TEORIA

DELLA

ELASTICITÀ

DEL PROFESSORE

ENRICO BETTI

Estratto dal Nuovo Cimento, Serie 2.
Volume VII-VIII. IX. X.

PISA
TIP. PIERACCINI DIR. DA S. SOLDAINI

1874

1.

Deformazione di un corpo.

I corpi solidi non sono perfettamente rigidi come si considerano nella Meccanica razionale, ma tutti sotto l'azione di certe forze, senza rompere la loro connessione, possono mutare entro certi limiti di forma e di estensione, e quindi possono variare le distanze dei loro punti infinitamente vicini, cioè le grandezze dei loro elementi lineari. Limitiamoci a considerare queste deformazioni nel caso in cui i rapporti tra le variazioni degli elementi lineari e gli elementi stessi siano quantità talmente piccole che si possano trascurare le potenze di ordine superiore di fronte a quelle di ordine inferiore.

Sia S lo spazio occupato da un dato corpo, e siano x, y, z le coordinate di uno dei suoi punti. Il quadrato dell'elemento lineare che ha un'estremità nel punto (x, y, z) e l'altra nel punto $(x + dx\,,\ y + dy\,,\ z + dz)$, sarà:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\,,$$

e la sua variazione:

$$ds\,\delta ds = dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z.$$

Poniamo:

$$\delta x = u\,,\quad \delta y = v\,,\quad \delta z = w\,.$$

Le u, v, w saranno funzioni di x, y, z che supporremo finite e continue insieme colle loro derivate in tutto lo spazio S.

Sostituendo ed effettuando le differenziazioni, avremo:

$$ds\,\delta ds = \frac{du}{dx}\,dx^2 + \frac{dv}{dy}\,dy^2 + \frac{dw}{dz}\,dz^2$$

$$+ \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)dz\,dy + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)dz\,dx + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)dx\,dy\,.$$

Pongo:

$$\frac{du}{dx} = a\,,\quad \frac{dv}{dy} = b\,,\quad \frac{dw}{dz} = c$$

(1)

$$\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 2f,\quad \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = 2g\,,\quad \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 2h$$

ed ottengo:

$$\frac{\delta ds}{ds} = a\,\frac{dx^2}{ds^2} + b\,\frac{dy^2}{ds^2} + c\,\frac{dz^2}{ds^2} +$$

(2)

$$+ 2f\,\frac{dy}{ds}\,\frac{dz}{ds} + 2g\,\frac{dz}{ds}\,\frac{dx}{ds} + 2h\,\frac{dx}{ds}\,\frac{dy}{ds}\,.$$

Le quantità $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sono uguali ai coseni degli angoli che la direzione dell' elemento ds fa con i tre assi; il primo membro della equazione (2) deve essere per la supposizione fatta talmente piccolo che se ne possano trascurare le potenze superiori di fronte alle inferiori, qualunque sia la direzione dell' elemento ds, quindi anche le sei grandezze a, b, c, h, f, g debbono essere dello stesso ordine di piccolezza.

Se l' elemento è parallelo all' asse delle x, abbiamo:

$$\frac{\delta ds}{ds} = a$$

se all' asse delle y:

$$\frac{\delta\, ds}{ds} = b$$

se a quello delle z:

$$\frac{\delta\, ds}{ds} = c\,.$$

Quindi a, b, c non sono altro che i rapporti degli allungamenti degli elementi paralleli agli assi, agli elementi stessi, cioè i *coefficienti di allungamento* nelle direzioni degli assi.

Moltiplichiamo per $dx\,dy$ la equazione:

$$2h = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

ed integriamo a tutta la superficie di un rettangolo che giace in un piano parallelo al piano xy, con i lati paralleli agli assi delle x e delle y e di lunghezze ξ, η che denoteremo ordinatamente con ξ_1, η_1, ξ_2, η_2; avremo per un noto teorema di analisi:

$$2\iint h\,dx\,dy = \iint\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)dx\,dy$$

$$= \int\left(v\frac{dy}{ds} - u\frac{dx}{ds}\right)ds = -\int_{\xi_1} u\,dx + \int_{\eta_1} v\,dy + \int_{\xi_2} u\,dx - \int_{\eta_2} v\,dy\,.$$

Poniamo:

$$\xi\, u' = \int_{\xi_1} u\,dx\,, \qquad \eta\, v' = \int_{\eta_1} v\,dy$$

$$\xi\, u'' = \int_{\xi_2} u\,dx\,, \qquad \eta\, v'' = \int_{\eta_2} v\,dy$$

$$h'\xi\,\eta = \iint h\,dx\,dy$$

avremo:

$$2h' = \frac{u'' - u'}{\eta} + \frac{v' - v''}{\xi}.$$

Se il rettangolo è infinitesimo h è costante in tutta l'area, e quindi $h' = h$.

Ora denotiamo con ξ_1', η_1', ξ_2', η_2' le lunghezze dei lati ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 dopo la deformazione, poichè il rettangolo è infinitesimo, avremo:

$$\xi_1' = (1 + a)\xi, \quad \eta_1' = (1 + b)\eta,$$

$$\xi_2' = \left(1 + a + \frac{da}{dy}\eta\right)\xi, \quad \eta_2' = \left(1 + b + \frac{db}{dx}\xi\right)\eta$$

e quindi trascurando le quantità di ordine superiore:

$$\xi_1' = \xi_2', \qquad \eta_1' = \eta_2'.$$

Dunque il rettangolo è parallelogrammo anche dopo la deformazione.

Sia ora α l'angolo che la direzione di ξ_1' fa coll'asse delle x, e β l'angolo che la direzione di η_1' fa coll'asse delle y; avremo:

$$u'' - u' = \eta_1' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \eta_1' \operatorname{sen}\beta$$

$$v' - v'' = \xi_1' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \xi_1' \operatorname{sen}\alpha.$$

Ora poichè α e β sono infinitesimi, abbiamo:

$$\frac{u'' - u'}{\eta} = \beta, \quad \frac{v' - v''}{\xi} = \alpha$$

e quindi:

$$2h = \alpha + \beta,$$

ed h rappresenta la semisomma degli angoli che η' fa coll'asse delle x, e ξ' coll'asse delle y, ossia la metà dell'angolo che bisogna togliere da un angolo retto per aver l'angolo del parallelogrammo. La quantità h rappresenta anche la semisomma dei rapporti delle lunghezze delle quali hanno scorso l'uno rispetto all'altro i lati opposti del rettangolo, alle loro distanze; è perciò che si chiama *coefficiente di scorrimento* nella direzione del piano xy; analogamente g e f sono i coefficienti di scorrimento nelle direzioni dei piani xz e zy.

Poniamo :

$$\Theta = a + b + c = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

moltiplichiamo questa equazione per l'elemento dS dello spazio e integriamo ad una porzione qualunque S_1 dello spazio occupato dal corpo, avremo :

$$\int_{S_1} \Theta\, dS = \int_{S_1} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) dS = \int_{\sigma} (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$$

denotando con α, β, γ i coseni degli angoli che la normale alla superficie σ che forma il contorno di S_1 fa cogli assi.

Ora $(u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$ è il volume del prisma generato dal moto dell'elemento $d\sigma$, positivo se il movimento è verso l'esterno di S_1, negativo se verso l'interno di S_1; quindi l'integrale esteso a tutta la superficie è la misura dell'aumento di volume della porzione S_1 del corpo. Se consideriamo una porzione infinitesima del corpo, Θ è costante e abbiamo :

$$\Theta = \frac{\Delta S_1}{S_1},$$

ossia Θ è il rapporto dell'aumento di volume di un elemento del corpo al volume dell'elemento stesso e si chiama il *coefficiente di dilatazione.*

Tracciamo nel corpo una curva chiusa e piana s il cui piano S sia parallelo al piano xy: avremo per un teorema di analisi :

$$\int_{S} \left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) dS = -\int_{s} \left(u\,\frac{dx}{ds} + v\,\frac{dy}{ds}\right) ds\,.$$

Se s è una circonferenza infinitesima, u, v e $\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}$ si possono ritenere costanti, e denotando con τ la componente dello spostamento nella direzione della tangente, con r il raggio del cerchio, avremo:

$$\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) S = -\int_0^{2\pi} \tau\, r\, d\theta = -2\pi r \tau.$$

Poniamo $\tau = r\omega$ avremo:

$$\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = \frac{-2\pi r^2 \omega}{\pi r^2} = -2\omega.$$

Quindi $\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right)$ denota l'angolo di cui ha rotato l'elemento circolare intorno al suo centro. Analogamente $\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right)$ sono gli angoli di cui hanno rotato gli elementi piani circolari paralleli ai piani yz, xz intorno ai loro centri.

Le funzioni u, v, w sono determinate in tutto lo spazio S occupato dal corpo, e quindi è cognita la deformazione del corpo stesso, quando sono dati:

1.° le funzioni a, b, c, f, g, h ossia i coefficienti di allungamento nella direzione degli assi, e i coefficienti di scorrimento parallelamente ai piani coordinati in tutto lo spazio S;

2.° i valori di u, v, w, e tre relazioni di primo grado tra le sei derivate $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dz}$, $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dy}$, in un sol punto di S.

Infatti, supponiamo che esistano due sistemi differenti di funzioni u', v', w' e u'', v'', w'' che sodisfacciano ad ambedue le condizioni precedenti, cioè che sodisfacciano alle medesime equazioni (1), e in un punto, che potrà prendersi per origine delle coordinate, prendano i medesimi valori, e le loro derivate sodisfacciano alle medesime relazioni lineari.

Poniamo:

$$u' - u'' = \mathrm{U}, \quad v' - v'' = \mathrm{V}, \quad w' - w'' = \mathrm{W}.$$

Sottraendo le equazioni corrispondenti avremo:

$$(3) \qquad \frac{dU}{dx} = o \,, \quad \frac{dV}{dy} = o \,, \quad \frac{dW}{dz} = o$$

$$(4) \quad \frac{dU}{dy} + \frac{dV}{dx} = o \,, \quad \frac{dV}{dz} + \frac{dW}{dy} = o \,, \quad \frac{dW}{dx} + \frac{dU}{dz} = o$$

dalle quali si deduce facilmente:

$$\frac{d^2U}{dy^2} = \frac{d^2U}{d^2z} = \frac{d^2U}{dx\,dy} = o$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{d^2V}{dz\,dx} = o$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{d^2W}{dy^2} = \frac{d^2W}{dx\,dy} = o$$

e quindi:

$$U = A_0 + A_1 y + A_2 z$$

$$V = B_0 + B x + B_2 z$$

$$W = C_0 + C x + C_1 y$$

dove A_0, A_1 ... sono costanti. Sostituendo nelle (4) si ricava:

$$A_1 = -B \,, \quad A_2 = -C \,, \quad C_1 = -B_2$$

e quindi:

$$U = A_0 + A_1 y - C z$$

$$V = B_0 - A_1 x + B_2 z$$

$$W = C_0 + C x - B_2 y.$$

Ma per

$$x = y = z = o$$

dovendo essere:

$$u' = u'' \,, \qquad v' = v'' \,, \qquad w' = w''$$

e tutte le derivate prime di u', v', w' dovendo essere pure rispettivamente uguali alle derivate prime di u'', v'', w'' sarà:

$$U = V = W = o$$

e le derivate prime di U, V, W saranno tutte uguali a zero, e quindi:

$$A_o = B_0 = C_0 = A_1 = C = B_2 = o.$$

Dunque in tutto lo spazio S:

$$U = o, \quad V = o, \quad W = o,$$

e quindi:

$$u' = u'', \quad v' = v'', \quad w' = w''$$

come volevamo dimostrare.

Consideriamo ora il caso in cui a, b, c, f, g, h siano costanti in tutto lo spazio S, e che nell' origine delle coordinate sia:

$$(5) \qquad u = v = w = o$$

$$(6) \qquad \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = o, \quad \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} = o, \quad \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} = o.$$

Avremo la deformazione che i sigg. *Thompson* e *Tait* hanno una pura chiamato *deformazione omogenea*, nella loro Opera intitolata *Natural Philosophy*.

Per il teorema precedente un sol sistema di funzioni sodisfarà a queste condizioni.

Prendiamo:

$$(7) \qquad \begin{aligned} u &= A + A_1 x + A_2 y + A_3 z \\ v &= B + B_1 x + B_2 y + B_3 z \\ w &= C + C_1 x + C_2 y + C_3 z \end{aligned}$$

dove le A, B, C sono costanti.

Sostituiamo nelle (1), e avremo:

$$A_1 = a, \quad B_2 = b, \quad C_3 = c$$

$$A_2 + B_1 = 2h$$

$$A_3 + C_1 = 2g$$

$$B_3 + C_2 = 2f.$$

Ponendo $x = y = z = o$, le equazioni (7) e quelle ottenute dalle (3) e (4) sostituendo in esse i valori (7), danno:

$$A = B = C = o$$

$$A_2 - B_1 = o\,, \quad A_3 - C_1 = o\,, \quad B_3 - C_2 = o$$

onde:

$$A_2 = B_1 = h\,, \quad A_3 = C_1 = g\,, \quad B_3 = C_2 = f$$

e quindi:

$$\begin{aligned} u &= ax + hy + gz \\ v &= hx + by + fz \\ w &= gx + fy + cz \end{aligned}$$

e denotando con x', y', z' le coordinate del punto (x, y, z) dopo la deformazione:

$$x' = (1 + a)\,x + hy + gz = \frac{dF}{dx}$$

$$y' = hx + (1 + b)\,y + fz = \frac{dF}{dy}$$

$$z' = gx + fy + (1 + c)\,z = \frac{dF}{dz}$$

essendo:

$$(8) \qquad 2F = (1+a)x^2 + (1+b)y^2 + (1+c)z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

Determiniamo il luogo dei punti che avanti la deformazione si trovano sopra la retta:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = \rho$$

avremo:

$$\begin{aligned} x' - x_0' &= [(1 + a)\alpha + h\beta + g\gamma]\,\rho \\ y' - y_0' &= [h\alpha + (1 + b)\beta + f\gamma]\,\rho \\ z' - z_0' &= [g\alpha + f\beta + (1 + c)\gamma]\,\rho\,. \end{aligned}$$

Dunque i punti in linea retta avanti la deformazione sono in linea retta anche dopo, e la direzione di questa retta dipende soltanto dalla direzione di quella, e quindi i punti che si trovano sopra rette parallele avanti la deformazione, sono sopra rette parallele anche dopo.

Affinchè la direzione di una retta non muti colla deformazione dovrà essere:

$$(1+a)\alpha + h\beta + g\gamma = \lambda\alpha$$

$$h\alpha + (1+b)\beta + f\gamma = \lambda\beta$$

$$g\alpha + f\beta + (1+c)\gamma = \lambda\gamma$$

le quali equazioni danno le direzioni dei tre assi principali dell' ellissoide che ha per equazione la (8).

Dunque vi sono in ogni punto soltanto tre direzioni ortogonali fra loro nelle quali le rette non mutano direzione nella deformazione.

Se riferiamo l' ellissoide (8) a questi assi avremo:

$$2\,\mathrm{F} = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}z^2$$

e la trasformazione che dà la deformazione diviene:

$$x' = \mathrm{A}x$$

$$y' = \mathrm{B}y$$

$$z' = \mathrm{C}z$$

2.

Potenziale delle forze elastiche.

Una deformazione prodotta in un corpo solido elastico, se non oltrepassa certi limiti, dà origine a forze interne che tendono a riportare il corpo nello stato primitivo, le quali si dicono *forze elastiche.* Se durante la deformazione e il ritorno del corpo allo stato primitivo, la temperatura si mantiene costante, il lavoro meccanico fatto dalle forze esterne nel produrre la deformazione è uguale al lavoro meccanico fatto dalle forze elastiche nel ricondurre il corpo allo stato primitivo. Infatti abbiamo in questo caso un ciclo chiuso invertibile di trasformazioni, e per il secondo principio della Termodinamica, se Q è il calore assorbito o emesso dal corpo durante la deformazione, Q' quello emesso o assorbito nel ritornare allo stato primitivo e T la temperatura costante alla quale avvengono le trasformazioni, avremo:

$$\frac{Q}{T} - \frac{Q'}{T} = o$$

onde:

$$Q = Q'.$$

Dunque non si ha nè produzione nè consumo di calore, e quindi il lavoro consumato dev' essere uguale al lavoro prodotto (1). Ora il lavoro fatto dalle forze elastiche per ricondurre il corpo che ha ricevuto una data deformazione allo stato primitivo non può dipendere dagli stati intermedi per i quali è passato nel prendere quella deformazione, dunque anche il lavoro uguale fatto dalle forze esterne per deformare il corpo sarà indipendente dagli stati intermedi per i quali esse fanno passare il corpo, e dipenderà soltanto dallo stato iniziale e dallo stato finale del corpo, e sarà funzione a un sol valore, finita e continua delle sole quantità che determinano questi due stati. Questa funzione presa negativamente non è altro che il potenziale delle forze elastiche del corpo, poichè il potenziale di un sistema soggetto a forze che dipendono solo dalla posizione relativa dei suoi elementi è il lavoro meccanico fatto da queste forze nel passaggio del sistema da uno stato fisso allo stato attuale, e quella funzione esprime invece il lavoro consumato in questo passaggio.

Per avere il potenziale del corpo basterà decomporlo in elementi infinitesimi, determinare il potenziale di ciascuno e integrare. Decomponiamo il corpo in elementi parallelepipedi, e questi nello stato di equilibrio siano rettangoli con i lati paralleli ai tre assi, e con i lati di lunghezza ξ, η, ζ. In un elemento infinitesimo si possono considerare costanti le sei quantità a, b, c, f, g, h che determinano in una deformazione infini-

(1) Questo teorema è dovuto a *W. Thompson*. V. *Quarterly Journal of Mathematics* Vol. I.

tesima qualunque la variazione dell' elemento lineare, quindi l' elemento dopo una deformazione qualunque avrà sempre la forma di un parallelepipedo, e la sua forma sarà determinata da sei quantità che possono essere i tre lati e i tre angoli di un angolo solido, e il potenziale sarà una funzione di queste sei quantità finita, continua e a un sol valore insieme colle sue derivate. Dopo una deformazione determinata dai coefficienti di allungamento e di scorrimento: a, b, c, f, g, h, i tre lati saranno:

$$\xi(1+a), \quad \eta(1+b), \quad \zeta(1+c)$$

e gli angoli:

$$\frac{\pi}{2}-f, \quad \frac{\pi}{2}-g, \quad \frac{\pi}{2}-h$$

e quindi il potenziale denotandolo con P sarà:

$$\mathrm{P}=\mathrm{F}\left(\xi(1+a), \eta(1+b), \zeta(1+c), \frac{\pi}{2}-f, \frac{\pi}{2}-g, \frac{\pi}{2}-h\right).$$

Ora alla funzione F potendosi per valori piccolissimi di $a\xi$, $b\eta$... applicare il teorema di *Taylor*, avremo:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}=\;&\mathrm{F}\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\\ &+\frac{d\mathrm{F}}{d\xi}\xi a+\frac{d\mathrm{F}}{d\eta}\eta b+\ldots\\ &+\frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{F}}{d\xi^2}a^2\xi^2+\ldots\\ &+\ldots\ldots\end{aligned}$$

Il primo termine esprimendo il potenziale nello stato di equilibrio del corpo, che è quello da cui il potenziale stesso si conta, sarà uguale a zero. Nello stato di equilibrio poi dovendo la variazione prima del potenziale essere uguale a zero, sarà uguale a zero anche la parte che contiene linearmente le a, b, c, f, g, h. Dovendo poi essere un massimo il valore del potenziale affinchè l' equilibrio sia stabile dovrà la variazione seconda essere sempre negativa. Quindi il potenziale delle forze elastiche è dato da una forma negativa di secondo grado omogenea delle quantità:

$$a, b, c, f, g, h.$$

Ponendo:

$$(9)\qquad \begin{array}{l} a = x_1, \quad b = x_2, \quad c = x_3 \\ f = x_4, \quad g = x_5, \quad h = x_6 \end{array}$$

avremo per il potenziale di un elemento:

$$P = \Sigma\Sigma A_{rs} x_r x_s.$$

Se il corpo è omogeneo i coefficienti A_{rs} saranno evidentemente costanti in tutto il corpo.

Se il corpo è *isotropo*, cioè se le forze elastiche sono uguali in tutte le direzioni, il potenziale delle forze elastiche di un elemento avrà uguali i coefficienti delle variabili corrispondenti quando sia riferito a due differenti sistemi di assi coordinati. Quindi se prendiamo invece degli assi x, y, z altri tre assi ortogonali x', y', z' tali che x' e y' coincidano con x e y e z' abbia la direzione opposta a z, sarà per un punto qualunque:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z$$

$$u' = u, \quad v' = v, \quad w' = -w$$

e per conseguenza:

$$x_1' = \frac{du'}{dx'} = \frac{du}{dx} = x_1,$$

$$x_2' = \frac{dv'}{dy'} = \frac{dv}{dy} = x_2,$$

$$x_3' = \frac{dw'}{dz'} = \frac{dw}{dz} = x_3,$$

$$x_4' = \frac{dv'}{dz'} + \frac{dw'}{dy'} = -\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} = -x_4$$

$$x_5' = \frac{dw'}{dx'} + \frac{du'}{dz'} = -\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} = -x_5$$

$$x_6' = \frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = x_6$$

e quindi :

$$\Sigma\Sigma\, A_{rs}\, x_r\, x_s = \Sigma\Sigma \pm A_{rs}\, x_r'\, x_s'$$

dove si deve prendere il segno negativo soltanto quando uno solo dei due indici r ed s è uguale a uno dei due numeri 4 e 5. Dovendo essere uguali i coefficienti dei prodotti delle variabili corrispondenti, avremo :

$$A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{64} = o$$

$$A_{15} = A_{25} = A_{35} = A_{65} = o.$$

Mutando la direzione al solo asse delle y si trova analogamente :

$$A_{16} = A_{26} = A_{36} = A_{56} = o$$

e mutando la direzione del solo asse delle x si trova :

$$A_{46} = o\,.$$

Quindi rimane :

$$P = A_{11}\, x_1^2 + A_{22}\, x_2^2 + A_{33}\, x_3^2 + A_{44}\, x_4^2 + A_{55}\, x_5^2 + A_{66}\, x_6^2$$
$$+ 2\, A_{12}\, x_1 x_2 + 2\, A_{23}\, x_2 x_3 + 2\, A_{31}\, x_1 x_3\,.$$

Mutando x in y e y in x si trova :

$$A_{11} = A_{22}\,, \quad A_{13} = A_{23}$$
$$A_{55} = A_{66}$$

e mutando y in z e z in y :

$$A_{22} = A_{33}\,, \quad A_{55} = A_{44}\,, \quad A_{12} = A_{31}$$

onde :

$$P = A_{11}\, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + A_{44}\, (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)$$
$$+ 2\, A_{12}\, (x_1\, x_2 + x_2\, x_3 + x_3\, x_1)$$

e ponendo :

$$A_{12} = A\,, \quad A_{11} - A_{12} = B\,, \quad A_{44} = C$$

$$P = A\, (x_1 + x_2 + x_3)^2 + B\, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$
$$+ C\, (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)$$

e sostituendo i valori (9) delle x:

$$(10)\quad P = A\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)^2 + B\left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{dv^2}{dy^2} + \frac{dw^2}{dz^2}\right)$$
$$+ C\left[\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)^2\right].$$

Facciamo ora la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{array}{ll} x' = \quad x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi & u = u'\cos\varphi - v'\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y' = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi & v = u'\,\mathrm{sen}\,\varphi + v'\cos\varphi \\ z' = \quad z & w = w' \end{array}$$

avremo:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du'}{dx'}\cos^2\varphi + \frac{dv'}{dy'}\mathrm{sen}^2\varphi - \left(\frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'}\right)\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{du'}{dx'}\mathrm{sen}^2\varphi + \frac{dv'}{dy'}\cos^2\varphi + \left(\frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'}\right)\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw'}{dz'}$$

onde:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'}$$

$$\frac{du^2}{dx^2} + \frac{dv^2}{dy^2} + \frac{dw^2}{dz^2} = \frac{du'^2}{dx'^2} + \frac{dv'^2}{dy'^2} + \frac{dw'^2}{dz'^2} + 2\left(\frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'}\right)^2$$
$$- 2\left[\left(\frac{du'}{dx'} - \frac{dv'}{dy'}\right)\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + \left(\frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'}\right)(\cos^2\varphi - \mathrm{sen}^2\varphi)\right]^2.$$

Abbiamo inoltre:

$$\frac{du}{dy} = \frac{du'}{dx'}\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi - \frac{dv'}{dy'}\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + \frac{du'}{dy'}\cos^2\varphi - \frac{dv'}{dx'}\mathrm{sen}^2\varphi$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{du'}{dx'}\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + \frac{dv'}{dy'}\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi - \frac{du'}{dy'}\mathrm{sen}^2\varphi + \frac{dv'}{dx'}\mathrm{sen}^2\varphi$$

$$\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=\left(\frac{du'}{dx'}-\frac{dv'}{dy'}\right)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+\left(\frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}\right)(\cos^2\varphi-\operatorname{sen}^2\varphi)$$

$$\frac{du}{dz}=\frac{du'}{dz'}\cos\varphi-\frac{dv'}{dz'}\operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{dw}{dx}=\frac{dw'}{dx'}\cos\varphi-\frac{dw'}{dy'}\operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}=\left(\frac{du'}{dz'}+\frac{dw'}{dx'}\right)\cos\varphi-\left(\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}\right)\operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{dv}{dz}=\frac{du'}{dz'}\operatorname{sen}\varphi+\frac{dv'}{dz'}\cos\varphi$$

$$\frac{dw}{dy}=\frac{dw'}{dx'}\operatorname{sen}\varphi+\frac{dw'}{dy'}\cos\varphi$$

$$\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}=\left(\frac{du'}{dz'}+\frac{dw'}{dx'}\right)\operatorname{sen}\varphi+\left(\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}\right)\cos\varphi\,.$$

Sostituendo i valori trovati nella equazione (10), abbiamo:

$$\begin{aligned}P=\;&A\left(\frac{du'}{dx'}+\frac{dv'}{dy'}+\frac{dw'}{dz'}\right)^2\\&+B\left(\frac{du'^2}{dx'^2}+\frac{dv'^2}{dy'^2}+\frac{dw'^2}{dz'^2}\right)\\&+C\left[\left(\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}\right)^2+\left(\frac{du'}{dz'}+\frac{dw'}{dx'}\right)^2\right]\\&+2B\left(\frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}\right)^2\\&+(C-2B)\left\{\left(\frac{du'}{dx'}-\frac{dv'}{dy'}\right)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi-\left(\frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}\right)(\cos^2\varphi-\operatorname{sen}^2\varphi)\right\}^2\end{aligned}$$

la quale avrà la stessa forma che nel primitivo sistema di coordinate soltanto quando sia:

$$C=2B$$

ossia:

$$P=A\Theta+B\Lambda^2$$

essendo :

$$\Theta = a + b + c$$

$$\Lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2f^2 + 2g^2 + 2h^2.$$

Come abbiamo veduto Θ è il coefficiente di dilatazione. Vediamo ora che cosa significa Λ^2.

Prendiamo per origine il centro di gravità, e per assi gli assi principali d'inerzia dell'elemento avanti la deformazione, denotando con x', y', z' le coordinate di un punto dopo la deformazione, avremo :

$$x' = (1 + a)x + hy + gz$$

$$y' = hx + (1 + b)y + fz$$

$$z' = gx + fy + (1 + c)z$$

e sarà :

$$\int xd\,S = o, \quad \int yd\,S = o, \quad \int zd\,S = o$$

$$\int yz\,dS = o, \quad \int zx\,dS = o, \quad \int xy\,dS = o.$$

Se l'elemento avanti la deformazione si è preso in modo che siano uguali i tre integrali :

$$\int x^2\,dS = \int y^2\,dS = \int z^2\,dS$$

e quindi uguali i tre momenti d'inerzia che denoteremo con $2m$, avremo :

$$\int \Big((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \Big)\,dS$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + 2f^2 + 2g^2 + 2h^2)m.$$

Ossia :

$$\Lambda^2 = \frac{\int [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]\, dS}{m}$$

cioè uguale al rapporto tra la somma dei quadrati degli spostamenti di tutti i suoi punti alla metà del momento d'inerzia dell'elemento rispetto ad uno degli assi.

3.

Equazioni di equilibrio dei corpi solidi elastici omogenei.

Per determinare le relazioni che debbono esistere tra le forze che agiscono sopra un corpo solido elastico omogeneo, e le deformazioni degli elementi dello stesso, affinchè si abbia equilibrio, ci varremo del seguente principio di *Lagrange:* affinchè un sistema, i cui moti virtuali sono invertibili, sia in equilibrio è necessario e sufficiente che il lavoro meccanico fatto dalle forze in un moto virtuale qualunque, sia uguale a zero.

Siano X, Y, Z le componenti delle forze acceleratrici che agiscono su ciascun punto del corpo; L, M, N le componenti delle forze che agiscono su ciascun punto della superficie di esso, e ρ la densità costante. Diamo ad ogni punto del corpo deformato un moto virtuale; e denotiamo con δu, δv, δw le variazioni che per questo moto prenderanno u, v, w. Il lavoro fatto in questo moto dalle forze date sarà evidentemente:

$$\int_S \rho\,(X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w)\, dS + \int_\sigma (L\,\delta u + M\,\delta v + N\,\delta w)\, d\sigma$$

essendo S lo spazio occupato dal corpo e σ la sua superficie. Il lavoro fatto dalle forze elastiche sarà uguale all'aumento del potenziale di tutto il corpo che è:

$$\Phi = \int_S P\, dS.$$

Onde per il principio di *Lagrange*:

$$(11)\quad \delta\Phi+\int_S \rho(X\delta u+Y\delta v+Z\delta w)dS+\int_\sigma (L\delta u+M\delta v+N\delta w)\,d\sigma=o.$$

Ora, denotando con α, β, γ i coseni degli angoli che la normale diretta verso l'interno del corpo fa cogli assi positivi, abbiamo:

$$\delta\Phi=\int_S\left[\frac{dP}{da}\frac{d\delta u}{dx}+\frac{dP}{db}\frac{d\delta v}{dy}+\frac{dP}{dc}\frac{d\delta w}{dz}\right.$$

$$\left.+\frac{dP}{2df}\left(\frac{d\delta w}{dy}+\frac{d\delta v}{dz}\right)+\frac{dP}{2dg}\left(\frac{d\delta u}{dz}+\frac{d\delta w}{dx}\right)+\frac{dP}{2dh}\left(\frac{d\delta u}{dy}+\frac{d\delta v}{dx}\right)\right]dS$$

$$=-\int_\sigma\left[\left(\frac{dP}{da}\alpha+\frac{dP}{2dh}\beta+\frac{dP}{2dg}\gamma\right)\delta u\right.$$

$$+\left(\frac{dP}{2dh}\alpha+\frac{dP}{db}\beta+\frac{dP}{2df}\gamma\right)\delta v$$

$$\left.+\left(\frac{dP}{2dg}\alpha+\frac{dP}{2df}\beta+\frac{dP}{dc}\gamma\right)\delta w\right]d\sigma$$

$$-\int_S\left\{\left(\frac{d}{dx}\frac{dP}{da}+\frac{d}{dy}\frac{dP}{2dh}+\frac{d}{dz}\frac{dP}{2dg}\right)\delta u\right.$$

$$+\left(\frac{d}{dx}\frac{dP}{2dh}+\frac{d}{dy}\frac{dP}{db}+\frac{d}{dz}\frac{dP}{2df}\right)\delta v$$

$$\left.+\left(\frac{d}{dx}\frac{dP}{2dg}+\frac{d}{dy}\frac{dP}{2df}+\frac{d}{dz}\frac{dP}{dc}\right)\delta w\right\}dS\,.$$

Sostituendo nella (11) ed eguagliando a zero i coefficienti di δu, δv, δw nell'integrale triplo e doppio separatamente, si ottengono le equazioni di equilibrio:

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
\rho X &= \frac{d}{dx}\frac{dP}{da} + \frac{d}{dy}\frac{dP}{2dh} + \frac{d}{dz}\frac{dP}{2dg} \\
\rho Y &= \frac{d}{dx}\frac{dP}{2dh} + \frac{d}{dy}\frac{dP}{db} + \frac{d}{dz}\frac{dP}{2df} \\
\rho Z &= \frac{d}{dx}\frac{dP}{2dg} + \frac{d}{dy}\frac{dP}{2df} + \frac{d}{dz}\frac{dP}{dc}\,.
\end{aligned}
$$

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
L &= \frac{dP}{da}\alpha + \frac{dP}{2dh}\beta + \frac{dP}{2dg}\gamma \\
M &= \frac{dP}{2dh}\alpha + \frac{dP}{db}\beta + \frac{dP}{2df}\gamma \\
N &= \frac{dP}{2dg}\alpha + \frac{dP}{2df}\beta + \frac{dP}{dc}\gamma\,.
\end{aligned}
$$

A queste equazioni aggiungeremo le altre che esprimono che sono impediti i moti che un elemento potrebbe prendere se fosse rigido, cioè:

$$
u = v = w = o\,,\quad \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} = \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} = o\,,
$$

in un punto che si prende per origine delle coordinate.

Queste equazioni determinano le funzioni u, v, w in tutto il corpo.

Infatti, supponiamo che esistano due sistemi differenti di funzioni:

$$
u',\ v',\ w'\ ;\quad u'',\ v'',\ w''
$$

che sodisfacciano contemporaneamente a tutte queste equazioni. Denotiamo con $P', a', b', \ldots$; e con $P'', a'', b'', \ldots$; i valori rispettivi di $P, a, b, \ldots$, quando si sostituiscono il primo e il secondo dei due sistemi di valori di u, v, w. Poniamo:

$$
u' - u'' = U\,,\quad v' - v'' = V\,,\quad w' - w'' = W
$$

e denotiamo con Π, $A, B, \ldots$ i valori rispettivi di $P, a, b, \ldots$ quando vi si sostituiscano U, V, W ad u, v, w.

Ora essendo P una funzione omogenea di secondo grado di a, b, c, f, g, h le sue derivate conterranno al primo grado queste medesime quantità; quindi abbiamo:

$$\frac{dP'}{da'} - \frac{dP''}{da''} = \frac{d\Pi}{dA}$$

$$\frac{dP'}{db'} - \frac{dP''}{db''} = \frac{d\Pi}{dB}$$

. . . .

Sostituendo nelle equazioni (12) e (13) i valori u', v', w' e poi u'', v'', w'' e sottraendo avremo:

$$\frac{d}{dx}\frac{d\Pi}{dA} + \frac{d}{dy}\frac{d\Pi}{2\,dH} + \frac{d}{dz}\frac{d\Pi}{2\,dG} = o$$

$$(14) \qquad \frac{d}{dx}\frac{d\Pi}{2\,dH} + \frac{d}{dy}\frac{d\Pi}{dB} + \frac{d}{dz}\frac{d\Pi}{2\,dF} = o$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d\Pi}{2\,dG} + \frac{d}{dy}\frac{d\Pi}{2\,dF} + \frac{d}{dz}\frac{d\Pi}{dC} = o \quad .$$

in tutto lo spazio occupato dal corpo, e:

$$\alpha\frac{d\Pi}{dA} + \beta\frac{d\Pi}{2\,dH} + \gamma\frac{d\Pi}{2\,dG} = o$$

$$(15) \qquad \alpha\frac{d\Pi}{2\,dH} + \beta\frac{d\Pi}{dB} + \gamma\frac{d\Pi}{2\,dF} = o$$

$$\alpha\frac{d\Pi}{2\,dG} + \beta\frac{dH}{2\,dF} + \gamma\frac{d\Pi}{dC} = o$$

sopra tutta la superficie del corpo.

Moltiplichiamo la prima delle (14) per $U dS$, la seconda per $V dS$, la terza per $W dS$, sommiamo e integriamo a tutto lo spazio occupato dal corpo. Applicando la integrazione per parti, avremo:

$$-\int_\sigma \left[U \left(\alpha \frac{d\Pi}{dA} + \beta \frac{d\Pi}{2\,dH} + \gamma \frac{d\Pi}{2\,dG} \right) \right.$$

$$+ V \left(\alpha \frac{d\Pi}{2\,dH} + \beta \frac{d\Pi}{dB} + \gamma \frac{d\Pi}{2\,dF} \right)$$

$$\left. + W \left(\alpha \frac{d\Pi}{2\,dG} + \beta \frac{d\Pi}{2\,dF} + \gamma \frac{d\Pi}{dC} \right) \right] d\sigma$$

$$-\int_S \left[\frac{dU}{dx} \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dV}{dy} \frac{d\Pi}{dB} + \frac{dW}{dz} \frac{d\Pi}{dC} \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{dU}{dy} + \frac{dV}{dx} \right) \frac{d\Pi}{dH} + \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dz} + \frac{dW}{dy} \right) \frac{d\Pi}{dF}$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dx} + \frac{dU}{dz} \right) \frac{d\Pi}{dG} \right] dS = o\,.$$

Gli elementi dell' integrale esteso alla superficie sono, a cagione delle (15), tutti uguali a zero. Quindi l' integrale esteso allo spazio S è uguale a zero. Ricordando il significato delle quantità A, B, C... e l' equazioni (1), avremo:

$$\int_S \left(A \frac{d\Pi}{dA} + B \frac{d\Pi}{dB} + C \frac{d\Pi}{dC} \right.$$

$$\left. + F \frac{d\Pi}{dF} + G \frac{d\Pi}{dG} + H \frac{d\Pi}{dH} \right) dS = o.$$

Essendo Π una funzione omogenea di secondo grado di A, B, C, F, G, H si ha:

$$2 \int_S \Pi \, dS = o.$$

Ora Π non può avere valori positivi, quindi essendo una funzione continua in tutto il corpo, non potrà l' integrale essere uguale a zero se non sia:

$$\Pi = o$$

in tutto lo spazio S. Ma Π non può essere nulla, essendo una forma negativa, altro che quando sia:

$$A = B = C = F = G = H = o;$$

dunque (n. 2):

$$U = u' - u'' = l + ry - qz ,$$

$$V = v' - v'' = m + pz - rx ,$$

$$W = w' - w'' = n + qx - py .$$

Ora per $x = y = z = o$:

$$U = V = W = o, \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} = o, \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} = o, \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} = o$$

onde:

$$l = m = n = p = q = r = o$$

e quindi:

$$U = o, \quad V = o, \quad W = o,$$

cioè:

$$u' = u'', \quad v' = v'', \quad w' = w''$$

in tutto lo spazio S, come volevamo dimostrare.

4.

Decomposizione delle forze che agiscono sopra tutti gli elementi di un corpo.

Le componenti: X, Y, Z delle forze che agiscono sopra tutti i punti dello spazio S occupato da un corpo, siano funzioni finite, continue e a un sol valore, insieme colle loro derivate, in tutto lo spazio S. Poniamo:

$$(16)\qquad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = \Phi ,$$

$$(17)\qquad F = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\Phi' \, dS'}{r} ,$$

dove:

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 ,$$

e sono distinti con un apice i valori relativi ai punti x', y', z', rispetto ai quali deve effettuarsi la integrazione. Avremo in tutto lo spazio S, per un teorema noto:

$$(18)\qquad \Delta^2 F = \Phi .$$

Sia φ una funzione finita, continua e a un sol valore, insieme colle sue derivate, che sodisfa alla equazione:

$$(19)\qquad \Delta^2 \varphi = o$$

in tutto lo spazio S, e alla equazione:

$$(20)\left(X - \frac{dF}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\right)\alpha + \left(Y - \frac{dF}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\right)\beta + \left(Z - \frac{dF}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}\right)\gamma = o$$

sopra tutta la superficie σ contorno dello spazio S, essendo α, β, γ i coseni degli angoli che la normale a σ diretta verso l'interno di S fa cogli assi positivi.

Poniamo:

$$f = F + \phi \tag{21}$$

e

$$X = \frac{df}{dx} + G$$

$$Y = \frac{df}{dy} + H \tag{22}$$

$$Z = \frac{df}{dz} + K .$$

Avremo per l' equazioni (18), (19) e (16), in tutto lo spazio S:

$$\Delta^2 f = \Phi \tag{23}$$

$$\frac{dG}{dx} + \frac{dH}{dy} + \frac{dK}{dz} = o ; \tag{24}$$

e per la equazione (20), sopra tutta la superficie σ:

$$G\alpha + H\beta + \gamma K = o . \tag{25}$$

Siano ora:

$$A = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{G' dS'}{r} , \quad B = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{H' dS'}{r} , \tag{26}$$

$$C = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{K' dS'}{r} ,$$

sarà:

$$\Delta^2 A = G , \quad \Delta^2 B = H , \quad \Delta^2 C = K ,$$

e in conseguenza delle equazioni (24) e (25):

$$\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}=-\frac{1}{4\pi}\int_{\sigma}\frac{G\alpha+H\beta+K\gamma}{r}d\sigma$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{S}\left(\frac{dG'}{dx'}+\frac{dH'}{dy'}+\frac{dK'}{dz'}\right)\frac{dS'}{r}=o.$$

Quindi:

$$\Delta^2 A=\frac{d}{dy}\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)-\frac{d}{dz}\left(\frac{dC}{dx}-\frac{dA}{dx}\right)=G$$

$$\Delta^2 B=\frac{d}{dz}\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)=H$$

$$\Delta^2 C=\frac{d}{dx}\left(\frac{dC}{dx}-\frac{dA}{dz}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)=K$$

e ponendo:

$$U=\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}$$

$$(27)\qquad V=\frac{dC}{dx}-\frac{dA}{dz}$$

$$W=\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}$$

avremo:

$$G=\frac{dW}{dy}-\frac{dV}{dz}$$

$$(28)\qquad H=\frac{dU}{dz}-\frac{dW}{dx}$$

$$K=\frac{dV}{dx}-\frac{dU}{dy}$$

e quindi:

$$
(29) \qquad
\begin{aligned}
X &= \frac{df}{dx} + \frac{dW}{dy} - \frac{dV}{dz} \\
Y &= \frac{df}{dy} + \frac{dU}{dz} - \frac{dW}{dx} \\
Z &= \frac{df}{dz} + \frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}
\end{aligned}
$$

Poichè dall'equazione (27) si deduce:

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = o$$

avremo dalle (28) e (29):

$$
(30) \qquad
\begin{aligned}
\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} &= \frac{dH}{dz} - \frac{dK}{dy} = \Delta^2 U \\
\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} &= \frac{dK}{dx} - \frac{dG}{dz} = \Delta^2 V \\
\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} &= \frac{dG}{dy} - \frac{dH}{dx} = \Delta^2 W .
\end{aligned}
$$

Imaginiamo nello spazio S una sfera s di raggio ε, e consideriamo la parte di essa compresa tra due sfere concentriche di raggio r ed $r + dr$. Prendiamo le componenti nella direzione del raggio r, dei due sistemi di forze $\left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right)$ e (G, H, K). Denotando con α, β, γ i coseni degli angoli che la direzione di r fa con i tre assi, con τ la superficie, con T il volume della sfera di raggio r, avremo per il primo sistema:

$$\rho\, dr \int_\tau \left(\frac{df}{dx}\alpha + \frac{df}{dy}\beta + \frac{df}{dz}\gamma\right) d\tau = \rho\, dr \int_T \Phi\, dT,$$

$$\rho\, dr \int_\tau (G\alpha + H\beta + K\gamma)\, d\tau = \rho\, dr \int_T \left(\frac{dG}{dx} + \frac{dH}{dy} + \frac{dK}{dz}\right) dT = o.$$

Integrando a tutta la sfera, supposta così piccola che Φ vi si possa ritenere costante e rammentando la equazione (24), otterremo:

$$\rho \int_0^{\varepsilon} dr \int_{\tau} \left(\frac{df}{dx}\alpha + \frac{df}{dy}\beta + \frac{df}{dz} \right) ds = \frac{\pi \varepsilon^4 \rho}{3} \Phi,$$

$$\rho \int_0^{\varepsilon} dr \int_{\tau} (G\alpha + H\beta + K\gamma)\, d\tau = o \,.$$

Dunque il sistema di forze $\left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right)$ tende a variare il volume di un elemento sferico e questa azione è direttamente proporzionale al valore di Φ; sarebbe nulla quando fosse:

$$\Phi = \Delta^2 f = o \,;$$

e il sistema (G, H, K) non esercita alcuna azione che tenda a variare i volumi degli elementi del corpo.

Ora prendiamo a considerare la porzione di s compresa tra due sfere concentriche di raggio r ed $r + dr$, e due piani perpendicolari all'asse delle z distanti di $rd\theta$. Un elemento di questa porzione di s sarà:

$$r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr \,.$$

Le componenti del sistema di forze $\left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right)$ nelle direzioni delle tangenti al cerchio di raggio $r \operatorname{sen} \theta$, ponendo:

$$dl = r \operatorname{sen} \theta \, d\varphi$$

saranno:

$$\rho r \, dr \, d\theta \int_{l} \left(\frac{df}{dx}\frac{dx}{dl} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dl} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dl} \right) dl = o$$

per un teorema noto di analisi, essendo f finita, continua e a un sol valore, insieme colle sue derivate, in tutto lo spazio s.

Dunque le forze che hanno la funzione potenziale f non tendono a produrre nessuna rotazione negli elementi del corpo.

Prendiamo ora le componenti nelle direzioni delle tangenti al cerchio di raggio r sen θ, del sistema di forze (G, H, K), avremo:

$$\rho r\, d\theta\, dr \int_l \left(G \frac{dx}{dl} + H \frac{dy}{dl} + K \frac{dz}{dl} \right) dl$$

$$= \rho r\, d\theta\, dr \int_\omega \left(\frac{dG}{dy} - \frac{dH}{dx} \right) d\omega$$

essendo ω l'area del cerchio di raggio r sen θ.

Queste forze danno ciascuna una coppia il cui momento rispetto all'asse z, si ottiene moltiplicando per la distanza r sen θ da questo asse; abbiamo quindi per il momento della coppia relativa all'asse delle z, se la sfera è infinitesima:

$$\rho r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, dr \int_\omega \left(\frac{dG}{dy} - \frac{dH}{dx} \right) d\omega$$

$$= \rho \pi r^4 \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta\, dr \left(\frac{dG}{dy} - \frac{dH}{dx} \right) .$$

Estendendo a tutta la sfera di raggio ε, e denotando con M_z il momento della coppia che tende a farla ruotare intorno all'asse delle z, avremo:

$$M_z = \rho \pi \left(\frac{dG}{dy} - \frac{dH}{dx} \right) \int_0^\varepsilon r^4\, dr \int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta .$$

Poniamo:

$$m = 2 \pi \rho \int_0^\varepsilon r^4\, dr \int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta$$

avremo:

$$M_z = \frac{m}{2} \left(\frac{dG}{dy} - \frac{dH}{dx} \right)$$

ed m è il momento d'inerzia della sfera rispetto all'asse delle z. Analogamente avremo:

$$M_y = \frac{m}{1}\left(\frac{dK}{dx} - \frac{dG}{dz}\right)$$

$$M_x = \frac{m}{2}\left(\frac{dH}{dz} - \frac{dK}{dy}\right)$$

e anche, a cagione delle equazioni (30):

$$M_x = \frac{m}{2}\Delta^2 U\,, \quad M_y = \frac{m}{2}\Delta^2 V\,, \quad M_z = \frac{m}{2}\Delta^2 W$$

ed abbiamo il seguente teorema.

Se le componenti delle forze che agiscono sopra tutti i punti di un corpo, sono funzioni finite, continue e a un sol valore, insieme colle loro derivate, dei punti dello spazio occupato dal corpo stesso, potranno sempre decomporsi in due sistemi: dei quali uno ha una funzione potenziale f, *e tende a variare i volumi degli elementi con un' azione proporzionale al valore di* Δ^2 f, *e non tende a produrre rotazione alcuna negli elementi; l'altro non ha una funzione potenziale, non tende a variare i volumi degli elementi, ma tende a far rotare gli elementi, e i momenti delle coppie che tendono a far rotare un elemento sferico intorno a tre assi paralleli agli assi coordinati e che passano per il centro, sono uguali rispettivamente alla metà del momento d'inerzia della sfera moltiplicata per le tre differenze delle derivate che dovrebbero annullarsi affinchè il sistema di forze avesse una funzione potenziale. Le componenti del secondo sistema di forze possono sempre porsi sotto la forma:*

$$\frac{dW}{dy} - \frac{dV}{dz}\,, \qquad \frac{dU}{dz} - \frac{dW}{dx}\,, \qquad \frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}\,,$$

e i momenti delle coppie componenti sono uguali alla metà del momento d'inerzia dell'elemento moltiplicata rispettivamente per $\Delta^2 U$, $\Delta^2 V$, $\Delta^2 W$.

Le forze del primo sistema le chiameremo forze *di dilatazione senza rotazione*, e quelle del secondo forze *di rotazione senza dilatazione*.

5.

Determinazione dei sistemi di spostamenti che fanno equilibrio a forze che agiscono sopra tutti gli elementi di un corpo solido elastico isotropo.

Quando il corpo elastico è isotropo il potenziale delle forze elastiche è (n.° 2):

$$P = A\Theta^2 + B\Lambda^2 \ .$$

Poichè P non può avere valori positivi, qualunque siano i valori reali e sempre positivi di Θ^2 e Λ^2, i coefficienti numerici A e B dovranno essere negativi, e denotando con λ e μ i valori assoluti di questi numeri, avremo:

$$\begin{aligned} P = &-\lambda\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)^2 \\ (31)\qquad &-\mu\left(\frac{du^2}{dx^2}+\frac{dv^2}{dy^2}+\frac{dw^2}{dz^2}\right) \\ &-\frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)^2+\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)^2\right] \end{aligned}$$

e l'equazioni di equilibrio per tutti i punti dello spazio S, divengono:

$$\begin{aligned} &\rho X + (2\lambda+\mu)\frac{d\Theta}{dx} + \mu\Delta^2 u = o \\ (32)\qquad &\rho Y + (2\lambda+\mu)\frac{d\Theta}{dy} + \mu\Delta^2 v = o \\ &\rho Z + (2\lambda+\mu)\frac{d\Theta}{dz} + \mu\Delta^2 w = o \ , \end{aligned}$$

essendo :

$$\Delta^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} ;$$

e quelle relative ai punti della superficie σ contorno dello spazio S :

$$L + 2\left(\lambda\Theta + \mu\frac{du}{dx}\right)\alpha + \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\beta + \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\gamma = o$$

$$(33)\quad M + \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)\alpha + 2\left(\lambda\,\Theta + \frac{dv}{dy}\right)\beta + \mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)\gamma = o$$

$$N + \mu\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) + \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right)\beta + \gamma\left(\lambda\Theta + \mu\frac{dw}{dz}\right)\gamma = o.$$

La determinazione degli spostamenti che fanno equilibrio ai due sistemi di forze (X, Y, Z) ed (L, M, N) si può fare separatamente. Basterà porre :

$$(34)\qquad u = u' + u'' ,\quad v = v' + v'' ,\quad w = w' + w''$$

e determinare u', v', w' in modo che sodisfacciano all'equazioni (32), e quindi u'', v'', w'' in modo che sodisfacciano alle (32) nelle quali è posto $X = Y = Z = o$, e alle (33) nelle quali ad L, M, N sono aggiunti i termini che contengono le derivate di u', v', w' dopo che in esse sono sostituiti i valori (34).

La determinazione di u', v', w' si può fare in generale, quando X, Y e Z siano funzioni finite, continue e a un sol valore, insieme colle loro derivate, in tutto lo spazio S, e quindi possono porsi sotto la forma:

$$X = \frac{df}{dx} + \frac{dW}{dy} - \frac{dV}{dz} ,$$

$$Y = -\frac{dW}{dx} + \frac{df}{dy} + \frac{dU}{dz},$$

$$Z = \frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy} + \frac{df}{dz}.$$

Infatti, se prendiamo le funzioni u, v, w sotto la forma:

$$u = \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\theta_3}{dy} - \frac{d\theta_2}{dz},$$

$$v = -\frac{d\theta_3}{dx} + \frac{d\Psi}{dy} + \frac{d\theta_1}{dz},$$

$$w = \frac{d\theta_2}{dx} - \frac{d\theta_1}{dy} + \frac{d\Psi}{dz},$$

avremo:

$$\Theta = \Delta^2 \Psi,$$

$$\Delta^2 u = \frac{d\Theta}{dx} + \frac{d\Delta^2\theta_3}{dy} - \frac{d\Delta^2\theta_2}{dz},$$

$$\Delta^2 v = -\frac{d\Delta^2\theta_3}{dx} + \frac{d\Theta}{dy} + \frac{d\Delta^2\theta_1}{dz},$$

$$\Delta^2 w = \frac{d\Delta^2\theta_2}{dx} - \frac{d\Delta^2\theta_1}{dy} + \frac{d\Theta}{dz},$$

e quindi l'equazioni (32) divengono:

$$\rho\left(\frac{df}{dx} + \frac{dW}{dy} - \frac{dV}{dz}\right) + 2(\lambda + \mu)\frac{d\Delta^2\Psi}{dx}$$

$$+ \mu\frac{d\Delta^2\theta_3}{dy} - \mu\frac{d\Delta^2\theta_2}{dz} = o,$$

$$\rho\left(-\frac{dW}{dx}+\frac{df}{dy}+\frac{dU}{dz}\right)-\mu\frac{d\,\Delta^2\theta_3}{dx}$$

$$+2(\lambda+\mu)\frac{d\,\Delta^2\Psi}{dy}+\mu\frac{d\,\Delta^2\theta_1}{dz}=o\,,$$

$$\rho\left(\frac{dV}{dx}-\frac{dU}{dy}+\frac{df}{dz}\right)+\mu\frac{d\,\Delta^2\theta_2}{dx}$$

$$-\mu\frac{d\,\Delta^2\theta_1}{dy}+2(\lambda+\mu)\frac{d\,\Delta^2\Psi}{dz}=o\,,$$

le quali sono evidentemente sodisfatte prendendo:

$$\Psi=\frac{\rho}{8\pi(\lambda+\mu)}\int_S\frac{f'dS'}{r}\,,$$

$$\theta_1=\frac{\rho}{4\pi\mu}\int_S\frac{U'dS'}{r}\,,$$

$$\theta_2=\frac{\rho}{4\pi\mu}\int_S\frac{V'dS'}{r}\,,$$

$$\theta_3=\frac{\rho}{4\pi\mu}\int_S\frac{W'dS'}{r}\,,$$

$$u=\frac{\rho}{8\pi(\lambda+\mu)}\frac{d}{dx}\int_S\frac{f'dS'}{r}+\frac{\rho}{4\pi\mu}\frac{d}{dy}\int_S\frac{W'dS'}{r}-\frac{\rho}{4\pi\mu}\frac{d}{dz}\int_S\frac{V'dS'}{r}$$

$$v=-\frac{\rho}{4\pi\mu}\frac{d}{dx}\int_S\frac{W'dS'}{r}+\frac{\rho}{8\pi(\lambda+\mu)}\int_S\frac{f'dS'}{r}+\frac{\rho}{4\pi\mu}\frac{d}{dz}\int_S\frac{U'dS'}{r}$$

$$w=\frac{\rho}{4\pi\mu}\frac{d}{dx}\int_S\frac{V'dS'}{r}-\frac{\rho}{4\pi\mu}\frac{d}{dy}\int_S\frac{U'dS'}{r}+\frac{\rho}{8\pi(\lambda+\mu)}\frac{d}{dz}\int_S\frac{f'dS'}{r}$$

Effettuando le derivazioni si ottiene:

$$u=\frac{\rho}{8\pi(\lambda+\mu)}\int_S \frac{f'}{r^2}\cos(rx)dS'+\frac{\rho}{4\pi\mu}\int_S\Big(W'\cos(ry)-V'\cos(rz)\Big)\frac{dS'}{r^2}$$

$$v=\frac{\rho}{8\pi(\lambda+\mu)}\int_S \frac{f'}{r^2}\cos(ry)dS'+\frac{\rho}{4\pi\mu}\int_S\Big(U'\cos(rz)-W'\cos(rx)\Big)\frac{dS'}{r^2}$$

$$w=\frac{\rho}{8\pi\ \lambda+\mu)}\int_S \frac{f'}{r^2}\cos(rz)dS'+\frac{\rho}{4\pi\mu}\int_S\Big(V'\cos(rx)-U'\cos(ry)\Big)\frac{dS'}{r^2}$$

Poniamo:

$$U = J\cos\alpha\,,\qquad V = J\cos\beta\,,\qquad W = J\cos\gamma$$

essendo $J=\sqrt{U^2+V^2+W^2}$, avremo:

$$\cos(px)\,\text{sen}\,(Jr)=\cos\gamma\cos(ry)-\cos\beta\cos(rz)$$

$$\cos(py)\ \text{sen}\,(Jr)=\cos\alpha\cos(rz)-\cos\gamma\cos(rx)$$

$$\cos(pz)\ \text{sen}\,(Jr)=\cos\beta\cos(rx)-\cos\alpha\cos(ry)$$

essendo p la normale al piano delle rette r ed J. Sostituendo nelle precedenti si ha:

$$u=\frac{\rho}{8\pi(\lambda+\mu)}\int_S\frac{f'\cos(rx)}{r^2}\,dS'+\frac{\rho}{4\pi\mu}\int_S\frac{J'\,\text{sen}(J'r)}{r^2}\cos(p'x)\,dS'$$

$$v=\frac{\rho}{8\pi(\lambda+\mu)}\int_S\frac{f'\cos(ry)}{r^2}\,dS+\frac{\rho}{4\pi\mu}\int_S\frac{J'\,\text{sen}(J'r)}{r^2}\cos(p'y)\,dS'$$

$$w=\frac{\rho}{8\pi(\lambda+\mu)}\int_S\frac{f'\cos(rz)}{r^2}\,dS+\frac{\rho}{4\pi\mu}\int_S\frac{J'\,\text{sen}(Jz)}{r^2}\cos(p'z)\,dS'\,.$$

Ora gli elementi dei secondi integrali del secondo membro sono le componenti dell'azione che un elemento di corrente di intensità $\frac{\rho J'}{4\pi\mu}$ la cui direzione fa cogli assi gli angoli α', β', γ', esercita sopra un polo magnetico situato nel punto x, y, z; e gli elementi dei primi sono le componenti dell'azione che una massa di materia $\frac{\rho f' dS'}{8\pi(\lambda+\mu)}$ concentrata nel punto x', y', z' esercita sopra l'unità di materia concentrata nel punto x, y, z. Pertanto abbiamo il seguente teorema.

Se le forze che agiscono sopra tutti gli elementi di un corpo solido elastico isotropo si decompongono in due sistemi; uno di dilatazione senza rotazione, e l'altro di rotazione senza rotazione, ed f *denota la funzione potenziale del primo sistema, ed* U, V, W *le funzioni che determinano il secondo sistema; faranno equilibrio al primo sistema spostamenti le cui componenti in ogni punto sono proporzionali alle componenti dell'azione che su quel punto in cui fosse concentrata materia di massa uno, eserciterebbe una materia che occupasse lo spazio* S *colla densità in ciascun punto proporzionale al valore di* f, *e che agisse secondo la legge di* Newton; *e faranno equilibrio al secondo sistema di forze spostamenti le cui componenti siano proporzionali alle componenti dell'azione che su quel punto, se vi fosse un polo magnetico eserciterebbe un sistema di correnti elettriche che percorressero lo spazio* S *e che avessero per componenti del loro moto in ogni punto i valori delle funzioni* $\frac{\rho U}{4\pi\mu}, \frac{\rho V}{4\pi\mu}, \frac{\rho W}{4\pi\mu}$.

6.

Teorema generale intorno alle deformazioni che fanno equilibrio a forze che agiscono soltanto alle superficie.

Siano due sistemi di spostamenti u', v', w'; u'', v'', w''; a questi sistemi facciano equilibrio le forze applicate alle superficie che hanno rispettivamente per componenti L', M', N'; L'', M'', N''. Essendo:

$$X = Y = Z = o$$

le equazioni (12) divengono:

$$\frac{d}{dx}\frac{dP'}{da'}+\frac{d}{dy}\frac{dP'}{2\,dh'}+\frac{d}{dz}\frac{dP'}{2\,dg'}=o$$

$$\frac{d}{dx}\frac{dP'}{2\,dh'}+\frac{d}{dy}\frac{dP'}{db'}+\frac{d}{dz}\frac{dP'}{2\,df'}=o$$

$$\frac{d}{dx}\frac{dP'}{2\,dg'}+\frac{d}{dy}\frac{dP'}{2\,df'}+\frac{d}{dz}\frac{dP'}{dc'}=o\,.$$

Moltiplichiamo la prima equazione per $u''dS$, la seconda per $v''dS$, la terza per $w''dS$, sommiamo e integriamo a tutto lo spazio S occupato dal corpo. Effettuando la solita integrazione per parti e ponendo mente alle equazioni (13) che debbono esser verificate alle superficie:

$$L'=\frac{dP'}{da'}\alpha+\frac{dP'}{2\,dh'}\beta+\frac{dP'}{2\,dg'}\gamma$$

$$M'=\frac{dP'}{2\,dh'}\alpha+\frac{dP'}{db'}\beta+\frac{dP'}{2\,df'}\gamma$$

$$N'=\frac{dP'}{2\,dg'}\alpha+\frac{dP'}{2\,df'}\beta+\frac{dP'}{dc'}\gamma$$

avremo:

$$o=-\int_\sigma (L'u''+M'v''+N'w'')\,d\sigma$$

$$-\int_S\Big(\frac{dP'}{da'}a''+\frac{dP'}{db'}b''+\frac{dP'}{dc'}c''$$

$$+\frac{dP'}{df'}f''+\frac{dP'}{dg''}g''+\frac{dP'}{dh'}h''\Big)\,dS\,.$$

Applicando lo stesso processo alle equazioni relative ad u'', v'', w'' si trova:

$$o = -\int_\sigma (L'' u' + M'' v' + N'' w')\, d\sigma$$

$$-\int_S \left(\frac{dP''}{da''} a' + \frac{dP'}{db''} b' + \frac{dP''}{dc''} c' + \frac{dP''}{df''} f' + \frac{dP''}{dg''} g' + \frac{dP''}{dh''} h'\right) dS.$$

Ora essendo P' e P'' le funzioni che si ottengono dalla funzione omogenea P di 2.° grado quando alle sei variabili $a, b, \ldots$ si sostituiscono una volta $a', b' \ldots$ e l'altra $a'', b'', \ldots$, si ha:

$$\frac{dP'}{da'} a'' + \ldots \qquad = \frac{dP''}{da''} a' + \ldots$$

dunque:

$$(35) \int_\sigma (L' u'' + M' v'' + N' w'')\, d\sigma = \int_\sigma (L'' u' + M'' v' + N'' w')\, d\sigma$$

e abbiamo il seguente teorema:

Se in un corpo solido elastico omogeneo, due sistemi di spostamenti fanno equilibrio a due sistemi di forze applicate alle superficie, la somma dei prodotti delle componenti delle forze del primo sistema per le componenti degli spostamenti negli stessi punti del secondo, è uguale alla somma dei prodotti delle componenti delle forze del secondo sistema per le componenti degli spostamenti nei medesimi punti del primo.

Prendiamo:

$$u'' = l + ry - qz$$

$$v'' = m + pz - rx$$

$$w'' = n + qx - py$$

avremo:

$$a'' = b'' = c'' = f'' = g'' = h'' = o$$

$$\frac{dP''}{da''} = \frac{dP''}{db''} = \ldots = o$$

e quindi:

$$L'' = o, \quad M'' = o, \quad N'' = o.$$

Sostituendo nella equazione (35) si ottiene:

$$l\int_\sigma L'd\sigma + m\int_\sigma M'd\sigma + n\int_\sigma N'd\sigma$$

$$+ p\int_\sigma (M'z - N'y)\,d\sigma + q\int_\sigma (N'x - L'z)\,d\sigma$$

$$+ r\int_\sigma (L'y - M'x)\,d\sigma = o$$

la quale dovendo essere verificata qualunque siano l, m, n, p, q ed r dà le sei note equazioni che sarebbero necessarie e sufficienti per l'equilibrio, se il corpo fosse rigido; e quindi si ha il teorema noto che per l'equilibrio dei corpi elastici sono necessarie le condizioni che assicurano l'equilibrio dei corpi rigidi.

Ora prendiamo:

$$u'' = a_1 x + a_6 y + a_5 z$$

$$v'' = a_6 x + a_2 y + a_4 z$$

$$w'' = a_5 x + a_4 y + a_3 z$$

avremo:

$$a'' = a_1\,, \quad b'' = a_2\,, \quad c'' = a_3$$

$$f'' = a_4\,, \quad g'' = a_5\,, \quad h'' = a_6$$

$$\mathrm{P}'' = \Sigma_r\, \Sigma_s\, \mathrm{A}_{rs}\; a_r\, a_s\,,$$

e quindi :

$$\frac{d\mathrm{P}''}{da''} = 2\, \Sigma_s\, \mathrm{A}_{1s}\, a_s = \mathrm{C}_1$$

$$\frac{d\mathrm{P}''}{db''} = 2\, \Sigma_s\, \mathrm{A}_{2s}\, a_s = \mathrm{C}_2$$

$$\frac{d\mathrm{P}''}{dc''} = 2\, \Sigma_s\, \mathrm{A}_{3s}\, a_s = \mathrm{C}_3$$

(36)

$$\frac{d\mathrm{P}''}{df''} = 2\, \Sigma_s\, \mathrm{A}_{4s}\, a_s = 2\,\mathrm{C}_4$$

$$\frac{d\mathrm{P}''}{dg''} = 2\, \Sigma_s\, \mathrm{A}_{5s}\, a_s = 2\,\mathrm{C}_5$$

$$\frac{d\mathrm{P}''}{dh''} = 2\, \Sigma_s\, \mathrm{A}_{6s}\, a_s = 2\,\mathrm{C}_6.$$

Qualunque siano i valori di C_1, C_2 . . ., purchè non siano tutti uguali a zero, potremo determinare sempre le sei quantità a_1, a_2 . . . in modo che queste equazioni siano sodisfatte.

Sostituendo nell' equazioni (13) si ottiene :

$$\mathrm{L}'' = \mathrm{C}_1\,\alpha + \mathrm{C}_6\,\beta + \mathrm{C}_5\,\gamma$$

$$\mathrm{M}'' = \mathrm{C}_6\,\alpha + \mathrm{C}_2\,\beta + \mathrm{C}_4\,\gamma$$

$$\mathrm{N}'' = \mathrm{C}_5\,\alpha + \mathrm{C}_4\,\beta + \mathrm{C}_3\,\gamma$$

e la equazione (35) dà:

$$\int_\sigma [L' (a_1 x + a_6 y + a_5 z) + M' (a_6 x + a_2 y + a_4 z)$$

$$N' (a_5 x + a_4 y + a_3 z)] \, d\sigma$$

$$= \int_\sigma [u' (C_1 \alpha + C_6 \beta + C_5 \gamma) + v' (C_6 \alpha + C_2 \beta + C_4 \gamma)$$

$$+ w' (C_5 \alpha + C_4 \beta + C_3 \gamma)] \, d\sigma \, .$$

Essendo costanti le quantità C, e per un teorema noto di analisi:

$$-\int_\sigma F \alpha \, d\sigma = \int_S \frac{dF}{dx} dS \, ,$$

$$-\int_\sigma F \beta \, d\sigma = \int_S \frac{dF}{dy} dS \, ,$$

$$-\int_\sigma F \gamma \, d\sigma = \int_S \frac{dF}{dz} dS \, ,$$

avremo:

$$\int_\sigma \Big\{ L' (a_1 x + a_6 y + a_5 z) + M' (a_6 x + a_2 y + a_4 z)$$

$$+ N' (a_5 x + a_4 y + a_3 z) \Big\} \, d\sigma$$

$$= - C_1 \int_S \frac{du'}{dx} dS - C_2 \int_S \frac{dv'}{dy} dS - C_3 \int_S \frac{dw'}{dz} dS$$

$$- C_4 \int_S \left(\frac{dv'}{dz} + \frac{dw'}{dy} \right) dS - C_5 \int_S \left(\frac{dw'}{dx} + \frac{du'}{dz} \right) dS$$

$$- C_6 \int_S \left(\frac{du'}{dy} + \frac{dv'}{dx} \right) dS \, .$$

Denotiamo con $a_s^{(o)}$ i valori delle a_s che si ricavano dalle (33) quando si pone:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 1\,,$$

$$C_4 = C_5 = C_6 = o$$

e con $a_s^{(r)}$ quelli che si ottengono quando si pongono uguali a zero tutte le C, fuori che C_r che si prende uguale alla unità, e denotando con u_r'', v_r'', w_r'' i valori di u'', v'', w'', quando si pongono per le a_s i valori $a_s^{(r)}$, avremo:

$$(37) \qquad \int_S \Theta' dS = -\int (L'u_0'' + M'v_0'' + N'w_0'')\, d\sigma$$

$$\int_S \frac{du'}{dx}\, dS = -\int_\sigma (L'u_1'' + M'v_1'' + N'w_1'')\, d\sigma$$

$$\int_S \frac{dv'}{dy}\, dS = -\int_\sigma (L'u_2'' + M'v_2'' + N'w_2'')\, d\sigma$$

$$\int_S \frac{dw'}{dz}\, dS = -\int_\sigma (L'u_3'' + M'v_4'' + N'w_3'')\, d\sigma$$

$$(38) \qquad \int_S \left(\frac{dv'}{dz} + \frac{dw'}{dy}\right) dS = -\int_\sigma (L'u_4'' + M'v_4'' + N'w_4'')\, d\sigma$$

$$\int_S \left(\frac{dw'}{dx} + \frac{du'}{dz}\right) dS = -\int_\sigma (L'u_5'' + M'v_5'' + N'w_5'')\, d\sigma$$

$$\int_S \left(\frac{du'}{dy} + \frac{dv'}{dx}\right) dS = -\int_\sigma (L'u_6'' + M'v_6'' + N'w_6'')\, d\sigma$$

le quali danno le variazioni di volume, le somme di tutti gli allungamenti nelle direzioni dei tre assi, e di tutti gli scorrimenti paralleli ai tre piani coordinati, in funzione delle componenti delle forze.

Quando il corpo è isotropo:

$$\Sigma_r \Sigma_s A_{rs} a_r a_s = - \lambda (a_1 + a_2 + a_3)^2$$

$$- \mu [a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2 (a_4^2 + a_5^2 + a_6^2)]$$

onde:

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = - (\lambda + \mu)$$

$$A_{44} = A_{55} = A_{66} = - 2\mu$$

$$A_{12} = A_{23} = A_{31} = - 2\lambda$$

$$A_{14} = A_{15} = A_{16} = A_{24} = A_{25} = A_{26}$$

$$= A_{34} = A_{35} = A_{36} = A_{45} = A_{56} = A_{64} = o$$

e le equazioni (36) divengono:

$$2 (\lambda + \mu) a_1 + 2\lambda a_2 + 2\lambda a_3 = - C_1$$

$$2\lambda a_1 + 2 (\lambda + \mu) a_2 + 2\lambda a_3 = - C_2$$

$$2\lambda a_1 + 2\lambda a_2 + 2 (\lambda + \mu) a_3 = - C_3$$

$$2\mu a_4 = - C_4 , \quad 2\mu a_5 = - C_5 , \quad 2\mu a_6 = - C_6 .$$

Quindi ponendo:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 1 , \quad C_4 = C_5 = C_6 = o$$

avremo:

$$a_1 = a_2 = a_3 = - \frac{1}{2 (3\lambda + \mu)}$$

$$a_4 = a_5 = a_6 = o$$

$$u_0'' = -\frac{x}{2(3\lambda+\mu)}$$

$$v_0'' = -\frac{y}{2(3\lambda+\mu)}$$

$$w_0'' = -\frac{z}{2(3\lambda+\mu)}$$

e quindi la equazione (37) darà:

$$(39) \qquad \int\limits_{S} \Theta' dS = \frac{1}{2(3\lambda+\mu)} \int\limits_{\sigma} (L'x + M'y + N'z)\, d\sigma.$$

Se le forze sono normali alla superficie e costanti, cioè se:

$$L' = p\alpha\,, \qquad M' = p\beta\,, \qquad N' = p\gamma\,,$$

poichè:

$$\int\limits_{\sigma} x\alpha\, d\sigma = \int\limits_{\sigma} y\beta\, d\sigma = \int\limits_{\sigma} z\gamma\, d\sigma = -\int\limits_{S} dS = -S.$$

Se denotiamo con ΔS la variazione di volume del corpo, avremo:

$$\frac{\Delta S}{S} = -\frac{3p}{2(3\lambda+\mu)}$$

che dà il rapporto della variazione di volume al volume del corpo.

Ponendo:

$$C_1 = 1\,, \; C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = o$$

abbiamo:

$$a_1 = -\frac{2\lambda+\mu}{2\mu(3\lambda+\mu)}$$

$$a_2 = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+\mu)}$$

$$a_3 = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+\mu)}$$

$$a_4 = a_5 = a_6 = o$$

$$u_{\prime}'' = -\frac{(2\lambda+\mu)x}{2\mu(3\lambda+\mu)}$$

$$v_{\prime}'' = \frac{\lambda y}{2\mu(3\lambda+\mu)}$$

$$w_{\prime}'' = \frac{\lambda z}{2\mu(3\lambda+\mu)}$$

e quindi dalla prima delle equazioni (38):

$$\int_S \frac{du'}{dx} dS = \frac{1}{2\mu(3\lambda+\mu)} \int_\sigma \Big((2\lambda+\mu)\, L'x - \lambda y\, M' - \lambda z\, N'\Big) d\sigma$$

e a cagione della equazione (39):

$$(40) \qquad \int_S \frac{du}{dx} dS = -\frac{\lambda}{\mu}\int_S \Theta\, dS + \frac{1}{2\mu}\int_\sigma L'x\, d\sigma\,.$$

Analogamente:

$$\int_S \frac{dv}{dy} dS = -\frac{\lambda}{\mu}\int_S \Theta\, dS + \frac{1}{2\mu}\int_\sigma M'y\, d\sigma$$

(40)

$$\int_S \frac{dw}{dz} dS = -\frac{\lambda}{\mu}\int_S \Theta\, dS + \frac{1}{2\mu}\int_\sigma N'z\, d\sigma\,.$$

Ponendo:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_6 = o$$
$$C_4 = 1$$

abbiamo:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = o$$

$$a_4 = -\frac{1}{2\mu}$$

$$u_4'' = o$$

$$v_4'' = -\frac{z}{2\mu}$$

$$w_4'' = -\frac{y}{2\mu}$$

e dalla quarta delle equazioni (38):

$$(41) \qquad \int_S \left(\frac{dv'}{dz} + \frac{dw'}{dy}\right) dS = \frac{1}{2\mu} \int_\sigma (M'z + N'y)\, d\sigma$$

e analogamente:

$$(41) \qquad \begin{aligned} &\int_S \left(\frac{dw'}{dx} + \frac{du'}{dz}\right) dS = \frac{1}{2\mu} \int_\sigma (N'x + L'z)\, d\sigma \\ &\int_S \left(\frac{du'}{dy} + \frac{dv'}{dx}\right) dS = \frac{1}{2\mu} \int_\sigma (L'y + M'x)\, d\sigma. \end{aligned}$$

7.

Deformazione di una sfera sotto l'azione della gravità.

Sia una sfera S di materia solida elastica omogenea isotropa, soggetta all'azione della gravità g. Prendiamo l'origine delle coordinate nel centro della sfera, e l'asse delle z positive in direzione opposta a quella della gravità. Sia R il raggio della sfera, ed f la funzione potenziale della gravità; potremo prendere:

$$f = g\,(R - z).$$

Poniamo:

$$u = u' + u'', \qquad v = v' + v'', \qquad w = w' + w''.$$

Per le componenti u', v', w' degli spostamenti che fanno equilibrio alla forza $(o, o, -g)$ nell'interno del corpo potremo prendere (n.° 5):

$$u' = \frac{g\rho}{8\pi(\lambda + \mu)} \frac{d}{dx} \int_S \frac{(R - z')\,dS'}{r}$$

$$v' = \frac{g\rho}{8\pi(\lambda + \mu)} \frac{d}{dy} \int_S \frac{(R - z')\,dS'}{r}$$

$$w' = \frac{g\rho}{8\pi(\lambda + \mu)} \frac{d}{dz} \int_S \frac{(R - z')\,dS'}{r}.$$

Ora la funzione potenziale:

$$V = \int_S \frac{(R - z')\,dS'}{r}$$

per i punti interni ad S è data dalla equazione:

$$V = 2\pi\left[R^2\left(R - \frac{z}{3}\right) - (x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{R}{3} - \frac{z}{5}\right)\right]$$

e per i punti esterni ad S dalla equazione:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\left(1 - \frac{R^2 z}{5(x^2 + y^2 + z^2)}\right)$$

come è facile a verificarsi per mezzo del teorema dato da *Dirichlet* nel vol. 29 del Giornale di *Crelle*. Quindi avremo:

$$u' = -\frac{g\rho x\left(\frac{R}{3} - \frac{z}{5}\right)}{2(\lambda + \mu)}$$

$$v' = -\frac{g\rho y\left(\frac{R}{3} - \frac{z}{5}\right)}{2(\lambda + \mu)}$$

$$w' = -\frac{g\rho}{4(\lambda + \mu)}\left(\frac{R^2 + 2Rz}{3} - \frac{3z^2 + x^2 + y^2}{5}\right)$$

onde:

$$\Theta' = \frac{du'}{dx} + \frac{dv'}{dy} + \frac{dw'}{dz} = -\frac{g\rho(R - z)}{2(\lambda + \mu)}$$

$$2\left(\lambda\Theta' + \mu\frac{du'}{dx}\right) = -\frac{g\rho}{\lambda + \mu}\left(\frac{(3\lambda + \mu)R}{3} - \frac{(5\lambda + \mu)z}{5}\right)$$

$$2\left(\lambda\Theta' + \mu\frac{dv'}{dy}\right) = -\frac{g\rho}{\lambda + \mu}\left(\frac{(3\lambda + \mu)R}{3} - \frac{(5\lambda + \mu)z}{5}\right)$$

$$2\left(\lambda\Theta' + \mu\frac{dw'}{dz}\right) = -\frac{g\rho}{\lambda + \mu}\left(\frac{(3\lambda + \mu)R}{3} - \frac{(5\lambda + 3\mu)z}{5}\right)$$

$$\frac{du'}{dy}+\frac{dv'}{dx}=o$$

$$\frac{dv'}{dz}+\frac{dw'}{dy}=\frac{g\rho y}{5(\lambda+\mu)}$$

$$\frac{dw'}{dx}+\frac{du'}{dz}=\frac{g\rho x}{5(\lambda+\mu)}\,.$$

Poichè i coseni degli angoli che la normale alla superficie della sfera fa cogli assi sono rispettivamente:

$$\alpha=-\frac{x}{R}\,,\quad \beta=-\frac{y}{R}\,,\quad \gamma=-\frac{z}{R}$$

le componenti delle tensioni alla superficie saranno:

$$L'=\frac{g\rho x}{(\lambda+\mu)\,R}\left(\frac{(3\lambda+\mu)R}{3}-\frac{(5\lambda+2\mu)z}{5}\right)$$

$$(42)\quad M'=\frac{g\rho y}{(\lambda+\mu)\,R}\left(\frac{(3\lambda+\mu)R}{3}-\frac{(5\lambda+2\mu)z}{5}\right)$$

$$N'=\frac{g\rho}{(\lambda+\mu)\,R}\left(\frac{(3\lambda+\mu)Rz}{3}-\frac{\mu R^2+(5\lambda+2\mu)z^2}{5}\right).$$

Ora, denotando con σ la superficie della sfera, abbiamo:

$$\int_\sigma L'\,d\sigma=o\,,\quad \int_\sigma M'\,d\sigma=o\,,$$

$$\int_\sigma N'\,d\sigma=-\frac{g\rho}{(\lambda+\mu)R}\left(\frac{4\,\pi\mu\,R^4}{5}+\frac{5\,\lambda+2\mu}{5}\int_\sigma z^2\,d\sigma\right)$$

$$=-\frac{4}{3}\,\pi\,g\rho\,R^3$$

Quindi non si potrà avere l'equilibrio con sole deformazioni, e dovremo applicare alla superficie forze in direzione dell'asse delle z, la risultante delle quali sia uguale ed opposta al peso della sfera. Denotando con Z queste forze, gli spostamenti (u'', v'', w'') dovranno sodisfare in tutta la sfera all'equazioni (32) nelle quali sono prese uguali a zero le componenti delle forze, ed all'equazioni:

$$L' + 2\left(\lambda\Theta'' + \mu\frac{du''}{dx}\right)\alpha + \mu\left(\frac{du''}{dy} + \frac{dv''}{dx}\right)\beta + \mu\left(\frac{du''}{dz} + \frac{dw''}{dx}\right)\gamma = o$$

$$M' + \mu\left(\frac{dv''}{dx} + \frac{du''}{dy}\right)\alpha + 2\left(\lambda\Theta'' + \mu\frac{dv''}{dy}\right)\beta + \mu\left(\frac{dv''}{dz} + \frac{dw''}{dy}\right)\gamma = o$$

$$N' + Z + \mu\left(\frac{dw''}{dx} + \frac{du''}{dz}\right)\alpha + \mu\left(\frac{dw''}{dy} + \frac{dv''}{dz}\right)\beta + 2\left(\lambda\Theta'' + \mu\frac{dw''}{dz}\right)\gamma = o$$

sopra tutta la superficie σ. Quindi potremo applicare le equazioni (37) e (38).

Sostituendo nella equazione (37) i valori di L', M', N' dati dalle (42), avremo:

$$\int_\sigma \Theta''\, dS = \frac{g\rho R^2}{6(\lambda+\mu)}\int_\sigma d\sigma - \frac{g\rho(5\lambda+2\mu)R}{10(\lambda+\mu)(3\lambda+2\mu)}\int_\sigma z\, d\sigma$$

$$- \frac{\mu g\rho R}{10(3\lambda+\mu)(\lambda+\mu)}\int_\sigma z\, d\sigma - \frac{1}{2(3\lambda+\mu)}\int_\sigma Z z\, d\sigma$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{\pi g\rho R^4}{\lambda+\mu} - \frac{1}{2(3\lambda+\mu)}\int_\sigma Z z\, d\sigma.$$

Abbiamo inoltre:

$$\int_S \Theta'\, dS = -\frac{g\rho}{2(\lambda+\mu)}\int_S (R - z)\, dS = -\frac{2}{3}\,\frac{\pi g\rho R^4}{(\lambda+\mu)}$$

Onde, essendo:

$$\Theta = \Theta' + \Theta''$$

avremo:

$$\int_S \Theta\, dS = -\frac{1}{2(3\lambda+\mu)} \int_\sigma Z z\, d\sigma.$$

Se le forze Z sono applicate tutte alla stessa distanza $-c$ dal piano orizzontale che passa per il centro, sarà:

$$\int_S \Theta\, dS = \frac{c}{2(3\lambda+\mu)} \int_\sigma Z\, d\sigma.$$

Ma:

$$\int_\sigma Z\, d\sigma = \frac{4\pi}{3} g\rho R^3$$

quindi:

$$\int_S \Theta\, dS = \frac{2}{3} \frac{\pi c g \rho R^3}{3\lambda+\mu}$$

$$\Delta S = \frac{c g \rho}{2(3\lambda+\mu)} S$$

e si ha il teorema:

La variazione di volume di una sfera sotto l' azione della gravità, tenuta in equilibrio da forze applicate ai punti di un parallelo orizzontale, è proporzionale direttamente al suo volume, e alla distanza a cui si trova dal piano orizzontale che passa per il centro, il parallelo cui sono applicate le forze.

Sostituendo nella prima delle equazioni (38) i valori di L', M', N' dati dalle (42) abbiamo:

$$\int_S \frac{du''}{dx}\, dS = \frac{\lambda}{\mu}\int_S \Theta''\, dS - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma L'\, x\, d\sigma$$

$$= -\frac{2\lambda\pi g\rho R^4}{3\mu(\lambda+\mu)} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+\mu)}\int_\sigma Z\, z\, d\sigma$$

$$+\frac{g\rho}{2\mu(\lambda+\mu)R}\int_\sigma\left(\frac{(3\lambda+\mu)}{3}R\, x^2 - \frac{(5\lambda+2\mu)}{5}zx\right)d\sigma.$$

Ma :

$$\int_\sigma x^2\, d\sigma = \frac{4}{3}\pi R^4, \quad \int_\sigma z\, x\, d\sigma = o$$

onde :

$$\int_S \frac{du''}{dx}\, dS = \frac{2g\rho\pi R^4}{9(\lambda+\mu)} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+\mu)}\int_\sigma Z\, z\, d\sigma$$

Abbiamo inoltre :

$$\int_S \frac{du'}{dx}\, dS = -\frac{2g\rho\pi R^4}{9(\lambda+\mu)}$$

onde :

$$\int_S \frac{du}{dx}\, dS = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+\mu)}\int_\sigma Z\, z\, d\sigma\, .$$

analogamente :

$$\int_S \frac{dv}{dy}\, dS = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+\mu)}\int_S Z\, z\, d\sigma$$

$$\int_S \frac{dw}{dz}\, dS = -\frac{2\lambda+\mu}{2\mu(3\lambda+\mu)}\int_\sigma Z\, z\, d\sigma\, .$$

Quindi abbiamo contrazione nella direzione verticale e dilatazione nella orizzontale, e queste stanno sempre tra loro come $2\lambda + \mu$ sta a λ.

8.

Dilatazione di un elemento qualunque di un corpo elastico isotropo sotto l'azione di forze che agiscono soltanto alla superficie.

Se prendiamo :

$$u'' = \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \xi, \quad v'' = \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \eta, \quad w'' = \frac{d\frac{1}{r}}{dz} + \zeta,$$

dove r è la distanza di un punto qualunque di coordinate (x, y, z) da un punto di coordinate (x', y', z') dello spazio S occupato dal corpo, poichè :

$$\Delta^2 \frac{1}{r} = o,$$

avremo :

$$\Theta'' = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz},$$

$$\Delta^2 u'' = \Delta^2 \xi, \quad \Delta^2 v'' = \Delta^2 \eta, \quad \Delta^2 w'' = \Delta^2 \zeta.$$

Quindi se le tre funzioni ξ, η, ζ sono finite, continue e a un sol valore, insieme colle loro derivate, e sodisfano alle tre equazioni :

$$(2\lambda + \mu)\frac{d\Theta}{dx} + \mu \Delta^2 u = o,$$

$$(43) \qquad (2\lambda + \mu)\frac{d\Theta}{dy} + \mu \Delta^2 v = o,$$

$$(2\lambda + \mu)\frac{d\Theta}{dz} + \mu \Delta^2 w = o,$$

in tutto lo spazio S, anche le tre funzioni u'', v'', w'', sodisfaranno a queste equazioni, e saranno finite, continue e a un sol valore, insieme colle loro derivate, in tutto lo spazio S', che si ottiene togliendo da S uno spazio s piccolo quanto si vuole che contenga il punto (x', y', z') nel quale la funzione $\frac{1}{r}$ e le sue derivate divengono infinite. Quindi potremo applicare il teorema del n.° 6, purchè si prenda il contorno di S' che è composto della superficie σ che forma il contorno dello spazio S, e della superficie σ' contorno dello spazio s.

Nello spazio S' gli spostamenti (u', v', w') fanno equilibrio alle forze (L', M', N') che agiscono sopra la superficie σ, e alle tensioni (X', Y', Z') che agiscono sopra la superficie σ' e sono date dall' equazioni :

$$
(44)\quad
\begin{aligned}
-X' &= 2\left(\lambda\Theta' + \mu\frac{du'}{dx}\right)\alpha + \mu\left(\frac{dv'}{dx} + \frac{du'}{dy}\right)\beta + \mu\left(\frac{du'}{dz} + \frac{dw'}{dx}\right)\gamma \\
-Y' &= \mu\left(\frac{dv'}{dx} + \frac{du'}{dy}\right)\alpha + 2\left(\lambda\Theta' + \mu\frac{dv'}{dy}\right)\beta + \mu\left(\frac{dv'}{dz} + \frac{dw'}{dy}\right)\gamma \\
-Z' &= \mu\left(\frac{dw'}{dx} + \frac{du'}{dz}\right)\alpha + \mu\left(\frac{dw'}{dy} + \frac{du'}{dz}\right)\beta + 2\left(\lambda\Theta' + \mu\frac{du'}{dz}\right)\gamma
\end{aligned}
$$

e gli spostamenti (u'', v'', w'') fanno equilibrio alle forze (X'', Y'', Z'') componenti delle tensioni che producono sopra σ e σ' gli spostamenti $\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}, \frac{d\frac{1}{r}}{dy}, \frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right)$ e alle forze (X_0, Y_0, Z_0) componenti delle tensioni prodotte sopra σ e σ' dagli spostamenti (ξ, η, ζ). Pertanto la equazione (35) diviene :

$$
(45)\quad \int_\sigma \left[L'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \xi\right) + M'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \eta\right) + N'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dz} + \zeta\right)\right] d\sigma
$$

$$
+ \int_{\sigma'} \left[X'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \xi\right) + Y'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \eta\right) + Z'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dz} + \zeta\right)\right] d\sigma'
$$

$$= \int_\sigma [(X'' + X_0)\, u' + (Y'' + Y_0)\, v' + (Z'' + Z_0)\, w']\, d\sigma$$

$$+ \int_{\sigma'} [(X'' + X_0)\, u' + (Y'' + Y_0)\, v' + (Z'' + Z_0)\, w']\, d\sigma'.$$

Se prendiamo per s una sfera infinitesima col centro nel punto (x', y', z'), poichè $X_0, Y_0, Z_0, \xi, \eta, \zeta, X', Y', Z', u', v', w'$ sono quantità sempre finite e continue, avremo:

$$\int_{\sigma'} (X' \xi + Y' \eta + Z' \zeta)\, d\sigma' = o$$

$$\int_{\sigma'} (X_0 u' + Y_0 v' + Z_0 w)\, d\sigma' = o\ .$$

Abbiamo inoltre:

$$X'' = -2\mu \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} \alpha + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dxdy} \beta + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx\,dz} \gamma \right)$$

e poichè, se denotiamo con p la normale alla superficie diretta verso l'interno dello spazio S':

$$\alpha = \frac{dx}{dp}, \quad \beta = \frac{dy}{dp}, \quad \gamma = \frac{dz}{dp}\ .$$

Sarà:

$$X'' = -2\mu \frac{d}{dp} \frac{d \frac{1}{r}}{dx}$$

$$Y'' = -2\mu \frac{d}{dp} \frac{d \frac{1}{r}}{dy}$$

$$Z'' = -2\mu \frac{d}{dp} \frac{d \frac{1}{r}}{dz}$$

e quindi la equazione (45) diviene:

$$\int_{\sigma'}\left(X'\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+2\mu u'\frac{d}{dp}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+Y'\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+2\mu v'\frac{d}{dp}\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\right.$$

$$\left.+Z'\frac{d\frac{1}{r}}{dz}+2\mu w'\frac{d}{dp}\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right)d\sigma'$$

(46)

$$=\int_{\sigma}\left\{(X''+X_0)u'+(Y''+Y_0)v'+(Z''+Z_0)w'\right.$$

$$\left.-\left[L'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\xi\right)+M'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\eta\right)+N'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dz}+\zeta\right)\right]\right\}d\sigma.$$

Ora sopra la sfera σ':

$$\frac{d}{dp}=\frac{d}{dr}.$$

Quindi:

$$\alpha=\frac{dx}{dr},\quad \beta=\frac{dy}{dr},\quad \gamma=\frac{dz}{dr}$$

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{dy}{dr}=\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\frac{dx}{dr},$$

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\frac{dz}{dr}=\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\frac{dy}{dr},$$

. . . .

. . . .

e dall' equazioni (44) si ottiene :

$$X' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} = -2\lambda\Theta' \frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{dx}{dr} - \mu \frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{du'}{dr}$$

$$-\mu\left(\frac{du'}{dx}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \frac{dv'}{dx}\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \frac{dw'}{dx}\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right)\frac{dx}{dr}$$

$$Y' \frac{d\frac{1}{r}}{dy} = -2\lambda\Theta' \frac{d\frac{1}{r}}{dy}\frac{dy}{dr} - \mu \frac{d\frac{1}{r}}{dy}\frac{dv'}{dr}$$

$$-\mu\left(\frac{du'}{dy}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \frac{dv'}{dy}\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \frac{dw'}{dy}\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right)\frac{dy}{dr}$$

$$Z' \frac{d\frac{1}{r}}{dz} = -2\lambda\Theta' \frac{d\frac{1}{r}}{dz}\frac{dz}{dr} - \mu \frac{d\frac{1}{r}}{dz}\frac{dz}{dr}\frac{dv'}{dr}$$

$$-\mu\left(\frac{du'}{dz}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \frac{dv'}{dz}\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \frac{dw'}{dz}\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right)\frac{dz}{dr}$$

onde:

$$X' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + Y' \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + Z' \frac{d\frac{1}{r}}{dz}$$

$$= -2\lambda\Theta' \frac{d\frac{1}{r}}{dr} - 2\mu\left(\frac{du'}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \frac{dv'}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \frac{dw'}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right).$$

Ora:

$$\int_{\sigma'} \Theta' \frac{d\frac{1}{r}}{dr} d\sigma' = -4\pi\Theta$$

essendo Θ il valore di Θ' nel punto (x', y', z'). Inoltre:

$$\int_{\sigma'} \left(\frac{du'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - u' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx}\right) d\sigma'$$

$$= \int_{\sigma'} \left(\frac{du'}{dr} \frac{\alpha}{r^2} - u' \frac{d}{dr} \frac{\alpha}{r^2}\right) d\sigma'$$

$$= \int_{\sigma'} \frac{d(u'\alpha\, r^2)}{r^4\, d\, r} d\sigma' .$$

Ma:

$$\int_s \frac{du'}{dx} ds = -\int_{\sigma'} u' \alpha\, d\sigma' = -\int_{\varpi} u' \alpha\, r^2\, d\varpi$$

essendo ϖ la superficie della sfera di raggio uguale alla unità. Quindi:

$$\int_0^r r^2\, dr \int_{\varpi} \frac{du'}{dx} d\varpi = -\int_{\varpi} u' \alpha\, r^2\, d\,\varpi$$

e derivando rapporto ad r:

$$\int_{\varpi} \frac{du'}{dx} d\varpi = 4\pi \frac{du'}{dx} = -\int_{\varpi} \frac{d(u'\alpha r^2)}{r^2\, dr} d\varpi = -\int_{\sigma'} \frac{d(u'\alpha\, r^2)}{r^4\, dr} d\sigma'$$

$$\int_{\sigma'} \left(\frac{du'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - u' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx}\right) d\sigma' = -4\pi \frac{du'}{dx}$$

e analogamente:

$$\int_{\sigma'} \left(\frac{du'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - v' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \right) d\sigma' = -4\pi \frac{dv'}{dy}$$

$$\int_{\sigma'} \left(\frac{du'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} - w' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\sigma' = -4\pi \frac{dw'}{dz}$$

e quindi:

$$\int_{\sigma'} \left[X' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + Y' \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + Z' \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right.$$

$$\left. + 2\mu \left(u' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + v' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + w' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) \right] d\sigma'$$

$$= 8\pi (\lambda + \mu) \Theta$$

e la equazione (46) dà:

$$\Theta = -\frac{1}{8\pi(\lambda+\mu)} \int_{\sigma'} \left\{ \left[L' \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \xi \right) + M' \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \eta \right) \right. \right.$$

$$\left. + N' \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dz} + \zeta \right) \right] - \left[\left(X'' + X_0 \right) u' + \left(Y'' + Y_0 \right) v'$$

$$\left. \left. + \left(Z'' + Z_0 \right) w' \right] \right\} d\sigma'.$$

Ora:

$$X'' = -2\pi \frac{d}{dp} \frac{d\frac{1}{r}}{dx},$$

$$\mathrm{Y}'' = -2\mu \frac{d}{dp} \frac{d\frac{1}{r}}{dy},$$

$$\mathrm{Z}'' = -2\mu \frac{d}{dp} \frac{d\frac{1}{r}}{dz}.$$

Onde:

$$\Theta = -\frac{1}{8\pi(\lambda+\mu)} \int_\sigma \left(\mathrm{L}' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + 2\mu u' \frac{d}{dp} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} \right.$$

$$(47) \qquad + \mathrm{M}' \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + 2\mu v' \frac{d}{dp} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \mathrm{N}' \frac{d\frac{1}{r}}{dz} + 2\mu w' \frac{d}{dp} \frac{d\frac{1}{r}}{dz}$$

$$\left. + \mathrm{L}'\xi - \mathrm{X}_0 u' + \mathrm{M}'\eta - \mathrm{Y}_0 v' + \mathrm{N}'\zeta - \mathrm{Z}_0 w' \right) d\sigma .$$

Quindi quando fosse determinato un sistema di funzioni ξ, η, ζ finite, continue e a un sol valore insieme colle loro derivate, che sodisfacessero alle equazioni (43) in tutto lo spazio S, e sulla superficie σ alle altre:

$$\mathrm{X}_0 - 2\mu \frac{d}{dp} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} = o$$

$$\mathrm{Y}_0 - 2\mu \frac{d}{dp} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} = o$$

$$\mathrm{Z}_0 - 2\mu \frac{d}{dp} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} = o$$

si avrebbe la funzione Θ che dà il coefficiente di dilatazione di un elemento qualunque del corpo, espresso soltanto per le forze date (L', M', N'). La determinazione delle funzioni ξ, η, ζ che corrispondono alle funzioni di *Green* nella determinazione delle funzioni potenziali, offre in generale molta difficoltà. Ma si può procedere anche con un altro metodo per fare sparire dalla espressione (47) i valori di u', v', w'. Questo metodo è una generalizzazione di quello che io ho dato nella mia memoria: *Sopra le funzioni sferiche* pubblicata nel primo volume degli *Annali di matematica* per risolvere il problema analogo per le funzioni potenziali.

Lo spazio S occupato dal corpo sia compreso tra due sfere concentriche, la maggiore σ_1 di raggio R_1, la minore σ_2 di raggio R_2. Prendiamo nella equazione (47):

$$\xi = \eta = \zeta = o:$$

avremo:

$$(48)\quad \begin{aligned}\Theta = -\frac{1}{8\pi(\lambda+\mu)}\Bigg\{ &\int_{\sigma_1}\Bigg[L_1'\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + M_1'\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + N_1'\frac{d\frac{1}{r}}{dz} \\ &+ 2\mu\left(u_1'\frac{d}{dp_1}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + v_1'\frac{d}{dp_1}\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + w_1'\frac{d}{dp_1}\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right)\Bigg]d\sigma_1 \\ &+\int_{\sigma_2}\Bigg[L_2'\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + M_2'\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + N_2'\frac{d\frac{1}{r}}{dz} \\ &+ 2\mu\left(u_2'\frac{d}{dp_2}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + v_2'\frac{d}{dp_2}\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + w_2'\frac{d}{dp_2}\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right)\Bigg]\Bigg\}d\sigma_2\end{aligned}$$

dove sono distinti coll'indice rispettivo i valori che si riferiscono alle due superficie.

Se distinguiamo con un apice le coordinate del punto interno allo spazio S, a cui si riferisce il valore di Θ, avremo in serie convergente in ugual grado per tutti i punti della superficie σ_1:

$$\frac{1}{r} = \sum_0^\infty \frac{\rho'^n P_n}{R_1^{n+1}}$$

e per tutti i punti della superficie σ_2:

$$\frac{1}{r} = \sum_0^\infty \frac{R_2^n P_n}{\rho'^{n+1}}.$$

Poniamo:

$$V_n = \rho^n P_n$$

$$U_n = \frac{P_n}{\rho^{n+1}} = \frac{V_n}{\rho^{2n+1}};$$

sarà sopra σ_1:

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx} = \sum_0^\infty \rho'^n \frac{dU_n}{dx}$$

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dy} = \sum_0^\infty \rho'^n \frac{dU_n}{dy}$$

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dz} = \sum_0^\infty \rho'^n \frac{dU_n}{dz}$$

e $\frac{dU_n}{dx}$, $\frac{dU_n}{dy}$, $\frac{dU_n}{dz}$ saranno funzioni di x, y, z, omogenee di grado $-(n+2)$ che sodisfano alla equazione:

$$\Delta^2 = o$$

e quindi:

$$\frac{dU_n}{dx} = \frac{Y_{n+1}}{R_1^{n+2}}, \quad \frac{dU_n}{dy} = \frac{Y'_{n+1}}{R_1^{n+2}}, \quad \frac{dU_n}{dz} = \frac{Y''_{n+1}}{R_1^{n+2}}$$

essendo Y_{n+1}, Y'_{n+1}, Y''_{n+1} funzioni sferiche di ordine $n+1$.

Sopra σ_2 avremo:

$$\frac{d\,\frac{1}{r}}{dx} = \sum_0^\infty \frac{dV_n}{dx}\,\frac{1}{\rho'^{n+1}}$$

$$\frac{d\,\frac{1}{r}}{dy} = \sum_0^\infty \frac{dV_n}{dy}\,\frac{1}{\rho'^{n+1}}$$

$$\frac{d\,\frac{1}{r}}{dz} = \sum_0^\infty \frac{dV_n}{dz}\,\frac{1}{\rho'^{n+1}}$$

e sarà:

$$\frac{dV_n}{dx} = R_2^{n-1} Z_{n-1}\,,\quad \frac{dV_n}{dy} = R_2^{n-1} Z'_{n-1}\,,\quad \frac{dV_n}{dz} = R_2^{n-1} Z''_{n-1}$$

e Z_{n-1}, Z'_{n-1}, Z''_{n-1} funzioni sferiche di ordine $n-1$.

Ora:

$$\frac{d}{dp_1} = -\frac{d}{d\rho}\,.$$

Quindi:

$$\frac{d}{dp_1}\,\frac{dU_n}{dx} = \frac{(n+2)}{R_1^{n+3}}\,Y_{n+1} = \frac{(n+2)}{R_1}\,\frac{dU_n}{dx}$$

$$\frac{d}{dp_1}\,\frac{dU_n}{dy} = \frac{(n+2)}{R_1^{n+3}}\,Y_{n+1} = \frac{(n+2)}{R_1}\,\frac{dU_n}{dy}$$

$$\frac{d}{dp_1}\,\frac{dU_n}{dz} = \frac{(n+2)}{R_1^{n+3}}\,Y_{n+1} = \frac{(n+2)}{R_1}\,\frac{dU_n}{dz}\,.$$

Abbiamo inoltre:

$$\frac{d}{dp_2} = \frac{d}{d\rho}$$

quindi:

$$\frac{d}{dp_2}\frac{dV_n}{dx} = (n-1)\,R_2^{n-2}\,Z_{n-1} = \frac{n-1}{R_2}\frac{dV_n}{dx}$$

$$\frac{d}{dp_2}\frac{dV_n}{dy} = (n-1)\,R_2^{n-2}\,Z'_{n-1} = \frac{n-1}{R_2}\frac{dV_n}{dy}$$

$$\frac{d}{dp_2}\frac{dV_n}{dz} = (n-1)\,R_2^{n-2}\,Z''_{n-1} = \frac{n-1}{R_2}\frac{dV_n}{dz}\,.$$

Sostituendo nella formula (48) i valori trovati si ottiene:

$$\begin{aligned}\Theta = -\frac{1}{8\pi(\lambda+\mu)}\sum_0^\infty \Bigg\{ \frac{\rho'^n}{R_1^n} \Bigg(&\int_\varpi (L_1'Y_{n+1}+M_1'Y'_{n+1}+N_1'Y''_{n+1})d\varpi \\ &+\frac{2\mu(n+2)}{R_1}\int_\varpi (u_1'Y_{n+1}+v_1'Y'_{n+1}+w_1'Y''_{n+1})d\varpi\Bigg) \\ (49)\qquad &+\frac{R_2^{n+1}}{\rho'^{n+1}}\Bigg(\int_\varpi (L_2'Z_{n-1}+M_2'Z'_{n-1}+N_2'Z''_{n-1})\,d\varpi \\ &+\frac{2\mu(n-1)}{R_2}\int_\varpi (u_2'Z_{n-1}+v_2'Z'_{n-1}+w_2'Z''_{n-1})\,d\varpi\Bigg)\Bigg\}\,.\end{aligned}$$

Prendiamo gli spostamenti:

$$u_n = f_n(\rho)\frac{dU_n}{dx} + f_{-n-1}(\rho)\frac{dV_n}{dx}$$

$$v_n = f_n(\rho)\frac{dU_n}{dy} + f_{-n-1}(\rho)\frac{dV_n}{dy}$$

$$w_n = f_n(\rho)\frac{dU_n}{dz} + f_{-n-1}(\rho)\frac{dV_n}{dz}$$

dove :

$$f_n\ (\rho) = A_n + B_n \rho^2 + C_n \rho^{2n+3}$$

$$f_{-n-1}(\rho) = A_n' + B_n' \rho^2 + C_n' \rho^{-2n+1}\ .$$

Saranno sodisfatte le equazioni (43) quando si abbiano le due :

$$(2\lambda + \mu)\,[2n\,B_n' - (n+1)\,(2n+3)\,C_n] + 2\mu(2n+1)\,B_n' = o$$

$$(2\lambda + \mu)\,[2\,(n+1)\,B_n + n\,(2n-1)\,C_n'] + 2\mu(2n+1)\,B_n = o$$

ossia :

$$C_n = 2\alpha_n\,B_n'\ ,\quad C_n' = 2\,\alpha_{-n-1}\,B_n$$

essendo :

$$\alpha_n = \frac{n\,(2\lambda+\mu) + (2n+1)\,\mu}{(n+1)\,(2n+3)\,(2\lambda+\mu)}$$

e per $n = o$:

$$B_0 = o\ .$$

Denotiamo con (F_n', G_n', H_n') e con (F_n'', G_n'', H_n'') le componenti delle forze che rispettivamente debbono applicarsi alle superficie σ_1 e σ_2 per tenere in equilibrio il corpo dopo che ha ricevuto gli spostamenti (u_n, v_n, w_n). Ponendo :

$$F_n\,(\rho) = 2\lambda\,\Theta_n \frac{x}{\rho} + \mu\left(\frac{du_n}{d\rho} + \frac{du_n}{dx}\frac{x}{\rho} + \frac{dv_n}{dx}\,\frac{y}{\rho} + \frac{dw_n}{dx}\,\frac{z}{\rho}\right)$$

$$G_n\,(\rho) = 2\lambda\,\Theta_n \frac{y}{\rho} + \mu\left(\frac{dv_n}{d\rho} + \frac{du_n}{dy}\frac{x}{\rho} + \frac{dv_n}{dy}\,\frac{y}{\rho} + \frac{dw_n}{dy}\,\frac{z}{\rho}\right)$$

$$H_n\,(\rho) = 2\lambda\,\Theta_n \frac{z}{\rho} + \mu\left(\frac{dw_n}{d\rho} + \frac{du_n}{dz}\frac{x}{\rho} + \frac{dv_n}{dz}\,\frac{y}{\rho} + \frac{dw_n}{dz}\,\frac{z}{\rho}\right)$$

avremo :

$$F_n' = F_n(R_1),\quad G_n' = G_n(R_1),\quad H_n' = H_n(R_1)$$

$$F_n'' = -F_n(R_2),\quad G_n'' = -G_n(R_2),\quad H_n'' = -H_n(R_2).$$

Quindi :

$$F_0 = -2\,[2\mu A_0 - (3\lambda + \mu)\,B_0'\rho^3]\,\frac{Y_1}{\rho^3}$$

e ponendo :

$$\beta_n = \frac{1 - \alpha_n}{n + 2}$$

$$F_1 = -6\mu\,(A_1 + B_1\rho^2 - \beta_1 B_1'\rho^5)\,\frac{Y_2}{\rho^4}$$

$$+ 2\mu\,(1 - \alpha_{-n-1})\,B_1\,\frac{Z_0}{\rho}$$

e per $n > 1$:

$$F_n = -2\mu\,(n + 2)\,(A_n + B_n\rho^2 - \beta_n B_n'\rho^{2n+3})\,\frac{Y_{n+1}}{\rho^{n+3}}$$

$$+ 2\mu(n - 1)\,(A_n' + B_n'\rho^2 - \beta_{-n-1} B_n\,\rho^{-2n+1})\,\rho^{n-2} Z_{n-1}$$

dalle quali si ricava :

$$F_0' = -2\,[2\mu A_0 - (3\lambda + \mu)\,B_0'R_1^2]\,\frac{Y_1}{R_1^3}$$

$$F_0'' = 2\,[2\mu A_0 - (3\lambda + \mu)\,B_0'R_2^2]\,\frac{Y_1}{R_2^3}$$

$$F_1' = -6\mu\,(A_1 + B_1 R_1^2 - \beta_1 B_1' R_1^5)\,\frac{Y_2}{R_1^4}$$

$$+ 2\mu\,(1 - \alpha_{-n-1})\,B_1\,\frac{Z_0}{R_1}$$

$$F_1'' = 6\mu (A_1 + B_1 R_2^2 - \beta_1 R_2^5 B_1') \frac{Y_2}{R_2^4}$$

$$- 2\mu (1 - \alpha_{-n-1}) B_1 \frac{Z_0}{R^2}$$

e per $n > 1$:

$$F_n' = - 2\mu (n + 2) (A_n + B_n R_1^2 - \beta_n B_n' R_1^{2n+3}) \frac{Y_{n+1}}{R_1^{n+3}}$$

$$+ 2\mu (n - 1) (A_n' + B_n' R_1^2 - \beta_{-n-1} B_n R_1^{-2n+1}) R_1^{n-2} Z_{n-1}$$

$$F_n'' = 2\mu (n + 2) (A_n + B_n' R_2^2 - \beta_n B_n' R^{2n+3}) \frac{Y_{n+1}}{R_2^{n+3}}$$

$$- 2\mu (n - 1) (A_n' + B_n' R_2^2 - \beta_{-n-1} B_n R_2^{-2n+1}) R_2^{n-2} Z_{n-1}$$

ed analoghe espressioni per G_n', H_n'; G_n'', H_n''.

Ora abbiamo nel corpo due stati di equilibrio: quello in cui sopra σ_1 si hanno le forze: (L_1', M_1', N_1') e gli spostamenti (u_1', v_1', w_1') e sopra σ_2 le forze (L_2', M_2', N_2') e gli spostamenti (u_2', v_2', w_2'); e quello in cui sopra σ_1 abbiamo le forze (F_n', G_n', H_n') e gli spostamenti (u_n', v_n', w_n'), sopra σ_2 le forze (F_n'', G_n'', H_n'') e gli spostamenti (u_n'', v_n'', w_n''), e quindi :

$$\int_{\sigma_1} (F_n' u_1' + G_n' v_1' + H_n' w_1') d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} (F_n'' u_2' + G_n'' v_2' + H_n'' w_2') d\sigma_2$$

(52)

$$= \int_{\sigma_1} (L_1' u_n' + M_1' v_n' + N_1' w_n') d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} (L_2' u_n'' + M_2' v_n'' + N_2' w_n'') d\sigma_2 .$$

Ora determiniamo le costanti A_n, B_n, A_n', B_n' in modo che sia:

$$F_0' = \frac{4\mu Y_1}{R_1^3}, \quad F_0'' = 0$$

(53)

$$F_n' = 2\mu (n+2) \frac{\rho'^n Y_{n+1}}{R_1^{n+3}}, \quad F_n'' = 2\mu (n - 1) \frac{R_n^{n-2}}{\rho'^{n+1}} Z_{n-1} .$$

Per ciò dovremo sodisfare alle seguenti equazioni:

$$2\mu A_0 - (3\lambda + \mu) B_0' R_1^3 = -2\mu$$

$$2\mu A_0 - (3\lambda + \mu) B_0' R_2^3 = o$$

$$B_1 = o$$

$$A_1 - \beta_1 B_1' R_1^5 = -\rho'$$

$$A_1 - \beta_1 B_1' R_2^5 = o$$

e per $n > 1$:

$$A_n + B_n R_1^2 - \beta_n R_1^{2n+3} B_n' = -\rho'^n$$

$$A_n + B_n R_2^2 - \beta_n R_2^{2n+3} B_n' = o$$

$$A_n' + B_n' R_1^2 - \beta_{-n-1} R_1^{-2n+1} B_n = o$$

$$A_n' + B_n' R_2^2 - \beta_{-n-1} R_2^{-2n+1} B_n = -\frac{1}{\rho'^{n+1}}$$

dalle quali, ponendo:

$$R_2 = \eta R_1$$

si ricava:

$$A_0 = \frac{\eta^3}{1 - \eta^3}, \quad B_0 R_1^3 = \frac{2\mu}{(1-\eta)(3\lambda + \mu)}$$

$$A_1 = \frac{\rho' \eta^5}{1 - \eta^5}, \quad B_1' R_1^5 = \frac{\rho'}{\beta_1 (1 - \eta^5)}$$

$$= \frac{5\rho'}{1 - \eta^5} \cdot \frac{2\lambda + \mu}{3\lambda + \mu}$$

e per $n > 1$, essendo:

$$\xi_n = \beta_n \beta_{-n-1} (1 - \eta^{2n-1})(1 - \eta^{2n+1}) + \eta^{2n-1} (1 - \eta^2)^2$$

$$\frac{B_n}{R_1^n} = \beta_n \eta^2 \frac{(1 - \eta^{2n+3})}{\xi_n} \frac{R^{2n-1}}{\rho'^{n+1}} - \eta^{2n-1} \frac{(1 - \eta^2)}{\xi_n} \frac{\rho'^n}{R_1^{n+1}}$$

$$B_n' R_1^{n+1} = \beta_{-n-1} \frac{(1 - \eta^{2n-1})}{\xi_n} \frac{\rho'^n}{R_1^{n+2}} - \eta^n \frac{(1 - \eta^2)}{\xi_n} \frac{R_2^{n-1}}{\rho'^{n+1}}$$

e quindi osservando che le derivate di V_0 sono uguali a zero abbiamo:

(54)
$$u_0' = \left(-1 + \frac{3(\lambda+\mu)}{(3\lambda+\mu)(1-\eta^3)}\right)\frac{Y_1}{R_1^2}$$

$$u_0'' = \frac{3(\lambda+\mu)\eta^3}{(3\lambda+\mu)(1-\eta^3)}\frac{Y_1}{R_2^2}$$

(54)
$$u_1' = \left[\left(-1 + \frac{5(\lambda+\mu)}{(3\lambda+\mu)(1-\eta^5)}\right)Y_2 + \frac{5(2\lambda+\mu)}{(3\lambda+\mu)(1-\eta^5)}Z_0\right]\frac{\rho'}{R_1^3}$$

$$u_1'' = \left(\frac{5(\lambda+\mu)\eta^5}{(3\lambda+\mu)(1-\eta^5)}Y_2 + \frac{5\eta^5(2\lambda+\mu)}{(3\lambda+\mu)(1-\eta^5)}Z_0\right)\frac{\rho'}{R_2^3}$$

e per $n > 1$:

(54)
$$= \left[-\frac{\rho'^n}{R_1^{n+2}} + \frac{2(2n+1)(\lambda+\mu)}{(n+1)(n+2)(2\lambda+\mu)\xi_n}\left(\beta_{-n-1}(1-\eta^{2n-1})\frac{\rho'^n}{R_1^{n+2}} - \eta^n(1-\eta^2)\frac{R_2^{n-1}}{\rho'^{n+1}}\right)\right]Y_{n+1}$$

$$-\frac{2(2n+1)(\lambda+\mu)\eta^n}{n(n-1)(2\lambda+\mu)\xi_n}\left(\beta_n(1-\eta^{2n+3})\frac{R_2^{n-1}}{\rho'^{n+1}} + \eta^{n-1}(1-\eta^2)\frac{\rho'^n}{R_1^{n+2}}\right)Z_{n-1}$$

$$u_n'' = \frac{2(2n+1)(\lambda+\mu)\eta^{n+1}}{(n+1)(n+2)(2\lambda+\mu)\xi_n}\left(\beta_{-n-1}(1-\eta^{2n-1})\frac{\rho'^n}{R_1^{n+2}} - \eta^n(1-\eta^2)\frac{R_2^{n-1}}{\rho'^{n+1}}\right)Y_{n+1}$$

$$-\left[\frac{R_2^{n-1}}{\rho'^{n+1}} - \frac{2(2n+1)(\lambda+\mu)}{n(n-1)(2\lambda+\mu)\xi_n}\left(\beta_n(1-\eta^{2n+3})\frac{R_2^{n-1}}{\rho'^{n+1}} + \eta^{n-1}(1-\eta^2)\frac{\rho'^n}{R_1^{n+2}}\right)\right]Z_{n-1}$$

Sostituendo nella (52) i valori (53) e (54) e riducendo con essa la (49) si ottiene:

$$\Theta = -\frac{5(2\lambda+\mu)}{8\pi(1-\eta^5)(3\lambda+\mu)(\lambda+\mu)}\cdot\frac{\rho'}{R_1}\int_\varpi\Big((L_1' + \eta^4 L_2')Z_0$$

$$+ (M_1' + \eta^4 M_2')Z_0' + (N_1' + \eta^4 N_2')Z_0''\Big)d\varpi$$