

otteniamo

$$G dr + \frac{r}{2} \frac{\partial G}{\partial u} dr = 0,$$

quindi

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u} \quad \text{c. d. d.}$$

La cotangente è così determinata, e il teorema B) ne segue subito per le osservazioni fatte. Come conseguenza di questo teorema notiamo per l'altro:

C) Il raggio di curvatura geodetica delle  $r_1 = \cot^2$  sopra  $S_1$  o delle  $r_2 = \cot^2$  sopra  $S_2$  è dato dalla differenza  $r_1 - r_2$  dei raggi di curvatura della involvente.

## Capitolo V.

### Le Superficie definite dal loro elemento lineare

53. - Superficie flessibili. - Come nella geometria piana e nella sferica si studiano le proprietà delle figure tracciate sul piano o sulla sfera, prescindendo dalla loro posizione assoluta nello spazio, così un analogo studio può farsi per ogni superficie. E quelle proprietà, che concernono soltanto le relazioni di grandezza e posizione delle figure tracciate sulla superficie, in quanto esistono sopra di essa, costituiscono la geometria della superficie.

Sotto questo punto di vista due superficie, strettamente differenti nella forma, possono nonostante avere la stessa geometria. Ed è chiaro che il teorema della geometria prima non cessano di essere veri se il piano, su cui le figure sono descritte, s'immagina avvolto sopra un cilindro, o un cono, o un'altra superficie sviluppabile qualunque (\*).

Per ben concepire la natura di questa proprietà, conviene immaginare che la superficie, su cui le figure sono descritte, sia formata da un velo infinitamente sottile, perfettamente flessibile ed inestendibile. Quelle proprietà che non si alterano flessando la superficie appartengono alla sua geometria, le altre sono inerenti alla forma e posizione attuale della superficie nello spazio.

Due superficie  $S, S'$  fra di cui punti  $P, P'$  si possa stabilire una tale corrispondenza, che gli elementi lineari corrispondenti siano eguali, hanno la medesima geometria, perchè allora anche gli archi finiti, gli angoli e le aree delle figure sopra  $S$  sono eguali ai corrispondenti delle figure sopra  $S'$ . Le superficie  $S, S'$  si dicono in tal caso applicabili, volendo con ciò significare che, se si suppongono flessibili ed inestendibili, si può distendere l'una sull'altra (o una porzione dell'una sopra una porzione

---

(\*) Per esempio in un triangolo formato da 3 archi geodetici sopra una sviluppabile, la somma dei tre angoli è eguale a due retti, i tre archi geodetici calati dai vertici usualmente ai lati opposti s'incontrano in un punto, etc.

Dell'altra) senza alterare né l'applicazione. Quando 2. Due superfici  $S, S'$  siano date le espressioni degli elementi lineari

$$ds^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2,$$

$$ds'^2 = E'' du'^2 + 2F'' du' dv' + G'' dv'^2,$$

per ricordanza se sono applicabili, converrà stabilire se si può stabilire una tale corrispondenza fra i punti  $(u, v)$  dell'una e  $(u', v')$  dell'altra che ne risulti  $ds = ds'$ ; per l'applicabilità è dunque necessario e sufficiente che le forme differenziali

$$E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2, \quad E'' du'^2 + 2F'' du' dv' + G'' dv'^2$$

siano trasformabili l'una nell'altra.

Da questa considerazione risulta che la geometria della superficie è già perfettamente definita dall'espressione del suo elemento lineare, poiché ogni altra superficie, la cui espressione dell'elemento lineare sia la medesima, o tale possa ridursi ad un cambiamento di variabili, sarà applicabile sopra di essa.

Ritornando dunque in questi studi la superficie come definita dall'espressione del suo elemento lineare:

$$(1) \quad ds^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2$$

e prenderemo da ogni forma speciale di superficie, alla quale quell'elemento lineare possa convenire. Analiticamente avremo quindi un campo a due dimensioni generato dalle variabili  $u, v$ , i cui elementi (punti) saranno forniti da ogni coppia speciale  $(u_0, v_0)$  di valori per  $(u, v)$ ; la distanza  $ds$  fra due punti del campo

infinitamente vicini  $(u, v)$ ,  $(u+du, v+dv)$  si "nutrera" colla legge fondamentale (1). Ad ogni coppia  $(u_0, v_0)$  di valori per  $u, v$  corrisponderà un determinato punto del campo, o viceversa ad ogni punto del campo una determinata coppia di valori per  $u, v$ , e che non esclude però che, per una forma speciale di superficie, corrispondente all'elemento lineare (1), la detta corrispondenza non sia più univoca (\*).

Il campo in cui varia ciascuna delle  $u, v$  può essere da  $-\infty$  a  $+\infty$ ; però non lo limiteremo sempre a contenerne una porzione del campo in cui si trovano soddisfatte le condizioni seguenti:

- 1.° Le funzioni  $E, F, G$  di  $u, v$  siano monodrome, finite e continue insieme alle loro derivate parziali prime e seconde;
- 2.°  $E, G, E \cdot G - F^2$  siano positive in tutto il campo e diverse da zero.

Dopo ciò anche le funzioni  $\sqrt{E}, \sqrt{G}, \sqrt{E \cdot G - F^2}$  per le quali prenderemo sempre i valori positivi dei radicali, saranno

(\*). Per esempio se  $ds^2 = du^2 + v^2 dv^2$  è l'elemento lineare di una superficie di rotazione,  $u$  essendo l'arco di meridiano e  $v$  la longitudine, i punti

$$(u_0, v_0); (u_0, v_0 + 2k\pi) \quad (\text{k numero intero})$$

che nel campo assoluto sono distinti, sulla superficie di rotazione coincidono. Per altro potremmo immaginare l'univocità della corrispondenza, immaginando la superficie come costituita da un velo, che infinite volte si avvolge sopra se stesso.



monodrome, finite e continue. Se poi con  $\omega$  indichiamo l'angolo, compreso fra 0 e  $\pi$ , formato dalle linee coordinate  $u, v$  avremo (§19)

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{E \cdot G}}; \quad \sin \omega = \frac{\sqrt{E \cdot G - F^2}}{\sqrt{E \cdot G}}$$

quindi  $\omega$  varierà con continuità senza mai diventare né 0, né  $\pi$ .

54. - Funzioni assolute e funzioni inscrivibili. -

Supponiamo di effettuare sulla forma differenziale (1) una trasformazione qualunque di coordinate

$$(2) \quad u = u(u', v'), \quad v = v(u', v'),$$

Dopo di che la forma stessa divenga

$$E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2 = E' du'^2 + 2I' du' dv' + G' dv'^2.$$

Se una funzione

$$f(u, v, E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial G}{\partial u}, \frac{\partial E}{\partial v}, \dots)$$

di  $u, v, E, F, G$  e delle loro derivate, gode della proprietà che, effettuando in essa le sostituzioni (2), si cangi nella medesima funzione

$$f(u', v', E', F', G', \frac{\partial E'}{\partial u'}, \dots)$$

formata nello stesso modo con  $u', v', E', F', G'$  e le loro derivate, si guida che si abbia

$$(3) \quad f(u, v, E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \dots) = f(u', v', E', F', G', \frac{\partial E'}{\partial u'}, \dots)$$

quando fra  $u, v, u', v'$  passino le relazioni (2); allora si dice che la  $f$  è una funzione assoluta (\*).

(\*) È facile vedere che in una funzione assoluta debbono mancare esplicitamente  $u, v$ , perché la sostituzione

$$u' = u + a, \quad v' = v + b$$

Il valore che assume una funzione assoluta in ogni punto della superficie è indipendente per la (3) dalle coordinate, che si adoperano per calcolarla, e d'altra parte non dipendendo dalla forma attuale della superficie nello spazio, ma solo dal suo elemento lineare, non varia quando la superficie si fletta. Le funzioni assolute rappresentano dunque proprietà della superficie invariabili per flessione della superficie e possono anche dirsi perciò invarianti di flessione (Biegunsinvarianten dei Liebsch).

Insieme alle funzioni assolute possiamo considerare altre funzioni più generali che si dicano invarianti.

Siano  

$$\varphi(u, v), \psi(u, v), \dots,$$
 funzioni di  $u, v$ , le quali per le sostituzioni (2) si cangino in

$$\varphi'(u', v'), \psi'(u', v'), \dots;$$

se una funzione

$$f(u, v, E, F, G, \varphi, \psi, \dots, \frac{\partial E}{\partial u}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \dots),$$

formata con  $u, v, E, F, G, \varphi, \psi, \dots$  e le loro derivate, si dà tal natura che si abbia identicamente in forza delle (2)

$$(4) f(u, v, E, F, G, \varphi, \psi, \dots, \frac{\partial E}{\partial u}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \dots) = f(u', v', E', F', G', \varphi', \psi', \dots, \frac{\partial E'}{\partial u'}, \dots, \frac{\partial \varphi'}{\partial u'}, \frac{\partial \psi'}{\partial u'}),$$

con  $a, b$  costanti arbitrarie, dà:

$$E' = E, F' = F, G' = G, \frac{\partial E'}{\partial u'} = \frac{\partial E}{\partial u}, \dots$$

$$f(u, v, E, F, G, \dots) = f(u+a, v+b, E, F, G, \dots)$$

quindi  $\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$

essa si dica una funzione invariabile. Quale sarà il significato geometrico di queste funzioni? Se eguagliamo le funzioni  $\varphi(u, v)$ ,  $\psi(u, v)$ , ... a costanti o a parametri arbitrari, avremo sulla superficie delle curve o dei sistemi di curve e il valore che assumerà la funzione invariabile in ogni punto della superficie dipenderà dalle curve o dai sistemi di curve  $\varphi, \psi, \dots$  ma non varierà cambiando linee coordinate, né flettendo la superficie. Esto esprimano dunque relazioni geometriche fra quelle curve o sistemi di curve, invariabili per flessione della superficie.

È molto utile osservare che se per  $\varphi, \psi, \dots$  nella (4) si sostituiscono delle funzioni assolute, la  $f$  stessa diventa una funzione assoluta, poiché si riduce ad una funzione

$$f(u, v, E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \dots)$$

che soddisfa la (3). Ed è quando si considerano delle funzioni assolute o delle invariabili, si ha anche il modo di costruire delle nuove funzioni invariabili. (\*)

53. - La curvatura totale come funzione assoluta. -

Una prima funzione assoluta è stata fornita da un celebre teorema di Gauss, il quale stabilisce per la curvatura  $K$  di una superficie è appunto una funzione di questa natura. Esto può anche enunciarsi dicendo:

Se due superfici sono applicabili, nei punti corrispondenti

(\*) Le considerazioni generali di questo paragrafo sono dovute al prof. Beltrami.

denti hanno la medesima curvatura.

Per dimostrarlo basterà provare che, lasciando arbitraria le linee coordinate, si può esprimere la curvatura  $K$  per coefficienti  $E, F, G$  dell'elemento lineare e per le loro derivate

$$K = f\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u}, \dots\right),$$

perchè questa funzione  $f$  godrà evidentemente della proprietà (3). (\*)

Dovremo perciò riprendere la formola (20) § 46:

$$(5) \quad K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2},$$

dove  $D, D', D''$  hanno il significato dato dalle formole (3') § 39, ed esprimere  $DD'' - D'^2$  per  $E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u}, \dots$ .

Ora abbiamo:

$$\begin{aligned} & (EG - F^2) \times (DD'' - D'^2) = \\ & = \begin{vmatrix} \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u}, \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v}, \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}, \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u \partial v}\right)^2, \Sigma \frac{\partial x}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial u}, \Sigma \frac{\partial x}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \Sigma \frac{\partial x}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial u}, \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \Sigma \frac{\partial x}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial v}, \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ma dalle identità

$$\Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = E, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = F, \quad \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

derivando, seguono le altre:

(\*) Se non volessimo stabilire la formola più generale che dà  $K$  in coordinate arbitrarie, la dimostrazione ed i calcoli potrebbero rendersi molto più semplici, riferendoci ad un sistema speciale di coordinate.

$$(6) \left\{ \begin{array}{ll} \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u'} = \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial u}, & \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v'} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v}, \\ \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u' \partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial v}, & \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v' \partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, \\ \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v'} = \frac{\partial F'}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, & \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u'} = \frac{\partial F'}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial v}, \end{array} \right.$$

quindi, sostituendo nella precedente e nella (5):

$$(7) (EG - F'^2) \cdot K = \begin{vmatrix} \Sigma \frac{\partial x}{\partial u'} \frac{\partial x}{\partial v'}, \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial u}, \frac{\partial F'}{\partial u} - \frac{\partial E'}{\partial v} \\ \frac{\partial F'}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial u}, E, F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v}, F, G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Sigma \left( \frac{\partial x}{\partial u \partial v} \right)^2, \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial v}, \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial v}, E, F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, F, G \end{vmatrix}.$$

Ma dalle due formole

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u'} = \frac{\partial F'}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial v}, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u' \partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}$$

Derivando otteniamo

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u'} \frac{\partial x}{\partial v'} = \frac{\partial F'}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial v'} - \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u' \partial v}$$

$$\Sigma \left( \frac{\partial x}{\partial u \partial v} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u'} - \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u' \partial v},$$

e quando per i primi elementi nei Determinanti delle (7) sostituiamo questi valori possiamo sopprimere il termine  $\Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u' \partial v}$ , che scomparirebbe nello sviluppo e resta quindi

$$(8) (EG - F'^2) \cdot K = \begin{vmatrix} \frac{\partial F'}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial v'}, \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial u}, \frac{\partial F'}{\partial u} - \frac{\partial E'}{\partial v} \\ \frac{\partial F'}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, E, F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v}, F, G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u'}, \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial v}, \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial v}, E, F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, F, G \end{vmatrix}.$$

Questa formola esprime appunto  $K$  per  $E, E', G$  e le loro derivate, e dimostra così il teorema di Gauss.

Sviluppando, si ha:

$$(8) \quad 4(EG-F^2) \cdot K = E \left\{ \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v} + \left( \frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 \right\} + \\ + F \left\{ \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v} - 2 \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} + 4 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} \right\} + \\ + G \left\{ \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial E}{\partial u} - 2 \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial E}{\partial u} + \left( \frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 \right\} + 2(EG-F^2) \left\{ 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial u^2} \right\}.$$

Alla formola (8), che esprime la curvatura  $K$ , si possono dare diverse forme. Tra queste citeremo le seguenti:

$$(8') \quad K = -\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left( \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial v} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left( \frac{\partial E}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial u} \right) \right) \right\}$$

data da Liouville, che è più comoda della (8), sebbene manchi di simmetria.

Applicando ora queste formole generali a forme speciali dell'elemento lineare, avremo:

1° Se le coordinate  $u, v$  sono ortogonali:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

$$(9) \quad K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right\}.$$

2° Se sono isoterme e ridotte inoltre ad parametri isometrici:

$$ds^2 = h (du^2 + dv^2)$$

$$(10) \quad K = -\frac{1}{2h} \left\{ \frac{\partial^2 \log h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log h}{\partial v^2} \right\}.$$

3° Se le  $v$  sono geodetiche e le  $u$  le traiettorie ortogonali,  $u$  essendo l'arco delle geodetiche:

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

$$(11) \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Specialmente quest'ultima è notevole per semplicità.

sebbene, come tutte le altre, converga a qualunque superficie. Ne faremo subito un'importante applicazione. *Nota Da Gauss.*

56. - Curvatura totale di un triangolo geodetico. -

Per curvatura totale di una porzione finita di superficie s'intende l'area della porzione di sfera, che vi corrisponde nella rappresentazione di Gauss (§47). Ora essendo

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

il quadrato dell'elemento lineare, l'elemento d'area da usarsi per curvatura totale

$$K ds = K \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

e per avere quindi la curvatura totale di una porzione  $C$  di superficie, basterà estendere l'integrale doppio

$$\iint K \sqrt{EG - F^2} du dv$$

a tutta l'area.

Supponiamo che la porzione di superficie, di cui si vuol calcolare la curvatura totale, sia un triangolo geodetico  $ABC$  (i cui lati siano cioè tre linee geodetiche) e i cui angoli siano

$$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}.$$

Prendiamo a linee  $v$  le geodetiche, uscenti dal vertice  $A$ , e per parametro  $v$  l'angolo, che esse formano colla geodetica fissa  $\overline{AB}$ , la cui equazione sarà  $v=0$ ; per linee  $u$  prendiamo poi le traiettorie ortogonali (curve geodetiche) e continuiamo l'arco  $u$  delle geodetiche dal punto

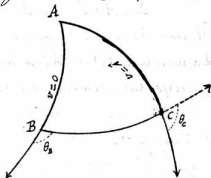
A. L'elemento lineare sarà dato dalla formula

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

e siccome

$$ds = \sqrt{G} dv$$

è l'arco elementare del arco geodetico, il quale per un infinitesimo si può riguardare (a meno d'infinitesimi d'ordine superiore) come tracciato nel piano tangente in A, e avente per elemento d'arco  $u dv$ ,



così dovrà la funzione  $\sqrt{G}$

soddisfare alle condizioni seguenti:

$$(12) \lim_{u=0} \frac{\sqrt{G}}{u} = 1, \quad \left( \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right)_{u=0} = 1.$$

Orà lungo il terzo lato BC del triangolo deve essere soddisfatta l'equazione differenziale delle geodetiche

(2) § 28, che nel nostro caso diviene

$$(13) \quad d\theta = - \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} dv,$$

e se l'arco  $s$  della geodetica BC si conta positivamente nel senso di  $v$  crescente, a causa della

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \frac{dv}{ds},$$

deve prendersi  $\theta$  fra 0 e  $\pi$  e sarà quindi

$$\text{in B, } \theta = \pi - \hat{B}$$

$$\text{in C, } \theta = \hat{C}.$$

Ciò posto, la curvatura totale  $\Sigma$  essendo data per la (11) da

$$\Sigma = \iint - \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} du dv,$$



una prima integrazione rispetto ad  $u$  data:

$$\Sigma = \int \left\{ \left( \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u} \right)_{v=0} - \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u} \right\} dv$$

ovvero per le (12), (13)  $v=A$

$$\Sigma = \int_{v=0}^{v=A} (dv + d\theta) = (v+\theta)_{v=A} - (v+\theta)_{v=0}$$

$$\Sigma = \hat{A} + \hat{C} - (\pi - \hat{B}) = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$$

Abbiamo dunque il teorema:

La curvatura totale di un triangolo geodetico è eguale all'eccesso della somma dei suoi tre angoli su due retti.

Quest'eccesso è positivo se tutti i punti dell'area del triangolo sono ellittici, negativo se iperbolici, e quello se parabolici, cioè per lo più improbabile.

In fine notiamo che se la curvatura  $K$  della superf. è costante, il teorema precedente dà l'altro:

L'area di un triangolo geodetico, sopra una superficie a curvatura costante, è proporzionale all'eccesso della somma dei suoi angoli sopra due retti.

3°. - Parametro differenziale del primo ordine. -

Provata così una prima funzione assoluta, andiamo ora a cercare delle funzioni invarianti.

Una funzione molto semplice di questa specie relativa ad una sola funzione  $q(u, v)$  si ottiene nel modo seguente. Immaginiamo il sistema di curve che risulta, eguagliando la funzione  $q(u, v)$  ad un parametro  $q$

$$q(u, v) = q$$

Da un punto  $(u, v)$  della curva  $q$  spostiamoci, normalmente alla curva, di un arco infinitesimo  $ds$ ; per l'ellipticità

$(u+du, v+dv)$  di quest'arco passano una curva del sistema  $\varphi$  corrispondente al valore  $\varphi+d\varphi$  del parametro. Il rapporto  $\frac{d\varphi}{ds}$  si chiama parametro differenziale del 1° ordine della funzione  $\varphi$  e si indica col simbolo  $\Delta\varphi$ . Dalla definizione stessa risulta chiaramente che  $\Delta\varphi$  è una funzione invariabile.

Per trovare  $\Delta\varphi$  espresso per coefficienti dell'elemento lineare

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

osserviamo che se il punto  $(u+du, v+dv)$  è infinitamente vicino ad  $(u, v)$  sulla curva  $\varphi(u, v) = \varphi$  si avrà (§40, §8)

$$E du du + F(du dv + dv du) + G dv dv = 0;$$

d'altronde

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv = 0,$$

quindi

$$\left(E \frac{\partial\varphi}{\partial v} - F \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) du + \left(F \frac{\partial\varphi}{\partial v} - G \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) dv = 0.$$

A questa associando l'altra

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv = d\varphi$$

ne ricaviamo

$$du = \frac{(G \frac{\partial\varphi}{\partial u} - F \frac{\partial\varphi}{\partial v}) d\varphi}{E(\frac{\partial\varphi}{\partial v})^2 - 2F \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\varphi}{\partial v} + G(\frac{\partial\varphi}{\partial u})^2}, \quad dv = \frac{(E \frac{\partial\varphi}{\partial v} - F \frac{\partial\varphi}{\partial u}) d\varphi}{E(\frac{\partial\varphi}{\partial v})^2 - 2F \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\varphi}{\partial v} + G(\frac{\partial\varphi}{\partial u})^2}.$$

Da cui

$$E du + F dv = \frac{(EG - F^2) \frac{\partial\varphi}{\partial u} du}{E(\frac{\partial\varphi}{\partial v})^2 - 2F \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\varphi}{\partial v} + G(\frac{\partial\varphi}{\partial u})^2}, \quad F du + G dv = \frac{(EG - F^2) \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv}{E(\frac{\partial\varphi}{\partial v})^2 - 2F \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\varphi}{\partial v} + G(\frac{\partial\varphi}{\partial u})^2}$$

e per conseguenza

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = \frac{(EG - F^2) (d\varphi)^2}{E(\frac{\partial\varphi}{\partial v})^2 - 2F \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\varphi}{\partial v} + G(\frac{\partial\varphi}{\partial u})^2}$$

Avremo quindi per l'espressione cercata:

$$(14) \quad \Delta_1 q = \frac{\sqrt{E \left( \frac{\partial q}{\partial u} \right)^2 - 2F \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v} + G \left( \frac{\partial q}{\partial v} \right)^2}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

formola sulla quale si può facilmente verificare che  $\Delta_1 q$  è una funzione invariabile.

È interessante osservare che se le curve  $q = \text{cost}^2$  sono geodeticamente parallele (§30), ed sono costanti lungo tutta la linea  $q$  e perciò si avrà

$$\Delta_1 q = f(q)$$

dove  $f$  è funzione di  $q$ .

Viceversa, supponiamo che abbia luogo la relazione precedente; siccome essa si manterrà soddisfatta per qualunque cambiamento di coordinate, se prendiamo le linee  $q = \text{cost}^2$  e linee  $u$  e le traiettorie ortogonali a linee  $v$ , supposto che si abbia

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,$$

dovrà essere  $\Delta_1 u = \frac{1}{\sqrt{E}}$  = funzione di  $u$ . Allora se cambiamo parametro  $u$ , ponendo

$$u_1 = \int \sqrt{E} du,$$

avremo

$$ds^2 = du_1^2 + G dv^2,$$

il che dimostra che le  $u_1 = \text{cost}^2$ , cioè le  $q = \text{cost}^2$ , sono geodeticamente parallele. Dunque

La condizione necessaria e sufficiente perché le linee  $q = \text{cost}^2$  siano geodeticamente parallele è espressa dalla relazione  $\Delta_1 q = f(q)$ .

58. - La curvatura geodetica come funzione invariabile. - La curvatura geodetica di una linea è es-

Sostituita una quantità che non si altera spostando la superficie ed ora andiamo a stabilire una formola importante, dovuta a Bonnet, mediante la quale si esprime la curvatura geodetica  $\frac{1}{\rho_g}$  di una linea qualunque  $\varphi(u, v) = 0$  con una funzione invariabile attribuita ad  $\varphi$ .

Per ciò prendiamo a considerare il sistema di curve

$$\varphi(u, v) = \varphi,$$

che avendo un parametro variabile, è il sistema delle traiettorie ortogonali

$$\psi(u, v) = \psi.$$

Adottando questo doppio sistema ortogonale  $(\varphi, \psi)$  a linee coordinate, l'elemento lineare diventerà

$$ds^2 = E_1 d\varphi^2 + G_1 d\psi^2$$

e per la curvatura geodetica delle linee  $\varphi$ , prendendo dal teorema (§ 33):

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial \varphi};$$

ma calcolando i parametri differenziali  $\Delta_1 \varphi$ ,  $\Delta_1 \psi$  in coordinate  $\varphi, \psi$  abbiamo

$$\Delta_1 \varphi = \frac{1}{\sqrt{E_1}}, \quad \Delta_1 \psi = \frac{1}{\sqrt{G_1}},$$

quindi

$$\frac{1}{\rho_g} = \Delta_1 \varphi \cdot \Delta_1 \psi \frac{\partial \frac{1}{\Delta_1 \psi}}{\partial \varphi}.$$

Se indichiamo col simbolo  $d_\varphi \Theta$  il differenziale della funzione  $\Theta(u, v)$ , quando si consideri come funzione di  $\varphi, \psi$  e lasciando fermo  $\psi$  si faccia crescere  $\varphi$  di  $d\varphi$ , potremo scrivere

$$(13) \quad \frac{1}{\rho_g} = \frac{\Delta_1 \varphi \cdot \Delta_1 \psi}{d\varphi} \left\{ \frac{\partial \frac{1}{\Delta_1 \psi}}{\partial u} d\varphi + \frac{\partial \frac{1}{\Delta_1 \psi}}{\partial v} d\psi \right\}.$$

Introduciamo ora la condizione d'ortogonalità delle curve  $\varphi, \psi$ , espressa dalla formola (\*)

$$E \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} - F \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + G \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0,$$

ovvero

$$\frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} = \frac{F \frac{\partial \varphi}{\partial v} - G \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}.$$

Chiamando  $k$  il valore comune dei due rapporti, avremo

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{1}{k} \left( E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{1}{k} \left( F \frac{\partial \varphi}{\partial v} - G \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right),$$

quindi anche

$$E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u} = - \frac{EG - F^2}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

$$F \frac{\partial \varphi}{\partial v} - G \frac{\partial \varphi}{\partial u} = - \frac{EG - F^2}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial v};$$

moltiplicando la prima di queste due ultime per  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ , la seconda per  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$  e sottraendo, otteniamo

$$E \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + G \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 = \frac{EG - F^2}{k} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right).$$

Ma dalle (16) risulta

$$(16') \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{E \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + G \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2}{k},$$

(\*). Basta applicare le formole (8) §40 supponendo che nel punto  $(u, v)$  s'involcano ad angolo retto due curve  $\varphi, \psi$ , che il punto  $(u+du, v+dv)$  sia sopra  $\varphi$  e l'altro  $(u+du, v+dv)$  sopra  $\psi$ ; allora si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = 0$$

e ne risulta la formola scritta.

sicché la precedente Divisione

$$(17) \quad (\Delta, \varphi)^2 = \frac{EG - F^2}{k^2} (\Delta, \varphi)^2.$$

Riduciamo ora le equazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = d\varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = d\varphi$$

rispetto a  $du, dv$ , Moltiplicando la (16) e avremo

$$\frac{(EG - F^2)(\Delta, \varphi)^2}{k} dv = \frac{\partial \varphi}{\partial v} d\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial u} d\varphi$$

$$\frac{(EG - F^2)(\Delta, \varphi)^2}{k} dv = -\frac{\partial \varphi}{\partial u} d\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial v} d\varphi.$$

quindi

$$d_\varphi u = -\frac{k}{(EG - F^2)(\Delta, \varphi)^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} d\varphi, \quad d_\varphi v = \frac{k}{(EG - F^2)(\Delta, \varphi)^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} d\varphi,$$

ed a per la (16)

$$d_\varphi u = -\frac{F \frac{\partial \varphi}{\partial v} - G \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{(EG - F^2)(\Delta, \varphi)^2} d\varphi, \quad d_\varphi v = \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{(EG - F^2)(\Delta, \varphi)^2} d\varphi.$$

Sostituiamo nella (15) per  $du, dv$  questi valori e per  $\Delta, \varphi$  il valore  $\frac{\sqrt{EG - F^2}}{k} \Delta, \varphi$  che risulta dalla (17); otteniamo:

mo:

$$\frac{1}{R_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{k} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{k}{\sqrt{EG - F^2} \Delta, \varphi} \right) + \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{k} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{k}{\sqrt{EG - F^2} \Delta, \varphi} \right) \right\}.$$

Infine per eliminare l'incognita  $k$  si Moltiplica che dalla (16) risulta

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{k} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{k} \right) = 0$$

e la precedente può quindi scriverci

$$\frac{1}{R_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{k} \cdot \frac{k}{\sqrt{EG - F^2} \Delta, \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{k} \cdot \frac{k}{\sqrt{EG - F^2} \Delta, \varphi} \right] \right\},$$

ovvero

$$(18) \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{E \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + G \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{E \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + G \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2}} \right] \right\}$$

È questa la formula di Darboux che volemmo stabilire (\*).  
Per mezzo di essa non solo si può calcolare la curvatura geodetica di un sistema di curve.

$$\varphi(u, v) = \varphi$$

Dato in termini finiti, ma anche quando sia dato soltanto per mezzo di un'equazione differenziale del 1° ordine

$$M du + N dv = 0.$$

Le infatti  $\varphi$  è l'integrale, si avrà

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{\partial \varphi}{\partial v} = M : N,$$

quindi

$$(18') \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{GM-FN}{\sqrt{EN^2-2FMN+GM^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{EN-FM}{\sqrt{EN^2-2FMN+GM^2}} \right) \right\}$$

59. - Parametro differenziale del 2° ordine. -

Le funzioni invariabili che abbiamo considerato fin qui, sono relative ad una sola funzione  $\varphi(u, v)$ , ossia ad un solo sistema di curve tracciate sopra la superficie.  
Per due sistemi di curve:

(\*) In particolare ne segue

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v \sqrt{E}} \right\}, \quad \frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u \sqrt{E}} \right\};$$

per  $F=0$  si hanno le (18) § 33 cambiate di segno.

$$\varphi(u, v) = \varphi$$

$$\psi(u, v) = \psi,$$

si ha immediatamente una funzione invariabile nell'espressione dell'angolo  $\omega$ , formata in ogni punto  $(u, v)$  della superficie dalle curve  $\varphi, \psi$  che vi passano. Se con  $d$  indichiamo gli accretimenti lungo una curva  $\varphi = \text{cost}^2$  e con  $\delta$  quelli lungo una curva  $\psi = \text{cost}^2$ , avremo

$$\cos \omega = \frac{\sum \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \left( \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \delta v \right)}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}} =$$

$$= \frac{E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}};$$

ma

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v} \delta v = 0 \end{cases}$$

cioè

$$(\beta) \quad \begin{cases} du : dv = \frac{\partial \varphi}{\partial v} : -\frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \delta u : \delta v = \frac{\partial \psi}{\partial v} : -\frac{\partial \psi}{\partial u} \end{cases}$$

e però

$$\cos \omega = \frac{F \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} + F \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + G \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u}}{EG - F^2} \cdot \frac{1}{\Delta \varphi \Delta \psi}$$

L'espressione  $\Delta \varphi \Delta \psi \cos \omega$  che è evidentemente una funzione invariabile, si dica il parametro differenziale misto di  $\varphi, \psi$ , e indicandolo col simbolo  $V(\varphi, \psi)$ , avremo:

$$(19) \quad V(\varphi, \psi) = \frac{F \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} - F \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + G \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u}}{EG - F^2}$$

Ciò posto, la formula (18) per la curvatura geodetica  $\frac{1}{\rho_g}$  conduce alla considerazione di una nuova funzione in:



variabile di grande importanza. Scriviamo la (15) sotto la forma

$$\frac{1}{\rho\varphi} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G \frac{\partial\varphi}{\partial u} - F \frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{1}{\Delta_1\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E \frac{\partial\varphi}{\partial v} - F \frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{1}{\Delta_1\varphi} \right) \right\}$$

$$\frac{1}{\rho\varphi} = \frac{1}{\Delta_1\varphi} \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G \frac{\partial\varphi}{\partial u} - F \frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E \frac{\partial\varphi}{\partial v} - F \frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} \right) \right\} + V\left(\varphi, \frac{1}{\Delta_1\varphi}\right).$$

Essendo  $\frac{1}{\rho\varphi}$ ,  $\Delta_1\varphi$ ,  $V\left(\varphi, \frac{1}{\Delta_1\varphi}\right)$  altrettante funzioni invariabili, sarà pure una funzione invariabile l'espressione

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G \frac{\partial\varphi}{\partial u} - F \frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E \frac{\partial\varphi}{\partial v} - F \frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} \right) \right\}$$

La chiameremo il parametro differenziale del 2° ordine della funzione  $\varphi$ , e indicandola col simbolo  $\Delta_2\varphi$ , avremo

$$(20) \quad \Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G \frac{\partial\varphi}{\partial u} - F \frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E \frac{\partial\varphi}{\partial v} - F \frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} \right) \right\}.$$

Essa è legata alla curvatura geodetica  $\frac{1}{\rho\varphi}$  della formula

$$(21) \quad \frac{1}{\rho\varphi} = \frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi} + V\left(\varphi, \frac{1}{\Delta_1\varphi}\right).$$

60. - Applicazione ai sistemi isotermi. - Supponiamo che le linee  $\varphi = \text{cost.}^e$  insieme alle traiettorie ortogonali  $\psi = \text{cost.}^e$  formino un sistema isotermo, e sia

$$ds^2 = E_1 d\varphi^2 + G_1 d\psi^2$$

la forma corrispondente dell'elemento lineare. Perché il sistema ortogonale  $\varphi, \psi$  sia isotermo, è necessario e sufficiente che  $\frac{G_1}{E_1}$  sia il quoziente di due funzioni, l'una di  $\varphi$ , l'altra di  $\psi$  soltanto (V. § 22), cioè che si abbia:

$$\frac{\partial^2 \log \frac{G_1}{E_1}}{\partial\varphi \partial\psi} = 0,$$

o, ciò che torna lo stesso, che  $\frac{\partial \log \frac{G_i}{E_i}}{\partial \varphi}$  sia funzione di  $\varphi$  soltanto. Ma calcolando  $\Delta_1 \varphi$ ,  $\Delta_2 \varphi$  in coordinate  $u, v$ , abbia-

mo

$$\Delta_1 \varphi = \frac{1}{\sqrt{E_i}}, \quad \Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{E_i G_i}} \frac{\partial}{\partial v} \sqrt{\frac{G_i}{E_i}} = \frac{1}{2 E_i} \frac{\partial \log \frac{G_i}{E_i}}{\partial v},$$

Da cui

$$\frac{\Delta_2 \varphi}{(\Delta_1 \varphi)^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \frac{G_i}{E_i}}{\partial v}.$$

Ne concludiamo: La condizione necessaria e sufficiente, perchè le linee  $\varphi = \text{cost}^2$  appartengano ad un sistema isotermo, è che si abbia

$$(22) \quad \frac{\Delta_2 \varphi}{(\Delta_1 \varphi)^2} = F(\varphi),$$

ove  $F$  è funzione di  $\varphi$ .

Le di più supponiamo che  $\varphi$  sia parametro isometrico, sarà  $\frac{\partial \log \frac{G_i}{E_i}}{\partial \varphi} = 0$ , cioè

$$(22') \quad \Delta_2 \varphi = 0.$$

Nota adunque sulla superficie un sistema di linee  $\varphi = \text{cost}^2$ , potremo subito decidere, per mezzo della (22), se esse appartengono o no ad un sistema isotermo. (\*)

Ora vogliamo dimostrare che nel caso affermativo, le traiettorie ortogonali  $\varphi = \text{cost}^2$  si determineranno con so- le quadrature. E infatti osservando le formole (a), (b) (359) e la (8) § 40, si vede subito che la equazione dif-

(\*) Basta perciò assicurarsi se il determinante funzionale

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial u} \frac{\Delta_2 \varphi}{(\Delta_1 \varphi)^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial v} \frac{\Delta_2 \varphi}{(\Delta_1 \varphi)^2} \end{vmatrix}$$

è identicamente nullo o no.

ferenziale di queste traiettorie ortogonali si può scrivere

$$(23) \quad \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} du + \frac{F \frac{\partial \varphi}{\partial v} - G \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} dv = 0.$$

Per trovare un fattore integrante  $\lambda$  di questa equazione si troverà: Determinare  $\lambda$  in modo che si abbia:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \lambda \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \lambda \frac{F \frac{\partial \varphi}{\partial v} - G \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} \right) = 0,$$

ovvero

$$\frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} + F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{EG-F^2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} + \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{EG-F^2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} + \Delta_2 \varphi = 0.$$

Ciò si potrà fare assumendo per  $\lambda$  una funzione di  $\varphi$ , quando la (22) si supponga soddisfatta. Ponendo infatti  $\log \lambda = f(\varphi)$ , la precedente diviene

$$(\Delta_1 \varphi)^2 f'(\varphi) + \Delta_2 \varphi = 0;$$

dunque

$$(24) \quad \lambda = e^{-\int \frac{\Delta_2 \varphi}{(\Delta_1 \varphi)^2} d\varphi}$$

è il fattore integrante della (23) e ne concludiamo il teorema:

Se è noto sopra una superficie un sistema di linee, che fanno parte di un sistema doppio isoterma, le traiettorie ortogonali si determinano con quadrature. —

## Capitolo VI.

### Superficie applicabili

61. - Criteri per giudicare dell'applicabilità di due superficie. - Un primo problema, che si presenta nella teoria delle superficie applicabili, è quello di riconoscere se due date superficie  $S, S'$  sono applicabili, e, nel caso affermativo, trovare la legge di corrispondenza fra i loro punti.

Possiamo risolvere completamente questo problema nel modo seguente. Sopra la superficie data  $S$  scegliamo un sistema di coordinate arbitrarie  $u, v$  che dia all'elemento lineare la forma

$$ds^2 = E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2;$$

medesimamente sia

$$ds'^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2$$

l'elemento lineare della  $S'$  in coordinate arbitrarie  $u', v'$ . Le due superficie saranno applicabili se le due forme differenziali

$$E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2, \quad E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2$$

sono trasformabili l'una nell'altra, cioè se si possono stabilire due tali relazioni

$$\varphi(u, v, u', v') = 0, \quad \psi(u, v, u', v') = 0$$

fra  $u, v, u', v'$  che ne risulta

$$(1) \quad E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2.$$

Una prima relazione necessaria segue subito dal teorema di Gauss, secondo il quale nei punti corrispondenti  $(u, v)$ ,  $(u', v')$  le curvature  $K, K'$  debbono essere eguali; avremo dunque

$$(2) \quad K(u, v) = K'(u', v')$$

e questa sarà effettivamente una relazione fra  $u, v, u', v'$  quando nessuna delle superficie  $S, S'$  sia a curvatura costante. Se ciò accadesse, per l'applicabilità si richiederebbe che anche l'altra superficie avesse la medesima curvatura costante, e tale condizione sarebbe l'altra anche sufficiente. (Cf. il § 63).

Ogni nuova funzione assoluta  $\omega$  formerà una nuova relazione come la (2). Ma per l'osservazione alla fine del paragrafo 54, il parametro differenziale primo della curvatura  $K$  è una nuova funzione assoluta; nei punti corrispondenti di  $S, S'$  dovremo quindi avere oltre la (2)

$$(3) \quad \Delta K = \Delta' K'.$$

Rispetto alle equazioni simultanee (2), (3) possono presentarsi i casi seguenti:

- 1° Le (2), (3) sono contraddittorie. In questo caso  $S, S'$  non sono applicabili.
- 2° Le (2), (3) sono compatibili e non rientrano l'una nell'altra. In tal caso per l'applicabilità si richiederà ulteriormente che tirando dalle (2), (3) i valori di  $u', v'$  in

funzione di  $u, v$  soddisfino identicamente la (1). Il proble-  
ma è così ridotto ad un'eliminazione fra equazioni in  
termini finiti.

3° Le (2), (3) rientrano l'una nell'altra.

Perché ciò accada è necessario (\*) che  $\Delta, X$  sia una  
funzione di  $X$  e  $\Delta, X'$  la medesima funzione di  $X'$ . Allora  
la (3) non dice nulla più della (2) e per risolvere il

(\*). Se l'equazione

$$(a) \quad \psi(u, v) = \psi'(u', v')$$

deve essere una conseguenza dell'altra

$$(b) \quad \varphi(u, v) = \varphi'(u', v'),$$

occorre che tirando per esempio  $v'$  dalla seconda (suppo-  
sto che  $v'$  sia costante) e sostituendolo nella prima, que-  
sta risulti identicamente soddisfatta, qualunque siano  $u, v, u'$ .

Riguardando adunque nella (a)  $v'$  come funzione di  $u, v, u'$  def-  
nita dalla (b) e derivandola parzialmente rispetto a  $u, v$ , avremo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi'}{\partial v'} \frac{\partial v'}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi'}{\partial v'} \frac{\partial v'}{\partial v} = 0 \end{array} \right.$$

Ma per la (b) si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi'}{\partial v'} \frac{\partial v'}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi'}{\partial v'} \frac{\partial v'}{\partial v} = 0, \end{array} \right.$$

dunque

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{array} \right| = 0$$

cioè  $\psi$  una funzione di  $\varphi$ , etc..

problema occorrerà trovare una nuova relazione fra  $u, v$ ,  $u', v'$ . Questa è vien fornita dall'essere che per le linee corrispondenti

$$K = \text{cost}^2, \quad K' = \text{cost}^2$$

le curvature geodetiche  $\frac{1}{\rho_K}, \frac{1}{\rho_{K'}}$  nei punti corrispondenti debbono essere eguali; abbiamo dunque

$$(4) \quad \frac{1}{\rho_K} = \frac{1}{\rho_{K'}}$$

In questa, combinata con la (2), potremo ragionare come sopra per le (2), (3) e nel caso che esse siano compatibili e non rientrino l'una nell'altra, ovvero siano incompatibili, il problema sarà risoluto.

62. - Resta da esaminare il solo caso in cui anche la (4) sia una conseguenza della (2), cioè  $\Delta K$ , e  $\frac{1}{\rho_K}$  siano funzioni di  $K$ , e  $\Delta K'$ ,  $\frac{1}{\rho_{K'}}$  le medesime funzioni di  $K'$ . Allora tanto le linee  $K$  di egual curvatura sopra  $S$ , quanto le  $K'$  sopra  $S'$  sono geodeticamente parallele (§ 57) e ciascuna di esse ha costante la curvatura geodetica. Se a linee coordinate  $u$  sopra  $S$  si attribuisce le  $K = \text{cost}^2$  e a linee  $v$  le traiettorie ortogonali, l'elemento lineare assumerà la forma

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

e  $K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$  sarà una funzione di  $u$ ; medesimamente

$\frac{1}{\rho_K} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}$  dovrà essere funzione di  $K$ ; cioè di  $u$  e avremo perciò

$$\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = f(u)$$

Da cui integrando:

$$\sqrt{G} = e^{\int f(u) du} \quad \psi(v) = \varphi(u) \cdot \Psi(v)$$

essendo  $\psi(v)$  funzione arbitraria di  $v$ . Ne segue

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2(u) \psi^2(v) dv^2$$

e cambiando  $v$  in  $\int \psi(v) dv$

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2(u) dv'^2.$$

La superficie  $S$  è dunque in questo caso applicabile sopra una superficie di rotazione di cui  $r = \varphi(u)$  è l'equazione della curva meridiana (§24).

Similmente accade per  $S'$ , ed avremo

$$ds'^2 = du'^2 + \varphi'^2(u') dv'^2.$$

Le tre condizioni

$$K = K', \quad \Delta K = \Delta' K', \quad \frac{1}{R_x} = \frac{1}{R'_x}.$$

divengono in questo caso

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)} = \frac{\varphi''(u')}{\varphi'(u')} \\ \frac{d\varphi(u)}{du} = \frac{d\varphi'(u')}{du'} \\ \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{\varphi'(u')}{\varphi'(u')} \end{array} \right.$$

La 2<sup>a</sup>, tenuto conto della 1<sup>a</sup>, dà

$$\frac{du'}{du} = 1$$

quindi  $u' = u + c$  con  $c$  costante, e dopo ciò la 3<sup>a</sup>

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{\varphi'(u+c)}{\varphi(u+c)}$$

integrata porge

$$\varphi(u) = \varphi(u+c) = k \varphi(u)$$

con  $k$  costante. Dunque

$$ds'^2 = du^2 + k^2 \varphi^2(u) dv'^2,$$

e baste porre

$$v = kv' + C \quad (\text{con } C \text{ cost. arbitraria})$$

per concludere che le superficie  $S, S'$  sono allora appli:



cabili in infiniti modi a causa dello costante arbitraria  
C. Geometricamente e' chiaro che, essendo allora  $S, S'$   
applicabili sulla medesima superficie di rotazione, si deve  
poter distendere l'una sull'altra in 2° modo, perche' o  
quella superficie di rotazione e' sovrapponibile a si' medes.  
ma per semplice rotazione attorno all'asse.

Infine mostreremo che nel caso ora discusso per trovare  
la legge di corrispondenza fra i punti di  $S$  e di punti  
di  $S'$ , occorre condurre sopra  $S$  le linee ortogonali  
delle linee  $X = \text{cost}^2$  e sopra  $S'$  quelle delle  $X = \text{cost}^2$ .  
Ma siccome tali sistemi ortogonali sono isotermi, cio' si  
otterrà con sole quadrature (§60) o così anche in questo  
caso il problema sarà ridotto ad eliminazioni fra equazio-  
ni in termini finiti.

63. - Caso delle superficie a curvatura costante. -

Completiamo ora lo sviluppo del problema, dimostre-  
mo che nel caso delle superficie a curvatura costante, la  
condizione espressa dal Teorema di Gauss non e' soltanto  
necessaria ma anche sufficiente per l'applicabilità, cioè:

Due superficie colla medesima curvatura costante sono  
applicabili l'una sull'altra.

Che le superficie a curvatura nulla siano tutte  
distendibili sul piano, l'abbiamo in sostanza già dimost-  
rato al §46. Qui però ne vogliamo dare una nuova di-  
mostrazione, che si estende facilmente alle altre su-  
perficie a curvatura costante diversa da zero (positiva o  
negativa). Sopra la superficie  $S$ , supposta a curvatura

nulla, si tracci una linea geodetica  $L$  e si prendano a linee coordinate  $v$  le geodetiche ortogonali alla  $L$  e a linee  $u$  le loro traiettorie ortogonali e si prenda per parametro  $u$  l'arco delle geodetiche  $v = \text{cost.}$  contato dalla geodetica  $L$ , che sarà quindi la  $u = 0$ . L'elemento lineare assumerà la forma

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

e poiché per ipotesi

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = 0$$

avremo

$$\sqrt{G} = \varphi(v) \cdot u + \psi(v)$$

Dove  $\varphi, \psi$  sono funzioni di  $v$ . Ora per la curvatura geodetica  $\frac{1}{\rho_n}$  dalle linee  $u$  si ha

$$\frac{1}{\rho_n} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = -\frac{\varphi(v)}{\varphi(v) \cdot u + \psi(v)}$$

ma per  $u=0$  deve essere  $\frac{1}{\rho_n} = 0$  (poiché la  $L$  è geodetica),

dunque  $\varphi(v) = 0$ , e perciò

$$ds^2 = du^2 + \psi^2(v) dv^2$$

Prendo  $\int \psi(v) dv = v$ , ne risulta

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

forma dell'elemento lineare del piano riferito a coordinate Cartesiane ortogonali. Dunque la  $S$  è sviluppabile sul piano c. d. d.

Consideriamo ora una superficie  $S$  a curvatura costante  $K$  positiva o negativa e poniamo

$$K = \pm \frac{1}{R^2}$$

essendo  $R$  una costante reale. Alzando le linee coordinate come nel caso sopra considerato, avremo:

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

e dov'è estremo

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u^2} + \frac{\sqrt{G}}{R^2} = 0, \quad \text{per } K = +\frac{1}{R^2}$$

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u^2} - \frac{\sqrt{G}}{R^2} = 0, \quad \text{per } K = -\frac{1}{R^2}$$

quindi integrando

$$\sqrt{G} = \varphi(v) \cos \frac{u}{R} + \psi(v) \sin \frac{u}{R}, \quad \text{per } K = +\frac{1}{R^2}$$

$$\sqrt{G} = \varphi(v) \cosh \frac{u}{R} + \psi(v) \sinh \frac{u}{R}, \quad \text{per } K = -\frac{1}{R^2}$$

Dove  $\varphi(v)$ ,  $\psi(v)$  sono funzioni di  $v$  soltanto. In ambedue

i casi essendo  $\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_{v=0} = 0$ , troviamo  $\psi(v) = 0$ , quindi

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2(v) \cos^2 \frac{u}{R} dv^2 \quad \text{per } K = +\frac{1}{R^2}$$

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2(v) \cosh^2 \frac{u}{R} dv^2 \quad \text{per } K = -\frac{1}{R^2}$$

ovvero scrivendo  $v$  in luogo di  $\int \varphi(v) dv$ :

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 \frac{u}{R} dv^2 \quad \text{per } K = +\frac{1}{R^2}$$

$$ds^2 = du^2 + \cosh^2 \frac{u}{R} dv^2 \quad \text{per } K = -\frac{1}{R^2}$$

troviamo dunque in ambedue i casi una forma perfettamente determinata per l'elemento lineare e il teorema è così dimostrato.

Per il primo caso poi l'elemento lineare appartiene ad una sfera di raggio  $R$  e quindi ogni superficie a curvatura costante positiva  $+\frac{1}{R^2}$  è applicabile sulla sfera di raggio  $R$ .

64. - Applicabilità di ogni superficie a curva, curvatura costante sopra se medesima. - Le formole ora stabilite si prestano facilmente alla dimostrazione di un'importantissima proprietà delle superficie a curvatura costante, che possiamo enunciare così:

Ogni porzione di una superficie a curvatura costante è applicabile sopra qualunque altra porzione della medesima superficie, in modo che due punti qualunque  $A, B$  della prima possono sovrapporsi a due punti qualunque  $A', B'$  della seconda, purché la distanza geodetica di  $A'$  da  $B'$  sia eguale a quella di  $A$  da  $B$ .

Per le superficie a curvatura nulla o positiva il teorema è evidente, poiché il piano e la sfera su cui tali superficie sono rispettivamente applicabili, godono appunto della proprietà enunciata.

Per dimostrarlo anche per le superficie a curvatura costante negativa, assumiamo una prima volta per geodetica  $L$  del § precedente la geodetica di unisce  $A$  con  $B$  e, scegliendo le linee coordinate come sopra, avremo

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{cosh}^2 \frac{u}{R} dv^2,$$

dove  $v$  sarà l'arco della geodetica  $AB$  ( $u=0$ ) contato da un suo punto fisso, che si può supporre in  $A$ , sicché le coordinate di  $A$  saranno  $(0, 0)$ . Operando nello stesso modo per la geodetica  $A'B'$ , otterremo

$$ds'^2 = du'^2 + \operatorname{cosh}^2 \frac{u'}{R} dv'^2$$

dove anche qui per coordinate di  $A'$  si potranno prendere  $u'=0, v'=0$ . Per trasformare il due elementi li rendo l'uno nell'altro, basta porre

$$u' = u, \quad v' = v;$$

allora al punto  $A \equiv (0, 0)$  corrisponderà il punto  $A' \equiv (0, 0)$  e al punto  $B \equiv (0, \operatorname{arc} \widehat{AB})$ ,  $B' \equiv (0, \operatorname{arc} \widehat{A'B'})$ . Dunque

la superficie s' applicabile sopra se' stessa in modo che A si sovrappone ad A' e B a B' e. d. d.

Questo teorema ci dice che ogni figura tracciata sopra una superficie a curvatura costante può trasportarsi, per via di semplice flessione, sopra un' altra porzione qualunque della medesima superficie, senza che gli angoli e le grandezze lineari e superficiali subiscano alterazione. Per tutte queste superficie vale quindi, come per il piano e per la sfera, il principio della sovrapposibilità delle figure, né esiste alcuna altra superficie, sulla quale si verifici tale principio, poiché la curvatura s' inalterabile per flessione.

Se infine ritorniamo al problema fondamentale del §. 61 nel caso che le due superficie S, S' abbiano la medesima curvatura costante, vediamo che esse sono applicabili in un numero  $\infty^3$  di modi diversi. Ma per trovare effettivamente una delle leggi di corrispondenza fra i punti di S e quelli di S', occorrerebbe sapere integrare in generale per una superficie a curvatura costante data, l'equazione differenziale del 2° ordine delle linee geodetiche. Tale problema s' è stato ridotto, nello ultimo numero di Weingarten, Lie e Bäcklund, all'integrazione di un'equazione differenziale del primo ordine, che ha la forma nota in Analisi sotto l'nome di equazione di Riccati.

65. - Superficie pseudosferiche di rotazione. -  
Esaminiamo ora le più semplici forme di superficie

a curvatura costante. Fra queste considero il piano e le sviluppabili (curvatura nulla) e la sfera (curvatura positiva).  
 Cerchiamo le superficie di rotazione a curvatura costante negativa  $-\frac{1}{R^2}$ ; sia

$$r = \varphi(u)$$

l'equazione della loro curva meridiana (§24). Avremo

$$K = -\frac{1}{2} \frac{d^2 r}{du^2},$$

quindi

$$\frac{d^2 r}{du^2} = \frac{2}{R^2} r,$$

equazione il cui integrale generale è

$$r = C e^{\frac{u}{R}} + C' e^{-\frac{u}{R}},$$

con  $C, C'$  costanti arbitrarie. Rispetto a queste costanti dobbiamo distinguere tre casi diversi, che conducono a tre forme essenzialmente differenti di superficie.

Se una delle costanti, poniamo  $C'$ , è nulla, avremo per l'elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + C^2 e^{\frac{2u}{R}} dv^2$$

e, cambiando  $v$  in  $\frac{v}{C}$

$$(I) \quad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2.$$

Quando non è zero né  $C$ , né  $C'$ , potremo supporre eguali in valore assoluto, poiché se tali non sono, basterà cambiare  $u$  in  $u + \alpha$  e determinare quindi la costante  $\alpha$  dall'equazione

$$C e^{\frac{\alpha}{R}} = \pm C' e^{-\frac{\alpha}{R}},$$

cioè prendere

$$\alpha = \frac{R}{2} \log \left( \pm \frac{C'}{C} \right).$$

Se dunque hanno segno opposto, potremo porre

$$C = -C' = \frac{h}{2}$$

e se hanno segno eguale

$$C = C' = \frac{h}{2}$$

Dopo di che avremo per l'elemento lineare

$$(II) \quad ds^2 = du^2 + h^2 \sinh^2 \frac{u}{R} dv^2$$

$$(III) \quad ds^2 = du^2 + h^2 \cosh^2 \frac{u}{R} dv^2$$

Distacciamo ora l'andamento delle curve meridiane corrispondenti ai tre casi (I), (II), (III). Se

$$z = \varphi(u)$$

è l'equazione di quella curva, avremo

$$z = \int \sqrt{1 - \left(\frac{dz}{du}\right)^2} du,$$

quindi nel caso

$$I) \text{ Tipo parabolico } z = \int \sqrt{1 - \frac{e^{\frac{2u}{R}}}{R^2}} du;$$

poniamo

$$e^{\frac{u}{R}} = R \operatorname{sen} \varphi$$

e risulterà

$$z = R \operatorname{sen} \varphi, \quad z = R \int \frac{\cos^2 \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} d\varphi = R \left\{ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi + \cos \varphi \right\}.$$

Abbiamo così le coordinate Cartesianhe  $x, z$  della curva meridiana espresse per un parametro  $\varphi$ , che sta geometricamente a rappresentare l'angolo della tangente alla curva coll'asse  $z$  (\*).

Alla curva rappresentata da questa equazione, che ha l'asse delle  $z$  per asintoto e gode della proprietà, che la proiezione della sua tangente, intercetta fra il punto di contatto e l'asintoto, è costante  $= R$ , si dà il nome

(\*) È infatti  $dz = R \cos \varphi d\varphi$ ,  $z = R \frac{\cos^2 \varphi}{\operatorname{sen} \varphi}$ ,  $\frac{dz}{z} = \operatorname{tg} \varphi$ .

Di trattive. Essa è anche l'evolvente della catenaria comune

$$z = R \operatorname{csh} \frac{z}{R},$$

quando si comincia lo sviluppo del filo dal punto più prossimo all'asse z.

La superficie generata dalla trattive ruotando attorno all'assunto  $z$  è pseudosfera; essa è la più semplice forma

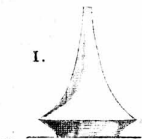


Fig. parabolus (Pseudosfera)

di superficie a curvatura costante negativa. Dicesi anche pseudosferiche tutte le superficie a curvatura costante negativa  $-\frac{1}{R^2}$  e la quantità  $R$  ne è il raggio. I meridiani (geodetiche) della pseudosfera hanno a comune il punto all'infinito dell'asse di rotazione; per questa ragione la pseudosfera si considererà come superficie pseudosferica di rotazione del tipo parabolico (Cf. sotto).

Nella pseudosfera la curvatura geodetica dei paralleli è costante  $= \frac{1}{R}$  e non vi è alcuna superficie di rotazione dotata di questa proprietà. (§35).

II). Tipo ellittico. Nel caso che l'elemento lineare abbia la forma (II), avremo

$$z = h \operatorname{snh} \frac{u}{R}, \quad \frac{dz}{du} = \frac{h}{R} \operatorname{csh} \frac{u}{R};$$

ma  $\frac{dz}{du}$  essendo il seno dell'angolo che la tangente al me-



meridiani fa coll'asse di rotazione, sotto' all'angolo  $\frac{h}{R} \operatorname{coth} \frac{u}{R} \leq 1$  quindi anche

$$\frac{h}{R} < 1.$$

Il massimo valore di  $z$  corrisponde quindi a  $\operatorname{coth} \frac{u}{R} = \frac{R}{h}$  e il raggio del parallelo sulla linea  $z=0$  e  $z = \sqrt{R^2 - h^2}$ .

Quando  $z=0$  si ha  $\frac{dz}{du} = \frac{h}{R}$  e perciò tutti i meridiani incontrano in questo punto l'asse di rotazione sotto l'angolo  $\alpha = \arcsin \frac{h}{R}$ ; il punto stesso e' quindi un punto singolare (conico) della superficie.

Per trovare le coord.

ordinate  $x, z$  della curva in termini finiti, abbiamo l'equazione

$$z = \int \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2} \operatorname{coth}^2 \frac{u}{R}} du;$$

e possiamo esprimere  $x, z$  per funzioni ellittiche di un parametro  $\tau$  nel modo seguente. Poniamo

$$\frac{h}{R} = \sqrt{1 - k^2} = k', \quad \operatorname{senh} \frac{u}{R} = \frac{h}{k'} \operatorname{cn}(\tau, k'),$$

quindi  $z = R k' \operatorname{cn} \tau$  e

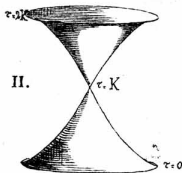
$$z = R k'^2 \int_0^\tau \operatorname{sn}^2 \tau d\tau.$$

Introducendo la funzione

$$Z(\tau) = \frac{\Theta'(\tau)}{\Theta(\tau)}$$

di Jacobi, avremo dunque per le formole richieste

$$z = R k' \operatorname{cn} \tau, \quad z = R \left\{ \frac{H}{K} \tau - Z(\tau) \right\},$$



Eglio ellittico.

Dove  $H, K$  sono le note costanti della teoria delle funzioni ellittiche. Il tratto della curva da  $\tau=0$  a  $\tau=+2K$  è rappresentato nella figura 11); quando  $\tau$  aumenta di  $4K$  la curva si riproduce periodicamente, poiché  $z$  non cambia e  $\tau$  aumenta di  $4RH$ . La superficie di rotazione corrispondente consta di infinite parti, congruenti a quella rappresentata dalla figura; i paralleli massimi, di raggio  $r = Rk$ , sono di regresso per la superficie, poiché i punti  $\tau = 2mK$  ( $m$  intero) sono cuspidi del meridiano.

III). Tipo iperbolico. Nel 3° caso abbiamo

$$z = k \operatorname{cosh} \frac{u}{R}, \quad \frac{dz}{du} = \frac{k}{R} \operatorname{senh} \frac{u}{R};$$

il massimo valore che può assumere  $u$  nel tratto reale della curva è dato da  $\operatorname{senh} \frac{u}{R} = \frac{R}{k}$ , quindi il raggio del parallelo della  $z$  è il minimo  $k$  e il massimo  $\sqrt{R^2 + k^2}$ .

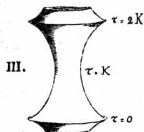
Abbiamo poi

$$z = \int \sqrt{1 - \frac{k^2}{R^2} \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R}} du$$

e, per esprimere anche qui  $\tau, z$  per funzioni ellittiche di un parametro, porremo

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + k^2}} = k', \quad \operatorname{cosh} \frac{u}{R} = \frac{\operatorname{dn}(\tau, k')}{k'}$$

$$z = \frac{R}{k} \operatorname{dn} \tau, \quad z = \frac{R}{k} \left\{ \frac{H}{K} \tau - Z(\tau) \right\}.$$



Tipo iperbolico

La forma della curva da  $\tau=0$  a  $\tau=2K$  è rappresentata nella figura III); quando  $\tau$  aumenta di  $2K$ , la curva si riproduce periodicamente. I paralleli massimi corrispondenti a

$$\tau = 2mK \quad (m \text{ intero})$$

sono di regresso per la superficie e quelli minimi corrispondenti a  $\tau = (2m+1)K$  sono geodetiche.

66. - Deformazione di ogni superficie pseudo-sferica a superficie di rotazione. - Le tre forme di superficie di rotazione ora distinte sono effettivamente distinte fra loro, cioè non si può applicare una di esse sopra un'altra in modo che i paralleli si distendano sui paralleli (Cf. più avanti § 69). Però ogni superficie pseudosferica è applicabile sopra ciascuna delle superficie I), II), III).

I). Per le proprietà espresse al § 63 è chiaro che se tracciamo sopra una superficie pseudosferica  $S$  un sistema di geodetiche uscenti da un punto all'infinito della superficie (geodetiche parallele), potremo distendere per semplice flessione la  $S$  sulla pseudosfera in modo che quelle geodetiche in distensione si mescolino.

II). Nel caso delle superficie II) del tipo ellittico, le geodetiche  $v = \text{cost}^e$  sono da un punto reale e a distanza finita della superficie. Potremo applicare la superficie  $S$  sulla II) in modo che le geodetiche uscenti da un suo punto arbitrario  $P$  si distendano sui

meridiani. Converrà però fare le osservazioni seguenti. Se riferiamo la  $S$  alle geodetiche uscenti da  $P$  ed alle traiettorie ortogonali, avremo (§ 63)

$$ds^2 = du^2 + \left\{ \varphi(v) \operatorname{coth} \frac{u}{R} + \psi(v) \operatorname{sech} \frac{u}{R} \right\}^2 dv^2;$$

l'arco  $u$  si misurerà a partire da  $P$  e il parametro  $v$  sarà per noi l'angolo che una geodetica variabile, uscente da  $P$ , forma con una geodetica fissa. Allora dovremo avere (V. § 56 formole (12))

$$\left\{ \varphi(v) \operatorname{coth} \frac{u}{R} + \psi(v) \operatorname{sech} \frac{u}{R} \right\}_{u=0} = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[ \varphi(v) \operatorname{coth} \frac{u}{R} + \psi(v) \operatorname{sech} \frac{u}{R} \right] \right\}_{u=0} = 1,$$

quindi  $\varphi(v) = 0$ ,  $\psi(v) = R$  e però:

$$(6) \quad ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{sech}^2 \frac{u}{R} dv^2.$$

Ma per la superficie pseudosferica di notazione II) abbiamo invece

$$ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{sech}^2 \frac{u}{R} dv^2,$$

essendo  $v$ , l'angolo che il piano di un meridiano mobile forma col piano di un meridiano fisso; per far coincidere i due elementi lineari abbiamo quindi

$$v = \frac{1}{R} v_1 = \operatorname{tang} v_1.$$

Quando dunque  $v_1 = 2\pi$  sarà  $v = 2\pi \operatorname{tang} 2\pi$ , sicché basterà una porzione di  $S$  intorno a  $P$  per ricoprire interamente una falda della superficie II). Inoltre la parte di  $S$  al di là del circolo geodetico di raggio  $u = R \operatorname{sech} \operatorname{coth} \frac{R}{\lambda} = R \operatorname{sech} \operatorname{coth} \frac{1}{\operatorname{tang}}$  non ha corrispondente sulla superficie II); dunque la porzione

Di  $S$  attorno a  $P$ , alla quale si può dare la forma di una falda della superficie II), e' limitata da un settore geodetico.

III). Nel caso delle superficie III) del tipo iperbolico, le geodetiche  $v = \text{cost}^2$  sono caratterizzate dall'essere ortogonali ad una medesima geodetica (il parallelo minimo). Potremo applicare una superficie pseudosferica qualunque  $S$  sopra la III) in modo che una sua geodetica arbitraria  $G$  si distenda sul parallelo minimo. La parte di  $S$ , che si applichera' effettivamente sopra una falda della III), e' racchiusa da una striscia limitata da due linee parallele geodeticamente alla  $G$  ed equidistanti da essa, le quali, dopo la deformazione, diverranno 2 paralleli massimi (di regredito) della zona; nel senso della geodetica  $G$  la striscia e' limitata da due geodetiche ortogonali a  $G$ , le quali si riuniscono, dopo la deformazione, in un solo meridiano della zona. La lunghezza e la larghezza della striscia dipendono solo dal raggio che si vuol dare al parallelo minimo (\*).

Osserviamo, rispetto alle superficie III) del tipo iperbolico, che le geodetiche  $v = \text{cost}^2$  possono considerarsi come uscenti da un punto comune immaginario (i:

---

(\*). Facendo convergere  $R$  verso  $\infty$ , la  $S$  diventa una sviluppabile, p. e. il piano, e le deformazioni considerate diventano quelle del piano in coni e cilindri di rotazione.

Reale) della superficie, poiché per  $\frac{u}{R} = i\frac{\pi}{2}$ , abbiamo  

$$r = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} i\frac{\pi}{2} = 0.$$

I paralleli di questa superficie vengono allora ad essere circoli geodetici ed centro ideale, come quelli della pseudosfera sono circoli geodetici ed centro all'infinito.

Ritornando ai risultati ottenuti, possiamo enunciare il teorema:

Ogni superficie pseudosferica può cambiarsi, per via di semplice flessione, in una superficie di rotazione, in modo che le geodetiche uscenti da un punto della superficie ne diventino i meridiani; la superficie di rotazione ottenuta apparterrà al tipo parabolico, ellittico o iperbolico, secondo che il punto comune alle geodetiche è reale all'infinito, reale a distanza finita, ovvero ideale.

67. - Superficie applicabili sopra se' medesime in  $\infty$  modi. - La proprietà fondamentale delle superficie a curvatura costante che abbiamo dimostrato al § 63 può enunciarsi dicendo:

L'elemento lineare di ogni superficie a curvatura costante ammette  $\infty^3$  trasformazioni in se' medesimo.

Pel teorema di Gauss è chiaro che una data superficie, il cui elemento lineare ammetta solo  $\infty^3$  trasformazioni in se' medesimo; all'incirca la curvatura sarebbe costante e vi sarebbero  $\infty^3$  trasformazioni della specie considerata.

L'elemento lineare di ogni superficie di rotazione

ammette evidentemente  $\infty$  trasformazioni in se' medesimo.  
 Ora possiamo dimostrar il teorema inverso:

Ogni superficie applicabile sopra se' medesima in  $\infty$  modi e' applicabile sopra una superficie di rotazione.

Supposto che una tale superficie  $S$  sia a curvatura costante (nel qual caso sappiamo gia' che il teorema sussiste, V<sup>o</sup> § 6<sup>ta</sup>), il teorema di Gauss ci dice che, durante tale applicazione di  $S$  sopra se' medesima, le linee  $L$ , lungo le quali la curvatura  $K$  e' costante, dovranno strisciare sopra se' medesimo. E poiche' tale applicazione puo' farsi in  $\infty$  modi, ogni punto di una linea  $L$  di egual curvatura potra' portarsi sopra un altro punto qualunque della linea stessa; da cio' segue che le linee  $L$  sono a curvatura geodetica costante. Di piu', mentre una linea  $L$  striscia sopra se' stessa, anche tutte le linee parallele geodeticamente a  $L$  strisciano sopra se' stesse; dunque le linee  $L$ , oltre avere costante la curvatura geodetica, sono anche parallele geodeticamente fra loro. Dopo cio', da quanto abbiamo detto al § 62, segue subito che la  $S$  e' applicabile sopra una superficie di rotazione e le linee  $L$  di egual curvatura si distendono sul parallelo.

Come caso particolare del teorema superiore, noi diamo l'altro:

Se i coefficienti  $E, F, G$  dell'elemento lineare

$$ds^2 = E da^2 + 2F da db + G db^2$$

sono funzioni di una combinazione lineare delle varia-

bili  $mu+nv$ , la superficie è applicabile sopra una superficie di rotazione e le linee  $mu+nv = cost^2$  si distendono sui paralleli.

È infatti congiungendo  $u$  in  $u+d$ , e  $v$  in  $v - \frac{m}{n}d$ , dove  $d$  è una costante arbitraria, l'elemento lineare non cambia; inoltre si ha evidentemente  $K = f(mu+nv)$ .

68. - Superficie di rotazione applicabili. - Comincieremo ora alcuni esempi semplici di superficie applicabili e in primo luogo cercheremo se due superficie di rotazione  $S, S'$  possono essere applicabili l'una sull'altra.

Dal teorema di Jaquet segue anzitutto che i paralleli di  $S$  si distenderanno sui paralleli di  $S'$ , e quindi anche i meridiani sui meridiani. Naturalmente fanno eccezione le superficie di curvatura costante (563); ma ciò che ora diremo vale anche per queste superficie, quando s'aggiunga la condizione che i paralleli dell'una si distendano sui paralleli dell'altra.

Se l'elemento lineare di  $S$  è dato da

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2,$$

e quello di  $S'$  da

$$ds'^2 = du'^2 + r'^2 dv'^2,$$

s'è chiaro che si potrà porre  $u' = u$ , mettendo gli archi meridiani da due paralleli corrispondenti. Per trasformare il due elemento lineare l'uno nell'altro, converrà porre  $v' = v(v)$  e determinare questa funzione colla condizione



$$r(u) \frac{dr}{du} = r(u);$$

Da questa risulta

$$r_1 = kr, \quad r_2 = \frac{r}{k} \quad (k \text{ costante arbitraria}).$$

Se dunque  $r = \varphi(u)$  è l'equazione del meridiano di  $S$ , le coordinate del meridiano di  $S_1$  saranno

$$(1) \quad r = k\varphi(u), \quad z = \int \sqrt{1 - k^2 \varphi'^2(u)} du.$$

Dunque:

Ogni superficie di rotazione può deformati in un'altra, conservandosi superficie di rotazione. I meridiani delle superficie deformate sono dati dalle (1), ove  $k$  è costante arbitraria.

Consideriamo ora più da vicino il modo di applicarsi di  $S_1$  sopra  $S$ . Se supponiamo  $k < 1$ , la formola

$$v = kv_1$$

dimostra che quando  $v_1$  si è già diventato  $= 2\pi$ , l'angolo  $v$  è  $= 2k\pi < 2\pi$ . Dunque, applicando la  $S_1$  sulla  $S$ , questa non ne resta interamente coperta, ma viene a mancare una porzione compresa fra due meridiani, e cui piani fanno fra loro un angolo  $= (1-k)2\pi$ . Per distendere  $S_1$  sopra  $S$  conviene quindi tagliare  $S_1$  lungo un meridiano ed aprirla deformatola ed allontanando gli orli del taglio, e quali poi sopra  $S$  si formano due meridiani staccati.

Al caso  $k > 1$  corrisponde evidentemente la deformazione inversa di  $S$  in  $S_1$ , per la quale conviene tagliare da  $S$  una porzione compresa fra due meridiani, ritrarla, bilando poi la continuità della superficie col riunire per

Deformazione in un solo di due meridiani esteriori.

Ad un punto del meridiano di  $S$  corrisponde un punto reale del meridiano di  $S_1$ , finché  $k \frac{du}{dv} < 1$ . Ciò avviene sempre se  $k < 1$ ; ma quando  $k > 1$ , i paralleli cui corrisponde  $\frac{dv}{du} = \frac{1}{k}$  limitano sopra  $S$  una zona, che è la proiezione di  $S_1$  effettivamente applicabile sopra  $S$ . Dopo la deformazione i detti paralleli diventano paralleli di regresso per  $S_1$ .

69. - Deformazione della sfera e delle superficie pseudosferiche di rotazione. -

a) Per la sfera di raggio = 1 si può assumere

$$r = \cos u$$

e le coordinate dei meridiani deformati sono date dalle formole

$$r = k \cos u, \quad z = \sqrt{1 - k^2} \sin u.$$

Possiamo esprimerle per funzioni ellittiche di un parametro  $\tau$ . Per ciò se  $k < 1$ , porremo  $\cos u = \operatorname{cn}(\tau, k)$  e avremo

$$r = k \operatorname{cn} \tau, \quad z = \left(1 - \frac{H}{K}\right) \tau + Z(\tau);$$

se invece  $k > 1$ , converremo  $k$  in  $\frac{1}{k}$  e ponendo

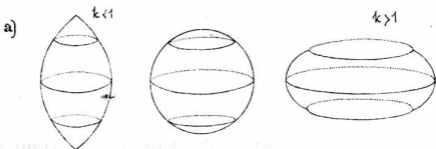
$$\cos u = \operatorname{dn}(\tau, k)$$

avremo

$$r = \frac{\operatorname{dn} \tau}{k}, \quad z = \left(k - \frac{H}{Kk}\right) \tau + \frac{1}{k} Z(\tau).$$

Nel caso di  $k < 1$ , si otterrà una superficie di forma di fuso, i cui meridiani incontrano l'asse in un punto (conico per la superficie) sotto l'angolo  $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{sen} k$ . Nel caso  $k > 1$  si ha una zona limitata a due paralleli omi-

rimo di regresso. ( $\forall^2$  la figura)



b) La pseudosfera gode della singolare proprietà che tutte le sue deformate di rotazione coincidono colla pseudosfera stessa. È infatti la curvatura geodetica dei paralleli rimanendo inalterata  $= \frac{1}{R}$ , il meridiano deformato non può essere che lo trattico stesso; di più si chiesero che la sola pseudosfera gode di questa proprietà. Nel caso del restringimento dei paralleli ( $k < 1$ ) il parallelo massimo (di regresso) della pseudosfera diventa un parallelo minore e resta così scoperta la zona fra questi due paralleli. Nella deformazione inversa un parallelo minore in grandezza di raggio fino a diventare il parallelo di regresso; ma per effettuare questa deformazione occorre prima togliere dalla pseudosfera la zona compresa fra questo parallelo e il parallelo attuale di regresso. La deformazione delle altre due classi di superficie pseudosferiche di rotazione del tipo ellittico e iperbolico induce sempre a superficie del medesimo tipo, come si

risultò dall'esame delle rispettive forme

$$ds^2 = da^2 + l^2 \operatorname{senh}^2 \frac{a}{R} dv^2,$$

$$ds^2 = da^2 + l^2 \operatorname{cosh}^2 \frac{a}{R} dv^2,$$

dell'elemento lineare.

20. - Elicoidi. - Teorema di Bour. - Se ad una curva qualunque prima o a doppia curvatura si dà un doppio movimento, uno di rotazione uniforme attorno ad un'asse, l'altro di traslazione uniforme parallelamente all'asse stesso, la superficie generata dalla curva in questo movimento diceasi un'elicoido. I vari punti della curva generatrice (profilo) descrivono altrettante eliche circolari, aventi per asse l'asse dell'elicoido e tutte del medesimo passo. Conducendo un piano per l'asse si ottiene nell'elicoido una sezione, che può dirsi profilo meridiano. È chiaro che dando al profilo meridiano il medesimo moto elicoidale attorno all'asse, esso descriverà l'elicoido. Se ora osserviamo che l'elicoido si può far scivolare sopra sé stesso di guisa che le eliche striscino sopra sé medesime, basterà applicare il teorema al § 6° per stabilire il seguente risultato, dovuto a Bour:

Ogni elicoido è applicabile sopra una superficie di rotazione; le eliche si distendono sui paralleli.

In questa applicazione dell'elicoido sulla superficie di rotazione quest'ultima verrà ricoperta infinite volte, ogni elica avvolgendo infinite volte il corrispondente parallelo.

Troviamo ora effettivamente la forma dell'elemento lineare delle elicoide e le forme di trasformazione corrispondenti.

Abbiamo per atto delle  $z$  l'atto dell'elicoide, e sia  $\rho$  la distanza di un punto del profilo meridiano dall'atto,  $z = \varphi(\rho)$  l'equazione del profilo; indichiamo poi con  $v$  l'angolo che il piano del profilo in una posizione qualunque forma col piano  $xz$ , e con  $m$  il parametro del moto elicoide, cioè il rapporto della velocità di traslazione a quella di rotazione. Le coordinate  $x, y, z$  di un punto mobile sull'elicoide saranno date in funzione delle variabili  $\rho, v$  dalle formole

$$x = \rho \cos v, \quad y = \rho \sin v, \quad z = \varphi(\rho) + mv.$$

Da cui

$$ds^2 = \{1 + \varphi'(\rho)^2\} d\rho^2 + 2m\varphi'(\rho) d\rho dv + (\rho^2 + m^2) dv^2.$$

Per ridurlo alla forma dell'elemento lineare delle superficie di rotazione

$$(8) \quad ds^2 = \{1 + \psi'(s)\} dr^2 + r^2 ds^2,$$

conserva' cambiare le linee coordinate  $v$ , ritenendo le  $\rho = \text{cost}^e$  (eliche). Poniamo dunque

$$v = v(v, \rho)$$

e avremo

$$ds^2 = \{1 + \varphi'(\rho)^2\} d\rho^2 + 2m\varphi'(\rho) \left\{ \frac{\partial v}{\partial v} dv + \frac{\partial v}{\partial \rho} d\rho \right\} d\rho + (\rho^2 + m^2) \left( \frac{\partial v}{\partial v} dv + \frac{\partial v}{\partial \rho} d\rho \right)^2;$$

per far sparire il rettangolo  $dv, d\rho$  dovremo porre

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = -m \frac{\varphi'(\rho)}{\rho^2 + m^2}.$$

Abbiamo dunque

$$v = kv - m \int \frac{\varphi'(\rho) d\rho}{\rho^2 + m^2} \quad (k \text{ cost}^e \text{ arbitraria})$$

avremo:

$$(9) \quad ds^2 = \left\{ 1 + \frac{\rho^2 \varphi'(\rho)}{\rho^2 + m^2} \right\} d\rho^2 + k^2 (\rho^2 + m^2) d\alpha^2,$$

formola che coincide colla (8) se si stabiliscono le relazioni

$$(10) \quad \begin{cases} z^2 = k^2 (\rho^2 + m^2) \\ \left\{ 1 + \psi'(z) \right\} \left( \frac{dz}{d\rho} \right)^2 = 1 + \frac{\rho^2 \varphi'(\rho)}{\rho^2 + m^2}. \end{cases}$$

Secondo che è data l'elicoido o la superficie di rotazione si eliminerà da queste formole di trasformazione  $\rho$  o  $z$  e si otterrà così una quadratica  $\varphi(z)$  o  $\varphi(\rho)$ .

### 11. - Applicazioni. -

a) Elicoido rigato ad area minima. - Se il profilo meridiano è una retta perpendicolare all'asse, l'elicoido è l'elicoido rigato ad area minima per una proprietà che studieremo più avanti. Avremo allora nelle (10)  $\varphi'(\rho) = 0$ , quindi

$$1 + \psi'(z) = \left( \frac{dz}{d\rho} \right)^2 = \frac{z^2}{k^2 (z^2 - m^2 k^2)}$$

e prendendo  $k=1$

$$z = \psi(z) = m \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - m^2}} = m \operatorname{cosh}^{-1} \frac{z}{m}$$

da cui

$$z = m \operatorname{cosh} \frac{z}{m}.$$

La curva meridiana è dunque una catenaria comune, avente per direttrice l'asse di rotazione. La superficie di rotazione corrispondente è l'elicoido catenoidale.

Le linee dell'elicoido ad area minima si distendono sui paralleli della catenode e le generatrici rettilinee sui meridiani; l'asse dell'elicoido  $\rho=0$  si distende sul

circolo di gola  $r=m$  della catenoidale.

b) Elicoidi pseudosferiche del Dini. -

Le elicoidi, che hanno per profilo meridiano una catenica e per asse l'assintoto, godono della notevole proprietà di essere a curvatura costante negativa. Po indichiamo inoltre con  $R$  la lunghezza costante della tangente alla catenica, avremo:

$$\varphi'(\rho) = \sqrt{\frac{R^2}{\rho^2} - 1},$$

quindi per la (9)

$$ds^2 = \frac{R^2 + m^2}{\rho^2 + m^2} d\rho^2 + k^2(\rho^2 + m^2) du^2$$

e ponendo

$$u = \sqrt{R^2 + m^2} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 + m^2}} = \sqrt{R^2 + m^2} \operatorname{sech} \frac{\rho}{m}$$

cioè

$$\rho = m \operatorname{sech} \frac{u}{\sqrt{R^2 + m^2}},$$

risultano

$$ds^2 = du^2 + k^2 m^2 \operatorname{cosh}^2 \frac{u}{\sqrt{R^2 + m^2}} dv^2.$$

Questa forma dell'elemento lineare appartiene alla superficie pseudosferica di rotazione del tipo iperbolico (V. § 65), il cui raggio è  $= \sqrt{R^2 + m^2}$ ; su queste superficie sono dunque applicabili le elicoidi del Dini in guisa che le elicoidi si estendono sui suoi paralleli. Al limite per  $m=0$ , l'elicoidale diventa la pseudosfera.

Osservazione. Queste notevoli elicoidi hanno per linee di curvatura di un sistema i profili meridionali (cateniche) come si verifica facilmente, osservando che i piani dei



Elicoidale del Dini

profili tagliano l'elicoide sotto l'angolo costante  $\alpha = \arccos \frac{ca}{\sqrt{R^2 + m^2}}$  (G. §40). Le linee di curvatura del secondo sistema sono tracciate sopra sfere, che tagliano ortogonalmente l'elicoide ed hanno il centro sull'asse.

12. - Equazione a derivate parziali per le superficie applicabili sopra una superficie data. -

Chiederemo questo capitolo accennando rapidamente al problema più importante e difficile della teoria delle superficie applicabili, che consisterebbe nel trovare tutte le superficie applicabili sopra una superficie data.

Sopra la superficie data scegliamo un sistema qualunque di coordinate arbitrarie  $u, v$  che siano all'elemento lineare la forma

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2;$$

il problema analitico da risolvere consiste nel trovare tre funzioni reali  $x, y, z$  delle variabili reali  $u, v$ , che soddisfino alla condizione

$$(11) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

ovvia alle equazioni simultanee alle derivate parziali

$$(12) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = F \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G \end{cases}$$

Cominciato sotto questa forma, esso non è altro che il problema di realizzare una forma di superficie nello spazio, a cui converga l'espressione



$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

per il quadrato dell'elemento lineare, e l'espressione che si può supporre data ad arbitrio colla sola condizione

$$EG - F^2 > 0.$$

Fra le tre equazioni (12) si possono eliminare due delle funzioni incognite, p. es.  $x, y$  e formare col' un' equazione alle derivate parziali del secondo ordine, cui deve soddisfare  $x$ ; alla stessa equazione soddisferanno, per la simmetria delle (12), anche  $y$  e  $z$ . Il modo più semplice per formare questa equazione s'è di osservare che la (11) si può scrivere sotto la forma

$$(11') \quad dy^2 + dz^2 = \left[ E - \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \right] du^2 + 2 \left[ F - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] du dv + \left[ G - \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \right] dv^2$$

il che rende palese che se si pone

$$E_1 = E - \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2, \quad F_1 = F - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad G_1 = G - \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2,$$

la  $x$  deve essere una funzione di  $u, v$  tale che l'elemento lineare

$$(13) \quad ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2$$

appartenga al piano. Pertanto adunque la curvatura  $K$ , di Gauss, calcolata per l'elemento lineare (13), deve essere zero. Se si forma questa equazione

$$(14) \quad K_1 = 0,$$

osservando la formula (?) § 33, si vede subito che essa s'è per  $x$  un' equazione a derivate parziali del secondo ordine, perché le derivate terze spariranno nello sviluppo. Dunque ogni funzione  $x(u, v)$ , corrispondente al nostro problema geometrico, deve essere un integrale dell'equazione (14) alle derivate parziali. Non viceversa però

ogni integrale della (14) sarà una funzione che a soddisfare al nostro problema. È infatti, perché nella  $x$  passano attraverso due funzioni reali  $y, z$  che soddisfanno la (11'), una basta che l'espressione della curvatura di Gauss per l'elemento lineare (13) sia nulla, ma occorre poi che il determinante  $L, G, -I^2$  sia positivo e questa ulteriore condizione è d'altronde sufficiente. (\*)

Corrisponderanno dunque al problema della applicabilità soltanto quegli integrali della (14) che soddisfanno alla disuguaglianza

$$(15') \quad LG - I^2 > G \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + E \left( \frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2.$$

(\*) Poiché infatti tale condizione è soddisfatta, si potrà ridurre l'espressione  $L, d\alpha^2 + 2I, d\alpha d\beta + G, d\beta^2$  alla forma

$$h(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

con una trasformazione reale di variabili (Cf. § 31). Poiché  $h = e^{\mu}$ , avremo dunque

$$d\alpha^2 = e^{\mu} (d\alpha^2 + d\beta^2),$$

dove a causa di  $K_1 = 0$  e della formula (10) § 53, avremo

$$\frac{\partial \mu}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial \mu}{\partial \beta^2} = 0.$$

Sarà dunque  $\mu$  la parte reale di una funzione  $\mu + i\nu$  della variabile complessa  $\alpha + i\beta$  e scrivendo

$$d\alpha^2 = e^{\mu + i\nu} (d\alpha + i d\beta) \cdot e^{\mu - i\nu} (d\alpha - i d\beta)$$

si poniamo

$$y + iz = \int e^{\mu + i\nu} (d\alpha + i d\beta)$$

avremo appunto

$$d\alpha^2 = dy^2 + dz^2 \quad \text{con } y \text{ e } z \text{ funzioni reali.}$$

Per gli integrali della (14), che non soddisfano a questa condizione, si vedrebbe facilmente che il secondo membro della (11') può ridursi invece che alla forma  $dy^2 + dz^2$  all'altra  $dy^2 - dz^2$  con  $y, z$  funzioni reali, quindi la equazione (14) comprende insieme i due problemi rappresentati dalle formole

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

$$dx^2 + dy^2 - dz^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Ma' fino ad ora e' stato possibile formare una sola equazione alle derivate parziali, che comprenda tutte e due le soluzioni del problema dell'applicabilita'.

## Capitolo VII.

Superficie in cui i raggi di curvatura sono funzioni uno dell'altro.

73. - Teorema di Weingarten. - Nel capitolo precedente abbiamo studiato le superficie in generale, sotto il doppio aspetto di enti addotti nello spazio e di superficie flessibili ed inestendibili. Ora ci proponiamo di esporre le applicazioni di queste teorie ad alcune classi piu' importanti di superficie.

Le ricerche più fruttuose in questo campo sono specialmente quelle, che si riferiscono alle superficie, e nei raggi principali di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro, per le quali cioè è un'invariante simultaneo  $K, H$  delle forme differenziali corrispondenti

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2,$$

(Cf. § 46), sono legati fra loro da una relazione. Ed si comprendono le superficie a curvatura costante, quelle ad area minima, le superficie di rotazione, le el. cord., etc.

Il teorema fondamentale di questa teoria, dovuto a Weingarten, stabilisce un intimo nesso fra le superficie in questione e le superficie deformate per flessione delle superficie di rotazione. La prima parte di questo teorema si enuncia:

Ciascuna falda dell'evoluta di una superficie, i cui raggi principali di curvatura  $r_1, r_2$  sono legati fra loro da una relazione  $\varphi(r_1, r_2) = 0$ , è applicabile sopra una superficie di rotazione.

Per dimostrarlo basta rammentare le proprietà espresse negli ultimi §§ del Cap. IV. Sopra la prima falda  $S$ , dell'evoluta di  $S$  le linee  $r_1 = \text{cost.}$  sono geodeticamente parallele fra loro ed hanno per curvatura geodetica

$$\frac{1}{\rho_{g1}} = \frac{1}{r_1 - r_2}$$

Ora se  $r_1, r_2$  si suppongono legati fra loro da una relazione, sarà  $\frac{1}{\rho_{g1}}$  costante lungo le linee  $r_1 = \text{cost.}$  e

quindi (§ 62) la  $S_1$  sarà applicabile sopra una superficie di rotazione.

Potremo con facilità confermare analiticamente questo risultato, mostrando la formula (21) § 31

$$ds_1^2 = dr_1^2 + E' \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 du^2.$$

Lo calcoliamo

$$-\frac{1}{r_2} = \frac{\partial \log \{ \sqrt{E'} (1 - \frac{r_1}{r_2}) \}}{\partial r_1}$$

troviamo

$$\frac{\partial \log \{ \sqrt{E'} (1 - \frac{r_1}{r_2}) \}}{\partial r_1} = \frac{\partial \log \sqrt{E'}}{\partial v} \frac{1}{\frac{\partial r_1}{\partial v}} + \frac{1 - \frac{r_1}{r_2} \frac{dr_1}{dr_2}}{r_1 - r_2};$$

ma per le (23) § 49:

$$\frac{\partial \log \sqrt{E'}}{\partial v} = \frac{r_1}{r_2 (r_1 - r_2)} \frac{\partial r_2}{\partial v},$$

Dunque

$$\frac{\partial \{ \log \sqrt{E'} (1 - \frac{r_1}{r_2}) \}}{\partial r_1} = \frac{1}{r_1 - r_2},$$

e integrando

$$\sqrt{E'} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) = e^{\int \frac{dr_2}{r_1 - r_2} + \varphi(u)}$$

Se poniamo  $\int e^{\varphi(u)} du = u_1$ , avremo dunque per l'elemento lineare  $ds_1$  della 1<sup>a</sup> falda dell'oidale:

$$(1) \quad ds_1^2 = dr_1^2 + e^{2 \int \frac{dr_2}{r_1 - r_2}} du_1^2,$$

formula che dimostra il teorema. Si può vedere che:

La forma della superficie di rotazione su cui la falda  $S_1$  è applicabile dipende solo dalla natura della relazione  $\varphi(r_1, r_2)$ , che lega i raggi di curvatura della evolvente.

È chiaro che la seconda falda  $S_2$  sarà applicabile sopra una superficie di rotazione, la cui espressione dell'elemento lineare sarà:

$$(2) \quad ds_2^2 = dr_2^2 + e^{2 \int \frac{dr_1}{r_2 - r_1}} dr_1^2.$$

In generale le due falde  $S_1, S_2$  dell'oiduta non saranno applicabili l'una sull'altra; ma ciò avverrà in casi particolari, come per esempio, quando la relazione  $\varphi(r_1, r_2) = 0$  è simmetrica rispetto ai raggi  $r_1, r_2$ .

17. - Sistemi  $\infty^2$  di rette. - Alla Dimostrazione del teorema reciproco di Weingarten prometteremo alcune considerazioni sui sistemi  $\infty^2$  di rette (congruenze), cioè quei sistemi di rette distribuite nello spazio in modo che per ogni punto passi una retta (o un numero finito di rette) del sistema.

Tagliando l'intero sistema di rette con una superficie arbitraria  $S$ , considereremo come punto di partenza di ciascuna retta (raggio) del sistema il punto (o uno dei punti) in cui è incontrata dalla  $S$ . Assumeremo allora un sistema di coordinate cartesiane  $u, v$  sulla superficie  $S$  e indicheremo con  $x, y, z$  le coordinate Cartesiane originali di un punto  $(u, v)$  della  $S$  e con  $X, Y, Z$  i coseni di direzione del raggio del sistema, che esce dal punto  $(u, v)$  di  $S$ ; così  $x, y, z, X, Y, Z$  saranno funzioni di  $u, v$  che supporremo finite e continue insieme alle loro derivate parziali. Se per  $t$  indichiamo la lunghezza del detto raggio dal punto iniziale  $(x, y, z)$  fino ad un altro suo punto arbitrario  $(\xi, \eta, \zeta)$ , avremo:

$$(3) \quad \xi = x + tX, \quad \eta = y + tY, \quad \zeta = z + tZ.$$

Chiamo ora la condizione, affinché il sistema  $\infty^2$  di raggi, definito da queste formole, sia quello

delle normali ad una superficie  $\Sigma$ . Se tale superficie  $\Sigma$  esiste, ogni raggio del sistema la incontrerà normalmente in un punto, ove la lunghezza  $t$  sarà una determinata funzione di  $u, v$ ; per determinare questa superficie scriveremo dunque assumere per  $t$  nelle (3) una tale funzione di  $u, v$ , che la superficie risultante abbia per coseno  $\rho$  direzione della normale  $X, Y, Z$ .

Supposta fatta nella (3) questa sostituzione, se io danno ad  $u, v$  incrementi infinitesimi arbitrari  $du, dv$ , dovranno gli incrementi corrispondenti  $d\xi, d\eta, d\zeta$  per  $\xi, \eta, \zeta$  soddisfare alla condizione

$$X, d\xi + Y, d\eta + Z, d\zeta = 0.$$

Ma si ha:

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + t dX, + X, dt, \\ d\eta &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + t dY, + Y, dt, \\ d\zeta &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + t dZ, + Z, dt; \end{aligned}$$

Se poniamo quindi

$$(4) \quad U = \sum X, \frac{\partial x}{\partial u}, \quad V = \sum X, \frac{\partial x}{\partial v}$$

la condizione richiesta sarà

$$(5) \quad dt = -(Udu + Vdv).$$

Per l'esistenza della superficie  $\Sigma$  è dunque necessario e sufficiente che  $Udu + Vdv$  sia un differenziale esatto, cioè che si abbia

$$(6) \quad \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u}.$$

Supposta questa condizione soddisfatta, la (5) integrata darà

$$(7) \quad t = C - \int (Udu + Vdv) \quad (C \text{ cost. arbitraria}),$$

e questi valori di  $t$  sostituito nella (2) darà un intero sistema  $\infty^1$  di superficie (parallele) normali al sistema dato di raggi.

73. - Teorema di Beltrami. - La condizione (6) può porsi sotto altra forma introducendo i coefficienti  $E, F, G$  dell'elemento lineare di  $S$  e i coseni degli angoli  $\alpha, \beta$  che il raggio del sistema uscente dal punto  $(u, v)$  di  $S$  forma colle direzioni positive delle linee  $v = \text{cost}^2$ ,  $u = \text{cost}^2$  rispettivamente. Si ha infatti

$$\cos \alpha = \sum X_i \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{U}{\sqrt{E}}, \quad \cos \beta = \sum X_i \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{V}{\sqrt{G}},$$

e la (6) può quindi scriversi

$$(8) \quad \frac{\partial(\sqrt{E} \cos \alpha)}{\partial v} = \frac{\partial(\sqrt{G} \cos \beta)}{\partial u}.$$

Supponiamo questa condizione soddisfatta e immaginiamo che le superficie  $S$  si deformi per flessione, seco trasportando il sistema di rette, in modo che gli angoli  $\alpha, \beta$  non variano, cioè in modo che ciascuna retta sia invariabilmente legata al piano tangente alla  $S$  nel suo punto di partenza. Poiché  $E, F, G$  durante la deformazione non variano, la (8) sarà sempre soddisfatta, cioè anche dopo la deformazione il sistema  $\infty^1$  di rette sarà sempre il sistema delle normali ad una serie di superficie parallele. Inoltre la lunghezza  $t$  data dalla (2),

$$t = G - \int (\sqrt{E} \cos \alpha du + \sqrt{G} \cos \beta dv)$$

relativa ad una determinata superficie della serie ortogonale rimane anch'essa invariata per la deformazione e possiamo quindi enunciare il teorema di



Beltrami:

Se un sistema  $\infty^2$  di rette uscenti dai punti di una superficie  $S$  ammette una serie di superficie ortogonali, immaginando ciascuna retta terminata ad una delle superficie  $\Sigma$  ortogonali, in ogni deformazione per flessione della superficie  $S$ , che seco trasporti le rette invariabilmente connesse colla superficie, il luogo dei medesimi estremi non cesserà mai di essere una superficie ortogonale al sistema di rete.

Un' applicazione notevole della formula (8) si ottiene, supponendo che le rette del sistema sieno tutte tangenti alla superficie iniziale  $S$ . Allora esiste sulla  $S$  un sistema  $\infty^2$  di linee, le cui tangenti formano il sistema  $\infty^2$  di raggi considerato; prendendo queste linee per linee coordinate  $v$  e le traiettorie ortogonali per linee  $u$ , avremo

$$\cos \alpha = 1, \quad \cos \beta = 0,$$

quindi la (8) diventerà  $\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0$ , formula che esprime essere le  $v = \text{cost}^e$  linee geodetiche (§ 30). Abbiamo dunque il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente, perché un sistema  $\infty^2$  di rette, tangenti ad una superficie  $S$ , sia il sistema delle normali di una superficie  $\Sigma$ , è che le linee involuolate sopra  $S$  da queste rette costituiscano un sistema ( $\infty^1$ ) di linee geodetiche.

È chiaro che nel caso attuale la superficie  $S$  è una delle falde dell'evoluto  $\Sigma$  e la lunghezza  $t$  sarà uno dei raggi di curvatura dell'evolvente  $\Sigma$ . Se  $\Sigma$

prende per parametro  $u$  l'arco delle geodetiche, contato da una traiettoria ortogonale fissa, si avrà  $E=1$ , quindi

$$t = C - u.$$

Possiamo immaginare la superficie evolvente  $\Sigma$  generata nel modo seguente. Sopra ciascuna delle geodetiche  $v = \text{cost.}$ , tendiamo un filo che termini ad una delle traiettorie ortogonali; svolgendo da ciascuna geodetica il filo, la sua estremità descriverà una curva evolvente e il luogo di tutte queste curve sarà la superficie evolvente  $\Sigma$ .

La seconda falda dell'evoluta di  $\Sigma$  si dirà la superficie complementare di  $S$  (1.<sup>a</sup> falda) rispetto a quel sistema di geodetiche. Essa può anche definirsi come il luogo dei centri di curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali delle geodetiche tracciate sopra  $S$ . (Cf. § 32).

76. - Teorema reciproco di Weingarten. - Supponiamo che la superficie  $S$  sia applicabile sopra una superficie di rotazione e consideriamo il sistema  $\infty^1$  di linee geodetiche deformate dei meridiani. Considerando per ora il caso che queste geodetiche sieno linee rette, le loro tangenti costituiranno un sistema  $\infty^2$  di raggi, che ammetteranno una serie di superficie (parallele) ortogonali. Fissiamo una di esse  $\Sigma$  e dimostriamo che i suoi raggi principali di curvatura  $r_1, r_2$  sono legati fra loro da una relazione, dipendente solo dalla forma della superficie di rotazione su cui la  $S$  è applicabile.

La superficie  $S$  è una delle falde dell'evoluta

di  $Z$ ; poniamo quella relativa al raggio  $r$ . Allora  $r$ , è eguale all'arco delle geodetiche deformate del meridiano, contenute in una traiettoria ortogonale fissa; l'altra parte  $r_1 - r_2$  è uguale al raggio di curvatura geodetica di queste traiettorie ortogonali  $W$  (deformate dei paralleli), quindi  $r_1 - r_2$  è una funzione di  $r$ , dipendente soltanto dalla forma della superficie di rotazione su cui  $S$  è applicabile.

Il caso di eccezione escluso si presenta per quelle superficie rigate (luoghi di rette) applicabili sopra superficie di rotazione, in guisa che le rette (generatrici) si distendano sui meridionali. Un esempio di superficie di questa specie l'abbiamo incontrato nell'elicoido rigato ad area minima applicabile sulla catenoida (§71). Dimosteremo più avanti (§120) che il caso escluso comprende appunto soltanto le superficie rigate applicabili sulla catenoida; ammettendo per ora questo risultato, avremo il teorema:

Escluse le superficie rigate applicabili sulla catenoida, ogni altra superficie applicabile sopra una superficie di rotazione può considerarsi come una falda dell'evoluto di una superficie, i cui raggi principali di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro.

Come applicazione del teorema di Weingarten possiamo stabilire l'altro:

Se i raggi principali di curvatura di una superficie  $S$  sono funzioni l'uno dell'altro, le sue linee di curvatura potranno determinarsi con sole quadrature.

È infatti costruita la superficie  $S$ , Determineremo con tale  
 operazione le due folie  $S_1, S_2$  dell' involuta; in queste, pel  
 teorema di Weingarten e per quello alla fine del § 60 deter-  
 mineremo con quadrature le caratteri ortogonali (geodetiche)  
 delle linee  $r_1 = \text{cost}^2$  (o  $r_2 = \text{cost}^2$ ), alle quali corrispondono  
 appunto sulla involuta  $S$  le linee di curvatura (§§ 50, 51).

11. - Forme particolari dell' elemento lineare sferico. -

Resultati. Mostriamo e dimostriamo che i due problemi di  
 trovare tutte le deformate per flessione delle superficie  
 di rotazione o di determinare le superficie di cui i raggi  
 di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro si equivalgono  
 perfettamente (\*). Quest'ultimo poi alla sua volta  
 ridursi alla ricerca di quei particolari sistemi di linee  
 ortogonali sulla sfera che danno all' elemento lineare  
 la forma

$$ds^2 = E' du^2 + G' dv^2$$

dove  $G'$  è una funzione di  $u$ .

Per dimostrarlo mostriamo che dalle (23) § 49 segue

$$\frac{\partial \log \sqrt{E'}}{\partial v} = \frac{\frac{\partial r_1}{\partial v}}{r_1 - r_2}, \quad \frac{\partial \log \sqrt{G'}}{\partial u} = \frac{\frac{\partial r_2}{\partial u}}{r_2 - r_1};$$

supponendo  $r_1, r_2$  legati da una relazione, ed deduciamo  
 integrando

$$\sqrt{E'} = \varphi(u) \cdot e^{\int \frac{dr_1}{r_1 - r_2}}, \quad \sqrt{G'} = \psi(v) \cdot e^{\int \frac{dr_2}{r_2 - r_1}}$$

ove  $\varphi(u)$  è funzione di  $u$ , e  $\psi(v)$  di  $v$ . Integrando  
 $\int \varphi(u) du, \int \psi(v) dv$

(\*) Intendiamo sempre escluso il caso sopra citato.

in  $u, v$ , avremo

$$(9) \quad \sqrt{E'} = e^{\int \frac{dr_1}{r_1 - r_2}}, \quad \sqrt{G'} = e^{\int \frac{dr_2}{r_2 - r_1}},$$

cosicchè  $E', G'$  saranno ambedue funzioni di  $r_1, r_2$  (o di  $r_2$ ) e perciò funzioni l'uno dell'altro.

Escludendo il caso che  $r_2$  sia una costante, poniamo

$$\sqrt{E'} = \frac{1}{\alpha},$$

saranno  $\sqrt{G'}, r_1, r_2$ , funzioni di  $\alpha$ . La prima delle (9) dà

$$r_1 = r_2 - \alpha \frac{dr_2}{d\alpha}$$

$$\frac{dr_1}{d\alpha} = -\alpha \frac{d^2 r_2}{d\alpha^2}$$

e la seconda

$$\sqrt{G'} = \frac{1}{\frac{dr_2}{d\alpha}}$$

Se poniamo  $r_2 = \theta(\alpha)$  ne risulterà

$$r_1 = \theta(\alpha) - \alpha \theta'(\alpha)$$

$$E' = \frac{1}{\alpha^2}; \quad G' = \frac{1}{\theta'^2(\alpha)}$$

la relazione che lega  $r_1, r_2$  si otterrà eliminando  $\alpha$  dalle due equazioni

$$r_2 = \theta(\alpha), \quad r_1 = \theta(\alpha) - \alpha \theta'(\alpha).$$

Abbiamo dunque il teorema:

A) Se di una superficie, i cui raggi di curvatura  $r_1, r_2$  sono legati da una relazione, si fa la rappresentazione sferica di Gauss, i parametri  $u, v$  delle sue linee di curvatura potranno scegliersi in guisa che l'elemento lineare sferico assuma la forma

$$(10) \quad ds^2 = \frac{du^2}{\alpha^2} + \frac{dv^2}{\theta'^2(\alpha)},$$

dove  $\alpha$  è una funzione di  $u, v$  e i raggi di curvatura  $r_1, r_2$  sono dati dalle formole

$$(11) \quad r_2^2 = \theta(\alpha), \quad r_1 = \theta(\alpha) - \alpha \theta'(\alpha).$$

È importante osservare che sottile il teorema inverso:

B) Se l'elemento lineare (10) appartiene alla sfera, esiste una superficie, che rappresentata sulla sfera ha per immagini delle sue linee di curvatura le  $u, v$  e i cui raggi principali di curvatura sono dati dalle (11).

Siano infatti  $X, Y, Z$  le coordinate 3D di un punto  $(u, v)$  sulla sfera rappresentativa; è facile vedere che le espressioni

$$r_2 \frac{\partial X}{\partial u} du + r_1 \frac{\partial X}{\partial v} dv,$$

$$r_2 \frac{\partial Y}{\partial u} du + r_1 \frac{\partial Y}{\partial v} dv,$$

$$r_2 \frac{\partial Z}{\partial u} du + r_1 \frac{\partial Z}{\partial v} dv,$$

saranno differenziali esatti. Le condizioni perché ciò accada sono

$$(r_2 - r_1) \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + \frac{\partial r_2}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\partial r_1}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = 0$$

$$(r_2 - r_1) \frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial r_2}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{\partial r_1}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} = 0$$

$$(r_2 - r_1) \frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial r_2}{\partial v} \frac{\partial Z}{\partial u} - \frac{\partial r_1}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} = 0;$$

chiamando  $A, B, C$  i primi membri di queste equazioni, abbiano identicamente

$$AX + BY + CZ = 0$$

e d'altra parte, essendo soddisfatte le (23') § 49:

$$A \frac{\partial X}{\partial u} + B \frac{\partial Y}{\partial u} + C \frac{\partial Z}{\partial u} = 0$$

$$A \frac{\partial X}{\partial v} + B \frac{\partial Y}{\partial v} + C \frac{\partial Z}{\partial v} = 0,$$

Dunque  $A = 0, B = 0, C = 0$ . Ciò posto, le formule:

$$(12) \quad \begin{cases} x = \int (r_1 \frac{\partial X}{\partial u} du + r_2 \frac{\partial X}{\partial v} dv) \\ y = \int (r_1 \frac{\partial Y}{\partial u} du + r_2 \frac{\partial Y}{\partial v} dv) \\ z = \int (r_1 \frac{\partial Z}{\partial u} du + r_2 \frac{\partial Z}{\partial v} dv) \end{cases}$$

Definiamo una superficie, che soddisfa alle condizioni richieste.

Osservazione.- Dalle formole precedenti possiamo subito calcolare i coefficienti  $E, G$  dell'elemento lineare della superficie e avremo

$$\sqrt{E} = r_1 \sqrt{E'} = e^{\int \frac{r_1 du}{r_1(r_1-1)}}, \quad \sqrt{G} = r_2 \sqrt{G'} = e^{\int \frac{r_2 dv}{r_2(r_2-1)}}$$

Operando come sopra troveremo il teorema:

A) L'elemento lineare di una superficie, i cui raggi di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro, prendendo per linee coordinate le linee di curvatura, puo' ridursi alla forma

$$(10') \quad ds^2 = \frac{du^2}{\beta^2} + \frac{dv^2}{\theta'^2(\beta)}$$

dove  $\beta$  e' una funzione di  $u, v$ , e i raggi di curvatura saranno dati dalle formole

$$(11') \quad \frac{1}{r_1} = \theta(\beta), \quad \frac{1}{r_2} = \theta(\beta) - \beta \theta'(\beta)$$

Similmente avremo un teorema analogo a B), cioè

B) Se l'elemento lineare (10') e' tale che calcolando la sua curvatura  $K$  si abbia

$$(a) \quad K = \theta(\beta) \{ \theta(\beta) - \beta \theta'(\beta) \} = \frac{1}{r_1 r_2}$$

esistera' una superficie  $S$ , il cui elemento lineare riferito alle linee di curvatura sara' dato dalla (10') e i raggi di curvatura dalla (11')

Ciuffatto se la (a) e' soddisfatta, l'elemento lineare

$$ds^2 = \frac{du^2}{\beta^2 \theta^2(\beta)} + \frac{dv^2}{\theta'(\beta) \{ \theta(\beta) - \beta \theta'(\beta) \}}$$

avrà la curvatura  $= +1$  ed apparterrà quindi alla sfera di raggio 1. Dopo ciò basta ripetere il ragionamento sotto B).

78. - Esempii. -

a) Applichiamo le formole (10), (11) alle superficie ad area minima, a quelle superficie cioè per le quali  $r_1 + r_2 = 0$ . Dovremo avere

$$2\theta(\alpha) = \alpha\theta'(\alpha),$$

quindi

$$\theta(\alpha) = k\alpha^2$$

e la costante arbitraria  $k$  potrà prendersi  $= 1$  senza nuocere alla generalità. Allora cambiando  $v$  in  $2v$ , avremo

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha^2} (du^2 + dv^2)$$

$$r_1 = \alpha^2, \quad r_2 = -\alpha^2$$

e però

$$ds^2 = \alpha^2 (du^2 + dv^2).$$

Questi risultati completano il teorema in fine al § 47, ed dimostriamo che:

Le linee di curvatura delle superficie ad area minima formano un sistema isotermo, al quale corrisponde sulla sfera rappresentativa un sistema isotermo.

I sistemi ortogonali isotermi sulla sfera possono riguardarsi come noti (§ 21). Ad ognuno di essi, che dia all'elemento lineare sferico la forma

$$ds^2 = h(du^2 + dv^2)$$

corrisponde una superficie ad area minima, coi raggi di curvatura  $r_1 = -r_2 = h$  e le coordinate dei suoi punti si ottengono dalle (15) in quadrature.



b) Superficie pseudosferiche. - Consideriamo una superficie pseudosferica, il cui raggio prenderemo per semplicità = 1.  
 Avremo

$$r_1 r_2 = -1, \quad r_1 dr_2 = -r_2 dr_1$$

per le (9')

$$\sqrt{E} = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + 1}}, \quad \sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{r_2^2 + 1}}$$

Dove, assumendo i radicali positivi, sarà  $r_1$  il raggio positivo,  $r_2$  il negativo. Indicando con  $w$  un angolo reale compreso fra 0 e  $\frac{\pi}{2}$ , possiamo porre

$$\sqrt{E} = \cos w, \quad \sqrt{G} = \sin w$$

$$r_1 = \cot w, \quad r_2 = -\operatorname{tg} w.$$

Il significato geometrico di  $w$  si rileva dalla formula (22) § 48; esso è l'angolo che le asintotiche di un sistema formano colle linee di curvatura  $v = \cot^2$ . La condizione  $K = -1$  si traduce per  $w$  nella equazione di Derivate parziali

$$(13) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \sin w \cos w.$$

Dunque: L'elemento lineare di ogni superficie pseudosferica di raggio 1, riferito alle linee di curvatura, può porsi sotto la forma

$$(14) \quad ds^2 = \cos^2 w du^2 + \sin^2 w dv^2,$$

dove  $w$  è una funzione di  $u, v$ , che soddisfa la (13), e i raggi di curvatura  $r_1, r_2$  sono dati da

$$(15) \quad r_1 = -\operatorname{tg} w, \quad r_2 = \cot w.$$

Viceversa ad ogni funzione  $w(u, v)$ , che soddisfa la (13), corrisponde una superficie pseudosferica, il cui elemento lineare è dato dalla (14), le  $u, v$  essendo le linee di curvatura.

c) Superficie a curvatura costante positiva. - Supponendo invece

$$r_1 r_2 = +1$$

le (9') daranno

$$\sqrt{E} = \frac{r_2}{\sqrt{1-r_2^2}}, \quad \sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{1-r_2^2}}$$

Potremo quindi porre  $r_2 = \operatorname{tgh} w$  e avremo

$$\sqrt{E} = \operatorname{senh} w, \quad \sqrt{G} = \operatorname{cosh} w$$

$$r_2 = \operatorname{tgh} w, \quad r_1 = \operatorname{coth} w.$$

La condizione  $K = +1$ , darà per  $w$  l'equazione a Derivate parziali

$$(13') \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = -\operatorname{senh} w \operatorname{cosh} w,$$

e abbiamo perciò il risultato:

L'elemento lineare di ogni superficie a curvatura costante  $K = +1$ , riferito alle linee di curvatura, può ridursi alla forma

$$(14') \quad ds^2 = \operatorname{senh}^2 w du^2 + \operatorname{cosh}^2 w dv^2,$$

dove  $w(u, v)$  soddisfa la (13') e  $r_1, r_2$  sono dati da

$$(15') \quad r_1 = \operatorname{coth} w, \quad r_2 = \operatorname{tgh} w.$$

Viceversa, se la (13') è soddisfatta, la (14') definisce una superficie a curvatura costante  $= +1$ , riferita alle sue linee di curvatura.

79. - Applicazioni del teorema di Weingarten. -

a) Se applichiamo il teorema di Weingarten alle evolte delle superficie ad area minima  $r_1 + r_2 = 0$ , troviamo che le due falde dell'evolte sono applicabili l'una sull'altra e sopra una medesima superficie di rotazione. Poiché la catenide è una superficie ad

area minima, per questa superficie di rotazione possiamo prendere la evoluta della catenamide, cioè la superficie generata dalla rotazione dell'evoluta della catenamide attorno alla direttrice. Pel teorema reciproco di Weingarten, la lasta completa delle deformate per flessione di questa superficie sarà composta dalle evolute delle superficie ad area minima; tutte queste deformate si otterranno quindi con sole quadrature (V. § 28 a).

b) Tutte le evolute delle superficie pseudosferiche sono applicabili sopra una medesima superficie di rotazione, l'evoluta della pseudosfera; dunque:  
Ciascuna falda dell'evoluta di una superficie pseudosferica è applicabile sulla catenamide.

c) Diamo ora qualche esempio del problema inverso, cioè: Data una superficie applicabile sopra una superficie di rotazione, trovare quelle relazioni fra il raggio di curvatura dell'evoluta secondo il teorema di Weingarten.

Osserviamo prima di tutto che, quando si considera una superficie data  $S$  come una falda dell'evoluta di una superficie  $\Sigma$ , bisogna fissare quel che il sistema  $\Sigma$  di geodetiche sopra  $S$ , le cui tangenti sono le normali di  $\Sigma$  (§ 25). Però, quando si tratta d'una superficie  $S$  applicabile sopra una superficie di rotazione, s'intenderà senz'altro che il detto sistema di geodetiche sia quello delle deformate di me-  
simo.

Essi' posto, consideriamo una superficie pseudosferica di raggio  $R$ . Qualunque sistema di geodetiche uscenti da un punto della superficie, sia questo punto reale e all'infinito, reale e a distanza finita ovvero ideale, può considerarsi come il sistema delle deformate dei meridiani di una superficie pseudosferica di rotazione (§66). All'elemento lineare, riferito a queste geodetiche e alle binettorie ortogonali, si potrà dare, a seconda dei tre casi, la forma

$$(I) \quad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2,$$

$$(II) \quad ds^2 = du^2 + h^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} dv^2,$$

$$(III) \quad ds^2 = du^2 + h^2 \operatorname{cosh}^2 \frac{u}{R} dv^2.$$

Corrispondentemente avremo tre classi di superficie evolventi  $\Sigma$ , per le quali dobbiamo cercare le corrispondenti relazioni fra  $r_1, r_2$ . Per ciò considerando la  $S$  come evoluta di  $\Sigma$  rispetto al raggio  $r_1$ , basterà per raggiungere le (I), (II), (III) alla formula

$$ds^2 = dr_1^2 + e^{2 \int \frac{dr_1}{r_1 - r_2}} dv^2$$

Data dal teorema di Weingarten (§73). Ponendo dunque

$$u = r_1 + C \quad (C \text{ cost.}^e \text{ arbitraria)},$$

avremo

$$I) \text{ Nel 1.}^o \text{ caso} \quad \int \frac{dr_1}{r_1 - r_2} = \frac{r_1 + C}{R}$$

quindi

$$(I') \quad r_1 - r_2 = R.$$

II) Nel 2° caso

$$\int \frac{dr_1}{r_1 - r_2} = \log \operatorname{tanh} \frac{r_1 + C}{R},$$

Da cui

$$(II') \quad r_1 - r_2 = R \operatorname{tgh} \frac{r_1 + C}{R}.$$

III) Nel 3° caso

$$\int \frac{dr_1}{r_1 - r_2} = \log \operatorname{cth} \frac{r_1 + C}{R}$$

quindi

$$(III') \quad r_1 - r_2 = R \operatorname{cote} \frac{r_1 + C}{R}.$$

Il valore di  $C$  dipende dalla superficie  $\Sigma$  della serie parallela che si considera, ma nel caso I) la corrispondente relazione (I') ne è indipendente.

Osservazione. - Per le evolventi delle superficie a curvatura costante positiva  $K = +\frac{1}{R^2}$ , si trovano invece l'unica relazione

$$r_1 - r_2 = R \operatorname{tg} \frac{r_1 + C}{R}.$$

80. - Superfici complementari delle pseudosferiche. - Cerchiamo ora su quale superficie di rotazione saranno applicabili le superficie complementari (§ 15) della pseudosferica  $S$  nei rispettivi casi (I), (II), (III).

L'elemento lineare  $ds_2$  della seconda falda dell'evolvente essendo dato da

$$ds_2^2 = dr_2^2 + e^{-2\frac{r_2}{R}} dv^2,$$

avremo nel caso I)

$$ds_2^2 = dr_2^2 + e^{-\frac{2r_2}{R}} dv^2$$

e ponendo  $r_2 = -u$

$$ds_2^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2,$$

che è il nuovo l'elemento lineare della pseudosfera.

Potremmo enunciare questo risultato così:

Sopra una superficie pseudosferica  $S$  di raggio  $R$  si tracci un sistema di geodetiche parallele e su ciascuna delle tangenti a queste geodetiche si stacchi, a partire dal punto di contatto e nel senso, secondo cui le tangenti concorrono al punto comune all'infinito un segmento  $= R$ ; la superficie  $S'$  luogo degli estremi sarà una nuova superficie pseudosferica di raggio  $R$ .

Come il sistema di geodetiche parallele sopra  $S$  costituiscono una semplice infinita, così nota sopra  $S$  le linee geodetiche, potremo dedurre, senza calcolo d'integrazione, di nuove superficie pseudosferiche.

Per ciascuna di queste, seguendo una quadratura, si troveremo nelle medesime immagini, rispetto alle nuove superficie (cfr più avanti § 91), e potremo dedurre da ciascuna di esse di nuove superficie pseudosferiche etc..

II) Nel secondo caso si trova per l'elemento lineare della seconda falda

$$ds^2 = \operatorname{tgh}^2 \frac{z+c}{R} dz^2 + \frac{dv^2}{\operatorname{cch}^2 \frac{z+c}{R}},$$

il quale appartiene alla superficie di rotazione generata dalla curva

$$z = \frac{R}{\sqrt{R^2 k^2 + 1}} \operatorname{sen} \varphi, \quad z = R \left\{ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi + \operatorname{csc} \varphi \right\},$$

(dove  $k$  è una costante e  $\varphi$  un parametro variabile). Questa curva è la proiezione della trattive ordinaria (§ 65) sopra un piano che passa per l'asintoto e può dirsi trattive accorciata.

III) Nel terzo caso troveremo per curva meridiana quella  
 data dalle equazioni

$$z = \frac{R}{\sqrt{1-R^2}} \cos \varphi, \quad z = R \left\{ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi + \cos \varphi \right\};$$

essa può darsi per analogia alla precedente: trattive  
 allungata.

## Capitolo VIII.

Le superficie a curvatura costante.

### Geometria pseudosferica.

81. - Rappresentazione conforme delle superficie  
 pseudosferiche sul piano. - Tra le superficie studiate  
 nel Capitolo precedente sono importantissime quelle a  
 curvatura totale  $K$  costante, e noi vogliamo ora intrin-  
 secamente uno studio più dettagliato, cominciando dallo  
 stabilire le proprietà fondamentali della loro geometria  
 nel caso del Cap. V § 33.

La geometria delle superficie a curvatura costante  
 nulla o positiva coincide coll'ordinaria geometria piana o

sferica; ed limiteremo quindi alla geometria delle superficie pseudosferiche o, come diremo, alla geometria pseudosferica. Per queste ricerche ci serviremo di una rappresentazione conforme delle superficie pseudosferiche sul piano, rappresentazione che ha servito utilmente anche in recenti ricerche di Analitici (\*).

Prescindendo da ogni forma concreta di superficie, piana o sferica, ritoveremo la superficie definita in tutta la sua generalità dalla forma del suo elemento lineare. (§ 33) e per questo assumeremo

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2,$$

dove  $R$  è il raggio della superficie pseudosferica (Cf. § 63). Per tutti i valori reali e finiti di  $u$  la funzione  $\sqrt{e} = e^{\frac{u}{R}}$  rimane positiva, finita e continua; quindi (§ 33) ad ogni coppia  $(u, v)$  di valori finiti e reali per  $u, v$  corrisponderà un punto reale e a bitto, già finita della superficie e viceversa; e valori infiniti di  $u, v$  punti all'infinito della superficie.

Per effettuare la rappresentazione conforme della superficie sul piano, riduciamo la (1) ad parametri isometrici col porre  $e^{\frac{u}{R}} = \frac{R}{u}$ ; ne risulterà

$$(1') \quad ds^2 = \frac{R^2}{u^2} (du^2 + dv^2).$$

(\*) Klein. - Elliptische Functionen und Gleichungen fünften Grades (Math. Annalen Bd. 14)

Poincaré. - Théorie des groupes Fuchsien et des fonctions Fuchsiennes (Acta Mathematica, Bd. 1).



Preghiamo ora sul piano un sistema di coordinate Cartesiane ortogonali  $x, y$  e ponendo

$$(2) \quad x = v, \quad y = u = R e^{-\frac{u}{R}}$$

avremo le formole di una rappresentazione conforme della superficie sul piano. I punti reali della superficie corrispondono unitocamente ai punti del piano rappresentativo della parte positiva dell'asse  $y$ , ovvero, come diremo, ai punti del semipiano positivo. I punti dell'asse delle  $x$  e i punti all'infinito del piano saranno immagini dei punti all'infinito della superficie.

Vediamo ora quali immagini avremo sul piano le linee geodetiche della superficie. Essendo la (1) l'espressione dell'elemento lineare, la equazione in termini finiti delle geodetiche sarà per la (14) § 32:

$$v = \pm k \int \frac{du}{e^{\frac{u}{R}} \sqrt{e^{\frac{2u}{R}} - k^2}} + b = \pm \frac{R}{k} \frac{\sqrt{e^{\frac{2u}{R}} - k^2}}{e^{\frac{u}{R}}} + b,$$

Dove  $k, b$  sono costanti arbitrarie. Per le (2) la linea immagine sul piano avrà per equazione

$$(3) \quad (x-b)^2 + y^2 = \frac{R^2}{k^2},$$

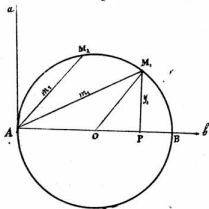
cioè sarà un circolo col centro sull'asse delle  $x$ ; viceversa ogni circolo ortogonale all'asse delle  $x$  avrà per linea obiettiva sulla superficie una geodetica. Ne fanno eccezione le geodetiche  $v = \text{cost}^{\pm}$ , le quali sono rappresentate dalle rette perpendicolari all'asse  $x$  (circoli col centro all'infinito).

Esaminiamo ed. più come vien data nel piano rappresentativo la distanza geodetica obiettiva di due punti della superficie. L'arco immagine della geodetica sarà il arco (3); l'arco indefinito della geodetica è dato dalla formola (V. § 32, (14))

$$s = \int \frac{e^{\frac{u}{R}} du}{\sqrt{e^{\frac{2u}{R}} - k^2}} = R \log \left\{ e^{\frac{u}{R}} + \sqrt{e^{\frac{2u}{R}} - k^2} \right\} = R \log \left\{ \frac{R}{y} + \sqrt{\frac{R^2}{y^2} - k^2} \right\}.$$

Quindi se  $M_1, M_2$  sono i due punti immagini sul arco (3) e  $y_1, y_2$  le loro ordinate, la distanza geodetica  $\delta$  dei due punti obiettivi sarà:

$$\delta = R \log \frac{\frac{R}{y_1} + \sqrt{\frac{R^2}{y_1^2} - k^2}}{\frac{R}{y_2} + \sqrt{\frac{R^2}{y_2^2} - k^2}}.$$



Siano ora  $A, B$  i due punti d'intersezione del detto arco coll'asse delle  $x$  e indichiamo con  $\alpha$  la tangente in  $A$  al circolo e con  $\beta, m_1, m_2$  rispettivamente le rette  $AB, AM_1, AM_2$ ; avremo

$$y_1 = \frac{R}{k} \operatorname{sen} (2. \beta m_1),$$

da cui

$$\frac{R}{y_1} + \sqrt{\frac{R^2}{y_1^2} - k^2} = k \frac{\cos \beta m_1}{\operatorname{sen} \beta m_1} = k \frac{\operatorname{sen} \alpha m_1}{\operatorname{sen} \beta m_1}.$$

Similmente sarà

$$\frac{R}{y_2} + \sqrt{\frac{R^2}{y_2^2} - k^2} = k \frac{\operatorname{sen} \alpha m_2}{\operatorname{sen} \beta m_2},$$

e quindi

$$(4) \quad \delta = R \log [\alpha \beta m_1 m_2] = R \log [ABM_1M_2],$$

Ove  $(\alpha, \beta, m, m_2)$ ,  $(A, B, M_1, M_2)$  indicano rispettivamente i rapporti anarmonici delle quattro rette  $\alpha, \beta, m, m_2$  e dei quattro punti  $A, B, M_1, M_2$ . Ne concludiamo:

La distanza geodetica dei due punti obiettivi di  $M_1, M_2$  è proporzionale al logaritmo del rapporto anarmonico, che i punti  $M_1, M_2$  fanno sul circolo immagine coi due punti  $A, B$  ove il circolo sega l'asse delle  $x$ .

Nel caso particolare che il circolo  $D$  consenta in una retta parallela all'asse  $y$ , abbiamo

$$S = R \log \frac{y_1}{y_2},$$

formula che è un caso particolare della precedente (4).

Due punti qualunque del semipiano positivo possono essere congiunti con una circonferenza ortogonale all'asse  $x$  e con una sola. Ne segue che due punti della superficie pseudosferica individuano sempre una sola geodetica; per una tale superficie vale dunque, come per il piano, il teorema:

Due geodetiche che abbiano due punti a comune combaciano in tutta la loro estensione.

§2. - Movimenti della superficie in se stessa. -  
Poniamo

$$w = x + iy = v + iu,$$

ed indichiamo con  $w$ , la variabile complessa coniugata  $w = v - iu$ ; l'elemento lineare (1') della superficie in coordinate simmetriche immaginarie (§23) diverrà

$$(3) \quad ds^2 = - \frac{4R^2}{(w - \bar{w})^2} dw d\bar{w}.$$

Immagineremo distribuiti i valori della variabile complessa  $w$ , invece che sul piano di Gauss, sulla superficie piana sferica e ad ogni valore della variabile complessa col l'ordinata  $y$  positiva e sarà un punto reale della superficie e viceversa. Ciò fatto, possiamo domandare quale sarà la rappresentazione analitica di una delle  $\infty^3$  applicabilità (Cf. §64) della superficie in se' medesima, e, come diremo, dei movimenti (con flessione) della superficie in se' stessa.

Per ogni tale movimento, un punto  $w$  della superficie si trasporta in un punto  $w'$  e ad ogni figura descritta da  $w$  corrisponde una figura simile (eguale) descritta da  $w'$ ; dunque sarà  $w'$  una funzione della variabile complessa  $w$  o della coniugata (Cf. §26). Siccome ad ogni valore di  $w$  corrisponde un solo valore di  $w'$  e viceversa, da noti principii della teoria delle funzioni concluderemo che  $w'$  è funzione lineare di  $w$  (o di  $\bar{w}$ ), poniamo:

$$(b) \quad w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta};$$

Di più i punti all'infinito della superficie rimanendo all'infinito per il movimento, dovrà essere  $w'$  reale per  $w$  reale, quindi i coefficienti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  dovranno essere reali. Infine quando  $w$  ha la ordinata  $y$  positiva, rappresenta un punto reale della superficie e però anche  $w'$  deve avere l'ordinata positiva; ciò porta, come subito si vede dalla (b), che sia

$$\alpha\delta - \beta\gamma > 0.$$

Ma anche indipendentemente da queste considerazioni è facile convincersi che la (6) rappresenta un movimento della superficie in sé medesima, poiché dalla (6) segue

$$dw' = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma w + \delta)^2} dw$$

e indicando con  $w'$  la coniugata di  $w$

$$w'_i = \frac{\alpha w_i + \beta}{\gamma w_i + \delta}, \quad dw'_i = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma w_i + \delta)^2} dw_i,$$

quindi

$$dw' dw'_i = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\gamma w + \delta)^2 (\gamma w_i + \delta)^2} dw dw_i,$$

$$\frac{dw' dw'_i}{(w' - w'_i)^2} = \frac{dw dw_i}{(w - w_i)^2},$$

la quale formula è identica che per la sostituzione (6) l'elemento lineare (5) si trasforma in sé stesso.

Nello stesso modo vediamo che la (6) è la formula più generale possibile per un movimento della superficie in sé medesima, poiché si può disporre delle tre costanti in (6), cioè dei rapporti di tre dei coefficienti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  al quarto, in modo da trasportare un punto arbitrario  $P$  in uno arbitrario  $P'$  e far coincidere una direzione uscente da  $P$  con una arbitraria uscente da  $P'$ .

Quanto alla formula che si ottiene assumendo  $w$  come funzione della coniugata  $w'$  di  $w$ , essa può derivarsi dalla (6) cambiando  $w$  in  $-w$ . A questo cambiamento di  $w$  in  $-w$ , cioè alla formula

$$w' = -w,$$

corrisponde un'applicazione della superficie sopra sé stessa per ribaltamento attorno alla geodetica  $v=0$ , quindi

la formula

$$w' = \frac{-\alpha w_1 + \beta}{-\gamma w_1 + \delta}$$

rappresenta un movimento della superficie in se' medesima coniugato con un ribaltamento, per quale si cambiano le due faccie della superficie. In ogni movimento della superficie in se' medesima, dato dalla (6), si sono in generale due valori per  $w$  che rimangono fissi e sono le radici dell'equazione di secondo grado

$$(7) \quad \gamma w^2 + (\delta - \alpha)w - \beta = 0.$$

Ona possono presentarsi tre casi diversi a seconda che  
 1<sup>a</sup>  $(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma < 0$ ; 2<sup>a</sup>  $(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma = 0$ , 3<sup>a</sup>  $(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma > 0$ .

1<sup>a</sup>) Le radici della (7) sono complesse coniugate, ma e' nel semipiano positivo, l'altra nel semipiano negativo. La prima rappresenta un punto P della superficie reale e a distanza finita, che rimane fisso per movimento. In tal caso il movimento si dice ellittico e consiste in una rotazione (con flessione) attorno a P.

2<sup>a</sup>) Le radici della (7) sono reali e coincidenti. In tal caso rimane fisso un solo punto all'infinito della superficie e il movimento si dice parabolico.

3<sup>a</sup>) Le radici della (7) sono reali e distinte. Le A, B sono i punti rappresentativi di queste radici sul piano complesso  $x+iy$  (sull'asse reale), al cerchio descritto sopra il segmento AB come diametro corrisponde sulle superficie una geodetica, che scorre sopra se' stessa durante il movimento. In tal caso il movimento si dice iperbolico; esso consiste in uno strisciamento (con flessione)

Della superficie sopra si' medesima, pel quale una Pteroniana geodetica scorre sopra se' stessa. Un'immagine allora chiara di queste tre specie di movimenti si ha considerando il moto di rotazione attorno all'asse delle superficie pseudosferiche di rotazione dei tre tipi ellittico, parabolico, e iperbolico (§65).

Osservazione. - Per  $R = \infty$  la superficie pseudosferica si cambia nel piano euclideo, il moto ellittico diventa un moto di rotazione e gli altri due un moto di traslazione. Per le superficie a curvatura costante positiva (Sfera) non abbiamo che una sola specie di movimento.

83. - Nuova rappresentazione conforme. - Della figura immagine ottenuta al § 81 possiamo fare una trasformazione per raggi vettori reciproci e ne otterremo una nuova rappresentazione conforme della superficie pseudosferica. Se poniamo il centro d'inversione nel semipiano negativo, la retta limite si trasformerà in un circolo limite  $C$ , e i suoi punti interni rappresenteranno i punti reali e a distanza finita della superficie e i punti alla periferia i punti all'infinito, mentre ai punti esterni corrisponderanno soltanto punti ideali della superficie.

Le geodetiche della superficie avranno per immagine circoli ortogonali al cerchio limite  $C$  e viceversa. La distanza geodetica obiettiva si misurerà con una legge perfettamente analoga a quella della formola (4).

Fra i cerchi ortogonali al cerchio limite figurano anche le rette condotte pel suo centro; queste rappresentano un sistema di geodetiche, uscenti da un punto reale e a distanza finita della superficie.

La questa rappresentazione si arriverebbe anche direttamente, partendo dalla formola

$$(8) \quad ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} dv^2$$

per l'elemento lineare, e facendolo corrispondere al sistema polare nel piano

$$ds^2 = dp^2 + p^2 d\theta^2.$$

Riducendo ad parametri isotermici

$$u_1 = \int \frac{du}{R \operatorname{senh} \frac{u}{R}} = \log \operatorname{tgh} \frac{u}{2R},$$

$$p_1 = \int \frac{dp}{p} = \log p,$$

vediamo che la formola corrispondente di rappresentazione ne sarà ( $V^2$  § 26 formola (19))

$$\log \operatorname{tgh} \frac{u}{2R} + iv = m (\log p + i\theta) + \alpha + i\beta;$$

ma, gli angoli dovendo essere conservati anche nell'intorno dell'origine  $p=0$ , dovremo prendere  $m=1$ . Lo costante  $\beta$  può prendersi = 0 e avremo così

$$p = k \operatorname{tgh} \frac{u}{2R}, \quad v = \theta \quad (\text{dove } k = e^{-\alpha});$$

potremmo evidentemente supporre  $k=1$ , alterando soltanto il raggio settore in un dato rapporto. Le formole dell'attuale rappresentazione saranno dunque

$$(9) \quad p = \operatorname{tgh} \frac{u}{2R}, \quad v = \theta,$$

ed il cerchio limite  $C$  verrà così ad avere il raggio = 1, perchè per  $u = \infty$  si ha  $p = 1$ .



Tale rappresentazione, come anche quella del § 81, ha una stretta analogia colla rappresentazione stereografica polare della sfera (V: § 21). Dimosteremo infatti che in queste rappresentazioni ogni circolo geodetico della superf. cioè pseudosferica ha per immagine un circolo nel piano e viceversa. Per questo cominceremo dall'osservare che:

Le linee a curvatura geodetica costante sulle superficie pseudosferiche coincidono coi circoli geodetici (come per il piano e per la sfera). (\*)

È infatti sia  $L$  una linea a curvatura geodetica costante sopra una superficie pseudosferica; prendiamo a linee coordinate le geodetiche ( $v = \text{cost}^2$ ) ortogonali alla  $L$  e le loro traiettorie ortogonali  $u$ , fra le quali  $v=0$  sarà la  $L$ , che supponiamo sia la  $u=0$ . L'elemento lineare avrà la forma (§ 63)

$$ds^2 = du^2 + \left\{ \varphi(v) e^{\frac{u}{R}} + \psi(v) e^{-\frac{u}{R}} \right\}^2 dv^2;$$

per la curvatura geodetica della  $L$  ( $u=0$ ) abbiamo

$$\left( \frac{1}{R_g} \right)_{u=0} = \frac{1}{R} \frac{\varphi(v) - \psi(v)}{\varphi(v) + \psi(v)}$$

e perché sia costante, dovrà essere  $\varphi(v) = 0$  o  $\psi(v) = 0$ , ovvero  $\varphi(v) = k\psi(v)$  con  $k$  costante. Può quindi darsi due casi le geodetiche  $v = \text{cost}^2$  escano da un punto all'infinito della superficie, nell'ultimo da un punto reale a distanza finita: tra se  $k < 0$ , e da un punto ideale se  $k > 0$ . In ogni caso adunque potremo considerare la linea  $L$  come un cir.

---

(\*) È questa una proprietà caratteristica delle superficie a curvatura costante.

colo geodetico; ma dovremo distinguere tre specie di cerchi, quelli col centro reale e a distanza finita, quelli col centro all'infinito e quelli col centro ideale. Il secondo si considerano, che oriccioli (Lobtschewsky); il cerchio dell'ultima specie non solo altro che linee geodeticamente parallele ad una geodetica, la quale può pure considerarsi come un cerchio a centro ideale.

È facile dimostrare la proprietà enunciata della nostra rappresentazione. E inverso se  $C$  è un cerchio geodetico della superficie, esso appartiene ad un doppio sistema isotermo, di cui fanno parte le geodetiche ortogonali a  $C$ . Queste hanno per immagini dei cerchi, quindi anche le immagini delle linee del secondo sistema, in particolare quella di  $C$ , sono cerchi (cf. §36). Inversa se  $C$  è un cerchio nel piano, esso determina insieme al cerchio limite  $C$  un fascio di cerchi aventi per traiettorie ortogonali dei cerchi. Questo doppio sistema è isotermo (§37) e al secondo sistema di cerchi corrisponde sulla superficie delle geodetiche, quindi al primo delle linee a curvatura geodetica costante (§36) e in particolare a  $C$  un cerchio geodetico c. d. d.

È facile distinguere, dal cerchio immagine  $C'$ , a quale delle tre specie sopra considerate appartiene il cerchio geodetico obiettivo  $C$ . Se  $C'$  è tutto interno al cerchio limite  $C$ , il fascio di cerchi ortogonali a  $C$ ,  $C'$  passerà per due punti reali del piano, uno dei quali  $P$  sarà interno a  $C$ ; il cerchio geodetico obiettivo di  $C'$  apparterrà

alla prima specie e il suo centro sarà l'obiettivo del punto P.

Se C' tocca internamente il cerchio limite, il suo obiettivo sarà un ovale, e infine se C' taglia C in due punti, l'obiettivo sarà un cerchio a centro ideale.

Nella rappresentazione al § 81 l'obiettivo appartiene alla 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, o 3<sup>a</sup> specie secondo che il cerchio immagine giace tutto nel semipiano positivo, tocca l'asse delle x, o lo taglia in due punti.

84. - Geodetiche parallele. - Angolo di parallelismo. - Consideriamo sopra una superficie pseudosferica una geodetica  $g$  e un punto fisso o fuori di  $g$ ; cerchiamo come si comporta il fascio di geodetiche uscenti da  $o$  rispetto alla geodetica  $g$ . Rappresenteremo la superficie sul piano nel modo del § precedente e in guisa che il punto  $o$  abbia per immagine il centro  $O$  del cerchio limite. La geodetica  $g$  sarà rappresentata da un cerchio  $G$  ortogonale al cerchio  $C$  e il fascio di geodetiche uscenti da  $o$  dal fascio di rette uscenti da  $O$ . Siano  $A, B$  i punti, ove la circonferenza  $G$  tocca  $C$ ; le rette per  $O$  che cadono entro l'angolo  $A\hat{O}B$  incontrano il cerchio  $G$  in punti reali e le altre non lo incontrano. Sulla superficie le geodetiche obiettive di  $OA, OB$  sono due geodetiche  $oa, ob$ , che dicono parallele alla  $g$ , essendo i loro punti d'incontro con  $g$  all'infinito. Esse segnano il limite fra le geodetiche del fascio ( $\alpha$ ), che tagliano in punti reali la geodetica  $g$  e quelle che non la tagliano.

Se dal punto  $o$  caliamo la geodetica  $\overline{op}$  normale in  $p$  alla geodetica  $g$ , essa avrà per immagine la congiungente  $OC$  del centro  $O$  dei due cerchi  $C, G$  e poiché' gli angoli  $AOC, BOC$  sono uguali, sarà pure  $\alpha\overline{op} = \beta\overline{op}$ . Quest'angolo  $\alpha = \alpha\overline{op}$  si dice angolo di parallelismo; esso dipende soltanto dalla distanza geodetica  $d = \overline{op}$  del punto  $o$  dalla geodetica  $g$ . Per trovare la relazione che passa fra  $\alpha$  e  $d$ , osserviamo che se  $OC$  incontra la circonferenza  $G$  in  $P$ , dal triangolo rettangolo  $CAO$  si rileva

$$\overline{CA}^2 + \overline{OA}^2 = (\overline{CP} + \overline{OP})^2 = (\overline{CA} + \overline{OP})^2$$

Da cui

$$\overline{CA} = \frac{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2}{2\overline{OP}}$$

Ora  $\overline{OA} = r$ , quindi  $\overline{CA} = r \operatorname{ctg} \alpha$ ;

d'altra parte per le formole (9) della nostra rappresentazione

$$\overline{OP} = r \operatorname{tgh} \frac{d}{2R}$$

e sostituendo nella precedente

$$(10) \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{sech} \frac{d}{R},$$

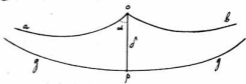
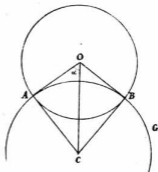
che è la formola cercata

e può anche scriversi

$$(10') \quad \operatorname{ct} \frac{\alpha}{2} = e^{\frac{d}{R}}$$

Dunque: Per ogni punto  $o$  di una superficie pseudosferica passano due geodetiche parallele ad una geodetica  $g$ ; l'angolo  $\alpha$  di parallelismo e la distanza geodetica  $d$  del punto  $o$  da  $g$  sono legati fra loro dalla (10) o (10').

Quanto più piccolo è  $d$ , tanto più  $\alpha$  converge verso  $\frac{\pi}{2}$ , cioè le geodetiche  $\overline{oa}, \overline{ob}$  parallele a  $g$  tendono a con-



fondersi in una sola, quando il punto  $o$  si avvicina a  $g$ .  
 Osservazione.- Per  $R = \infty$  si ha  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , e si ritorna  
 alla geometria piana.

85.- Triangoli geodetici.- Consideriamo un triangolo  
 geodetico  $oab$  della superficie ed effettuiamo la rappre-  
 sentazione del § 83 in modo che l'immagine del vertice  $o$   
 cada nel centro  $O$  del cerchio limite  $C$ . Il triangolo im-  
 magine  $OAB$  sarà formato da due segmenti rettilinei  
 $OA, OB$  e da un arco di cerchio  $AB$  ortogonale al cerchio  
 limite; indichiamo con  $D, E$  gli ulteriori punti d'interse-  
 zione delle rette  $OA, OB$  col cerchio  $AB$ , ed un  $C'$  sia  
 il centro. Avremo:

$$\text{ang } \hat{A} = D\hat{E}A, \text{ ang } \hat{B} = B\hat{D}E,$$

quindi

$$\text{ang } \hat{A} + \text{ang } \hat{B} + \text{ang } \hat{O} =$$

$$= \pi - \{A\hat{D}B + A\hat{E}B\} = \pi - A\hat{C}'B.$$

Risultata di qui necessamen-  
 te che: La somma dei  
 tre angoli di un triangolo  
 geodetico e' minore di due  
 retti.

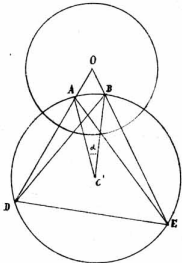
Sappiamo inoltre che  
 l'eccesso

$$\alpha = \pi - \{\text{ang } \hat{O} + \text{ang } \hat{A} + \text{ang } \hat{B}\} = A\hat{C}'B$$

e' proporzionale all'area  $\Delta$  del triangolo e precisamente

$$\Delta = R^2 \alpha \quad (\text{V. § 53b}).$$

Nella nostra rappresentazione l'angolo  $A\hat{C}'B$  ci do' adunque



una quantità proporzionale all'area del triangolo ort.

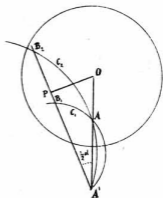
Come nella geometria piana e nella sferica, potremo circoscrivere al triangolo geodetico ocb un circolo geodetico, la cui immagine sarà il circolo che passa per i punti OAB; ma a seconda dei tre casi considerati al § 83, avremo un circolo geodetico a centro reale e a distanza finita, al l'infinito o ideale. In questo punto vengono naturalmente a concorrere gli archi geodetici perpendicolari elevati sui punti medi dei lati.

Per mezzo delle osservazioni precedenti possiamo risolvere il problema: Trovare il luogo del vertice di un triangolo geodetico, data la base, in grandezza e posizione, e l'area  $\Delta$ .

Supponiamo la base fissa rappresentata dal segmento rettilineo OA e pel punto A condurremo il fascio di cerchi ortogonali al cerchio limite  $C_1$ ; i quali passeranno anche, come è noto, pel punto A' sul raggio OA e reciproco di A rispetto al cerchio, cioè tale che

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = 1.$$

Sopra ciascuna di queste circonferenze  $C_1, C_2, \dots$  stacciamo a partire da A gli archi  $AB_1, AB_2, \dots$  cui corrisponda l'angolo costante  $\alpha = \frac{\Delta}{R^2}$  ad rispettivi centri; il luogo dei punti  $B_1, B_2, \dots$  sarà



evidentemente una retta passante per  $A'$  ed inclinata del l'angolo  $\frac{1}{2}\alpha$  sopra la retta  $OA'$ . Questa ha per linea direttrice il luogo cercato, il quale sarà dunque un circolo col centro  $D$  reale (\*). E' anche facile calcolare la distanza geodetica  $S$  dai vertici fissi  $o, a$  del triangolo. Se ora, siano infatti nella figura rappresentativa la normale  $OP$  alla retta  $A'B, B_1, \dots$ , avremo per la (9)

$$\overline{OP} = \operatorname{tgh} \frac{S}{2R} ; \quad \overline{OA} = \operatorname{tgh} \frac{b}{2R}$$

è essendo la base data; d'altra parte

$$\overline{OP} = \overline{OA}' \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{OA} \operatorname{sen} \frac{\Delta}{2R^2},$$

Dunque

$$\operatorname{tgh} \frac{S}{2R} \operatorname{tgh} \frac{b}{2R} = \operatorname{sen} \frac{\Delta}{2R^2} \quad (**).$$

Dato la base  $b$ , il massimo dell'area corrisponde a  $S = \infty$  ed è dato da  $\Delta = 2R^2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left( \operatorname{tgh} \frac{b}{2R} \right)$ , valore che cresce al crescere di  $b$  e raggiunge il suo massimo  $\Delta = \pi R^2$  per  $b = \infty$ . Un tale triangolo d'area massima ha i tre vertici all'infinito.

86. - Isooperimetri. - La teoria delle figure piane o sferiche isoperimetriche può tutta fonderci sul teorema seguente:

Dati due lati di un triangolo piano o sferico, l'area è

(\*) E' noto che nella geometria sferica il luogo corrispondente è pure un cerchio (cerchio di Loxell). V. p. es. Baltzer - Stereometria § 4 p. 33.

(\*\*). Per  $R = \infty$  la formula diventa quella della geometria piana  $\Delta = \frac{1}{2}bb'$ .

massima, quando l'angolo compreso fra i lati assegnati è eguale alla somma degli altri due. (Cf. p. es. Baltzer - *Planimetria* § 13 e *Stereometria* § 4).

Possiamo facilmente dimostrare che lo stesso teorema vale anche sulle superficie pseudosferiche. Nella rappresentazione sia dato il lato  $OA$  in grandezza e posizione e il lato  $OB$  in grandezza;

$B$  sarà mobile sopra un circolo  $C'$  concentrico ad un cerchio limite  $C$ .

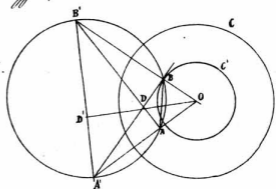
Se  $A'$  è il punto coniugato di  $A$  rispetto a  $C$ , l'angolo obiettivo sarà

proporzionale all'angolo  $BA'O$  (§ 85), quindi massima quando  $A'B$  sia tan-

gente in  $B$  al circolo  $C'$ . Consideriamo la retta  $A'B$  in questa determinata posizione e sia  $B'$  il coniugato di  $B$ .

L'immagine del terzo lato sarà un circolo ortogonale a  $C$  e passante per  $A, B$ ; i punti  $A', B'$  saranno pure su questa circonferenza e diametralmente opposti perché l'angolo  $A'B'B'$  è retto. La perpendicolare  $OD'$  calata dal vertice  $O$  del triangolo  $OA'B'$  sul lato opposto passa per l'intersezione  $D$  delle alture due  $A'B, B'A$  e i punti  $D, D'$  sono coniugati rispetto al circolo  $C$ . Nel triangolo mistilineo  $OAB$  abbiamo

$$\text{ang } A = \hat{A}BA' \quad , \quad \text{ang } B = \hat{B'AB} \quad ,$$





quindi

$$\text{ang } A + \text{ang } B = \widehat{B'DB} = \text{ang } O,$$

il che dimostra il teorema enunciato.

Di più notiamo che il circolo circoscritto al triangolo  $AOB$  passa anche per  $D$  ed è la linea trasformata per raggi vettoriali reciproci (rispetto a  $C$ ) della retta  $A'B'$ ; questa è tutta esterna a  $C$  e però il detto circolo è tutto interno. Dunque il circolo geodetico circoscritto al triangolo sferico  $oab$  ha il centro reale. Possiamo aggiungere che il centro è sul terzo lato  $ab$ ; e infatti nella rappresentazione la retta  $A'B'$  e il cerchio  $ABA'B'$  sono ortogonali, quindi anche le loro trasformate per raggi vettoriali reciproci, cioè il cerchio  $AOBD$  e  $ABA'B'$  stesso; sulla superficie la geodetica  $ab$  perpendicolare al circolo  $oab$  passa pel suo centro.

Poiché sulle superficie pseudosferiche vale il teorema fondamentale enunciato, ne varranno anche tutte le conseguenze, in particolare il teorema:

**86.** Tra tutte le curve chiuse isoperimetriche il circolo geodetico (a centro reale) racchiude l'area massima.

Osservazione. - Dalla formula

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sinh^2 \frac{u}{R} dv^2$$

si deduce che il perimetro  $l$  e l'area  $A$  di un circolo geodetico di raggio  $a$  sono dati dalle formule

$$l = 2\pi R \sinh \frac{a}{R}, \quad A = 4\pi R^2 \sinh^2 \frac{a}{2R}.$$

**87.** Trigonometria pseudosferica. - Supposto tracciato un triangolo geodetico  $ABC$  sulla superficie pseudosferica,

indicheremo con  $A, B, C$  gli angoli, con  $a, b, c$  i lati opposti e dimosteremo il teorema seguente che racchiude tutta la sua trigonometria:

Le formole trigonometriche delle superficie pseudosferiche di raggio  $R$ , si deducono da quelle relative alla sfera di raggio  $R$ , cambiando  $R$  in  $R\sqrt{-1}$ .

Con questo le funzioni trigonometriche dei lati  $D$  cambiano evidentemente in funzioni iperboliche. Per dimo-  
 strarlo basterà provare che sussistono le formole

$$(11) \quad \frac{\operatorname{senh} \frac{a}{R}}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{senh} \frac{b}{R}}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{senh} \frac{c}{R}}{\operatorname{sen} C},$$

$$(12) \quad \cos A = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \operatorname{ctgh} \frac{a}{R} - \cos B \cos C,$$

le quali si deducono dalle fondamentali della trigono-  
 metria sferica

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{a}{R}}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} \frac{b}{R}}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} \frac{c}{R}}{\operatorname{sen} C}$$

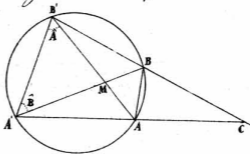
$$\cos A = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos \frac{a}{R} - \cos B \cos C,$$

facendo la detta sostituzione.

Rappresenteremo il triangolo  $CAB$  sul piano in modo che l'immagine del vertice  $C$  cada nel centro  $C$  del cerchio li-

mite. Prolungheremo i lati rettilinei  $CA, CB$  del triangolo im-

magine ed incontrarsi in  $A', B'$  congiati di  $A, B$  il cerchio  $AB$  immagine del terzo



lato. Se le Diagonali  $AB'$ ,  $A'B$  Del quadrilatero  $ABB'A'$  s'incontrano in  $M$ , dai triangoli simili  $AA'M$ ,  $BB'M$  si:

$$\overline{AA'} : \overline{BB'} = \overline{MA'} : \overline{MB'} = \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B,$$

ovvero

$$\frac{1}{\overline{CA}} - \overline{CA} : \frac{1}{\overline{CB}} - \overline{CB} = \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B;$$

ma per la (9)

$$\overline{CA} = \operatorname{tgh} \frac{b}{2R}, \quad \overline{CB} = \operatorname{tgh} \frac{a}{2R}$$

quindi

$$\frac{\operatorname{senh} \frac{a}{R}}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{senh} \frac{b}{R}}{\operatorname{sen} B},$$

il che dimostra la (11).

Osserviamo ora che si ha:

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}} = \frac{\operatorname{sen} B' \hat{A} C}{\operatorname{sen} A \hat{B}' C} = \frac{\operatorname{sen} A' \hat{A} B'}{\operatorname{sen} A \hat{B}' C}$$

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\operatorname{sen} B \hat{A} C}{\operatorname{sen} A \hat{B} C} = \frac{\operatorname{sen} A' \hat{B}' B}{\operatorname{sen} B' \hat{A} B'}$$

quindi

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} = \frac{\operatorname{sen} A' \hat{A} B' \cdot \operatorname{sen} B' \hat{A} A}{\operatorname{sen} A \hat{B}' C \cdot \operatorname{sen} A' \hat{B}' B'}$$

ma si ha

$$A+B+C = \pi - 2\hat{A} B' C, \quad -A+B+C = \pi - 2\hat{A}' B' B,$$

$$A-B+C = \pi - 2\hat{B}' A A, \quad A+B-C = \pi - 2\hat{A}' A B',$$

e la precedente può scriverli

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} = \frac{\operatorname{cd} \frac{1}{2}(A+B-C) \cdot \operatorname{cd} \frac{1}{2}(A-B+C)}{\operatorname{cd} \frac{1}{2}(A+B+C) \cdot \operatorname{cd} \frac{1}{2}(-A+B+C)} = \frac{\operatorname{cd} A + \operatorname{cd}(B-C)}{\operatorname{cd} A + \operatorname{cd}(B+C)},$$

ovvero, essendo

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CB'}} = \overline{CB}^2 = \operatorname{tgh}^2 \frac{a}{2R},$$

$$\operatorname{cd} A \left(1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{a}{2R}\right) = -\operatorname{cd}(B+C) + \operatorname{cd}(B-C) \operatorname{tgh}^2 \frac{a}{2R} =$$

$$= -\operatorname{cd} B \operatorname{cd} C \left(1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{a}{2R}\right) + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \left(1 + \operatorname{tgh}^2 \frac{a}{2R}\right),$$

Da cui, dividendo per  $1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{a}{2R}$  si ha la (12).

Osservazione. - Nell' applicare le formule della trigonometria pseudosferica bisogna por mente che possono quì, presentarsi circostanze speciali, che non hanno luogo nella trigonometria sferica. Così, per esempio, Dati i lati  $a, b, c$  del triangolo, e indicando con  $p$  il semiperimetro, per calcolare il raggio  $R$  del circolo inscritto si ha la formula

$$\operatorname{tgh} \frac{r}{R} = \frac{2 \operatorname{senh} \frac{a}{2R} \cdot \operatorname{senh} \frac{b}{2R} \cdot \operatorname{senh} \frac{c}{2R}}{\sqrt{\operatorname{senh} \frac{p}{R} \operatorname{senh} \frac{p-a}{R} \operatorname{senh} \frac{p-b}{R} \operatorname{senh} \frac{p-c}{R}}};$$

se il valore che ne risulta per  $\operatorname{tgh} \frac{r}{R}$  è  $< 1$  il circolo inscritto è a centro reale, se  $= 1$  un circolo e se  $> 1$  un circolo a centro ideale.

88. - Cenno sulla geometria non euclidea. - Ad risultati che abbiamo sviluppato in questo capitolo è manifesta l'analogia coi teoremi della geometria del piano o delle superficie a curvatura nulla, e se continuassimo a svolgere questa teoria parallelamente alla geometria piana o sferica, troveremmo sempre confermata tale analogia. Possiamo vedere a priori la ragione e intendere nello stesso tempo in quali parti la geometria pseudosferica concorderà colla piana e in quali ne discorderà. Esaminando infatti gli assiomi e i postulati fondamentali della geometria del piano, come furono posti da Euclide, è facile convincersi che essi subsistono inalterati per le superficie pseudosferiche, quando si prescinda dal postulato XII sulle parallele, nel quale si stabilisce in sostanza

che per un punto nel piano passa una sola retta che non incontri una retta fissa (parallela). In particolare il principio fondamentale della sovrapponibilità delle figure eguali è l'altro che ogni geodetica è individuata da due suoi punti, suoi validi anche per le superficie pseudosferiche.

Quel teorema della geometria piana, che non dipende dal postulato delle parallele, si conserveranno dunque inalterati nella geometria pseudosferica; gli altri si modificano, sempre però in modo da ridursi, particolare riguardando, alla forma antica, quando si supponga infinito il raggio della superficie pseudosferica.

Le considerazioni precedenti ci assicurano dell'incertezza dei tentativi fatti per dimostrare il postulato di Euclide, così per ridurlo logicamente dagli altri principi. Se una tale deduzione potesse farsi, essa dovrebbe pure valere per le superficie pseudosferiche nello spazio Euclideo.

Effettivamente quando non si ammetta per il piano il postulato di Euclide, si è condotti ad una geometria così detta astratta o non-euclidea. I suoi fondamenti furono posti da Bolyai e Lobatchewsky e che coincide perfettamente colla geometria delle superficie pseudosferiche nello spazio Euclideo. Ciò suppone per altro ammesso il principio dell'infinità della retta (\*), altrimenti è egualmente possibile un'altra

---

(\*) In questa ipotesi Legendre aveva già dimostrato in

geometria in cui la somma dei tre angoli di un triangolo è maggiore di due retti: Da un punto non parte nessuna parallela ad una retta etc., la geometria delle superficie a curvatura costante positiva nello spazio Euclideo.

89. - Rappresentazione di Beltrami. - Il primo a stabilire che i teoremi della geometria non-euclidea trovano un'effettiva interpretazione sulle superficie pseudo-sferiche fu il Beltrami, nel suo: Saggio d'interpretazione della Geometria non-euclidea. A base di questa ricerca sta una rappresentazione delle superficie pseudo-sferiche sul piano, la quale ha con quella studiata al § 83 la medesima relazione, che la proiezione centrale della sfera colla proiezione stereografica, e si può passare dalla rappresentazione al § 83 nel modo seguente (\*).

Immaginiamo una sfera tangente al piano della figura rappresentativa nel centro del cerchio limite  $O$ , il raggio  $OR$  eguale al raggio del cerchio limite. Proiettando il piano stereograficamente sulla sfera dal polo opposto, il cerchio limite verrà proiettato sull'equatore della

Indipendentemente dal postulato d'Euclide che:

La somma degli angoli di un triangolo non può superare due retti, e che: se è uguale a due retti per un triangolo particolare, lo stesso accade per tutti (Balzer-Planimetria § 2 N° 7 e seg<sup>te</sup>).

(\*) Questo modo per passare dall'una all'altra rappresentazione è dovuto a Klein.

sfera, i punti interni sull'emisfero superiore, i punti esterni sull'emisfero superiore. I cerchi ortogonali al cerchio limite si trasformeranno in cerchi il cui piano sarà ortogonale al piano dell'equatore. Proiettiamo ora i punti dell'emisfero inferiore (immagine della regione reale della superficie) ortogonalmente sul piano dell'equatore; otterremo una nuova rappresentazione prima della superficie, in cui la regione reale verrà tutta rappresentata entro il cerchio equatoriale e le geodesiche avranno per immagini le corde del cerchio limite. E' questa la rappresentazione di Beltrami. Essa non conserva gli angoli, eccettuati quelli intorno al centro della figura.

Le formule relative a questa trasformazione possono subito ottenersi nel modo seguente. Sia  $\alpha$  il raggio della sfera, quindi  $2\alpha$  il raggio del cerchio limite; per le formule della rappresentazione al § 83 saranno

$$\rho = 2\alpha \operatorname{tgh} \frac{u}{2R}, \quad \theta = v.$$

Se diciamo  $x, y$  le coordinate Cartesiane ortogonali nel piano equatoriale e  $\rho, \theta$  le coordinate polari, avremo per la costruzione indicata

$$\rho = \frac{\alpha \rho}{\rho + \alpha^2} = \alpha \operatorname{tgh} \frac{u}{R}, \quad \theta = v$$

e quindi per le formule di rappresentazione cercate

$$(13) \quad x = \alpha \operatorname{tgh} \frac{u}{R} \cdot \cos v, \quad y = \alpha \operatorname{tgh} \frac{u}{R} \cdot \sin v.$$

Se prendiamo per nuove coordinate sulla superficie le linee  $x = \operatorname{cosh}^2$ ,  $y = \operatorname{cosh}^2$ , per l'elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u}{R} dv^2$$

della superficie otterremo dalle (13):

$$(14) \quad ds^2 = K^2 \frac{(a^2 - y^2) dx^2 + 2xy dx dy + (a^2 - x^2) dy^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^2}$$

che è la formula fondamentale di Beltrami. Per cui si sopra abbiamo detto è chiaro che l'equazione di ogni linea geodetica in queste coordinate  $x, y$  sarà lineare, e viceversa ogni equazione lineare rappresenterà una geodetica (\*).  
Le linee coordinate  $x = \text{cost}^e$   $y = \text{cost}^e$  sono esse stesse geodetiche, le prime perpendicolari tutte alla  $y=0$ , le seconde alla  $x=0$ , e quindi  $\cos w = \frac{xy}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-y^2)}}$ .

## Trasformazioni delle superficie

a curvatura costante.

▼

90. - Assintotiche delle superficie pseudosferiche. -  
Supponiamo per semplicità il raggio della superficie pseudosferica = 1 e riferiamola alle sue linee di curvatura  $u, v$ ; per il teorema 8) § 78, avremo:

(\*) In una Memoria nel tomo VII, 1866 degli Annali Beltrami ha dimostrato che le sole superficie rappresentabili punto per punto sul piano in modo che le geodetiche abbiano per immagini linee rette sono quelle a curvatura costante, e ha stabilito per le pseudosferiche la forma (14) dell'elemento lineare.

Disp. 15-



$$(1) \quad ds^2 = \cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2$$

$$(2) \quad r_1 = -\operatorname{tg} \theta, \quad r_2 = \operatorname{ctg} \theta,$$

e  $\theta$  soddisfera' all'equazione a derivate parziali

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \sin \theta \cos \theta.$$

L'equazione differenziale delle asintotiche sarà (V<sup>o</sup> § 48)

$\frac{dv}{du} = \pm 1$ , e le linee

$$u+v = \operatorname{cost}^2, \quad u-v = \operatorname{cost}^2$$

saranno quindi le asintotiche. Se vogliamo riferire la superficie a queste linee, basterà porre

$$u+v = 2\alpha, \quad u-v = 2\beta$$

e risulterà

$$(4) \quad ds^2 = d\alpha^2 + 2 \cos 2\theta d\alpha d\beta + d\beta^2$$

mentre la (3) in coordinate  $\alpha, \beta$  diviene:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 (2\theta)}{\partial \alpha \partial \beta} = \sin 2\theta,$$

dove  $2\theta$  è l'angolo che comprendono fra loro le asintotiche

$$\alpha = \operatorname{cost}^2, \quad \beta = \operatorname{cost}^2.$$

Consideriamo un quadrilatero curvilineo ABCD compreso fra le quattro asintotiche

$$\alpha = \alpha_0, \quad \alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_0, \quad \beta = \beta_1;$$

sarà

$$\begin{aligned} \text{arc } AB &= \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\beta = \beta_1 - \beta_0, & \text{arc } BC &= \alpha_1 - \alpha_0, \\ \text{arc } DC &= \beta_1 - \beta_0, & \text{arc } AD &= \alpha_1 - \alpha_0, \end{aligned}$$

il che dimostra il teorema del Dini:

¶ In ogni quadrilatero curvilineo, compreso fra quattro asintotiche di una superficie pseudosferica, gli angoli opposti sono eguali.

Valutiamo inoltre l'area  $\Sigma$  compresa nel quadrilatero

ABCD; sarà

$$\Sigma = \int_a^a dx \int_b^b \cos 2\theta \, d\theta,$$

ed in per (5)

$$\Sigma = \int dx \int \frac{\partial^2 (2\theta)}{\partial x \partial \theta} \, d\theta.$$

Ritornando con  $(2\theta)_A, (2\theta)_B, (2\theta)_C, (2\theta)_D$  i valori in alcune-  
 2\theta ad A, B, C, D e con  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$  gli angoli del quadrilatero,  
 troviamo

$$\Sigma = (2\theta)_A + (2\theta)_C - (2\theta)_B - (2\theta)_D;$$

ma

$$(2\theta)_A = \hat{A}, \quad (2\theta)_C = \hat{C}, \quad (2\theta)_B = \pi - \hat{B}, \quad (2\theta)_D = \pi - \hat{D},$$

Quindi:

$$\Sigma = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} - 2\pi.$$

Se il raggio della superficie pseudosferica fosse eguale  
 ad R, si avrebbe evidentemente

$$\Sigma = R^2 (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} - 2\pi).$$

Riammentiamo inoltre che pel teorema di Gauss  
 (548) tutte le asintotiche della superficie pseudosferica  
 hanno costante = 1 il raggio di torsione e si sa che  
 una superficie le cui asintotiche abbiano la medesima  
 torsione costante è pseudosferica.

Pragga di prima curvatura delle asintotiche univoche  
 (542) ed loro raggi  $\rho_\alpha, \rho_\beta$  di curvatura geodetica, e  
 per quelli troviamo dalla formula di Bonnet (558)

$$(6) \quad \frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{\partial(2\theta)}{\partial \beta}, \quad \frac{1}{\rho_\beta} = \frac{\partial(2\theta)}{\partial \alpha}.$$

91. - La trasformazione complementare. - Il teorema  
 del 580, che può anche enunciarsi così: Di luogo dei  
 centri di curvatura geodetica di un sistema di oriccioli

paralleli sopra una superficie pseudosferica è una nuova superficie pseudosferica del medesimo raggio, ed dà l'ind. di costruire una nuova superficie pseudosferica  $S'$ , appena se sia nota una  $S$ , e sopra di essa un sistema di curve parallele. Ma in tal caso le geodetiche ortogonali si determinano con quadrature (§ 66), dopo di che, per le formole del § 51, sono noti senz'altro gli  $\infty^2$  sistemi di curve parallele e delle geodetiche ortogonali e costruibile quindi, senza nuovi calcoli d'integrazione, le  $\infty^2$  complementari pseudosferiche di  $S$ . Sopra ciascuna di quelle, p. es.  $S'$  costruiamo un sistema di curve parallele, cioè le linee che corrispondono a quegli curve paralleli di  $S$  da cui siamo partiti e dopo una nuova quadratura si troveremo con  $S'$  nelle medesime condizioni, in cui eravamo prima con  $S$ ; potremo quindi ripetere sopra  $S'$  le medesime costruzioni di così via.

La costruzione sopra riferita per trasformare la superficie pseudosferica  $S$  nella nuova  $S'$  si dice la trasformazione complementare. La sua successiva applicazione alle nuove superficie, che via via si ottengono, richiederà ogni volta una quadratura.

Vogliamo ora esprimere nelle attuali coordinate  $u, v$  le formole relative alla trasformazione complementare, e che mentre serviva di nuova conferma ai risultati ottenuti, aprirà anche la via ad un'importante generalizzazione.

Consideriamo sopra la  $S$  un sistema qualunque di geodetiche

parallela e sia  $q(u, v)$  l'angolo che la geodetica del sistema ascende dal punto  $(u, v)$  della superficie, forma: una linea  $v = \text{cost}^2$ . L'equazione differenziale di queste geodetiche sarà per la (1)  $\text{tg} q = \text{tg} \theta \frac{dv}{du}$ , cioè:

$$(2) \quad \text{sen} q \text{coss} du - \text{coss} \text{sen} \theta dv = 0;$$

ma lungo ciascuna di esse deve essere verificata l'equazione differenziale (3) § 28 delle geodetiche, che nel nostro caso diviene

$$dq = - \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} dv + \frac{\partial \theta}{\partial v} du \right),$$

ovvero

$$\left( \frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) du + \left( \frac{\partial q}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) dv = 0.$$

Questo confrontata colla (2) dimostra che la funzione  $q(u, v)$  deve soddisfare l'equazione

$$(8) \quad \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) \text{sen} \theta \text{coss} q + \left( \frac{\partial q}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) \text{coss} \text{sen} q = 0 \quad (*).$$

Ma siccome le traiettorie ortogonali di queste geodetiche sono, per ipotesi, ortogonali, la loro curvatura geodetica dovrà essere eguale, in valore assoluto, all'unità; ma per la (2) l'equazione differenziale di queste ortogonali è:

$$\text{coss} \text{coss} q du + \text{sen} \theta \text{sen} q dv = 0 \quad (**)$$

(\*) A questa medesima formula si arriva anche esprimendo colla formula (18) § 38 delle linee, avute per equazione differenziale la (2), hanno nulla la curvatura geodetica.

(\*\*) La (8) esprime che il primo membro di questa equazione è un differenziale esatto. Ponendo:

$$\alpha = \int (\text{coss} \text{coss} q du + \text{sen} \theta \text{sen} q dv)$$

e quindi per la (18') § 58

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (\sin \theta \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial v} (\cos \theta \sin \theta) \right\} = \pm 1$$

ovvero

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) \sin \theta \cos \theta - \left( \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) \cos \theta \sin \theta = \mp \sin \theta \cos \theta.$$

Questa combinata colla (8) dà:

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = \mp \cos \theta \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = \pm \sin \theta \cos \theta,$$

nelle quali formole l'incertezza del doppio segno si toglie fissando che la direzione positiva delle geodetiche, la quale forma colla direzione positiva delle linee  $v$  l'angolo  $\theta$ , sia quella secondo cui le geodetiche del sistema concorrono all'infinito. Allora basta considerare un caso particolare, p. es: quello della pseudosfera, nel quale si può porre

$$\cos \theta = \tanh u, \quad \sin \theta = \frac{1}{\cosh u}$$

mentre l'equazione  $q = 0$  definisce i meridiani nella loro

sarà  $d = \cosh^2$  l'equazione del sistema di asintoti paralleli. Le traiettorie ortogonali, cioè le geodetiche la cui equazione differenziale è la (9) si avranno con una moltiplicazione (§ 60).

Il caso delle (9) un fattore integrante della (9) è dato da  $e^{\alpha}$ ,

$$\text{quindi} \quad \beta = \int e^{\alpha} (\sin \theta \cos \theta du - \cos \theta \sin \theta dv) = \cosh^2$$

sarà l'equazione delle geodetiche parallele. Dopo ciò si ha ad subito che si ha

$$\cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2 = da^2 + e^{-2\alpha} d\beta^2.$$

Similmente, ponendo

$$\gamma = \int e^{-\alpha} (\sin \theta \cos \theta du - \cos \theta \sin \theta dv) \quad \text{sarà}$$

$$\cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2 = da^2 + e^{2\alpha} d\gamma^2.$$

Direzione positiva, per assicurarsi che  $\theta$  segua da séguito  
sono gli inferiori. Dunque:

Se  $\varphi(u, v)$  è l'angolo che le geodetiche di un sistema paral-  
lelo nella loro direzione positiva formano colla direzione  
positiva delle linee  $v = \text{cost}^2$ , daranno soddisfatte le equa-  
zioni

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = \text{cost} \text{sen} \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = -\text{sen} \theta \text{cos} \varphi \end{array} \right.$$

e viceversa ogni funzione  $\varphi(u, v)$  che soddisfa queste equa-  
zioni e derivate parziali, definisce sulla superficie pseudo-  
sferica  $S$  un sistema di geodetiche parallele (determinabili  
con quadrature).

Osserviamo che le due equazioni simultanee (9) per la  
funzione incognita  $\varphi$  sono compatibili soltanto in forza del-  
la equazione (3) soddisfatta da  $\theta$ , come si rileva, derivando  
la seconda rispetto ad  $u$ , la prima rispetto ad  $v$  e sottraendo,  
mentre. D'altra parte eliminando  $\theta$  bisogna che anche  
 $\varphi$  soddisfa l'equazione

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \text{sen} \varphi \text{cos} \varphi.$$

92. - Proprietà della trasformazione. - Facciamo ora  
la costruzione indicata dalla trasformazione complementare,  
cioè in ogni punto  $P \equiv (x, y, z)$  della superficie e nel piano  
tangente in  $P$  condurremo il segmento  $\overline{PP_1} = l$ , inclinato  $10$ ,  
per la linea  $\mathcal{D}$  costante  $v = \text{cost}^2$  dell'angolo  $\varphi$ ; il luogo  
dei punti  $P_1$  sarà la superficie complementare  $S_1$ . Indichia-  
mo con  $x_1, y_1, z_1$  le coordinate di  $P_1$ ; per la costruzione stessa

avremo:

$$(11) \quad x_1 = x + \operatorname{ctg} \varphi \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{tg} \varphi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial x}{\partial v},$$

è analogamente per  $y, z$ . Derivando questa equazione rispetto ad  $u, v$ , coll'assumere le formole (16) §43 e le (9) del § precedente, che sono soddisfatte da  $\varphi$ , troviamo:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u} = \operatorname{ctg} \varphi \cos \theta \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \varphi \cos \theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial x}{\partial v} - \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{sen} \theta \cdot X, \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{sen} \theta \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sen} \theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial x}{\partial v} + \operatorname{tg} \varphi \cos \theta \cdot X. \end{cases}$$

Derivando quindi con  $dx$  l'elemento lineare della superficie  $S_1$ , avremo subito

$$(13) \quad dx_1^2 = \cos^2 \varphi du^2 + \operatorname{sen}^2 \varphi dv^2$$

e per la curvatura  $K_1$  di  $S_1$  dalla (10)

$$K_1 = -1,$$

il che dimostra nuovamente che la  $S_1$  è una superficie pseudosferica di raggio = 1. Di più se indichiamo con  $X_1, Y_1, Z_1$  i coseni di direzione della normale ad  $S_1$ , avremo dalle (12):

$$X_1 = \operatorname{tg} \varphi \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial x}{\partial u} - \operatorname{ctg} \varphi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial x}{\partial v},$$

è analogamente per  $Y_1, Z_1$ . Di qui derivando, coll'aver riguardo alle formole già sopra citate, troviamo

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial u} = \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial Z_1}{\partial u} = \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = -\operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial v} = -\operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial Z_1}{\partial v} = -\operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial z}{\partial v};$$

ciò dimostra che anche sopra  $S_1$  le linee  $u = \operatorname{cost}^2, v = \operatorname{cost}^2$  sono le linee di curvatura e quindi le linee

$$u-v = 2\alpha = \operatorname{cost}^2, \quad u+v = 2\beta = \operatorname{cost}^2$$

le asintotiche e  $d\alpha, d\beta$  i loro archi. Dunque:

La trasformazione complementare conserva le linee di curvatura, le asintotiche e gli archi di asintotica.

Le notevoli equazioni (9), che legano fra loro due soluzioni  $q, \theta$  della medesima equazione a Derivate parziali

$$(A) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = \sin \Phi \cos \Phi,$$

sono dovute a Darboux; esse possono riguardarsi sotto un punto di vista puramente analitico. Se la soluzione  $\theta$  della (A) è nota, per determinare la coniugata  $q$  abbiamo le equazioni simultanee del 1° ordine (9), o, ciò che torna lo stesso, l'equazione a Differenziali totali

$$dq + \left( \frac{\partial \theta}{\partial v} - \cos \theta \sin \theta \right) du + \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} + \sin \theta \cos \theta \right) dv = 0,$$

il cui integrale  $q$  contiene una costante arbitraria  $C$ , per che la condizione d'integrabilità è soddisfatta. Lo prendiamo per incognita

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} q = \Lambda,$$

l'equazione assume la forma

$$d\Lambda + (\alpha \Lambda^2 + \beta \Lambda + \gamma) du + (\alpha' \Lambda^2 + \beta' \Lambda + \gamma') dv = 0,$$

Dove  $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$  sono funzioni note di  $u, v$ ; se ne è noto un integrale particolare  $\Lambda = \Lambda_1$ , basta porre

$$\Lambda = \Lambda_1 + \frac{1}{\Lambda'}$$

per ridurla alla forma lineare

$$d\Lambda' + (\alpha \Lambda' + \beta) du + (\alpha' \Lambda' + \beta') dv = 0,$$

dopo di che s'integra con quadrature (\*). Questi risultati

(\*) Questa proprietà, a cui ricorremo in seguito, vale per ogni equazione a Differenziali totali con una funzione incognita di un numero qualunque di variabili indipendenti;



analitici interpretati geometricamente combinarsi con quelli osservati al principio del § prec.<sup>te</sup>.

93. - La trasformazione di Bäcklund. - Possiamo ora domandare se le funzioni  $P, Q$  che compariscono nei secondi membri delle formole (9) di Darboux sono coltivate nel

quando essa soddisfi alle condizioni d'integrabilità e sia lineare per la funzione. Per infatti l'equazione a differenziali totali

$$(a) \quad dz + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i z + b_i) dx_i = 0$$

dove  $z$  è la funzione incognita e  $x, x_1, \dots, x_n$  le variabili indipendenti, ed ove le  $a_i$  e le  $b_i$  sono funzioni. Le condizioni d'integrabilità date dalle relazioni

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j},$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (a_i z + b_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_j z + b_j)$$

dove  $i, j$  ricevono tutti i valori  $1, 2, \dots, n$  si risolvono nelle altre

$$(b) \quad \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

$$(c) \quad \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + a_j b_i = \frac{\partial b_j}{\partial x_i} + a_i b_j.$$

Per le (b) l'espressione

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i dx_i$$

è un differenziale esatto, ponendo

$$M = \int \sum_{i=1}^{n-1} a_i dx_i,$$

le (c) dimostrano che l'espressione

$$M + \sum_{i=1}^{n-1} b_i dx_i$$

è anch'essa un differenziale esatto. Moltiplicando la (a)

modo più generale possibile, purché  $\theta, \varphi$  vengano ambedue a soddisfare all'equazione (A) e Derivate parziali. Si mostreremo che tale risultato analitico è suscettibile di generalizzazione e ne daremo poi l'interpretazione geometrica. Supponiamo che si abbia

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = F(\theta, \varphi) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} = F_1(\theta, \varphi) \end{cases}$$

e cerchiamo di Determinare  $\Gamma, \Gamma_1$  in modo che nei risultati

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \text{sen} \theta \cos \theta$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \text{sen} \varphi \cos \varphi.$$

Per ciò teoriamo Dalle (14)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

e sostituendo per  $\frac{\partial \theta}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}$  i loro valori tratti Dalle (14):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \left( \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \theta}{\partial u} - \left( \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \theta}{\partial v} + F \frac{\partial F}{\partial \varphi} - F_1 \frac{\partial F}{\partial \theta},$$

e similmente

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \left( \frac{\partial F_1}{\partial \theta} + \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \left( \frac{\partial F_1}{\partial \theta} + \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial v} + F_1 \frac{\partial F_1}{\partial \theta} - F \frac{\partial F_1}{\partial \varphi}.$$

Basterà dunque che si abbia

$$(15) \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = 0$$

$$(15') \quad F \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} - F_1 \frac{\partial F}{\partial \theta} = \text{sen} \theta \cos \theta, \quad F_1 \frac{\partial F}{\partial \theta} - F \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} = \text{sen} \varphi \cos \varphi;$$

per  $M$  (fattore integrante) se ne avrà subito l'integrale generale colle formole

$$Mx + \int \left( \sum_{k=1}^{k=n} M_k dx_k \right) = \text{cost} \frac{c}{M};$$

il che dimostra l'asserzione fatta.

Le due prime si dicono che  $F + F_1$  deve essere una funzione  
 di  $\theta - \varphi$  e  $F_1 - F$  una funzione di  $\theta + \varphi$ . Poniamo dunque

$$F + F_1 = U(\theta - \varphi), \quad F_1 - F = V(\theta + \varphi),$$

dove  $U$  e' funzione di  $\theta - \varphi$  e  $V$  di  $\theta + \varphi$ . Avremo

$$F_1 = \frac{1}{2}(U + V), \quad F = \frac{1}{2}(U - V),$$

Dopo di che le (15) saranno soddisfatte e le (15') daranno

$$UV' + VU' = \sin 2\theta$$

$$-UV' + VU' = \sin 2\varphi,$$

cioè

$$(16) \quad \begin{cases} UV' = \sin(\theta - \varphi) \cos(\theta + \varphi) \\ U'V = \sin(\theta + \varphi) \cos(\theta - \varphi). \end{cases}$$

La prima delle (16) dà

$$U = k \sin(\theta - \varphi), \quad V' = \frac{1}{k} \cos(\theta + \varphi)$$

quindi per la seconda

$$U = k \sin(\theta - \varphi), \quad V = \frac{1}{k} \sin(\theta + \varphi)$$

dove  $k$  e' una costante arbitraria. Poniamo ora

$$\frac{1-k^2}{1+k^2} = \sin \sigma, \quad -\frac{2k}{1+k^2} = \cos \sigma,$$

dove  $\sigma$  e' un conveniente angolo reale compreso fra 0  
 e  $2\pi$ ; ne risulterà

$$k = -\frac{1 - \sin \sigma}{\cos \sigma}, \quad \frac{1}{k} = -\frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma}$$

e quindi

$$F = \frac{\sin \varphi \cos \theta + \sin \sigma \cos \varphi \sin \theta}{\cos \sigma}$$

$$F_1 = -\frac{\cos \varphi \sin \theta + \sin \sigma \sin \varphi \cos \theta}{\cos \sigma}$$

Poniamo così alle formole di Darboux generali:  
 gate:

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\sin \varphi \cos \theta + \sin \theta \cos \varphi \cos \theta}{\cos \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = - \frac{\cos \varphi \sin \theta + \sin \theta \sin \varphi \cos \theta}{\cos \theta} \end{array} \right. ,$$

Dove  $\theta$  è un angolo arbitrario compreso fra 0 e  $2\pi$ . Le proprietà di questo sistema di equazioni simultanee e derivate parziali sono precisamente le stesse che per sistema particolare (9) di Darboux, che corrisponde a  $\theta = 0$ . Se  $\theta$  è una soluzione dell'equazione (A), sotto una funzione  $\varphi(u, v, C)$  includenti una costante arbitraria, che soddisfa alle (17) o quindi anche alla (A).

94. - Interpretazione geometrica. - Alla soluzione iniziale  $\theta$  dell'equazione (A) corrisponde una superficie pseudosferica  $S$  di raggio = 1, e similmente ad ogni nuova soluzione  $\varphi$ , si detta integrando le (17), una nuova superficie pseudosferica  $S_1$ . Nasce quindi la questione se è possibile realizzare una corrispondenza geometrica allo spazio, per la quale si passi dalla superficie iniziale  $S$  alla  $S_1$ . Dico che essa si ottiene nel modo seguente:

Per ogni punto  $P$  di  $S$  e nel piano tangente in  $P$  si condurrà una retta, inclinata sulla linea di curvatura  $v = \text{cost}^e$  dell'angolo  $\varphi$ , e sopra di essa si stacchi, a partire da  $P$ , il segmento costante

$$\overrightarrow{PP_1} = \cos \theta ;$$

il luogo degli estremi  $P_1$  sarà la superficie cercata  $S_1$  (\*).

(\*) Le linee sviluppate sulla superficie iniziale  $S$  del.

È chiaro che per  $\sigma = 0$  si ritorna così alla trasformazione complementare.

Per verificare le proprietà annunciate, osserviamo che indi: avendo con  $x, y, z$  le coordinate D.P., con  $x_1, y_1, z_1$  quelle di P., avremo:

$$(18) \quad x_1 = x + \cos \sigma \left( \cos \varphi \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial x}{\partial u} + \sin \varphi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial x}{\partial v} \right).$$

Una o calcoli D.D. seguenti per queste verificazioni sono così simili a quelli già fatti al § 92 per il caso di  $\sigma = 0$ , che basterà rapidamente accennarli. Dalle (18) e (17) si trae:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= (\cos \varphi \cos \theta - \sin \sigma \sin \varphi \cos \theta \sin \theta) \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial x}{\partial u} + (\sin \sigma \cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial x}{\partial v} \\ &\quad - \cos \sigma \cos \varphi \sin \theta \cdot X, \end{aligned} \right.$$

le tangenti  $\overline{PP}_1$ , hanno la seguente proprietà caratteristica: c.d.: La loro normale principale in ogni punto è inclinata dell'angolo costante  $\sigma$  sulla normale della superficie.

Per verificarlo basta osservare che l'equazione differenziale D.D. queste linee è

$$\sin \varphi \cos \theta du - \cos \varphi \sin \theta dv = 0$$

e però la loro curvatura geodetica  $\frac{1}{R_g}$ , calcolata dalla (18) § 34, è data da

$$\frac{1}{R_g} = \operatorname{tg} \sigma \frac{\cos \varphi \sin \theta - \sin \varphi \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}.$$

D'altra parte per la curvatura normale  $\frac{1}{R}$  dello medesimo linee si ha dalla (18) § 45

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos \varphi}{r_1} + \frac{\sin \varphi}{r_2} = \frac{\cos \varphi \sin \theta - \sin \varphi \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta},$$

Quindi  $\sigma$  è l'angolo d'inclinazione della normale principale sulla normale alla superficie c.d.d.

$$(19) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial v} &= (\text{sen} \sigma \text{sen} \varphi \text{cos} \theta + \text{tang} \varphi \text{sen} \theta) \frac{1}{\text{cos} \theta} \frac{\partial x}{\partial u} + (\text{sen} \rho \text{sen} \theta - \text{sen} \sigma \text{sen} \varphi \text{cos} \varphi \text{cos} \theta) \frac{1}{\text{sen} \theta} \frac{\partial x}{\partial v} \\ &+ \text{cos} \sigma \text{tang} \text{cot} \theta \cdot X, \end{aligned} \right.$$

Da cui risulta immediatamente.

$$(20) \quad d\sigma^2 = \text{cos}^2 \varphi du^2 + \text{sen}^2 \varphi dv^2$$

è però la superficie luogo dei punti  $P$ , è veramente la superficie cercata  $S_1$ .

La costruzione sopra riferita per trasformare la superficie pseudosferica  $S$  nella  $S_1$  è dovuta a Bäcklund e si dice trasformazione di Bäcklund. Indicandolo col simbolo  $B_0$ , per porre in evidenza la costante arbitraria  $\sigma$  in essa contenuta, avremo che la  $B_0$  coincide collo trasformazione complementare. Collo trasformazione  $B_0$  si ottengono da  $S$  infinite superficie pseudosferiche  $S_i$ ; ma di queste basta considerare una  $S_{(1)}$ , perchè le altre possono determinarsi con quadrature. La successiva applicazione della medesima trasformazione  $B_0$  alle successive superficie via via ottenute si fanno più con sole quadrature (Cf. § prec.<sup>o</sup>)

Possiamo però dimostrare facilmente che anche:

La trasformazione generale di Bäcklund  $B_0$  conserva le linee di curvatura, le asintotiche e gli archi di asintotico.

Per i coseni di direzione  $X, Y, Z$ , della normale in  $P$ , alla  $S$  troviamo infatti dalle (19):

$$(21) \quad X_1 = \text{cos} \sigma \text{sen} \varphi \frac{1}{\text{cos} \theta} \frac{\partial x}{\partial u} - \text{cos} \sigma \text{cos} \varphi \frac{1}{\text{sen} \theta} \frac{\partial x}{\partial v} - \text{sen} \sigma X,$$

Da cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u} &= \text{tg} \varphi \frac{\partial X}{\partial u}, & \frac{\partial Y_1}{\partial u} &= \text{tg} \varphi \frac{\partial Y}{\partial u}, & \frac{\partial Z_1}{\partial u} &= \text{tg} \varphi \frac{\partial Z}{\partial u}, \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} &= -\text{cot} \varphi \frac{\partial X}{\partial v}, & \frac{\partial Y_1}{\partial v} &= -\text{cot} \varphi \frac{\partial Y}{\partial v}, & \frac{\partial Z_1}{\partial v} &= -\text{cot} \varphi \frac{\partial Z}{\partial v}, \end{aligned}$$

di de Dini, per la (20), il teorema enunciato. Notiamo ancora che dalle (21) risulta che il segmento  $\overline{PP'}$ , toccando in  $P$  la superficie  $S_1$ , come tocca in  $P$  la superficie  $S$ . Indica l'angolo  $\Omega$  compreso dalle rispettive normali in  $P, P'$ , a causa della formula  $-\Sigma XX_1 = \cos \Omega$  è dato da

$$\Omega = \frac{\pi}{2} - \sigma.$$

95. - Trasformazione di Lie. - Un'altra trasformazione, che cambia ancora una superficie pseudosferica in un'altra, è più facilmente estendibile al caso delle superficie a curvatura costante positiva, e quella dovuta a Lie; ma per ora non possiamo attribuirle che un significato analitico.

Essa è fondata sull'osservazione che se  $\Omega(\alpha, \beta)$  è un integrale dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} = \sin \Omega,$$

anche la funzione  $\Omega(k\alpha, \frac{\beta}{k})$  è un nuovo integrale, anche con la costante arbitraria  $k$ . Per quanto abbiamo detto al § 90, vedremo che se  $\theta(u, v)$  è un integrale dell'equazione

$$(A) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \sin \theta \cos \theta,$$

la funzione

$$(22) \quad \theta\left(\frac{u+v \cos \sigma}{\cos \sigma}, \frac{u \cos \sigma + v}{\cos \sigma}\right) = \theta_\sigma(u, v)$$

con  $\sigma$  costante arbitraria, è un nuovo integrale (\*).

Alla prima funzione  $\theta(u, v)$  corrisponderà una superficie iniziale pseudosferica  $S$  di raggio = 1, ed alla funzione (22) una nuova superficie pseudosferica  $S_1$ , pienamente

(\*) Basta porre  $\frac{1}{2}(k + \frac{1}{k}) = \frac{1}{\cos \sigma}$ ,  $\frac{1}{2}(k - \frac{1}{k}) = \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma}$ .

potremmo di forma. Per ottenere le coordinate di un punto mobile sopra  $S$ , conviene prima ridurre l'elemento di area  $d\sigma$  alla forma normale.

$$ds^2 = \sin^2 \theta du^2 + \cos^2 \theta dv^2$$

alla forma normale.

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 \theta dv^2;$$

ciò richiedo soltanto, come Lie ha dimostrato, l'integrazione di un'equazione di Riccati; dopo di che si ottengono le coordinate dei punti di  $S$ , coi quadrati:—

Indicheremo simbolicamente con  $L_\sigma$  la trasformazione di Lie a costante  $\sigma$ , che fa passare dagli argomenti  $u, v$  agli altri  $\frac{u+v \sin \sigma}{\cos \sigma}, \frac{u \sin \sigma + v}{\cos \sigma}$ ; l'inversa che fa passare da  $(u, v)$  a  $(\frac{u-v \sin \sigma}{\cos \sigma}, -\frac{u \sin \sigma + v}{\cos \sigma})$  s'indicherà col simbolo  $L_\sigma^{-1}$  ed avremo evidentemente  $L_\sigma^{-1} = L_{-\sigma}$ .

La trasformazione di Bäcklund  $B_\sigma$  si può ottenere, come Lie ha osservato, combinando la trasformazione complementare con trasformazioni di Lie a precisione colla formula

$$B_\sigma = L_\sigma B_\sigma L_\sigma^{-1}.$$

Si vuole esprimere con ciò che applicando ad una superficie pseudosferica  $S$  prima la trasformazione di Lie  $L_\sigma$ , alla nuova superficie ottenuta  $S_1$ , la trasformazione complementare, che la collega in  $S_1$  e infine ad  $S_2$ , l'inversa  $L_\sigma^{-1}$  di  $L_\sigma$  si perviene ad una superficie  $S'$ , dotata da  $S$  colla trasformazione di Bäcklund  $B_\sigma$ .

Per dimostrarlo basta osservare che se

$$\vartheta(u, v), \quad \varphi(u, v)$$



Soddisfano le (17), le funzioni

$$\Theta(u, v) = \theta \left( \frac{u+v \operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{cos} \sigma}, \frac{u \operatorname{sen} \sigma + v}{\operatorname{cos} \sigma} \right)$$

$$\Phi(u, v) = \varphi \left( \frac{u+v \operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{cos} \sigma}, \frac{u \operatorname{sen} \sigma + v}{\operatorname{cos} \sigma} \right)$$

Soddisferanno le (9), cioè darà

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial v} = \operatorname{cos} \Theta \operatorname{sen} \Phi,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial u} = -\operatorname{sen} \Theta \operatorname{cos} \Phi.$$

Per le superficie a curvatura costante positiva  $K=+1$ , abbiamo dimostrato (§18) che l'elemento lineare, riferito alle linee di curvatura, assume la forma

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2 \theta \, du^2 + \operatorname{cosh}^2 \theta \, dv^2$$

Dove  $\theta$  soddisfa all'equazione

$$(23) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = -\operatorname{senh} \theta \operatorname{cosh} \theta,$$

e viceversa ad ogni funzione  $\theta$ , che soddisfi a questa equazione, corrisponde una  $\Sigma$  di una sola superficie a curvatura  $K=+1$ . Ora se si riguardano  $u, v$  come coordinate Cartesiane ortogonali nel piano, e si esegua siccome sopra  $u, v$  la sostituzione ortogonale

$$U = u \operatorname{cos} \sigma - v \operatorname{sen} \sigma$$

$$V = u \operatorname{sen} \sigma + v \operatorname{cos} \sigma$$

si ha

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial U^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial V^2};$$

quindi se  $\theta(u, v)$  soddisfa la (23), anche  $\theta(u \operatorname{cos} \sigma - v \operatorname{sen} \sigma, u \operatorname{sen} \sigma + v \operatorname{cos} \sigma)$   $\Sigma$  soddisferà. Abbiamo così una trasformazione per passare da una superficie a curvatura costante positiva ad un'altra, analoga a quella sopra considerata per le superficie pseudosferiche, e sulla quale avremo occasione di ritornare fra breve (V. § 102).

Osservazione. - Dal ultimo notiamo che se

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2 \theta du^2 + \operatorname{cosh}^2 \theta dv^2$$

è l'elemento lineare di una superficie di curvatura  $K = +1$  riferita alle linee di curvatura, e se

$$r_1 = \operatorname{cosh} \theta, \quad r_2 = \operatorname{tgh} \theta,$$

sono i suoi raggi di curvatura, allora una seconda superficie  $S_1$  di curvatura  $K = +1$ , il cui elemento lineare, riferito alle linee di curvatura, sarà

$$ds_1^2 = \operatorname{cosh}^2 \theta du^2 + \operatorname{senh}^2 \theta dv^2$$

è il raggio di curvatura

$$r_1 = \operatorname{tgh} \theta, \quad r_2 = \operatorname{cosh} \theta$$

(Cf. § 77 teorema B).

Possiamo dunque dire che le superficie di curvatura costante positiva si presentano a coppie, e in ogni coppia l'elemento lineare dell'una è uguale all'elemento lineare sferico per l'altra.

Ad ogni punto  $P = (u, v)$  dell'una corrisponde un punto  $P_1 = (u, v)$  dell'altra, e mentre le linee di curvatura si corrispondono, i raggi di curvatura sono permutati.

## Capitolo IX.

### Le superficie a curvatura media nulla o costante

16. - Equazione a derivate parziali per le superficie d'area minima. - Tra le superficie terminate ad un contorno chiuso fatto piccoli  $\delta x$   $\delta y$   $\delta z$  area minima quella che ha la più piccola area rispetto alle superficie infinitamente vicine terminate al medesimo contorno.

Se  $z = z(x, y)$  è l'equazione della superficie d'area minima, la funzione  $z$  deve soddisfare un'equazione differenziale a derivate parziali, che venne trovata la prima volta da Lagrange, applicando il metodo delle variazioni. Prendendo le solite notazioni di Monge, sarà  $\sqrt{1+p^2+q^2} dx dy$  l'elemento d'area della superficie e quindi l'area totale sarà data da

$$A = \iint \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy$$

Dove l'integrale è esteso alla porzione di piano  $xy$  interna alla curva proiezione del contorno fatto sul piano stesso. (\*)

---

(\*) Supponiamo che la parte del pezzo di superficie terminata al contorno ricopra una sola volta l'area piana corrispondente.

Ma la condizione di minimo dell'integrale è

$$\iint V(x, y, z, p, q) dx dy.$$

Dove  $V$  è una funzione di  $x, y, z$ , della funzione incognita  $z$  e delle sue derivate parziali  $p, q$  e i limiti sono fissi e dati.

Dall'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial q} = 0.$$

Nel nostro caso avremo dunque:

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0,$$

ovvero

$$(1) \quad (1+q^2)z - 2pqy - (1+p^2)t = 0;$$

questa sarà l'equazione a derivate parziali caratteristica per la superficie d'area minima.

L'interpretazione geometrica di questa equazione, venne data per la prima volta da Meunier; ella si ottiene nel modo seguente. Designando con  $r_1, r_2$  i raggi principali di curvatura della superficie, per la formula (8) §42. abbiamo:

$$r_1 + r_2 = \left\{ (1+q^2)z - 2pqy + (1+p^2)t \right\} \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{z-t}.$$

Escludendo il caso delle superficie sviluppabili in cui  $z-t=0$ , avremo dunque per la superficie ad area minima.

$$r_1 + r_2 = 0.$$

Viceversa è possibile dimostrare che ogni superficie, i cui raggi principali di curvatura sono eguali e di segno opposto, è effettivamente ad area minima per convenienti contorni chiusi tracciati sopra di ella, cioè: Le superficie d'area minima coincidono colle superficie a curvatura media nulla.

Per completare questo risultato possiamo dimostrare che l'unica superficie sviluppabile reale ad area minima è il piano. Che il piano della figura sia fra le superficie ad area minima è chiaro a priori, quando il contorno appartiene alla superficie sia piano. Se la superficie è sviluppabile sarà

$$zt - s^2 = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$$

quindi o  $q = \text{cost}^e$ , o  $p = f(q)$ , dove  $f$  indica una funzione di  $q$ . Nel primo caso avremo

$$z = ay + \varphi(x), \quad p = \varphi'(x), \quad q = a$$

$$r = \varphi''(x), \quad s = 0, \quad t = 0$$

e la (1) diverrà  $\varphi''(x) = 0$ , da cui

$$z = ay + bx + c.$$

Nel secondo sarà

$$p = f(q), \quad s = t f'(q), \quad r = t f''(q)$$

e la (1) darà

$$t \{ [q f'(q) - f(q)]^2 + 1 + f''(q) \} = 0,$$

quindi  $t = 0$ ,  $r = 0$ ,  $s = 0$ , cioè  $z$  funzione lineare di  $x$  e  $y$  c. d. d.

L'integrale generale della (1) con due funzioni arbitrarie fu trovato la prima volta da Monge; ma, essendo le formole complicate d'immaginarsi, ben poco poterono contribuire allo studio di queste superficie. Scoperto da Weierstrass l'ultimo modo che esiste fra le superficie d'area minima è le funzioni di una variabile complessa.

fu possibile stabilire una teoria di queste superficie, che è forse la più completa della Geometria Differenziale; essa è dovuta specialmente ai lavori di Weierstrass, Riemann e Schwarz. Poi la superficie all'incirca alla memoria di Weierstrass: Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen e per la parte storica del soggetto rimanderemo alla memoria di Delbriem: Sulle proprietà generali delle superficie ad area minima. (Bologna - Zanichelli 1868).

17. - Formole di Weierstrass. - Partiamo dai risultati del §18 a) relativi alla rappresentazione sferica delle superficie d'area minima. Se  $r_2$  è il raggio principale di curvatura positiva della superficie, si ha per suo elemento lineare

$$(2) \quad ds^2 = r_2 (du^2 + dv^2)$$

e per quello della sfera rappresentativa

$$(3) \quad ds'^2 = \frac{1}{r_2} (du^2 + dv^2),$$

le linee  $u, v$  sulla superficie essendo le linee di curvatura. Note le coordinate  $X, Y, Z$  dei punti della sfera in funzione di  $u, v$ , le coordinate  $x, y, z$  dei punti della superficie si otterranno con quadrature delle formole (V. §12):

$$(4) \quad \begin{cases} dx = r_2 \left( \frac{\partial X}{\partial u} du - \frac{\partial X}{\partial v} dv \right), \\ dy = r_2 \left( \frac{\partial Y}{\partial u} du - \frac{\partial Y}{\partial v} dv \right), \\ dz = r_2 \left( \frac{\partial Z}{\partial u} du - \frac{\partial Z}{\partial v} dv \right). \end{cases}$$

Supposti ora riferiti i punti della sfera nel solito modo ad meridiani e paralleli, di guisa che si abbia:

$$X = \cos \theta \cos w, \quad Y = \cos \theta \sin w, \quad Z = \sin \theta.$$

dove  $\theta$  è la latitudine e  $w$  la longitudine, proiettiamo stereograficamente i punti della sfera dal polo  $\theta = 0$  sul piano

Dell'equazione, avremo:

$$\tau = \cot \frac{\theta}{2} \cdot e^{i\omega},$$

e per la coniugata  $\tau_1$ ,

$$\tau_1 = \cot \frac{\theta}{2} \cdot e^{-i\omega}.$$

Esprimendo  $X, Y, Z$  per  $\tau, \tau_1$ . Otterremo:

$$(5) \quad X = \frac{\tau + \tau_1}{1 + \tau\tau_1}, \quad Y = \frac{i}{1 + \tau\tau_1} \frac{\tau - \tau_1}{1 + \tau\tau_1}, \quad Z = \frac{\tau\tau_1 - 1}{1 + \tau\tau_1}$$

e per l'elemento lineare sferico  $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\omega^2$ , espresso per  $\tau, \tau_1$ :

$$(6) \quad ds^2 = \frac{4 d\tau d\tau_1}{(1 + \tau\tau_1)^2}.$$

Ciò abbiamo nel primo una rappresentazione conforme della sfera, e quindi anche una rappresentazione conforme della superficie (342). La variabile complessa  $\sigma = u + iv$  sarà perciò una funzione di  $\tau = x + iy$  o della coniugata  $\tau_1 = x - iy$ ; ma il secondo caso può ridursi al primo cambiando  $v$  in  $-v$  e riterrremo quindi  $\sigma$  funzione di  $\tau$  e  $\sigma_1$  la funzione coniugata di  $\tau_1$ . Ciò posto la (3) potrà scriversi

$$ds^2 = \frac{d\sigma \cdot d\sigma_1}{z_2} = \frac{1}{z_2} \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{d\sigma_1}{d\tau_1} d\tau d\tau_1,$$

e paragonandola con la (6), avremo

$$z_2 = \frac{(\tau\tau_1 + 1)^2}{4} \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{d\sigma_1}{d\tau_1};$$

la (2) diventerà

$$ds^2 = \frac{(\tau\tau_1 + 1)^2}{4} \left( \frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 \left( \frac{d\sigma_1}{d\tau_1} \right)^2 d\tau d\tau_1.$$

Possiamo esprimere la (4) per  $\tau, \tau_1$ , facendo uso delle (5), e otteniamo (\*):

(\*) Si ottiene se si ha:

$$du = \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau + \frac{1}{2} \frac{d\sigma_1}{d\tau_1} d\tau_1,$$

$$dv = \frac{i}{2} \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau + \frac{i}{2} \frac{d\sigma_1}{d\tau_1} d\tau_1;$$

$$(6') \quad \begin{cases} dx = \frac{i}{4}(1-\tau^2) \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 d\tau + \frac{i}{4}(1+\tau^2) \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 d\tau, \\ dy = \frac{i}{4}(1+\tau^2) \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 d\tau - \frac{i}{4}(1-\tau^2) \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 d\tau, \\ dz = \frac{i}{2}\tau \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 d\tau + \frac{i}{2}\tau_1 \left(\frac{d\sigma}{d\tau_1}\right)^2 d\tau_1, \end{cases}$$

ovvero, ponendo

$$\frac{i}{2} \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 = \Gamma(\tau)$$

e indicando col simbolo  $R\psi$  la parte reale di una quantità complessa  $\psi$ :

$$(7) \quad \begin{cases} x = R \int (1-\tau^2) \Gamma(\tau) d\tau, \\ y = R \int i(1+\tau^2) \Gamma(\tau) d\tau, \\ z = R \int 2\tau \Gamma(\tau) d\tau. \end{cases}$$

Sono queste le formole di Weierstrass, le quali fanno corrispondere ad ogni superficie in area minima una determinata funzione di variabile complessa. Viceversa se  $\Gamma(\tau)$  è una funzione qualunque della variabile complessa, eseguendo le quadrature nelle (7) e separando la parte reale, si

quindi, se  $\Phi$  è una funzione di  $u, v$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tau_1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_1}, \end{aligned}$$

ovvia

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{i}{2} \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}, \\ \frac{i}{2} \frac{d\sigma_1}{d\tau_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{i}{2} \frac{d\sigma_1}{d\tau_1} \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_1}, \end{aligned}$$

e per conseguenza

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{d\sigma_1}{d\tau_1} \left( \frac{i}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{i}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) &= \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \frac{d\sigma_1}{d\tau_1}, \\ \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{d\sigma_1}{d\tau_1} \left( \frac{i}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{i}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) &= \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \frac{d\sigma}{d\tau}; \end{aligned}$$

ponendo successivamente  $\Phi = X, Y, Z$  e osservando le (5), si avranno le (6').



avremo le coordinate dei punti di una superficie ad area minima. Le linee di curvatura si otterranno eguagliando a costanti la parte reale o la immaginaria della funzione  $\sigma = \int \sqrt{2\Gamma(x)} dx$ . Per l'elemento lineare e pel valore assoluto dei raggi principali di curvatura avremo le formole:

$$(8) \quad d\sigma^2 = (1 + \tau\tau) \Gamma(x) \Gamma_1(x) dx d\tau,$$

$$(9) \quad r_2 = \frac{1}{2} (1 + \tau\tau) \sqrt{\Gamma(x) \Gamma_1(x)}.$$

Le formole (7) possono scriversi in altro modo riguardando  $\Gamma(x)$  come la derivata terza  $\varphi'''(x)$  di una funzione  $\varphi(x)$ ; esse divengono allora:

$$(7') \quad \begin{cases} x = R \{ (1 - \tau^2) \varphi''(x) + 2\tau \varphi'(x) - 2\varphi(x) \}, \\ y = R \{ i(1 + \tau^2) \varphi''(x) - 2i\tau \varphi'(x) - 2i\varphi(x) \}, \\ z = R \{ 2\tau \varphi''(x) - 2\varphi'(x) \}, \end{cases}$$

e ci danno ancora tutte le superficie ad area minima, quando  $\varphi(x)$  si riguardi come funzione arbitraria di  $x$ . Perchè se sotto questa forma hanno il vantaggio di porre in evidenza l'esistenza d'infinita superficie ad area minima algebriche. Basta infatti (ed è necessario\*) per ciò che  $\varphi(x)$  sia funzione algebrica di  $x$ . Però queste superficie algebriche sono di forma complicata.

98. - Superficie ad area minima applicabili. - Per mezzo delle formole precedenti, possiamo facilmente trovare le deformazioni per flessione di una superficie ad area minima, per le quali si conserva ad area minima. Le

---

(\*) Weierstrass - Monatsberichte der Berliner Akademie 1866.

infatti due tali superficie sono applicabili, nei punti corrispondenti, la curvatura di Gauss dovrà essere la medesima, e quindi i valori assoluti dei corrispondenti raggi di curvatura saranno eguali. Le due rappresentazioni conformi, che si ottengono sulla sfera di Gauss per le due superficie supposte  $S, S_1$ , saranno quindi eguali a causa delle formole

$$dS^2 = \frac{d\sigma^2}{r_1^2}, \quad dS_1^2 = \frac{d\sigma_1^2}{r_2^2}, \quad dS = dS_1;$$

tale eguaglianza si potrà supporre diretta, basterà nel caso opposto cambiare il senso positivo delle normali alla  $S$  o alla  $S_1$ . Potremo allora muovere la superficie  $S_1$  nello spazio in modo che la sua immagine sferica si sovrapponga alla immagine sferica di  $S$ ; dopo ciò i punti corrispondenti per l'applicabilità sopra  $S, S_1$  corrisponderanno al medesimo punto della sfera, cioè al medesimo valore di  $\tau$ . Se le coordinate di  $S$  sono date dalle (7) e quelle di  $S_1$  dalle medesime formole, cambiate  $\Gamma(\tau)$  in  $\varphi(\tau)$ , dovrà averi per la (8)

$$\Gamma(\tau)\Gamma_1(\tau) = \varphi(\tau)\varphi_1(\tau)$$

quindi

$$\text{mod } \frac{\varphi(\tau)}{\Gamma(\tau)} = 1$$

e però  $\frac{\varphi(\tau)}{\Gamma(\tau)}$  sarà una costante col modulo = 1. Avremo dunque

$$\varphi(\tau) = e^{i\alpha} \Gamma(\tau),$$

dove  $\alpha$  è una costante reale, e siccome la (8) ci mostra inversamente che l'elemento lineare non varia cambiando  $\Gamma(\tau)$  in  $e^{i\alpha} \Gamma(\tau)$ , ne concludiamo:

La deformazione più generale di una superficie ad area

minima, per cui si conserva ad area minima, si ottiene dalle (?) cambiando  $\Gamma(\tau)$  in  $e^{i\alpha}\Gamma(\tau)$ , dove  $\alpha$  è una costante arbitraria reale.

Osserviamo inoltre che mentre per la prima superficie le linee di curvatura sono date da

$$R(0) = \cot \frac{\alpha}{2}, \quad R(i\sigma) = \cot \frac{\alpha}{2},$$

$$\text{cioè} \quad u = \cot \frac{\alpha}{2}, \quad v = \cot \frac{\alpha}{2},$$

per la seconda queste linee hanno per equazione

$$R\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\sigma\right) = \cot \frac{\alpha}{2}, \quad R\left(i e^{i\frac{\alpha}{2}}\sigma\right) = \cot \frac{\alpha}{2},$$

cioè

$$u \cot \frac{\alpha}{2} - v \tan \frac{\alpha}{2} = \cot \frac{\alpha}{2}, \quad u \tan \frac{\alpha}{2} + v \cot \frac{\alpha}{2} = \cot \frac{\alpha}{2};$$

Dunque:

Le nuove linee di curvatura tagliano le antiche sotto l'angolo costante  $\frac{\alpha}{2}$ .

In particolare per  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  le linee di curvatura si congiungono in asintotiche o inversamente, e si hanno le superficie coniugate in applicabilità del Bonnet. In dicendo con  $x, y, z$ , le coordinate dei punti della coniugata in applicabilità avremo dalle (?), cambiando  $\Gamma(\tau)$  in  $i\Gamma(\tau)$ :

$$(10) \quad \begin{cases} x_1 = R \int (1-\tau^2) \Gamma(\tau) d\tau, \\ y_1 = R \int (1+\tau^2) \Gamma(\tau) d\tau, \\ z_1 = R \int 2i\tau \Gamma(\tau) d\tau. \end{cases}$$

Facciando variazioni  $\alpha$  con continuità, la superficie si deforma con continuità, conservandosi ad area minima e le

$$(11) \quad \begin{cases} x_\alpha = x \cos \alpha + x_1 \sin \alpha, \\ y_\alpha = y \cos \alpha + y_1 \sin \alpha, \\ z_\alpha = z \cos \alpha + z_1 \sin \alpha, \end{cases}$$

ci diamo le coordinate di un punto della superficie corrispondente ad un determinato valore di  $\alpha$ . Se in queste formole riguardiamo gli integrali nelle (9), (10) prendendo i medesimi limiti 0,  $\tau$ , di questa che per  $\tau=0$  siano per  $x, y, z; x_1, y_1, z_1$ , il punto (0,0,0) della superficie e il piano tangente in esso rimarrà fisso durante la deformazione, ed ogni altro punto  $(x, y, z)$  descriverà un'ellisse col centro nel punto fisso, perché eliminando  $\alpha$  dalle (11) si ha:

$$\begin{vmatrix} x_2 & x & x_1 \\ y_2 & y & y_1 \\ z_2 & z & z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(y z_2 - x y_2)^2 + (y x_2 - x y_2)^2 = (y x_1 - x y_1)^2.$$

99. - Superficie d'area minima applicabili sopra superficie di rotazione. - Supponiamo che una superficie  $S$  di area minima sia applicabile sopra una superficie di rotazione e quindi in  $\infty$  modi sopra se medesima. Durante una deformazione infinitesima della superficie in se stessa, ogni linea  $L$  deformata di un parallelo dovrà scorrere sopra se stessa; la sua immagine sferica  $L'$  subirà, per quanto si è visto sopra, una rotazione infinitesima sulla sfera e dovendo pure scorrere sopra se stessa sarà un cerchio in un piano perpendicolare all'asse di rotazione. Dunque le deformate dei paralleli avranno per immagini sferiche cerchi paralleli. Muoviamo la superficie nello spazio in modo che il diametro perpendicolare al piano di questi cerchi sia il diametro polare, che muova i punti  $\tau=0, \tau=\infty$ . Ogni rotazione della sfera attorno a

questo diametro è data analiticamente dal congruenza  $\tau$  in  $\tau e^{i\alpha}$ , dove  $\alpha$  è l'ampiezza della rotazione, e poiché:

$$ds^2 = (1 + \tau\bar{\tau})^2 \Gamma(\tau) \bar{\Gamma}(\bar{\tau}) d\tau d\bar{\tau},$$

non deve variare per questo cambiamento, dovremo avere:

$$\Gamma(\tau) \bar{\Gamma}(\bar{\tau}) = \Gamma(\tau e^{i\alpha}) \bar{\Gamma}(\tau e^{-i\alpha}),$$

cioè

$$\text{mod } \Gamma(\tau) = \text{mod } \Gamma(\tau e^{i\alpha})$$

qualunque sia  $\alpha$ . Ne segue

$$(12) \quad \Gamma(\tau e^{i\alpha}) = e^{i\beta} \Gamma(\tau),$$

dove  $\beta$  è una costante reale e derivando logaritmicamente

$$\tau e^{i\alpha} \frac{\Gamma'(\tau e^{i\alpha})}{\Gamma(\tau e^{i\alpha})} = \tau \frac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)}.$$

La funzione  $\tau \frac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)}$  è dunque costante lungo ogni circonferenza nel piano complesso  $\tau$  ed anche nell'origine; per cui seguiva

$$\frac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)} = \frac{k}{\tau}, \quad \Gamma(\tau) = C \tau^k,$$

dove  $C, k$  sono due costanti, delle quali la seconda è reale a causa della (12). Dunque:

Le superficie d'area minima applicabili sopra superficie di rotazione si ottengono dalle (1) ponendo

$$\Gamma(\tau) = C \tau^k,$$

dove  $k$  è una costante reale e  $C$  una costante qualunque.

Particolarmente interessanti sono le superficie che corrispa-  
gono a  $k = -2$ ; per esse avremo

$$x = R \left\{ C \left( \frac{1}{\tau} + \tau \right) \right\},$$

$$y = R \left\{ i C \left( \frac{1}{\tau} - \tau \right) \right\},$$

$$z = -R \left\{ 2C \log \tau \right\},$$

e siccome, cambiando  $\tau$  in  $\tau e^{i\alpha}$ ,  $z$  aumenta di una costante

te e  $x$  e  $y$  si congiungano in  $x \cos \alpha - y \sin \alpha$ ,  $x \sin \alpha + y \cos \alpha$ , se ne conducono queste superficie sono elicoide, aventi l'asse  $z$  per asse. Poniamo

$$C = \frac{m}{2} e^{i\beta}, \quad \tau = e^{-v} i w,$$

essendo  $\frac{m}{2}$ ,  $e^{-v}$  i moduli di  $C$ ,  $\tau$ , e  $\beta$ ,  $w$  i rispettivi argomenti, troveremo

$$x = m (\cos \beta \cosh v \cos w + \sin \beta \sinh v \sin w),$$

$$y = m (\cos \beta \cosh v \sin w - \sin \beta \sinh v \cos w),$$

$$z = m (\cos \beta \cdot v + \sin \beta \cdot w).$$

La superficie corrispondente a  $\beta = 0$  è la catenoida

$$\sqrt{x^2 + y^2} = m \cosh \frac{z}{m},$$

e la sua coniugata in applicabilità, corrispondente a  $\beta = \frac{\pi}{2}$  è l'elicoide già notata al § 11, che ha per equazione

$$z = m \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (*)$$

(\*) È facile dimostrare il teorema:

L'unica superficie rigata ad area minima è l'elicoide  $z = m \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ .

È infatti le generatrici di questa superficie rigata suppelte sono evidentemente asintotiche; la sua coniugata in applicabilità ha quindi un sistema di linee di curvatura geodetiche, e però nell'espressione del suo elemento lineare

$$ds^2 = r_2 (du^2 + dv^2),$$

se le  $v = \cosh^2$  sono le trasformate delle generatrici, sarà  $r_2$  (quindi anche  $r_1 = -r_2$ ) funzione della sola  $u$ . Di qui si conclude che la coniugata in applicabilità è una superficie di rotazione, cioè la catenoida, e la superficie rigata l'elicoide citata.

Le altre elioidi sono discentemente le Deformate ad area minima della sfera. Si vedrebbe facilmente che esse sono le uniche elioidi ad area minima.

100. - Nuove formole per le superficie d'area minima.  
- Riprendiamo le formole (7); se poniamo

$$(12') \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \int (1-\tau^2) F(\tau) d\tau, \\ v = i \int (1+\tau^2) F(\tau) d\tau, \\ w = \int 2\tau F(\tau) d\tau, \end{array} \right.$$

avremo

$$(13) \quad x = R(u), \quad y = R(v), \quad z = R(w),$$

dove  $u, v, w$  sono funzioni della variabile complessa  $\tau$  legate fra loro dalla relazione:

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2 = 0.$$

Se al luogo della variabile complessa  $\tau$  introduciamo una nuova variabile  $t$ , ponendo  $\tau = \varphi(t)$ , avremo ancora

$$(14) \quad \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = 0.$$

Viceversa: Se  $u, v, w$  sono funzioni della variabile complessa  $t$ , che soddisfanno la (14), le (13) daranno le coordinate di un punto mobile sopra una superficie d'area minima.

Potò infatti

$$u' = [1 - \varphi^2(t)] \psi(t), \quad v' = i [1 + \varphi^2(t)] \psi(t),$$

il che determina  $\varphi(t), \psi(t)$ , la (14) darà:

$$w' = 2\varphi(t)\psi(t)$$

e ponendo  $\tau = \varphi(t)$ ,  $\psi(t) = F(\tau)$  si ritornerà alle formole (12').

Sopra ciascuno dei piani complessi  $u, v, w$  avremo una rappresentazione conforme della sfera e quindi della superficie.

Ne segue per le (13) che le linee  $z = \text{cost}^2$  sulla superficie, (linee di livello) formano un sistema isotermo, e  $z$  è parametro d'isoterma. Viceversa, se ciò accade, la superficie è ad area minima; infatti prese per variabili indipendenti  $x, y$ , avremo:

$$ds^2 = (1+p^2)dx^2 + 2pq dx dy + (1+q^2)dy^2$$

e quindi

$$\Delta_z z = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right\};$$

la condizione  $\Delta_z z = 0$ , (§60) consideraci quindi con l'equazione caratteristica (1) §96 Delle superficie ad area minima.

Le formole (12') possono scriversi in altro modo introducendo i coseni di direzione  $X, Y, Z$  della normale alla superficie. Abbiamo infatti

$$u = x - iz, \quad v = y - iy, \quad w = z - ix;$$

ma si trova subito

$$dx dx + dy dy + dz dz = 0$$

e si ha anche

$$X dx + Y dy + Z dz = 0, ..$$

Dunque

$$dx : dy : dz = Y dz - Z dy : Z dx - X dz : X dy - Y dx.$$

Ora

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ (Y dz - Z dy)^2 + (Z dx - X dz)^2 + (X dy - Y dx)^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \end{aligned}$$

e per conseguenza

$$dx = \pm (Y dz - Z dy), \quad dy = \pm (Z dx - X dz), \quad dz = \pm (X dy - Y dx).$$

L'incertezza del Doppio segno si toglie eliminando i valori



effettivo (5), (6) per  $X, Y, Z, dx, dy, dz$  e si vede che valgono i segni superiori; abbiamo dunque le formole (Schwarz)

$$(15) \quad \begin{cases} u = x + i \int (Z dy - Y dz), \\ v = y + i \int (X dz - Z dx), \\ w = z + i \int (Y dx - X dy). \end{cases}$$

101. - Applicazioni. - Le formole ora stabilite possono utilmente applicarsi alla risoluzione del seguente problema: Far passare per una data curva una superficie ad area minima, che abbia lungo di essa normali assai gnate. Si suppone però che le coordinate  $x, y, z$  dei punti della curva  $C$ , come pure i coseni di direzione  $X, Y, Z$  delle normali assegnate lungo  $C$ , siano funzioni analitiche (nel senso di Weierstrass) di un parametro reale  $t$ , che determina i punti di  $C$ ; si suppone cioè che queste funzioni siano sviluppabili in serie di Taylor ed estendibili quindi nel piano complesso di  $t$ . Allora le funzioni  $u, v, w$  della variabile complessa  $t$ , definite dalle (15) godranno della proprietà:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = 0,$$

poiché tale relazione è verificata lungo tutto l'asse reale. Le formole

$$x' = R(u), \quad y' = R(v), \quad z' = R(w)$$

definiranno quindi una superficie ad area minima, la quale passerà per la curva data  $C$ , poiché per  $t$  reale si ha

$$R(u) = x, \quad R(v) = y, \quad R(w) = z,$$

mentre i coseni di direzione  $X, Y, Z$  della sua normale

lungo  $C$  avranno i valori assegnati.

È facile di più vedere che la superficie ad area minima definita da queste condizioni è unica e determinata.

Se infatti introduciamo la variabile complessa del § 97

$$z = \cot \frac{\theta}{2} e^{i\omega},$$

mentre il punto mobile percorre la curva  $C$  assegnata, la sua immagine sferica determinata dalla proiezione proiettata alla normale, percorrerà una curva determinata sulla sfera e quindi  $z$  nel suo piano complesso una curva determinata. Lungo di questa le formole (15) danno le funzioni  $u, v, w$  di  $z$  e  $\bar{z}$  costanti addotte, le quali evidentemente non hanno influenza che sulla posizione della superficie nello spazio, queste funzioni non potranno variare nel piano complesso che in un solo e determinato modo, il che dimostra il teorema.

Come conseguenza di queste proprietà vediamo il teorema:

Ogni retta giacente sopra una superficie ad area minima è un asse di simmetria della superficie.

Facendo infatti girare la superficie intorno a questa retta di  $\pi$ , nella sua nuova posizione essa avrà lungo la retta la medesima normale e considererà quindi collo posizione primitiva. dello stesso modo si vede che:

Se un piano taglia ortogonalmente una superficie ad area minima, esso è un piano di simmetria per la superficie.

102. - Teorema di Steiner. - Un problema molto più

Difficile di quelli fin qui trattati è il seguente:

Per un dato contorno chiuso far passare una porzione di superficie ad area minima semplicemente connessa e priva nell'interno di punti singolari.

Esso è stato risolto da Riemann, Weierstrass, e Schwarz per il caso di un contorno rettilineo; ma noi qui non ce ne occuperemo. Osserveremo però che mentre una superficie ad area minima soddisfa veramente alla condizione del minimo di area per un conveniente contorno che si suppone fisso, tale proprietà può affatto sparire se si rende mobile il contorno secondo una data legge.

Qui accade appunto nel seguente singolare teorema dovuto a Steiner:

Fra tutte le porzioni di superficie parallele ad una determinata porzione di superficie ad area minima, quest'ultima possiede l'area massima.

Sia infatti la superficie  $S$  parallela alla superficie  $S$  ad area minima e distante da  $S$  della lunghezza  $\rho$ . Riferiamo la  $S$  alle sue linee di curvatura ritenendo le solite notazioni del cap. IV; se  $x, y, z$  sono le coordinate di un punto di  $S$ , avremo

$$x_1 = x + \rho X, \quad y_1 = y + \rho Y, \quad z_1 = z + \rho Z,$$

quindi l'elemento lineare  $ds_1$  di  $S_1$  sarà dato da

$$(16) \quad ds_1^2 = E \left(1 + \frac{\rho^2}{r_1^2}\right) du^2 + G \left(1 + \frac{\rho^2}{r_2^2}\right) dv^2$$

e il superficiale  $d\sigma_1$  da

$$d\sigma_1 = \left\{ 1 + \rho \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{\rho^2}{r_1 r_2} \right\} \sqrt{EG} \, du \, dv;$$

ma essendo  $r_1 = -r_2$ ,  $\sqrt{EG} \, du \, dv = d\sigma$ , risulterà:

$$d\sigma = \left(1 - \frac{\rho^2}{r_1^2}\right) d\sigma$$

e integrando a tutta una pagina o  $\mathcal{D}S$ :

$$\sigma_1 = \sigma - \rho^2 \iint \frac{d\sigma}{r_1^2},$$

il che dimostra il teorema.

Termineremo questa breve esposizione della teoria delle superficie d'area minima, accennando alle celebri scoperte di Plateau, colle quali possono realizzarsi e rendersi visibili tante forme si vogliono di superficie ad area minima. Queste sono fondate sul teorema che una lamina fluida, sottoposta a forze esterne soltanto lungo il contorno, deve assumere in ogni punto, nello stato d'equilibrio, curvature eguali e opposte, cioè deve conformarsi a superficie d'area minima.

10.3. - Superficie a curvatura media costante. - Le superficie d'area minima rientrano nella classe più generale di superficie per le quali la curvatura media

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

è una costante. Tratteremo brevemente di questa classe di superficie e specialmente di quelle proprietà che esse hanno in comune colla classe speciale sopra studiata.

Dimosteremo prima ed tutto il seguente teorema dovuto a Bonnet:

A) Le due superficie parallele ad una superficie  $S$  a curvatura costante positiva  $K = \frac{1}{R^2}$  e distanti da essa di  $\pm R$ , sono a curvatura media costante  $H = \pm \frac{1}{R}$ .

Hanno  $r_1, r_2$  i raggi di curvatura della superficie  $S$ , che soddisfano alla condizione  $r_1 r_2 = R^2$ ; possiamo supporre  $r_1$ ,

$r_1$  positivi e allora, per le nostre convenzioni, la direzione positiva della normale sarà quella che va dal centro di curvatura al piede della normale. Se la superficie  $S'$  è parallela ad  $S$  e alla distanza  $l$ , dove  $l$  sarà positiva o negativa, secondo che  $S'$  giace rispetto ad  $S$  dalla sua parte positiva o negativa della normale, per i raggi  $\rho_1, \rho_2$  di curvatura di  $S'$  avremo evidentemente

$$\rho_1 = r_1 + l, \quad \rho_2 = r_2 + l$$

Da cui

$$(\rho_1 - l)(\rho_2 - l) = R^2,$$

e facendo  $l = \pm R$ , avremo  $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \pm \frac{1}{R}$ , c. d. d.

Inversamente ogni superficie a curvatura media costante  $\pm \frac{1}{R}$  ne ha una parallela alla distanza  $\pm R$  che è a curvatura costante positiva  $\frac{1}{R^2}$ . Per tal modo la ricerca della prima classe di superficie è ridotta a quella delle superficie a curvatura costante positiva.

Al § 78 c) abbiamo dimostrato che l'elemento lineare di una superficie a curvatura costante positiva  $K=+1$ , riferito alle linee di curvatura, assume la forma

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2 \theta du^2 + \operatorname{cosh}^2 \theta dv^2$$

Dove  $\theta$  soddisfa all'equazione a derivate parziali

$$(17) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = -\operatorname{senh} \theta \operatorname{cosh} \theta,$$

mentre i raggi di curvatura  $r_1, r_2$  sono dati dalle formole

$$r_1 = \operatorname{cosh} \theta, \quad r_2 = \operatorname{tgh} \theta.$$

Applicando il teorema di Bonnet ora dimostrato e la formola (16) del § precedente, troviamo l'altro:

B) L'elemento lineare di ogni superficie a curvatura me

dia costante  $\pm \frac{1}{R}$ , riferita alle sue linee di curvatura  $u, v$ , assume la forma

$$(18) \quad ds^2 = R^2 e^{\pm 2\theta} (du^2 + dv^2),$$

dove  $\theta$  è una funzione di  $u, v$  che soddisfa la (17). Viceversa se  $\theta$  è un integrale della (17), la forma (18) dell'elemento lineare appartiene ad un'unica e determinata superficie a curvatura media costante  $\pm \frac{1}{R}$ , le cui linee di curvatura sono le  $u, v$  e i raggi principali di curvatura sono dati da

$$r_1 = R \frac{e^{\pm \theta}}{\sinh \theta}, \quad r_2 = \pm R \frac{e^{\pm \theta}}{\cosh \theta}$$

Questo risultato include il teorema:

C) Le linee di curvatura di queste superficie formano un sistema isotermo, proprietà comune alle superficie ad area minima.

In fine noteremo come l'osservazione fatta al § 98 che cioè se  $\theta(u, v)$  è un integrale della (17) anche

$$\theta(u \cos \sigma - v \sin \sigma, u \sin \sigma + v \cos \sigma)$$

è un integrale, conduce immediatamente a dimostrare che le superficie a curvatura media costante sono suscettibili di quelle medesime deformazioni per flessione che nel § 98 abbiamo ritrovato per le superficie ad area minima. Se infatti trasformiamo la (18) po-

$$(19) \quad u = u \cos \sigma - v \sin \sigma, \quad v = u \sin \sigma + v \cos \sigma$$

e indichiamo con  $\theta$  la funzione di  $u, v$  in cui si congrua  $\theta$  per la sostituzione, l'elemento lineare trasformato

$$ds^2 = R^2 e^{\pm 2\theta} (du^2 + dv^2)$$

appartiene pel teorema B) ad una superficie  $S_1$  a curvatura media costante, le sue linee di curvatura saranno le  $u = \text{cost}$  e  $v = \text{cost}$ . La  $S_1$  è evidentemente applicabile sopra la superficie primitiva  $S$ , e le forme di corrispondenza per loro punti sono date dalle (19), dunque:

D) Ogni superficie a curvatura media costante può deformarsi, serbando la medesima curvatura media, in guisa che le nuove linee di curvatura sieno le traiettorie sotto angolo costante arbitrario delle antiche.

È chiaro che mentre in tale deformazione variano le linee di curvatura, rimangono invece invariati i raggi principali di curvatura. (\*)

Questi risultati congiunti al teorema A) danno il significato geometrico della trasformazione del § 98 per le superficie a curvatura costante positiva.

104. - Teorema di Delaunay. - Le più semplici forme di superficie a curvatura media costante sono quelle di rotazione. Pel teorema A) di Bonnet esse sono le superficie parallele e distanti di  $R$  dallo deformato di rotazione della sfera di raggio  $R$ . Abbiamo di più al § 69 questo deformato in due specie corrispondenti

(\*) Bonnet, al quale è dovuta la scoperta di questo singolaro deformato, ha dimostrato che una estesa altra deformato, che hanno in ogni punto invariati i due raggi principali di curvatura (Journal de l'École Polytechnique, Cahier).

ai casi ora considerati  $k < 1$ ,  $k > 1$ ; la superficie a curvatura media costante parallela ad una superficie della prima specie Bivale, per la sua forma Onduloide (Fig. 1<sup>a</sup>) e quella parallela ad una superficie della seconda Modioide (Fig. 2<sup>a</sup>).

Le curve meridiane di queste superficie sono suscettibili di un'elegante generalizzazione geometrica trovata da Delannay: Esse sono le curve generate dal fuoco di un'ellisse o di un'iperbole che ruota senza strisciare sopra una retta (asse di rotazione).

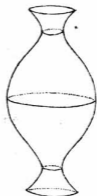


fig. 1. Onduloide

Quando l'ellisse degenera in una parabola, il luogo Descartes del fuoco è, come è noto, una catenaria di cui l'asse è la direttrice e l'onduloide diventa la catenoide, che è la superficie di rotazione a curvatura media nulla.

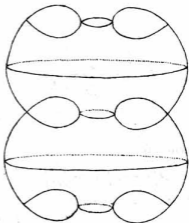


fig. 2. Modioide

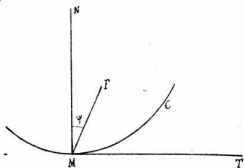
Per dimostrare il teorema di Delannay supponiamo che una curva prima  $C$  rotoli senza strisciare sopra un'asse nel suo piano e cerchiamo quale forma possa avere la  $C$ , perché il luogo generato da un punto  $I$  del piano di  $C$ , necessariamente

si accendeva



legato alla curva, sia lungo ad una superficie  $S$  a curvatura media costante  $\frac{1}{R}$  rotolando attorno all'asse fittizio. Preferiamo la curva  $C$  ad un sistema di coordinate polari nel suo piano coll'origine nel punto  $I$ .

In ogni istante, rotolando la curva sopra una sua tangente  $MT$  nel punto  $M$ , sarà  $MI = \rho$  il raggio principale di curvatura  $\rho$ , relativo al parallelo della superficie  $S$ .



Indicando poi con  $\psi$  l'angolo compreso fra il raggio vettore  $MI$  e la normale  $MN$  alla curva e con  $\rho$  il raggio di curvatura del meridiano, cioè del luogo descritto da  $I$ , si ha la nota formola

$$\rho = \frac{\rho^2}{\rho - r \cos \psi}$$

Dove  $r$  è il raggio di curvatura dello curva  $C$ . Dobbiamo dunque avere

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{R} = \frac{2\rho - r \cos \psi}{\rho^2};$$

ora

$$r = \frac{\left\{ \rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2 \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2}}, \quad \cos \psi = \frac{\rho}{\left\{ \rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

e la curva  $C$  è determinata quindi dall'equazione differenziale

$$\rho \left\{ \rho^2 + 2 \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \right\} = R \left\{ \rho^2 + 3 \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 - 2\rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \right\},$$

che ha per integrale

$$\rho = \frac{R(1 - e^c)}{1 + e \cos(\theta + C)},$$

Dove  $e$ ,  $C$  sono costanti arbitrarie. Queste equazioni rappresentano appunto un'ellisse di semi-asse maggiore =  $R$  o un'iperbole di semi-asse trasverso =  $R$ , secondo che  $e < 1$  ovvero  $e > 1$ .

## Capitolo X.

### Superficie definite da proprietà delle loro linee di curvatura.

105. - Superficie modanate. - Dopo esserci occupati nel tre precedenti Capitoli delle superficie di cui i raggi di curvatura sono legati da una relazione, tratteremo ora brevemente di alcune classi di superficie, le cui linee di curvatura hanno determinate proprietà, e in primo luogo di quelle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura geodetiche.

Ogni linea geodetica che sia anche linea di curvatura è necessariamente piana, poiché le sue normali principali devono essere le generatrici di una sviluppabile (\*).

(\*) Solo per una curva piana  $C$  accade che le normali principali