Betti Prof. Enrico

Monografia delle Funzioni Ellittiche

LA TEORICA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE. (*)

MONOGRAFIA

INTRODUZIONE.

1.

Una variabile complessa $w = u + iv$ dicesi funzione di un altra variabile complessa $z = x + iy$, quando ad ogni sistema di valori di x e di y corrispondono uno o più sistemi di valori determinati di u e di v.

Quando ad ogni sistema di valori di x e di y corrisponde un solo determinato sistema di valori di u e v, la funzione dicesi *monodroma.*

Chiameremo *indice* di una variabile complessa $z = x + iy$, il punto di coordinate x e y nel piano in cui intendiamo rappresentate nel modo ordinario le quantità complesse.

Se la funzione w è continua, quando l'indice di z percorre una linea continua, anche l'indice di w percorrerà una linea continua.

La funzione w sarà monodroma, se prenderà lo stesso valore per un valore di z che abbia l'indice in un punto Z, qualunque sia la linea percorsa per arrivarvi.

La derivata di w rapporto a z:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{du + i\,dv}{dx + i\,dy} = \frac{\left(\frac{du}{dx} + \frac{idv}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy} + \frac{idv}{dy}\right)\frac{dy}{dx}}{1 + i\,\frac{dy}{dx}},$$

ha in generale un valore dipendente da $\frac{dy}{dx}$, ossia dipendente dalla direzione in cui si muove l'indice di z quando z aumenta di dz. Affinchè abbia un sol valore determinato e indipendente dalla direzione dell'aumento di z, è necessario e sufficiente che sia:

$$(1)\quad \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} = 0\ ; \qquad (2)\quad \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} = 0 \cdot \ (^{**})$$

(*) Questa teorica è stata esposta nelle Lezioni di Analisi superiore date nella R. Universita di Pisa nell'anno scolastico 1859—60.

(**) Vedi *Riemann,* Fondamenti di una teor. ec. negli Annali di Mat. Vol. 2° pag. 291.

Le funzioni che godono questa proprietà, e quindi sodisfano alle equazioni (1) e (2), da *Cauchy* sono state chiamate *monogene*.

Dicesi funzione *analitica* di una variabile complessa z, una funzione, i cui valori si possono esprimere tutti mediante un numero finito o infinito di operazioni elementari di calcolo effettuate sopra il valore di z. Le funzioni analitiche sono tutte *monogene*.

Chiameremo funzioni *intere* quelle funzioni analitiche i cui valori possono esprimersi mediante una serie di potenze positive, e intere della variabile z, convergente per qualunque valore reale o complesso di z. Chiameremo funzioni *fratte* quelle funzioni analitiche i cui valori si possono esprimere mediante il rapporto di due funzioni intere.

Diremo *residuo integrale* di una funzione w rispetto a una linea il valore dell' integrale $\int w\, dz$, quando s'intenda effettuata l' integrazione facendo percorrere all'indice di z tutta la linea.

2.

I principî fondamentali della teorica delle funzioni monogene e monodrome saranno il punto di partenza, dal quale saremo condotti naturalmente alle funzioni che fanno il soggetto principale di questa Monografia.

Teorema 1. *Il residuo integrale di una funzione monogena e monodroma w, rispetto a una linea chiusa C, è sempre eguale a zero, quando w non diviene infinita o discontinua in alcun punto compreso nell'area della linea C.*

Siano o, o', o'', o''' i punti di contatto delle quattro tangenti alla curva C che la limitano inferiormente, a destra, superiormente e a sinistra, e poniamo:

$$oo' = a\,, \quad oo'o'' = b\,, \quad oo'o''o''' = c\,, \quad oo'o''o'''o = d.$$

Avremo per il residuo integrale di w rispetto alla linea C:

$$(1) \qquad \int w dz = \int (u + iv)(dx + idy)$$

$$= \int_0^d \left(u \frac{dx}{ds} - v \frac{dy}{ds}\right) ds + i \int_0^d \left(v \frac{dx}{ds} + u \frac{dy}{ds}\right) ds.$$

Prendiamo ora l'integrale:

$$\int\int \left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right) dx\, dy$$

esteso a tutta l'area della linea C. Se v si mantiene per tutto finita e continua nell'interno di C, avremo:

$$\iint \frac{dv}{dx}\, dx\, dy = \int_0^b v \frac{dy}{ds} ds - \int_d^b v \frac{dy}{ds} ds = \int_0^d v \frac{dy}{ds} ds \,.$$

$$\iint \frac{du}{dy}\, dx\, dy = \int_c^a u \frac{dx}{ds} ds - \int_c^{d+a} u \frac{dx}{ds} ds = - \int_a^{d+a} u \frac{dx}{ds} ds = - \int_0^d u \frac{dx}{ds} ds \,;$$

e quindi

$$(2) \qquad \iint \left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right) dx\, dy = \int_0^d \left(v \frac{dy}{ds} - u \frac{dx}{ds}\right) ds.$$

Analogamente si dimostra l'identità :

$$(3) \qquad \iint \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right) dx\, dy = \int_0^d \left(v \frac{dx}{ds} + u \frac{dy}{ds}\right) ds \,,$$

quando si estenda egualmente l'integrale doppio.

Le formole (2) e (3) non presuppongono che w sia funzione analitica di z, ma non valgono altro che quando w si mantiene finita e continua in tutto lo spazio dell'integrazioni effettuate per trasformare gl' integrali doppi in integrali semplici , cioè in tutta l'area C.

Ora se la funzione w è monogena gli elementi degl' integrali doppi (2) e (3) sono nulli durante tutta l'integrazione. Quindi sono nulli questi medesimi integrali , e gl' integrali semplici che sono eguali a loro. Dunque è nullo il secondo membro dell'equazione (1), e quindi il residuo integrale, come volevamo dimostrare.

Teorema 2. *I residui integrali di una funzione monogena e monodroma w, rispetto a due linee aperte Z_1MZ_2 , $Z_1M'Z_2$ che terminano ai medesimi punti Z_1 e Z_2 , sono eguali se in tutti i punti dell'area compresa dalle due linee la funzione w è finita e continua.*

Infatti, per il teorema precedente, abbiamo :

$$\int w\, dz + \int^1 w dz = 0,$$

quando il primo integrale si estenda alla linea Z_1MZ_2 e il secondo alla linea $Z_2M'Z_1$. Ma questo ultimo è eguale all'integrale esteso a $Z_1M'Z_2$, preso negativamente: onde avremo :

$$\int w\, dz = \int_1 w\, dz,$$

quando il primo integrale si estenda a tutta la linea Z_1MZ_2 , e il secondo a $Z_1M'Z_2$,
come volevamo dimostrare.

Teorema 3. *Il residuo integrale di una funzione monogena e monodroma w ,*

*

rispetto a una linea chiusa C, che contiene nel suo interno un sol punto D, nel quale la funzione w cessa di essere finita e continua, è eguale al residuo integrale di w rispetto a una linea e piccola quanto si vuole descritta intorno al punto D.

Infatti, se uniamo con una linea s un punto di C con un punto di c, la linea s più la linea C percorsa da destra a sinistra, più la linea s percorsa in senso opposto, più la linea c percorsa da sinistra a destra formano un contorno chiuso nell'interno del quale w è per tutto finita e continua, e quindi la somma dei due residui integrali di w rispetto ad s presi in senso opposto, più il residuo integrale rispetto a C preso da destra a sinistra, più il residuo integrale rispetto a c da sinistra a destra, sarà eguale a zero. Essendo nulla la somma de' residui integrali rispetto ad s presi in senso opposto, e il residuo integrale rispetto a c preso da sinistra a destra essendo eguale al valore del residuo integrale rispetto a c da destra a sinistra preso con segno contrario, ne risulta che i residui integrali rispetto a C e a c presi nello stesso senso sono eguali, come volevamo dimostrare.

È facile a vedersi che se nell'interno di una linea chiusa C vi sono più punti d, d', d'' ..., nei quali w cessa di essere finita e continua, il residuo integrale di w rispetto a C sarà eguale alla somma dei residui integrali di w rispetto alle linee chiuse c, c', c'' ..., piccole quanto si vuole, descritte rispettivamente intorno ai punti d, d', d'' ....

Teorema 4. *I valori di una funzione monogena e monodroma w possono ottenersi mediante una medesima serie di potenze positive e intere della variabile z, per tutti i valori di z, che hanno gl'indici compresi in un circolo* C *nell'interno del quale la funzione w non cessa mai di essere finita e continua.*

Sia il centro di questo circolo il punto A indice della quantità complessa a, e Z_0 sia l'indice di $a + z_0$. Indichiamo con w_0 il valore di w nel punto Z_0, cioè per il valore $a + z_0$ della variabile z.

La funzione :

$$\frac{w - w_0}{z - a - z_0}$$

sarà monogena, monodroma, finita e continua in tutti i punti del circolo. Poichè tali sono il numeratore e il denominatore, e il denominatore non diviene nullo altro che nel punto Z_0, nel quale diviene nullo anche il numeratore, e il valore della funzione in questo punto è evidentemente eguale alla derivata di w rapporto a z, la quale è unica e determinata perchè la funzione è monogena, è finita perchè la funzione è continua in tutti i punti del circolo.

Dunque per il teorema 1, avremo :

$$\int \frac{w - w_0}{z - a - z_0} dz = 0 ,$$

quando si estenda questo integrale a tutta la circonferenza C. Quindi :

$$\int \frac{w}{z - a - z_0}\,\mathrm{d}z = w_0 \int \frac{\mathrm{d}z}{z - a - z_0}.$$

Ora la funzione $\dfrac{1}{z - a - z_0}$ è monogena, monodroma, finita e continua in tutti i punti del circolo C, fuori che nel punto Z_0, dove diviene infinita; dunque per il teorema 3, l'integrale del secondo membro non muta valore se invece di estenderlo a tutta la circonferenza C, si estende a una circonferenza c descritta con raggio r piccolo quanto si vuole intorno a Z_0. Onde avremo, indicando con φ l'angolo variabile del raggio r coll'asse polare:

$$z - a - z_0 = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen} \varphi) = re^{\varphi i}, \qquad \mathrm{d}z = ire^{\varphi i}\,\mathrm{d}\varphi;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z - a - z_0} = i \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi i. \tag{2}$$

Sostituendo il valore (2) nell'equazione (1), abbiamo :

$$w_0 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{w\,\mathrm{d}z}{z - a - z_0}, \tag{3}$$

la quale è vera per qualunque punto Z_0 interno al circolo C.

L'integrale che comparisce nella equazione (3) deve estendersi a tutta la circonferenza C, sopra la quale si ha evidentemente :

$$\mathrm{mod.}(z - a) > \mathrm{mod.}z_0;$$

onde abbiamo in serie convergente :

$$\frac{1}{z - a - z_0} = \frac{1}{z - a} + \frac{z_0}{(z - a)^2} + \frac{z_0^2}{(z - a)^3} + \frac{z_0^3}{(z - a)^4} + \ldots,$$

e quindi :

$$w_0 = \frac{1}{2\pi i}\left(\int \frac{w\,\mathrm{d}z}{z - a} + z_0 \int \frac{w\,\mathrm{d}z}{(z - a)^2} + z_0^2 \int \frac{w\,\mathrm{d}z}{(z - a)^3} + \ldots\right).$$

Indicando con y la quantità $a + z_0$, che ha per indice Z_0, e con w semplicemente il valore corrispondente di w, finchè Z_0 sarà nell'interno di C, avremo :

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{w\,\mathrm{d}z}{z - a} + \frac{y - a}{2\pi i} \int \frac{w\,\mathrm{d}z}{(z - a)^2} + \frac{(y - a)^2}{2\pi i} \int \frac{w\,\mathrm{d}z}{(z - a)^3} + \ldots,$$

e ponendo

$$z - a = re^{\varphi i},$$

$$(4)\quad w = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w\,d\varphi + \frac{y-a}{2\pi r}\int_0^{2\pi} w\,e^{-\varphi i}\,d\varphi + \frac{(y-a)^2}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi} w\,e^{-2\varphi i}\,d\varphi + \dots$$
$$+ \frac{(y-a)^n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} w\,e^{-n\varphi i}\,d\varphi + \dots .$$

Questa serie è convergente per tutti i valori di y, per i quali mod. $y-a<r$. Infatti, se diamo a w la forma $\rho e^{\theta i}$, avremo

$$\int_0^{2\pi} w\,e^{-n\varphi i}\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\rho\cos(\theta - n\varphi)d\varphi + i\int_0^{2\pi}\rho\,\mathrm{sen}(\theta - n\varphi)d\varphi\,,$$

ed ambedue gl'integrali del secondo membro sono minori dell'integrale $\int_0^{2\pi}\rho\,d\varphi$ che è eguale a una quantità finita M. Quindi

$$\text{mod.}\int_0^{2\pi} w\,e^{-n\varphi i}\,d\varphi < \text{M},$$

qualunque sia n. Quindi la serie (4) sarà convergente quando sarà convergente la serie :

$$1 + \frac{y-a}{r} + \frac{(y-a)^2}{r^2} + \dots + \frac{(y-a)^n}{r^n} + \dots ,$$

cioè quando mod.$(y-a) < r$.

Osservando che la derivata n^{esima} di una funzione monogena di una variabile y, espressa da una serie convergente S, è eguale alla somma di una serie anch'essa convergente formata colle derivate n^{esime} dei termini della serie S, abbiamo :

$$\frac{d^n w}{dy^n} = \frac{1.\,2.\,3.\dots n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} w\,e^{-n\varphi i}\,d\varphi + (y-a)\gamma\,,$$

dove γ è una funzione intera di y; e quindi indicando con $\left(\frac{d^n w}{dy_n}\right)_a$ il valore di $\frac{d^n w}{dy^n}$ per $y = a$, si ottiene

$$\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} w\,e^{-n\varphi i}\,d\varphi = \frac{1}{1.\,2.\,3.\dots n}\left(\frac{d^n w}{dy^n}\right)_a$$

e la serie (4) diviene :

$$(5)\quad w = w_a + (y-a)\left(\frac{dw}{dy}\right)_a + \frac{(y-a)^2}{1.\,2}\left(\frac{d^2 w}{da^2}\right)_a + \dots + \frac{(y-a)^n}{1.2.3\dots n}\left(\frac{d^n w}{dy}\right)_a + \dots$$

3.

Dal teorema 4. del numero precedente si deduce immediatamente, che tutte le funzioni le quali si mantengono monogene, monodrome, finite e continue per qualunque valore finito di una variabile complessa z sono funzioni analitiche intere di z, alle quali possono estendersi facilmente i teoremi fondamentali relativi alle funzioni razionali intere.

Teorema 1. *Una funzione intera w diviene sempre infinita per $z = \infty$.*

Una funzione intera w è sempre monogena, monodroma, finita e continua per tutti i valori finiti della variabile, quindi potrà porsi sotto la forma data dalla formula (4) del n.° 2:

$$w = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w \, d\varphi + \frac{z-a}{2\pi r}\int_0^{2\pi} w \, e^{-\varphi i} \, d\varphi + \frac{(z-a)^2}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi} w \, e^{-2\varphi i} \, d\varphi + \ldots$$

dove r è il raggio di un circolo che ha il centro nel punto indice di a, di grandezza arbitraria. Prendiamo questo raggio infinito; se w non divenisse per questo valore anche esso eguale a infinito, gl'integrali avrebbero tutti un valore finito, e quindi tutti i termini della serie, eccettuato il primo, diverrebbero eguali a zero, e avremmo:

$$w = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w \, d\varphi = \text{costante}.$$

Dunque una funzione intera che non diviene infinita per $z = \infty$, non è una funzione di z, ma una costante.

Se diciamo *radice* di una funzione intera di z, un valore complesso di z per cui questa funzione si annulla, avremo il seguente:

Teorema 2. *Una funzione intera w ha sempre almeno una radice.*

Infatti se la funzione intera w non avesse alcuna radice finita, la funzione monogena e monodroma $\frac{1}{w}$ sarebbe finita e continua per tutti i valori finiti della variabile z; quindi sarebbe una funzione intera, e per il teorema precedente diverrebbe infinita per $z = \infty$, e quindi w si annullerebbe per $z = \infty$. Dunque una funzione intera o ha almeno una radice finita, o una infinita.

Teorema 3. *Ogni funzione intera, che non ha radici finite, è della forma e^w, essendo w una funzione intera.*

Infatti, se W è una funzione intera che non ha radici finite, log W sarà evidentemente una funzione monogena, finita e continua per ogni valore complesso finito della variabile z. Dimostriamo che sarà anche monodroma. Perciò basterà provare che tanto quando l'indice di z va da un punto z_1 a un altro z_2 per un cammino finito $z_1 m z_2$, quanto quando va da z_1 a z_2 per un altro cammino qualunque differente $z_1 n z_2$, pure finito, la funzione W prende sempre lo stesso valore in z_2. Poniamo $W = \rho e^{\theta i}$, e indichiamo ordinatamente con Z_1, M, Z_2, N gl'indici dei valori di W corrispondenti ai valori di z, che hanno per indici i punti z_1, m, z_2, n.

Gl'indici dei valori di W che corrispondono ai valori di z che hanno gl' indici nei punti dell'area finita $z_1 m\, z_2 n\, z_1$, si troveranno in un area finita che non conterrà il polo , perchè ρ non si annulla per nessuno di questi valori di z. Dunque la linea $Z_1 M\, Z_2 N\, Z_1$ sarà una linea chiusa che non conterrà nel suo interno il polo, e tanto quando l'indice di W va da Z_1 a Z_2 per la linea $Z_1 M Z_2$, quanto quando va da Z_1 a Z_2 per la linea $Z_2 N Z_2$, l'angolo θ prenderà nel punto Z_2 lo stesso valore, quindi $\log W = \log \rho + \theta i$ prenderà lo stesso valore qualunque sia il cammino che percorre l'indice della variabile z per andare da z_1 a z_2. Dunque log W è una funzione monodroma, e quindi essendo anche monogena, finita e continua per ogni valore finito di z, sarà una funzione intera w, e avremo $\log W = w$, e quindi $W = e^w$, come volevamo dimostrare.

Diremo che una funzione intera w è divisibile per un altra funzione intera w_1 , quando esiste una funzione intera q, il cui prodotto per w_1 è eguale a w. La funzione q si dirà *quoziente* di w diviso per w_1 , w_1 si dirà divisore o fattore di w.

Teorema 4. *Se a è radice della funzione intera w, questa funzione è divisibile per* $1 - \frac{z}{a}$.

La formula (5) del numero precedente quando a è radice di w, e quindi $w_a = 0$, dà :

$$w = (z - a)\left[\left(\frac{dw}{dz}\right)_a + \frac{z - a}{1.2}\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)_a + \frac{(z - a)^2}{1.2.3}\left(\frac{d^3w}{dz^3}\right)_a + \ldots\right].$$

La serie tra parentesi è convergente per ogni valore finito di z , quindi è una funzione intera di z ; dunque w è divisibile per $z - a$, e anche per $1 - \frac{z}{a}$.

Se a oltre ad essere radice di w fosse radice anche delle funzioni intere :

$$\frac{dw}{dz},\ \frac{d^2w}{dz^2} \ldots \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}},$$

w sarebbe divisibile per $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^n$, e si direbbe che a è n volte radice di z.

Teorema 5. *Una funzione intera* w, *che ha un numero finito di radici finite, e non ha radici infinite, è una funzione razionale intera.*

Siano α_1 , α_2 , α_3 , ... α_n le sole radici di w : avremo

$$w = \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) w_1$$

e w non si annullerà per nessun valore finito o infinito di z, e sarà una funzione intera; quindi per il Teorema 2. sarà una costante, e w una funzione razionale intera.

Teorema 6. *Due funzioni intere w_1, w_2 che hanno le stesse radici non possono differire che per un fattore della forma e^w dove w è funzione intera.*

Infatti, indicando con q il rapporto $\frac{w_1}{w_2}$, avremo $w_1 = w_2 q$, e q non avrà radici finite: dunque sarà della forma e^w, e w funzione intera.

4.

Da ciò che abbiamo dimostrato nel numero precedente si rileva, che le funzioni intere che non risultano dal prodotto di una funzione razionale per un esponenziale e^w, dove w è funzione intera, hanno tutte un numero infinito di radici. Dimostriamo che gl' indici di queste radici devono sodisfare alla condizione di non formare una linea continua in nessuna parte del Piano.

Lemma 1. *Se w è una funzione intera di $z = x + iy$, riguardandola come funzione di p e di s, essendo p la lunghezza della normale a una data linea qualunque S, condotta dal punto di coordinate x, e y, ed s la lunghezza dell'arco di questa linea contata a partire da un punto fisso fino al punto dove la normale incontra la linea S, avremo:*

$$\frac{dw}{dp} + i\frac{dw}{ds} = 0.$$

Infatti, avremo:

$$\frac{dw}{dp} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dp} + i\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dp} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dp} + i\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dp},$$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{ds} + i\frac{dv}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{ds} + i\frac{dv}{dy}\frac{dy}{ds},$$

ed essendo:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{ds}, \qquad \frac{dy}{dp} = -\frac{dx}{ds},$$

sarà anche:

$$\frac{dw}{dp} = \frac{du}{dx}\frac{dy}{ds} + i\frac{dv}{dx}\frac{dy}{ds} - \frac{du}{dy}\frac{dx}{ds} - i\frac{dv}{dy}\frac{dx}{ds}:$$

onde:

$$\frac{dw}{dp} + i\frac{dw}{ds} = \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{dy}{ds} + \frac{idx}{ds}\right) - \left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dx}{ds} - i\frac{dy}{ds}\right).$$

Ma la funzione w è monogena, e quindi

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} = 0, \qquad \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} = 0.$$

Dunque sarà:

$$\frac{dw}{dp} + i\frac{dw}{ds} = 0\cdot$$

come volevamo dimostrare.

Lemma 2. *Se w e w' sono due funzioni intere, avremo:*

$$\int\left(w\frac{dw'}{dp} - w'\frac{dw}{dp}\right)ds = 0,$$

quando si estenda l'integrale a tutto il contorno di una linea chiusa S, *e p ed s abbiano il significato del lemma precedente.*

Ponendo $w = u + iv$, $w' = u' + iv'$, abbiamo per il Lemma 1 :

$$\int\left(w\frac{dw}{dp} - w'\frac{dw}{dp}\right) ds = -\int\left(u\frac{du'}{dp} - u'\frac{du}{dp}\right)ds - \int\left(v\frac{dv'}{dp} - v'\frac{dv}{dp}\right)ds$$
$$+ i\int\left(u\frac{dv'}{dp} - v'\frac{du}{dp}\right)ds + i\int\left(v\frac{du'}{dp} - u'\frac{dv}{dp}\right)ds.$$

Ora questi integrali sono tutti nulli quando siano estesi a tutto il contorno della linea S. Lo dimostreremo per uno soltanto, per gli altri valendo la stessa dimostrazione. Abbiamo :

$$\int\left(u\frac{du'}{dp} - u'\frac{du}{dp}\right) = \int\left[\left(u\frac{du'}{dx} - u'\frac{du}{dx}\right)\frac{dy}{ds} - \left(u\frac{du'}{dy} - u'\frac{du}{dy}\right)\frac{dx}{ds}\right]ds$$
$$= \iint\left(\frac{d\left(u\frac{du'}{dx} - u'\frac{du}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(u\frac{du'}{dy} - u'\frac{du}{dy}\right)}{dy}\right)dx\,dy$$
$$= \iint\left[u\left(\frac{d^2u'}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dy^2}\right) - u'\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right)\right]dx\,dy,$$

estendendo gl'integrali semplici a tutto il contorno, e i doppî a tutta l'area di S. Ma w e w' essendo monogene, si ha :

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{du'}{dx} - \frac{dv'}{dy} = 0, \quad \frac{du'}{dy} + \frac{dv'}{dx} = 0;$$

onde:

$$\frac{du^2}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \qquad \frac{d^2u'}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dy^2} = 0\cdot$$

Quindi l'ultimo integrale doppio ha nulli tutti gli elementi, ed è eguale a zero. Dunque

$$\int\left(w\frac{dw'}{dp} - w'\frac{dw}{dp}\right)ds = 0;$$

come volevamo dimostrare.

Teorema. *Gl'indici delle radici di una funzione intera non possono formare una linea continua.*

Supponiamo che tutti i punti di una linea continua S siano indici di radici di w. Prendiamo di questa linea una porzione arbitraria $M_1 NM_2$. Descriviamo una circonferenza C che passi per M_1 e M_2, e abbia il centro in un punto O, chiamiamo c l'arco di questo circolo che termina in M_1 e M_2, e che racchiude colla linea M_1NM_2 un area che non contiene il centro O. Siano x_0 e y_0 le coordinate del centro O, e poniamo:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Le funzioni w e $\log r$ sono monogene, monodrome, finite e continue nell'area compresa da M_1NM_2 e l'arco c, quindi in questo intervallo vale per le medesime il lemma 2, e abbiamo:

$$\int\left(w\frac{\mathrm{d}\log r}{\mathrm{d}p} - \log r\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p}\right)\mathrm{d}s = 0,$$

avendo p ed s, rispetto alla linea formata da M_1NM_2 e da c, il significato che loro abbiamo dato nel lemma 1, ed estendendo l'integrale a tutta la linea M_1NM_2 e all' arco c.

Ora la parte dell'integrale relativa alla linea M_1NM_2 è nulla, perchè ivi è $w=0$, e $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p}$, che per il lemma 1. è eguale a $-i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}$, è anche essa eguale a zero, perchè w si mantiene costante sopra questa linea.

La parte d'integrale relativa all'arco di circolo c, si trasforma nel modo seguente. Se indichiamo con R il raggio del Circolo C, quando l'estremità mobile di s è sopra l'arco c, avremo:

$$r = \mathrm{R} - p,$$

e quindi

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p} = -1,$$

onde

$$\frac{\mathrm{d}\log r}{\mathrm{d}p} = -\frac{1}{r}:$$

e inoltre

$$\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\varphi:$$

onde l'integrale diverrà:

$$-\int_0^c w\,\mathrm{d}\varphi + i\log r\int_0^c \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s = 0.$$

Il secondo di questi integrali è nullo, perchè nei limiti M_1 e M_2 le parti reale e imaginaria di w sono nulle. Dunque il primo integrale sarà anche esso eguale a zero, e quindi :

$$\int_0^c u\, d\varphi = 0\,, \qquad \int_0^c v\, d\varphi = 0.$$

Dunque u e v non possono conservare lo stesso segno sopra un arco c, piccolo quanto si vuole, che passi per due punti M_1 e M_2 della linea S. Se u e v non fossero nulli nella vicinanza di M_1NM_2 dovrebbero dunque variare di segno a intervalli minori di una quantità qualunque data, e quindi non sarebbero continue, e w non sarebbe una funzione intera. Dunque se w è intera e si annulla sopra una linea continua, dovrà annullarsi anche nei punti esterni e prossimi a questa linea, e quindi si potrà condurre un altra linea vicinissima a questa, e quindi un altra, e così indefinitamente, sopra tutte le quali si annulli. Dunque si annullerà in tutto il Piano, e non sarà una funzione di z, ma sarà zero.

Se gl'indici delle radici non possono formare una continuità, e devono essere un numero infinito quando la funzione non è il prodotto di una funzione razionale per una funzione intera che non ha radici altro che infinite, ne segue che le radici di una funzione intera non razionale non potranno esser mai contenute tutte in una porzione finita del Piano.

5.

Il prodotto $\Pi\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)$ esteso agli infiniti valori di α che sono radici di una funzione intera W, se è convergente per qualunque valore finito di z, è una funzione intera di z (*), che ha per radici tutte e sole le quantità α; e in questo caso la funzione W può porsi sotto la forma :

$$W = e^w\, \Pi\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right).$$

essendo w una funzione intera, come risulta immediatamente dal teorema 6 del n.º 3.

Per istudiare questa decomposizione delle funzioni intere, della quale è un caso particolare la decomposizione delle funzioni razionali intere in fattori di primo grado, è necessario riferirsi alle condizioni di convergenza dei prodotti infiniti.

Qualunque sia il valore finito di z, il numero delle radici α di una funzione intera W che hanno il modulo minore o eguale a quello di z diviso per un numero finito qualunque ε, sarà sempre finito per il teorema del n.º 4. Quindi sarà finito il prodotto $\Pi\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)$ esteso a tutti i valori di α il cui modulo è minore o eguale a

(*) Vedi *Briot* et *Bouquet*. Théorie des fonctions double ec. pag. 435.

quello di z diviso per ε, e perchè sia convergente il prodotto totale basterà che sia tale il prodotto esteso a tutti i valori di α, per i quali è $\varepsilon \bmod \alpha > \bmod z$, che indicheremo con $\Pi'\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)$.

Ora, quando $\bmod z < \bmod \alpha$, abbiamo in serie convergente:

$$\log\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)=-\frac{z}{\alpha}-\frac{z^2}{2\alpha^2}-\frac{z^3}{\alpha^3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{z}{\alpha}+\frac{1}{5}\frac{z^2}{\alpha^2}+\ldots\right).$$

Ma poichè il modulo di una somma è sempre minore della somma dei moduli, sarà:

$$\bmod\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{z}{\alpha}+\frac{1}{5}\frac{z^3}{\alpha^3}+\ldots\right)<\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{\bmod z}{\bmod \alpha}+\frac{1}{5}\frac{(\bmod z)^2}{(\bmod \alpha)^2}$$

$$+\ldots<\frac{1}{3}\left[1+\frac{\bmod z}{\bmod \alpha}+\left(\frac{\bmod z}{\bmod \alpha}\right)^2+\ldots\right];$$

ed essendo $\bmod z < \varepsilon \bmod \alpha$, se prendiamo $\varepsilon = \frac{2}{3}$, avremo:

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{\bmod z}{\bmod \alpha}+\frac{(\bmod z)^2}{(\bmod \alpha)^2}+\ldots\right)<1,$$

e indicando con μ_α un numero complesso il cui modulo sia minore dell'unità, avremo:

$$\log.\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)=-\frac{z}{\alpha}-\frac{z^2}{2\alpha^2}-\frac{z^3\mu_\alpha}{\alpha^3},$$

e quindi

$$\log \Pi'\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)=-z\sum\frac{1}{\alpha}-\frac{z^2}{2}\sum\frac{1}{\alpha^2}-\frac{z^3}{3}\sum\frac{\mu_\alpha}{\alpha^3}.$$

Se le serie $\sum\frac{1}{\alpha}$, $\sum\frac{1}{\alpha^2}$, $\sum\frac{1}{\alpha^3}$ sono convergenti, sarà convergente anche il prodotto infinito. Se una di esse è divergente, il prodotto infinito avrà per limite zero, o infinito, e non esprimerà una funzione intera. Dunque la convergenza di tutte tre queste serie è la condizione necessaria e sufficiente perchè il prodotto infinito sia eguale a una funzione intera.

Ora, relativamente a queste serie, abbiamo i seguenti teoremi:

Teorema 1. *Se gl'indici delle quantità α sono tutti sopra una stessa linea retta, e le distanze di due qualunque di essi è sempre minore di una quantità finita d, la serie $\sum\frac{1}{\alpha^\mu}$ sarà convergente indipendentemente dall' ordine dei suoi termini, quando è $\mu>1$.*

Infatti, se θ è l'angolo della retta sopra cui si trovano gl'indici di tutte le quantità α, avremo $\alpha=\beta e^{\theta i}$, essendo β una quantità reale, e quindi:

$$\sum \frac{1}{\alpha^\mu} = e^{-\mu\theta i} \sum \frac{1}{\beta^\mu}.$$

Ora i numeri reali β si possono tutti porre sotto la forma $nd + \gamma$ essendo $\gamma < d$, e n un numero intero differente per due valori differenti di β, perchè la differenza di due valori di β è sempre minore di d; onde

$$\sum \frac{1}{\beta^\mu} = \sum \frac{1}{(nd + \gamma)^\mu};$$

ma

$$\sum \frac{1}{(nd + \gamma)^\mu} < \sum \frac{1}{n^\mu\, d^\mu},$$

ed essendo interi e differenti tutti i valori di n la serie $\sum \frac{1}{n^\mu\, d^\mu}$ sappiamo che è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini quando $\mu > 1$, quindi sarà convergente anche la serie $\sum \frac{1}{\beta^\mu}$, e $\sum \frac{1}{\alpha^\mu}$ quando $\mu > 1$, come volevamo dimostrare.

Teorema 2. *La serie* $\sum \frac{1}{\alpha^\mu}$ *è convergente indipendentemente dall'ordine dei suoi termini, quando* $\mu > 2$, *se gl'indici di tutte le quantità* α *sono distribuiti nel Piano in modo che la distanza di due qualunque di essi sia sempre minore di una quantità finita* d.

Infatti, se conduciamo nel Piano degl'indici due serie indefinite di parallelle all' asse delle x e all'asse delle y, in modo che la distanza di due parallelle successive sia $\frac{d}{\sqrt{2}}$, il Piano rimarrà diviso in un numero infinito di quadrati, che avranno la diagonale di una lunghezza eguale a d, e quindi non potranno contenere nel loro interno più di un indice di una quantità α. Da questa costruzione risulta evidente che tutte le quantità α potranno porsi sotto la forma :

$$(1) \qquad [m + \varepsilon + (n + \eta)i] \frac{d}{\sqrt{2}},$$

dove ε e η saranno quantità reali minori dell'unità, ed m e n numeri interi , e il sistema dei valori di m e n non potrà essere eguale per due differenti quantità α. Quindi i moduli delle quantità α saranno della forma :

$$(2) \qquad [(m + \varepsilon)^2 + (n + \eta)^2]^{\frac{1}{2}} \frac{d}{\sqrt{2}},$$

e la serie dei moduli dei termini della serie $\sum \frac{1}{\alpha^\mu}$ sarà :

$$(3) \qquad \frac{2^{\frac{\mu}{2}}}{d^\mu}\sum\sum\frac{1}{\left[(m+\varepsilon)^2+(n+\eta)^2\right]^{\frac{\mu}{2}}},$$

dove la somma deve estendersi a un numero infinito di sistemi differenti di valori reali e interi di m e di n, ed ε e η possono variare da un termine all'altro, ma si mantengono sempre reali e compresi tra 0 e 1.

La serie :

$$(4) \qquad \sum\sum\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}}$$

moltiplicata per $\frac{2^{\frac{\mu}{2}}}{d^\mu}$ ed estesa come la serie (3) ha i suoi termini rispettivamente non minori dei termini della serie (3), onde per dimostrare la convergenza della serie (3) basterà dimostrare la convergenza della serie (4).

Per giungere a questo, decomponiamo la serie (4) in serie parziali, in modo che in quelle di queste serie parziali, che indicheremo con (k_1, k_2), i valori di m e n siano tutti quelli che verificano le diseguaglianze :

$$(5) \qquad 2^{k_1} \leq m \leq 2^{k_1+1}, \qquad 2^{k_2} \leq n \leq 2^{k_2+1}.$$

Così avremo :

$$(6) \qquad \sum\sum\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}} = \sum_{k_1=0}^{k_1=\infty}\sum_{k_2=0}^{k_2=\infty}(k_1, k_2):$$

È evidente che il numero dei termini di una serie parziale (k_1, k_2) non potrà superare il numero :

$$\left(2^{k_1+1}-2^{k_1}\right)\left(2^{k_2+1}-2^{k_2}\right)=2^{k_1+k_2}=2^{2k},$$

avendo posto $k_1+k_2=2k$.

Quanto al valore di questi medesimi termini, dalle diseguaglianze (5) si ricava:

$$2^{2k_1}+2^{2k_2} \leq m^2+n^2 \leq 2^{2k_1+2}+2^{2k_2+2}.$$

Ma k essendo non maggiore di una delle due quantità k_1 e k_2, si avrà anche :

$$2^{2k} \leq m^2+n^2,$$

e quindi

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}} \leq \frac{1}{2^{k\mu}}.$$

Essendo tutti i termini di $(k_1\,,\,k_2)$ in numero non maggiore di 2^{2k}, e ciascuno non maggiore di $\frac{1}{2^{k\mu}}$, avremo:

$$(k_1\,,\,k_2) \leq \frac{2^{2k}}{2^{k\mu}};$$

ed essendo

$$\frac{2^{2k}}{2^{k\mu}} = \frac{1}{2^{2k\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}} = \frac{1}{2^{k_1\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}} \cdot \frac{1}{2^{k_2\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}},$$

sarà

$$(k_1\,,\,k_2) \leq \frac{1}{2^{k_1\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}} \cdot \frac{1}{2^{k_2\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}}.$$

Onde, sostituendo nell'equazione (6), avremo:

$$\Sigma\Sigma \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}} \leq \sum_{k_1=0}^{k_1=\infty} \sum_{k_2=0}^{k_2=\infty} \frac{1}{2^{k_1\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}} \cdot \frac{1}{2^{k_2\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}};$$

o anche

$$\Sigma\Sigma \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}} \leq \left(\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{2^{k\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}}\right)^2.$$

Ma se $\mu > 2$

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{2^{k\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{\frac{\mu}{2}-1}}}.$$

Dunque, quando $\mu > 2$

$$\Sigma\Sigma \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}} \leq \left(\frac{2^{\frac{\mu}{2}-1}}{2^{\frac{\mu}{2}-1}-1}\right)^2,$$

e quindi la serie (4) è convergente, e a più forte ragione la serie (3), e quindi, essendo convergente la serie dei moduli dei termini della serie $\sum\frac{1}{\alpha^\mu}$, questa serie sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, come volevamo dimostrare.

6.

Dato un sistema di quantità complesse in numero infinito, che non formano con i loro indici nessuna linea continua si può sempre formare una funzione intera che abbia per radici tutte e sole queste quantità. Consideriamo separatamente due casi, secondo che gl'indici delle radici sono in linea retta, o distribuiti in tutto il Piano.

Teorema 1. *Dato un numero infinito di quantità complesse* α *i cui indici siano in linea retta a distanze finite tra loro, e simmetricamente disposti rispetto a un punto* A *di questa retta, si può sempre formare un prodotto infinito con i fattori binomi* $1 - \frac{z}{a}$, *che sia una funzione intera, che abbia per radici tutte e sole queste quantità.*

Si può supporre che il punto A, rispetto al quale sono simmetricamente disposte le radici α, sia l'origine, perchè se fosse indice di una quantità β mutando z in $z-\beta$ il punto A diverrebbe l'origine.

Pertanto per ogni valore di α della forma $\rho e^{\theta i}$, ve ne sarà un altro della forza $-\rho e^{\theta i}$, quindi se nel prodotto infinito:

$$(1) \qquad z\Pi\left(1 - \frac{z}{a}\right)$$

i fattori che contengono questi valori si dispongono uno dopo l'altro, la serie $\sum \frac{1}{\alpha}$, in cui i valori di α terranno lo stesso ordine, avrà una somma nulla. Essendo poi tutti gl'indici di α sopra la stessa retta, le serie $\sum \frac{1}{\alpha^2}$, $\sum \frac{1}{\alpha^3}$ sono sempre convergenti per il teorema 1. del numero precedente: dunque sarà convergente anche il prodotto (1), e darà una funzione intera, che avrà per radici tutte e sole le quantità α.

Teorema 2. *Dato un sistema di un numero infinito di quantità complesse* α, *che abbiano gl'indici a distanze finite tra loro, e disposti comunque sopra una retta, si può sempre formare un prodotto infinito di fattori binomi della forma* $1 - \frac{z}{\alpha}$, *e di fattori esponenziali della forma* $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^z$, *che sia una funzione intera, che abbia per radici tutte e sole le quantità* α.

Infatti, il prodotto:

$$(1) \qquad \Pi\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^z \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)$$

sarà convergente, quando sia convergente la serie:

$$\sum \log\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) + z \sum \log\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{z^2}{2}\sum\frac{1}{\alpha^2} - z^3\sum\frac{\mu_\alpha}{\alpha^3} - \frac{z}{2}\sum\frac{1}{\alpha^2} + z\sum\frac{\mu'_\alpha}{\alpha^3},$$

Ora le serie del secondo membro sono convergenti per il teorema 1° del numero 5, dunque il prodotto (1) è convergente, ed è una funzione intera, che ha per radici tutte e sole le quantità α, come volevamo dimostrare.

Teorema 3. *Dato un sistema di un numero infinito di quantità complesse α, le quali abbiano gl'indici a distanze finite, e disposti egualmente negli angoli di due assi ortogonali* A *e* B, *si può sempre formare un prodotto infinito con i soli fattori binomi* $1-\frac{z}{\alpha}$, *che sia una funzione intera che abbia per radici tutte e sole le quantità* α.

Possiamo supporre che i due assi ortogonali siano gli assi delle x e delle y, perchè se la intersezione dei due assi è indice di una quantità complessa β, e φ è l'angolo che l'asse A fa coll'asse della x, mutando z in $e^{\varphi i}z+\beta$, l'asse A diviene asse delle x, e l'asse B asse delle y.

Prendiamo il prodotto:

$$\Pi\left(1-\frac{z}{\alpha}\right),$$

e osserviamo le serie $\sum\frac{1}{\alpha}$ e $\sum\frac{1}{\alpha^2}$. Essendo gl'indici delle quantità α disposti egualmente negli angoli opposti degli assi, per ogni valore di α della forma $\rho e^{\theta i}$, ve ne saranno tre della forma: $-\rho e^{\theta i}$, $\rho e^{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)i}$, $-\rho e^{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)i}$. Quindi per ogni valore di α^2 della forma $\rho^2e^{2\theta i}$, ve ne saranno tre delle forme: $\rho^2e^{2\theta i}$, $-\rho^2e^{2\theta i}$, $-\rho^2e^{2\theta i}$. Se dunque nel prodotto si prendano i fattori in modo che si succedano sempre i valori di α di queste quattro forme, lo stesso avverrà nelle serie $\sum\frac{1}{\alpha}$ e $\sum\frac{1}{\alpha^2}$, e queste serie saranno identicamente eguali a zero. La serie $\sum\frac{1}{\alpha^3}$ è convergente per il teorema 2° del numero 5. Quindi il prodotto sarà convergente, ed esprimerà una funzione intera, come volevamo dimostrare.

Teorema 4. *Dato un sistema di un numero infinito di quantità complesse α, che abbiano gl'indici a distanze finite tra loro, disposti comunque nel Piano, si può sempre formare un prodotto infinito di fattori binomi della forma* $1-\frac{z}{\alpha}$, *e di fattori esponenziali della forma* $(1+a)^z$, $(1+a)^{z^2}$, *che sia una funzione intera, che abbia per radici tutte e sole le quantità* α.

Infatti, il prodotto:

$$P=\Pi\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^z\left(1+\frac{1}{2\alpha^2}\right)^z\left(1+\frac{1}{2\alpha^2}\right)^{z^2}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)$$

sarà convergente, perchè avremo:

$$\log P = z\sum\frac{\mu_\alpha}{\alpha^3} - z\sum\frac{1}{8\alpha^4} + z\sum\frac{\mu'_\alpha}{8\alpha^6} - z^2\sum\frac{1}{8\alpha^4} + z^2\sum\frac{\mu''_\alpha}{8\alpha^6} - z^3\sum\frac{\mu'''_\alpha}{\alpha^3},$$

e tutte le serie che compariscono nel secondo membro sono convergenti per il teorema 2º del numero 5.

Da questi teoremi si deduce che tutte le funzioni intere potranno decomporsi in un numero infinito di fattori di primo grado ed esponenziali, e qui comparisce una prima divisione delle funzioni intere. Quelle che hanno gl'indici delle radici in linea retta, e quelle che le hanno disposte comunque nel Piano; le prime che sono espresse da un prodotto semplicemente infinito le chiameremo di prima classe, le seconde che sono espresse da un prodotto doppiamente infinito le diremo di seconda classe. Le funzioni di prima classe si dividono anch'esse in due specie, la prima che comprende quelle che hanno gl'indici delle radici disposti simmetricamente rispetto a un punto, e che possono esprimersi per un prodotto infinito di fattori di primo grado, le altre, che hanno gl'indici delle radici disposti comunque sopra la retta, le quali si decomporranno in fattori di primo grado ed esponenziali. Ogni funzione intera di prima classe della prima specie potrà decomporsi nel prodotto di più funzioni intere della stessa classe di seconda specie, e data una funzione della seconda specie se ne potrà sempre trovare un altra che moltiplicata per la medesima dia per prodotto una funzione della prima specie. Le funzioni di seconda classe si dividono anch'esse in due specie; la prima comprenderà quelle che hanno gl' indici delle radici disposti egualmente nei quattro angoli di due assi ortogonali, in modo che facendo una rotazione intorno all'origine di un quarto di circolo, gl'indici di tutte le radici vengano a sovrapporsi, le quali funzioni possono esprimersi per un prodotto doppiamente infinito di fattori di primo grado; la seconda comprenderà quelle che hanno gl'indici disposti comunque, e si decompongono in un prodotto doppiamente infinito di fattori di primo grado e di fattori esponenziali. Data una funzione della seconda specie se ne potrà sempre trovare un altra che moltiplicata per quella dia una funzione della prima specie.

7.

Le funzioni monogene e monodrome che divengono infinite e discontinue per valori finiti di z in generale sono funzioni fratte. Per dimostrare ciò sarà necessario fondarsi sopra le proprietà dei residui integrali, come bisogna fare sempre quando vogliansi dimostrare proprietà delle funzioni senza supporre per esse alcuna espressione analitica.

Teorema 1. *Il residuo integrale di una funzione monogena e monodroma $w = u + iv$, rispetto a una linea chiusa* S, *è eguale a zero anche quando la funzione w diviene infinita o discontinua in un punto* D *dell'area racchiusa dalla linea* S,

*

se indicando con ρ *il raggio di una circonferenza* C *descritta col centro in* D, ρu *e* ρv *convergono indefinitamente verso zero col diminuire di* ρ.

Infatti il residuo integrale di w rispetto ad S per il teorema 2.° del numero 2, è eguale in questo caso al residuo integrale di w rispetto a C, per quanto piccolo sia il raggio ρ di questa circonferenza. Onde indicando con φ l'angolo che il raggio mobile ρ fa coll'asse delle x, avremo :

$$(1) \qquad \int w\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left(u\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} - v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\rho\,\mathrm{d}\varphi + i\int_0^{2\pi}\left(v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\rho\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Ora ρu e ρv col diminuire indefinitamente di ρ convergono a zero, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ e $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ non sono maggiori dell'unità, perchè sono i coseni degli angoli, che la tangente alla curva C nel punto di coordinate x e y fa cogli assi, onde potrà sempre aversi un valor di ρ, per cui sia:

$$\left(u\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} - v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\rho < \varepsilon\,, \qquad \left(v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\rho < \varepsilon\,,$$

essendo ε una quantità piccola quanto si vuole, e quindi :

$$\int_0^{2\pi}\left(u\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} - v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\rho\,\mathrm{d}\varphi < \varepsilon\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,, \qquad \int_0^{2\pi}\left(v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\rho\,\mathrm{d}\varphi < \varepsilon\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi.$$

Integrando i secondi membri di queste uguaglianze, e sostituendo nella formula (1), avremo :

$$\int w\,\mathrm{d}z < 2\pi\varepsilon(1 + i)\,;$$

e dovendo essere ε più piccolo di qualunque quantità data, è chiaro che sarà $\int w\mathrm{d}z$ eguale a zero, come volevamo dimostrare.

Teorema 2. *Una funzione* w *monogena e monodroma è finita e continua in tutti i punti dell'area* A *di una linea chiusa* S, *se per ogni punto* P *di* A, *indicando con* z_1 *l'indice di* P, *il prodotto* $(z - z_1)w$ *converge indefinitamente verso zero coll'avvicinarsi di* z *a* z_1.

Infatti, se nell'area A vi fosse un punto P nel quale w divenisse infinito o discontinuo, si avrebbe anche in questo punto coll'avvicinarsi indefinitamente di z a z_1,

$$\operatorname{mod}\,(z - z_1)\cdot\frac{w - w_0}{z - z_0} = 0\,,$$

indicando con z_0 un valore che ha l'indice in un punto qualunque di A differente da P, e con w_0 il valore corrispondente di w. Quindi, per il teorema precedente, il residuo integrale di $\frac{w - w_0}{z - z_0}$ rispetto alla linea S sarebbe sempre eguale a zero, e per il ragionamento fatto per dimostrare il teorema 4 del numero 2, si avrebbe w espresso da una serie convergente per tutti i valori di z che hanno gl'indici nell'area A; onde w è sempre una funzione finita e continua nell'area A, come volevamo dimostrare.

Potrebbe il valore finito dato dalla serie nel punto P non coincidere col valore che ivi prende la funzione w; ma allora questa funzione si renderebbe finita e continua mutandone il valore soltanto in un punto, ed escluderemo dalle nostre considerazioni queste specie di funzioni.

Teorema 3. *Se una funzione w monogena e monodroma si mantiene finita e continua in tutta l'area* A *di una linea chiusa* S, *fuori che in un punto* Z_1 *indice di* z_1, *e se* μ *è la massima potenza di* $z-z_1$, *per la quale* $(z-z_1)^\mu w$ *converge indefinitamente verso una quantità differente da zero coll' avvicinarsi di* z *a* z_1, μ *sarà necessariamente un numero intero, e la funzione w potrà porsi sotto la forma:*

$$(1) \qquad w = \frac{a_1}{z - z_1} + \frac{a_1}{(z - z_2)^2} + \ldots + \frac{a_\mu}{(z - z_1)^\mu} + w_1 ,$$

dove w_1 *è una funzione finita e continua in tutta l'area* A.

Infatti, sia n il numero intero superiormente prossimo a μ; la funzione $(z-z_1)^{n-1}w$ moltiplicata per $z - z_1$ convergerà indefinitamente verso zero all'avvicinarsi di z a z_1; quindi, per il teorema 2, sarà finita e continua in tutta l'area A, e per $z = z_1$ acquisterà un valore finito a_{n-1}. Quindi la funzione:

$$(z - z_1)^{n-2}w - \frac{a_{n-1}}{z - z_1},$$

moltiplicata per $z - z_1$ convergerà indefinitamente verso zero coll'avvicinarsi di z a z_1, e perciò sarà finita e continua in tutta l'area A, e per $z = z_1$ acquisterà un valore finito a_{n-2}. Onde la funzione:

$$(z - z_1)^{n-3}w - \frac{a_{n-1}}{(z - z_1)^2} - \frac{a_{n-2}}{z - z_1}$$

moltiplicata per $z - z_1$ convergerà a zero coll'avvicinarsi di z a z_1, e quindi sarà finita e continua in tutta l'area A, e prenderà per $z = z_1$ un valore finito a_{n-3}. Così seguitando, essendo n un numero intero e finito, arriveremo a una funzione:

$$w - \frac{a_{n-1}}{(z - z_1)^{n-1}} - \frac{a_{n-2}}{(z - z_1)^{n-2}} - \ldots - \frac{a_n}{(z - z_1)^2} - \frac{a_1}{z - z_1}$$

che moltiplicata per $z - z_1$ convergerà verso zero coll' avvicinarsi di z a z_1, e sarà finita e continua in tutta l'area A. Indicandola con w_1, avremo:

$$w = \frac{a_1}{z - z_1} + \frac{a_2}{(z - z_2)^2} + \frac{a_3}{(z - z_3)^3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{(z - z_1)^{n-1}} + w_1 .$$

Dunque la massima potenza μ per cui $(z - z_1)^\mu w$ converge indefinitamente verso una quantità differente da zero, coll'avvicinarsi di z a z_1, è un numero intero $n - 1$, e la funzione w può porsi sotto la forma (1), come volevamo dimostrare.

Questo teorema ci mostra che le funzioni monogene e monodrome (coll'esclusione fatta nella dimostrazione del teorema 2°) non possono divenire discontinue senza divenire infinite.

I valori di z per i quali w diviene infinita, li chiameremo, col Sig. *Liouville*, gl'*infiniti* di w.

Se n è il minimo numero intero per cui $(z - z_1)^n w$ convergerà a zero coll'avvicinarsi di z a z_1, diremo che z_1 è $n - 1$ volte infinito di w.

Teorema 4. *Gl'indici degl'infiniti di una funzione w monogena e monodroma non possono formare una linea continua in alcuna parte del Piano.*

Infatti, se w fosse infinito lungo una linea continua, la funzione monogena e monodroma $\frac{1}{w}$ sarebbe nulla lungo tutta questa linea; e quindi nulla in tutto il Piano, per il teorema 3° del numero 4; e in conseguenza w sarebbe infinita in tutta il Piano, e non sarebbe una funzione di z.

Teorema 5. *Una funzione monogena, monodroma, non intera e che non diviene mai discontinua senza divenire infinita, è una funzione fratta.*

Infatti, se una funzione monogena e monodroma w non è intera, ammetterà un numero finito o infinito d'infiniti, i quali indicheremo con β. Ora per i teoremi del numero 5, potrà sempre formarsi una funzione intera w_2, che abbia per radici tutte e sole le quantità β, perchè gl'indici di β, per il teorema 4, sono a distanze finite tra loro. Moltiplicando questa funzione w_2 per w avremo una funzione intera w_1, perchè $w_2 w$ non potrà divenire infinita e discontinua in nessun punto del Piano. Infatti, $w_2 w$ non potrà evidentemente divenire infinita e discontinua altro che per i valori β, che sono infiniti di w. Ma per ogni valore β, abbiamo in un area A che non racchiude altri infiniti di w, fuori che β, essendo n il grado di moltiplicità di questo infinito :

$$w = \frac{a_1}{z - \beta} + \frac{a_2}{(z - \beta)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(z - \beta)^n} + \varpi,$$

dove ϖ ha un valore finito per $z = \beta$. La funzione w_2, avendo per radici tutti gl' infiniti di w collo stesso grado n di moltiplicità, sarà della forma :

$$w_2 = (z - \beta)^n \varpi_2,$$

essendo ϖ_2 una funzione intera. Onde

$$w_2 w = \varpi_2 \left[a_n + a_{n-1}(z - \beta) + \ldots + a_1 (z - \beta)^{n-1} \right] + \varpi\varpi_2 (z - \beta)^n,$$

funzione che ha un valore finito per $z = \beta$. Dunque $w_2 w$ rimane finita e continua per ogni valore finito di z, ed è una funzione intera w_1, e abbiamo:

$$w_2 w = w_1 ,$$

ossia:

$$w = \frac{w_1}{w_2};$$

e la funzione w è una funzione fratta, come volevamo dimostrare.

Pertanto le funzioni monogene e monodrome (escluse quelle che possiedono discontinuità che possono togliersi, mutandone il valore soltanto in punti separati) sono intere o fratte, come le funzioni razionali, e la loro teorica si dividerà in due parti, nella prima delle quali studieremo le più semplici funzioni intere, e nella seconda le funzioni fratte che si ottengono dai rapporti delle funzioni intere considerate.

PARTE PRIMA.

FUNZIONI INTERE.

1.

Le funzioni intere si dividono in due classi, come abbiamo veduto (Int. n.° 6.); funzioni intere di prima classe, le quali hanno gl'indici di tutte le radici sopra una medesima linea retta; funzioni intere di seconda classe, le quali hanno gl'indici delle loro radici disposti comunque in tutto il Piano.

Cominceremo dal considerare le funzioni di prima classe, e ci limiteremo a quelle che hanno gl'indici delle radici a distanze eguali uno dall'altro.

Sia A il punto indice della quantità complessa α, AB la retta che passando per il punto A fa coll'asse delle x un angolo eguale all'argomento della quantità complessa ω, e siano $p_1, p_2, p_3, \ldots$ una serie infinita di punti tutti da una stessa parte del punto A sopra la retta AB, disposti in modo che sia:

$$Ap_1 = p_1 p_2 = p_2 p_3 = p_3 p_4 = , \ldots$$

I punti A, p_1, p_2, p_3, ... saranno indici di quantità complesse tutte della forma:

$$(1) \qquad m\omega + \alpha ,$$

dove m è un numero reale, intero, sempre positivo o sempre negativo: lo supporremo sempre negativo. Una funzione intera, che avrà per radici tutte e sole le quantità (1), sarà una funzione intera della prima classe e della seconda specie (Int. n.° 6). Supporremo prima che sia $\alpha = 0$; cioè considereremo prima le funzioni intere che hanno per radici tutte e sole le quantità della forma:

$$(2) \qquad -m\omega ,$$

(*) Vedi *Journal de Liouville*. Vol. 1. pag. 300.

dove ω è una quantità complessa qualunque, ed m è reale, intero e positivo. Queste funzioni non potranno differire tra loro altro che per un fattore che non ammette radici finite. Basterà dunque considerarne una sola.

Il prodotto infinito :

$$\frac{z}{\omega}\prod_1^\infty\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{\frac{z}{\omega}}\left(1+\frac{z}{m\omega}\right)$$

è convergente per qualunque valore finito di z (Int. n.° 6); quindi esprime una funzione intera che ha per radici tutte e sole le quantità della forma (2). Questa funzione la indicheremo con $es\,\frac{z}{\omega}$, perchè avendo il sistema delle sue radici eguale, alla metà del sistema delle radici di sen $\frac{\pi z}{\omega}$, la chiameremo *emiseno*. Pertanto ponendo z invece di $\frac{z}{\omega}$ la funzione da studiarsi sarà :

$$\text{es}\, z = z\prod_1^\infty\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^z\left(1+\frac{z}{m}\right),$$

oppure :

$$\text{es}\, z = z\prod_1^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^z\left(1+\frac{z}{m}\right): \tag{3}$$

alla quale può darsi anche la forma :

$$\text{es}\, z = \lim z\,(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{z}{t-1}\right)t^{-z}, \tag{4}$$

oppure :

$$\text{es}\, z = \lim \frac{z(z+1)(z+2)\,\ldots\ldots\,(z+t-1)}{1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots\,(t-1)}\,t^{-z}. \tag{5}$$

La funzione es z sodisfa all'equazione :

$$\text{es}\,(z+1) = \frac{1}{z}\,\text{es}\, z. \tag{6}$$

Infatti, dall'equazione (3) abbiamo :

$$\text{es}(z+1) = (z+1)\prod_1^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^z\left(\frac{m}{m+1}\right)\left(1+\frac{z+1}{m}\right)$$
$$=\prod_1^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^z\left(1+\frac{z}{m}\right)=\frac{\text{es}\, z}{z}.$$

La funzione es z sodisfa l'equazione :

$$\lim_{w=\infty}\frac{\text{es}(z+w)}{\text{es}\, w}\,w^z = 1\,. \tag{7}$$

Infatti, dalla (4) abbiamo :

$$w^z \frac{\text{es}(z+w)}{\text{es}\, w}$$

$$= \lim \frac{\left(1+\frac{z}{w}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2w}+\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{z}{3w}+\frac{1}{w}\right)\cdots\left(\frac{1}{t-1}+\frac{z}{(t-1)w}+\frac{1}{w}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{w}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{w}\right)} t^{-z} w^z ;$$

e quindi

$$\lim_{w=\infty} \frac{w^z \text{es}(z+w)}{\text{es}\, w} = 1 .$$

Dalle (3) si ricava immediatamente l'equazione :

$$\lim_{z=0} \frac{\text{es}\, z}{z} = 1 . \tag{8}$$

L'equazioni (6) , (7) e (8) unite all'equazioni es $0 = 0$ esprimono le condizioni necessarie e sufficienti alla determinazione della funzione es z, come risulta dal seguente :

Teorema 1. *Tutte e sole le funzioni intere* F(z) *che sodisfano all'equazioni :*

(*a*) $\quad \text{F}(0) = 0$, $\qquad$ (*b*) $\quad \text{F}(z+1) = \frac{1}{z}\,\text{F}(z)$

(*c*) $\quad \lim\limits_{w=\infty} w^z \frac{\text{F}(z+w)}{\text{F}(w)} = 1$, $\qquad$ (*d*) $\quad \lim\limits_{z=0} \frac{\text{F}(z)}{z} = 1$

sono necessariamente identiche colla funzione es z.

Sodisfacendo all'equazioni (*a*) e (*b*) la funzione intera F(z) avrà per radici tutte le quantità della forma $-m$, essendo m un numero reale, intero e positivo; quindi avrà per radici tutte le radici di es z, e divisa per es z darà per quoziente una funzione intera $\varphi(z)$, e avremo :

$$\text{F}(z) = \varphi(z)\ \text{es}\, z.$$

Dovendo sodisfare alla equazione (*b*), avremo :

$$\text{F}(z+1) = \varphi(z+1)\ \text{es}(z+1) = \frac{1}{z}\varphi(z)\ \text{es}(z) ,$$

e, a cagione della (6) :

$$\varphi(z+1) = \varphi(z). \tag{e}$$

La equazione (*c*) darà inoltre :

$$\lim_{w=\infty} \frac{\varphi(z+w)}{\varphi(w)} \lim_{w=\infty} w^z \frac{\text{es}(z+w)}{\text{es}\, w} = 1 ;$$

onde, osservando la (7), abbiamo:

$$(f)\qquad \lim \frac{\varphi(z+w)}{\varphi(w)} = 1\,;$$

ma l'equazioni (e) e (f) non possono coesistere, a meno che non sia $\varphi(z)$ eguale a una costante C; onde:

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{C}\ \mathrm{es}\, z.$$

Ponendo questo valore nell'equazione (d), e osservando la equazione (8), abbiamo:

$$\mathrm{C} = 1.$$

Dunque:

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{es}\, z;$$

come volevamo dimostrare.

Teorema 2. *La moltiplicazione dell'argomento per un numero reale e intero* n *nella funzione* es z *è data dalla formula seguente:*

$$(9)\qquad \mathrm{es}\, nz = n^{1-nz} \frac{\overset{n-1}{\underset{0}{\Pi_t}}\, \mathrm{es}\left(z + \frac{t}{n}\right)}{\overset{n-1}{\underset{1}{\Pi_t}}\, \mathrm{es}\, \frac{t}{n}}.$$

Infatti, le radici della funzione intera es nz, sono tutte e sole le quantità della forma:

$$(a)\qquad -m\,,\quad -m-\frac{1}{n},\quad -m-\frac{2}{n},\ \ldots\ldots,\ -m-\frac{n-1}{n}\,,$$

dove m indica un numero reale, intero e positivo qualunque. Ora tutte le quantità della prima delle forme (a) sono le sole radici della funzione es z, tutte le quantità della seconda sono le sole radici di $\mathrm{es}\left(z+\frac{1}{n}\right)$, quelle della terza sono le sole radici di $\mathrm{es}\left(z+\frac{2}{n}\right)$, e così discorrendo. Onde il sistema delle radici di es nz è identico col sistema delle radici del prodotto:

$$\mathrm{es}\, z\ \mathrm{es}\left(z+\frac{1}{n}\right) \mathrm{es}\left(z+\frac{2}{n}\right) \cdots\cdot\ \mathrm{es}\left(z+\frac{n-1}{n}\right),$$

e abbiamo (Int. n.° 3):

$$(b)\qquad \mathrm{es}\, nz = e^{\psi(z)} \overset{n-1}{\underset{0}{\Pi_t}}\, \mathrm{es}\left(z+\frac{t}{n}\right),$$

indicando con $\psi(z)$ una funzione intera.

A cagione della equazione (6), ponendo $z+\frac{1}{n}$ invece di z, avremo:

$$e^{\psi\left(z+\frac{1}{n}\right)}\prod_0^{n-1}\frac{\operatorname{es}\left(z+\frac{t}{n}\right)}{z}=e^{\psi(z)}\prod_0^{n-1}\frac{\operatorname{es}\left(z+\frac{t}{n}\right)}{nz};$$

onde :

$$e^{\psi\left(z+\frac{1}{n}\right)}=\frac{e^{\psi(z)}}{n},\qquad \psi\left(z+\frac{1}{n}\right)=\psi(z)+\log\frac{1}{n};$$

e integrando :

$$\psi(z)=nz\log\frac{1}{n}+\varphi(z),$$

essendo $\varphi(z)$ una funzione periodica, cioè una funzione che sodisfa all'equazione :

$$(c)\qquad \varphi\left(z+\frac{1}{n}\right)=\varphi(z).$$

Avremo dunque, sostituendo nella equazione (b) :

$$(d)\qquad \operatorname{es} nz=n^{-nz}\,e^{\varphi(z)}\prod_0^{n-1}\operatorname{es}\left(z+\frac{t}{n}\right).$$

Ponendo $z+w$ in luogo di z, abbiamo :

$$(e)\qquad \operatorname{es}(nz+nw)=n^{-nz-nw}\,e^{\varphi(z+w)}\prod_0^{n-1}\operatorname{es}\left(z+w+\frac{t}{n}\right).$$

Dividendo la (e) moltiplicata per $n^{nz}\,w^{nz}$, per la (d), dove in luogo di z sia posto w, otterremo :

$$\frac{\operatorname{es}(nz+nw)}{\operatorname{es} nw}(wn)^{nz}=e^{\varphi(z+w)-\varphi(w)}\prod_0^{n-1}\left(\frac{\operatorname{es}(z+\frac{t}{n}+w)}{\operatorname{es}(w+\frac{t}{n})}w^{z}\right).$$

Passando al limite per $w=\infty$, e osservando la equazione (7), abbiamo :

$$\lim_{w=\infty}\left(\varphi(z+w)-\varphi(w)\right)=0,$$

ossia

$$\lim_{w=\infty}\frac{\varphi(z+w)}{\varphi(w)}=0,$$

che è incompatibile colla (c), se $\varphi(z)$ non è una costante C. Sarà dunque $\varphi(z)=C$, e avremo :

$$\operatorname{es} nz=Cn^{-nz}\prod_0^{n-1}\operatorname{es}\left(z+\frac{t}{n}\right).$$

Per determinare la costante C, divideremo ambedue i membri di questa equazione per nz, e porremo $z=o$; avremo, ponendo mente all'equazione (8) :

$$C=\frac{n}{\prod_{1}^{n-1}{}_t\operatorname{es}\frac{t}{n}}$$

*

onde :

$$\text{es}\, nz = n^{1-z} \frac{\prod_{0}^{n-1}{}_t \text{es}(z + \frac{t}{n})}{\prod_{0}^{n-1}{}_t \text{es} \frac{t}{n}};$$

come volevamo dimostrare.

L'integrale definito studiato da *Eulero*, rappresentato da *Legendre* colla notazione $\Gamma(x)$ si esprime per la funzione es x.

Infatti, è noto che, finchè x e ν sono quantità reali e positive (*), si ha

$$\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^\nu \, dy = \frac{1.\,2.\,3.\,\ldots\,\nu}{x(x+1)\ldots(x+\nu)},$$

e ponendo :

$$y = \frac{z}{\nu}, \qquad \int_0^\nu z^{x-1}\left(1 - \frac{z}{\nu}\right)^\nu dz = \frac{1.\,2.\,3.\,\ldots\,\nu}{x(x+1)\ldots(x+\nu)}\nu^x;$$

e passando al limite per $\nu = \infty$:

$$\int_0^\infty z^{x-1} e^{-z}\, dz = \frac{1}{\text{es}\, x};$$

onde :

$$(10) \qquad \Gamma(x) = \frac{1}{\text{es}\, x}.$$

Le funzioni intere che hanno per radici tutte e sole le quantità della forma :

$$(11) \qquad -m\omega - \alpha$$

dove α e ω sono numeri complessi qualunque, e m un intero, reale, positivo, si esprimeranno tutte per la funzione es x. Esse saranno tutte eguali a una funzione intera che non ha radici finite moltiplicata per la funzione intera :

$$\prod_0^\infty \left(1 - \frac{1}{m+2}\right)^{\frac{z}{\omega}} \left(1 + \frac{z}{m\omega + \alpha}\right).$$

Questa funzione è data per mezzo di es z dalla seguente formula :

$$(12) \qquad \prod_0^\infty \left(\frac{m+1}{m+2}\right)^{\frac{z}{\omega}} \left(1 + \frac{z}{m\omega+\alpha}\right) = \frac{\text{es}\, \frac{z+\alpha}{\omega}}{\text{es}\, \frac{\alpha}{\omega}}.$$

Infatti, dalla equazione (3) abbiamo :

(*) Vedi nel volume 2° delle *Commentationes Soc. R. Scientiarum Gottingensis* la Memoria di *Gauss* intitolata *Disq. gen. circa seriem in f.*

$$\mathrm{es}\left(\frac{z+\alpha}{\omega}\right)=\frac{z+\alpha}{\omega}\prod_{1}^{\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{z}{\omega}}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{\alpha}{\omega}}\left(1+\frac{z+\alpha}{m\omega}\right)$$

$$=\frac{\alpha}{\omega}\left(1+\frac{z}{\alpha}\right)\prod_{1}^{\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{z}{\omega}}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{\alpha}{\omega}}\left(1+\frac{\alpha}{m\omega}\right)\left(1+\frac{z}{m\omega+\alpha}\right);$$

onde :

$$\frac{\mathrm{es}\left(\frac{z+\alpha}{\omega}\right)}{\mathrm{es}\frac{\alpha}{\omega}}=\prod_{0}^{\infty}\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^{\frac{z}{\omega}}\left(1+\frac{z}{m\omega+\alpha}\right).$$

Ponendo nell'equazione (12) :

$$\alpha=\frac{\omega}{2}$$

si ha :

$$\mathrm{es}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\right)=\mathrm{es}\frac{1}{2}\prod_{0}^{\infty}\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^{\frac{z}{\omega}}\left(1+\frac{2z}{(2m+1)\omega}\right)$$

e quindi, indicando con ec z la funzione $\dfrac{\mathrm{es}(\frac{1}{2}+z)}{\mathrm{es}\,\frac{1}{2}}$:

$$\mathrm{ec}(z)=\prod_{0}^{\infty}\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^{z}\left(1+\frac{2z}{2m+1}\right). \tag{13}$$

Rappresentiamo con ec z, e denominiamo *emicoseno* di z la funzione $\dfrac{\mathrm{es}(\frac{1}{2}+z)}{\mathrm{es}\,\frac{1}{2}}$, perchè il sistema delle sue radici è la metà del sistema delle radici del *coseno* di πz.

2.

Passiamo ora a considerare le funzioni di prima classe e di prima specie. Ci limiteremo a quelle che hanno tutti gl'indici delle loro radici a eguali distanze, cioè che hanno per radici tutte e sole le quantità della forma :

$$m\omega+\alpha,$$

dove ω e α sono numeri complessi qualunque, e m un numero intero e reale qualunque. Supporremo prima $\alpha=0$.

Le funzioni che avranno per radici tutte e sole le quantità della forma :

$$m\omega \tag{1}$$

non potranno differire tra loro altrochè per un fattore, funzione intera che non ammette radici finite. Basterà dunque prendere a considerare una sola di queste funzioni.

Il prodotto infinito :

$$(2)\qquad z\prod_1^\infty\left(1+\frac{z}{m\omega}\right)\left(1-\frac{z}{m\omega}\right)=z\prod_1^\infty\left(1-\frac{z^2}{m^2\omega^2}\right)$$

è una funzione intera, perchè è convergente per qualunque valore finito di z ; ed ha per radici tutte e sole le quantità (1).

È chiaro che due funzioni (2) che differiscono per il valore di ω, si possono esprimere una per l'altra. Quindi per ω potremo prendere un valore qualunque. Prenderemo quel valore che fa acquistare alla funzione il valore eguale all'unità, quando $z=\frac{\omega}{2}$; cioè determineremo ω per l'equazione :

$$\frac{\omega}{2}\prod_1^\infty\left(1-\frac{1}{4m^2}\right)=1,$$

ossia :

$$\frac{\omega}{2}=\prod_1^\infty\frac{4m^2}{4m^2-1}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot$$

Ma questa è l'espressione di *Wallis* per il numero $\frac{\pi}{2}$; prenderemo dunque :

$$\omega=\pi,$$

e avremo :

$$(3)\qquad f(z)=z\prod_1^\infty\left(1-\frac{z^2}{m^2\pi^2}\right),$$

$$(4)\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\cdot$$

Prendiamo le due funzioni :

$$\operatorname{es}\frac{z}{\pi}=\frac{z}{\pi}\prod_1^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{z}{\pi}}\left(1+\frac{z}{m\pi}\right),$$

$$\operatorname{es}-\frac{z}{\pi}=-\frac{z}{\pi}\prod_1^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^{-\frac{z}{\pi}}\left(1-\frac{z}{m\pi}\right).$$

Moltiplicandole tra loro, si ottiene :

$$(5)\qquad f(z)=-\frac{\pi^2}{z}\operatorname{es}\frac{z}{\pi}\operatorname{es}-\frac{z}{\pi}\cdot$$

La funzione intera $f(z)$ sodisfa l'equazione :

$$(6)\qquad f(z+\pi)=-f(z).$$

Infatti, dalla (5) abbiamo:

$$f(z+\pi)=-\frac{\pi^2}{z+\pi}\,\text{es}\left(\frac{z}{\pi}+1\right)\text{es}\left(-\frac{z}{\pi}-1\right);$$

ma dalla equazione (6) del numero precedente, si ha:

$$\text{es}\left(\frac{z}{\pi}+1\right)=\frac{\pi}{z}\,\text{es}\left(\frac{z}{\pi}\right);\qquad \text{es}\left(-\frac{z}{\pi}-1\right)=-\frac{z+\pi}{\pi}\,\text{es}\left(-\frac{z}{\pi}\right)$$

onde:

$$f(z+\pi)=\frac{\pi^2}{z}\,\text{es}\,\frac{z}{\pi}\,\text{es}\left(-\frac{z}{\pi}\right)=-f(z).$$

Dalla (6) si deduce immediatamente:

$$(7)\qquad f(z+2\pi)=f(z).$$

La funzione $f(z)$ sodisfa all'equazione:

$$(8)\qquad \lim_{w=\infty}\frac{f(z+w)}{e^{iz}f(w)}=1.$$

Infatti, avremo dall'equazione (5):

$$\frac{f(z+w)}{f(w)}=\frac{1}{1+\frac{z}{w}}\;\frac{\text{es}\left(\frac{z+w}{\pi}\right)\text{es}\left(-\frac{z+w}{\pi}\right)}{\text{es}\,\frac{w}{\pi}\;\text{es}-\frac{w}{\pi}}.$$

Ora, essendo $e^{\pi ix}=(-1)^x$, avremo

$$\frac{f(z+w)}{e^{iz}f(w)}=\frac{1}{1+\frac{z}{w}}\;\frac{\text{es}\left(\frac{z}{\pi}+\frac{w}{\pi}\right)}{\text{es}\,\frac{w}{\pi}}\left(\frac{w}{\pi}\right)^{\frac{z}{\pi}}\frac{\text{es}\left(-\frac{z+w}{\pi}\right)}{\text{es}-\frac{w}{\pi}}\left(-\frac{w}{\pi}\right)^{-\frac{z}{\pi}}.$$

Passando al limite per $w=\infty$, e osservando la equazione (7) del numero precedente, si ottiene:

$$\lim\frac{f(z+w)}{e^{iz}f(z)}=1,$$

come volevamo dimostrare.

Dalla (3) si deduce immediatamente:

$$(9)\qquad \lim_{z=0}\frac{f(z)}{z}=1.$$

Le equazioni (6), (8), (9) unite alla equazione $f(0)=0$, esprimono le condizioni necessarie e sufficienti alla determinazione di $f(z)$, come abbiamo dal seguente:

Teorema. *Tutte e sole le funzioni intere che sodisfano a tutte quattro le equa-*

zioni :

$$(a) \qquad f(0) = 0\,, \qquad\qquad (b) \qquad f(z+\omega) = -f(z)\,,$$

$$(c) \qquad \lim \frac{f(z+w)}{e^{\frac{\pi i z}{\omega}} f(w)} = 1\,, \qquad\qquad (d) \qquad \lim \frac{f(z)}{z} = \frac{\omega}{\pi}\,;$$

sono identiche alla funzione $f\left(\frac{z\pi}{\omega}\right)$.

Infatti, se la funzione $f(z)$ sodisfa contemporaneamente alle due equazioni (a) e (b) avrà per radici tutte le quantità della forma $m\omega$, e quindi avremo:

$$f(z) = \varphi(z)\, f\left(\frac{z\pi}{\omega}\right)$$

essendo $\varphi(z)$ una funzione intera, che sodisfa all'equazione:

$$(e) \qquad\qquad \varphi(z+\omega) = \varphi(z).$$

Sodisfacendo le $f(z)$ alla equazione (c), avremo:

$$\lim_{w=\infty} \frac{\varphi(z+w)}{\varphi(w)} \lim \frac{f\left(\frac{z\pi}{\omega}+w\right)}{e^{\frac{\pi i z}{\omega}} f(w)} = 1$$

ed osservando l'equazione (8):

$$\lim_{w=\infty} \frac{\varphi(z+w)}{\varphi(w)} = 1;$$

equazione che contradice alla equazione (e), se $\varphi(z)$ non è una costante. Onde;

$$\varphi(z) = \mathrm{C}\,,$$

e

$$f(z) = \mathrm{C} f\left(\frac{z\pi}{\omega}\right).$$

Per le equazioni (d) e (9) abbiamo $\mathrm{C} = 1$, e quindi:

$$f(z) = f\left(\frac{z\pi}{\omega}\right),$$

come volevamo dimostrare.

Ora è noto che la funzione sen z sodisfa alle equazioni:

$$\operatorname{sen} 0 = 0\,,\ \ \operatorname{sen}(z+\pi) = -\operatorname{sen} z,\ \ \lim_{w=\infty} \frac{\operatorname{sen}(z+w)}{e^{iz}\operatorname{sen} w} = 1\,,\ \ \lim_{z=0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1\,,$$

quindi:

$$(10) \qquad\qquad f(z) = \operatorname{sen} z\,,$$

ed abbiamo :

$$(11) \qquad \operatorname{sen} z = -\frac{\pi^2}{z} \operatorname{es}\frac{z}{\pi} \operatorname{es} -\frac{z}{\pi},$$

e anche :

$$(12) \qquad \operatorname{sen} z = \pi \operatorname{es} \frac{z}{\pi} \operatorname{es}\left(1 - \frac{z}{\pi}\right).$$

Se poniamo nella equazione (12), $z = \frac{\pi}{2}$. abbiamo :

$$(13) \qquad \operatorname{es}\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Prendiamo per il radicale il segno positivo, perchè dalla (3) risulta chiaramente che es z ha valori positivi per valori reali e positivi di z.

Dalla teorica algebrica della divisione della circonferenza è nota la formola :

$$\prod_1^{n-1} \operatorname{sen}\frac{t\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Sostituendo i valori dei seni dati dalla (12), abbiamo :

$$\prod_1^{n-1} \operatorname{sen}\frac{t\pi}{n} = \pi^{n-1} \prod_t^{n-1} {}_t \operatorname{es}\frac{t}{n} \operatorname{es}\left(1 - \frac{t}{n}\right) = \pi^{n-1} \prod_1^{n-1} {}_t \operatorname{es}^2 \frac{t}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

onde :

$$(14) \qquad \prod_1^{n-1} {}_t \operatorname{es}\frac{t}{n} = \frac{\sqrt{n}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}};$$

e quindi l'equazione (9) del numero precedente diviene :

$$(15) \qquad \operatorname{es} nz = n^{\frac{1}{2} - nz} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{n-1} {}_t \operatorname{es}\left(z + \frac{t}{n}\right).$$

Teorema. *La moltiplicazione dell' argomento delle funzioni* sen z *è data dalla seguente formula* :

$$(16) \qquad \operatorname{sen} nz = 2^{n-1} \prod_0^{n-1} {}_t \operatorname{sen}\left(z + \frac{t\pi}{n}\right).$$

Infatti dalla equazione (12) abbiamo :

$$\operatorname{sen} nz = \pi \operatorname{es}\frac{nz}{\pi} \operatorname{es}\left(1 - \frac{nz}{\pi}\right);$$

e sostituendo i valori di es nz e di es $n\left(\frac{1}{n} - \frac{z}{\pi}\right)$ dati dalla formola (15), si ottiene:

$$\operatorname{sen} nz = \pi(2\pi)^{n-1} \prod_{0}^{n-1}{}_t \operatorname{es}\left(\frac{z}{\pi} + \frac{t}{n}\right) \operatorname{es}\left(\frac{1}{n} - \frac{z}{\pi} + \frac{t}{n}\right)$$

$$= \pi(2\pi)^{n-1} \prod_{0}^{n-1}{}_t \operatorname{es}\left(\frac{z}{\pi} + \frac{t}{n}\right) \operatorname{es}\left[1 - \left(\frac{z}{\pi} + \frac{t}{n}\right)\right];$$

onde ponendo mente all'equazione (12) :

$$\operatorname{sen} nz = 2^{n-1} \prod_{0}^{n-1}{}_t \operatorname{sen}\left(z + \frac{t\pi}{n}\right);$$

come volevamo dimostrare.

Le funzioni intere che hanno per radici tutte e sole le quantità della forma :

$$m\omega + \alpha,$$

dove ω ed α sono quantità complesse, ed m è un numero intero e reale qualunque, si esprimeranno tutte per la funzione sen z. Poichè saranno eguali a una funzione intera, che non ha radici finite, moltiplicata per la funzione intera :

$$\prod_{-\infty}^{\infty}{}_m \left(1 - \frac{z}{m\omega + \alpha}\right);$$

e questa è data per mezzo di due seni dalla formula seguente :

$$(17) \qquad \prod_{-\infty}^{\infty}{}_m \left(1 - \frac{z}{m\omega + \alpha}\right) = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{\omega}(\alpha - z)}{\operatorname{sen}\frac{\pi\alpha}{\omega}}.$$

Infatti, abbiamo :

$$\operatorname{sen}\frac{\pi(\alpha - z)}{\omega} = \frac{\pi}{\omega}(\alpha - z) \prod_{1}^{\infty}{}_m \left(1 - \frac{\alpha - z}{m\omega}\right)\left(1 + \frac{\alpha - z}{m\omega}\right)$$

$$= \frac{\pi\alpha}{\omega}\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) \prod_{1}^{\infty}{}_m \left(1 - \frac{\alpha}{m\omega}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{m\omega}\right) \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m\omega - \alpha}\right)\left(1 - \frac{z}{m\omega + \alpha}\right);$$

onde

$$\prod_{-\infty}^{\infty}{}_m \left(1 - \frac{z}{m\omega + \alpha}\right) = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi(\alpha - z)}{\omega}}{\operatorname{sen}\frac{\pi\alpha}{\omega}}.$$

Ponendo nella (17) $\omega = \pi$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, abbiamo :

$$\prod_{-\infty}^{\infty}{}_m \left(1 - \frac{2z}{2m + 1}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z;$$

ma dalla equazione (12) abbiamo:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = \pi \operatorname{es}\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{\pi}\right)\operatorname{es}\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{\pi}\right);$$

onde per la equazione (13):

$$(18) \qquad \cos z = \operatorname{ec} z \operatorname{ec}(-z).$$

3.

Passiamo ora alle funzioni intere di seconda classe, e limitiamoci a quelle che hanno gl'indici di tutte le loro radici nei punti d'intersezione di due sistemi di rette parallelle ed equidistanti tra loro.

Teorema 1. *I punti d'intersezione di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro sono indici di quantità tutte della forma:*

$$m\omega + n\omega' + \alpha,$$

dove m ed n sono numeri interi e reali qualunque, α, ω e ω' sono quantità complesse, ed il rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ non è reale; e reciprocamente.

Infatti, per ottenere un sistema di punti che siano intersezioni di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro, bisognerà prendere un punto A, e condurre per il medesimo due rette AB, AB' che facciano rispettivamente coll'asse delle x gli angoli φ e φ', la differenza dei quali non sia un multiplo di π, prendere sopra AB una serie di punti:

$$\ldots\ldots A_{-3},\ A_{-2},\ A_{-1},\ A,\ A_1,\ A_2,\ A_3 \ldots\ldots$$

in modo che sia:

$$\ldots\ldots = A_{-2}A_{-1} = A_{-1}A = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = r;$$

sopra AB' una serie indefinita di punti:

$$\ldots\ldots A'_{-3},\ A'_{-2},\ A'_{-1},\ A,\ A'_1,\ A'_2,\ A'_3,\ldots\ldots$$

in modo che sia:

$$\ldots\ldots = A'_{-3}A'_{-2} = A'_{-2}A'_{-1} = A'_{-1}A = AA'_1 = A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = \ldots = r',$$

e condurre per ogni punto A_m una retta $A_m B'_m$ parallella ad AB', e per ogni punto A'_n una retta $A'_n B_n$ parallela ad AB. I punti $A_{m,n}$ intersezioni delle rette $A_m B'_m$ e $A'_n B'_n$ saranno i punti d'intersezione di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro. Ora è chiaro che, ponendo:

$$\omega = re^{\varphi i}, \quad \omega' = r'e^{\varphi' i},$$

*

e indicando con α la quantità complessa che ha per indice il punto A, ogni punto $A_{m,n}$ sarà indice di una quantità complessa della forma:

$$(1) \qquad m\omega + n\omega' + \alpha,$$

dove m e n sono numeri interi e reali. Non dovendo gli angoli φ e φ' differire tra loro di un multiplo di π, è chiaro che il rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ non potrà essere reale.

Se poniamo ω e ω' sotto la forma:

$$(1') \qquad \omega = a + bi, \qquad \omega' = c + di,$$

avremo:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{ac + bd + (ad - bc)i}{a^2 + b^2}.$$

Il determinante $ad - bc$, che chiameremo *determinante* del sistema degl'indici delle quantità (1), dovrà essere differente da zero.

È facile a dimostrarsi che il valore di questo determinante preso positivamente esprime l'area dei parallelogrammi $A_{m,n}\,A_{m+1,n}\,A_{m,n+1}\,A_{m+2,n+1}$, che si chiameranno parallelogrammi *elementari*.

Teorema 2. *Gl'indici delle quantità*:

$$(1) \qquad m\omega + n\omega' + \alpha,$$

ed

$$(2) \qquad m\Omega + N\Omega' + \alpha,$$

dove m, n *ed* M, N *sono numeri interi e reali qualunque, formano il medesimo sistema di punti, quando abbiansi le relazioni:*

$$(3) \qquad \Omega = \mu\omega + \nu\omega', \qquad \Omega' = \rho\omega + \sigma\omega';$$

$$(4) \qquad \mu\sigma - \rho\nu = \pm 1$$

essendo μ, ν, ρ *e* σ *numeri interi e reali.*

Infatti è chiaro che perchè sia:

$$(5) \qquad M\Omega + N\Omega' + \alpha = m\omega + n\omega' + \alpha,$$

è necessario e sufficiente che siano sodisfatte le equazioni:

$$(6) \qquad M\mu + N\rho = m, \qquad M\nu + N\sigma = n.$$

Ora qualunque siano i numeri interi M ed N è chiaro che esisteranno valori interi per m ed n che sodisfaranno le equazioni (6) e quindi la equazione (5), e a cagione della equazione (4), qualunque siano i valori interi di m ed n, esisteranno anche valori interi di M ed N che sodisfaranno le (6) e quindi la (5). Dunque ogni punto che è indice di una delle quantità (1) è indice anche di una delle quantità (2), e viceversa.

Teorema 3. *I valori dei determinanti degl'indici delle quantità* (1) *e* (2), *quando sussistono le relazioni* (3) *e* (4), *sono eguali e di segno contrario, secondo che nel secondo membro della equazione* (4) *si ha il segno positivo o il negativo.*

Infatti, il determinante degli indici del sistema (2), a cagione delle equazioni (3) e (1'), sarà :

$$\begin{vmatrix} \mu a + \nu c\,, & \mu b + \nu d \\ \rho a + \sigma c\,, & \rho b + \sigma d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \rho & \sigma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \pm (ad - bc) ;$$

onde risulta evidente il teorema che volevamo dimostrare.

Pertanto dato un sistema di punti che siano tutti intersezioni di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro, si potranno riguardare sempre come indici di tutte le quantità della forma (2) , e Ω e Ω' si potranno sempre prendere in modo che il determinante, e quindi il coefficiente d' i nel rapporto $\frac{\Omega'}{\Omega}$ sia positivo.

È chiaro che se $F(z)$ è una funzione intera , che ha per radici tutte e sole le quantità della forma (1), le tre funzioni :

$$F(z), \ F(z + \omega), \ F(z + \omega'),$$

avranno le medesime radici, e quindi non potranno differire altro che per fattori, i quali non abbiano radici finite. Ma è impossibile che siano tra loro eguali, come risulta dal seguente :

Teorema 4. *Una funzione intera* $F(z)$, *che è doppiamente periodica, ossia che sodisfa a due equazioni :*

$$(a) \qquad F(z + \omega) = F(z) \,, \qquad\qquad (b) \qquad F(z + \omega') = F(z) \,,$$

dove il rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ *non è reale, non è una funzione di* z, *ma una costante.*

Infatti, se $F(z)$ sodisfa alle due equazioni (a) e (b) è chiaro che prenderà i medesimi valori nei punti corrispondenti dei parallelogrammi elementari , e quindi non potrà prendere per qualunque valore di z, valori differenti da quelli che prende nei punti di un solo parallelogrammo elementare. Ma ogni funzione intera che non è costante diviene infinita per $z = \infty$ (Intr. n.º 3); quindi $F(z)$, se non fosse una costante, dovrebbe diventare infinita per un valore di z, che ha l'indice in un parallelogrammo elementare qualunque, cioè per un valore finito di z, e non sarebbe una funzione intera.

4.

Le funzioni intere che avranno per indici delle loro radici i punti d'intersezione di due sistemi di rette parallele ed equidistanti tra loro, per quello che abbiamo dimostrato nel numero precedente, avranno per radici le quantità della forma :

$$(1)\qquad m\omega + n\omega' + \alpha$$

dove nel rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ il coefficiente d'i è differente da zero e positivo, ed m e n sono interi reali.

Consideriamo prima quelle funzioni intere per le quali $\alpha = 0$, ed n è sempre negativo, ossia che hanno gl'indici delle loro radici tutti situati da una medesima parte di una retta AB che passa per l'origine. Queste funzioni che hanno per radici tutte e sole le quantità :

$$(2)\qquad \pm m\omega - n\omega'$$

dove m ed n sono interi, reali e positivi non potranno differire tra loro altro che per una funzione intera che non ha radici finite. Basterà quindi considerarne una sola.

La funzione intera :

$$\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}$$

ha per radici tutte e sole le quantità della forma :

$$\pm m\omega.$$

La funzione intera :

$$\frac{e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \operatorname{sen}\frac{\pi(n\omega' + z)}{\omega}}{\operatorname{sen}\frac{\pi n\omega'}{\omega}} = \frac{1 - e^{\frac{2\pi i n\omega'}{\omega} + \frac{2\pi i z}{\omega}}}{1 - e^{\frac{2n\pi i\omega'}{\omega}}}$$

ha per radici tutte e sole le quantità :

$$\pm m\omega - n\omega',$$

nelle quali n ha un determinato valore, ed m prende tutti i valori interi, reali e positivi (num.° 2. formula 17).

Onde il prodotto :

$$(3)\qquad C \operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega} \prod_{1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{\frac{2n\pi i\omega'}{\omega} + \frac{2\pi i z}{\omega}}}{1 - e^{\frac{2n\pi i\omega'}{\omega}}} \right)$$

se è convergente per qualunque valore finito di z, sarà una funzione intera che avrà per radici tutte e sole le quantità (2).

Questo prodotto è sempre convergente, perchè la serie :

$$\sum_0^\infty e^{\frac{2n\pi i\omega'}{\omega}}$$

è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini. Infatti, abbiamo :

$$\frac{\omega'}{\omega} = a + bi\,,$$

dove b è differente da zero, e positivo; quindi

$$e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}} = e^{-\pi b}\, e^{\pi i a}$$

e

$$\operatorname{mod} e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}} = e^{-\pi b} < 1.$$

Poniamo :

$$q = e^{\frac{\pi i\omega'}{\omega}}\,,$$

e prendiamo la costante C in modo che la funzione (3) divisa per $\frac{z}{\omega}$, e fatto $z=0$, dia per valore l'unità, cioè prendiamo $C = \frac{1}{\pi}$, e poniamo :

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{et}\frac{z}{\omega} = \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}\prod_1^\infty \frac{1 - q^{2n} e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}}{1 - q^{2n}}\,,$$

ossia :

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{et} z = \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi z\prod_1^\infty \frac{1 - q^{2n} e^{2\pi i z}}{1 - q^{2n}}\,.$$

Indichiamo questa funzione colla notazione et z, perchè avendo il sistema delle sue radici eguale alla metà del sistema delle radici di una funzione che suole indicarsi colla lettera Θ, la chiameremo *emiteta.*

Sono facili a dimostrarsi le equazioni :

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{et}(z+1) = -\operatorname{et} z\,,$$

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{et}\left(z + \frac{\omega'}{\omega}\right) = \frac{i}{2}\, e^{-\pi i\left(z + \frac{\omega'}{\omega}\right)} \frac{\operatorname{et}(z)}{\operatorname{sen}\pi z} = \frac{\operatorname{et} z}{q(1 - e^{2\pi i z})}\,,$$

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{et}(0) = 0\,,$$

$$\lim_{z=0} \frac{\mathrm{et}\, z}{z} = 1 \tag{9}$$

le quali sono le caratteristiche della funzione, cioè sono l'equazioni necessarie e sufficienti alla sua definizione.

Infatti, se una funzione intera $F(z)$ sodisfa all'equazioni :

$$(a) \quad F(z+1) = -F(z), \qquad (b) \quad F(z+\varpi) = \frac{i}{2} e^{-\pi i (z+\varpi)} \frac{F(z)}{\operatorname{sen} \pi z},$$

$$(c) \quad F(0) = 0, \qquad (d) \quad \lim \frac{F(z)}{z} = 1,$$

sarà identica alla funzione $\mathrm{et}\, z$, nella quale $\omega' = \omega\varpi$.

Infatti, se la funzione intera $F(z)$ sodisfa all'equazioni (a), (b), (c) avrà per radici tutte le quantità della forma :

$$\pm m - n\frac{\omega'}{\omega},$$

cioè tutte le radici della funzione $\mathrm{et}\, z$; avremo dunque (Introd. n.° 3) :

$$(e) \qquad F(z) = \varphi(z)\, \mathrm{et}\, z,$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera di z. Sostituendo il valore (e) nell'equazioni (a) e (b) e ponendo mente all'equazioni (6) e (7), si ottiene :

$$\varphi(z+1) = \varphi(z), \qquad \varphi(z+\varpi) = \varphi(z);$$

e quindi per il teorema 4 del n.° 3, $\varphi(z)$ non è una funzione di z, ma una costante C, e abbiamo :

$$F(z) = C\, \mathrm{et}\, z.$$

Sostituendo nell'equazione (c) si ottiene $C = 1$, e quindi :

$$F(z) = \mathrm{et}\, z;$$

come volevamo dimostrare.

La funzione $e^{\pi i z}\, \mathrm{et}\, z$ è intera non solo rispetto alla variabile z, ma anche rispetto alla quantità $e^{2\pi i z}$, quindi potrà esprimersi per una serie di potenze positive e intere di questa quantità, che sarà sempre convergente; cioè avremo :

$$e^{\pi i z}\, \mathrm{et}\, z = \sum_0^\infty A_n\, e^{2n\pi i z}.$$

A cagione della equazione (7) avremo :

$$\sum_0^\infty A_n\, q^{2n}\, e^{2n\pi i z} = \frac{\sum_0^\infty A_n\, e^{2n\pi i z}}{(1 - e^{2\pi i z})};$$

onde :

$$\sum_0^\infty \left(A_n(1 - q^{2n}) + A_{n-1}\, q^{2n-2} \right) e^{2n\pi iz} = 0\,;$$

dalla quale si deduce:

$$A_n = -\frac{A_{n-1}\, q^{2n-2}}{1 - q^{2n}}\,,$$

ossia :

$$A_n = (-1)^n \frac{A_0\, q^{n(n-1)}}{\prod_1^n (1 - q^{2t})}\,,$$

e quindi :

$$e^{\pi iz}\,\mathrm{et}\, z = A_0 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n\, q^{n(n-1)}}{\prod_1^n (1 - q^{2t})}\, e^{2n\pi iz}.$$

Ponendo $z = \infty$, abbiamo, per la equazione (5) :

$$A_0 = \frac{1}{\prod_1^\infty (1 - q^{2n})}\,;$$

onde :

$$\mathrm{et}\, z = \frac{1}{\prod_1^\infty (1 - q^{2n})} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n\, q^{n(n-1)}}{\prod_1^n (1 - q^{2t})}\, e^{(2n-1)\pi iz}. \tag{10}$$

5.

La funzione intera $\mathrm{et}\,\frac{z}{\omega}$ ha per radici, come abbiamo veduto, tutte e sole le quantità della forma:

$$\pm m\omega - n\omega'\,;$$

la funzione intera $\mathrm{et}\left(-\frac{z}{\omega}\right)$ avrà per radici tutte e sole le quantità della forma :

$$\pm m\omega + n\omega'\,;$$

onde il prodotto:

$$\mathrm{et}\,\frac{z}{\omega}\,\mathrm{et} - \frac{z}{\omega}$$

avrà per radici tutte e sole le quantità della forma :

$$m\omega + n\omega', \tag{1}$$

dove m e n possono essere tanto positivi quanto negativi, e tutte radici semplici, fuori che le quantità della forma $m\omega$, le quali ne saranno tutte radici doppie; ma queste sono radici semplici della funzione intera $\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}$, onde la funzione intera:

$$C\frac{\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}-\frac{z}{\omega}}{\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}}$$

avrà per radici tutte e sole le quantità della forma (1). Prendiamo la costante C in modo che dividendo la funzione per z, e ponendo quindi $z=0$, si ottenga per valore l'unità; cioè prendiamo $C=-\pi\omega$, e poniamo:

$$\theta(z)=-\pi\omega\frac{\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}-\frac{z}{\omega}}{\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}}=\frac{\pi\omega\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}\left(1-\frac{z}{\omega}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}}. \tag{2}$$

Poichè dalla equazione (7) del n.° 4, si ha:

$$\operatorname{et}\left(\frac{\omega'}{\omega}-\frac{z}{\omega}\right)=\frac{e^{\frac{-\pi i}{\omega}(\omega'-z)}\operatorname{et}\left(-\frac{z}{\omega}\right)}{2i\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\omega}},$$

alla funzione $\theta(z)$ potremo dare anche la forma:

$$\theta(z)=-2\pi i\omega e^{-\frac{\pi i}{\omega}(z-\omega')}\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}\left(\frac{\omega'}{\omega}-\frac{z}{\omega}\right) \tag{2'}$$

$$=2\pi i\omega e^{-\frac{\pi i}{\omega}(z-\omega')}\operatorname{et}\frac{z}{\omega}\operatorname{et}\left(1+\frac{\omega'}{\omega}-\frac{z}{\omega}\right).$$

Osservando l'equazione (6) del numero 4, avremo immediatamente:

$$\theta(z+\omega)=-\theta(z). \tag{3}$$

Aumentando z della quantità ω', si ottiene:

$$\theta(z+\omega')=-\pi\omega\frac{\operatorname{et}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{\omega'}{\omega}\right)\operatorname{et}\left(-\frac{z}{\omega}-\frac{\omega'}{\omega}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{\omega}+\frac{\pi\omega'}{\omega}\right)};$$

ma dall'equazione (7) del numero 4, abbiamo:

$$\text{et}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{\omega'}{\omega}\right)=-\frac{e^{-\pi i z}\,\text{et}\,\frac{z}{\omega}}{2iq\,\text{sen}\,\frac{\pi z}{\omega}},$$

$$\text{et}\left(-\frac{z}{\omega}-\frac{\omega'}{\omega}\right)=q\left(1-e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}-\frac{2\pi i\omega'}{\omega}}\right)\text{et}\left(-\frac{z}{\omega}\right),$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi z}{\omega}+\frac{\pi\omega'}{\omega}\right)=\frac{e^{\frac{\pi i}{\omega}(z+\omega')}\left(1-e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}-\frac{2\pi i\omega'}{\omega}}\right)}{2i},$$

onde :

$$(4) \qquad \theta(z+\omega')=-e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\theta(z).$$

Abbiamo *inoltre* :

$$(5) \qquad \lim\frac{\theta(z)}{z}=1.$$

L'equazioni (3), (4) e (5) unite all'equazione :

$$(6) \qquad \theta(0)=0,$$

sono le caratteristiche della funzione $\theta(z)$.

Infatti, una funzione intera $F(z)$ che sodisfa l'equazioni :

$$(a) \quad F(z+\omega)=-F(z), \qquad (b) \quad F(z+\omega')=-e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}F(z),$$

$$(c) \quad F(0)=0, \qquad (d) \quad \lim_{z=0}\frac{F(z)}{z}=1,$$

non può essere altro che la funzione $\theta(z)$.

Poichè se $F(z)$ sodisfa l'equazioni (c), (a) e (b) avrà per radici tutte le quantità della forma (1), e quindi sarà :

$$(e) \qquad F(z)=\varphi(z)\,\theta(z),$$

essendo $\varphi(z)$ una funzione intera. Sostituendo il valore (e) nell' equazioni (a) e (b), abbiamo :

$$\varphi(z+\omega)=\varphi(z), \qquad \varphi(z+\omega')=\varphi(z),$$

onde $\varphi(z)$, per il teorema 4 del n.º 3, è una costante C, e si ha :

$$F(z)=C\,\theta(z).$$

*

Sostituendo questo valore nella (d) si ottiene $C = 1$; onde :

$$F(z) = \theta(z)$$

come volevamo dimostrare.

La funzione $\theta(z)$ è una funzione dispari, cioè sodisfa l'equazione :

$$(7) \qquad \theta(-z) = -\theta(z),$$

come risulta immediatamente dalla equazione (2).

Sostituendo nella formula (2) i valori dati dalla formula (4) del numero 4, abbiamo :

$$(8) \qquad \theta(z) = \frac{\omega}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\omega} \prod_1^\infty \frac{\left(1 - q^{2n} e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)}{(1 - q^{2n})^2},$$

ossia :

$$(9) \qquad \theta(z) = \frac{\omega}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\omega} \prod_1^\infty \frac{1 - 2q^{2n} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}}{(1 - q^{2n})^2}.$$

6.

Le funzioni intere che hanno per radici tutte e sole le quantità :

$$(1) \qquad m\omega + n\omega' + \alpha,$$

saranno della forma :

$$(2) \qquad \varphi(z)\, \theta(z - \alpha),$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera che non ha radici finite.

La quantità complessa α può sempre esprimersi per due quantità complesse ω' e ω, se $\frac{\omega'}{\omega}$ non è reale, nel modo seguente :

$$\alpha = \frac{1 - \mu}{2} \omega + \frac{1 - \nu}{2} \omega',$$

dove μ e ν sono due quantità reali. Poichè se

$$\alpha = \rho + \sigma i, \quad \omega = a + bi, \quad \omega' = c + di;$$

e $\frac{\omega'}{\omega}$ non è reale, il determinante $ad - bc$ sarà differente da zero, e quindi l'equazioni simultanee :

$$\rho = \frac{1 - \mu}{2} a + \frac{1 - \nu}{2} c, \qquad \sigma = \frac{1 - \mu}{2} b + \frac{1 - \nu}{2} d,$$

avranno sempre una soluzione, quando vi si riguardino μ e ν come incognite.

Indicando la funzione (2) con $\theta_{\mu,\nu}$, avremo:

$$(3) \qquad \theta_{\mu,\nu}(z) = \varphi(z)\,\theta\left(z + \frac{\mu-1}{2}\omega + \frac{\nu-1}{2}\omega'\right).$$

Determiniamo la funzione intera $\varphi(z)$ in modo che l'equazioni caratteristiche di $\theta_{\mu,\nu}(z)$ siano quelle stesse della funzione $\theta(z)$, che indicheremo con $\theta_{1,1}(z)$, quando $\mu = 1$, e $\nu = 1$, cioè siano le seguenti:

$$(4) \qquad \theta_{\mu,\nu}(z+\omega) = e^{\nu\pi i}\,\theta_{\mu,\nu}(z),$$

$$(5) \qquad \theta_{\mu,\nu}(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\mu\omega+\omega')}\,\theta_{\mu,\nu}(z),$$

$$(6) \qquad \theta_{\mu,\nu}\left((\mu-1)\frac{\omega}{2} + (\nu-1)\frac{\omega'}{2}\right) = 0,$$

$$(7) \qquad \theta_{\mu,\nu}(0) = 1.$$

Sostituendo il valore (3) nelle equazioni (4) e (5), abbiamo:

$$\varphi(z+\omega) = e^{(\nu-1)\pi i}\,\varphi(z), \qquad \varphi(z+\omega') = e^{(\nu-1)\frac{\pi i\omega'}{\omega}}\,\varphi(z);$$

e ponendo:

$$\varphi(z) = e^{(\nu-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\,\psi(z),$$

si ha:

$$\psi(z+\omega) = \psi(z), \qquad \psi(z+\omega') = \psi(z);$$

onde $\psi(z)$ è eguale a una costante C, e

$$\varphi(z) = Ce^{(\nu-1)\frac{\pi i z}{\omega}},$$

$$\theta_{\mu,\nu}(z) = Ce^{(\nu-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\,\theta_{1,1}\left(z + \frac{\mu-1}{2}\omega + \frac{\nu-1}{2}\omega'\right).$$

Sostituendo nella (7) si ottiene:

$$C = \frac{1}{\theta_{1,1}\left((\mu-1)\frac{\omega}{2} + (\nu-1)\frac{\omega'}{2}\right)},$$

e quindi:

$$(8) \qquad \theta_{\mu,\nu}(z) = e^{(\nu-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\,\frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\mu-1}{2} + \omega\,\frac{\nu-1}{2}\omega'\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\mu-1}{2}\omega + \frac{\nu-1}{2}\omega'\right)}.$$

La equazione caratteristica (7) per le funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z)$, nelle quali μ e ν sono ambedue dispari, non vale, perchè diviene in contradizione colle (6); allora invece abbiamo :

$$(8) \qquad \lim_{z=0} \frac{\theta_{\mu,\nu}(z)}{z} = 1.$$

Le due equazioni caratteristiche (4) e (5) si possono comprendere nella sola seguente :

$$(9) \qquad \theta_{\mu,\nu}(z + r\omega + s\omega') = (-1)^{r\nu+\mu s} e^{-\frac{\pi i s}{\omega}(2z + s\omega')} \theta_{\mu,\nu}(z),$$

dove r ed s sono due interi reali qualunque.

Teorema. *Le funzioni* $\theta_{\mu,\nu}(z)$, *nelle quali i valori di* μ, ν *sono congrui rispetto al modulo* 2, *sono identiche.*

Infatti, due funzioni :

$$\theta_{\mu,\nu}(z) \; , \qquad \theta_{\mu+2r,\, \nu+2s}(z)$$

dove r e s sono interi e reali hanno le medesime caratteristiche.

La caratteristica (6) rimane evidente che è la medesima per ambedue, se si pone mente che le due funzioni hanno le medesime radici. La (7) e la (8) rimangono invariate quando si aumenti μ di $2r$ e ν di $2s$. La caratteristica (9) finalmente, non muta per questo cangiamento, il quale non fa che aumentare l'esponente di e di un multiplo di $2\pi i$.

Pertanto le funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z)$ nelle quali μ e ν sono interi, si riducono soltanto a quattro funzioni distinte :

$$\theta_{1,1}(z) \; , \qquad \theta_{1,0}(z) \; , \qquad \theta_{0,1}(z) \; , \qquad \theta_{0,0}(z).$$

Queste funzioni le chiameremo funzioni Jacobiane, perchè non differiscono altro che per fattori indipendenti da z da quelle che *Jacobi* introdusse nell'Analisi.

7.

Dalle equazioni (8) del numero precedente si deduce facilmente la equazione :

$$(1) \qquad \theta_{\mu+\mu',\, \nu+\nu'}(z)$$

$$= \frac{\theta_{1,1}\left(\dfrac{\mu-1}{2}\omega + \dfrac{\nu-1}{2}\omega'\right)}{\theta_{1,1}\left(\dfrac{\mu'+\mu-1}{2}\omega + \dfrac{\nu'+\nu-1}{2}\omega'\right)} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(\nu' z - \frac{(\nu-1)}{2}(\mu'\omega + \nu'\omega')\right)} \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\mu'}{2}\omega + \frac{\nu'}{2}\omega'\right),$$

la quale insieme colla (8) serve ad esprimere tre qualunque delle funzioni Jacobiane per mezzo della quarta e si hanno le seguenti formule :

(2) $$\theta_{1,0}(z) = e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)},$$ (3) $$\theta_{0,1}(z) = \frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

(4) $$\theta_{0,0}(z) = e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right)}:$$

(5) $$\theta_{1,1}(z) = -\,\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right) e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)} \theta_{1,0}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right),$$

(6) $$\theta_{0,1}(z) = -\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right)} \theta_{1,0}\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right),$$

(7) $$\theta_{0,0}(z) = -\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)} e^{\frac{\pi i}{2}} \theta_{1,0}\left(z + \frac{\omega}{2}\right);$$

(8) $$\theta_{1,1}(z) = -\,\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)\theta_{0,1}\left(z + \frac{\omega}{2}\right),$$

(9) $$\theta_{1,0}(z) = -\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)} e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \theta_{0,1}\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right),$$

(10) $$\theta_{0,0}(z) = \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)} e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \theta_{0,1}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right),$$

(11) $$\theta_{1,1}(z) = -\,\theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right)} \theta_{0,0}\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right);$$

$$(12)\qquad \theta_{1,0}(z)=\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)}\,e^{\frac{\pi i}{2}}\theta_{0,0}\left(z+\frac{\omega}{2}\right),$$

$$(13)\qquad \theta_{0,1}(z)=\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}\,\theta_{0,0}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right).$$

Prendendo la formula (2) del numero (5), e sostituendo il valore di $\theta_{1,1}(z)$ dato dalla medesima nelle equazioni (2), (3) e (4), abbiamo:

$$(14)\qquad \theta_{1,1}(z)=-\frac{\pi\omega\ \mathrm{et}\ \frac{z}{\omega}\ \mathrm{et}-\frac{z}{\omega}}{\mathrm{sen}\,\frac{\pi z}{\omega}},$$

$$(15)\qquad \theta_{1,0}(z)=\mathrm{sen}\,\frac{\pi\omega'}{2\omega}\,e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\,\frac{\mathrm{et}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{\omega'}{2\omega}\right)\mathrm{et}\left(-\frac{z}{\omega}-\frac{\omega'}{2\omega}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{\omega}+\frac{\pi\omega'}{2\omega}\right)\mathrm{et}\,\frac{\omega'}{2\omega}\,\mathrm{et}\left(-\frac{\omega'}{2\omega}\right)},$$

$$(16)\qquad \theta_{0,1}(z)=\frac{\mathrm{et}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{et}\left(-\frac{z}{\omega}-\frac{1}{2}\right)}{\cos\frac{\pi z}{\omega}\ \mathrm{et}\,\frac{1}{2}\ \mathrm{et}-\frac{1}{2}},$$

$$(17)\qquad \theta_{0,0}(z)=\cos\frac{\pi i\omega'}{2\omega}\,e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\,\frac{\mathrm{et}\left(\frac{z}{\omega}+\frac{\omega'}{2\omega}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{et}\left(-\frac{z}{\omega}-\frac{\omega'}{2\omega}-\frac{1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi z}{\omega}+\frac{\pi\omega'}{2\omega}\right)\mathrm{et}\left(\frac{\omega'}{2\omega}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{et}\left(-\frac{\omega'}{2\omega}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Mediante l'equazioni (2), (3) e (4), richiamando le formule (8) e (9) del numero (6), abbiamo:

$$(18)\qquad \theta_{1,1}(z)=\frac{\omega}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi z}{\omega}\prod_{1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{2n}e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)}{(1-q^{2n})^2}$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi z}{\omega}\prod_{1}^{\infty}\frac{\left(1-2q^{2n}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{4n}\right)}{(1-q^{2n})^2},$$

$$(19)\qquad \theta_{1,0}(z)=\prod_0^\infty \frac{\left(1-q^{2n+1}e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n+1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)}{(1-q^{2n+1})^2}$$

$$=\prod_0^\infty \frac{\left(1-2q^{2n+1}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{4n+2}\right)}{(1-q^{2n+1})^2},$$

$$(20)\qquad \theta_{0,1}(z)=\cos\frac{\pi z}{\omega}\prod_1^\infty \frac{\left(1+q^{2n}e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)\left(1+q^{2n}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)}{(1+q^{2n})^n}$$

$$=\cos\frac{\pi z}{\omega}\prod_1^\infty \frac{\left(1+2q^{2n}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{4n}\right)}{(1+q^{2n})^2},$$

$$(21)\qquad \theta_{0,0}(z)=\prod_0^\infty \frac{\left(1+q^{2n+1}e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)\left(1+q^{2n+1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)}{(1+q^{2n+1})^2}$$

$$=\prod_0^\infty \frac{\left(1+2q^{2n+1}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{4n+2}\right)}{(1+q^{2n+1})^2}.$$

Da queste equazioni si deduce immediatamente che le funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z)$ sono pari se $\mu\nu \equiv 0 \pmod{2}$, sono dispari se $\mu\nu \equiv 0 \pmod{2}$; ossia :

$$(22)\qquad \theta_{\mu,\nu}(-z)=(-1)^{\mu\nu}\,\theta_{\mu,\nu}(z).$$

8.

Le quattro funzioni $\theta_{\mu,\nu}$ contengono due soli argomenti $\frac{z}{\omega}$ e $\frac{\omega'}{\omega}$; quindi tra i valori delle medesime corrispondenti allo stesso sistema di valori dei due argomenti dovranno esistere due sole equazioni distinte. Queste sono le due equazioni algebriche seguenti :

$$(1)\qquad \theta^2_{1,0}(z)=\theta^2_{0,1}(z)+\frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,\theta^2_{1,1}(z),$$

$$(2)\qquad \theta^2_{1,0}(z)=\theta^2_{0,0}(z)+\frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}\,\theta^2_{1,1}(z).$$

Per dimostrare queste equazioni osserviamo che dall'equazione (9) del numero 6, si deduce :

$$\theta_{1,1}\left(r\omega + s\omega' + \frac{\omega}{2}\right) = (-1)^{r+s} e^{-\frac{s\pi i}{\omega}(2z + s\omega')} \theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\theta_{1,0}\left(r\omega + s\omega' + \frac{\omega}{2}\right) = (-1)^{s} e^{-\frac{s\pi i}{\omega}(2z + s\omega')} \theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right);$$

onde :

$$\theta_{1,0}\left(2r\omega + s\omega' + \frac{\omega}{2}\right) - \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \theta_{1,1}\left(2r\omega + s\omega' + \frac{\omega}{2}\right) = 0,$$

$$\theta_{1,0}\left((2r+1)\omega + s\omega' + \frac{\omega}{2}\right) + \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \theta_{1,1}\left((2r+1)\omega + s\omega' + \frac{\omega}{2}\right) = 0.$$

Dunque la funzione :

$$\theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \theta^2_{1,1}(z)$$

ha per radici tutte le quantità della forma :

$$r\omega + s\omega' + \frac{\omega}{2},$$

dove r ed s sono numeri interi e reali qualunque, e quindi sarà *divisibile* per la funzione $\theta_{0,1}(z)$ che ha per radici tutte e sole queste quantità, e avremo :

$$\theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \theta^2_{1,1}(z) = \theta_{0,1}(z)\,\varphi(z),$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera.

Ora da questa equazione, ponendo mente alla equazione (9) del numero 6, si ha :

$$\varphi(z+\omega) = -\varphi(z), \quad \varphi(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\varphi(z), \quad \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0, \quad \varphi(0) = 1;$$

che sono le quattro equazioni caratteristiche della funzione $\theta_{0,1}(z)$; dunque $\varphi(z) = \theta_{0,1}(z)$, e abbiamo :

$$\theta^2_{1,0}(z) = \theta^2_{0,1}(z) + \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\theta^2_{1,1}(z) ,$$

come volevamo dimostrare.

Dall'equazione (9) del numero 6, si ricava ancora:

$$\theta_{1,1}\left(r\omega + s\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = (-1)^{r+s} e^{-\frac{s\pi i}{\omega}(2z + s\omega')} \theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right),$$

$$\theta_{1,0}\left(r\omega + s\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = (-1)^{s} e^{-\frac{s\pi i}{\omega}(2z + s\omega')} \theta_{1,0}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right);$$

onde:

$$\theta_{1,0}\left(2r\omega + s\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) - \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}\theta_{1,1}\left(2r\omega + s\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = 0,$$

$$\theta_{1,0}\left((2r+1)\omega + s\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) + \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}\theta_{1,1}\left((2r+1)\omega + s\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = 0.$$

Dunque la funzione intera:

$$\theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}\theta^2_{1,1}(z)$$

ha per radici tutte le quantità della forma:

$$r\omega + s\omega' + \frac{\omega + \omega'}{2},$$

le quali sono le sole radici di $\theta_{0,0}(z)$: e quindi sarà divisibile per $\theta_{0,0}(z)$, e avremo:

$$\theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}\theta^2_{1,1}(z) = \varphi(z)\,\theta_{0,0}(z) ,$$

dove $\varphi(z)$ è funzione intera. Ma da questa si deduce facilmente:

$$\varphi(z + (\omega = \varphi(z) , \quad \varphi(z + \omega') = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\varphi(z) , \quad \varphi\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) = 0 , \quad \varphi(0) = 1 ;$$

*

equazioni caratteristiche di $\theta_{0,0}(z)$: dunque $\varphi(z) = \theta_{0,0}(z)$, e quindi :

$$\theta^2_{1,0}(z) = \theta^2_{0,0}(z) + \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}\,\theta^2_{1,1}(z)\,,$$

come volevamo dimostrare.

Ora osserviamo che i due argomenti delle funzioni Jacobiane sono i rapporti di z e di ω' alla quantità ω; quindi per ω si potrà prendere una quantità qualunque, purchè si varino contemporaneamente z ed ω' in modo che i loro rapporti non mutino. Infatti, ponendo $\frac{\omega'}{\omega} = \varpi$, dall'equazioni (18), (19), (20) e (21) del numero 7, abbiamo :

$$(3)\qquad \theta_{1,1}(z, \varpi, \omega_1) = \frac{\omega}{\omega_1}\,\theta_{1,1}\left(\frac{z\omega_1}{\omega}, \varpi, \omega\right),$$

$$(4)\qquad \theta_{\mu,\nu}(z, \varpi, \omega_1) = \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z\omega_1}{\omega}, \varpi, \omega\right),\ \text{quando}\ \mu\nu = 0\,.$$

Potremo dunque disporre della quantità ω come meglio ci conviene, e stabilire tra ω e il rapporto ϖ, una relazione qualunque. Prendiamo questa relazione in modo da rendere più semplice la equazione (1); cioè prendiamo la relazione:

$$(5)\qquad \theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

la quale, sostituendo i valori dati dall'equazioni (18) e (19) del n.° 7, dà :

$$(6)\qquad \frac{\omega}{\pi} = \prod_1^{\infty}\frac{(1 + q^{2n-1})^2(1 - q^{2n})^2}{(1 - q^{2n-1})^2(1 + q^{2n})^2}.$$

Con questa relazione tra ω e $\frac{\omega'}{\omega}$, la equazione (1) diviene :

$$(7)\qquad \theta^2_{1,0}(z) = \theta^2_{0,1}(z) + \theta^2_{1,1}(z).$$

Poniamo quindi :

$$(8)\qquad \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)} = k\,,$$

e la (2) diverrà :

$$(9)\qquad \theta^2_{1,0}(z) = \theta^2_{0,0}(z) + k^2\theta^2_{1,1}(z).$$

La quantità k, sostituendo i valori delle funzioni Jacobiane dati dalle equazioni (18) e (19) del n.° 7; è espressa in funzione di q dalla formula :

$$(10)\qquad k = 4\sqrt{q}\prod_1^\infty \frac{(1+q^{2n})^4}{(1+q^{2n-1})^4},$$

e suol chiamarsi *modulo* delle funzioni Jacobiane.

Dalla equazione (9), ponendovi $z=\frac{\omega}{2}$, si ricava:

$$1-k^2 = \frac{\theta^2_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Se prendiamo la relazione :

$$(11)\qquad k^2 + k'^2 = 1,$$

avremo :

$$(12)\qquad k' = \frac{\theta_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)};$$

e sostituendo i valori dati dalle equazioni (19) e (21) del n.° 7 :

$$(13)\qquad k' = \prod_1^\infty \frac{(1-q^{2n-1})^4}{(1+q^{2n-1})^4}.$$

La quantità k' suol chiamarsi *modulo complementare* delle funzioni Jacobiane.

Dall'equazioni (7), (9) e (11) si deduce :

$$(14)\qquad \theta^2_{0,0}(z) = k'^2\,\theta^2_{1,0}(z) + k^2\,\theta^2_{0,1}(z),$$

$$(15)\qquad \theta^2_{0,0}(z) = \theta^2_{0,1}(z) + k'^2\,\theta^2_{1,1}(z).$$

9.

Esprimiamo ora i valori delle funzioni Jacobiane corrispondenti ai valori $\frac{\omega}{2}, \frac{\omega'}{2}, \frac{\omega+\omega'}{2}$ della variabile z.

Dall'equazioni (19) e (21) del n.° 7, si ottiene :

$$\theta_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1,$$

Da queste, e dall'equazioni (5) e (12) del n.° 8, abbiamo :

$$(1)\quad \theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k'}},\qquad (2)\quad \theta_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{k'},\qquad (3)\quad \theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k'}}.$$

Dall'equazioni (19) e (20) del n.° 7, si ricava :

$$\theta_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)\theta_{0,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=i\sqrt{q}\ ,$$

dalla quale, dalla equazione (8) e dalla (7) dove sia posto $\frac{\omega+\omega'}{2}$ in luogo di z, si deduce :

$$(4)\qquad \theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{1}{kk'}},\qquad (5)\qquad \theta_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{k}{k'}},$$

$$(6)\qquad \theta_{0,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{\ }{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{k'}{k}}\ .$$

Dalle formule (2), (3) e (4) del numero 7, si deduce finalmente

$$(7)\qquad \theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{i}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{1}{k}},\qquad (8)\qquad \theta_{0,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{\frac{1}{k}},$$

$$(9)\qquad \theta_{0,0}\left(\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\sqrt{k}\ .$$

Dalle formule (2) e (2') del numero 5, mediante i valori (1), (4), (7), si ottiene:

$$(10)\qquad \mathrm{et}\,\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{\pi\omega}\,\sqrt[4]{k'}}\ ,\qquad (11)\qquad \mathrm{et}\,\frac{\omega'}{2\omega}=\frac{i}{\sqrt{2\pi\omega}\,\sqrt[4]{q}\,\sqrt[8]{q^3}},$$

$$(12)\qquad \mathrm{et}\,\frac{\omega'+\omega}{2\omega}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}\,\sqrt[4]{kk'}\,\sqrt[8]{q^3}}\ .$$

Ponendo :

$$A_0=\prod_1^{\infty}(1-q^{2n})\ ,\qquad A_1=\prod_1^{\infty}(1-q^{2n-1}),$$

$$B_0=\prod_1^{\infty}(1+q^{2n})\ ,\qquad B_1=\prod_1^{\infty}(1+q^{2n-1});$$

abbiamo :

$$\mathrm{et}\,\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\,\frac{B_0}{A_0}\ ,\qquad \mathrm{et}\,\frac{\omega'}{2\omega}=\frac{i}{2\pi\sqrt{q}}\,\frac{A_1}{A_0}\ ,\qquad \mathrm{et}\,\frac{\omega'+\omega}{2\omega}=\frac{1}{2\pi\sqrt{q}}\,\frac{B_1}{A_0}\ ;$$

onde :

$$B_0=A_0\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{k'}},\qquad A_1=\frac{A_0\sqrt{2\pi}\,\sqrt[8]{q}}{\sqrt{\omega}\,\sqrt[4]{k}}\ ,\qquad B_1=A_0\,\frac{\sqrt{2\pi}\,\sqrt[8]{q}}{\sqrt{\omega}\,\sqrt[4]{kk'}}\ ;$$

ma :

$$A_0\,B_0\,A_1\,B_1=A_0\ ,\qquad B_0\,A_1\,B_1=1;$$

onde :

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{A_0^2}=2A_0\,\dfrac{\pi}{\omega}\,q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega kk'}}\ , & \dfrac{1}{B_0^2}=2A_0\,q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega k}}\ ,\\ \dfrac{1}{A_1^2}=A_0\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega k'}}\ , & \dfrac{1}{B_1^2}=A_0\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega}}\ . \end{array}\right.$$

Sostituendo i valori (13) nelle formule (18), (19), (20) e (21) del numero 7, abbiamo

$$(11)\begin{cases} \theta_{1,1}(z) = 2A_0\, q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\dfrac{\pi}{kk'\omega}}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi z}{\omega}\prod_1^\infty\left(1-2q^{2n}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega}+q^{4n}\right), \\ \theta_{1,0}(z) = A_0\sqrt{\dfrac{\pi}{k'\omega}}\prod_0^\infty\left(1-2q^{2n+1}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega}+q^{4n+2}\right), \\ \theta_{0,1}(z) = 2A_0\, q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\dfrac{\pi}{k\omega}}\cos\dfrac{\pi z}{\omega}\prod_1^\infty\left(1+2q^{2n}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega}+q^{4n}\right), \\ \theta_{0,0}(z) = A_0\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega}}\prod_0^\infty\left(1+2q^{2n+1}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega}+q^{4n+2}\right). \end{cases}$$

10.

Se nelle formule (14), (15), (16) e (17) del numero 7, sostituiamo alle funzioni $\mathrm{et}\left(\pm\dfrac{z}{\omega}+\alpha\right)$ le serie di potenze intere di $e^{\frac{\pi i z}{\omega}}$ convergenti per qualunque valore finito di z dato nel n.° 4, e a $\mathrm{sen}\left(\pm\dfrac{\pi z}{\omega}+\alpha\right)$ il suo valore in esponenziali, essendo i numeratori divisibili per i denominatori, avremo evidentemente in serie convergente per qualunque valore finito di z:

$$\theta_{\mu,\nu}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{n\pi i z}{\omega}}.$$

Applicando l'equazione caratteristica (5) del numero 6, si otterrà:

$$A_{n+2} = (-1)^\mu A_n\, q^{n+1},$$

onde:

$$A_{2n} = (-1)^{\mu n} A_0\, q^{n^2}, \quad A_{2n+1} = (-1)^{\mu n} A_1\, q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2};$$

e quindi:

$$\theta_{\mu,\nu}(z) = A_0\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\mu n} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i z}{\omega}} + A_1\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\mu n} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\frac{\pi i z}{\omega}}.$$

Applicando la equazione caratteristica (4) del numero 6, avremo:

$$(1)\qquad \theta_{\mu,\nu}(z) = A_{\mu,\nu}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\mu n} q^{\left(\frac{2n+\nu}{2}\right)^2} e^{(2n+\nu)\frac{\pi i z}{\omega}}.$$

Poniamo:

$$(2)\qquad \Theta_{\mu,\nu}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\mu n} q^{\left(\frac{2n+\nu}{2}\right)^2} e^{(2n+\nu)\frac{\pi i z}{\omega}};$$

ossia:

$$(3)\qquad \Theta_{1,1}(z) = 2i\sum_{0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi z}{\omega},$$

$$(4)\qquad \Theta_{1,0}(z) = 1 + 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos\frac{2n\pi z}{\omega},$$

$$(5)\qquad \Theta_{0,1}(z) = 2\sum_{0}^{\infty} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)\frac{\pi z}{\omega},$$

$$(6)\qquad \Theta_{0,0}(z) = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2n\frac{\pi z}{\omega};$$

avremo :

$$(7)\qquad \theta_{\mu,\nu}(z) = A_{\mu,\nu}\,\Theta_{\mu,\nu}(z),$$

dove $A_{\mu,\nu}$ sarà soltanto funzione di q. Jacobi indicò colla lettera H la funzione $\Theta_{1,1}$, colla lettera Θ la funzione $\Theta_{1,0}$.

Dalla (2) si deducono immediatamente l'equazioni :

$$(8)\qquad \Theta_{\mu+2r,\nu}(z) = \Theta_{\mu,\nu}(z), \qquad (9)\qquad \Theta_{\mu,\nu+2r}(z) = (-1)^{r\mu}\,\Theta_{\mu,\nu}(z),$$

$$(10)\qquad \Theta_{\mu+\mu',\nu+\nu'}(z) = e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(\nu' z + \frac{\nu'^2\omega'}{4} - \nu\frac{\mu'\omega}{2}\right)}\,\Theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\mu'\omega}{2} + \frac{\nu'\omega}{2}\right).$$

Dalle formule (2), (3) e (4) del numero 7, sostituendo i valori dati dalle equazioni (1), (4) e (7) del numero 9, abbiamo :

$$(11)\left\{\begin{aligned} &\theta_{1,0}(z) = \frac{q^{\frac{1}{4}}\sqrt{k}}{i}\,e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\,\theta_{1,1}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right), \qquad \theta_{0,1}(z) = \sqrt{k'}\,\theta_{1,1}\left(z+\frac{\omega}{2}\right),\\ &\theta_{0,0}(z) = q^{\frac{1}{4}}\sqrt{kk'}\,e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\,\theta_{1,1}\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),\end{aligned}\right.$$

e sostituendo in queste i valori dati dalla equazione (2), osservando la (7), e ponendo:

$$A_{1,1} = \frac{A}{i}\sqrt{\frac{\pi}{kk'\omega}},$$

si ottiene :

$$A_{1,1} = \frac{A}{i}\sqrt{\frac{\pi}{kk'\omega}}, \qquad A_{1,0} = A\sqrt{\frac{\pi}{k'\omega}},$$

$$A_{0,1} = A\sqrt{\frac{\pi}{k\omega}}, \qquad A_{0,0} = A\sqrt{\frac{\pi}{\omega}};$$

e quindi :

$$(12)\quad \begin{cases} \theta_{1,1}(z) = \dfrac{A}{i}\sqrt{\dfrac{\pi}{kk'\omega}}\,\Theta_{1,1}(z)\,, & \theta_{1,0}(z) = A\sqrt{\dfrac{\pi}{k'\omega}}\,\Theta_{1,0}(z)\,, \\ \theta_{0,1}(z) = A\sqrt{\dfrac{\pi}{k\omega}}\,\Theta_{0,1}(z)\,, & \theta_{0,0}(z) = A\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega}}\,\Theta_{0,0}(z)\,. \end{cases}$$

Confrontando le equazioni (12) colle (11) del numero 9, e osservando che A ed A_0 sono funzioni soltanto di q, e che quindi il loro rapporto si potrà indicare con $\varphi(q)$, avremo :

$$(13)\quad \begin{cases} \Theta_{1,1}(z) = 2i\varphi(q)q^{\frac{1}{4}}\operatorname{sen}\dfrac{\pi z}{\omega}\prod_1^\infty\left(1 - 2q^{2n}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}\right), \\ \Theta_{1,0}(z) = \varphi(q)\prod_0^\infty\left(1 - 2q^{2n+1}\cos\dfrac{2\pi z}{2\omega} + q^{4n+2}\right), \\ \Theta_{0,1}(z) = 2\varphi(q)q^{\frac{1}{4}}\cos\dfrac{\pi z}{\omega}\prod_1^\infty\left(1 + 2q^{2n}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}\right), \\ \Theta_{0,0}(z) = \varphi(q)\prod_0^\infty\left(1 + 2q^{2n+1}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega} + q^{4n+2}\right). \end{cases}$$

Per determinare $\varphi(q)$ osserviamo che ponendo x in luogo di $\dfrac{\pi z}{\omega}$, si hanno le due identità :

$$(14)\quad \sum_0^\infty(-1)^n q^{n(n+1)}\operatorname{sen}(2n+1)x = \varphi(q)\operatorname{sen} x\prod_1^\infty(1 - 2q^{2n}\cos 2x + q^{4n}),$$

$$(15)\quad 1 + 2\sum_1^\infty(-1)^n q^{n^2}\cos 2nx = \varphi(q)\prod_0^\infty(1 - 2q^{2n+1}\cos 2x + q^{4n+2})\,.$$

Ponendo in queste identità q^2 in luogo di q, moltiplicando una per l'altra, e osservando che si ha identicamente :

$$\prod_1^\infty(1 - 2q^{4n}\cos 2x + q^{4n})\prod_0^\infty(1 - 2q^{4n+2}\cos 2x + q^{8n+4})$$
$$= \prod_1^\infty(1 - 2q^{2n}\cos 2x + q^{4n})\,,$$

si ottiene :

$$\frac{\varphi^2(q^2)}{\varphi(q)}\sum_0^\infty(-1)^n q^{n(n+1)}\operatorname{sen}(2n+1)x$$
$$= \sum_0^\infty(-1)^n q^{2n(n+1)}\operatorname{sen}(2n+1)x\left(1 + 2\sum_1^\infty(-1)^n q^{2n^2}\cos 2nx\right).$$

Riducendo il secondo membro, mediante la formula :

$$2 \operatorname{sen} px \cos qx = \operatorname{sen}(p+q)x + \operatorname{sen}(p-q)x\,,$$

ed eguagliando i termini che contengono $\operatorname{sen} x$, nei due membri, si ha:

$$\frac{\varphi^2(q^2)}{\varphi(q)} = 1 + \sum_1^\infty q^{2n(2n+1)} + \sum_1^\infty q^{2n(2n-1)} = \sum_0^\infty q^{n(n+1)}\,.$$

Ma ponendo nella (14) $x = \frac{\pi}{2}$, abbiamo:

$$\sum q^{n(n+1)} = \varphi(q) \prod_1^\infty (1+q^{2n})^2.$$

Onde:

$$\frac{\varphi^2(q^2)}{\varphi^2(q)} = \prod_1^\infty (1+q^{2n})^2\,, \qquad \frac{\varphi(q^2)}{\varphi(q)} = \prod_1^\infty (1+q^{2n}) = \frac{\prod_1^\infty (1-q^{4n})}{\prod_1^\infty (1-q^{2n})}\,,$$

$$\frac{\varphi(q)}{\prod_1^\infty (1-q^{2n})} = \frac{\varphi(q^2)}{\prod_1^\infty (1-q^{4n})} = \frac{\varphi(q^4)}{\prod_1^\infty (1-q^{8n})} = \ldots = \frac{\varphi(q^{2^r})}{\prod_1^\infty (1-q^{2^r n})}\,.$$

Ma essendo $\operatorname{mod} q < 1$, ed avendosi dalla (14) $\varphi(0) = 1$, sarà:

$$\lim_{r=\infty} \frac{\varphi(q^r)}{\prod_1^\infty (1-q^{2rn})} = 1\,,$$

onde:

$$\varphi(q) = \prod_1^\infty (1-q^{2n}) = A_0\,.$$

Sostituendo questo valore nelle equazioni (13), e confrontando colle (11) del numero 9, si ottiene:

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \theta_{1,1}(z) &= \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\pi}{kk'\omega}}\,\Theta_{1,1}(z)\,, \qquad & \theta_{1,0}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{k'\omega}}\,\Theta_{1,0}(z)\,,\\ \theta_{0,1}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{k\omega}}\,\Theta_{0,1}(z)\,, & \theta_{0,0}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\,\Theta_{0,0}(z)\,, \end{aligned}\right.$$

Combinando l'equazioni [16) colle prime nove del numero (9), si hanno i seguenti valori per $\Theta_{\mu,\nu}(0)$, $\Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $\Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega'}{2}\right)$, $\Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)$:

$$(17)\qquad \Theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = i\sqrt{\frac{\omega k}{\pi}}\,, \qquad\qquad (18)\qquad \Theta_{1,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = -\,q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega k'}{\pi}}\,,$$

$$(19)\qquad \Theta_{1,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=i\,q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}},\qquad (20)\qquad \Theta_{1,0}(0)=\sqrt{\frac{\omega k'}{\pi}},$$

$$(21)\qquad \Theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{\omega}{\pi}},\qquad (22)\qquad \Theta_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega k}{\pi}},$$

$$(23)\qquad \Theta_{0,1}(0)=\sqrt{\frac{k\omega}{\pi}},\qquad (24)\qquad \Theta_{0,1}\left(\frac{\omega'}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}},$$

$$(25)\qquad \Theta_{0,1}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=iq^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega k'}{\pi}},\qquad (26)\qquad \Theta_{0,0}(0)=\sqrt{\frac{\omega}{\pi}},$$

$$(27)\qquad \Theta_{0,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{k'\omega}{\pi}},\qquad (28)\qquad \Theta_{0,0}\left(\frac{\omega'}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega k}{\pi}}.$$

11.

Passiamo ora alla determinazione delle relazioni che esistono tra le funzioni Jacobiane della somma e della differenza di due quantità qualunque, e le funzioni Jacobiane di queste medesime quantità.

Teorema. *Qualunque siano i numeri interi* μ, ν, μ', ν' *e le quantità* z *e* w *abbiamo sempre* :

$$(1)\qquad 2\Theta_{\mu,\nu}(z+w)\,\Theta_{\mu',\nu'}(z-w)\,\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0)$$
$$=P_{0,0}(z)+(-1)^{\mu}P_{0,1}(z)+P_{1,0}(z)+(-1)^{\mu}P_{1,1}(z),$$

dove :

$$(2)\qquad P_{\eta,\varepsilon}(z)=\Theta_{\mu+\eta,\nu+\varepsilon}(z)\,\Theta_{\mu'+\eta,\nu'+\varepsilon}(z)\,\Theta_{\mu-\mu'+\eta,\varepsilon}(w)\,\Theta_{\eta,\nu-\nu'+\varepsilon}(w).$$

Le radici delle funzioni intere $\Theta_{\mu,\nu}(z+w)$ e $\Theta_{\mu',\nu'}(z-w)$ sono rispettivamente le quantità delle due forme :

$$-w+(2r+\mu-1)\frac{\omega}{2}+(2s+\nu-1)\frac{\omega'}{2},$$

$$w+(2r+\mu'-1)\frac{\pi}{2}+(2s+\nu-1)\frac{\omega'}{2}.$$

Ora queste quantità sono tutte anche radici della funzione intera :

$$(3)\qquad F(z)=P_{0,0}(z)+P_{1,0}(z)+(-1)^{\mu}P_{0,1}(z)+(-1)^{\mu}P_{1,1}(z).$$

Infatti, dalla equazione (10) del numero precedente, riducendo colle equazioni (8) e (9) dello stesso numero, abbiamo :

*

$$P_{\eta,\varepsilon}\left(w + (2r + \mu' - 1)\frac{\omega}{2} + (2s + \nu' - 1)\frac{\omega'}{2}\right)$$

$$= (-1)^{\varepsilon(\mu'-1)} e^{\sigma}\, \Theta_{\mu-\mu'+\eta+1,\,\nu-\nu'+\varepsilon+1}(w)\, \Theta_{\eta+1,\,\varepsilon+1}(w)\, \Theta_{\mu-\mu'+\eta,\,\varepsilon}(w)\, \Theta_{\eta,\,\nu-\nu'+\varepsilon}(w)\,,$$

$$P_{\eta,\varepsilon}\left(- w + (2r + \mu - 1)\frac{\omega}{2} + (2s + \nu - 1)\frac{\omega'}{2}\right)$$

$$= (-1)^{\varepsilon(\mu'-1)} e^{\sigma'}\, \Theta_{\mu-\mu'+\eta+1,\,\nu-\nu'+\varepsilon+1}(w)\, \Theta_{\eta+1,\,\varepsilon+1}(w)\, \Theta_{\mu-\mu'+\eta,\,\varepsilon}(w)\, \Theta_{\eta,\,\nu-\nu'+\varepsilon}(w)\,,$$

dove σ e σ' sono quantità indipendenti da ε e da η.

Sostituendo questi valori nel secondo membro della equazione (3), si ottiene in ambedue i casi per risultato il prodotto di un fattore esponenziale moltiplicato per la somma :

$$\begin{aligned} &\Theta_{\mu-\mu'+1,\,\nu-\nu'+1}(w)\, \Theta_{1,1}(w)\, \Theta_{\mu-\mu',0}(w)\, \Theta_{0,\,\nu-\nu'}(w) \\ &+ \Theta_{\mu-\mu',\,\nu-\nu'+1}(w)\, \Theta_{0,1}(w)\, \Theta_{\mu-\mu'+1,\,0}(w')\, \Theta_{1,\,\nu-\nu'}(w) \\ &- \Theta_{\mu-\mu'+1,\,\nu-\nu'}(w)\, \Theta_{1,0}(w)\, \Theta_{\mu-\mu',\,1}(w)\, \Theta_{0,\,\nu-\nu'+1} \\ &- \Theta_{\mu-\mu',\,\nu-\nu'}(w)\, \Theta_{0,0}(w)\, \Theta_{\mu-\mu'+1,\,1}(w)\, \Theta_{1,\,\nu-\nu'+1}(w)\,. \end{aligned}$$

Ora, se $\mu - \mu'$ è pari il primo termine è eguale e di segno contrario al quarto, il secondo è eguale e di segno contrario al terzo; se $\mu - \mu'$ è dispari il primo termine è eguale e di segno contrario al terzo, il secondo è eguale e di segno contrario al quarto; quindi questa somma è sempre identicamente eguale a zero, e abbiamo :

$$F\left(w + (2r + \mu' - 1)\frac{\omega}{2} + (2s + \nu' - 1)\frac{\omega'}{2}\right) = 0\,,$$

$$F\left(- w + (2r + \mu - 1)\frac{\omega}{2} + (2s + \nu - 1)\frac{\omega'}{2}\right) = 0\,,$$

e tutte le radici delle due funzioni intere $\Theta_{\mu,\nu}(z + w)$ e $\Theta_{\mu',\nu'}(z - w)$ sono anche radici della funzione intera $F(z)$.

Dunque, avremo :

$$F(z) = \varphi(z)\, \Theta_{\mu,\nu}(z + w)\, \Theta_{\mu',\nu'}(z - w)\,, \tag{4}$$

essendo $\varphi(z)$ una funzione intera.

Ora, rammentando l'equazioni caratteristiche delle funzioni Jacobiane, si ottiene :

$$F(z + \omega) = (-1)^{\nu+\nu'} F(z)\,, \qquad F(z + \omega') = (-1)^{\mu+\mu'} e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(2z+\omega')} F(z)\,,$$

nelle quali sostituendo il valore (4), e riducendo coll' equazioni caratteristiche delle funzioni Jacobiane, abbiamo :

$$\varphi(z + \omega) = \varphi(z)\,, \qquad \varphi(z + \omega') = \varphi(z)\,,$$

e quindi $\varphi(z)$ eguale a una costante C; e

$$(5) \qquad F(z) = C\,\Theta_{\mu,\nu}(z+w)\,\Theta_{\mu',\nu'}(z-w).$$

Per determinare la costante C, poniamo nella equazione (5) :

$$w = 0\,, \qquad z = \mu\frac{\omega}{2} + \nu'\frac{\omega'}{2}\,,$$

Poichè dalla equazione (10) del numero precedente, si ottiene :

$$P_{\eta,\varepsilon}\left(\mu\frac{\omega}{2} + \nu'\frac{\omega'}{2}\right) = (-1)^{\varepsilon\mu+\nu'(\mu-\mu')}\,e^{-\frac{\pi i}{2\omega}\left(\nu'^2\omega'-\mu(\nu+\nu')\omega\right)}\Theta^2_{\mu-\mu'+\eta,\varepsilon}(0)\,\Theta_{\eta,\nu-\nu'+\varepsilon}(0)$$

e

$$\Theta_{\mu,\nu}\left(\mu\frac{\omega}{2} + \nu'\frac{\omega'}{2}\right)\Theta_{\mu',\nu'}\left(\mu\frac{\omega}{2} + \nu'\frac{\omega'}{2}\right) = (-1)^{\nu'(\mu-\mu')}\,e^{-\frac{\pi i}{2\omega}\left(\nu'^2\omega' - \mu(\nu+\nu')\omega\right)}\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0)$$

avremo :

$$C\,\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0) = \Theta^2_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta^2_{0,\nu-\nu'}(0) + \Theta^2_{\mu-\mu'+1,0}(0)\,\Theta^2_{1,\nu-\nu'}(0)$$
$$+ \Theta^2_{\mu-\mu',1}(0)\,\Theta^2_{0,\nu-\nu'+1}(0) + \Theta^2_{\mu-\mu'+1,1}(0)\,\Theta^2_{1,\nu-\nu'+1}(0).$$

Ora se $\mu - \mu' = 1$, $\nu - \nu' = 1$, si annullano il secondo e il terzo termine, e il primo è eguale al quarto; se $\mu - \mu' = 1$, $\nu - \nu' = 0$, si annullano il terzo e il quarto termine, e il primo è eguale al secondo; se $\mu - \mu' = 0$, $\nu - \nu' = 1$, si annullano il secondo e il quarto termine, e il primo è eguale al terzo. Dunque in questi tre casi, abbiamo :

$$C\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0) = 2\Theta^2_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta^2_{0,\nu-\nu'}(0)\,,$$

ossia

$$C = 2\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0)\,.$$

Se poi $\mu - \mu' = 0$ e $\nu - \nu' = 0$, il solo quarto termine si annulla, e si ha :

$$C\,\Theta^2_{0,0}(0) = \Theta^4_{0,0}(0) + \Theta^4_{0,0}(0) + \Theta^4_{0,1}(0).$$

Ma dall'equazioni (20), (23) e (26) del numero 10, abbiamo :

$$\Theta^4_{0,1}(0) + \Theta^4_{1,0}(0) = \Theta^4_{0,0}(0)\,,$$

onde

$$C = 2\Theta^2_{0,0}(0)\,.$$

Dunque, qualunque siano $\mu - \mu'$ e $\nu - \nu'$, avremo sempre :

$$C = 2\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0)\,,$$

e quindi :

$$2\Theta_{\mu,\nu}(z+w)\,\Theta_{\mu',\nu'}(z-w)\,\Theta_{\mu-\mu',0}(0)\,\Theta_{0,\nu-\nu'}(0) = F(z)$$

come volevamo dimostrare.

Prendendo nella equazione (1) per μ, ν, μ' e ν' le 16 differenti combinazioni dei valori 0 e 1, e sostituendo alle funzioni $\Theta_{\mu,\nu}$ i loro valori espressi per le funzioni $\theta_{\mu,\nu}$ dalle equazioni (16) del numero 10, abbiamo le seguenti formule di addizione per le funzioni Jacobiane:

$$\theta_{1,1}(z+w)\,\theta_{1,1}(z-w) = \theta^2_{1,1}(z)\,\theta^2_{1,0}(w) - \theta^2_{1,0}(z)\,\theta^2_{1,1}(w)\,, \tag{6}$$

$$\theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{1,0}(z-w) = \theta^2_{1,0}(z)\,\theta^2_{1,0}(w) - k^2\theta^2_{1,1}(z)\,\theta^2_{1,1}(w)\,, \tag{7}$$

$$\theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{0,1}(z-w) = \theta^2_{1,0}(z)\,\theta^2_{0,1}(w) - \theta^2_{1,1}(z)\,\theta^2_{0,0}(w)\,, \tag{8}$$

$$\theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{0,0}(z-w) = \theta^2_{1,0}(z)\,\theta^2_{0,0}(w) - k^2\theta^2_{1,1}(z)\,\theta^2_{0,1}(w)\,; \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\theta_{1,1}(z+w)\,\theta_{1,0}(z-w) = {} & \theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(w)\,\theta_{0,0}(w)\\ & + \theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{1,1}(z-w) = {} & \theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(w)\,\theta_{0,0}(w)\\ & - \theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{0,0}(z-w) = {} & \theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)\\ & - k'^2\theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,,\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{0,1}(z-w) = {} & \theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)\\ & + k'^2\theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,;\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{0,1}(z-w) = {} & \theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)\\ & + \theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{0,0}(w)\,,\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{1,1}(z-w) = {} & \theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,0}(w)\\ & - \theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{0,1}(w)\,,\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{0,0}(z-w) = {} & \theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{1,0}(w)\\ & + k^2\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(w)\,\theta_{1,1}(w)\,,\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{1,0}(z-w) = {} & \theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{1,0}(w)\\ & - k^2\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(w)\,\theta_{1,1}(w)\,;\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\theta_{1,1}(z+w)\,\theta_{0,0}(z-w) = {} & \theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)\\ & + \theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{0,0}(w)\,,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{1,1}(z-w) = {} & \theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)\\ & - \theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{0,0}(w)\,,\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{0,1}(z-w) = {} & \theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)\\ & + \theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{1,1}(w)\,,\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{1,0}(z-w) = {} & \theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)\,\theta_{1,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)\\ & - \theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{1,1}(w).\end{aligned} \tag{21}$$

12.

Ponendo nelle formule (10) e (11) del numero precedente $z+w$ in luogo di z, si ottiene:

$$\theta_{1,1}(z+2w)\,\theta_{1,0}(z)=\theta_{1,1}(z+w)\,\theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)$$
$$+\,\theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,,$$

$$\theta_{1,0}(z+2w)\,\theta_{1,1}(z)=\theta_{1,1}(z+w)\,\theta_{1,0}(z+w)\,\theta_{0,0}(w)\,\theta_{0,1}(w)$$
$$-\,\theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,,$$

onde:

$$\theta_{1,0}(z)\,\{\theta_{1,1}(z+2w)-\theta_{1,1}(z)\}-\theta_{1,1}(z)\,\{\theta_{1,0}(z+2w)-\theta_{1,0}(z)\}$$
$$=2\theta_{0,0}(z+w)\,\theta_{0,1}(z+w)\,\theta_{1,1}(w)\,\theta_{1,0}(w)\,.$$

Dividendo i due membri di questa equazione per $2w$, e passando quindi al limite per $w=0$, si ottiene:

$$(1)\qquad \theta_{1,0}(z)\frac{d\,\theta_{1,1}(z)}{dz}-\theta_{1,1}(z)\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz}=\theta_{0,0}(z)\,\theta_{0,1}(z).$$

Analogamente dall'equazioni (12) e (13), abbiamo:

$$(2)\qquad \theta_{0,1}(z)\frac{d\,\theta_{0,0}(z)}{dz}-\theta_{0,0}(z)\frac{d\,\theta_{0,1}(z)}{dz}=k'^2\theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z)\,,$$

e dall'equazioni (14) e (15):

$$(3)\qquad \theta_{0,1}(z)\frac{d\,\theta_{1,1}(z)}{dz}-\theta_{1,1}(z)\frac{d\,\theta_{0,1}(z)}{dz}=\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,0}(z)\,;$$

e dall'equazioni (16) e (17):

$$(4)\qquad \theta_{0,0}(z)\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz}-\theta_{1,0}(z)\frac{d\,\theta_{0,0}(z)}{dz}=k^2\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(z),$$

e dalle ultime quattro:

$$(5)\qquad \theta_{0,0}(z)\frac{d\,\theta_{1,1}(z)}{dz}-\theta_{1,1}(z)\frac{d\,\theta_{0,0}(z)}{dz}=\theta_{1,0}(z)\,\theta_{1,1}(z)\,,$$

$$(6)\qquad \theta_{0,1}(z)\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz}-\theta_{1,0}(z)\frac{d\,\theta_{0,1}(z)}{dz}=\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(z).$$

Di queste sei equazioni tre sono una conseguenza delle altre tre, come è facile a verificarsi. Basterà dunque considerarne tre sole. Prenderemo le tre (1), (4), (6) che contengono $\theta_{1,0}$, e le scriveremo sotto la forma:

$$(7)\qquad \frac{d\log\theta_{1,1}(z)}{dz}-\frac{d\log\theta_{1,0}(z)}{dz}=\frac{\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)}{\theta_{1,0}(z)\,\theta_{1,1}(z)},$$

$$(8)\qquad \frac{d\log\theta_{1,0}(z)}{dz}-\frac{d\log\theta_{0,1}(z)}{dz}=\frac{\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,1}(z)}{\theta_{1,0}(z)\,\theta_{0,1}(z)},$$

$$(9)\qquad \frac{d\log\theta_{1,0}(z)}{dz}-\frac{d\log\theta_{0,0}(z)}{dz}=k^2\frac{\theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(z)}{\theta_{0,0}(z)\,\theta_{1,0}(z)}.$$

Derivando queste tre equazioni, e riducendo colle altre equazioni di questo numero, si ottiene :

$$(10)\qquad \frac{d^2\log\theta_{1,1}(z)}{dz^2}-\frac{d^2\log\theta_{1,0}(z)}{dz^2}=-\frac{\theta^2_{1,0}(z)}{\theta^2_{1,1}(z)}+k^2\frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)},$$

$$(11)\qquad \frac{d^2\log\theta_{0,1}(z)}{dz^2}-\frac{d^2\log\theta_{1,0}(z)}{dz^2}=-\frac{\theta^2_{0,0}(z)}{\theta^2_{0,1}(z)}+k^2\frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)},$$

$$(12)\qquad \frac{d^2\log\theta_{0,0}(z)}{dz^2}-\frac{d^2\log\theta_{1,0}(z)}{dz^2}=-k^2\frac{\theta^2_{0,1}(z)}{\theta^2_{0,0}(z)}+k^2\frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)};$$

onde :

$$(13)\qquad \frac{d^2\log\theta_{1,1}(z)}{dz^2}+\frac{\theta^2_{1,0}(z)}{\theta^2_{1,1}(z)}=\frac{d^2\log\theta_{1,0}(z)}{dz^2}+k^2\frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)}=\frac{d^2\log\theta_{0,1}(z)}{dz^2}+\frac{\theta^2_{0,0}(z)}{\theta^2_{0,1}(z)}$$

$$=\frac{d^2\log\theta_{0,0}(z)}{dz^2}+k^2\frac{\theta^2_{0,1}(z)}{\theta^2_{0,0}(z)}=\varphi(z).$$

La funzione $\varphi(z)$ sarà una funzione intera, non potendo divenire infinita per nessun valore finito di z; perchè le quattro espressioni eguali a $\varphi(z)$ non possono avere infiniti comuni, non ne avendo le funzioni $\theta_{1,1}$, $\theta_{1,0}$, $\theta_{0,1}$, $\theta_{0,0}$.

Ora, poichè :

$$\theta_{\mu,\nu}(z+\omega)=(-1)^\nu\,\theta_{\mu,\nu}(z),\qquad \theta_{\mu,\nu}(z+\omega')=(-1)^\mu e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\theta_{\mu,\nu}(z).$$

Sarà :

$$\frac{d^2\log\theta_{\mu,\nu}(z+\omega)}{dz^2}=\frac{d^2\log\theta_{\mu,\nu}(z)}{dz^2},\qquad \frac{d^2\log\theta_{\mu,\nu}(z+\omega')}{dz^2}=\frac{d^2\log\theta_{\mu,\nu}(z)}{dz^2};$$

e quindi :

$$\varphi(z+\omega)=\varphi(z),\qquad \varphi(z+\omega')=\varphi(z);$$

e perciò $\varphi(z)$ dovrà essere eguale a una costante C, e avremo :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\log\theta_{1,1}(z)}{dz^2}+\frac{\theta^2_{1,0}(z)}{\theta^2_{1,1}(z)}=C, &&\frac{d^2\log\theta_{0,1}(z)}{dz^2}+\frac{\theta^2_{0,0}(z)}{\theta^2_{0,1}(z)}=C,\\ &\frac{d^2\log\theta_{1,0}(z)}{dz^2}+k^2\frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)}=C, &&\frac{d^2\log\theta_{0,0}(z)}{dz^2}+k^2\frac{\theta^2_{0,2}(z)}{\theta^2_{0,0}(z)}=C.\end{aligned}\right.$$

Per determinare la costante C poniamo :

$$(15) \qquad \chi_{\mu,\nu}(z) = e^{-\frac{Cz^2}{2}}\theta_{\mu,\nu}(z) \,;$$

e sostituendo nelle equazioni (14), avremo :

$$(16) \quad \frac{d^2 \log \chi_{1,1}(z)}{dz^2} = -\frac{\theta^2_{1,0}(z)}{\theta^2_{1,1}(z)}, \qquad (17) \quad \frac{d^2 \log \chi_{1,0}(z)}{dz^2} = -k^2\frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)},$$

$$(18) \quad \frac{d^2 \log \chi_{0,1}(z)}{dz^2} = -\frac{\theta^2_{0,0}(z)}{\theta^2_{0,1}(z)}, \qquad (19) \quad \frac{d^2 \log \chi_{0,0}(z)}{dz^2} = -k^2\frac{\theta^2_{0,1}(z)}{\theta^2_{0,0}(z)}.$$

Dalla equazione (15), ponendo mente all' equazioni caratteristiche delle funzioni $\theta_{\mu,\nu}$, si ottiene :

$$\log \chi_{\mu,\nu}(z+\omega) = -C\omega z - C\frac{\omega^2}{2} + \pi i \nu + \log \chi_{\mu,\nu}(z)\,,$$

$$\log \chi_{\mu,\nu}(z+\omega') = -\left(C\omega' + \frac{2\pi i}{\omega}\right)\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) + \pi i \mu + \log \chi_{\mu,\nu}(z)\,;$$

onde :

$$(20) \qquad \frac{1}{\chi_{\mu,\nu}(z+\omega)}\frac{d\chi_{\mu,\nu}(z+\omega)}{dz} - \frac{1}{\chi_{\mu,\nu}(z)}\frac{d\chi_{\mu,\nu}(z)}{dz} = -C\omega\,,$$

$$(21) \qquad \frac{1}{\chi_{\mu,\nu}(z+\omega')}\frac{d\chi_{\mu,\nu}(z+\omega')}{dz} - \frac{1}{\chi_{\mu,\nu}(z)}\frac{d\chi_{\mu,\nu}(z)}{dz} = -\left(C\omega' + \frac{2\pi i}{\omega}\right).$$

Prendo nella equazione (20) $\mu = 1$, $\nu = 0$, $z = -\frac{\omega}{2}$, e osservando che $\chi_{1,0}(z)$ è una funzione intera pari, e quindi la sua derivata è dispari, ottengo :

$$-C\omega = \frac{2}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Nella equazione (21), pongo $\mu = 1$, $\nu = 0$, $z = \frac{\omega - \omega'}{2}$, ed osservando che dalla equazione (20) si ha :

$$\frac{\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)} = -C\omega - \frac{\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)},$$

ottengo :

$$(22) \qquad \frac{2\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega'+\omega}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)} = -C\omega - C\omega' - \frac{2\pi i}{\omega}.$$

Pongo :

$$(23)\qquad \eta = \frac{2\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,,\qquad \eta' = \frac{2\chi'_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)} - \eta\,,$$

ed ho :

$$(24)\qquad C = -\frac{\eta}{\omega}\,.$$

Sostituendo nella (22) :

$$(25)\qquad \eta\omega' - \eta'\omega = 2\pi i\,,$$

e le equazioni (20) e (21) divengono :

$$\frac{\chi'_{\mu,\nu}(z+\omega)}{\chi_{\mu,\nu}(z+\omega)} - \frac{\chi'_{\mu,\nu}(z)}{\chi_{\mu,\nu}(z)} = \eta\,,\qquad \frac{\chi'_{\mu,\nu}(z+\omega')}{\chi_{\mu,\nu}(z+\omega')} - \frac{\chi'_{\mu,\nu}(z)}{\chi_{\mu,\nu}(z)} = \eta'\,;$$

onde :

$$(26)\qquad \frac{\chi'_{\mu,\nu}(z+m\omega+n\omega')}{\chi_{\mu,\nu}(z+m\omega+n\omega')} - \frac{\chi'_{\mu,\nu}(z)}{\chi_{\mu,\nu}(z)} = m\eta + n\eta'.$$

13.

Le funzioni intere $\chi_{\mu,\nu}(z)$ sodisfano ad equazioni differenziali di 2.° ordine che ci permettono di calcolare i coefficienti delle serie di potenze positive e intere di z, per le quali si possono esprimere. Ripeteremo qui il processo di calcolo impiegato a questo scopo dal Sig. *Weierstrass* (*).

Se poniamo :

$$(1)\qquad \frac{\theta_{1,1}(z)}{\theta_{1,0}(z)} = x\,,$$

l'equazione (1) del numero (12) darà :

$$(2)\qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)\,;$$

onde :

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -(1+k^2)x + 2k^2x^3.$$

Si derivi la equazione (2) riguardandovi x funzione di k: avremo :

$$\frac{dx}{dz}\,\frac{d^2x}{dz\,dk} = \left(-(1+k^2)x + 2k^2x^3\right)\frac{dx}{dk} - kx^2(1-x^2)\,,$$

(*) Vedi *Journal von Crelle*. V. 52. La funzione $\chi_{1,0}(z)$ è la funzione $Al\,z$ del Sig. *Weierstrass*.

$$\frac{dx}{dz}\frac{d^2x}{dz\,dk}-\frac{dx}{dk}\frac{d^2x}{dz^2}=-kx^2(1-x^2)\,,$$

$$(3)\qquad \frac{d\,\frac{dx}{dk}:\frac{dx}{dz}}{dz}=\frac{-kx^2}{1-k^2x^2}=-\frac{1}{k}\left(\frac{1}{1-k^2x^2}-1\right).$$

Ma dall'equazione (12) del numero 12, si ha:

$$\frac{d^2\log\frac{\theta_{0,0}(z)}{\theta_{1,0}(z)}}{dz^2}=\frac{k^2\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)}-\frac{k^2\theta^2_{0,1}(z)}{\theta^2_{0,0}(z)}\,,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\log(1-k^2x^2)}{dz^2}=k^2x^2-\frac{k^2(1-x^2)}{1-k^2x^2}\,,$$

e a cagione della equazione (17):

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\log(1-k^2x^2)}{dz^2}=-\frac{d^2\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2}+\frac{1-k^2}{1-k^2x^2}-1,$$

onde:

$$\frac{1-k^2}{1-k^2x^2}=\frac{d\left(\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}+\frac{1}{2}\frac{d\log(1-k^2x^2)}{dz}+z\right)}{dz}.$$

Confrontando colla equazione (13):

$$k(1-k^2)\frac{d\,\frac{dx}{dk}:\frac{dx}{dz}}{dz}-(1-k^2)=-\frac{d\left(\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}+\frac{1}{2}\frac{d\log(1-k^2x^2)}{dz}+z\right)}{dz}.$$

Integrando rispetto a z, e osservando che annullandosi per $z=0$, $\frac{dx}{dk}\,\chi'_{1,0}(z)$, $\theta'_{0,0}(z)$, la costante dell'integrazione deve essere eguale a zero, si ha:

$$k(1-k^2)\frac{dx}{dk}:\frac{dx}{dz}=-\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}-\frac{1}{2}\frac{d\log(1-k^2x^2)}{dz}-k^2z,$$

ed essendo:

$$-\frac{1}{2}\frac{d\log(1-k^2x^2)}{dz}\frac{dx}{dz}=\frac{k^2x}{1-k^2x^2}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2=k^2x(1-x^2)\,,$$

si ottiene:

$$(4)\qquad k(1-k^2)\frac{dx}{dk}=k^2x(1-x^2)-\left(k^2z+\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\right)\frac{dx}{dz}.$$

Moltiplicando per $4k^2x$, e osservando che dall'equazione (17) si ha:

$$k^2x^2 = -\frac{d^2\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2},$$

e perciò :

$$2k^2x\frac{dx}{dk} = -\frac{d^3\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2dk} - 2kx^2, \qquad 2k^2x\frac{dx}{dz} = -\frac{d^3\log\chi_{1,0}(z)}{dz^3},$$

otteniamo :

$$(6) \quad 2k(1-k^2)\frac{d^3\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2dk} + 2k^2z\frac{d^3\log\chi_{1,0}(z)}{dz^3} + 2\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\frac{d^3\log\chi_{1,0}(z)}{dz^3}$$

$$+ 4k^2x^2 - 4k^4x^4 = 0 ;$$

onde, poichè :

$$2k^2z\frac{d^3\log\chi_{1,0}(z)}{dz^3} = 2\frac{d^2\left(k^2z^2\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\right)}{dz^2} - 4k^2\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2},$$

$$2\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\frac{d^3\log\chi_{1,0}(z)}{dz^3} = \frac{d^2\left(\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\right)^2}{dz^2} - 2\left(\frac{d^2\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2}\right)^2$$

$$= \frac{d^2\left(\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\right)^2}{dz^2} - 2k^4x^4;$$

avremo :

$$\frac{d^2\left\{2k(1-k^2)\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dk} + 2k^2z\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz} + \left(\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\right)^2\right\}}{dz^2}$$

$$+ 4k^2(1+k^2)x^2 - 6k^4x^4 = 0.$$

Ma dalla (5) si ha :

$$\frac{d^4\log\chi_{1,0}(z)}{dz^4} = -2k^2x\frac{d^2x}{dz^2} - 2k^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = -2k^2 + 4k^2(1+k^2)x^2 - 6k^4x^4,$$

onde :

$$\frac{d^2\left\{2k(1-k^2)\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz} + 2k^2z\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz} + \left(\frac{d\log\chi_{1,0}(z)}{dz}\right)^2\right\}}{dz} + \frac{d^4\log\chi_{1,0}(z)}{dz^2} + 2k^2 = 0.$$

Integrando, e osservando che si ha :

$$\chi_{1,0}(z)\,\chi''_{1,0}(z) - \chi'^2_{1,0} = -k^2\chi^2_{1,1}(z),$$

e quindi :

$$\chi''_{1,0}(0) = 0,$$

ed anche :

$$\chi_{1,0}'''(0) = 0 \,,$$

perchè $\chi_{1,0}(z)$ è pari, e che perciò non deve aggiungersi alcuna costante, si ottiene:

$$\frac{d^2 \log \chi_{1,0}(z)}{dz^2} + 2k(1-k^2)\frac{d \log \chi_{1,0}(z)}{dk} + 2k^2 z \frac{d \log \chi_{1,0}(z)}{dz} + \left(\frac{d \log \chi_{1,0}(z)}{dz}\right)^2 + k^2 z^2 = 0,$$

$$(7) \qquad \frac{d^2 \chi_{1,0}(z)}{dz^2} + 2k^2 z \frac{d\,\chi_{1,0}(z)}{dz} + 2k(1-k^2)\frac{d\,\chi_{1,0}(z)}{dk} + k^2 z^2 \chi_{1,0}(z) = 0.$$

Analogamente si trova :

$$8) \qquad \frac{d^2 \chi_{1,1}(z)}{dz^2} + 2k^2 z \frac{d\,\chi_{1,1}(z)}{dz} + 2k(1-k^2)\frac{d\,\chi_{1,0}(z)}{dk} + (1 - k^2 + k^2 z^2)\,\chi_{1,1}(z) = 0\,,$$

$$(9) \qquad \frac{d^2 \chi_{0,1}(z)}{dz^2} + 2k^2 z \frac{d\,\chi_{0,1}(z)}{dz} + 2k(1-k^2)\frac{d\,\chi_{0,1}(z)}{dk} + (1 + k^2 z^2)\,\chi_{0,1}(z) = 0\,,$$

$$(10) \qquad \frac{d^2 \chi_{0,0}(z)}{dz^2} + 2k^2 z \frac{d\,\chi_{0,0}(z)}{dz} + 2k(1-k^2)\frac{d\,\chi_{0,0}(z)}{dk} + (k^2 + k^2 z^2)\,\chi_{0,0}(z) = 0\,.$$

Ora $\chi_{1,0}(z)$ è una funzione intera pari che diviene eguale all'unità per $z = 0$, come risulta dall'equazione (15) del numero 12; dunque avremo :

$$\chi_{1,0}(z) = 1 + A_1 z^2 + A_2 z^4 + A_3 z^6 + \ldots .$$

Dall'equazione (7) si deduce:

$$A_1 = 0, \quad 3.4A_2 + k^2 = 0, \quad 5.6A_3 + 2.4k^2 A_2 + 2k(1-k^2)\frac{dA_2}{dk} = 0,$$

$$2r(2r-1)A_r + 4(r-1)k^2 A_{r-1} + k^2 A_{r-2} + 2k(1-k^2)\frac{dA_{r-1}}{dk} = 0;$$

onde i valori dei coefficienti in funzione di k. Analogamente per le altre funzioni $\chi_{\mu,\nu}(z)$.

Ottenute l'espressioni analitiche delle funzioni $\chi_{\mu,\nu}(z)$ possiamo riguardare compiutamente determinati mediante l'equazioni (23) del numero precedente i valori di η e di η', e quindi il valore della costante C, che comparisce nelle equazioni (14) dello stesso numero, e abbiamo :

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \log \theta_{1,1}(z)}{dz^2} &= -\frac{\eta}{\omega} - k^2 \frac{\theta_{1,0}^2(z)}{\theta_{1,1}^2(z)}, & \frac{d^2 \log \theta_{1,0}(z)}{dz^2} &= -\frac{\eta}{\omega} - \frac{\theta_{1,1}^2(z)}{\theta_{1,0}^2(z)}, \\ \frac{d^2 \log \theta_{0,1}(z)}{dz^2} &= -\frac{\eta}{\omega} - \frac{\theta_{0,0}^2(z)}{\theta_{0,1}^2(z)}, & \frac{d^2 \log \theta_{0,0}(z)}{dz^2} &= -\frac{\eta}{\omega} - k^2 \frac{\theta_{0,1}^2(z)}{\theta_{0,0}^2(z)}. \end{aligned} \right.$$

Sostituendo alle funzioni $\theta_{\mu,\nu}$ le loro espressioni per mezzo delle $\Theta_{\mu,\nu}(z)$, abbiamo le quattro formule :

$$(12)\qquad \frac{d^2\log\Theta_{1,1}(z)}{dz^2} = -\frac{\eta}{\omega} + k\,\frac{\Theta^2_{\mu,\nu+1}(z)}{\Theta^2_{\mu,\nu}(z)},$$

$$(13)\qquad \frac{d^2\log\Theta_{1,0}(z)}{dz^2} = -\frac{\eta}{\omega} + k\,\frac{\Theta^2_{1,1}(z)}{\Theta^2_{1,0}(z)},$$

$$(14)\qquad \frac{d^2\log\Theta_{0,1}(z)}{dz^2} = -\frac{\eta}{\omega} - k\,\frac{\Theta^2_{0,0}(z)}{\Theta^2_{0,1}(z)},$$

$$(15)\qquad \frac{d^2\log\Theta_{0,0}(z)}{dz^2} = -\frac{\eta}{\omega} - k\,\frac{\Theta^2_{0,1}(z)}{\Theta^2_{0,0}(z)}.$$

14.

Le funzioni $\Theta_{\mu,\nu}$ sono a due variabili $\frac{\pi z}{\omega}$ e q, e sodisfano a una equazione a derivate parziali molto semplice. Poniamo :

$$(1)\qquad \frac{\pi z}{\omega} = x;$$

avremo :

$$(2)\qquad \Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\mu n} q^{\left(\frac{2n+\nu}{2}\right)^2} e^{(2n+\nu)ix},$$

e quindi :

$$\frac{d^2\Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{dx^2} = -\sum(-1)^{\mu n}(2n+\nu)^2 q^{\left(\frac{2n+\nu}{2}\right)^2} e^{(2n+\nu)ix},$$

$$\frac{d\,\Theta\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{dq} = \frac{1}{4}\sum(-1)^{\mu\nu}(2n+\nu)^2 q^{\left(\frac{2n+\nu}{2}\right)^2-1} e^{(2n+\nu)ix};$$

onde :

$$(3)\qquad \frac{d^2\Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{dx^2} = -4q\,\frac{d\,\Theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{dq}.$$

Le quantità k, k' e ω sono tutte funzioni di q, delle quali facilmente determineremo le derivate, valendosi delle equazioni differenziali che abbiamo trovate.

Prendiamo l'equazione (10) del numero 12, cioè :

$$(4)\qquad \frac{1}{\theta_{1,1}(z)}\frac{d^2\theta_{1,1}(z)}{dz^2} - \frac{1}{\theta_{1,0}(z)}\frac{d^2\theta_{1,0}(z)}{dz^2} + \frac{1}{\theta^2_{1,0}(z)}\left(\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz}\right)^2 - \frac{1}{\theta^2_{1,1}(z)}\left(\frac{d\,\theta_{1,1}(z)}{dz}\right)^2$$
$$= -\frac{\theta^2_{1,0}(z)}{\theta^2_{1,1}(z)} + k^2\,\frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)}.$$

Ora, abbiamo :

$$\frac{1}{\theta_{1,1}(z)}\frac{d^2\theta_{1,1}(z)}{dz^2}-\frac{1}{\theta_{1,0}(z)}\frac{d^2\theta_{1,0}(z)}{dz^2}=\frac{1}{\Theta_{1,1}(z)}\frac{d^2\Theta_{1,1}(z)}{dz^2}-\frac{1}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{d^2\Theta_{1,0}(z)}{dz^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{\Theta_{1,1}(z)}\frac{d^2\Theta_{1,1}(z)}{dx^2}-\frac{1}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{d^2\Theta_{1,0}(z)}{dx^2}\right)=-4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d\log\dfrac{\Theta_{1,1}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{\Theta_{1,0}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}}{dq},$$

e a cagione dell'equazione (1) del numero 12 :

$$\frac{1}{\theta^2_{1,1}(z)}\left(\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz}\right)^2-\frac{1}{\theta^2_{1,0}(z)}\left(\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz}\right)^2$$

$$=\frac{\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)\,\theta^2_{1,1}(z)}\left(\theta_{1,0}(z)\frac{d\,\theta_{1,1}(z)}{dz}+\theta_{1,1}(z)\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz}\right).$$

Onde l'equazione (1) diviene :

$$-4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d\log\dfrac{\Theta_{1,1}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{\Theta_{1,0}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}}{dq}-\frac{\theta_{0,1}(z)\,\theta_{0,0}(z)}{\theta^2_{1,1}(z)\,\theta^2_{1,0}(z)}\left(\theta_{1,0}(z)\frac{d\,\theta_{1,1}(z)}{dz}+\theta_{1,1}(z)\frac{d\,\theta_{1,0}(z)}{dz}\right)$$

$$=k^2\frac{\theta^2_{1,1}(z)}{\theta^2_{1,0}(z)}-\frac{\theta^2_{1,0}(z)}{\theta^2_{1,1}(z)}.$$

Poniamo $x=\frac{\pi}{2}$, e quindi $z=\frac{\omega}{2}$, ed essendo :

$$\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}=\frac{1}{i\sqrt{k}}\frac{\Theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\Theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\right)}=1,\qquad \theta_{0,1}\left(\frac{\omega}{2}\right)=0$$

avremo :

$$-4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d\log\sqrt{k}}{dq}=k^2-1,$$

ossia

$$\frac{dk}{dq}=\frac{kk'^2\omega^2}{2q\pi^2}, \tag{5}$$

e poichè :

$$k\frac{dk}{dq}+k'\frac{dk'}{dq}=0,$$

sarà :

$$\frac{dk'}{dq} = -\frac{k'k^2\omega^2}{2q\pi^2}. \tag{6}$$

Dalla equazione (15) del numero 13, abbiamo :

$$\frac{1}{\Theta_{0,0}(z)}\frac{d^2\Theta_{0,0}(z)}{dz^2} - \frac{1}{\Theta_{0,0}^2(z)}\left(\frac{d\,\Theta_{0,0}(z)}{dz}\right)^2 = -\frac{\eta}{\omega} - k\frac{\Theta_{0,1}^2(z)}{\Theta_{0,0}^2(z)}.$$

Ora a cagione della equazione (3), è :

$$\frac{1}{\Theta_{0,0}(z)}\frac{d^2\Theta_{0,0}(z)}{dz^2} = -4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d\log\Theta_{0,0}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{dq}$$

onde :

$$-4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d\log\Theta_{0,0}\left(\frac{\omega x}{\pi}\right)}{dq} - \frac{1}{\Theta_{0,0}^2(z)}\left(\frac{d\,\Theta_{0,0}(z)}{dz}\right)^2 = -\frac{\eta}{\omega} - k\frac{\Theta_{0,1}^2(z)}{\Theta_{0,0}^2(z)}.$$

Ponendo $z = 0$, e osservando che si ha :

$$\Theta_{0,0}(0) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}, \qquad \left(\frac{d\,\Theta_{0,0}(z)}{dz}\right)_{z=0} = 0, \qquad \Theta_{0,1}(0) = \sqrt{\frac{k\omega}{\pi}},$$

si ottiene :

$$4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d\log\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}}{dq} = \frac{\eta}{\omega} + k^2,$$

$$\frac{d\omega}{dq} = \frac{(\eta + k^2\omega)\omega}{2q\pi^2}. \tag{7}$$

15.

Passiamo ora alla determinazione delle formule che danno la moltiplicazione dell' argomento nelle funzioni Jacobiane per un numero reale e intero, cioè alla determinazione delle espressioni delle funzioni $\theta_{\mu,\nu}(nz)$ per mezzo delle funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z)$.

Le radici della funzione intera $\theta_{\mu,\nu}(nz)$ sono tutte e sole le quantità :

$$\frac{(2r+\mu-1)\omega + (2s+\nu-1)\omega'}{2n}. \tag{1}$$

Qualunque siano i numeri interi reali r ed s potranno sempre porsi sotto la forma:

$$r = nr' + \left(\frac{n-1}{2}\right)(\mu-1) + \alpha, \qquad s = ns' + \left(\frac{n-1}{2}\right)(\nu-1) + \beta,$$

dove α e β sono interi reali minori di n. Quindi le radici di $\theta_{\mu\nu,}(nz)$ saranno tutte e sole le quantità :

$$(2) \qquad r'\omega + s'\omega' + \frac{(\mu - 1)\omega + (\nu - 1)\omega'}{2} + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}.$$

Ma il prodotto :

$$\prod_{0}^{n-1}{}_{\alpha} \prod_{0}^{n-1}{}_{\beta}\, \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)$$

ha evidentemente anch'esso per radici tutte e sole le quantità della forma (2): dunque avremo :

$$(3) \qquad \theta_{\mu,\nu}(nz) = \varphi(z) \prod_{0}^{n-1}{}_{\alpha} \prod_{0}^{n-1}{}_{\beta}\, \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right),$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera che non ha radici finite.

Mutando z in $z + \omega$, e osservando l'equazione (4) del numero 6, si ottiene :

$$(4) \qquad \varphi(z + \omega) = \varphi(z).$$

Mutando z in $z + \omega'$, e osservando l'equazione (5) del numero 6, si ha:

$$e^{-\frac{\pi i n^2}{\omega}(2z+\omega')}\, \theta_{\mu,\nu}(nz) = \varphi(z + \omega')\, e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left[n^2\,(2z+\omega') + 2\sum\limits_{0}^{n-1}\sum\limits_{0}^{n-1}\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right]} \prod_{0}^{n-1} \prod_{0}^{n-1} \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right),$$

$$\theta_{\mu,\nu}(nz) = \varphi(z + \omega')\, e^{-n(n-1)\frac{\pi i \omega'}{\omega}} \prod_{0}^{n-1} \prod_{0}^{n-1} \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right),$$

e dividendo per la equazione (3), si ottiene :

$$(5) \qquad \varphi(z + \omega') = e^{n(n-1)\frac{\pi i \omega'}{\omega}}\, \varphi(z).$$

Ponendo :

$$\varphi(z) = e^{n(n-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\, \psi(z),$$

l'equazioni (4) e (5) danno :

$$\psi(z + \omega) = \psi(z), \qquad \psi(z + \omega') = \psi(z);$$

onde $\psi(z)$ che dev'essere una funzione intera; non può essere altro che una costante C, e si ha :

$$\theta_{\mu,\nu}(nz) = C e^{n(n-1)\frac{\pi i z}{\omega}} \prod_{0}^{n-1} \prod_{0}^{n-1} \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right).$$

Per determinare la costante C, se $\mu\nu = 0$ pongo $z = 0$, se $\mu\nu = 1$ divido i due membri per z e poi pongo $z = 0$, ed ho :

$$C = \frac{n^{\mu\nu}}{\prod\limits_0^{n-1}{}' \prod\limits_0^{n-1}{}' \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)},$$

dove gli apici alle lettere Π indicano che si deve escludere il fattore che corrisponde ad $\alpha = \beta = 0$. Pertanto abbiamo:

$$(6) \qquad \theta_{\mu,\nu}(nz) = e^{n(n-1)\frac{\pi i z}{\omega}} n^{\mu\nu} \frac{\prod\limits_0^{n-1} \prod\limits_0^{n-1} \theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}{\prod\limits_0^{n-1}{}' \prod\limits_0^{n-1}{}' \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}.$$

Trasformiamo il secondo membro di questa equazione in una funzione razionale di $\theta_{1,1}(z)$ e $\theta_{1,0}(z)$.

Osservando l'equazioni caratteristiche delle funzioni Jacobiane, e la equazione (1) del numero **11**, si ha:

$$\frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)\theta_{1,1}\left(z + \frac{(n-\alpha)\omega + (n-\beta)\omega'}{n}\right)}{\theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)\theta_{1,1}\left(\frac{(n-\alpha)\omega + (n-\beta)\omega'}{n}\right)}$$

$$= -e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}} \frac{\theta_{1,1}\left(z + \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)\theta_{1,1}\left(z - \frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}$$

$$= e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}} \left\{ \theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)} \theta^2_{1,1}(z) \right\}.$$

Onde sostituendo nella equazione (6) dove sia $\mu = \nu = 1$, si ottiene:

$$(7) \qquad \theta_{1,1}(nz) = n\, \theta_{1,0}(z)\, \Pi_\alpha\, \Pi_\beta \left\{ \theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega + \beta\omega'}{n}\right)} \theta^2_{1,1}(z) \right\}$$

dove il segno $\Pi_\alpha\, \Pi_\beta$ indica che il prodotto dev'estendersi a tutti i valori positivi di α minori di $\frac{n+1}{2}$, e a tutti i valori positivi di β minori di n, ma per $\alpha = 0$ si devono prendere per β soltanto i valori minori di $\frac{n+1}{2}$ escluso $\beta = 0$.

Analogamente per mezzo delle equazioni (7), (8), (9) del numero **11**, si ha:

$$(8)\qquad \theta_{1,0}(z) = \theta_{1,0}(z)\,\Pi_\alpha\,\Pi_\beta\left\{\theta^2_{1,0}(z) - k^2\,\frac{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}\theta^2_{1,1}(z)\right\},$$

$$(9)\qquad \theta_{0,1}(z) = \theta_{0,1}(z)\,\Pi_\alpha\,\Pi_\beta\left\{\theta^2_{1,0}(z) - \frac{\theta^2_{0,0}\left(\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}{\theta^2_{0,1}\left(\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}\theta^2_{1,1}(z)\right\},$$

$$(10)\qquad \theta_{0,0}(z) = \theta_{0,0}(z)\,\Pi_\alpha\,\Pi_\beta\left\{\theta^2_{1,0}(z) - k^2\,\frac{\theta^2_{0,1}\left(\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}{\theta^2_{0,0}\left(\frac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}\theta^2_{1,1}(z)\right\}.$$

16.

Le funzioni Jacobiane sono in generale funzioni di tre quantità z, ω' e ω, e quando tra ω' e ω non esiste la relazione (5) del numero 8, le indicheremo colla notazione $\theta_{\mu,\nu}(z, \omega', \omega)$, e quando esiste questa relazione essendo funzioni delle sole due quantità z ed $\frac{\omega'}{\omega}$, le indicheremo colla notazione $\theta_{\mu,\nu}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right)$, e con $\theta_{\mu,\nu}(z)$ semplicemente nei casi nei quali non possa cader dubbio sul valore del rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$. Quindi essendo:

$$\frac{\omega'_1}{\omega_1} = \frac{\omega'}{\omega},\quad \theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}, \omega', \omega\right) = \theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}, \omega', \omega\right),$$

l'equazioni (3) del numero 8, daranno:

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} &\theta_{1,1}(z, \omega'_1, \omega_1) = \frac{\omega}{\omega_1}\theta_{1,1}\left(\frac{\omega_1}{\omega}z, \frac{\omega'}{\omega}\right),\\ &\theta_{\mu,\nu}(z, \omega'_1, \omega_1) = \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega_1}{\omega}z, \frac{\omega'}{\omega}\right);\quad \mu\nu = 0. \end{aligned}\right.$$

Fin qui abbiamo considerato le relazioni tra le funzioni Jacobiane nelle quali era eguale il valore della seconda variabile $\frac{\omega'}{\omega}$. Passiamo ora alla determinazione delle relazioni che esistono tra le funzioni Jacobiane $\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega)$ e $\theta_{\mu,\nu}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right)$ quando sia

$$(1)\qquad \omega = \alpha\Omega + \beta\Omega',\qquad \omega' = \gamma\Omega + \delta\Omega',$$

dove α, β, γ e δ sono numeri interi e reali. La risoluzione di questo problema costituisce ciò che suol dirsi la *trasformazione* di queste funzioni. Il numero a cui è eguale il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ dicesi l'*ordine* della trasformazione. Cominciamo dalle trasformazioni di primo ordine, cioè sia:

*

$$(2)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Le radici di $\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega)$ sono evidentemente tutte le quantità :

$$(2m + \mu - 1)\Omega + (2n + \nu - 1)\frac{\Omega'}{2},$$

le quali, sostituendo i valori di Ω e Ω' dati dall'equazioni (1), e ponendo :

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mu' - 1 \equiv (\mu - 1)\delta - (\nu - 1)\gamma \\ \nu' - 1 \equiv (\nu - 1)\alpha - (\mu - 1)\beta \end{array}\right. \pmod{2}:$$

prendono la forma :

$$(4)\qquad (2m' + \mu' - 1)\frac{\omega}{2} + (2n' + \nu' - 1)\frac{\omega'}{2}.$$

Osservando che a cagione dell'equazione (2) non possono essere contemporaneamente numeri pari δ e γ, α e β, si ha:

$$(\delta + 1)(\gamma + 1) \equiv 0\,,\quad (\alpha + 1)(\beta + 1) \equiv 0 \pmod{2},$$

e le congruenze (3) possono scriversi :

$$(5)\qquad \begin{array}{l} \mu' \equiv \mu\delta + \nu\gamma + \delta\gamma \\ \nu' \equiv \nu\alpha + \mu\beta + \alpha\beta \end{array} \pmod{2}.$$

Ora le quantità (4) sono tutte le radici di $\theta_{\mu,\nu}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right)$; quindi :

$$(6)\qquad \theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega) = \varphi(z)\theta_{\mu',\nu'}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right),$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera che non ha radici finite.

Mutando z in $z + \omega$, abbiamo:

$$(-1)^{\alpha\nu+\beta\mu}\, e^{-\frac{\pi i\beta}{\Omega}(2z + \beta\Omega')}\, \theta_{\mu,\nu}(z + \Omega', \Omega) = (-1)^{\nu'}\, \theta_{\mu',\nu'}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right)\varphi(z + \omega).$$

Dividendo per la equazione (6), e osservando la seconda congruenza (5), e la prima dell'equazioni (1), si ottiene :

$$(7)\qquad \varphi(z + \omega) = e^{-\frac{\pi i\beta}{\Omega}(2z+\omega)}\,\varphi(z).$$

Mutando z in $z + \omega'$ nella equazione (6), si ha :

$$(-1)^{\gamma\nu+\delta\mu}\, e^{-\frac{\pi i\delta}{\Omega}(2z + \delta\Omega')}\, \theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega) = (-1)^{\mu'}\, e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\, \varphi(z + \omega')\theta_{\mu',\nu'}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right).$$

Dividendo per la equazione (6), e osservando la prima delle congruenze (5), e l'equazioni (1) e (2), si ottiene :

$$(8) \qquad \varphi(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i\beta\omega'}{\omega\Omega}(2z+\omega')}\varphi(z).$$

Ponendo :

$$\varphi(z) = e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}}\psi(z),$$

l'equazioni (7) e (8) danno :

$$\psi(z+\omega) = \psi(z), \qquad \psi(z+\omega') = \psi(z);$$

onde $\psi(z)$ essendo necessariamente una funzione intera, sarà una costante C, e avremo:

$$\theta_{\mu,\nu}(z,\Omega',\Omega) = Ce^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}}\theta_{\mu',\nu'}\left(z,\frac{\omega'}{\omega}\right).$$

Se $\mu\nu = 1$, sarà anche $\mu'\nu' = 1$, e dividendo per z e ponendo $z=0$, si ha $C=1$. Se $\mu\nu = 0$ sarà anche $\mu'\nu' = 0$, e ponendo $z=0$, si ha $C=1$. Dunque :

$$(9) \qquad \theta_{\mu,\nu}(z,\Omega'\,\Omega) = e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}}\theta_{\mu',\nu'}\left(z,\frac{\omega'}{\omega}\right).$$

Ponendo :

$$(10) \qquad \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{\Omega'}{\Omega}, \quad \theta_{1,1}\left(\frac{\Lambda}{2},\Lambda',\Lambda\right) = \theta_{1,0}\left(\frac{\Lambda}{2},\Lambda',\Lambda\right), \quad \frac{\Omega}{\Lambda} = M$$

avremo dall'equazioni (A) :

$$(11) \quad \left\{\begin{aligned} M\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) &= e^{-\frac{\pi\beta i z^2}{M\omega\Lambda}}\theta_{1,1}\left(z,\frac{\omega'}{\omega}\right), \\ \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{M},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) &= e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M\omega\Lambda}}\theta_{\mu',\nu'}\left(z,\frac{\omega'}{\omega}\right), \quad \mu\nu = \mu'\nu' = 0. \end{aligned}\right.$$

Per determinare M e il modulo λ delle prime funzioni per mezzo del modulo k delle seconde, poniamo nell'equazioni (11) :

$$z = \frac{\Omega}{2} = \frac{\delta\omega - \beta\omega'}{2}.$$

Dividendole una per l'altra, e osservando le congruenze (5) e l' equazioni (10), si ottiene :

$$(12) \qquad M = \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\delta\omega-\beta\omega'}{2},\frac{\omega'}{\omega}\right)}{\theta_{\delta(\gamma+1),\beta(\alpha+1)}\left(\frac{\delta\omega-\beta\omega'}{2},\frac{\omega'}{\omega}\right)}.$$

Poniamo poi nelle medesime equazioni (11):

$$z = \frac{\Omega + \Omega'}{2} = (\delta - \gamma)\frac{\omega}{2} + (\alpha - \beta)\frac{\omega'}{2}.$$

Dividendole una per l'altra, e osservando le congruenze (4), l'equazioni (10) e l'equazione (8) del numero 8, si ottiene:

$$(13) \qquad \lambda^2 = M^2 \frac{\theta^2_{\delta(\gamma+1),\, \beta(\alpha+1)}\left((\delta-\gamma)\frac{\omega}{2} + (\alpha-\beta)\frac{\omega'}{2},\ \frac{\omega'}{\omega}\right)}{\theta^2_{1,1}\left((\delta-\gamma)\frac{\omega}{2} + (\alpha-\beta)\frac{\omega'}{2},\ \frac{\omega'}{\omega}\right)}.$$

Considerando ora separatamente i sei casi distinti che possono darsi per i valori di α, β, γ, δ rispetto al modulo 2, e rammentando l'equazioni del numero 8, si ottiene:

1º Caso. $\alpha \equiv 1,\ \beta \equiv 1,\ \gamma \equiv 1,\ \delta \equiv 0$:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\theta_{1,1}\left(kz, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = k e^{-\frac{\pi i k \beta z^2}{\omega\Lambda}} \theta_{1,1}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ &\theta_{\mu,\nu}\left(kz, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i k \beta z^2}{\omega\Lambda}} \theta_{\mu,\mu+\nu+1}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ &\lambda^2 = \frac{1}{k^2}. \end{aligned} \right.$$

2º Caso. $\alpha \equiv 1,\ \beta \equiv 1,\ \gamma \equiv 1,\ \delta \equiv 0$:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\theta_{1,1}\left(ikz, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = ik e^{\frac{\pi k \beta z^2}{\omega\Lambda}} \theta_{1,1}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ &\theta_{\mu,\nu}\left(ikz, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{\frac{\pi k \beta z^2}{\omega\Lambda}} \theta_{\nu,\,\mu+\nu+1}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ &\lambda^2 = -\frac{k^2}{k}. \end{aligned} \right.$$

3º Caso. $\alpha \equiv 1,\ \beta \equiv 0,\ \gamma \equiv 1,\ \delta \equiv 1$:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &\theta_{1,1}\left(k'z, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = k' e^{-\frac{\pi i k' \beta z^2}{\omega\Lambda}} \theta_{1,1}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ &\theta_{\mu,\nu}\left(k'z, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i k' \beta z^2}{\omega\Lambda}} \theta_{\mu+\nu+1,\,\nu}\left(z, \frac{\omega'}{\omega}\right), \\ &\lambda^2 = -\frac{k^2}{k'^2}. \end{aligned} \right.$$

4° Caso. $\alpha \equiv 1,\ \beta \equiv 0,\ \gamma \equiv 0,\ \delta \equiv 1$:

$$(17)\quad \begin{cases} \theta_{1,1}\left(z, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\omega\Lambda}}\,\theta_{1,1}\left(z, \dfrac{\omega'}{\omega}\right), \\ \theta_{\mu,\nu}\left(z, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\omega\Lambda}}\,\theta_{\mu,\nu}\left(z, \dfrac{\omega'}{\omega}\right), \\ \lambda^2 = k^2. \end{cases}$$

5° Caso. $\alpha \equiv 0,\ \beta \equiv 1,\ \gamma \equiv 1,\ \delta \equiv 1$:

$$(18)\quad \begin{cases} \theta_{1,1}\left(k'z, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = k'e^{-\frac{\pi i k'\beta z^2}{\omega\Lambda}}\,\theta_{1,1}\left(z, \dfrac{\omega'}{\omega}\right), \\ \theta_{\mu,\nu}\left(k'z, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i k'\beta z^2}{\omega\Lambda}}\,\theta_{\mu+\nu+1,\mu}\left(z, \dfrac{\omega'}{\omega}\right). \\ \lambda^2 = -\dfrac{1}{k^2}. \end{cases}$$

6° Caso. $\alpha \equiv 0,\ \beta \equiv 1,\ \gamma \equiv 1,\ \delta \equiv 0$:

$$(19)\quad \begin{cases} \theta_{1,1}\left(iz, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = ie^{\frac{\pi\beta z^2}{\omega\Lambda}}\,\theta_{1\,1}\left(z, \dfrac{\omega'}{\omega}\right), \\ \theta_{\mu,\nu}\left(iz, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{\frac{\pi\beta z^2}{\omega\Lambda}}\,\theta_{\nu,\mu}\left(z, \dfrac{\omega'}{\omega}\right), \\ \lambda^2 = k'^2. \end{cases}$$

17.

Passiamo ora alle trasformazioni di secondo ordine, cioè determiniamo le relazioni che esistono tra le funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega)$ e $\theta_{\mu,\nu}(z)$, quando è :

$$(1)\qquad \omega = \alpha\Omega + \beta\Omega', \qquad \omega' = \gamma\Omega + \delta\Omega';$$

$$(2)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 2.$$

La funzione $\theta_{1,1}(z, \Omega', \Omega)$ ha per radici tutte le quantità della forma :

$$(3)\qquad m\Omega + n\Omega' = (m\delta - n\gamma)\frac{\omega}{2} + (n\alpha - m\beta)\frac{\omega'}{2}.$$

Se prendiamo per r ed s i valori 0 od 1, non ambedue eguali a zero, che sodisfano alle congruenze :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} r\alpha + s\gamma \equiv 0 \\ r\beta + s\delta \equiv 0 \end{array} \right. (\text{mod. } 2) ,$$

il che è sempre possibile a cagione della (2), e indichiamo con ε zero o l'unità; avremo contemporaneamente :

$$\begin{array}{l} m\delta - n\gamma \equiv \varepsilon r \\ n\alpha - m\beta \equiv \varepsilon s \end{array} (\text{mod. } 2) ,$$

e le quantità (3) prenderanno tutte la forma :

$$(5) \qquad m'\omega + n'\omega' + \varepsilon\left(\frac{r\omega + s\omega'}{2}\right).$$

Ora le quantità (5) sono evidentemente tutte le radici della funzione intera

$$\theta_{1,1}(z)\ \theta_{1+r,\,1+s}(z) ;$$

dunque avremo :

$$\theta_{1,1}(z, \Omega', \Omega) = \varphi(z)\ \theta_{1,1}(z)\ \theta_{1+r,\,1+s}(z) ,$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera che non ha radici finite.

Osservando l'equazioni caratteristiche di $\theta_{1,1}(z)$, e le congruenze :

$$\begin{array}{l} \alpha\beta + \alpha + \beta + s \equiv 0 \\ \gamma\delta + \gamma + \delta + r \equiv 0 \end{array} (\text{mod. } 2) ;$$

che sono conseguenza delle congruenze (4) e dell'equazione (2), ottengo per determinare $\varphi(z)$ l'equazioni :

$$\varphi(z + \omega) = e^{-\frac{\pi i\beta\omega}{\omega\Omega}(2z+\omega)}\varphi(z) , \qquad \varphi(z + \omega') = e^{-\frac{\pi i\beta\omega'}{\omega\Omega}(2z+\omega')}\varphi(z) ,$$

dalle quali deduco nel solito modo :

$$\varphi(z) = Ce^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}} ;$$

onde :

$$\theta_{1,1}(z, \Omega', \Omega) = Ce^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}}\ \theta_{1,1}(z)\ \theta_{1+r,\,1+s}(z) .$$

Dividendo per z, e facendo $z = 0$, ottengo $C = 1$. Quindi :

$$(6) \qquad \theta_{1,1}(z, \Omega', \Omega) = e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}}\ \theta_{1,1}(z)\ \theta_{1+r,\,1+s}(z).$$

Poniamo :

$$(7) \qquad \frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{\Lambda'}{\Lambda} , \ \frac{\Omega}{\Lambda} = M , \qquad \theta_{1,1}\left(\frac{\Lambda}{2} , \Lambda', \Lambda\right) = \theta_{1,0}\left(\frac{\Lambda}{2} , \Lambda', \Lambda\right) ,$$

ed avremo dall'equazioni (A) del numero **16** :

$$(8)\qquad M\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M\omega\Lambda}}\,\theta_{1,1}(z)\,\theta_{1+r,\,1+s}(z).$$

Le radici della funzione intera $\theta_{1,0}(z,\Omega',\Omega)$ sono evidentemente tutte le quantità della forma :

$$(9)\qquad m\Omega+n\Omega'+\frac{\Omega'}{2}=(m\delta-n\gamma)\frac{\omega}{2}+(n\alpha-m\beta)\frac{\omega'}{2}+\frac{\alpha}{4}\omega'-\frac{\gamma}{4}\omega.$$

1° Caso. Se $\alpha\equiv\gamma\equiv0$ (mod. 2) le quantità (9) hanno la forma :

$$m'\omega+n'\omega'+\varepsilon\left(\frac{r\omega+s\omega'}{2}\right)+\frac{\alpha}{2}\,\frac{\omega'}{2}-\frac{\gamma}{2}\,\frac{\omega}{2},$$

dove r, s ed ε hanno il significato che loro abbiamo dato precedentemente. Quindi si dimostra in modo analogo la equazione :

$$(10)\qquad \theta_{1,0}(z,\Omega',\Omega)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\omega\Omega}}\,\theta_{1+\frac{\gamma}{2},\,1+\frac{\alpha}{2}}(z)\,\theta_{1+\frac{\gamma}{2}+r,\,1+\frac{\alpha}{2}+s}(z),$$

e per le equazioni (7) :

$$(11)\qquad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{M},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M\omega\Lambda}}\,\theta_{1+\frac{\gamma}{2},\,1+\frac{\alpha}{2}}(z)\,\theta_{1+\frac{\gamma}{2}+r,\,1+\frac{\alpha}{2}+s}(z).$$

2° Caso. Se $\alpha\equiv1$, $\gamma\equiv0$ sarà $\delta\equiv0$ (mod. 2), e le quantità (9), ponendo $\frac{\gamma}{2}=\varepsilon$, avranno tutte la forma :

$$(12)\qquad m'\omega+n'\omega'+\varepsilon\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega'}{4}.$$

Ora dall'equazione (7) del numero **11**, ponendo mente all'equazioni (18) e (19) del numero 7, abbiamo :

$$\frac{\theta^2_{1,1}\left(\pm\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(\pm\frac{\omega'}{4}\right)}=\pm\frac{1}{k}=-\frac{\theta^2_{0,1}\left(\pm\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{0,0}\left(\pm\frac{\omega'}{4}\right)}=-\frac{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega'}{4}\right)};$$

onde :

$$\frac{\theta^2_{1,1}\left(m'\omega+n'\omega'+\varepsilon\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(m'\omega+n'\omega'+\varepsilon\frac{\omega}{2}\pm\frac{\omega'}{4}\right)}=(-1)^{\varepsilon}\frac{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega'}{4}\right)},$$

e le quantità (12) sono tutte radici della funzione intera:

$$\theta^2_{1,0}(z) - (-1)^{\varepsilon} \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega'}{4}\right)} \theta^2_{1,1}(z),$$

e quindi potremo dimostrare nel solito modo, l'equazione :

$$(13) \qquad \theta_{1,0}(z, \Omega', \Omega) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\omega\Omega}} \left\{ \theta^2_{1,0}(z) - (-1)^{\varepsilon} \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega'}{4}\right)} \theta^2_{1,1}(z) \right\},$$

e per le posizioni (7) :

$$(14) \qquad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{M}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{M\omega\Omega}} \left\{ \theta^2_{1,0}(z) - (-1)^{\varepsilon} \frac{\theta^2_{1,0}\left(\frac{\omega'}{4}\right)}{\theta^2_{1,1}\left(\frac{\omega'}{4}\right)} \theta^2_{1,1}(z) \right\}.$$

3.° Caso. Se $\alpha \equiv 0$, $\gamma \equiv 1$ sarà $\beta \equiv 0$ (mod. 2), e le quantità (9), ponendo $\frac{\alpha}{2} = \varepsilon$, prenderanno la forma :

$$(15) \qquad m'\omega + n'\omega + \varepsilon\frac{\omega'}{2} \pm \frac{\omega}{4}.$$

Ora dall'equazione (8) del numero 11, si ricava :

$$\frac{\theta^2_{1,1}\left(\varepsilon\frac{\omega'}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(\varepsilon\frac{\omega'}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right)} = \frac{1}{1 + k'};$$

onde :

$$\frac{\theta^2_{1,1}\left(m'\omega + n'\omega' + \varepsilon\frac{\omega'}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right)}{\theta^2_{1,0}\left(m'\omega + n'\omega' + \varepsilon\frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right)} = \frac{1}{1 \pm k'},$$

e quindi le quantità (15) sono tutte radici della funzione intera :

$$\theta^2_{1,0}(z) - (1 \pm k')\, \theta^2_{1,1}(z),$$

e si dimostra nel modo solito :

$$(16) \qquad \theta_{1,0}(z, \Omega', \Omega) = \theta_{1,0}\left(\frac{z}{M}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{M\omega\Lambda}} \left[\theta^2_{1,0}(z) - (1 \pm k')\theta^2_{1,1}(z)\right].$$

4.° Caso. Se $\alpha \equiv \gamma \equiv 1$ (mod. 2) sarà $\beta \equiv \delta \equiv \varepsilon$, e le quantità (9) avranno tutte la forma :

$$(17) \qquad m'\omega + n'\omega' \pm \left(\frac{\omega}{4} - (-1)^{\varepsilon}\frac{\omega'}{4}\right).$$

Ma dall'equazione (9) del numero 11, si ottiene :

$$\frac{\theta^2_{1,1}\left[\pm\left(\frac{\omega}{4} - (-1)^{\varepsilon}\frac{\omega'}{4}\right)\right]}{\theta^2_{1,0}\left[\pm\left(\frac{\omega}{4} - (-1)^{\varepsilon}\frac{\omega'}{4}\right)\right]} = 1 \pm \frac{ik'}{k},$$

onde :

$$\frac{\theta^2_{1,1}\left[m'\omega + n'\omega' \pm \left(\frac{\omega}{4} - (-1)^{\varepsilon}\frac{\omega'}{4}\right)\right]}{\theta^2_{1,0}\left[m'\omega + n'\omega' \pm \left(\frac{\omega}{4} - (-1)^{\varepsilon}\frac{\omega'}{4}\right)\right]} = 1 \pm \frac{ik'}{k},$$

e le quantità (17) sono tutte radici della funzione intera :

$$\theta^2_{1,0}(z) - \frac{k}{k \pm ik'}\,\theta^2_{1,1}(z),$$

e quindi si dimostra nel solito modo :

$$(18) \qquad \theta_{1,0}(z, \Omega', \Omega) = \theta_{1,0}\left(\frac{z}{M}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi\beta i z^2}{M\omega\Lambda}}\left(\theta^2_{1,0}(z) - \frac{k}{k \pm ik'}\,\theta^2_{1,1}(z)\right).$$

Le relazioni delle altre due funzioni $\theta_{0,1}(z, \Omega', \Omega)$, $\theta_{0,0}(z, \Omega', \Omega)$ con le $\theta_{\mu,\nu}(z)$ si possono ottenere in modo analogo, oppure si possono dedurre da quelle, ottenute per le due funzioni $\theta_{1,1}$, $\theta_{1,0}$.

Per la determinazione del moltiplicatore M e del modulo λ della funzione trasformata ci limiteremo ai soli casi ai quali si riducono come vedremo tutti gli altri (num. 19).

Sia $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 2$; avremo $s = 1$, $r = 0$, $\varepsilon = 0$, e quindi

$$(19) \qquad M\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = \theta_{1,1}(z)\,\theta_{1,0}(z), \qquad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{M}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = \theta^2_{1,0}(z) + k\theta^2_{1,1}(z).$$

Pongo $z = \frac{\omega}{2} = \frac{M\Lambda}{2}$, divido queste equazioni una per l'altra, e ponendo mente all'equazioni (1) e (3) del numero 9, ottengo :

$$(20) \qquad M = \frac{1}{1+k}, \quad \frac{M}{\sqrt{\lambda'}} = \frac{1}{k'}$$

onde :

$$(21) \qquad \lambda' = \frac{1-k}{1+k}, \quad \lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

*

Sia $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$; avremo $r = 1$, $s = 0$,

$$(22) \qquad M\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = \theta_{1,1}(z)\,\theta_{0,1}(z), \qquad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{M}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = \theta_{1,0}^2(z)\,\theta_{0,0}(z)\;;$$

quindi, a cagione della equazione (10) del numero 11 :

$$\theta_{1,0}^2\left(\frac{z}{M}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) - k^2M^2\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = \theta_{0,0}(2z).$$

Pongo $z = \frac{\omega}{4} = \frac{\Lambda M}{2}$, ho :

$$(23) \qquad \frac{1 - k^2M}{\lambda'} = \sqrt{k'}.$$

Fo $x = \frac{\omega'}{2} = \frac{\Lambda' M}{2}$ ed osservando che si ha $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{2\omega'}{\omega}$, dalla prima dell' equazioni (22) ottengo :

$$(24) \qquad \frac{M}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{k}.$$

Dall'equazioni (23), e (24) si ricava :

$$(25) \qquad M = \frac{1}{1 + k'}, \qquad\qquad (26) \qquad \lambda = \frac{1 - k'}{1 + k'}.$$

18.

Determiniamo ora le trasformazioni di ordine primo dispari p; cioè essendo :

$$(1) \qquad \omega = \alpha\Omega + \beta\Omega', \qquad \omega' = \gamma\Omega + \delta\Omega';$$

$$(2) \qquad \alpha\delta = \beta\gamma = p\;;$$

p numero primo dispari qualunque, cerchiamo la relazione che esiste tra la funzione $\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega)$, e le funzioni $\theta_{\mu,\nu}(z)$.

Le radici della funzione $\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega)$ sono tutte e sole le quantità :

$$(3) \qquad (2m + \mu - 1)\frac{\Omega}{2} + (2n + \nu - 1)\frac{\Omega'}{2}$$

$$= \Big((2m + \mu - 1)\delta - (2n + \nu - 1)\gamma\Big)\frac{\omega}{2p} + \Big((2n+\nu-1)\alpha - (2m+\mu-1)\beta\Big)\frac{\omega'}{2p}.$$

Se prendiamo per r ed s i valori minori di μ, ma ambedue non eguali a zero contemporaneamente, che sodisfano alle congruenze :

$$(4) \qquad \begin{cases} r\alpha + s\gamma \equiv 0 \\ r\beta + s\delta \equiv 0 \end{cases} \pmod{p},$$

il che è sempre possibile a cagione dell'equazione (2), e indichiamo con t' un numero intero minore di p, avremo:

$$\left.\begin{aligned} m\delta - n\gamma &\equiv t'r \\ n\alpha - m\beta &\equiv t's \end{aligned}\right\} \pmod{p};$$

ed essendo t'' un numero intero minore di p, sarà:

$$(\mu-1)\delta-(\nu-1)\gamma=(2l+\mu'-1)p+2t''r$$

$$(\nu-1)\alpha-(\mu-1)\beta=(2l'+\nu'-1)p+2t''s;$$

e quindi le quantità (3) prendono tutte la forma:

$$(5)\qquad m'\omega+n'\omega'+t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)+\frac{(\mu'-1)\omega+(\nu'-1)\omega'}{2},$$

dove:

$$\left.\begin{aligned} \mu'-1 &\equiv (\mu-1)\delta-(\nu-1)\gamma \\ \nu'-1 &\equiv (\nu-1)\alpha-(\mu-1)\beta \end{aligned}\right\} \pmod{2};$$

ossia:

$$(6)\qquad \left.\begin{aligned} \mu' &\equiv \delta\mu+\nu\gamma+\gamma\delta \\ \nu' &\equiv \nu\alpha+\mu\beta+\alpha\beta \end{aligned}\right\} \pmod{2};$$

e per t bisogna prendere tutti i p residui differenti rispetto al modulo p.

Ora le quantità (5) sono tutte le radici anche della funzione intera:

$$\prod_{0}^{p-1}{}_t\, \theta_{\mu',\nu'}\left[z+t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)\right],$$

quindi avremo:

$$(7)\qquad \theta_{\mu,\nu}(z,\Omega',\Omega)=\varphi(z)\prod_{0}^{p-1}{}_t\, \theta_{\mu',\nu'}\left[z+t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)\right]$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione intera che non ha radici finite.

Mutando z in $z+\omega$ nella equazione (7), ottengo:

$$(-1)^{\nu\alpha+\mu\beta}e^{-\frac{\pi i\beta}{\Omega}(2z+\beta\Omega')}\theta_{\mu,\nu}(z,\Omega',\Omega)=(-1)^{\nu'}\varphi(z+\omega)\prod_{0}^{p-1}{}_t\, \theta_{\mu',\nu'}\left[z+t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)\right].$$

Dividendo per la (7), e osservando la seconda congruenza (6) e l'equazioni (1), si ottiene:

$$(8)\qquad \varphi(z+\omega)=e^{-\frac{\pi i\beta\omega}{\omega\Omega}(2z+\omega)}\varphi(z).$$

Mutando z in $z+\omega'$ la equazione (7) diviene:

$$(-1)^{\nu\gamma+\mu\delta}e^{-\frac{\pi i\delta}{\Omega}(2z+\delta\Omega')}\theta_{\mu,\nu}(z,\Omega',\Omega)$$

$$=(-1)^{\mu'}e^{-\frac{\pi i p}{\omega}\left[2z+(p-1)\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)+\omega'\right]}\varphi(z+\omega')\prod_{0}^{p-1}\theta_{\mu',\nu'}\left[z+t\left(\frac{r\omega+s\omega'}{p}\right)\right];$$

onde :

$$\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega) = e^{\frac{\pi i \beta \omega'}{\omega\Omega}(2z+\omega') - (p-1)\frac{\pi i s \omega'}{\omega}} \varphi(z+\omega') \prod_{0}^{p-1} \theta_{\mu',\nu'}\left[z + t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]$$

e dividendo per la equazione (7) :

$$(9) \qquad \varphi(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i \beta \omega'}{\omega\Omega}(2z+\omega') + (p-1)\frac{\pi i s \omega'}{\omega}}.$$

Ponendo :

$$\varphi(z) = e^{-\frac{\pi i \beta z^2}{\omega\Omega} + \frac{(p-1)\pi i s z}{\omega}} \psi(z),$$

si ha dall'equazioni (8) e (9) :

$$\psi(z+\omega) = \psi(z), \qquad \psi(z+\omega') = \psi(z),$$

onde $\psi(z)$, essendo funzione intera, per il teorema 4 del n.° 3, sarà una costante C, e quindi :

$$\theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega) = Ce^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\Omega} - (p-1)sz\right)} \prod_{0}^{p-1}{}_t\, \theta_{\mu',\nu'}\left[z + t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right].$$

Se $\mu\nu \equiv \mu'\nu' \equiv 1$, divido per z e pongo $z = 0$, se $\mu\nu \equiv \mu'\nu' \equiv 0$ pongo $z = 0$, ed ho:

$$\frac{1}{C} = \prod_{1}^{p-1}{}_t\, \theta_{\mu',\nu'}\left[t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right];$$

dunque finalmente :

$$(10) \qquad \theta_{\mu,\nu}(z, \Omega', \Omega) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\Omega} - (p-1)sz\right)} \prod_{0}^{p-1}{}_t \frac{\theta_{\mu',\nu'}\left[z + t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]}{\prod_{1}^{p-1}{}_t\, \theta_{\mu',\nu'}\left[t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]}.$$

Pongo :

$$(11) \qquad \frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{\Lambda'}{\Lambda}, \ \frac{\Omega}{\Lambda} = \mathrm{M}, \qquad \theta_{1,1}\left(\frac{\Lambda}{2}, \Lambda', \Lambda\right) = \theta_{1,0}\left(\frac{\Lambda}{2}, \Lambda', \Lambda\right),$$

ed ho :

$$(12) \quad \mathrm{M}\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\mathrm{M}\Lambda} - (p-1)sz\right)} \prod_{0}^{p-1}{}_t \frac{\theta_{1,1}\left[z + t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]}{\prod_{1}^{p-1}{}_t\, \theta_{1,1}\left[t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]},$$

$$(13) \qquad \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\mathrm{M}\Lambda} - (p-1)sz\right)} \prod_{0}^{p-1}{}_t \frac{\theta_{\mu',\nu'}\left[z + t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]}{\theta_{\mu',\nu'}\left[t\left(\frac{r\omega + s\omega'}{p}\right)\right]};$$

$$\mu\nu \equiv \mu'\nu' \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2).$$

Qualunque siano i numeri interi α, β, γ, δ e in conseguenza i numeri r ed s, le trasformazioni differenti di ordine primo dispari p non possono essere in numero maggiore di $p+1$.

Infatti è facile a vedersi che quando $s=0$, sono identici i secondi membri delle equazioni (12) e (13) qualunque siano i valori di r, e che quando s è differente da zero sono identiche tutte quelle trasformazioni per le quali lo stesso valore di σ rende:

$$(a) \qquad s\sigma \equiv r \pmod{p}.$$

Quindi, quando è sodisfatta questa congruenza ponendo :

$$\varpi_\sigma = \frac{\omega' + \sigma\omega}{p},$$

e quando $s=0$:

$$\varpi_\infty = \frac{\omega}{p},$$

avremo soltanto $p+1$ trasformazioni differenti corrispondenti ai p valori di σ eguali ai differenti residui rispetto al modulo p, e a $\sigma = \infty$.

Le formule (12) e (13) divengono :

$$(14) \qquad \mathrm{M}_\sigma\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\mathrm{M}\Lambda} - p - 1\right)} \frac{\prod_0^{p-1}{}_t\,\theta_{1,1}(z + t\varpi_\sigma)}{\prod_1^{p-1}{}_t\,\theta_{1,1}(t\varpi_\sigma)},$$

$$(15) \qquad \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \frac{\Lambda_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right) = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(\frac{\beta z^2}{\mathrm{M}_\sigma\Lambda_\sigma} - (p-1)z\right)} \prod_0^{p-1}{}_t \frac{\theta_{\mu',\nu'}(z + t\omega_\sigma)}{\theta_{\mu',\nu'}(t\varpi_\sigma)},$$

$$(16) \qquad \mathrm{M}_\infty\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\infty}, \frac{\Lambda'_\infty}{\Lambda_\infty}\right) = e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\mathrm{M}_\infty\omega\Lambda_\infty}} \frac{\prod_0^{p-1}{}_t\,\theta_{1,1}(z + t\varpi_\infty)}{\prod_1^{p-1}{}_t\,\theta_{1,1}(t\varpi_\infty)},$$

$$(17) \qquad \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\infty}, \frac{\Lambda'_\infty}{\Lambda_\infty}\right) = e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{\mathrm{M}_\infty\omega\Lambda_\infty}} \prod_0^{p-1}{}_t \frac{\theta_{\mu',\nu'}(z + t\varpi_\sigma)}{\theta_{\mu',\nu'}(t\varpi_\sigma)}.$$

Queste formule possono trasformarsi in modo che contengano nel secondo membro soltanto razionalmente funzioni Jacobiane tutte dello stesso argomento z.

Infatti, l'equazioni caratteristiche delle $\theta_{\mu,\nu}$ danno :

$$\frac{\theta_{\mu,\nu}[z+(p-t)\varpi_\sigma]}{\theta_{\mu,\nu}[(p-t)\varpi_\sigma]}=(-1)^{\mu\nu}e^{-\frac{2\pi iz}{\omega}}\frac{\theta_{\mu,\nu}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta_{\mu,\nu}(t\varpi_\sigma)},$$

$$\frac{\theta_{\mu,\nu}[z+(p-t)\varpi_\infty]}{\theta_{\mu,\nu}[(p-t)\varpi_\infty]}=(-1)^{\mu\nu}\frac{\theta_{\mu,\nu}(z-t\varpi_\infty)}{\theta_{\mu,\nu}(t\varpi_\infty)};$$

quindi sostituendo nei secondi membri delle formule (14), (15), (16) e (17) ai fattori nei quali $t>\frac{p-1}{2}$ i valori dati da queste equazioni, abbiamo per qualunque valore di σ:

$$(18)\quad M_\sigma\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M_\sigma},\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M_\sigma\omega\Lambda_\sigma}}\theta_{1,1}(z)\prod_{t=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\theta_{1,1}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{1,1}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)},$$

$$(19)\quad \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{M_\sigma},\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M_\sigma\omega\Lambda_\sigma}}\theta_{\mu',\nu'}(z)\prod_{t=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\theta_{\mu',\nu'}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{\mu',\nu'}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{\mu',\nu'}(t\varpi_\sigma)}.$$

Ma dall'equazioni (6) del numero 11, si ha:

$$\frac{\theta_{1,1}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{1,1}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)}=\frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi^\sigma)}\theta^2_{1,1}(z)-\theta^2_{1,0}(z),$$

$$\frac{\theta_{1,0}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{1,0}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}=\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z),$$

$$\frac{\theta_{0,1}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{0,1}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}=\theta^2_{1,0}(z)-\frac{\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z),$$

$$\frac{\theta_{0,0}(z+t\varpi_\sigma)\,\theta_{0,0}(z-t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}=\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z):$$

onde l'equazioni (18) e (19) daranno:

$$(20)\quad M_\sigma\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M_\sigma},\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M_\sigma\omega\Lambda_\sigma}}\theta_{1,1}(z)\prod_{t=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\theta^2_{1,0}(z)-\frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z)\right),$$

$$(21)\quad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma},\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M_\sigma\omega\Lambda_\sigma}}\theta_{1,0}(z)\prod_{t=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z)\right),$$

$$(22)\quad \theta_{0,1}\left(\frac{z}{M_\sigma},\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M_\sigma\omega\Lambda_\sigma}}\theta_{0,1}(z)\prod_{t=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\theta^2_{1,0}(z)-\frac{\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z)\right),$$

$$(23)\quad \theta_{0,0}\left(\frac{z}{M_\sigma},\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}\right)=e^{-\frac{\pi i\beta z^2}{M_\sigma\omega\Lambda_\sigma}}\theta_{0,0}(z)\prod_{t=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\theta^2_{1,0}(z)-k^2\frac{\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{0,0}(l\varpi_\sigma)}\theta^2_{1,1}(z)\right).$$

19.

Prima di passare alla determinazione del moltiplicatore M_σ e del modulo λ_σ delle funzioni Jacobiane trasformate, converrà osservare che relativamente ai valori di α, β, γ e δ basta limitarsi a due soli casi distinti, come risulta dal seguente teorema:

Ogni trasformazione di ordine primo p equivale a due trasformazioni successive, una di primo ordine, e l'altra della forma :

$$(1) \qquad \omega = \Omega \,, \qquad \omega' = \rho\Omega + p\Omega' \,,$$

oppure della forma :

$$(2) \qquad \omega = p\Omega \,, \qquad \omega' = \Omega' .$$

Infatti, sia una trasformazione qualunque di ordine primo p :

$$(3) \qquad \omega = \alpha\Omega + \beta\Omega' \,, \qquad \omega' = \gamma\Omega + \delta\Omega' ,$$

$$(4) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = p.$$

Essendo p un numero primo, α e β o saranno primi tra loro, o avranno p per massimo comun divisore.

Se α e β sono primi tra loro, potrà risolversi in numeri interi, rispetto a γ' e δ' l'equazione :

$$\alpha\delta' - \beta\gamma' = 1 \,,$$

e quindi γ e δ avranno la forma :

$$\gamma = \gamma' p + \rho\alpha \,, \qquad \delta = \delta' p + \rho\beta \,,$$

essendo ρ un intero qualunque $< p$, che sodisfarà le due congruenze :

$$(5) \qquad \rho\alpha - \gamma \equiv 0 \,, \qquad \rho\beta - \delta \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ora è chiaro che le due trasformazioni successive, la prima di prim'ordine :

$$\omega_1 = \alpha\Omega + \beta\Omega' , \qquad \omega'_1 = \gamma'\Omega + \delta'\Omega' ;$$

la seconda di ordine p e della forma :

$$\omega = \omega_1 \,, \qquad \omega' = \rho\omega_1 + p\omega'_1$$

equivarranno alla unica trasformazione (3).

Se α e β hanno per massimo comun divisore il numero p, sarà :

$$\alpha = p\alpha' \,, \qquad \beta = p\beta' \,, \qquad \alpha'\delta - \beta'\gamma = 1 \,,$$

e le due trasformazioni successive :

$$\omega_1 = \alpha'\Omega + \beta'\Omega' \,, \qquad \omega'_1 = \gamma\Omega + \delta\Omega'$$

di primo ordine , e :

$$\omega = p\omega_1\,, \qquad \omega' = \omega'_1\,,$$

di ordine p, equivarranno alla unica trasformazione (3).

Dunque nelle trasformazioni di ordine primo p, relativamente ai valori di α, β, γ e δ basterà limitarsi ai soli casi seguenti:

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma < p, \qquad \delta = p\,,$$
$$\alpha = p\,, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0, \qquad \delta = 1.$$

Confrontando le congruenze (4) ed (a) del numero precedente colle congruenze (5) abbiamo:

$$(6) \qquad \rho \equiv -\sigma \pmod{p},$$

e le congruenze (6) del numero precedente danno:

$$\mu' \equiv \mu\,, \quad \nu' \equiv \nu \pmod{2}.$$

Poniamo nelle formule (18) e (19) del numero precedente:

$$z = \frac{\omega}{2}.$$

Per la trasformazione (1) avremo:

$$z = \frac{\Lambda_\sigma M_\sigma}{2}\,,$$

e per la trasformazione (2):

$$z = \frac{p\Lambda_\infty M_\infty}{2}.$$

Quindi dividendo l'equazione (18) per la (19) in cui sia posto $\mu = \mu' = 1$, $\nu = \nu' = 0$, avremo:

$$M_\sigma = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)} \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} + t\varpi_\sigma\right)\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} - t\varpi_\sigma\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2} + t\varpi_\sigma\right)\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2} - t\varpi_\sigma\right)}\,,$$

$$M_\infty = \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\infty)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\infty)} \frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} + t\varpi_\infty\right)\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} - t\varpi_\infty\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2} + t\varpi_\infty\right)\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2} - t\varpi_\infty\right)}\,;$$

ed essendo:

$$\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\omega}{2} \pm x\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\omega}{2} \pm x\right)} = \frac{\theta_{0,1}(x)}{\theta_{0,0}(x)}\,,$$

sarà :

$$(7) \qquad M_\sigma = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)\,\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)\,\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)},$$

$$(8) \qquad M_\infty = \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\infty)\,\theta^2_{0,1}(t\varpi_\infty)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\infty)\,\theta^2_{0,0}(t\varpi_\infty)}.$$

Poichè il segno del moltiplicatore non muta le formule (18) e (19) del numero precedente quando $\beta = 0$, potremo per uniformità prendere :

$$M_\infty = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{\Omega_\infty}{\Lambda_\infty},$$

e così avremo M dato sempre dalla medesima formula :

$$(9) \qquad M_\sigma = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^2_{1,0}(t\varpi_\sigma)\,\theta^2_{0,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^2_{1,1}(t\varpi_\sigma)\,\theta^2_{0,0}(t\varpi_\sigma)}.$$

Ponendo nella equazione (19) del numero precedente $\mu = 0$, $\nu = 0$, e quindi $\mu = 1$, $\nu = 0$, dividendo l'una per l'altra l'equazioni ottenute, e osservando la equazione (13) del numero 8, abbiamo :

$$(10) \qquad \lambda'^2_\sigma = k'^p \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^8_{1,0}(t\varpi_\sigma)}{\theta^8_{0,0}(t\varpi_\sigma)}.$$

Prendendo nell'equazioni (18) e (19) dove $\mu = 0$, $\nu = 1$:

$$z = \frac{\omega + \omega'}{2}$$

e quindi :

$$z = \frac{pM_\sigma \Lambda'_\sigma + (\rho + 1) M_\sigma \Lambda_\sigma}{2}, \qquad z = \frac{M_\sigma \Lambda'_\infty + p\Lambda_\infty M_\infty}{2},$$

dividendo l'equazioni ottenute una per l'altra, osservando l'equazione (8) del numero 8, e prendendo ρ pari, si ottiene :

$$(11) \qquad \lambda^2_\sigma = k^{2p} \prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\theta^8_{0,1}(t\varpi_\sigma)}{\theta^8_{0,0}(t\varpi_\sigma)}.$$

Il moltiplicatore M_σ, e i moduli λ_σ e λ'_σ della funzione trasformata si possono esprimere facilmente per mezzo della quantità $q = e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}}$.

Infatti riprendiamo dalle formule (6), (8) e (12) del numero 8, e ricaviamo dalle formule (16) del numero 10 i valori di ω, k e k' espressi per la quantità q :

*

$$(12)\qquad \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} = \prod_{1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n-1})\,(1-q^{2n})}{(1-q^{2n-1})\,(1+q^{2n})} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2},$$

$$(13)\qquad \sqrt{k} = 2^{4}\, q \prod_{1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n})^2}{1+q^{2n-1})^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}},$$

$$(14)\qquad \sqrt{k'} = \prod_{1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n-1})^2}{(1+q^{2n-1})^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m^2}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}}.$$

Ora se poniamo :

$$q_\sigma = e^{\frac{\pi i \Omega'_\sigma}{\Omega_\sigma}} = e^{\frac{\pi i \Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}}$$

sarà :

$$q_\sigma = e^{\pi i \left(\frac{\omega'}{p\omega} + \frac{\sigma}{p}\right)} = q^{\frac{1}{p}} \alpha^{\frac{\sigma}{2}}, \qquad q_\infty = e^{\pi i \frac{p\omega'}{\omega}} = q^p$$

essendo α una radice immaginaria p^{esima} dell'unità; ed essendo σ un numero pari, e quindi $\frac{\sigma}{2}$ un intero h, avremo che i valori di q per le funzioni Jacobiane trasformate saranno della forma q^p e $\alpha^h\, q^{\frac{1}{p}}$, quindi :

$$(15)\qquad \sqrt{\frac{\Lambda_\sigma}{\pi}} = \prod_{1}^{\infty} \frac{(1+q^{\frac{(2n-1)}{p}}\alpha^{(2n-1)h})^2\,(1-q^{\frac{2n}{p}}\alpha^{2nh})^2}{(1-q^{\frac{2n-1}{p}}\alpha^{(2n-1)h})^2\,(1+q^{\frac{2n}{p}}\alpha^{2nh})^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{m^2}{p}}\alpha^{m^2h},$$

$$(16)\qquad \sqrt{\frac{\Lambda_\infty}{\pi}} = \prod_{1}^{\infty} \frac{(1+q^{(2n-1)p})^2\,(1-q^{2np})^2}{(1-q^{(2n-1)p})^2\,(1+q^{2np})^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2p},$$

$$(17)\qquad \sqrt{\lambda_\sigma} = 2\sqrt[4]{q^{\frac{1}{p}}}\,\alpha^h \prod_{1}^{\infty} \frac{(1+q^{\frac{2n}{p}}\alpha^{2nh})^2}{(1+q^{\left(\frac{2n-1}{p}\right)}\alpha^{(2n-1)h})^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{p}\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}\alpha^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2h}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{m^2}{p}}\alpha^{m^2h}},$$

$$(18)\qquad \sqrt{\lambda_\infty} = 2\sqrt[4]{q^p} \prod_{1}^{\infty} \frac{(1+q^{2\;p})^2}{(1+q^{(2n-1)p})^2} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2p}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2p}},$$

$$(19)\qquad \sqrt{\lambda'_\sigma} = \prod_1^\infty \frac{\left(1 - q^{\left(\frac{2n-1}{p}\right)}\alpha^{(2n-1)h}\right)^2}{\left(+ q^{\frac{2n-1}{p}}\alpha^{(2n-1)h}\right)^2} = \frac{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} (q-1)^m q^{\frac{m^2}{p}} \alpha^{m^2 h}}{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{m^2}{p}} \alpha^{m^2 h}},$$

$$(20)\qquad \sqrt{\lambda'_\infty} = \prod_1^\infty \frac{(1 - q^{(2n-1)p})^2}{(1 + q^{(2n-1)p})^2} = \frac{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m^2 p}}{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} q^{m^2 p}}.$$

I moltiplicatori M_σ saranno dati dalle formule :

$$M_\sigma = \frac{\Omega_\sigma}{\Lambda_\sigma} = \frac{\omega}{\Lambda_\sigma}, \qquad M_\infty = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{\Omega_\infty}{\Lambda_\infty} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{\omega}{p\Lambda_\infty},$$

onde dall'equazioni (12), (15) e (16) avremo :

$$(21)\qquad \sqrt{\frac{1}{M_\sigma}} = \frac{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{m^2}{p}} \alpha^{m^2 h}}{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}}, \qquad (22)\qquad \sqrt{\frac{1}{M_\infty}} = \frac{\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} q^{m^2 p}}{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}}.$$

Per mezzo dell'equazione (5) del numero 14, considerando λ_σ come funzione di k, k di q e q di q_σ, si ottiene facilmente la relazione :

$$(23)\qquad M_\sigma^2 = \frac{1}{p} \frac{\lambda_\sigma \lambda'^2_\sigma}{k\, k'^2} \frac{dk}{d\lambda_\sigma}.$$

20.

Le due trasformazioni corrispondenti a $\sigma = 0$ ed a $\sigma = \infty$ effettuate successivamente danno la moltiplicazione dell'argomento.

Infatti, sia :

$$(1)\qquad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{p\Lambda'}{\Lambda}, \qquad \theta_{1,1}\left(\frac{\Lambda}{2}, \Lambda', \Lambda\right) = \theta_{1,0}\left(\frac{\Lambda}{2}, \Lambda', \Lambda\right),$$

avremo dalle formule (14) e (15) del numero 18:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} M_0\, \theta_{1,1}\left(\frac{z}{M_0}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) &= e^{(p-1)\frac{\pi i z}{\omega}}\, \theta_{1,1}(z) \prod_{1}^{p-1}{}_{\alpha} \frac{\theta_{1,1}\left(z + \dfrac{\alpha\omega'}{p}\right)}{\theta_{1,1}\left(\dfrac{\alpha\omega'}{p}\right)}, \\ \theta_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{M_0}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) &= e^{(p-1)\frac{\pi i z}{\omega}} \prod_{0}^{p-1}{}_{\alpha} \frac{\theta_{\mu,\nu}\left(z + \dfrac{\alpha\omega'}{p}\right)}{\theta_{\mu,\nu}\left(\dfrac{\alpha\omega'}{p}\right)}, \quad \mu\nu = 0 \\ M_0 &= \frac{\omega}{\Lambda} \end{aligned}\right.$$

Dalla equazione (1) abbiamo anche:

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{\omega'}{p\omega},$$

quindi dalle formule (16), (17) del numero 18, si deduce:

$$(3)\quad \begin{cases} M_\infty \theta_{1,1}\left(\dfrac{z}{M_\infty}\right) = \theta_{1,1}\left(z, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) \prod\limits_{1}^{p-1}{}_\beta \dfrac{\theta_{1,1}\left(z + \dfrac{\beta\Lambda}{p}, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}{\theta_{1,1}\left(\dfrac{\beta\Lambda}{p}, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}, \\[2ex] \theta_{\mu,\nu}\left(\dfrac{z}{M_\infty}\right) = \prod\limits_{0}^{p-1}{}_\beta \dfrac{\theta_{\mu,\nu}\left(z + \dfrac{\beta\Lambda}{p}, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}{\theta_{\mu,\nu}\left(\dfrac{\beta\Lambda}{p}, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}, \qquad \mu\nu = 0 \\[2ex] M_\infty = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \dfrac{\Lambda}{p\omega}. \end{cases}$$

Ponendo nell'equazioni (3) $\dfrac{z}{M_0}$ invece di z, sostituendo nei secondi membri i valori dati dall'equazioni (2), e osservando che si ha:

$$M_0 M_\infty = \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}, \quad M_0 \Lambda = \omega,$$

otterremo:

$$(4)\quad \begin{cases} \theta_{1,1}(pz) = \dfrac{p e^{p(p-1)\frac{\pi i z}{\omega}} \prod\limits_{0}^{p-1}{}_\alpha \prod\limits_{0}^{p-1}{}_\beta \theta_{1,1}\left(z + \dfrac{\alpha\omega' + \beta\omega}{p}\right)}{M_0^{p-1} \prod\limits_{1}^{p-1}{}_\beta \theta_{1,1}\left(\dfrac{\beta\Lambda}{p}, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) \left\{\prod\limits_{1}^{p-1}{}_\alpha \theta_{1,1}\left(\dfrac{\alpha\omega'}{p}\right)\right\}^p}, \\[3ex] \theta_{\mu,\nu}(pz) = \dfrac{e^{p(p-1)\frac{\pi i z}{\omega}} \prod\limits_{0}^{p-1}{}_\alpha \prod\limits_{0}^{p-1}{}_\beta \theta_{\mu,\nu}\left(z + \dfrac{\alpha\omega' + \beta\omega}{p}\right)}{\prod\limits_{1}^{p-1}{}_\beta \theta_{\mu,\nu}\left(\dfrac{\beta\Lambda}{p}, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) \left\{\prod\limits_{1}^{p-1}{}_\alpha \theta_{\mu,\nu}\left(\dfrac{\alpha\omega'}{p}\right)\right\}^p}, \qquad \mu\nu = 0. \end{cases}$$

Confrontando l'equazioni (4) coll'equazioni (6) del numero 15, abbiamo:

$$(5)\quad \begin{cases} \prod\limits_{0}^{p-1}{}'_\alpha \prod\limits_{0}^{p-1}{}'_\beta \theta_{1,1}\left(\dfrac{\alpha\omega' + \beta\omega}{p}\right) = M_0^{p-1} \prod\limits_{1}^{p-1}{}_\beta \theta_{1,1}\left(\dfrac{\beta\Lambda}{p}, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) \left\{\prod\limits_{1}^{p-1}{}_\alpha \theta_{1,1}\left(\dfrac{\alpha\omega'}{p}\right)\right\}^p, \\[2ex] \prod\limits_{0}^{p-1}{}_\alpha \prod\limits_{0}^{p-1}{}_\beta \theta_{\mu,\nu}\left(\dfrac{\alpha\omega' + \beta\omega}{p}\right) = \prod\limits_{1}^{p-1}{}_\beta \theta_{\mu,\nu}\left(\dfrac{\beta\Lambda}{p}, \dfrac{\Lambda'}{\Lambda}\right) \left\{\prod\limits_{1}^{p-1}{}_\alpha \theta_{\mu,\nu}\left(\dfrac{\alpha\omega'}{p}\right)\right\}^p. \end{cases}$$

Ponendo :

$$\prod_{1}^{p-1}{}_{\alpha}\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}=\mathrm{A}\,,\qquad \prod_{1}^{p-1}{}_{\alpha}\frac{\theta_{0,1}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}=\mathrm{B}\,,\qquad \prod_{1}^{p-1}{}_{\alpha}\frac{\theta_{0,0}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'}{p}\right)}=\mathrm{C}\,;$$

$$\prod_{1}^{p-1}{}_{\beta}\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\beta\Lambda}{p},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\beta\Lambda}{p},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}=\mathrm{P}\,,\qquad \prod_{1}^{p-1}{}_{\beta}\frac{\theta_{0,1}\left(\frac{\beta\Lambda}{p},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\beta\Lambda}{p},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}=\mathrm{Q}\,,\qquad \prod_{1}^{p-1}{}_{\beta}\frac{\theta_{0,0}\left(\frac{\beta\Lambda}{p},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\beta\Lambda}{p},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)}=\mathrm{R},$$

e indicando con λ e λ' i moduli di $\theta_{\mu,\nu}\left(z,\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)$, e con k e k' quelli di $\theta_{\mu,\nu}(z)$, si ha dalle formule (9), (10) e (11) del numero 19 :

$$\mathrm{M}_0=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{AC}}\,,\quad \sqrt{\lambda}=\sqrt{k^p}\,\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\,,\quad \sqrt{\lambda'}=\frac{\sqrt{k'^p}}{\mathrm{C}}$$

$$\mathrm{M}_\infty=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{PR}}\,,\quad \sqrt{k}=\sqrt{\lambda^p}\,\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}\,,\quad \sqrt{k'}=\frac{\sqrt{\lambda'^p}}{\mathrm{R}}\,,\qquad \frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{ACPR}}=\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}\,;$$

onde dalle (5) si ottiene :

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
&\prod_{0}^{p-1}{}'_{\alpha}\prod_{0}^{p-1}{}'_{\beta}\frac{\theta_{1,1}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'+k\omega'}{p}\right)}=\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}{\sqrt{k^{p^2-1}}}\,,\\
&\prod_{0}^{p-1}{}'_{\alpha}\prod_{0}^{p-1}{}'_{\alpha}\frac{\theta_{0,1}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)}=\sqrt{\frac{k'^{p^2-1}}{k^{p^2-1}}}\,,\\
&\prod_{0}^{p-1}{}'_{\alpha}\prod_{0}^{p-1}{}'_{\beta}\frac{\theta_{0,0}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{p}\right)}=\sqrt{k'^{p^2-1}}\,.
\end{aligned}\right.$$

PARTE SECONDA

FUNZIONI FRATTE.

1.

Il quoziente di due *emiseni*, gli argomenti dei quali differiscono di una data quantità costante, dà origine a una funzione fratta che indicheremo colla notazione f; cioè porremo:

$$f(z)=\frac{\mathrm{A}\ \mathrm{es}\,\frac{z}{a}}{\mathrm{es}\left(\frac{a}{z}+b\right)}\ .$$

Determineremo la costante A in modo che sia:

$$\lim_{z=\infty}\frac{f(z)}{z^b}=1\ . \tag{1}$$

Rammentando l'equazione (7) del n.° 1. P. I., avremo:

$$\lim_{z=\infty}\frac{f(z)}{z^b}=\frac{\mathrm{A}}{a^b}\lim_{z=\infty}\frac{a^b}{z^b}\ \frac{\mathrm{es}\,\frac{z}{a}}{\mathrm{es}\left(\frac{z}{a}+b\right)}=\frac{\mathrm{A}}{a^b}:$$

onde:

$$\mathrm{A}=a^b\ ,$$

e

$$f(z)=\frac{a^b\ \mathrm{es}\,\frac{z}{a}}{\mathrm{es}\left(\frac{z}{a}+b\right)}\ . \tag{2}$$

Per mezzo della equazione (6) del n.° 1. P. I, si ha:

$$f(z+a)=\frac{z+ab}{z}\,f(z)\ , \tag{3}$$

dalla quale, ponendo $a = \Delta z$, si deduce:

$$(4)\qquad \frac{\Delta f(z)}{f(z)} = \frac{b\Delta z}{z},$$

equazione alle differenze finite, analoga alla equazione differenziale:

$$\frac{dy}{y} = b\frac{dz}{z},$$

che definisce la potenza $y = z^b$.

L'equazioni (1) e (4) sono le caratteristiche delle $f(z)$ considerate come funzioni di una sola variabile z.

Infatti dalla equazione (4) presa sotto la forma (3) si ricava:

$$f(z) = \frac{z(z+a)\ldots.[z+(n-1)a]}{(z+ab)(z+ab+a)\ldots.[z+ab+(n-1)a]}f(z+na)$$

$$= \frac{\lim\limits_{n=\infty} n^{-\frac{z}{a}}\frac{z}{a}\left(\frac{z}{a}+1\right)\ldots.+\left(\frac{z}{a}+n-1\right)}{\lim\limits_{n=\infty} n^{-\frac{z}{a}-b}\left(\frac{z}{a}+b\right)\left(\frac{z}{a}+b+1\right)\cdots\left(\frac{z}{a}+b+n-1\right)}\lim_{n=\infty}\frac{f(z+na)}{(z+na)^b}\lim_{n=\infty}\left(\frac{z+na}{n}\right)^b;$$

onde, ponendo mente alla equazione (5) del n° 1. P. I, si ottiene:

$$f(z) = a^b\frac{\operatorname{es}\dfrac{z}{a}}{\operatorname{es}\left(\dfrac{z}{a}+b\right)}.$$

Noi riteniamo a e b, e quindi anche a^b, come costanti. Se a si ritenesse variabile, per valori non interi di b, la funzione f cesserebbe di essere monodroma, e occorrerebbero altre considerazioni per la determinazione della medesima.

Quando b è un numero intero e reale n, sostituendo agli *emiseni* i loro valori espressi in prodotti infiniti e riducendo, si ottiene:

$$(5)\qquad f(z, a, n) = z(z+a)(z+2a)\ldots.[z+(n-1)a].$$

Mediante le formole (15) del n° 2. P. I, si ottiene la moltiplicazione dell'argomento nelle funzioni $f(z)$, e si ha:

$$f(nz) = a^b\frac{\operatorname{es}\dfrac{nz}{a}}{\operatorname{es}\left(\dfrac{nz}{a}+b\right)} = n^b a^b \prod_{0}^{n-1}{}_t\frac{\operatorname{es}\left(\dfrac{z}{a}+\dfrac{t}{n}\right)}{\operatorname{es}\left(\dfrac{z}{a}+\dfrac{b}{n}+\dfrac{t}{n}\right)};$$

onde:

$$(6)\qquad f(nz,\,a,\,b) = n^b \prod_0^{n-1}{}_t\, f\left(z + \frac{at}{n}\,,\; a\,,\; \frac{b}{n}\right).$$

Le funzioni $f(z, a, b)$ considerate come funzioni di tre variabili sono note nell' Analisi sotto il nome di *facoltà analitiche*, e sono state soggetto dei lavori di molti geometri, tra i quali citerò una Memoria del Sig. *Weierstrass* pubblicata nel Vol. 51 del Giornale di Crelle.

2.

I tre quozienti, che si ottengono dividendo tre funzioni Jacobiane per la quarta, danno origine a tre funzioni fratte, per le quali adotteremo la notazione seguente:

$$(1)\qquad \mathrm{sn}\, z = \frac{\theta_{1,1}(z)}{\theta_{1,0}(z)}\,,\qquad \mathrm{cn}\, z = \frac{\theta_{0,1}(z)}{\theta_{1,0}(z)}\,,\qquad \mathrm{dn}\, z = \frac{\theta_{0,0}(z)}{\theta_{1,0}(z)}\,.$$

Jacobi le indicava colle notazioni senam z, cosam z, Δam z, e le esprimeva *seno amplitudine di z, coseno amplitudine di z, delta amplitudine di z*. Queste tre funzioni si chiamano funzioni *ellittiche*.

Le funzioni ellittiche sono tutte tre doppiamente periodiche. Infatti, rammentando le formule (4) e (5) del n.º 6. P. I. abbiamo:

$$(2)\qquad \mathrm{sn}(z+\omega) = -\,\mathrm{sn}\, z\,,\qquad \mathrm{sn}(z+2\omega) = \mathrm{sn}\, z\,,$$

$$(3)\qquad \mathrm{sn}(z+\omega') = \mathrm{sn}\, z,$$

$$(4)\qquad \mathrm{cn}(z+\omega) = -\,\mathrm{cn}\, z\,,\qquad \mathrm{cn}(z+2\omega) = \mathrm{cn}\, z\,,$$

$$(5)\qquad \mathrm{cn}(z+\omega') = -\,\mathrm{cn}\, z\,,\qquad \mathrm{cn}(z+2\omega') = \mathrm{cn}\, z\,,$$

$$(6)\qquad \mathrm{dn}(z+\omega) = \mathrm{dn}\, z\,,$$

$$(7)\qquad \mathrm{dn}(z+\omega') = -\,\mathrm{dn}\, z\,,\qquad \mathrm{dn}(z+2\omega') = \mathrm{dn}\, z.$$

Le quantità 2ω e $2\omega'$ sono periodi comuni a tutte tre le funzioni ellittiche.

Per mezzo dell'equazioni (16) del n.º 10. P. I, si esprimono le funzioni (1) per le $\Theta_{\mu,\nu}(z)$ nel modo seguente:

$$(8)\qquad \mathrm{sn}\, z = \frac{1}{i\sqrt{k}}\,\frac{\Theta_{1,1}(z)}{\Theta_{1,0}(z)}\,,\qquad \mathrm{cn}\, z = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\Theta_{0,1}(z)}{\Theta_{1,0}(z)}\,,\qquad \mathrm{dn}\, z = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_{0,0}(z)}{\Theta_{1,0}(z)}\,.$$

Dalla formola (10) del n.º 10. P. I, si deduce:

$$\Theta_{\mu,\nu}\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = e^{\frac{\nu\pi i}{2}}\,\Theta_{\mu+1,\,\nu}(z)\,.$$

Quindi, rammentando l'equazione (8) dello stesso numero, l'equazioni (8) daranno:

$$(9) \qquad \operatorname{sn}\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z},$$

$$(10) \qquad \operatorname{cn}\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=-k'\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z},$$

$$(11) \qquad \operatorname{dn}\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{k'}{\operatorname{dn} z}.$$

onde :

$$(12) \qquad \operatorname{sn}\left(\frac{\omega}{2}-z\right)=\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z}, \quad \operatorname{cn}\left(\frac{\omega}{2}-z\right)=k'\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z}, \quad \operatorname{dn}\left(\frac{\omega}{2}-z\right)=\frac{k'}{\operatorname{dn} z}.$$

Per analogia colle funzioni circolari, queste tre funzioni si chiamano *seno coamplitudine, coseno coamplitudine, delta coamplitudine di* z, e si scrivono:

$$(13) \qquad \operatorname{snc} z=\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z}, \qquad \operatorname{cnc} z=\frac{k'\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z}, \qquad \operatorname{dnc} z=\frac{k'}{\operatorname{dn} z}.$$

Dalla formula (10) del n.° 10. P.' I. si ha :

$$\Theta_{\mu,\nu}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{4}\right)}\Theta_{\mu,\nu+1}(z) \;;$$

onde, ponendo mente alla equazione (9) dello stesso numero, abbiamo dall'equazioni (8) :

$$(14) \qquad \operatorname{sn}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{k\operatorname{sn} z},$$

$$(15) \qquad \operatorname{cn}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{\operatorname{dn} z}{ik\operatorname{sn} z},$$

$$(16) \qquad \operatorname{dn}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{\operatorname{cn} z}{i\operatorname{sn} z}.$$

Dall'equazioni (5), (10), (11), (14), (15) e (16) si deduce che quando siano determinati i valori di tutte tre le funzioni ellittiche corrispondenti ai valori dell'argomento z che hanno gl'indici in un parallelogrammo elementare, i cui lati siano $\frac{\omega}{2}$ e $\frac{\omega'}{2}$ si hanno i loro valori in tutto il piano.

Dalle medesime si ricavano anche le seguenti formule :

$$(17) \qquad \operatorname{sn}\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{\operatorname{dn} z}{k\operatorname{cn} z},$$

$$(18) \qquad \operatorname{cn}\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{k'}{ik\operatorname{cn} z},$$

$$(19) \qquad \mathrm{dn}\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = \frac{ik'\mathrm{sn}\, z}{\mathrm{cn}\, z}.$$

Osservando le formule (6) del n.º 5, e (7) del n.º 6. P. I, si ha:

$$(20) \qquad \mathrm{sn}\, 0 = 0\,, \quad \mathrm{cn}\, 0 = 1\,, \quad \mathrm{dn}\, 0 = 1$$

e quindi dalle precedenti:

$$(21) \qquad \mathrm{sn}\,\frac{\omega}{2} = 1\,, \qquad \mathrm{cn}\,\frac{\omega}{2} = 0\,, \qquad \mathrm{dn}\,\frac{\omega}{2} = k'\,,$$

$$(22) \qquad \mathrm{sn}\,\frac{\omega'}{2} = \infty\,, \qquad \mathrm{cn}\,\frac{\omega'}{2} = \infty\,, \qquad \mathrm{dn}\,\frac{\omega'}{2} = \infty\,,$$

$$(23) \qquad \mathrm{sn}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) = \frac{1}{k}, \quad \mathrm{cn}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) = \frac{k'}{ik}, \quad \mathrm{dn}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) = 0.$$

Dall'equazioni (7) e (9) del n.º 8. P. I, si deducono le seguenti relazioni algebriche tra le tre funzioni ellittiche:

$$(24) \qquad \mathrm{sn}^2 z + \mathrm{cn}\, z = 1\,,$$

$$(25) \qquad \mathrm{dn}^2 z + k^2 \mathrm{sn}^2 z = 1.$$

3.

Dividendo per la equazione (7) l'equazioni (10) e (11), (21) e (14), (17) e (16) del n.º 11. P. I, si ottengono per l'addizione degli argomenti le formule seguenti:

$$(1) \qquad \mathrm{sn}(z \pm w) = \frac{\mathrm{sn}\, z\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w \pm \mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, z\, \mathrm{dn}\, z}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 z\, \mathrm{sn}^2 w}\,,$$

$$(2) \qquad \mathrm{cn}(z \pm w) = \frac{\mathrm{cn}\, z\, \mathrm{cn}\, w \mp \mathrm{sn}\, z\, \mathrm{dn}\, z\, \mathrm{sn}\, w\, \mathrm{dn}\, w}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 z\, \mathrm{sn}^2 w}\,,$$

$$(3) \qquad \mathrm{dn}(z \pm w) = \frac{\mathrm{dn}\, z\, \mathrm{dn}\, w \mp k^2 \mathrm{sn}\, z\, \mathrm{cn}\, z\, \mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 z\, \mathrm{sn}^2 w}\,,$$

Dividendo l'equazioni (6), (8) e (9) per la (7) del medesimo numero, si ha:

$$(4) \qquad \mathrm{sn}(z + w)\, \mathrm{sn}(z - w) = \frac{\mathrm{sn}^2 z - \mathrm{sn}^2 w}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 z\, \mathrm{sn}^2 w}\,,$$

$$(5) \qquad \mathrm{cn}(z + w)\, \mathrm{cn}(z - w) = \frac{\mathrm{cn}^2 w - \mathrm{sn}^2 z\, \mathrm{dn}^2 w}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 z\, \mathrm{sn}^2 w}\,,$$

$$(6) \qquad \mathrm{dn}(z + w)\, \mathrm{dn}(z - w) = \frac{\mathrm{dn}^2 w - k^2 \mathrm{sn}^2 z\, \mathrm{cn}^2 w}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 z\, \mathrm{sn}^2 w}\,,$$

Dall'equazioni (1), (4) e (6) del n.° 12. P. I. dopo averle divise per $\theta_{1,0}(z)$, si ottiene :

$$(7) \qquad \frac{d \operatorname{sn} z}{dz} = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z,$$

$$(8) \qquad \frac{d \operatorname{cn} z}{dz} = - \operatorname{sn} z \operatorname{dn} z,$$

$$(9) \qquad \frac{d \operatorname{dn} z}{dz} = - k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z.$$

Ponendo nell'equazione (7) $\operatorname{sn} z = y$, ed osservando l'equazioni (24) e (25) del n.° 2, si ha :

$$(10) \qquad \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2).$$

Questa equazione differenziale e la proprietà di annullarsi per $z = 0$ possono riguardarsi come le caratteristiche delle funzioni ellittiche $y = \operatorname{sn} z$.

Dall'equazione (10) si ricava :

$$(11) \qquad z = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}$$

quindi $\operatorname{sn} z$ è il limite superiore di questo integrale che ne rende il valore eguale a z. La quantità z riguardata come funzione di y si chiama *amplitudine*, o anche *integrale ellittico di prima specie*.

Poichè $\operatorname{sn} \frac{\omega}{2} = 1$, avremo :

$$(12) \qquad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}},$$

ed essendo $\operatorname{sn} \frac{\omega + \omega'}{2} = \frac{1}{k}$, sarà :

$$\frac{\omega + \omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}};$$

onde a cagione dell'equazione (12) :

$$\frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} - \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}.$$

Pongo :

$$y^2 = \frac{1 - k'^2 x^2}{k^2}$$

ed ottengo :

$$(13) \qquad \frac{\omega'}{2} = i \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}}.$$

Pongo

$$(14) \qquad K = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k'^2 y^2)}},$$

ed ho :

$$(15) \qquad \omega = 2K, \quad \omega' = 2iK'.$$

Le funzioni ellittiche che hanno il modulo k reale e > 1, si esprimono semplicemente per quelle che hanno il modulo reale e < 1. Infatti dall'equazioni (14) del n.º 16. P. I, abbiamo :

$$(16) \qquad \mathrm{sn}\left(kz, \frac{1}{k}\right) = k\,\mathrm{sn}(z, k), \quad \mathrm{cn}\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{dn}(z, k), \quad \mathrm{dn}\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{cn}(z, k).$$

Le funzioni ellittiche che hanno l'argomento immaginario si esprimono per quelle che hanno l'argomento reale. Infatti dall'equazioni (19) dello stesso numero si ricava :

$$(17) \qquad \mathrm{sn}(iz, k) = \frac{i\,\mathrm{sn}(z, k')}{\mathrm{cn}(z, k')}, \quad \mathrm{cn}(iz, k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(z, k')}, \quad \mathrm{dn}(iz, k) = \frac{\mathrm{dn}(z, k')}{\mathrm{cn}(z, k')}.$$

Per mezzo dell'equazioni (1), (2), (3), (16) e (17) di questo numero, le funzioni ellittiche che abbiano un argomento complesso $x + iy$, si esprimeranno per mezzo delle funzioni ellittiche dei due argomenti reali x ed y.

4.

Le derivate delle quattro funzioni Jacobiane sono anch'esse funzioni intere. Dividendole per le respettive loro primitive, avremo quattro nuove funzioni fratte, per le quali, scrivendo le derivate al modo di Lagrange, ed useremo la seguente notazione:

$$(1) \qquad Z_{\mu,\nu}(z) = \frac{\theta'_{\mu,\nu}(z)}{\theta_{\mu,\nu}(z)} = \frac{\Theta'_{\mu,\nu}(z)}{\Theta_{\mu,\nu}(z)}.$$

L'equazioni (8) e (9) del n.º 10. P. I daranno immediatamente :

$$(2) \qquad Z_{\mu+2r,\,\nu+2s}(z) = Z_{\mu,\nu}(z),$$

cioè : le $Z_{\mu,\nu}$ che hanno gli indici congrui rispetto al modulo 2, sono eguali.

L'equazione (10) dello stesso numero dà :

$$(3) \qquad Z_{\mu,\nu}\left(z + \mu' \frac{\omega}{2} + \nu' \frac{\omega'}{2}\right) = -\frac{\nu'\pi i}{\omega} + Z_{\mu+\mu',\,\nu+\nu'}(z).$$

Prendendo $\mu' = 2m$, $\nu' = 2m'$, ed osservando l'equazione (2), se ne deduce :

$$(4) \qquad Z_{\mu,\nu}(z + m\omega + n\omega') = -\frac{2m'\pi i}{\omega} + Z_{\mu,\nu}(z).$$

Per mezzo dell'equazione (3) si esprimono tre funzioni $Z_{\mu,\nu}$ per la quarta nel modo seguente :

$$(5) \qquad Z_{1,1}(z) = Z_{1,0}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) + \frac{\pi i}{\omega},$$

$$(6) \qquad Z_{0,1}(z) = Z_{1,0}\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) + \frac{\pi i}{\omega},$$

$$(7) \qquad Z_{0,0}(z) = Z_{1,0}\left(z + \frac{\omega}{2}\right).$$

Quando μ e ν non sono ambedue congrui all'unità rispetto al modulo 2, essendo $Z_{\mu,\nu}(z)$ il quoziente di una funzione intera dispari divisa per una funzione intera pari, avremo :

$$(8) \qquad Z_{\mu,\nu}(0) = 0.$$

Poichè $Z_{1,1}(z)$ è il quoziente di una funzione intera pari divisa per una funzione intera dispari, sarà :

$$(9) \qquad Z_{1,1}(0) = \infty .$$

Ma dalla formula (3) del n.° 10. P. I, abbiamo :

$$Z_{1,1}(z) = \frac{\frac{d}{dz}\sum_0^\infty (-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi z}{\omega}}{\sum_0^\infty (-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi z}{\omega}};$$

onde :

$$zZ_{1,1}(z) = \frac{\sum_0^\infty (-1)^n (2n+1) q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \cos(2n+1)\frac{\pi z}{\omega}}{\sum_0^\infty (-1)^n (2n+1) q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \dfrac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi z}{\omega}}{(2n+1)\frac{\pi z}{\omega}}};$$

e quindi :

$$(10) \qquad \lim_{z=0} zZ_{1,1}(z) = 1.$$

Quando non sono contemporaneamente :

$$\left.\begin{matrix}\mu\equiv 0\\ \nu\equiv 1\end{matrix}\right.\ (\mathrm{mod}\ z)$$

dalla equazione (3), osservando la equazione (8), si ricava :

$$(11) \qquad Z_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega}{2}\right)=0.$$

ed a cagione della equazione (10) :

$$(12) \qquad \lim_{z=0} zZ_{0,1}\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=1.$$

Quando non sono contemporaneamente :

$$\left.\begin{matrix}\mu\equiv 1\\ \nu\equiv 0\end{matrix}\right.\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

si ha egualmente :

$$(13) \qquad Z_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega'}{2}\right)=-\frac{\pi i}{\omega},$$

e per $\mu=1$, $\nu=0$:

$$(14) \qquad \lim_{z=0} zZ_{1,0}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=1\,.$$

Analogamente si trova :

$$(15) \qquad Z_{\mu,\nu}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=-\frac{\pi i}{\omega}$$

quando non siano :

$$\left.\begin{matrix}\mu\equiv 0\\ \nu\equiv 0\end{matrix}\right.\ (\mathrm{mod}\ 2)\,;$$

e

$$(16) \qquad \lim_{z=0} zZ_{0,0}\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=1.$$

Per mezzo dell'equazione (11) del n.° 13. P. I. si ottiene :

$$(17) \qquad Z'_{\mu,\nu}(z)=-\frac{\eta}{\omega}-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)$$

dalla quale abbiamo :

$$Z'_{\mu,\nu}(z+w)=-\frac{\eta}{\omega}-k^2\mathrm{sn}^2\left(z+w+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)$$

$$Z'_{\mu,\nu}(z-w)=-\frac{\eta}{\omega}-k^2\mathrm{sn}^2\left(z-w+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right).$$

e sottraendo :

$$Z'_{\mu,\nu}(z+w) - Z'_{\mu,\nu}(z-w) = -k^2\left[\operatorname{sn}^2\left(z+w+(1-\mu)\frac{\omega}{2}-\nu\frac{\omega'}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\operatorname{sn}^2\left(z-w+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\right].$$
$$= -\frac{4k^2\operatorname{sn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{cn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{dn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\left[1-k^2\operatorname{sn}^2\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{sn}^2 w\right]^2}$$

Moltiplico per dw, ed integrando ottengo:

$$Z_{\mu,\nu}(z+w)+Z_{\mu,\nu}(z-w)=C-\frac{2\operatorname{cn}\left(z+(1+\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{dn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\left[1-k^2\operatorname{sn}^2\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{sn}^2 w\right]}$$

Pongo $w=0$ ed ho:

$$C = 2Z_{\mu,\nu}(z) + \frac{2\operatorname{cn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{dn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)}$$

onde:

$$Z_{\mu,\nu}(z+w)+Z_{\mu,\nu}(z-w) = 2Z_{\mu,\nu}(z) \tag{18}$$
$$-\frac{2k^2\operatorname{sn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{cn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{dn}\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{sn}^2 w}{1-k^2\operatorname{sn}^2\left(z+(1-\mu)\frac{\omega}{2}+\nu\frac{\omega'}{2}\right)\operatorname{sn}^2 w}.$$

Pertanto avremo per le quattro funzioni:

$$Z_{1,0}(z+w)+Z_{1,0}(z-w) = 2Z_{1,0}(z) - \frac{2k^2\operatorname{sn} z\operatorname{cn} z\operatorname{dn} z\operatorname{sn}^2 w}{1-k^2\operatorname{sn}^2 z\operatorname{sn}^2 w}, \tag{19}$$

$$Z_{0,1}(z+w)+Z_{0,1}(z-w) = 2Z_{0,1}(z) - \frac{2k'^2\operatorname{dn} z\operatorname{sn} z\operatorname{sn}^2 w}{\operatorname{cn} z(\operatorname{cn}^2 z-\operatorname{dn}^2 z\operatorname{sn}^2 w)}, \tag{20}$$

$$Z_{0,0}(z+w)+Z_{0,0}(z-w) = 2Z_{0,0}(z) + \frac{2k^2k'^2\operatorname{sn} z\operatorname{cn} z\operatorname{sn}^2 w}{\operatorname{dn} z(\operatorname{dn}^2 z-k^2\operatorname{cn}^2 z\operatorname{sn}^2 w)}, \tag{21}$$

$$Z_{1,1}(z+w)+Z_{1,1}(z-w) = 2Z_{1,1}(z) + \frac{2\operatorname{cn} z\operatorname{dn} z\operatorname{sn}^2 w}{\operatorname{sn} z(\operatorname{sn}^2 z-\operatorname{sn}^2 w)}. \tag{22}$$

5.

Integrando l'equazione (17) del numero precedente nel caso di $\mu = 1$, $\nu = 0$, ed osservando che si ha $Z_{1,0}(0) = 0$, si ottiene:

$$(1) \qquad k^2 \int_0^z \mathrm{sn}^2 z\, dz = -\frac{\eta}{\omega} z - Z_{1,0}(z).$$

Ponendo $\mathrm{sn}\, z = y$, si ha:

$$(2) \qquad k^2 \int_0^y \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-ky^2)}} = -\frac{\eta}{\omega} Z - Z_{1,0}(z)$$

essendo:

$$z = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

L'integrale che comparisce nell'equazione (2) suol chiamarsi *integrale ellittico di di seconda specie*. *Legendre* ha dato questo nome ad un altro che facilmente si esprime per mezzo del precedente:

Ponendo $z = \frac{\omega}{2}$ e quindi $y = 1$, ottengo dall'equazione (2):

$$(3) \qquad \frac{\eta}{2} = -k^2 \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

Fo $z = \frac{\omega + \omega'}{2}$, e quindi $y = \frac{1}{k}$, ed ho:

$$-\frac{\eta}{2} - \frac{\eta\omega'}{2\omega} + \frac{\pi i}{\omega} = k^2 \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

$$= k^2 \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} + k^2 \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

onde, osservando la (25) del n.° 12. P. I, si ricava:

$$\frac{\eta'}{2} = -k^2 \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

Ponendo al solito:

$$y^2 = \frac{1 - k'^2 x^2}{k^2}$$

ottengo:

$$(4) \qquad \frac{\eta'}{2} = \frac{\omega'}{2} - ik^2 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} .$$

Pongo :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} H &= k^2 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} , \\ H' &= k'^2 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} , \end{aligned} \right.$$

ed ho :

$$(6) \qquad \eta = -2H , \quad \eta' = 2iK' - 2iH'$$

Sostituisco i valori (6) e i valori (15) del n.° 3 nell'equazione (25) del n.° 12. P. I, ed ottengo :

$$(7) \qquad KH' - HK' - KK' = \frac{\pi}{2} .$$

Dall'equazioni (18), (20), (21) e (22) del n.° precedente si deduce facilmente :

$$(9) \qquad Z_{1,0}(z+w) = Z_{1,0}(z) + Z_{1,0}(w) - k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{sn} w \operatorname{sn}(z+w)$$

$$(10) \quad Z_{0,1}(z+w) = Z_{0,1}(z) + Z_{0,1}(w) - k'^2 \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{sn} w \operatorname{sn}(z+w)}{\operatorname{cn} z \operatorname{cn} w \operatorname{cn}(z+w)} ,$$

$$(11) \quad Z_{0,0}(z+w) = Z_{0,0}(z) + Z_{0,0}(w) + k^2 \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{sn} w \operatorname{sn}(z+w)}{\operatorname{dn} z \operatorname{du} w \operatorname{dn}(z+w)} ,$$

$$(12) \qquad Z_{0,0}(z+w) = Z_{1,1}(z) + Z_{1,1}(w) + \frac{1}{\operatorname{sn}^2 z - \operatorname{sn}^2 w}\left(\frac{\operatorname{sn}^2 w \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z} - \frac{\operatorname{sn}^2 z \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w}\right) .$$

Moltiplico per dw e integro l'equazioni (18), (19), (20) e (21) del n.° 4, ed osservando l'equazione (1) del n.° 3, ho:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \Pi_{1,0}(w,z) &= k^2 \int_0^w \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z \operatorname{sn}^2 w \, dw}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 w} = Z_{1,0}(z)\, w - \frac{1}{2} \log \frac{\Theta_{1,0}(z+w)}{\Theta_{1,0}(z-w)} \\ \Pi_{0,1}(w,z) &= k'^2 \int_0^w \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z \operatorname{sn}^2 w \, dw}{\operatorname{cn} z(\operatorname{cn}^2 z - \operatorname{dn}^2 z \operatorname{sn}^2 w} = Z_{0,1}(z)\, w - \frac{1}{2} \log \frac{\Theta_{0,1})z+w)}{\Theta_{0,1}(z-w)} \\ \Pi_{0,0}(w,z) &= k^2 \int_0^w \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{sn}^2 w \, dw}{\operatorname{dn} z(\operatorname{dn}^2 z - k^2 \operatorname{cn}^2 z \operatorname{sn}^2 w)} = - Z_{0,0}(z)\, w + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta_{0,0}(z+w)}{\Theta_{0,0}(z-w)} \\ \Pi_{1,1}(w,z) &= k'^2 \int_0^w \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z \operatorname{sn}^2 w \, dw}{\operatorname{sn} z(\operatorname{sn}^2 z - \operatorname{sn}^2 w)} = - Z_{1,1}(z)\, w + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta_{1,1}(z+w)}{\Theta_{1,1}(z-w)} . \end{aligned} \right.$$

Le funzioni $\Pi_{\mu,\nu}(w,z)$, possono comprendersi tutte nella unica formula :

*

$$(14)\qquad \Pi_{\mu,\nu}(w,z)=(-1)^{\mu+\nu}\left(-wZ_{\mu,\nu}(z)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{\mu,\nu}(z+w)}{\Theta_{\mu,\nu}(z-w)}\right),$$

ponendo $\operatorname{sn} w = y$, prendono la forma:

$$(15)\qquad A\int_0^y \frac{y^2\,dy}{(1+hy^2)\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

e si chiamano *Integrali ellittici di* 3^a *specie.*

È chiaro che le funzioni $\Pi_{\mu,\nu}$ non sono monodrome, e quindi la loro teorica non troverebbe luogo in questa monografia. Ma essendo composte di una funzione $Z_{\mu,\nu}$ e di logaritmi di funzioni Jacobiane non constituiscono propriamente un genere particolare di funzioni, e la loro teorica è una immediata conseguenza della teorica delle funzioni Z e delle Jacobiane.

6.

Ponendo nella equazione (14) del n.° precedente $u+v$ in luogo di w, si ottiene:

$$(1)\qquad \begin{aligned}\Pi_{\mu,\nu}(u+v,z) &= \Pi_{\mu,\nu}(u,z)+\Pi_{\mu,\nu}(v,z)\\ &+(-1)^{\mu+\nu}\frac{1}{2}\log.\frac{\Theta_{\mu,\nu}(z-u)\,\Theta_{\mu,\nu}(z-v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z+u+v)}{\Theta_{\mu,\nu}(z+u)\,\Theta_{\mu,\nu}(z+u)\,\Theta_{\mu,\nu}(z-u-v)}.\end{aligned}$$

Ora abbiamo l'identità:

$$(2)\qquad \begin{aligned}A_{\mu\nu}.\,\Theta_{\mu,\nu}(z-u)\,\Theta_{\mu,\nu}(z-v) &= \Theta_{1,0}(u)\,\Theta_{1,0}(v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z)\,\Theta_{\mu,\nu}(u+v-z)\\ &-\Theta_{1,1}(u)\,\Theta_{1,1}(v)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(z)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v-z)\,;\end{aligned}$$

dove:

$$(3)\quad A_{\mu,\nu}=\frac{\Theta_{1,0}(u)\Theta_{1,0}(v)\Theta_{\mu,\nu}(0)\Theta_{\mu,\nu}(u+v)-\Theta_{1,1}(u)\,\Theta_{1,1}(v)\Theta_{\mu,1+\nu}(0)\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v)}{\Theta_{\mu,\nu}(u)\,\Theta_{\mu,\nu}(v)}.$$

Infatti, il primo membro della equazione (2) è una funzione intera di z che ha per radici le sole quantità della forma:

$$u+(2m+1-\mu)\frac{\omega}{2}+(2n+1-\nu)\frac{\omega'}{2},$$

$$v+(2m+1-\mu)\frac{\omega}{2}+(2n+1-\nu)\frac{\omega'}{2},$$

le quali tutte sono radici anche della funzione intera di z che forma il secondo membro della equazione (2); poichè a cagione delle formule (8), (9) e (10) del n.° 10. P. I, abbiamo:

$$\Theta_{1,0}(u)\Theta_{1,0}(v)\Theta_{\mu,\nu}\left(u+(2m+1-\mu)\frac{\omega}{2}+(2n+1-\nu)\frac{\omega'}{2}\right)$$

$$\Theta_{\mu,\nu}\left(v-(2m+1-\mu)\frac{\omega}{2}-(2n+1-\nu)\frac{\omega'}{2}\right)$$

$$=(-1)^{\mu\nu+1}e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left((2n+1-\nu)(u-v)+\frac{(2n+1-\nu)^2}{2}\omega'-\nu(2m+1-\mu)\omega\right)}\Theta_{1,0}(u)\Theta_{1,0}(v)\Theta_{1,1}(u)\Theta_{1,1}(v),$$

$$\Theta_{1,1}(u)\Theta_{1,1}(v)\Theta_{\mu,1+\nu}\left(u+(2m+1-\mu)\frac{\omega}{2}+(2n+1-\nu)\frac{\omega'}{2}\right)$$

$$\Theta_{\mu,1+\nu}\left(v-(2m+1-\mu)\frac{\omega}{2}-(2n+1-\nu)\frac{\omega'}{2}\right)$$

$$=(-1)^{\mu\nu+1}e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left((2n+1-\nu)(u-v)+(2n+1-\nu)^2\frac{\omega'}{2}-\nu(2m+1-\mu)\omega\right)}\Theta_{1,1}(u)\,\Theta_{1,1}(v)\,\Theta_{1,0}(u)\,\Theta_{1,0}(v).$$

Quindi per il teorema 6 del n° 3. Intr., sarà:

$$\frac{\Theta_{1,0}(u)\Theta_{1,0}(v)\Theta_{\mu,\nu}(z)\,\Theta_{\mu,\nu}(u+v-z)-\Theta_{1,1}(u)\Theta_{1,1}(v)\Theta_{\mu,1+\nu}(z)\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v-z)}{\Theta_{\mu,\nu}(z-u)\Theta_{\mu,\nu}(z-v)}=f(z),$$

indicando con $f(z)$ una funzione intera. Ma per mezzo della formula (10) del n° 10. P. I. si trova:

$$f(z+m\omega+n\omega')=f(z),$$

onde la funzione $f(z)$ è intera e doppiamente periodica, e per il teorema 4° del n° 3. P. I. è necessariamente eguale a una costante. Quindi si ha la identità (2). Per determinare $A_{\mu,\nu}$ che è indipendente da z, basta porre $z=0$, con che si ha il suo valore dato dalla formula (3).

Mutando, nella identità (2), z in $-z$, si ottiene:

$$\begin{aligned}(4)\qquad & A_{\mu,\nu}\Theta_{\mu,\nu}(z+u)\,\Theta_{\mu,\nu}(z+v)\\ &=(-1)^{\mu\nu}\{\Theta_{1,0}(u)\,\Theta_{1,0}(v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z)\,\Theta_{\mu,\nu}(u+v+z)\\ &-(-1)^{\mu}\,\Theta_{1,1}(u)\,\Theta_{1,1}(v)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(z)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v+z)\}.\end{aligned}$$

Dividendo le identità (2) e (4) una per l'altra, abbiamo:

$$\frac{\Theta_{\mu,\nu}(z-u)\,\Theta_{\mu,\nu}(z-v)\,\Theta_{\mu\nu}(z_{\nu}+u+v)}{\Theta_{\mu,\nu}(z+u)\,\omega_{\mu,\nu}(z+v)\,\omega_{\mu,\nu}(z-u-v)}$$

$$=\frac{\Theta_{1,0}(u)\,\Theta_{1,0}(v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z)-\Theta_{1,1}(u)\,\Theta_{1,1}(v)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(z)\,\dfrac{\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v-z)}{\Theta_{\mu,\nu}(u+v-z)}}{\Theta_{1,0}(u)\,\Theta_{1,0}(v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z)-(-)^{\mu}\Theta_{1,1}(u)\,\Theta_{1,1}(v)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(z)\,\dfrac{\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v+z)}{\Theta_{\mu,\nu}(u+v+z)}}.$$

Sostituendo nella equazione (1) questo valore, si ottiene :

$$(5)\qquad \Pi_{\mu,\nu}(u+v,z)=\Pi_{\mu,\nu}(u,z)+\Pi_{\mu,\nu}(v,z)$$

$$+(-1)^{\mu+\nu}\frac{1}{2}\log\frac{1-\dfrac{\Theta_{1,1}(u)\,\Theta_{1,1}(v)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(z)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v-z)}{\Theta_{1,0}(u)\,\Theta_{1,0}(v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z)\,\Theta_{\mu,\nu}(u+v-z)}}{-(-1)^{\mu}\dfrac{\Theta_{1,1}(u)\,\Theta_{1,1}(v)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(z)\,\Theta_{\mu,1+\nu}(u+v+z)}{\Theta_{1,0}(u)\,\Theta_{1,0}(v)\,\Theta_{\mu,\nu}(z)\,\Theta_{\mu,\nu}(u+v+z)}}.$$

Quindi, esprimendo per mezzo delle formule (8) del n.° 2, i rapporti delle funzioni Jacobiane per le funzioni ellittiche, abbiamo :

$$(6)\qquad \Pi_{1,0}(u+v,z)=\Pi_{1,0}(u,z)+\Pi_{1,0}(v,z)$$

$$-\frac{1}{2}\log\frac{1-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{sn}z\operatorname{sn}(u+v-z)}{1+k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{sn}z\operatorname{sn}(u+v+z)},$$

$$(7)\qquad \Pi_{0,1}(u+v,z)=\Pi_{0,1}(u,z)+\Pi_{0,1}(v,z)$$

$$-\frac{1}{2}\log\left(\frac{\operatorname{cn}z\operatorname{cn}(u+v-z)+\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{dn}z\operatorname{dn}(u+v-z)}{\operatorname{cn}z\operatorname{cn}(u+v+z)+\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{dn}z\operatorname{dn}(u+v+z)}\right)\frac{\operatorname{cn}(u+v+z)}{\operatorname{cn}(u+v-z)},$$

$$(8)\qquad \Pi_{0,0}(u+v,z)=\Pi_{0,0}(u,z)+\Pi_{0,0}(v,z)$$

$$+\frac{1}{2}\log\left(\frac{\operatorname{dn}z\operatorname{dn}(u+v-z)+k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{cn}z\operatorname{cn}(u+v-z)}{\operatorname{dn}z\operatorname{dn}(u+v+z)+k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{cn}z\operatorname{cn}(u+v+z)}\right)\frac{\operatorname{dn}(u+v+z)}{\operatorname{dn}(u+v-z)},$$

$$(9)\qquad \Pi_{1,1}(u+v,z)=\Pi_{1,1}(u,z)+\Pi_{1,1}(v,z)$$

$$+\frac{1}{2}\log\left(\frac{\operatorname{sn}z\operatorname{sn}(u+v+z)-\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v}{\operatorname{sn}z\operatorname{sn}(u+v+z)+\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v}\right)\frac{\operatorname{sn}(u+v+z)}{\operatorname{sn}(u+v-z)}.$$

Dalla formula (14) del numero precedente, si ha :

$$\Pi_{\mu,\nu}(u,z)=(-1)^{\mu+\nu}\left\{-uZ_{\mu,\nu}(z)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{\mu,\nu}(z+u)}{\Theta_{\mu,\nu}(z-u)}\right\}$$

$$\Pi_{\mu,\nu}(z,u)=(-1)^{\mu+\nu}\left\{-zZ_{\mu,\nu}(u)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta_{\mu,\nu}(z+u)}{\Theta_{\mu,\nu}(u-z)}\right\}$$

onde :

$$\Pi_{\mu,\nu}(u,z)-\Pi_{\mu,\nu}(z,u)=(-1)^{\mu+\nu}\left(zZ_{\mu,\nu}(u)-uZ_{\mu,\nu}(z)-\frac{\mu\nu\pi i}{2}\right)$$

$$\Pi_{\mu,\nu}(v,z)-\Pi_{\mu,\nu}(z.\,v)=(-1)^{\mu+\nu}\left(zZ_{\mu,\nu}(v)-vZ_{\mu,\nu}(z)-\frac{\mu\nu\pi i}{2}\right)$$

$$\Pi_{\mu,\nu}(u+v,z)-\Pi_{\mu,\nu}(z,u+v)=(-1)^{\mu+\nu}\left(zZ_{\mu,\nu}(u+v)-(u+v)Z_{\mu,\nu}(z)-\frac{\mu\nu\pi i}{2}\right)$$

quindi :

$$\Pi_{\mu,\nu}(z,\, u+v) = \Pi_{\mu,\nu}(z,\, u) + \Pi_{\mu,\nu}(z,\, v) + \Pi_{\mu,\nu}(u+v,\, z) - \Pi_{\mu,\nu}(u,\, z) - \Pi_{\mu,\nu}(v,\, z)$$
$$+ (-1)^{z^{\mu+\nu}}\left(Z_{\mu,\nu}(u+v) - Z_{\mu,\nu}(u) - Z_{\mu,\nu}(v) + \frac{\mu\nu\pi i}{2}\right).$$

Sostituendo il valore (5) e i valori (9), (10), (11) e (12) del numero precedente, si hanno le formule per l'addizione del parametro z delle funzioni $\Pi(w, z)$.

7.

Passiamo ora a determinare $\mathrm{sn}\, nz$, $\mathrm{cn}\, nz$, e $\mathrm{dn}\, nz$ in funzione di $\mathrm{sn}\, z$, $\mathrm{cn}\, z$, $\mathrm{dn}\, z$, quando n è un numero intero e reale, ossia determiniamo le formule per la *moltiplicazione* dell'argomento delle funzioni ellittiche.

Dall'equazioni (1), (2) e (3) del n.° 3, si ricava facilmente :

$$\mathrm{sn}(m+1)z = -\,\mathrm{sn}(m-1)z + \frac{2\mathrm{sn}\, mz\ \mathrm{cn}\, z\ \mathrm{dn}\, z}{1 - k^2\mathrm{sn}^2 mz\ \mathrm{sn}^2 z},$$

$$\mathrm{cn}(m+1)z = -\,\mathrm{cn}(m-1)z + \frac{2\mathrm{cn}\, mz\ \mathrm{cn}\, z}{1 - k^2\mathrm{sn}^2 mz\ \mathrm{sn}^2 z},$$

$$\mathrm{dn}(m+1)z = -\,\mathrm{dn}(m-1)z + \frac{2\mathrm{dn}\, mz\ \mathrm{dn}\, z}{1 - k^2\mathrm{sn}^2 mz\ \mathrm{sn}^2 z};$$

onde, ponendo successivamente $m = 1, 2, 3, \ldots$, abbiamo :

$$(1)\qquad \mathrm{sn}\, 2nz = \mathrm{sn}\, z\ \mathrm{cn}\, z\ \mathrm{dn}\, z\, \frac{N_1}{D},\quad \mathrm{cn}\, 2nz = \frac{N_2}{D},\quad \mathrm{dn}\, 2nz = \frac{N_3}{D},$$

dove D è *una funzione razionale* e intera di $\mathrm{sn}^2 z$ di grado $2n^2$, N_1 di grado $2n^2 - 2$, ed N_2 e N_3 di grado $2n^2$; e

$$(2)\qquad \mathrm{sn}(n+1)z = \mathrm{sn}\, z\, \frac{N'_1}{D'},\quad \mathrm{cn}(2n+1)z = \mathrm{cn}\, z\, \frac{N'_2}{D'},\quad \mathrm{dn}(2n+1)z = \mathrm{dn}\, z\, \frac{N'_3}{D'}$$

dove D', N'_1, N'_2 e N'_3 sono funzioni razionali e intere di $\mathrm{sn}^2 z$ di grado $2n(n+1)$, e con i coefficienti funzioni razionali e intere di k^2.

Dall'equazioni (6) del n.° 15. P. I. abbiamo qualunque sia n :

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\operatorname{sn} nz &= n\,\frac{\prod\limits_{0}^{n-1}{}_{\alpha}\prod\limits_{0}^{n-1}{}_{\beta}\operatorname{sn}\left(z+\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}{\prod\limits_{0}^{n-1}{}'_{\alpha}\prod\limits_{0}^{n-1}{}'_{\beta}\operatorname{sn}\left(\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)},\\
\operatorname{cn} nz &= \prod_{0}^{n-1}{}_{\alpha}\prod_{0}^{n-1}{}_{\beta}\,\frac{\operatorname{cn}\left(z+\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}{\left(\operatorname{cn}\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)},\\
\operatorname{dn} nz &= \prod_{0}^{n-1}{}_{\alpha}\prod_{0}^{n-1}{}_{\beta}\,\frac{\operatorname{dn}\left(z+\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}{\left(\operatorname{dn}\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\right)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Le formule (7), (8), (9) e (10), che valgono per n dispari, danno :

$$
(4)\qquad \operatorname{sn} nz = n\operatorname{sn} z\,\Pi_{\alpha}\,\Pi_{\beta}\,\frac{1-\dfrac{\operatorname{sn}^2 z}{\operatorname{sn}^2\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}}}{1-k^2\operatorname{sn}^2\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\operatorname{sn}^2 z},
$$

$$
(5)\qquad \operatorname{cn} nz = \operatorname{cn} z\,\Pi_{\alpha}\,\Pi_{\beta}\,\frac{1-\dfrac{\operatorname{dn}^2\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}}{\operatorname{cn}^2\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}}\operatorname{sn}^2 z}{1-k^2\operatorname{sn}^2\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\operatorname{sn}^2 z},
$$

$$
(6)\qquad \operatorname{dn} nz = \operatorname{dn} z\,\Pi_{\alpha}\,\Pi_{\beta}\,\frac{1-\dfrac{k^2\operatorname{cn}\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}}{\operatorname{dn}^2\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}}\operatorname{sn}^2 z}{1-k^2\operatorname{sn}^2\dfrac{\alpha\omega+\beta\omega'}{n}\operatorname{sn}^2 z}.
$$

Ponendo :

$$
(7)\qquad u = \sqrt{k}\operatorname{sn} z,
$$

l'equazione (4) prende la forma :

$$(8)\qquad \operatorname{sn} nz = \operatorname{sn} z \,\frac{n + a_1 u^2 + a_2 u^4 + \ldots + a_{\frac{n^2-1}{2}} u^{n^2-1}}{1 + A_1 u^3 + A_2 u^4 + \ldots\ldots + A_{\frac{n^2-1}{2}} u^{n^2-1}},$$

essendo :

$$(9)\qquad a_{\frac{n^2-1}{2}} A_{\frac{n^2-1}{2}} = n.$$

Sostituendo $z + \frac{\omega'}{2}$ a z nella equazione (8) ed osservando che si ha:

$$\operatorname{sn}\left(nz + \frac{n\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k \operatorname{sn} nz}, \quad \operatorname{sn}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k \operatorname{sn} z},$$

e quindi u diviene $\frac{1}{u}$, avremo :

$$\operatorname{sn} nz = \operatorname{sn} z \,\frac{A_{\frac{n^2-1}{2}} + A_{\frac{n^2-3}{2}} u^2 + \ldots + A_1 u^{n^2-3} + u^{n^2-1}}{a_{\frac{n^2-1}{2}} + a_{\frac{n^2-3}{2}} u^2 + \ldots + a_1 u^{n^2-3} + n u^{n^2-1}};$$

onde confrontando colla equazione (8), si deduce :

$$A_{\frac{n^2-1}{2}} = n a_{\frac{n^2-1}{2}}, \qquad A_{\frac{n^2-1}{2} - r} = a_r a_{\frac{n^2-1}{2}}, \qquad a_r = A_{\frac{n^2-1}{2} - r} a_{\frac{n^2-1}{2}},$$

e quindi :

$$a_{\frac{n^2-1}{2}} = \pm 1, \qquad A_{\frac{n^2-1}{2}} = \pm n, \qquad a_r = \pm A_{\frac{n^2-1}{2} - r},$$

e indicando con ε l'unità positiva o negativa, la equazione (8) prende la forma :

$$(10)\qquad \operatorname{sn} nz = \varepsilon \operatorname{sn} z \,\frac{u^{n^2-1} + A_1 u^{n^2-3} + A_2 u^{n^2-5} + \ldots + A_{\frac{n^2-3}{2}} u^2 + n\varepsilon}{1 + A_1 u^2 + A_2 u^4 + \ldots + A_{\frac{n^2-3}{2}} u^{n^2-3} + \varepsilon n u^{n^2-1}}.$$

Per determinare ε osserviamo che, mediante la formula (2) del n.° 10. P. I, abbiamo:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{\omega'}{4} + \rho \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{(-1)^{\rho+1}}{\sqrt{k}};$$

quindi ponendo $z = \frac{\omega'}{4}$, $\operatorname{sn} z$ diverrà $\frac{-1}{\sqrt{k}}$, $\operatorname{sn} nz$ diverrà $\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{k}}$, u prenderà per valore l'unità negativa, e la formula (10) darà :

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

prenderà la forma :

$$(11)\qquad \operatorname{sn} nz = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sn} z \frac{u^{n^2-1} + A_1 u^{n^2-3} + A_2 u^{n^2-5} + \ldots + (-1)^{\frac{n^2-1}{2}} u}{1 + A_1 u^2 + A_2 u^4 + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} u^{n^2-1}} .$$

Per determinare i coefficienti A_1, A_2, . . . , osserviamo che ponendo :

$$(12)\qquad U = 1 + A_1 u^2 + A_2 u^4 + \ldots + A_{\frac{n^2-3}{2}} u^{n^2-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n u^{n^2-1},$$

abbiamo dalla equazione (8) del n.° 15. P. I :

$$\theta_{1,0}(nz) = \theta^{n^2}_{1,0}(z) U ,$$

ed a cagione delle formule (16) del n.° 10. P. I :

$$(13)\qquad \Theta_{1,0}(nz) = \left(\frac{\pi}{k'\omega}\right)^{\frac{n^2-1}{2}} \Theta^{n^2}_{1,0}(z) U .$$

Derivando due volte rapporto a z questa equazione, si ottiene :

$$(14)\qquad \frac{d^2\Theta_{1,0}(nz)}{d(nz)^2} n^2 = \left(\frac{\pi}{k'\omega}\right)^{\frac{n^2-1}{2}} \Theta^{n^2}_{1,0}(z) \left\{ n^2 U \left[\frac{(n^2-1)}{\Theta^2_{1,0}(z)} \left(\frac{d\Theta_{1,0}(z)}{dz} \right)^2 + \frac{1}{\Theta_{1,0}(z)} \frac{d^2\Theta_{1,0}(z)}{dz^2} \right] + \frac{2n^2}{\Theta_{1,0}(z)} \frac{d\Theta_{1,0}(z)}{dz} \frac{dU}{dz} + \frac{d^2U}{dz^2} \right\},$$

e derivando rapporto a q si ha :

$$(15)\qquad \frac{d\Theta_{1,0}(nz)}{dq} = \left(\frac{\pi}{k'\omega}\right)^{\frac{n^2-1}{2}} \Theta^{n^2}_{1,0}(z) \left[U \left((n^2-1) \frac{d \log \sqrt{\frac{\pi}{k'\omega}}}{dq} + \frac{n^2}{\Theta_{1,0}(z)} \frac{d\Theta_{1,0}(z)}{dq} \right) + \frac{dU}{dq} \right]$$

Ora dall'equazione (3) del n.° 14. P. I, abbiamo :

$$(16)\qquad \frac{d^2\Theta_{1,0}(z)}{dz^2} = -4q \frac{\pi^2}{\omega^2} \frac{d\Theta_{1,0}(z)}{dq} ,$$

e dalla equazione (13) dello stesso numero :

$$(17)\qquad \frac{d^2 \log \Theta_{1,0}(z)}{dz^2} = -\left(\frac{d\Theta_{1,0}(z)}{dz}\right)^2 \frac{1}{\Theta^2_{1,0}(z)} + \frac{1}{\Theta_{1,0}(z)} \frac{d^2\Theta_{1,0}(z)}{dz^2}$$

$$= -\left(\frac{d\Theta_{1,0}(z)}{dz}\right)^2 \frac{1}{\Theta^2_{1,0}(z)} - 4q \frac{\pi^2}{\omega^2} \frac{d \log \Theta_{1,0}(z)}{dq} = -\frac{\eta}{\omega} - k^2 \operatorname{sn}^2 z,$$

e quindi ponendo $z = 0$:

$$(18) \qquad \frac{d \log \sqrt{\frac{\pi}{k'\omega}}}{dq} = - \frac{\eta\omega}{4q\pi^2}.$$

Sostituendo i valori (14) e (15) nella equazione:

$$\frac{d^2\Theta_{1,0}(nz)}{d^2(nz)} + 4q\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d\Theta_{1,0}(nz)}{dq} = 0,$$

e riducendo coll'equazioni (16), (17) e (18), si ottiene:

$$\frac{d^2U}{dz^2} + \frac{2n^2}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{d\Theta_{1,0}(z)}{dz}\frac{dU}{dz} + 4qn^2\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{dU}{dq} + n^2(n^2-1)k^2\mathrm{sn}^2 z\, U = 0,$$

ossia:

$$(19) \qquad \frac{d^2U}{du^2}\frac{du^2}{dz^2} + \frac{dU}{du}\left(\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{2n^2}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{d\Theta_{1,0}(z)}{dz}\frac{du}{dz} + 4qn^2\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{du}{dq}\right)$$

$$+ 4qn^2\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{dU}{dk}\frac{dk}{dq} + n^2(n^2-1)k^2\mathrm{sn}^2 z\, U = 0.$$

Ora dalla equazione (7) si trae:

$$(20) \qquad \frac{du}{dz} = \sqrt{k}\,\mathrm{cn}\, z\, \mathrm{dn} z = \sqrt{k}\sqrt{1 - \left(k + \frac{1}{k}\right)u^2 + u^4},$$

$$(21) \qquad \frac{du}{dq} = \frac{1}{i}\frac{d}{dq}\frac{\Theta_{1,1}(z)}{\Theta_{1,0}(z)} = \frac{1}{i\,\Theta_{1,0}^2(z)}\left(\Theta_{1,0}(z)\frac{d\Theta_{1,1}(z)}{dq} - \Theta_{1,1}(z)\frac{d\Theta_{1,0}(z)}{dq}\right)$$

$$= -\frac{\omega^2}{4iq\pi^2\,\Theta_{1,0}^2(z)}\left(\Theta_{1,0}(z)\frac{d^2\Theta_{1,1}(z)}{dz^2} - \Theta_{1,1}(z)\frac{d^2\Theta_{1,0}(z)}{dz^2}\right)$$

$$= -\frac{\omega^2}{4q\pi^2}\left(\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{2}{\Theta_{1,0}(z)}\frac{d\Theta_{1,0}(z)}{dz}\frac{du}{dz}\right),$$

dalla equazione (5) del n.° 14. P. I:

$$(22) \qquad \frac{dk}{dq} = \frac{kk'^2\omega^2}{2q\pi^2}.$$

Sostituendo nella equazione (19) i valori (20), (21) e (22), abbiamo:

$$\frac{d^2U}{du^2}\left[1 - \left(k + \frac{1}{k}\right)u^2 + u^4\right] + (n^2-1)u\left(k + \frac{1}{k} - 2u^2\right)\frac{dU}{du} + 2n^2k'^2\frac{dU}{dk}$$

$$+ n^2(n^2-1)u^2U = 0.$$

*

Pongo:

$$k + \frac{1}{k} = \alpha$$

onde:

$$\frac{d\alpha}{dk} = -\frac{k'^2}{k^2}, \quad \frac{k'^4}{k^2} = \alpha^2 - 4$$

ed ho:

$$(23) \qquad (1 - \alpha u^2 + u^4)\frac{d^2U}{du^2} + (n^2-1)(\alpha u - 2u^3)\frac{dU}{du} + n^2(n^2-1)u^2U$$
$$= 2n^2(\alpha^2 - 4)\frac{dU}{d\alpha}.$$

Sostituisco il valore (12) in questa equazione, ed eguagliando a zero i coefficienti delle diverse potenze di u, ottengo per la determinazione dei coefficienti A_1, A_2, $A_3 \ldots$, le seguenti equazioni:

$$(24) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = 0 \\ 3.4A_2 + n^2(n^2-1) = 0 \\ 5.6A_3 + 4(n^2-4)A_2\alpha = 0 \\ 7.8A_4 + 6(n^2-6)A_3\alpha + (n^2-4)(n^2-5)A_2 = 2n^2(\alpha^2-4)\dfrac{dA_3}{d\alpha} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2r(2r-1)A_r + 2(r-1)(n^2-2r+2)\alpha A_{r-1} \\ \qquad + (n^2-2r+4)(n^2-2r+5)A_{r-2} = 2n^2(\alpha^2-2)\dfrac{dA_{r-1}}{d\alpha} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2.3A_{\frac{n^2-3}{2}} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n^2(n^2-1)\alpha = 0. \end{array} \right.$$

Così per $n = 3$ abbiamo:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -6, \quad A_3 = 4\alpha$$

e quindi dalla equazione (11):

$$\text{sn}\, 3z = \text{sn}\, z \frac{3 - 4\alpha u^2 + 6u^4 - u^8}{1 - 6u^4 + 4\alpha u^6 - 3u^8}.$$

L'equazione (23) fu data da *Jacobi* senza dimostrazione nel Volume IV del Giornale di *Crelle*.

8.

Se poniamo nella equazione (11) del numero precedente p in luogo di n e $\frac{z}{p}$ in luogo di z, abbiamo:

$$(1)\quad (-1)^{\frac{p-1}{2}} \operatorname{sn} z = \operatorname{sn}\frac{z}{p}\,\frac{k^{\frac{p^2-1}{2}} \operatorname{sn}^{p^2-1}\frac{z}{p} + A_2 k^{\frac{p^2-5}{2}} \operatorname{sn}^{p^2-5}\frac{z}{p} + \ldots + (-1)^{\frac{p-1}{2}} p}{1 + A_2 k^2 \operatorname{sn}^4\frac{z}{p} + \ldots + (-1)^{\frac{p-1}{2}} p k^{\frac{p^2-1}{2}} \operatorname{sn}^{p^2-1}\frac{z}{p}}\,.$$

Risolvendo questa equazione di grado p^2 rispetto a $\operatorname{sn}\frac{z}{p}$, otteniamo $\operatorname{sn}\frac{z}{p}$ espresso in funzione di $\operatorname{sn} z$, ossia avremo le formule che danno la *divisione* dell' argomento delle funzioni ellittiche per un numero intero, reale e dispari p.

Le radici della equazione (1) sono le p quantità che si ottengono prendendo nella espressione:

$$(2)\qquad \operatorname{sn}\frac{z + 2r\omega + 2s\omega'}{p}$$

per r ed s tutti i valori interi e reali minori di p.

Infatti, mutando z in $z + 2m\omega + 2n\omega'$, essendo m ed n due numeri interi e reali qualunque, il primo membro della equazione (1) non muta, quindi non deve mutare neppure il secondo, e per ciò, se $\operatorname{sn}\frac{z}{p}$ è una radice della equazione, ne sarà radice anche $\operatorname{sn}\frac{z + 2m\omega + 2n\omega'}{p}$. Di questo numero infinito di radici soltanto p^2 sono differenti, essendo necessario e sufficiente, affinchè sia soddisfatta l'equazione:

$$\operatorname{sn}\frac{z + 2m\omega + 2n\omega'}{p} = \operatorname{sn}\frac{z + 2r\omega + 2s\omega'}{p}$$

che si abbiano le due congruenze:

$$\begin{matrix} m \equiv r \\ n \equiv s \end{matrix} \pmod{p}\,.$$

Quindi avremo tutte le radici della equazione (1) prendendo per r ed s nella espressione (2) tutti i residui differenti rispetto al modulo p, o anche tutti i numeri interi e reali minori di p.

Dalla equazione (1), per mezzo delle note relazioni tra le radici e i coefficienti, si deducono immediatamente le formule :

$$(3)\qquad \sum_{0}^{p-1}{}_r \sum_{0}^{p-1}{}_s \operatorname{sn}\left(\frac{z+2r\omega+2s\omega'}{p}\right) = p \operatorname{sn} z\,,$$

$$(4)\qquad \prod_{0}^{p-1}{}_r \prod_{0}^{p-1}{}_s \operatorname{sn}\left(\frac{z+2r\omega+2s\omega'}{p}\right) = (-r)^{\frac{p-1}{2}} \frac{\operatorname{sn} z}{k^{\frac{p^2-1}{2}}}\,.$$

Supponiamo ora che p sia un numero primo e passiamo alla risoluzione della equazione (1). Per determinare algebricamente le p^2 radici (2) di queste equazioni basterà trovare il valore della nota funzione di *Lagrange* :

$$(5)\qquad L_{m,n}(z) = \sum_{0}^{p-1}{}_r \sum_{0}^{p-1}{}_s \alpha^{mr+ns} \operatorname{sn} \frac{z+2r\omega+2s\omega'}{p}\,,$$

dove α è una radice immaginaria p^{esima} della unità.

Sostituendo alle funzioni ellittiche i loro valori espressi per le funzioni Jacobiane dalle formule (1) del n.° 2, riducendo allo stesso denominatore, sommando ed indicando con $N_{m,n}(z)$ il numeratore che sarà una funzione intera di z, si ottiene:

$$L_{m,n}(z) = \frac{N_{m,n}(z)}{\prod_{0}^{p-1}{}_r \prod_{0}^{p-1}{}_s \theta_{1,0}\left(\frac{z+2r\omega+2s\omega'}{p}\right)}\,.$$

Ma, ponendo mente alla equazione (6) del n.° 15. P. I, si ricava:

$$\prod_{0}^{p-1}{}_r \prod_{0}^{p-1}{}_s \theta_{1,0}\left(\frac{z+2r\omega+2s\omega'}{p}\right) = e^{az+b}\,\theta_{1,0}(z)\,,$$

dove a e b sono indipendenti da z. Onde includendo la funzione intera e^{-az-b} nella funzione intera $N_{m,n}$, avremo :

$$(6)\qquad L_{m,n}(z) = \frac{N_{m,n}(z)}{\theta_{1,0}(z)}\,.$$

Ora dalla equazione (5) si deduce facilmente :

$$(7)\qquad L_{m,n}(z+\omega) = -\,\alpha^{-m\left(\frac{p+1}{2}\right)} L_{m,n}(z)\,,\qquad L_{m,n}(z+\omega') = \alpha^{n\left(\frac{p+1}{2}\right)} L_{m,n}(z)\,.$$

Sostituendo nelle equazioni (7) il valore (6), osservando l'equazioni (4) e (5) del n.° 6. P. I, e ponendo :

$$(8)\qquad \alpha = e^{-\frac{8\pi i}{p}}\,,$$

si ottiene :

$$\mathrm{N}_{m,n}(z+\omega) = -e^{\frac{4m\pi i}{p}}\mathrm{N}_{m,n}(z),$$

$$\mathrm{N}_{m,n}(z+\omega') = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left[2\left(z-\frac{2n\omega}{p}\right)+\omega'\right]}\mathrm{N}_{m,n}(z).$$

Ponendo:

$$\mathrm{N}_{m,n}(z) = e^{\frac{4m\pi iz}{p\omega}}\mathrm{V}\left(z+\frac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right),$$

$$u = z+\frac{2m\omega'-2n\omega}{p},$$

abbiamo:

$$\text{(9)}\quad \mathrm{V}(u+\omega) = -\mathrm{V}(u), \qquad \mathrm{V}(u+\omega') = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2u+\omega')}\mathrm{V}(u).$$

ed essendo $\mathrm{V}(u)$ una funzione intera di u, sarà:

$$\mathrm{V}(u) = \mathrm{A}_{m,n}\,\theta_{1,1}(u),$$

dove $\mathrm{A}_{m,n}$ è indipendente da u. Quindi avremo:

$$\mathrm{N}_{m,n}(z) = \mathrm{A}_{m,n}\,e^{\frac{4m\pi iz}{p\omega}}\theta_{1,1}\left(z+\frac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right),$$

$$\text{(10)}\quad \mathrm{L}_{m,n}(z) = \mathrm{A}_{m,n}\,e^{\frac{4m\pi iz}{p\omega}}\frac{\theta_{1,0}\left(z+\frac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right)}{\theta_{1,0}(z)}\,\mathrm{sn}\left(z+\frac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right).$$

Per determinare $\mathrm{A}_{m,n}$ pongo nella equazione (10) $z+\frac{p\omega'}{2}$ in luogo di z, ed osservando che si ha dalla equazione (5), ponendo mente alla equazione (14) del n.º 2:

$$\mathrm{L}_{m,n}\left(z+\frac{p\omega'}{2}\right) = \sum_0^{p-1}{}_r\sum_0^{p-1}{}_s\frac{\alpha^{mr+ns}}{k\,\mathrm{sn}\left(z+\frac{2r\omega+2s\omega'}{p}\right)},$$

e dalla equazione (10) del n.º 10. P. I:

$$\Theta_{1,0}\left(z+\frac{2m\omega'-2n\omega}{p}+\frac{p\omega'}{2}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(pz+2m\omega'-2n\omega+\frac{p^2\omega'}{4}\right)}\Theta_{1,1}\left(z+\frac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right),$$

$$\Theta_{1,0}\left(z+\frac{p\omega'}{2}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(pz+\frac{p^2\omega'}{4}\right)}\Theta_{1,1}(z),$$

ottengo:

$$\sum_{0}^{p-1}{}_r \sum_{0}^{p-1}{}_s \frac{\alpha^{mr+ns}}{\operatorname{sn}\left(\dfrac{z+2r\omega+2s\omega'}{p}\right)} = \mathrm{A}_{m,n}\, e^{\frac{4m\pi i z}{p\omega}} \frac{\Theta_{1,0}\left(z+\dfrac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right)}{\Theta_{1,0}(z)\operatorname{sn} z}.$$

Moltiplico i due membri di questa equazione per $\dfrac{z}{p}$, pongo $z=0$, ed ho:

$$1 = \mathrm{A}_{m,n} \frac{\Theta_{1,0}\left(\dfrac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right)}{p\,\Theta_{1,0}(0)}$$

onde :

$$\mathrm{A}_{m,n} = \frac{p\Theta_{1,0}(0)}{\Theta_{1,0}\left(\dfrac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right)} = \frac{p}{\theta_{1,0}\left(\dfrac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right)},$$

e quindi:

$$\mathrm{L}_{m,n}(z) = p e^{\frac{4m\pi i z}{p\omega}} \frac{\theta_{1,0}\left(z+\dfrac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right)}{\theta_{1,0}(z)\,\theta_{1,0}\left(\dfrac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right)} \operatorname{sn}\left(z+\frac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right).$$

Prendendo per σ il minimo intero positivo che sodisfa alla congruenza :

$$m\sigma + n \equiv 0 (\text{mod. } p),$$

e ponendo :

$$(11) \qquad \varpi_\sigma = \frac{\omega'+\sigma\omega}{p},$$

avremo :

$$(12) \qquad \mathrm{L}_{m,n}(z) = p e^{\frac{4m\pi i z}{p\omega}} \frac{\theta_{1,0}(z+2m\varpi_\sigma)}{\theta_{1,0}(2m\varpi_\sigma)\,\theta_{1,0}(z)} \operatorname{sn}(z+2m\varpi_\sigma).$$

Ora sia :

$$(13) \qquad \omega = \Omega, \quad \omega' = p\Omega' - \sigma\Omega\,, \qquad \frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{\Lambda'}{\Lambda}, \qquad \frac{\Omega}{\Lambda} = \mathrm{M}\,,$$

dalla equazione (21) del n° 18. P. I, avremo :

$$(14) \qquad \theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = \theta^{p}_{1,0}(z) \prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t \left(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 2t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 z\right).$$

Le equazioni (11) e (13) danno :

$$\varpi_\sigma = \Omega' = \Lambda' M$$

quindi :

$$(15) \quad e^{-\frac{2m\pi i}{\Lambda}(2z+2m\Lambda')}\,\theta_{1,0}\left(\frac{z}{M},\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = \theta^{p}_{1,0}(z+2m\varpi_\sigma)\,\Pi_t{}_1^{\frac{p-1}{2}}(1-k^2\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma\,\mathrm{sn}^2(z+2m\varpi_\sigma))\cdot$$

e ponendo $z = 0$;

$$(16) \qquad e^{-\frac{4m^2\pi i\Lambda'}{\Lambda}} = \theta^{p}_{1,0}(2m\varpi_\sigma)\,\Pi_t{}_1^{\frac{p-1}{2}}(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma\,\mathrm{sn}^2 2m\varpi_\sigma)$$

Dividendo la equazione (15) per il prodotto dell'equazioni (14) e (16), otteniamo :

$$\frac{\theta_{1,0}(z+2m\varpi_\sigma)}{\theta_{1,0}(z)\,\theta_{1,0}(2m\varpi_\sigma)} = e^{-\frac{4m\pi iz}{p\omega}}\sqrt[p]{\Pi_t{}_1^{\frac{p-1}{2}}\frac{(1-k^2\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma\,\mathrm{sn}^2 2m\varpi_\sigma)(1-k^2\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma\,\mathrm{sn}^2 z)}{[1-k^2\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma\,\mathrm{sn}^2(z+2m\varpi_\sigma)]}}$$

e quindi, ponendo :

$$\Pi_t{}_1^{\frac{p-1}{2}}\frac{(1-k^2\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma\,\mathrm{sn}^2 2m\varpi_\sigma)(1-k^2\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma\,\mathrm{sn}^2 z)}{1-k^2\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma\,\mathrm{sn}^2(z+2m\varpi_\sigma)} = \mathrm{T}_{m,n}(z),$$

avremo :

$$(17) \quad \mathrm{L}_{m,n}(z) = p\sqrt[p]{\mathrm{T}_{m,n}(z)}\,\mathrm{sn}\left(z+\frac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right) = \sum_{0}^{p-1}{}_r\sum_{0}^{p-1}{}_s\,\alpha^{mr+ns}\,\mathrm{sn}\left(\frac{z+2r\omega+2s\omega'}{p}\right)$$

Dalle p^2 equazioni che si ottengono dalla equazione (17) dando ad r e ad s tutti i valori interi e reali minori di p, si ricava facilmente :

$$(18) \quad p\,\mathrm{sn}\left(\frac{z+2r\omega+2s\omega'}{p}\right) = \sum_{0}^{p-1}{}_m\sum_{0}^{p-1}{}_n\,\alpha^{-mr+ns}\mathrm{sn}\left(z+\frac{2m\omega'-2n\omega}{p}\right)\sqrt[p]{\mathrm{T}_{m,n}(z)},$$

che dà le p^2 radici della equazione (1) espresse *algebricamente* per $\mathrm{sn}\,z$, e per le p^2-1 quantità $\mathrm{sn}\frac{2m\omega'-2n\omega}{p}$, le quali sono radici della equazione di grado p^2-1, che si ottiene dalla equazione (1) ponendovi $z = 0$, e della quale tratteremo in seguito.

La formula (18) è dovuta a *Jacobi* che la pubblicò senza dimostrazione nel Volume IV del Giornale di *Crelle.*

9.

Passiamo ora a determinare tutte le funzioni ellittiche che sono razionalmente esprimibili per una funzione ellittica data, colla sola condizione che l' argomento di quelle sia una funzione lineare e intera dell'argomento di questa; cioè proponiamoci di determinare M, N, λ e le funzioni razionali e intere f ed F in modo che sia:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{sn}(Mz + N, \lambda) = \frac{f[\operatorname{sn}(z, k)]}{F[\operatorname{sn}(z, k)]}.$$

La risoluzione di questo problema costituisce la *trasformazione* delle funzioni ellittiche.

Mutando z in $z + 2\omega$ oppure in $z + \omega'$ non muta evidentemente il secondo membro dell'equazione (1); quindi non dovrà mutare neppure il primo. Pertanto $2M\omega$ ed $M\omega'$ dovranno essere periodi di $\operatorname{sn}(z, \lambda)$, e indicando con Λ e Λ' ciò che divengono ω ed ω' quando si cangia k in λ, avremo:

$$\text{(2)} \qquad 2M\omega = 2\alpha\Lambda + \beta\Lambda', \qquad M\omega' = 2\gamma\Lambda + \delta\Lambda',$$

Mutando z in $\omega - z$ il secondo membro della equazione (1) non muta, quindi non dovrà mutare neppure il primo, ed avremo:

$$\operatorname{sn}(M\omega - Mz + N, \lambda) = \operatorname{sn}[M\omega + 2N - (Mz + N), \lambda] = \operatorname{sn}(Mz + N, \lambda),$$

onde:

$$M\omega + 2N = (2p + 1)\Lambda + q\Lambda',$$

e sostituendo il valore di $M\omega$ tratto dalla prima dell'equazioni (2), si ottiene:

$$\text{(3)} \qquad N = (2p + 1 - \alpha)\frac{\Lambda}{2} + (2q - \beta)\frac{\Lambda'}{4},$$

dove p e q sono interi e reali qualunque.

Risolvendo l'equazioni (2) e ponendo:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta,$$

abbiamo:

$$\text{(4)} \qquad \frac{2\Lambda}{M} = \frac{2\delta\omega - \beta\omega'}{\Delta}, \qquad \frac{\Lambda'}{M} = \frac{\alpha\omega' - 2\gamma\omega}{\Delta}.$$

Ora tutti i valori di z per i quali non muta la funzione $\operatorname{sn}(Mz + N, \lambda)$ sono dati dalle due espressioni:

$$z + 2m\frac{\Lambda}{M} + m'\frac{\Lambda'}{M} = z + 2\frac{(m\delta - m'\gamma)}{\Delta}\omega + \frac{(\alpha m' - \beta m)}{\Delta}\omega',$$

$$(2n + 1)\frac{\Lambda}{M} + n'\frac{\Lambda'}{M} - \frac{2N}{M} - z = \omega - z + 2\frac{(n\delta - n'\gamma)}{\Delta}\omega + \frac{(n'\alpha - n\beta)}{\Delta}\omega'.$$

Quindi le radici della funzione intera:

$$\text{(5)} \qquad F(x)\operatorname{sn}(Mz + N, \lambda) - f(x)$$

saranno date tutte dalla formula:

$$(6)\qquad x = \mathrm{sn}\left(z + 2\frac{(m\delta - m'\gamma)}{\Delta}\omega + \frac{(m'\alpha - m\beta)}{\Delta}\omega'\right).$$

Osserviamo ora che ponendo le congruenze :

$$m\delta - m'\gamma \equiv t\,, \quad m'\alpha - m\beta \equiv s \pmod{\Delta}$$

abbiamo :

$$\alpha t + \gamma s \equiv 0,$$

e prendendo :

$$\alpha + \gamma r \equiv 0,$$

si ottiene :

$$s \equiv rt.$$

Dunque i valori dati dalla formula (6) si riducono ai soli Δ compresi nella formula:

$$x = \mathrm{sn}\left(z + \frac{t}{\Delta}(2\omega + r\omega')\,,\ k\right)$$

dove a t si diano successivamente i valori $0, 1, 2, \ldots \Delta - 1$. Quindi le radici distinte della funzione intera (5) sono Δ, e poichè questa funzione finchè z conserva un valor generale non può avere radici eguali senza che $f(x)$ ed $F(x)$ abbiano fattori comuni, che si suppongono tolti nelle formule (1), Δ sarà precisamente il grado della funzione (5), e quindi tanto f quanto F non potranno essere di grado superiore a Δ, e una di esse sarà certamente di grado Δ.

Cominciamo da considerare il caso in cui si ha :

$$(7)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \Delta = 1.$$

Le due funzioni f ed F saranno di primo grado, cioè ponendo :

$$(8)\qquad y = \mathrm{sn}(\mathrm{M}z + \mathrm{N}, \lambda)\,, \qquad x = \mathrm{sn}(z, k),$$

avremo :

$$(9)\qquad y = \mathrm{A}\frac{1 + \mathrm{B}x}{1 + \mathrm{C}x}.$$

Qui occorre distinguere due casi, secondo che nella relazione (2) β è pari o dispari.

1° Sia β' un numero pari eguale a $2\beta'$. Poniamo :

$$\Lambda = \mathrm{M}\Omega\,, \qquad \Lambda' = \mathrm{M}\Omega'\,;$$

avremo dall'equazioni (2) :

$$(10)\qquad \omega = \alpha\Omega + \beta'\Omega', \qquad \omega' = 2\gamma\Omega + \delta\Omega'.$$

Se β' è un numero pari, dall'equazione (7) si deducono facilmente le congruenze :

$$(11)\qquad \alpha \equiv 1\,, \quad \beta' \equiv 0\,, \quad 2\gamma \equiv 0\,, \quad \delta \equiv 1 \pmod{2}.$$

*

Quindi togliendo dal valore (3) di N i multipli di 2Λ e di Λ' che non mutano il valore di y, resteranno per N soltanto i quattro valori essenzialmente distinti :

$$N = 0, \qquad N = \Lambda, \qquad N = \frac{\Lambda'}{2}, \qquad N = \frac{\Lambda'}{2} + \Lambda.$$

Quando $N = 0$, l'equazioni (10) e le congruenze (11) ci pongono precisamente nel caso 4.° del n.° 16. P. I, e quindi dalle formule (17) di quel numero si ricava facilmente :

$$\lambda^2 = k^2, \quad \mathrm{sn}(z, \lambda) = \mathrm{sn}(z, k).$$

Per gli altri valori di N basterà rammentare le formule (2) e (14) del num.° 2, e avremo nelle formule (8) e (9) :

$$(12) \quad \left\{ \lambda = k, \; M = 1, \quad \begin{array}{ll} N = 0, & y = x, \\ N = \Lambda, & y = -x, \\ N = \dfrac{\Lambda'}{2}, & y = \dfrac{1}{kx}, \\ N = \dfrac{\Lambda'}{2} + \Lambda, & y = -\dfrac{1}{kx}. \end{array} \right.$$

Se β' è un numero dispari, avremo le congruenze :

$$(13) \qquad \alpha \equiv 1, \quad \beta' \equiv 1, \quad 2\gamma \equiv 0, \quad \delta \equiv 1 \pmod{2},$$

e le relazioni (10) colle congruenze (13) ci porranno nel caso 1.° del n.° 16. P. I; onde, prendendo $N = 0$, dalla formula (14) di quel numero si ottiene :

$$(14) \quad \left\{ \lambda = \frac{1}{k}; \; M = k; \quad \begin{array}{ll} N = 0, & y = kx, \\ N = \Lambda, & y = -kx, \\ N = \dfrac{\Lambda'}{2}, & y = \dfrac{1}{x}, \\ N = \dfrac{\Lambda'}{2} + \Lambda, & y = -\dfrac{1}{x}. \end{array} \right.$$

2.° Sia β un numero dispari. Togliendo dal valore (3) di N i multipli di e 2Λ di Λ', con che non si muta il valore di y, avremo i soli quattro valori dintisti :

$$(15) \qquad N = (1-\alpha)\frac{\Lambda}{2} + \frac{\Lambda'}{4}, \; N = (1-\alpha)\frac{\Lambda}{2} + \frac{\Lambda'}{4} + \Lambda,$$

$$N = (1-\alpha)\frac{\Lambda}{2} - \frac{\Lambda'}{4}, \quad N = (1-\alpha)\frac{\Lambda}{2} - \frac{\Lambda'}{4} + \Lambda.$$

Ora la funzione :

$$\operatorname{sn}\left(Mz + (1-\alpha)\frac{\Lambda}{2} + \frac{\Lambda'}{4},\ \lambda\right)$$

si annulla prendendo :

$$z = (\alpha - 1)\frac{\Lambda}{2M} - \frac{\Lambda'}{4M} = \left(\gamma + \delta(\alpha - 1)\right)\frac{\omega}{2} + \left(\beta(1-\alpha) - \alpha\right)\frac{\omega'}{4},$$

e diviene infinita quando sia :

$$z = -(\alpha - 1)\frac{\Lambda}{2M} + \frac{\Lambda'}{2M} = -\left(\gamma + \delta(\alpha - 1)\right)\frac{\omega}{2} - \left(\beta(1-\alpha) - \alpha\right)\frac{\omega'}{4};$$

quindi nella formula (9) avremo :

$$(16) \qquad C = -B = \frac{1}{\operatorname{sn}\left[\left(\gamma + \delta(\alpha - 1)\right)\frac{\omega}{2} + \left(\beta(1-\alpha) - \alpha\right)\frac{\omega'}{4}\right]}.$$

Dalle formule (2) del num.° 10. P. I. si ha :

$$\operatorname{sn}\left(\frac{\omega'}{4} + \frac{\rho\omega'}{3} + \frac{\sigma\omega}{2}\right) = \frac{i^\sigma}{\sqrt{k}}\,\frac{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{n(\sigma+1)}\,q^{\frac{(2n+1)(n+\rho+1)}{2}}}{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{n(\sigma+1)}\,q^{\frac{n(2n+2\rho+1)}{2}}}$$

$$= \frac{i^\sigma}{\sqrt{k}}\,\frac{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{n(\sigma+1)}\,q^{\frac{(2n+1)(n+\rho+1)}{2}}}{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{(n-\rho-1)(\sigma+1)}\,q^{\frac{(2n-1)(n-\rho-1)}{2}}};$$

quindi :

$$(17) \qquad \operatorname{sn}\left(\frac{\omega'}{4} + \frac{\rho\omega'}{2} + \frac{\sigma\omega}{2}\right) = \frac{i^{\sigma+2(\rho+1)(\sigma+1)}}{\sqrt{k}}.$$

Ponendo :

$$\sigma = \gamma + \delta(\alpha - 1), \quad \rho = \frac{\beta - 1 - \alpha(\beta + 1)}{2}$$

e osservando che si ha $\beta + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ 2)$, l'equazione (16) diviene :

$$(18) \qquad C = -B = i^\varepsilon\sqrt{k}$$

dove :

$$\varepsilon \equiv -\gamma + \delta(1-\alpha)(\beta+2) (\mathrm{mod.}\ 4),$$

e la equazione (9) prende la forma:

$$(19) \qquad y = \mathrm{A}\,\frac{1 - i^{\varepsilon}\,x\sqrt{k}}{1 + i^{\varepsilon}\,x\sqrt{k}}.$$

Pongo $z = 0$, ed osservando la formula (17), ottengo:

$$(20) \qquad \mathrm{A} = \frac{i^{1+\alpha}}{\sqrt{\lambda}},$$

Facendo $z = \frac{\omega}{2} = \frac{\alpha\Lambda}{2} + \frac{\beta\Lambda'}{4}$, avremo:

$$\mathrm{sn}\left(\frac{\Lambda}{2} + \frac{\beta+1}{2}\,\frac{\Lambda'}{2}, \lambda\right) = \frac{i^{1+\alpha}}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{1 - i^{\varepsilon}\sqrt{k}}{1 + i^{\varepsilon}\sqrt{k}},$$

onde quando $\frac{\beta+1}{2}$ è pari sarà:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = i^{-(1+\alpha)}\,\frac{1 + i^{\varepsilon}\sqrt{k}}{1 - i^{\varepsilon}\sqrt{k}}, \qquad \mathrm{A} = \frac{1 + i^{\varepsilon}\sqrt{k}}{1 - i^{\varepsilon}\sqrt{k}},$$

e quando $\frac{\beta+1}{2}$ è dispari:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = i^{1+\alpha}\,\frac{1 - i^{\varepsilon}\sqrt{k}}{1 + i^{\varepsilon}\sqrt{k}}, \qquad \mathrm{A} = i^{2+2\alpha}\,\frac{1 - i^{\varepsilon}\sqrt{k}}{1 - i^{\varepsilon}\sqrt{k}},$$

e quindi in generale:

$$(21) \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = i^{(-1)^{\frac{\beta+1}{2}}(1+\alpha)}\,\frac{1 + (-1)^{\frac{\beta+1}{2}}\,i^{\varepsilon}\sqrt{k}}{1 - (-1)^{\frac{\beta+1}{2}}\,i^{\varepsilon}\sqrt{k}}, \quad \mathrm{A} = (-1)^{\frac{(\beta+1)(1+\alpha)}{2}}\,\frac{1 + (-1)^{\frac{\beta+1}{2}}\,i^{\varepsilon}\sqrt{k}}{1 - (-1)^{\frac{\beta+1}{2}}\,i^{\varepsilon}\sqrt{k}}.$$

Per determinare M derivo rapporto a z l'equazione (19), ed ottengo:

$$(22) \qquad \mathrm{M}\;\mathrm{sn}\left(\mathrm{M}z + (1-\alpha)\frac{\Lambda}{2} + \frac{\Lambda'}{4}, \lambda\right)\mathrm{dn}\left(\mathrm{M}z + (1-\alpha)\frac{\Lambda}{2} + \frac{\Lambda'}{4}, \lambda\right)$$

$$= -\,\frac{2i^{\varepsilon}\sqrt{k}\,\mathrm{A}}{(1 + i^{\varepsilon}x\sqrt{k})^2}\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,.$$

Pongo $z = 0$, ed osservando che dalla equazione (17) si ha:

$$\mathrm{sn}\left((1-\alpha)\frac{\Lambda}{2} + \frac{\Lambda'}{4}, \lambda\right) = \frac{i^{1-\alpha}}{\sqrt{\lambda}},$$

e quindi:

$$\operatorname{cn}\left((1-\alpha)\frac{\Lambda}{2}+\frac{\Lambda'}{4},\lambda\right)=\frac{i^{-\alpha}}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{1-i^{2+2\alpha}\lambda},$$

$$\operatorname{dn}\left((1-\alpha)\frac{\Lambda}{h}+\frac{\Lambda'}{4},\lambda\right)=\sqrt{1-i^{2+2\alpha}\lambda};$$

la equazione (22) darà :

$$M(1-i^{2+2\alpha}\lambda)=-2i^{2\alpha+\varepsilon+1}\sqrt{k},$$

e riducendo colla equazione (21), ottengo :

$$(23)\qquad M=(-1)^{\alpha+\frac{\beta-1}{2}}\frac{i}{2}\left(1+(-1)^{\frac{\beta+1}{2}}i^{\varepsilon}\sqrt{k}\right)^{2}.$$

e l'equazione (19) diviene :

$$(24)\qquad y=(-1)^{\frac{\beta+1}{2}}\frac{1+(-1)^{\frac{\beta+1}{2}}i^{\varepsilon}\sqrt{k}}{1-(-1)^{\frac{\beta+1}{2}}i^{\varepsilon}\sqrt{k}}\,\frac{1-i^{\varepsilon}x\sqrt{k}}{1+i^{\varepsilon}x\sqrt{k}}.$$

Quando N ha gli altri tre valori (15) valgono sempre le stesse formule (21) (23), e soltanto nella formula (24) si deve sostituire $-y$, $\frac{1}{\lambda y}$, $-\frac{1}{\lambda y}$ ad y.

Pertanto quando β è dispari avremo quattro sole trasformazioni lineari differenti, cioè :

$$(25)\quad\left\{\begin{aligned}
&\lambda^2=\left(\frac{1-\sqrt{k}}{i+\sqrt{k}}\right)^4,\ M=\frac{i}{2}(1+\sqrt{k})^2,\quad y=\pm\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\,\frac{1\pm x\sqrt{k}}{1\mp x\sqrt{k}},\\
&\lambda^2=\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^4,\ M=\frac{i}{2}(1-\sqrt{k})^2,\quad y=\pm\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\,\frac{1\pm x\sqrt{k}}{1\mp x\sqrt{k}},\\
&\lambda^2=\left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^4,\ M=\frac{i}{2}(1+i\sqrt{k})^2,\quad y=\pm\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\,\frac{1\pm ix\sqrt{k}}{1\mp ix\sqrt{k}},\\
&\lambda^2=\left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^4,\ M=\frac{i}{2}(1-i\sqrt{k})^2,\quad y=\pm\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\,\frac{1\pm ix\sqrt{k}}{1\mp ix\sqrt{k}}.
\end{aligned}\right.$$

Le formule (12), (14) e (25) danno tutte le possibili trasformazioni lineari, e se ne hanno soltanto 6 differenti per i moduli, 24 per i valori di y e 12 per quelli di y^2.

10.

Consideriamo ora il caso in cui è :

$$(1)\qquad \alpha\delta-\beta\gamma=p,$$

e p numero primo. Poichè la sostituzione (2) del numero precedente, come abbiamo dimostrato nel n.º 19. P. I, equivale a due consecutive, una di primo ordine e l'altra di una delle due forme:

$$(2) \qquad \omega = p\Omega\,, \qquad \omega' = \Omega';$$

$$(3) \qquad \omega = \Omega\,, \qquad \omega' = 2\rho\Omega + p\Omega';$$

dove ρ è un numero intero e reale minore di p, si potrà sempre riguardare una trasformazione di ordine p come risultante da una trasformazione lineare e da una trasformazione di ordine p nella quale l'equazioni (2) del numero precedente abbiano la forma (2) o (3). Pertanto ci dovremo limitare soltanto a queste ultime $p+1$ trasformazioni.

Sia $p = 2$. Per la trasformazione in cui ha luogo la sostituzione (2), dalle formule (22), (24), (25) e (26) del n.º 17. P. I, si ricava facilmente:

$$(4) \qquad \mathrm{sn}\left[(1+k')z, \lambda\right] = (1+k')\,\frac{\mathrm{sn}(\alpha, k)\,\mathrm{cn}(z, k)}{\mathrm{dn}(z, k)}\,, \qquad \lambda = \frac{1-k'}{1+k'}\,.$$

Per la trasformazione nella quale si ha $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, $\delta = 2$, dall'equazioni (8), (14), (20) e (21) del n.º 17, P. I, si ottiene:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{sn}\left[(1+k)z, \lambda\right] &= \frac{(1+k)\,\mathrm{sn}(z, k)}{1+k\,\mathrm{sn}^2(z, k)}\,, \\ \mathrm{cn}\left[(1+k)z, \lambda\right] &= \frac{\mathrm{cn}(z, k)}{1+k\,\mathrm{sn}^2(z, k)}\,, \\ \mathrm{dn}\left[(1+k)z, \lambda\right] &= \frac{1+k\,\mathrm{sn}^2(z, k)}{1+k\,\mathrm{sn}^2(z, k)}\,, \\ \lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\,, &\qquad \lambda' = \frac{1+k}{1+k}\,. \end{aligned} \right.$$

Ora sia p un numero primo dispari qualunque. Le $p+1$ trasformazioni di ordine p corrispondenti alle sostituzioni (2) e (3) sono date immediatamente dalle formule dei numeri 18 e 19 P. I.

Dall'equazioni (14), (15), (16) e (17) del n.º 18. P. I, abbiamo:

$$(5)\quad \begin{cases} M_\sigma \operatorname{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \dfrac{\prod_{t\,0}^{p-1} \operatorname{sn}(z + t\varpi_\sigma)}{\prod_{1}^{p-1} \operatorname{sn}(t\varpi_\sigma)}, \\[2ex] \operatorname{cn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \prod_{t\,0}^{p-1} \dfrac{\operatorname{cn}(z + t\varpi_\sigma)}{\operatorname{cn}(t\varpi_\sigma)}, \\[2ex] \operatorname{dn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \prod_{i\,0}^{p-1} \dfrac{\operatorname{dn}(z + t\varpi_\sigma)}{\operatorname{dn}(t\varpi_\sigma)}; \end{cases}$$

e dalle formule (20), (21), (22) c (23) dello stesso numero :

$$(6)\quad \begin{cases} M_\sigma \operatorname{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \operatorname{sn} z \prod_{t\,1}^{\frac{p-1}{2}} \dfrac{1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 z}{\operatorname{sn}^2(t\varpi_\sigma)}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 z}, \\[3ex] \operatorname{cn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \operatorname{cn} z \prod_{1}^{\frac{p-1}{2}} \dfrac{1 - \dfrac{\operatorname{dn}^2 t\varpi_\sigma}{\operatorname{cn}^2 t\varpi_\sigma} \operatorname{sn}^2 z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 z}, \\[3ex] \operatorname{dn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \operatorname{dn} z \prod_{1}^{\frac{p-1}{2}} \dfrac{1 - \dfrac{k^2 \operatorname{cn}^2 t\varpi_\sigma}{\operatorname{dn}^2 t\varpi_\sigma} \operatorname{sn}^2 z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma \operatorname{sn}^2 z}, \end{cases}$$

essendo :

$$(8)\qquad \varpi_\infty = \frac{\omega}{p}, \qquad \varpi_\sigma = \frac{\omega' + 2\sigma\omega}{p};$$

e dalle equazioni (9), (10) e (11) del n.° 19 P. I :

$$(9)\qquad M_\sigma = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \prod_{t\,1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{\operatorname{cn}^2 t\varpi_\sigma}{\operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma \operatorname{dn}^2 t\varpi_\sigma},$$

$$(10)\qquad \lambda_\sigma^2 = k^{2p} \prod_{t\,1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{\operatorname{cn}^8 t\omega_\sigma}{\operatorname{dn}^8 t\varpi_\sigma},$$

$$(11)\qquad \lambda_\sigma'^2 = k'^{2p} \prod_{t\,1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{\operatorname{dn}^8 t\varpi_\sigma},$$

dalle quali si trae :

$$(12)\quad\begin{cases} M_\sigma \prod_1^{\frac{p-1}{2}} \operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma = (-1)^{\frac{p-1}{2}} M_\sigma \prod_1^{p-1} \operatorname{sn} t\varpi_\sigma = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{\dfrac{\lambda_\sigma}{k^p}}, \\ \prod_1^{\frac{p-1}{2}} \operatorname{cn}^2 t\varpi_\sigma = \prod_1^{p-1} \operatorname{cn} t\varpi_\sigma = \sqrt{\dfrac{\lambda_\sigma k'^p}{\lambda'_\sigma k^p}}, \\ \prod_1^{\frac{p-1}{2}} \operatorname{dn}^2 t\varpi_\sigma = \prod_1^{p-2} \operatorname{dn} t\varpi_\sigma = \sqrt{\dfrac{k'^p}{\lambda'_\sigma}}. \end{cases}$$

Onde l'equazioni (7) divengono :

$$(13)\quad\begin{cases} \operatorname{sn}\left(\dfrac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \sqrt{\dfrac{k^p}{\lambda_\sigma}} \prod_{t\,0}^{p-1} \operatorname{sn}(z + 2t\varpi_\sigma), \\ \operatorname{cn}\left(\dfrac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \sqrt{\dfrac{\lambda'_\sigma k^p}{\lambda_\sigma k'^p}} \prod_{t\,0}^{p-1} \operatorname{cn}(z + 2t\varpi_\sigma), \\ \operatorname{dn}\left(\dfrac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \sqrt{\dfrac{\lambda'_t}{k'^p}} \prod_{t\,0}^{p-1} \operatorname{dn}(z + 2t\varpi_\sigma). \end{cases}$$

Riducendo l'equazioni (7) colle formule (12), e ponendo :

$$u = \operatorname{sn} z\,,\quad v = \operatorname{cn} z\,,\quad w = \operatorname{dn} z\,,$$

abbiamo :

$$(14)\quad\begin{cases} u \prod_{t\,1}^{\frac{p-1}{2}}(u^2 - \operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma) - \dfrac{\lambda_\sigma}{kM_\sigma} \operatorname{sn}\left(\dfrac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) \prod_{t\,1}^{\frac{p-1}{2}}\left(u^2 - \dfrac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma}\right) = 0, \\ v \prod_{t\,1}^{\frac{p-1}{2}}(v^2 - \operatorname{cnc}^2 t\varpi) - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \dfrac{\lambda_\sigma}{kM_\sigma} \operatorname{cn}\left(\dfrac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) \prod_{t\,1}^{\frac{p-1}{2}}\left(v^2 - \dfrac{\operatorname{dn}^2 t\varpi_\sigma}{k^2 \operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma}\right) = 0, \\ w \prod_{t\,1}^{\frac{p-1}{2}}(w^2 - k^2 \operatorname{dnc}^2 t\varpi_\sigma) - \dfrac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{M_\sigma} \operatorname{dn}\left(\dfrac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) \prod_{t\,1}^{\frac{p-1}{2}}\left(w^2 - \dfrac{\operatorname{cn}^2 t\varpi_\sigma}{\operatorname{sn}^2 t\varpi_\sigma}\right) = 0. \end{cases}$$

Ora poichè queste equazioni non sono altro che l'equazioni (13) poste sotto altra forma, è chiaro che avranno rispettivamente per radici le quantità:

$$\operatorname{sn}(z + 2t\varpi_\sigma)\,,\quad \operatorname{cn}(z + 2t\varpi_\sigma)\,,\quad \operatorname{dn}(z + 2t\varpi_\sigma)\,,$$

dove per t si prendono tutti i valori interi non maggiori in valore assoluto di $\frac{p-1}{2}$. Quindi per le note relazioni tra i coefficienti e le radici, avremo :

$$
(15)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\lambda_\sigma}{k\mathrm{M}_\sigma}\,\mathrm{sn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=\sum_{-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\ \mathrm{sn}(z+2t\varpi_\sigma)\,,\\
&(-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{\lambda_\sigma}{k\mathrm{M}_\sigma}\,\mathrm{cn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=\sum_{-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\ \mathrm{cn}(z+2t\varpi_\sigma)\,,\\
&\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{\mathrm{M}_\sigma}\,\mathrm{dn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=\sum_{-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\ \mathrm{dn}\,(z+2t\varpi_\sigma)\,.
\end{aligned}\right.
$$

Dall'equazioni (20), (21), (22) e (23) del n.º 18. P. I, abbiamo:

$$
\mathrm{M}_\sigma\theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=\theta^p_{1,1}(z)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^2 z}-\frac{1}{\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma}\right),
$$

$$
\theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=\theta^p_{1,0}(z)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\left(1-k^2\mathrm{sn}\,2t\varpi_\sigma\,\mathrm{sn}^2 z\right),
$$

$$
\theta_{0,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=\theta^p_{0,1}(z)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\frac{1}{\mathrm{cn}^2 2t\varpi_\sigma}\left(\mathrm{dn}^2 2t\varpi_\sigma-\frac{k'^2\mathrm{sn}^2\,2t\varpi_\sigma}{\mathrm{cn}^2 z}\right),
$$

$$
\theta_{0,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=\theta^p_{0,0}(z)\prod_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\frac{1}{\mathrm{dn}^2 2t\varpi_\sigma}\left(\mathrm{cn}^2\,2t\varpi_\sigma+\frac{k'^2\mathrm{sn}^2\,2t\varpi_\sigma}{\mathrm{dn}^2 z}\right).
$$

Derivando logaritmicamente queste equazioni, a cagione dell'equazione (1) del n.º 4, si ottiene:

$$
\mathrm{Z}_{1.1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=p\,\mathrm{Z}_{1.1}(z)+\sum_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\frac{2\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma}{\mathrm{sn}\,z(\mathrm{sn}^2 z-\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma)},
$$

$$
\frac{1}{\mathrm{M}_\sigma}\mathrm{Z}_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=p\,\mathrm{Z}_{1,0}(z)-\sum_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\frac{2k^2\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma}{1-k^2\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma\,\mathrm{sn}^2 z},
$$

$$
\frac{1}{\mathrm{M}_\sigma}\mathrm{Z}_{0,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=p\,\mathrm{Z}_{0,1}(z)-\sum_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\frac{2k'^2\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma}{\mathrm{cn}\,z(\mathrm{cn}^2 z-\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma\,\mathrm{dn}^2 z)},
$$

$$
\frac{1}{\mathrm{M}_\sigma}\mathrm{Z}_{0.0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma},\lambda_\sigma\right)=p\,\mathrm{Z}_{0,0}(z)+\sum_1^{\frac{p-1}{2}}{}_t\frac{2k^2k'^2\,\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{sn}^2\,2t\varpi_\sigma}{\mathrm{dn}\,z\,(\mathrm{dn}^2 z-k^2\mathrm{sn}^2 2t\varpi_\sigma\,\mathrm{cn}^2 z)}.
$$

e riducendo coll'equazioni (19), (20), (21) e (22) del n.º 4, si ha:

*

$$(16)\qquad Z_{1,1}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \sum_{-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\, Z_{1,1}(z + 2t\varpi_\sigma)\,,$$

$$(17)\qquad \frac{1}{M_\sigma} Z_{\mu,\nu}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \sum_{-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\, Z_{\mu,\nu}(z + 2t\varpi_\sigma)\,,$$

dove μ e ν sono eguali a zero o all' unità , ma non ambedue contemporaneamente eguali all'unità.

Denotiamo con Y_σ e Y'_σ le quantità alle quali divengono eguali η e η', quando si muta k in λ_σ, e determiniamo le relazioni che esistono tra Y_σ , Y'_σ e η, η'.

Sostituendo nella equazione :

$$\frac{1}{M_\sigma} Z_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = pZ_{1,0}(z) - 2k^2 \mathrm{sn}\, z\, \mathrm{cn}\, z\, \mathrm{dn}\, z \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma\, \mathrm{sn}^2 z}$$

il valore di $Z_{1,0}$ che si trae dall'equazione (15) del n.º 12. P. I, abbiamo:

$$-\frac{Y_\sigma z}{M^2_\sigma \Lambda_\sigma} + \frac{\chi'_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right)}{\chi_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right)} = -\frac{p\eta z}{\omega} + \frac{\chi'_{1,0}}{\chi_{1,0}} - 2k^2 \mathrm{sn}\, z\, \mathrm{cn}\, z\, \mathrm{sn}\, z \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t \frac{\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma\, \mathrm{sn}^2 z}\cdot$$

Dividendo per z, ponendo $z = 0$, osservando l'equazione (12) e l'altra :

$$\left(\frac{\chi'_{1,0}(z)}{z}\right)_{z=0} = 0,$$

dimostrata nel n.º 12 P. I, si ottiene:

$$(18)\qquad \frac{Y_\sigma}{M^2_\sigma \Lambda_\sigma} = \frac{p\eta}{\omega} + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{2k^2}{M_\sigma}\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^p}},$$

onde :

$$(19)\qquad Y_\sigma = pM_\sigma \eta + (-1)^{\frac{p-1}{2}} 2k^2 \omega \sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^p}}\,,$$

$$(20)\qquad Y_\infty = (-1)^{\frac{p-1}{2}} M_\infty \eta + \frac{2k^2\omega}{p}\sqrt{\frac{\lambda_\infty}{k^p}}\,.$$

Sostituendo i valori (19) e (20) nella equazione :

$$Y_\sigma \Lambda'_\sigma - Y'_\sigma \Lambda_\sigma = 2\pi i\,,$$

abbiamo :

$$(21)\qquad Y'_\sigma = M_\sigma(\eta' + \sigma\eta) + (-1)^{\frac{p-1}{2}} 2k^2\left(\frac{\omega' + \sigma\omega}{p}\right)\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^p}},$$

$$(22)\qquad Y'_\infty = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(M_\infty p\eta' + 2k^2\omega'\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^p}}\right).$$

La prima equazione (17), ponendo:

$$(23)\qquad u = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,(z, k)\ ,$$

prende la forma:

$$\sqrt{\lambda_\sigma}\,\mathrm{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = u\prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_t\,\frac{u^2 - k^2\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,(t\varpi_\sigma)\,u^2},$$

$$(24)\qquad \sqrt{\lambda_\sigma}\,\mathrm{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = u\,\frac{u^{p-1} + B'_\sigma\,u^{p-3} + B''_\sigma\,\omega^{p-5} + \ldots + B_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}}{1 + B'_\sigma\,u^2 + B''_\sigma\,u^4 + \ldots + B_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}u^{p-1}},$$

dove:

$$(25)\qquad B_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} = \frac{1}{M_\sigma}\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k}}.$$

Ora, dalla equazione (21) del n°. 18 P. I, abbiamo:

$$\theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \theta^p_{1,0}\,(z)\left(1 + B'_\sigma\,u^2 + B''_\sigma u^2 + \ \ldots\ + B_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}\,u^{p-1}\right),$$

la quale equazione, osservando la seconda formula (16) del n°. 10. P. I, e le relazioni:

$$(26)\qquad M_\sigma = \frac{\omega}{\Lambda_\sigma},\quad M_\infty = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{\omega}{p\Lambda_\infty},$$

e ponendo:

$$(27)\qquad U_\sigma = \sqrt{\frac{\lambda'_\sigma}{k'\,M_\sigma}}\left(1 + B'_\sigma\,u^2 + \ \ldots\ + B_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}\,u^{p-1}\right) = \sum_{0}^{\frac{p-1}{2}}{}_r\,A_\sigma^{(r)}\,u^{2r},$$

darà:

$$(28)\qquad \Theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = \left(\frac{\pi}{k'\omega}\right)^{\frac{p-1}{2}}\Theta^p_{1,0}\,(z, k)\,U_\sigma\ ,$$

$$(29)\qquad \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\ \Theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\infty}, \lambda_\infty\right) = \left(\frac{\pi}{k'\omega}\right)^{\frac{p-1}{2}}\Theta^p_{1,0}(z, k)U_\infty$$

$$(29)\qquad A_\sigma = \sqrt{\frac{\lambda'_\sigma}{k' M_\sigma}}, \qquad A_\sigma^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\lambda_\sigma \lambda'_\sigma}{kk' M_6^3}}.$$

Dalla equazione (3) del n.º 14. P. I, ponendo mente alle relazioni (26) e all' equazioni del n.º 19. P. I. :

$$q_\sigma = \alpha\, q^{\frac{1}{p}}, \qquad q_\infty = q^p$$

abbiamo per tutti i valori di σ :

$$\frac{d^2\Theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right)}{dz^2} + 4pq\,\frac{\pi^2}{\omega^2}\,\frac{d\,\Theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right)}{dq} = 0.$$

Sostituendo il valore (28) o (29) secondo che σ è finito o infinito , effettuando le derivazioni e le riduzioni come nel n.º 7. e ponendo :

$$(31)\qquad \alpha = k + \frac{1}{k},$$

si ottiene :

$$(32)\qquad (1 - \alpha u^2 + u^4)\frac{d^2U_\sigma}{du^2} + (p-1)(\alpha u - 2u^3)\frac{dU_\sigma}{du}$$
$$+ p(p-1)u^2 U_\sigma = 2p(\alpha^2 - 4)\,\frac{dU}{d\alpha}.$$

Sostituendo nella equazione (32) il valore (27) di U_σ, si ricava:

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
&1.2\, A'_\sigma = 2p(\alpha^2 - 4)\frac{dA_\sigma}{d\alpha},\\
&3.4\, A''_\sigma + 2(p-2)\alpha A'_\sigma + p(p-1)A_\sigma = 2p(\alpha^4 - 4)\frac{dA'_\sigma}{d\alpha},\\
&5.6\, A'''_\sigma + 4(p-4)(\alpha A''_\sigma + (p-2)(p-3)A'_\sigma = 2p(\alpha^2 - 4)\frac{d\,A''_\sigma}{d\alpha},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&2r(2r-1)\alpha A^r_\sigma + (2r-2)(p-2r+2)\alpha A^{r-1}_\sigma + (p-2r+4)(p-2r+3)A^{r-2}_\sigma\\
&\qquad\qquad = 2p(\alpha^2 - 4)\frac{dA^{r-2}_\sigma}{d\alpha},\\
&(p-1)\alpha A_\sigma^{\frac{p-1}{2}} + 2.2\, A_\sigma^{\frac{p-3}{2}} = 2p(\alpha^2 - 4)\frac{dA_\sigma^{\frac{p+1}{2}}}{d\alpha}.
\end{aligned}\right.$$

Dalle formule (11) del n.° 13. P. I, ponendo mente alla formula (3) del n.° 14 e all'equazioni (16) del n.° 10. P. I, ed osservando che $q^p{}_\sigma = q$, si ricava:

$$\frac{d\log\sqrt{\frac{\pi}{k'\omega}}}{dq} = -\frac{\eta\omega}{4q\pi^2}, \quad \frac{d\log\sqrt{\frac{\pi}{\lambda'_\sigma\Lambda_\sigma}}}{dq} = -\frac{Y_\sigma\Lambda_\sigma}{4pq\pi^2},$$

$$\frac{d\log\sqrt{\frac{\pi}{k\omega}}}{dq} = -\frac{(\eta+\omega)\omega}{4q\pi^2}, \quad d\log\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_\sigma\Lambda_\sigma}} = -\frac{(Y_\sigma+\Lambda_\sigma)\Lambda_\sigma}{4pq\pi^2},$$

$$\frac{d\log\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}}{dq} = -\frac{(\eta+k^2\omega)\omega}{dq\pi^2}, \quad \frac{d\log\sqrt{\frac{\pi}{\Lambda_\sigma}}}{dq} = -\frac{(Y_\sigma+\lambda^2{}_\sigma\Lambda_\sigma)_\sigma\Lambda_\sigma}{4pq\pi^2},$$

onde, sottraendo queste equazioni una dall'altra, e sostituendo il valore di $Y_\sigma\Lambda_\sigma$ tratto dalla formula (19), abbiamo:

$$\frac{d\log\sqrt{\frac{\lambda'_\sigma}{k'M_\sigma}}}{dq} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{k^2\omega^2}{2pq\pi^2}\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^pM^2_\sigma}},$$

$$\frac{d\log\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{kM_\sigma}}}{dq} = (1-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{k^2\omega^2}{2pq\pi^2}\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^pM_{s\sigma}}} + \frac{\Lambda^2{}_\sigma - p\omega^2}{4pq\pi^2},$$

$$\frac{d\log\sqrt{\frac{1}{M_\sigma}}}{dq} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{k^2\omega^2}{2pq\pi^2}\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^pM^2_\sigma}} + \frac{\lambda^2{}_\sigma\Lambda^2{}_\sigma - pk^2\omega^2}{4pq\pi^2}.$$

ed, osservando che si ha:

$$\frac{d}{dq} = \frac{d}{d\alpha}\,\frac{d\alpha}{dk}\,\frac{dk}{dq} = \frac{k'^4\omega^2}{2kq\pi^2}\,\frac{d}{d\alpha} = -\frac{(\alpha^2-4)k}{2q\pi^2}\,\frac{d}{d\alpha},$$

si ottiene:

$$(34).\quad\left\{\begin{aligned}
&p(\alpha^2-4)\frac{d\sqrt{\frac{\lambda_{1\sigma}}{k'M_\sigma}}}{d\alpha} = (-1)^{\frac{p+1}{2}}\sqrt{\frac{\lambda_\sigma\lambda'_\sigma}{k^{p-2}k'M^3{}_\sigma}},\\
&p(\alpha^2-4)\frac{d\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{kM_\sigma}}}{d\alpha} = (-1)^{\frac{p+1}{2}}\frac{\lambda_\sigma}{k^{\frac{p-1}{2}}M_\sigma\sqrt{M_\sigma}} + \frac{1}{2}\left(p-\frac{1}{M^2{}_\sigma}\right)\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^3M_\sigma}},\\
&p(\alpha^2-4)\frac{d\sqrt{\frac{1}{M_\sigma}}}{d\alpha} = (-1)^{\frac{p+1}{2}}\sqrt{\frac{\lambda_\sigma}{k^{p-2}M^3{}_\sigma}} + \frac{k}{2}\left(p-\frac{\lambda^2{}_\sigma}{k^2M^2{}_\sigma}\right)\sqrt{\frac{1}{M_\sigma}}.
\end{aligned}\right.$$

Modificando convenientemente la dimostrazione si trova che queste formule valgono anche per $\sigma = \infty$.

Ora, essendo:

$$A_\sigma = \sqrt{\frac{\lambda'}{k' M_\sigma}}, \quad A_\sigma^{\frac{p-1}{2}} = \sqrt{\frac{\lambda_\sigma \lambda'_\sigma}{kk' M^3_\sigma}},$$

l' equazioni (34) ci danno il modo di esprimere le derivate successive di A_σ e di $A_\sigma^{\frac{p-1}{2}}$ prese rapporto ad α, per mezzo di $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{\lambda'}$ ed M. Quindi dall'equazioni (33) potremo trarre i valori di A'_σ, A''_σ, $\cdots$ espressi razionalmente per queste quantità, ed una equazione algebrica tra le medesime, essendo l'equazioni una di più dell'incognite.

11.

L'equazione (24) del numero precedente, ponendo:

$$x = \operatorname{sn}(z, k),$$

ed osservando l'equazioni (23) e (25), diviene:

$$(1) \qquad x^p \sqrt{k^p} - \frac{\lambda_\sigma \sqrt{k^p}}{k M_\sigma} \operatorname{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) x^{p-1} + \ldots\ldots - \sqrt{\lambda_\sigma} \operatorname{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = 0 \cdot$$

Poichè questa equazione equivale alla prima delle equazioni (15) del n.° precedente, le sue radici saranno:

$$(2) \qquad \operatorname{sn} z, \quad \operatorname{sn}(z + 2\varpi_\sigma), \quad \operatorname{sn}(z + 4\varpi_\sigma) \ldots \operatorname{sn}[z + (p-1)\varpi_\sigma],$$

ed avremo:

$$\sum_0^{p-1} \operatorname{sn}(z + 2r\varpi_\sigma) = \frac{\lambda_\sigma}{k M_\sigma} \operatorname{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) \cdot$$

Prendendo i $p+1$ valori *di* σ, sommando e rammentando il valore di ϖ_σ, abbiamo:

$$\sum \sum_0^{p-1}{}_r \operatorname{sn}(z + 2r\varpi_\sigma) = p \operatorname{sn} z + \sum_0^{p-1} \sum_0^{p-1} \operatorname{sn}\left(z + \frac{2m\omega + 2n\omega'}{p}\right)$$

$$= \sum \frac{\lambda_\sigma}{k M_\sigma} \operatorname{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right),$$

ed a cagione della formula (3) del n.° 8

$$(3) \qquad \operatorname{sn}(pz) = -\operatorname{sn} z + \sum \frac{\lambda_\sigma}{pk M_\sigma} \operatorname{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right) \cdot$$

Per risolvere algebricamente l'equazione (1), basterà determinare la funzione di Lagrange delle radici (2):

$$(4) \qquad L_{\sigma,n}(z) = \sum_{0}^{p-1} {}_m\, e^{-\frac{8nm\pi i}{p}} \mathrm{sn}(z + 2m\varpi_\sigma).$$

Esprimendo le funzioni ellittiche per le funzioni Jacobiane, ed osservando la formula (15) del n.º 18. P. I, abbiamo:

$$(5) \qquad L_{\sigma,n}(z) = \frac{N_{\sigma,n}(z)}{\theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right)},$$

dove $N_{\sigma,n}(z)$ è una funzione intera di z.

Ora tra i periodi corrispondenti al modulo λ_σ e quelli corrispondenti al modulo k esistono le relazioni:

$$\frac{\omega'}{\omega} = p\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma} - 2\sigma, \quad M_\sigma = \frac{\omega}{\Lambda_\sigma}, \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\Lambda'_\infty}{p\Delta_\infty}, \quad M_\infty = \frac{\omega}{p\Delta_\infty},$$

$$M_\sigma \Lambda_\sigma = \varpi_\sigma, \qquad M_\infty \Lambda'_\infty = \omega',$$

$$M_\sigma \Lambda_\sigma = \omega, \qquad M_\infty \Lambda_\infty = \varpi_\infty;$$

ossia per valori qualunque di σ finiti o infiniti:

$$(6) \qquad M_\sigma \Lambda'_\sigma = \mu\,\varpi_\sigma + \nu\,\omega', \qquad M_\sigma \Lambda_\sigma = \nu\,\varpi_\sigma + \mu\,\omega',$$

dove μ e ν sono eguali uno a zero e l'altro alla unità, e $\mu=0$ soltanto per $\sigma=\infty$. Potremo anche scrivere in generale:

$$(7) \qquad \varpi_\sigma = \frac{r\omega + s\omega'}{\mu}$$

dove $r = 2\sigma$, $s = 1$ quando σ è finito, ed $r = 1$, $s = 0$, quando $\sigma = \infty$.

Pertanto dalla equazione (4) avremo:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} L_{\sigma,n}(z + M_\sigma \Lambda_\sigma) &= -e^{\frac{4\nu n\pi i}{p}} L_{\sigma,n}(z), \\ L_{\sigma,n}(z + M_\sigma \Lambda'_\sigma) &= e^{\frac{4\mu n\pi i}{p}} L_{\sigma,n}(z); \end{aligned} \right.$$

e dalle formule (4) e (5) del n.º 6. P. I, si rileva:

$$(9)\quad \begin{cases} \theta_{1,0}\left(\dfrac{z+M_\sigma\Lambda_\sigma}{M_\sigma},\lambda_\sigma\right)=\theta_{1,0}\left(\dfrac{z}{M_\sigma},\lambda_\sigma\right), \\[2ex] \theta_{1,0}\left(\dfrac{z+M_\sigma\Lambda'_\sigma}{M_\sigma},\lambda_\sigma\right)=-e^{-\frac{\pi i}{\Lambda_\sigma}\left(\frac{2z}{M_\sigma}+\Lambda'_\sigma\right)}\theta_{1,0}\left(\dfrac{z}{M_\sigma},\lambda_\sigma\right). \end{cases}$$

Mediante le formule (8) e (9), dalla equazione (5) si ottiene:

$$(10)\quad \begin{cases} N_{\sigma,n}(z+M_\sigma\Lambda_\sigma)=-e^{\frac{4n\nu\pi i}{p}}N_{\sigma,n}(z), \\[2ex] N_{\sigma,n}(z+M_\sigma\Lambda'_\sigma)=-e^{-\frac{\pi i}{\Lambda_\sigma}\left[2\left(\frac{z}{M_\sigma}-\frac{2n\mu\Lambda_\sigma}{p}\right)+\Lambda'\right]}N_{\sigma,n}(z). \end{cases}$$

Poniamo:

$$(11)\qquad \varpi'_\sigma=\frac{\nu\Lambda'_\sigma-\mu\Lambda_\sigma}{p},\qquad x_{\sigma,n}=\frac{z}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma,$$

$$(12)\qquad N_{\sigma,n}(z)=e^{\frac{4\nu n\pi i z}{pM_\sigma\Lambda_\sigma}}\psi(x_{\sigma,n})$$

e dalle equazioni (10) avremo:

$$\psi(x_{\sigma,n}+\Lambda_\sigma)=-\psi(x_{\sigma,n}),$$

$$\psi(x_{\sigma,n}+\Lambda'_\sigma)=-e^{-\frac{\pi i}{\Lambda_\sigma}(2x_{\sigma,n}+\Lambda'_\sigma)}\psi(x_{\sigma,n});$$

e quindi:

$$\psi(x_{\sigma,n})=C_{\sigma,n}\,\theta_{1,1}(x_{\sigma,n},\lambda_\sigma)=C_{\sigma,n}\,\theta_{1,1}\left(\frac{z}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma,\lambda_\sigma\right).$$

Sostituendo questo valore nella equazione (12), e il valore ottenuto per $N_{\sigma,n}(z)$ nella equazione (5), si ha:

$$(13)\qquad L_{\sigma,n}(z)=C_{\sigma,n}\,e^{\frac{4n\nu\pi i z}{pM_\sigma\Lambda_\sigma}}\frac{\theta_{1,1}\left(\dfrac{z}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma,\lambda_\sigma\right)}{\theta_{1,0}\left(\dfrac{z}{M_\sigma},\lambda_\sigma\right)}.$$

Ora, per determinare $C_{\sigma,n}$, osserviamo che dall'equazione (4) si ottiene:

$$L_{\sigma,n}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{k\operatorname{sn}z}+\sum_1^{p-1}{}_m\frac{e^{-\frac{8mn\pi i}{p}}}{k\operatorname{sn}(z+2m\varpi_\sigma)},$$

e quando $s = 1$, ed $r = 2\sigma$, essendo p un numero dispari, $\frac{p-1}{4}$ o $\frac{3p-1}{4}$ sarà intero, e quindi nel secondo membro della equazione (4) vi sarà un termine in cui $m = \frac{p-1}{4}$ oppure $m = \frac{3p-1}{4}$, e poichè si ha:

$$\mathrm{sn}\left[z + 2\left(\frac{p-1}{4}\right)\varpi_\sigma + \frac{\varpi_\sigma}{2}\right] = \mathrm{sn}\left(z + \frac{r\omega + s\omega'}{2}\right) = \frac{(-1)^\sigma}{k\,\mathrm{sn}\,z},$$

$$\mathrm{sn}\left[z + 2\left(\frac{3p-1}{4}\right)\varpi_\sigma + \frac{\varpi_\sigma}{2}\right] = \mathrm{sn}\left(z + \frac{r\omega + s\omega'}{2}\right) = \frac{(-1)^\sigma}{k\,\mathrm{sn}\,z},$$

sarà:

$$\mathrm{L}_{\sigma,n}\left(z + \frac{\varpi_\sigma}{2}\right) = \pm \frac{e^{\frac{2n\pi i}{p}}}{k\,\mathrm{sn}\,z} + \mathrm{T}(z),$$

essendo $\mathrm{T}(z)$ una funzione che non diviene infinita per $z = 0$: e poichè delle due quantità μ e ν sempre una è nulla e una eguale ad uno, ed r è pari, ed $s = 1$ quando ν è nulla, avremo in generale:

$$(14)\qquad \mathrm{L}_{\sigma,n}(z + \mathrm{M}_\sigma \Lambda'_\sigma) = \mathrm{L}_{\sigma,n}\left(z + \frac{\mu\varpi_\sigma + \nu\omega'}{2}\right) = (-1)^\sigma \frac{e^{\frac{2\mu n\pi i}{p}}}{k\,\mathrm{sn}\,z} + \mathrm{T}(z):$$

Ma dalla formula (10) del n.° 10. P. I, si ricava:

$$(15)\left\{\begin{aligned} &\theta_{1,0}\left(\frac{z + \frac{1}{2}\mathrm{M}_\sigma \Lambda'_\sigma}{\mathrm{M}_\sigma}, \lambda_\sigma\right) = i\sqrt{\lambda_\sigma}\, e^{-\frac{\pi i}{\Lambda_\sigma}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma} + \frac{\Lambda'_\sigma}{4}\right)} \theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \lambda_\sigma\right), \\ &\theta_{1,1}\left(\frac{z + \frac{1}{2}\mathrm{M}_\sigma \Lambda'_\sigma}{\mathrm{M}_\sigma} + 2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma\right) = \frac{i}{\sqrt{\lambda_\sigma}}\, e^{-\frac{\pi i}{\Lambda_\sigma}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma} + 2n\varpi'_\sigma + \frac{\Lambda'_\sigma}{4}\right)} \theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma} + 2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma\right) \end{aligned}\right.$$

e quindi ponendo nella equazione (13) $z + \frac{1}{2}\mathrm{M}_\sigma \Lambda'_\sigma$ invece di z, mediante le formule (14) e (15), si ottiene:

$$(-1)^\sigma \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,z} + \mathrm{T}_1(z) = \mathrm{C}_{\sigma,n}\, e^{\frac{4n\nu\pi i z}{p\mathrm{M}_\sigma \Lambda_\sigma}} \frac{\theta_{1,0}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma} + 2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma\right)}{\lambda_\sigma\, \theta_{1,1}\left(\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}, \lambda_\sigma\right)}.$$

Moltiplico per $\frac{z}{\mathrm{M}_\sigma}$, e ponendo $z = 0$, ottengo:

$$\mathrm{C}_{\sigma,n} = (-1)^\sigma \frac{\lambda_\sigma}{k\mathrm{M}_\sigma\, \theta_{1,0}(2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma)}$$

e quindi :

$$(16)\quad L_{\sigma,n}(z)=(-1)^{\sigma}\frac{\lambda_\sigma}{kM_\sigma}e^{\frac{4n\nu\pi iz}{pM_\sigma\Lambda_\sigma}}\cdot\frac{\theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma,\lambda_\sigma\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma},\lambda_\sigma\right)\theta_{1,0}(2n\varpi'_\sigma;\lambda_\sigma)}\,\mathrm{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma,\lambda_\sigma\right)$$

Ora abbiamo sempre :

$$(17)\qquad \theta_{1,0}(pz,k)=\theta^{p}_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma},\lambda_\sigma\right)\Pi_t{}_{1}^{\frac{p-1}{2}}\left[1-\lambda_\sigma^2\,\mathrm{sn}^2 t\varpi_s\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{z}{M_\sigma},\lambda_\sigma\right)\right].$$

Infatti quando $\sigma=\infty$, essendo $\frac{\omega'}{\omega}=\frac{\Lambda_\infty}{p\Lambda_\infty}$, se facciamo sopra $\theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\infty},\lambda_\sigma\right)$ la trasformazione corrispondente alla sostituzione :

$$\frac{\Lambda'_\infty}{\Lambda_\infty}=p\frac{\Omega'}{\Omega},$$

avremo $\frac{\Omega'}{\Omega}=\frac{\omega'}{\omega}$, il nuovo moltiplicatore sarà $M_0=\frac{\Lambda_\infty}{\omega}$, e quindi $M_0M_\infty=\frac{1}{p}$, e il modulo della trasformata sarà k, e dalla formula (21) del n.° 18. P. I, avremo la equazione (17).

Quando σ è un numero finito, essendo $\frac{\omega'}{\omega}=p\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda_\sigma}-2\sigma$, se facciamo in $\theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma},\lambda_\sigma\right)$ la trasformazione corrispondente alla sostituzione :

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda_\sigma}=\frac{\Omega'}{p\Omega},$$

e poi la trasformazione lineare corrispondente alla sostituzione :

$$\frac{\Omega'}{\Omega}=\frac{\omega'_i}{\omega}+2\sigma,$$

che è quella del 4.° caso del n°. 16 , e non muta nè il modulo nè l' argomento, avremo :

$$\frac{\omega'}{\omega_i}=p\frac{\Lambda'_\sigma}{\Lambda}-2\sigma=\frac{\omega'}{\omega}$$

e quindi avremo anche in questo caso la formula (17).

L'equazioni (6) e (11) danno :

$$pM_\sigma\varpi'_\sigma=\nu M_\sigma\Lambda'_\sigma-\mu M_\sigma\Lambda_\sigma=\nu\omega'-\mu\omega,$$

e quindi la formula (17) dà :

$$(18)\qquad \theta_{1,0}(pz+2npM_\sigma\varpi'_\sigma, k)=e^{-\frac{2n\nu\pi i}{\omega}(2pz+2n\nu\omega')}\theta_{1,0}(pz,k)$$

$$\theta^p_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma, \lambda\right)\prod_t^{\frac{p-1}{2}}\left[1-\lambda_\sigma^2\,\mathrm{sn}^2\,t\varpi_\sigma\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{z}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma\right)\right]$$

e ponendo $z=0$:

$$(19)\qquad 1=e^{-\frac{4n^2\nu\pi i\omega'}{\omega}}\theta^p_{1,0}(2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma)\prod_t^{\frac{p-1}{2}}\left(1-\lambda_\sigma^2\,\mathrm{sn}^2 t\varpi_\sigma\,\mathrm{sn}^2(2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma)\right)$$

Dividendo la equazione (18) per il prodotto delle equazioni (17) e (19) e ponendo:

$$A_{\sigma,n}=\prod_t^{\frac{p-1}{2}}\frac{\left[1-\lambda_\sigma^2\,\mathrm{sn}^2(t\varpi_\sigma, k)\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right)\right]\left[1-\lambda_\sigma^2\,\mathrm{sn}^2(t\varpi_\sigma, k)\,\mathrm{sn}^2(2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma)\right]}{1-\lambda_\sigma^2\,\mathrm{sn}^2(t\varpi_\sigma, k)\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{z}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma\right)}$$

avremo:

$$e^{\frac{4n\nu\pi iz}{pM\Lambda_\sigma}}\frac{\theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}+2n\varpi_\sigma, \lambda_\sigma\right)}{\theta_{1,0}\left(\frac{z}{M_\sigma}, \lambda_\sigma\right)\theta_{1,0}(2n\varpi_\sigma, \lambda_\sigma)}=\sqrt[p]{A_{\sigma,n}},$$

e quindi:

$$(20)\qquad L_{\sigma,n}=(-1)^\sigma\frac{\lambda_\sigma}{kM_\sigma}\,\mathrm{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma\right)\sqrt[p]{A_{\sigma,n}},$$

da cui si ricava:

$$(21)\qquad (-1)^\sigma\frac{pkM_\sigma}{\lambda_\sigma}\,\mathrm{sn}(z+2m\varpi_\sigma, k)=\sum_n^{p-1}{}_0\, e^{\frac{8mn\pi i}{p}}\,\mathrm{sn}\left(\frac{z}{M_\sigma}+2n\varpi'_\sigma, \lambda_\sigma\right)\sqrt[p]{A_{\sigma,n}}.$$

14.

Passiamo ora alle trasformazioni di ordine n, quando n è un numero intero dispari e reale qualunque, cioè determiniamo λ ed M in modo che su $\left(\frac{z}{M}, \lambda\right)$ sia una funzione razionale di $\mathrm{sn}(z, k)$, nella quale il numeratore, e il denominatore siano di grado non $> n$, ed uno di essi eguale ad n.

Abbiamo già dimostrato che, se denotiamo con Λ e Λ' i valori dei periodi ω ed ω' corrispondenti al modulo λ, dovrà aversi:

$$(1)\qquad \frac{2\omega}{M}=2\alpha\Lambda+\beta\Lambda', \qquad \frac{\omega'}{M}=2\gamma\Lambda+\delta\Lambda';$$

$$(2)\qquad \alpha\delta-\beta\gamma=n,$$

e non esistono fattori comuni a tutti i quattro numeri interi α, β, γ e δ.

Sia n' il massimo comun divisore di α e β; n' sarà un divisore di n, avremo:

$$(3)\qquad n = n'n'' ,\qquad \alpha = \alpha'n' ,\qquad \beta = \beta'n'' ,$$

$$(4)\qquad \alpha'\delta - \beta'\gamma = n'' ,$$

e si potranno determinare due numeri interi e reali c ed d che sodisfino alla equazione :

$$(5)\qquad \alpha'd - c\beta' = 1 .$$

Dalle equazioni (4) e (5) si ottiene:

$$\alpha'\delta \equiv n''(\text{mod}\,\beta') ,\qquad \beta'\gamma \equiv -n''(\text{mod}\,\alpha'),$$

$$\alpha'dn'' \equiv n'' ,\qquad \beta'cn'' \equiv -n'' ;$$

onde, essendo α' e β' primi tra loro :

$$\delta - dn'' \equiv 0(\text{mod}\,\beta') ,\qquad \gamma - cn'' \equiv 0(\text{mod}\,\alpha'),$$

ed osservando l'equazioni (4) e (5), abbiamo:

$$\delta = dn'' + l\beta' ,\qquad \gamma = cn'' + l\alpha' ;$$

ed il numero l non ha fattori comuni con n' ed n''; perchè questi sarebbero evidentemente comuni ai quattro numeri α, β, γ e δ.

Dividendo l per n'' si ottiene :

$$l = qn'' + t ,$$

e quindi ponendo :

$$\delta' = d + q\beta' ,\qquad \gamma' = c + q\alpha' ,$$

si ottiene :

$$(6)\qquad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1 ;$$

$$(7)\qquad \delta = \delta'n'' + t\beta' ,\qquad \gamma = \gamma'n'' + t\alpha',$$

e se ne deduce che la sostituzione (1) equivale alle due successive :

$$(8)\qquad \frac{2\omega_1}{M_1} = 2\alpha'\Lambda + \beta'\Lambda' ,\qquad \frac{\omega'_1}{M_1} = 2\gamma'\Lambda + \delta'\Lambda' ;$$

$$(9)\qquad \frac{\omega}{M_2} = n'\omega_1 ,\qquad \frac{\omega'}{M_2} = 2t\omega_1 + n''\omega'_1 ;$$

$$(10)\qquad M_1M_2 = M .$$

la prima delle quali è di 1° ordine, come risulta dall'equazione (6), e la seconda è di ordine n, t è preso relativamente al modulo n'', e non esistono fattori comuni ai tre numeri n', n'' e t.

Potremo supporre sempre t primo con g', perchè dovendo essere preso relativamente al modulo g'', nelle sostituzioni nelle quali t ha fattori comuni con g', i quali non dividono g'', si prenderà $t' = t - g''$ invece di t, e t' sarà evidentemente primo con g'.

Se n è una potenza di un numero primo dispari p^μ, le trasformazioni differenti di ordine p^μ saranno $6p^{\mu-1}(p+1)$.

Infatti le trasformazioni differenti di ordine n sono in numero eguale al prodotto del numero delle trasformazioni di 1.° ordine per il numero delle sostituzioni differenti della forma (9). Il primo di questi numeri è eguale a 6 come abbiamo veduto nel n.° 9, il secondo è eguale a $p^{\mu-1}(p+1)$. Poichè si hanno p^μ trasformazioni corrispondenti a $n'=1$, $n''=p^\mu$, $t<p^\mu$; tante trasformazioni quanti sono i numeri inferiori a $p^{\mu-1}$ e primi con $p^{\mu-1}$, cioè $p^{\mu-1}-p^{\mu-2}$, corrispondenti a $n'=p$, $n''=p^{\mu-1}$, $t<p^{\mu-1}$ e primo con $p^{\mu-1}$; se ne hanno $p^{\mu-2}-p^{\mu-3}$ corrispondenti a $n'=p^2$, $n''=p^{\mu-2}$, $t<p^{\mu-2}$ e primo con $p^{\mu-2}$, ...; p corrispondenti a $n'=p^{\mu-1}$, $n''=p$, $t<p$, e quindi si ha in tutto un numero di trasformazioni differenti dato da

$$p^\mu+p^{\mu-1}-p^{\mu-2}+p^{\mu-2}-p^{\mu-3}+\ldots+p^2-p+p=p^{\mu-1}(p+1).$$

Se $n=p_1^{\mu_1}p_2^{\mu_2}\ldots p_r^{\mu_r}$ e $p_1, p_2, \ldots p_r$ numeri primi dispari differenti, il numero delle trasformazioni di ordine n sarà:

$$6p_1^{\mu_1-1}p_2^{\mu_2-1}\cdots p_r^{\mu_r-1}(p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_r+1).$$

Infatti poichè dev'essere $n'n''=n$, avremo:

$$n'=p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}p_2^{\nu_r}\cdots,\quad n''=p_{\nu_2}^{\mu_1-\nu_1}p_2^{\mu_2-1}\cdots p_r^{\mu_n-\nu_r}$$

e t sarà primo con n'; pertanto si potranno sempre determinare r numeri interi e reali in modo che sia:

$$p_2^{\mu_2-\nu_2}p_3^{\mu_3-\nu_3}\cdots p_r^{\mu_r-\nu_r}t_1+p_1^{\nu_1}p_3^{\mu_3-\nu_3}\cdots p_r^{\mu_r-\nu_r}t_2+p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}p_4^{\mu_4-\nu_6}\cdots p_r^{\mu_r-\nu_r}t_3+\ldots$$

$$+p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\ldots p_{r-1}^{\nu_r}t_r=t,$$

e t_1 sarà primo con $p_1^{\nu_1}$, t_2 con $p_2^{\nu_2}\ldots t_r$ con $p_r^{\nu_r}$. Quindi la sostituzione (9) equivarrà alle r sostituzioni successive:

$$(11)\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\Omega_1}{M'}=p_1^{\nu_1}\omega_1\,; & \dfrac{\Omega'_1}{M'}=p_1^{\mu_1-\nu_1}\omega'_1+2t_1\omega_1\,;\\ \dfrac{\Omega_2}{M''}=p_2^{\nu_2}\Omega_1\,; & \dfrac{\Omega'_2}{M''}=p_2^{\mu_2-\nu_2}\Omega'_1+2t_2\Omega_1\,;\\ \dfrac{\Omega_3}{M'''}=p_3^{\nu_3}\Omega_2\,; & \dfrac{\Omega'_3}{M'''}=p_3^{\mu_3-\nu_3}\Omega'_2+2t_3\Omega_2\,;\\ \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\\ \dfrac{\omega}{M^{(r)}}=p_r^{\nu_r}\Omega_{r-1}\,; & \dfrac{\omega'}{M^{(s)}}=p_r^{\mu_r-\nu_r}\Omega'_{r-1}+2t_r\Omega_{r-1}\,,\\ & M'M''\ldots M^{(r)}=M_2\,.\end{array}\right.$$

Dunque il numero delle trasformazioni differenti corrispondenti alla sostituzione (9), sarà eguale al prodotto dei numeri delle trasformazioni differenti che corrispondono a ciascuna delle sostituzioni (11), ossia sarà :

$$N=p_1^{\mu_1-1}(p_1+1)p_2^{\mu_2-1}(p_2+1)\ \ldots\ p_r^{\mu_r-1}(p_r+1),$$

che moltiplicato per il numero 6 delle trasformazioni lineari (8) dà precisamente il numero che volevamo dimostrare.

Per determinare tutte le trasformazioni differenti di ordine dispari qualunque n, basterà considerare quelle corrispondenti alle sostituzioni della forma :

$$(10)\qquad \omega=g'M\Lambda\,,\qquad \omega'=g''M\Lambda'-2tM\Lambda\,,$$

dove :

$$g'g''=n,$$

e i tre numeri g', g'' e t non hanno fattori comuni.

Poichè abbiamo :

$$M\Lambda=\frac{\omega}{g'}\,,\qquad M\Lambda'=\frac{g'\omega'+2t\omega}{n}\,,$$

le radici della funzione $\mathrm{sn}\left(\frac{z}{M}\,,\,\lambda\right)$ saranno date tutte dall'espressione :

$$\rho=mM\Lambda+m'M\Lambda'=\frac{m'g'\omega'+(2tm'+mg'')\omega}{n}$$

nella quale m ed m' sono numeri interi e reali qualunque.

Poichè t è primo con g' si potranno determinare due numeri interi e reali s ed l che soddisfacciano all'equazione:

$$m = sg' + 2tl:$$

onde avremo:

$$\rho = s\omega - l\omega' + (m' + lg'')\left(\frac{g'\omega' + 2t\omega}{n}\right),$$

ossia, ponendo:

$$\frac{g'\omega' + 2t\omega}{n} = \varpi_{g',t}, \quad m' + lg'' = r,$$

sarà:

$$(11 \qquad \rho = s\omega + l\omega_{,} + r\varpi_{g',t},$$

dove per r si dovranno prendere tutti i residui differenti rispetto al modulo n, e poichè n è dispari si potranno prendere per residui tutti i numeri della forma $2sr$ nei quali r è positivo e minore di n ed s è qualunque.

Reciprocamente; tutte le quantità della forma (11) sono della forma:

$$m\mathrm{M}\Lambda + m'\mathrm{M}\Lambda',$$

e quindi radici di $\mathrm{sn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \lambda\right)$.

Ora le quantità ρ sono tutte radici semplici della funzione:

$$(12) \qquad \overset{n-1}{\underset{0}{\Pi_m}} \,\mathrm{sn}\,(z + 2m\varpi_{g't}, k);$$

poichè per ogni valore di r esiste un sol valore positivo di $m < n$ per cui si ha:

$$2m + r \equiv 0 (\mathrm{mod.}\, n).$$

In modo analogo si dimostra che la funzione (12) e $\mathrm{sn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \lambda\right)$ hanno i medesimi infiniti. Quindi avremo:

$$\mathrm{sn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}}, \lambda\right) = \varphi(z) \overset{n-1}{\underset{0}{\Pi_m}} \,\mathrm{sn}(z + 2m\varpi_{g't}, k),$$

dove φ è una funzione intera di z.

Aumentando z successivamente di 2ω e di ω' si ottiene facilmente:

$$\varphi(z + 2\omega) = \varphi(z), \qquad \varphi(z + \omega') = \varphi(z),$$

e quindi $\varphi(z)$ sarà eguale a una costante C·

Dividendo per $\frac{z}{\mathrm{M}}$ e ponendo $z=0$, si ottiene il valore della costante C, ed abbiamo:

$$(13)\qquad \mathrm{M\,sn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}},\lambda\right)=\frac{\prod_{0}^{n-1}{}_m\,\mathrm{sn}(z+2m\varpi_{g't},k)}{\prod_{1}^{n-1}{}_m\,\mathrm{sn}(2m\varpi_{g't},k)}$$

Analogamente si dimostrano le altre due formule:

$$(14)\qquad \mathrm{cn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}},\lambda\right)=\prod_{0}^{n-1}{}_m\frac{\mathrm{cn}(z+2m\varpi_{g't},k)}{\mathrm{cn}(2m\varpi_{g't},k)},$$

$$(15)\qquad \mathrm{dn}\left(\frac{z}{\mathrm{M}},\lambda\right)=\prod_{0}^{n-1}{}_m\frac{\mathrm{dn}(z+2m\varpi_{g't},k)}{\mathrm{dn}(2m\varpi_{g't},k)}.$$

Ponendo $z=\frac{\omega}{2}=\frac{g'\mathrm{M}\Lambda}{2}$, abbiamo:

$$\mathrm{M}=(-1)^{\frac{g'-1}{2}}\prod_{1}^{n-1}\frac{\mathrm{snc}(2m\varpi_{g't},k)}{\mathrm{sn}(2m\varpi_{g't},k)}=(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{g'-1}{2}}\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{\mathrm{snc}^2(z+2m\varpi_{g't},k)}{\mathrm{sn}^2(2m\varpi_{g't},k)},$$

e in generale, poichè il segno di M può prendersi comunque nelle formule precedenti, potremo porre:

$$\mathrm{M}_{g't}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{\mathrm{snc}^2(2m\varpi_{g't},k)}{\mathrm{sn}^2(2m\varpi_{g't},k)}.$$

Ponendo

$$z=\frac{\omega+\omega'}{2}=\frac{\mathrm{M}\Lambda}{2}(g'+2t)+\frac{\mathrm{M}g''\Lambda'}{2},$$

avremo:

$$\sqrt{\lambda}=k^{\frac{n}{2}}\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{snc}^2(2m\varpi_{g't},k)$$

e ponendo nella equazione (15) $z=\frac{\omega}{2}=\frac{g'\mathrm{M}\Lambda}{2}$:

$$\sqrt{\lambda'}=k'^{\frac{n}{2}}\prod_{0}^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1}{\mathrm{dn}^2(2m\varpi_{g't},k)}\right).$$

15.

Se poniamo:

$$(1) \qquad \frac{\omega'}{\omega} = \varpi, \quad e^{i\pi\varpi} = q,$$

$$(2) \qquad \varphi(\varpi) = \sqrt{2}\sqrt[8]{e^{mi\pi\varpi}} \prod_1^\infty \frac{1 + e^{2m\pi i\varpi}}{1 + e^{(2m-1)\pi i\varpi}} = \sqrt{2}\sqrt[8]{q} \prod_1^\infty \frac{1 + q^{2m}}{1 + q^{2m-1}},$$

dalla formula (13) del n.° 17 P. I, abbiamo:

$$(3) \qquad \sqrt[4]{k} = \varphi(\varpi);$$

e poichè dall'equazioni (10) del numero precedente si ricava:

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{g'\varpi + 2t}{g''};$$

sarà:

$$\sqrt[4]{\lambda_{g't}} = \pm\sqrt{2}\sqrt[8]{q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t}} \prod_1^\infty \frac{1 + (q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2m}}{1 + (q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2m-1}};$$

dove α è una radice primitiva della equazione:

$$x^{g''} - 1 = 0.$$

Determiniamo quale dei due segni bisogna prendere, se vogliamo avere quello dei valori di $\sqrt[4]{\lambda_{g't}}$ che è dato anche dalla formula:

$$(4) \qquad \sqrt[4]{\lambda_{g't}} = \sqrt[4]{k^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{snc} 4m\left(\frac{g'\omega' + 2t\omega}{n}\right).$$

I numeri m si possono porre tutti sotto la forma:

$$m = lg'' \pm r,$$

dove:

$$l \leq \frac{g' - 1}{2}, \qquad r \leq \frac{g'' - 1}{2};$$

onde la equazione (4) potrà scriversi:

$$(5)\qquad \sqrt[h]{\lambda_{g''t}} = \sqrt[h]{k^n}\ \prod_{1}^{\frac{g'-1}{2}}{}_l \operatorname{snc}\frac{2lt\omega}{g'}\ \prod_{1}^{\frac{g''-1}{2}}{}_r \left\{\operatorname{snc} r\left(\frac{\omega'}{g''}+\frac{2t\omega}{n}\right)\right.$$

$$\left.\prod_{1}^{\frac{g'-1}{2}}{}_l \operatorname{snc}\left[r\left(\frac{\omega'}{g''}+\frac{2t\omega}{n}\right)+\frac{2lt\omega}{g'}\right]\operatorname{snc}\left[r\left(\frac{\omega'}{g''}+\frac{2t\omega}{n}\right)-\frac{2lt\omega}{g'}\right]\right\}.$$

Sostituendo alle funzioni ellittiche le loro espressioni in prodotti infiniti, abbiamo:

$$\prod_{1}^{\frac{g'-1}{2}} \operatorname{snc}\frac{2lt\omega}{g'} = 2^{\frac{g'-1}{2}}\frac{\sqrt[8]{q^{g'-1}}}{\sqrt[4]{k^{g'-1}}}\prod_{1}^{\frac{g'-1}{2}}{}_l \cos\frac{2lt\pi}{g'}\prod_{1}^{\infty}{}_m\frac{(1+q^{2m}e^{\frac{4lt\pi i}{g'}})(1+q^{2m}e^{-\frac{4lt\pi i}{g'}})}{(1+q^{2m-1}e^{\frac{4lt\pi i}{g'}})(1+q^{2m-1}e^{-\frac{4lt\pi i}{g'}})}.$$

Moltiplichiamo per la equazione (3) che può scriversi:

$$1 = \frac{\sqrt{2}\sqrt[8]{q}}{\sqrt[4]{k}}\prod_{1}^{\infty}\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}},$$

ed osservando le note relazioni:

$$\prod_{1}^{\frac{g'-1}{2}}\cos\frac{2lt\pi}{g'} = \frac{(-1)^{\frac{g'^2-1}{8}}}{2^{\frac{g'-1}{2}}},$$

$$(1+x)\prod_{1}^{\frac{g'-1}{2}}(1+xe^{\frac{4lt\pi i}{g'}})(1+xe^{-\frac{4lt\pi i}{g'}}) = 1+x^{g'},$$

abbiamo:

$$(6)\qquad \prod_{1}^{\frac{g'-1}{2}}\operatorname{snc}\frac{2lt\omega}{g'} = (-1)^{\frac{g'^2-1}{8}}\sqrt{2}\,\frac{\sqrt[8]{q^{g'}}}{\sqrt[4]{k^{g'}}}\prod_{1}^{\infty}{}_m\frac{1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2mg''}}{1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{(2m-1)g''}}.$$

Con riduzioni analoghe si ottiene:

$$(7)\qquad \prod_{1}^{\frac{g''-1}{2}}{}_r \operatorname{snc} r\left(\frac{\omega'}{g''}+\frac{2t\omega}{n}\right)\prod_{1}^{\frac{g'-1}{2}}{}_l \operatorname{snc}\left[r\left(\frac{\omega'}{g''}+\frac{2t\omega}{n}\right)+\frac{2lt\omega}{g'}\right]\operatorname{snc}\left[r\left(\frac{\omega'}{g''}+\frac{2t\omega}{n}\right)-\frac{2lt\omega}{g'}\right]$$

$$=\frac{\sqrt[8]{q^{\frac{g'}{g''}-g'}\alpha^{2t}}}{\sqrt[4]{k^{g'(g''-1)}}}\prod_{1}^{\frac{g''-1}{2}}{}_r\left(1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2r}\right)\prod_{1}^{\infty}{}_m\frac{\left[1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2(mg''+r)}\right]\left[1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2(mg''-r)}\right]}{\left[1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2(m-1)g''+2r}\right]\left[1+(q^{\frac{g'}{g''}}\alpha^{2t})^{2(m-1)g''-2r}\right]}.$$

Sostituendo i valori (6) e (7) nella formula (5), abbiamo:

$$\sqrt[k]{\lambda_{g't}} = (-1)^{\frac{g'^2-1}{8}} \sqrt{2} \sqrt[8]{q^{\frac{g'}{g''}} \alpha^{2t}} \prod_1^\infty \frac{1 + (q^{\frac{g'}{g''}} \alpha^{2t})^{2m}}{1 + (q^{\frac{g'}{g''}} \alpha^{2t})^{2m-1}},$$

ossia:

$$(8) \qquad \sqrt[k]{\lambda_{g't}} = \sqrt[k]{k^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{snc} m\left(\frac{g'\omega' + 2t\omega}{n}\right) = (-1)^{\frac{g'^2-1}{8}} \varphi\left(\frac{g'\varpi + 2t}{g''}\right).$$

Poniamo ora:

$$(9) \qquad \sqrt[k]{k} = u, \quad \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{snc} \frac{m(g'\omega' + 2t\omega)}{n} = x_{g't}, \quad \sqrt[k]{\lambda_{g't}} = v_{g't}$$

onde:

$$(10) \qquad v_{g't} = u^n x_{g't}.$$

Abbiamo dimostrato nel numero precedente che se $n = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2} \ldots\ldots p_s^{\alpha_s}$, il numero N dei valori differenti di $\sqrt[k]{\lambda_{g't}}$ è dato dalla formula:

$$N = p_1^{\alpha_1-1}, p_2^{\alpha_2-1} \ldots\ldots p_s^{\alpha_s-1} (p_1 + 1)(p_2 + 1) \ldots\ldots (p_s + 1);$$

quindi le due equazioni che hanno per radici tutti i valori di $x_{g't}$ e di $v_{g't}$ saranno di grado N. Sia la prima:

$$(11) \qquad x^N + A_1 x^{N-1} + \ldots + A_N = 0,$$

la seconda, a cagione della relazione (10), sarà:

$$(12) \qquad v^N + A_1 u^n v^{N-1} + A_2 u^{2n} v^{N-2} + \ldots + A_N u^{nN} = 0.$$

La equazione (12) che ha per radici tutti i valori differenti di $\sqrt[k]{\lambda_{g't}}$, si dice *l'equazione modulare* dell'ordine n.

Le quantità A_1, $A_2 \ldots A_N$ sono tutte funzioni razionali di u^8. Infatti, ponendo $z = 0$. nella prima delle formule (2) del n.º 7, abbiamo la equazione:

$$(13) \qquad N'_1 = 0,$$

le cui radici saranno le n^2-1 quantità della forma $\operatorname{sn}\left(\frac{2s\omega' + 2r\omega'}{n}\right)$ dove r ed s sono minori di n, ed hà i cofficienti funzioni razionali di $k^2 = u^8$. Ora le radici di questa equazione si potranno dividere in due classi, nella prima delle quali si comprendano quelle nelle quali r, s ed n non hanno fattori comuni, e nella seconda quelle nelle quali r, s ed n hanno un fattore comune. Le radici della seconda classe sono anche radici di equazioni di grado inferiore, le quali hanno pure i coefficienti funzioni razionali di u^8, perchè essendo μ il massimo comun divisore dei tre numeri r, s ed n, ed r', s', n' i quozienti che si ottengono dividendo r, s ed n per μ, esse prenderanno la forma: $\operatorname{sn} \dfrac{s'\omega' + 2r\omega'}{n'}$. Dunque la equazione (13) sarà riduttibile, e potrà ottenersi una equazione:

$$(14) \qquad N''_1 = 0,$$

la quale abbia per radici soltanto quelle della prima classe, e i coefficienti funzioni razionali di u^8.

Ora tutte le radici della prima classe della equazione (13) sono della forma:

$$(15) \qquad \operatorname{sn} q\left(\frac{g'\omega' + 2t\omega}{n}\right),$$

dove g' è un divisore di n, t è preso relativamente al modulo g'', essendo $n = g'g''$, e q è primo con n. Infatti se s, r ed n non hanno fattori comuni, e g' è il massimo comune divisore tra s ed n, avremo:

$$s = s'g',$$

e denotando con t' il minimo numero intero cha sodisfa la congruenza:

$$s't' \equiv r (\text{mod. } n),$$

il che può sempre farsi perchè s' è primo con n: avremo:

$$\operatorname{sn} \frac{s\omega' + 2r\omega}{n} = \operatorname{sn} s'\left(\frac{g'\omega' + 2t'\omega}{n}\right).$$

Se t' è eguale ad $lg'' + t$, prendendo il numero $z < g'$ che sodisfa la congruenza:

$$tz \equiv ls' (\text{mod. } g'),$$

avremo:

$$\operatorname{sn} s'\left(\frac{g'\omega' + 2t\omega}{n}\right) = \operatorname{su} s'\left(\frac{g'\omega' + 2(lg'' + t)\omega}{n}\right) = \operatorname{sn}(zg'' + s')\left(\frac{g'\omega' + 2t\omega}{n}\right)$$

$$= \operatorname{sn} q\left(\frac{g'\omega' + 2t\omega}{n}\right)$$

dove $t \equiv t'$ (mod. g'') , $q \equiv g''z + s'$(mod. n) e primo con n , perchè abbiamo $q \equiv s'$(mod. g''), $qt \equiv r$ (mod. n), r primo con g', ed s' primo con g''.

Il numero dei sistemi differenti di valori di g' e t nei quali g' è un divisore di n, e t è preso relativamente al modulo g'' è precisamente eguale ad N, e il numero dei valori di q primi con n ed inferiori ad n essendo :

$$\theta(n) = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_s^{\alpha_s - 1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_s - 1) ,$$

il numero delle radici (15) sarà :

$$\nu = \mathrm{N}\theta(n) = p_1^{2\alpha_1 - 2} p_2^{2\alpha_2 - 2} \dots p_s^{2\alpha_s - 2} (p_1^2 - 1)(p_2^2 - 1) \dots (p_s^2 - 1).$$

e ν sarà il grado della equazione (14).

Ora dalle formule (1) del n.° 7, denotando con $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$ due funzioni razionali di x e di u^8 e ponendo :

$$\varpi_{g't} = \frac{g'\omega' + 2t\omega}{n} ,$$

abbiamo :

$$\mathrm{cn}\ 2r\varpi_{g't} = \psi_2(\mathrm{sn}^2\varpi_{g't}) , \qquad \mathrm{dn}\ 2r\varpi_{g't} = \psi_3(\mathrm{sn}^2\varpi_{g't}) :$$

onde prendendo nella seconda formula (9) :

$$2r \equiv m(\mathrm{mod.}\ n),$$

avremo :

$$x^\sigma_{g't} = \prod_r^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{snc}\ 2r\varpi_{g't} = f(\mathrm{sn}^2\varpi_{g't}) ,$$

denotando con $f(x)$ una funzione razionale di x e di u^8.

Ora ponendo $q\varpi_{g't}$ in luogo di $\varpi_{g't}$, se q è primo con n , i fattori di $x^\sigma_{g't}$ si permutano uno nell'altro : abbiamo dunque :

$$x^\sigma_{g't} = \frac{\sum_q f(\mathrm{sn}^2 q\varpi_{g't})}{\theta(n)} ,$$

e quindi :

$$\sum_{g'} \sum_t x^\sigma_{g't} = \frac{\sum_{g'} \sum_t \sum_q f(\mathrm{sn}^2 q\ \varpi_{gt})}{\theta(n)}$$

Ma il secondo membro di questa equazione è una funzione razionale e simmetrica delle ν radici della equazione (14), dunque è una funzione razionale di u^8, e le somme delle potenze simili delle radici della equazione (11), e quindi i coefficienti A_1 , A_2 ... A_N sono funzioni razionali di u^8, come volevamo dimostrare.

Se poniamo:

$$(16) \qquad sn \equiv \rho_r (\text{mod. } 8),$$

è chiaro che la equazione (12) potrà porsi sotto la forma:

$$(17) \qquad B_0 v^N + B_1 u^{\rho_1} v^{N-1} + B_2 u^{\rho_2} v^{N-2} + \ldots B_N u^{\rho_N} = 0,$$

dove B_0, B_1 ... B_N indicano funzioni razionali e intere di u^8.

L'equazioni modulari (12) godono di molte importanti proprietà. Le principali sono contenute nei seguenti teoremi.

Teorema 1. *Mutando* u *in* v *e* v *in* εu, *essendo* $\varepsilon = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ *l'equazione modulare di ordine* n *dispari non varia.*

Infatti, denotando con u' e v' ciò che divengono u e v mutando ϖ in $\frac{\varpi}{n}$, abbiamo:

$$u' = \varphi\left(\frac{\varpi}{n}\right) = v_{10}, \qquad v'_{n0} = \varepsilon\varphi(\varpi) = \varepsilon u;$$

le quali equazioni dimostrano evidentemente il teorema.

Teorema 2. *Mutando* u *in* $\frac{1}{\text{u}}$ *e* v *in* $\frac{1}{\text{v}}$ *l'equazione modulare di ordine* n *dispari non varia.*

Infatti dalle formule (14) del n.° 16. P. I. abbiamo:

$$\text{snc}\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{\text{snc}(z, k)}$$

e nella funzione di modulo $\frac{1}{k}$, ω ed ω' divengono Λ e Λ' determinati dall'equazioni:

$$(18) \qquad k\omega = \alpha\Lambda + \beta\Lambda', \qquad k\omega' = \gamma\Lambda + \delta\Lambda';$$

dove:

$$\alpha \equiv \beta \equiv \delta \equiv 1, \quad \gamma \equiv 0 (\text{mod. } 2).$$

Quindi denotando con $v'_{g't}$ ciò che diviene $v_{g't}$ quando si sostituisce $\frac{1}{k}$ a k, avremo:

$$v'_{g't} = \frac{1}{u^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \text{snc}\left[m\left(\frac{g'\Lambda' + 2t\Lambda}{n}\right), \frac{1}{k}\right] = \frac{1}{u^n \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \text{snc}\left[\frac{m}{n}\left(\frac{g'\Lambda'}{k} + \frac{2t\Lambda}{k}\right), k\right]}.$$

Ma dall'equazioni (18) si ricava:

$$\frac{\Lambda}{k} = \delta\omega - \beta\omega', \qquad \frac{\Lambda'}{k} = \alpha\omega' - \gamma\omega,$$

onde :

$$v'_{g't} = \frac{1}{u^n \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{snc} \frac{m}{n} \left[(\alpha g' - 2\beta t)\, \omega' + (2t\delta - \gamma g')\omega \right]} = \frac{1}{v_{g_1' t_1}}$$

essendo g'_1 il massimo comun divisore tra $\alpha g' - 2\beta t$ ed n. Dunque mutando u in $\frac{1}{u}$, una radice $v_{g't}$ diviene eguale all'inversa di un altra, ossia v diviene $\frac{1}{v}$.

Teorema 3. *Mutando* u^8 *in* $1 - u^8$, v^8 *diviene* $1 - v^8$.

Infatti, mutiamo u^8 in $1 - u^8$ ossia k in k', e denotiamo anche con $v'_{g't}$ ciò che diviene $v'_{g't}$. La quantità ω diverrà $i\omega$, ed ω diverrà $-i\omega'$. Quindi, a cagione dell'equazioni (17) del n° 3, avremo :

$$v'_{g't} = u'^n \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{suc}\left[mi\left(\frac{g'\omega - 2t\omega'}{n}\right), k' \right] = u'^n \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\operatorname{dn} m\left(\frac{2t\omega' - g'\omega}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt[8]{1 - v^8_{g'_1 t_1}}}$$

denotando con g'_1 il massimo comun divisore di $2t$ ed n.

Teorema 4. *Quando* $u = 1$ *la equazione modulare di ordine* n *dispari diviene:*

$$(v - 1)^{\chi(n) - 1} (v - \varepsilon)^{N + 1 - \chi(n)} = 0\,,$$

dove $\chi(n)$ *denota il numero dei divisori di* n.

Infatti, quando $u = 1$, $k^2 = 1$, $k' = 0$, e quindi :

$$\omega' = 2i \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = i\pi, \qquad \omega = 2 \int_0^1 \frac{dy}{1 - y^2} = \log \frac{1 + y}{1 - y} = \infty,$$

$$\varpi = 0\,, \qquad q = 1\,;$$

onde :

$$\operatorname{snc} \frac{mg'\omega'}{n} = 1\,, \qquad \operatorname{snc} \frac{m(g'\omega' + 2t\omega)}{n} = 2 \cos \frac{2mt\pi}{n}\,,$$

e quindi :

$$v_{g'0} = 1\,, \qquad v_{g't} = 2^{\frac{n-2}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{2mt\pi}{n} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} = \varepsilon.$$

Dunque avremo sempre tante radici della equazione modulare eguali all'unità positiva, quanti sono i divisori di n meno uno, cioè :

$$\chi(n) - 1 = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots)(\alpha_s + 1) - 1$$

e tutte le altre, che sono in numero di $N+1-\chi(n)$, eguali ad ε, come volevamo dimostrare.

In un termine della equazione modulare (12), nel quale l'esponente di v è $N-s$, quello di u è $\equiv sn(\text{mod. } 8)$; onde se abbiamo:

$$n = 8\alpha + \eta\,, \qquad N - 1 = 8l + \sigma\,,$$

denotando con μ e ν i rispettivi esponenti di v ed u, sarà:

$$\mu \equiv \sigma + 1 - s(\text{mod. } 8)\,, \qquad \nu \equiv s\eta \equiv \eta(\sigma+1) - \eta\mu\,.$$

Ora, osservando che quando p è un intero dispari, si ha;

$$p^h(p+1) \equiv p + 1(\text{mod. } 8)$$

qualunque sia il numero intero h, si ottiene:

$$N\eta \equiv N\,(\text{mod. } 8),$$

e quindi:

$$\eta(\sigma+1) \equiv \sigma + 1(\text{mod.} 8).$$

Dunque, denotando con r il minimo residuo positivo di μ rispetto al modulo 8, nei termini nei quali l'esponente di v è $\equiv r(\text{mod. } 8)$, l'esponente di u sarà

$$\equiv (\sigma + 1 - \eta r)(\text{mod. } 8)\,,$$

dove $(\sigma+1-\eta r)$ indica il minimo residuo positivo di $\sigma+1-\eta r$ rispetto al modulo 8, e la equazione (12) potrà scriversi nel modo seguente:

$$(19) \qquad \sum_0^7{}_r\, u^{(\sigma+1-\eta r)}\, v^r \sum_0^l{}_s \sum_0^l{}_t\, b^r_{st}\, u^{8s}\, v^{8t} = 0\,.$$

Mutando u in v e v in εu questa equazione diviene:

$$\sum_0^7{}_r\, \varepsilon^r u^r v^{(\sigma+1-\eta r)} \sum_0^l{}_s \sum_0^l{}_t\, b^r_{st}\, u^{8t}\, v^{8s} = \sum_0^7{}_r\, \varepsilon^{(\sigma+1-\eta r)} u^{(\sigma+1-\eta r)}\, v^r \sum_0^l \sum_0^l b^{(\sigma+1-\eta r)}_{ts} u^{8s} v^{8t} = 0.$$

Confrontando questa equazione colla (19) si vede che i termini che hanno per coefficienti le quantità b^ρ_{ss} nelle quali

$$(20) \qquad \rho(\eta+1) \equiv \sigma + 1(\text{mod. } 8),$$

differiscono soltanto per il fattore ε^ρ; dunque tutti i coefficienti delle medesime potenze di u e di v non differiranno, a cagione del teorema 1, altro che per il fattore ε^ρ, e avremo:

$$(21) \qquad b^r_{st} = \varepsilon^\rho\, b^{(\sigma+1-\eta r)}_{ts}\,.$$

Mutando u in $\dfrac{1}{u}$ e v in $\dfrac{1}{v}$ l'equazione (19) diviene:

$$\sum_0^7 {}_r u^{\eta r} v^{\sigma+1-r} \sum_0^l \sum_0^l b^r_{st} u^{8(l-s)} v^{8(l-r)} = \sum_0^7 {}_r u^{(\sigma+1-\eta r)} v^r \sum_0^l \sum_0^l b^{(\sigma+1-r)}_{l-s,\, l-t} u^{8s} v^{8t} = 0.$$

Ora in questa equazione il termine che contiene v^N ha il suo coefficiente eguale a b_{l0} ; mentre nella equazione (19) questo coefficiente è $b^{(\sigma+1)}_{0l} = \varepsilon^\rho b^0_{l0}$; dunque, per il teorema 2, tutti i coefficienti delle medesime potenze di u e v differiranno nelle due equazioni per il solo fattore ε^ρ, e avremo:

$$(22) \qquad b^r_{st} = \varepsilon^\rho b^{(\sigma+1-r)}_{l-s,\, l-t}.$$

Sostituendo nella equazione (19) i valori :

$$(23) \quad \begin{cases} u = \sqrt{2}\, \sqrt[8]{q}\, \prod_1^\infty \dfrac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}} = \sqrt{2}\, \sqrt[8]{q}(1 - q + 2q^2 \ldots), \\[2ex] v_{n0} = \varepsilon\sqrt{2}\, \sqrt[8]{q^n}\, \prod_1^\infty \dfrac{1+q^{2mu}}{1+q^{(2m-1)n}} = \varepsilon\sqrt{2}\, \sqrt[8]{q^n}(1 - q^n + 2q^{2n} \ldots) \end{cases}$$

i termini dello stesso ordine rispetto a q dovranno annullarsi tra loro, e avremo tante relazioni lineari quante occorrono dopo quelle che si possono ottenere dal teorema 3, per determinare tutti i coefficienti b^r_{st}. I termini di ordine minimo danno immediatamente :

$$(24) \qquad b^0_{00} = b^0_{10} = \ldots = b^0_{\alpha-1,\,0} = 0, \quad b^1_{00} = -\varepsilon 2^{\frac{n-1}{2}} b^0_{\alpha 0}.$$

Teorema 5. *Gli* N *valori dei moduli trasformati* $\lambda^2 = v^8$ *sono radici una equazione di grado* N, *che ha i coefficienti funzioni razionali di* $k^2 = u^8$.

Infatti, se poniamo nella equazione (19) successivamente v, $ve^{\frac{\pi i}{4}}$, $ve^{\frac{2\pi i}{4}}$, ... $ve^{\frac{7\pi i}{4}}$ in luogo v e facciamo il prodotto dei risultati, otteniamo una equazione la quale contiene soltanto potenze intere e positive di $v^8 = \lambda^2$, che è di grado N e ha per radici i moduli trasformati :

$$(25) \qquad \mu(\lambda^2, k^2) = 0.$$

Ma queste sostituzioni successive, e questo prodotto equivalgono a porre successivamente u, $ue^{-\frac{\eta\pi i}{4}}$, $ue^{-\frac{2\eta\pi i}{4}}$, . . . $ue^{-\frac{2\pi i\eta}{4}}$ in luogo di u e moltiplicare i risultati. Dunque l'equazione (25) avrà i coefficienti funzioni razionali di $k^2 = u^8$, come volevamo dimostrare.

Determiniamo ora l'equazioni modulari degli ordini dispari più bassi.

1° Sia $n = 3$, avremo:

$$N - 1 = \sigma = 3, \quad n = \varkappa = 3, \quad l = 0, \quad \alpha = 0;$$

quindi i sistemi dei valori $[r, (\sigma + 1 - \eta r)]$ nei quali non entrano numeri maggiori di N sono:

$$(0, 4), \quad (1, 1), \quad (3, 3), \quad (4, 0)$$

e la equazione modulare sarà:

$$b^0_{00} u^4 + b^1_{00} uv + b^3_{00} u^3 v^3 + b^4_{00} v^4 = 0,$$

e l'equazioni (21) daranno:

$$b^0_{00} = - b^4_{00}, \quad b^1_{00} = - b^3_{00}, \quad b^1_{00} = 2b^0_{00}$$

onde dividendo per b^0_{00} l'equazione diviene:

$$u^4 - v^4 + 2uv(1 - u^2v^2) = 0.$$

2° Sia $n = 5$, avremo:

$$N - 1 = \sigma = 5, \quad n = \eta = 5, \quad l = 0, \quad \alpha = 0;$$

onde i sistemi dei valori $[r, (\sigma + 1 - \eta r)$ nei quali non entrano numeri maggiori di 6, sono:

$$(0, 6), \quad (1, 1), \quad (2, 4), \quad (4, 2), \quad (5, 5), \quad (6, 0),$$

l'equazione modulare sarà:

$$b^0_{00} u^6 + b^1_{00} uv + b^2_{00} u^4 v^2 + b^4_{00} u^2 v^4 + b^5_{00} u^5 v^5 + b^6_{00} v^6 = 0$$

e le equazioni (21), (22) e (24) daranno:

$$b^0_{00} = - b^6_{00}, \quad b^2_{00} = - b^4_{00}, \quad b^1_{00} = - b^5_{00}, \quad b^1_{00} = 4b^0_{00},$$

e quindi avremo:

$$u^6 - v^6 + 4uv(1 - u^4 v^4) + bu^2 v^2(u^2 - v^2) = 0,$$

e poichè per $u = 1$ questa equazione deve prendere la forma:

$$(v + 1)^5(1 - v) = 1 - v^6 + 4v(1 - v^4) + 5v^2(1 - v^2),$$

sarà:

$$b = 5,$$

e per l'equazione modulare di ordine 5°, avremo:

$$u^6 - v^6 + 4uv(1 - u^4v^4) + 5u^2v^2(u^2 - v^2) = 0.$$

3° Sia $n = 7$; saranno :

$$N - 1 = \sigma = n = \eta = 7 \,, \quad l = 0 \,, \quad \alpha = 0$$

e i sistemi $[r, (\sigma + 1 - \eta r)]$:

(0, 8), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 0)

onde l'equazione modulare avrà la forma :

$$b^0_{00}\, u^8 + b'_{00}\, uv + b^2_{00} u^2 v^2 + b^3_{00} u^3 v^3 + b^4_{00}\, u^4 v^4 + b^5_{00}\, u^5 u^5 + b^6_{00} u^6 v^6$$

$$b^7_{00} u^7 v^7 + b^8_{00}\, v^8 = 0,$$

e sarà :

$$b^0_{00} = b^8_{00} \,, \quad b'_{00} = b^7_{00} \,, \quad b^2_{00} = b^6_{00} \,, \quad b^3_{00} = b^5_{00} \,, \quad b'_{00} = -8b^0_{00}$$

e quindi :

$$u^8 + v^8 - 8uv(1 + u^6v^6) + bu^2v^2(1 + u^4v^4) + b'u^3v^3(1 + u^2v^2) + b''u^4v^4 = 0.$$

Ponendo $u = 1$ deve prendere la forma :

$$(v - 1)^8 = 1 + v^8 - 8v(1 + v^7) + 28v^2(1 + v^4) - 56v^3(1 + v^2) + 70v^4 = 0$$

e per ciò :

$$b = 28 \,, \quad b' = -56 \,, \quad b'' = 70.$$

e l'equazione modulare di ordine 7° sarà :

$$u^8 + v^8 - 8uv(1 + u^6v^6) + 28u^2v^2(1 + u^4v^4) - 56u^3v^3(1 + u^2v^2) + 70u^4v^4 = 0.$$

4° Sia $n = 9$; avremo :

$$N = 12 \,, \quad \sigma = 3 \,, \quad \eta = 1 \,, \quad l = 1 \,, \quad \alpha = 1$$

e i sistemi $[r, (\sigma + 1 - \eta r)]$ saranno :

(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0), (5, 7), (6, 6), (7, 5),

e l'equazione modulare sarà :

$$u^4(b^0_{00} + b^0_{10}\, u^8 + b^0_{01}\, v^8 + b^0_{11}\, u^8 v^8) + u^3 v(b'_{00} + b'_{10}\, u^8 + b'_{01}\, v^8 + b'_{11}\, u^8v^8)$$

$$+ u^2 v^2(b^2_{00} + b^2_{10}\, u^8 + b^2_{01} v^8 + b^2_{11}\, u^8 v^8) + uv^3(b^3_{00} + b^3_{10} u^8 + b^3_{01} v^8 + b^3_{11} u^8 v^8)$$

$$+ v^4(b^4_{00} + b^4_{10}\, u^8 + b^4_{01}\, v^8 + b^4_{11}\, u^8 v^8) + b^5_{00}\, u^7 v^5 + b^6_{00}\, u^6 v^6 + b^7_{00}\, u^5 v^7 = 0.$$

Dall'equazioni (21), (22) e (24) si rileva :

$$b^0_{00} = b^4_{00} = b^0_{11} = b^4_{11} = 0\,, \qquad b^0_{10} = b^4_{01}\,, \qquad b^0_{01} = b^4_{10}\,,$$

$$b'_{00} = b^3_{00} = b'_{11} = b^3_{11} = -16\,, \quad b'_{10} = b^3_{01}\,, \qquad b'_{01} = b^3_{10}\,,$$

$$b^2_{00} = b^2_{11}\,, \qquad b^2_{10} = b^2_{01}\,, \qquad b^5_{00} = b^7_{00}\,;$$

onde avremo :

$$b^0_{10}\,u^{12} - v(16\,u^3 - b'_{10}\,u^{18}) + v^2(b^2_{00}\,u^2 + b^2_{10}\,u^{10}) - v^3(16u - b'_{01}\,u^8)$$

$$+ b^0_{01}\,u^8\,v^4 + b^5_{00}\,u^9\,v^5 + b^0_{00}\,u^6\,v^6 + b^5_{00}\,u^5\,v^7 + b^0_{01}\,u^4\,v^8$$

$$+ v^9(b'_{01}\,u^3 - 16u^{11}) + v^{10}(b^2_{10}\,u^2 + b^2_{00}\,u^{10}) + v^{11}(b'_{10}\,u - 16u^9) + b^0_{10}v^{12} = 0\,.$$

Ponendo $u = 1$, l'equazione diviene :

$$(v - 1)^{12} = 1 - 12v + 66v^2 - 220v^3 + 495v^4 - 792v^5 + 924v^6 - 792v^7$$
$$+ 495v^8 - 220v^9 + 66v^{10} - 12^{11} + v^{12}$$

onde :

$$b^0_{10} = 1\,, \quad b'_{10} = 4\,, \quad b^2_{00} + b^2_{10} = 66\,, \quad b'_{01} = -204\,, \quad b^0_{01} = 495\,,$$

$$b^5_{00} = -792\,, \quad b^6_{00} = 924\,.$$

Sostituendo i valori (23) e ponendo a zero la somma dei coefficienti dei termini che contengono $\sqrt[8]{q^{20}}$, abbiamo :

$$b^2_{00} = 5\,,\ 2^4 = 80\,, \qquad \text{onde :} \qquad b^2_{10} = -14\,,$$

e l'equazione modulare dell'ordine 9° sarà :

$$u^{12} + v^{12} - 16uv(1 + u^8v^8)(u^2 + v^2) + 4uv(u^{10} + v^{10}) - 204u^3v^3(u^6 + v^6)$$
$$+ 80u^2v^2(u^8 + v^8) - 14u^2v^2(u^8 + v^8) + 495u^4v^4(u^4 + v^4)$$
$$- 792u^5\,v^5(u^2 + v^2) + 924u^5\,v^5 = 0.$$

16.

La funzione $\varphi(\varpi)$ definita dalla espressione analitica:

(1) $$\varphi(\varpi) = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{e^{i\pi\varpi}}\,\prod_1^\infty \frac{1 + e^{2mi\pi\varpi}}{1 + e^{(2m-1)i\pi\varpi}}\,,$$

la quale ha un significato soltanto per i valori complessi di ϖ che hanno la parte immaginaria differente da zero e positiva e che serve a determinare in questo campo le radici dell'equazioni modulari, gode molte importanti proprietà che passiamo a dimostrare.

Alla funzione $\varphi(\varpi)$ conviene aggiungere la funzione $\psi(\varpi)$ la quale è definita, nel medesimo campo delle funzioni $\varphi(\varpi)$, dalla espressione analitica:

$$(2) \qquad \psi(\varpi) = \prod_{1}^{\infty} \frac{1 - e^{(2m-1)\pi i \varpi}}{1 + e^{(2m-1)\pi i \varpi}} .$$

Denotando con K e K' gl'integrali ellittici completi di prima specie, abbiamo:

$$\sqrt[4]{k} = \varphi\left(\frac{iK'}{K}\right), \qquad \sqrt[4]{k'} = \psi\left(\frac{iK'}{K}\right) .$$

Ora mutando k in k', K e K' si convertono rispettivamente in K' e K, e quindi:

$$\sqrt[4]{k'} = \varphi\left(\frac{iK}{K'}\right) = \varphi\left(-\frac{1}{\frac{iK'}{K}}\right), \qquad \sqrt[4]{k} = \psi\left(\frac{iK'}{K}\right) = \psi\left(-\frac{1}{\frac{iK'}{K}}\right) .$$

Dunque sarà:

$$(3) \qquad \varphi\left(-\frac{1}{\varpi}\right) = \psi(\varpi) ,$$

$$(4) \qquad \psi\left(-\frac{1}{\varpi}\right) = \psi(\varpi) .$$

Dall'equazioni (1) e (2) si ottiene immediatamente:

$$(5) \qquad \varphi(\varpi \pm 1) = e^{\pm \frac{\pi i}{8}} \frac{\varphi(\varpi)}{\psi(\varpi)} ,$$

$$(6) \qquad \psi(\varpi \pm 1) = \frac{1}{\psi(\varpi)} .$$

Mediante queste relazioni si possono esprimere

$$\varphi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right) \text{ e } \psi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right)$$

in funzione di $\varphi(\varpi)$ e $\psi(\varpi)$, quando i numeri interi e reali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soddisfacciano alla equazione:

$$(7) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 .$$

Primieramente se $\alpha > \gamma$ possiamo sempre determinare due numeri, α', β' congrui rispettivamente ad α e β rapporto al modulo 2, e $\alpha' < \gamma$, in modo che si abbia:

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi}\right)=\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha'+\beta'\varpi}\right),\quad \alpha'\delta-\beta'\gamma=1.$$

Infatti, se $\alpha>\gamma$ avremo:

$$\alpha=2t\gamma+\alpha',\qquad \beta=2t\delta+\beta',\qquad \alpha'\delta-\beta'\gamma=1,$$

ed $\alpha'<\gamma$. Quindi, a cagione dell'equazioni (3), (6) e (4), sarà:

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi}\right)=\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{2t(\gamma+\delta\varpi)+\alpha'+\beta'\varpi}\right)=\psi\left(-2t-\frac{\alpha'+\beta'\varpi}{\gamma+\delta\varpi}\right)=\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha'+\beta'\varpi}\right).$$

Se $\alpha=1$, γ e β sono pari e δ dispari, avremo:

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{1+\beta\varpi}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma\delta+\delta^2-1)}(\varphi\varpi).$$

Infatti, essendo $\delta-\beta\gamma=1$, avremo:

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{1+\beta\varpi}\right)=\varphi\left(\frac{\gamma+(\beta\gamma+1)\varpi}{1+\beta\varpi}\right)=\varphi\left(\gamma+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\varpi}}\right)$$

$$=e^{\frac{\pi i\gamma}{8}}\psi\left(-\beta-\frac{1}{\varpi}\right)=e^{\frac{\pi i\gamma}{8}}\varphi(\varpi).$$

Ma è facile a verificarsi la congruenza:

$$\gamma\equiv\gamma(\beta\gamma+1)+(\beta\gamma+1)^2-1 \pmod{16}$$

la quale, poichè β e γ sono pari, conduce alla congruenza:

$$\beta\gamma(\gamma+2)\equiv 0 \pmod{16},$$

che evidentemente è sempre soddisfatta. Dunque avremo:

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{1+\beta\varpi}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma\delta+\delta^2-1)}(\varphi\varpi),$$

come volevamo dimostrare.

Se $\alpha'\delta'-\beta'\gamma'=1$, $\delta-\beta\gamma=1$, γ', β', γ e β sono pari, α', δ' e δ sono dispari e:

$$\varphi\left(\frac{\gamma'+\delta'\varpi}{\alpha'+\beta'\varpi}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma'\delta'+\delta'^2-1)}\varphi(\varpi),$$

ponendo:

$$\varpi_1=\frac{\gamma+\delta\varpi}{1+\beta\varpi},\quad \gamma'+\gamma\delta'=c,\quad \beta\gamma'+\delta\delta'=d,\quad \alpha'+\beta'\gamma=a,\quad \beta'\gamma+\delta\beta'=b,$$

sarà :

$$\varphi\left(\frac{\gamma' + \delta'\varpi_1}{\alpha' + \beta'\varpi_1}\right) = \varphi\left(\frac{c + d\varpi}{a + b\varpi}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(cd+d^2-1)}\,\varphi(\varpi).$$

Infatti abbiamo:

$$\varphi\left(\frac{\gamma' + \delta'\varpi_1}{\alpha' + \beta'\varpi_1}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma'\delta'+\delta'^2-1)}\,\varphi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{1 + \beta\varpi}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma'\delta'+\delta'^2+\gamma\delta+\delta^2-2)}\,\varphi(\varpi)$$

e la congruenza:

$$cd + d^2 - 1 \equiv (\gamma' + \gamma\delta')^2[\beta^2 + \beta(\beta + 2\delta') + \gamma'] + \delta'^2 - 1$$
$$\equiv \gamma'\delta' + \delta'^2 + \gamma - 1 \equiv \gamma'\delta' + \delta'^2 + \gamma\delta + \delta^2 - 2 \pmod{16}.$$

Se $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, γ e β pari, α e δ dispari e $\alpha < \gamma$, avremo sempre:

$$(8) \qquad \frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi} = \frac{\gamma_1 + \delta_1\varpi_1}{1 + \beta_1\varpi_1}, \quad \varpi_1 = \frac{\gamma_2 + \delta_2\varpi_2}{1 + \beta_2\varpi_2}, \quad \varpi_2 = \frac{\gamma_3 + \delta_3\varpi_3}{1 + \beta_3\varpi_3},$$
$$\ldots\ldots \varpi_{r-1} = \frac{\gamma_r + \delta_r\varpi}{1 + \beta_r\varpi}.$$

dove γ_s e β_s sono pari e $\delta_s - \beta_s\gamma_s = 1$.

Infatti, essendo $\alpha < \gamma$, potremo porre:

$$\gamma = \gamma_1\alpha + \gamma', \quad \delta = \gamma_1\beta + \delta', \quad \alpha = \beta_1\gamma' + \alpha_1, \quad \beta = \beta_1\delta' + \beta'$$

e quindi:

$$\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi} = \gamma_1 + \frac{\gamma' + \delta'\varpi}{\alpha + \beta\varpi} = \gamma_1 + \cfrac{1}{\beta_1 + \cfrac{1}{\varpi_1}} = \frac{\gamma_1 + \delta_1\varpi_1}{1 + \beta_1\varpi_1},$$

$$\varpi_1 = \frac{\gamma' + \delta'\varpi}{\alpha' + \beta'\varpi}, \qquad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1,$$

e saranno $\alpha' < \gamma'$, γ' e β' pari e α' e δ' dispari, $\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = 1$. Analogamente otteremo l'espressione di ϖ_1, di ϖ_2 .... e poichè i valori di α sono interi e vanno continuamente diminuendo arriveremo finalmente ad uno che sia eguale all'unità. Onde la serie di equazioni (8) sarà finita come volevamo dimostrare.

Da tutto questo si deduce facilmente il seguente:

Teorema. Se $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, β e γ sono pari, α e δ dispari, avremo sempre:

$$(9) \qquad \varphi\left(\frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma\delta+\delta^2-1)}\,\varphi(\varpi).$$

Se α e δ sono pari e β e γ dispari, avremo:

$$(10)\qquad \varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(-\gamma\delta+\gamma^2-1)}\ \psi(\varpi).$$

Infatti, a cagione dell'equazione (9), abbiamo :

$$\varphi\left(\frac{-\delta+\gamma\varpi}{-\beta+\alpha\varpi}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(-\gamma\delta+\gamma^2-1)}\ \varphi(\varpi),$$

e ponendo $-\frac{1}{\varpi}$ in luogo di ϖ :

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(-\gamma\delta+\gamma^2-1)}\ \psi(\varpi).$$

Se β è pari e α, γ, e δ dispari, sarà :

$$(11)\qquad \varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}\gamma\delta}\,\frac{\varphi(\varpi)}{\psi(\varpi)}.$$

Infatti, dalla equazione (9), si ha :

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta+\delta\varpi}{\alpha+\beta+\beta\varpi}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma\delta+2\delta^2-1)}\varphi(\varpi).$$

Mutando ϖ in $\varpi-1$, si ottiene :

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}\gamma\delta}\,\frac{\varphi(\varpi)}{\psi(\varpi)}.$$

Se α è pari, β, γ e δ dispari, avremo :

$$(12)\qquad \varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi}\right)=e^{-\frac{\pi i\gamma\delta}{8}}\,\frac{\psi(\varpi)}{\varphi(\varpi)}.$$

Poichè dall'equazione (11) avremo :

$$\varphi\left(\frac{\delta\varpi-\gamma}{\alpha\varpi-\beta}\right)=e^{-\pi i\gamma\delta}\,\frac{\varphi(\varpi)}{\psi(\varpi)},$$

e mutando ϖ in $-\frac{1}{\varpi}$, otterremo l'equazione (12),

Se δ è pari e α, β, γ dispari. sarà :

$$(13)\qquad \varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi}\right)=\frac{e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma\delta+\gamma^2-1)}}{\psi(\varpi)}.$$

Infatti, dall'equazione (10) abbiamo:

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta+\delta\varpi}{\alpha+\beta+\beta\varpi}\right)+e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma\delta+\gamma^2-1)}\psi(\varpi),$$

e mutando ϖ in $\varpi+1$ si ottiene l'equazione (13).

Se γ è pari e α, β, δ dispari, avremo:

$$(14)\qquad \varphi\left(\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi}\right)=\frac{e^{\frac{\pi i}{8}(\delta^2-\gamma\delta-1)}}{\varphi(\varpi)}.$$

Infatti dall'equazione (13) abbiamo:

$$\varphi\left(\frac{\gamma\varpi-\delta}{\alpha\varpi-\beta}\right)=\frac{e^{\frac{\pi i}{8}(-\gamma\delta+\delta^2-1)}}{\psi(\varpi)}$$

e mutando ϖ in $-\frac{1}{\varpi}$ si ha l'equazione (14).

Le sei formule precedenti sono dovute al Sig. *Hermite*.

Dalla equazione (9) si ottengono le radici della equazione:

$$\varphi(x)=\varphi(\varpi)$$

che saranno date dalla formola:

$$x=\frac{\gamma+\delta\varpi}{\alpha+\beta\varpi},$$

dove:

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

γ e β pari, α e δ dispari, e $\gamma\equiv 0\ (\text{mod. } 16)$, $\alpha\equiv\delta\equiv\pm 1\ (\text{mod. } 8)$, oppure $\gamma\equiv 8 (\text{mod. } 16)$, $\alpha\equiv\delta\equiv\pm 3 (\text{mod. } 8)$.

17.

Allorchè la equazione modulare di ordine dispari n ha radici eguali, il numero delle trasformazioni differenti di ordine n è minore di N. Le funzioni ellittiche particolari, per le quali ha luogo questo abbassamento nel numero delle trasformazioni differenti di un dato ordine godono importanti proprietà, che le rendono meritevoli di speciale considerazione. In due modi si può procedere a determinarle, o colla ricerca dei loro moduli ponendo a zero il discriminante della equazione modulare, e risolvendo la equazione così ottenuta, oppure colla ricerca dei valori dei rapporti ϖ dei loro periodi che sodisfano a una equazione:

*

$$(1) \qquad \varepsilon_g \varphi\left(\frac{g\varpi + t}{g'}\right) = \varepsilon_{g_1} \varphi\left(\frac{g_1\varpi + t}{g'_1}\right),$$

dove $\varepsilon_r = (-1)^{\frac{r^2-1}{8}} \left(\frac{2}{r}\right)$ e $gg' = g'_1\, g_1 = n$.

TEOREMA 1. *Il discriminante della equazione modulare di ordine dispari* n *ha la forma:*

$$(2) \qquad D = u^{\nu}(1 - u^8)^{\nu_1}(A_0 + A_1 u^8 + A_2 u^{16} + \ldots, + A_\rho u^{8\rho});$$

dove:

$$(3) \qquad \nu = \Gamma_n + 2\Delta_n, \quad \nu_1 = \Gamma_n + 2\Delta'_n, \quad 4\rho = N(N-1) - \nu - 4\nu_1;$$

denotando con Γ_n *la funzione numerica:*

$$\sum \frac{n}{g^2} (g)_n \left[(g)_n - 1\right],$$

dove la somma deve estendersi a tutti i divisori di n, *e* $(g)_n$ *indica il numero dei numeri incongrui rispetto a* g *e che non hanno fattori comuni con* g *e con* $\frac{n}{g}$, Δ_n *esprime la somma dei prodotti* $\frac{n}{g^2}(g)_n (g_1)_n$ *estesa a tutte le combinazioni di due divisori diseguali di* n *dove* $g < g_1$, *e* Δ'_n *la medesima somma dalle quali sono esclusi i prodotti per i quali non è:*

$$(4) \qquad \varepsilon_g = \varepsilon_{g_1},$$

e $A_0, A_1, \ldots A_\rho$ *sono quantità numeriche.*

Per dimostrare questo teorema osservo che abbiamo:

$$(5) \qquad D = \Pi(v_{gt} = v_{g_1 t_1})^2 = u^{N(N-1)n}\Pi(x_{gt} - x_{g_1 t_1})^2,$$

dove:

$$x_{gt} = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{snc} 2m\left(\frac{g\omega' + t\omega}{n}\right).$$

Ora le quantità x_{gt} sono radici della equazione (14) del n.° 15, la quale ha i coefficienti funzioni razionali di u^8, quindi il prodotto $\Pi(x_{gt} - x_{g_1 t_1})^2$, che è una funzione simmetrica, sarà razionalmente esprimibile per u^8, e avremo:

$$(6) \qquad D = u^{N(N-1)n} f(u^8),$$

denotando con $f(x)$ una funzione razionale di x.

Ma D è anche una funzione razionale e simmetrica delle radici della equazione modulare che ha i coefficienti funzioni razionali e intere di u, e il coefficiente del primo termine eguale all'unità, quindi il secondo membro della (6) dovrà essere una funzione intera di u, il denominatore di $f(u^8)$ non potrà essere altro che una potenza di u^8, e denotando con ν un numero che sodisfarà alla congruenza :

$$\nu \equiv N(N-1)n (\text{mod. } 8) .$$

avremo :

$$(7) \qquad D = u^\nu(a_0 + a_1 u^8 + \ldots + a_\rho u^{8\rho}).$$

Per determinare ν sostituiamo nell'espressioni (5) e (7) i valori :

$$(8) \qquad u = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}(1 - q + 2q^2 - \ldots)$$

$$(9) \qquad v_{gt} = \epsilon_g \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q^{\frac{g}{g'}}}\,\alpha^t\,(1 - q^{\frac{g}{g'}}\alpha^t + \ldots),$$

e confrontiamo i minimi esponenti di $\sqrt[8]{q}$.

Il minimo esponente di $\sqrt[8]{q}$ in $v_{gt} - v_{gt'}$ è evidentemente $\frac{g}{g'} = \frac{n}{g'^2}$, e quindi in $\Pi_{tt'}(v_{gt} - v_{gt'})^2$ sarà $\frac{n}{g'^2}\,(g')_n\Big((g')_n - 1\Big)$ e in $\Pi_{gtt'}\,(v_{gt} - v_{gt'})^2$ sara Γ_n. Il minimo esponente di $\sqrt[8]{q}$ in $v_{gt} - v_{g_1t_1}$ dove $g < g_1$ è $\frac{n}{g'^2}$ e quindi in $\Pi_{tt'}(v_{gt} - v_{g_1t_1})^2$ sara $\frac{2n}{g'^2}(g')_n(g'_1)_n$ e per tanto sarà $2\Delta_n$ nel prodotto $\Pi_{gg_1tt_2}\,(v_{gt} - v_{g_1t_1})^2$ in cui g non è $= g_1$. Dunque in $\Pi(v_{gt} - v_{g_1t_1})^2$ sarà

$$\Gamma_n + 2\Delta_n ;$$

ma nell'espressione (7) il minimo esponente di $\sqrt[8]{q}$ è ν, quindi avremo :

$$\nu = \Gamma_n + 2\Delta_n .$$

Ponendo $u = 1$ l'equazione modulare acquista radici eguali, dunque D deve annullarsi per $u^8 = 1$, e quindi deve essere divisibile per $1 - u^8$. Denotiamo con ν_1 la massima potenza di $1 - u^8$ che divide D, avremo :

$$(10) \qquad \begin{aligned} D &= u^\nu(1-u^8)^{\nu_1}(A_0 + A_1 u^8 + \ldots + A_\rho u^{8\rho}) \\ &= u^\nu(1-u^8)^{\nu_1}[B_0 + B_1(1-u^8) + \ldots + B_\rho(1-u^8)^\rho]; \end{aligned}$$

e A_0 e B_0 differenti da zero.

Mutando u in $u' = \sqrt[8]{(1-u^8)}$, D diverrà :

$$(11) \qquad D' = u^{8\nu_1}(1-u^8)^{\frac{\nu}{8}}(B_0 + B_1 u^8 + \ldots + B_\rho u^{8\rho}).$$

Per determinare ν, sostituiamo il valore (8) nell'espressione (11) e i valori (9) nell'espressione che si deduce dalla (5) mutando u in u' e confrontiamo i minimi esponenti di q.

Mutando u in u', ϖ diviene $-\frac{1}{\varpi}$; quindi denotando con v'_{gt} ciò che diviene v_{gt}, avremo:

$$D' = \Pi(v'_{gt} - v'_{g_1 t_1})^2 = \Pi\left[\varepsilon_g \varphi\left(\frac{t\varpi - g}{g'\varpi}\right) - \varepsilon_{g_1}\varphi\left(\frac{t_1\varpi - g_1}{g'_1\varpi}\right)\right]^2.$$

Ora se prendiamo t multiplo di 16, il che può sempre farsi, perchè v_{gt} non muta valore quando a t si sostuiscano dei numeri congrui rispetto al modulo g', e se denotiamo con g_0 il massimo comun divisore di t e di g', e poniamo:

$$t = g_0 t_0, \qquad g' = g_0 g_0^0,$$

sarà:

$$\frac{t\varpi - g}{g'\varpi} = \frac{c + t_0\left(\frac{g_0\varpi - ag}{g_0^0 g}\right)}{a + g_0^0\left(\frac{g_0\varpi - ag}{g_0^0 g}\right)},$$

dove:

$$at_0 - g_0^0 c = 1;$$

a è pari, c dispari, e quindi $\varepsilon_c = \varepsilon_{g_0^0}$. Onde a cagione della equazione (10) del n.º 16, avremo:

$$\varepsilon_g\varphi\left(\frac{t\varpi - g}{g'}\right) = \varepsilon_g\,\varepsilon_{g_0^0}\psi\left(\frac{g_0\varpi - \alpha g}{g_0^0 g}\right),$$

e ponendo $g_0^0\, g = g'_0$, e quindi $g_0\, g'_0 = n$, sarà:

$$\varepsilon_g\varphi\left(\frac{t\varpi - g}{g'}\right) = \varepsilon'_{g_0}\psi\left(\frac{g_0\varpi - \alpha g}{g'_0}\right),$$

Dunque mutando u in u', D diviene:

$$D' = \Pi\left[\varepsilon_{g'}\psi\left(\frac{g\varpi + t}{g'}\right) - \varepsilon_{g'_1}\psi\left(\frac{g\varpi + t}{g'_1}\right)\right]^2,$$

Ora abbiamo:

$$\psi\left(\frac{g\varpi + t}{g'}\right) = \Pi\left(\frac{1 - (q^{\frac{g}{g'}}\alpha^t)^{2m-1}}{1 + (q^{\frac{g}{g'}}\alpha^t)^{2m+1}}\right) = 1 - q^{\frac{g}{g'}}\alpha^t + \ldots$$

Quindi il minimo esponente di q in

$$\Pi_{tt'}\left[\varepsilon_{g'}\psi\left(\frac{g\varpi + t}{g'}\right) - \varepsilon_{g'}\psi\left(\frac{g\varpi + t'}{g'}\right)\right]^2$$

sarà Γ_n. Nel prodotto :

$$\Pi_{tt'}\left[\varepsilon_{g'}\psi\left(\frac{g\varpi+t}{g'}\right)-\varepsilon_{g'_1}\psi\left(\frac{g_1\varpi+t'}{g'_1}\right)\right]^2$$

se $g<g'$, il minimo esponente di q sarà $\frac{n}{g'^2}(g')_n(g'_1)_n$, quando $\varepsilon_{g'}=\varepsilon_{g'_1}$, e altrimenti sarà zero. Dunque sarà $2\Delta'_n$ nel prodotto :

$$\Pi_{gg'tt'}\left[\varepsilon_{g'}\psi\left(\frac{g\varpi+t}{g'}\right)-\varepsilon_{g'_1}\psi\left(\frac{g_1\varpi+t'}{g'_1}\right)\right]^2,$$

dove g è differente da g_1. Pertanto il minimo esponente di q in D$'$ sarà

$$\Gamma_n+2\Delta'_n\,.$$

Ma dall' espressione (11) si rileva che questo esponente deve essere eguale a ν_1, dunque :

$$\nu_1=\Gamma_n+2\Delta'_n\,;$$

come volevamo dimostrare.

Mutando u in $\frac{1}{u}$, sappiamo dal teorema 2 del n.º 15 che v si converte in $\frac{1}{v}$, quindi dall'equazioni (5) e (9), osservando che il quadrato del prodotto di tutte le radici nelle equazioni modulari è eguale ad u^{2N}, si ottiene :

$$(12)\qquad \Pi\left(\frac{1}{v_{gt}}-\frac{1}{v_{g_1t_1}}\right)^2=\frac{D}{u^{2N(N-1)}}=\frac{u^{\nu}(u^8-1)^{\nu_1}(A_0u^{8\rho}+A_1u^{8(\rho-1)}+\ldots+A_\rho)}{u^{2\nu+8\nu_1+8\rho}}$$

e quindi :

$$4\rho=N(N-1)-\nu-4\nu_1\,;$$

come volevamo dimostrare.

Confrontando l'equazione (12) colla (9), si deduce :

$$(13)\qquad A_r=A_{\rho-r}\,.$$

Quando n ha i fattori primi tutti differenti, N è eguale alla somma dei divisori di n e $(g')_n=g'$, quindi :

$$\Gamma_n=\sum(n-g)=nN'-N,$$

dove N indica il numero dei divisori di n. La funzione numerica Δ_n diviene eguale a $\sum gg_1$, dove la somma deve estendersi a tutte le combinazioni di due divisori di n il prodotto dei quali à $<n$, e Δ'_n è la funzione Δ_n diminuita di tutti i prodotti gg' pei quali non è $\varepsilon_g=\varepsilon_{ng'}$.

Allorchè $n=p^\mu$ e p è un numero primo dispari abbiamo :

$$\Gamma_{p^\mu} = (p-1)\left[\mu p^{\mu-1} - (\mu-1)p^{\mu-2}\right], \quad \Delta_{p^\mu} = \mu p^{\mu-1} - (\mu-1)p^{\mu-2};$$

$\Delta'_{p^\mu} = \Delta_{p^\mu}$ se $\varepsilon_p = 1$; se poi $\varepsilon_p = -1$, si ha:

$$\Delta'_{p^\mu} = \frac{(\mu-1)p^{\mu-2}(p^2-1) + 2(p^{r-1}+\eta)}{(p+1)^2},$$

dove $\eta = (-1)^\mu$. Quindi in questo caso avremo:

$$(14)\left\{\begin{aligned} \nu &= (p+1)\left[\mu p^{\mu-1} - (\mu-1)p^{\mu-2}\right], \\ \nu_1 &= (p+\varepsilon)\left[\mu p^{\mu} - (p-1)p^{\mu-2}\right] + (1-\varepsilon)\frac{(\mu-1)p^{\mu-2}(p^2-1) + 2(p^{\mu-1}+\eta)}{(p+1)^2}, \\ 4\rho &= p^{\mu-1}(p+1)(p^\mu + p^{\mu-1} - 1) - \nu - 4\nu_1. \end{aligned}\right.$$

Se $n = p$ numero primo, ponendo $\mu = 1, \eta = -1$ nelle formule (14), si ottiene:

$$(15) \qquad \nu = n+1, \quad \nu_1 = n + \varepsilon_n, \quad \rho = \frac{n^2-1}{4} - n - \varepsilon_n.$$

18.

Passiamo ora alla determinazione dei valori dei rapporti ϖ dei periodi delle funzioni ellittiche per le quali l'equazioni modulari di ordine dispari n ammettono radici eguali.

Teorema 1. *Affinchè sia:*

$$(1) \qquad \varepsilon_{g'}\varphi\left(\frac{g'\varpi - \sigma}{g''}\right) = \varepsilon_{g'_1}\varphi\left(\frac{g'_1\varpi - \sigma'}{g''_1}\right),$$

dove ϖ è un numero complesso che ha la parte imaginaria positiva, σ, σ' sono multipli di 16 e $g''g' = g'_1 g''_1 = n$, è necessario e sufficiente che ϖ sodisfi ad una equazione:

$$(2) \qquad A\varpi^2 + 2B\varpi + C = 0,$$

dove A, B e C *sono numeri interi e reali e il determinante:*

$$\Delta = B^2 - AC$$

è negativo e della forma:

$$(3) \qquad \Delta = -8h(n-8h),$$

oppure:

$$(4) \qquad \Delta' = -(n-2h)(8h-3n),$$

e quando Δ ha la forma (3) *si hanno le congruenze:*

$$(5)\qquad B \equiv 0 (\text{mod. } 4), \qquad C \equiv 0 (\text{mod. } 8);$$

oppure:

$$(6)\qquad B \equiv 2 (\text{mod. } 4), \qquad C \equiv 4 (\text{mod. } 8),$$

e A *dispari quando* h *è dispari : quando poi il determinante ha la forma* (4) *si hanno le congruenze :*

$$(7)\qquad B \equiv 1 (\text{mod. } 2), \qquad C \equiv 2 (\text{mod. } 4).$$

Infatti, affinchè sia verificata la equazione (1) è necessario e sufficiente che si abbia:

$$(8)\qquad \frac{g'_{,}\varpi - \sigma'}{g'_{,}} = \frac{\gamma g'' - \delta\sigma + \delta g'\varpi}{\alpha g'' - \beta\sigma + \beta g'\varpi},$$

$$(9)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

α e δ dispari, γ e β pari, e siano sodisfatte le congruenze :

$$(10)\qquad \gamma \equiv 0 (\text{mod. } 16), \qquad \alpha \equiv \delta \equiv \pm g'g'_{,} (\text{mod. } 8),$$

oppure :

$$(11)\qquad \gamma \equiv 8 (\text{mod. } 16); \qquad \alpha \equiv \delta \equiv \pm g'g'_{,} + 4 (\text{mod. } 8).$$

Alla equazione (8) può darsi la forma .

$$(12)\qquad \beta g'g'_{,}\varpi^2 + [\alpha g'_{,} g'' - \delta g' g''_{,} - \beta(\sigma g'_{,} - \sigma' g')]\varpi$$
$$+ \beta\sigma\sigma' - \alpha\sigma' g'' + \delta\sigma g''_{,} - \gamma g'' g''_{,} = 0.$$

Quando sono verificate le congruenze (10) abbiamo:

$$(13)\qquad \alpha g'_{,} g'' \equiv \delta g' g''_{,} \equiv \pm n (\text{mod } 8),$$

e quando si hanno le congruenze (11) :

$$(14)\qquad \alpha g'_{,} g'' \equiv \delta g' g''_{,} \equiv \pm n + 4 (\text{mod. } 8);$$

e quindi il coefficiente del secondo termine della equazione (12) è sempre multiplo di 8. Pertanto potremo porre :

$$(15)\qquad \frac{\beta g' g'_{,}}{2} = A, \qquad \frac{\alpha g'_{,} g'' - \delta g' g''_{,} - \beta(\sigma g'_{,} - \sigma' g')}{4} = B,$$

$$\frac{\beta\sigma\sigma' - \alpha\sigma' g'' + \delta\sigma g''_{,} - \gamma g'' g''_{,}}{2} = C,$$

e la equazione (10) prenderà la forma (2) ed A, B e C saranno interi.

Se poi $\beta \equiv 0 (\text{mod. } 4)$ e $\gamma \equiv 8 (\text{mod. } 16)$, porremo :

$$(16) \qquad \frac{\beta g' g'_{\iota}}{4} = \mathrm{A}\,, \qquad \frac{\alpha g'_{\iota} g'' - \delta g' g''_{\iota} - \beta(\sigma g'_{\iota} - \sigma' g')}{8} = \mathrm{B}\,,$$

$$\frac{\beta\sigma\sigma' - \alpha\sigma' g'' + \delta\sigma g'' - \gamma g'' g''_{\iota}}{4} = \mathrm{C}\,,$$

e avremo sempre una equazione con i coefficienti interi della forma (2).

Facendo :

$$(17) \qquad 2\mathrm{S} = \alpha g'_{\iota} g'' + \delta g' g''_{\iota} + \beta(\sigma g'_{\iota} - \sigma' g')\,;$$

colle posizioni (15) avremo :

$$(18) \qquad 4\Delta = \mathrm{S}^2 - n^2\,,$$

e colle posizioni (16) :

$$(19) \qquad 16\Delta' = \mathrm{S}^2 - n^2.$$

Quando sono verificate le congruenze (10) abbiamo :

$$\alpha g'_{\iota} g'' = 8l \pm n\,, \qquad \delta g' g''_{\iota} = 8l' \pm n\,,$$

e quindi moltiplicando e osservando la equazione (9), si ottiene , se $\beta \equiv 0(\mathrm{mod.}\,4)$:

$$8n(l + l') \equiv 0(\mathrm{mod.}\ 64)\,,$$

$$l + l' \equiv 0(\mathrm{mod.}\ 8)\,,$$

$$2\mathrm{S} \equiv \alpha g'_{\iota} g' + \delta g' g''_{\iota} \equiv \pm 2n(\mathrm{mod.}\ 64)\,;$$

onde :

$$\mathrm{S} = 16h \pm n,$$

e h pari.

Se poi $\beta \equiv 2(\mathrm{mod.}\ 4)$ avremo :

$$l + l' \equiv 0(\mathrm{mod.}\ 4)\,, \qquad 2\mathrm{S} \equiv \pm 2n(\mathrm{mod.}\ 32)\,, \qquad \mathrm{S} = 16h \pm n$$

ed h potrà essere dispari.

Quando sono verificate le congruenze (11) se $\beta \equiv 2(\mathrm{mod.}\ 4)$ avremo:

$$\alpha g'_{\iota} g'' = 8l \pm n + 4\,, \qquad \delta g' g''_{\iota} = 8l' \pm n + 4\,,$$

e quindi :

$$\beta\gamma n^2 \equiv 16 \equiv \pm 8n(l + l' + 1) + 16(\mathrm{mod.}\ 32)\,,$$

ossia :

$$l + l' + 1 \equiv 0(\mathrm{mod.} 4),$$

e quindi :

$$2\mathrm{S} \equiv \pm 2n(\mathrm{mod.}\ 32)\,, \qquad \mathrm{S} = 16h - n,$$

ed h potrà essere dispari.

Se poi $\beta \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ 4)$, avremo :

$$l + l' + 1 \equiv \mp 2n (\mathrm{mod.}\ 4),$$

onde :

$$2S \equiv \pm 14n (\mathrm{mod.}\ 32)$$

e quindi :

$$S = 16h \pm 7n.$$

Dunque il determinante Δ dato dalla equazione (18), nella quale dovrà sostituirsi:

$$S = 16h - n,$$

sarà :

$$\Delta = -8h(n - 8h),$$

e avremo nei primi due casi le congruenze (5), nel terzo le congruenze (6), ed $A \equiv 1 (\mathrm{mod.}\ 2)$ quando h è dispari.

Il determinante Δ' dato dall'quazione (19) nella quale dovrà sostituirsi :

$$S = 16h \pm 7n,$$

sarà :

$$\Delta' = -(n - 24)(8h - n),$$

ed essendo :

$$B \equiv \frac{\alpha g'_1 g'' - \delta g' g''_1}{8} \equiv l - l' \equiv 1 (\mathrm{mod.}\ 2),$$

e

$$C \equiv \frac{\gamma}{4} \equiv 2 (\mathrm{mod.}\ 4),$$

saranno sodisfatte le congruenze (7).

Rimane ora a dimostrare che le condizioni del teorema sono sufficienti.

Sodisfi ϖ ad una equazione della forma (2), in cui i cofficienti verifichino le congruenze (5) e abbia un determinante negativo della forma (3).

Sia g il massimo comun divisore tra A ed n; poichè alla equazione (3) può darsi la forma :

$$4\Delta = (n - 16h)^2 - n^2,$$

avremo :

$$(2B + 16h - n)(2B - 16h + n) = 4AC - n^2 \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ g).$$

Quindi essendo g' e g'_1 due divisori di g il prodotto dei quali divide A sarà :

$$2B + 16h - n \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ g'), \qquad 2B - 16h + n \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ g'_1).$$

Ponendo :

$$2A = \beta g' g'_1,$$

β sarà primo con $\frac{n}{g}$ e potremo determinare due interi σ, σ' multipli di 16 che sodisfino alle congruenze :

$$\beta\sigma \equiv \frac{2B - 16h + n}{g'_{\prime}} \left(\text{mod.}\ \frac{n}{g'}\right),$$

$$\beta\sigma' \equiv \frac{2B + 16h - n}{g'} \left(\text{mod.}\ \frac{n}{g'_{\prime}}\right),$$

e quindi, dinotando con α e δ due numeri interi, e ponendo $\frac{n}{g'} = g''$, $\frac{n}{g'_{\prime}} = g''_{\prime}$, avremo :

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha g'_{\prime}\, g'' = n - 16h + 2B - \beta\sigma g'_{\prime}, \\ \delta g'\, g''_{\prime} = n - 16h - 2B + \beta\sigma' g'. \end{array} \right.$$

Da queste equazioni si rileva facilmente :

$$\beta\sigma\sigma' - \alpha\sigma' g'' + \delta\sigma g''_{\prime} \equiv 2C(\text{mod.}\ g''\, g''_{\prime})\ ;$$

e quindi, denotando con γ un numero intero, sarà :

$$(21) \qquad \gamma g''\, g''_{\prime} = \beta\sigma\sigma' - \alpha\sigma' g'' + \delta\sigma g''_{\prime} - 2C\ ,$$

e i valori di α, β, γ e δ così ottenuti sodisfaranno, come è facile a verificarsi, la equazione (9).

Deducendo dall'equazioni precedenti i valori di A, B e C e sostituendoli nella equazione (2), otteniamo :

$$\frac{g'_{\prime}\varpi - \sigma'}{g''_{\prime}} = \frac{\gamma g'' - \delta\sigma + \delta g'\varpi}{\alpha g'' - \beta\sigma + \beta g'\varpi}.$$

Se $C \equiv 0(\text{mod. } 8)$ e $B \equiv 0(\text{mod. } 4)$, dall'equazioni (20) e (21) si deduce :

$$\gamma \equiv 0(\text{mod. } 16)\ , \qquad \alpha \equiv \delta \equiv g'g'_{\prime}(\text{mod. } 8),$$

Se $C \equiv 4(\text{mod. } 8)$, $B \equiv 2(\text{mod. } 4)$, dalle medesime equazioni si trae :

$$\gamma \equiv 8(\text{mod. } 16)\ , \qquad \alpha \equiv \delta \equiv g'g'_{\prime} + 4(\text{mod. } 8);$$

e quindi è sodisfatta l'equazione (1), come volevamo dimostrare.

Ora supponiamo che ϖ sodisfaccia ad una equazione della forma (2), la quale abbia il determinante (4), e siano verificate le congruenze (7).

Sia g il massimo comun divisore di A ed n; poichè alla equazione (4) può darsi la forma :

$$16\Delta' = (7n - 16h)^2 - n^2\ ,$$

avremo :

$$(4B - 16h + 7n)(4B + 16h - 7n) = 4AC - n^2,$$

e quindi :

$$4B + 16h - 7n \equiv 0 (\text{mod. } g'), \quad 4B - 16h + 7n \equiv 0 (\text{mod. } g'_{,}),$$

essendo g' e $g'_{,}$ due divisori di g il prodotto dei quali divide A.

Poniamo :

$$4A = \beta g' g'_{,},$$

β sarà primo con n e potremo determinare due numeri interi σ e σ' multipli di 16 che sodisfacciano alle due congruenze :

$$\beta\sigma \equiv \frac{4\beta - 16h + 7n}{g'_{,}} \left(\text{mod. } \frac{n}{g'}\right), \qquad \beta\sigma' \equiv \frac{4B + 16h - 7n}{g'}, \left(\text{mod. } \frac{n}{g'_{,}}\right);$$

onde ponendo : $\frac{n}{g'} = g''$, $\frac{n}{g'_{,}} = g''_{,}$, si ottiene :

(22) $$\alpha g'_{,} g'' = 7n - 14h + 4B + \beta\sigma g'_{,}, \quad \delta g' g''_{,} = 7n - 16h - 4B - \beta\sigma' g';$$

dalle quali si trae :

$$\beta\sigma\sigma' - \alpha\sigma' g'' + \delta\sigma g''_{,} \equiv 4C (\text{mod. } g'' g''_{,})$$

e quindi denotando con γ un numero intero :

(23) $$\gamma g'' g''_{,} = \beta\sigma\sigma' - \alpha\sigma' g'' + \delta\sigma g''_{,} - 4C,$$

e i numeri α, β, γ e δ sodisfaranno alla equazione (9).

Ricavando i valori di A, B, C e sostituendoli nella equazione (2), si ottiene :

$$\frac{g'_{,}\varpi - \sigma'}{g''_{,}} = \frac{\gamma g'' - \delta\sigma + \delta g'\varpi}{\alpha g'' - \beta\sigma + \beta g'\varpi}.$$

Poichè $C \equiv 2 (\text{mod. } 4)$, $B \equiv 1 (\text{mod. } 2)$ dalle equazioni (22) e (23) si ricava ;

$$\gamma \equiv 8 (\text{mod. } 16), \qquad \alpha \equiv \delta \equiv g' g'_{,} + 4 (\text{mod. } 8),$$

e quindi sarà sodisfatta la equazione (1) come volevamo dimostrare.

Ogni equazione (2), per la quale sono sodisfatte le condizioni del teorema 1°, dà un valore di ϖ per cui l'equazione modulare di ordine n ammette radici eguali, e quindi determina una radice $u_r = \varphi(\varpi_r)$ del discriminante. Diremo che una tale equazione *appartiene alla radice* u_r *del discriminante.*

Ora abbiamo trovato per il discriminante :

(24) $$D = u^{\nu}(1 - u^8)^{\nu_1} f(u^8),$$

dove $f(u^8)$ è una funzione razionale e intera di u^8; quindi avremo :

(25) $$f(u^8) = a\Pi[u_r - \varphi(\varpi_r)],$$

essendo a una quantità numerica ed i valori ϖ_r dovendo essere determinati mediante tutte l'equazioni che appartengono alle radici del discriminante, e che non danno valori *identici* per $\varphi(\varpi_r)$.

Teorema 2. *Se la equazione:*

$$(2) \qquad A\varpi^2 + 2B\varpi + C = 0$$

appartiene a una radice u_r *del discriminante, e la forma* (A', B', C') *è equivalente alla forma* (A, B, C) *e se questa si trasforma in quella mediante la sostituzione:*

$$\varpi = \frac{\gamma + \delta\varpi'}{\alpha + \beta\varpi'},$$

dove $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ *e* γ *è pari; anche la equazione:*

$$(26) \qquad A'\varpi'^2 + 2B'\varpi' + C' = 0$$

apparterrà a una radice del discriminante, la quale sarà identicamente eguale ad u_r *o ad* $\frac{1}{u_r}$ *moltiplicato per una radice ottava dell' unità.*

Infatti, se il determinante della equazione (2) ha la forma (3) dovrà aversi:

$$(27) \qquad C \equiv 4\varepsilon \ (\text{mod. } 8), \quad B \equiv 2\varepsilon \ (\text{mod. } 4),$$

dove ε è eguale a zero o all'unità. Se il determinante ha la forma (4) avremo:

$$(28) \qquad C \equiv 2 \ (\text{mod. } 4), \quad B \equiv 1 \ (\text{mod. } 2).$$

Ora poichè abbiamo:

$$(29) \qquad \begin{aligned} A' &= A\delta^2 + 2B\delta\beta + C\beta^2, \\ B' &= A\gamma\delta + B(\beta\gamma + \alpha\delta) + C\alpha\beta, \\ C' &= A\gamma^2 + 2B\gamma\alpha + C\alpha^2; \end{aligned}$$

sarà:

$$C' \equiv C + 4\varepsilon' (\text{mod. } 8), \quad B' \equiv B + 2\varepsilon' \ (\text{mod. } 4);$$

e quindi:

$$C' \equiv 4(\varepsilon + \varepsilon') \ (\text{mod. } 8), \quad B' \equiv 2(\varepsilon + \varepsilon') \ (\text{mod. } 4),$$

se il determinante ha la forma (3), e se ha la forma (4):

$$C' \equiv 2 (\text{mod. } 4), \quad B' \equiv 1 (\text{mod. } 2),$$

Dunque la equazione (26) apparterrà a una radice del discriminante, la quale sarà:

$$\varphi\varpi' = \varphi\left(\frac{\gamma - \alpha\varpi}{-\delta + \beta\varpi}\right),$$

che è identicamente eguale ad u_r o ad $\frac{1}{u_r}$ moltiplicato per una radice 8ª dell'unità.

Teorema 3°. *Se la equazione :*

$$A\varpi^2 + 2B\varpi + C = 0$$

appartiene ad una radice u_r *del discriminante, la forma* (A', B', C') *è equivalente alla forma* (A, B, C) *e questa si trasforma in quella mediante la sostituzione :*

$$\varpi = \frac{\gamma + \delta\varpi'}{\alpha + \beta\varpi'} .$$

dove $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, *e* γ *è dispari, la equazione :*

$$A'\varpi'^2 + 2B'\varpi' + C' = 0$$

apparterrà a una radice del discriminante, la quale sarà identicamente eguale a $\sqrt[8]{1 - u_r^8}$ *o ad* $\frac{u_r}{\sqrt[8]{u_r^8 - 1}}$ *o ad una delle loro reciproche moltiplicata per una radice ottava della unità, soltanto se* $A \equiv C$ (mod. 8) *essendo il determinante della forma* (3), *oppure* $A \equiv C$(mod. 4) *e il determinante ha la forma* (4).

Avremo anche in questo caso l'equazione (29) e le congruenze (27) se il determinante ha la forma (3); onde sarà :

$$C' \equiv A + 4\varepsilon(\alpha + 1)\alpha \equiv A(\text{mod. } 8) , \qquad B' \equiv B + A\gamma\delta(\text{mod. } 4)$$

quindi soltanto, se $C \equiv A$(mod. 8), avremo:

$$C' \equiv 4\varepsilon(\text{mod. } 8) , \qquad B' \equiv 2\varepsilon(\text{mod. } 4).$$

Se poi il determinante ha la forma (4), saranno sodisfatte le congruenze (28), e quindi :

$$C' \equiv A + 2\alpha(\alpha + 1) \equiv A(\text{mod. } 4), \qquad B' \equiv A + A\delta(\text{mod. } 2)$$

e perciò soltanto se $A \equiv C$(mod. 2) avremo :

$$C' \equiv 2(\text{mod. } 4) , \qquad B' \equiv 1(\text{mod. } 2).$$

In questi casi soli i valori di $\varphi(\varpi')$ saranno radici del discriminante, ed essendo della forma :

$$\varphi\left(\frac{\gamma - \alpha\varpi}{- \delta + \beta\varpi}\right)$$

dove γ è dispari saranno identicamente eguali ai 32 valori che si ottengono moltiplicando per le radici ottave della unità le quattro quantità :

$$\psi(\varpi) = \sqrt[8]{1 - u_r^8}, \qquad e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\varphi(\varpi)}{\psi(\varpi)} = \frac{u_r}{\sqrt[8]{u_r^8 - 1}},$$

$$\frac{1}{\psi(\varpi)} = \frac{1}{\sqrt[8]{1 - u_r^8}}, \qquad \frac{e^{\frac{\pi i}{8}} \psi(\varpi)}{\varphi(\varpi)} = \frac{\sqrt[8]{u_r^8 - 1}}{u_r};$$

come volevamo dimostrare.

Pertanto se prenderemo tutte le classi differenti delle Forme (A, B, C) i determinanti delle quali sono dati dall'equazioni (3) e (4) e sono negativi, e quindi in numero finito, ciascuna classe darà 16 o 48 equazioni appartenenti ad altrettante radici del discriminante in generale non identicamente eguali tra loro. Le classi che danno 16 equazioni le diremo di 1ª specie, quelle che ne danno 48 le diremo di 2ª specie.

Ad ogni classe di 1ª specie corrisponde evidentemente un fattore del discriminante della forma:

$$(30) \qquad \left(u^8 - \varphi^8(\varpi)\right)\left(u^8 - \frac{1}{\varphi^8(\varpi)}\right) = u^{16} - au^8 + 1.$$

Ad ogni classe di 2ª specie corrisponde un fattore del discriminante della forma:

$$(31) \qquad (u^8-\varphi^8)\left(u^8-\frac{1}{\varphi^8}\right)(u^8-1+\varphi^8)\left(u^8-\frac{1}{1-\varphi^8}\right)\left(u^8-\frac{\varphi^8}{\varphi^8-1}\right)\left(u^8-\frac{\varphi^8-1}{\varphi^8}\right)$$
$$= u^{48} - 3u^{40} + bu^{32} + (5-2b)u^{24} + bu^{16} - 3u^8 + 1.$$

Bisogna però eccettuare quelle classi che danno equazioni per le quali alcuni dei 16 o dei 48 valori precedenti sono identicamente eguali tra loro.

Affinchè alcuni di questi valori siano identicamente eguali, è necessario e sufficiente che sia:

$$\varpi = \frac{\gamma + \delta\varpi}{\alpha + \beta\varpi}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

quindi queste classi eccezioniali saranno le sole classi derivate delle classi che corrispondono all'equazione:

$$(32) \qquad \beta\varpi^2 + 2\left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right)\varpi - \gamma = 0;$$

se $\alpha \equiv \delta \pmod{2}$, o delle classi che corrispondono all'equazione:

$$(33) \qquad 2\beta\varpi^2 + 2(\alpha - \delta)\varpi - 2\gamma = 0,$$

se $\alpha \equiv \delta + 1 \pmod{2}$.