

Dove e , C sono costanti arbitrarie. Queste equazioni rappresentano appunto un'ellisse di semi-asse maggiore = R o un'iperbole di semi-asse trasverso = R , secondo che $e < 1$ ovvero $e > 1$.

Capitolo X.

Superficie definite da proprietà delle loro linee di curvatura.

105. - Superficie modanate. - Dopo esserci occupati nei tre precedenti Capitoli delle superficie di cui i raggi di curvatura sono legati da una relazione, tratteremo ora brevemente di alcune classi di superficie, le cui linee di curvatura hanno determinate proprietà, e in primo luogo di quelle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura geodetiche.

Ogni linea geodetica che sia anche linea di curvatura è necessariamente piana, poiché le sue normali principali debbono essere le generatrici di una sviluppabile (*).

(*) Solo per una curva piana C accade che le normali principali

il piano della linea s è normale alla superficie.

Viceversa una linea di curvatura tracciata in un piano normale alla superficie è anche geodetica e perciò il problema proposto coincide coll'altro:

Trovare le superficie che hanno un sistema di linee di curvatura tracciate in piani normali alla superficie.

(L'esempio più semplice di tali superficie si ha evidentemente - nelle superficie di rotazione).

Per ogni tale superficie S il piano della linea di curvatura geodetica involveranno una superficie M sviluppabile e le linee di curvatura del secondo sistema saranno caratteristiche ortogonali di quel sistema e di piano. Ora ogni curva Γ che sega ortogonalmente un sistema S di piano è individuata da un suo punto iniziale; se indichiamo quindi una porzione speciale π del piano e in esso la linea di curvatura (della S , questa superficie sarà il luogo delle caratteristiche ortogonali Γ uscenti dai punti di C . Viceversa, tracciata arbitrariamente una curva C sopra π , la superficie S luogo delle curve Γ uscenti dai punti di C appartiene alla classe di superfi.

qual sono le tangenti di un'altra curva C' . È infatti supposto che ciò avvenga sarà C' un'evolvente di C ; ritardando le notazioni del §13, potremo avere

$$\cos \alpha' = \cos \beta, \quad \cos \beta' = \cos \gamma, \quad \cos \gamma' = \cos \delta.$$

Quelle confrontate colle (3?) § utato, danno $\rho = \rho'$ e perciò $\frac{1}{\rho} = 0$.

cie in considerazione, poichè la normale principale di C , essendo normale anche a Γ , è la normale della superficie S . Abbiamo così la completa definizione geometrica della nostra superficie.

Or per passare il piano π dalla posizione attuale alla successiva π' , basta far rotare π intorno alla sua retta d'intersezione con π' , cioè alla generatrice della sviluppabile giacente su π , dell'angolo infinitesimo $\frac{ds}{T}$, essendo ds l'elemento d'arco della spirale di regresso e $\frac{1}{T}$ la torsione; in questa rotazione ogni punto di C descrive un arco infinitesimo di cerchio e si trasporta nel punto corrispondente della linea di curvatura successiva C' . Da ciò segue che le linee C, C', C'', \dots sono identiche di forma e quindi:

Le superficie della classe richiesta vengono generate da un profilo piano invariabile di forma, il cui piano rotola, senza strisciare, sopra una superficie sviluppabile.

Diremo queste superficie: superficie modanate (surfaces moules di Monge) e sviluppabile direttrice quella su cui rotola il piano del profilo.

Le normali di una superficie modanata S toccano la sviluppabile direttrice E ; questo è dunque una delle falde dell'evoluto di S . La seconda falda è evidentemente una nuova superficie modanata, che ha per profilo l'evoluto piano del profilo di S e la medesima sviluppabile direttrice. Viceversa si veda subito che ogni evoluto di una superficie sviluppabile è una superficie

modanata.

Sul piano π che contiene il profilo della superficie modanata e notata sulla sviluppabile direttrice Σ , immaginiamo tracciata una retta R arbitraria, ma fissa. Abbia π notata (senza staccare) sopra Σ , la retta R notata senza staccare sopra una curva G giacente sopra Σ , che sarà una geodetica di Σ , poichè avrà per trasformata piana la retta R . Il piano π tangente a Σ sarà evidentemente il piano della tangente a della binormale della curva G ; possiamo dunque generare ogni superficie modanata nel modo seguente:

Si faccia rotolare senza staccare un piano, contenente un profilo arbitrario, con una sua retta fissa sopra una curva arbitraria G , in modo che il piano si conservi sempre perpendicolare alla normale principale di G ; il luogo descritto dal profilo sarà una superficie modanata.

Partendo da questa seconda costruzione, è facile stabilire le formole relative e da quelle verificare le proprietà che abbiamo dedotte geometricamente. Per ciò riprendo il profilo ad un sistema Ox assi Cartesiani ortogonali nel suo piano Ox cui uno coincide colla retta fissa R ; indi, chiamo con u l'arco del profilo, con $r = r(u)$ la distanza di un suo punto arbitrario M dall'asse R e con $\Lambda = \Lambda(u)$ la distanza del piede della perpendicolare, abbassata da M sopra R , dall'origine degli assi Cartesiani sopra π , per cui si avrà $r^2 + \Lambda^2 = 1$. Sia poi v l'arco della curva G , per la quale riferremo le solite notazioni del Cap. I; se x, y, z , sono le coordinate di un punto mobile

sulla superficie modanata S , avremo subito dalla coltura superiore le formole

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = x - (v + \Lambda) \cos \alpha + r \cos \lambda, \\ y_1 = y - (v + \Lambda) \cos \beta + r \cos \mu, \\ z_1 = z - (v + \Lambda) \cos \gamma + r \cos \nu, \end{cases}$$

Da cui derivando

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= r' \cos \lambda - \Lambda' \cos \alpha, & \frac{\partial x_1}{\partial v} &= \left(\frac{r}{T} - \frac{v + \Lambda}{\rho} \right) \cos \lambda, \\ \frac{\partial y_1}{\partial u} &= r' \cos \mu - \Lambda' \cos \beta, & \frac{\partial y_1}{\partial v} &= \left(\frac{r}{T} - \frac{v + \Lambda}{\rho} \right) \cos \mu, \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} &= r' \cos \nu - \Lambda' \cos \gamma, & \frac{\partial z_1}{\partial v} &= \left(\frac{r}{T} - \frac{v + \Lambda}{\rho} \right) \cos \nu, \end{aligned}$$

quindi per l'elemento lineare ds della superficie

$$(2) \quad ds^2 = du^2 + \left(\frac{r}{T} - \frac{v + \Lambda}{\rho} \right)^2 dv^2,$$

il che dimostra che le linee $v = \text{cost.}$ (profili) sono geodetiche della superficie.

Proviamo poi per i coseni di direzione X, Y, Z della normale

$$\begin{aligned} X &= -r' \cos \alpha - \Lambda' \cos \lambda, \\ Y &= -r' \cos \beta - \Lambda' \cos \mu, \\ Z &= -r' \cos \gamma - \Lambda' \cos \nu; \end{aligned}$$

con queste formole si verifica subito che le linee u, v sono le linee di curvatura della superficie e i raggi principali di curvatura r_1, r_2 si trovano dati dalle formole

$$r_1 = \frac{\frac{v + \Lambda}{\rho} - \frac{r}{T}}{\frac{r'}{\rho} + \frac{\Lambda'}{T}}, \quad r_2 = \frac{\Lambda'}{r''}.$$

106. - Superficie modanate a sviluppabile direttrice

cilindrica. — Se la sviluppabile direttrice è una superficie cilindrica, le linee di curvatura del secondo sistema sono trasciate in piani paralleli al piano della sezione retta del cilindro e sono evolventi di quella sezione. Viceversa ogni superficie che ha un sistema di linee di curvatura u in piani paralleli è una superficie modulata di questo genere. È infatti le immagini sferiche di queste linee saranno cerchi in piani paralleli e quindi le immagini delle linee di curvatura del secondo sistema saranno cerchi massimi della sfera, e ad ogni punto passeranno per il diametro normale ai piani paralleli; ne segue che la tangente ad una linea di curvatura u in un punto M è perpendicolare al piano di quella linea v , che esce da M , e però la normale alla superficie in M giace in questo piano, cioè il piano di ogni linea v è ortogonale alla superficie, la quale è per conseguenza una superficie modulata a direttrice cilindrica.

Se vogliamo applicare le formole del § precedente al caso attuale, basterà porre $\frac{1}{r} = 0$ e la curva prima G sarà allora la sezione retta del cilindro direttrice. L'elemento lineare (2) diverrà:

$$(3) \quad ds^2 = du^2 + \frac{(v+A)^2}{\rho^2} dv^2,$$

Dove in sostanza ρ, p sono due funzioni arbitrarie, la prima di u , la seconda di v .

Con questa formola possiamo immediatamente risolvere la questione: se due superfici modulata di questo genere possono essere applicabili in guisa che le linee di curvatura

Dell'una si distendano sopra quelle dell'altra. Sia infatti S_1 una seconda superficie di questa classe; avremo

$$ds_1^2 = du^2 + \frac{(v_1 + \Lambda_1)^2}{\rho_1^2} dv^2$$

e nelle formole di corrispondenza dei punti potremo porre evidentemente

$$u_1 = u, \quad v_1 = v_1(v),$$

Dopo di che, supposto $ds_1 = ds$, dovremo avere

$$\frac{\rho}{\rho_1} \frac{dv_1}{dv} (v_1 + \Lambda_1) = v + \Lambda;$$

questa, derivata rispetto a u , mostra che $\frac{\rho}{\rho_1} \frac{dv_1}{dv}$ deve essere una costante; poniamo $\frac{1}{k}$. Avremo allora

$$v_1 - kv = k\Lambda - \Lambda_1 = C$$

essendo C una costante, che si può prendere $= 0$, supponendo che v_1 si annulli con v . Ne deduciamo

$$(4) \quad \Lambda_1 = k\Lambda, \quad \rho_1 = k\rho$$

e per conseguenza:

Ogni superficie modanata a direttrice cilindrica si può deformare in ∞ modi, conservando le sue linee di curvatura.

La prima delle (4) ci mostra che il profilo della superficie modanata si deforma, come se fosse il meridiano di una superficie di rotazione (568); nello stesso tempo però bisogna deformare la sezione retta del cilindro direttrice colla legge espressa dalla formola $\rho_1(u) = k\rho\left(\frac{u}{k}\right)$.

Questa deformazione delle superficie modanate fu trovata da Bour. Il Codazzi poi ha dimostrato che

nessun'altra superficie può deformarsi conservando le sue linee di curvatura (*).

107. - Superficie modanate a direttrice conica. - Le superficie modanate, che hanno per sviluppabile direttrice un cono, godono della proprietà che le loro linee di curvatura del secondo sistema sono tracciate sopra sfere col centro nel vertice del cono. È infatti il piano normale di ciascuna di queste curve sono il piano tangente della sviluppabile direttrice, cioè del cono e concorrono quindi nel suo vertice. Quindi si conclude appunto che la curva è descritta sopra una sfera col centro in questo vertice (**).

Viceversa possiamo dimostrare il teorema:

Ogni superficie, che ha un sistema di linee di curvatura descritte sopra sfere concentriche, è una superficie modanata, la cui sviluppabile direttrice è un cono col vertice nel centro comune delle sfere (**).

(*) Annali di Tortolini - T. VII, 1856.

(**). Cf. §14. - La dimostrazione analitica si ottiene subito osservando che, presa l'origine delle coordinate nel vertice del cono, la curva godrà della proprietà espresso dall'equazione

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} + z \frac{dz}{ds} = 0,$$

Da cui

$$x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 \alpha$$

(***). Il problema di trovare delle superficie che siano doppie portanti illuminate in eguale intensità da una sorgente luminosa, supposta concentrata in un punto O dello spazio, in

E infatti siano le linee di curvatura $u = \text{cost}^2$ tracciate sopra sfera col centro in un punto comune P dello spazio; consideriamo una linea di curvatura $v = \text{cost}^2$ e in ciascun suo punto il piano π condotto per la sua tangente e per la normale alla superficie. I piani π essendo normali alle linee $u = \text{cost}^2$ passano pel centro P delle sfere e per conseguenza o si sviluppano in cono col vertice in P o si riducono ad un piano unico che passa per P . Nel primo caso le normali alla superficie lungo ogni linea $v = \text{cost}^2$ concorrerebbero in P (*) e la superficie sarebbe una sfera col centro in P . Escludendo questo caso ovvio D per sé, resta dunque il secondo; allora ogni linea $v = \text{cost}^2$ giace in un piano π normale alla superficie, la quale è per conseguenza modanata c. d. d.

Il primo a considerare questa classe speciale di superficie modanate s'è stato Picart. Quando il punto P s'allontana a distanza infinita esse diventano evidentemente le superficie modanate del § prec^{te}.

108. - Superficie che hanno tutte le linee di curva. linee piane. - Le superficie per le quali ambedue i sistemi delle linee di curvatura costano di linee piane,

sono appunto le superficie di questa classe, per le quali O s'è il vettore del caso direttore.

(G. Enneper - Untersuchungen über die Flächen mit platten und sphärischen Krümmungslinien - Zweite Abhandlung, p.^a 114).

(*) Per le proprietà delle linee di curvatura queste normali sono infatti le generatrici del cono.

sano state studiate da molti geometri e se ud conoscono le equazioni in termini limiti, contengono due funzioni arbitrarie.

Il modo più semplice per trovare queste superficie si ottiene partendo dalla loro rappresentazione sferica. E' chiaro che le immagini sferiche delle loro linee di curvatura saranno cerchi e costituiranno perciò quel doppio sistema ortogonale isotermo di cerchi definito al § 37 e che si ottiene segnando la sfera per mezzo di due fasci di piani, aventi per assi due rette r, r' polari reciproche rispetto alla sfera. Ne segue:

In ogni superficie di questa classe i piani delle linee di curvatura di un sistema sono paralleli ad una retta fissa r e quelli del secondo sistema ad un'altra retta r' perpendicolare ad r .

L'elemento lineare sferico riferito ad un tale sistema di cerchi si ottiene con facilità, dopo di che si determinano con sole quadrature le coordinate x, y, z di un punto mobile sulla superficie. Non andrò oltre a questo proposito in maggiori particolari e solo osserverò che fra le superficie di questa classe, il doppio sistema di cerchi sulla sfera essendo isotermo, vi sono delle superficie ad area minima (Cf. § 28, a). E' notevole poi che una estesa superficie ad area minima per le quali un solo sistema di linee di curvatura costiti di linee piane. E' infatti se ve ne ha una, le immagini sferiche di quelle linee saranno cerchi ed i loro traiettorie ortogonali dovendo formare con esse un sistema isotermo (§ 28), saranno necessariamente

cicoli (§36).

109. - Superficie a curvatura costante con un sistema di linee di curvatura piane. - Tutte le dette sottotanti di superficie a curvatura costante, studiate per la prima volta da ¹⁶ Bonnet, che hanno un sistema di linee di curvatura piane. Ricerchiamo le superficie pseudosferiche di questa classe e poniamo per semplicità $\rho = 1$ il loro raggio. L'elemento lineare di una tale superficie, riferito alle sue linee di curvatura, assumerà la forma (§78):

$$ds^2 = \cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2$$

e quello della sfera rappresentativa l'altra:

$$ds^2 = \sin^2 \theta du^2 + \cos^2 \theta dv^2,$$

dove θ soddisfa all'equazione a derivate parziali

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \tan \theta \cos \theta.$$

La condizione necessaria e sufficiente perché le linee $v = \text{cost.}$ sulla superficie siano piane, è che le loro immagini sferiche siano cerchi, cioè la curvatura geodetica $\frac{1}{R_v}$ delle linee $v = \text{cost.}$ sia funzione della sola v ; ma $\frac{1}{R_v} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\partial \log \frac{1}{2} \theta}{\partial v}$, dunque dovrai θ soddisfare all'altra equazione

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \log \frac{1}{2} \theta}{\partial u \partial v} = 0.$$

Ogni soluzione comune alle due equazioni a derivate parziali (5), (6) conduce ad una superficie della classe richiesta. Per ottenere queste soluzioni comuni basta osservare che la (6) integrata dà

$$\frac{1}{2} \theta = U \cdot V,$$

dove U, V sono due funzioni arbitrarie. L'una di u , l'altra di v .

Sostituendo nella (5), si può facilmente trovare quali forme debbono avere queste sezioni per cui l'equazione sia soddisfacibile. Noi lasceremo questo calcolo e solo diremo che le coordinate di queste superficie si ottengono espresse in termini finiti per funzioni ellittiche. Appartengono a questa classe di superficie quelle che si ottengono alla trasformazione complementare dalle superficie pseudosferiche di rotazione. Per le superficie a curvatura costante positiva si ottengono risultati perfettamente analoghi, partendo dalla forma

$$ds^2 = \operatorname{coth}^2 u \, du^2 + \operatorname{sech}^2 u \, dv^2$$

dell'elemento lineare.

Ma anche senza trovare in termini finiti le equazioni di queste superficie, possiamo stabilire una loro interessante proprietà. Calcolando la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_n}$ delle linee di curvatura non piane, abbiamo

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{\operatorname{sech} u} \frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{\partial \log \frac{1}{2} \theta}{\partial u},$$

quindi per la (6)

$$\frac{1}{\rho_n} = \Gamma(u).$$

Lo stesso può dirsi per le superficie a curvatura costante negativa, quindi

In ogni superficie a curvatura costante con un sistema di linee di curvatura piane, le linee di curvatura dell'altro sistema sono a curvatura geodetica costante, cioè sono circoli geodetici.

Ora subisce il seguente teorema, dovuto a Brioschi:
Se una linea L di curvatura di una superficie ha costante la curvatura geodetica, essa è tracciata sopra

una sfera che tangia ad angolo retto la superficie.

Per dimostrarlo osserviamo che le tangenti alle linee di curvatura fissa del sistema cui L non appartiene, lungo i punti di L , sono le generatrici di una sviluppabile (§41) e la proiezione di generatrice condotta fra il punto M di contatto colla superficie e il punto m ortogonale lo spirale di regresso, è il raggio di curvatura geodetica della linea L in M , perchè la linea L , essendo linea di curvatura, è a tangenti coniugate colle sue geodetiche ortogonali (Cf. la costruzione di Beltrami al §52). Per ipotesi essendo questo raggio costante, la sviluppabile potrà ridursi ad un cono col vertice nel centro di curvatura geodetica; quindi la sfera descritta con questo centro e con questo raggio conterrà la linea L e tangerà ortogonalmente la superficie. c. d. d.

Ritornando ora alle nostre superficie a curvatura costante, consideriamo la linea R luogo dei centri delle sfere che contengono le linee $u = \text{cost.}^2$ (*). Le tangenti ad ogni linea di curvatura piana $v = \text{cost.}^2$ debbono incontrarsi in un punto la R , la quale è per conseguenza una retta. Abbiamo quindi il teorema di Bonnet:

Per ogni superficie a curvatura costante con un sistema di linee di curvatura piane, i piani di queste linee passano per una retta fissa e le linee di curvatura del

(*) Essa non può ridursi ad un punto a meno che la superficie stessa non sia una sfera.

secondo sistema sono tracciate sopra sfere che hanno i centri su questa retta e tagliano ortogonalmente la superficie.

Le elicioidi pseudosferiche del Dupin (§ 11, 8) sono appunto superficie di questa specie.

110. - Superficie con un sistema di linee di curvatura circolari. - Supponiamo che una superficie S abbia per linee di curvatura un sistema di cerchi. Il piano di uno qualunque C di questi cerchi taglierà la superficie S sotto angolo costante (§ 40) e le normali ad S lungo C genereranno un cono circolare retto; la sfera il cui centro è il vertice del cono e che passa per il cerchio C toccherà lungo C detta la superficie. Avremo così, corrispondentemente agli ∞ cerchi di curvatura, un sistema ∞^1 di sfere, di cui la superficie S sarà la superficie involuppo. Viceversa di fatto subito che la superficie involuppo di una sfera mobile, il cui centro percorre una curva arbitraria e il cui raggio varia con legge continua arbitraria, ha un sistema di linee di curvatura circolari.

Se il raggio della sfera è costante, l'involuppo è una superficie canale (§ 49). Quando però si ponga per sola condizione che sia costante il raggio del cerchio di curvatura troviamo, oltre le superficie canali, un'altra classe di superficie che vi soddisfa. È infatti sia C la curva luogo dei centri delle sfere involupate, per la quale noteremo le solite notazioni (Cap. I) e sia $R=f(s)$ il raggio variabile della sfera, se X, Y, Z sono le coordinate cor-

enti di un punto dello spazio, l'equazione della sfera mobile sarà

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 = R^2$$

e per ottenere sopra di essa la linea caratteristica (circolo), converrà differenziare rispetto ad s , il che dà:

$$(X-x)\cos\alpha + (Y-y)\cos\beta + (Z-z)\cos\gamma = -R \frac{dR}{ds}$$

Il raggio r di questo circolo sarà dunque dato da

$$r = \sqrt{R^2 - R^2 \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}$$

e, se vogliamo che sia una costante k , bisognerà determinare R dall'equazione differenziale

$$R^2 - R^2 R'^2 = k^2$$

La soluzione singolare $R = k$ conduce alle superficie canal, mentre l'integrale generale

$$R = \sqrt{k^2 + (s+c)^2}$$

fornisce le nuove superficie in questione. Per caratterizzare geometricamente queste ultime superficie, osserviamo che le coordinate x, y, z del centro del circolo sono date da

$$x = x - RR'\cos\alpha, \quad y = y - RR'\cos\beta, \quad z = z - RR'\cos\gamma,$$

quindi, essendo nel nostro caso $RR' = s+c$, la curva C , luogo dei centri dei circoli è un'evolvente della curva C luogo dei centri delle sfere inscritte, e viceversa ciò accade soltanto per $RR' = s+c$.

Abbiamo dunque generare le nostre superficie nel modo seguente:

Sopra una curva arbitraria C avvolgiamo un filo e svolgiamolo dalla curva in modo che la sua estremità libera M descriva un'evolvente di C ; se la porzione rettilinea

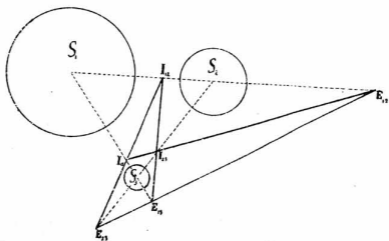
del filo porta nell'estremità libera M un circolo col centro in M e tracciato nel piano normale al filo in M , il luogo di questo circolo sarà una superficie della classe richiesta.

111. - *Ciclode di Dupin.* - Esiste una superficie, studiata per la prima volta da Dupin, le cui linee di curvatura sono tutte circolari. Per trovare la generazione geometrica di questa superficie (ciclode di Dupin), osserviamo che suppone l'esistenza, ed è patibile in due modi differenti: considerarsi come involuppo di sfere (§110); le sfere S del 1° sistema toccheranno la ciclode Σ lungo i cerchi C di curvatura C del 1° sistema e le sfere S' dell'altro lungo i cerchi C' del secondo sistema. Ciascuna sfera S' del secondo sistema toccherà tutte le sfere S del primo e in particolare tre sfere fisse di questo sistema, che indicheremo con S_1, S_2, S_3 . Siccome le sfere tangenti a 3 sfere fisse costituiscono una semplice infinità, potremo definire la nostra superficie come involuppo di una sfera mobile S' assoggettata a toccare tre sfere fisse S_1, S_2, S_3 .

Dimostriamo inversamente che: Essendo date ad arbitrio tre sfere fisse S_1, S_2, S_3 , l'involuppo della sfera mobile S' tangente ad S_1, S_2, S_3 è una ciclode di Dupin, cioè ha tutte le linee di curvatura circolari.

Se i centri delle tre sfere S_1, S_2, S_3 sono in linea retta (o se due coincidono), la superficie generata è l'involuppo di una sfera S' che ruota attorno alla congiungente i centri; in tal caso la superficie Σ è un toro, (ciclode di rotazione).

In generale i tre centri delle sfere S_1, S_2, S_3 determineranno un piano sul quale sono situati i sei centri di similitudine delle tre sfere; questi sei punti sono i sei vertici del quadrilatero completo formato dai quattro assi di similitudine delle sfere. È noto dalla geometria che se una sfera S' tocca le tre sfere S_1, S_2, S_3 , il piano dei tre punti di contatto passa necessariamente per uno dei quattro assi di similitudine. Le sfere tangenti a S_1, S_2, S_3 si dividono corrispondentemente in quattro sistemi distinti ciascuno dei quali dà luogo ad una superficie involuppo, che ora dimostreremo essere una iclude.



Consideriamo una sfera mobile S' che tocchi in P_1, P_2, P_3 le tre sfere S_1, S_2, S_3 , e il piano $P_1P_2P_3$ passi collattamente per uno dei quattro assi di similitudine, che diremo α . La superficie involuppo Σ sarà toccata da S' lungo un arco che passerà per P_1, P_2, P_3 e sarà quindi l'intersezione del piano $P_1P_2P_3$ colla sfera S' . Ne segue intanto che Σ

linee di curvatura di un sistema sulla superficie Σ sono
 cerchi C situati in piani, che passano tutti per la retta
 r . Sia ora Γ una linea di curvatura del secondo sistema:
 le tangenti lungo Γ ad cerchi C formano una sviluppabile,
 di cui la curva Γ è una traiettoria ortogonale delle generatrici
 (Cap. IV, §41); ma queste tangenti si approssimano evidentemente
 alla retta r e la sviluppabile considerata, non potendo essere
 un piano passante per la retta r , sarà necessariamente un
 cono col vertice V sopra r . La linea Γ è per conseguenza
 tracciata sopra una sfera (col centro in V) (*). D'altra
 parte se facciamo la rappresentazione sferica di Janet del
 la superficie Σ sopra una delle tre sfere, p. e. S ,
 vediamo che le immagini dei cerchi C sono i cerchi di S ,
 giacenti nei piani dei cerchi C . Quindi le immagini delle
 linee Γ sono i cerchi d'intersezione della sfera S , coi
 piani del fascio che ha per asse la retta r e polo reciproco
 di r rispetto a S . (Cf. §31). Le linee Γ sono dunque piri-
 ne; per quanto sopra si è visto, stando altri due sfere,
 saranno cerchi c. d. d.

La cilindrata di Dupin è una superficie algebrica del
 quarto ordine. Per questa superficie le due folde dell'or-
 bite si riducono a due linee che sono il luogo dei centri
 delle sfere S , e il luogo dei centri delle S' . È possibile
 vedere che queste linee sono rispettivamente un'ellisse ed

(*) Se il punto V fosse all'infinito si direi subito che la linea
 Γ è un cerchio in un piano normale alla retta r .

un' iperbole situate in piani perpendicolari e tali che i vertici ed i fuochi dell'una sono rispettivamente i fuochi ed i vertici dell'altra (*).

(*) V. Dupin - Applications De Geometrie - Paris 1822.

Capitolo XI.

Superficie rigate.

112. - Formole fondamentali. - Una retta che si muova con continuita' nello spazio descrive una superficie rigata; le singole posizioni della retta dicansi generatrici della superficie.

Immaginiamo tracciata sulla superficie rigata una linea qualunque L , che riguarderemo come direttrice e per la quale supponremo soltanto che non coincida con una delle generatrici. Per conoscere interamente la superficie bastera' conoscere la curva direttrice L e in ogni suo punto la direzione della generatrice che vi passa.

Sia v l'arco della direttrice L contato da un punto fisso, siano p, q, r le coordinate correnti di un punto mobile sopra L espresse in funzione di v , mentre l, m, n stanno ad indicare i coseni di direzione della generatrice che passa pel punto (p, q, r) di L e sono pure determinate funzioni di v .

Indichiamo poi con u la lunghezza di generatrice, contata dal punto (p, q, r) che segna la direttrice, positivamente nel senso (l, m, n) e negativamente nell'opposto; le coordinate correnti x, y, z di un punto qualunque sulla superficie si esprimeranno in funzione dei parametri u, v col le formole:

$$(1) \quad x = p + lu, \quad y = q + mu, \quad z = r + nu.$$

Calcoliamo l'elemento lineare della superficie in coordinate curvilinee u, v ; indicando perciò con apici le derivate rispetto a v , poniamo

$$(2) \quad \begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 = M^2, \\ lp' + mq' + nr' = N, \\ lp'' + mq'' + nr'' = \cos \theta, \end{cases}$$

Dove M, N, θ saranno funzioni di v , l'ultima delle quali sta evidentemente a rappresentare l'angolo che la direttrice forma con la generatrice. A queste formole dovranno aggiungersi le altre.

$$(2') \quad \begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 = 1, \\ p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1. \end{cases}$$

Per l'elemento lineare della superficie avremo subito:

$$(3) \quad ds^2 = du^2 + 2 \cos \theta du dv + \{M^2 u^2 + 2Nu + 1\} dv^2.$$

Consideriamo una generatrice v e la generatrice infinitamente vicina $v + dv$; sia $d\theta$ l'angolo infinitesimo compreso fra le due generatrici, ds la lunghezza infinitesima della loro minima distanza. Poiché l, m, n sono i coseni di direzione della prima generatrice, e $l + l'dv, m + m'dv, n + n'dv$ quelli della seconda, è chiaro che mentre le formole (1) per $v = \text{cost.}$ ci danno le coordinate dei punti situati sopra la

prima generatrice, le altre

$$x = p + p'dv + (l + l'dv)u,$$

$$y = q + q'dv + (m + m'dv)u,$$

$$z = r + r'dv + (n + n'dv)u,$$

ci diamo quelle due punti situati sulla seconda. Per nota formale di geometria analitica (*) avremo quindi:

$$\sin^2(d\varphi) = \left\{ \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}^2 \right\} dv^2,$$

cioè

$$(4) \quad d\varphi = M dv.$$

(*) Le formole qui utilizzate possono ottenersi nel modo seguente. Cessando $p, q, r; p', q', r'; l, m, n; l', m', n'$ altrettante costanti, consideriamo le due rette definite rispettivamente dalle equazioni

$$x = p + lu, \quad y = q + mu, \quad z = r + nu,$$

$$x = p_1 + l_1u_1, \quad y = q_1 + m_1u_1, \quad z = r_1 + n_1u_1,$$

dove u, u_1 sono due parametri variabili che ne individuano rispettivamente i punti. Indichiamo con Σ la lunghezza della loro minima distanza, con $cosa, cosb, cosc$ i suoi coseni di direzione, con U, U_1 i rispettivi valori dei parametri u, u_1 ad piedi di quella minima distanza. Avendosi:

$$lcosa + mcosb + ncosc = 0,$$

$$l_1cosb + m_1cosc + n_1cosa = 0,$$

risulterà:

$$cosa = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad cosb = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad cosc = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

dove

Abbiamo inoltre:

$$ds = \frac{\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}}{M} dv;$$

ma

$$\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = \frac{M}{\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & N \\ \cos\theta & 1 & 0 \\ N & 0 & M^2 \end{vmatrix}} = M^2 \sin^2\theta - N^2,$$

$$A = \begin{vmatrix} m & n \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} n & l \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} l & m \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}.$$

Dalle formole

$$lU - l_1 U_1 \pm \cos\alpha \cdot \Sigma = p - p_1,$$

$$mU - m_1 U_1 \pm \cos\beta \cdot \Sigma = q - q_1,$$

$$nU - n_1 U_1 \pm \cos\gamma \cdot \Sigma = r - r_1,$$

osservando che si ha

$$\begin{vmatrix} l & l_1 & \cos\alpha \\ m & m_1 & \cos\beta \\ n & n_1 & \cos\gamma \end{vmatrix} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

si trae

$$U = \frac{\begin{vmatrix} A & l_1 & p - p_1 \\ B & m_1 & q - q_1 \\ C & n_1 & r - r_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\begin{vmatrix} l & l_1 & p - p_1 \\ m & m_1 & q - q_1 \\ n & n_1 & r - r_1 \end{vmatrix} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

che sono le formole richieste.

Quindi

$$(5) \quad ds = \frac{\sqrt{M^2 \sin^2 \theta - N^2}}{M} dv,$$

Infine se U denota il valore del parametro u al piede di quella minima distanza sopra la generatrice v , si avrà:

$$U = \frac{\begin{vmatrix} p' & l+l'dv & A \\ q' & m+m'dv & B \\ r' & n+n'dv & C \end{vmatrix}}{A'+B'+C'} dv,$$

Dove

$$A = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} dv, \quad B = \begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix} dv, \quad C = \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} dv,$$

quindi

$$A^2 + B^2 + C^2 = M^2 dv^2.$$

Per segue

$$U = \frac{1}{M^2} \begin{vmatrix} p' & l+l'dv & \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} \\ q' & m+m'dv & \begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix} \\ r' & n+n'dv & \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} \end{vmatrix},$$

ovvero, trascurando nella seconda forma i termini infinitesimi,

$$(6) \quad U = -\frac{N}{M^2}.$$

113. - Cono direttore. - Linea di stringimento. - Le rette condotte per un medesimo punto dello spazio parallele tangenti alle successive generatrici di una superficie rigata formano un cono che si dice cono direttore della superficie rigata. Prendiamo il vertice di questo cono nell'origine delle coordinate e, taghiamo il cono con una sfera di raggio $= 1$, avente il centro nel vertice del cono, otterremo una curva che diamo l'indicatrice sferica delle generatrici. Le coordinate di un punto mobile su questa generatrice.

saranno l, m, n e l'arco elementare dell'indicatrice sarà manifestamente $d\sigma = M dv$.

Il piede della minima distanza della generatrice v dalla successiva $v + dv$, vicesi il punto centrale della generatrice v stessa. Il luogo di questi punti centrali costituisce una linea importantissima per lo studio delle superficie rigate; essa prende il nome di linea di stringimento. Per la (6) la sua equazione in coordinate curvilinee u, v sarà:

$$(7) \quad M'u + N = 0.$$

Ne segue: La condizione necessaria e sufficiente, perché la direttrice $u = 0$ sia la linea di stringimento è che si abbia $N = 0$.

La linea di stringimento è sempre unica e determinata, eccetto il caso che si abbia simultaneamente $M = 0, N = 0$. Allora per la 1^a delle (7), la superficie rigata è cilindrica. Questa linea non può evidentemente ridursi ad un punto che nel caso delle superficie coniche.

Se per mezzo della (3) e delle formole al Cap. V, § 38 calcoliamo la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_0}$ della direttrice $u = 0$, troviamo:

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{N}{\text{sen} \theta} + \frac{\partial \theta}{\partial v};$$

questa è direttrice che quando due delle tre quantità

$$\frac{1}{\rho_0}, \quad N, \quad \frac{\partial \theta}{\partial v}$$

sono zero, è zero anche la terza. Interpretato geometricamente, questo risultato conduce al teorema di Bonnet:

Se ad una linea tracciata sopra una superficie rigata appartengono due delle tre seguenti proprietà: 1^a di es.

1^a di essere geodetica, 2^a di essere la linea di stringimento, 3^a di tagliare le generatrici sotto angolo costante, ad essa appartiene anche la terza.

È chiaro che le superficie rigate, sulle quali esiste una tale linea, saranno il luogo di una retta che si appoggia ad una curva (linea di stringimento) normalmente alla normale principale e formando un angolo costante colla curva. In particolare soltanto per le superficie rigate luogo delle bicurvature ad una curva occorra che la linea di stringimento sia una traiettoria ortogonale delle generatrici.

In fine osserviamo che assumendo per direttrice una traiettoria ortogonale delle generatrici, sarà $\theta = \frac{\pi}{2}$, quindi

$$ds^2 = du^2 + (Mu^2 + 2Nu + 1) dv^2.$$

Per la curvatura geodetica delle $u = \text{cost.}$, avremo

$$\frac{1}{\rho_g} = - \frac{Mu + N}{\sqrt{Mu^2 + 2Nu + 1}};$$

ne segue:

La linea di stringimento può definirsi come il luogo dei punti della superficie rigata, nei quali è nulla la curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali delle generatrici.

114. - Formola di Charles. - L'equazione del piano tangente in un punto (u, v) della superficie rigata, sarà:

$$\begin{vmatrix} x-p-lu & y-q-mu & z-r-mu \\ l & m & n \\ p+l'u & q+m'u & r+n'u \end{vmatrix} = 0$$

Questa è soddisfatta quando per x, y, z si sostituisca:

$p+lt, q+mt, r+nt,$
 v avendo il medesimo valore e t indicando un parametro variabile. Il piano tangente in un punto (u, v) contiene adunque tutta la generatrice che passa per quel punto, come è chiaro geometricamente.

Per i coseni di direzione della normale abbiamo:

$$X:Y:Z = \begin{vmatrix} m & n \\ q+m'u & r+n'u \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} n & l \\ r+n'u & p+l'u \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} l & m \\ p+l'u & q+m'u \end{vmatrix}$$

Da cui:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} m & n \\ q+m'u & r+n'u \end{vmatrix}}{\sqrt{M^2 u^2 + 2Nu + \text{sen}^2 \theta}}, \quad Y = \frac{\begin{vmatrix} n & l \\ r+n'u & p+l'u \end{vmatrix}}{\sqrt{M^2 u^2 + 2Nu + \text{sen}^2 \theta}},$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} l & m \\ p+l'u & q+m'u \end{vmatrix}}{\sqrt{M^2 u^2 + 2Nu + \text{sen}^2 \theta}}$$

I coseni X_0, Y_0, Z_0 di direzione della normale al punto centrale $u = -\frac{N}{M^2}$, saranno quindi:

$$X_0 = \frac{M}{\sqrt{M^2 \text{sen}^2 \theta - N^2}} \begin{vmatrix} m & n \\ q - \frac{mN}{M^2} & r - \frac{nN}{M^2} \end{vmatrix}, \quad Y_0 = \frac{M}{\sqrt{M^2 \text{sen}^2 \theta - N^2}} \begin{vmatrix} n & l \\ r - \frac{nN}{M^2} & p - \frac{lN}{M^2} \end{vmatrix}$$

$$Z_0 = \frac{M}{\sqrt{M^2 \text{sen}^2 \theta - N^2}} \begin{vmatrix} l & m \\ p - \frac{lN}{M^2} & q - \frac{mN}{M^2} \end{vmatrix}$$

Si segue che se con I si indica l'angolo che il piano tangente nel punto (u, v) forma col piano tangente nel punto centrale $(-\frac{N}{M^2}, v)$, si avrà:

$$\cos I = XX_0 + YY_0 + ZZ_0 = \frac{M \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 - \frac{N^2}{M^2} \end{vmatrix}}{\sqrt{M^2 \text{sen}^2 \theta - N^2} \cdot \sqrt{M^2 u^2 + 2Nu + \text{sen}^2 \theta}},$$

cioè:

$$\cos I = \frac{\sqrt{M^2 \sin^2 \theta - N^2}}{M \sqrt{M^2 u^2 + 2Nu + \sin^2 \theta}}$$

Supponiamo ora, per semplicità, che la direttrice sia una tra
settorie ortogonale delle generatrici; avremo allora

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad ds^2 = du^2 + \left(u^2 + \frac{2N}{M}u + \frac{1}{M^2}\right) M^2 dv^2.$$

Se per parametro delle generatrici, in luogo di v , prendiamo
l'arco φ dell'indicatrice sferica delle generatrici, cioè
 $\varphi = \int M dv$ (Cf. § 113), si poniamo:

$$-\frac{N}{M} = \alpha, \quad \frac{\sqrt{M^2 - N^2}}{M} = \beta,$$

saranno α, β determinate funzioni scelti di $\varphi^{(*)}$, e l'elemen-
to lineare prenderà la forma notevole:

$$(8) \quad ds^2 = du^2 + \{(u-\alpha)^2 + \beta^2\} dv^2.$$

Di qua si vede che se β fosse zero, la superficie sarebbe
sviluppabile. La formola sopra trovata per $\cos I$, diventa:

$$\cos I = \frac{\beta}{\sqrt{(u-\alpha)^2 + \beta^2}}$$

ossia

$$(9) \quad \operatorname{tg} I = \frac{u-\alpha}{\beta}.$$

È questa la formola di Chasles, dalla quale possiamo tra-
bito trarre alcune conseguenze notevoli. Per la generatrice
 v conduciamo un piano qualunque che faccia col piano tan-
gente nel punto centrale l'angolo τ . Per la (9) questo pia-
no sarà tangente alla superficie nel punto $P \equiv (u, v)$ del-
la generatrice v determinato dalla formola

$$u - \alpha = \beta \operatorname{tg} \tau.$$

(*) Si osserva che $M^2 - N^2$ è una quantità positiva perché
somma di 3 quadrati (§ 112).

Similmente esso sarà normale alla superficie nel punto $P_2 \equiv (u, v)$ della medesima generatrice, ove

$$u - a = -\beta \cot \alpha.$$

Ogni piano per una generatrice v , determina dunque sopra di essa una coppia di punti P_1, P_2 ; in uno di essi tocca la superficie, nell'altro le è normale. Rotando il piano attorno alla generatrice, la coppia dei punti P_1, P_2 genera un' involuzione il cui centro è il punto centrale $u = a$.

Potiamo poi che dallo (8) segue per il valore K della curvatura assoluta della superficie

$$K = -\frac{\beta^2}{\{(u-a)^2 + \beta^2\}^2};$$

essa è dunque essenzialmente negativa come è evidente dal fatto che la superficie ammette delle asintotiche reali (generatrici). Lungo ogni generatrice, per la quale non sia $\beta = 0$, il massimo del valore assoluto della curvatura K ha luogo al punto centrale, e allontanandosi da questo punto il valore assoluto di K decresce tendendo a zero per u infinitamente crescente.

115. - Asintotiche. - È chiaro che per le superficie rigate le generatrici formano un sistema di asintotiche. Esiste quindi un secondo sistema reale di asintotiche, la cui equazione differenziale si tratta di stabilire. Conservando le notazioni del § 112, supponiamo la direttrice trasversale ortogonale delle generatrici e nella formola

$$ds^2 = du^2 + (M^2 u^2 + 2Nu + 1) dv^2$$

cangiamo, per comodità dei calcoli seguenti, il parametro

v in guisa da ridurlo alla forma

$$(11) \quad ds^2 = du^2 + (Au^2 + 2Bu + C) dv^2$$

Dove A, B, C sono nuove funzioni di v legate dalla relazione

$$(12) \quad AC - B^2 = 1.$$

Avremo allora

$$(a) \quad \begin{cases} x = p + lu, & y = q + mu, & z = r + nu \\ \Sigma p'^2 = C, & \Sigma p'l' = B, & \Sigma l'^2 = A \\ \Sigma l'^2 = 1, & \Sigma l'p = 0, & \Sigma ll' = 0; \end{cases}$$

Da queste otteniamo per derivazione le altre:

$$(b) \quad \begin{cases} \Sigma p'p'' = \frac{1}{2}C', & \Sigma (p'l'' + p''l') = B', & \Sigma l'l'' = \frac{1}{2}A', \\ \Sigma lp'' = -B, & \Sigma ll'' = -A. \end{cases}$$

Ponendo per brevit :

$$(12') \quad g = \sqrt{Au^2 + 2Bu + C}$$

troveremo subito

$$(13) \quad K = -\frac{1}{g^3},$$

e servando le notazioni del C. IV § 39, avremo:

$$D = 0,$$

$$D' = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} l' & m' & n' \\ l & m & n \\ p+l'u & q+m'u & r+n'u \end{vmatrix}, \quad D'' = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} p+l'u & q+m'u & r+n'u \\ l & m & n \\ p+l'u & q+m'u & r+n'u \end{vmatrix},$$

L'equazione differenziale delle asintotiche diverr 

$$dv (2D'du + D''dv) = 0,$$

il che mostra che un sistema di asintotiche   formato dalle generatrici $v = \text{cost.}$ Le altre sono determinate dalla equazione differenziale

$$2D'^2 du + D'D'' dv = 0.$$

Ora in generale $DD'' - D'^2 = (EG - F^2)K$; nel nostro caso adunque

scia $D^2 = \frac{1}{g^2}$, e la precedente diverrà:

$$2 \frac{du}{dv} = \begin{vmatrix} l & m & n \\ p'+l'u & q'+m'u & r'+n'u \\ p''+l''u & q''+m''u & r''+n''u \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \quad (*)$$

ossia per le $(\alpha), (\beta)$

$$2 \frac{du}{dv} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Au+B & Bu+C \\ -(Au+B) & \frac{1}{2}Au + \sum p''l' & u \sum p'l'' + \frac{1}{2}C' \end{vmatrix}$$

Sviluppando coll'osservare la seconda delle (β) , otteniamo
 $\frac{1}{2} \frac{du}{dv} = 2g^2 \sum p'l'' - \{A'Bu^2 + (A'C - AC' + 2BB')u + 2B'C - BC'\}$;
 ma dalle formole:

$$AC - B^2 = 1,$$

$$AC' + A'C = 2BB',$$

segue l'identità:

$$A'Bu^2 + (A'C - AC' + 2BB')u + 2B'C - BC' = \frac{A'B}{A}g^2 + 2 \frac{Au+B'}{A},$$

(*) Osservazione. - Questa equazione sviluppata ha evidentemente la forma

$$\frac{du}{dv} + Vu^2 + V_1u + V_2 = 0$$

dove V, V_1, V_2 sono funzioni della sola v . Se ne è nota una soluzione particolare $u = U$, basta porre $u = U + \frac{1}{u}$ e si riduce ad una equazione lineare del 1° ordine per la nuova funzione incognita $\frac{1}{u}$.

Ne segue:

Se sopra una superficie rigata si conosce una delle asintotiche del secondo sistema, le altre si ottengono con quadrature.

per cui ponendo

$$(14) \quad \varphi(v) = \frac{1}{2} \left(\Sigma p' l'' - \frac{A'B}{2A} \right),$$

potremo scrivere l'equazione differenziale delle asintotiche sotto la forma

$$(15) \quad \frac{1}{g^2} \frac{du}{dv} = \varphi(v) - \frac{A'u + B'}{2Ag^2}.$$

Indicando con ω l'angolo che le asintotiche del secondo sistema formano colle generatrici $v = \text{cost.}$, e ponendo:

$$\mu = \cot \omega = \frac{1}{g} \frac{du}{dv},$$

avremo

$$(16) \quad \frac{d\mu}{dv} = \varphi(v) - \frac{A'u + B'}{2Ag^2},$$

formola di cui deduciamo per il n.º (§ 119) un'importante applicazione.

116. - Flessione delle superficie rigate. - Riguardando ora le superficie rigate come flessibili ed inestensibili, scappiamoci di quello classe partecolare di deformazioni, in cui le generatrici si mantengono rettilinee. Più tardi dimostreremo (§ 119) che, fatta eccezione dalle superficie rigate di secondo ordine e dalle loro deformate, le due superficie rigate (non sviluppabili) sono applicabili l'una sull'altra, dovranno necessariamente le generatrici dell'una distendersi sulle generatrici dell'altra. Lo studio che ora faremo include quindi tutta la teoria dell'applicabilità di una superficie rigata sopra un'altra superficie rigata.

Ritornando le notazioni del § 112, supponiamo che la superficie rigata S si deformi, mantenendo rettilinee le sue

generatrici, e indichiamo con $p, q, r, i; l, m, n, \dots$ le quantità relative alla superficie deformata S_1 , omologhe alle $p, q, r; l, m, n, \dots$ per la superficie primitiva S , intendendo di assumere per direttrice sopra S_1 la curva trasformata della direttrice di S .

Durante la deformazione, rimanendo invariati gli angoli, avremo per l'elemento lineare della S_1 ,

$$ds_1^2 = du^2 + 2 \cos \theta du dv + (M^2 u^2 + 2N u + 1) dv^2;$$

per l'applicabilità della S_1 sopra la S nel modo richiesto, sarà necessario e sufficiente che si abbia

$$M_1^2 = M^2, \quad N_1 = N.$$

In altre parole, le sei funzioni incognite di v : $p, q, r, i; l, m, n$ dovranno soddisfare le cinque equazioni:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} l^2 + m^2 + n^2 = 1, \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = M^2, \end{array} \right.$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} p^2 + q^2 + r^2 = 1, \\ l p_1 + m q_1 + n r_1 = \cos \theta, \\ l_1 p_1 + m_1 q_1 + n_1 r_1 = N. \end{array} \right.$$

Viceversa, ogni sistema di sei funzioni che soddisfano a queste cinque equazioni, definisce una superficie rigata S_1 applicabile sulla primitiva.

Otteniamo due metodi differenti per la trattazione del nostro problema, a seconda che riguardiamo come note l, m, n , e cerchiamo p, q, r , o inversamente da p, q, r , supposte note, deduciamo l, m, n .

Nel primo caso abbiamo il metodo esposto per la prima

volta da Minding (*) e che conduce ai risultati seguenti:

Siano l, m, n , tre funzioni di v che soddisfanno le due equazioni (17). Le tre equazioni (18) saranno d' valori di p, q, r , da quali si avranno subito con quadrature le coordinate p, q, r di un punto mobile sulla direttrice trasformata e si considererà quindi completamente la nuova superficie rigata S' applicabile sopra la S .

Ora se si pone

$$l = \sin \omega \cos \psi, \quad m = \sin \omega \sin \psi, \quad n = \cos \omega,$$

Dove ω, ψ sono due nuove funzioni di v , la prima delle (17) sarà identicamente soddisfatta e la seconda si trasformerà nella relazione fra ω e ψ ,

$$\omega^2 + \psi^2 \sin^2 \omega = M^2.$$

Possiamo dunque prendere per ω una funzione arbitraria di v , restando determinata ψ da una quadratura

$$\psi = \int \frac{\sqrt{M^2 - \omega^2}}{\sin \omega} dv.$$

L'arbitrarietà che rimane nel nostro problema si può interpretare geometricamente dicendo che alla superficie S , si può fare acquistare un suo direttore fissato ad arbitrio.

È infatti tagliando questo caso col vertice nell'origine delle coordinate per mezzo di una sfera col centro in quel punto e di raggio = 1, si ottiene una curva tale che le coordinate l, m, n di un punto mobile sopra di essa soddisferanno alle (17) quando fra l'arco q di quella

(*) Journal von Crelle, Band 18.

indicatrice sferica e l'asse v della direttrice si stabilisca la relazione

$$\varphi = \int M dv.$$

Allora la superficie rigata S , corrispondente, avrà per cono direttore il cono fissato.

Potiamo in fine che risolvendo le (18) rispetto a p', q', r' si ottiene:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} p'_i = l_i \cos \theta + \frac{l_i N \pm \alpha \sqrt{M^2 \sin^2 \theta - N^2}}{M^2}, \\ q'_i = m_i \cos \theta + \frac{m_i N \pm \beta \sqrt{M^2 \sin^2 \theta - N^2}}{M^2}, \\ r'_i = n_i \cos \theta + \frac{n_i N \pm \gamma \sqrt{M^2 \sin^2 \theta - N^2}}{M^2} \end{array} \right.$$

Dove

$$\alpha = \begin{vmatrix} m_i & n_i \\ m'_i & n'_i \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} n_i & l_i \\ n'_i & l'_i \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} l_i & m_i \\ l'_i & m'_i \end{vmatrix}.$$

E poiché non essendo la S sviluppabile, si ha

$$M^2 \sin^2 \theta - N^2 > 0,$$

i due sistemi di valori per p', q', r' corrispondenti al doppio segno del radicale sono essenzialmente differenti.

Potiamo quindi enunciare il teorema:

Ogni superficie rigata può deformarsi in guisa da farle acquistare un cono direttore fissato ad arbitrio, e ciò in due modi diversi.

Per quanto sopra si è visto i calcoli necessari alla determinazione delle due superficie deformate consistono soltanto in quadrature.

117. - Metodo di Beltrami. - Col metodo precedente troviamo quante si vogliono Deformazioni di una superficie rigata effettuando semplicemente delle quadrature. Ma quando si vesse determinare la funzione arbitraria $w(v)$ in vista de' soddisfare ad una ulteriore condizione, s'incontra, nella più delle volte difficoltà insormontabili. In tal caso sarà preferibile il secondo metodo già sopra accennato e che ora passiamo ad esporre.

Questo metodo, dovuto al prof.^o Beltrami (*), consiste nel ricercare dapprima quali forme può assumere la Direttrice, Deformando la superficie rigata, e nel determinare successivamente per ciascuna di esse la corrispondente forma della superficie. È chiaro infatti che, la soluzione più generale del nostro problema comportando una sola funzione arbitraria, le forme possibili per la Direttrice sono necessariamente soggette ad una condizione, il che sarebbe anche facile a vedersi geometricamente.

Intanto supponiamo nota la Direttrice trasformata, cioè nelle (17), (18) supponiamo date p, q, r , in funzione di v e vediamo come risulteranno determinate l, m, n , dopo di che sarà conosciuta l'intera Deformazione della superficie. Per la Direttrice trasformata ritenendo le solite notazioni del Cap. I, potremo scrivere la seconda delle (18) sotto la forma

(*) Sulla flessione delle superfici rigate. - Annali di Matematica 1865 T. VII, p.^o 105.

$$(a) \quad l_1 \cos \alpha + m_1 \cos \beta + n_1 \cos \gamma = \cos \theta.$$

Questa, Derivata rispetto a v , coll'abolire la terza delle (18) e le formole di Fresnel, si dà:

$$\frac{1}{\rho_1} (l_1 \cos \xi + m_1 \cos \eta + n_1 \cos \zeta) = - (N + \theta \sin \theta).$$

Ponendo per brevità

$$\omega = - (N + \theta \sin \theta)$$

potremo dunque sostituire alla terza delle (18) l'altra (*):

$$(b) \quad l_1 \cos \xi + m_1 \cos \eta + n_1 \cos \zeta = \omega \rho_1.$$

In forza delle (a), (b) possiamo sostituire alla prima delle (17) l'altra:

$$(c) \quad l_1 \cos h + m_1 \cos \mu + n_1 \cos \nu = \sqrt{\sin^2 \theta - \omega^2 \rho_1^2}.$$

Risolvendo le (a), (b), (c) rispetto ad l_1, m_1, n_1 troviamo:

$$(20) \quad \begin{cases} l_1 = \cos \theta \cdot \cos \alpha + \omega \rho_1 \cos \xi + \sqrt{\sin^2 \theta - \omega^2 \rho_1^2} \cdot \cos h, \\ m_1 = \cos \theta \cdot \cos \beta + \omega \rho_1 \cos \eta + \sqrt{\sin^2 \theta - \omega^2 \rho_1^2} \cdot \cos \mu, \\ n_1 = \cos \theta \cdot \cos \gamma + \omega \rho_1 \cos \zeta + \sqrt{\sin^2 \theta - \omega^2 \rho_1^2} \cdot \cos \nu. \end{cases}$$

Con queste formole, appena nota la direttrice trasformata, si considera l'intera deformazione della superficie. Poi vale ad supposti noti ρ_1, q, r , e con quelli di l_1, m_1, n_1 dati dalle (20) verranno identicamente soddisfatte tutte le equazioni (17), (18) ad eccezione della seconda delle (17), cioè:

$$(d) \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = M^2;$$

questa si trasforma subito in una relazione fra $v, \rho_1, \frac{d\rho_1}{dv}$.

(*) La funzione ω è uguale a $\frac{\sin \theta}{\rho_1}$, essendo $\frac{1}{\rho_1}$ la curvatura geodetica della direttrice (V. § 113) e la (18) esprime, come facilmente si verifica, che questa curvatura geodetica non varia per la flessione.

T_1 , ed è la condizione caratteristica, cui devono soddisfare le infinite forme che la direttrice può assumere... Deformando la superficie.

Se poniamo infatti per brevità:

$$h = \rho_1 \cos \theta, \quad k = \sqrt{\rho_1^2 \sin^2 \theta - h^2},$$

le (20) derivate col fare uso delle formole di Frenet, danno:

$$l' = N \cos \alpha + \left(h' + \frac{\cos \theta}{\rho_1} + \frac{k}{T_1} \right) \cos \beta + \left(k' - \frac{h}{\rho_1} \right) \cos \gamma,$$

$$m' = N \cos \beta + \left(h' + \frac{\cos \theta}{\rho_1} + \frac{k}{T_1} \right) \cos \eta + \left(k' - \frac{h}{\rho_1} \right) \cos \mu,$$

$$n' = N \cos \gamma + \left(h' + \frac{\cos \theta}{\rho_1} + \frac{k}{T_1} \right) \cos \zeta + \left(k' - \frac{h}{\rho_1} \right) \cos \nu,$$

sicché la (d) diventa:

$$(20) \quad \left(h' + \frac{\cos \theta}{\rho_1} + \frac{k}{T_1} \right)^2 + \left(k' - \frac{h}{\rho_1} \right)^2 = M^2 - N^2,$$

la quale è appunto una relazione fra $\rho_1, \frac{d\rho_1}{ds}, T_1$, dove giova rammentare che h, k hanno i valori seguenti:

$$(20^{bis}) \quad h = -\rho_1 (N + \theta' \tan \theta), \quad k = \sqrt{\rho_1^2 \sin^2 \theta - h^2}.$$

Ad ogni curva γ cui s'aggi di flessione θ e torsione ρ_1, T_1 soddisfano la (20) corrisponde una speciale deformazione della superficie rigata. Il problema attuale viene per tal modo collegato coll'altro (V^o Cap. I, § 17) di determinare la curva γ cui due raggi di prima e seconda curvatura sono determinate funzioni dell'arco.

118. - Applicazioni. - Come conseguenza dei risultati generali sopra ottenuti notiamo il teorema:

Ogni superficie rigata può flettersi in modo che una linea tracciata ad arbitrio sopra di essa (direttrice) diventi asintotica della superficie

deformata.

Per dimostrarlo osserviamo che la condizione per cui la direttrice trasformata diventi assintotica si esprime semplicemente eguagliando la sua prima curvatura assoluta $\frac{1}{\rho_1}$ alla sua curvatura geodetica $\frac{\sigma}{\sin \theta}$ (Cf. Cap. IV § 42).

Basta dunque porre nella (20)

$$k = \sin \theta, \quad k = 0,$$

dopo di che essa diventa

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\sqrt{M^2 \sin^2 \theta - N^2}}{\sin \theta}$$

La curva in cui due raggi di primo e seconda curvatura sono

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{N}{\sin \theta} - \theta', \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{\sqrt{M^2 \sin^2 \theta - N^2}}{\sin \theta}$$

è la direttrice trasformata.

È notevole il caso particolare in cui la direttrice primitiva è geodetica; allora $\frac{1}{\rho_1} = 0$, quindi la direttrice trasformata è una retta.

Dunque:

Ogni geodetica di una superficie rigata può rettificarsi deformando la superficie.

Le formole relative a questo caso si ottengono molto semplicemente con un calcolo diretto, quando si assume per asse delle x la direttrice rettificata. Allora si ha:

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 0, \quad r_1 = v,$$

quindi

$$n_1 = \cos \theta,$$

Dopo di che ponendo, come al § 116,

$$l_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad m_1 = \sin \theta \sin \varphi$$

risulterà

$$\psi = \int \frac{\sqrt{M^2 - \theta'^2}}{\sin \theta} d\theta;$$

la superficie trasformata sarà quindi determinata dalle formole:

$$x = u \sin \theta \cos \varphi, \quad y = u \sin \theta \sin \varphi, \quad z = v + u \cos \theta.$$

In particolare se la superficie è il luogo delle binormali alla Direttrice, sarà $\theta = \frac{\pi}{2}$, e la superficie trasformata sarà una superficie conoidale. Attesi poi in questo caso $M = \frac{1}{T}$, dove $\frac{1}{T}$ è la torsione della Direttrice, risulterà

$$\psi = \int \frac{d\theta}{T}.$$

Se segue che se la torsione è costante, la conoide trasformata è l'elicoide rigata ad area minima. Viceversa, se si parte da questa superficie e si cercano le sue deformate, assumendo per Direttrice l'atte, si ha

$$ds^2 = du^2 + \left(\frac{u^2}{m^2} + 1\right) dv^2,$$

cioè

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad M = \frac{1}{m}, \quad N = 0,$$

e la (20), ottenendo $h = 0$, $k = 1$ si riduce a

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{m}.$$

Abbiamo dunque il teorema: Le superficie rigate applicabili sull'elicoide rigata ad area minima di parametro m sono tutte e sole le superficie generate dalle binormali

delle curve a torsione costante $\frac{1}{m}$. (*)

119. - Teorema di Bonnet. - Siamo ora in grado di dimostrare il teorema di Bonnet già indicato al §116:

Se due superficie rigate, che non risultano per deformazione da una medesima superficie di secondo grado, sono applicabili, alle generatrici dell'una debbono corrispondere per l'applicabilità le generatrici dell'altra.

Che le superficie di 2° grado a generatrici reali formino eccezione risulta direttamente dall'osservare che, possedendo queste superficie un doppio sistema di generatrici rettilinee, esse possono deformarsi sia lasciando rettilinee le generatrici di un sistema e riducendo curve le altre, sia viceversa.

Per dimostrare il teorema riferiamoci alle notazioni del §115 e supponiamo che le due superficie rigate S, S_1 aventi per rispettivi elementi lineari

$$ds^2 = du^2 + (Au^2 + 2Bu + C) dv^2, \quad AC - B^2 = 1,$$

$$ds_1^2 = du_1^2 + (A_1u_1^2 + 2B_1u_1 + C_1) dv_1^2, \quad A_1C_1 - B_1^2 = 1$$

siano applicabili l'una sull'altra, in guisa che distribuendo S_1 sopra S le generatrici v_1 di S_1 non li corrispondano sopra le generatrici v della S ma sopra un altro sistema di linee (geodetiche). Indichiamo con θ l'angolo che le geodetiche $v_1 = \text{cost}$ sopra S formano colle generatrici $v = \text{cost}$; in forza dell'equazione differenziale delle geodetiche (C. III §28) avremo lungo una linea $v_1 = \text{cost}$:

(*) Per ulteriori applicazioni veggasi la memoria citata del Beltrami.

$$d\theta = -\frac{\partial g}{\partial u} du, \quad \text{etc.} \quad g = \sqrt{Au^2 + 2Bu + C}.$$

Se riguardiamo u, v come funzioni di u, v (cioè di u, v), le precedenti potremo scrivere

$$\frac{\partial \theta}{\partial u_1} = -\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial v}{\partial u_1}.$$

Ora, essendo da L'anno elementare delle geometrie $v = \cot \theta$, abbiamo (C. II § 20, formola (2))

$$(21) \quad \frac{\partial u}{\partial u_1} = \cos \theta, \quad \frac{\partial v}{\partial u_1} = \frac{\sin \theta}{g}$$

e la precedente diviene

$$(22) \quad \frac{\partial \theta}{\partial u_1} = -\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\sin \theta}{g}.$$

Similmente, ponendo

$$g = \sqrt{Au^2 + 2Bu + C},$$

e scambiando u, v con u, v , avremo

$$(23) \quad \frac{\partial \theta}{\partial u} = -\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\sin \theta}{g}.$$

Ma nei punti che si corrispondono per l'applicabilità sopra S, S_1 si ha a causa della (13) § 115

e però, osservando che (21), (22), (23) diventano

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} \cos \theta + \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\sin \theta}{g} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\sin \theta}{g} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} + \left(\frac{\partial g}{\partial u} \cos \theta + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\sin \theta}{g} \right) \frac{\sin \theta}{g} = 0.$$

Ponendo per brevità $v = \cot \theta$ l'ultima diviene

$$g \frac{\partial v}{\partial u} - v \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial v}.$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{v}{g} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{g^2},$$

e integrata dà:

$$\frac{v}{g} = \psi(v) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \int \frac{du}{g^2} = \psi(v) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \operatorname{arctg} (Au+B) \right\}$$

cioè:

$$\frac{v}{g} = \psi(v) - \frac{Au + B'}{2Ag'}$$

Dove $\psi(v)$ è funzione della sola v . Questa formula compare nella (16) §115 c. 2.

$$(2?) \quad \frac{v-u}{g} = I(v)$$

essendo $\mu = \cot u$ la cotangente dell'angolo che le asintotiche del secondo sistema sopra S formano colle generatrici.

Immaginiamo ora, conformemente al teorema del §118, di deformare la superficie S lasciando rettilinee le sue attuali generatrici in guisa che una delle geodetiche v , p. esempio la $v=0$ diventi asintotica e quindi si rettifichi. La (2?) dimostra che dovrà essere $I(v)=0$ per $v=0$; ma $I(v)$ è costante lungo una generatrice $v = \cot u$ e essendo zero al suo punto d'incontro colla $v=0$ sarà sempre $I(v)=0$, cioè $\mu=v$ su tutta l'estensione della superficie. Dunque tutte le geodetiche $v = \cot u$ si rettificano e la nuova forma della superficie S possedendo due sistemi di generatrici rettilinee sarà una superficie di secondo grado c. d. d.

120. - Superficie rigate applicabili sopra superficie di rotazione. - Rispetto a quelle deformazioni delle superficie rigate nelle quali le generatrici cessano di essere rettilinee ci limiteremo a ricercare quali sono le superficie rigate applicabili sopra superficie di rotazione. Una tale superficie deve essere applicabile sopra se medesima in una semplice infinità di modi; per il teorema sopra dimostrato dovrà durante tale applicazione l'intero sistema delle generatrici congruersi ad se medesimo e nel caso attuale, potendo farsi la deformazione per gradi infinitesimi (con continuità)

non può nemmeno eccezione il caso della superficie deformata di quelle di secondo grado.

Si ha

$$ds^2 = du^2 + \{(u - \alpha(v))^2 + \beta(v)^2\}$$

l'elemento lineare della superficie supposta, riferito alla generatrici ed alle caratteri ortogonali. Questo elemento lineare dovrà essere trasformabile in sé medesimo in ∞^1 modi, ponendo

$$u = u(u), \quad v = v(v).$$

Alla forma superiore risulta subito che questo cambiamento di parametri può caratterizzarsi nel modo

$$u = u_1 + a, \quad v = v_1 + b$$

essendo a, b due costanti, delle quali una può prendersi arbitrariamente. Ne segue che le funzioni $\alpha(v), \beta(v)$ debbono avere le proprietà espresse dalle formole

$$\alpha(v+b) = \alpha(v) + a, \quad \beta(v+b) = \beta(v)$$

Dunque

$$\alpha'(v+b) = \alpha'(v), \quad \beta'(v+b) = \beta'(v)$$

qualunque sia b , e perciò sarà

$$\alpha(v) = cv + c', \quad \beta(v) = k$$

Dove k, c, c' sono tre costanti. Si può porre $c' = 0$ includendo u ed u e l'elemento lineare della superficie assume la forma

$$(23) \quad ds^2 = du^2 + \{(u - cv)^2 + k^2\} dv^2,$$

la quale appartiene effettivamente ad una superficie di rotazione, di cui le linee $u - cv = \text{cost}^2$ sono i paralleli (Cp. VI § 67).

Le più semplici superficie rigate, alle quali appartiene quella forma dell'elemento lineare sono le elicoidi generate da una retta che si muove di moto elicoidale attorno ad un'asse qualunque fisso nello spazio (*). Abbiamo quindi il teorema:

Le uniche superficie rigate applicabili sopra superficie di rotazione sono quelle applicabili sopra le elicoidi rigate.

Tra queste elicoidi figura naturalmente l'iperboloido di rotazione ad una falda (col passo eguale a zero).

(*) È infatti selgati l'asse fisso per asse delle z , la perpendicolare comune a questa e alla generatrice per asse delle x , e sia d la minima distanza, γ l'angolo della generatrice coll'asse delle z . Infine indichiamo con w la lunghezza della generatrice contata dal piede della normale comune (asse x), con m il parametro del moto elicoidale, con v l'angolo di rotazione. Per le coordinate x, y, z di un punto mobile sull'elicoida si avrà:

$$x = d \cos v - \sin \gamma \cdot w \sin v, \quad y = d \sin v + \sin \gamma \cdot w \cos v, \\ z = d \cos \gamma \cdot w + m v$$

quindi

$$ds^2 = dw^2 + 2(m \cos \gamma + d \sin \gamma) dv dw + (\sin^2 \gamma w^2 + d^2 m^2) dv^2$$

Pongasi ora

$$v = \frac{v}{\sin \gamma}, \quad w = u - \frac{m \cos \gamma + d \sin \gamma}{\sin \gamma} v$$

e si ottiene

$$ds^2 = du^2 + \left\{ \left(u - \frac{m \cos \gamma + d \sin \gamma}{\sin \gamma} v \right)^2 + \left(\frac{m \sin \gamma - d \cos \gamma}{\sin \gamma} \right)^2 \right\} dv^2$$

formula che coincide colla (23) quando si prenda

$$c = \frac{m \cos \gamma + d \sin \gamma}{\sin \gamma}, \quad h = \frac{m \sin \gamma - d \cos \gamma}{\sin \gamma}$$

Se aggiungiamo di più la condizione che le generatrici della superficie rigata si distendano sopra 2 meridionali della superficie di rotazione, dovrà essere $c=0$, e per superficie di rotazione corrispondente, l'elemento lineare essendo

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + h^2) dv^2,$$

si potrà prendere la catenoida, risultato di cui abbiamo già fatto uso nella dimostrazione del teorema reciproco di Weingarten (Cf. Cap. VII § 16). Per il teorema alla fine del § 118 questi specie di superficie rigate sono l'elissoide rigata ad area minima e le superficie luogo delle binormali alle curve di torsione costanti.

Capitolo XII

Coordinate curvilinee nello spazio -

Sistemi tripli di superficie ortogonali.

121. - Coordinate curvilinee nello spazio. - Come per individuare la posizione di un punto sopra una determinata superficie, abbiamo immaginato tracciato sopra di questa un doppio sistema di curve (linee coordinate) $u = \text{cost}^2$, $v = \text{cost}^2$, di guisa che per ogni punto della superficie (o di una sua porzione convenientemente limitata) passi una curva di ciascun sistema, così potremo individuare la posizione di un punto nello spazio per mezzo delle intersezioni di tre

superficie, ciascuna delle quali sarà un un sistema semplicemente infinito. Se infatti immaginiamo lo spazio solcato da tre sistemi di superficie, così formati che per ogni punto dello spazio (o di una regione di spazio convenientemente limitata) passi una sola superficie di ciascuno dei tre sistemi, potremo far corrispondere ciascuna superficie di uno dei tre sistemi univocamente ad un valore di un parametro u, v, w e le considereremo i valori $u=u, v=v, w=w$ dei parametri delle tre superficie che s'incrociano nel punto P dello spazio, questo punto ne risulterà pienamente determinato. E precisamente per tal guisa che negli ordinari sistemi di coordinate Cartesiane e polari s'individua la posizione di un punto nello spazio; nel primo caso le superficie

$$x=x, \quad y=y, \quad z=z,$$

che s'incrociano in un punto $P \equiv (x, y, z)$ dello spazio, sono tre piani rispettivamente paralleli ai piani coordinati; nel secondo se p, θ, φ sono le coordinate polari di un punto, le tre superficie corrispondenti

$$p=p, \quad \theta=\theta, \quad \varphi=\varphi$$

sono rispettivamente una sfera col centro nell'origine ($p=0$), un cono di rotazione attorno all'asse z ($\theta=0$) e un vertice in $p=0$ ed un piano per l'asse stesso.

Nel caso generale, assunto un sistema di coordinate Cartesiane ortogonali x, y, z , supponiamo che

$$F(x, y, z, u) = 0,$$

Dove u è un parametro arbitrario, sia l'equazione di una superficie qualunque del primo sistema, la quale varierà

al variare di u , passando per tutte le successive posizioni del suo sistema. Immaginando questa equazione risolta rispetto al parametro u e simultaneamente per gli altri due sistemi, potremo scrivere

$$(1) \quad u(x, y, z) = u, \quad v(x, y, z) = v, \quad w(x, y, z) = w.$$

Ad ogni terna (u, v, w) di valori speciali per tre parametri, corrisponderanno tre superficie che s'intersecano in uno o più punti. Fissiamo uno di essi P , e facendo poi variare con continuità i parametri u, v, w intersecano ogni volta sotto per punto corrispondente ad nuovi valori dei parametri quello che succede con continuità al precedente. Per tal modo l'ambiguità dipendente dal l'intersecano delle superficie del sistema in più punti vien tolta, finché almeno si rimane in una regione dello spazio convenientemente ristretta.

I valori u, v, w dei parametri u, v, w in un punto $P \equiv (x, y, z)$ dello spazio si chiamano le sue coordinate curvilinee, mentre le superficie dei tre sistemi

$$u = \text{cost}^e, \quad v = \text{cost}^e, \quad w = \text{cost}^e$$

si chiamano le superficie coordinate u, v, w . Come le (1), note le coordinate cartesiane di un punto, ne fornisco, no le coordinate curvilinee, così risolvendo rispetto a x, y, z si otterranno le altre

$$(2) \quad x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

che serviranno al passaggio inverso.

Consideriamo ora due punti dello spazio $(u, v, w), (u+du, v+dv, w+dw)$ infinitamente vicini, ed indichiamo con ds la

lunghezza infinitesima del segmento che li unisce; avremo
 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Se per x, y, z sostituiamo i loro valori espressi per u, v, w dati dalle (2) e poniamo

$$(3) \quad \begin{cases} H_1^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2, & H_2^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2, & H_3^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2, \\ h_{12} = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, & h_{23} = \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w}, & h_{31} = \sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial x}{\partial u}, \end{cases}$$

troveremo per l'espressione dell'elemento lineare

$$(4) \quad ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2 + 2h_{12} du dv + 2h_{23} dv dw + 2h_{31} dw du,$$

dove $H_1, H_2, H_3, h_{12}, h_{23}, h_{31}$ saranno determinate funzioni di u, v, w .

Supponiamo che sistema superficie di uno qualunque dei tre sistemi sia ortogonale a tutte quelle degli altri due sistemi. Allora sopra una superficie $w = \text{cost}^e$ le linee $u = \text{cost}^e, v = \text{cost}^e$ saranno ortogonali e sarà perciò $h_{12} = 0$; similmente avremo $h_{23} = 0, h_{31} = 0$. Viceversa se

$$h_{12} = 0, \quad h_{23} = 0, \quad h_{31} = 0,$$

le superficie coordinate costituiscono un sistema triplo ortogonale. In tal caso l'elemento lineare dello spazio assumerà la forma semplice

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2.$$

122. — Teorema di Darboux - Dupin. — Integrandosi ora lo studio dei sistemi tripli di superficie ortogonali, cominciamo dallo stabilire il teorema fondamentale di Dupin completato da Darboux.

Supponiamo che due sistemi di superficie

$$u(x, y, z) = u, \quad v(x, y, z) = v$$

siano ortogonali fra loro e cerchiamo quali condizioni s'...

devono essere verificate affinché esista un terzo sistema di superficie

$$w(x, y, z) = w$$

ortogonale ad ambedue. Per l'ipotesi fatta si ha:

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

e se il terzo sistema $w(x, y, z) = \text{cost.}$ esiste, la funzione incognita w dovrà soddisfare le due equazioni

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

cioè

$$\frac{\partial w}{\partial x} : \frac{\partial w}{\partial y} : \frac{\partial w}{\partial z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Sarà dunque necessario e sufficiente che l'equazione differenziale totale

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} dx + \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix} dy + \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dz = 0$$

ammetta un integrale unico $w = \text{cost.}$, ovvero che sia soddisfatta la nota condizione d'integrabilità

$$\Sigma \left[\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} \times \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial y} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \right\} \right] = 0.$$

Ora si ha identicamente

$$\Sigma \left\{ \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} \times \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \Sigma \frac{\partial v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \Sigma \frac{\partial u}{\partial x^2} \right\} \right\} = 0,$$

ed aggiungendola alla precedente

$$\sum \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} \times \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x \partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x \partial z} \right\} = 0.$$

Ma dalla (5), derivando rispetto ad x, y, z segue

$$\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x \partial z} = - \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x \partial z} \right\}$$

e analogamente per y, z ; quindi la condizione d'integrità bilata diventa:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x \partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y \partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

Possiamo dare di questo risultato la seguente interpretazione geometrica. Spostiamoci lungo la linea d'intersezione di due superficie

$$u(x, y, z) = u_1, \quad v(x, y, z) = v_1$$

Da un punto M al successivo M' e indichiamo col simbolo dx, dy, dz gli accrescimenti delle quantità corrispondenti x, y, z , $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \dots$; avremo:

$$dx : dy : dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

La (6) equivale quindi all'altra

$$(6') \quad \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0;$$

ma se con X, Y, Z indichiamo i coseni di direzione della normale alla superficie $v(x, y, z) = v_1$, abbiamo

$$X : Y : Z = \frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial v}{\partial y} : \frac{\partial v}{\partial z}$$

e potremo quindi scriverci in luogo della (6') l'altra

$$\frac{\partial u}{\partial x} \delta X + \frac{\partial u}{\partial y} \delta Y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta Z = 0.$$

D'altronde si ha identicamente

$$\frac{\partial v}{\partial x} \delta X + \frac{\partial v}{\partial y} \delta Y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta Z = 0,$$

e però la condizione (6) d'integrabilità equivale alla
proporzionalità

$$\delta x : \delta y : \delta z = \delta X : \delta Y : \delta Z,$$

la quale sta a rappresentare (Cap. IV § 38) che la linea $u(x, y, z) = u$, $v(x, y, z) = v$, è linea di curvatura per la superficie $v(x, y, z) = v$, e quindi anche per la prima (§ 40).

Ne risulta l'importante teorema dovuto a Darboux (*):

La condizione necessaria e sufficiente perchè a due sistemi di superficie ortogonali fra loro possa associarsene un terzo ortogonale ad ambedue è che i due primi s'incontrino lungo linee di curvatura.

In esso è contenuto il celebre teorema di Dupin:

In ogni sistema triplo di superficie ortogonali la linea d'intersezione di due superficie di diverso sistema è linea di curvatura per ambedue.

123. — Condizione perchè un sistema di superficie appartenga ad un sistema triplo ortogonale. — Dal teorema precedente risulta che preso ad arbitrio un sistema ∞^1 di superficie

$$u(x, y, z) = u,$$

(*) Annales de l'École Normale Supérieure, T. III, 1866, p. 110.

esso non appartenga in generale ad un sistema triplo ortogonale. È infatti questo sistema di superficie ortogonale univocamente il sistema di curve che lo intersecano tutte ortogonalmente. Analiticamente si troverebbero le equazioni di questi triplotti ortogonali integrando il sistema di equazioni differenziali simultanee

$$\frac{dx}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial u}{\partial z}}$$

Orà se il sistema $u(x, y, z) = \text{cost}^2$ appartiene ad un sistema triplo ortogonale e sopra una individuata superficie $u(x, y, z) = u_1$ consideriamo una linea L di curvatura, quelle traiettorie ortogonali del sistema che attraversano i punti di L costituiranno una superficie Σ , che dovrà incontrare tutte le rimanenti superficie del sistema lungo linee di curvatura.

È allora notevole che questa indipendenza geometrica cui deve soddisfare il sistema $u(x, y, z) = \text{cost}^2$, si traduce analiticamente in una equazione a derivate parziali del terzo ordine per la funzione $u(x, y, z)$. Questo importante risultato, dovuto a Bonnet, si può stabilire nel modo seguente (*).

Consideriamo le linee di curvatura di un medesimo triplottino sopra tutte le superficie $u(x, y, z) = \text{cost}^2$ (**); questo sistema di curve dovrà ammettere una serie ∞^2 di superficie ortogonali che costituiranno uno degli altri due li.

(*) Darboux l. c.

(**). Una volta scelto il sistema sopra una superficie $u = u_1$, risulterà determinato su tutte le altre. Dalla legge di continuità.

Stemi $v(x, y, z) = v$ o $w(x, y, z) = w$ integrali supposti. Le
 Dunque X, Y, Z , indicano i seni di direzione delle tan-
 genti a quelle linee, dovrà essere integrabile l'equazione
 a differenziali totali

$$X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz = 0,$$

cioè si dovrà avere:

$$(1) \quad X_1 \left(\frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial Z_1}{\partial y} \right) + Y_1 \left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial z} \right) + Z_1 \left(\frac{\partial X_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial z} \right) = 0$$

e pel teorema del § precedente questa condizione sarà
 d'altronde sufficiente. Ora dalle formole dei primi pa-
 ragrafi del Capitolo IV risulta che X, Y, Z , si esprimono
 per le derivate prime e seconde della funzione $u(x, y, z)$ e
 quindi la (1) è un'equazione alle derivate parziali terze
 per la funzione $u(x, y, z)$. Questa equazione a derivate
 parziali integrate darebbe adunque tutti i possibili siste-
 mi tripli ortogonali. Possiamo subito come immediate
 conseguenze di questo risultato generale alcuni casi sem-
 plici di sistemi tripli ortogonali. Consideriamo un
 sistema qualunque semplicemente infinito di piani o di
 sfere e le loro ∞^2 traiettorie ortogonali. Se sopra una sfe-
 ra (piano) iniziale si fissa una linea arbitraria L , quelle
 traiettorie ortogonali che scano dai punti di L formano una
 superficie Σ , la quale viene intersecata da tutte le sfere
 (piani) ortogonalmente lungo linee di curvatura (§ 40).

Dunque:

Ogni sistema ∞^2 di sfere o piani appartiene ad infi-
 niti sistemi tripli ortogonali.

Per ottenerne uno qualunque basta tracciare ad arbitrio

sopra una sfera iniziale (piano) due sistemi di curve ortogonali L, L' ; le corrispondenti superficie Σ, Σ' completano il sistema triplo ortogonale. Nel caso che il sistema dato sia di piani, le superficie Σ, Σ' saranno evidentemente superficie modanate (§105) e se i piani passeranno per una medesima retta, esse diventeranno superficie di rotazione attorno a questa asse.

In fine osserviamo che:

Ogni sistema di superficie parallele appartiene ad un sistema triplo ortogonale; le superficie degli altri due sistemi sono le sviluppabili luogo delle normali lungo le linee di curvatura delle superficie parallele.

114. - Formole preliminari. - Supponiamo di avere un sistema triplo di superficie ortogonali $u = \text{cost}^2$, $v = \text{cost}^2$, $w = \text{cost}^2$, che assunto a sistema di coordinate curvilinee dia all'elemento lineare dello spazio la forma

$$(8) \quad ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2.$$

Cominciamo dall'osservare che una volta note le funzioni H_1, H_2, H_3 di u, v, w , questa formola definisce completamente, a meno di trasformazioni di coordinate, il corrispondente sistema triplo ortogonale, cioè:

Due sistemi tripli ortogonali, che danno all'elemento lineare (8) la medesima forma, non possono differire che per movimenti nello spazio o per un'inversione.

E infatti la loro ricerca dipende da quella di tre funzioni reali $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ delle variabili u, v, w che soddisfanno l'equazione

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2.$$

Ora se ξ, η, ζ sono tre nuove funzioni di u, v, w che soddisfanno la medesima relazione, si avrà

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2.$$

Se si considera nello spazio stabilita una corrispondenza fra i punti $P = (x, y, z)$, $\Pi = (\xi, \eta, \zeta)$ questa sarà dunque tale che le figure corrispondenti saranno e, quale direttamente o inversamente, e perciò ξ, η, ζ saranno legate a x, y, z dalle formole di trasformazione delle coordinate c. d. d. (*)

Da ciò risulta manifesto che tutte le proprietà del sistema triplo ortogonale non possono essere che conseguenza della forma (8) dell'elemento lineare dello spazio e debbono potersi quindi dedurre dalla condizione delle funzioni H_1, H_2, H_3 .

Ma innanzi tutto dobbiamo risolvere la questione: Possono queste funzioni assumersi ad arbitrio o debbono soddisfare a determinate condizioni? E come le tre funzioni incognite x, y, z debbono soddisfare simultaneamente le sue equazioni

$$(9) \quad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = H_1^2, \quad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = H_2^2, \quad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 = H_3^2$$

(*) L'ouville. Note IV all' Application de l'Analyse à la Géométrie par Monge.

(10) $\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0$, $\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} = 0$, $\sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial x}{\partial u} = 0$,
 così è chiaro a priori che H_1, H_2, H_3 dovranno essere assog-
 gettate a particolari restrizioni.

Come Lamé per il primo ha dimostrato, queste
 condizioni si traducono in sei equazioni a derivate par-
 ziali cui debbono soddisfare H_1, H_2, H_3 , ed è in primo
 luogo della loro ricerca che ci vogliamo occupare.

A scanso di equivoci premettiamo le osservazioni seguen-
 ti. Le funzioni H_1^2, H_2^2, H_3^2 sono per le (9) sempre
 positive o tutto al più nulle in punti o in linee
 isolate. Noi intenderemo sempre limitato il campo di
 variabilità cui u, v, w in guisa che esse siano da per
 tutto positive e diverse da zero e supponendo inoltre
 che esse siano finite, continue e ad un sol valore
 insieme alle loro derivate prime e seconde, designe-
 remo con H_1, H_2, H_3 i valori positivi delle loro radici-
 quadrate, le quali saranno perciò funzioni della me-
 desima specie.

Se ds_1, ds_2, ds_3 indicano gli archi elementari di quelle
 linee di curvatura del sistema triplo ortogonale, lun-
 go le quali varia soltanto u, v, w e il loro senso
 positivo si fissa nella direzione del rispettivo parame-
 tro crescente, si avrà:

$$ds_1 = H_1 du, \quad ds_2 = H_2 dv, \quad ds_3 = H_3 dw.$$

In fine ponendo

$$(11) \quad X_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad Y_1 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad Z_1 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial z}{\partial w},$$

$$(11) \begin{cases} X_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial x}{\partial v}, & Y_1 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial y}{\partial v}, & Z_1 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial z}{\partial v}, \\ X_2 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial x}{\partial w}, & Y_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial y}{\partial w}, & Z_2 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial z}{\partial w}, \end{cases}$$

saranno X_1, Y_1, Z_1 i coseni di direzione positiva della normale alla superficie $u = \text{cost}$ e similmente per le superficie degli altri due sistemi.

Supponendo poi gli assi coordinati x, y, z nelle loro direzioni positive orientati come le direzioni $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3)$ avremo:

$$(12) \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = +1$$

125. - Formole di Lamè per i coefficienti H_1, H_2, H_3 .

- Per nostro scopo occorre anzi tutto esprimere le derivate parziali dei nove coseni che figurano nel determinante (12) per i coseni stessi e per H_1, H_2, H_3 . Per ciò cominceremo dall'ottenere che derivando le (10) rispettivamente rapporto ad u, v, w e combinando fra loro le equazioni risultanti si ottiene

$$(A) \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial w} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0.$$

Combinando poi per derivazione le (9) colle (10) si ha

$$(B) \begin{cases} \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -H_1 \frac{\partial H_1}{\partial v}, & \sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -H_1 \frac{\partial H_1}{\partial w}, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} = H_2 \frac{\partial H_2}{\partial v}, & \sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} = H_2 \frac{\partial H_2}{\partial w}. \end{cases}$$

Da queste formole seguono immediatamente le altre

$$(a) \quad \sum X_1 \frac{\partial X_1}{\partial u} = 0, \quad \sum X_2 \frac{\partial X_2}{\partial u} = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v}, \quad \sum X_3 \frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w},$$

$$(B) \quad \Sigma X_1 \frac{\partial X_1}{\partial v} = 0, \quad \Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u}, \quad \Sigma X_3 \frac{\partial X_1}{\partial v} = 0$$

$$(Y) \quad \Sigma X_1 \frac{\partial X_1}{\partial w} = 0, \quad \Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial w} = 0, \quad \Sigma X_3 \frac{\partial X_1}{\partial w} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u},$$

Risolvendo le (a) rispetto a $\frac{\partial X_1}{\partial u}$, le (B) rispetto a $\frac{\partial X_1}{\partial v}$, le (Y) rispetto a $\frac{\partial X_1}{\partial w}$ coll' osservare la (12), e sulle forme trovate operando quindi la sostituzione circolare (1,2,3)

(u, v, w) otteniamo:

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} X_2 - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} X_3, & \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} X_1, & \frac{\partial X_1}{\partial w} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} X_3, \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} X_1, & \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} X_3 - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} X_1, & \frac{\partial X_2}{\partial w} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} X_3, \\ \frac{\partial X_3}{\partial u} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial v} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial w} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} X_1 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} X_2, \end{cases}$$

alle quali formole basterebbe aggiungere le analoghe per $X_2, X_3; Y_2, Y_3; Z_1, Z_2, Z_3$ per avere tutte le formole richieste.

Da esse risulta nuovamente il teorema di Dupin (§ 122), poichè si ha p. es:

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} : \frac{\partial Y_1}{\partial v} : \frac{\partial Z_1}{\partial v} = \frac{\partial x_1}{\partial v} : \frac{\partial y_1}{\partial v} : \frac{\partial z_1}{\partial v} \text{ etc.}$$

Note le funzioni H_1, H_2, H_3 , le funzioni incognite X_1, X_2, X_3 sono determinate dalle nove equazioni sì: multilineari lineari (13) del primo ordine alle derivate parziali, o, ciò che torna lo stesso, dalle tre equazioni simultanee a differenziali totali:

$$(13') \quad \begin{cases} dX_1 + \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} X_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} X_3 \right) du - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} X_2 dv - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} X_3 dw = 0, \\ dX_2 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} X_1 du + \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} X_3 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} X_1 \right) dv - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} X_3 dw = 0, \\ dX_3 - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} X_1 du - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} X_2 dv + \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} X_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} X_2 \right) dw = 0. \end{cases}$$

Ma perché queste equazioni siano integrabili, dovranno essere verificate fra i coefficienti determinate relazioni che ora vogliamo stabilire. Le osserviamo che dalle (13) risulta per esempio

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} X_2 \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} X_3 \right)$$

e sviluppiamo, facendo mente alle (13) stesse, troviamo:

$$X_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial v} \right\} = X_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial v} \right\}$$

Come poi a questa medesima relazione debbono anche soddisfare $Y_1, Y_2; Z_1, Z_2$, così ne segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} \right) &= \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_1}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} \right) &= \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial v} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_2}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial v} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_1}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 H_1}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_1}{\partial v} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial v} \frac{\partial H_1}{\partial u} \end{aligned}$$

alle quali possiamo aggiungere una terza

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial v \partial w} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial H_1}{\partial w} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial H_2}{\partial w}$$

ottenuta con permutazione circolare.

Le stesse relazioni (13) danno l'altra

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} X_2 \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} X_2 \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} X_3 \right) = 0,$$

la quale sviluppata da luogo alle due equazioni di condizione

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} \right) + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial H_2}{\partial w} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} \right) = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial H_1}{\partial w}$$

Di questo, la seconda era già stata ottenuta sopra, mentre la prima dà luogo per permutazione circolare a due nuove.

Riepilogando, abbiamo quindi le sei equazioni di condizione fra i coefficienti H_1, H_2, H_3 :

$$(14) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} \right) + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} \frac{\partial H_2}{\partial w} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial w} \right) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_3}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial u} \right) + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial v} \frac{\partial H_1}{\partial v} &= 0; \end{aligned} \right.$$

$$(15) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial v \partial w} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial H_2}{\partial w} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} \frac{\partial H_2}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial u \partial w} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial w} \frac{\partial H_3}{\partial u} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_3}{\partial w}, \\ \frac{\partial^2 H_3}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial u} \frac{\partial H_1}{\partial v} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial v} \frac{\partial H_1}{\partial u}. \end{aligned} \right.$$

Sono queste le formole fondamentali scoperte da Lamé per i coefficienti dell'elemento lineare dello spazio. Esse comprendono tutte e sole le condizioni d'integrabilità per le equazioni (13) o (13').

126. - Determinazione del sistema triplo ortogonale corrispondente a dati valori di H_1, H_2, H_3 . -

Vogliamo ora dimostrare che le condizioni (14), (15) sono caratteristiche per l'elemento lineare (8) dello spazio, che cioè:

Se le equazioni di Lamé (14) (15) sono soddisfatte, esiste uno ed uno solo sistema triplo ortogonale

che dà all'elemento lineare dello spazio la forma (8).

Che il sistema triplo ortogonale corrispondente, quando esista, sia unico (precludendo da trasformazioni di coordinate) l'abbiamo già dimostrato al § 124. Per dimostrare l'effettiva esistenza cominciamo dall'osservare che essa sarebbe provata quando si dimostrasse che, fissati arbitrariamente dei valori iniziali $X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, X_3^{(0)}$ per le incognite X_1, X_2, X_3 corrispondenti a valori $u=u_0, v=v_0, w=w_0$, esiste un sistema di integrali X_1, X_2, X_3 che per $u=u_0, v=v_0, w=w_0$ si riducono ai valori iniziali scelti.

È infatti, prendendo allora tre terni di valori iniziali differenti

$$(A) \quad \begin{cases} X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, X_3^{(0)} \\ Y_1^{(0)}, Y_2^{(0)}, Y_3^{(0)} \\ Z_1^{(0)}, Z_2^{(0)}, Z_3^{(0)} \end{cases}$$

e indicando con $(X_1, X_2, X_3), (Y_1, Y_2, Y_3), (Z_1, Z_2, Z_3)$ gli integrali corrispondenti delle (13) si verifica subito che si ha:

$$\begin{aligned} d(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) &= 0, & d(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2) &= 0, & d(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) &= 0, \\ d(X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3) &= 0, & d(Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2 + Y_3 Z_3) &= 0, \\ d(Z_1 X_1 + Z_2 X_2 + Z_3 X_3) &= 0. \end{aligned}$$

Scegliendo dunque i valori iniziali (A) in modo che verificano le condizioni:

$$\begin{aligned} X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 &= 1, & Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 &= 1, & Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 &= 1, \\ X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 &= 0, & Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2 + Y_3 Z_3 &= 0, \\ Z_1 X_1 + Z_2 X_2 + Z_3 X_3 &= 0 \end{aligned}$$

queste saranno sempre verificate, cioè

$$X_1, X_2, X_3$$

$$Y_1, Y_2, Y_3$$

$$Z_1, Z_2, Z_3$$

saranno i coefficienti di una sostituzione ortogonale (*).

Ora per le (13) le tre espressioni

$$H_1 X_1 du + H_2 X_2 dv + H_3 X_3 dw,$$

$$H_1 Y_1 du + H_2 Y_2 dv + H_3 Y_3 dw,$$

$$H_1 Z_1 du + H_2 Z_2 dv + H_3 Z_3 dw,$$

saranno tre differenziali esatti, e quindi ponendo

$$x = \int (H_1 X_1 du + H_2 X_2 dv + H_3 X_3 dw),$$

$$y = \int (H_1 Y_1 du + H_2 Y_2 dv + H_3 Y_3 dw),$$

$$z = \int (H_1 Z_1 du + H_2 Z_2 dv + H_3 Z_3 dw),$$

si avrà appunto

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2,$$

come si voleva.

La questione si dunque ridotta a provare che le equazioni (13) o (13') ammettono un sistema integrale

$$(16) \quad \begin{cases} X_1 = X_1(u, v, w, c_1, c_2, c_3), \\ X_2 = X_2(u, v, w, c_1, c_2, c_3), \\ X_3 = X_3(u, v, w, c_1, c_2, c_3), \end{cases}$$

contenente tre costanti arbitrarie c_1, c_2, c_3 .

Che ciò sia veramente risulta da teoremi generali relativi ad sistemi di equazioni a differenziali totali, per le quali sono soddisfatte le condizioni d'integra-

(*) Abbiamo quindi anche le relazioni

$$X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 = 1, \quad X_i X_x + Y_i Y_x + Z_i Z_x = 0.$$

bilità (*). Nel nostro caso speciale lo dimostreremo at-
tendendo al metodo del prof.^{re} Betti (Annali di Mat.
matematica, Serie II, T. VIII).

Per ciò osserveremo che se il sistema integrabile (16)
esiste, risolvendolo rispetto alle costanti c_1, c_2, c_3 , avremo

$$(17) \quad \begin{cases} F_1(X_1, X_2, X_3, u, v, w) = c_1, \\ F_2(X_1, X_2, X_3, u, v, w) = c_2, \\ F_3(X_1, X_2, X_3, u, v, w) = c_3, \end{cases}$$

e queste equazioni diventeranno identiche quando per X_1, X_2, X_3 si sostituiscono i valori (16). Ciascuna delle F soddisfa dunque alle tre equazioni

$$\frac{\partial F}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial w} + \frac{\partial F}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial w} + \frac{\partial F}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial w} + \frac{\partial F}{\partial w} = 0,$$

se per X_1, X_2, X_3 sostituiamo i valori (16).

Ed siccome i valori (16) sono per ipotesi integrali delle
(13) o (13'), così possiamo dire che F_1, F_2, F_3 sono tre
integrali indipendenti del sistema di equazioni a
derivate parziali

$$(18) \quad \begin{cases} -\frac{\partial F}{\partial X_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial v} X_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} X_3 \right) + \frac{\partial F}{\partial X_2} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} X_1 + \frac{\partial F}{\partial X_3} \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} X_1 + \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial X_1} \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} X_2 - \frac{\partial F}{\partial X_2} \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial w} X_3 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} X_1 \right) + \frac{\partial F}{\partial X_3} \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial w} X_2 + \frac{\partial F}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial X_1} \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial u} X_3 + \frac{\partial F}{\partial X_2} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial v} X_3 - \frac{\partial F}{\partial X_3} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial u} X_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial v} X_2 \right) + \frac{\partial F}{\partial w} = 0, \end{cases}$$

dove F è riguardato come funzione delle sei variabili X_1, X_2, X_3, u, v, w .

(*) V. p. es. Mayer - Mathematische Vorlesungen Bd. 5, p. 448.

Inversa se F_1, F_2, F_3 sono tre integrali indipendenti delle (18) (tali cioè che fra di essi una relazione alcuna religiosa $\varphi(F_1, F_2, F_3) = 0$), se equagliamo F_1, F_2, F_3 a tre costanti c_1, c_2, c_3 , ed potremo trovare i valori di X_1, X_2, X_3 in funzione di u, v, w, c_1, c_2, c_3 (*) di quali soddisferanno alle (19) e avranno valori iniziali arbitrari.

Quindi il teorema enunciato si ridotta all'altro:

Il sistema di equazioni lineari omogenee (18) a derivate parziali commette tre soluzioni indipendenti.

121. - Sistemi Jacobiani. - Questo teorema è un caso particolare di un altro che ora passeremo brevemente ad esporre.

Sia $F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ una funzione incognita di n variabili indipendenti x_1, x_2, \dots, x_n che debba soddisfare simultaneamente alle $m < n$ equazioni lineari omogenee alle derivate parziali

$$(19) \begin{cases} \alpha_{11} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \alpha_{12} \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + \alpha_{1n} \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \\ \alpha_{21} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \alpha_{22} \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + \alpha_{2n} \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \\ \dots \\ \alpha_{m1} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \alpha_{m2} \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + \alpha_{mn} \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \end{cases}$$

(*) Basta osservare che nell'ipotesi fatta il determinante funzionale

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \frac{\partial F_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \frac{\partial F_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial X_1} & \frac{\partial F_3}{\partial X_2} & \frac{\partial F_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}$$

non è zero.

Dove le α_{rs} sono integrate funzioni delle x e le m equazioni stesse si suppongono fra loro linearmente indipendenti.

Lo per indicare il risultato dell'operazione

$$\alpha_{r1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \alpha_{r2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots + \alpha_{rn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = \sum_1^r \alpha_{ri} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

Prendiamo il simbolo $A_r(\varphi)$, ogni funzione Γ che soddisfi le (19) dovrà necessariamente soddisfare anche le seguenti:

$$A_r[A_s(\Gamma)] - A_s[A_r(\Gamma)] = 0, \quad r, s = 1, 2, \dots, m,$$

poiché è identicamente $A_r(\Gamma) = 0, A_s(\Gamma) = 0$. Queste sono nuovamente equazioni della forma (19); e infatti abbiamo:

$$\begin{aligned} A_r[A_s(\Gamma)] - A_s[A_r(\Gamma)] &= \sum_1^r \alpha_{ri} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_1^s \alpha_{sj} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} \right) - \sum_1^s \alpha_{sj} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_1^r \alpha_{ri} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \right) = \\ &= \sum_1^r \sum_1^s \alpha_{ri} \frac{\partial \alpha_{sj}}{\partial x_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} - \sum_1^s \sum_1^r \alpha_{sj} \frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_j} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

ovvero

$$A_r[A_s(\Gamma)] - A_s[A_r(\Gamma)] = \sum_1^r b_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = 0,$$

Dove

$$(20) \quad b_i = \sum_1^r \left(\alpha_{ri} \frac{\partial \alpha_{sj}}{\partial x_i} - \alpha_{sj} \frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_j} \right) = A_r(\alpha_{sj}) - A_s(\alpha_{ri}).$$

Se avviene che tutti i coefficienti b_i siano identicamente nulli, cioè si abbia identicamente

$$A_r[A_s(\Gamma)] = A_s[A_r(\Gamma)] \quad \left. \begin{matrix} r, s \\ \} \end{matrix} \right\} = 1, 2, \dots, m$$

allora il sistema (19) diviene un sistema Jacobiano.

Orà sussiste il teorema:

Ogni sistema Jacobiano di m equazioni lineari omogenee alle derivate parziali per una funzione incognita di $n > m$ variabili indipendenti ammette $n-m$ soluzioni indipendenti fra loro (*).

(*) Si dimetta anche che dato un sistema di equazioni

Il teorema sostituendo certamente per $m=1$, cioè per una sola equazione, basterà provare che se è vero per $m-1$ equazioni è vero anche per m .

Supponiamo che il sistema - Jacobiano di $m-1$ equazioni con n variabili

$$(21) \quad A_1(F)=0, \quad A_2(F)=0, \quad \dots \quad A_{m-1}(F)=0$$

ammetta $n-m+1$ soluzioni indipendenti

$$q_1, q_2, \dots, q_{n-m+1}$$

Di quita che ogni nuova soluzione sia una funzione (che può prendersi arbitrariamente) di $q_1, q_2, \dots, q_{n-m+1}$. Vogliamo che una di queste soluzioni

$$\Psi(q_1, q_2, \dots, q_{n-m+1})$$

soddisfi anche la m^a

$$A_m(F)=0.$$

Dovremo avere

$$(22) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} A_m(q_1) + \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} A_m(q_2) + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial q_{n-m+1}} A_m(q_{n-m+1}) = 0.$$

Ma si ha in generale

$$A_n \{ A_m(q_i) \} = A_m \{ A_n(q_i) \} = 0,$$

cioè

$$A_m(q_1), \quad A_m(q_2), \quad \dots \quad A_m(q_{n-m+1})$$

sono altrettante soluzioni del sistema (21) e però sono funzioni di $q_1, q_2, \dots, q_{n-m+1}$. La (22) è quindi un'equazione lineare omogenea con una funzione incognita di $n-m+1$ variabili, ed ha perciò $n-m$ soluzioni indipendenti, che sono altresì gli auto-

qualunque come le (19), vi si può sempre sostituire un sistema Jacobiano equivalente.

gradi indipendenti del sistema jacobiano

$$A_1(\Gamma) = 0, \quad A_2(\Gamma) = 0, \quad \dots \quad A_m(\Gamma) = 0. \quad \text{c. d. d.}$$

Se applichiamo questi risultati al caso nostro del sistema (18) di $m=3$ equazioni a derivate parziali con $n=6$ variabili indipendenti X_1, X_2, X_3, u, v, w , osserviamo che, stando ad. D. fatte le condizioni (14), (15) di Lami, esse c'è un sistema jacobiano, come agevolmente si può verificare, ed risulterà che esso ammette $6-3=3$ soluzioni indipendenti, il che appunto si trattava di dimostrare.

128. - Rappresentazioni conformi dello spazio. —

Le formole (14), (15) di Lami sono state applicate da Liouville a ricercare se è possibile rappresentare lo spazio sopra se' stesso, o una sua porzione sopra un'altra porzione, in modo che sia conservata la similitudine delle parti infinitesime.

Egli ha ottenuto l'importante risultato:

Le uniche rappresentazioni conformi dello spazio sopra se' medesimo sono la similitudine e l'inversione per raggi vettori reciproci.

Per dimostrarlo supponiamo che x, y, z sieno le coordinate di un punto mobile nello spazio (o porzione di spazio) e ξ, η, ζ quelle del punto corrispondente nella rappresentazione conforme supposta, di guisa che ξ, η, ζ saranno determinate funzioni di x, y, z . Perchè la rappresentazione conservi gli angoli, occorre che il rapporto

$$\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

tra indipendente dagli accrescimenti dx, dy, dz , cioè che si abbia

$$ds^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 = \frac{1}{\lambda^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

Dove λ è una funzione di x, y, z . Ma le formole (14), (15) di Lamé, ponendo

$$u = x, \quad v = y, \quad w = z, \quad H_1 = H_2 = H_3 = \frac{1}{\lambda}$$

ci danno

$$(a) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda} \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right\}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial x} = 0.$$

Le tre ultime ci danno

$$h = X + Y + Z,$$

Dove X è funzione della sola x , Y di y , Z di z . Sostituendo nelle (a), abbiamo

$$(b) \quad X'' = Y'' = Z''$$

e inoltre:

$$(c) \quad X'' + Y'' = \frac{1}{X + Y + Z} \{ X'^2 + Y'^2 + Z'^2 \}.$$

Dalle (b) risulta

$$X'' = Y'' = Z'' = k,$$

Dove k è una costante che per semplicità del calcolo seguiremo porremo $= \frac{c}{c}$. Integrando avremo

$$X = \frac{1}{c} \{ (x-a)^2 + b \}$$

$$Y = \frac{1}{c} \{ (y-a_1)^2 + b_1 \}$$

$$Z = \frac{1}{c} \{ (z-a_2)^2 + b_2 \}$$

avendo le a, b nuove costanti. Sostituendo in (c), otteniamo

niamo

$$\frac{4}{c^2} \{ (x-a)^2 + (y-a_1)^2 + (z-a_2)^2 + b_1 + b_2 + b_3 \} = \frac{4}{c^2} \{ (x-a)^2 + (y-a_1)^2 + (z-a_2)^2 \}.$$

Dunque $b_1 + b_2 + b_3 = 0$, e trasportando l'origine delle

coordinate nel punto (α, α, α) avremo $h = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c}$. Ma in sistema di formale che danno effettivamente

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{c^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

sono le seguenti

$$\xi = \frac{cx}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \eta = \frac{cy}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \zeta = \frac{cz}{x^2 + y^2 + z^2},$$

che Definiscono appunto un' inversione per raggi vettori reciproci rispetto alla sfera.

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2;$$

le altre non possono differire che per trasformazioni di coordinate. Per completare questa dimostrazione si noti che nel caso (2) $h = \frac{z}{c} = 0$, le (2) danno $h = \cos^2$, e la trasformazione corrispondente è la similitudine.

In fine si osserva che l'inversione per raggi vettori reciproci cambia un sistema triplo ortogonale in uno altro. Applicando questa osservazione al caso di un sistema di superficie focali (§ 125), se ne conclude che l'inversione ridotta cambia le linee di curvatura di ogni superficie nelle linee di curvatura della trasformata.

129. - Raggi principali di curvatura delle superfici $u = \cos^2$, $v = \cos^2$, $w = \cos^2$. - Flessioni e torsioni delle curve u, v, w . - Dato la forma dell'elemento lineare dello spazio

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2$$

rispetto ad un sistema triplo ortogonale (u, v, w) il sistema triplo è perfettamente determinato di forma e tutte le quantità dipendenti dal sistema debbono quindi potersi

esprimere per H_1, H_2, H_3 e le loro derivate. (Cf. § 124). In particolare ciò accadrà per i sei raggi di curvatura principali della superficie dei tre sistemi di linee di curvatura u, v, w . Indichiamo con r_{11} il raggio principale di curvatura della superficie $u = \text{cost}^2$ lungo la sua intersezione (linea di curvatura) colla $w = \text{cost}^2$, cioè lungo la linea per la quale varia la sola v . Contandolo positivamente o negativamente secondo che la direzione che va dal rispettivo centro di curvatura al piede della normale coincide colla direzione positiva (X, Y, Z) della normale, o colla opposta, avremo (§. IV § 43):

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{r_{11}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial v} = \frac{1}{r_{11}} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial Z_1}{\partial v} = \frac{1}{r_{11}} \frac{\partial z}{\partial v}$$

e quindi per le (13) § 125

$$\frac{1}{r_{11}} = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u}$$

Usando notazione analoga per gli altri cinque raggi principali, potremo scrivere le formole

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial u}, \quad \frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial u}, \quad \frac{1}{r_{21}} = \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial v}, \\ \frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial v}, \quad \frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial w}, \quad \frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial w}. \end{array} \right.$$

Se indichiamo con $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), (\cos \xi, \cos \eta, \cos \zeta), (\cos h, \cos u, \cos v)$ i coseni di direzione della tangente, normale principale e binormale delle curve $v = \text{cost}^2, w = \text{cost}^2$, il cui arco elementare è $ds = H_1 du$, o con ρ, T, i raggi di flessione e torsione, avremo

$$(A) \quad \cos \alpha = X, \quad \cos \beta = Y, \quad \cos \gamma = Z,$$

e derivando rispetto ad u , coll'assistenza le (13) e le formole di Frenet:

$$(B) \left\{ \begin{aligned} \frac{\cos \lambda_1}{\rho_1} &= -\frac{X_1}{r_{21}} - \frac{X_2}{r_{31}} & \frac{\cos \lambda_2}{\rho_2} &= -\frac{Y_1}{r_{21}} - \frac{Y_2}{r_{31}}, \\ \frac{\cos \lambda_3}{\rho_3} &= -\frac{Z_1}{r_{21}} - \frac{Z_2}{r_{31}}. \end{aligned} \right.$$

Da queste quadrando e sommando, si ha

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{r_{21}^2} + \frac{1}{r_{31}^2}.$$

Indicando dalle (A), (B) segue.

$$(C) \left\{ \begin{aligned} \cos \lambda_1 &= \frac{\rho_1}{r_{21}} X_1 - \frac{\rho_1}{r_{31}} X_2, & \cos \mu &= \frac{\rho_1}{r_{21}} Y_1 - \frac{\rho_1}{r_{31}} Y_2, \\ \cos \lambda_3 &= \frac{\rho_1}{r_{21}} Z_1 - \frac{\rho_1}{r_{31}} Z_2, \end{aligned} \right.$$

e continuando

$$\sum_i \cos^2 \lambda_i \frac{1}{H_i} \frac{\partial \cos \lambda_i}{\partial u} = \frac{1}{T}$$

avremo quindi per le (13)

$$\frac{1}{T_1} = \frac{\rho_1}{H_1} \left\{ \frac{1}{r_{21}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\rho_1}{r_{21}} \right) - \frac{1}{r_{31}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\rho_1}{r_{31}} \right) \right\} = \rho_1^2 \left\{ \frac{1}{r_{21}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{r_{21}} \right) - \frac{1}{r_{31}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{r_{31}} \right) \right\}$$

ovvero

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial u} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{r_{21}}{r_{31}} \right) \right].$$

Sia poi ω , l'angolo che la normale principale alla curva $v = \operatorname{cost}^2$, $w = \operatorname{cost}^2$ nella sua direzione positiva forma colla direzione positiva della linea $u = \operatorname{cost}^2$; avremo:

$$\cos \omega = \sum_i \cos^2 \lambda_i \cdot X_i, \quad \operatorname{sen} \omega = \sum_i \lambda_i \cdot X_i$$

quindi per la (B)

$$(24) \quad \cos \omega = -\frac{\rho_1}{r_{21}}, \quad \operatorname{sen} \omega = -\frac{\rho_1}{r_{31}}. \quad (*)$$

(*) Nota. - Da queste formole segue

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{H_2}{H_3} \frac{\frac{\partial H_1}{\partial v}}{\frac{\partial H_1}{\partial w}}.$$

Ma se θ , e' l'angolo che le linee $H_1 = \operatorname{cost}^2$ sulla superficie $u = \operatorname{cost}^2$ formano colle linee $v = \operatorname{cost}^2$, abbiamo

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{H_2}{H_3} \frac{\frac{\partial H_1}{\partial w}}{\frac{\partial H_1}{\partial v}};$$

ne risulta quindi il teorema:

Le linee involupate sopra una superficie $u = \operatorname{cost}^2$ dalle

Introducendo simultaneamente con $\rho_1, T_1; \rho_2, T_2$ i raggi di flessione e torsione delle curve lungo le quali variano la sola v o la sola w , avremo:

$$(26) \quad \frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{r_{11}^2} + \frac{1}{r_{21}^2}, \quad \frac{1}{\rho_2^2} = \frac{1}{r_{22}^2} + \frac{1}{r_{12}^2}, \quad \frac{1}{\rho_3^2} = \frac{1}{r_{13}^2} + \frac{1}{r_{23}^2},$$

$$(27) \quad \frac{1}{T_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial u}, \quad \frac{1}{T_2} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial v}, \quad \frac{1}{T_3} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial w},$$

Dove

$$(27') \quad \operatorname{tg} \omega_1 = \frac{r_{21}}{r_{11}}, \quad \operatorname{tg} \omega_2 = \frac{r_{12}}{r_{22}}, \quad \operatorname{tg} \omega_3 = \frac{r_{23}}{r_{13}}.$$

Per mezzo delle (23) Lamé ha trasformato nel modo seguente le equazioni (14), (15) cui soddisfanno H_1, H_2, H_3 .

Introducendo per le derivate delle H i valori tratti dalle (23) esse diventano

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \frac{1}{r_{ik}}}{\partial s_i} + \frac{\partial \frac{1}{r_{ki}}}{\partial s_k} + \frac{1}{r_{ki} r_{ik}} + \frac{1}{r_{ik}^2} + \frac{1}{r_{ki}^2} = 0 \\ \frac{\partial \frac{1}{r_{ik}}}{\partial s_i} + \frac{1}{r_{ik}} \left(\frac{1}{r_{ik}} - \frac{1}{r_{ii}} \right) = 0, \end{array} \right.$$

Dove i, k , l sono i tre indici 1, 2, 3 in un ordine qualunque e $ds_i = H_i ds$, $ds_k = H_k dv$, $ds_l = H_l dw$.

Facciamo subito un'applicazione di queste formole generali a ricercare:

Quali sistemi ∞^1 di superficie di rotazione possono far parte di un sistema triplo ortogonale?

Se le $w = \operatorname{cost}^2$ sono superficie di rotazione e le linee $v = \operatorname{cost}^2$ o meridiani, sarà

normali principali delle curve traiettorie ortogonali del sistema $u = \operatorname{cost}^2$ hanno per traiettorie ortogonali le linee

$$H_1 = \operatorname{cost}^2.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial v} = 0$$

e quindi per la prima delle (15) o $\frac{\partial H_2}{\partial v} = 0$, o $\frac{\partial H_1}{\partial v} = 0$. Ma nel secondo caso sarebbe per le (23) $\frac{1}{r_{11}} = 0$, cioè le superficie di rotazione $w = \text{cost}$ sarebbero cono o cilindro, il che escludiamo. Sarà dunque

$$\frac{\partial H_1}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial H_3}{\partial v} = 0$$

e perciò

$$\frac{1}{r_{12}} = 0, \quad \frac{1}{r_{21}} = 0,$$

il che significa che le superficie $v = \text{cost}$ sono piani, cioè i piani delle curve meridiane. Dunque le superficie di rotazione hanno il medesimo asse ed il sistema triplo ortogonale è compatto nel modo accennato al § 123.

Capitolo XIII.

Coordinate ellittiche - Geodetiche dell'elissoide.

130. - Coordinate ellittiche. - Uno dei più semplici ed importanti esempi di sistemi tripli ortogonali si ha nel sistema di superficie del secondo ordine confocate. Esso dà luogo alle coordinate ellittiche introdotte nell'Analisi da Lamé.

Consideriamo il sistema di superficie del secondo ordine

comparsi definito dall'equazione

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2+h} + \frac{y^2}{b^2+h} + \frac{z^2}{c^2+h} = 1$$

dove h è un parametro variabile e supponiamo

$$a^2 > b^2 > c^2.$$

La superficie (1) corrispondente ad un determinato valore di h è reale soltanto quando h giace fra $+\infty$ e $-a^2$ e più precisamente essa è

un'ellissoide	quando	$+\infty > h > -c^2$
un'iperboloide ad una falda	"	$-c^2 > h > -b^2$
un'iperboloide a due falde	"	$-b^2 > h > -a^2$.

Per $h = +\infty$ si ha una sfera di raggio infinito; variando h da $+\infty$ a $-c^2$, la superficie rimane sempre un'ellissoide, e l'asse minore $\sqrt{c^2+h}$ impicciolisce sempre più fino a diventare zero, l'ellissoide riducendosi al limite allo spazio xy (contata due volte) interna all'ellisse focale $\frac{x^2}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{b^2-c^2} = 1$. Appena è $h < -c^2$, la superficie è un'iperboloide ad una falda e se si pone $h = -c^2 - \epsilon$, con ϵ positivo, poi si fa tendere ϵ verso zero, si ricorre che per $\epsilon = 0$ l'iperboloide si riduce alla porzione di spazio xy esterna all'ellisse focale; questa ellisse forma adunque il passaggio dalla serie delle ellissoidi a quella delle iperboloidi ad una falda. Medesimamente si vedrà che il passaggio da questa serie di iperboloidi a quella delle iperboloidi a due falde avviene attraversando l'iperboloide focale $\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2-c^2} = 1$.

Per ogni punto (ξ, η, ζ) dello spazio passano tre superfici del sistema (1) corrispondenti ai tre valori di h radici

Dell'equazione del terzo grado

$$f(\lambda) = (\alpha^2 + \lambda)(\beta^2 + \lambda)(\gamma^2 + \lambda) - (\beta^2 + \lambda)(\gamma^2 + \lambda)^2 - (\gamma^2 + \lambda)(\alpha^2 + \lambda)^2 - (\alpha^2 + \lambda)(\beta^2 + \lambda)^2 = 0$$

e poiché

$$f(+\infty) > 0, \quad f(-\alpha^2) < 0, \quad f(-\beta^2) > 0, \quad f(-\gamma^2) < 0,$$

l'equazione avrà le tre radici reali h_1, h_2, h_3 giacenti rispettivamente negli intervalli

$$+\infty > h_1 > -\alpha^2, \quad -\alpha^2 > h_2 > -\beta^2, \quad -\beta^2 > h_3 > -\gamma^2$$

e le tre superficie corrispondenti del sistema (1)

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{\alpha^2 + h_1} + \frac{y^2}{\beta^2 + h_1} + \frac{z^2}{\gamma^2 + h_1} = 1 \\ \frac{x^2}{\alpha^2 + h_2} + \frac{y^2}{\beta^2 + h_2} + \frac{z^2}{\gamma^2 + h_2} = 1 \\ \frac{x^2}{\alpha^2 + h_3} + \frac{y^2}{\beta^2 + h_3} + \frac{z^2}{\gamma^2 + h_3} = 1 \end{array} \right.$$

che passano per (ξ, η, ζ) saranno rispettivamente un'ellissoide, un'iperboloido ad una falda ed un'iperboloido a due falde.

Possiamo definire la posizione di un punto $P \equiv (x, y, z)$ dello spazio per mezzo dei parametri h_1, h_2, h_3 delle superficie del sistema (1); in tal caso h_1, h_2, h_3 si dicono le coordinate ellittiche del punto P . Esse sono legate alle coordinate cartesiane del medesimo punto dalle relazioni (2).

Per calcolare l'elemento lineare dello spazio in coordinate ellittiche, osserviamo (*) che, essendo h_1, h_2, h_3 le radici dell'equazione di 3° grado in h :

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + h} + \frac{y^2}{\beta^2 + h} + \frac{z^2}{\gamma^2 + h} - 1 = 0$$

si avrà particolarmente, qualunque sia h :

$$(3) \quad \frac{x^2}{\alpha^2 + h} + \frac{y^2}{\beta^2 + h} + \frac{z^2}{\gamma^2 + h} - 1 = \frac{(h - \alpha^2)(h - \beta^2)(h - \gamma^2)}{(\alpha^2 + h)(\beta^2 + h)(\gamma^2 + h)}$$

(*) V. Kirchhoff - Mathematische Physik - 17^{te} Vorlesung.

Moltiplicando su ambo le parti per $(a^2+h)(b^2+h)(c^2+h)$, poi facendo successivamente $h = -a^2, -b^2, -c^2$, otteniamo

$$(4) \quad \begin{cases} x^2 = \frac{(a^2+h_1)(a_2+h_1)(a^2+h_2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ y^2 = \frac{(b^2+h_1)(b^2+h_2)(b^2+h_3)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ z^2 = \frac{(c^2+h_1)(c^2+h_2)(c^2+h_3)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}; \end{cases}$$

formole che danno le coordinate cartesiane espresse per le coordinate ellittiche.

Da queste formole derivate logaritmicamente rispetto a h_1, h_2, h_3 seguono le altre

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial h_1} = \frac{1}{2} \frac{x}{a^2+h_1}, & \frac{\partial x}{\partial h_2} = \frac{1}{2} \frac{x}{a^2+h_2}, & \frac{\partial x}{\partial h_3} = \frac{1}{2} \frac{x}{a^2+h_3}, \\ \frac{\partial y}{\partial h_1} = \frac{1}{2} \frac{y}{b^2+h_1}, & \frac{\partial y}{\partial h_2} = \frac{1}{2} \frac{y}{b^2+h_2}, & \frac{\partial y}{\partial h_3} = \frac{1}{2} \frac{y}{b^2+h_3}, \\ \frac{\partial z}{\partial h_1} = \frac{1}{2} \frac{z}{c^2+h_1}, & \frac{\partial z}{\partial h_2} = \frac{1}{2} \frac{z}{c^2+h_2}, & \frac{\partial z}{\partial h_3} = \frac{1}{2} \frac{z}{c^2+h_3}; \end{cases}$$

e dalle (2) sottraendole due a due:

$$(5') \quad \begin{cases} \frac{x^2}{(a^2+h_1)(a^2+h_2)} + \frac{y^2}{(b^2+h_1)(b^2+h_2)} + \frac{z^2}{(c^2+h_1)(c^2+h_2)} = 0, \\ \frac{x^2}{(a^2+h_1)(a^2+h_3)} + \frac{y^2}{(b^2+h_1)(b^2+h_3)} + \frac{z^2}{(c^2+h_1)(c^2+h_3)} = 0, \\ \frac{x^2}{(a^2+h_2)(a^2+h_3)} + \frac{y^2}{(b^2+h_2)(b^2+h_3)} + \frac{z^2}{(c^2+h_2)(c^2+h_3)} = 0. \end{cases}$$

Derivando la (3) rispetto ad h e ponendo poi successivamente $h = h_1, h_2, h_3$, otteniamo

$$(5'') \quad \begin{cases} \frac{x^2}{(a^2+h_1)^2} + \frac{y^2}{(b^2+h_1)^2} + \frac{z^2}{(c^2+h_1)^2} = \frac{(h_1-h_2)(h_1-h_3)}{(a^2+h_1)(b^2+h_1)(c^2+h_1)}, \\ \frac{x^2}{(a^2+h_2)^2} + \frac{y^2}{(b^2+h_2)^2} + \frac{z^2}{(c^2+h_2)^2} = \frac{(h_2-h_1)(h_2-h_3)}{(a^2+h_2)(b^2+h_2)(c^2+h_2)}, \\ \frac{x^2}{(a^2+h_3)^2} + \frac{y^2}{(b^2+h_3)^2} + \frac{z^2}{(c^2+h_3)^2} = \frac{(h_3-h_1)(h_3-h_2)}{(a^2+h_3)(b^2+h_3)(c^2+h_3)}. \end{cases}$$

Avremo quindi

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial h} \right)^2 = \frac{1}{4} \frac{(h_1-h_2)(h_1-h_3)}{(a^2+h_1)(b^2+h_1)(c^2+h_1)}, \quad \sum \left(\frac{\partial y}{\partial h} \right)^2 = \frac{1}{4} \frac{(h_2-h_1)(h_2-h_3)}{(a^2+h_2)(b^2+h_2)(c^2+h_2)},$$

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial h_i} \right) = \frac{1}{4} \frac{(h_2 - h_1)(h_2 - h_1)}{(\alpha^2 + h_2)(\beta^2 + h_2)(\gamma^2 + h_2)},$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial h_1} \frac{\partial x}{\partial h_1} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial h_1} \frac{\partial x}{\partial h_2} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial h_2} \frac{\partial x}{\partial h_1} = 0,$$

e per l'elemento lineare dello spazio in coordinate ellittiche h_1, h_2, h_3 :

$$(6) \quad ds^2 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{(h_1 - h_2)(h_1 - h_3)}{(\alpha^2 + h_1)(\beta^2 + h_1)(\gamma^2 + h_1)} dh_1 + \frac{(h_2 - h_3)(h_2 - h_1)}{(\alpha^2 + h_2)(\beta^2 + h_2)(\gamma^2 + h_2)} dh_2 + \frac{(h_3 - h_1)(h_3 - h_2)}{(\alpha^2 + h_3)(\beta^2 + h_3)(\gamma^2 + h_3)} dh_3 \right\},$$

formula che è simmetrica che il sistema triplo di superficie del secondo ordine confocali è un sistema ortogonale.

131. - Geodetiche dell'ellissoide. - Teorema di Joachimsthal.

- Faremo un'applicazione delle coordinate ellittiche allo studio delle linee geodetiche tracciate sopra l'ellissoide:

$$(7) \quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

avvertendo che analoghe considerazioni possono farsi sul caso dell'iperboloidi ad una o due falde.

Se nelle formule del § precedente facciamo $h_3 = 0$, avremo appunto le formule relative all'ellissoide (7) riferite alle sue linee di curvatura, cioè alle due intersezioni coi due sistemi di iperboloidi confocali. Assumendo per parametri delle linee di curvatura i rispettivi assi principali u, v delle iperboloidi ad una o due falde che passano per ogni punto della superficie ellissoidale (7), avremo:

$$u^2 = \alpha^2 + h_2, \quad v^2 = \alpha^2 + h_1,$$

e porremo inoltre per brevità

$$(8) \quad \alpha^2 - \beta^2 = h^2, \quad \alpha^2 - \gamma^2 = k^2.$$

I parametri u, v varieranno entro i limiti

$$(9) \quad k^2 > u^2 > h^2, \quad h^2 > v^2 > 0,$$

e le (4), (6) diventeranno

$$(9) \quad x = \pm a \frac{uv}{hk}, \quad y = \pm b \frac{\sqrt{(u^2-k^2)(k^2-v^2)}}{h\sqrt{k^2-h^2}}, \quad z = \pm c \frac{\sqrt{(k^2-u^2)(k^2-v^2)}}{k\sqrt{k^2-h^2}},$$

$$(10) \quad ds^2 = (u^2-v^2) \left\{ \frac{u^2-u^2}{(u^2-k^2)(k^2-u^2)} du^2 + \frac{v^2-v^2}{(k^2-v^2)(k^2-v^2)} dv^2 \right\}.$$

Se poniamo

$$\int \frac{\sqrt{u^2-k^2}}{\sqrt{(u^2-k^2)(k^2-u^2)}} du = u, \quad \int \frac{\sqrt{v^2-k^2}}{\sqrt{(k^2-v^2)(k^2-v^2)}} dv = v,$$

avremo risotto l'elemento lineare (10) alla forma isometrica di Liouville (C. III § 31) e potremo quindi esprimere con sole quadrature l'equazione in termini finiti delle geodetiche sull'ellissoide ed il loro arco. La formola (10) del § 31 ci dà per l'integrale primo dell'equazione delle geodetiche che

$$(11) \quad u^2 \sin^2 \theta + v^2 \cos^2 \theta = C$$

Dove θ indica l'angolo che la geodetica forma colle linee $v = \text{cost}^2$ e C una costante arbitraria. Però notiamo che a quella medesima equazione (11) soddisfanno, oltre le geodetiche, le linee stesse di curvatura $u = \text{cost}^2$, $v = \text{cost}^2$, e che è ben naturale perché la (11) si è ottenuta dall'equazione differenziale delle geodetiche moltiplicandola per $2 \sin \theta \cos \theta$, fattore che s'annulla per $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Si può dare della (11) un'importante interpretazione geometrica fondata sulle considerazioni seguenti. In un punto qualunque (x, y, z) dell'ellissoide conduciamo il piano tangente e per il centro il piano parallelo; la sezione ellittica prodotta avrà per assi 2 diametri paralleli alle direzioni delle linee di curvatura uscenti da (x, y, z) . E infatti indicando

con $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$; $\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma'$ e con α, β, γ di direzione di questi.
 Parametri abbiamo

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{\partial x}{\partial h_3} : \frac{\partial y}{\partial h_3} : \frac{\partial z}{\partial h_3} = \frac{x}{a^2+h_3} : \frac{y}{b^2+h_3} : \frac{z}{c^2+h_3}$$

$$\cos\alpha' : \cos\beta' : \cos\gamma' = \frac{\partial x}{\partial h_1} : \frac{\partial y}{\partial h_1} : \frac{\partial z}{\partial h_1} = \frac{x}{a^2+h_1} : \frac{y}{b^2+h_1} : \frac{z}{c^2+h_1}$$

e da queste segue subito (sottraendo la 3^a delle (5') dalla prima, poi facendo $h_1=0$)

$$\frac{\cos\alpha \cos\alpha'}{a^2} + \frac{\cos\beta \cos\beta'}{b^2} + \frac{\cos\gamma \cos\gamma'}{c^2} = 0$$

la quale sta ad esprimere che i due parametri considerati sono coniugati; e poichè sono anche ortogonali, essi saranno appunto gli assi della sezione ellittica.

Ciò posto se ρ_1, ρ_2 indicano le lunghezze di questi semi-assi paralleli rispettivamente alle tangenti delle linee $u = \cos\alpha'$ e $v = \cos\beta'$, avremo:

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{\cos^2\alpha'}{a^2} + \frac{\cos^2\beta'}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma'}{c^2}$$

$$\frac{1}{\rho_2^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}$$

abbia per le formole precedenti

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \left\{ \frac{x^2}{a^2(a^2+h_3)} + \frac{y^2}{b^2(b^2+h_3)} + \frac{z^2}{c^2(c^2+h_3)} \right\} \times \frac{1}{\frac{x^2}{(a^2+h_3)} + \frac{y^2}{(b^2+h_3)} + \frac{z^2}{(c^2+h_3)}}$$

Ma dalle (5') segue per $h_1=0$

$$\frac{x^2}{a^2(a^2+h_3)} + \frac{y^2}{b^2(b^2+h_3)} + \frac{z^2}{c^2(c^2+h_3)} = 0,$$

quindi

$$\frac{x^2}{(a^2+h_3)} + \frac{y^2}{(b^2+h_3)} + \frac{z^2}{(c^2+h_3)} = \left\{ \frac{x^2}{(a^2+h_3)} + \frac{y^2}{(b^2+h_3)} + \frac{z^2}{(c^2+h_3)} \right\} - \left\{ \frac{x^2}{a^2(a^2+h_3)} + \frac{y^2}{b^2(b^2+h_3)} + \frac{z^2}{c^2(c^2+h_3)} \right\} =$$

$$= -h_3 \left\{ \frac{x^2}{a^2(a^2+h_3)} + \frac{y^2}{b^2(b^2+h_3)} + \frac{z^2}{c^2(c^2+h_3)} \right\}$$

e perciò $\rho_1^2 = -h_3$; similmente avremo $\rho_2^2 = -h_2$, cioè

$$(12) \quad \rho_1^2 = \alpha^2 - v^2, \quad \rho_2^2 = \alpha^2 - u^2,$$

le quali formale dimostriamo che ρ è il semiasse maggiore, ρ' il minore.

Nella sezione centrale troviamo il semidiametro parallelo a quella tangente in (x, y, z) all'ellissoide di forma $1 \text{ angolo } \theta$ colla linea $v = \cot \theta$; indicando con ρ la sua lunghezza, avremo

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2 \theta}{a^2 - u^2} + \frac{\sin^2 \theta}{a^2 - v^2}.$$

Se poi δ indica la distanza del centro dal piano tangente in (x, y, z) si avrà:

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$$

ottien per la prima delle (5^u)

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}{a^2 b^2 c^2}.$$

Si deduciamo

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{\delta^2 \rho^2} = (a^2 - u^2) \sin^2 \theta + (a^2 - v^2) \cos^2 \theta;$$

la (11) eguivale quindi all'altra

$$\delta \rho = \cot \theta;$$

Esprime la seguente proprietà delle geodetiche

Il prodotto della distanza del centro dal piano tangente in un punto di una linea geodetica per la lunghezza del diametro parallelo alla tangente della geodetica nel medesimo punto è costante lungo tutta la geodetica (*).

Per quanto abbiamo osservato sopra, la medesima proprietà appartiene anche alle linee di curvatura.

132. - Geodetiche uscenti dagli ombelichi. - Condi-
veriamo ora i quattro ombelichi reali dell'ellissoide. Essi

(*) Questo teorema fondamentale è dovuto a Joachimsthal.

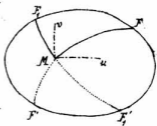
giacciono sulla sezione centrale dell'asse massimo e minimo ed hanno per coordinate

$$x = \pm a \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} = \pm \frac{ak}{k}, \quad y = 0, \quad z = \pm c \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} = \pm c \frac{\sqrt{h^2 - k^2}}{k}.$$

Il piano tangente ad un ombelico è distante dal centro della lunghezza $\delta = \frac{ac}{b}$ e qualunque semidiametro della sezione centrale fatta con un piano parallelo è eguale a b , poiché tale sezione è un cerchio di raggio b . Dunque per ogni geodetica uscente da un ombelico il prodotto δp ha il valore costante ac .

Da questa osservazione possono ridursi conseguenze molto notevoli segnalate la prima volta da Roberts. Consideriamo un punto M dell'ellissoide

e unisciamolo per archi geodetici MI , MI' a due ombelichi I, I' non diametralmente opposti. Il valore della costante δp è lo stesso per le due geodetiche, e siccome in M anche δ è la stessa, i due diametri condotti parallelamente alle tangenti in M alle due geodetiche dovranno avere eguale lunghezza e faranno quindi angoli eguali cogli assi della sezione centrale e poiché questi sono paralleli alle direzioni delle linee di curvatura in M , ne segue:



Le direzioni delle linee di curvatura in M sono le bisettrici dell'angolo interno e dell'angolo esterno formato dagli archi geodetici MI, MI' .

Si risulta che l'arco geodetico MI' che riunisce M all'om.

belico F' diametralmente opposto ad F e' il prolungamento dell'arco geodetico MI e quindi:

Ogni geodetica uscente da un ombelico passa per l'ombelico diametralmente opposto.

Come due punti diametralmente opposti della sfera, così due ombelichi opposti dell'ellissoide possono dunque riunirsi con infiniti archi geodetici, i quali avranno tutti eguale lunghezza poichè, per la definizione stessa di geodetica, passando da uno di questi archi al successivo, la variazione prima di tale lunghezza è nulla.

È noto che le curve piane dotate della proprietà che le congiungenti MI, MI' di ogni loro punto M con due punti fissi F, F' nel piano formano angoli eguali o supplementari colla curva, sono ellissi ed iperbole aventi i fuochi nei punti F, F' . Una proprietà perfettamente simile sussiste per le curve tracciate sopra una superficie qualunque, sostituendo ai segmenti rettilinei MI, MI' gli archi geodetici MI, MI' . Ne segue che le linee di curvatura di un'ellissoide sono ellissi ed iperbole geodetiche aventi per fuochi gli ombelichi; cioè la somma o la differenza delle distanze geodetiche di ogni loro punto dai due fuochi è costante. Più precisamente ogni linea di curvatura è un'ellisse geodetica rispetto a due ombelichi (fuochi) interni ambedue alla curva e un'iperbole geodetica rispetto a due ombelichi dei quali uno sia interno, l'altro esterno (Cf. § seg^{te}).

133. - Equazione delle geodetiche in termini finiti.
- Potremo esprimere per mezzo di sole quadrature l'e.

quazione in termini finiti delle geodetiche dell'ellissoide. Ed il loro arco σ colle formole (11), (12) § 31, che nel nostro caso divengono

$$\int \frac{\sqrt{\alpha^2 - u^2}}{\sqrt{(u^2 - C)(u^2 - h^2)(h^2 - u^2)}} du \mp \int \frac{\sqrt{\alpha^2 - v^2}}{\sqrt{(C - v^2)(h^2 - v^2)(h^2 - v^2)}} dv = \text{cost}^c$$

$$\sigma = \int \frac{\sqrt{(\alpha^2 - u^2)(u^2 - C)}}{(u^2 - h^2)(h^2 - u^2)} du \mp \int \frac{\sqrt{(u^2 - v^2)(C - v^2)}}{(h^2 - v^2)(h^2 - v^2)} dv,$$

Dove i segni superiori ed inferiori vanno presi insieme. Gli integrali che qui si presentano sono in generale iperellittici, ma nel caso particolare delle geodetiche aventi Dugli ombelichi si riducono ad integrali ellittici. E infatti in questo caso abbiamo

$$\delta p = \alpha c$$

e il valore della costante C nella (11) e quindi eguale ad h^2 , per cui le formole superiori diventano

$$(12) \quad \int \frac{\sqrt{\alpha^2 - u^2}}{h^2 - u^2} \frac{du}{u^2 - h^2} \mp \int \frac{\sqrt{\alpha^2 - v^2}}{h^2 - v^2} \frac{dv}{h^2 - v^2} = \text{cost}^c,$$

$$(13) \quad \sigma = \int \frac{\sqrt{\alpha^2 - u^2}}{h^2 - u^2} du \mp \int \frac{\sqrt{\alpha^2 - v^2}}{h^2 - v^2} dv.$$

Ad ogni particolare valore della costante del secondo membro nella (12) corrisponde una speciale geodetica che riunisce fra loro due ombelichi opposti e a seconda del segno scelto essa riunisce i due ombelichi

$$\Gamma \equiv \left(\frac{\alpha h}{k}, 0, \frac{c\sqrt{k^2 - h^2}}{k} \right), \quad \Gamma' \equiv \left(-\frac{\alpha h}{k}, 0, -\frac{c\sqrt{k^2 - h^2}}{k} \right)$$

o gli altri due

$$\Gamma_1 \equiv \left(-\frac{\alpha h}{k}, 0, \frac{c\sqrt{k^2 - h^2}}{k} \right), \quad \Gamma_1' \equiv \left(\frac{\alpha h}{k}, 0, -\frac{c\sqrt{k^2 - h^2}}{k} \right).$$

Da questa osservazione segue che il valore di $\frac{dv}{du}$ per v

Due archi geodetici $MF, M'F'$, congiungenti un medesimo punto M dell'ellissoide coi due ombelici F, F' , sono eguali: e di se-
 guo contrario, il che dimostra nuovamente il teorema del para-
 grafso precedente.

Volendo ora eseguire le quadrature nelle formole (12), (13)
 per funzioni ellittiche, assumoremo per semplicità il semi-
 asse maggiore dell'ellissoide per unità lineare e ponendo
 quindi $\alpha = 1$ potremo prendere la quantità $k = \sqrt{1-c^2} < 1$
 come modulo di una classe di funzioni ellittiche, per le
 quali le quantità K, K' di Jacobi saranno reali. Il luogo
 dei parametri u, v introduciamo due nuovi τ, τ' , colle
 sostituzioni

$$(14) \quad u = k \operatorname{sn} \alpha \tau, \quad v = k' \operatorname{sn} \alpha \tau',$$

ed essendo $k < k'$, poniamo

$$h = k' \operatorname{dn} \alpha,$$

Dove α è una quantità reale, compresa fra 0 e K . Avve-
 mo così

$$a = 1, \quad b = \operatorname{dn} \alpha, \quad c = k', \quad h = k' \operatorname{dn} \alpha;$$

le formole (9) diventeranno

$$(14') \quad x = \pm \frac{\operatorname{sn} \tau \operatorname{sn} \tau'}{\operatorname{sn} \alpha}, \quad y = \pm \frac{\operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha} \sqrt{(\operatorname{sn}^2 \tau - \operatorname{sn}^2 \alpha)(\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \tau)}, \quad z = \pm k' \frac{\operatorname{cn} \tau \operatorname{cn} \tau'}{\operatorname{cn} \alpha}$$

e i quattro ombelici avranno per coordinate

$$F \equiv (\operatorname{sn} \alpha, 0, k' \operatorname{dn} \alpha), \quad F' \equiv (-\operatorname{sn} \alpha, 0, -k' \operatorname{dn} \alpha)$$

$$F_1 \equiv (-\operatorname{sn} \alpha, 0, k' \operatorname{dn} \alpha), \quad F_2 \equiv (\operatorname{sn} \alpha, 0, -k' \operatorname{dn} \alpha).$$

Scegliamo nelle (14') il segno superiore; nell'ombelico F
 potremo prendere

$$\tau = \alpha, \quad \tau' = \alpha$$

Dopo di che, dovendo rimanere $l^2 = u^2 = k^2$, $k^2 = v^2 = 0$, cioè
 $1 = \sin^2 \tau = \sin^2 \alpha$, $\sin^2 \alpha = \sin^2 \tau$, $\alpha > 0$, si vede subito che τ, τ_1
 varieranno negli intervalli

$$\alpha \leq \tau \leq 2K - \alpha, \quad -\alpha \leq \tau_1 \leq \alpha;$$

Le formole (14') ci daranno i punti della superficie ellittica
 reale dalla parte positiva dell'asse y e le coordinate
 curvilinee τ, τ_1 dei quattro ombelichi summi

$$(15) \quad \begin{cases} \Gamma \equiv (\alpha, \alpha) & , & \Gamma' \equiv (2K - \alpha, -\alpha) \\ \Gamma_1 \equiv (\alpha, -\alpha) & , & \Gamma'_1 \equiv (2K - \alpha, \alpha) \end{cases}$$

Introducendo i nuovi parametri τ, τ_1 , l'equazione (12)
 delle geodetiche diverrà:

$$\int \frac{dn^2 \tau \, d\tau}{\sin^2 \tau - \sin^2 \alpha} \mp \int \frac{dn^2 \tau_1 \, d\tau_1}{\sin^2 \tau_1 - \sin^2 \alpha} = \text{cost}^2$$

e il loro arco σ sarà dato dalla formola

$$\sigma = \int dn^2 \tau \, d\tau \pm \int dn^2 \tau_1 \, d\tau_1.$$

Si applichiamo queste formole all'arco geodetico
 MF che unisce un punto M all'ombelico $\Gamma \equiv (\alpha, \alpha)$,
 vediamo subito che mentre τ cresce, τ_1 cresce e debbono
 quindi scegliere i segni inferiori. Scriviamo perciò
 l'equazione della geodetica sotto la forma

$$\int_{\alpha}^{\tau} \frac{dn^2 \tau}{\sin^2 \tau - \sin^2 \alpha} \, d\tau - \int_{\alpha}^{\tau_1} \frac{dn^2 \tau_1}{\sin^2 \tau_1 - \sin^2 \alpha} \, d\tau_1 = \text{cost}^2$$

e per l'arco σ , contato dall'ombelico Γ , avremo

$$\sigma = \int_{\alpha}^{\tau} dn^2 \tau \, d\tau - \int_{\alpha}^{\tau_1} dn^2 \tau_1 \, d\tau_1,$$

ovvero

$$(17) \quad \sigma = \frac{E}{K} (\tau - \tau_1) + Z(\tau) - Z(\tau_1),$$

Dove $Z(\tau)$ è la funzione di Jacobi ed E l'integrale completo di Legendre

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

cioè la lunghezza dello semi-ellisse principale nel primo xz. Per la lunghezza σ , dell'arco geodetico MI' , che va all'ombelico I' , $\equiv (\alpha, -\alpha)$ si avrà invece

$$(17') \quad \sigma = \frac{E}{K} (\tau + \tau_1) + Z(\tau) + Z(\tau_1),$$

da cui

$$\frac{1}{2} (\sigma + \sigma_1) = \frac{E}{K} \tau + Z(\tau)$$

$$\frac{1}{2} (-\sigma + \sigma_1) = \frac{E}{K} \tau_1 + Z(\tau_1).$$

Queste formole dimostrano che le linee di curvatura $\tau = \text{cost}^2$, $\tau_1 = \text{cost}^2$, sono rispettivamente ellissi ed iperbole geodetiche aventi i fuochi negli ombelichi I, I' , come si era sopra asserito. Lungo una linea $\tau = \text{cost}^2$ o $\tau_1 = \text{cost}^2$, essendo costanti rispettivamente

$$\text{arc } MI' + \text{arc } MI,$$

$$\text{arc } MI' - \text{arc } MI$$

e d'altra parte essendo costanti ed eguali ad E le somme

$$\text{arc } MI' + \text{arc } MI',$$

$$\text{arc } MI' - \text{arc } MI',$$

ne segue che rispetto ai fuochi I, I' (o I', I) le linee $\tau = \text{cost}^2$ sono iperbole geodetiche e le $\tau_1 = \text{cost}^2$ ellissi.

Ogni linea di curvatura dell'ellissoide può quindi descriversi fissando un filo di lunghezza costante per le sue due estremità a due ombelichi (non diametralmente opposti), o per mezzo di uno stilo in M tendendo il filo

sulla superficie ellittica, il punto M descriverà una linea di curvatura.

134. - Integrazione per funzioni ellittiche. - Per eseguire le quadrature nella (16) osserviamo che in generale D ha:

$$\int_0^z \frac{dn^2 z \, dz}{sn^2 z - sn^2 \alpha} = -\frac{1}{sn^2 \alpha} \int_0^z \frac{dn^2 z}{1 - k^2 sn^2(\alpha + iK') sn^2 z} \, dz =$$

$$= \frac{k^2}{sn^2 \alpha} \int_0^z \frac{sn^2 z \, dz}{1 - k^2 sn^2(\alpha + iK') sn^2 z} - \frac{1}{sn^2 \alpha} \int_0^z \frac{dz}{1 - k^2 sn^2(\alpha + iK') sn^2 z}$$

e col simbolo di Jacobi

$$\int_0^z \frac{sn^2 z \, dz}{1 - k^2 sn^2(\alpha + iK') sn^2 z} = \frac{1}{k^2 sn(\alpha + iK') cn(\alpha + iK') dn(\alpha + iK')} \Pi(z, \alpha + iK') =$$

$$= -\frac{sn^2 \alpha}{cn \alpha \, dn \alpha} \Pi(z, \alpha + iK'),$$

$$\int_0^z \frac{dz}{1 - k^2 sn^2(\alpha + iK') sn^2 z} = z + \frac{sn(\alpha + iK')}{cn(\alpha + iK') \, dn(\alpha + iK')} \Pi(z, \alpha + iK') =$$

$$= z - \frac{sn \alpha}{cn \alpha \, dn \alpha} \Pi(z, \alpha + iK');$$

ne risultano

$$\int \frac{dn^2 z \, dz}{sn^2 z - sn^2 \alpha} = \frac{dn \alpha}{sn \alpha \, cn \alpha} \left\{ \Pi(z, \alpha + iK') - z \frac{cn \alpha}{dn \alpha \, dn \alpha} \right\}.$$

Ma si ha (*)

$$\Pi(z, \alpha + iK') = z \left\{ Z(\alpha) + \frac{cn \alpha \, dn \alpha}{sn \alpha} \right\} + \frac{1}{2} \log \frac{\theta_0(\alpha - z)}{\theta_0(\alpha + z)}$$

(*) È infatti

$$\Pi(z, \alpha + iK') = z Z(\alpha + iK') + \frac{1}{2} \log \frac{\theta_0(\alpha - z + iK')}{\theta_0(\alpha + z + iK')}$$

ma

$$\theta_0(u + iK') = c e^{-\frac{ni}{2K} \theta_0(u)}$$

e essendo una costante, quindi

$$\frac{\theta_0(\alpha - z + iK')}{\theta_0(\alpha + z + iK')} = e^{\frac{ni}{2K} z} \frac{\theta_0(\alpha - z)}{\theta_0(\alpha + z)}$$

per cui

$$\int_0^z \frac{dn^2 dz}{sn^2 z - sn^2 a} = \frac{dn a}{sn a \operatorname{cn} a} \left\{ z \left(Z(a) - k \frac{sn a \operatorname{cn} a}{dn a} \right) + \frac{1}{2} \log \frac{\theta_{11}(a-z)}{\theta_{11}(a+z)} \right\} =$$

$$= \frac{dn a}{sn a \operatorname{cn} a} \left\{ z Z(a+K) + \frac{1}{2} \log \frac{\theta_{11}(a-z)}{\theta_{11}(a+z)} \right\}.$$

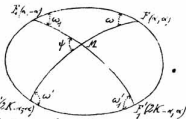
La (15) diventa quindi

$$(z-\tau)Z(a+K) + \frac{1}{2} \log \frac{\theta_{11}(\tau-a)\theta_{11}(\tau+a)}{\theta_{11}(\tau+d)\theta_{11}(\tau-d)} = \operatorname{cote}^2;$$

e passando dai logaritmi ai numeri

$$(18) \quad \frac{\theta_{11}(\tau-a) \cdot \theta_{11}(a+\tau)}{\theta_{11}(\tau+d) \cdot \theta_{11}(a-\tau)} = C e^{2Z(a+K)(\tau-\tau)}$$

La costante C che figura nell'equazione superiore per le geodetiche uscenti dall'ombelico $\Gamma = (a, a)$ può facilmente esprimersi in funzione dell'angolo ω che l'arco geodetico ΓM forma coll'arco $\Gamma I'$ dell'ellisse principale. Se tracciamo infatti l'arco geodetico $M I'$, e indichiamo con ψ l'angolo esterno $\Gamma' M I'$. Nel triangolo geodetico $\Gamma' M I'$, sarà ω il limite di ψ quando il punto M muoversi sull'arco geodetico $M I'$ di avvicina indefinitamente ad I' . Ora la linea di curvatura $r = \operatorname{cote}^2$ uscente da M forma



e perciò

$$\Pi(z, a+iK') = z Z(a+iK') + \frac{\pi i}{2K} z + \frac{1}{2} \log \frac{\theta_{11}(a-z)}{\theta_{11}(a+z)},$$

Da cui, essendo

$$Z(a+iK') = Z(a) - \frac{\pi i}{2K} + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{sn a},$$

risulta la formola citata.

coll' arco geodetico MI' l'angolo θ definito dalla formula

$$u \sin \theta + v \cos \theta = h^2$$

e divide per metà l'angolo I, MI' , dunque

$$\psi = \pi - 2\theta$$

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \cot \theta = \frac{u^2 - h^2}{h^2 - v^2} = \frac{\sin^2 \tau - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \tau}$$

e perciò

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \lim_{\tau, \tau = \alpha} \left(\frac{\sin^2 \tau - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \tau} \right) = \lim_{\tau, \tau = \alpha} \left(\frac{\tau - \alpha}{\alpha - \tau} \right).$$

Ma dalla (18), che lega fra loro τ, τ , e altre M sono sulla geodetica, si ha

$$C = \lim_{\tau, \tau = \alpha} \left(\frac{\partial_u(\tau - \alpha)}{\partial_u(\alpha - \tau)} \right) = \lim_{\tau, \tau = \alpha} \left(\frac{\tau - \alpha}{\alpha - \tau} \right).$$

Dunque

$$C = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2},$$

e la (18) si scriverà

$$(19) \quad \frac{\partial_u(\tau - \alpha) \partial_u(\alpha + \tau)}{\partial_u(\tau + \alpha) \partial_u(\alpha - \tau)} = \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \cdot e^{2Z(\alpha - \tau)(\tau - \alpha)}$$

135. - Teoremi di Heur e Roberts. - L'arco geodetico FM passa per l'ombelico simmetricamente opposto F' e secondo ω' indichiamo l'angolo che la direzione $F'M$ forma col l'arco geodetico $F'F$ dell'ellisse principale, con un ragionamento perfettamente analogo al superiore troveremo

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\omega'}{2} = \lim_{\tau = 2K - \alpha, \tau = -\alpha} \left\{ \frac{\sin^2 \tau - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \tau} \right\} = \lim_{\tau = 2K - \alpha, \tau = -\alpha} \left(\frac{2K - \tau - \alpha}{\alpha + \tau} \right)$$

essendo τ, τ legati fra loro dalla (19) che dà questa legge:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\omega'}{2} \cdot e^{-4KZ(\alpha + K)} = \lim_{\tau = 2K - \alpha, \tau = -\alpha} \frac{\partial_u(\alpha + \tau)}{\partial_u(\tau + \alpha)} = \lim_{\tau = 2K - \alpha, \tau = -\alpha} \frac{\partial_u(\tau + \tau)}{\partial_u(2K - \tau - \alpha)} = \lim_{\tau = 2K - \alpha, \tau = -\alpha} \frac{\alpha + \tau}{2K - \tau - \alpha}$$

e per contiguità:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\omega'}{2} = e \quad 4KZ(\alpha+K)$$

cioè

$$(20) \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega'}{2} = e \quad 2KZ(\alpha+K)$$

Abbiamo quindi il teorema di Roberts:

Qualunque sia l'arco geodetico $\overline{I'I'}$ che riunisce i due ombelichi opposti I, I' il prodotto

$$\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}}(\overline{I'I'}) \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}}(I'I')$$

è costante.

Il valore della costante e si può esprimere per mezzo dell'angolo Ω che l'arco geodetico congiunge l'ombelico I all'estremità dell'asse medio forma coll'asse $\overline{I'I'}$.

È infatti si ha evidentemente in questo caso $\omega = \omega' = \Omega$, quindi

$$e = \operatorname{tg}^2 \frac{\Omega}{2} \quad 2KZ(\alpha+K) \quad (*)$$

e poiché $Z(\alpha+K)$ è negativo (**), sarà $\operatorname{tg}^2 \frac{\Omega}{2} < 1$ e però Ω un angolo acuto.

La relazione (20) può scriverla

$$(20') \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega'}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\Omega}{2}$$

Ora l'arco geodetico $\overline{I'I'}$ travede in I' il piano αz e descrivendo un nuovo arco $I'NI$ sopra l'altre semi-ellissoide, ove

(*) Alla medesima formola si giunge anche osservando che nell'estremità dell'asse medio si ha $\tau = K$, $\tau_1 = 0$, ed applicando la (19).

(**) La funzione $Z(x)$ è nulla per $x = 0, K, 2K, \dots$; nell'intervallo da zero a K è positiva, da K a $2K$ negativa, etc.

$\gamma < 0$, ritorna in P ; w però non si chiude, come nel caso della sfera, ma andando di nuovo da P' forma coll'arco $P'I'$, un angolo w'' differente da w . E infatti se al posto arco $P'NI$ applichiamo la medesima formula (20') osservando che i nuovi angoli w, w' sono $\pi - w', \pi - w''$ otteniamo:

$$\cot \frac{w'}{2} \cot \frac{w''}{2} = \tanh^2 \frac{R}{2},$$

e quindi per la (20)

$$\tanh \frac{w''}{2} = h \tanh \frac{w}{2}, \quad h = \cot^2 \frac{w}{2} > 1.$$

Si segue $w'' > w$ e in generale, osservando che $w^{(n)}$ l'angolo corrispondente dopo n giri della geodetica considerata, avremo

$$\tanh \frac{w^{(n)}}{2} = h^n \tanh \frac{w}{2}.$$

Dunque l'angolo $w^{(n)}$ si avvicina indefinitamente a π al crescere di n e la geodetica converge sempre più verso l'ellisse principale.

L'equazione (19) sostituita per le geodetiche che riuniscono gli omologhi $P'I'$; per quelle invece che riuniscono gli altri due I, I' basterà nella (16) prendere il secondo integrale al segno contrario e si avrà quindi

$$\frac{\theta_n(\tau - \alpha) \theta_n(\alpha - \tau)}{\theta_n(\tau + \alpha) \theta_n(\alpha + \tau)} = e^{-2Z(\alpha + X)(\tau + \tau)}$$

Prevedendo che w l'angolo che l'arco geodetico $P'M$ fa coll'arco $P'I'$ di ellisse principale, avremo in modo analogo come sopra

$$\tanh^2 \frac{w}{2} = \lim_{\tau = \alpha, \tau = -\alpha} \left(\frac{\operatorname{sn}^2 \tau - \operatorname{sn}^2 \alpha}{\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \tau} \right) = \lim \frac{\tau - \alpha}{\alpha + \tau}.$$

D'altra parte per la formula superiore:

$$C' = \lim_{\tau \rightarrow a, \tau \rightarrow a} \frac{\partial_u(\tau-a) \partial_u(\alpha-\tau)}{\partial_u(\tau+a) \partial_u(\alpha+\tau)} = \lim \frac{\tau-a}{\alpha+\tau}$$

Daunque l'equazione delle geodetiche in quest'inc. sarà:

$$(21) \quad \frac{\partial_u(\tau-a) \partial_u(\alpha-\tau)}{\partial_u(\tau+a) \partial_u(\alpha+\tau)} = \frac{1}{2} \frac{w}{\omega} e^{-2Z(\alpha+K)(\tau+\tau)}$$

Confrontando colle (19) risulta

$$\frac{1}{2} \frac{w}{\omega} \frac{1}{2} \frac{w_1}{\omega_1} = \frac{\partial_u(\tau-a)}{\partial_u(\tau+a)} e^{2\tau Z(\alpha+K)}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{w}{\omega} = \frac{\partial_u(\alpha+\tau)}{\partial_u(\alpha-\tau)} e^{2\alpha Z(\alpha+K)}$$

queste formole dimostrano l'altro teorema (D. Probert):

lungo le ellissi o iperbole geodetiche di curvatura, coi fuochi in I, I_1 , è costante rispettivamente il prodotto $\frac{1}{2} \frac{w}{\omega} \frac{1}{2} \frac{w_1}{\omega_1}$ o il quoziente $\frac{1}{2} \frac{w}{\omega} \frac{1}{2} \frac{w_1}{\omega_1}$.

136. - Teorema di Charles. - In un punto qualunque $M \equiv (x, y, z)$ dell'ellissoide tiriamo la tangente alla linea geodetica che lo unisce all'ombelico I ; se ξ, η, ζ sono le coordinate di un punto qualunque su questa tangente si, tirato alla distanza ρ dal punto M di contatto, avremo:

$$\xi = x + \rho \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \right),$$

$$\eta = y + \rho \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v} \right),$$

$$\zeta = z + \rho \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

Dove θ è l'angolo che la geodetica forma colla $v = \text{cost}^2$ e si ha quindi per la (12) ove vale il segno inferiore

$$\frac{1}{2} \theta = -\sqrt{\frac{h^2 - v^2}{u^2 - h^2}}$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{h^2 - v^2}{u^2 - v^2}}, \quad \sin \theta = -\sqrt{\frac{u^2 - h^2}{u^2 - v^2}}$$

Quando i calcoli si introducano i parametri τ, τ', τ'' ,
 sianno

$$\left\{ \begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \tau \sin \tau' + \frac{\rho}{\sin \tau \sin \tau' (\sin^2 \tau - \sin^2 \tau')} \left\{ \sin^2 \alpha (\sin \tau \cos \tau' + \sin \tau' \cos \tau) - \right. \\ &\quad \left. - \sin \tau \sin \tau' (\sin \tau' \cos \tau + \sin \tau \cos \tau') \right\} \\ \eta \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} &= \sqrt{(\sin^2 \tau - \sin^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin^2 \tau')} \left\{ 1 - \frac{\rho}{\sin \tau \sin \tau' (\sin^2 \tau - \sin^2 \tau')} (\sin \tau \cos \tau' + \sin \tau' \cos \tau) \right\} \\ \frac{\cos \alpha}{k'} &= \cos \tau \cos \tau' - \frac{\rho}{\sin \tau \sin \tau' (\sin^2 \tau - \sin^2 \tau')} \left\{ \sin^2 \alpha (\sin \tau \cos \tau' + \sin \tau' \cos \tau) - \right. \\ &\quad \left. - (\sin^2 \tau \cos \tau \cos \tau' + \sin^2 \tau' \cos \tau \cos \tau) \right\} \end{aligned} \right.$$

Concludiamo il punto ove la tangente condotta incrocia il
 piano degli orbiculi $\eta = 0$; avremo

$$\rho = \frac{\sin \tau \sin \tau' (\sin^2 \tau - \sin^2 \tau')}{\sin \tau \cos \tau \cos \tau' + \sin \tau' \cos \tau \cos \tau}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\sin \tau \sin \tau' \cos \tau \cos \tau' + \sin \tau' \cos \tau \cos \tau}{\sin \tau \cos \tau \cos \tau' + \sin \tau' \cos \tau \cos \tau} \\ \frac{\cos \alpha}{k'} &= \frac{\sin \tau \cos \tau \cos \tau' + \sin \tau' \cos \tau \cos \tau}{\sin \tau \cos \tau \cos \tau' + \sin \tau' \cos \tau \cos \tau} \end{aligned} \right.$$

e facendo uso di tali formole si dedurranno le funzioni ellittiche
 che (*):

$$(22) \quad \rho = \sin \tau \sin \tau' \frac{\sin(\tau - \tau')}{\cos(\tau - \tau')}$$

(*) Le formole che qui occorre applicano sono le seguenti

$$\sin(a \pm b) \cos(a \mp b) = \frac{\sin a \cos a \cos b \pm \sin b \cos b \cos a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$$

$$\sin(a \pm b) \sin(a \mp b) = \frac{\sin a \cos a \cos b \pm \sin b \cos b \cos a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$$

$$\sin(a \pm b) = \frac{\sin a \cos b \cos b \pm \sin b \cos a \cos a}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}$$

$$(23) \quad \xi = \sin \alpha \frac{dn(\tau-\tau_1)}{cn(\tau-\tau_1)} \quad \eta = \frac{k' \operatorname{sn} \alpha}{cn(\tau-\tau_1)}$$

Da queste segue

$$\frac{\xi^2}{k'^2 \operatorname{sn}^2 \alpha} - \frac{\eta^2}{k'^2 \operatorname{cn}^2 \alpha} = 1,$$

il che dimostra che il punto ove la tangente considerata incontra il piano degli omelismi è situato sull'iperbola focale $\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1$.

Moltiplicando come per le (23) ξ, η sono costanti per $\tau - \tau_1 = \operatorname{cost}^2$; ne risulta che le coniche di contatto dei coni circoscritti all'elitticoe dai punti dell'iperbola focale hanno per equazione $\tau - \tau_1 = \operatorname{cost}^2$ (*). È chiaro quindi che queste coniche sono le linee di tangenti coniugate delle geodetiche usanti degli omelismi, come sarebbe facile verificare con un calcolo diretto. Rammentando poi la costruzione di Beltrami pel raggio di curvatura geodetica ($V' \frac{1}{\rho}$) si trova subito che la lunghezza ρ data dalla (22) è il raggio di curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali delle geodetiche considerate.

Indicando con σ la lunghezza dell'arco geodetico MI' , avremo dalla (11) e dalla (22)

$$\sigma - \rho = \frac{E}{K} (\tau - \tau_1) + Z(\tau) - Z(\tau_1) - \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \tau \operatorname{sn}(\tau - \tau_1)}{\operatorname{cn}(\tau - \tau_1)};$$

ponendo $\tau - \tau_1 = \beta$ e facendo uso delle formole d'addizione per le funzioni $Z(\tau + \beta)$, $\operatorname{sn}(\tau + \beta)$, $\operatorname{dn}(\tau + \beta)$ troviamo

$$\sigma - \rho = \frac{E\beta}{K} + Z(\beta) - \frac{\operatorname{sn} \beta \operatorname{dn} \beta}{\operatorname{cn} \beta}.$$

La differenza $\sigma - \rho$ è dunque costante lungo le linee $\tau - \tau_1 = \operatorname{cost}^2$ e poiché l'arco geodetico che unisce due omelismi

(*) È noto che questi coni sono coni di rotazione ed hanno per asse la tangente all'iperbola focale nel vertice.

opposto ha una lunghezza costante, ne deduciamo il teorema di Chablot:

Se da un punto fisso sull'iperbole focale si conduce una tangente all'ellissoide e si prolunga geodeticamente sulla superficie sino all'ombelico opposto, la lunghezza totale della linea mista così composta è costante.

Capitolo XIV.

Sistemi tripli ortogonali di Weingarten.

137. — Somma dell'elemento lineare dello spazio. — Vogliamo occuparci in questo capitolo di quei sistemi tripli di superficie ortogonali che contengono una serie di superficie col medesimo curvatura costante positiva e negativa. L'esistenza di questi sistemi in tutta la loro generalità è stata riconosciuta da Weingarten; li diremo perciò sistemi di Weingarten.

Intendiamo subito il caso che le superficie a curvatura costante siano di rotazione; se ciò avviene, sappiamo già (3129) in qual modo il sistema potrà comporsi.

Ciò posto, supponiamo che nel sistema triplo ortogonale \mathcal{R} ,

limito della forma

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2$$

per l'elemento lineare dello spazio, le superficie $w = \text{cost}^2$ abbiano la medesima curvatura costante K che per semplicità porremo eguale a ± 1 , e poiché il caso che più specialmente ci occuperemo in seguito sarà quello delle superficie piane solloidee, supporremo dapprima $K = -1$.

Utilizzando le notazioni del Cap. XII, § 129, avremo:

$$\frac{1}{r_{21} r_{32}} = -1$$

e potremo porre

$$\frac{1}{r_{21}} = -\frac{1}{2} \theta, \quad \frac{1}{r_{32}} = \text{cost } \theta,$$

dove θ indica l'angolo che le asintotiche di un sistema sopra una superficie pseudosferica $w = \text{cost}^2$ formano colle linee di curvatura $v = \text{cost}^2$.

Per mezzo delle formole di Lamé (14) (15) § 125 potremo facilmente esprimere i coefficienti H_1, H_2, H_3 dell'elemento lineare (1) per la funzione θ .

È infatti avendo per le (23) § 129

$$(2) \quad \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial w} = -\frac{1}{2} \theta, \quad \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial w} = \text{cost } \theta$$

le due prime formole (15) di Lamé (§ 125) si scrivano

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial v} = -\frac{\text{sen } \theta}{\text{cost } \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u} = \frac{\text{cost } \theta}{\text{sen } \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u}$$

e integrate danno

$$H_1 = \text{cost } \theta \cdot \psi(u, w), \quad H_2 = \text{sen } \theta \cdot \varphi(v, w)$$

dove ψ è funzione di u, w e φ di v, w .

Con questi valori di H_1, H_2 le (2) ci danno

$$\operatorname{tg} \theta \frac{\partial \log \varphi}{\partial w} + \operatorname{cot} \theta \frac{\partial \log \varphi}{\partial w} = 0;$$

ora se non fosse simultaneamente

$$(a) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial w} = 0$$

dalla precedente risulterebbe

$$(b) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{M(u, w)}{N(v, w)}$$

Dove M è funzione di u, w e N di v, w .

Ma se consideriamo una speciale superficie proiettiva del sistema, sia $w = c$ cambiando u, v rispettivamente in $\int \varphi(u, c) du$, $\int \varphi(v, c) dv$ il suo elemento lineare riferito alle linee di curvatura prenderebbe la forma

$$ds^2 = \cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2$$

e per la (b)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{U}{V},$$

essendo U funzione della sola u e V della sola v . D'altra parte, essendo $K = -1$, dove avremo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen} 2\theta$$

e per il valore precedente di θ ciò può accadere solo quando sia costante U o V e quindi la superficie $w = c$ una super.

(*) È infatti questa equazione identica

$$(a) \quad \left(\frac{U''}{U} + \frac{V''}{V} \right) (U^2 + V^2) = U^2 + V^2 + 2U'V' + 2V''U$$

e facendone la derivata 2^a rispetto a u, v :

$$\left(\frac{U'''}{U} \right) VV' + \left(\frac{V'''}{V} \right) UV' = 0,$$

Da cui

$$\frac{U'''}{U} = kUU', \quad \frac{V'''}{V} = -kVV' \quad (k \text{ cost.})$$

Integrando segue

$$\frac{U''}{U} = \frac{kU^2}{2} + C, \quad \frac{V''}{V} = -\frac{kV^2}{2} + C',$$

fice di rotazione contro l'ipotesi. Dunque sussistono le
 (a) e φ e' quindi funzione di v soltanto, ψ di u soltanto;
 cambiando i parametri u, v possiamo porre $\varphi = \psi = 1$ e le
 formole di similitudine di Darboux

$$(3) \quad H_1 = \cos \theta, \quad H_2 = \sin \theta, \quad H_3 = \frac{\partial \theta}{\partial w}.$$

Con questi valori per H_1, H_2, H_3 le due prime equazioni
 (15) di Lamé (§123) sono identicamente soddisfatte e
 la prima e la terza delle (14) e la terza delle (15)
 diventano:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} &= \sin \theta \cos \theta \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) &= \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial w} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v \partial w} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \end{aligned} \right.$$

mentre la 2^a delle (14), cioè

$$(4') \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) = \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial w} - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}$$

è una facile conseguenza delle due prime (4).

Ad ogni sistema pseudosferico di Weingarten corrisponde
 dunque una funzione θ di u, v, w che soddisfa le (4)
 e viceversa, ad ogni tal funzione uno ed un solo sistema
 di Weingarten.

Nel caso di $K = +1$ i risultati sono perfettamente
 analoghi, sostituite le funzioni iperboliche $\cos \theta, \sin \theta$

$$2U^2 = \frac{4V^4}{2} + 2CV^2 + C, \quad 2V^2 = -\frac{4U^4}{2} + 2CV^2 + C'$$

e per la (a)

$$(C' - C - 1)U^2 + (C - C' - 1)V^2 = C + C'$$

equazione assurda se non è costante $U \circ V$.

alle circolari $\cos \theta$, $\sin \theta$ (*).

138. - Proprietà fondamentali dei sistemi di Weingarten. - Procederemo allo studio dei sistemi pseudosferici di Weingarten, ammettendo senz'altro l'esistenza d'infiniti sistemi di questa specie, esistenza che risulterà più avanti non §§ seguenti.

Cominciamo dall'osservare che l'unico elemento delle curve (bi) caratteristiche ortogonali delle superfici pseudosferiche $w = \text{cost}^2$ è dato da

$$ds_1 = \frac{\partial \theta}{\partial w} dw$$

e quindi sopra ciascuna superficie pseudosferica l'equazione

$$\frac{\partial \theta}{\partial w} = \text{cost}^2$$

rappresenta quel sistema di linee lungo le quali è costante la distanza normale infinitesima della superficie pseudosferica considerata dalla successiva, cioè il tratto infinitesimo intercetto sulla normale alla prima superficie dalla successiva.

Ora, sottile il teorema fondamentale

Sopra ogni superficie a curvatura costante del sistema le linee $\frac{\partial \theta}{\partial w} = \text{cost}^2$ costituiscono un sistema di cerchi geodetici paralleli.

Per questo basta provare (Cf. §62) che il parametro differenziale primo di queste linee

(*) Cf. la mia Memoria nel Tomo XIII Degli Annali di Matematica.

$$\Delta_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \right)^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \right)^2}$$

e la loro curvatura geodetica $\frac{1}{R}$ sono funzioni di $\frac{\partial \theta}{\partial w}$.
Ora ponendo

$$\Lambda = \Delta_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right),$$

le (4), (4') danno

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u} = 2 \frac{\partial \theta}{\partial w} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial v} = 2 \frac{\partial \theta}{\partial w} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w},$$

quindi

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Lambda}{\partial u} & \frac{\partial \Lambda}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \end{vmatrix} = 0,$$

il che dimostra la prima osservazione. Calcolando poi la curvatura geodetica $\frac{1}{R}$ colla formula di Bonnet (§58) troviamo

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\sin \theta}{\Delta_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\cos \theta}{\Delta_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \right] \right\},$$

e per le (4), (4')

$$(5) \quad \frac{1}{R} = \frac{\partial \theta}{\partial w} \Delta_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right),$$

il che dimostra anche la 2.^a

Le geodetiche G ortogonali ai cerchi geodetici $\frac{\partial \theta}{\partial w} = \text{cost.}$ si ottengono con quadrature (§60), quindi abbiamo il risultato:

Sopra le superficie a curvatura costante di un sistema noto di Weingarten le geodetiche si determinano con quadrature.

Per quanto abbiamo visto al §129 (Nota) queste geodetiche G sono le linee involupate sulla superficie a curvatura costante considerata dalle normali principali delle curve C .

139. - Flessione dei sistemi pseudosferici di Weingarten. -

Le formole (23) §129 applicati ad un sistema pseudosferico di Weingarten divergono

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u}, & \frac{1}{r_{11}} = -\frac{1}{\operatorname{cos} \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v}, & \frac{1}{r_{21}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \\ \frac{1}{r_{22}} = \frac{1}{\operatorname{cos} \theta} \frac{\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} \frac{\partial v}{\partial w}}{\frac{\partial \theta}{\partial v}}, & \frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} \frac{\partial u}{\partial w}}{\frac{\partial \theta}{\partial u}}, & \frac{1}{r_{33}} = \operatorname{cot} \theta \end{cases}$$

e per la curvatura $\frac{1}{R_3}$ delle linee C avere quindi dalla formola $\frac{1}{R_3} = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{23}}$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{\Delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)}{\frac{\partial \theta}{\partial w}}$$

cioè per la (5)

$$(7) \quad \frac{1}{R_3} = R.$$

La flessione $\frac{1}{R_3}$ delle curve C di Weingarten per brevità la flessione del sistema di Weingarten al punto delle tracce che si considerava.

Ora conviene distinguere tre casi a seconda che i cerchi geodetici $\frac{\partial \theta}{\partial w} = \operatorname{cosec} \theta$ sopra una superficie pseudosferica $w = \operatorname{cosec} \theta$ hanno il centro comune reale e a distanza finita, all'infinito, ovvero ideale. Adottando per una coordinata sulla superficie $w = \operatorname{cosec} \theta$ i cerchi $\frac{\partial \theta}{\partial w} = \operatorname{cosec} \theta$ ($\alpha = \operatorname{cosec} \theta$) e le geodetiche G ($\beta = \operatorname{cosec} \theta$), l'elemento lineare prendersi rispettivamente la forma

$$ds^2 = d\alpha^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha d\beta^2,$$

$$ds^2 = d\alpha^2 + e d\beta^2, \quad d\alpha^2 + \operatorname{cosec}^2 \alpha d\beta^2 = ds^2$$

ed avremo corrispondentemente per la (7)

$$(8) \quad \frac{1}{R_3} = \operatorname{tg} \alpha < 1, \quad \frac{1}{R_3} = 1, \quad \frac{1}{R_3} = \operatorname{ctg} \alpha > 1.$$

Il caso intermedio $\frac{1}{R_3} = 1$, dà luogo ad un gruppo interessante di sistemi di Weingarten. Supponiamo che una delle

curve C sia a flessione costante $= 1$; allora per le (8) sopra tutte le superficie pseudosferiche Σ le geodetiche C sono parallele e quindi:

Ogni altra curva C ha costante $= 1$ il raggio di prima curvatura.

Un tale sistema in cui tutte le curve C hanno la medesima flessione si dice un sistema di Weingarten a flessione costante.

Per questi sistemi a flessione costante, di cui fin breve ricordavamo l'esistenza, le formole (4) possono porsi sotto forma più semplice. Se infatti indichiamo con w l'angolo che la direzione positiva della normale principale alle curve C forma colla linea $v = \text{cost}^2$ sulla superficie pseudosferica $w = \text{cost}^2$, le formole (24) § 129 Darboux

$$(9) \quad \cos w = -\frac{\beta_3}{r_3}, \quad \sin w = -\frac{\beta_3}{r_3}$$

Essendo $\beta_3 = 1$, dalle (6) risulta

$$(9') \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = -\cos w \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} = -\sin w \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial w}$$

A causa di queste formole le (4) diventano

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \sin \theta \cos \theta$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = \sin w \cos \theta \\ \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = -\sin \theta \cos w \end{array} \right.$$

Eliminando θ dalle due ultime risulta

$$(10') \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \sin w \cos w$$

e inoltre

$$(11') \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \cos w \cos \theta \frac{\partial w}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial w} = \sin w \sin \theta \frac{\partial w}{\partial w}$$

Dopo ciò si verifica facilmente che la funzione $w(u, v, w)$

Soddisfa tutte le equazioni (4) e definisce perciò un nuovo sistema di Weingarten a flessione costante connesso alla forma

$$ds^2 = \cos^2 \omega du^2 + \sin^2 \omega dv^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

per l'elemento lineare dello spazio. Vedremo più tardi qual è il legame geometrico fra i due sistemi di Weingarten corrispondenti alle soluzioni coniugate θ, ω della (4), (V § 145).

140. - Sistemi ciclici di Ribaucour. - Consideriamo un sistema di Weingarten a flessione costante e calcoliamo la torsione $\frac{1}{T_3}$ delle curve C , la formula (27) § 129 ci dà

$$\frac{1}{T_3} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial w}}{\frac{\partial \theta}{\partial w}}$$

Se quindi ω è indipendente da w , cioè $\frac{\partial \omega}{\partial w} = 0$ sarà $\frac{1}{T_3} = 0$, e le curve C saranno quindi cerchi di raggio = 1.

Questi sistemi particolari a flessione costante sono stati trovati da Ribaucour, che ha dato loro il nome di sistemi ciclici. Ogni superficie pseudosferica S dà luogo ad un tal sistema. È infatti sia S una superficie pseudosferica di raggio = 1, il cui elemento lineare riferito alle linee di curvatura assume la forma

$$ds^2 = \cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2,$$

Dove, per seguire le notazioni del § 91, abbiamo scambiato θ con ω . La funzione $\omega(u, v)$ che soddisfa le (11), cioè l'equazione a differenziali totali

$$du^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial v}\right) du + \left(\frac{\partial \omega}{\partial v} \sin \theta + \cos \theta \frac{\partial \omega}{\partial u}\right) dv = 0,$$

contiene una costante arbitraria (Cf. § 91). Indicando questa costante con w , potremo considerare w come funzione di u, v, w e dalle (11), avendo θ indipendente da w , seguiremo per derivazione le (11'). Da ciò risulta che la funzione $w(u, v, w)$ soddisfera' le equazioni fondamentali (4) § 137 e Definisce quindi un sistema triplo ortogonale di Weingarten a flessione costante; ma avendo

$$\frac{1}{T_3} = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial w}}{\frac{\partial w}{\partial w}} = 0$$

esso sarà un sistema ciclico di Ribaucour.

Le superficie pseudosferiche Σ del sistema ciclico di Ribaucour avendo analiticamente l'equazione dalle (11), segue che esse coincidono, almeno quanto alla forma, colle superficie complementari della S (§ 91), ma si può agevolmente verificare che coincidono anche con queste complementari per la posizione nello spazio. È infatti se con x, y, z indichiamo le coordinate di un punto mobile sulla superficie S , con x', y', z' le coordinate del punto corrispondente su una delle superficie complementari Σ' , la quale corrisponda ad un particolare valore w della costante arbitraria che entra nell'integrale w delle (11), avremo come al § 92:

$$(12) \quad x' = x + \cos w \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial x}{\partial u} + \sin w \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = \cos w \cos \theta \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial x}{\partial u} + \cos w \sin w \cos \theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial x}{\partial v} - \cos w \sin \theta X,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial v} = \sin w \cos w \sin \theta \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial x}{\partial u} + \sin w \sin \theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial x}{\partial v} + \sin w \cos \theta X,$$

e dall'altra parte riguardando ora come variabile anche il parametro w :

$$\frac{\partial x_i}{\partial w} = \left(-\operatorname{sen} w \frac{1}{\cos w} \frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{cos} w \frac{1}{\operatorname{tang} w} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \frac{\partial w}{\partial w}$$

Se assumiamo quindi u, v, w come coordinate curvilinee dello spazio e calcoliamo il quadrato dell'elemento lineare.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

troviamo

$$(13) \quad ds^2 = \operatorname{cos}^2 w du^2 + \operatorname{sen}^2 w dv^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial w} \right)^2 dw^2,$$

il che dimostra appunto che le linee $u = \operatorname{cost}^2, v = \operatorname{cost}^2, w = \operatorname{cost}^2$ formano un sistema triplo ortogonale (si Pribanour), qualunque sia la superficie pseudosferica in esame.

Dunque:

Le ∞^1 superficie complementari Σ di una superficie pseudosferica S fanno parte di un sistema triplo ciclico di Pribanour.

Le curve biottriche ortogonali della superficie pseudosferica che Σ sono ∞^1 cerchi biottrici in ciascuno piano tangente di S ed hanno nel punto di contatto Σ con S un raggio eguale al raggio della superficie pseudosferica. Le superficie degli altri due sistemi ($u = \operatorname{cost}^2, v = \operatorname{cost}^2$) sono il luogo di una semplice infinita di questi cerchi ed hanno di distribuiti sopra una linea di curvatura $u = \operatorname{cost}^2$ o $v = \operatorname{cost}^2$ della superficie S .

441. - Considerazioni geometriche. - E' utile vedere come ai risultati ora ottenuti si possa giungere per mezzo di considerazioni geometriche molto semplici.

Sia S una superficie pseudosferica di raggio R .
 In ogni piano tangente della S tracciamo un cerchio C di raggio R ed centro nel punto di contatto M . So il punto

M si sposta lungo una linea di curvatura L_1 della superficie S , il circolo C descriverà una superficie Σ_1 , e poiché le normali alla S lungo L_1 sono tangenti alla evoluta di L_1 , lungo del primo centro M_1 di curvatura della superficie S , il circolo C nelle sue diverse posizioni sarà sempre linea di curvatura di Σ_1 , (Cf. Cap. X §110) e la normale in un punto qualunque N di C alla Σ_1 sarà la retta NM_1 .

Se ora immagineremo che la linea L_1 di curvatura varii nel suo sistema, avremo una serie ∞^1 di superficie Σ_1 , e linee di curvatura circolari di raggio R . Similmente al secondo sistema di linee di curvatura L_2 della superficie S corrisponderà una seconda serie di superficie Σ_2 .

Nella medesima specie, che incontreranno le superficie Σ_1 lungo il circolo C . Ora le superficie Σ_1 complementari della S sono ortogonali a tutti i circoli C (per la nota proprietà delle due folde di una medesima evoluta §50) e però anche a tutte le superficie Σ_1 e Σ_2 . Basti dunque dimostrare che le superficie Σ_1, Σ_2 sono ortogonali fra loro, per provare che insieme a S formano un sistema triplo ortogonale.

Ma se consideriamo due speciali superficie Σ_1, Σ_2 , che s'incontrano lungo un circolo C , e su questo circolo C un punto qualunque N , le normali in N alle superficie Σ_1, Σ_2 saranno, per quanto sopra si è visto, le congiungenti NM_1, NM_2 di N ai due centri di curvatura M_1, M_2 della superficie S relativi al punto M di S che è centro del circolo C . Ora M_1, M_2 giacciono due parti opposte di M sulla normale alla S e si ha

$$\overline{MM_1} \cdot \overline{MM_2} = R^2 = \overline{MN}^2$$

e perciò, essendo la MN perpendicolare alla normale \hat{M}, MM_2 , l'angolo \hat{M}, \hat{NM}_2 sarà retto c. d. d.

Del resto basta presupporre nulla sulla costruzione delle proprietà delle superficie complementari, si potrebbe giungere al medesimo risultato applicando il teorema di Darboux (§ 122) alle superficie Σ_1, Σ_2 che s'incontrano ortogonalmente lungo il circolo C di curvatura (*).

142. - Sistema ciclico derivato dalla pseudosfera. - Applichiamo le formole del § 140 alla ricerca del sistema ciclico di Ribaucour derivato dalla pseudosfera di raggio 1. Per questa superficie si può ridurre l'elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + e^{2u} dv^2$$

alla forma normale

$$ds^2 = \cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2$$

col porre $u = -\log \cosh u$, dopo di che si ha

$$\cos \theta = \operatorname{tg} h u, \quad \sin \theta = \frac{1}{\cosh u}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial u} = -\frac{1}{\cosh u},$$

e per le coordinate x, y, z di un punto mobile sulla pseudosfera

$$x = \frac{\cos v}{\cosh u}, \quad y = \frac{\sin v}{\cosh u}, \quad z = u - \operatorname{tg} h u.$$

Le formole (11) per determinare ω diventano

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = \operatorname{tg} h u \sin \omega, \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{1 - \cos \omega}{\cosh u}$$

Ed hanno per integrale generale

(*) Cf. la mia nota sui sistemi ciclici. - Giornale di Napoli Vol. XXI, p. 275

$$(14) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} w = \frac{\operatorname{coth} u}{w-v}$$

Dove w figura come costante arbitraria. Calcolando ora con le (12) le coordinate x, y, z di un punto mobile nello spazio in funzione dei parametri u, v, w del sistema triplo ortogonale, troviamo

$$(15) \quad \begin{cases} x = \frac{2 \operatorname{coth} u}{(w-v)^2 + \operatorname{coth}^2 u} \{ \cos v - (w-v) \operatorname{sen} v \} \\ y = \frac{2 \operatorname{coth} u}{(w-v)^2 + \operatorname{coth}^2 u} \{ \operatorname{sen} v + (w-v) \cos v \} \\ z = u - \frac{2 \operatorname{sen} u \operatorname{coth} u}{(w-v)^2 + \operatorname{coth}^2 u} \end{cases}$$

Le queste formole si verifica facilmente che le superficie pseudosferiche $w = \operatorname{cost}^2$ (complementari della pseudosfera) sono tutte congruenti per rotazione attorno all'asse z , come risulta sicuramente dall'osservare che il sistema attuale di cerchi C , per un moto di rotazione attorno all'asse della pseudosfera, ritorna in se' stesso. Le superficie $u = \operatorname{cost}^2$, lungo dei cerchi C lungo ρ paralleli della pseudosfera, sono evidentemente sfere col centro sull'asse, quindi le linee di curvatura $u = \operatorname{cost}^2$ della superficie pseudosferica trovata sono tracciate sopra sfere ortogonali alla superficie.

Quanto alle altre linee di curvatura $v = \operatorname{cost}^2$ la formula

$$x \{ \operatorname{sen} v + (w-v) \cos v \} - y \{ \cos v - (w-v) \operatorname{sen} v \} = 0,$$

dimostra che sono piane e i loro piani passano per l'asse z . La superficie considerata e' dunque una superficie di Lampeper.

Alcune delle formole

$$r_1 = -\operatorname{tg} w, \quad r_2 = \operatorname{cotg} w$$

Le linee $w-v=0$; $w-v = \operatorname{cost} w$ sono spigoli di regge della superficie w . La prima è una linea piana, la seconda una curva gobba.

143. - Sistema triplo elicoidale. - Per dimostrare un esempio l'elicità dei sistemi tripli originali di Weingarten, all'infuori dei sistemi circolari di Ribaucour, sopra studiati, proponiamo di dimostrare le equazioni fondamentali (4) § 137 con una funzione θ della forma

$$\theta = f\left(\frac{u}{\alpha} + \frac{v}{\beta} + w\right)$$

Dove α , β sono due costanti. Prendendo per brevità

$$\frac{u}{\alpha} + \frac{v}{\beta} + w = \tau$$

e indicando con apici le derivate di θ rispetto all'argomento τ , si veda che le equazioni (4) si riducono all'una

$$\theta'' = \frac{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \beta \theta}{\beta^2 - \alpha^2}$$

Da cui

$$\theta^2 = C - \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \operatorname{sen}^2 \theta$$

e però

$$\tau = \int \frac{d\theta}{\sqrt{C - \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \operatorname{sen}^2 \theta}}$$

Senza alterare la generalità, possiamo prendere $C=1$, e supponendo inoltre $\alpha > \beta$, avremo

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sn}(\tau, k), \quad k = \frac{\alpha \beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$$

L'elemento lineare dello spazio prenderà la forma

$$ds^2 = \operatorname{cn}^2 \tau du^2 + \operatorname{sn}^2 \tau dv^2 + d\tau^2$$

e per i raggi di curvatura r_{ik} delle superfici del sistema

triplo troveremo dalle (6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{\alpha} \frac{dn\tau}{dn\tau} \\ \frac{1}{r_{13}} = -\frac{k'}{\alpha} \frac{dn\tau}{dn\tau} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r_{21}} = -\frac{1}{b} \frac{dn\tau}{dn\tau} \\ \frac{1}{r_{23}} = -\frac{k'}{b} \frac{dn\tau}{dn\tau} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r_{31}} = -\frac{dn\tau}{dn\tau} \\ \frac{1}{r_{32}} = \frac{dn\tau}{dn\tau} \end{array} \right.$$

Le superficie $u = \text{cost}^2$, $v = \text{cost}^2$, $w = \text{cost}^2$ Del corrispondente sistema triplo ortogonale hanno quindi per rispettive curvatures

$$K_1 = -\frac{k^2}{\alpha^2}, \quad K_2 = \frac{k^2}{b^2}, \quad K_3 = -1$$

Si potrebbe vedere facilmente che tutte queste superficie sono ellissoidi col medesimo asse e quelli di ciascun sistema sono tutte congruenti fra loro per rotazione attorno all'asse. (*)

Osserviamo inoltre che per la flessione $\frac{1}{P_3}$ dell'attorno le sistema si ha

$$\frac{1}{P_3} = \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}} = 1 + \frac{k^2 - b^2}{b^2 dn\tau}$$

Questo sarà quindi a flessione costante se si prende

$$b = k, \quad \alpha = \frac{k^2}{k'}$$

ma non degenera in un sistema ciclico di Ribaucour poiché la torsione $\frac{1}{T_3}$ delle curve C è data da

$$\frac{1}{T_3} = \frac{k'}{dn^2 \left(\frac{v + ku}{k} + w \right)}$$

e quindi non è nulla.

144. - Trasformazione complementare nei sistemi di Weingarten. - Dopo essersi assicurati dell'effettiva esistenza dei sistemi tripli pseudosferici

(*). Annali di Matematica; T. XIII, p. 39.

di Weingarten delle stessa specie, andiamo ora a vedere come per mezzo della trasformazione complementare e di quella di Bäcklund si possa dedurre da ogni sistema noto di Weingarten infiniti nuovi.

Cominciando dalla trasformazione complementare, supponiamo dato un sistema pseudosferico di Weingarten a curvatura $K = -1$, ed, accanto a sistema di coordinate curvilinee dello spazio, dia all'elemento lineare la forma

$$ds^2 = \cos^2 \theta du^2 - \sin^2 \theta dv^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 dw^2,$$

la funzione $\theta(u, v, w)$ soddisfacendo le equazioni fondamentali (4). Da ciascuna superficie pseudosferica $w = \text{cost}^2$ otteniamo la complementare rispetto ad un particolare sistema di geodetiche parallele e vediamo se è possibile determinare la legge, colla quale si succedono questi sistemi di geodetiche parallele, in guisa che le ∞^1 superficie complementari costruite facciano parte di un nuovo sistema di Weingarten.

Se $\varphi(u, v, w)$ indica l'angolo che le geodetiche supposte sopra una superficie $w = \text{cost}^2$ formano (nella loro direzione positiva) colla direzione positiva delle $v = \text{cost}^2$, dovrà intanto φ soddisfare le equazioni (cf. § 91):

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = \cos \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = -\sin \theta \cos \varphi. \end{cases}$$

Se poi (x, y, z) è un punto qualunque di una superficie pseudosferica $w = \text{cost}^2$ e $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ il punto corrispondente

Della trasformata complementare, avremo per la costru-
zione stessa

$$(17) \quad \xi = x + \cos \varphi X_1 + \sin \varphi X_2 \quad (*)$$

e analogamente per η, ζ . Di qui derivando coll'osservare
le formole (13) § 125 e le (16) attuali: troviamo

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \cos \varphi \cos \theta X_1 + \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta X_2 + \cos \varphi \sin \theta X_3,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta X_1 + \sin \varphi \sin \varphi \sin \theta X_2 - \sin \varphi \cos \theta X_3,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial w} = -\sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial w} X_1 + \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial w} X_2 + \left\{ \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} + \frac{\partial \theta}{\partial w} \right\} X_3.$$

Ne segue:

$$\sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)^2 = \cos^2 \varphi, \quad \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right)^2 = \sin^2 \varphi, \quad \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial w} \right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)^2 + M^2$$

$$\sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \quad \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial w} = M \cos \varphi \sin \theta, \quad \sum \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial w} = -M \sin \varphi \cos \theta,$$

dove
$$M = \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} + \frac{\partial \theta}{\partial w}.$$

Le quindi la funzione $\varphi(u, v, w)$, oltre che alle (16),
soddisferà all'altra

$$(18) \quad \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} + \frac{\partial \theta}{\partial w} = 0,$$

avremo

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \cos^2 \varphi du^2 + \sin^2 \varphi dv^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)^2 dw^2$$

e per conseguenza le (11) saranno le coordinate ξ, η, ζ ,
di un punto dello spazio espresse per parametri u, v, w
di un nuovo sistema di Weingarten le cui superficie
pseudosferiche saranno complementari di quelle dell'anti-
co sistema, come si voleva.

(*) $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3$ hanno il significato loro
attribuito al Cap. XII §§ 124 - seg.^{te}.

Basta dunque a provarsi che se $\varphi(u, v, w)$ soddisfa la (18), soddisfa anche le (16). Per questo basta derivare la (18) una volta rispetto ad u , una seconda rispetto ad v , tenendo conto delle equazioni (4) cui soddisfa θ .

Osservazione. Dai calcoli eseguiti la condizione (18) risulterebbe soltanto condizione sufficiente perchè la superficie complementare costruita appartenga ad un nuovo sistema di Weingarten; ma sarebbe facile dimostrare che essa è inoltre necessaria, applicando il teorema di Darboux (§§ 122, 123).

145. - Interpretazione geometrica. - Vogliamo ora completare l'interpretazione geometrica del risultato precedente, cercando di caratterizzare sopra ciascuna superficie pseudosferica $w = \text{cost}^2$ dell'antico sistema il sistema di geodetiche parallele, definito dalla funzione φ che soddisfa la (18).

Per ciò, osservando le (6) § 139, scriveremo la (18) sotto la forma

$$\frac{\cos \varphi}{r_{13}} + \frac{\sin \varphi}{r_{15}} = -1.$$

Ora indicando con ω l'angolo che la direzione positiva v_2 della normale principale alla curva C dell'antico sistema forma colla corrispondente linea $v = \text{cost}^2$ sulla superficie $w = \text{cost}^2$, abbiamo (§ 139)

$$\frac{1}{r_{13}} = -\frac{\cos \omega}{\rho_3}, \quad \frac{1}{r_{15}} = -\frac{\sin \omega}{\rho_3};$$

la precedente può quindi scriversi

$$(18') \quad \cos(\varphi - \omega) = \rho_3.$$

Ciò dimostra intanto che l'angolo φ è reale soltanto

per quei sistemi di Weingarten la cui flessione $\frac{1}{\rho_3} \geq 1$.

Supponendo per ora $\frac{1}{\rho_3} > 1$, le geodetiche G sviluppate dal-
le normali principali delle curve C lungo una superficie
 $w = \text{cost}^2$ saranno ortogonali ad una medesima geodetica γ
(§ 139). Assumendo allora sopra una superficie w a
linee coordinate le geodetiche G e le loro trasversarie orto-
gonali, l'elemento lineare della superficie w prenderà
la forma

$$ds^2 = d\alpha^2 + \text{cost}^2 d\beta^2.$$

Or si con Ω indichiamo l'angolo che la direzione Defini-
ta dalla (18) forma in un punto P della superficie
colla geodetica G ($\beta = \text{cost}^2$) che vi passa, avremo
 $\Omega = \varphi - w$ e la (18') diverrà:

$$\text{cost} \Omega = \rho_3 = \text{tgh} \alpha,$$

dove α è la distanza geodetica del punto P dalla
geodetica γ ($\alpha = 0$). Per la formula (10) del § 84 l'an-
golo Ω è quindi l'angolo di parallelismo relativo al
punto P ed alla geodetica γ . Così resta confermato che
la (18) o (18') definite sopra $w = \text{cost}^2$ un sistema
di geodetiche parallele e di più troviamo che esse
sono le geodetiche parallele, in un senso o nell'altro,
alla geodetica γ .

Ogni sistema noto di Weingarten Σ a flessione
 $\frac{1}{\rho_3} > 1$ da' adunque luogo, per trasformazione comple-
mentare, a due nuovi sistemi di Weingarten $\Sigma^{(1)}$ e
 $\Sigma^{(-1)}$; questi si diranno i sistemi complementari di Σ .
Si può facilmente dimostrare che essi sono nuovamente

a flessione $\frac{1}{\beta_3} > 1$. E infatti dalle (16) e (17) si trae

$$\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial w} = \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial w} + \sin \varphi \sin \theta \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} - \cos \theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}$$

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial w} = \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial w} - \sin \varphi \cos \theta \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} + \cos \varphi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}$$

Da cui quadrando e sommando

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial w} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial w} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} \right)^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2$$

ovvero

$$(19) \quad \left(\frac{1}{\beta_3^2} - 1 \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)^2 = \left(\frac{1}{\beta_3^2} - 1 \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2$$

quindi essendo $\frac{1}{\beta_3} > 1$ sarà anche $\frac{1}{\beta_3} > 1$. E nel nuovo sistema

ma $\Sigma^{(1)}$ si assumono i due complementari uno di essi è Σ e il secondo è un nuovo sistema $\Sigma^{(1)}$. Ed procedendo con successive trasformazioni complementari, si ottiene dal sistema noto Σ un'intera serie di sistemi di Weingarten

$$(20) \quad \dots \Sigma^{(-2)}, \Sigma^{(-1)}, \Sigma, \Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \dots$$

estendentesi all'infinito nei due sensi.

Quando il sistema di Weingarten sia a flessione costante $\frac{1}{\beta_3} = 1$, allora la (18') o (18) si ha per φ l'unica soluzione $\varphi = \omega$ e la serie (20) si riduce a due soli sistemi complementari, ambedue a flessione costante.

E' da notarsi che le curve $C^{(1)}$ del 2° sono di lunghezza dei centri di curvatura delle curve C del 1° e viceversa (Cf. § 139).

Infine se il sistema Σ è di Plücker, $\Sigma^{(1)}$ si riduce ad una superficie pseudosferica unica, il luogo dei centri dei cerchi C .

146. - Trasformazione di Bäcklund nei sistemi di Weingarten. - In luogo di applicare a ciascuna superficie pseudosferica $w = \text{cost}^2$ di un sistema noto di Weingarten una trasformazione complementare, applichiamo una trasformazione di Bäcklund B_0 (§ 93). Per ciò basta determinare la funzione $\varphi(u, v, w)$ invece che delle (16), dalle altre.

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\text{sen} \varphi \text{ cost} + \text{sen} \theta \text{ cost} \text{ sen} \theta}{\text{cost}} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = - \frac{\text{cost} \text{ sen} \theta + \text{sen} \theta \text{ sen} \varphi \text{ cost}}{\text{cost}} \end{array} \right.$$

Ora vogliamo ricercare se si può assoggettare φ ad una ulteriore condizione, in guisa che le nuove superficie prodotte dalla trasformazione B_0 facciano parte di un nuovo sistema di Weingarten.

Le formole, che danno le coordinate x, y, z , di un punto della superficie trasformata, saranno nel caso attuale

$$(22) \quad x_1 = x + \text{cost} (\text{cost} X_1 + \text{sen} \varphi X_2),$$

e analogamente per y, z . Si quindi derivando, coll'osservare le (13) § 125 e le superiori, troviamo

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = (\text{cost} \varphi \text{ cost} - \text{sen} \theta \text{ sen} \varphi \text{ cost} \text{ sen} \theta) X_1 + (\text{sen} \theta \text{ cost} \varphi \text{ sen} \theta + \text{sen} \varphi \text{ cost} \varphi \text{ cost}) X_2 + \text{cost} \text{ sen} \theta \text{ cost} \varphi X_3$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = (\text{sen} \theta \text{ sen} \varphi \text{ cost} + \text{sen} \varphi \text{ cost} \text{ sen} \theta) X_1 + (\text{sen} \varphi \text{ sen} \theta - \text{sen} \theta \text{ sen} \varphi \text{ cost} \varphi \text{ cost}) X_2 - \text{cost} \text{ cost} \text{ sen} \varphi X_3$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial w} = - \text{cost} \text{ sen} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial w} X_1 + \text{cost} \text{ cost} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial w} X_2 + \left(\frac{\text{cost} \text{ cost} \varphi \partial^2 \theta}{\text{cost} \partial u \partial w} + \frac{\text{cost} \text{ sen} \varphi \partial^2 \theta}{\text{sen} \theta \partial v \partial w} + \frac{\partial \theta}{\partial w} \right) X_3$$

Se dunque la funzione φ , oltre che alle (21), sod. differa' all'altra:

$$(23) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial w} = -\frac{1}{\sin \theta} \left\{ \frac{\cos \varphi \cos \theta}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial w} + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\}$$

avremo

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \cos^2 \varphi du^2 + \sin^2 \varphi dv^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

e la superficie trasformata appartiene, come si vedeva, ad un nuovo sistema \mathcal{D} di Weingarten. Alle equazioni (21), (23) può sostituirsi l'unica equazione differenziale totale:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} d\varphi + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\sin \varphi \cos \theta + \sin \theta \cos \varphi \tan \theta}{\cos \theta} \right) du + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\sin \theta + \sin \theta \cos \varphi \cos \theta}{\cos \theta} \right) dv \\ + \frac{1}{\sin \theta} \left\{ \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial w} + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\} dw = 0. \end{aligned} \right.$$

Le tre condizioni d'integrabilità per questa equazione (che si ottengono eguagliando i due valori risultanti per ciascuna delle derivate seconde $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial w}$) si trovano identicamente soddisfatte, e questa delle equazioni fondamentali (4) cui soddisfa. Esiste quindi un integrale $\varphi(u, v, w, C)$ della (24) contenente una costante arbitraria C .

Ogni soluzione particolare della (24) dà luogo ad un nuovo sistema di Weingarten decatto con tre trasformazioni di Bäcklund B_0 dal primitivo.

Rispetto alla equazione (24) si può notare che, nota una soluzione particolare, se si trova l'integrale generale con quadrature; d'altra parte nel nuovo sistema \mathcal{D} di Weingarten a cui si arriva è già nota una soluzione particolare della corrispondente equazione (24), cioè quella che corrisponde al sistema iniziale, dunque:

Se uno dei sistemi di Weingarten, dedotto con trasformazione di Bäcklund da uno dato, è noto, la successiva applicazione della medesima trasformazione B ai sistemi, che via via si ottengono, si effettua con quadrature.

Per sistemi di Weingarten a flessione costante si da notare che la trasformazione di Bäcklund li cambia in sistemi della medesima specie, poiché la (19) è valida anche nel caso attuale, come facilmente può verificarsi.

Similmente ogni sistema ciclico di Ribaucour si cambia per trasformazione di Bäcklund in nuovi sistemi di Ribaucour.

Questi risultati provano l'esistenza di infiniti sistemi di Weingarten di tutte le specie e danno il modo di trovarli effettivamente (*).

(*). Per maggiori dettagli veggasi la mia memoria nel tomo XIII Serie 2^a degli annali p.^a 177

Appendice al Capitolo IV.

Formole di Codazzi

1. - Trattando la teoria generale delle superficie, abbiamo osservato che tutte le proprietà inerenti alla forma della superficie, possono dedursi dalle uniche sette delle sei quantità fondamentali

$$E, F, G, \\ D, D', D'',$$

coefficienti delle due forme differenziali quadratiche.

$$(1) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

$$(2) \quad -(dx dX + dy dY + dz dZ) = D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2.$$

Se le funzioni E, F, G, D, D', D'' di u, v sono date, la superficie ne risulta pienamente determinata di forma, cioè a meno di movimenti nello spazio. Per convincersene basta osservare che l'equazione delle linee di curvatura e i raggi principali di curvatura ρ_1, ρ_2 saranno già determinati in funzione di u, v (Cap. IV), quindi, riprendo per semplicità la superficie alle sue linee di curvatura, l'elemento lineare sferico della rappresentazione di Gauss (§ 47) sarà pure determinato, e con esso saranno per conseguenza fissate, a meno di movimenti sulla sfera, le immagini sferiche delle linee di curvatura.

tura; le formole

$$x = \int \left(r_1 \frac{\partial X}{\partial u} du + r_2 \frac{\partial X}{\partial v} dv \right), \quad y = \int \left(r_1 \frac{\partial Y}{\partial u} du + r_2 \frac{\partial Y}{\partial v} dv \right)$$

$$z = \int \left(r_1 \frac{\partial Z}{\partial u} du + r_2 \frac{\partial Z}{\partial v} dv \right)$$

individuavamo poi la superficie al meno di movimenti nello spazio.

Però le sei funzioni L, Γ, G, D, D', D'' non sono indipendenti fra loro, ma sono legate da tre equazioni di condizione stabilite per la prima volta sotto forma generale da Codazzi, le quali servono le condizioni necessarie e sufficienti perché esista la superficie corrispondente. Viene di esse il dato nelle formole di Gauss (§ 33)

$$\frac{DD'' - D'^2}{E'G - F'^2} = K$$

e costanti D, D', D'' in termini finiti. Le altre due invece contengono le derivate di D, D', D'' . Nel caso generale che le linee coordinate u, v siano oblique, queste formole sono complicate; ci limiteremo perciò a considerare il caso in cui le linee coordinate siano ortogonali, cioè $\Gamma = 0$.

2. - Formole di Codazzi. - Prevedendo le notazioni e convenzioni del Cap. IV, il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

formato in una serie di direzione. Delle tangenti alle linee $u = \text{cost}^2$, $v = \text{cost}^2$ e dello normale (le cui direzioni

positive. Si suppongano orientati come le derivate positive.
 Dei rispettivi assi coordinati x, y, z derivi quale all'unità
 positive

Vigiliamo su varie tutte espressioni. Le derivate principali
 rispetto ad u, v di questi nove vettori per $E, F, G; D, D', D''$
 e per nove vettori Hesse (cf. § 43).

Per le derivate dei vettori delle due prime linee il
 calcolo è precisamente lo stesso come al § 2. Si suppone
 si ha:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \quad \sum \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \quad \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = D';$$

queste risolte rispetto a $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + D' X,$$

da cui

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \right) &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{D'}{\sqrt{G}} X, \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{D'}{\sqrt{E}} X. \end{aligned} \right.$$

Similmente si ha

$$\sum \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \right) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \quad \sum \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \right) = 0,$$

da cui

$$\sum X \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \frac{D'}{\sqrt{E}}$$

$$(B) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \right) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{D'}{\sqrt{E}} X$$

e permutando $u, v; E, G; D, D''$

$$(B') \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \right) = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{D''}{\sqrt{G}} X.$$

Per trovare anche $\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}$, basta notare che derivando
 le identità

$$\sum \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \cdot X = 0, \quad \sum \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot X = 0, \quad \sum X^2 = 1 \quad (I)$$

rispetto a u, v , si ottiene per le precedenti

$$\Sigma \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{D'}{\sqrt{G}}, \quad \Sigma \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}}, \quad \Sigma X \frac{\partial X}{\partial u} = 0$$

$$\Sigma \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{D''}{\sqrt{G}}, \quad \Sigma \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{D'}{\sqrt{E}}, \quad \Sigma X \frac{\partial X}{\partial v} = 0,$$

quindi

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{D'}{\sqrt{G}} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{D''}{\sqrt{G}} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{D'}{\sqrt{E}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \end{array} \right.$$

Ponendo ora per brevità e simmetria

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad X_3 = X, \\ Y_1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad Y_3 = Y, \\ Z_1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v}, \quad Z_2 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u}, \quad Z_3 = Z, \end{array} \right.$$

potremo riassumere le formole richieste nel quadro

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 + \frac{D'}{\sqrt{G}} X_3, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 + \frac{D}{\sqrt{E}} X_3, \\ \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}} X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 + \frac{D'}{\sqrt{E}} X_3, \\ \frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}} X_2 - \frac{D'}{\sqrt{G}} X_1, \\ \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\frac{D''}{\sqrt{G}} X_1 - \frac{D'}{\sqrt{E}} X_2 \end{array} \right.$$

e alle medesime equazioni soddisfacciamo $Y_1, Y_2, Y_3; Z_1, Z_2, Z_3$.

Se esprimiamo ora le condizioni d'integrabilità del sistema (5), precisamente come al § 125 per il sistema analogo (13), troviamo le tre equazioni di condizione.

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{D''}{\sqrt{G}} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{D'}{\sqrt{G}} \right) - \frac{D''}{\sqrt{E}G} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{D}{E} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{D'}{\sqrt{E}} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{D}{\sqrt{E}} \right) - \frac{D'}{\sqrt{E}G} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{D''}{G} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0, \\ \frac{D'^2 - DD''}{\sqrt{E}G} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right). \end{array} \right.$$

Queste sono le formole di Codazzi; l'ultima coincide, come già si è osservato, colla formola di Gauss per la curvatura K .
 (Oss.^a - Nel caso che le linee coordinate siano le linee d. curvatura, si ricade nelle formole del § 49).

Dimostriamo inversamente che se D, D', D'' soddisfanno le equazioni di Codazzi (I), esiste la superficie corrispondente, la quale sarà (n° 1) perfettamente determinata di forma.

Ragionando precisamente come al § 126, si vedrà che la superficie cercata esisterà effettivamente, quando il sistema delle due equazioni a derivate parziali lineari omogenee:

$$(6) \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial X_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 + \frac{D'}{\sqrt{G}} X_3 \right\} + \frac{\partial F}{\partial X_2} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1 + \frac{D'}{\sqrt{E}} X_3 \right\} - \\ \quad - \frac{\partial F}{\partial X_3} \left\{ \frac{D}{\sqrt{E}} X_1 + \frac{D'}{\sqrt{G}} X_2 \right\} + \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial X_1} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2 + \frac{D''}{\sqrt{G}} X_3 \right\} + \frac{\partial F}{\partial X_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 + \frac{D''}{\sqrt{E}} X_3 \right\} - \\ \quad - \frac{\partial F}{\partial X_3} \left\{ \frac{D''}{\sqrt{G}} X_1 + \frac{D'}{\sqrt{E}} X_2 \right\} + \frac{\partial F}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

per la funzione incognita $F(X_1, X_2, X_3, u, v)$ delle cinque variabili indipendenti X_1, X_2, X_3, u, v ammetta tre soluzioni fra loro indipendenti. Ma in questo delle (I) il sistema (6) è Jacobiano, come facilmente si verifica; esso ammette quindi appunto (§ 122) $5-2=3$ soluzioni indipendenti c. d. d.

Da questi teoremi risulta un nuovo modo per trattare il problema del § 12: Trovare tutte le superficie applicabili sopra una superficie data. In tal caso infatti la superficie è data soltanto per mezzo del suo elemento lineare, che supponiamo ridotto alla forma ortogonale

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

I valori corrispondenti possibili per D, D', D'' sono determinati.

ti. Dalle formole di Boabd (I). Nota una terza di funzioni D, D', D'' che vi soddisfino, la determinazione della corrispon-
dente superficie dipende dall'integrazione del sistema su-
cobiano (6). (*)

3. - Significato geometrico di D, D', D'' . - Torsione geode-
tica. - Le quantità $\frac{D}{E}, \frac{D'}{\sqrt{EG}}, \frac{D''}{G}$ hanno un significato
geometrico che importa notare; per trovarlo ci è indispensabile
introdurre un nuovo concetto, quello della torsione geodetica
di una linea tracciata sopra una superficie. Su un punto
qualunque M di una linea l tracciata sopra una superficie
 S tiriamo la geodetica tangente g . Siano $\frac{1}{R}, \frac{1}{T}$ la flessione
e la torsione della geodetica g nel punto M ; la prima $\frac{1}{R}$
non è altro che la curvatura della sezione normale tangen-
te in M alla linea l , o come si dice brevemente, la
curvatura normale della linea l (§ 44). La seconda $\frac{1}{T}$
è ora la torsione geodetica della linea l nel punto M (**).

Per trovare le formole che danno $\frac{1}{R}, \frac{1}{T}$ espresse per $E, G,$
 D, D', D'' , indichiamo con θ l'angolo che la linea l forma

(*) Bour. - Journal de l'École Polytechnique, T. XXII.

Lipschitz. - Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften
zu Berlin - Jahrgang 1883.

Weingarten. - Über die Theorie der auf einander abwickel-
baren Oberflächen - Berlin, Reichsdruckerei.

(**). Al primo a considerare questo elemento geo-
metrico è stato Bertrand; il nome di torsione geodetica
venne introdotto da Darboux. -

in M colla linea coordinata $v = \text{cost}^2$. La geodetica γ formata in M lo stesso angolo θ colla $v = \text{cost}^2$ e se per la curva γ riteniamo le solite notazioni del Cap. I, avremo

$$\sqrt{E} du = dt \cdot \text{cost} \theta, \quad \sqrt{G} dv = dt \cdot \text{sen} \theta.$$

$$(D) \quad \begin{cases} \text{cost} \alpha = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \text{cost} \theta + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \text{sen} \theta, \\ \text{cost} h = \mp \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \text{sen} \theta \pm \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \text{cost} \theta, \\ \text{cost} \zeta = \pm X, \end{cases}$$

e analogamente per $\text{cost} \beta, \text{cost} \gamma, \text{cost} \eta, \text{cost} \nu, \text{cost} \xi$ dove i segni sono distribuiti in modo che si abbia, conformemente alle notazioni del Cap. I, § 5:

$$\begin{vmatrix} \text{cost} \alpha & \text{cost} \beta & \text{cost} \gamma \\ \text{cost} \zeta & \text{cost} \eta & \text{cost} \xi \\ \text{cost} h & \text{cost} \mu & \text{cost} \nu \end{vmatrix} = +1.$$

Ora per le formule di Frenet abbiamo

$$\pm \left(\frac{\text{cost} \alpha}{R} + \frac{\text{cost} h}{T_2} \right) = \frac{dX}{dt} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial X}{\partial u} \text{cost} \theta + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial X}{\partial v} \text{sen} \theta$$

abbia per le (9)

$$\pm \left(\frac{\text{cost} \alpha}{R} + \frac{\text{cost} h}{T_2} \right) = -\text{cost} \theta \left(\frac{D'}{E} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{D'}{\sqrt{EG}} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \text{sen} \theta \left(\frac{D''}{G} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{D'}{\sqrt{EG}} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \right)$$

e analogamente per $\frac{\text{cost} \beta}{R} + \frac{\text{cost} \mu}{T_2}, \frac{\text{cost} \gamma}{R} + \frac{\text{cost} \nu}{T_2}$. Moltiplicando queste formule ordinatamente per $\text{cost} \alpha, \text{cost} \beta, \text{cost} \gamma; \text{cost} h, \text{cost} \mu, \text{cost} \nu$ teniamo per le (D):

$$(7) \quad \begin{cases} \pm \frac{1}{R} = -\frac{D'}{E} \text{cost}^2 \theta - \frac{2D''}{\sqrt{EG}} \text{sen} \theta \text{cost} \theta - \frac{D''}{G} \text{sen}^2 \theta \\ \frac{1}{T_2} = \left(\frac{D'}{E} - \frac{D''}{G} \right) \text{sen} \theta \text{cost} \theta + \frac{D''}{\sqrt{EG}} (\text{sen}^2 \theta - \text{cost}^2 \theta) \end{cases}$$

Distribuiamo quindi con $\frac{1}{R_n}, \frac{1}{T_n}, \frac{1}{R_s}, \frac{1}{T_s}$ la curvatura normale e la torsione geodetica delle rispettive linee coordinate $u = \text{cost}^2, v = \text{cost}^2$; siamo

$$(8) \quad \frac{1}{R_n} = \mp \frac{D''}{G}, \quad \frac{1}{R_s} = \mp \frac{D'}{E}, \quad \frac{1}{T_n} = -\frac{1}{T_s} = \frac{D'}{\sqrt{EG}}$$

Queste formole danno il significato geometrico di D, D', D'' .
L'incertezza del Doppio segno nelle due prime dipende da
che i raggi R_u, R_v vi sono valutati sempre positivi. Il segno
superiore vale quando la Direzione che va dal centro di curvatura
della sezione normale al piede della normale alla
superficie coincide colla Direzione negativa $(-X, -Y, -Z)$ di
quest'ultima, l'inferiore nel caso opposto. Ma se si conside-
ra, come al § 45, di contare nel 1° caso il raggio R_u
(o R_v) come negativo, nel secondo come positivo, avremo le
formole

$$\frac{1}{R_u} = \frac{D''}{G}, \quad \frac{1}{R_v} = \frac{D}{E},$$

Ed anche nella formula generale (?) dove prendersi il segno
inferiore, cioè sarà

$$\frac{1}{R} = \frac{D}{E} \cos \theta + \frac{2D'}{\sqrt{EG}} \sin \theta \cos \theta + \frac{D''}{G} \sin^2 \theta.$$

Dall'ultima delle (8) segue che se due linee si tagliano ad
angolo retto in un punto, esse hanno in quel punto le
torsioni geodetiche eguali e di segno contrario. Inoltre, essen-
do $D'=0$ quando le linee coordinate sono le linee di curva-
tura, ne segue che ogni linea di curvatura ha nulla
la torsione geodetica.

Per mezzo delle (1) è facile esprimere la curvatura norma-
le e la torsione geodetica di una linea qualunque trac-
ciata sulla superficie e determinato dall'equazione

$$\varphi(u, v) = \cos \theta.$$

E infatti abbiamo

$$\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}$$

quindi le (?) diventano

$$\frac{1}{R} = \frac{D\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 - 2D' \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} + D'' \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2}{E\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 + G\left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2}$$

$$\frac{1}{T_2} = \frac{GD\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 + (E'D'' - GD)\frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} - ED'\left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2}{\sqrt{EG} \left\{ E\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 + G\left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2 \right\}}$$

Per ottenere da queste formole le formole più generali relative ad un sistema qualunque di linee coordinate, si può seguire un processo che riesce utile in molti casi. Si osservi che le quantità dei primi membri sono, per la loro definizione stessa, invarianti rispetto alle trasformazioni di coordinate. Completando quindi i secondi membri in guisa da ottenere espressioni invariantive che per $T=0$, si riducono alle precedenti, si avranno le formole richieste.

Nel nostro caso avremo:

$$(9) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{D\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 - 2D' \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} + D'' \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2}{E\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 - 2F' \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2} \\ \frac{1}{T_2} &= \frac{(GD' - F'D'')\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 + (E'D'' - GD)\frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} + (FD' - ED')\left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2}{\sqrt{EG - F'^2} \left\{ E\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 - 2F' \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2 \right\}} \end{aligned} \right.$$

È infatti se du, dv indicano accrescimenti delle coordinate cartesiane u, v lungo una linea $\rho = \text{cost.}$, esse possono scriversi:

$$\frac{1}{R} = \frac{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2}{Ddu^2 + 2D'du dv + D''dv^2}$$

$$-\frac{1}{T_2} = \frac{(E'D'' - FD')du^2 + (E'D'' - GD)du dv + (FD' - ED')dv^2}{\sqrt{EG - F'^2} \left\{ Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2 \right\}}$$

Ora operando una trasformazione qualunque di coordinate

$$u = u(u', v'), \quad v = v(u', v')$$

i differenziali du, dv subiscono una sostituzione lineare e se E', F', G', D', D', D'' sono i nuovi valori di E, F, G, D, D', D'' si ha (§ 39):

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2$$

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 = D_1 du'^2 + 2D_1' du' dv' + D_1'' dv'^2$$

mentre il covariante simultaneo (Jacobiano)

$$(E'D' - F'D) du^2 + (E'D'' - G'D) du dv + (F'L'' - G'D') dv^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} E du + F dv & F du + G dv \\ D du + D' dv & D' du + D'' dv \end{vmatrix}$$

Delte due forme differenziali quadratiche

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2$$

acquisite per fattore, come $\sqrt{EG-F^2}$, il determinante della sostituzione

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix}$$

Le espressioni (9) per $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{\rho}$ sono dunque invarianti rispetto alla trasformazione di coordinate c. d. d.

4. - Relazione fra la torsione geodetica e l'angolo di curvatura. - Cerchiamo ora quale relazione passa fra la torsione assoluta $\frac{1}{\rho}$ e la torsione geodetica $\frac{1}{\rho_g}$ di una linea l tracciata sopra una superficie. Supponiamo, per semplicità di calcolo che la linea l appartenga alle linee coordinate. $u = \text{cost.}$ Indicando con $ds_g = \sqrt{G} dv$ il suo elemento d'arco e ritenendo le notazioni solite, avremo

$$(10) \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} = X, \quad \cos \beta = Y, \quad \cos \gamma = Z,$$

Derivando rispetto a v coll'osservare le formole di Frenet e

le (5), si ha

$$(11) \quad \cos^2 \lambda = \frac{1}{\sqrt{G}} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2 + \frac{D''}{\sqrt{G}} X_3 \right\}$$

e analogamente per $\cos \eta$, $\cos \zeta$. Ne risulta

$$(11') \quad \frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{E}G} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{D''}{G} \right)^2,$$

e indicando con σ l'angolo che la normale principale alla linea l forma colla normale alla superficie, sarà

$$\cos \sigma = \sum X_3 \cos \zeta = \rho \frac{D''}{G}$$

quindi

$$\tan \sigma = \frac{\rho}{\sqrt{E}G} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

Dalle (10), (11) segue

$$(12) \quad \cos \lambda = \cos \lambda \cos \eta - \cos \eta \cos \zeta = -\frac{\rho D''}{G} X_2 - \frac{\rho}{\sqrt{E}G} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_3$$

e analogamente per $\cos \mu$, $\cos \nu$.

Ora dalle formole di Serret risulta

$$\pm \frac{1}{T} = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum \cos \zeta \frac{\partial \cos \lambda}{\partial v} \quad (*)$$

Ma per le (5) e per le (11')

$$\pm \frac{1}{T} = -\frac{D''}{\sqrt{E}G} - \frac{1}{\sqrt{G}} \left[\frac{\rho D''}{G} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{\sqrt{E}G} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) - \frac{\rho}{\sqrt{E}G} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho D''}{G} \right) \right]$$

Ma avendo (n° 3)

$$\frac{D''}{\sqrt{E}G} = \frac{1}{T_2}, \quad \tan \sigma = \frac{\rho}{\sqrt{E}G} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{\rho D''}{G}$$

la precedente può scriverli

$$\pm \frac{1}{T} = -\frac{1}{T_2} - \frac{d\sigma}{ds}$$

Il segno del membro, volendo che nel caso di una linea geodetica le due torsioni coincidano, sarà evidentemente l'opposita. Avremo dunque per la formola cercata

(*) Lasciamo per ora indeterminato il segno della torsione assoluta $\frac{1}{T}$ per meglio poi in armonia con quello della torsione geodetica $\frac{1}{T_2}$.

$$(13) \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} + \frac{d\sigma}{ds}$$

Ne risulta che per tutte e sole quelle linee la cui normale principale è inclinata di un angolo costante sulla normale alla superficie, la torsione geodetica coincide coll'assoluta.

Osser.^o Le linee che nella trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche tengono il luogo delle geodetiche nella trasformazione complementare, appartengono appunto a questa specie (Cf. § 94 Nota).

#####

Indice

delle Lezioni di Geometria Differenziale

Capitolo I:

Curve a doppia curvatura.

§1. - Rappresentazione analitica	1
§2. - Tangente e piano normale	2
§3. - Prima curvatura o flessione	4
§4. - Piano osculatore	5
§5. - Normale principale e binormale	9
§6. - Seconda curvatura o torsione	13
§7. - Formole di Frenet	15
§§8, 9. - Elliche cilindriche	17
§10. - Segno della torsione	23
§11. - Superficie sviluppabili	24
§12. - Superficie sviluppabili	28
§§13, 14. - Sviluppabile polare e suo spigolo di regresso	29
§§15, 16. - Evolute ed evolventi	34
§17. - Elementi caratteristici per le curve	39

Capitolo II:

Coordinate curvilinee sulle sup.^{ie} Rapp.^{ne} conformi.

§18. - Coordinate curvilinee	43
------------------------------------	----

	Pag.
§ 19. - Formole fondamentali	46
§ 20. - Linee tracciate sulla superficie	48
§§ 21, 22, 23. - Sistemi ortogonali isotermi	50
§ 24. - Applicazione alle superficie di rotazione	55
§§ 25, 26. - Rappresentazione conforme	57
§ 27. - Proiezione stereografica polare	62

Capitolo III.º

Linee geodetiche. Curvatura geodetica.

§ 28. - Equazione differenziale delle geodetiche	65
§ 29. - Normale principale delle geodetiche	68
§ 30. - Linee geodeticamente parallele	69
§ 31. - Integrazione dell'equazione delle geodetiche nel caso di Liouville	71
§ 32. - Geodetiche sulle superficie di rotazione	73
§§ 33, 34, 35. - Curvatura geodetica	75
§ 36. - Proprietà dei sistemi ortogonali di linee a curvatura geodetica costante	80
§ 37. - Sistemi ortogonali di cerchi nel piano e sulla sfera	82

Capitolo IV.º

Curvatura delle superficie.

§§ 38, 39, 40. - Linee di curvatura	85
§§ 41, 42. - Tangenti coniugate. - Linee asintotiche	93

§ 43. - La superficie riferita alle sue linee. D curvatura	Pag. 98
§§ 44, 45, 46. - Raggio di curvatura. - Curvatura totale e media	101
§ 47. - Rappresentazione sferica di Gauss	111
§ 48. - Condizioni delle asintotiche	114
§ 49. - Equazioni a derivate parziali per i raggi prin- cipali r_1, r_2	116
§§ 50, 51, 52. - Superficie evolute	117

Capitolo V.º

Le superficie definite dal loro elemento lineare

§ 53. - Superficie flessibile	126
§ 54. - Funzioni assolute e funzioni isocurvature	130
§ 55. - La curvatura di Gauss come funzione assoluta	132
§ 56. - Teorema di Gauss sui triangoli geodetici	136
§ 57. - Parametro differenziale del 1º ordine	138
§ 58. - La curvatura geodetica come funzione isocurvature	140
§ 59. - Parametro differenziale del 2º ordine	144
§ 60. - Applicazioni ai sistemi isocurvature	146

Capitolo VI.º

Superficie applicabili

§§ 61, 62. - Criterii per giudicare dell'applicabilità	150
--	-----

	Pag
Due superficie	149
§§ 63, 64. - Caso delle superficie a curvatura costante	154
§ 65. - Superficie pseudosferiche di rotazione	158
§ 66. - Deformazione di ogni superficie pseudosferica a superficie di rotazione	164
§ 67. - Superficie applicabili sopra se' medesime in ∞ modi ..	167
§§ 68, 69. - Superficie di rotazione applicabili	169
§§ 70, 71. - Ellicoide. Teorema di Bour e applicazioni ..	173
§ 72. - Equazione a Derivate parziali per le superficie applicabili sopra una superficie data	177

Capitolo VII^o

Superficie i cui raggi principali di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro.

§ 73. - Teorema di Weingarten	180
§ 74. - Sistemi ∞^2 di raggi	183
§ 75. - Teorema di Beltrami	185
§ 76. - Teorema reciproco di Weingarten	187
§ 77. - Forme particolari dell'elemento lineare sferico ..	189
§ 78, 79. - Applicazioni alle superficie ad area minima e a quelle di curvatura costante	193
§ 80. - Superficie complementari delle pseudosferiche	198

Capitolo VIII.º

Le superficie a curvatura costante.

Parte 1.º Geometria pseudosferica.

§ 81. - Rappresentazione conforme delle superficie pseudo- sferiche sul piano	200
§ 82. - Movimenti della superficie in sé medesima	204
§ 83. - Nuova rappresentazione conforme	208
§ 84. - Geodetiche parallele. - Angolo di parallelismo	212
§ 85. - Triangoli geodetici	214
§ 86. - Perimetri	216
§ 87. - Trigonometria pseudosferica	219
§ 88. - Genus sulla trigonometria non-euclidea	221
§ 89. - Rappresentazione di Beltrami	223

Parte 2.º Trasformazione delle superficie a cur-
vatura costante.

§ 90. - Asintotiche delle superficie pseudosferiche	225
§§ 91, 92. - Trasformazione complementare	227
§ 93. - Trasformazione di Bäcklund	234
§ 94. - Interpretazione geometrica	237
§ 95. - Trasformazione di Lie	240

Capitolo IX.º

Le superficie a curvatura media nulla o costante

§ 96. - Equazione a Derivate parziali per le superficie.
--

ad area minima	244
§ 97. - Formole di Weierstrass	247
§ 98. - Applicabilità delle superficie d'area minima	250
§ 99. - Superficie ad area minima applicabili sopra superf. fici di rotazione	253
§ 100. - Formole per le superficie ad area minima	256
§ 101. - Applicazioni	258
§ 102. - Teorema di Steiner	260
§ 103. - Superficie a curvatura media costante	261
§ 104. - Teorema di Delaunay	264

Capitolo X.^o

Superficie definite da proprietà delle loro linee di curvatura.

§ 105. - Superficie modanate (moulures)	267
§ 106. - Superficie modanate a direttrice cilindrica	271
§ 107. - Superficie modanate a direttrice conica	274
§ 108. - Superficie che hanno tutte le linee di curvatura piane	275
§ 109. - Superficie a curvatura costante con un sistema di linee di curvatura piane	277
§ 110. - Superficie con un sistema di linee di curvatura circolari	280
§ 111. - Cilindri di Dupin	282

Capitolo XI.^o

Superficie rigate.

§ 112. - Formole fondamentali	285
§ 113. - Cono direttore e linea di stringimento	289

§ 114. - Formole di Christ.	294
§ 115. - Asintotiche.	294
§ 116. - Flessione delle superficie rigate. Metodo di Minding.	297
§§ 117, 118. - Metodo di Beltrami.	301
§ 119. - Teorema di Bonnet.	306
§ 120. - Superficie rigate applicabili sopra superficie di rotazione.	308

Capitolo XII:

Coordinate curvilinee dello spazio.
Sistemi tripli di superficie ortogonali

§ 121. - Coordinate curvilinee nello spazio.	311
§ 122. - Teoremi di Dupin e Darboux sui sistemi tripli ortogonali.	314
§ 123. - Condizione perchè un sistema di superficie appartenga ad un sistema triplo ortogonale.	317
§§ 124, 125. - Formole di Lamé per i sistemi tripli ortogonali.	320
§§ 126, 127. - Determinazione del sistema triplo ortogonale corrispondente ad una data forma dell'elemento lineare.	326
§ 128. - Rappresentazioni conformi dello spazio.	333
§ 129. - Espressioni dei raggi principali di curvatura del sistema triplo, delle flessioni e delle torsioni delle linee di curvatura per H_1, H_2, H_3 .	335

Capitolo XIII:

Coordinate ellittiche - Geodetiche dell'elissoide.

§ 130. - Coordinate ellittiche.	339
---------------------------------	-----

§ 131. - Geodetiche dell'ellissoide. - Teoremi di Borchardt... 243
 §§ 132, 133, 134, 135. - Proprietà delle geodetiche uscenti dagli
 umbelici. - Teoremi di Hart e Roberts... 346
 § 136. - Teorema di Charles... 358

Capitolo XIV.

Sistemi tripli ortogonali di Weingarten.

§ 137. - Forma dell'elemento lineare dello spazio... 361
 §§ 138, 139. - Proprietà dei sistemi di Weingarten... 365
 §§ 140, 141, 142. - Sistemi ciclici di Ribaucour... 369
 § 143. - Sistema triplo elicoidale... 375
 § 144, 145. - Trasformazione complementare dei sistemi di
 Weingarten... 376
 § 146. - Trasformazione di Bäcklund dei sistemi di
 Weingarten... 382

Appendice

Formole di Codazzi.

N^o 1, 2. - Formole di Codazzi... 385
 N^o 3. - Interpretazione geometrica - Curvone geodetica
 di una linea tracciata sopra una superficie... 390

Correzioni

Pag. 6^a, linea 7 dal basso - in luogo di $\delta = \dots$ leggi $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \delta = \dots$
 " 41^a, ultima linea " $\int \frac{\sqrt{\varphi'(y) - \delta^2}}{\cos^3 \theta}$ " $\int \frac{\sqrt{\varphi'(y) - \delta^2}}{\cos \theta}$.
 " 48^a, linea 10 dall'alto " $EG \leq F^2$ " $EG \geq F^2$.
 " 87^a, Dopo le formole $dx = r dX$, $dy = r dY$, $dz = r dZ$ si aggiungano le osservazioni seguenti:

La quantità r non può dipendere dalla direzione secondo un asse, né lo spostamento sulla superficie, cioè può essere funzione soltanto di u, v e non del rapporto $\frac{dv}{du}$. Se infatti i valori r, r_1, r_2 e secondo le linee coordinate u, v non fossero eguali fra loro e al valore generico di r , si avrebbe per tutti i sistemi di spostamenti du, dv :

$$(r_1 - r) \frac{\partial X}{\partial u} du + (r_1 - r) \frac{\partial X}{\partial v} dv = 0,$$

$$(r_2 - r) \frac{\partial Y}{\partial u} du + (r_2 - r) \frac{\partial Y}{\partial v} dv = 0,$$

$$(r_3 - r) \frac{\partial Z}{\partial u} du + (r_3 - r) \frac{\partial Z}{\partial v} dv = 0,$$

quindi

$$\frac{\partial X}{\partial u} : \frac{\partial Y}{\partial u} : \frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial v} : \frac{\partial Y}{\partial v} : \frac{\partial Z}{\partial v},$$

e perciò se X, Y, Z non sono tre costanti, ma una almeno di esse p. e. X è variabile, saranno Y, Z funzioni di X . Nel primo caso la superficie è un piano; nel secondo prendiamo a linee coordinate $u = \text{cost}^e$ le $X = \text{cost}^e$ risulterebbe $\frac{\partial X}{\partial u} = 0, \frac{\partial Y}{\partial u} = 0, \frac{\partial Z}{\partial u} = 0$ e perciò $dx = r \frac{\partial X}{\partial u} du, dy = r \frac{\partial Y}{\partial u} du, dz = r \frac{\partial Z}{\partial u} du$; se r è finito la superficie si ridurrebbe quindi ad una linea e per $r = \infty$ ad un piano.

- Pag. 91^a, linea 5^a in luogo di $(ED' - ED)$ leggi $(ED' - ED) du^2$
 " 95^a " 5^a dal basso " $D du dv$ " $D du du$
 " 95^a " 7^a " $\Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)$ " $\Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du \dots \right)$
 " 97^a formola (a). Pralori di D, D', D'' vanno cancellati di segno.
 " 98^a formola (8). Lo stesso compimento per l'ultimo membro della formola
 " 106^a linee 16, 17, 18 in luogo di α_0 leggi ω_0
 " 108^a, formola (21) " $H = \frac{2ED' - ED'' - GD'}{EG - F^2}$ " $H = \frac{2ED' - ED'' - GD'}{EG - F^2}$
 " 115^a, linee 4^a " $\frac{E}{r_1} du^2 + \frac{G}{r_2} dv^2$ " $\frac{E}{r_1} du^2 + \frac{G}{r_2} dv^2$
 " 121 formola (17) " $dt^2 = dr^2 + \dots$ " $dt^2 = dr^2 + \dots$
 " 122^a. Nelle formole (29), (29') leggi

$$(29) K_1 = -\frac{1}{(r_1 - r_2)^2} \frac{\frac{\partial r_1}{\partial v}}{\frac{\partial r_1}{\partial u}}, \quad (29') K_2 = -\frac{1}{(r_1 - r_2)^2} \frac{\frac{\partial r_2}{\partial u}}{\frac{\partial r_2}{\partial v}}$$

 " 122^a, penultima linea, in luogo di: e avremo... leggi:
 e se r_1, r_2 saranno funzioni l'uno dell'altro, avremo la
 relazione notevole (conosciuta ad Halphen)
 " 123^a, linea 7^a, in luogo di. Per la (30) le curvature leggi:
 Per la (30), se i raggi principali di curvatura dell'el
 vante sono legati da una relazione, le curvature etc.
 " 135^a, formola (8). Nell'ultimo termine della prima paron
 tedi in luogo di $\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2$ di leggi $\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2$.
 " 144^a, formola (8), in luogo di $1 + \psi'(a)$ leggi $1 + \psi'(a)$.
 " 149^a, formola (15) " $G \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + I \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$ " $G \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2I \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + I \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$
 " 192^a, alle formole della linea 9^a il numero (9').
 " 220^a, linea 14^a in luogo di $\frac{\sin A'B'B}{\sin B'A'B}$ leggi $\frac{\sin A'B'B}{\sin B'A'A}$
 " 221^a " 6^a " R " r
 " 224^a, linea 7^a dal basso, $p_1 = \frac{a^2 p}{p^2 + a^2}$ " $p_1 = \frac{4a^2 p}{p^2 + 4a^2}$
 " 248^a, linea 1^a, invece di: dell'equatore avremo... leggi: dell'e
 quatore. Indicando con τ l'ordinaria variabile completa

orig sul piano dell'equatore, assieme: ...

- Pag. 288, linea 4, in luogo di $\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}$ leggi $\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}^2$
- " 289, linea 1^a dal basso " generatrice, leggi *invariante*
- " 315, " 9^a leggi $\frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} = 0$
- " 325, " 5^a in luogo di $\frac{\partial H_2}{\partial u}$ leggi $\frac{\partial H_2}{\partial u}$
- " " 4^a dal basso " $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x} X_2 \right)$ " $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x} X_2 \right)$
- " 331 " 3^a in luogo di notazione leggi: *convenzioni*
- " 333 " 4^a dal basso; nel secondo membro della formula inver-
 ti numeratore e denominatore.







119824

BIBLIOTECA
Scuola Normale Superiore