LUIGI BIANCHI

LEZIONI

DI

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

FATTE NELLA UNIVERSITÀ DI PISA

NELL'ANNO

1885-86

PISA, NISTRI.

Lezioni di Geometria Differenziale

I. Curve a doppia curvatura.

1.— **Rappresentazione analitica.** — Un punto che si muove nello spazio con legge continua genera una curva. Se le successive posizioni del punto generatore giacciono in un piano, la curva dicesi piana, altrimenti dicesi gobba o a **doppia curvatura**.

Coi metodi della Geometria analitica riferiremo il punto mobile M generatore della curva gobba o piana a tre assi Cartesiani ortogonali, e indicheremo con x, y, z le sue coordinate. Per definire analiticamente la curva esprimeremo le coordinate x, y, z in funzione di un parametro $\underline{u}$, di guisa che si avrà:

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u),$$

dove $f_1\, f_2\, f_3$ sono simboli di funzioni, ovvero anche, come scriveremo spesso per abbreviare:

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u).$$

Ad ogni valore speciale u_1 del parametro u corrisponderà una posizione speciale M_1 del punto generatore M sulla curva. Variando il parametro u da $-\infty$ a $+\infty$, o in qualsiasi altro intervallo finito o infinito, pel quale le funzioni $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ sono determinate, il punto M si muoverà, e descriverà la curva. Viceversa è chiaro che ogni curva potrà rappresentarsi analiticamente in questo modo, prendendo, ad esempio, per parametro u l'arco s della curva contato da un suo punto fisso al punto mobile M. Supporremo poi sempre che il senso, secondo cui il punto M si muove per descrivere la curva, sia quello del parametro u crescente e questo diremo il senso positivo della curva.

In fine rispetto alle funzioni $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ diremo una volta per tutte che si supporranno finite e continue insieme alle loro derivate prime, seconde e terze, tranne tutto al più in punti speciali.

2. – **Tangente e piano normale.** – Se M_1 è un punto della curva e M_1' un punto contiguo, la retta $\overline{M_1M_1'}$, quando il punto M_1' si avvicina indefinitamente al punto M_1, tende verso una posizione limite, che dicesi la tangente in M_1 alla curva e segna la direzione secondo cui si muove il punto generatore nell'istante in cui passa per M_1. La direzione positiva della tangente si assumerà naturalmente nel senso positivo della curva. Per trovare i coseni di direzione (*) della tangente, che indicheremo con $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, osserveremo che se u_1 è il valore del parametro in M_1 e $u_1 + \Delta u$ il valore del parametro in un punto contiguo, essendo Δu un incremento positivo, le coordinate del pun-

---

(*). Diconsi coseni di direzione di una retta i coseni degli angoli, che la sua direzione positiva forma colle direzioni positive degli assi coordinati. –

to generatore, passando da M_1 a M_1', subiranno determinati incrementi $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, e i coseni di direzione della retta $\overrightarrow{M_1 M_1'}$ (*) saranno dati da:

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}, \quad \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}, \quad \frac{\Delta z}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}},$$

dove il radicale è preso positivamente. Se ora Δu tende a zero, cioè il punto M_1' converge verso M_1, le tre espressioni precedenti convergono, per le ipotesi fatte, verso i limiti rispettivi:

$$\frac{\frac{dx}{du}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{dy}{du}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{dz}{du}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}}.$$

Osservando poi che il radicale al denominatore non è altro che $\frac{ds}{du}$, dove s è l'arco della curva, supposto crescente con u, cioè nel senso positivo della curva, avremo per le formole richieste:

$$(1) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

nelle quali potremo riguardare indifferentemente i secondi membri come quozienti di differenziali o come derivate prese rispetto all'arco, quando questo si assuma come parametro (variabile indipendente), il che faremo quasi sempre in seguito.

Il piano normale in M_1 alla tangente alla curva dicesi piano normale della curva; se x, y, z sono le coordinate di M_1,

---

(*). Col simbolo $\overrightarrow{AB}$ denoteremo che per direzione positiva della retta che unisce i due punti A, B, si assume quella che va da A verso B. —

e X, Y, Z le coordinate correnti di un punto di questo piano, esso ha per equazione:

$$(X-x)\frac{dx}{du}+(Y-y)\frac{dy}{du}+(Z-z)\frac{dz}{du}=0.$$

3. — Prima curvatura o flessione. — Dalla deviazione più o meno rapida che il punto, descrivente la curva, subisce dalla direzione rettilinea, noi giudichiamo della maggiore o minore flessione della curva stessa. Per precisare questo concetto e renderlo suscettivo di misura, consideriamo un punto M della curva ed un punto vicino M_1 e sia $\Delta\varepsilon$ l'angolo piccolissimo che formano fra loro le direzioni delle due tangenti in M, M_1; se dividiamo l'angolo $\Delta\varepsilon$ per la lunghezza dell'arco MM_1, il quoziente $\frac{\Delta\varepsilon}{\text{arco } MM_1}$, quando M_1 si accosta indefinitamente ad M, avrà un limite determinato e finito, che si assumerà come misura della 1ª curvatura o flessione della curva in M e si indicherà con $\frac{1}{\rho}$. La quantità ρ, che potremo interpretare come una lunghezza, si dirà il raggio di curvatura in M.

Per dimostrare l'esistenza di questo limite e trovarne l'espressione, facciamo uso delle considerazioni seguenti. Col centro nell'origine delle coordinate e col raggio unità descriviamo una sfera e intercettiamo colla sua superficie le rette condotte per il centro parallelamente alle direzioni positive delle successive tangenti alla curva. Il luogo degli estremi di questi raggi si dirà l'indicatrice sferica delle tangenti e ad ogni posizione M del punto generatore sulla curva C corrisponderà un punto M' sull'indicatrice C', tale che il raggio OM' sarà parallelo alla tangente in M alla C.

Ora se consideriamo un punto M_1 della curva C successivo ad M, l'angolo $\Delta\varepsilon$ sarà misurato precisamente dall'arco di circolo massimo che sulla sfera descritta congiunge i punti corrispondenti M', M'_1 dell'indicatrice, ma nel calcolare il limite del quoziente:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}$$

potremo sostituirvi l'arco elementare dell'indicatrice, che è un infinitamente piccolo del medesimo ordine, il cui rapporto a $\Delta\varepsilon$ converge verso l'unità. Avremo quindi:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{ds'}{ds}$$

dove ds, ds' sono gli elementi d'arco della curva C e della sua indicatrice C'. E poichè le coordinate x', y', z' del punto M' dell'indicatrice sono date, per la costruzione stessa, dalle formole:

$$x' = \cos\alpha, \quad y' = \cos\beta, \quad z' = \cos\gamma,$$

avremo:

$$ds' = \sqrt{\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2}\, ds,$$

quindi:

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2},$$

formola nella quale al radicale s'intenderà sempre attribuito il segno positivo. Osservando le (1), e supponendo di prendere s per variabile indipendente potremo anche scrivere:

$$(2') \qquad \frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

4. — **Piano osculatore**. — Fra tutti i piani che passano per il punto M di C, ve ne ha uno che nelle vicinanze di M si scosta meno di tutti gli altri dalla curva e dicesi

piano osculatore in M alla curva. Per precisare questa definizione e trovare l'equazione del piano osculatore, scriviamo l'equazione di un piano qualunque, che passa per M, sotto la forma:

$$(3) \qquad A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

dove X, Y, Z indicano le coordinate correnti, x, y, z le coordinate del punto M e A, B, C tre costanti. Dando al parametro u un accrescimento infinitamente piccolo h (che riguarderemo come del 1° ordine), avremo sulla curva un punto corrispondente M' infinitamente vicino ad M, la cui distanza δ dal piano (3) sarà data dalla formola:

$$\delta = \frac{A.\Delta x + B.\Delta y + C.\Delta z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

dove $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ denotano gli incrementi subiti da x, y, z nel passaggio da u ad $u+h$. Ora abbiamo:

$$\Delta x = \frac{dx}{du} h + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{du^2} h^2 + \varepsilon_1$$
$$\Delta y = \frac{dy}{du} h + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{du^2} h^2 + \varepsilon_2$$
$$\Delta z = \frac{dz}{du} h + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{du^2} h^2 + \varepsilon_3$$

dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sono infinitesimi d'ordine superiore al secondo, quindi:

$$\delta = \left\{A\frac{dx}{du}+B\frac{dy}{du}+C\frac{dz}{du}\right\}h + \frac{1}{2}\left\{A\frac{d^2x}{du^2}+B\frac{d^2y}{du^2}+C\frac{d^2z}{du^2}\right\}h^2+\eta$$

essendo η un infinitesimo d'ordine superiore al secondo. Ne risulta che se il piano (3) è condotto arbitrariamente per M, la distanza δ sarà un infinitesimo del primo ordine soltanto; ma quando si ha identicamente:

$$(4) \qquad A\frac{dx}{du}+B\frac{dy}{du}+C\frac{dz}{du}=0,$$

il che geometricamente significa che il piano (3) contiene la tangente in M alla curva, allora δ è un infinitesimo del secondo ordine. Ora se i coefficienti A, B, C oltre che alla (4) soddisfano all'altra:

$$(5) \qquad A\frac{d^2x}{du^2} + B\frac{d^2y}{du^2} + C\frac{d^2z}{du^2} = 0,$$

δ diventa un infinitesimo di 3° ordine. Le (4), (5) determinano completamente i rapporti:

$$A : B : C,$$

i quali sostituiti nelle (3) individuano un piano che passa per M e nelle vicinanze di M si scosta meno d'ogni altro dalla curva, cioè il piano osculatore. La sua equazione eliminando A, B, C dalle (3), (4), (5) si ottiene subito sotto la forma di determinante:

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \\ \frac{d^2x}{du^2}, & \frac{d^2y}{du^2}, & \frac{d^2z}{du^2} \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero anche, sostituendo i differenziali alle derivate

$$(6') \qquad \begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ dx, & dy & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0$$

Per altro è da osservarsi che se i tre determinanti minori in (6) fossero nulli, cioè se:

$$(7) \qquad \begin{cases} \frac{dy}{du}\frac{d^2z}{du^2} - \frac{dz}{du}\frac{d^2y}{du^2} = 0, \\ \frac{dz}{du}\frac{d^2x}{du^2} - \frac{dx}{du}\frac{d^2z}{du^2} = 0, \\ \frac{dx}{du}\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2} = 0, \end{cases}$$

si presenterebbe il caso di eccezione che il piano osculatore sarebbe indeterminato. Ma questo può avvenire soltanto in punti singolari isolati, poichè se accadesse in un tratto, per quel tratto la curva sarebbe una linea retta. Infatti, supposte $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dz}{du}$ differenti da zero, potremo scrivere:

$$\frac{\frac{d^2z}{du^2}}{\frac{dz}{du}} = \frac{\frac{d^2x}{du^2}}{\frac{dx}{du}}, \quad \frac{\frac{d^2y}{du^2}}{\frac{dy}{du}} = \frac{\frac{d^2x}{du^2}}{\frac{dx}{du}},$$

le quali integrate due volte, danno:

$$z = ax + b, \quad y = cx + d,$$

con a, b, c, d costanti: il che dimostra l'osservazione fatta. Con eguale facilità si vedrà che lo stesso accade se qualcuna delle derivate prime è nulla. Nell'intorno di un punto singolare isolato, pel quale hanno luogo le (7), la curva è assimilabile ad una retta e il punto dicesi un flesso della curva. In un tale punto la flessione $\frac{1}{\rho}$ della curva è nulla, poichè, preso l'arco s per variabile indipendente, segue dalle (7):

$$\sigma = \left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 =$$

$$= \left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\} - \left\{\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right\}^2$$

ma essendo:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

avremo appunto dalla (2') $\frac{1}{\rho} = 0$, c. d. d.

Accenneremo anche ad altre definizioni che si possono dare per il piano osculatore di una curva in un punto M, e che conducono sempre all'equazione (6).

Se per la tangente in M alla curva e per un punto M' vicinissimo ad M si fa passare un piano, poi si fa convergere indefinitamente M' verso M, il piano stesso tende verso una posizione limite, che è il piano osculatore in M. — Similmente se per il punto M e per due punti vicini M', M'' si fa passare un piano, poi si fanno convergere simultaneamente M', M'' verso M (in modo però che le differenze fra le coordinate dei punti M', M'' non diventino infinitesime di ordine superiore al primo) il piano stesso tende verso il piano osculatore, come posizione limite.

5. — **Normale principale e binormale.** — Il piano osculatore ed il piano normale alla curva in M si segano secondo una retta che si chiama la normale principale alla curva, ed è quella normale uscente dal punto M alla curva, che giace nel piano osculatore. Invece la normale in M al piano osculatore dicesi la binormale della curva. Come per la tangente, fisseremo per la normale principale e per la binormale le direzioni, che riguarderemo come positive, e indicheremo rispettivamente i loro coseni di direzione con

$\cos\xi,\ \cos\eta,\ \cos\zeta$ per la normale principale;

$\cos\lambda,\ \cos\mu,\ \cos\nu$ per la binormale.

Per ora potremo determinarli, all'infuori del segno, osservando che, preso l'arco s per variabile indipendente, abbiamo dalla (6):

$$(7') \quad \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = \begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \end{vmatrix}$$

e siccome la normale principale è perpendicolare tanto alla tangente quanto alla binormale, si avrà:

$$\cos\xi.\cos\alpha + \cos\eta.\cos\beta + \cos\zeta.\cos\gamma = 0$$

$$\cos\xi.\cos\lambda + \cos\eta.\cos\mu + \cos\zeta.\cos\nu = 0,$$

quindi

$$\cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta = \cos\beta\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu : \cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu : \cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda.$$

Di qui osservando le (1) e le (7'), si trae:

$$\cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta = \frac{dy}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right) - \frac{dz}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right):$$

$$: \frac{dz}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right) - \frac{dx}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right):$$

$$: \frac{dx}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right) - \frac{dy}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)$$

e avendo riguardo alle altre:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

ne otterremo:

$$\cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta = \frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Da cui finalmente a causa della (2') e dell'altra:

$$\cos^2\xi + \cos^2\eta + \cos^2\zeta = 1$$

$$(8) \qquad \cos\xi = \pm\rho\,\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \cos\eta = \pm\rho\,\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \cos\zeta = \pm\rho\,\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Per fissare anche i segni, consideriamo il piano della tangente e della binormale, il quale ha per equazione:

$$(9) \qquad (X-x)\cos\xi + (Y-y)\cos\eta + (Z-z)\cos\zeta = 0$$

e dimostriamo che, se il punto $M \equiv (x, y, z)$ non è un flesso della curva, la curva nell'intorno di M giace tutta da una banda del piano. E infatti consideriamo un punto $M' \equiv (x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ della curva vicinissimo ad M e corrispondente al valore $s+h$ del parametro s, h essendo un incremento infinitesimo positivo o negativo. La distanza δ di M' dal piano (9) sarà:

$$(10) \qquad \delta = \Delta x . \cos\xi + \Delta y . \cos\eta + \Delta z . \cos\zeta \;;$$

ma

$$\Delta x = \frac{dx}{ds} h + \frac{d^2x}{ds^2} \frac{h^2}{2} + \varepsilon_1$$

$$\Delta y = \frac{dy}{ds} h + \frac{d^2y}{ds^2} \frac{h^2}{2} + \varepsilon_2$$

$$\Delta z = \frac{dz}{ds} h + \frac{d^2z}{ds^2} \frac{h^2}{2} + \varepsilon_3$$

dove ε sono infinitesimi dell'ordine di h^3. Sostituendo in δ, avremo per le (9) e per l'altra:

$$\cos\xi \frac{dx}{ds} + \cos\eta \frac{dy}{ds} + \cos\zeta \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$(11) \qquad \delta = \pm \frac{h^2}{2\rho} + \eta$$

essendo η un infinitesimo del 3° ordine.

Dunque, se non è $\frac{1}{\rho} = 0$, il segno di δ per h sufficientemente piccolo dipenderà solo dal primo termine e sarà lo stesso per h positivo o negativo, cioè la curva giacerà nell'intorno di M tutta da una banda del piano della tangente e della binormale. È verso questa banda che intenderemo rivolta la direzione positiva della normale principale.

Dopo tale convenzione è facile vedere che nelle (8) bisogna scegliere i segni superiori, poichè se si considera ad es. il punto:

$$x_1 = x + \cos\xi \;, \qquad y_1 = y + \cos\eta \;, \qquad z_1 = z + \cos\zeta$$

il quale è situato sulla normale principale e dalla banda positiva rispetto al punto M, la sua distanza δ_1 dal piano (9), calcolata dalla formola stessa (10) è $\delta_1 = +1$ e però nella (11), ρ essendo positivo, deve prendersi il segno superiore. Abbiamo quindi in definitiva:

$$(12) \qquad \cos\xi = \rho\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \cos\eta = \rho\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \cos\zeta = \rho\frac{d^2z}{ds^2}$$

ovvero per le (1):

$$(12)' \qquad \cos\xi = \rho\frac{d\cos\alpha}{ds}, \quad \cos\eta = \rho\frac{d\cos\beta}{ds}, \quad \cos\zeta = \rho\frac{d\cos\gamma}{ds}.$$

Rimane a fissarsi la direzione positiva della binormale e per questo faremo la convenzione seguente. Immaginiamo di trasportare gli assi coordinati coll'origine nel punto M della curva e di girarli in modo che le direzioni positive degli assi delle x e delle y vengano a coincidere rispettivamente colle direzioni positive già fissate per la tangente e per la normale principale; allora l'asse delle z si disporrà secondo la binormale e la sua direzione positiva segnerà sulla binormale una direzione perfettamente determinata, che si assumerà come direzione positiva della binormale.

Dopo tale convenzione risulta subito dalla Geometria analitica che il determinante:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\xi & \cos\eta & \cos\zeta \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \end{vmatrix}$$

sarà eguale all'unità positiva e ciascuno dei nove coseni sarà eguale al determinante minore complementare preso col segno che gli appartiene nello sviluppo.

Avremo quindi in particolare.

$$(13)\qquad \begin{cases} \cos\lambda = \cos\beta\cos\zeta - \cos\gamma\cos\eta \\ \cos\mu = \cos\gamma\cos\xi - \cos\alpha\cos\zeta \\ \cos\nu = \cos\alpha\cos\eta - \cos\beta\cos\xi \end{cases}$$

ovvero

$$(13')\qquad \begin{cases} \cos\lambda = \rho\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right) \\ \cos\mu = \rho\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right) \\ \cos\nu = \rho\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right). \end{cases}$$

6. — Seconda curvatura o torsione. — Nelle curve gobbe il piano osculatore varia da punto a punto della curva, e questa deviazione del piano osculatore dà luogo alla torsione o seconda curvatura della curva. Per precisare anche qui tale concetto, considereremo un punto M della curva ed un punto vicinissimo M'; i due piani osculatori in M, M' comprenderanno fra loro un angolo piccolissimo $\Delta\sigma$ e il quoziente:

$$\frac{\Delta\sigma}{\text{arc}\, MM'} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$$

al convergere di M' verso M convergerà verso un limite determinato e finito, che s'indicherà con $\frac{1}{T}$ e si dirà la torsione della curva in M, mentre T si chiamerà il raggio di torsione o seconda curvatura.

Per trovare l'espressione della torsione $\frac{1}{T}$, cominciamo dall'osservare che l'angolo $\Delta\sigma$ è anche l'angolo delle due binormali successive in M e in M'. Se quindi costruiamo, in modo perfettamente simile a quello del §3, l'indicatrice sferica delle binormali, intercettando cioè colla superficie sferica:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

i raggi condotti parallelamente alle successive binormali della curva, e indichiamo con ds_1 il loro elemento d'arco, avremo evidentemente:

$$\frac{1}{T} = \frac{ds_1}{ds}.$$

Ora se (x_1, y_1, z_1) è il punto dell'indicatrice suddetta che corrisponde al punto (x, y, z) della curva, avremo:

$$x_1 = \cos\lambda, \quad y_1 = \cos\mu, \quad z_1 = \cos\nu,$$

quindi

$$ds_1 = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}$$

e però:

$$(14) \qquad \frac{1}{T} = \sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2}.$$

Qui lasceremo per ora indeterminato il segno da attribuirsi al radicale, riserbandoci di farlo più tardi in modo conveniente e osserveremo che per le curve piane e per queste soltanto la torsione $\frac{1}{T}$ è nulla. E infatti se ciò accade si ha:

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} = 0, \quad \frac{d\cos\mu}{ds} = 0, \quad \frac{d\cos\nu}{ds} = 0$$

quindi $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ sono costanti e perciò la binormale alla curva ha in tutti i punti la medesima direzione. Assumendola per asse z, avremo:

$$\cos\lambda = 0, \quad \cos\mu = 0, \quad \cos\nu = 1.$$

Ora se non fosse $\frac{dz}{ds} = 0$, siccome $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ non possono essere zero a causa di $\cos\nu = 1$, seguirebbe dalle due prime (13')

$$\frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{dz}{ds}} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}} = \frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dx}{ds}}$$

e quindi $\cos\nu = 0$, il che non è. Dunque sarà $\frac{dz}{ds} = 0$, quindi $z = \text{cost}^{\text{e}}$, cioè la curva sarà tracciata in un piano paralleio al piano xy.

7. — Formole di Frenet. — Andiamo ora a stabilire le formole importantissime nella teoria delle curve gobbe, note sotto il nome di formole di Serret, ma che erano già prima state trovate da Frenet.

Queste formole esprimono le derivate dei nove coseni

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$$
$$\cos\xi,\ \cos\eta,\ \cos\zeta$$
$$\cos\lambda,\ \cos\mu,\ \cos\nu$$

per i coseni stessi e per i raggi ρ e T di prima e seconda curvatura. Per i primi tre coseni esse sono già state ottenute al § 5 (formole (12')) e possono scriversi:

$$(15) \qquad \frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}\cos\xi, \quad \frac{d\cos\beta}{ds} = \frac{1}{\rho}\cos\eta, \quad \frac{d\cos\gamma}{ds} = \frac{1}{\rho}\cos\zeta.$$

Per stabilire le formole analoghe per i tre ultimi, cominciamo dall'osservare che si ha:

$$(A) \qquad \begin{cases} \cos\alpha \dfrac{d\cos\alpha}{ds} + \cos\beta \dfrac{d\cos\beta}{ds} + \cos\gamma \dfrac{d\cos\gamma}{ds} = 0 \\[2ex] \cos\lambda \dfrac{d\cos\alpha}{ds} + \cos\mu \dfrac{d\cos\beta}{ds} + \cos\nu \dfrac{d\cos\gamma}{ds} = 0 \end{cases}$$

E infatti la prima si ottiene derivando l'identità:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

e la seconda non è altro che l'identità:

$$\cos\lambda\cos\xi + \cos\mu\cos\eta + \cos\nu\cos\zeta = 0,$$

dove a $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ sono sostituite le quantità proporzionali $\frac{d\cos\alpha}{ds}$, $\frac{d\cos\beta}{ds}$, $\frac{d\cos\gamma}{ds}$. D'altra parte si ha anche:

$$(B) \qquad \begin{cases} \cos\alpha \dfrac{d\cos\lambda}{ds} + \cos\beta \dfrac{d\cos\mu}{ds} + \cos\gamma \dfrac{d\cos\nu}{ds} = 0 \\[2ex] \cos\lambda \dfrac{d\cos\lambda}{ds} + \cos\mu \dfrac{d\cos\mu}{ds} + \cos\nu \dfrac{d\cos\nu}{ds} = 0 \end{cases}$$

poiché derivando l'identità:

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$

avendo riguardo alla seconda delle (A) si ha la prima delle (B), mentre la seconda (B) segue derivando l'identità:

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

Confrontando le (A), (B) si ha immediatamente:

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} : \frac{d\cos\mu}{ds} : \frac{d\cos\nu}{ds} = \frac{d\cos\alpha}{ds} : \frac{d\cos\beta}{ds} : \frac{d\cos\gamma}{ds}$$

e però:

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} : \frac{d\cos\mu}{ds} : \frac{d\cos\nu}{ds} = \cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta ;$$

ne segue:

$$\cos\xi = \pm\frac{\frac{d\cos\lambda}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2}}, \quad \cos\eta = \pm\frac{\frac{d\cos\mu}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2}}$$

$$\cos\zeta = \frac{\frac{d\cos\nu}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2}}.$$

Osservando la (14) avremo quindi:

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} = \pm\frac{1}{T}\cos\xi, \quad \frac{d\cos\mu}{ds} = \pm\frac{1}{T}\cos\eta, \quad \frac{d\cos\nu}{ds} = \pm\frac{1}{T}\cos\zeta.$$

Nella (14) abbiamo lasciato indeterminato il segno del radicale, cioè il segno di T, ed ora lo fisseremo scegliendo nelle formole precedenti il segno superiore, di guisa che avremo:

$$(16) \qquad \frac{d\cos\lambda}{ds} = \frac{1}{T}\cos\xi, \quad \frac{d\cos\mu}{ds} = \frac{1}{T}\cos\eta, \quad \frac{d\cos\nu}{ds} = \frac{1}{T}\cos\zeta$$

e la torsione $\frac{1}{T}$ risulterà determinata in valore assoluto e nel segno da queste formole. Quale influenza abbia il segno della torsione sull'andamento della curva lo vedremo fra poco (§10). Ora completiamo le formole (15), (16) di Frenet con quelle relative a $\cos\xi, \cos\eta, \cos\zeta$. Per questo osserviamo che si ha p. e. per $\cos\xi$:

$$\cos\xi = \cos\gamma\cos\mu - \cos\beta\cos\nu$$

e quindi derivando coll'osservare le (15), (16):

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} = \frac{1}{\rho}\left(\cos\xi\cos\mu - \cos\eta\cos\nu\right) + \frac{1}{T}\left(\cos\gamma\cos\eta - \cos\beta\cos\zeta\right)$$

cioè:

$$\frac{d\cos\xi}{ds} = -\frac{1}{\rho}\cos\alpha - \frac{1}{T}\cos\lambda .$$

Similmente dicasi per $\frac{d\cos\eta}{ds}$, $\frac{d\cos\zeta}{ds}$; potremo quindi scrivere le tre formole di Frenet:

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\cos\xi}{ds} &= -\frac{1}{\rho}\cos\alpha - \frac{1}{T}\cos\lambda \\ \frac{d\cos\eta}{ds} &= -\frac{1}{\rho}\cos\beta - \frac{1}{T}\cos\mu \\ \frac{d\cos\zeta}{ds} &= -\frac{1}{\rho}\cos\gamma - \frac{1}{T}\cos\nu . \end{aligned}\right.$$

Non tralasceremo di notare una conseguenza importante delle formole stabilite. Supponiamo che le coordinate x, y, z siano tali funzioni dell'arco s che ammettano le derivate successive di tutti gli ordini sempre finite e continue; è facile vedere che esse potranno tutte esprimersi per i nove coseni:

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$$
$$\cos\xi,\ \cos\eta,\ \cos\zeta$$
$$\cos\lambda,\ \cos\mu,\ \cos\nu,$$

e per i raggi ρ, T di prima e seconda curvatura. E infatti abbiamo per le prime derivate:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$$
$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{\rho}\cos\xi$$

Ed ora formando le derivate successive, e facendo ogni volta uso delle formole di Frenet, compariranno nelle formole soltanto le quantità accennate.

8. — Eliche cilindriche. — Per fare subito un'applica-

zione delle formole stabilite, prendiamo a considerare quella classe di curve che si distinguono col nome di eliche cilindriche. Esse sono quelle linee, che sopra una superficie cilindrica a base qualunque segnano la più corta distanza da un punto ad un altro e diconsi anche geodetiche della superficie.

È chiaro che, estendendo la superficie cilindrica sopra il piano, l'elica si trasformerà in una linea retta e siccome durante la flessione gli angoli degli elementi di curva tracciati sulla superficie non si alterano, l'elica incontrerà le generatrici del cilindro sotto angolo costante. Viceversa, la proprietà di incontrare sotto angolo costante le generatrici è esclusiva all'elica e potrebbe servire a definirla.

Se assumiamo l'asse delle z parallelo alle generatrici, sarà quindi $\cos\gamma = \text{cost}^e$ e la terza delle (15) darà $\cos\lambda = 0$, poiché non può essere $\frac{1}{\rho} = 0$ a meno che la curva non degeneri in una linea retta. Allora la terza delle (16) darà anche $\cos\nu = \text{cost}^e$ e infine la terza delle (17):

$$\frac{\rho}{T} = -\frac{\cos\gamma}{\cos\nu} = \text{cost}^e,$$

il che dà il teorema:

Per ogni elica cilindrica è costante il rapporto dei due raggi di prima e seconda curvatura.

Per mezzo delle formole stesse di Frenet possiamo anche dimostrare il teorema reciproco (dovuto a Bertrand):

Ogni curva che ha costante il rapporto dei due raggi di prima e seconda curvatura è un'elica cilindrica.

Per dimostrarlo osserviamo che si ha per le formole di Frenet:

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} = \frac{\rho}{T}\frac{d\cos\alpha}{ds}, \quad \frac{d\cos\mu}{ds} = \frac{\rho}{T}\frac{d\cos\beta}{ds}, \quad \frac{d\cos\nu}{ds} = \frac{\rho}{T}\frac{d\cos\gamma}{ds},$$

quindi se si suppone $\frac{\rho}{T}$ costante $= k$, potremo scrivere:

$$\frac{d}{ds}(\cos\lambda - k\cos\alpha) = 0, \quad \frac{d}{ds}(\cos\mu - k\cos\beta) = 0, \quad \frac{d}{ds}(\cos\nu - k\cos\gamma) = 0$$

e avremo integrando:

$$\cos\lambda - k\cos\alpha = A, \quad \cos\mu - k\cos\beta = B, \quad \cos\nu - k\cos\gamma = C,$$

dove A, B, C sono tre costanti legate fra loro dalla relazione:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 + k^2$$

che si ottiene quadrando e sommando le precedenti. Possiamo quindi porre:

$$\frac{A}{\sqrt{1+k^2}} = \cos a, \quad \frac{B}{\sqrt{1+k^2}} = \cos b, \quad \frac{C}{\sqrt{1+k^2}} = \cos c$$

e $\cos a, \cos b, \cos c$ saranno i coseni di direzione di una retta R fissa nello spazio. Allora avremo:

$$\cos\lambda - k\cos\alpha = \sqrt{1+k^2}\cos a$$
$$\cos\mu - k\cos\beta = \sqrt{1+k^2}\cos b$$
$$\cos\nu - k\cos\gamma = \sqrt{1+k^2}\cos c$$

da cui:

$$\cos\alpha\cos a + \cos\beta\cos b + \cos\gamma\cos c = -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Quest'ultima dimostra che la tangente alla curva forma un angolo costante colla direzione R fissa nello spazio. Ne segue che se da ogni punto della curva tiriamo una retta parallela alla direzione R, costruiamo una superficie cilindrica sulla quale giacerà la curva, che ne incontrerà le generatrici sotto angolo costante. Dunque la curva è un'elica di questo cilindro c. d. d.

Notiamo ancora un'altra importante proprietà delle eliche cilindriche. Abbiamo già visto che se l'asse delle z è parallelo alle generatrici del cilindro si ha $\cos l = 0$. Viceversa, se per una curva si ha $\cos l = 0$ essa è elica di un cilindro parallelo all'asse delle z, perchè allora $\frac{d\cos\gamma}{ds} = 0$, quindi $\cos\gamma = \cos t^e$. Ma l'essere $\cos l = 0$ significa che la normale principale dell'elica è perpendicolare alle generatrici del cilindro e siccome d'altra parte è anche perpendicolare all'elica, essa sarà la normale al cilindro. Abbiamo dunque il teorema:

La normale principale di un'elica cilindrica coincide colla normale al cilindro, e viceversa, se la normale principale di una curva, tracciata sopra un cilindro, coincide colla normale al cilindro, la curva è un'elica. —

Vedremo più tardi che questa proprietà delle geodetiche dei cilindri vale in generale per le geodetiche di una superficie qualunque.

9. — Raggi di curvatura delle eliche. — Per stabilire le formole generali relative alle eliche cilindriche, prendiamo l'asse delle z parallelo alle generatrici del cilindro e, supposto che le coordinate x, y della sezione retta $z = 0$ del cilindro siano espresse in funzione dell'arco $\underline{u}$ della sezione stessa dalle formole:

$$x = x(u)\ ,\quad y = y(u),$$

vedremo subito geometricamente che per le coordinate di un punto dell'elica si avrà:

$$x = x(u)\ ,\quad y = y(u),\quad z = u\cot\varepsilon\ (*),$$

(*). Potremo supporre z crescente con u, quindi $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$.

dove ε indica l'angolo d'inclinazione dell'elica sulle generatrici del cilindro. Applicando le formole dei §§ precedenti troveremo subito:

$$ds = \frac{du}{\operatorname{sen}\varepsilon}, \quad s = \frac{u}{\operatorname{sen}\varepsilon},$$

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\varepsilon . x'(u), \quad \cos\beta = \operatorname{sen}\varepsilon . y'(u), \quad \cos\gamma = \cos\varepsilon$$

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = \operatorname{sen}^2\varepsilon . x''(u), \quad \frac{d\cos\beta}{ds} = \operatorname{sen}^2\varepsilon . y''(u), \quad \frac{d\cos\gamma}{ds} = 0.$$

Di qui segue per la (2) § 3:

$$\frac{1}{\rho} = \operatorname{sen}^2\varepsilon \sqrt{x''^2(u) + y''^2(u)};$$

ma per la formola stessa il radicale esprime la curvatura della sezione retta, che indicheremo con $\frac{1}{R}$, ed avremo:

$$(18) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{R}.$$

Per trovare anche la torsione $\frac{1}{T}$, osserveremo che dalla formola già sopra stabilita

$$\frac{\rho}{T} = -\frac{\cos\gamma}{\cos\nu},$$

essendo la binormale nel piano tangente al cilindro e formando colle generatrici l'angolo $\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon$, segue:

$$\frac{\rho}{T} = -\frac{\cos\varepsilon}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right)} = \pm\frac{\cos\varepsilon}{\operatorname{sen}\varepsilon}$$

quindi

$$(19) \qquad \frac{1}{T} = \pm\frac{\operatorname{sen}\varepsilon\cos\varepsilon}{R}.$$

Ma possiamo anche precisare quale sarà il segno da attribuirsi alla torsione. Per ciò immaginiamo un osservatore situato parallelamente alle generatrici del cilindro (che si possono adesso supporre verticali) e dalla parte convessa della superficie cilindrica che egli osserva, in guisa cioè che la direzione positiva della normale principale nell'arco d'elica osservato si allontani dall'osservatore. Un punto che descriva l'elica innalzandosi rispetto all'osservatore (e questo sarà per noi il senso positivo dell'elica (*)) può avanzare rispetto all'osservatore da sinistra verso destra o da destra verso sinistra; nel primo caso diremo l'elica **destrorsa**, nel secondo **sinistrorsa**. Ciò posto, supponiamo le direzioni positive degli assi coordinati fissate nel modo ordinario, ossia che essendo l'asse z verticale e diretto dal basso all'alto, per un osservatore collocato sulla faccia superiore del piano xy e che guardi verso la direzione positiva dell'asse x, quella dell'asse y resti alla sinistra. Allora si vedrà subito che l'angolo formato dalle direzioni positive delle generatrici e della binormale sarà $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ se l'elica è destrorsa, o $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ se è sinistrorsa. Se ne conclude che la torsione calcolata dalle formole di Frenet sarà positiva se l'elica è sinistrorsa, e negativa se destrorsa. –

Le formole (18), (19) dimostrano che la flessione o la torsione dell'elica sono costanti simultaneamente solo quando il raggio R di curvatura della sezione retta del cilindro è costante, cioè quando il cilindro è circolare retto. Allora l'elica dicesi **circolare** e può considerarsi come generata da un punto che scorre di moto uniforme lungo una generatrice del cilindro circolare, mentre questa ruota di moto uniforme attorno all'asse. La proprietà di questa curva di avere costanti i due raggi di curvatura è geometricamente evidente, quando si osservi che, come il cerchio,

---

(*). Come pure la direzione positiva dell'asse z sarà quella che s'innalza rispetto all'osservatore –

essa è sovrapponibile a sè medesima in modo che ogni suo punto può portarsi a coincidere con un altro punto qualunque. Per i risultati dei §§ 8, 9 possiamo inoltre enunciare il teorema reciproco (Puiseux):

Ogni curva che ha costanti i due raggi di curvatura è un'elica circolare.

10. — Segno della torsione. — Come per le eliche, così per le curve in generale, possiamo vedere a quale circostanza geometrica è dovuto il segno della torsione, come risulta individuato dalle formole di Frenet. Per questo, considerando un punto M della curva e il piano osculatore in M, calcoliamo la distanza di un punto vicino M' sulla curva da questo piano. L'equazione del piano osculatore essendo:

$$(X-x)\cos\lambda + (Y-y)\cos\mu + (Z-z)\cos\nu = 0,$$

la distanza di un punto X, Y, Z da questo piano sarà precisamente:

$$(X-x)\cos\lambda + (Y-y)\cos\mu + (Z-z)\cos\nu\,;$$

quando si computino positivamente le distanze dei punti situati dalla banda positiva della binormale (come per esempio il punto $X = x + \cos\lambda,\ Y = y + \cos\mu,\ Z = z + \cos\nu$) e negativamente quelle dei punti situati dall'altra banda.

Ora se il punto M' ha le coordinate:

$$x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z$$

e corrisponde al valore $s + h$ del parametro, essendo h un incremento infinitesimo, avremo:

$$\Delta x = \frac{dx}{ds}h + \frac{d^2x}{ds^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3x}{ds^3}\frac{h^3}{6} + \varepsilon_1$$

$$\Delta y = \frac{dy}{ds}h + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{ds^3}\frac{h^3}{6} + \varepsilon_2$$

$$\Delta z = \frac{dz}{ds} h + \frac{d^2 z}{ds^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3 z}{ds^3}\frac{h^3}{6} + \varepsilon_3$$

dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sono infinitesimi del quarto ordine, e la distanza δ di M' dal piano osculatore sarà:

$$\delta = \Delta x . \cos\lambda + \Delta y . \cos\mu + \Delta z . \cos\nu .$$

Ma se si osserva che per le formole di Frenet:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha , \qquad \frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{1}{\rho}\cos\xi$$

$$\frac{d^3 x}{ds^3} = \frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}\cos\xi - \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\cos\alpha + \frac{1}{T}\cos\lambda\right)$$

e si sostituisce in δ si avrà:

$$\delta = -\frac{1}{6\rho T} h^3 + \eta$$

essendo η infinitesimo del quarto ordine. Di qui risulta che, se non sono zero le curvature $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{T}$ (il che accade solo in punti speciali), il segno di δ dipende solo da quello del primo termine, e cangia quando h cangia segno. La curva dunque traversa il piano osculatore e precisamente, se $\frac{1}{T}$ è positivo, dalla faccia positiva alla negativa, mentre se $\frac{1}{T}$ è negativo, il passaggio ha luogo in senso opposto. Dunque:

Alla torsione, calcolata dalle formole di Frenet, viene attribuito il segno positivo o negativo secondo che nel traversare il piano osculatore la curva passa dalla banda positiva alla negativa o viceversa.

E' chiaro che il segno della torsione non dipende dal senso secondo cui la curva si percorre, poiché, se questo senso si rovescia, vengono a permutarsi le faccie positiva e negativa del piano osculatore (V. § 5).

11.- Superficie inviluppi.- Allo studio delle ulteriori proprietà delle curve è utile premettere alcune brevi nozioni sulle superficie inviluppi. Sia

$$(20) \qquad f(x, y, z, \alpha) = 0$$

l'equazione di una superficie contenente un parametro arbitrario α, suscettibile di prendere con continuità i valori da $-\infty$ a $+\infty$, o i valori di un altro intervallo qualunque. Supponiamo che nel campo di variabilità che si considera per x, y, z, α, la funzione f sia finita e continua ed ammetta le derivate

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2},$$

pure finite e continue. Ad ogni valore speciale α_1 di α corrisponderà una particolare superficie e, variando α con continuità, la superficie stessa si muoverà con continuità nello spazio deformandosi.

Ora consideriamo insieme ad una individuata superficie (20), quella che corrisponde ad un valore vicinissimo $\alpha + h$ del parametro, cioè:

$$(21) \qquad f(x, y, z, \alpha + h) = 0 ;$$

la curva intersezione delle due superficie (20), (21) si muoverà sulla superficie (20) al variare di h, e al convergere di h verso zero, tenderà verso una curva limite. E infatti alle equazioni simultanee (20), (21) possiamo sostituire le altre:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0$$
$$\frac{f(x, y, z, \alpha + h) - f(x, y, z, \alpha)}{h} = 0 ;$$

ma al convergere di h verso zero, il primo membro della seconda equazione converge, per le ipotesi fatte, verso $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$. Dunque la curva limite cercata esiste effettivamente ed è l'intersezione delle due superficie:

$$(22) \qquad f(x,y,z,\alpha)=0, \quad \frac{\partial f(x,y,z,\alpha)}{\partial\alpha}=0.$$

Ad ogni particolare valore di α corrisponde sulla superficie $f(x,y,z,\alpha)=0$ una curva limite che fu detta da Monge la **caratteristica** della superficie stessa, e che vien data dalle equazioni simultanee (22). Variando α, varierà la caratteristica nello spazio, e descriverà una superficie che si dice la superficie **inviluppo** della famiglia di superficie (20), mentre ciascuna individuale superficie di questa famiglia si chiama **inviluppata**. —

L'equazione della superficie inviluppo si otterrà eliminando α dalle (22), poiché così avremo appunto l'equazione cui soddisfano le coordinate di tutti i punti delle caratteristiche indipendentemente dal valore speciale di α per ogni singola caratteristica. Possiamo dunque dire che la medesima equazione:

$$f(x,y,z,\alpha)=0$$

la quale per un valore costante di $\alpha=\alpha$, rappresenta una delle inviluppate, sta anche a rappresentare la superficie inviluppo quando, invece di riguardare α come costante, si riguardi come funzione di x, y, z tratta dalla equazione

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0.$$

Ne segue che in un punto di una inviluppata situato sopra la caratteristica, cioè comune all'inviluppata e all'inviluppo, queste due superficie hanno il medesimo piano tangente. E infatti se (x,y,z) è questo punto l'equazione del piano tangente per l'inviluppata sarà:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=0$$

e per l'inviluppo:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)(X-x)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)(Y-y)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)(Z-z)=0;$$

ma, come si è detto sopra, per l'inviluppo, α è una funzione di x, y, z che annulla $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, e però le due equazioni coincidono.

La caratteristica (22) delle superficie:

$$f(x,y,z,\alpha)=0$$

incontrerà la superficie vicina:

$$(23)\qquad f(x,y,z,\alpha+h)=0$$

in uno o più punti che si muoveranno sulla caratteristica al variare di h, e quando h tenderà a zero convergeranno verso certi punti limiti. Per trovare questi punti, scriviamo la (23) sotto la forma:

$$(24)\qquad f(x,y,z,\alpha)+h\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}+\eta=0$$

dove h essendo infinitesimo di prim'ordine, η è infinitesimo del terzo.

Alle equazioni simultanee (22), (24) che danno i punti richiesti possiamo sostituire le (22) stesse e l'altra:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}+\frac{2\eta}{h^2}=0.$$

Quando h converge verso zero, il secondo membro di questa equazione converge verso $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$, e quindi ne concludiamo che i punti limiti cercati sulla caratteristica, corrispondente ad un dato valore di α, sono forniti dalle equazioni simultanee:

$$(25)\qquad f=0,\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}=0.$$

Variando α, questi punti limiti si muoveranno e descriveranno una curva le cui equazioni si avranno evidentemente eliminando α fra due delle (25). Questo luogo porta il nome di spigolo di regresso della superficie inviluppo.

Con un ragionamento affatto analogo a quello già sopra indicato, è facile dimostrare che ogni caratteristica tocca lo spigolo di regresso nei punti ove lo incontra.

12. – Superficie sviluppabili. – Se un piano si muove con continuità nello spazio, la superficie inviluppo prende il nome di superficie sviluppabile. La caratteristica del piano sarà allora evidentemente una linea retta e lo spigolo di regresso sarà una curva a cui tutte le rette caratteristiche saranno tangenti; di guisa che una sviluppabile può anche definirsi come il luogo delle tangenti a una curva gobba (spigolo di regresso). Il piano mobile che inviluppa la sviluppabile non è altro che il piano osculatore dello spigolo di regresso. E infatti, ritenute le notazioni solite per questa curva, l'equazione del piano osculatore sarà:

$$(X-x)\cos\lambda + (Y-y)\cos\mu + (Z-z)\cos\nu = 0$$

e per parametro α si potrà prendere l'arco stesso s della curva. Derivando rispetto ad s per avere l'equazione che insieme alla precedente determina la caratteristica di questo piano mobile, troveremo, per le formole di Frenet:

$$(X-x)\cos\xi + (Y-y)\cos\eta + (Z-z)\cos\zeta = 0;$$

la retta comune a questo piano e al precedente è appunto la tangente alla curva, sicché la proprietà è dimostrata.

Per altro e' da osservarsi che lo spigolo di regresso può anche ridursi ad un punto, ed allora la sviluppabile e' un cono o un cilindro secondo che questo punto e' situato a distanza finita o all'infinito.

Ogni piano inviluppante tocca la sviluppabile lungo tutta la caratteristica (generatrice) e quindi, mentre per tutte le altre superficie i piani tangenti costituiscono un' infinità doppia, per le sviluppabili invece formano una semplice infinità.

Il nome di sviluppabili viene da ciò che, supposta la superficie flessibile e inestendibile, si può distendere sul piano senza rottura né duplicatura. Per convincersene basta immaginare che ogni striscia infinitesima, compresa fra due generatrici successive, giri attorno alla generatrice comune alla striscia precedente fino a che venga a trovarsi con questa nel medesimo piano. Vedremo poi inversamente che ogni superficie distendibile sul piano e' una sviluppabile.

13. — Circolo osculatore e sfera osculatrice. — Ritornando ora alla teoria generale delle curve gobbe, prendiamo a considerare la sviluppabile inviluppo dei piani normali alla curva, sviluppabile che porta il nome di superficie polare della curva. L'equazione del piano normale nel punto $M \equiv (x, y, z)$ della curva, è

$$(26) \qquad (X-x)\cos\alpha + (Y-y)\cos\beta + (Z-z)\cos\gamma = 0$$

e qui per parametro, da cui dipende il moto del piano, potremo prendere l'arco stesso della curva. Per ottenere quindi la retta caratteristica del piano (26), occorrerà associare a questa equazione quella che se ne ottiene derivandola rispetto ad s, il che dà, avuto riguardo alle formole di Frenet:

$$(27)\qquad (X-x)\cos\xi + (Y-y)\cos\eta + (Z-z)\cos\zeta = \rho.$$

Questo piano è evidentemente perpendicolare alla normale principale in M e alla distanza ρ da M dalla banda positiva della normale stessa. Il punto così individuato sulla normale principale, portando sopra di essa nel senso positivo un segmento eguale al raggio di prima curvatura, chiamasi il centro di curvatura relativo al punto M e il circolo descritto nel piano osculatore col centro nel centro di curvatura e col raggio eguale al raggio di curvatura, dicesi cerchio osculatore o di curvatura. (*)

Ciò posto, le (26), (27) ci dicono che la caratteristica cercata è la retta condotta per il centro di curvatura normalmente al piano osculatore, retta che si dice asse del cerchio osculatore. La sviluppabile polare è adunque il luogo degli assi dei cerchi osculatori; cioè queste rette sono le tangenti del suo spigolo di regresso. Per trovare il punto ove l'asse del cerchio osculatore (caratteristica) tocca questo spigolo di regresso, bisogna associare alle

---

(*). Sarebbe facile vedere che fra tutti i circoli tracciati per il punto M nel piano osculatore, il circolo osculatore è quello che meno si scosta dalla curva.

(26), (27) l'equazione che si ottiene derivando una seconda volta rispetto ad s. Questa tenendo conto delle formole di Frenet e della (26) stessa, può scriversi:

$$(28) \qquad (X-x)\cos\lambda + (Y-y)\cos\mu + (Z-z)\cos\nu = -T\frac{d\rho}{ds}$$

e insieme colle (26), (27) determina le coordinate del punto cercato che indicheremo con x_0, y_0, z_0. Risolvendo rispetto a x_0-x, y_0-y, z_0-z, coll'osservare che:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\xi & \cos\eta & \cos\zeta \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \end{vmatrix} = 1$$

avremo:

$$x_0 - x = \begin{vmatrix} 0 & \cos\beta & \cos\gamma \\ \rho & \cos\eta & \cos\zeta \\ -T\frac{d\rho}{ds} & \cos\mu & \cos\nu \end{vmatrix} = \rho\cos\xi - T\frac{d\rho}{ds}\cos\lambda$$

e però:

$$(29) \qquad \begin{cases} x_0 = x + \rho\cos\xi - T\dfrac{d\rho}{ds}\cos\lambda \\ y_0 = y + \rho\cos\eta - T\dfrac{d\rho}{ds}\cos\mu \\ z_0 = z + \rho\cos\zeta - T\dfrac{d\rho}{ds}\cos\nu \,. \end{cases}$$

La sfera che ha il centro nel punto (x_0, y_0, z_0) e passa per il circolo osculatore si dice *sfera osculatrice* nel punto M alla curva. Fra tutte le sfere che passano per M essa è quella che meno si scosta dalla curva, come facilmente si potrebbe dimostrare. Indicando con R il suo raggio, abbiamo dalle (29):

$$(30) \qquad R^2 = \rho^2 + \left(T\frac{d\rho}{ds}\right)^2.$$

14. — **Spigolo di regresso della sviluppabile polare.** — Le formole (29) ci danno, per un determinato valore di s,

le coordinate del centro della sfera osculatrice, e variando s, questo punto (x_0, y_0, z_0) descriverà il luogo dei centri delle sfere osculatrici o, ciò che è lo stesso, lo spigolo di regresso della sviluppabile polare. Indichiamo con

$$s_0\,;\ \cos\alpha_0,\ \cos\beta_0,\ \cos\gamma_0,\ \ldots\ldots,\ T_0,\ \rho_0$$

le quantità relative alla curva (29), che indicheremo con C_0, analoghe alle

$$s\,;\ \cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma,\ \ldots\ldots,\ T,\ \rho$$

per la curva primitiva C. Per ottenerle, basterà differenziare successivamente le (29), facendo uso delle formole di Frenet. Una prima differenziazione dà:

$$(29')\qquad \begin{cases} dx_0 = -\left\{\dfrac{\rho}{T} + \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{d\rho}{ds}\right)\right\}\cos\lambda\, ds, \\ dy_0 = -\left\{\dfrac{\rho}{T} + \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{d\rho}{ds}\right)\right\}\cos\mu\, ds, \\ dz_0 = -\left\{\dfrac{\rho}{T} + \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{d\rho}{ds}\right)\right\}\cos\nu\, ds, \end{cases}$$

da cui quadrando e sommando:

$$(31)\qquad ds_0 = \pm\left\{\frac{\rho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\rho}{ds}\right)\right\} ds.$$

Il segno da prendersi dipenderà dal senso positivo secondo cui si conta l'arco s_0 e dal segno di

$$\frac{\rho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\rho}{ds}\right).$$

Le (29') danno quindi:

$$\cos\alpha_0 = \mp\cos\lambda\,,\quad \cos\beta_0 = \mp\cos\mu\,,\quad \cos\gamma_0 = \mp\cos\nu$$

e differenziando nuovamente

$$\frac{ds_0}{\rho_0}\cos\xi_0 = \mp\frac{ds}{T}\cos\xi,\quad \frac{ds_0}{\rho_0}\cos\eta_0 = \mp\frac{ds}{T}\cos\eta,\quad \frac{ds_0}{\rho_0}\cos\zeta_0 = \mp\frac{ds}{T}\cos\zeta$$

da cui

$$(32)\qquad \frac{ds_0}{\rho_0} = \frac{ds}{T}$$

$$\cos\xi_0 = \mp\cos\xi\,,\quad \cos\eta_0 = \mp\cos\eta\,,\quad \cos\zeta_0 = \mp\cos\zeta\,.$$

Una terza differenziazione dà infine:

$$(33) \qquad \frac{ds_0}{T_0} = \frac{ds}{\rho},$$

$$\cos\lambda_0 = \mp\cos\alpha, \quad \cos\mu_0 = \mp\cos\beta, \quad \cos\nu_0 = \mp\cos\gamma.$$

Queste formole dimostrano che la tangente di ciascuna delle due curve C, C_0 è parallela alla binormale dell'altra, e che le normali delle due curve sono parallele, risultati che era facile prevedere geometricamente.

Cerchiamo ora se il raggio della sfera osculatrice può essere una costante. Differenziando la (30) in quest'ipotesi si ottiene:

$$T\frac{d\rho}{ds}\left\{\frac{\rho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\rho}{ds}\right)\right\} = 0$$

e siccome T non può essere zero, o si avrà:

$$\frac{d\rho}{ds} = 0, \quad \text{quindi} \quad \rho = \text{cost}^e$$

ovvero:

$$\frac{\rho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\rho}{ds}\right) = 0.$$

Nel primo caso dalle (29) sparisce il terzo termine, e quindi la C_0 coincide col luogo dei centri di curvatura della curva C. Inoltre per la (31) $ds_0 = \frac{\rho}{T}ds$ e quindi le (32), (33) danno:

$$\rho_0 = \rho, \quad T_0 = \frac{\rho^2}{T},$$

cioè il raggio di prima curvatura di C_0 è anch'esso costante $= \rho$, e il prodotto dei due raggi corrispondenti di torsione è eguale al quadrato di questa costante.

Nel secondo caso invece le (29') danno:

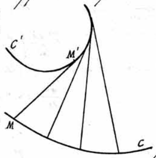
$$dx_0 = 0, \quad dy_0 = 0, \quad dz_0 = 0,$$

cioè il centro della sfera osculatrice è fisso nello spazio, ossia la curva C è tracciata sopra una sfera di raggio R.

Dunque:

Se è costante $= a$ il raggio della sfera osculatrice, o sarà costante $= a$ il raggio di flessione della curva, o questa sarà descritta sopra una sfera di raggio $\underline{a}$. Nel primo caso lo spigolo di regresso della sviluppabile polare coincide colla curva luogo dei centri di curvatura ed è anch'essa a flessione costante $\frac{1}{a}$, nel secondo questo spigolo di regresso si riduce a un punto, il centro della sfera. –

15 – Evolute ed evolventi. – Supponiamo sopra una curva C' gobba o piana avvolto un filo flessibile ed inestendibile e svolgiamolo dalla curva cominciando da un suo punto qualunque, in modo che il filo resti sempre teso, cioè che in ogni istante il pezzo $M'M$ di filo svolto dalla curva C' sia tangente a questa curva. L'estremità libera M del filo descriverà una curva C, alla quale si darà il nome di evolvente della curva C', mentre C' si chiama evoluta della curva C. È chiaro che ogni curva ha infinite evolventi (una semplice infinità), tutte tracciate sulla sviluppabile di cui la curva data è spigolo di regresso, ed una semplice considerazione geometrica dimostra che queste evolventi sono le traiettorie ortogonali delle generatrici della sviluppabile, come riscontreremo anche ora analiticamente.



Se con x', y', z', $\cos\alpha'$, ... indichiamo gli elementi relativi alla curva C' e con x, y, z, $\cos\alpha$, ... quelli relativi alla C, avremo le formole fondamentali:

(34) $\quad x'-x = s'\cos\alpha', \quad y'-y = s'\cos\beta', \quad z'-z = s'\cos\gamma',$

come subito si vede dal modo stesso di generazione della curva C, quando si osservi che il segmento $M'M$ di filo svolto è eguale all'arco s' di evoluta contato da quel punto fisso di C' col quale coincideva inizialmente l'estremità libera del filo.

Se l'evoluta C' si suppone data e si cercano le evolventi, basterà far uso delle (34) determinando s' con una quadratura che introduce una costante arbitraria.

Per risolvere il problema inverso, di trovare cioè le evolute data l'evolvente, cominciamo dal differenziare le (34) facendo uso delle formole di Frenet e troveremo:

$$-ds.\cos\alpha = \frac{s'ds'}{\rho'}\cos\xi', \quad -ds.\cos\beta = \frac{s'ds'}{\rho'}\cos\eta', \quad -ds\cos\gamma = \frac{s'ds'}{\rho'}\cos\zeta',$$

da cui:

(35) $$ds = \frac{s'ds'}{\rho'}$$

(36) $$\cos\alpha = -\cos\xi', \quad \cos\beta = -\cos\eta', \quad \cos\gamma = -\cos\zeta'.$$

Queste formole ci dicono che la tangente all'evolvente è parallela (e diretta in senso opposto) alla normale principale dell'evoluta, da cui segue in particolare che il segmento $M'M$ è normale in M alla evoluta, come è stato sopra asserito.

Dalle (36) segue:

(a) $$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0$$

e differenziando le (36):

(36') $$\left\{\begin{array}{l} \frac{ds}{\rho}\cos\xi = ds'\left(\frac{1}{\rho'}\cos\alpha' + \frac{1}{T'}\cos\lambda'\right) \\ \frac{ds}{\rho}\cos\eta = ds'\left(\frac{1}{\rho'}\cos\beta' + \frac{1}{T'}\cos\mu'\right) \\ \frac{ds}{\rho}\cos\zeta = ds'\left(\frac{1}{\rho'}\cos\gamma' + \frac{1}{T'}\cos\nu'\right), \end{array}\right.$$

Da cui:

$$\frac{ds}{\rho}\left(\cos\xi\cos\alpha' + \cos\eta\cos\beta' + \cos\zeta\cos\gamma'\right) = \frac{ds'}{\rho'} :$$

ovvero per la (35)

$$(b) \qquad \cos\xi\cos\alpha' + \cos\eta\cos\beta' + \cos\zeta\cos\gamma' = \frac{\rho}{s'} .$$

Alla (a), (b) possiamo associare l'altra:

$$(c) \qquad \cos\lambda\cos\alpha' + \cos\mu\cos\beta' + \cos\nu\cos\gamma' = \sqrt{1-\frac{\rho^2}{s'^2}}$$

che si verifica immediatamente quadrando e sommando le (a), (b), (c). Risolvendo queste equazioni rispetto a $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, troviamo:

$$(37) \qquad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha' &= \frac{\rho}{s'}\cos\xi + \sqrt{1-\frac{\rho^2}{s'^2}}\,\cos\lambda \\ \cos\beta' &= \frac{\rho}{s'}\cos\eta + \sqrt{1-\frac{\rho^2}{s'^2}}\,\cos\mu \\ \cos\gamma' &= \frac{\rho}{s'}\cos\zeta + \sqrt{1-\frac{\rho^2}{s'^2}}\,\cos\nu \end{aligned}\right.$$

e sostituendo nelle (34) avremo quindi:

$$(38) \qquad \left\{\begin{aligned} x' &= x + \rho\cos\xi + \sqrt{s'^2-\rho^2}\,\cos\lambda \\ y' &= y + \rho\cos\eta + \sqrt{s'^2-\rho^2}\,\cos\mu \\ z' &= z + \rho\cos\zeta + \sqrt{s'^2-\rho^2}\,\cos\nu , \end{aligned}\right.$$

formule che risolveranno il problema quando si riesca ad esprimere l'arco s' di C' per mezzo degli elementi relativi alla curva C. Per questo differenziando le (b) otterremo:

$$\begin{aligned} d\frac{\rho}{s'} = \frac{ds'}{\rho'}&\left(\cos\xi\cos\xi' + \cos\eta\cos\eta' + \cos\zeta\cos\zeta'\right) - \\ - \frac{ds}{\rho}&\left(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'\right) - \\ - \frac{ds}{T}&\left(\cos\lambda\cos\alpha' + \cos\mu\cos\beta' + \cos\nu\cos\gamma'\right); \end{aligned}$$

ma il primo termine è nullo per le (36), il secondo per la (a), e rimane quindi a causa della (c):

$$d\frac{\rho}{s'} = -\frac{ds}{T}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{s'^2}} ,$$

da cui integrando:

$$\text{arc}\cos\frac{\rho}{s'} = \int\frac{ds}{T} + k ,$$

essendo k una costante arbitraria. Ponendo:

$$\tau = \int \frac{ds}{T}$$

avremo dunque

$$\rho = s' \cos(\tau + k)$$

e le (37), (38) diverranno:

$$(39) \begin{cases} \cos\alpha' = \cos(\tau+k)\cos\xi + \operatorname{sen}(\tau+k)\cos\lambda, \\ \cos\beta' = \cos(\tau+k)\cos\eta + \operatorname{sen}(\tau+k)\cos\mu \\ \cos\gamma' = \cos(\tau+k)\cos\zeta + \operatorname{sen}(\tau+k)\cos\nu \end{cases}$$

$$(40) \begin{cases} x' = x + \rho\cos\xi + \rho\tang(\tau+k)\cos\lambda \\ y' = y + \rho\cos\eta + \rho\tang(\tau+k)\cos\mu \\ z' = z + \rho\cos\zeta + \rho\tang(\tau+k)\cos\nu, \end{cases}$$

formole che risolvono il problema proposto. Ad ogni valore speciale dato a k in queste formole, corrisponde una particolare evoluta. Ora se consideriamo due diverse evolute C_1', C_2' corrispondenti ai valori k_1, k_2 di k, avremo per le (39):

$$\cos\alpha_1' = \cos(\tau+k_1)\cos\xi + \operatorname{sen}(\tau+k_1)\cos\lambda,$$
$$\cos\beta_1' = \cos(\tau+k_1)\cos\eta + \operatorname{sen}(\tau+k_1)\cos\mu,$$
$$\cos\gamma_1' = \cos(\tau+k_1)\cos\zeta + \operatorname{sen}(\tau+k_1)\cos\nu;$$
$$\cos\alpha_2' = \cos(\tau+k_2)\cos\xi + \operatorname{sen}(\tau+k_2)\cos\lambda$$
$$\cos\beta_2' = \cos(\tau+k_2)\cos\eta + \operatorname{sen}(\tau+k_2)\cos\mu$$
$$\cos\gamma_2' = \cos(\tau+k_2)\cos\zeta + \operatorname{sen}(\tau+k_2)\cos\nu$$

e quindi se indichiamo con θ l'angolo compreso fra le due tangenti alle rispettive evolute C_1', C_2' uscenti da un medesimo punto M della evolvente C, avremo:

$$\cos\theta = \cos\alpha_1'\cos\alpha_2' + \cos\beta_1'\cos\beta_2' + \cos\gamma_1'\cos\gamma_2' = \cos(k_1 - k_2)$$

da cui il teorema:

A) Le tangenti a due diverse evolute, uscenti da un medesimo punto dell'evolvente, formano fra loro un angolo costante. —

E' utile dare a questo risultato la nuova forma seguente:

B) Se le generatrici di una superficie sviluppabile si fanno ruotare attorno al rispettivo punto d'incontro con una loro traiettoria ortogonale e nel piano normale a questa di un angolo costante, il luogo delle nuove posizioni delle generatrici è un'altra superficie sviluppabile. —

16. — Luogo delle evolute. — E' facile determinare il luogo delle evolute (40) della curva C. Se infatti indichiamo con x_1, y_1, z_1 le coordinate del centro di curvatura della curva C, avremo:

$$x_1 = x + \rho\cos\xi, \quad y_1 = y + \rho\cos\eta, \quad z_1 = z + \rho\cos\zeta$$

quindi:

$$\frac{x'-x_1}{\cos\lambda} = \frac{y'-y_1}{\cos\mu} = \frac{z'-z_1}{\cos\nu};$$

Dunque il punto (x', y', z') dell'evolvente è situato sopra l'asse del circolo osculatore in (x, y, z) alla curva C, e per conseguenza il luogo cercato è la sviluppabile polare della curva C.

Sarebbe facile dimostrare che se si distende la sviluppabile polare nel piano, le diverse evolute si trasformano in altrettante rette (uscenti da un medesimo punto) cioè sono geodetiche della superficie polare. Qui ci limiteremo a riscontrare che esse godono della proprietà caratteristica delle geodetiche, cioè la loro normale principale coincide colla normale alla superficie. E infatti essa è parallela, per le (36), alla tangente dell'evolvente, cioè è normale al piano normale di C; ma questo è appunto il piano che ha per inviluppo la sviluppabile polare.

Domandiamo infine se fra le evolute di una curva vi possono essere delle curve piane. Per risolvere tale questione, quadriamo e sommiamo le (36') e avremo:

$$\frac{ds^2}{\rho^2} = \left(\frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{T'^2}\right) ds'^2.$$

Se la C' fosse piana, si avrebbe $\frac{1}{T'} = 0$ e perciò:

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{ds'}{\rho'};$$

confrontando le (35) risulterebbe $\rho = s'$; ma abbiamo trovato $\rho = s' \cos\left(\int \frac{ds}{T} + k\right)$ e sarebbe quindi $\frac{1}{T} = 0$, cioè la C stessa una curva piana. Dunque:

Le evolute di una curva a doppia curvatura sono tutte a doppia curvatura. –

Se l'evolvente è piana, essa ha una ed una sola evoluta piana, che è il luogo dei suoi centri di curvatura, e le altre evolute sono eliche del cilindro retto (sviluppabile polare) che ha per base l'evoluta piana.

17. – Elementi caratteristici per le curve gobbe. –

Termineremo questa breve esposizione della teoria delle curve a doppia curvatura con alcune considerazioni relative agli elementi che determinano la forma della curva indipendentemente dalla sua posizione nello spazio. Già nel teorema di Puiseux relativo all'elica circolare (§9) abbiamo un esempio di una tale determinazione;

ma possiamo generalizzare questi risultati, e dimostrare che la forma di una curva è perfettamente definita, quando per ogni valore dell'arco s, si conosce quale è la flessione e quale la torsione della curva, cioè:

Noti i due raggi di curvatura ρ, T in funzione dell'arco s, la curva è determinata a meno di movimenti nello spazio. —

Se supponessimo che le funzioni date

$$\rho = f(s), \quad T = F(s)$$

fossero finite e continue e ammettessero le derivate di tutti gli ordini sempre finite e continue e di più che le coordinate x, y, z di un punto della curva cercata fossero sviluppabili in serie di Taylor per le potenze di s, la dimostrazione si potrebbe trarre facilmente da quanto venne osservato alla fine del § 7.

Ma lasciando queste condizioni restrittive, procederemo così. Assumiamo come incognite i coseni di direzione della tangente

$$\cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos\gamma;$$

una volta determinate queste funzioni di s, conosceremo la curva a meno di una traslazione nello spazio, perché avremo:

$$x = \int \cos\alpha \, ds + c_1, \quad y = \int \cos\beta \, ds + c_2, \quad z = \int \cos\gamma \, ds + c_3$$

con c_1, c_2, c_3 costanti arbitrarie.

Dell'indicatrice sferica delle tangenti, le coordinate dei cui punti sono le attuali incognite:

$$\cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos\gamma,$$

conosceremo l'arco σ in funzione di s a causa della formola $d\sigma = \frac{ds}{\rho}$. Ora per le formole di Frenet abbiamo:

$$\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}$$

$$\left(\frac{d^2\cos\alpha}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\cos\beta}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\cos\gamma}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2 T^2} + \frac{1}{\rho^4}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2;$$

quindi il dare ρ, T in funzione dell'arco, equivale a dare:

$$\Sigma\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 = \varphi^2(s) \quad ; \quad \Sigma\left(\frac{d^2\cos\alpha}{ds^2}\right)^2 = \psi^2(s)$$

dove φ e ψ sono funzioni note di s. Se poniamo:

(41) $\qquad \cos\alpha = \cos\theta\cos\omega\,, \quad \cos\beta = \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\omega\,, \quad \cos\gamma = \mathrm{sen}\,\theta,$

θ essendo la latitudine e ω la longitudine sulla sfera rappresentativa, dovremo dunque determinare θ, ω in funzione di s, in guisa che soddisfino le equazioni differenziali:

$$(42)\quad \begin{cases} \theta'^2 + \cos^2\theta \cdot \omega'^2 = \varphi^2(s) \\ \theta''^2 + \cos^2\theta \cdot \omega''^2 + \theta'^4 + \cos^2\theta \cdot \omega'^4 + 2(1+\mathrm{sen}^2\theta)\theta'^2\omega'^2 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \cdot \theta''\omega'^2 - \\ \qquad - 4\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \cdot \theta'\omega'\omega'' = \psi^2(s) \end{cases}$$

gli apici indicando derivate rispetto ad s.

Se nella seconda si sostituisce per ω' il valore tratto dalla prima, si avrà per θ l'equazione differenziale del 2° ordine:

$$(43)\qquad f(\theta, \theta', \theta'', s) = 0.$$

Supposto che $\theta = \theta_1$ sia un integrale particolare di questa equazione, si otterrà dalla prima delle (42) il valore corrispondente di ω con una quadratura, e cioè:

$$\omega = \int \frac{\sqrt{\varphi^2(s) - \theta_1'^2}}{\cos^2\theta_1}\, ds$$

e le (41) ci daranno sulla sfera rappresentativa una curva che soddisfa alle condizioni richieste. Se muoviamo questa curva in un modo qualunque sulla sfera, è chiaro che nella nuova posizione soddisferà ancora alle medesime condizioni e quindi il valore che ne risulta per θ sarà di nuovo un integrale della (43). Per dimostrare che ne è l'integrale generale basta provare che per un valore particolare $s = s_0$ di s, si possono assegnare arbitrariamente i valori di θ, $\frac{d\theta}{ds}$ che indicheremo con θ_0, θ_0'. Però siccome $\frac{d\theta}{d\sigma} = \rho \frac{d\theta}{ds}$ è eguale, come subito si vede, al coseno dell'angolo d'inclinazione della curva sul meridiano, condizione necessaria perchè la curva possa essere reale sarà $\rho_0 \theta_0' \leq 1$. Ciò posto, se il punto della curva speciale $\theta = \theta_1$ trovata corrispondente a $s = s_0$ è M_0, per ottenere l'integrale θ coi valori iniziali $\theta = \theta_0$, $\theta' = \theta_0'$ per $s = s_0$, basterà trasportare M_0 in un punto M_1 della sfera di latitudine θ_0 e girare sulla sfera la nuova curva intorno ad M_1 finchè il coseno dell'angolo che essa forma col meridiano per M_1 sia diventato eguale a $\rho_0 \theta_0'$.

Dunque se $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ costituiscono una soluzione speciale del nostro problema, la soluzione più generale sarà:

$$\cos\alpha = m_1 \cos\alpha_1 + n_1 \cos\beta_1 + p_1 \cos\gamma_1$$
$$\cos\beta = m_2 \cos\alpha_1 + n_2 \cos\beta_1 + p_2 \cos\gamma_1$$
$$\cos\gamma = m_3 \cos\alpha_1 + n_3 \cos\beta_1 + p_3 \cos\gamma_1 ,$$

dove m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2; m_3, n_3, p_3, rappresentano i coseni di direzione di una terna di assi ortogonali arbitrari. Integrando si ha quindi:

$$x = m_1 x_1 + n_1 y_1 + p_1 z_1 + c_1$$
$$y = m_2 x_1 + n_2 y_1 + p_2 z_1 + c_2$$
$$z = m_3 x_1 + n_3 y_1 + p_3 z_1 + c_3,$$

il che dimostra il teorema enunciato. —

II. Coordinate curvilinee sulle superficie - Rappresentazione conforme.

18. — Coordinate curvilinee. — Una curva che si muova deformandosi con continuità nello spazio genera una superficie. Potremo ottenere la determinazione analitica della superficie con un processo analogo a quello tenuto nel §1 per le curve. Per questo supponiamo che le coordinate:

$$x = x(u)\ ,\quad y = y(u)\ ,\quad z = z(u)$$

dei punti di una curva, oltre alla variabile u, i cui singoli valori individuano i punti della curva, contengano un parametro v, siano cioè funzioni (finite e continue in un certo campo) delle variabili u, v, talchè si possa scrivere:

$$(1)\qquad x = x(u,v)\ ,\quad y = y(u,v)\ ,\quad z = z(u,v).$$

Ad ogni valore particolare $v = v_1$ per v corrisponderà una curva speciale

$$x = x(u, v_1), \quad y = y(u, v_1), \quad z = z(u, v_1)$$

e variando v con continuità, questa curva si muoverà con continuità nello spazio, descrivendo una superficie, la quale potrà ritenersi analiticamente definita dalle formole (1).

Questa superficie sarà ricoperta dal sistema di linee ora considerate, ciascuna delle quali corrisponderà ad un valore particolare costante di v, e si dirà perciò una linea $v = cost^{te}$ o una linea v.

Ora è manifesto che quanto si è detto per le equazioni (1) rispetto alla variabile v, si può ripetere per la u. Se cioè nelle (1) si da alla u un valore costante, si otterrà la curva:

$$x = x(u_1, v), \quad y = y(u_1, v), \quad z = z(u_1, v),$$

costituita di punti tutti situati sulla superficie e in cui il parametro variabile sarà v.

Facendo variare u con continuità, la curva ora considerata si muoverà descrivendo la superficie (1). Otteniamo così un secondo sistema di linee, che diremo le linee $u = cost^{te}$ o le linee u.

Un punto P sulla superficie (1) sarà noto quando si conoscano i valori u_1, v_1 dei parametri u, v nel punto stesso, poichè le (1) ne daranno le coordinate. In altro modo possiamo dire che il punto P è individuato come punto d'intersezione delle due linee

$$u = u_1, \quad v = v_1$$

appartenenti rispettivamente l'una al sistema u, l'altra al sistema v. I valori u, v dei parametri in P si dicono le **coordinate curvilinee** del punto, mentre le linee stesse dei sistemi $u = \text{cost}^{te}$, $v = \text{cost}^{te}$ assumono il nome di **linee coordinate**. —

Una equazione
$$f(u, v) = 0$$
fra le coordinate curvilinee di un punto P limiterà evidentemente il corso del punto ad una linea tracciata sulla superficie e si dirà perciò l'equazione di quella linea.

Infiniti sono i sistemi di coordinate curvilinee che possono scegliersi sopra una superficie data
$$f(x, y, z) = 0 .$$
Se ne ottiene uno ogniqualvolta si esprimano le coordinate x, y, z di un suo punto variabile per due variabili indipendenti α, β, in modo che eliminando α, β dalle relazioni
$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad z = z(\alpha, \beta)$$
si ritorni all'equazione $f(x, y, z) = 0$ della superficie.

Quando poi un sistema di coordinate curvilinee (u, v) sia già stabilito sulla superficie, se ne ottiene un nuovo (α, β) ponendo
$$u = u(\alpha, \beta), \qquad v = v(\alpha, \beta)$$
dove le funzioni $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ delle due nuove variabili indipendenti α, β sono qualunque. Per altro è da osservarsi che se, per esempio, $u(\alpha, \beta)$ contenesse

una sola delle variabili α, β, poniamo α, le linee coordinate u non verrebbero cangiate per questa trasformazione, perchè per $\alpha =$ costante è pure costante u; soltanto verrebbe variato il parametro che le determina.

Infine noteremo che per le funzioni:

$$x(u,v)\quad,\quad y(u,v)\quad,\quad z(u,v)$$

che danno le coordinate dei punti della superficie, noi supporremo sempre che in tutto il campo di variabilità considerato per u, v, siano funzioni sempre finite e continue insieme alle loro derivate parziali prime, seconde e terze, tranne tutto al più in punti singolari o linee singolari isolate.

Le coordinate curvilinee, dette anche coordinate di **Gauss**, sono utilissime nell'analisi delle proprietà delle superficie, come quelle che per la loro stessa natura sono già intimamente legate alla generazione della superficie che si studia.

19. — Formole fondamentali. — Supponiamo scelto sopra una superficie S un sistema di coordinate curvilinee u, v, e quindi espresse per i parametri u, v le coordinate Cartesiane ortogonali x, y, z di un punto mobile sulla superficie per mezzo delle (1).

Consideriamo due punti infinitamente vicini (u,v) $(u+du, v+dv)$ sulla superficie S e valutiamo la loro distanza infinitesima ds, che si dirà l'**elemento lineare** della superficie. Passando dal punto (u,v) al punto $(u+du, v+dv)$ le coordinate x, y, z subiranno determinati incrementi dx, dy, dz dati dalle formole

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv ,$$

e si avrà:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

Ponendo adunque:

$$(2) \quad \begin{cases} E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \\ F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 , \end{cases}$$

avremo per la formola cercata:

$$(3) \qquad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 .$$

I coefficienti E, F, G dell'elemento lineare sono funzioni finite e continue di u, v e inoltre E, G sono sempre positivi per le (2). Coi simboli $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$ denoteremo sempre i valori positivi dei radicali.

In ogni punto di una linea coordinata $u = \text{cost}^{te}$, o $v = \text{cost}^{te}$ dovremo distinguere due direzioni, la positiva che per noi sarà quella secondo cui cresce l'altro parametro v o u, e l'opposta negativa. Ne segue che se ds_u, ds_v indicano gli archi elementari positivi delle rispettive linee u, v, si avrà dalla (3):

$$ds_u = \sqrt{G}\, dv , \qquad ds_v = \sqrt{E}\, du .$$

Se poi:

$$\cos(\widehat{ux}) , \ \cos(\widehat{uy}) , \ \cos(\widehat{uz})$$
$$\cos(\widehat{vx}) , \ \cos(\widehat{vy}) , \ \cos(\widehat{vz})$$

denotano i coseni di direzione (positiva) delle tangenti alle linee coordinate u, v, avremo subito (§ 2):

$$\cos(\hat{ux}) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \cos(\hat{uy}) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \cos(\hat{uz}) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\cos(\hat{vx}) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \cos(\hat{vy}) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \cos(\hat{vz}) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}$$

Chiamando w l'angolo, compreso fra 0 e π, formato in un punto della superficie dalle direzioni positive delle linee coordinate che vi passano, avremo:

$$\cos w = \cos(\hat{ux})\cos(\hat{vx}) + \cos(\hat{uy})\cos(\hat{vy}) + \cos(\hat{uz})\cos(\hat{vz}),$$

quindi per le precedenti:

$$(4) \qquad \cos w = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Ne risulta che si ha sempre $EG \geq F^2$, come si verifica anche osservando che $EG - F^2$ è la somma di tre quadrati (*). Abbiamo poi:

$$(5) \qquad \operatorname{sen} w = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$

dove è preso positivamente anche il valore del radicale al numeratore.

Dalla (4) risulta subito:

La condizione necessaria e sufficiente perchè le linee coordinate u, v siano fra loro ortogonali è che nell'espressione (3) dell'elemento lineare si abbia $F = 0$.

20.— Linee tracciate sulla superficie. — Elemento d'area. — Consideriamo una linea qualunque C tracciata

---

(*).
$$EG - F^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2.$$

sulla superficie, per la quale sia fissata arbitrariamente la direzione positiva del suo arco s, e indichiamo con θ l'angolo, che la direzione positiva di C fa colla direzione positiva delle linee $v = \text{cost}^e$. Se un punto M si sposta lungo la linea C, le sue coordinate x, y, z si potranno riguardare come funzioni di s, e se con

$$\cos(\hat{Cx}), \quad \cos(\hat{Cy}), \quad \cos(\hat{Cz})$$

si indicano i coseni di direzione della tangente alla C, si avrà quindi:

$$\cos(\hat{Cx}) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$
$$\cos(\hat{Cy}) = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{ds}$$
$$\cos(\hat{Cz}) = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$

e però:

$$\cos\theta = \cos(\hat{Cx})\cos(\hat{vx}) + \cos(\hat{Cy})\cos(\hat{vy}) + \cos(\hat{Cz})\cos(\hat{vz}) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right).$$

Ora a causa della (3) abbiamo l'identità:

$$\frac{1}{E}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right)^2 + \frac{EG - F^2}{E}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1$$

e ne risulta per le formole cercate

$$(6) \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\left(E\dfrac{du}{ds} + F\dfrac{dv}{ds}\right) \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\dfrac{dv}{ds}, \end{cases}$$

dove prendendo pel radicale il segno positivo nella seconda formola, veniamo a scegliere θ fra 0 e π, se v cresce con s, e invece fra π e 2π nel caso opposto. A queste poi possiamo aggiungere la formola:

$$(6') \quad \operatorname{sen}(\omega - \theta) = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{G}}\frac{du}{ds}.$$

Se le linee coordinate sono ortogonali, si ha $\omega = \frac{\pi}{2}$, $F = 0$, e le formole precedenti diventano quindi:

$$(7) \qquad \cos\theta = \sqrt{E}\,\frac{du}{ds}, \quad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds}, \quad \operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{dv}{du}.$$

Con queste formole, appena nota l'equazione della curva, si potrà calcolare il quoziente $\frac{dv}{du}$ e l'angolo θ.

Le formole precedenti possono stabilirsi geometricamente con molta facilità, osservando che se l'elemento lineare ds ha il suo principio nel punto (u, v) e il termine nel punto $(u+du, v+dv)$, le quattro linee coordinate

$$u, \; u+du, \quad v, \; v+dv$$

limitano un quadrilatero infinitesimo che, a meno d'infinitesimi di 2° ordine, può riguardarsi come un parallelogrammo, di cui la diagonale è ds, i lati $ds_u = \sqrt{G}\,dv$, $ds_v = \sqrt{E}\,du$, gli angoli sono ω e $\pi - \omega$ e gli angoli della diagonale coi lati θ e $\omega - \theta$.

Per l'area di questo parallelogrammo infinitesimo, ossia per l'elemento superficiale $d\sigma$ della S avremo quindi:

$$d\sigma = \operatorname{sen}\omega\, ds_u\, ds_v$$

cioè:

$$(8) \qquad d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

il radicale essendo preso al solito positivamente.

21. – Sistemi ortogonali isotermi. – I sistemi ortogonali di linee coordinate che si possono scegliere sopra una superficie S, e che danno all'elemento lineare

la forma

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

sono evidentemente in numero infinito. Ora si può dimostrare di più l'importante teorema:

Fra i sistemi di linee coordinate u, v, che si possono scegliere sopra una superficie S ve ne sono infiniti, pei quali $F = 0$, $E = G$, cioè:

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2).$$

Preso infatti un sistema qualunque di coordinate curvilinee sulla superficie, che dia all'elemento lineare la forma:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

potremo scindere il secondo membro in due fattori A, B lineari ed omogenei nei differenziali du, dv, cioè:

$$A = \sqrt{E}\,du + \left(F + i\sqrt{EG - F^2}\right)\frac{dv}{\sqrt{E}}$$

$$B = \sqrt{E}\,du + \left(F - i\sqrt{EG - F^2}\right)\frac{dv}{\sqrt{E}}$$

i quali saranno essenzialmente immaginari e coniugati perchè $EG - F^2$ è positivo.

Dal calcolo integrale è noto che esistono fattori integranti (in numero infinito) dell'espressione differenziale A; se uno di questi è $\mu + i\nu$, talchè si abbia:

$$A(\mu + i\nu) = d(\alpha + i\beta)$$

sarà anche, cangiando i in $-i$

$$B(\mu - i\nu) = d(\alpha - i\beta)$$

da cui:

$$AB(\mu^2 + \nu^2) = d\alpha^2 + d\beta^2.$$

Se poniamo $h = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2}$, avremo quindi:

$$ds^2 = h\left(d\alpha^2 + d\beta^2\right),$$

cioè le linee $\alpha = cost^e$, $\beta = cost^e$ assunte a linee coordinate, daranno all'elemento lineare la forma richiesta dal teorema.

Essendo infiniti i fattori integranti dell'espressione differenziale A, infiniti saranno pure questi sistemi di linee ortogonali, ai quali è stato dato il nome di sistemi isotermi a causa di una proprietà di cui godono nella teoria del calore. Ma se uno di questi fattori integranti è $\mu + i\nu$, tutti gli altri, come è noto, sono compresi nella formola

$$(\mu + i\nu) f(\alpha + i\beta),$$

dove f è il simbolo di una funzione arbitraria. Il corrispondente integrale di

$$A \times (\mu + i\nu) f(\alpha + i\beta) = f(\alpha + i\beta)(d\alpha + i\,d\beta)$$

sarà quindi una funzione arbitraria $\Pi(\alpha + i\beta)$ di $\alpha + i\beta$, e il nuovo sistema isotermo (α', β') si otterrà quindi colla formola

$$\alpha' + i\beta' = \Pi(\alpha + i\beta).$$

Se di più osserviamo che si può cangiare β in $-\beta$ senza alterare la forma di $ds^2 = h(d\alpha^2 + d\beta^2)$, potremo dire:

Se (α, β) è un sistema isotermo, se ne otterrà uno nuovo (α', β') ponendo

$$(9) \qquad \alpha' + i\beta' = \Pi(\alpha \pm i\beta),$$

dove Π è il simbolo di una funzione arbitraria.

Ora è importante osservare che tutti i sistemi isotermi possibili sono dati da questa formola. E infatti suppo sto che (α,β), (α',β') siano due tali sistemi e si abbia quindi

$$ds^2 = h(d\alpha^2+d\beta^2) = h'(d\alpha'^2+d\beta'^2)$$

cioè:

$$(a) \qquad h(d\alpha+id\beta)(d\alpha-id\beta) = h'(d\alpha'+id\beta')(d\alpha'-id\beta'),$$

se le formole per passare da (α,β) ad (α',β') si suppongono essere:

$$\alpha'=\alpha'(\alpha,\beta)\,, \qquad \beta'=\beta'(\alpha,\beta)$$

basta osservare che, sostituendo in (a) questi valori, essa deve cangiarsi in un'identità, mentre $d\alpha'$, $d\beta'$ sono lineari omogenei in $d\alpha$, $d\beta$ per concluderne che dovrà essere:

$$d\alpha'+id\beta' = \gamma(d\alpha \pm id\beta),$$

dove γ è un fattore finito. Il primo membro essendo un differenziale esatto, dovrà pure esserlo il secondo, quindi γ una funzione di $\alpha \pm i\beta$; integrando avremo dunque la (9) c.d.d.

22.– Parametri isometrici. – I sistemi isotermi (α,β) godono di una proprietà geometrica che li caratterizzano. Essi dividono la superficie in rettangoli infinitesimi simili, quando gli incrementi $d\alpha$, $d\beta$ si assumono costanti ed in quadrati, se si prende inoltre $d\alpha = d\beta$.

I parametri α,β pei quali l'elemento lineare prende la forma:

$$ds^2 = h(d\alpha^2+d\beta^2)$$

diconsi parametri isometrici. – Ora, senza cangiare linee coordinate, si può porre:

$$\alpha=\alpha(u)\,, \qquad \beta=\beta(v)$$

e ne risulta $\qquad ds^2 = h(U\,du^2+V\,dv^2),$

dove U è funzione della sola u, V di v. Il sistema (u,v) dicesi sempre isotermo, perchè non differisce dal sistema primitivo (α,β), ma i parametri u,v non sono più isometrici.

Ciò dimostra che, se il sistema u,v dà all'elemento lineare la forma:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

condizione necessaria perchè sia isotermo è che si abbia:

$$\frac{E}{G} = \frac{U}{V},$$

dove U, V sono funzioni la prima della sola u, la seconda della sola v. Ma tale condizione è anche sufficiente, perchè supposta soddisfatta, dà:

$$\frac{E}{U} = \frac{G}{V},$$

e chiamando λ il rapporto comune, avremo:

$$ds^2 = \lambda\left(U du^2 + V dv^2\right).$$

Ponendo ora:

$$\int\sqrt{U}\,du = \alpha\,, \qquad \int\sqrt{V}\,dv = \beta,$$

il che non cangia le linee coordinate, avremo appunto:

$$ds^2 = \lambda\left(d\alpha^2 + d\beta^2\right).$$

23. – Coordinate simmetriche immaginarie. – Supposto

$$ds^2 = \lambda\left(d\alpha^2 + d\beta^2\right)$$

se introduciamo le variabili complesse coniugate

$$\alpha + i\beta = \varphi \quad , \quad \alpha - i\beta = \psi$$

e indichiamo con λ_1 la funzione di φ, ψ in cui si cangia per questa sostituzione $\lambda(\alpha,\beta)$, avremo:

$$(10) \qquad ds^2 = \lambda_1\, d\varphi\, d\psi,$$

forma molto notevole dell'elemento lineare.

Per quanto φ, ψ siano immaginarie, servono però analiticamente, nello stesso modo che le coordinate reali, ad individuare i punti della superficie. Esse portano il nome di coordinate simmetriche immaginarie. La ricerca di questi sistemi di coordinate sopra una data superficie, o ciò che è lo stesso dei sistemi isotermi, dipende dalla ricerca del fattore integrante $\mu + i\nu$, cioè dalla integrazione della equazione differenziale del 1° ordine:

$$(11) \qquad \sqrt{E}\,du + \left(F + i\sqrt{EG-F^2}\right)\frac{dv}{\sqrt{E}} = 0,$$

la quale definisce un intero sistema di curve (immaginarie) sulla superficie S. La equazione (11) può scriversi anche sotto forma reale

$$ds^2 = 0,$$

e le curve corrispondenti prendono perciò il nome di curve di **lunghezza nulla**. Geometricamente sono caratterizzate dalla proprietà che le loro tangenti si appoggiano al cerchio immaginario all'infinito.

In generale la (11) non si sa integrare, ma per alcune classi di superficie come le sviluppabili, le superficie di rotazione, le elicoidi, l'integrazione riesce e risolve così il corrispondente problema dei sistemi isotermi.

24.- **Applicazione alle superficie di rotazione**.— Sopra una superficie di rotazione potremo assumere a linee coordinate i meridiani e i paralleli. Per parametro di un meridiano variabile assumeremo l'angolo w che il suo piano forma col piano di un meridiano fisso (longitudine) e per parametro del parallelo potremo prendere il suo raggio stesso r, eccettuato il caso del cilindro che si può considerare a parte. Se per asse delle z si assume l'asse di rotazione della superficie, e se:

$$z = \varphi(r)$$

è l'equazione della curva meridiana, le coordinate x, y, z di un punto della superficie saranno date dalle formole:

$$x = r\cos w, \quad y = r\,\mathrm{sen}\, w, \quad z = \varphi(r),$$

e quindi si avrà:

$$ds^2 = \{1 + \varphi'^2(r)\}\,dr^2 + r^2 dw^2,$$

Questa formola ci dimostra (§ 22) che:

Sopra ogni superficie di rotazione i meridiani e i paralleli costituiscono un sistema ortogonale isotermo. —

Invece di assumere r per parametro dei paralleli, si può prendere l'arco u di meridiano contato da un punto fisso; allora essendo

$$du = \sqrt{1 + \varphi'^2(r)}\; dr$$

ne risulterà:

$$(12) \qquad ds^2 = du^2 + r^2 dw^2,$$

dove r è una funzione della u. — Questa formola vale anche pel cilindro nel qual caso si ha:

$$x = r\cos w, \quad y = r\,\mathrm{sen}\, w, \quad z = u$$

con r costante. — Per ridurre queste coordinate isoterme ai parametri isometrici, basta scrivere:

$$ds^2 = r^2\left(\frac{du^2}{r^2} + dw^2\right)$$

dopo di che si vede che i parametri isometrici sono w e $u_1 = \int \frac{du}{r}$.

La (12) può anche stabilirsi subito geometricamente osservando che du è l'arco elementare del meridiano e $r\,dw$ quello del parallelo.

25. — Problema della rappresentazione conforme. — Quando fra i punti di due superficie S, S' viene stabilita una corrispondenza, di guisa che ad ogni punto M' (obiettivo) esistente sopra S' (o sopra una determinata porzione di S') ne corrisponda uno (immagine) sopra S (o una porzione di S), e, muovendosi con continuità il punto obiettivo M' sopra S', il punto immagine M si muova con continuità sopra S, diciamo che la superficie S' viene rappresentata sopra la superficie S. Lo scopo che ci si propone con tali rappresentazioni, essendo appunto quello di studiare le proprietà delle figure obiettive sopra S', per mezzo di quelle delle figure immagini sopra S, conviene che queste ultime diano un'idea esatta, per quanto è possibile, delle relazioni di forma e grandezza esistenti nelle prime.

Tale rappresentazione sarebbe perfetta quando le figure immagini riuscissero in ogni loro parte simili alle obiettive, cioè fossero soddisfatte le due condizioni:

1ª Eguaglianza degli angoli corrispondenti;

2ª Proporzionalità nelle aree corrispondenti.

Ma se fra S, S' non vi sono relazioni affatto speciali (*), è impossibile soddisfarvi contemporaneamente, e bisogna quindi contentarsi o di una rappresentazione che conservi gli angoli (o, ciò che torna lo stesso, rappresenti le figure infinitesime sopra S' con figure infinitesime simili sopra S),

---

(*). Bisognerebbe che l'una fosse applicabile sull'altra o sopra una superficie simile all'altra. (Vᵉ cap. IV) o di una che non alteri i rapporti delle aree.

Ci limiteremo a trattare brevemente delle prime rappresentazioni, che diconsi rappresentazioni conformi, e la cui teoria generale fu stabilita da Gauss.

Per trattare il problema della rappresentazione conforme di S' sopra S, assumiamo sulla superficie S un sistema di linee coordinate (u, v) che dia all'elemento lineare la forma

$$(13) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

e medesimamente sopra S' un sistema (u', v') pel quale l'elemento lineare ds' assuma la forma:

$$(14) \qquad ds'^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2.$$

Se per la rappresentazione, ad ogni punto (u', v') della seconda deve corrispondere un punto (u, v) della prima, ciò significa analiticamente che (u, v) dovranno essere funzioni di (u', v') e viceversa u', v' funzioni di u, v; supponiamo

$$(15) \qquad u' = u'(u, v) \quad , \quad v' = v'(u, v);$$

ma ammettiamo di più che queste funzioni siano finite e continue insieme alle derivate parziali $\frac{\partial u'}{\partial u}, \frac{\partial u'}{\partial v}, \frac{\partial v'}{\partial u}, \frac{\partial v'}{\partial v}$ sopra tutta la porzione di S nella quale si fa la rappresentazione.

Se per mezzo delle (15) operiamo nella (14) una trasformazione di coordinate, esprimendovi u', v', du', dv' per u, v, otterremo:

$$(16) \qquad ds'^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du\,dv + G_1 dv^2,$$

dove abbiamo posto:

$$(17) \qquad E_1 = E'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2F'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + G'\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2,$$

$$(17)\left\{\begin{array}{l} F_1 = E'\dfrac{\partial u'}{\partial u}\dfrac{\partial u'}{\partial v} + F'\left(\dfrac{\partial u'}{\partial u}\dfrac{\partial v'}{\partial v} + \dfrac{\partial u'}{\partial v}\dfrac{\partial v'}{\partial u}\right) + G'\dfrac{\partial v'}{\partial u}\dfrac{\partial v'}{\partial v} \\ G_1 = E'\left(\dfrac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2F'\dfrac{\partial u'}{\partial v}\dfrac{\partial v'}{\partial v} + G'\left(\dfrac{\partial v'}{\partial v}\right)^2. \end{array}\right.$$

La condizione imposta alla rappresentazione esige la similitudine nelle parti infinitesime, cioè che il rapporto $\frac{ds'}{ds}$ di due elementi lineari corrispondenti, che sopra S' ed S uniscono i punti (u,v), $(u+du, v+dv)$, pure potendo dipendere dalla posizione del punto (u,v) sopra S, sia indipendente dalla direzione degli elementi stessi. In altre parole bisogna che il rapporto

$$\frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{E_1 + 2F_1\frac{dv}{du} + G_1\left(\frac{dv}{du}\right)^2}{E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}$$

sia indipendente dal valore del quoziente $\frac{dv}{du}$ (V.i § 20), il che dà le proporzioni:

$$(18)\qquad \frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G}.$$

Queste due equazioni, in forza dei valori (17) per E_1, F_1, G_1 sono due equazioni simultanee a derivate parziali del 1° ordine per le funzioni incognite $u'(u,v)$, $v'(u,v)$, la cui integrazione risolverebbe il problema proposto. Ma l'integrazione delle equazioni (18) nello stato attuale dell'Analisi non può in generale eseguirsi. Pur tuttavia, indipendentemente dai teoremi generali sull'esistenza degli integrali per le equazioni a derivate parziali, possiamo riconoscere che il problema è risolubile in infiniti modi e nel caso che sopra ambedue le superficie S, S' si conoscano i sistemi isotermi, risolverlo effettivamente.

26°. — **Risoluzione del problema.** — La risoluzione o di una che non alteri i rapporti delle aree.

Ci limiteremo a trattare brevemente delle prime rappresentazioni, che diconsi rappresentazioni conformi, e la cui teoria generale fu stabilita da Gauss.

Per trattare il problema della rappresentazione conforme di S' sopra S, assumiamo sulla superficie S un sistema di linee coordinate (u,v) che dia all'elemento lineare la forma

$$(13) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

e medesimamente sopra S' un sistema (u',v') pel quale l'elemento lineare ds' assuma la forma:

$$(14) \qquad ds'^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2.$$

Se per la rappresentazione, ad ogni punto (u',v') della seconda deve corrispondere un punto (u,v) della prima, ciò significa analiticamente che (u,v) dovranno essere funzioni di (u',v') e viceversa u',v' funzioni di u,v; supponiamo

$$(15) \qquad u' = u'(u,v) \quad , \quad v' = v'(u,v);$$

ma ammettiamo di più che queste funzioni siano finite e continue insieme alle derivate parziali $\frac{\partial u'}{\partial u}, \frac{\partial u'}{\partial v}, \frac{\partial v'}{\partial u}, \frac{\partial v'}{\partial v}$ sopra tutta la porzione di S nella quale si fa la rappresentazione.

Se per mezzo delle (15) operiamo nella (14) una trasformazione di coordinate, esprimendovi u',v',du',dv' per u,v, otterremo:

$$(16) \qquad ds'^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du\,dv + G_1 dv^2,$$

dove abbiamo posto:

$$(17) \qquad E_1 = E'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2F'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + G'\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2,$$

$$(17)\quad \begin{cases} F_1 = E'\dfrac{\partial u'}{\partial u}\dfrac{\partial u'}{\partial v} + F'\left(\dfrac{\partial u'}{\partial u}\dfrac{\partial v'}{\partial v} + \dfrac{\partial u'}{\partial v}\dfrac{\partial v'}{\partial u}\right) + G'\dfrac{\partial v'}{\partial u}\dfrac{\partial v'}{\partial v} \\ G_1 = E'\left(\dfrac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2F'\dfrac{\partial u'}{\partial v}\dfrac{\partial v'}{\partial v} + G'\left(\dfrac{\partial v'}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

La condizione imposta alla rappresentazione esige la similitudine nelle parti infinitesime, cioè che il rapporto $\frac{ds'}{ds}$ di due elementi lineari corrispondenti, che sopra S ed S' uniscono i punti (u,v), $(u+du,\, v+dv)$, pure potendo dipendere dalla posizione del punto (u,v) sopra S, sia indipendente dalla direzione degli elementi stessi. In altre parole bisogna che il rapporto

$$\frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{E_1 + 2F_1\frac{dv}{du} + G_1\left(\frac{dv}{du}\right)^2}{E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}$$

sia indipendente dal valore del quoziente $\frac{dv}{du}$ (V. $\S$ 20), il che dà le proporzioni:

$$(18)\qquad \frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G}.$$

Queste due equazioni, in forza dei valori (17) per E_1, F_1, G_1 sono due equazioni simultanee a derivate parziali del 1° ordine per le funzioni incognite $u'(u,v)$, $v'(u,v)$, la cui integrazione risolverebbe il problema proposto. Ma l'integrazione delle equazioni (18) nello stato attuale dell'Analisi non può in generale eseguirsi. Pur tuttavia, indipendentemente dai teoremi generali sull'esistenza degli integrali per le equazioni a derivate parziali, possiamo riconoscere che il problema è risolubile in infiniti modi e ~~che~~ nel caso che sopra ambedue le superficie S, S' si conoscano i sistemi isotermi, risolverlo effettivamente.

26°. — Risoluzione del problema. — La risoluzione accennata dipende dai teoremi seguenti:

In ogni rappresentazione conforme, ad un sistema ortogonale isotermo sulla prima superficie corrisponde sulla seconda un sistema ortogonale isotermo. —

E infatti si abbia sopra S un sistema ortogonale isotermo (α, β) che possiamo supporre ridotto ai parametri isometrici, in modo che si abbia per l'elemento lineare ds

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Sopra S', gli angoli dovendo essere conservati, vi corrisponderà un sistema ortogonale e, conservando sopra S' i medesimi parametri α, β, avremo quindi:

$$ds'^2 = E_1 d\alpha^2 + G_1 d\beta^2.$$

Ma poichè la rappresentazione è conforme, le (18) dovranno essere soddisfatte, e quindi:

$$\frac{E_1}{\lambda} = \frac{G_1}{\lambda}$$

cioè $E_1 = G_1$ il che dimostra appunto che il sistema (α, β) sopra S' è pure isotermo e α, β sono i parametri isometrici. (*)

Possiamo ora dimostrare reciprocamente:

Se in una rappresentazione di S' sopra S, ad un sistema isotermo sopra S si fa corrispondere un sistema isotermo sopra S', la relazione fra i parametri potrà determinarsi in guisa che la rappresentazione riesca conforme.

Si abbia infatti sopra S il sistema isotermo (α, β) ridotto

(*). Del resto se si pone mente alla proprietà geometrica caratteristica dei sistemi isotermi (§22), il teorema enunciato è d'immediata evidenza. —

ai parametri isometrici con

$$ds^2 = \lambda\left(d\alpha^2 + d\beta^2\right)$$

e analogamente sopra S' il sistema isotermo (α', β') con

$$ds'^2 = \lambda'\left(d\alpha'^2 + d\beta'^2\right).$$

Se vogliamo che al sistema (α, β) corrisponda (α', β') bisognerà prendere:

$$\alpha' = \varphi(\alpha), \qquad \beta' = \psi(\beta) \qquad (*)$$

e si otterrà:

$$ds'^2 = \lambda'\left\{\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)^2 d\alpha^2 + \left(\frac{d\psi}{d\beta}\right)^2 d\beta^2\right\};$$

La condizione imposta alla rappresentazione esige che si abbia:

$$\frac{\lambda'\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)^2}{\lambda} = \frac{\lambda'\left(\frac{d\psi}{d\beta}\right)^2}{\lambda},$$

quindi

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \pm \frac{d\psi}{d\beta} = m$$

dove m è una costante. Integrando ne risulta:

$$\alpha' = \varphi(\alpha) = m\alpha + n$$

$$\beta' = \psi(\beta) = \pm m\beta + n',$$

con m, n, n' costanti arbitrarie reali. È adunque necessario e sufficiente porre

(19) $$\alpha' + i\beta' = m\left(\alpha \pm i\beta\right) + c$$

con m costante reale (**). — Ciò posto, siano (α, β), (α_1, β_1) due sistemi isotermi (ridotti ai parametri isometrici) esistenti su-

---

(*). Le altre formole $\alpha' = \psi(\beta)$, $\beta' = \varphi(\alpha)$ che pure potrebbero prendersi, equivalgono solo a permutare α, β.

(**). L'altro caso in cui si permutano α, β, equivale a prendere m puramente immaginaria.

spettivamente sopra S, S'. Se supponiamo di avere una rappresentazione conforme di S' sopra S, al sistema isotermo (α, β) sopra S dovrà corrispondere sopra S' un sistema isotermo (α', β') che potremo già intendere ridotto ai parametri isometrici.
Allora fra $\alpha' + i\beta'$ ed $\alpha \pm i\beta$ avremo la relazione (19); d'altra parte essendo (α_1, β_1) un altro sistema isotermo sopra S', dovrà essere (§ 21):

$$\alpha_1 + i\beta_1 = F(\alpha' \pm i\beta')$$

e quindi per la (19)

$$(20) \qquad \alpha_1 + i\beta_1 = \Pi(\alpha \pm i\beta).$$

Ne concludiamo: **Se sopra S, S' si conoscono due sistemi isotermi (α, β), (α_1, β_1) già ridotti ai parametri isometrici, il modo più generale di ottenere una rappresentazione conforme dell'una superficie sull'altra è dato dalla formola (10), dove Π è il simbolo di una funzione arbitraria.**

27. - **Proiezione stereografica polare della sfera.** - Consideriamo la sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

il cui raggio abbiamo posto per semplicità eguale all'unità lineare. Essa può pensarsi come una superficie di rotazione attorno all'asse z, e le coordinate di un suo punto sono allora date dalle formole

$$x = \operatorname{sen} u \cos w, \quad y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} w, \quad z = \cos u,$$

dove w è la longitudine e u la distanza angolare del punto dal polo $u = 0$, cioè il complemento della latitudine (colatitudine); per l'elemento lineare avremo quindi:

$$ds_1^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2 u \, dw^2$$

e i parametri isometrici saranno (§ 24):

$$u_1 = \int \frac{du}{\operatorname{sen} u} = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u \,, \quad e \quad w .$$

Prendiamo ora un piano riferito a coordinate polari (ρ, θ), il cui elemento lineare sarà:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

e i parametri isometrici

$$\rho_1 = \int \frac{d\rho}{\rho} = \log \rho \quad , \quad e \quad \theta ;$$

se vogliamo una rappresentazione conforme della sfera sul piano in cui i meridiani $w = \text{cost}^e$ siano rappresentati dalle rette $\theta = \text{cost}^e$ sul piano e i paralleli dai circoli concentrici $\rho = \text{cost}^e$, dovremo prendere (§ 26):

$$u_1 + iw = m(\rho_1 \pm i\theta) + c$$

cioè:

(a) $$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u + iw = m(\log \rho \pm i\theta) + c$$

con m costante reale. Prendiamo $c = 0$, $m = -1$ (*), e scegliendo il segno inferiore, otterremo per le formole di rappresentazione:

$$\rho = \cot \tfrac{1}{2} u \quad , \qquad \theta = w .$$

Questa rappresentazione conforme della sfera sul piano può ottenersi geometricamente così. Immaginiamo che il piano rappresentativo sia il piano $z = 0$ dell'equatore e che l'asse polare $\theta = 0$ si faccia coincidere coll'asse delle x e il punto $\rho = 0$ col centro della sfera. Allora se dal polo $u = 0$ proiettiamo

(*). È da notarsi che se non si prendesse $m = \pm 1$, la rappresentazione nell'intorno del punto $\rho = 0$ non sarebbe conforme, ma gli angoli resulterebbero alterati in quel punto nel rapporto costante m. Ciò dipende da che in $u = 0$ si ha $u_1 = \infty$, come pure in $\rho = 0$, $\rho_1 = \infty$.

il punto (u, ω) della sfera sul piano equatoriale, avremo precisamente il punto immagine ($\rho = \cot\frac{1}{2}u$, $\theta = \omega$). E' chiaro che se invece di prendere per piano di proiezione il piano equatoriale si prendesse un piano parallelo a questo, la rappresentazione sarebbe sempre conforme, essendo simile alla precedente.

Analiticamente ciò corrisponderebbe a dare alla costante c della formula (a) un valore diverso da zero.

Questa proiezione dei punti della sfera su quelli del piano, porta il nome di proiezione stereografica polare.

Le sue proprietà e in particolare quella importante che ogni circolo sulla sfera viene rappresentato sul piano da un circolo e viceversa, erano già note agli antichi, e possono dimostrarsi per mezzo di considerazioni geometriche elementari. (*)

(*). Vedi p. es. Baltzer – Stereometria –

Capitolo III.

Linee geodetiche – Curvatura geodetica

28. – Equazione differenziale delle geodetiche. – Quando si studiano le proprietà delle figure tracciate sopra una superficie qualunque, la linea che tiene il luogo della retta nel piano e del circolo massimo sulla sfera è la geodetica, la quale si definisce come quella linea che sopra la superficie data segna il più corto cammino fra due suoi punti qualunque A, B. In generale la geodetica che unisce due punti A, B sulla superficie è unica e determinata; soltanto se i punti A, B hanno sulla superficie una posizione speciale può accadere che vi siano infiniti archi geodetici congiungenti i due punti. Ciò accade, per esempio, effettivamente per due punti diametralmente opposti sulla sfera, per due ombelichi opposti di un'ellissoide, etc.

Per non avere casi di eccezione, chiameremo geodetica una linea, quando segni effettivamente il più corto cammino fra due suoi punti qualunque, sufficientemente vicini l'uno all'altro, o così, per esempio, un arco di circolo massimo A, B sulla sfera sarà sempre per noi un arco geodetico, quand'anche, l'angolo al centro corrispondente essendo maggiore di π, esso non sia il più corto cammino fra i punti estremi A, B.

Supposto tracciato sopra la superficie un sistema di linee coordinate qualunque, che dia all'elemento lineare la forma:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

possiamo stabilire l'equazione (differenziale) per le linee geodetiche, applicando i principii del calcolo delle variazioni.

Per ciò, immaginiamo che $u = \varphi(v)$ sia l'equazione della geodetica che unisce sulla superficie i due punti (u_0, v_0), (u_1, v_1); l'arco totale della geodetica fra questi due punti sarà:

$$s = \int_{v_0}^{v_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dv}\right) + G}\; dv$$

Dovremo determinare la funzione incognita $u = \varphi(v)$ in modo che questo integrale sia un minimo, quindi eguagliare a zero la sua variazione prima, il che dà, per formole note:

$$\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dv}\right) + G} - \frac{d}{dv}\,\frac{\partial\sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dv}\right) + G}}{\partial\frac{du}{dv}} = 0$$

ovvero:

$$(1)\qquad \frac{\frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dv} + \frac{\partial G}{\partial u}}{2\sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dv}\right) + G}} - \frac{d}{dv}\,\frac{E\frac{du}{dv} + F}{\sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dv}\right) + G}} = 0.$$

A questa equazione differenziale del secondo ordine per la funzione incognita $u = \varphi(v)$, che determina il corso delle geodetiche sulla superficie, possiamo dare un'altra forma più opportuna, introducendo mediante le formole (6) § 20 l'angolo θ che la geodetica forma colle linee v.

Per questo, lasciando indeterminata la variabile indipendente, e introducendo l'elemento d'arco:

$$ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

potremo scrivere la (1) sotto la forma:

$$\frac{\partial E}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial G}{\partial u}dv^2 = 2ds.\,d\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right).$$

Facendo uso delle formole sopra citate:

$$(\alpha)\qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right), \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}\frac{dv}{ds}$$

la precedente diviene:

$$\frac{\partial E}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial G}{\partial u}dv^2 = 2ds.\,d\left(\sqrt{E}\cos\theta\right) =$$
$$= ds.\frac{dE}{\sqrt{E}}\cos\theta - 2\sqrt{E}\operatorname{sen}\theta\,ds.\,d\theta,$$

ovvero per le (α) stesse:

$$\frac{\partial E}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial G}{\partial u}dv^2 = \frac{dE}{E}\left(E\,du + F\,dv\right) - 2\sqrt{EG-F^2}\,dv\,d\theta$$
$$= \frac{1}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial u}du + \frac{\partial E}{\partial v}dv\right)\left(E\,du + F\,dv\right) - 2\sqrt{EG-F^2}\,dv\,d\theta$$
$$= \frac{\partial E}{\partial u}du^2 + \frac{\partial E}{\partial v}du\,dv + \frac{F}{E}dv\left(\frac{\partial E}{\partial u}du + \frac{\partial E}{\partial v}dv\right) - 2\sqrt{EG-F^2}\,dv\,d\theta$$

e riducendo e dividendo per $2dv$, avremo:

$$(2)\qquad \sqrt{EG-F^2}\,d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}\left\{\frac{\partial E}{\partial u}du + \frac{\partial E}{\partial v}dv\right\} + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}du - \frac{\partial F}{\partial u}du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}dv,$$

che è la forma data da Gauss all'equazione differenziale del secondo ordine per le linee geodetiche. Quest'equazione (1) o (2) avrà un integrale:

$$u = \varphi(v)$$

contenente due costanti arbitrarie, le quali risulteranno determinate fissando due condizioni per la geodetica, come passare per due punti, uscire da un punto in una direzione assegnata, ecc..

Se le linee coordinate sono ortogonali si ha $F = 0$, e la (2) prende la forma più semplice:

(3) $$\sqrt{EG}\,d\theta = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}dv,$$

ovvero:

(3') $$d\theta = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}du - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}dv.$$

29. — Normale principale della geodetica. — Della equazione differenziale (2) possiamo dare un'altra interpretazione geometrica, contenuta nel teorema seguente:

Ogni linea geodetica gode della proprietà che la sua normale principale in ogni punto coincide colla normale alla superficie; viceversa ogni linea dotata di tale proprietà è una geodetica della superficie. —

Le coordinate curvilinee u, v scelte sulla superficie essendo affatto arbitrarie, possiamo supporre che la linea L di cui si tratta faccia parte del sistema di linee coordinate, e sia per esempio la linea

$$v = v_0.$$

Per essa abbiamo evidentemente

$$dv = 0, \quad d\theta = 0$$

e quindi la condizione necessaria e sufficiente perchè sia geodetica, sarà per la (2):

(4) $$\left(\frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u}\right)_{v=v_0} = 0.$$

D'altra parte ritenendo per la curva L le solite notazioni (cap. I), avremo per i coseni di direzione della tangente (§ 19):

$$\cos\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{v=v_0}, \quad \cos\beta = \left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{v=v_0}, \quad \cos\gamma = \left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{v=v_0}$$

e per il suo arco elementare:

$$ds_{v_0} = \left(\sqrt{E}\,du\right)_{v=v_0} ;$$

ma per le formole di Frenet:

$$\frac{\cos\xi}{\rho} = \frac{d\cos\alpha}{ds_{v_0}} \quad , \quad \frac{\cos\eta}{\rho} = \frac{d\cos\beta}{ds_{v_0}} \quad , \quad \frac{\cos\zeta}{\rho} = \frac{d\cos\gamma}{ds_{v_0}} \, ,$$

quindi:

$$\frac{\cos\xi}{\rho} = \left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right\}_{v=v_0} ,$$

$$\frac{\cos\eta}{\rho} = \left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right\}_{v=v_0} ,$$

$$\frac{\cos\zeta}{\rho} = \left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\right\}_{v=v_0} .$$

Per esprimere che la normale principale alla linea $L\,(v=v_0)$ è normale alla superficie, basta porre la condizione che sia perpendicolare alla corrispondente linea $u = \text{cost}^{e}$, cioè che si abbia:

$$\sum \frac{\cos\xi}{\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{v=v_0} = 0 ,$$

ossia

$$(5) \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0 \quad \text{per } v = v_0 ,$$

e il teorema sarà dimostrato quando si provi che la (5) coincide con la (4). Ora abbiamo:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\frac{1}{2E\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial u}\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} ;$$

ma dalle formole

$$F = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \quad , \qquad E = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 ,$$

segue

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} ,$$

quindi

$$(5') \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\frac{1}{\sqrt{E}}\left\{\frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u}\right\} .$$

Dunque le due condizioni (4), (5) si equivalgono perfettamente, come sopra si è asserito.

30. — **Linee geodeticamente parallele.** — Tracciata sopra una superficie qualunque una linea qualsivoglia L, conduciamo

per ciascun punto di L la geodetica normale e stacchiamo so=pra tutte queste geodetiche a partire da L archi eguali; avremo il teorema:

La linea L' luogo degli estremi degli archi, sarà ortogonale a tutte le geodetiche tracciate.

Per dimostrarlo prendiamo a linee coordinate v le geodetiche stesse e a linee u quelle luogo degli estremi degli archi eguali ad u sopra le geodetiche $v = \text{cost}^e$, contati a partire dalla linea L, la quale sarà così la linea coordinata $u = 0$.

L'arco elementare delle geodetiche $v = \text{cost}^e$ essendo nel nostro caso du, se supponiamo che l'elemento lineare prenda la forma:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

dovremo avere intanto $E = 1$. L'equazione differenziale (2) delle linee geodetiche diventa

$$\sqrt{G - F^2}\,d\theta = -\frac{\partial F}{\partial u}\,du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\,dv$$

e ad essa dovranno soddisfare le linee $v = \text{cost}^e$, per le quali si ha $dv = 0$, $d\theta = 0$. Ne segue che sarà $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$ lungo ogni linea v, quindi su tutta la superficie (o porzione di su=perficie ricoperta dalle geodetiche); dunque sarà

$$F = \varphi(v)$$

cioè $F = \text{cost}^e$, lungo ogni singola geodetica; ma nel punto di partenza della geodetica dalla linea L si ha $F = 0$, perché ivi $\cos\omega = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ e perciò avremo dappertutto $F = 0$. Le linee u sono per conseguenza ortogonali a tutte le geodetiche v, c.d.d.

La dimostrazione ora data resta valida se la linea L

si riduce ad un punto, dal quale escono tutte le geodetiche v. Allora le traiettorie ortogonali u prendono il nome di circoli geodetici, il punto fisso, da cui escono le geodetiche, dicesi centro del circolo, e la distanza geodetica di un punto della circonferenza dal centro raggio del circolo (*).

Le considerazioni svolte provano inversamente che:

Se in un sistema doppio ortogonale le linee di un sistema sono geodetiche, quelle dell'altro sono geodeticamente parallele.

In fine notiamo che preso un sistema ortogonale di questa specie a sistema coordinato, si avrà $E=1$, $F=0$, quando il parametro u sia l'arco delle geodetiche v, contato da una loro traiettoria ortogonale fissa $u=0$, e l'elemento lineare avrà quindi la forma:

$$(6) \qquad ds^2 = du^2 + G\,dv^2.$$

Possiamo dunque in infiniti modi ridurre l'elemento lineare di una superficie alla forma (6), quando per questa superficie sappiamo integrare l'equazione delle geodetiche.

31. — Integrazione dell'equazione delle geodetiche nel caso di Liouville. — In generale l'equazione differenziale (2) delle geodetiche non si sa integrare; ma vi ha un caso molto notevole, osservato per la prima volta in tutta la sua generalità da Liouville, nel quale tale integrazione si effettua con quadrature.

(*). Per descrivere meccanicamente un circolo geodetico basta tendere sulla superficie un filo di lunghezza eguale al raggio, tenendo fissa l'una estremità nel centro, mentre l'altra, girando il filo attorno all'estremo fisso, percorrerà la circonferenza.

Questo caso si presenta quando si conduce sulla superficie un sistema ortogonale isotermo (u,v) che dà all'elemento lineare la forma:

$$(7) \qquad ds^2 = h(du^2 + dv^2)$$

dove h è la somma di due funzioni, l'una della sola u, l'altra di v soltanto, cioè:

$$(8) \qquad h = \alpha(u) + \beta(v).$$

L'elemento lineare avendo la forma (7), l'equazione differenziale (2) delle geodetiche diventa:

$$h\,d\theta = \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial v}du - \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial u}dv.$$

Se la moltiplichiamo per $2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$, osservando le formole (7) §20

$$(9) \qquad \cos\theta\,ds = \sqrt{h}\,du\,, \quad \mathrm{sen}\,\theta\,ds = \sqrt{h}\,dv\,, \quad \cos\theta\,dv = \mathrm{sen}\,\theta\,du\,,$$

otterremo

$$2h\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{\partial h}{\partial v}\cos^2\theta\,dv - \frac{\partial h}{\partial u}\mathrm{sen}^2\theta\,du\,,$$

ovvero

$$h\,d\,\mathrm{sen}^2\theta = \frac{\partial h}{\partial v}\cos^2\theta\,dv - \frac{\partial h}{\partial u}\mathrm{sen}^2\theta\,du\,,$$

formola che è ancora applicabile a qualunque superficie. Introducendo ora l'ipotesi restrittiva (8), potremo scrivere:

$$\alpha(u)\,d\,\mathrm{sen}^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta\,\alpha'(u)\,du = \beta(v)\,d\cos^2\theta + \cos^2\theta\,\beta'(v)\,dv,$$

ossia

$$d(\alpha\,\mathrm{sen}^2\theta) = d(\beta\cos^2\theta).$$

Sotto questa forma l'equazione è subito integrabile, e dà l'integrale primo

$$(10) \qquad \alpha(u)\,\mathrm{sen}^2\theta - \beta(v)\cos^2\theta = a$$

dove a è una costante arbitraria. Per dedurne l'integrale in termini finiti con quadrature, osserviamo che da essa risulta

(10') $$tg\theta = \pm\sqrt{\frac{\beta(v)+a}{\alpha(u)-a}}\,;$$

ma $tg\theta = \frac{dv}{du}$, quindi:

$$\frac{du}{\sqrt{\alpha(u)-a}} \mp \frac{dv}{\sqrt{\beta(v)+a}} = 0$$

e però l'equazione in termini finiti delle geodetiche sarà

(11) $$\int\frac{du}{\sqrt{\alpha(u)-a}} \mp \int\frac{dv}{\sqrt{\beta(v)+a}} = b,$$

dove b è una nuova costante arbitraria. Per avere anche l'arco s delle geodetiche con quadrature, basta moltiplicare la prima delle (9) per $\cos\theta$, la seconda per $\operatorname{sen}\theta$ e sommare, dopo di che si ottiene

$$ds = \sqrt{k}\cos\theta\, du + \sqrt{k}\operatorname{sen}\theta\, dv.$$

Contiamo l'arco s positivamente nel senso di v crescente, e sarà allora per la seconda delle (9) $\operatorname{sen}\theta$ positivo, cioè $0<\theta<\pi$; dalla (10') avremo quindi per $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ i valori

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{\beta(v)+a}{k}}\,,\qquad \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{\alpha(u)-a}{k}}\,,$$

i quali sostituiti nella precedente daranno

(12) $$s = \int\sqrt{\beta(v)+a}\,dv \pm \int\sqrt{\alpha(u)-a}\,du + C,$$

dove il segno $\pm$ va preso a seconda del segno $\mp$ nella (11) e C è una costante dipendente dall'origine dell'arco s sulla geodetica.

32.— Geodetiche delle superficie di rotazione.— Alla classe di superficie il cui elemento lineare si può ridurre alla forma sopra considerata, appartengono le superficie generali di secondo ordine e le superficie di rotazione.

Per ora, limitandoci a queste ultime, osserviamo che l'elemento lineare ha la forma (§24)

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2;$$

riducendo ai parametri isometrici col porre $\int \frac{du}{r} = du_1$, avremo:

$$ds^2 = r^2 (du_1^2 + dv^2),$$

dopo di che r sarà funzione di u_1. Possiamo quindi applicare le formole del § prec^{te}, ponendo

$$\alpha(u_1) = r^2, \qquad \beta(v) = 0;$$

l'integrale primo (10) diventa $r^2 \operatorname{sen}^2\theta = a$, e se la geodetica è reale, potremo porre $a = k^2$ con k costante reale, quindi:

$$(13) \qquad r \operatorname{sen}\theta = k$$

formola che ci dà il teorema di Clairaut:

In ogni punto di una geodetica tracciata sopra una superficie di rotazione, il seno dell'angolo che essa fa col meridiano è inversamente proporzionale al raggio del parallelo. —

È chiaro che se la superficie ha un parallelo massimo di raggio R, il valore della costante k non potrà assumersi che $\leq R$ (se si vuole una geodetica reale) e se si prende $k = R$, la geodetica coinciderà col parallelo massimo stesso.

Passando ora agli integrali in termini finiti (11) (12) avremo:

$$v = \pm k \int \frac{du_1}{\sqrt{r^2 - k^2}} + b, \qquad s = kv \pm \sqrt{r^2 - k^2}\, du_1 + C;$$

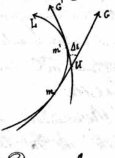
le quali formole, a causa di $du_1 = \frac{du}{r}$, possono anche scriversi

$$v = \pm k \int \frac{du}{r\sqrt{r^2 - k^2}} + b$$

$$s = kv \pm \int \frac{\sqrt{r^2-k^2}}{r}\, du + C = \pm \int \frac{r\, du}{\sqrt{r^2-k^2}} + C.$$

È utile notare che tutte quelle geodetiche che corrispondono ad un valore fisso di k e a valori diversi di b (dove naturalmente s'intende che il valore di $\int \frac{du}{r\sqrt{r^2-k^2}}$ sia preso lo stesso per tutte) si ottengono da una di esse facendola rotare intorno all'asse della superficie, poiché in tal modo ogni punto (u, v) della superficie si trasporta nel punto $(u, v+\alpha)$, essendo α l'angolo di rotazione.

33. – Curvatura geodetica. – Come per misurare la deviazione di una curva piana dalla direzione rettilinea si è introdotto il concetto di curvatura ordinaria, nello stesso modo per una curva tracciata sopra una superficie, si misura la rapidità della sua deviazione in ogni punto dalla geodetica tangente, introducendo l'altro più generale di curvatura geodetica. Consideriamo sopra una superficie S una linea qualunque L ed un suo punto m; sia m' un punto di L vicinissimo ad m. In m, m' conduciamo le due geodetiche tangenti G, G', le quali si incontreranno in un punto U e comprenderanno fra loro un angolo piccolissimo $\Delta\varepsilon$; se dividiamo $\Delta\varepsilon$ per la



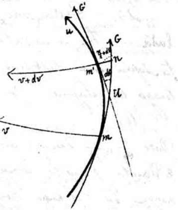
lunghezza dell'arco $mm' = \Delta s$, il quoziente:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta s},$$

all'avvicinarsi indefinito di m' verso m, convergerà verso un limite finito $\frac{1}{\rho_g}$, che si dirà la curvatura geodetica della linea L nel punto m, mentre ρ_g prenderà il nome di raggio di curvatura geodetica. Se poi sopra la retta condotta per m nel piano tangente normalmente alla linea L si stacca, a partire dal punto m, un segmento $\overline{mC} = \rho_g$ e diretto dalla banda, ove è rivolta la concavità della curva (cioè in quella direzione che forma colla direzione positiva della normale principale alla linea L un angolo acuto) l'estremo C si dice il centro di curvatura geodetica della linea L nel punto m. Per una linea geodetica la curvatura geodetica è naturalmente nulla, ed il centro di curvatura geodetica all'infinito. É chiaro che se la superficie è un piano, la curvatura geodetica si cangia nella curvatura assoluta.

Per ora abbiamo considerato soltanto il valore assoluto di ρ_g, ma quando per la retta mC sulla quale deve essere portato il raggio di curvatura geodetica sia già stato fissato da convenzioni precedenti il senso positivo, attribuiremo naturalmente a ρ_g il segno + o − a seconda che la direzione $\overrightarrow{mC}$ coincide con quella direzione positiva o colla opposta.

Riservandoci a stabilire più tardi la formola generale che dà la curvatura geodetica di una linea qualunque (V. § 58), consideriamo ora il caso in cui le le linee coordinate (u,v) scelte sulla superficie siano ortogonali e si voglia trovare la loro curvatura geodetica, per esempio quella $\frac{1}{\rho_u}$ delle linee $u = \text{cost}^e$. Consideriamo perciò sopra una linea u i due punti infinitamente vicini $m \equiv (u,v)$, $m' \equiv (u, v+dv)$; tiriamo in m, m' le due geodetiche tangenti G, G' che s'incontrino in U. La geodetica G che esce da m perpendicolarmente alla linea v, incontra la successiva $v+dv$ in n, formando con essa l'angolo $\frac{\pi}{2} + d\theta$; allora nel triangolo infinitesimo $m'nU$ che, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore, potremo considerare come rettilineo, l'angolo in U sarà precisamente $d\theta$ e perciò avremo



$$\frac{1}{\rho_u} = \pm \frac{d\theta}{ds_u} = \pm \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d\theta}{dv}.$$

Ora per l'equazione differenziale (3') §28 cui deve soddisfare la geodetica G abbiamo:

$$d\theta = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} du - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} dv$$

quindi

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{du}{dv} - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u},$$

e siccome

$$\cot\theta = \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{du}{dv}$$

e nel punto iniziale $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cot\theta = 0$, resterà la formola cercata

$$\frac{1}{\rho_u} = \pm \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

alla quale possiamo aggiungere l'altra che si stabilirebbe nel medesimo modo:

$$\frac{1}{\rho_v} = \pm \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}$$

Soltanto siccome le direzioni positive delle tangenti alle linee v, u sono già state fissate (al § 19) converrà decidere, in ordine a quanto si è detto sopra, se deve scegliersi il segno superiore o l'inferiore. Vedremo ora che deve scegliersi il segno — e scriveremo quindi senz'altro:

$$(15) \qquad \frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\rho_v} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}.$$

34. — Relazione fra la curvatura geodetica e l'assoluta. — Fra la curvatura geodetica di una linea tracciata sopra una superficie e la sua curvatura assoluta ha luogo la relazione semplice espressa dalla formola

$$(16) \qquad \frac{1}{\rho_g} = \frac{\cos \varepsilon}{\rho},$$

dove $\frac{1}{\rho_g}$, $\frac{1}{\rho}$ sono la curvatura geodetica e l'assoluta, mentre ε denota l'angolo compreso fra il piano osculatore della curva ed il piano tangente alla superficie. In altre parole la curvatura geodetica è la proiezione della curvatura assoluta sul piano tangente. È per questa ragione che dicesi anche curvatura tangenziale.

Per dimostrare questa formola, possiamo supporre che la linea L di cui si tratta faccia parte delle linee v, le quali possono scegliersi arbitrariamente sulla superficie. Allora, conservando per la linea L le solite notazioni (cap. I), avremo (V^e § 29):

$$\frac{\cos \xi}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}\right),$$
$$\frac{\cos \eta}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u}\right),$$
$$\frac{\cos \zeta}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u}\right);$$

Da cui

$$\frac{1}{\rho}\sum \cos\xi \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)$$

ovvero per la (4') §29:

$$\frac{1}{\rho}\sum \cos\xi \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}.$$

Ma $\sum \cos\xi . \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}$ e' il coseno dell'angolo che la direzione positiva della normale principale alla linea L forma colla direzione positiva della tangente alla linea u, angolo che misura precisamente il diedro ε, ed e' acuto o ottuso secondo che ρ_u e' positivo o negativo. Dunque la precedente diviene appunto

$$\frac{1}{\rho_u} = \frac{\cos\varepsilon}{\rho},$$

e ci conferma che nelle (15) debbono ritenersi i segni negativi.

Se scriviamo la (16) sotto la forma $\rho = \rho_g \cos\varepsilon$, vediamo subito che il centro di curvatura geodetica di una linea L in un punto m non e' altro che il punto ove il piano tangente in m alla superficie e' incontrato dall'asse del circolo osculatore (c. I §13) alla L nel punto m.

35. — Altra proprietà della curvatura geodetica. — Da quanto abbiamo ora dimostrato risulta che se due superficie S, S' si toccano lungo una linea L, la curvatura geodetica della L sara' la stessa, tanto che si consideri giacente sopra S, come giacente sopra S'. Questa osservazione ci conduce a dare per la curvatura geodetica una nuova definizione, secondo la quale può chiamarsi **curvatura di sviluppo** (courbure de développement). Sia infatti L una linea tracciata sopra una superficie

S; i piani tangenti ad S lungo L inviluppano una sviluppabile Σ, che contiene la linea L, e sulla quale la curvatura geodetica di L è la medesima che sopra S. Se distendiamo la sviluppabile Σ sul piano, la linea L si cangerà in una curva piana C, e siccome durante la flessione di Σ le lunghezze lineari e gli angoli delle figure tracciate sopra Σ non si alterano, mentre le geodetiche si trasformano in linee rette, così è chiaro che la curvatura geodetica di L diventerà per la trasformata piana C la sua curvatura ordinaria.

Possiamo quindi enunciare il teorema:

La curvatura geodetica di una linea L tracciata sopra una superficie S è eguale alla curvatura della linea piana, in cui L si trasforma, quando si distende sul piano la sviluppabile Σ, circoscritta alla superficie S lungo L.

Così, per esempio, applicando questo teorema alla determinazione della curvatura geodetica di un parallelo sopra una superficie di rotazione, vediamo che la sviluppabile circoscritta è un cono circolare retto col vertice sull'asse di rotazione e quindi:

Il raggio di curvatura geodetica di un parallelo è eguale alla porzione di tangente al meridiano compresa fra il punto di contatto e l'asse di rotazione.

36. – Sistemi ortogonali di linee a curvatura geodetica costante. – Sopra una superficie S si abbia un sistema di linee ortogonali u, v, che, prese a linee coordinate, diano all'elemento lineare la forma:

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

e supponiamo che tanto le linee u quanto le v siano a curvatura geodetica costante. Avremo allora per le (15) § 33

$$(17)\qquad \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = U\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = V\,,$$

dove V è funzione di u soltanto, e V di v. Di qui segue

$$V\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = U\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$$

ovvero

$$\frac{\partial(V\sqrt{G})}{\partial u} = \frac{\partial(U\sqrt{E})}{\partial v}\,;$$

dunque

$$U\sqrt{E}\,du + V\sqrt{G}\,dv$$

è il differenziale esatto di una funzione $\varphi(u,v)$ e si ha

$$\sqrt{E} = \frac{1}{U}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,, \qquad \sqrt{G} = \frac{1}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,.$$

Una qualunque delle (17) dà quindi, per determinare φ, l'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,,$$

il cui integrale generale si trova subito colla formola

$$\varphi = -\log\{\theta(u) + X(v)\}$$

dove $\theta(u)$, $X(v)$ sono funzioni arbitrarie, l'una di u, l'altra di v (*).

(*) E infatti l'equazione da integrarsi può scriversi

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\log\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

e integrando $\quad \log\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \varphi + \psi(u) \quad$ (ψ funzione arbitraria)

da cui $\quad \dfrac{\partial e^{-\varphi}}{\partial u} = e^{-\psi(u)}$

e integrando nuovamente $e^{-\varphi} = -\int e^{\psi(u)}du + X(v)$ (X funz. arbitraria)

Posto ora $-\int e^{\psi(u)}du = \theta(u)$ si ha appunto l'integrale scritto.

Ne risulta

$$\sqrt{E} = -\frac{\theta'(u)}{U\{\theta(u)+X(v)\}}\,, \qquad \sqrt{G} = -\frac{X'(v)}{V\{\theta(u)+X(v)\}}$$

$$ds^2 = \frac{1}{\{\theta(u)+X(v)\}^2}\left\{\frac{\theta'^2(u)}{U^2}\,du^2 + \frac{X'^2(v)}{V^2}\,dv^2\right\};$$

quest'ultima formola dà il teorema:

Se un doppio sistema di linee ortogonali, sopra una superficie qualunque, è formato di linee a curvatura geodetica costante, esso è isotermo. —

È importante osservare che sussiste anche il teorema reciproco:

Se in un doppio sistema ortogonale isotermo le linee di uno dei sistemi sono a curvatura geodetica costante, anche quelle dell'altro sistema godranno la stessa proprietà.

Se infatti il sistema è isotermo e si scelgono i parametri isometrici, si avrà:

$$ds^2 = \lambda\,(du^2 + dv^2);$$

ora per le formole (15) §33:

$$\frac{1}{\rho_u} = \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}{\partial u}\,, \qquad \frac{1}{\rho_v} = \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}{\partial v}\,,$$

e se supponiamo che le linee u siano a curvatura geodetica costante sarà $\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}{\partial u}$ funzione della sola u, cioè

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Ne segue che $\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}{\partial v}$ è funzione di v soltanto, cioè le linee v sono a curvatura geodetica costante. c.d.d.

37. — Sistemi ortogonali di circoli nel piano e sulla sfera. — Dai teoremi ora dimostrati risulta che se un sistema doppio ortogonale di linee nel piano è

tutto formato di circoli esso è isotermo e viceversa, se in un doppio sistema ortogonale isotermo le linee di un sistema sono circoli, saranno pure circoli quelle del secondo.

Se riportiamo le figure del piano sulla sfera per mezzo della proiezione stereografica polare (§27), potremo ripetere pei sistemi di circoli tracciati sulla sfera i teoremi ora citati.

Per risolvere adunque il problema di trovare tutti i sistemi doppii ortogonali (isotermi) di circoli nel piano, basterà trovare quelli sulla sfera e proiettarli stereograficamente sul piano.

Ora si vede subito che la condizione necessaria e sufficiente affinchè due circoli della sfera s'incontrino ad angolo retto è che il piano dell'uno passi per il polo del piano dell'altro. Supponendo adunque che i due sistemi ∞^1 di circoli (C), (C') sulla sfera siano fra loro ortogonali, dovranno tutti i piani dei circoli del sistema (C) passare per il luogo dei poli dei piani, che contengono i circoli (C'); questo luogo è per conseguenza una retta r, comune a tutti i piani (C). Similmente i piani (C') costituiranno un fascio avente per asse la retta r' luogo dei poli dei piani (C), cioè la retta polare di r rispetto alla sfera.

Ne concludiamo che il modo più generale di costruire un sistema doppio ortogonale di circoli sulla sfera, è quello di considerare due rette polari reciproche r, r' rispetto alla sfera e tagliare la sfera coi fasci di piani, aventi queste rette per assi. Se la retta r taglia la sfera in due punti reali, i circoli corrispondenti (C) avranno questi due punti reali in comune e quelli del sistema (C') costituiranno pure un fascio. Proiettando quindi stereograficamente sul piano, avremo:

A) un doppio sistema ortogonale formato da un fascio di circoli passanti per due punti fissi reali e un fascio ortogonale di circoli i cui punti base sono immaginarii.

Se la retta r tocca la sfera, la r' è pure tangente alla sfera nel medesimo punto. Il sistema doppio ortogonale che si ottiene sul piano per proiezione stereografica consta di due sistemi (C), (C') che godono delle proprietà seguenti:

B) i circoli del sistema (C) si toccano in un punto comune M, come pure quelli del sistema (C'), e le due tangenti in M ai due sistemi sono ortogonali.

Infine notiamo che se nel caso A) la retta r è l'asse polare della sfera si avrà sul piano un sistema ortogonale formato da rette uscenti da un punto e da circoli concentrici.

Sono questi tutti i sistemi ortogonali possibili di circoli nel piano.

Capitolo IV.

Curvatura delle Superficie

38. – Linee di curvatura. – Se si considera sopra una superficie S una linea qualunque L, e lungo di essa si conducono le normali alla superficie, queste formano in generale una superficie rigata non sviluppabile; quando accada invece che il luogo generato dalle normali sia una superficie sviluppabile cioè queste rette siano le tangenti di una curva nello spazio, la linea L si dirà linea di curvatura della superficie S.

Sul piano e sulla sfera ogni linea deve considerarsi come linea di curvatura, perchè la superficie rigata generata dalle normali è sempre un cilindro o un cono; ma per ogni altra superficie esiste soltanto una semplice infinità di linee di curvatura, formanti un doppio sistema ortogonale, come fra poco vedremo.

Cerchiamo da quale condizione analitica viene caratterizzata una linea L di curvatura. Indichiamo al solito con x, y, z le coordinate correnti di un punto mobile sulla superficie, con X, Y, Z i coseni di direzione della normale, il cui senso positivo sia stato fissato ad arbitrio. Le normali alla superficie S lungo L inviluppano, per ipotesi, una curva L_1; se $M\equiv(x,y,z)$ è un punto qualunque sopra L e $M_1\equiv(x_1,y_1,z_1)$ il punto corrispondente sopra L_1, ove la normale alla superficie in M tocca L_1, avremo evidentemente:

$$(1)\qquad x_1=x-rX,\quad y_1=y-rY,\quad z_1=z-rZ$$

dove r è eguale in valore assoluto al segmento MM_1 ed ha il segno positivo o negativo, secondochè la direzione $\overline{MM_1}$ coincide colla direzione positiva della normale o colla opposta. Se differenziamo le (1), spostandoci di un tratto infinitesimo MM' lungo la linea di curvatura L, avremo:

$$dx_1=dx-rdX-Xdr,$$
$$dy_1=dy-rdY-Ydr,$$
$$dz_1=dz-rdZ-Zdr;$$

ma dx_1, dy_1, dz_1 sono proporzionali ai coseni di direzione della tangente in M_1 alla curva L_1, i quali per ipotesi, sono eguali a X, Y, Z, e perciò sarà:

$$dx-rdX-Xdr=hX,$$
$$dy-rdY-Ydr=hY,$$
$$dz-rdZ-Zdr=hZ,$$

essendo h un fattore (infinitesimo) di proporzionalità. Moltiplicando queste equazioni rispettivamente per X, Y, Z e sommando, coll'osservare le identità:

$$X^2+Y^2+Z^2=1,$$
$$Xdx+Ydy+Zdz=0,$$
$$XdX+YdY+ZdZ=0,$$

otteniamo $h=-dr$ e per conseguenza

$$\frac{dx}{dX} = \frac{dy}{dY} = \frac{dz}{dZ} = r.$$

Dunque, perchè la linea L sia di curvatura, è condizione necessaria che, per spostamenti lungo L, abbiano luogo le proporzioni:

$$dx : dy : dz = dX : dY : dZ ;$$

ma questa condizione è anche sufficiente, poichè supponendola soddisfatta e indicando il valore comune dei rapporti $\frac{dx}{dX} = \frac{dy}{dY} = \frac{dz}{dZ}$ con r, le (1) ci definiranno una curva che avrà per tangenti le normali alla superficie lungo L.

Per altro, onde completare questa discussione, è necessario considerare anche il caso in cui la sviluppabile, luogo delle normali alla superficie lungo L, si riduce ad un cono; ma i risultati non differiscono da quelli ora ottenuti, se non in questo che, avendosi allora:

$$dx_1 = dy_1 = dz_1 = 0,$$

si ha altresì $dr = 0$, cioè $r = \cos t^{te}$.

Siamo ora già in grado di dimostrare che le uniche superficie, sulle quali ogni linea è linea di curvatura sono il piano e la sfera. Supponendo infatti che ciò accada, dovremo avere:

$$dx = r\,dX, \quad dy = r\,dY, \quad dz = r\,dZ,$$

dove, intendendo x, y, z; X, Y, Z espresse per due parametri u, v (coordinate curvilinee) i simboli $\underline{d}$ indicano differenziali totali. Ora, se r non è costante, segue da queste formole che tanto X quanto Y e Z sono funzioni di r soltanto; ma allora anche x, y, z sarebbero funzioni di r soltanto e la superficie si ridurrebbe ad una linea.

Resta l'ipotesi di r costante, nel qual caso integrando abbiamo:

$$x = rX + a, \quad y = rY + b, \quad z = rZ + c,$$

con a, b, c nuove costanti. Dunque

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2,$$

cioè la superficie è una sfera. Qui si è supposto r finito; per r infinito la superficie, come subito si vede, è un piano.

39. — Equazione differenziale per le linee di curvatura. — Supponiamo, scelto sopra la superficie S un sistema di coordinate curvilinee, che diano all'elemento lineare la forma

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

e cerchiamo l'equazione (differenziale) delle linee di curvatura in coordinate curvilinee u, v. I coseni di direzione X, Y, Z della normale dovendo soddisfare alle equazioni:

$$X\frac{\partial x}{\partial u} + Y\frac{\partial y}{\partial u} + Z\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$
$$X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + Z\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

avranno luogo le proporzioni:

$$X : Y : Z = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

e siccome la somma dei quadrati di questi tre determinanti è eguale a $EG - F^2$ (§19), ne risulta:

$$(2)\quad \begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} - \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial u}\right), \quad Y = \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u}\right), \\ Z = \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}\right), \end{cases}$$

dove, fissando per il radicale un determinato segno, p. es: il positivo, veniamo a fissare altresì la direzione positiva della normale.

Faremo inoltre costantemente uso delle notazioni seguenti:

$$(3)\qquad D=\Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,,\quad D'=\Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,,\quad D''=\Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,,$$

ovvero per le (2):

$$(3')\quad\left\{\begin{aligned} &D=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\quad D'=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\\ &D''=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}.\end{aligned}\right.$$

Derivando le identità

$$\Sigma X\frac{\partial x}{\partial u}=0\,,\quad \Sigma X\frac{\partial x}{\partial v}=0$$

rispetto a u e v, otteniamo subito le altre

$$(4)\quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}=-D\,,\quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}=\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}=-D'\,,\quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}=-D''.$$

Se con queste formole calcoliamo l'espressione differenziale

$$dx\,dX+dy\,dY+dz\,dZ=\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial X}{\partial u}du+\frac{\partial X}{\partial v}dv\right),$$

avremo evidentemente

$$dx\,dX+dy\,dY+dz\,dZ=-\left(D\,du^2+2D'du\,dv+D''dv^2\right).$$

L'espressione del primo membro avendo un significato indipendente dalle coordinate scelte, ne segue che se si cangiano linee coordinate col porre

$$(\alpha)\qquad u=u(\alpha,\beta)\,,\qquad v=v(\alpha,\beta)\,,$$

i nuovi valori delle quantità D, D', D'' si otterranno, operando la trasformazione (a) nella forma differenziale

$$D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2$$

e calcolando i coefficienti di $d\alpha^2$, $d\alpha\, d\beta$, $d\beta^2$; essi si esprimeranno cioè per gli antichi valori di D, D', D'', come i nuovi valori di E, F, G per gli antichi.

Supponiamo che (u, v), $(u+du, v+dv)$ siano due punti infinitamente vicini sopra una linea di curvatura. Per quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente dovremo avere

$$(b) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} du + \dfrac{\partial x}{\partial v} dv = r\left(\dfrac{\partial X}{\partial u} du + \dfrac{\partial X}{\partial v} dv\right) \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} du + \dfrac{\partial y}{\partial v} dv = r\left(\dfrac{\partial Y}{\partial u} du + \dfrac{\partial Y}{\partial v} dv\right) \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial u} du + \dfrac{\partial z}{\partial v} dv = r\left(\dfrac{\partial Z}{\partial u} du + \dfrac{\partial Z}{\partial v} dv\right). \end{cases}$$

Moltiplicando queste equazioni ordinatamente una prima volta per $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}$, una seconda per $\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ e sommando otterremo per le (4)

$$(4') \quad \begin{cases} E du + F dv = -r\,(D du + D' dv) \\ F du + G dv = -r\,(D' du + D'' dv), \end{cases}$$

equazioni che saranno equivalenti alle (b). (*)

(*). Supposte infatti le (4') soddisfatte, ponendo

$$dx - r\,dX = A, \quad dy - r\,dY = B, \quad dz - r\,dZ = C$$

ne risulterà

$$A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial u} + C\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$
$$A\frac{\partial x}{\partial v} + B\frac{\partial y}{\partial v} + C\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

A queste aggiungendo l'identità:

$$AX + BY + CZ = 0$$

si vede subito che deve essere $A = 0$; $B = 0$, $C = 0$, c.d.d.

Eliminando dalle (4') la quantità r avremo:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} E\,du + F\,dv, & D\,du + D'dv \\ F\,du + G\,dv, & D'du + D''dv \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero

$$(5')\qquad (FD''-GD')\,dv^2 + (ED''-GD)\,du\,dv + (ED'-FD) = 0.$$

A questa equazione differenziale del primo ordine deve soddisfare ogni linea di curvatura e viceversa, se una linea L vi soddisfa, essa sarà linea di curvatura. La quantità r, che compariva nelle (5) e il cui significato geometrico è stato dato al § 38, si otterrà dalla equazione di secondo grado:

$$(6)\qquad (DD''-D'^2)\,r^2 + (ED''+GD-2FD')\,r + EG - F^2 = 0,$$

che risulta dalle (4') stesse, eliminandovi il rapporto $\frac{du}{dv}$.

40. — Proprietà delle linee di curvatura. — L'equazione differenziale (5') delle linee di curvatura è del secondo grado in $\frac{du}{dv}$ e, risolvendola rispetto a $\frac{du}{dv}$, si scinderà quindi nelle due

$$(7)\qquad \frac{dv}{du} = \tau_1 \quad , \quad \frac{dv}{du} = \tau_2 ,$$

essendo τ_1, τ_2 le radici di quella equazione. Anzitutto è da osservarsi che τ_1, τ_2 sono reali, perchè il discriminante

$$(ED''-GD)^2 - 4(FD''-GD')(ED'-FD)$$

della (5'), essendo identicamente eguale a

$$\left\{ED''-GD-2\frac{F}{E}(ED'-FD)\right\}^2 + 4\,\frac{EG-F^2}{E^2}\,(ED'-FD)^2,$$

è positivo, a causa di $EG-F^2 > 0$.

Così adunque ciascuna delle (7) integrata ci darà un sistema reale ∞^1 di linee di curvatura, di guisa che per ogni punto della superficie passerà una linea di curvatura di ciascuno dei due sistemi. Dimostriamo di più che:

Il sistema doppio di linee di curvatura è sempre un sistema ortogonale.

Per questo cominciamo dall'osservare che la condizione necessaria e sufficiente perchè i due elementi lineari, che sulla superficie uniscono il punto (u,v) rispettivamente ai punti $(u+du,\ v+dv)$, $(u+\delta u,\ v+\delta v)$ infinitamente vicini al primo siano ortogonali, è espressa dalla formola

$$(8) \qquad E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0.$$

Se infatti dx, dy, dz; $\delta x, \delta y, \delta z$ indicano i rispettivi incrementi di x, y, z nel passare dal punto (u,v) ai punti $(u+du,\ v+dv)$, $(u+\delta u,\ v+\delta v)$, la condizione richiesta sarà:

$$\Sigma\, dx\,\delta x = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v\right) = 0,$$

cioè la (8).

La (8) può anche scriversi

$$E + F\left(\frac{dv}{du} + \frac{\delta v}{\delta u}\right) + G\,\frac{dv}{du}\,\frac{\delta v}{\delta u} = 0,$$

e per verificare quanto si è asserito, basterà quindi provare l'identità:

$$E + F(\tau_1 + \tau_2) + G\,\tau_1\tau_2 = 0;$$

ma questa segue immediatamente da che τ_1, τ_2 sono le radici dello equazione

$$(FD''-GD')\tau^2 + (ED''-GD)\tau + (ED'-FD) = 0.$$

Per ogni punto M di una superficie S passano dunque due linee di curvatura L_1, L_2 che ivi s'incrociano ad angolo retto. Le normali alla superficie lungo L_1 generano una sviluppabile, il cui spigolo di regresso sarà toccato dalla normale in M alla superficie in un punto M_1; similmente indichiamo con M_2 il punto corrispondente per la linea di curvatura L_2. I punti M_1, M_2 ora detti, situati sopra la normale in M, diconsi i centri di curvatura della superficie relativi al punto M e i segmenti

$$r_1 = \overline{MM_1}\ ,\quad r_2 = \overline{MM_2}$$

i raggi principali di curvatura, per una ragione che fra poco vedremo. Questi raggi r_1, r_2 non sono altro che le radici della (6).

Notiamo alcune proprietà delle linee di curvatura che seguono dalla loro definizione stessa o dai teoremi A), B) §15 sulle evolute.

Se l'intersezione di due superficie è linea di curvatura per ambedue, l'angolo sotto cui le superficie s'incontrano sarà costante. Viceversa, se s'incontrano sotto angolo costante e la loro intersezione è linea di curvatura per l'una superficie sarà linea di curvatura anche per l'altra.

Quando una delle due superficie sia un piano o una sfera, ogni sua linea essendo allora di curvatura, questo teorema ci darà l'altro:

Se un piano o una sfera tagliano una superficie lungo una linea di curvatura, la taglieranno sotto angolo costante. Viceversa, se la tagliano sotto angolo costante, la intersezione sarà linea di curvatura per la superficie.

41. — Tangenti coniugate. — I teoremi sulle evolute ora ricordati ci permettono di enunciare in altro

modo la proprietà fondamentale delle linee di curvatura. Se infatti L è una linea di curvatura, dal teorema B) citato segue che le tangenti alla superficie, condotte per ogni punto di L normalmente alla curva stessa, sono le generatrici di una superficie sviluppabile. D'altra parte, sopra la superficie sviluppabile, circoscritta ad una superficie S lungo una linea di curvatura L, la L stessa è traiettoria ortogonale delle generatrici. Il teorema A) § 15 ci assicura poi che questa proprietà è caratteristica delle linee di curvatura e potrebbe quindi prendersi per loro definizione.

Se descriviamo invece sulla superficie S una curva ad arbitrio C e lungo di essa circoscriviamo alla superficie una sviluppabile, la tangente $\overline{MT}$ in un punto M della curva C e la generatrice $\overline{MG}$ della sviluppabile, uscente da M, non saranno in generale ortogonali fra loro. In ogni caso le due tangenti MT, MG alla superficie nel punto M diconsi tangenti coniugate della superficie.

Cerchiamo ora la condizione analitica esprimente che le due direzioni MT, MG sono coniugate. Se il punto (x, y, z) percorre la curva C, l'equazione del piano tangente, che inviluppa la sviluppabile circoscritta, sarà:

$$(\xi - x)X + (\eta - y)Y + (\zeta - z)Z = 0,$$

ξ, η, ζ essendo le coordinate correnti. Per avere la generatrice $\overline{MG}$ (caratteristica), dobbiamo associare a questa equazione quella che se ne ottiene differenziando lungo la curva C, cioè (*)

$$(\xi - x)\,dX + (\eta - y)\,dY + (\zeta - z)\,dZ = 0\,.$$

I coseni di direzione della MG sono dunque proporzionali a

$$YdZ - ZdY\,,\quad ZdX - XdZ\,,\quad XdY - YdX\,,$$

per cui se con $\delta x, \delta y, \delta z$ indichiamo gl'incrementi infinitesimi subiti da (x, y, z) quando il punto (x, y, z) si sposta sulla superficie nella direzione MG, avremo:

$$\delta x : \delta y : \delta z = YdZ - ZdY : ZdX - XdZ : XdY - YdX\,,$$

da cui

$$(9)\qquad \delta x\, dX + \delta y\, dY + \delta z\, dZ = 0\,.$$

Viceversa da quest'ultima seguono quelle proporzioni, perchè si ha identicamente

$$\delta x \,.\, X + \delta y \,.\, Y + \delta z \,.\, Z = 0\,.$$

Ciò posto, consideriamo un punto $M \equiv (u, v)$ sulla superficie e due punti $M' \equiv (u + du, v + dv)$, $M'' \equiv (u + \delta u, v + \delta v)$ infinitamente vicini ad esso. La condizione necessaria e sufficiente perchè le due direzioni $\overline{MM'}$, $\overline{MM''}$ siano coniugate sarà per la (9)

$$\Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v\right) = 0$$

ossia

$$(10)\qquad D\,du\,dv + D'(du\,\delta v + dv\,\delta u) + D''dv\,\delta v = 0\,.$$

Si volessimo esprimere che le due direzioni dette sono di più ortogonali fra loro, dovremmo alla (10) aggiungere la condizione (8):

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0\,,$$

(*) a causa di $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$.

e di qui, eliminando $\delta u, \delta v$, troveremo di nuovo, come è naturale, l'equazione differenziale (5) delle linee di curvatura.

42. – **Linee assintotiche.** – Cerchiamo se vi possono essere delle direzioni coniugate a sè medesime. Per ciò basterà porre nella (10) $\delta u = du$, $\delta v = dv$, o meglio

$$\delta u : du = \delta v : dv,$$

e si avrà per la condizione cercata:

$$(11) \qquad D du^2 + 2D' du\,dv + D'' dv^2 = 0.$$

Una linea tracciata sopra una superficie e che goda della proprietà di avere tutte le sue tangenti coniugate a sè medesime dicesi **linea assintotica** della superficie. La (11) è dunque l'equazione differenziale delle linee assintotiche; queste formano, come le linee di curvatura, un doppio sistema (in generale non ortogonale) di guisa che per ogni punto della superficie passa una assintotica di ciascuno dei due sistemi.

Dobbiamo poi osservare che per la (11) le assintotiche sono reali se $DD'' - D'^2 < 0$, immaginarie se $DD'' - D'^2 > 0$. Nel caso intermedio $DD'' - D'^2 = 0$ i due sistemi di assintotiche coincidono; ma allora la superficie, come più tardi riscontreremo, è sviluppabile (V. § 46).

È facile vedere geometricamente che:

Il piano osculatore di una linea assintotica in ogni punto è il piano tangente alla superficie.

E infatti, la sviluppabile circoscritta alla superficie lungo l'assintotica, ha per generatrici le tangenti all'assintotica, la quale ne è per conseguenza lo spigolo di regresso.

Viceversa si vede che: Ogni linea tracciata sopra una superficie, che abbia per piano osculatore il piano tangente alla superficie, è assintotica della superficie.

Da questi teoremi e dalle proprietà della curvatura geodetica (§34) segue l'altro:

Per le linee assintotiche e per queste soltanto la curvatura geodetica coincide coll'assoluta.

Nota. — Tutte le formole che abbiamo sviluppate in questo capitolo sono relative a coordinate curvilinee qualunque u, v. Se vogliamo applicarle al caso in cui la superficie sia riferita a coordinate Cartesiane ortogonali, ed abbia per equazione

$$z = z(x, y),$$

basterà porre

$$u = x, \quad v = y, \quad z = z(u, v).$$

Allora, se indichiamo coi soliti simboli

$$p, q;\ r, s, t$$

le derivate parziali

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

troveremo subito

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} & E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2 \\ & X = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, Y = -\frac{q}{\sqrt{1+q^2+p^2}}, Z = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ & D = -\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, D' = -\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, D'' = -\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \end{aligned}\right.$$

L'equazione differenziale (5') delle linee di curvatura diventerà:

$$(\beta)\quad \{(1+q^2)s-pqt\}\,dy^2+\{(1+q^2)r-(1+p^2)t\}\,dy\,dx+\{pqr-(1+p^2)s\}\,dx^2=0;$$

la (6) le cui radici sono i raggi principali di curvatura (§40) darà:

$$(\gamma)\quad (rt-s^2)\rho^2+\{2pqs-(1+q^2)r-(1+p^2)t\}\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\rho+(1+p^2+q^2)^2=0.$$

In fine per l'equazione differenziale (10) delle assintotiche avremo:

$$(\delta)\qquad r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2=0.$$

43.– La superficie riferita alle sue linee di curvatura. – Dimostrato che sopra ogni superficie le linee di curvatura formano un doppio sistema ortogonale, potremo assumerle a linee coordinate e avremo allora $F=0$,

$$ds^2=E\,du^2+G\,dv^2.$$

Prendendo per coseni di direzione positiva della normale

$$X=\frac{1}{\sqrt{EG}}\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix},\quad Y=\frac{1}{\sqrt{EG}}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\quad Z=\frac{1}{\sqrt{EG}}\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}$$

avremo

$$(12)\qquad \begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}\\ X, & Y, & Z\end{vmatrix}=+1,$$

cioè la direzione positiva della normale giacerà rispetto a quelle delle tangenti alle linee u, v, come la direzione positiva dell'asse z rispetto a quelle degli assi x, y.

Le formole del §38 applicate agli spostamenti lungo le linee di curvatura attuali u, v, danno

$$(13)\quad \begin{cases}\frac{\partial X}{\partial u}=\frac{1}{r_2}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial Y}{\partial u}=\frac{1}{r_2}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial Z}{\partial u}=\frac{1}{r_2}\frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial X}{\partial v}=\frac{1}{r_1}\frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial Y}{\partial v}=\frac{1}{r_1}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial Z}{\partial v}=\frac{1}{r_1}\frac{\partial z}{\partial v}\end{cases}$$

dove r_1, r_2 denotano rispettivamente la quantità r (§ 38) relativa alla linea u e quella relativa alla v, cioè i raggi principali di curvatura. Possiamo ora stabilire per i nove coseni, che figurano nel determinante (12), delle formole analoghe a quelle di Frenet (§ 7), esprimere cioè le loro derivate rispetto ad u e v per i nove coseni stessi, per E, F, G, r_1, r_2 e le loro derivate. Per questo cominciamo dall'osservare che dalle (13) e dalle (4) segue:

$$(14) \qquad D = -\frac{E}{r_2}, \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{G}{r_1}; \quad (*)$$

(*). Per una superficie riferita alle due linee di curvatura avendosi contemporaneamente

$$F = 0, \quad D' = 0,$$

se ci riferiamo a quanto abbiamo detto al § 39 rispetto alle forme differenziali

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$-(dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ) = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

vediamo che il problema di trovare le linee di curvatura equivale analiticamente a quello di operare una tale trasformazione reale di variabili u, v che le due forme vengano contemporaneamente a mancare del termine medio. E' facile vedere che questo resultato analitico è indipendente dal significato particolare geometrico, che avevano per noi le due forme:

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

e sussiste inalterato per forme arbitrarie, quando il determinante $EG - F^2$, o $DD'' - D'^2$ di una di esse è positivo. —

per conseguenza abbiamo:

$$X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + Y \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + Z \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0 ;$$

aggiungendo a questa le due identità

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

e risolvendo queste tre equazioni lineari rispetto a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},$$

troviamo, coll'osservare la (12):

$$(15) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}$$

e analogamente per y e per z. La (15) può scriversi indifferentemente sotto una delle due forme:

$$(15') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial x}{\partial v}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial x}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial x}{\partial u}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial x}{\partial v}, \end{cases}$$

dove per brevità omettiamo, come sempre in seguito, le formole analoghe in y, z.

Per ottenere le altre, osserviamo che dalle (14) risulta:

$$\sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\frac{E}{r_1}$$

ovvero

$$(a) \qquad \sum X \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\frac{\sqrt{E}}{r_2}.$$

D'altra parte l'identità $\sum\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1$ porge derivando:

$$(b) \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0.$$

Se poi consideriamo l'altra identità:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

e la deriviamo rispetto ad u, troviamo:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\sum \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

ossia per le (15')

$$(c)\qquad \sum \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}.$$

Risolviamo ora le (a), (b), (c) rispetto alle incognite $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)$, $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$, $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ e avremo:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\sqrt{E}}{r_2}X$$

e analogamente per y e per z. A questa possiamo associare l'altra

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\sqrt{G}}{r_1}X,$$

che se ne deduce permutando u, v; E, G; r_1, r_2. Riepilogando abbiamo dunque le formole:

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\sqrt{E}}{r_2}X,\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\sqrt{G}}{r_1}X,\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u},\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v};
\end{aligned}\right.$$

alle quali aggiungendo le (13), abbiamo tutte le formole domandate.

Non sarà inutile osservare, come conseguenza di queste formole, che le derivate successive di ordine superiore di x, y, z (supposto che esistano) potranno esprimersi per mezzo delle quantità già dette, per E, G, r_1, r_2, e le loro derivate.

44. — Raggio di curvatura di una linea tracciata sulla superficie. — Passiamo ora ad esaminare le relazioni che esistono fra i raggi di curvatura delle infinite linee tracciate sopra una superficie per un medesimo punto M.

Sia C una curva piana o gobba tracciata sopra la superficie S e uscente dal punto $M \equiv (u, v)$. Indichiamo con θ l'angolo d'inclinazione della C sopra la linea di curvatura $v = \cos t^e$, con σ l'angolo che la direzione positiva della sua normale principale forma colla direzione positiva della normale alla superficie e riteniamo poi per la curva C tutte le altre notazioni del Cap. I.

Avendosi

$$\sum \cos\alpha \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} = \cos\theta$$
$$\sum \cos\alpha \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta$$
$$\sum \cos\alpha . X = 0,$$

ne risulterà

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \operatorname{sen}\theta,$$

e analogamente per $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Lungo la curva C, x, y, z, u, v sono funzioni di s e si ha quindi per le formole di Frenet

$$\frac{\cos\xi}{\rho} = \frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{\partial\cos\alpha}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial\cos\alpha}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$

ovvero per le (7) § 20:

$$\frac{\cos\xi}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\cos\alpha}{\partial u}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\cos\alpha}{\partial v}\operatorname{sen}\theta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{E}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\operatorname{sen}\theta\right\} +$$
$$+ \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{G}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\operatorname{sen}\theta\right\} + \frac{\cos\theta}{\sqrt{E}}\frac{\partial\theta}{\partial u}\left\{\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\operatorname{sen}\theta\right\} +$$
$$+ \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{G}}\frac{\partial\theta}{\partial v}\left\{\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\operatorname{sen}\theta\right\}.$$

Ne deduciamo, ponendo mente alle (16),

$$\frac{1}{\rho}\sum X\cos\xi = -\left(\frac{\cos^2\theta}{r_2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r_1}\right),$$

ovvero

$$(17) \qquad \frac{\cos\sigma}{\rho} = -\left(\frac{\cos^2\theta}{r_2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r_1}\right),$$

formola che ci esprime la curvatura $\frac{1}{\rho}$ della C per solo elementi θ, σ, r_1, r_2. Se per la normale in $M \equiv (u, v)$ alla superficie e per la tangente in M alla C facciamo passare un piano, esso produrrà nella superficie una curva sezione Γ, che diciamo la sezione normale tangente alla curva C. La sua curvatura $\frac{1}{R}$ in M sarà data dalla formola (17) stessa, facendovi,

$$\cos\sigma = \pm 1,$$

a seconda che la sua concavità è rivolta dalla banda positiva o negativa della normale alla superficie. Avremo dunque $\frac{1}{R} = \pm \frac{\cos\sigma}{\rho}$, ovvero

$$\rho = \pm R \cos\sigma,$$

formola che esprime il teorema di Meunier:

Il raggio di prima curvatura in un punto di una curva tracciata sopra una superficie qualunque è eguale al raggio di curvatura della sezione normale tangente nel punto alla curva, moltiplicato pel coseno dell'angolo, che il piano della sezione fa col piano osculatore alla curva.

Potremo dunque limitare il nostro studio a quello delle sezioni normali.

45. — Sezioni normali. — Indicatrice di Dupin. — Per le sezioni normali, la formola (17) diventa

$$\frac{1}{\rho} = \mp \left(\frac{\cos^2\theta}{r_2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r_1} \right),$$

dove ρ è sempre positivo e nel secondo membro si deve prendere il segno inferiore, se la direzione che va dal centro di curvatura della sezione al piede della normale coincide colla direzione positiva di questa e il superiore nel caso opposto. Ma siccome nel caso attuale tutte le lunghezze

ρ sono contate sulla normale in M a partire da questo punto, è naturale di attribuire segni opposti a quelle che hanno direzione opposta e se conveniamo di assumere ρ come positivo nel 1° caso e negativo nel 2°, avremo l'unica formola

$$(18) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\theta}{r_2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r_1}.$$

Facendo in questa formola $\theta = \frac{\pi}{2}$ o $\theta = 0$, vediamo che r_1 r_2 sono i raggi di curvatura delle sezioni normali tangenti alle linee di curvatura, sezioni che diconsi principali. Per questa ragione r_1, r_2 si chiamano i raggi principali di curvatura della superficie (§40). Così pure i punti M_1, M_2 centri di curvatura delle sezioni principali diconsi anche centri di curvatura della superficie (ibid.) (*)

Esaminiamo ora come varia il raggio ρ di curvatura della sezione normale quando si fa ruotare il piano della sezione, cioè si fa crescere θ da 0 a π. Perciò distinguiamo due casi:

1° caso:– r_1, r_2 abbiano il medesimo segno, cioè i centri di curvatura M_1, M_2 giacciano dalla medesima parte del piede M della normale. Possiamo supporre r_1, r_2 positivi, bastando, in caso contrario, cangiare il senso positivo dell'as-

---

(*). Bisogna bene osservare che il centro di curvatura di una sezione principale non coincide in generale con quello della corrispondente linea di curvatura; per ciò sarebbe necessario che la normale principale della linea di curvatura coincidesse colla normale alla superficie. Se questo accadesse in tutti i punti la linea di curvatura sarebbe geodetica.

se 2; sia

$$r_1 > r_2\,,\quad \frac{1}{r_1} < \frac{1}{r_2} \qquad (*)$$

Se scriviamo la (18) sotto la forma

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r_2} - \operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

vediamo che, mentre θ va crescendo da 0 a $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{\rho}$ va diminuendo da $\frac{1}{r_2}$ a $\frac{1}{r_1}$, e quando θ varia da $\frac{\pi}{2}$ a π, la curvatura $\frac{1}{\rho}$ torna a crescere da $\frac{1}{r_1}$ a $\frac{1}{r_2}$. Dunque ρ varia fra i limiti r_1, r_2 che sono rispettivamente il suo massimo ed il minimo valore. Inoltre, siccome esso è sempre positivo, tutte le sezioni normali volgono da una medesima parte le loro concavità, cioè la superficie giace, nell'intorno del punto che si considera, tutta da una banda del piano tangente.

2° caso: — r_1, r_2 abbiano segno opposto, cioè M_1, M_2 si trovino da parti opposte della normale. Prima di tutto osserviamo che, avendosi per le (14) $DD'' = \frac{EG}{r_1 r_2} < 0$, esistono

---

(*). Se $r_1 = r_2$, la (18) dimostra che qualunque sezione normale ha allora il raggio di curvatura $\rho = r_1 = r_2$; il punto dicesi in tal caso un **ombelico** della superficie. Una superficie di cui tutti i punti siano ombelichi è necessariamente una sfera. E infatti essendo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = r_1\frac{\partial X}{\partial u}\,,\quad \frac{\partial y}{\partial u} = r_1\frac{\partial Y}{\partial u}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial u} = r_1\frac{\partial Z}{\partial u}\,,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = r_1\frac{\partial X}{\partial v}\,,\quad \frac{\partial y}{\partial v} = r_1\frac{\partial Y}{\partial v}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial v} = r_1\frac{\partial Z}{\partial v}\,,$$

cioè

$$dx = r_1\,dX\,,\quad dy = r_1\,dY\,,\quad dz = r_1\,dZ\,,$$

siamo nel caso considerato alla fine del § 38. —

due direzioni assintotiche reali uscenti da M (§ 42); l'equazione differenziale delle assintotiche essendo:

$$\frac{E}{r_2}\,du^2 + \frac{G}{r_1}\,dv^2 = 0$$

l'angolo ω, sotto cui sono inclinate sulla linea v è dato da

$$(19) \qquad tg\,\omega = \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{dv}{du} = \pm\sqrt{-\frac{r_1}{r_2}}\,,$$

il che dimostra che le direzioni delle linee di curvatura sono le bisettrici dell'angolo compreso fra le assintotiche.

Ciò posto supponiamo r_1 positivo, r_2 negativo e sia ω_0 il valore di ω compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ dato dalla (19). Scrivendo la (18) sotto la forma

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r_1 \cos^2\omega_0}\left(\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}^2\omega_0\right)$$

e facendo crescere θ da 0 a π, osserviamo per ρ l'andamento seguente:

mentre θ va da 0 a ω_0, ρ decresce da r_2 a $-\infty$
" " α_0, $\frac{\pi}{2}$, ρ decresce da $+\infty$ a r_1
" " $\frac{\pi}{2}$, $\pi-\alpha_0$, ρ cresce da r_1 a $+\infty$
" " $\pi-\alpha_0$, π, ρ cresce da $-\infty$ a r_2.

Anche qui r_1 e r_2 sono per ρ i valori massimi e minimi relativi, cioè r_1 è un minimo positivo e r_2 un massimo negativo. Le due sezioni normali, le cui traccie sul piano tangente sono dirette secondo le assintotiche, hanno nel punto M un flesso, essendo $\frac{1}{\rho} = 0$; passando a traverso a queste sezioni il raggio ρ cangia segno e la superficie nell'intorno di M giace parte da una banda parte dall'altra del piano tangente, e lo attraversa secondo le direzioni assintotiche.

Una chiara rappresentazione geometrica della legge, secondo cui varia il raggio ρ di curvatura, si ottiene facendo uso della indicatrice di Dupin, alla quale si perviene nel modo seguente.

Tracciamo nel primo caso un' ellisse col centro in M e giacente nel piano tangente alla superficie, cogli assi diretti secondo le linee di curvatura e coi semi-assi eguali a $\sqrt{r_1}$, $\sqrt{r_2}$. La sua equazione in coordinate (ξ, η) sul piano tangente sarà:

$$\frac{\xi^2}{r_1} + \frac{\eta^2}{r_2} = 1,$$

l'asse delle ξ essendo tangente alla linea u, e quello delle η alla v. Se ora conduciamo un raggio vettore MN qualunque dell' ellisse, il raggio ρ di curvatura della sezione normale il cui piano passa per MN sarà precisamente

$$\rho = \overline{MN}^2.$$

Nel 2° caso si può dare una rappresentazione analoga col sistema delle due iperbole

$$\begin{cases} \dfrac{\xi^2}{r_1} - \dfrac{\eta^2}{-r_2} = 1 \\ -\dfrac{\xi^2}{r_1} + \dfrac{\eta^2}{-r_2} = 1 \end{cases}$$

le quali hanno per assintoti comuni le tangenti alle assintotiche in M a causa della (19). L'ellisse tracciata nel primo caso, o il sistema delle due iperbole nel secondo, costituiscono l'indicatrice di Dupin.

A questi medesimi resultati si può giungere con semplici considerazioni geometriche, che noi qui tralasceremo.

46.— Curvatura totale e curvatura media. —

Dicesi curvatura totale o semplicemente curvatura di una superficie in un punto l'inversa del prodotto dei raggi principali di curvatura; indicandola con K, avremo:

$$K = \frac{1}{r_1 r_2}.$$

La somma $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ delle inverse dei medesimi raggi dicesi invece curvatura media della superficie; indicandola con H, sarà:

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

Le formole del § 39 ci porgono facilmente il modo di trovare i valori di H, K quando le coordinate curvilinee sulla superficie sono affatto arbitrarie, esprimendoli pei coefficienti delle due forme differenziali:

$$(\alpha) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$(\beta) \qquad -(dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ) = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

(Cf. § 43 Nota). Poichè infatti la (6) § 39, avendo per radici r_1, r_2, ci darà immediatamente:

$$(20) \qquad K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2},$$

$$(21) \qquad H = \frac{2FD' - ED'' - GD'}{EG - F^2}.$$

I discriminanti $EG - F^2$, $DD'' - D'^2$ delle forme (α), (β) sono invarianti di queste forme, cioè se si cangiano le variabili, ponendo

$$(\gamma) \qquad u = u(\alpha, \beta), \quad v = v(\alpha, \beta),$$

i determinanti delle forme trasformate sono eguali ai primitivi, moltiplicati per una potenza (il quadrato) del modulo della sostituzione, cioè del determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \alpha} & \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} & \frac{\partial v}{\partial \beta} \end{vmatrix}.$$

L'espressione $2FD' - ED'' - GD$ è anch'essa un invariante (simultaneo) delle due forme, e acquista per fattore il quadrato di Δ se si opera la trasformazione (γ).(*)
Le espressioni (20), (21) di H, K sono dunque invarianti assoluti simultanei delle due forme:

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

Che così dovesse essere poteva prevedersi a priori, perché H, K hanno evidentemente valori indipendenti dalle coordinate scelte sulla superficie. La curvatura totale K è positiva nei punti a indicatrice ellittica, è negativa nei punti a indicatrice iperbolica; i primi si diranno punti **ellittici** della superficie, i secondi punti iperbolici.
In generale esistono sopra una superficie punti dell'una e dell'altra specie e, se la curvatura K varia con continuità, quando si passa con continuità da un punto ad un altro sulla superficie, non potrà passare dal positivo al negativo senza annullarsi, e la linea di confine fra una regione di punti ellittici e una di punti iperbolici sarà

(*) È facile verificare direttamente questa proprietà, ma del resto risultano subito dai primi elementi della teoria delle forme algebriche, osservando che ogni trasformazione (γ) delle variabili u, v equivale alla sostituzione lineare

$$du = \frac{\partial u}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial u}{\partial \beta}d\beta$$
$$dv = \frac{\partial v}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial v}{\partial \beta}d\beta,$$

sui differenziali du, dv.

costituita da punti in cui la curvatura è nulla e che diremo punti parabolici. (*)

Le linee assintotiche sono reali soltanto nella regione dei punti iperbolici (§ 42) e non oltrepassano mai la linea parabolica, sulla quale si riflettono.

A complemento di queste osservazioni dimostriamo il teorema:

Una superficie che abbia la curvatura nulla in tutti i punti è una sviluppabile. —

Avremo per l'ipotesi fatta

$$DD'' - D'^2 = 0$$

qualunque siano le linee coordinate. Se prendiamo per linee coordinate quelle di curvatura, dovendo l'equazione differenziale (5')

$$GD'dv^2 + (GD - ED'')du\,dv - ED'du^2 = 0$$

delle linee di curvatura essere soddisfatta da $u = cost^e$ e $v = cost^e$, sarà $D' = 0$, quindi anche

$$D = 0 \quad o \quad D'' = 0.$$

Supponiamo che sia

$$D = 0\,, \quad D' = 0\,,$$

(*) Esempio. — Una superficie di rotazione è a curvatura positiva laddove il meridiano volge all'asse la concavità, e negativa, dove volge la convessità; perchè la curvatura passi dal positivo al negativo è necessario che il meridiano abbia un punto d'inflessione. Il parallelo che passa per questo punto è una linea parabolica.

cioè per le (4)

$$\Sigma \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} = 0$$
$$\Sigma \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} = 0,$$

essendo identicamente

$$\Sigma X \frac{\partial X}{\partial u} = 0,$$

Da questa e dalle precedenti segue

$$\frac{\partial X}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = 0,$$

cioè X, Y, Z sono funzioni di v soltanto. Lungo una linea $v = \text{cost}^e$ le normali alla superficie sono dunque parallele. D'altra parte abbiamo anche (essendo $D' = 0$),

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} X + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u} Y + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u} Z = 0,$$
$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} = 0;$$

ne risulta che i coseni di direzione

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u}$$

della tangente a una linea $v = \text{cost}^e$ sono funzioni di v soltanto, quindi costanti lungo ogni singola linea v, la quale è per conseguenza una retta. Per quanto si è visto sopra, i piani tangenti alla superficie in tutti i punti di una retta v coincidono, e la superficie è quindi sviluppabile (Cf. Cap. I § 12) (*).

47. — **Rappresentazione sferica di Gauss.** — Una rappresentazione molto utile nello studio delle superficie non sviluppabili è quella che porta il nome di rappresentazione

---

(*). Risulta di qui che: Sopra una sviluppabile le linee di curvatura sono le generatrici e le loro traiettorie ortogonali, come è chiaro geometricamente.

sferica o di Gauss, e che si ottiene nel modo seguente. Sia S una superficie, M un punto mobile su di essa; descriviamo una sfera e pel suo centro O conduciamo il raggio parallelo alla direzione positiva della normale in M alla superficie S. L'estremità M' del raggio si dirà l'immagine del punto M sopra S e mentre M si muove sopra una regione della superficie, la sua immagine M' si muoverà sopra una regione corrispondente della sfera rappresentativa. Perchè la figura immagine sulla sfera non ricopra sè stessa, cioè la rappresentazione sia univoca, converrà che nella regione, considerata sopra S, non vi siano due punti, in cui le normali abbiano eguale direzione. Se ciò accadesse, converrebbe scindere la regione considerata in altrettante regioni parziali, per le quali la condizione fosse soddisfatta, e studiarle separatamente.

Supponiamo, per semplicità, il centro della sfera nell'origine delle coordinate e il suo raggio eguale all'unità lineare; allora se x, y, z sono le coordinate di M, quelle del punto immagine M' saranno evidentemente i coseni di direzione della normale X, Y, Z. Se esprimiamo x, y, z; X, Y, Z per i parametri u, v delle linee di curvatura della S e indichiamo con

$$ds'^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2$$

l'elemento lineare della sfera, le (13) ci daranno subito

$$(22) \qquad E' = \frac{E}{r_1^2}, \quad F' = 0, \quad G' = \frac{G}{r_2^2}$$

quindi il teorema:

Nella rappresentazione sferica di Gauss il sistema ortogonale delle linee di curvatura ha per immagine un sistema ortogonale sulla sfera.

Le (13) però ci dimostrano qualche cosa di più, in quanto provano che le tangenti alle linee di curvatura sono parallele a quelle corrispondenti delle curve immagini sulla sfera.

Possiamo ora domandare se vi sono altri sistemi ortogonali sulla superficie che si conservino ortogonali nella rappresentazione. Supposto che due linee di un tal sistema s'incrocino in $M \equiv (u, v)$ ad angolo retto, siano $M' \equiv (u+du, v+dv)$, $M'' \equiv (u+\delta u, v+\delta v)$ due punti infinitamente vicini ad M lungo le rispettive direzioni delle linee suddette, avremo allora (§ 40, (8))

$$E_{\prime}\, du\, \delta u + G\, dv\, \delta v = 0\,;$$

ora se l'angolo $M'\hat{M}M''$ si conserva retto nella rappresentazione, dovremo avere altresì:

$$E'\, du\, \delta u + G'\, dv\, \delta v = 0$$

ed eliminando $\delta u, \delta v$,

$$(EG' - E'G)\, du\, dv = 0\,,$$

dunque sarà $du = 0$, o $dv = 0$, a meno che non sia

$$(a) \qquad \frac{E}{E'} = \frac{G}{G'}$$

Se dunque la (a) non è soddisfatta, l'unico sistema ortogonale che si conserva tale nella rappresentazione è quello delle $u = \text{cost}^e$, $v = \text{cost}^e$. Quando poi la (a) è soddisfatta, la rappresentazione è conforme e tutti i sistemi ortogonali si conservano. Ma la (a) equivale per le (22) all'altra

$$r_1^2 = r_2^2\,,$$

quindi dovrà essere o $r_1 = r_2$, o $r_1 + r_2 = 0$. Nel primo caso la superficie è una sfera (Cf. § 45 Nota), nel secondo dicesi una superficie ad area minima per una proprietà che studieremo in seguito (Cap. IX). Dunque:

Sopra ogni superficie, che non sia una sfera, nè una superficie ad area minima, l'unico sistema ortogonale di linee, che si conserva ortogonale nella rappresentazione sferica di Gauss, è quello delle linee di curvatura.

Per mezzo della rappresentazione sferica di Gauss possiamo dare un'altra definizione della curvatura K della superficie in un punto. Se osserviamo infatti che l'elemento d'area sulla superficie è dato da

$$d\sigma = \sqrt{EG}\, du\, dv$$

e la corrispondente area elementare $d\sigma'$ della sfera da

$$d\sigma' = \sqrt{E'G'}\, du\, dv = \frac{\sqrt{EG}}{r_1 r_2}\, du\, dv,$$

avremo

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{1}{r_1 r_2} = K.$$

Se dunque attorno ad un punto M della superficie S tracciamo una piccola area σ, e consideriamo il rapporto $\frac{\sigma'}{\sigma}$, dove σ' indica l'area sferica corrispondente, al restringersi indefinito di σ attorno ad M, questo rapporto convergerà verso il valore della curvatura K nel punto M.

Questa definizione della curvatura K presenta perfetta analogia colla definizione della curvatura delle curve piane.

48. — Torsione delle assintotiche. — Le formole stabilite al § precedente ci conducono a dimostrare un elegante

teorema di Enneper relativo alla torsione $\frac{1}{T}$ delle assintotiche. L'equazione differenziale delle assintotiche essendo per le (14)

$$\frac{E_1}{r_2}du^2 + \frac{G}{r_1}dv^2 = 0,$$

il loro elemento d'arco $d\sigma$ sarà dato da

$$d\sigma^2 = E_1 du^2 + G\,dv^2 = E_1 \frac{r_2 - r_1}{r_2} du^2 .$$

Ora se per una linea assintotica riteniamo le solite notazioni del Cap. I, abbiamo (§ 42):

$$\cos\lambda = X, \quad \cos\mu = Y, \quad \cos\nu = Z,$$

quindi

$$\frac{1}{T^2} = \frac{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}{d\sigma^2} = \frac{\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv\right)^2}{d\sigma^2} =$$

$$= \frac{E_1' du^2 + G' dv^2}{E_1 \frac{r_2 - r_1}{r_2} du^2} = \frac{\frac{E_1}{r_2^2}du^2 + \frac{G}{r_1^2}dv^2}{E_1 \frac{r_2 - r_1}{r_2} du^2};$$

ma lungo l'assintotica si ha $\frac{G}{r_1}dv^2 = -\frac{E_1}{r_2}du^2$ e ne risulta quindi

$$\frac{1}{T^2} = -\frac{1}{r_1 r_2},$$

cioè il teorema di Enneper: Il quadrato della torsione delle assintotiche in un punto è eguale alla curvatura della superficie nel punto, presa con segno contrario. (*)

Facciamo ancora, rispetto alle assintotiche alcune osservazioni sulla formola (19). L'angolo compreso fra due assintotiche è il doppio dell'angolo

$$(22') \qquad \omega = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{-\frac{r_1}{r_2}},$$

(*). Bisogna rammentare che le assintotiche reali esistono soltanto nelle regioni della superficie, ove la curvatura è negativa.

e non può quindi essere costante che per quelle superficie che hanno costante il rapporto dei raggi di curvatura. In particolare le assintotiche formeranno un sistema ortogonale, quando si abbia $r_1 + r_2 = 0$, cioè la superficie sia ad area minima; in tal caso l'indicatrice di Dupin sarà un'iperbole equilatera.

49. — Equazioni a derivate parziali per r_1, r_2. —

Supposta sempre la superficie riferita alle sue linee di curvatura u, v, passiamo a stabilire delle formole che legano E, G, r_1, r_2 e loro derivate parziali rispetto ad u, v.

Per questo riprendiamo le formole (13) § 43, deriviamo quelle della prima linea rispetto a v, quelle della seconda rispetto ad u, e sottraendo avremo:

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = 0,$$
$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 0,$$
$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

Moltiplicandole ordinatamente una prima volta per $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$, una seconda per $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ e sommando col l'osservare che si ha:

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = E \quad , \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = G$$
$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},$$

otterremo:

$$(23) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v} = 0, \\ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u} = 0; \end{cases}$$

che sono le formole richieste.

Possiamo scriverle in altro modo, sostituendo ad E, G i coefficienti E', G' dell'elemento lineare sferico dati dalle (22); allora prendono la forma:

$$(23')\quad \begin{cases} (r_1 - r_2)\dfrac{\partial \log\sqrt{E'}}{\partial v} - \dfrac{\partial r_2}{\partial v} = 0, \\ (r_1 - r_2)\dfrac{\partial \log\sqrt{G'}}{\partial u} + \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Per dare subito un'applicazione di queste formole, cerchiamo se possono esistere superficie S che abbiano costante uno dei due raggi di curvatura, poniamo $r_2 = R$. Allora dalla prima delle (23) e (23') segue:

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial E'}{\partial v} = 0,$$

cioè le linee v sono geodetiche tanto sulla superficie S che sulla sfera. Dunque sulla sfera sono circoli massimi e conseguentemente sulla S sono curve piane, perchè le loro tangenti sono parallele a quelle dei circoli massimi. (§47). Ogni linea $v = \text{cost}^e$, giacendo in un piano normale alla superficie avrà per raggio di curvatura r_2 stesso, e sarà quindi un circolo di raggio R. Se ora descriviamo la sfera di raggio R, che contiene questo circolo, essa toccherà la superficie S lungo tutto il circolo. La S è dunque l'inviluppo di una sfera di raggio costante R, il cui centro percorre una curva nello spazio; una tale superficie dicesi superficie canale. Viceversa è chiaro che ogni superficie canale ha costante uno dei due raggi di curvatura, ed eguale al raggio della sfera inviluppata.

50. — Superficie evoluta. — Abbiamo veduto che sopra la normale in ogni punto M di una superficie S

esistono due punti speciali M_1, M_2, che sono i centri di curvatura della superficie, ovvero i centri di curvatura delle due sezioni normali principali uscenti da M (§ 44). Quando il punto M si muove sulla superficie, i centri di curvatura M_1, M_2 descrivono una superficie luogo che diceś l'evoluta della superficie S, mentre S prende il nome di evolvente.

L'evoluta si compone evidentemente di due falde, l'una descritta dal centro M_1, l'altra dal centro M_2.

Possiamo generare le due falde dell'evoluta anche nel modo seguente. Consideriamo una linea di curvatura C della superficie S; le normali lungo C inviluppano una curva Γ evoluta di C e che è il luogo dei centri di curvatura delle sezioni normali principali tangenti a C nei suoi singoli punti. Muovendosi la curva C nel suo sistema, la sua evoluta Γ si muoverà deformandosi e genererà una falda dell'evoluta. Similmente dicasi per l'altra falda.

Stabiliamo ora con semplici considerazioni geometriche alcune importanti proprietà dell'evoluta, proprietà che confermeremo poi analiticamente, e in primo luogo dimostriamo il teorema:

Gli spigoli di regresso delle sviluppabili luogo delle normali alla superficie lungo le sue singole linee di curvatura sono geodetiche della superficie evoluta.

Per dimostrarlo cominciamo dall'osservare che ogni normale all'evolvente è tangente in due punti all'evoluta, e precisamente alla prima falda nel primo centro di curvatura, alla seconda nel secondo.

Consideriamo ora un elemento MM' di una linea di curvatura del secondo sistema; le normali in MM' s'incontrano nel secondo centro di curvatura M_2 (*) e toccano la prima falda nei rispettivi primi centri di curvatura M_1, M_1' su queste normali. Il piano MM_2M' contiene dunque due direzioni distinte $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_1'}$ (non infinitamente vicine) uscenti da M_1 e tangenti alla prima falda dell'evoluta ed è per conseguenza il piano tangente in M_1 alla prima falda. Ne segue intanto:

La normale in M_1 alla prima falda è parallela alla tangente in M alla prima linea di curvatura, e similmente per l'altra falda.

Ciò posto, se consideriamo una linea di curvatura C del primo sistema e lo spigolo di regresso Γ della sviluppabile generata dalle normali ad S lungo C, la normale principale di Γ in M_1 sarà parallela alla tangente di C in M (§15) e coinciderà quindi colla normale alla prima falda. Dunque Γ è geodetica di questa falda c. d. d.

Stabilito il teorema enunciato, è facile anche trovare quali sono sopra una delle falde dell'evoluta, p. es. la prima, le curve trajettorie ortogonali di queste geodetiche $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \ldots$ Sia infatti $M_1, M_1', M_1'' \ldots$ una loro trajettoria ortogonale, che le incontri rispettivamente nei punti

$$M_1,\ M_1',\ M_1'',\ldots$$

(*) a meno, s'intende, d'infinitesimi di second'ordine, se l'elemento $\overline{MM'}$ è del primo.

e siano

$$M, M', M'', \ldots$$

i punti ove le tangenti a $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \ldots$ in $M_1, M_1', M_1'' \ldots$ etc. incontrano (normalmente) l'evolvente S. Le due curve $M_1 M_1' M_1'' \ldots$, $M M' M'' \ldots$ sono descritte sulla superficie rigata luogo delle rette (generatrici)

$$M M_1, M' M_1', M'' M_1'', \ldots$$

e sono perpendicolari a tutte queste generatrici, le quali sono evidentemente geodetiche della superficie loro luogo. Per il teorema al § 30, i segmenti:

$$M M_1, M' M_1', M'' M_1'', \ldots$$

sono tutti eguali fra loro e siccome essi coincidono coi raggi di prima curvatura della evolvente nei punti

$$M, M', M'', \ldots$$

così ne concludiamo:

Le traiettorie ortogonali delle geodetiche, inviluppate sopra una delle falde dell'evoluta dalle normali all'evolvente, corrispondono a quelle curve della superficie evolvente, lungo le quali è costante il rispettivo raggio principale di curvatura.

È chiaro che l'equazione $r_1 = \text{cost}^{e}$ o $r_2 = \text{cost}^{e}$ determina appunto sopra la S un sistema di curve quando non sia già r_1 o r_2 costante su tutta la superficie; ma allora la superficie sarebbe una superficie canale (§ 48) e la corrispondente falda dell'evoluta si ridurrebbe ad una linea, il luogo dei centri delle sfere inviluppate.

51. — Formole relative all'evoluta. — Se indichiamo con x_1, y_1, z_1 le coordinate del primo centro di curvatura, avremo (§ 38 formole (1)):

$$(24) \qquad x_1 = x - r_1 X, \quad y_1 = y - r_1 Y, \quad z_1 = z - r_1 Z;$$

variando u, v queste formole daranno le coordinate correnti di un punto della 1ª falda S_1 dell'evoluta. Denotiamo poi con

$$E_1, F_1, G_1; \; X_1, Y_1, Z_1; \; D_1, D_1', D_1'', \ldots$$

le quantità che per la superficie S_1 sono le corrispondenti alle

$$E, F, G; \; X, Y, Z; \; D, D', D'', \ldots$$

per S. Derivando una prima volta le (24), coll'osservare le (13) § 43, si ottiene:

$$(25) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \left(1 - \dfrac{r_1}{r_2}\right)\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} X, \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial u} = \left(1 - \dfrac{r_1}{r_2}\right)\dfrac{\partial y}{\partial u} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} Y, \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial u} = \left(1 - \dfrac{r_1}{r_2}\right)\dfrac{\partial z}{\partial u} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} Z; \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = -\dfrac{\partial r_1}{\partial v} X, \quad \dfrac{\partial y_1}{\partial v} = -\dfrac{\partial r_1}{\partial v} Y, \quad \dfrac{\partial z_1}{\partial v} = -\dfrac{\partial r_1}{\partial v} Z \end{cases}$$

e successivamente:

$$E_1 = E\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)^2, \quad F_1 = \frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial v}, \quad G_1 = \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}\right)^2,$$

quindi:

$$ds_1^2 = \left\{E\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)^2\right\} du^2 + 2\frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial v}\, du\, dv + \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}\right)^2 dv^2$$

e prendendo per linee coordinate sopra S_1 le $u = \text{cost}^e$, $r_1 = \text{cost}^e$,

$$(27) \qquad ds_1^2 = dr_1^2 + E\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 du^2.$$

Questa formola dimostra che sopra S_1 le $u = \text{cost}^e$ sono geodetiche e le $r_1 = \text{cost}^e$ ne sono le traiettorie ortogonali, come avevamo già riconosciuto geometricamente.

Per i coseni di direzione X_1, Y_1, Z_1 abbiamo le formole:

$$X_1 : Y_1 : Z_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial v} \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial v} \end{vmatrix},$$

quindi per le (25)

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad Y_1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad Z_1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v},$$

il che dimostra un' altra proprietà già notata al paragrafo precedente.

Calcolando ora

$$D_1 = -\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

$$D_1' = -\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

$$D_1'' = -\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial X_1}{\partial v} = -\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

coll' osservare le (16) § 43 e le (25), otteniamo:

$$D_1 = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \frac{\partial E}{\partial v}, \quad D_1' = 0, \quad D_1'' = -\frac{\sqrt{G}}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial v},$$

Possiamo anche sostituire in D_1 per $\frac{\partial E}{\partial v}$ il suo valore tratto dalla prima delle (23) e avremo

$$(28) \qquad D_1 = \frac{E_1}{\sqrt{G}} \frac{r_1}{r_2^2} \frac{\partial r_2}{\partial v}, \quad D_1' = 0, \quad D_1'' = -\frac{\sqrt{G}}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial v}.$$

Indicando con K_1 la curvatura totale di S_1 avremo:

$$K_1 = \frac{D_1 D_1''}{E_1 G_1 - F_1^2},$$

ossia per le (26), (28):

$$(29) \qquad K_1 = -\frac{1}{(r_2 - r_1)^2} \frac{r_2^2}{r_1^2} \frac{\frac{\partial r_2}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}};$$

similmente sarà

$$(29') \qquad K_2 = -\frac{1}{(r_2 - r_1)^2} \frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{\frac{\partial r_1}{\partial v}}{\frac{\partial r_2}{\partial u}},$$

Ed avremo la relazione notevole

$$(30) \qquad K_1 K_2 = \frac{1}{(r_2 - r_1)^4}.$$

52. — Corrispondenza fra i punti delle due falde. —

Fra i punti dell'una falda dell'evoluta e quelli della seconda falda S_2 viene stabilita dalla costruzione stessa una corrispondenza geometrica, quando si riguardino i centri M_1, M_2 di curvatura come corrispondenti fra loro (e al punto M sulla evolvente.)

Per la (30) le curvature delle due falde in M_1, M_2 hanno il medesimo segno e le assintotiche delle due falde saranno quindi reali od immaginarie insieme. Cerchiamo ora la condizione affinché le assintotiche della prima falda abbiano per curve corrispondenti le assintotiche della seconda.

L'equazione differenziale delle assintotiche sulla prima falda sarà

$$D_1 du^2 + 2D_1' du dv + D_1'' dv^2 = 0$$

ossia per le (28)

$$E_1 r_1^2 \frac{\partial r_2}{\partial v} du^2 - G r_2^2 \frac{\partial r_1}{\partial v} dv^2 = 0;$$

quella delle assintotiche sulla seconda falda si otterrà permutando u, v; E_1, G; r_1, r_2 e sarà:

$$E_1 r_1^2 \frac{\partial r_2}{\partial u} du^2 - G r_2^2 \frac{\partial r_1}{\partial u} dv^2 = 0.$$

Perché le assintotiche si corrispondano bisogna che queste equazioni coincidano e si deve quindi avere

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial u} \\ \frac{\partial r_1}{\partial v} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix} = 0;$$

di qui risulta il teorema (Ribaucour):

La condizione necessaria e sufficiente affinché sulle due falde dell'evoluta le assintotiche si corrispondano è che i raggi principali di curvatura dell'evolvente sieno legati fra loro da una relazione $\varphi(r, r_1) = 0$.

Abbiamo veduto che sopra S_1 le linee $u = \text{cost}^e$ sono geodetiche, aventi per traiettorie ortogonali le linee $r_1 = \text{cost}^e$. E' facile vedere che le linee $v = \text{cost}^e$ sopra S_1 sono le linee a tangenti coniugate delle $u = \text{cost}^e$. Analiticamente ciò' risulta da che $D'_1 = 0$ [Cf. §41 formola (10)] e geometricamente dal fatto che le tangenti alle linee $u = \text{cost}^e$ lungo una linea $v = \text{cost}^e$ sono le normali alla evolvente lungo una linea di curvatura v, e generano quindi una ~~linea~~ sviluppabile, il cui spigolo di regresso e' la corrispondente curva v sopra la seconda falda S_2.

Ciò premesso dimostriamo il teorema:

Il centro di curvatura geodetica di una linea $r_1 = \text{cost}^e$ sopra S_1 in un punto M_1 e' il punto corrispondente M_2 sulla seconda falda S_2

Per ciò dovremo prima far conoscere una costruzione per il raggio di curvatura geodetica dovuta a Beltrami. Siano:

$$g, g', g'' \ldots$$

un sistema ∞^1 di geodetiche sopra una superficie qualunque, L una linea a tangenti coniugate con esse che le incontri in

$$M, M', M'', \ldots$$

Le tangenti lungo L a $g, g', g'' \ldots$ generano una sviluppabile; se supponiamo che la tangente in M alla g tocchi questo spigolo di regresso Γ in m, avremo:

Il punto m è il centro di curvatura geodetica in M di quella traiettoria ortogonale di g, g', g''... che esce da M.

Prendiamo sulla superficie a linee coordinate v, u le geodetiche g, g', g''... e le loro traiettorie ortogonali e per parametro u l'arco delle geodetiche contato da una traiettoria ortogonale fissa; avremo:

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2$$

e per il raggio ρ_u di curvatura geodetica in grandezza ed in segno (§ 34)

$$\frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}$$

Ora se x, y, z sono le coordinate di M, ξ, η, ζ quelle di m e se poniamo $\overline{Mm} = r$, attribuendogli il segno positivo o negativo secondo che la direzione $\overrightarrow{Mm}$ è nel senso dell'arco u crescente o decrescente, avremo:

$$\xi = x + r\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \eta = y + r\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \zeta = z + r\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Se spostiamo ora il punto M lungo la linea L in M' e indichiamo con δ gli accrescimenti corrispondenti, ne risulterà:

$$\delta\xi = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \delta r\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + r\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}dv\right),$$
$$\delta\eta = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \delta r\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + r\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}dv\right),$$
$$\delta\zeta = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \delta r\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + r\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}dv\right).$$

Ma $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ sono proporzionali ai coseni di direzione della tangente allo spigolo di regresso Γ', cioè a $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$; moltiplicando ordinatamente per $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ e sommando, coll'osservare le formole

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = G, \quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},$$
$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = 0,$$

otterremo

$$G\,\delta v + \frac{r}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\,\delta v = 0,$$

quindi

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u} \qquad c.d.d.$$

La costruzione è così dimostrata, e il teorema B) ne segue subito per le osservazioni premesse. Come conseguenza di questo teorema notiamo poi l'altro:

C) Il raggio di curvatura geodetica delle $r_1 = \text{cost}^{e}$ sopra S_1 o delle $r_2 = \text{cost}^{e}$ sopra S_2 è dato dalla differenza $r_1 - r_2$ dei raggi di curvatura della evolvente.

Capitolo V.

Le Superficie definite dal loro elemento lineare

53. — Superficie flessibili. — Come nella geometria piana e nella sferica si studiano le proprietà delle figure tracciate sul piano o sulla sfera, prescindendo dalla loro posizione assoluta nello spazio, così un analogo studio può farsi per ogni superficie. E quelle proprietà, che concernono soltanto le relazioni di grandezza e posizione delle figure tracciate sulla superficie, in quanto esistono sopra di essa, costituiscono la geometria della superficie.