sistemi lineari. Però vo-

Molte altre applicazioni del sistema aggiunto puro ho dovuto rimandare ad altri lavori. Voglio però accennar qui alle principali.

La prima che si presenta consiste nell' assegnare alcune proprietà caratteristiche dei sistemi sovrabbondanti, le quali danno una via per costruire siffatti sistemi. In particolare si trova subito che *se in un sistema* ∞^r *di genere* p (non iperellittico) *una tra le condizioni imposte dai punti base è conseguenza delle rimanenti, esiste una curva fondamentale di genere* (virtuale = effettivo) *uno, la quale contiene tutti i punti base del sistema.*

Una seconda applicazione può farsi allo studio di quei sistemi la cui curva generica contiene una data serie speciale (solo di un caso particolare del problema trattano i §§ 31, 32).

Finalmente una terza applicazione consiste nel valersi del sistema aggiunto puro per costruire e classificare i sistemi lineari di dato genere. Infatti, se di un sistema dato S si forma il sistema aggiunto puro S', di S' il sistema aggiunto puro S'', e così si continua, si ottiene una catena di sistemi S', S''... necessariamente finita (perchè l'ordine va diminuendo di almeno tre unità per volta); e ciascuno di questi sistemi è invariabilmente collegato con S: sicchè i generi p', p''... di S', S''... sono altrettanti caratteri invariantivi di S che possono servire a distinguere S dagli altri sistemi di genere p (1).

È pure osservato al § 29 che $p' < p - 1$ se la dimensione di S supera $p + 1$: ciò permette quando si sappiano costruire tutti i sistemi di genere p' e dimensione $p - 1 > p'$, di costruire tutti i sistemi di genere $p > p' + 1$ e dimensione $> p + 1$. Non possiedo però ancora completamente i criteri che permettono di distinguere tra i nominati sistemi ∞^{p-1} quelli che sono aggiunti puri di un certo altro sistema, da quelli che non godono tale proprietà. E perciò preferisco di rimandare ad altro momento la risoluzione dell' importante problema.

---

lendo giungere ai teoremi dei §§ 31, 32 nel modo più semplice, è forse preferibile seguire una via analoga a quella che indicai nella Nota sulla *Massima dimensione*... Colà, dato un sistema S di genere p e dimensione k, se ne *deriva* (sotto certe restrizioni) un sistema S' di genere $p' = p - 1$ e dimensione $k' = k - 3$ formato dalle curve di S che passano doppiamente per un punto fissato ad arbitrio nel piano; e questa derivazione si continua finchè non si sia giunti ad un sistema di genere 2 e dimensione $k - 3(p - 2)$, per il quale si conosce il limite superiore 11 alla dimensione, ecc. Se invece si considera il sistema S_1 costituito dalle curve di S che hanno un punto *triplo* in un punto generico del piano, sarà (sotto convenienti restrizioni) $p_1 = p - 3$, $k_1 = k - 6$; applicando successivamente l'operazione analoga fino ad ottenere un sistema di genere 2 o 3, e calcolando per questo il valore massimo della dimensione, si avrà un limite superiore a k. Ed analogamente se invece che un punto triplo, si fissa un punto quadruplo... In ciò che ora ho detto, il lettore non cerchi che un *semplice abbozzo* di dimostrazione.

(1) Per esempio per i sistemi noti di genere 3 e dimensione $\geqq 3$ (JUNG, Mem. citate; NÖTHER, *Ueber die rationale Flächen vierter Ordn.* Math. Annalen Bd. 33; v. inoltre la mia Nota citata *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere* 3), si hanno i seguenti tipi (le lettere entro a parentesi quadre indicano i punti fondamentali secondo la solita convenzione; i numeri chiusi entro i segni $\}\ \{$ dànno i generi dei successivi sistemi aggiunti puri):

$$\infty^{14}\, C^n[a^{n-2} b_1^2 \ldots b^2_{n-5}]\,\}-1\{;\qquad \infty^{14}\, C^4\,\}0\{;\quad \infty^6\, C^6[a_1^2 a_2^2 \ldots a_7^2]\,\}1\{;$$

$$\infty^3\, C^7[a^3 b_1^2 \ldots b_9^2]\,\}2,0\{;\qquad \infty^3\, C^9[a_1^3 \ldots a_8^3 b^2 c^1]\,\}2,1\{.$$

Una analoga classificazione può estendersi anche alle superficie *non razionali* a sezioni di dato genere, servendosi del sistema S' di curve segato sulla superficie dalle superficie aggiunte d'ordine $n - 3$ (essendo n l'ordine della superficie), ecc.

E chiudo questa lunga prefazione, augurandomi che un campo così fecondo di ricerche trovi numerosi e valenti cultori: questa Memoria avrà raggiunto il suo scopo, se avrà in qualche punto appianato ad essi la via.

CAPITOLO I.

Sistemi lineari in relazione con un gruppo di punti.

1. Sistema lineare. — Assegnati nel piano h punti $a_1, a_2 \ldots a_h$ disposti comunque (a distanza finita o infinitesima l'uno dall'altro, legati mediante curve...), le condizioni affinchè una curva d'ordine n passi con molteplicità assegnate ($\geqq 1$) $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_h$ per i punti a, sono traducibili in $\sum^h \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ equazioni lineari (forse non tutte indipendenti) fra gli $\frac{n(n+3)}{2}$ parametri da cui dipende l'equazione della curva. Ad ogni soluzione delle nominate equazioni corrisponde una curva del *sistema lineare* definito dai punti a (e dalle molteplicità ν); alla soluzione generica corrisponde la curva *generica* C del sistema, che si indicherà con $C(n, \nu)_A$ quando si vorrà tener conto del suo ordine e del suo modo di comportarsi nei punti a. Il gruppo formato dai punti a si indicherà con A; il sistema lineare con $[C]$; e si dirà che i numeri n e ν *definiscono* C *o* [C] *rispetto al gruppo* A (1).

Non avendo noi posta alcuna restrizione alla posizione dei punti a, nè ai valori delle ν, segue che la curva generica C di $[C]$ (quando pure esista qualche curva soddisfacente alle condizioni imposte da A), può presentare le più svariate particolarità; può scindersi in più curve (come ad es. avverrebbe se fosse $\nu_1 + \nu_2 > n$), può passare (anche più volte) per qualche punto del piano che non si trovi in A eppure riesca comune ad ogni curva di $[C]$, può finalmente passare più che $\nu_1, \nu_2 \ldots$ volte per i punti $a_1, a_2 \ldots$, e ciò soltanto a cagione delle condizioni imposte dai punti di A; (così la curva C deve passare doppiamente per a_1 se, essendo $\nu_1 = 1, \nu_2 = 1, \nu_3 = 1$ i punti a_2, a_3 sono infinitamente vicini ad a_1 su direzioni distinte). Anche in quest'ultimo caso noi però continueremo a dire che $\nu_1, \nu_2 \ldots$ sono le molteplicità (*virtuali*) di C in $a_1, a_2 \ldots$; e chiameremo molteplicità *effettive* di C in $a_1, a_2 \ldots$ quelle con le quali C *viene a passare* per $a_1, a_2 \ldots$, quando soddisfa a tutte le condizioni imposte dal gruppo A.

---

(1) Quando alcuni dei punti a si considerano infinitamente vicini fra loro, si viene a pensare il gruppo A come limite di un gruppo variabile di cui alcuni elementi prima distinti sono andati avvicinandosi indefinitamente. Si può così definire un sistema lineare che abbia in punti fissi singolarità arbitrarie come limite di un sistema lineare avente nei punti base soltanto singolarità ordinarie.

È da notarsi che i sistemi lineari definiti in questo n° 1 sono quelli che possono dirsi *determinati dai punti base;* di questi soli però mi occupo nel seguito.

2. Dimensione. — Se le $\sum_{1}^{h}\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{A}\nu(\nu+1)$ condizioni imposte dal gruppo A ad una curva d'ordine n fossero indipendenti fra loro, per

$$(1)\ldots\qquad \mathbf{k}=\frac{1}{2}\left\{n(n+3)-\sum_{A}\nu(\nu+1)\right\}$$

punti fissati ad arbitrio nel piano passerebbe una curva determinata di $[C]$.

Il numero $\mathbf{k}$ definito dalla (1) sarà detto *dimensione virtuale* di $[C]$, mentre il nome di *dimensione effettiva* sarà riserbato al numero k dei punti arbitrari del piano, per i quali in realtà passa una, ed una sola curva di $[C]$. *La dimensione virtuale di un sistema lineare non può mai superare la dimensione effettiva*; la differenza

$$(2)\ldots\qquad s=k-\mathbf{k}$$

dà il numero di quelle tra le $\frac{1}{2}\sum_{A}\nu(\nu+1)$ equazioni (traducenti le condizioni imposte da A), che sono conseguenza delle rimanenti. Se chiamiamo *sovrabbondante* un sistema lineare la cui dimensione effettiva k superi la dimensione virtuale $\mathbf{k}$, sarà naturale di chiamare s la *sovrabbondanza* del sistema. Quando $s=0$ ossia $\mathbf{k}=k$, diremo che il sistema è *regolare*.

Se esiste una sola curva C soddisfacente alle condizioni imposte da A, la dimensione effettiva del sistema $[C]$ vale 0; per estensione di linguaggio diremo che la dimensione effettiva vale -1 quando non esiste curva soddisfacente alle nominate condizioni. Sotto il limite -1 la dimensione effettiva non può scendere, mentre la dimensione virtuale può assumere anche valori più bassi (1).

Qualche volta anzichè dire dimensione effettiva o virtuale *del sistema* $[C]$, diremo dimensione effettiva o virtuale *appartenente alla curva* C (rispetto al gruppo A).

3. Curva aggiunta, genere. — Se si indica con A' il gruppo formato da quei punti di A le cui corrispondenti molteplicità (virtuali) ν superano *uno*, per *curva aggiunta al sistema* [C], *o alla curva* C *rispetto al gruppo* A, deve intendersi una curva che passi colla molteplicità virtuale $\nu-1$ per ogni punto di A' multiplo secondo ν per C (2). Le curve aggiunte a C di uno stesso ordine m formano adunque un sistema lineare $[C']$ la cui curva generica sarà indicata con $C'(m,\nu-1)_{A'}$; il sistema $[C']$ si dirà *sistema aggiunto a* [C] *di ordine* m.

In seguito avremo da considerare quasi esclusivamente il sistema delle curve aggiunte a C d'ordine $n-3$; quindi parlando di curva aggiunta o di sistema aggiunto a C, sarà sottinteso *d'ordine* n-3, quando n sia l'ordine di C.

---

(1) Per il fascio di quartiche piane, includendo in A i sedici punti base, si ha, ad esempio,

$$k=1,\qquad \mathbf{k}=-2.$$

(2) Si badi che la definizione qui data di curva aggiunta e di genere coincide colla ordinaria soltanto quando A contenga tutti i punti multipli di C, e di più in ciascuno di questi la molteplicità effettiva uguagli la molteplicità virtuale.

Se k', $\mathbf{k}'$ sono la dimensione effettiva e virtuale del sistema aggiunto d'ordine $n-3$ rispetto al gruppo A', i due numeri

$$p=k'+1\,, \qquad \mathbf{p}=\mathbf{k}'+1$$

saranno detti *genere effettivo e virtuale del sistema* [C] (*o della curva* C) rispetto al gruppo A.

Il *genere effettivo* p *di* C è dunque *il numero delle curve d'ordine* n — 3 *aggiunte a* C (rispetto ad A) *che sono linearmente indipendenti;* mentre per la (1) il *genere virtuale* **p** è definito dall'eguaglianza

(3)... $$\mathbf{p}=\frac{1}{2}\Big\{(n-1)(n-2)-\sum_{A}\nu(\nu-1)\Big\}\ (1).$$

Dal n° 2 segue subito: *Il genere virtuale non può mai superare il genere effettivo;* il genere effettivo è almeno zero (quando non esista curva aggiunta d'ordine $n-3$); il genere virtuale può invece assumere valori negativi (2).

4. Grado. — Se in $[C]$ esistono due curve, le quali non abbiano infiniti punti comuni e passino per i punti di A con molteplicità effettive uguali alle corrispondenti molteplicità virtuali, il numero delle intersezioni di queste due curve che non sono assorbite dai punti di A, è dato da

(4)... $$D=n^2-\sum_{A}\nu^2,$$

e si chiama (seguendo il sig. Jung) (3) *grado* del sistema $[C]$. Ma noi, estendendo il significato della parola, chiameremo *grado* di $[C]$ il numero definito dalla (4), qualunque particolarità presenti il sistema $[C]$, anche quando il grado non abbia più una interpretazione geometrica. Così in qualche caso potrà risultare D negativo; se $D<0$ è certo che o il sistema $[C]$ si compone di una sola curva, o due qualsivogliano curve di $[C]$ hanno infiniti punti comuni; ma viceversa da queste ipotesi non segue necessariamente $D<0$. Qualche volta, anzichè parlare del *grado* D *di un sistema* $[C]$, ci riuscirà più comoda la locuzione *grado* D *appartenente alla curva* C rispetto al gruppo A.

---

(1) Veramente, badando alla (1), si dovrebbe scrivere A' anzichè A sotto al simbolo Σ; ma è evidente che la somma Σ non muta quando venga estesa anche a quei punti di A che non entrano in A' (per i quali è $\nu=1$).

(2) Un esempio di curva per cui **p** è negativo è offerto dalla curva del quinto ordine composta di una cubica generale e di due rette, purchè il gruppo A si consideri costituito dai sette punti doppi; si ha infatti $p=1$, $\mathbf{p}=-1$.

Si osservi che la definizione di genere effettivo perde il suo significato quando $n\leqq 3$. Si conviene che in questa ipotesi il genere effettivo valga sempre zero, fatta eccezione per il caso $n=3$, quando le molteplicità (virtuali) di C nei punti di A non superano 1.

(3) In quasi tutti i lavori sui sistemi lineari si considerano *soltanto* quelle intersezioni di due curve del sistema che mutano col variare delle curve. Invece il sig. Jung (come lo prova la definizione qui riportata) include fra le D intersezioni quei *punti fissi* comuni a tutte le curve del sistema, che si presentano in forza delle condizioni imposte dai rimanenti punti base, e ciò viene espressamente notato nelle citate Memorie del sig. Jung. In questa avvertenza si trova già un passo verso la introduzione dei *caratteri virtuali*.

I numeri $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$, D, k, p finora introdotti, i quali godono speciale importanza nello studio di un sistema lineare, si diranno *caratteri del sistema* [C], oppure *caratteri della curva* C rispetto al gruppo A. I tre primi che sono definiti mediante equazioni, sono caratteri virtuali (1). Essi non sono indipendenti fra loro, perchè dalle (1), (3), (4) segue subito la relazione

$$(5)\ldots \qquad D = \mathbf{k} + \mathbf{p} - 1 .$$

Insieme a questa è utile tener presente anche l'uguaglianza

$$(6)\ldots \qquad 3n - \Sigma\nu = \mathbf{k} - \mathbf{p} + 1 ,$$

che si deduce facilmente dalle (1) e (3).

5. Curve composte. — *a*) Finora abbiamo considerato la curva C indipendentemente dalle curve che possono costituirla, quando essa è riduttibile. Ora invece vogliamo fissar la nostra attenzione sulle componenti di C.

Due curve (semplici o composte) $C'(n', \nu')_{A'}$, $C''(n'', \nu'')_{A''}$ siano definite mediante i loro ordini e le loro molteplicità virtuali ($\geqq 1$) nei punti dei gruppi A', A'', i quali gruppi possono aver alcuni punti (anche tutti) comuni. Se con A indichiamo il gruppo composto dei gruppi A', A'', la curva C formata da C', C'' avrà l'ordine $n' + n''$ e (per convenzione) in un punto di A la molteplicità virtuale ν', ν'' o $\nu' + \nu''$, secondo che quel punto appartiene soltanto ad A' soltanto ad A'', o tanto ad A' quanto ad A''. Il sistema $[C]$ si dirà *composto* dai sistemi $[C']$, $[C'']$ (2), e si potrà definire mediante il simbolo $(n' + n'', \nu' + \nu'')_A$ purchè si convenga che ν' valga 0 per ogni punto di A'' non contenuto in A', e analogamente per ν''. Siamo quindi indotti a considerare la curva C' come definita mediante la sua molteplicità virtuale in ogni punto a di A, molteplicità che supera 0 se a appartiene ad A', e *uguaglia* 0 se a non è contenuto in A'; e come *caratteri* di C' rispetto ad A *assumiamo* i *caratteri* di C' rispetto ad A'.

b) La stessa estensione ci conviene di fare in molti casi per la curva C definita al n° 1. Riferendoci a quel numero, *se coi punti di* A *e con altri punti scelti ad arbitrio nel piano formiamo un gruppo* $\mathbf{A}$ *noi diremo che* C *è definita rispetto ad* $\mathbf{A}$ *quando sono noti l'ordine di* C *e le sue molteplicità virtuali in ogni punto di* $\mathbf{A}$ (molteplicità le quali valgono 0 per ogni punto di $\mathbf{A}$ esterno ad A). I caratteri già definiti di C rispetto ad A saranno anche detti *caratteri di* C *rispetto ad* $\mathbf{A}$ (3).

6. Intersezioni di due curve. — Riprendiamo le due curve $C'(n', \nu')_{\mathbf{A}}$, $C''(n'', \nu'')_{\mathbf{A}}$; per *numero delle intersezioni* di C', C'' rispetto ad $\mathbf{A}$, si deve intendere il numero

$$(7)\ldots \qquad I = n'n'' - \sum_{\mathbf{A}} \nu'\nu''$$

---

(1) Si potrebbe anche definire il grado *effettivo* di un sistema; ma questo nuovo carattere non ha l'importanza che spetta a k e p e non viene mai adoperato nel seguito.

(2) Le curve C', C'' (o i corrispondenti sistemi) si diranno *componenti* di C (o di $[C]$) e si aggiungerà l'aggettivo *complementari*, quando si vorrà tener conto del fatto che insieme essi *costituiscono* C.

(3) Va notato che le somme, le quali figurano nelle formole (1), (3), (4) non mutano valore se sono estese a tutti i punti di $\mathbf{A}$, anzichè ad A.

(il quale quando per C', C'' valgono le ipotesi fatte nel n° 4 per le due curve C, dà effettivamente il numero dei punti comuni C', C'' che non sono assorbiti dai punti di **A**). In qualche caso I può anche risultare negativo e allora le due curve C', C'' hanno infiniti punti comuni; se C' e C'' coincidono, I diventa il grado D appartenente a C'. Talvolta volendo indicare il numero delle intersezioni di C', C'' scriveremo $C'.C''$ anzichè I, mentre con $C'+C''$ indicheremo la curva formata da C' e C''. Dalla (7) segue subito l'uguaglianza

$$C_0.(C_1+C_2+\ldots+C_i)=C_0.C_1+C_0.C_2+\ldots+C_0.C_i.$$

7. La curva C in relazione con una trasformazione birazionale. — Le proprietà dei sistemi lineari studiate nel presente lavoro appartengono a quella Geometria il cui gruppo di trasformazioni fondamentali si compone delle trasformazioni birazionali (o Cremoniane) del piano. Perciò importa anzitutto di esaminare come, definita nel piano σ una curva C rispetto ad un gruppo A, e trasformato il piano σ in σ^* mediante una determinata trasformazione birazionale T, si possa in σ^* definire rispetto a un certo gruppo A^* la curva C^* in cui C si muta. Solo quando sarà chiarito questo punto, si potrà discorrere dei *caratteri* di C^*.

Dei punti fondamentali di T in σ alcuni forse saranno scelti entro ad A, altri potranno essere esterni ad A; con questi ultimi punti (ai quali attribuiremo molteplicità nulle) e con A formiamo un gruppo **A** rispetto al quale C è completamente definita (n° 5, b).

Come gruppo $\mathbf{A}^*$ (*corrispondente ad* **A**) *nel piano trasformato* σ^* *assumiamo il gruppo composto dei punti fondamentali di* T *in* σ^*, *e dei punti in cui si mutano i punti di* **A** *che non sono punti fondamentali in* σ. La curva C^* trasformata di C sarà definita rispetto ad $\mathbf{A}^*$, quando di C^* si conoscano l'ordine e le molteplicità virtuali ($\geqq 0$) nei punti di $\mathbf{A}^*$. Nel fare questa ricerca posso però limitarmi al caso delle trasformazioni quadratiche, essendo noto che il prodotto di un numero finito di tali trasformazioni, convenientemente scelte, può condurre ad una qualunque trasformazione birazionale.

Sia dunque T una trasformazione quadratica ed a_1, a_2, a_3, siano i punti fondamentali di questa trasformazione in σ; le molteplicità virtuali ($\geqq 0$) di C in a_1, a_2, a_3, siano ν_1, ν_2, ν_3. Indichiamo poi con a_1^*, a_2^*, a_3^* i punti fondamentali della trasformazione in σ^*, e con a_i^* $(i>3)$ il punto trasformato di a_i. Ora se

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=0$$

è nel piano σ l'equazione di una curva d'ordine n, la quale soddisfa alle condizioni di passare colle molteplicità ν_1, ν_2, ν_3, per i punti a_1, a_2, a_3, e nella f al posto delle x sostituiamo loro espressioni quadratiche nelle y atte a rappresentarci la trasformazione T, otteniamo una equazione del tipo

$$Y_1^{\nu_1}\ Y_2^{\nu_2}\ Y_3^{\nu_3}\ \varphi(y_1,y_2,y_3)=0,$$

dove $Y_1=0$, $Y_2=0$, $Y_3=0$ sono le equazioni dei lati del triangolo $a_1^*\ a_2^*\ a_3^*$, e φ

è una forma di grado $2n-\nu_1-\nu_2-\nu_3$ che, uguagliata a 0, ci rappresenta in σ^* una curva passante (in generale) colle molteplicità

$$\nu_1^*=n-\nu_2-\nu_3,\ \nu_2^*=n-\nu_3-\nu_1,\ \nu_3^*=n-\nu_1-\nu_2$$

per i punti a_1^*, a_2^*, a_3^*; questa curva $\varphi=0$ si dirà *la trasformata* di $f=0$. Se poi tra i coefficienti di f stabiliamo quelle relazioni lineari che traducono le condizioni di passare colle molteplicità $\nu_4, \nu_5 \ldots \nu_h$ per i punti $a_4, a_5 \ldots a_h$, queste relazioni interpretate nel piano σ^* ci dicono che la curva $\varphi=0$ è costretta a passare colle molteplicità $\nu_4, \nu_5 \ldots \nu_h$ per i punti $a_4^*, a_5^* \ldots a_h^*$.

Adunque le curve C^* *trasformate delle* $C(n,\nu)_{\mathbf{A}}$ *sono definite rispetto ad* $\mathbf{A}^*$ *dall'ordine*

$$(8)\ldots \qquad n^*=2n-\nu_1-\nu_2-\nu_3$$

e dalle molteplicità

$$(8)'\ldots\left\{\begin{aligned}&\nu_1^*=n-\nu_2-\nu_3,\ \nu_2^*=n-\nu_3-\nu_1,\ \nu_3^*=n-\nu_1-\nu_2\\ &\nu^*_i=\nu_i \quad \text{per} \quad i>3\end{aligned}\right.$$

nei punti $a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_i^*$; molteplicità *virtuali*, perchè in conseguenza delle condizioni da esse imposte a C^*, può la C^* esser costretta a passare con molteplicità effettive superiori per i punti di $\mathbf{A}^*$ (1).

---

(1) *A* questo proposito è da notare che se la C $(f=0)$, la quale ha la molteplicità virtuale ν_1 in a_1 viene effettivamente a passare colla molteplicità $\nu_1+\rho_1$ $(\rho_1 \geqq 0)$ per il punto stesso, allora (e solo allora) l'equazione $\varphi=0$ della C^* acquista il fattore Y^{ρ_1}, per modo che nella C^* entra il lato $a_2^* a_3^*$ contato ρ_1 volte.

Così se la C in conseguenza delle condizioni imposte da $\mathbf{A}$ viene a spezzarsi

1) nel lato $a_2 a_3$ da contarsi σ_1 volte curva d'ordine σ_1 colle molteplicità 0, σ_1, σ_1, 0 in a_1, a_2, a_3, a_i)

2) e in una curva C_1 d'ordine $n-\sigma_1$ colle molteplicità ν_1, $\nu_2-\sigma_1$, $\nu_3-\sigma_1$, ν_i in a_1, a_2, a_3, a_i, la curva C^* trasformata della C (coincide colla trasformata di C_1 e) serbando ancora l'ordine $n^*=2n-\nu_1-\nu_2-\nu_3$, e le molteplicità ν_2^*, ν_3^*, ν_i^* (date dalle (8)') in a_2^*. a_3^*, a_i^*, viene però a passare *colla molteplicità effettiva* $\nu_1+\sigma_1$ *per il punto* a_1^*.

Ora, questa relazione tra la C che degenera nelle curve 1) e 2) e la trasformata C^* che acquista in a_1^* una molteplicità effettiva superiore a quella data dalle (8)' si potrebbe esprimere con una locuzione appropriata. Perciò basta notare che se alle curve 1) e 2) applichiamo le (8) ed (8)' senza badare al loro significato geometrico, troviamo come trasformate le curve

1)* d'ordine 0 colle molteplicità virtuali $-\sigma_1$, 0, 0, 0 in a_1^*, a_2^*, a_3^*, a^*_i;

2)* d'ordine $n^*=2n-\nu_1-\nu_2-\nu_3$ colle molteplicità virtuali $\nu_1^*+\sigma_1$, ν_2^*, ν_3^*, ν_i^* in a_1^*, a_2^* a_3^*, a_i^*.

Diremo adunque che la curva trasformata C^* (la quale ha l'ordine $0+n^*=n^*$ e nei punti ora nominati ha le molteplicità virtuali $-\sigma_1+(\nu_1^*+\sigma_1)=\nu_1^*$, $0+\nu_2^*=\nu_2^*$, $0+\nu_3^*=\nu_3^*$, $0+\nu_i^*=\nu_i^*$), è l'insieme delle curve 1)* e 2)*.

E più in generale: *Quando una curva d'ordine* n, *alla quale è imposta la condizione di passare colla molteplicità* ν *per un punto* a, *acquista in esso punto la molteplicità* $\nu+\sigma$, *si può dire che la curva si scinde in una curva d'ordine* n *che in* a *ha la molteplicità virtuale* $\nu+\sigma$, *e in una curva d'ordine* 0 *che ha in* a *la molteplicità* $-\sigma$.

Questa locuzione è d'accordo con ciò che nel n° 5 si dice riguardo all'ordine e alle molteplicità di una curva composta.

Alle curve d'ordine 0 si possono estendere le definizioni di caratteri virtuali date già mediante le formole (1), (3), (4), (7) per le curve d'ordine superiore, convenendo che per tali curve il genere effettivo e la dimensione effettiva valgano 0. Ed alle curve d'ordine 0 *si possono applicare* le formole

8. Caratteri della curva trasformata. — Per calcolare (rispetto al gruppo $\mathbf{A}^*$) i caratteri virtuali $\mathbf{k}^*$, $\mathbf{p}^*$, D^* della curva C^* di σ^*, trasformata della C di σ mediante la trasformazione quadratica T (a_1, a_2, a_3), basta nelle formole

$$\mathbf{k}^* = \frac{1}{2}\left\{ n^*(n^*+3) - \sum_{\mathbf{A}^*} \nu^*(\nu^*+1) \right\}$$

$$\mathbf{p}^* = \frac{1}{2}\left\{ (n^*-1)(n^*-2) - \sum_{\mathbf{A}^*} \nu^*(\nu^*-1) \right\}$$

$$D^* = n^{*2} - \sum_{\mathbf{A}^*} \nu^{*2}.$$

sostituire ai numeri n^*, ν^* le loro espressioni date dalle (8), (8)'.

Si trova subito

(9) . . . $$\mathbf{k}^* = \mathbf{k}, \ \mathbf{p}^* = \mathbf{p}, \ D^* = D.$$

Colle stesse sostituzioni si riconosce che detto I il numero delle intersezioni di due curve C', C'' di σ (rispetto ad $\mathbf{A}$), numero definito dalla (7), e detto I^* il numero corrispondente relativo alle curve trasformate C'^*. C''^* di σ^*, si ha

(9)' . . . $$I^* = I.$$

Passiamo ora ai caratteri effettivi. Discende senz'altro dalla definizione che la dimensione effettiva appartenente alla C^* rispetto ad $\mathbf{A}^*$ uguaglia la dimensione effettiva appartenente a C rispetto ad $\mathbf{A}$, ossia

(10) . . . $$k^* = k.$$

Quanto al genere effettivo, per dimostrarne il carattere invariantivo, bisogna esaminare come si comportino le curve C' (d'ordine $n-3$) aggiunte a C, nella trasformazione quadratica T. E qui conviene distinguere due casi secondo che i punti fondamentali a_1, a_2, a_3 di T hanno molteplicità superiori a 0 per C, oppur no. Nel primo caso si ha:

$$\nu_1 > 0, \ \nu_2 > 0, \ \nu_3 > 0,$$

e la curva aggiunta C' che è d'ordine

$$n' = n - 3,$$

ha nei tre punti a_1, a_2, a_3 le molteplicità

$$\nu_1' = \nu_1 - 1, \ \nu_2' = \nu_2 - 1, \ \nu_3' = \nu_3 - 1,$$

---

(8), (8)' quando si eseguisce una trasformazione quadratica. Allora se per *trasformata di una curva composta* (di curve d'ordine 0, 1 . . .) *si intende* la curva formata dalle trasformate delle componenti, *si riconosce* che *le formole* (8), (8)' *sono valide senza eccezioni per determinare l'ordine e le molteplicità della curva trasformata* C* *quando siano dati i corrispondenti valori per la curva primitiva* C; la trasformazione di cui si parla essendo quadratica (coi punti fondamentali a_1, a_2, a_3).

Dopo l'estensione ora fatta della parola *curva* alle curve d'ordine 0 risulta evidente che *in una trasformazione birazionale una curva composta in modo qualsiasi di più curve, si muta sempre in una curva composta di altrettante curve* (che sono le trasformate delle componenti).

mentre per $i=4, 5 \ldots h$

$$\nu'_i = \begin{cases} \nu_i - 1 & \text{se} \quad \nu_i > 0 \\ \nu_i & \text{se} \quad \nu_i = 0 \end{cases}$$

La trasformata C'^* di C' ha (come risulta dalle formole (8), (8)' applicate ad essa) l'ordine

$$n'^* = 2n - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 - 3 = n^* - 3$$

e le molteplicità

$$\nu'^*_1 = \nu_1^* - 1, \ \nu'^*_2 = \nu^*_2 - 1, \ \nu'^*_3 = \nu^*_3 - 1$$

$$\nu_i'^* = \begin{cases} \nu_i^* - 1 & \text{se} \quad \nu_i^* > 0 \\ \nu_i^* & \text{se} \quad \nu_i^* = 0 \end{cases} \quad \text{per } i = 4, 5, \ldots h$$

Dunque C'^* è proprio una curva d'ordine $n^* - 3$ aggiunta a C^*; e possiamo concludere che in questo primo caso ogni curva (d'ordine $n-3$) aggiunta a C si trasforma in una curva (d'ordine $n^* - 3$) aggiunta a C^*.

Passiamo ora al secondo caso in cui uno almeno dei punti a_1, a_2, a_3, ha la corrispondente molteplicità uguale a 0; sia ad es.

$$\nu_1 = 0, \ \nu_2 > 0, \ \nu_3 > 0;$$

la curva aggiunta C' d'ordine $n' = n - 3$ ha nei punti a_1, a_2, a_3 le molteplicità

$$\nu'_1 = 0, \ \nu'_2 = \nu_2 - 1, \ \nu'_3 = \nu_3 - 1.$$

Ora si verifica subito che C'^* trasformata di C' ha l'ordine

$$n'^* = n^* - 4,$$

e le molteplicità in a_1^*, a_2^*, a_3^* espresse da

$$\nu'^*_1 = \nu_1^* - 1, \ \nu_2'^* = \nu_2^* - 2, \ \nu_3'^* = \nu_3 - 2,$$

mentre negli altri punti di $\mathbf{A}^*$ la C'^* si comporta come una curva aggiunta a C^*. Si può adunque dire che la trasformata C'^* di una curva (d'ordine $n-3$) aggiunta a C, insieme colla retta $a_2^* a_3^*$ (imagine del punto fondamentale a_1 esterno a C) dà una curva d'ordine $n^* - 3$ aggiunta a C^*. Più in generale se f punti fondamentali della trasformazione (quadratica) T hanno la moltiplicità 0 per C, la trasformata di una curva (d'ordine $n-3$) aggiunta a C, insieme alle f rette di σ^* imagini degli f punti nominati, dà una curva d'ordine $n^* - 3$ aggiunta a C^*. Dunque ad ogni curva aggiunta a C corrisponde una curva aggiunta a C^*, e reciprocamente; dal che risulta che il sistema delle curve aggiunte a C ed il sistema delle curve aggiunte a C^* hanno la stessa dimensione effettiva ossia anche

(10)' . . . $$p^* = p \text{ (1)}$$

I risultati ottenuti in questo n°, estesi al caso in cui più trasformazioni quadratiche si succedano, possono riunirsi nel seguente teorema:

(1) Nella dimostrazione di questa (10)' si è veramente supposto $n > 3$; infatti per $n \leqq 3$ il valore di p risulta, come già si osservò (ultima nota al n° 3), non più dalla definizione generale, ma da una convenzione. È tuttavia molto facile il riconoscere che anche se $n \leqq 3$ la (10)' sussiste.

Se in una trasformazione birazionale la curva C (*qualsiasi*) *e il gruppo* **A** *del piano* σ *hanno per corrispondenti la curva* C^* *ed il gruppo* $\mathbf{A}^*$ *di* σ^*, *i caratteri* ($\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$, D, k, p) *di* C *rispetto ad* **A** *uguagliano i corrispondenti caratteri di* C^* *rispetto ad* $\mathbf{A}^*$.

9. **Sistema aggiunto della curva trasformata.** — Un altro tra i risultati del n° 8 è utile raccogliere, e si riferisce al sistema aggiunto della curva che si ottiene da C mediante una trasformazione birazionale. Infatti, applicando ad una serie di trasformazioni quadratiche successive le considerazioni fatte in fine del n° 8 si riconosce che,

Se C^* *è la curva di* σ^* *in cui si muta la* C *di* σ *mediante una trasformazione birazionale, ogni curva aggiunta a* C^* *si scinde nella trasformata di una curva aggiunta a* C *e nelle curve fondamentali di* σ^* *che sono imagini di quei punti fondamentali di* σ, *le cui molteplicità virtuali per* C *valgono* 0.

10. **Riduzione del gruppo** A. — Il teorema del n° 8 ci autorizza a studiare proprietà riguardanti i caratteri di una curva C, sopra una curva C^* trasformata della C in una trasformazione birazionale, purchè la C e la C^* si riferiscano a due gruppi **A** ed $\mathbf{A}^*$ che si *corrispondano* nella trasformazione (n° 7); o, ciò che fa lo stesso (n° 6, a), ai due gruppi A, A^* composti da quei punti di **A**, $\mathbf{A}^*$ le cui molteplicità virtuali superano 0.

Ora, se alcuni punti di A sono a distanza infinitesima gli uni dagli altri, si può sempre con una conveniente trasformazione birazionale mutare la curva C in un'altra C^* per la quale il gruppo A^* si componga di punti a distanza finita l'uno dall'altro (1). Si cerchino i caratteri di C^* rispetto ad A^* e si avranno in conseguenza i caratteri di C rispetto ad A. Ne segue che in molte questioni si potrà, senza perdere in generalità, supporre a dirittura che il gruppo A rispetto al quale C è definita si componga di punti a distanza finita l'uno dall'altro, e ciò sarà sottinteso ogniqualvolta non si dichiari il contrario.

11. **Serie di gruppi relative ad** A **sulle curve irriduttibili.** — Sia C una curva irriduttibile riferita al gruppo A, ed in ogni punto di A per molteplicità virtuale si assuma la corrispondente molteplicità effettiva. In tale ipotesi per un noto teorema (2) sappiamo che le condizioni imposte dai punti di A alle curve aggiunte d'ordine $n-3$ (o superiore) sono linearmente indipendenti; sicchè $\mathbf{p}-1$ dà pure la dimensione *effettiva* del sistema aggiunto d'ordine $n-3$ (rispetto ad A); dunque

a) *Per una curva irriduttibile il genere effettivo uguaglia il genere virtuale;* così potremo parlare di genere p di C (rispetto ad A), senz'altro.

(1) Nöther, *Ueber die singuläre Werthsysteme einer alg. Function* (Math. Annalen Bd. 9); *Rationale Ausführung der Operationen* (Math. Annalen Bd. 23). — Bertini, *Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche* (Rendiconti Ist. Lombardo, 1888).

(2) Brill e Nöther, *Ueber die algebraischen Functionen*... (Math. Annalen, 7, pag. 269). — Nöther, *Ueber die nicht-adjungirten Curven* (Math. Annalen, 13, pag. 518).

Un sistema lineare di curve C' d'ordine qualunque, le quali passino comunque per i punti di A, ed inoltre

1) siano assoggettate a passare semplicemente per $r \geqq 0$ punti semplici di C,

2) soddisfacciano (forse) a condizioni non provenienti dal passaggio per punti di C,

sega su C un sistema di gruppi di punti che chiameremo *serie* (*lineare*) *di gruppi rispetto ad* A; se $m\ (= C.C' - r)$ è il numero dei punti di ciascun gruppo e q la dimensione della serie, indicheremo la serie con $g_m{}^q$. Diremo che la $g_m{}^q$ è *completa rispetto ad* A, quando non è contenuta in una $g_m{}^{q+1}$ (serie anche questa *rispetto ad* A). Una serie completa è individuata da un suo gruppo come si deduce dal seguente teorema (il quale anzi offre il modo di costruire la serie, dato il gruppo).

b) *Un sistema lineare di curve aggiunte* (rispetto ad A) *d'ordine qualunque soddisfacente alla condizione* 1) *e non alla* 2), *sega su* C *una serie completa rispetto ad* A; *ogni altra serie che abbia con essa un gruppo comune è in essa contenuta* (1).

12. Riprendiamo la definizione di serie di gruppi rispetto ad A; ed osserviamo che un sistema lineare S di curve d'ordine m, le quali debbano passare per un punto a multiplo secondo ν per C con molteplicità ν si ottiene imponendo alle curve d'ordine m che passano con molteplicità $\nu - 1$ per a le condizioni provenienti dal semplice passaggio per i ν punti infinitamente vicini ad a sui ν rami di C. Segue adunque del teorema $b)$ del n° precedente che le curve d'ordine n che si comportano come C nei punti di A, segano su C una serie completa ossia:

Sopra la curva generica C (*supposta irriduttibile*) *del sistema lineare* $[C]$, *le altre curve del sistema segano una serie completa* (rispetto ad A) $g_D{}^{k-1}$.

13. Caratteri virtuali di una curva composta. — Ed ora supponiamo che la curva C riferita al gruppo A sia composta; e C', C'' siano due sue componenti (semplici o composte) complementari (tali cioè che $C \equiv C' + C''$). Se indichiamo con $\mathbf{k} \ldots$ i caratteri di C rispetto al gruppo A, con $\mathbf{k}' \ldots$, $\mathbf{k}'' \ldots$ i caratteri di C', C'' rispetto al gruppo stesso, con $I = C'.C''$ il numero delle intersezioni di C', C''

(1) Il teorema qui enunciato, quando A contenga *tutti* i punti di C che hanno molteplicità superiore ad 1 (nel qual caso la locuzione *serie* lineare assume il significato ordinario) non è altro che il *Restsatz* (v. Brill e Nöther, Memoria citata). Sotto ipotesi ancora più larghe di quelle fatte in questo paragrafo il teorema $b)$ fu dimostrato dal sig. Nöther nella Memoria *Ueber die nicht-adjungirten Curven* (pag. 510), nella quale si troveranno pure dimostrati (sempre in casi più generali) i tre teoremi che qui riunisco perchè ad essi ricorro nelle note ai numeri 14, 15. Negli enunciati ometto per brevità l'avvertenza *rispetto ad* A dopo le parole *serie*, o *curva aggiunta* (avvertenza che diverrebbe superflua se A contenesse tutti i punti multipli di C).

c) *Le curve aggiunte d'ordine* $n-3$ *segano su* C *una serie* g^{p-1}_{2p-2}.

d) *Se* g^q_m *è serie completa, si ha* $m - q \leqq p$; *quando* $m - q = p$ *per un gruppo arbitrario della serie non si può condurre una curva aggiunta d'ordine* $n-3$, *e reciprocamente; sicchè quando* $m > 2p-2$ *oppure quando* $q > p-1$ *si ha certo* $m - q = p$ *se la serie è completa* ($m - q > p$ in caso opposto).

e) *Se invece* $m - q < p$ *per un gruppo di* g^q_m *passano* $\infty^{p-1-m+q}$ *curve aggiunte d'ordine* $n-3$, *le quali segano su* C *una serie d'ordine* $2p-2-m$, *ed il sistema delle curve aggiunte d'ordine* $n-3$ *passanti per un gruppo di quest' ultima serie sega su* C *la serie* g^q_m *primitiva.*

rispetto ad A, partendo dalle formole che ci definiscono i caratteri virtuali di una curva, arriviamo subito alle uguaglianze

$$(11)\ldots \qquad \mathbf{k}=\mathbf{k}'+\mathbf{k}''+I$$

$$(12)\ldots \qquad \mathbf{p}=\mathbf{p}'+\mathbf{p}''+I-1$$

$$(13)\ldots \qquad D=D'+D''+2I.$$

Queste formole si estendono immediatamente al caso di una curva C composta di tre o più curve. In particolare se C_1, C_2, ... C_i sono le componenti *irriduttibili* di C, tra le quali alcune possono coincidere (se C ha qualche componente da contarsi più volte), adottando notazioni analoghe alle precedenti e ponendo ora

$$J=\Sigma\, C_m \,.\, C_n$$

(dove la somma va estesa alle combinazioni binarie mn dei numeri $1, 2 \ldots i$), si trova:

$$(11)'\ldots \qquad \mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\ldots+\mathbf{k}_i+J$$

$$(12)'\ldots \qquad \mathbf{p}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\ldots+\mathbf{p}_i+J-i+1$$

$$(13)'\ldots \qquad D=D_1+D_2+\ldots+D_i+2J$$

14. Dimensione effettiva appartenente ad una curva composta. — Segue subito dalla definizione che

La dimensione effettiva appartenente ad una curva composta uguaglia o supera la somma delle dimensioni effettive appartenenti alle curve componenti. Se C è la curva composta e C_1, C_2... C_i sono le curve componenti, e *di più si suppone che la curva generica del sistema* [C] *si spezzi in* i *curve appartenenti ai sistemi* $[C_1]$, $[C_2]$ ... $[C_i]$, allora tra le dimensioni effettive k, k_1, k_2 ... k_i passa l'uguaglianza

$$k=k_1+k_3+\ldots+k_i\,;$$

viceversa se sussiste questa uguaglianza tra le dimensioni effettive appartenenti ad una curva composta C e alle componenti C_1, C_2 ... C_i, la curva *generica* di $[C]$ si scinde in i curve appartenenti ai sistemi $[C_1]$. $[C_2]$ ... $[C_i]$ (1). E ciò, se C_1, C_2 ... C_i sono le componenti irriduttibili di C, è possibile soltanto (2) nei due casi che

1) o $i-1$ fra le dimensioni $k_1, k_2, \ldots, k_i$ siano nulle,

2) oppure quelle tra le dimensioni che sono diverse da zero, siano uguali ad uno, e le curve componenti a cui esse appartengono siano elementi di uno stesso fascio (3).

---

(1) Nelle ipotesi qui fatte la dimensione effettiva del sistema $[C_1+C_2]$ è k_1+k_2; ne segue che se $[C_1]$ e $[C_2]$ sono sistemi *regolari* (e quindi $k_1=\mathbf{k}_1$, $k_2=\mathbf{k}_2$) si ha $C_1 \,.\, C_2 \leqq 0$, giacchè in caso opposto, per la formola (11) la dimensione virtuale e (a più forte ragione) la dimensione effettiva di $[C_1+C_2]$ supererebbe k_1+k_2. Da ciò il teorema: *Se la curva generica di un sistema* [C] *si scinde in curve appartenenti ai sistemi regolari* $[C_1]$, $[C_2]$ ... $[C_i]$, *le curve generiche di due sistemi diversi tra questi hanno o nessuno o infiniti punti in comune* (rispetto ad A).

(2) Per un noto teorema del sig. BERTINI contenuto nella Nota *Sui sistemi lineari* (Rendic. Istituto Lombardo, 1882, pag. 24).

(3) Un limite superiore alla dimensione effettiva k di un sistema lineare $[C]$ una cui curva (particolare) C si spezzi, si ottiene mediante le seguenti considerazioni. Sia C' una componente irriduttibile di C, la quale componente non sia contenuta nella componente complementare C''; si avrà

15. Genere effettivo di una curva composta. — Consideriamo una curva composta $C \equiv C' + C''$ e siano p, p', p'' i generi effettivi della curva composta e delle due componenti, le quali per ora possono esser semplici o composte, aventi infiniti punti comuni, oppur no...

Dalla stessa definizione di curva aggiunta segue che ogni curva aggiunta a C' (quando esista) insieme a C'', dà una curva aggiunta a C; quindi intanto si conchiude che

a) *Il genere effettivo di una curva composta non è mai inferiore al genere effettivo di una componente.*

Consideriamo ora entro al sistema lineare $S\ \infty^{p-1}$ delle curve aggiunte a C, il sistema lineare S' formato dalle curve aggiunte a C' prese insieme con C'', ed il sistema lineare S'' formato dalle curve aggiunte a C'' prese insieme con C'. Se C' e C'' non hanno infiniti punti comuni, non esiste nessuna curva di S', la quale sia tutta contenuta in S''; sicchè, essendo $p'-1$, $p''-1$ le dimensioni di S' ed S'' (che sono sistemi minori entro ad S), si ha

$$(p'-1)+(p''-1)<p-1$$

---

dunque $I = C'.C'' \geqq 0$. Le curve di $[C]$ segano su C' una serie di gruppi $g_{m'}^{q'}$ *rispetto ad* A il cui ordine è

$$m' = C'.(C'+C'') = D' + I.$$

I gruppi di questa serie che contengono le I intersezioni di C' e C'' si scindono nelle I intersezioni e nei gruppi di una serie $g_{D'}$ la cui dimensione non è inferiore a $q'-I$. In questa serie è certamente contenuta la $g_{D'}^{k'-1}$ che su C' segano le rimanenti curve di $[C']$; ma poichè quest'ultima serie è completa (nº 12), deve essere

$$q' - I \leqq k' - 1$$

ossia

$$\alpha) \qquad q' \leqq k' + I - 1.$$

Ora si osservi che una delle ∞^k curve di $[C]$, la quale contenga $q'+1$ punti arbitrari di C' deve scindersi in C' ed in una delle $\infty^{k''}$ curve di $[C'']$; dunque

$$k - q' - 1 = k'',$$

donde per la α)

$$k \leqq k' + k'' + I.$$

Ripetendo più volte questo ragionamento (che andrebbe lievemente modificato nel caso estremo $k'=0$), si conchiude:

Se $C_1, C_2 \ldots C_i$ *sono curve irriduttibili distinte componenti una curva* C, *ed* J *è il numero totale delle loro intersezioni a due a due, tra le dimensioni effettive appartenenti alla curva composta e alle curve componenti passa la relazione*

$$k \leqq k_1 + k_2 + \ldots + k_i + J.$$

Se ora supponiamo che i sistemi $[C_1]$, $[C_2] \ldots [C_i]$, siano regolari per modo che risulti

$$k_1 = \mathbf{k}_1,\ k_2 = \mathbf{k}_2, \ldots k_i = \mathbf{k}_i,$$

vediamo che il secondo membro dell'ultima disuguaglianza non differisce dal secondo membro della (11)', quindi $k \leqq \mathbf{k}$, nella quale però si deve necessariamente prendere il segno $=$, perchè la dimensione effettiva non è mai inferiore alla dimensione virtuale (nº 2): dunque finalmente

$$k = \mathbf{k}.$$

Se di più si osserva che nelle fatte ipotesi le relazioni α) relative alle curve C_1, $C_2 \ldots C_i$ devono ridursi ad uguaglianze, si giunge al teorema:

Se $C_1, C_2 \ldots C_i$ *sono curve irriduttibili distinte componenti una curva* C, *ed i sistemi* $[C_1]$, $[C_2] \ldots [C_i]$ *sono regolari, è regolare anche il sistema* $[C]$; *e sopra ciascuna componente le curve di* $[C]$ *segano una serie completa* (rispetto ad A).

ossia

$$p' + p'' \leqq p .$$

Applicando più volte questa disuguaglianza si giunge al teorema

b) ***Più curve*** (semplici o composte) *fra le quali non si trovino due aventi infiniti punti comuni, danno luogo ad una curva composta il cui genere effettivo non è inferiore alla somma dei generi effettivi delle componenti.*

Come corollario:

c) *Due curve le quali non abbiano infiniti punti comuni, e non si seghino* (rispetto ad A), *dànno luogo ad una curva composta il cui genere effettivo supera il genere virtuale.* Infatti se C' (di generi p', $\mathbf{p}'$), C'' (di generi p'', $\mathbf{p}''$) sono le due componenti, si ha per ipotesi $C'.C''=0$ e quindi, per la formola (12),

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}'' - 1$$

ci dà il genere virtuale della curva composta $C \equiv C' + C''$. D'altra parte, per il teorema b), se p è il genere effettivo di C si ha

$$p \geqq p' + p'',$$

ed essendo (n° 3) $p' \geqq \mathbf{p}'$, $p'' \geqq \mathbf{p}''$ risulta

$$p > \mathbf{p} .$$

La stessa proposizione si può enunciare sotto altra forma se si introduce la nozione di *curva connessa*, che in molti casi permette di abbreviare il discorso. Una curva composta dicesi *connessa* se ciascuna delle sue componenti (irriduttibile o no) ha colla componente complementare o infiniti punti comuni, od almeno una intersezione rispetto ad A.

Così la c) ci permette di affermare che

c') *Una curva composta il cui genere effettivo uguagli il genere virtuale, è necessariamente connessa* [1].

---

(1) Il concetto di curva connessa (fondamentale quando si voglia costruire una teoria delle curve composte nell'indirizzo qui seguito) rivela la sua importanza in alcuni teoremi che sono di complemento alle proposizioni a), b) e c) e costituiscono una estensione di alcune proposizioni sulle curve composte date dal sig. Nöther nella Nota: *Ueber die reductiblen algebraischen Curven* (Acta Mathem. 8).

Sia C una curva connessa le cui componenti irriduttibili $C_1, C_2 \ldots C_i$ siano tutte distinte fra loro, e supponiamo queste componenti così ordinate che indicando con I_h il numero delle intersezioni rispetto ad A di C_h colla curva $(C_{h+1} + C_{h+2} + \ldots + C_i)$ risulti

$$I_h > 0 \quad \text{per} \quad h = 1, 2, \ldots, i-1;$$

(un tale ordinamento è sempre possibile come è facile vedere); per convenzione poi porremo

$$I_i = 0 .$$

Siano $p_1, p_2, \ldots p_i$ $(= \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots \mathbf{p}_i$ per il n° 11, $a))$ i generi di $C_1, C_2 \ldots C_i$. Sulla curva C_h $(h = 1, 2 \ldots i)$ le curve aggiunte a $(C_h + C_{h+1} + \ldots + C_i)$ segano una serie g, alla quale appartengono i gruppi formati dagli I_h punti comuni a C_h e $(C_{h+1} + \ldots + C_i)$ insieme coi gruppi della serie (d'ordine $2p_h - 2$ e dimensione $p_h - 1$) segata su C_h dalle proprie curve aggiunte; ne viene che l'ordine di g è dato da

$$2p_h - 2 + I_h ,$$

16. Una lemma sui sistemi riduttibili. — Può spesso giovare nello studio dei sistemi lineari la seguente osservazione (di cui ci serviremo al n° 30).

Sia $[C]$ il sistema lineare costituito dalle curve d'ordine n che passano colle molteplicità virtuali assegnate $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_h$ per i punti $a_1, a_2 \ldots a_h$ costituenti il gruppo A; e sia $[\Gamma]$ un sistema di curve dello stesso ordine n passanti colle stesse molteplicità virtuali $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_h$ per h punti $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_h$ costituenti il gruppo α; chiameremo $[\Gamma]$ *imagine* di $[C]$. Per definizione, i *caratteri virtuali* di $[C]$ rispetto ad A uguagliano i corrispondenti caratteri virtuali di $[\Gamma]$ rispetto ad α: mentre può avvenire che analoghe uguaglianze non sussistano fra i *caratteri effettivi* dei due sistemi (rispetto ai loro gruppi). Però se il sistema $[C]$ è regolare, sarà regolare anche il sistema $[\Gamma]$ *in generale*, quando cioè tra i punti di α non passino particolari legami; ed in quest'ultima ipotesi, se il genere effettivo di $[C]$ uguaglia il genere virtuale, altrettanto accadrà per $[\Gamma]$.

Ciò posto, supponiamo ora che il sistema $[C]$ avente la dimensione virtuale $\mathbf{k} \geqq 1$, ed il genere effettivo uguale al genere virtuale, presenti la particolarità che la sua

---

mentre la dimensione r_h soddisfa (n° 11, nota a piè di pagina, $d)$) alla relazione

$$\alpha) \qquad \left\{ \begin{array}{l} r_h \leqq p_h - 2 + I_h \quad \text{per} \quad h = 1.2 \ldots i-1 \\ r_i = p_i - 1 . \end{array} \right.$$

Sommando le i relazioni qui compendiate, risulta

$$\beta) \qquad r_1 + r_2 + \ldots + r_i \leqq p_1 + p_2 + \ldots + p_i - 2i + 1 + J$$

dove J è il numero totale delle intersezioni a due a due delle componenti irriduttibili di C.

Se ora ad una curva aggiunta a $(C_h + \ldots + C_i)$ si impongono le $r_h + 1$ condizioni di contenere $r_h + 1$ punti indipendenti di C_h, la curva aggiunta deve scindersi in C_h ed in una curva aggiunta a $(C_{h+1} + \ldots + C_i)$; e ad ognuna di queste ultime curve aggiunte si deve pervenire partendo da tutte le curve aggiunte a $(C_h + \ldots + C_i)$. Ripetendo più volte questa osservazione si riconosce che quelle tra le ∞^{p-1} curve aggiunte a C, che soddisfanno alle condizioni di contenere

$$(r_1+1)+(r_2+1)+\ldots+(r_{i-1}+1) = (r_1 + r_2 \ldots + r_{i-1}) + i - 1$$

punti scelti su $C_1, C_2 \ldots C_{i-1}$, si scindono nella curva $(C_1 + C_2 + \ldots + C_{i-1})$ e nelle curve aggiunte a C_i; sicchè avremo

$$p - 1 - (r_1 + r_2 + \ldots + r_{i-1}) - (i-1) = p_i - 1 = r_i ,$$

ossia

$$\gamma) \qquad p = r_1 + r_2 + \ldots + r_i + i ,$$

e per la β)

$$p \leqq p_1 + p_2 + \ldots + p_i + J - i + 1 .$$

Ma il secondo membro per la uguaglianza (12)' vale $\mathbf{p}$ (genere virtuale di C), dunque $p \leqq \mathbf{p}$. In questa relazione però non si può prendere il segno $<$ per il n° 3; abbiamo quindi l'uguaglianza

$$p = \mathbf{p} ;$$

e risalendo alle relazioni precedenti riconosciamo che la α) deve scriversi

$$\alpha)' \qquad r_h = p_h - 2 + I_h \qquad (h = 1, 2 \ldots i-1).$$

Le due ultime uguaglianze dànno luogo al teorema:

d) *Una curva composta connessa* C (priva di componenti multiple) *ha il genere effettivo uguale al genere virtuale; e su ciascuna componente semplice di* C *le curve aggiunte a* C *segano una serie completa* (rispetto ad A).

Quanto alle curve non connesse, con un ragionamento poco diverso da quello ora indicato, si giunge al teorema:

e) *Sia* C *una curva non connessa priva di componenti multiple, e siano* $C', C'' \ldots C^{(i)}$ *curve* (*semplici o composte*) *che insieme costituiscono* C *e non hanno a due a due intersezioni, rispetto ad* A; *il genere effettivo di* C *uguaglia la somma dei generi effettivi di* $C', C'', \ldots C^{(i)}$.

curva generica C si spezzi nelle curve irriduttibili C_1, $C_2 \ldots C_i$ (brevemente, il sistema sia *riduttibile*). Allora, poichè C deve esser connessa (n° 15, *c*)), per la prima nota al n° 14 *uno almeno dei sistemi* $[C_1]$, $[C_2] \ldots [C_i]$ *sarà sovrabbondante*. Se ora si scelgono i punti α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_h$ in modo che *essi presentino condizioni tutte indipendenti ad ogni curva irriduttibile d'ordine* $\leqq$n *che passi una o più volte per essi*, il sistema ∞^k $[\Gamma]$, imagine di $[C]$, risulterà necessariamente *irriduttibile* (cioè avrà la curva generica irriduttibile). E si badi che la scelta del gruppo α può farsi in infiniti modi; anzi, poichè a noi basta che i punti di α non siano soggetti a certi legami, traducentisi in un numero finito di equazioni fra le loro coordinate, potremo dire che α è un gruppo *generale* di h punti del piano. Così giungiamo al teorema:

Se le curve d'ordine n *che passano colle molteplicità virtuali* $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_h$ *per certi* h *punti del piano, formano un sistema riduttibile di dimensione virtuale* $\geqq 1$, *avente il genere effettivo uguale al genere virtuale, le curve d'ordine* n *passanti colle molteplicità virtuali* ν_1, $\nu_2 \ldots \nu_h$ *per* h *punti presi in posizione generale nel piano, formano un sistema irriduttibile.*

CAPITOLO II.

Sistemi irriduttibili.

17. Nei paragrafi precedenti sono considerati insieme sistemi lineari di curve riduttibili e irriduttibili, ed i caratteri e le proprietà viste per questi sistemi sono *relative* ad un certo gruppo di punti A per i quali passano tutte le curve del sistema. Ora invece mi limito a studiare i sistemi irriduttibili; e fisserò il gruppo A in modo da ottenere proprietà e caratteri collegati in modo *assoluto* col sistema.

Indichiamo ancora con $[C]$ il sistema lineare costituito da *tutte* le curve d'ordine n che sono assoggettate a passare con date molteplicità per punti assegnati nel piano; siano almeno ∞^1 le curve C di $[C]$ e la curva generica del sistema sia irriduttibile. In queste ipotesi i punti comuni a tutte le curve di $[C]$, o *punti base* di $[C]$, sono in numero finito; il gruppo costituito da *tutti* i punti base si dirà *gruppo base* del sistema, e si indicherà con A; ad esso intenderemo riferite le singole curve di $[C]$. La curva generica C del sistema, considerata indipendentemente dal sistema, ha in ciascun punto base a di A una certa molteplicità ν che si può sempre determinare (ricorrendo, ove occorra, ad una conveniente trasformazione birazionale per separare punti infinitamente vicini); questo numero ν noi assumiamo come *molteplicità* del sistema nel punto base a. Così possiamo dire che ν è la molteplicità sia virtuale, sia effettiva della curva *generica* di $[C]$ in a, mentre per una curva *particolare* C_1 di $[C]$ la molteplicità effettiva in a può superare ν (nel qual caso ν dovrà dirsi molteplicità virtuale di C_1).

Stabilendo in questo modo e il gruppo A e le molteplicità ν, veniamo a rendere indipendente dal nostro arbitrio la relazione fra *sistema lineare* e *gruppo* A *di* *riferimento* (il che non poteva dirsi a rigore nel Capitolo I); perciò quando parleremo di *caratteri* di $[C]$ potremo sopprimere le parole *rispetto al gruppo* A. I caratteri di $[C]$ (o, ciò che fa lo stesso, i caratteri di una curva *qualunque* del sistema rispetto ad A), sono adunque:

la *dimensione virtuale* $\mathbf{k}$ data dalla (1) quando ad A e ν si attribuiscano i significati ora stabiliti;

la *dimensione effettiva* k, definita al n° 2, la quale come ho già detto si supporrà superiore a 0;

il *genere* p (virtuale = effettivo per il n° 11, *a*)), dato dalla (3), il quale è ora il *genere della curva generica* C nel senso comunemente adottato (poichè, come è noto, questa curva non ha punti multipli all'infuori di A);

il *grado* D, numero dei punti *variabili* comuni a due curve del sistema, che si può calcolare mediante la (4).

Questi caratteri godono proprietà invariantive in qualunque trasformazione birazionale come risulta dal n° 8, e come d'altra parte per alcuni di essi (k, p, D) è addirittura evidente nelle ipotesi più ristrette, qui fatte.

Nello studio del sistema $[C]$ accadrà però spesso di incontrare sistemi lineari $[C_1]$ legati con $[C]$ e che si riferiranno al gruppo base A di $[C]$. Siccome può darsi che il gruppo base di $[C_1]$ non coincida con A, così, in questo caso, non sarà più superfluo parlare dei caratteri di $[C_1]$ *rispetto ad* A (nel senso del Cap. I), i quali potranno differire dai caratteri di $[C_1]$ *rispetto al proprio gruppo base* A_1 (nel senso del presente paragrafo).

18. Serie caratteristica. — Oltre alla considerazione dei numeri (caratteri) che hanno con $[C]$ relazioni invariabili per trasformazioni birazionali, è fondamentale per noi lo studio di quegli enti che si possono ottenere da $[C]$ colle stesse leggi con cui gli enti trasformati possono ottenersi dal sistema trasformato di $[C]$.

Tra questi enti il primo a presentarsi è la serie g_D^{k-1} che sulla curva generica C segano le rimanenti curve di $[C]$; alla quale serie daremo il nome di *serie caratteristica* del sistema, per lo stretto legame che essa ha col sistema. È senz'altro evidente, che se si opera una trasformazione birazionale sul piano di $[C]$, la g_D^{k-1} si muta nella serie che sulla curva trasformata di C segano le curve del sistema trasformato.

La serie caratteristica di un sistema lineare è completa (in senso assoluto, cioè non solo rispetto ad A); infatti questa proprietà fu dimostrata in un caso più generale nel n° 12 (1). Segue subito la disuguaglianza

$$D-k+1 \leqq p$$

la quale è anche conseguenza della $k \geqq \mathbf{k}$ e della (5).

(1) Anzi in virtù del ragionamento fatto al n° 12, si può dire più in generale che le curve di dato ordine qualunque, le quali passano con molteplicità ν o $\nu-1$ per ogni punto ν-uplo di C (ad es. colla molteplicità ν_1 nel punto multiplo secondo ν_1, ν_2-1 nel punto multiplo secondo ν_2, ecc.) segano su C una serie completa (in senso assoluto).

Segue pure dalla (5) che quando

$$D-(k-1)=p,$$

quando cioè la serie caratteristica è *non speciale* (nel senso di Brill e Nöther), allora

$$s=k-\mathbf{k}=0,$$

e viceversa; quindi il notevole teorema:

Un sistema lineare è regolare o sovrabbondante (n° 2) *secondo che è non speciale o speciale la sua serie caratteristica.*

19. Parecchi corollari discendono dall'ultimo teorema.

Intanto poichè una serie speciale sopra una curva di genere p ha l'ordine $\leqq 2p-2$ e la dimensione $\leqq p-1$, segue:

Se il grado di un sistema lineare supera $2\mathrm{p}-2$ (oppure se la dimensione effettiva supera p) *il sistema è regolare,* teorema dovuto al Sig. Segre, il quale lo dimostrò colla via qui tenuta (1); come casi particolari si ottengono due teoremi dati anteriormente dal Sig. Guccia (2).

Sia ora sovrabbondante il sistema $[C]$ e quindi speciale la serie g_D^{k-1}; per una nota proprietà delle serie speciali (3)

$$D\geqq 2(k-1),$$

nella quale va preso il segno $=$, quando $k=1$, $k=p$, oppure quando la curva C è iperellittica, e in questi soli casi. L'ultima relazione in virtù della (5) diventa

$$\mathbf{k}+p-1\geqq 2k-2$$

ossia

(14) . . . $$s\leqq p-k+1,$$

la quale dà luogo ai teoremi:

In un sistema lineare di curve non iperellittiche la sovrabbondanza non può superare la differenza fra il genere e la dimensione effettiva, quando questa è maggiore di 1 *e minore di* p.

In un fascio di curve la sovrabbondanza uguaglia il genere (proprietà nota).

In un sistema lineare sovrabbondante di curve iperellittiche di genere p, *il passaggio di una curva per un punto arbitrario del piano porta di conseguenza il passaggio per un altro punto determinato dal primo; e la sovrabbondanza del sistema uguaglia* $\mathrm{p}-\mathrm{k}+1$.

---

(1) *Sui sistemi lineari* (Rendic. Circolo Matem. di Palermo, t. I). Dal I teorema di Segre ora citato segue subito il II teorema: *In un sistema lineare di dimensione superiore a* $\mathrm{p}+1$ *il passaggio di una curva per un punto arbitrario del piano non trae di conseguenza il passaggio per altri punti determinati dal primo.*

(2) *Sur une question concernant les points singuliers* . . . (Comptes-rendus, t. CIII).
Generalizzazione di un teorema di Nöther; Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche (Rendic. Circolo Matem., t. I).

(3) Questo teorema è dovuto a Clifford (*On the Classification of Loci*, Philos. Trans., 1878); lo si troverà riportato con altre dimostrazioni in una Nota di Segre (Rendic. Istit. Lombardo, 1888) ed in una mia (Atti Accad. delle Scienze, Torino 1889).

20. Se la sovrabbondanza s del sistema $[C]$ supera 0, ogni gruppo della serie caratteristica g_D^{k-1} che giace sulla curva generica C presenta (per il teorema di Riemann-Roch)

$$D-k+1=p-s$$

condizioni ad una curva d'ordine $n-3$ aggiunta a C (o, ciò che fa lo stesso, aggiunta a $[C]$) che debba contenere quel gruppo. Le curve aggiunte che soddisfanno a queste condizioni segano su C una serie g^{s-1}_{2p-2-D} che si dirà la *residua della serie caratteristica*.

La serie residua della caratteristica può contenere *punti fissi*, cioè possono esistere su C alcuni punti i quali appartengano ad ogni gruppo della serie residua. Se consideriamo σ di questi punti, il gruppo formato da essi con un gruppo della g_D^{k-1} presenta solo $D-(k-1)$ condizioni ad una curva aggiunta a $[C]$ che debba contenerlo, e quindi esiste su C una serie completa $g^{k+\sigma-1}_{D+\sigma}$ che contiene la g_D^{k-1}; reciprocamente se la serie caratteristica su C è contenuta in una serie $g^{k+\sigma-1}_{D+\sigma}$ *completa*, la serie residua della caratteristica possiede σ punti fissi. Da questa osservazione segue che se un punto base a, semplice per C, non è conseguenza dei rimanenti punti base, sicchè esiste un sistema ∞^{k+1} di curve d'ordine n che si comportano come C in tutti gli altri punti base di $[C]$, la serie caratteristica g_D^{k-1} sopra C è contenuta nella serie *completa* g^k_{D+1} che su C segano le curve del sistema ∞^{k+1}; e quindi ogni curva aggiunta a $[C]$ la quale passi per le D intersezioni variabili di due curve di $[C]$, viene in conseguenza a passare per a.

Più in generale il punto a sia r.uplo (ordinario) per $[C]$, e siano precisamente r le condizioni indipendenti che si devono imporre alle curve d'ordine n le quali si comportano come C nei rimanenti punti base di $[C]$ ma passano $r-1$ volte per a, affinchè esse vengano a passare con r rami per a. In altre parole che esista un sistema $[C_1]$ ∞^{k+r} d'ordine n avente le stesse molteplicità base di $[C]$ tranne che in a, dove la molteplicità sia $r-1$, anzichè r. Dico che a è punto r.uplo per ogni curva aggiunta a $[C]$ che contenga le D intersezioni variabili di due curve di $[C]$. Infatti le curve di $[C_1]$ segano su C una serie *completa* g^{k+r-1}_{D+r} alla quale appartengono i gruppi della serie caratteristica di $[C]$ g_D^{k-1} presi insieme cogli r punti di C infinitamente vicini ad a sugli r rami. Ne viene che questi r punti appartengono ad ogni curva aggiunta a $[C]$ che passi per un gruppo di g_D^{k-1}, ossia che ognuna di queste curve aggiunte ha un punto r.uplo in a. Dunque:

Se un sistema ∞^k [C] *d'ordine* n *ha il punto base* a *come* r.*uplo ed esiste un sistema ∞^{k+r} d'ordine* n *le cui curve passano soltanto* r — 1 *volte per* a, *ma si comportano come* C *negli altri punti base, ogni curva aggiunta a* [C] *che passi per le intersezioni variabili di due curve di* [C] *ha un punto* r.*uplo in* a*;* e reciprocamente*: se ogni curva aggiunta a* [C] *che passi per le intersezioni variabili di due curve del sistema ha un punto* r.uplo *in un punto* r.uplo *del sistema, allora esiste un sistema ∞^{k+r}*, ecc. Quest'ultima parte si dimostra senza difficoltà rifacendo a rovescio il ragionamento precedente.

21. Sistemi residui. — Nei paragrafi seguenti, quando non si dica il contrario si ritiene esclusa la ipotesi che due punti base di $[C]$ cadano infinitamente vicini; in altre parole si suppone che i punti base del sistema siano punti multipli ordinari, con tangenti variabili da curva a curva del sistema.

Insieme al sistema $[C]$ definito rispetto al gruppo base A mediante l'ordine n e la molteplicità ν (effettiva = virtuale) di C nel punto base generico a, consideriamo un sistema $[C']$ (almeno ∞^0) costituito da tutte le curve d'ordine $n' < n$ che sono assoggettate a passare colle molteplicità (virtuali) $\nu'_1, \nu'_2 \ldots \nu'_h$ $(\geqq 0)$ per i punti base di $[C]$; *molteplicità tali che in ogni punto base* a *sussista la relazione* $\nu' \leqq \nu$.

Se ora esiste un sistema $[C'']$ (almeno ∞^0) costituito da tutte le curve d'ordine $n-n'$ che sono assoggettate a passare colle molteplicità virtuali $\nu_1 - \nu'_1, \nu_2 - \nu'_2, \ldots \nu_h - \nu'_h$ per i punti base di $[C]$, avverrà che ogni curva di C' insieme ad ogni curva di C'' formerà una (particolare) curva di $[C]$, ed anzi *ciascuno dei due sistemi sarà costituito da tutte le curve che insieme alla curva generica dell'altro danno curve di* $[C]$. Due sistemi che si trovino in queste *ultime* condizioni si diranno *residui l'uno dell'altro rispetto a* $[C]$ (1).

Definito nel modo indicato il sistema $[C']$, sono pienamente determinati i caratteri virtuali $\mathbf{k}'$, $\mathbf{p}'$, D' del sistema rispetto ad A, come pure risulta fissato il numero delle intersezioni (rispetto ad A) di C e C',

$$C.C' = \Delta'.$$

Se poi con questi numeri vogliamo procurarci la dimensione virtuale (rispetto ad A) del sistema residuo la cui curva generica è C'' $(n-n', \nu-\nu')_A$, troviamo

$$\mathbf{k}'' = \frac{1}{2}\left\{(n-n')(n-n'+3) - \Sigma(\nu-\nu')(\nu-\nu'+1)\right\}$$

ossia

$$\alpha) \qquad \mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \Delta' + \mathbf{p}' - 1$$

(dove $\mathbf{k}$ è, secondo il solito, la dimensione virtuale di $[C]$). Dunque intanto: *Se il sistema* $[C']$ *non ammette sistema residuo rispetto a* $[C]$, *sussiste la relazione*

$$\mathbf{k} \leqq \Delta' - \mathbf{p}'.$$

Se invece si ammette che esista il sistema residuo $[C'']$ i cui caratteri, rispetto ad A, siano $\mathbf{k}''$, $\mathbf{p}''$, D'', e si pone

$$C.C'' = \Delta'',$$

si trova subito

$$\Delta' + \Delta'' = D,$$

ed inoltre

$$\Delta' = C'.(C' + C'') = D' + C'.C'' \qquad \text{da cui}$$

(1) Si noti che in questa definizione di sistemi residui non si fa più cenno delle molteplicità virtuali che si attribuiscono ai punti base dei due sistemi, sicchè si può parlare di due sistemi residui anche prima di averne fissato le molteplicità virtuali; ma risulta evidente dalle cose dette che dati due sistemi residui rispetto a $[C]$, per uno (qualunque) di essi si possono scegliere le molteplicità virtuali $\nu_1', \nu_2' \ldots$ in A, in guisa che (il sistema sia completamente definito ed inoltre) risulti in ogni punto base $\nu' \leqq \nu$. La scelta potrà talvolta farsi in più modi; uno tra questi è di assumere come molteplicità *virtuale* ν' del sistema nel punto base a, la molteplicità *effettiva* del sistema stesso in a, se questa non supera ν, e di prendere nel caso opposto $\nu' = \nu$.

(15) . . . $$C'.C''=\Delta'-D'=\Delta''-D''.$$

Applicando ora alla curva composta $C\equiv C'+C''$ la formola (12) del n° 13, troviamo

$$\mathbf{p}=\mathbf{p}'+\mathbf{p}''+\Delta'-D'-1\,,$$

la quale in virtù della relazione (5) del n° 4 (applicata alla C') ci dà

(16) . . . $$\mathbf{p}-\mathbf{p}''=\Delta'-\mathbf{k}'\,,$$

mentre dalla α) deduciamo

(17) . . . $$\mathbf{k}-\mathbf{k}''=\Delta'-\mathbf{p}'+1.$$

Quanto ai caratteri effettivi di $[C']$, $[C'']$ mi limito ad osservare che tra le dimensioni effettive k, k', k'' di $[C]$ e dei due sistemi residui deve sussistere la disuguaglianza (n° 14, a))

$$k>k'+k''\,.$$

La differenza $k-k'$ dà il numero delle condizioni che si devono imporre ad una curva di $[C]$ affinchè essa si scinda in una curva fissata di $[C'']$ ed in una curva di $[C']$. Questo numero $k-k'$ può dirsi la *valenza* (o la *postulazione*) di C'' rispetto a $[C]$. Se esso è uguale ad 1, nel qual caso diremo C'' *monovalente*, le curve di $[C]$ non possono segare C'' fuori dei punti base; e $k''<k-k'$ deve esser uguale a zero.

22. **Curve fondamentali.** — Una curva (semplice o composta) la quale non sia segata in punti fuori del gruppo base A dalla curva generica C del sistema $[C]$ dicesi *curva fondamentale* del sistema. Dalla definizione segue subito che l'insieme di due curve fondamentali è ancora una curva fondamentale, e reciprocamente è fondamentale ogni componente di una curva fondamentale.

La dimensione effettiva appartenente ad una curva fondamentale (dimensione rispetto ad A) *è nulla, eccettuato il caso in cui il sistema* $[C]$ *sia un fascio, e la curva fondamentale contenga una curva del fascio.* Infatti se esistesse un fascio di curve F tutte fondamentali per $[C]$, la curva F passante per un punto della curva generica C, dovrebbe contenere tutta la C (che per ipotesi è irriduttibile), sicchè C sarebbe curva fondamentale di $[C]$; ciò è possibile soltanto se $D=0$, nel quale caso $[C]$ è un fascio. Se poi $[C]$ è un fascio, l'insieme di quante si vogliano curve del fascio costituisce una curva fondamentale di $[C]$.

Una curva fondamentale irriduttibile forma parte di ogni curva di $[C]$ che ne contenga un punto; il sistema residuo della curva fondamentale ha la dimensione effettiva $k-1$ e la curva stessa deve dirsi monovalente. Più in generale (se si bada alla definizione del n° 15) si riconosce che *ogni curva connessa* (rispetto ad A) *senza componenti multiple, la quale sia fondamentale per* $[C]$, *è monovalente.* Non è vero però il teorema reciproco [1].

---

[1] Ad es. il sistema ∞^2 delle curve di quinto ordine $[a^3, b_1^2, b_2^2, c_1, c_2 \ldots c_6]$, i cui punti base $a, b_1, b_2, c_1, c_2 \ldots c_6$ costituiscono il gruppo base di un fascio di cubiche, ha come curva fondamentale *monovalente* la curva *non connessa* costituita dalle due rette ab_1, ab_2.

23. Genere effettivo di una curva fondamentale. — Nel seguito, parlando di una curva fondamentale F (d'ordine m colla molteplicità effettiva μ nel punto generico a di A), si supporrà che esista un sistema residuo $[C_1]$ almeno ∞^0, (in altre parole si tratterà soltanto di quelle curve fondamentali che hanno la valenza non superiore a k).

La curva composta $C_1 + F$ è una curva di $[C]$; essa quindi sega la curva generica C del sistema (oltre che $\sum_A \nu^2$ punti contenuti in A) in un gruppo G_D della serie caratteristica g_D^{k-1} (1). Le curve d'ordine $m-3$ aggiunte ad F (passanti $\mu - 1$ volte per a) costituiscono prese insieme con C_1 un sistema di curve d'ordine $n-3$ aggiunte a C e passanti per G_D, sistema che ha la dimensione effettiva $p_f - 1$ se p_f è il *genere effettivo* di $F(m, \mu)_A$. Ma fu già osservato (nº 20) che per un gruppo della serie caratteristica passano soltanto ∞^{s-1} curve aggiunte a C; quindi

$$p_f \leqq s\,,$$

donde il teorema:

a) *Il genere effettivo di una curva fondamentale non può superare la sovrabbondanza del sistema.*

Merita di essere esaminato il caso in cui il genere effettivo p_f raggiunge il suo massimo valore s. Allora ogni curva d'ordine $n-3$ aggiunta a $[C]$ la quale passi per G_D, si scinde in C_1 ed in una delle curve F' d'ordine $m-3$ aggiunte ad F. Ora questa curva $C_1 + F'$ ha la moltiplicità ν in ogni punto base ν. uplo di $[C]$ il quale non appartenga ad F (se un tal punto esiste). Dunque la serie residua della caratteristica ha ν punti fissi intorno a quel punto base (e la dimensione effettiva del sistema aumenta di ν se alle curve di $[C]$ si impone di passare colla molteplicità $\nu - 1$ anzichè ν per quel punto base; nº 20). L'enunciato di questo teorema, sotto la forma a noi più utile, è il seguente:

b) *Se il sistema lineare* [C], *per cui la serie residua della caratteristica non ha punti fissi, possiede una curva fondamentale di genere effettivo uguale alla sovrabbondanza del sistema, questa curva contiene ogni punto base del sistema.*

24. Caratteri virtuali di una curva fondamentale. — Sia ancora $F(m, \mu)_A$ una curva fondamentale la quale ammetta il sistema residuo $[C_1]$ (almeno ∞^0). Per evitare complicazioni supporremo che la molteplicità effettiva μ di F in ogni punto base a di $[C]$ non superi la corrispondente molteplicità ν di $[C]$ (2); nella quale

---

(1) Non è escluso che alcuni punti di G_D cadano in punti di A; così se ad es. nel punto base a la curva $C_1 + F$ ha la molteplicità $\nu + \varepsilon$ anzichè ν, allora $\nu\varepsilon$ punti di G_D cadono in a; ma in tal caso la curva composta di C_1 e di una curva aggiunta ad F ha la molteplicità $\nu + \varepsilon - 1$ (almeno) in a, e quindi tra le $2p-2$ sue intersezioni con C si trovano i $\nu\varepsilon$ punti nominati di G_D, sicchè tutto il ragionamento continua a sussistere.

(2) La ipotesi qui fatta non costituisce una restrizione nel caso di curve fondamentali *monovalenti*. Risulta infatti da una osservazione del sig. BERTINI (*Sulle curve fondamentali*..., Rendiconti Circolo Matem. di Palermo, t. III) che una curva fondamentale *monovalente* ha in ogni punto base a, di $[C]$ una molteplicità *effettiva* μ non superiore alla molteplicità ν di C, e che inoltre la curva generica del sistema residuo $[C_1]$ ha in a la molteplicità *effettica* $\nu - \mu$; ciò nella ipotesi, già fatta, che i punti base di $[C]$ siano punti multipli ordinari.

ipotesi, in relazione con quanto abbiamo detto al n° 21, assumeremo μ come *molteplicità virtuale* di F in a, e in conseguenza $\nu-\mu$ come molteplicità virtuale di $[C_1]$ in a.

Avremo per definizione,

$$C.F = nm - \sum_A \nu\mu = 0$$

$$C.C_1 = D;$$

in virtù di queste relazioni le formole (15), (17), (16) del n° 21 (se indichiamo con $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{p}_1$, D_1 i caratteri virtuali di C_1 e con $\mathbf{k}_f$. $\mathbf{p}_f$, D_f i caratteri virtuali di F rispetto ad A) diventano:

(18) ... $$C_1.F = -D_f,$$
$$\mathbf{k}-\mathbf{k}_1 = -\mathbf{p}_f+1,$$
$$\mathbf{p}-\mathbf{p}_1 = -\mathbf{k}_f;$$

le due ultime possono scriversi

(19) ... $$\mathbf{p}_f = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k} + 1$$

(20) ... $$\mathbf{k}_f = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}$$

Le (18), (19), (20) si enunciano mediante i teoremi:

a) *Il numero delle intersezioni rispetto ad A di una curva fondamentale colla curva generica del sistema residuo uguaglia il grado appartenente alla curva fondamentale mutato di segno.*

b) *Il genere virtuale* (rispetto ad A) *di una curva fondamentale è la differenza tra le dimensioni virtuali dei sistemi residuo e primitivo aumentata di una unità.*

c) *La dimensione virtuale appartenente ad una curva fondamentale* (rispetto ad A) *è la differenza tra i generi virtuali dei sistemi residuo e primitivo* (1).

La (19) può scriversi un po' diversamente se si introducono le sovrabbondanze s, s_1 dei sistemi $[C]$ e $[C_1]$ e la valenza v di F. Si ha infatti

$$s = k - \mathbf{k},\quad s_1 = k_1 - \mathbf{k}_1,\quad k = k_1 + v\ ;$$

quindi

(19)' ... $$\mathbf{p}_f = s - s_1 - v + 1.$$

Nel caso particolare $v=1$, questa ci dà:

d) *Il genere virtuale di una curva fondamentale monovalente è la differenza fra le sovrabbondanze* (rispetto ad A) *dei sistemi primitivo e residuo.*

Ne deduciamo subito l'importante corollario:

e) *Il genere virtuale di una curva fondamentale monovalente non può superare la sovrabbondanza del sistema* (primitivo)*; se raggiunge questo limite, il*

---

(1) È utile rammentare che la dimensione virtuale appartenente ad una curva fondamentale (non potendo superare la dimensione effettiva) è $\leqq 0$, ed uguaglia la differenza tra $\frac{1}{2}m(m+3)$ e il numero delle condizioni che i punti di A (considerati come indipendenti l'uno dall'altro) impongono ad F.

sistema residuo è regolare (rispetto ad A), *e viceversa; la curva fondamentale ha in tale ipotesi il genere effettivo uguale al genere virtuale* (per il n° 23, a), tenuto conto del fatto che non può essere $p_f < \mathbf{p}_f$) *ed è quindi connessa* (n° 15, c')).

25. Un teorema sul grado appartenente ad una curva fondamentale. — Se il sistema $[C]$, di dimensione effettiva $k > 1$, ammette una curva fondamentale F $(m, \mu)_A$ qualunque, anche la curva composta di r curve tutte identiche ad F è fondamentale per $[C]$, qualunque sia il numero intero positivo r; quindi (n° 22) alla curva rF $(rm, r\mu)_A$ appartiene una dimensione virtuale (rispetto ad A) nulla o negativa. Ora, eseguendo i calcoli e tenendo conto delle (4) e (6) applicate alla F, si trova che questa dimensione vale

$$\frac{1}{2} r \left\{ r D_f + \mathbf{k}_f - \mathbf{p}_f + 1 \right\}.$$

Affinchè questa espressione si mantenga $\leqq 0$, per quanto grande sia r, è necessario che sia

$$(21)\ \ldots \qquad D_f \leqq 0;$$

quindi

a) *Il grado appartenente ad una curva fondamentale non può superare* 0 (il sistema lineare essendo almeno ∞^2).

È pur degna di nota quest'altra considerazione, che conducendo allo stesso teorema, sotto maggiori restrizioni, dà tuttavia un corollario importante relativo al caso $D_f = 0$.

La curva fondamentale F sia *monovalente, e non contenga componenti multiple;* quanto alla dimensione effettiva k del sistema primitivo $[C]$, ora supporremo soltanto che superi 0. Dette $F_1, F_2 \ldots F_i$ le componenti irriduttibili di F $(i \geqq 1)$, ogni curva di $[C]$ passante per un punto generico di F contiene la F, e nell'ipotesi più generale si spezza in r_1 curve coincidenti con F_1, r_2 curve coincidenti con $F_2, \ldots r_i$ curve coincidenti con F_i, e finalmente in una curva residua Γ non avente infiniti punti comuni con F, variabile in un sistema ∞^{k-1}; la quale Γ però potrebbe mancare se fosse $k = 1$ ed in questo solo caso. La Γ, se esiste, deve avere almeno una intersezione (rispetto ad A) con F, cioè dei numeri non negativi

$$\Gamma . F_1,\ \Gamma . F_2, \ldots, \Gamma . F_i$$

uno almeno deve esser superiore a 0; infatti nella ipotesi contraria la curva composta

$$C \equiv r_1 F_1 + r_2 F_2 + \ldots + r_i F_i + \Gamma$$

che ha lo stesso ordine di C e le stesse molteplicità nel gruppo base A (per la prima nota al n° 24), sarebbe non connessa ed avrebbe quindi (n° 15, c')) il genere effettivo superiore al genere virtuale, mentre l'uno e l'altro carattere della C uguaglia p genere (sia effettivo, sia virtuale) di $[C]$. Se ora si nota che per ipotesi

$$C . F_1 = C . F_2 = \ldots = C . F_i = 0,$$

ossia, ponendo in evidenza le componenti di C, meno la Γ,

$$r_1 F_1 . F_1 + r_2 F_2 . F_1 + \ldots + r_i F_i . F_1 \leqq 0$$
$$r_1 F_1 . F_2 + r_2 F_2 . F_2 + \ldots + r_i F_i . F_2 \leqq 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_1 F_1 . F_i + r_2 F_2 . F_i + \ldots + r_i F_i . F_i \leqq 0 ,$$

ne verrà per l'ultima osservazione, che in una almeno di queste si deve prendere il segno superiore, se Γ esiste. Dividendo la prima per r_1, la seconda per $r_2, \ldots$ l'ultima per r_i, sommando e tenendo conto della relazione

$$\frac{r_h}{r_k} + \frac{r_k}{r_h} \geqq 2 ,$$

si trova

$$\Sigma_h F_h . F_h + 2 \Sigma_{hk} \; F_h . F_k \leqq 0$$

(h e k numeri distinti scelti fra $1, 2 \ldots i$), nella quale deve scegliersi il segno inferiore solo quando si presentino insieme i due fatti che manchi la Γ, e sia

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_i .$$

Ma il primo membro dell'ultima disuguaglianza (per la $(13)'$ applicata alla curva composta F) non è altro che D_f; sicchè ritroviamo

$$D_f \leqq 0 ,$$

insieme al teorema notevole:

b) *Se un sistema lineare possiede una curva fondamentale monovalente* (*priva di componenti multiple*) *alla quale appartenga il grado zero* (rispetto ad A), *il sistema è un fascio, una cui curva è formata dalla curva fondamentale contata una o più volte.*

26. Applicazioni; sistemi sovrabbondanti col minimo numero di punti base. — Credo utile interrompere le ricerche generali per fare una applicazione delle cose dette ad una questione interessante, quella di decidere quale è il minimo numero di punti base che può avere un sistema sovrabbondante.

Sia $[C]$ un sistema sovrabbondante (quindi $p > 0$), composto di tutte le curve che passano con molteplicità assegnate $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_h$ per certi punti $a_1, a_2 \ldots a_h$ fissati nel piano. Il gruppo base A di $[C]$ sarà costituito dai punti ora nominati e forse da altri punti $a_{h+1} \ldots$, per cui vengano a passare (colle molteplicità $\nu_{h+1} \ldots$) tutte le curve di $[C]$ in conseguenza delle condizioni imposte da $a_1, a_2 \ldots a_h$. Indichiamo con C' la curva generica d'ordine $n-3$ che passa colle molteplicità $\nu_1 - 1$, $\nu_2 - 1, \ldots \nu_h - 1$ per $a_1, a_2 \ldots a_h$, sicchè $C . C' \geqq 2p - 2$.

Ora supponiamo che i punti $a_1, a_2 \ldots a_h$ stiano sopra una cubica γ; allora la curva $\gamma + C'$ d'ordine n, comportandosi come C nei punti $a_1, a_2 \ldots a_h$, appartiene al sistema $[C]$; quindi

$$D = (\gamma + C') . C = \gamma . C + C . C' ;$$

ma $D \leqq 2p-2$ (n° 19); dunque $C . C' = 2p-2$, $\gamma . C = 0$. Da ciò segue che la curva γ è fondamentale per $[C]$, e che il sistema $[C]$ è ∞^p ed ha la sovrabbondanza 1 (n° 19); quindi, una sola tra le condizioni imposte da tutti i punti di A essendo conseguenza delle rimanenti, dei punti $a_{h+1} \dots$ può esistere uno al più, e questo deve esser semplice per C e deve stare su γ.

Ora la ipotesi che i punti $a_1, a_2 \dots a_h$ stiano sopra una cubica è certo soddisfatta se $h \leqq 9$; anzi se $h=8$ le cubiche γ sono ∞^1 ed il sistema $[C]$, se è sovrabbondante, ammette ∞^1 cubiche fondamentali e perciò è un fascio di cubiche (n° 22); mentre l'ipotesi $h<8$ contrasta evidentemente (per il ragionamento del n° 22) coll'altra che $[C]$ sia sovrabbondante. Riassumendo:

a) *Un sistema lineare di curve irriduttibili, il quale sia determinato dalle molteplicità delle curve in* h *tra i suoi punti base, è regolare* (e quindi non ha altri punti base) *se* $\mathrm{h}<9$, *fatta eccezione per il fascio di cubiche* ($\mathrm{h}=8$).

In conseguenza:

b) *Un sistema sovrabbondante ha almeno nove punti base.*

Ci proponiamo ora di stabilire quali siano i sistemi lineari sovrabbondanti con nove punti base (oltre al fascio di cubiche). Il ragionamento ora fatto ci dice che per i nove punti base deve passare una sola cubica γ, e che questa deve esser fondamentale per il sistema. Ma il *grado* appartenente ad una cubica rispetto al gruppo costituito da nove suoi punti è 0; quindi (n° 25, *b*)), il sistema che andiamo cercando deve essere un fascio e la cubica γ contata più volte deve costituire una curva del fascio; sicchè l'ordine del fascio sarà $3r$ ($r=2, 3 \dots$) e la molteplicità in ciascun punto base sarà r.

c) *Un sistema lineare sovrabbondante con nove punti base deve esser necessariamente un fascio di curve* (ellittiche) *d'ordine* $3\mathrm{r}$ ($\mathrm{r}=1, 2 \dots$) *colla molteplicità* r *in ciascuno dei punti base* (1).

Vogliamo finalmente occuparci di quei sistemi lineari sovrabbondanti che pure avendo più di 9 punti base sono determinati dalle molteplicità in 9 tra questi punti base.

Siano $a_1, a_2 \dots a_9$ i nove punti base; oltre a questi vi può essere al più (per ciò che dissi sopra) un ulteriore punto base b, semplice per il sistema. Siano $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_9$ le molteplicità di C nei punti base $a_1, a_2 \dots a_9$; se per evitare considerazioni minute (che non è qui il luogo di fare trattandosi di una semplice applicazione di risultati generali) supponiamo che sia irriduttibile la cubica passante per i punti base, si può, senza nuove restrizioni, ritenere che la somma di tre qualunque delle ν non superi n (ordine di C), giacchè in caso opposto, assumendo i corrispondenti punti base come punti fondamentali in una trasformazione quadratica (la quale è sempre possibile per l'ipotesi fatta sulla cubica) il sistema si muterebbe in uno d'ordine più basso. D'altra parte la cubica nominata deve essere fondamentale per $[C]$; quindi

$$3n = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_9 + 1,$$

la quale, tenuto conto della precedente considerazione, ci dice che una sola delle ν

(1) I fasci di curve ellittiche che qui si presentano furono già studiati specialmente da Halphen (Bulletin de la Société Mathém. de France, t. X) e Bertini (Annali di Matematica, t. 8°, serie II).

è inferiore a $\frac{n}{3}$, e precisamente uguale a $\frac{n}{3}-1$, mentre le altre otto ν uguagliano $\frac{n}{3}$. Ora una curva d'ordine n avente queste molteplicità è di genere $\frac{n}{3}$; quindi conchiudiamo che

d) *Ogni sistema lineare di curve di genere* p, *il quale sia determinato da nove dei suoi punti base* (giacenti sopra una cubica irriduttibile) *e possegga tuttavia altri punti base, può sempre mediante una trasformazione birazionale ridursi al tipo*

$$C^{3p}\left[a_1^p a_2^p \dots a_8^p a_9^{p-1} b\right]$$

che ha l'ordine 3p *e la dimensione effettiva* p; i 10 punti base giacciono sopra una cubica fondamentale (1).

27. Sistema aggiunto. — Ritorniamo al sistema lineare irriduttibile generale $[C]$, ed occupiamoci del sistema *aggiunto* a $[C]$ costituito dalle ∞^{p-1} curve d'ordine $n-3$ aggiunte a C. Di questo sistema aggiunto ci siamo già serviti più volte per dedurne proprietà relative a $[C]$ (ni 20, 23, 26); ed una conoscenza più profonda dei legami tra il sistema dato ed il suo aggiunto conduce a teoremi nuovi ed importanti sui sistemi lineari.

È noto che la serie segata su C dalle proprie curve aggiunte (d'ordine $n-3$) non ha punti fissi (cioè punti comuni a tutti i suoi gruppi), segue quindi che *se una curva γ forma parte di ogni curva del sistema aggiunto a* [C], *la curva γ è fondamentale per* [C]. Ogni curva C_1 che con γ costituisca una curva di $[C]$ ha per curva aggiunta ogni curva che con γ costituisca una curva aggiunta a $[C]$; sicchè il genere effettivo di C_1 è p (non superiore per il nº 15, *a*)). Viceversa se γ è tal curva fondamentale di $[C]$ che il sistema residuo $[C_1]$ abbia il genere effettivo uguale a p, allora γ si staccherà da ogni curva aggiunta a C; e γ insieme alle curve aggiunte a $[C_1]$ darà *tutte* le curve aggiunte a $[C]$.

In particolare (nº 24, *c*)):

Una curva fondamentale di [C] *alla quale il gruppo base imponga condizioni tutte indipendenti* (cioè $\mathbf{k}_i=0$), *si stacca da ogni curva del sistema aggiunto* (2).

Molto resterebbe a dire sul complesso delle curve che si staccano da ogni curva del sistema aggiunto, ma poichè la ricerca mi condurrebbe a lunghe digressioni senza offrire notevoli vantaggi nelle applicazioni che qui mi propongo di fare, abbandono per il momento tale questione.

Fatta astrazione dalle curve fisse (se esistono) che formano parte di ogni curva d'ordine $n-3$ aggiunta a C, restano quando $p>1$, ∞^{p-1} curve variabili, le quali segano su C la serie g_{2p-2}^{p-1}; il sistema da esse costituito può dirsi *sistema aggiunto puro* di C. L'importanza che questo sistema ha nello studio di $[C]$ è provata dal teorema:

La trasformazione birazionale che muta un sistema lineare [C] (di dimensione

(1) All'esistenza di siffatti sistemi per p qualunque >0, accennò il sig. JUNG nella Memoria I, *Ricerche sui sistemi lineari* (Annali di Matem., serie II, t. 15).

(2) L'esempio più semplice è offerto da una retta che congiunga un punto base r-uplo con un punto base $(n-r)$-uplo in un sistema d'ordine n.

$k \geqq 0$) *in un sistema* $[C^*]$, *muta il sistema aggiunto puro di* $[C]$ *nel sistema aggiunto puro di* $[C^*]$ (1). Ciò deriva subito dall'osservazione fatta al n° 9, che ogni curva d'ordine $n^* - 3$ aggiunta a C^* è costituita dalla trasformata di una curva d'ordine $n - 3$ aggiunta a C, presa insieme a certe curve fisse fondamentali per $[C^*]$.

28. a) *Se il sistema aggiunto puro è riduttibile, la curva generica del sistema* $[C]$ *è iperellittica.* — Infatti per la definizione data, e per un teorema già citato del sig. BERTINI sui sistemi riduttibili, la curva generica C' del sistema aggiunto puro non può scindersi che in $p-1$ curve c di un fascio; e poichè C' sega la curva generica C di $[C]$ in $2p-2$ punti, ciascuna delle ∞^1 c segherà la C in una coppia di punti, il che dimostra il teorema. Siccome poi per un punto della coppia passano infinite curve di $[C]$ $(k > 1)$, ciascuna delle quali sega la c in un punto ulteriore che è variabile, se le curve di $[C]$ passanti per un punto arbitrario del piano non passano tutte in conseguenza per un altro punto determinato dal primo, conchiudiamo che in questa ipotesi c è razionale; quindi tenendo conto della nota al n° 19, giungiamo al teorema:

a') *Se la dimensione effettiva di* $[C]$ *supera* $p+1$, *ed il sistema aggiunto puro* $[C']$ *di* $[C]$ *è riduttibile, la curva generica di* $[C']$ *si spezza in* $p-1$ *curve razionali* (2).

b) *La serie* g_n^2 *segata dalle rette del piano sulla curva generica di* $[C]$, *quando è speciale, è contenuta in una serie* g_n^{d+2} *dove* $d (\geqq 0)$ *è la differenza tra* $n-3$ *e l'ordine del sistema aggiunto puro.* Infatti se g_n^2 è speciale, esiste almeno una curva C' del sistema aggiunto puro che contiene n punti in linea retta di C: ora, affinchè C' contenga tutti questi n punti, è sufficiente che essa ne contenga al massimo $(n-3-d)+1$, sicchè altrettante sono al più le condizioni indipendenti che un gruppo di g_n^2 presenta ad una curva aggiunta d'ordine $n-3$, e ciò basta per concludere che la g_n^2 sta in una serie $g_n^{n-(n-3-d)-1} = g_n^{d+2}$. Ed ora, ricordando che una serie g_n^3 (il cui gruppo generico non sia costituito da tre gruppi di una serie semplicemente infinita) non può stare sopra una curva di genere $p > \frac{(n-2)^2}{4}$ (3), che se vale questa disuguaglianza la g_n^2 è certo speciale per $n > 5$ (poichè allora $p > n-2$), e trattando direttamente i casi $n = 4, 5$, segue il corollario:

b') *Se il sistema aggiunto puro ad un sistema di genere* p, *ha l'ordine* n' *ed è* $p > \frac{(n'+2)^2}{4}$, *il sistema primitivo è di ordine* $n = n' + 3$.

Con un ragionamento analogo si dimostra che

c) *Se sulla curva generica* C *di un sistema lineare le rette uscenti da un*

(1) In altre parole il legame tra un sistema lineare e il sistema aggiunto puro è invariantivo per trasformazioni birazionali.

(2) E come risulta facilmente dai ragionamenti qui fatti, per affermare che $[C']$ è riduttibile basta sapere che $k > p+1$, e che la curva generica di $[C]$ è iperellittica; v. a questo proposito la mia Nota: *Massima dimensione dei sistemi lineari* (Annali di Matem., serie 2ª, tomo 18º).

Si dimostra pure senza difficoltà che per $k \leqq p+1$, se $[C']$ è riduttibile, il genere delle ∞^1 curve c non può superare 1.

(3) HALPHEN, Bulletin de la Société Mathém., t. 2.

punto base (multiplo secondo $n-\mu$) *segano una serie speciale* g_μ^1 ($\mu \geqq 2$), *e le stesse rette segano sulla curva aggiunta pura generica la serie* $g_{\mu'}^1$, *la differenza* $d=\mu-\mu'-2$ *è almeno zero, e la serie* g_μ^1 *è contenuta in una* g_μ^{d+1}. Infatti ogni curva d'ordine $n-3$ aggiunta a C sega una retta per il punto base (oltre che in $n-\mu-1$ punti in esso coincidenti) in $(n-3)-(n-\mu-1)=\mu-2$ punti; sicchè (una curva aggiunta pura essendo parte di una curva aggiunta d'ordine $n-3$) sarà $\mu' \leqq \mu-2$. Di più un gruppo della g_μ^1 giace tutto sopra ogni curva aggiunta pura C' che ne contenga al più $\mu'+1=\mu-d-1$ punti *comunque scelti*, e ciò prova che la g_μ^1 è contenuta in una g_μ^{d+1}.

E qui si osservi, quando $d>0$, che nella serie completa g_μ^ρ ($\rho \geqq d+1>1$), a cui g_μ^1 appartiene, tutti quei gruppi i quali contengono uno stesso punto generico di C, non possono aver comune in conseguenza un secondo punto di C (1); quindi la g_μ^ρ non può esistere sopra una curva di genere p se $p>\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}$; donde il teorema:

c') *Se sulla curva generica del sistema aggiunto puro di un sistema di genere* p, *le rette uscenti da un punto base segano la serie* $g_{\mu'}^1$ *ed è* $p>\frac{(\mu'+1)(\mu'+2)}{2}$, *le rette stesse segheranno sulla curva generica del sistema primitivo la serie* $g^1_{\mu'+2}$.

Questo teorema vale anche nel caso estremo $\mu'=0$; esso allora può enunciarsi:

c'') *Se il sistema aggiunto puro di un sistema di genere* p *si compone dei gruppi di* $p-1$ *rette di un fascio, il sistema primitivo è formato di curve* (iperellittiche) *di un certo ordine* n *aventi nel centro del fascio un punto multiplo secondo* $n-2$.

29. Una relazione fra i caratteri virtuali di un sistema lineare e del sistema aggiunto puro. — Siano p, $\mathbf{k}$, D i caratteri del sistema lineare $[C]$ rispetto al suo gruppo base A, e $\mathbf{p}'$, $\mathbf{k}'$ siano il genere virtuale e la dimensione virtuale del sistema aggiunto puro $[C']$ sempre rispetto ad A; la dimensione effettiva di $[C']$ è come sappiamo $p-1$ ($\geqq \mathbf{k}'$), e $2p-2$ è il numero delle intersezioni rispetto ad A di C e C'.

1) Se la curva generica di $[C']$ non forma parte di una curva di $[C]$, da un teorema enunciato al n° 21 si deduce la disuguaglianza

$$(22)' \ldots \qquad \mathbf{k}<2p-\mathbf{p}'-1\ ,$$

(1) Ciò per il teorema: *Se in una* g_μ^ρ *completa, senza punti fissi, giacente sopra una curva d'ordine* n, *avviene che i gruppi aventi un punto generico in comune abbiano in conseguenza qualche altro punto comune, in ogni gruppo della serie si trovano* $\mu-2$ *punti per i quali passano curve aggiunte d'ordine* $n-3$ *non contenenti tutto il gruppo.* Infatti detto α un punto del gruppo G_μ e β un punto comune a tutti i gruppi di g_μ^ρ che contengono α, il gruppo $G_{\mu-2}$ che con α e β costituisce G_μ appartiene ad una serie $g_{\mu-2}^{\rho-1}$ e quindi impone soltanto $\mu-2-(\rho-1)=\mu-\rho-1$ condizioni ad una curva aggiunta d'ordine $n-3$ che debba contenerlo; mentre una curva aggiunta per contenere tutto G_μ deve soddisfare a $\mu-\rho$ condizioni indipendenti.

la quale nella ipotesi

$$\alpha) \qquad \mathbf{k} > p+1$$

ci dice che

$$\beta) \qquad p > \mathbf{p}' + 2 \,;$$

sicchè per il teorema del n° 19 concludiamo che $[C']$, se è irriduttibile, è regolare.

2) Se invece la curva generica di $[C']$ forma parte di qualche curva di $[C]$ esisterà un sistema $[C'']$ (almeno ∞^0) residuo di $[C']$. In relazione con ciò che dicemmo al n° 21, osservando che la molteplicità effettiva ν' di $[C']$ in un punto ν.uplo di $[C]$ non supera $\nu-1$, assumeremo come molteplicità virtuale di $[C'']$ in quel punto la differenza $\nu-\nu'$; e indicheremo con $\mathbf{p}''$, $\mathbf{k}''$ i caratteri virtuali di $[C'']$ rispetto ad A (calcolati tenendo conto delle molteplicità virtuali $\nu-\nu'$, secondo le norme stabilite al n° 21). Allora dalla (17) del n° 21, ricaviamo

$$(22)\ldots \qquad \mathbf{k} = 2p - \mathbf{p}' + \mathbf{k}'' - 1$$

(la quale per valori negativi di $\mathbf{k}''$ si riduce alla (22)′); e dalla (16) del n° 21 scambiando le veci dei sistemi $[C']$, $[C'']$ otteniamo

$$\gamma) \qquad p = \mathbf{p}' + \Delta'' - \mathbf{k}''$$

dove

$$\Delta'' = C.\,C'' = D - (2p-2)\,.$$

Ora, se anche qui facciamo l'ipotesi α), che (n° 19) coincide colla $D > 2p$, troviamo $\Delta'' > 2$ e quindi (1)

$$\mathbf{k}'' \leqq \Delta'' - 2\,,$$

in virtù della quale la γ) ci dà

$$\beta') \qquad p > \mathbf{p} + 1\,.$$

E da questa (come dalla β)) si deduce (tenendo presente il n° 19) che $[C']$ è un sistema regolare, se è irriduttibile.

Finalmente se verificandosi la α) il sistema $[C']$ è riduttibile, ogni sua curva come sappiamo (n° 28, a')) si spezza in $p-1$ curve razionali appartenenti ad un fascio; sicchè (continuando a sussistere la (22)′ o la (22)) troviamo inoltre (per le formole del n° 13)

$$\mathbf{p}' = -p+2\,, \quad \mathbf{k}' = p-1\,,$$

l'ultima delle quali ci dice che anche in questo caso $[C']$ è regolare. Possiamo adunque enunciare i teoremi:

a) *Se la curva generica del sistema aggiunto puro* $[C']$ *non forma parte di una curva del sistema primitivo* $[C]$ *vale la disuguaglianza*

$$(22)'\ldots \qquad \mathbf{k} < 2p - \mathbf{p}' - 1\,,$$

---

(1) Ciò deriva dall'osservare che le curve di $[C'']$ segano sulla curva generica C una serie d'ordine $\Delta'' > 2$ e di dimensione almeno uguale a $\mathbf{k}''$; ora se fosse $\mathbf{k}'' = \Delta'' - 1 > 1$, la curva C dovrebbe essere ellittica, mentre l'ipotesi $p=1$ si intende esclusa dovunque si parla di sistema aggiunto puro.

mentre se il sistema $[C']$ *ammette un sistema residuo* $[C'']$ *di dimensione virtuale* $\mathbf{k}''$, *si ha*

(22) . . . $$\mathbf{k} = 2p - \mathbf{p}' + \mathbf{k}'' - 1 .$$

b) *Se la dimensione effettiva* (e quindi virtuale) *di* $[C]$ *supera* $\mathrm{p}+1$ *il sistema aggiunto puro* $[C']$ *è regolare* [1] *ed il suo genere* $\mathbf{p}'$ *è inferiore a* $\mathrm{p}-1$.

30. L'importanza della formola (22) riuscirà evidente quando si sarà dimostrato che la dimensione virtuale $\mathbf{k}''$ del sistema $[C'']$ non può superare 9. Basterà che ci limitiamo al caso $\mathbf{k} > p+1$ (perchè nel caso opposto risulta $\Delta'' \leqq 2$ e quindi $\mathbf{k}'' \leqq 1$).

Se $\mathbf{k} > p+1$, per il teorema *b*) si ha $\mathbf{k}' = p-1$; fatta questa sostituzione nella (16) del n° 21, essa ci dà $\mathbf{p}'' = 1$. Quindi il genere effettivo p'' di C'' non può esser inferiore ad 1 (n° 3); ma non può nemmeno superare 1, poichè altrimenti una curva aggiunta a C'' insieme con una curva di C' costituirebbe una curva (d'ordine $n-3$) aggiunta a C, secante C in più di $2p-2$ punti. Dunque *il genere virtuale ed il genere effettivo del sistema* $[C'']$ *uguagliano l'unità*.

1) Se $[C'']$ è irriduttibile per un noto teorema sui sistemi di curve ellittiche, si ha:

$$\mathbf{k}'' \leqq 9 ;$$

e se $\mathbf{k}''$ raggiunge il valore 9, il sistema $[C'']$ può trasformarsi (birazionalmente) nel sistema di tutte le cubiche del piano. La stessa trasformazione applicata al sistema $[C]$, lo muta in un sistema $[C^*]$ al quale appartiene ogni curva costituita da una curva aggiunta a C^* e da una cubica arbitraria del piano. Un tal sistema $[C^*]$ evidentemente non ha punti base, e perciò deve esser formato da *tutte* le curve piane di un certo ordine m.

2) Se $[C'']$ è riduttibile e $\mathbf{k}'' > 0$, ogni curva C'' (in virtù del teorema di Bertini sui sistemi riduttibili, ed inoltre dell'uguaglianza $\mathbf{p}'' = p''$), si spezza in una curva fissa ed in una curva irriduttibile c'' variabile in un sistema $[c'']$ di dimensione virtuale $\geqq \mathbf{k}''$. Per trovare un limite superiore a $\mathbf{k}''$ conviene qui di ricorrere al seguente artificio già accennato al n° 16.

Detto A il gruppo base di $[C]$ imaginiamo un nuovo gruppo base α composto di altrettanti punti, e insieme ad ogni sistema di curve di dato ordine passanti con molteplicità virtuali assegnate per i punti di A consideriamo il sistema costituito dalle curve dello stesso ordine che passano colle stesse molteplicità rispettivamente per i punti di α; questo secondo sistema diremo *imagine* del primo: i due sistemi hanno gli stessi caratteri *virtuali* rispetto ad A, α (n. 16). Siano $[\Gamma]$, $[\Gamma'']$, $[\gamma'']$ i sistemi imagini di $[C]$, $[C'']$, $[c'']$ e supponiamo che i punti di α siano scelti in *posizione generale* in guisa che anche il sistema $[\Gamma'']$ (oltre a $[\Gamma]$) sia irriduttibile (il che è sempre

(1) Questa affermazione non è contenuta nel teorema che *è regolare il sistema delle curve aggiunte d'ordine* $\mathrm{n}-3$; qui infatti si tratta del sistema *aggiunto puro*, il quale può esser sovrabbondante se $k \leqq p+1$. Così ad es. il sistema ∞^3 di curve d'ordine 8 e genere 2 $[a_1^4, a_2^4, b_1^2, b_2^2 \dots b_7^2]$, i cui nove punti base sono comuni a ∞^1 cubiche, ha precisamente per sistema aggiunto puro il fascio di cubiche, che è *sovrabbondante* (rispetto al gruppo base del sistema primitivo).

Le considerazioni di questo paragrafo ci provano pure che se $k = p+1$ risulta $p \geqq \mathbf{p}'+1$, il segno inferiore potendo valere soltanto se C è iperellittica; ed, esclusi i sistemi di curve iperellittiche, si trova che se $k = p$, allora $p \geqq \mathbf{p}'+1$.

possibile per il n° 16). Allora, per ciò che dissi nella ipotesi 1), la dimensione virtuale di $[\Gamma'']$, che è $\mathbf{k}''$, non può superare 9. Anzi questa volta deve essere

$$\mathbf{k}'' < 9;$$

poichè se fosse $\mathbf{k}''=9$, trasformando $[\Gamma'']$ nel sistema $[\Gamma''^*]$ di tutte le cubiche piane, il che muta $[\Gamma]$ nel sistema $[\Gamma^*]$ di tutte le curve di un certo ordine m, $[\gamma'']$ si muterebbe in un sistema $[\gamma''^*]$ almeno ∞^9 secante sopra ogni curva d'ordine m una serie contenuta nella serie secata sulla curva stessa dalle cubiche Γ''^*; e ciò è possibile soltanto quando $\gamma''^* \equiv \Gamma''^*$, ossia $c'' \equiv C''$, contro l'ipotesi che c'' sia una *parte* di C''.

Se ora ritorniamo alla formola (22), tenendo conto della relazione $\mathbf{k}'' \leqq 9$, possiamo scrivere la disugualianza

$$\mathbf{k} \leqq 2p - \mathbf{p}' + 8,$$

ricordandoci che quando vale il segno inferiore allora il sistema $[C]$ può trasformarsi nel sistema costituito da tutte le curve piane di un certo ordine m. Giungiamo quindi all'importante teorema:

a) *Fra la dimensione virtuale* $\mathbf{k}$ *ed il genere* p *di un sistema lineare, ed il genere virtuale* $\mathbf{p}'$ *del sistema aggiunto puro passa la relazione*

$$(23) \ldots \qquad \mathbf{k} \leqq 2p - \mathbf{p}' + 7,$$

b) *fatta eccezione soltanto per il caso in cui il sistema primitivo può trasformarsi nel sistema costituito da tutte le curve piane di un certo ordine* m; *nel qual caso è*

$$(23)' \ldots \qquad \mathbf{k} = 2p - \mathbf{p}' + 8$$

$$\left(\text{ed anzi } \mathbf{k} = k = \frac{m(m+3)}{2},\ p = \frac{(m-1)(m-2)}{2},\ \mathbf{p}' = p' = \frac{(m-4)(m-5)}{2}\right).$$

31. Sistemi lineari aventi la massima dimensione. — Le relazioni (23), (23)′ in cui scriveremo k al posto di $\mathbf{k}$, poichè ci limiteremo ai sistemi con $k > p+1$ (i quali, come sappiamo, sono regolari), ci offrono il modo di rispondere alla questione: *Dato il genere* p > 0 *di un sistema lineare, quale è la massima dimensione che il sistema può avere?* Il primo dei risultati che qui ottengo si trova (dedotto per via molto diversa) in una mia Nota già citata degli *Annali di Matematica* (serie 2ª, tomo 18).

Il massimo valore di k (se $p > 1$) corrisponde per la (23) al minimo valore di $\mathbf{p}'$; ora $\mathbf{p}'$ è negativo solo quando la curva generica C' del sistema aggiunto puro a $[C]$ si scinde in $p-1$ curve c' di un fascio, le quali sono certamente razionali se $k > p+1$ (n° 28, a')); ed in tal caso è precisamente (per la (12)′ del n° 13)

$$\mathbf{p}' = -p + 2$$

ossia per la (23)

$$k \leqq 3p + 5.$$

Quanto alla (23)′, che introducendovi il valore ora accettato di $\mathbf{p}'$, diventa $k = 3p + 6$, si riconosce direttamente che essa sussiste soltanto se $m = 3$; sicchè ricordando le note proprietà dei sistemi di curve razionali ed ellittiche, abbiamo il teorema:

a) *Ogni sistema lineare la cui dimensione superi* $3p+5$ *si compone di curve razionali ed è trasformabile in un sistema di curve di un certo ordine* m *con un punto base multiplo secondo* m -1 (e forse altri punti base semplici).

a′) *fatta eccezione soltanto* (p $=1$, k $=9$) *per il sistema di tutte le cubiche piane* (ed i suoi trasformati).

Ed ora veniamo ai sistemi per cui

$$k \leqq 3p+5.$$

Finchè $\mathbf{p}' < 0$, il che certo succede per la (23) se

$$k \geqq 2p+8\,,$$

la curva C', come dissi, si scinde in $p-1$ curve razionali di un fascio, e quindi (n° 28, c'')), il sistema primitivo $[C]$ si compone di curve iperellittiche e può trasformarsi in un sistema di curve di un certo ordine m con un punto base multiplo secondo $m-2$; sicchè tenendo conto ora anche della $(23)'$, giungiamo al teorema:

b) *Ogni sistema lineare la cui dimensione superi* $2p+7$ (od è contenuto in uno dei sistemi nominati nei teoremi a), a'), oppure) *si compone di curve iperellittiche ed è trasformabile in un sistema di curve di un certo ordine* m *con un punto base multiplo secondo* m -2 (e forse altri punti base);

b)′ *fatta eccezione per il sistema* (p $=3$, k $=14$) *di tutte le quartiche piane* (e suoi trasformati).

b″) *e per il sistema* (p $=6$, k $=20$) *di tutte le quintiche piane* (e suoi trasformati).

Si aggiunga che come risulta subito dalla considerazione dei sistemi di ordine m con un punto base multiplo secondo $m-2$ (e quantisivogliano punti doppi), *un sistema iperellittico di genere qualunque può raggiungere colla sua dimensione il valore massimo* $3p+5$.

Passiamo ai sistemi per cui

$$k \leqq 2p+7.$$

Il sistema aggiunto puro $[C']$ ha, come sappiamo, la dimensione $p-1$; quindi se esso è irriduttibile (per modo che $\mathbf{p}'=p'$), e se di più

$$p-1 > 3p'+5$$

ossia se

$$\varkappa)\qquad p' < \frac{p}{3}-2\,,$$

per i teoremi a), a)′ esso

α) o si compone di curve razionali e si può ridurre ad un sistema di curve di un certo ordine m' con un punto base multiplo secondo $m'-1$,

α') o si trasforma nel sistema di tutte le cubiche piane.

In corrispondenza il sistema primitivo $[C]$ (per il n° 28, c′), b′))

o si compone di curve contenenti una serie g_3^1 e si può trasformare in un sistema di un certo ordine m con un punto multiplo secondo $m-3$, oppure si trasforma in un sistema di sestiche piane senza punti doppi.

Ora, la disuguaglianza $\varkappa$) sussiste certo (per la (23)) se

$$k \geqq 2p - \left(\frac{p}{3} - 2\right) + 8$$

ossia

$$k \geqq \frac{5p}{3} + 10;$$

purchè si escludano quei sistemi a cui si riferisce la formola (23)'; nel caso presente il solo sistema da escludersi è quello costituito dalle ∞^{35} curve del settimo ordine ($p = 15$).

Possiamo quindi enunciare il teorema:

c) *Ogni sistema lineare la cui dimensione superi* $\frac{5p}{3} + 9$ (od è contenuto in uno dei sistemi nominati nei teoremi a), a'), b), b') oppure) *si compone di curve contenenti una serie* g_3^1, *ed è trasformabile in un sistema di curve di un certo ordine* m *con un punto base multiplo secondo* m — 3 (e forse altri punti base);

c') *fatta eccezione per il sistema delle sestiche con un punto base semplice al più* ($p = 10$, $k = 26$, 27);

c'') *e per il sistema di tutte le curve piane del settimo ordine* ($p = 15, k = 35$).

Si riconosce inoltre, considerando un sistema di curve d'ordine m con un punto base d'ordine $m - 3$, quantisivogliano punti tripli, e nessun altro punto base che *un sistema della categoria* c) *di genere qualunque* p *può raggiungere colla sua dimensione il valore massimo* $2p + 7$.

32. Le proposizioni del paragrafo precedente conducono per induzione al seguente teorema generale che ora mi propongo di dimostrare:

Un sistema lineare di genere p *la cui dimensione* k *soddisfi alla relazione*

$$(24) \ldots \qquad k \geqq (\mu + 2)\left(\frac{p}{\mu} + 2\right) \qquad (\mu \text{ intero e positivo})$$

1) *o si può trasformare in un sistema di curve d'ordine* $m \leqq 2\mu + 1$,

2) *o si può trasformare in un sistema di curve di un certo ordine* M *avente un punto base di molteplicità* $\nu \geqq M - \mu$ [1].

Sia $[C]$ il dato sistema; $[C']$ il sistema aggiunto puro, il cui genere indicheremo con p'. Fra i caratteri k, p e p' o sussisterà la relazione (23) o la (23)'.

Siccome la seconda ipotesi si discute più facilmente, comincio da essa la dimostrazione.

I. Sussista adunque l'uguaglianza

$$(23)' \ldots \qquad k = 2p - p' + 8;$$

---

(1) Del solo caso 2) si deve tener conto se $p > \frac{2\mu(2\mu - 1)}{2}$.

Una parte di questo teorema può anche enunciarsi così: *La curva generica di un sistema lineare per cui sussista la* (24) *o contiene una serie* g_m^2 *dove* $m \leqq 2\mu + 1$, *o una serie* g_m^1 *dove* $m \leqq \mu$.

allora come sappiamo (n° 30. *b*)) il sistema $[C]$ può trasformarsi nel sistema costituito da tutte le curve piane di un certo ordine m; sicchè si ha

$$k = \frac{m(m+3)}{2}, \; p = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Se si pone $m = 2\mu + 1 + \partial$ e si sostituiscono le corrispondenti espressioni di k e p nella (24), fatti i calcoli, si trova che la (24) può sussistere soltanto se $\partial \leqq 0$; ed anzi se $\partial = 0$ la (24) si riduce ad una uguaglianza. Dunque nella ipotesi che si verifichi la relazione (23)$'$ il sistema proposto può trasformarsi sempre in uno costituito da tutte le curve piane di un certo ordine $m \leqq 2\mu + 1$; ed in questo caso il teorema è dimostrato.

II. Resta da esaminare il caso in cui

$$(23) \ldots \qquad k \leqq 2p - p' + 7;$$

qui procederemo col metodo di induzione completa; ammetteremo cioè che sussista il teorema che si ottiene scrivendo $\mu - 1$ (oppure un numero inferiore) ovunque sta scritto μ, e partendo da questa ipotesi dimostreremo il teorema, come lo abbiamo enunciato; il quale dovrà sussistere qualunque sia μ, poichè si verifica per $\mu = 1, 2, 3$.

Osservo intanto che se oltre alla (24) fra k e p passasse anche la relazione

$$k \geqq (\mu + 1)\left(\frac{p}{\mu - 1} + 2\right)$$

(che dalla (24) si ottiene mutando μ in $\mu - 1$) per l'ipotesi ora fatta, il teorema proposto si verificherebbe certamente. Posso quindi limitarmi al caso in cui

$$k < (\mu + 1)\left(\frac{p}{\mu - 1} + 2\right);$$

allora per la (24) si ha

$$(\mu + 2)\left(\frac{p}{\mu} + 2\right) < (\mu + 1)\left(\frac{p}{\mu - 1} + 2\right)$$

ossia

$$\alpha) \qquad p > \mu(\mu - 1).$$

Esaminiamo ora quale relazione passi fra la dimensione $k' = p - 1$ ed il genere p' del sistema aggiunto puro. Perciò basta osservare che dalle (23) e (24) segue

$$2p - p' + 7 \geqq (\mu + 2)\left(\frac{p}{\mu} + 2\right)$$

ossia

$$p \geqq \frac{\mu p'}{\mu - 2} + 2\mu + 1,$$

e ponendo $k' + 1$ in luogo di p

$$k' \geqq \mu\left(\frac{p'}{\mu - 2} + 2\right),$$

la quale non differisce dalla (24) se non per essersi scritto $\mu-2$ al posto di μ (il sistema considerato essendo ora $[C']$ anzichè $[C]$). Ne viene che per la ipotesi fatta sulla validità del nostro teorema fino a $\mu-1$, il sistema aggiunto $[C']$,

1) o può trasformarsi in un sistema $[\Gamma_1']$ di curve di un certo ordine

$$\beta_1)\qquad m'\leqq 2(\mu-2)+1=2\mu-3,$$

2) oppure può trasformarsi in un sistema $[\Gamma_2']$ di curve di un certo ordine M' avente un punto base di molteplicità

$$\beta_2)\qquad \nu'\geqq M'-(\mu-2).$$

Nel caso 1) la trasformazione che muta $[C']$ in $[\Gamma_1']$ muterà $[C]$ in un sistema $[\Gamma_1]$ avente $[\Gamma_1']$ come aggiunto puro. Ma allora per il teorema b') del n° 28 $\left(\text{che ponendovi } m' \text{ in luogo di } n' \text{ è qui applicabile, visto che per la } \alpha) \text{ e } \beta_1)\ p>\frac{(m'+2)^2}{4}\right)$ il sistema $[\Gamma_1]$ dovrà comporsi di curve d'ordine

$$m=m'+3\leqq 2\mu;$$

e così anche in questo caso il teorema è dimostrato.

Finalmente nel caso 2) la trasformazione che muta $[C']$ in $[\Gamma_2']$ muterà $[C]$ in un sistema $[\Gamma_2]$ avente $[\Gamma_2']$ per aggiunto puro. Sicchè $[\Gamma_2]$ per il teorema c') del n° 28 (il quale quando si scriva $M'-\nu'$ al posto di μ', e si tenga conto delle α) e β_2) è certo applicabile al caso nostro) deve comporsi di curve di un certo ordine M aventi in comune un punto multiplo secondo

$$\nu=M-(M'-\nu')-2\geqq M-\mu.$$

Con ciò il teorema di questo numero è completamente dimostrato.

33. Dal teorema precedente segue subito che:

Se fra le serie lineari semplicemente infinite (di gruppi) che giacciono sopra la curva generica di un sistema lineare di genere $p>\frac{(2\mu-2)(2\mu-3)}{2}$, *quella di ordine minimo si compone di gruppi di* μ *punti, la dimensione del sistema non può superare*

$$(\mu+1)\left(\frac{p}{\mu-1}+2\right)-1.$$

Ora è interessante il notare che questo valore massimo può esser raggiunto, qualunque sia μ, in corrispondenza ad infiniti valori di p. Infatti, come lo prova il calcolo diretto, l'espressione precedente dà la dimensione del sistema costituito dalle curve di ordine qualunque n aventi in comune un punto di molteplicità $n-\mu$, quantisivogliano punti di molteplicità μ, e nessun altro punto base.

Il teorema del n° 32 conduce $\left(\text{per } p>\binom{2\mu}{2}\right)$ ad una categoria di sistemi lineari rappresentativi di superficie con una serie semplicemente infinita di curve razionali d'ordine μ; di tali superficie gli esempi più semplici sono offerti dalle rigate razionali, e dalle superficie con ∞^1 coniche ($\mu=2$). Lo studio ulteriore di queste superficie (ad esempio la determinazione della curva del minimo ordine che sega in un solo punto ciascuna curva della serie) si collega colla riduzione al minimo ordine dei corrispondenti sistemi lineari; e può farsi senza difficoltà sia sui sistemi lineari (valendosi dei risultati già ottenuti sull'argomento dal sig. Jung nelle *Ricerche* già citate, Memoria II, § 9), sia sulle stesse superficie imitando un procedimento che ho seguito a proposito dei sistemi di curve iperellittiche (*Sulle superficie a sezioni iperellittiche;* Rendic. Circolo Matem. di Palermo, t. IV). Ma sia l'una, sia l'altra via uscirebbero dai limiti che mi sono imposto nello scrivere queste mie *Ricerche*, e non offrirebbero occasione di esporre nuovi metodi per lo studio dei sistemi lineari.

Torino, marzo 1891.