LIBRO V.

CURVATURE DELLE LINEE E DELLE SUPERFICIE.

318. Le tangenti di una curva ed i tangenziali di una superficie fanno conoscere le direzioni della curva e le inclinazioni della superficie nei suoi singoli punti; se vogliasi meglio giudicare della loro forma, bisognerà trovare, per ciascun punto della curva o della superficie, dei circoli o delle particolari superficie, che più si avvicinino alla curva o superficie data. In tal modo si viene ad acquistare un'idea della curvatura della curva o della superficie; ciò forma il soggetto del presente Libro; argomento molto importante specialmente dal lato teorico. In quanto andremo esponendo faremo poco uso di figure, perchè giova abituarsi a quelle idee generali, che difficilmente sono presentate da figure particolari. Noi indicheremo le curve con lettere minuscole poste tra parentesi; le superficie con lettere majuscole pure tra parentesi, semplici se le superficie sono sviluppabili, doppie se sono a due curvature: e, per lo stretto legame che passa tra una superficie sviluppabile, e la sua linea di regresso, noi le indicheremo con lettere del medesimo nome.

CAP. I.

Curvatura delle linee gobbe.

319. Considerando le curve come composte d'infiniti latercoli infinitesimi, si dice che due curve hanno un contatto del 1.°, 2.°, 3.°... ordine secondo che esse hanno comuni uno, due, tre .... latercoli consecutivi; oppure due, tre, quattro.... punti consecutivi. Così la retta tangente ha un contatto del primo ordine, il circolo osculatore (§ 121) ne ha uno del secondo. Se i circoli osculatori di una curva sono tutti in un piano, la curva è piana; ma se immaginiamo, per fissare le idee, che il secondo circolo osculatore giri di un angolo-diedro infinitesimo intorno alla tangente che esso ha comune col primo circolo, ed il terzo giri esso pure intorno alla tangente comune col secondo, e così di seguito, la curva diviene (§ 89) *gobba* (*a doppia curvatura*); ed in essa si osserva oltre che la curvatura (che è quella stessa del circolo osculatore), anche la *torsione*, che è costituita dal diedro formato da due *piani osculatori* infinitamente vicini; chiamandosi (§ 128) piani osculatori quelli dei circoli osculatori, cioè quelli che contengono due latercoli consecutivi. — Una curva (c) può perdere tutta la sua torsione conservando la stessa curvatura; basta supporre che tutti i circoli osculatori girino successivamente intorno alle intersezioni dei piani di due circoli vicini fino ad adagiarsi sopra un solo piano. I tangenziali (§ 173) della superficie sviluppabile (C) formata da tutte le tangenti della (c), comprendendo due di queste tangenti consecutive, sono i piani osculatori della curva (c), perciò le predette rotazioni dei piani osculatori della (c) sono quelle stesse mediante le quali s'immagina (§ 190) sviluppata la superficie (C); dunque *quando una superficie sviluppabile* (C) *si sviluppa in un piano la sua linea di regresso* (c) *conserva la curvatura e perde tutta la torsione.*

320. A motivo della torsione di una curva gobba (c) le sue *normali*, che sono le rette perpendicolari alle tangenti e poste nei piani osculatori, non più s' incontrano, e quindi non formano, come per le curve piane (§ 124), un'evoluta. Ma se per un punto M della curva (c) tiriamo una retta qualunque perpendicolare alla tangente in M e quindi anche alla curva; pel punto infinitamente vicino M_1 potremo sempre condurre una seconda perpendicolare alla curva, la quale tagli la prima, e pel terzo punto M_2 una terza perpendicolare che tagli la seconda, ec.; tutte queste perpendicolari saranno tangenti ad una curva che segneremo con (b), e che sarà un' evoluta della (c), poichè tutte le tangenti della (b) sono perpendicolari alla (c); e la (c) è una sviluppante della (b), perchè può essere descritta da un filo che si spieghi dalla (b) mantenendosi, colla sua parte già spiegata, tangente ad essa (b). Tutte le tangenti della (b) costituiscono una superficie sviluppabile (B) sulla quale è situata l'evolvente (c).

321. Osservando che la prima perpendicolare, che immaginammo condotta pel punto M della (c) è arbitraria, vediamo che questa (c) ha infinite evolute (b^1), (b^2), (b^3).... ed infinite pur sono le corrispondenti superficie sviluppabili (B^1) (B^2) (B^3)....; si conoscerà pure che tutte le tangenti delle (b^1) (b^2).... che mettono capo ad un medesimo punto della (c) sono situate nel piano normale a questa (c), e perciò i punti corrispondenti delle (b^1) (b^2).... si trovano sull'intersezione di due piani normali alla (c) in due punti infinitamente vicini. Ora tutti i piani normali della (c) formano colle loro successive intersezioni una superficie sviluppabile (A); è quindi palese che tutte le (b^1) (b^2).... sono situate sulla (A), che si dirà la *superficie delle evolute della* (c).

322. Due piani normali vicinissimi della (c) sono perpendicolari al corrispondente piano osculatore, perciò anche la loro intersezione, che è una delle caratteristiche della (A), è perpendicolare a quel piano osculatore, inoltre essa passa pel corrispondente centro di curvatura della (c), che essendo ad ugual distanza da tre punti della (c) è sull'intersezione dei piani normali ai latercoli che li uniscono; così la medesima

proprietà di essere ad ugual distanza da tre punti vicinissimi della (c) appartiene a ciaschedun punto di questa intersezione. Questa retta la diremo l'*asse di curvatura* (*asse polare*, o *linea dei poli*) della (c) nel punto di cui si tratta; così la superficie (A) contiene anche tutti gli assi di curvatura della (c).

323. Questi assi di curvatura della (c), che sono le caratteristiche della (A), formano colle loro successive intersezioni la (a) curva di regresso della (A). Il punto d'intersezione di due assi vicinissimi è ad ugual distanza da quattro punti vicinissimi della (c), dunque i punti della (a) sono i centri delle sfere che contengono quattro punti infinitamente vicini della (c), e che perciò hanno con questa un contatto del terzo ordine.

324. Immaginiamo adesso che il punto M si muova descrivendo la curva (c) e portando seco tutti i fili che sono ravvolti sulle evolute (b^1) (b^2)...., ed insieme con questi tutti gli assi di curvatura della (c); in tal guisa verrà a svilupparsi la (A), e si avrà una figura piana come quella della figura 112. Le rette $KL^1L^2L^3$ $K_1L_1^1L_1^2L_1^3$, ec. erano prima dello sviluppo le caratteristiche della (A), ossia gli assi di curvatura della (c); le porzioni di queste linee a tratto interrotto appartenevano all'altra falda della superficie (A); la curva KK_1K_2 era la linea di regresso (a); i punti K K_1... erano i centri delle sfere, che hanno un contatto del terzo ordine colla (c) nei punti M M_1.... ai quali competono rispettivamente gli assi di curvatura KL K_1L_1...; le rette $L^1L_1^1L_2^1$ $L^2L_1^2L_2^2$,... sono gli sviluppi delle evolute (b^1) (b^2)....

325. Che queste evolute sieno linee brevissime sulla (A) lo si può anche riconoscere pel § 193 osservando, che, per esempio, il piano tangenziale della (A) lungo la caratteristica $L_2^1L_2^3$ è normale alla (c) nel punto M_2, e che il piano osculatore della (b^1) nel punto L_2^1, comprendendo due rette perpendicolari al latercolo della (c) nel punto M_2, comprende anche questo latercolo, e perciò è perpendicolare al predetto tangenziale. Quando si hanno due evolute (b^1) (b^2) si può descrivere la (c) mediante due fili ravvolti intorno a quelle evolute, e

dalle quali si sviluppano, nel mentre che le estremità dei fili si riuniscono nel punto M; si scorge facilmente che l'angolo sotto cui s'intersecano tali fili in M è costante per tutto lo sviluppo. — I centri di curvatura della (c) sono situati nei rispettivi piani osculatori ed inoltre negli assi di curvatura; perciò essi si ottengono abbassando dai singoli punti della (c) le perpendicolari sugli assi rispettivi. Così anche nella figura 112 noi determineremo le posizioni R R_1 ec., che prendono i centri di curvatura dopo lo sviluppo, abbassando sulle KL^3 $K_1L_1^2$ ec. le perpendicolari MR MR_1 ec. dal punto M, che è quello che nello sviluppo prende successivamente tutte le posizioni M M_1 ec.

326. La linea dei centri di curvatura RR_1R_2 diventa una evoluta della (c) quando dopo lo sviluppo essa è una retta, che passa per M; cioè nel solo caso che la (A) sia una superficie cilindrica, e perciò la (c) sia una curva piana. — Quando la superficie (A) è un cono, la curva KK_1K_2 si riduce ad un solo punto; ed una sfera col centro in K passa per tutti i punti M M_1 ec.; cioè la curva (c) è descritta sulla superficie di una sfera.

327. Dicemmo al § 129 che la *curvatura* della (c) è misurata dal rapporto dell'angolo di *contingenza* compreso fra le tangenti estreme dell'archetto MM_1 alla lunghezza dell'archetto medesimo; e che la *torsione* è misurata dal rapporto del diedro di *torsione* compreso fra i piani osculatori in M M_1 (oppure dell'angolo compreso fra i due assi di curvatura RK R_1K_1) allo stesso archetto infinitesimo MM_1. — L'archetto diviso per l'angolo di contingenza espresso in parti di raggio, ossia (giacchè l'angolo è infinitesimo) l'archetto diviso pel seno dell'angolo di contingenza dicesi *raggio di curvatura*; similmente l'archetto infinitesimo diviso pel diedro di torsione può dirsi *raggio di torsione*.

328. I piani osculatori della (a) ossia tangenziali della (A) sono normali alla (c); e viceversa le tangenti della (a) ossia caratteristiche della (A) sono gli assi di curvatura perpendicolari ai piani osculatori della (c): dunque il diedro di torsione dell'archetto KK_1 della (a) uguaglia l'angolo di contin-

genza dell'archetto MM_1 della (c); viceversa l'angolo di contingenza di KK_1 uguaglia il diedro di torsione di MM_1. Non si può dedurne che la curvatura della (c) sia uguale alla torsione della (a), e viceversa; poichè gli archetti MM_1 KK_1 sono in generale differenti: bensì il rapporto tra i raggi di curvatura e di torsione della (c) è uguale al rapporto fra i raggi di torsione e di curvatura della (a).

329. Applichiamo queste generali considerazioni alla più semplice delle curve gobbe, vale a dire all'*elica* (§ 194), o linea brevissima di un cilindro rotondo, che è la sola curva che abbia in tutti i suoi punti ugual curvatura ed ugual torsione. Immaginiamo per fissare le idee che l'elica (c) sia descritta sopra un cilindro verticale: per la piena eguaglianza tra le parti dell'elica al di sopra e al di sotto del punto M, il raggio di curvatura MR dovrà essere orizzontale. Il circolo osculatore avrà coll'elica (c) un contatto (§ 121) del terzo ordine. Gli assi di curvatura della (c), che sono tangenti alla (a), sono tutti ugualmente inclinati all'orizzonte, ed essendo costante la lunghezza di MR si vede che la (a) è un'elica descritta sopra un cilindro concentrico a quello della (c); e che i centri di curvatura R cadono sulla linea di regresso (a), cioè coincidono coi centri K delle sfere, che hanno un contatto del terzo ordine colla (c). Siccome il raggio di curvatura MR è maggiore (§ 196) del raggio del cilindro, cui appartiene l'elica (c), così l'asse comune dei due cilindri taglia la MR in un punto intermedio tra M ed R, e le due eliche (c) (a) si ravvolgono l'una a spira dritta, l'altra a spira rovescia (§ 208). Nello sviluppo della (A) l'elica (a) diventa un circolo RR_1R_2, ed il punto M, che durante lo sviluppo ha generata l'elica (c), è il centro di quel circolo; perchè tutte le perpendicolari da esso abbassate sulle tangenti del circolo debbono incontrarle nei punti del circolo medesimo.

330. Sia c il raggio del cilindro, su cui è descritta l'elica (c), e sia $2\pi\sqrt{ac}$ il passo (§ 195) di questa, sicchè sia $\sqrt{a:c}$ la tangente trigonometrica dell'inclinazione dell'elica sulle caratteristiche del cilindro: il raggio di curvatura dell'elica si trova (§ 196) $= c+a$; perciò l'elica (a) è descritta

sul cilindro che ha il raggio a. Il suo passo è quello stesso della (c), cioè $2\pi\sqrt{ca}$; quindi il suo raggio di curvatura è $=a+c$; sicchè le due eliche (c) (a) sono tra loro conjugate in questo senso, che ognuna è il luogo geometrico dei centri dei circoli, che hanno un contatto del terzo ordine coll'altra.

331. La lunghezza di un intero giro dell'elica (c) è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, i cui cateti sono la projezione orizzontale $2\pi c$ ed il passo $2\pi\sqrt{ac}$; così pure la lunghezza dell'elica (a) è l'ipotenusa dei cateti $2\pi\sqrt{ac}$ $2\pi a$; perciò il rapporto tra due archi corrispondenti MM_1 RR_1 di tali eliche è $=\sqrt{a:c}$. Queste due eliche hanno un ugual raggio di curvatura $c+a$, quindi i loro angoli di contingenza avranno essi pure il rapporto $\sqrt{a:c}$; ma l'angolo di contingenza della (a) eguaglia (§ 328) il diedro di torsione della (c), perciò il raggio di torsione della (c) sarà $(a+c)\sqrt{a:c}$. Similmente il raggio di torsione della (a) è $(a+c)\sqrt{a:c}$.

Nota al Cap. I. del Lib. V.

Il metodo delle equipollenze dà facilmente la verificazione di quanto abbiamo esposto; darò qui i risultamenti espressi col comune linguaggio delle coordinate ortogonali. Per una data curva $MM_1M_2\ldots$ sia M l'origine delle coordinate, e quelle del punto vicinissimo M_1 sieno

$$x,\ y=x^2:2r-sx^3:6r^2t+\text{ ec.},\ z=x^3:6rt+\text{ ec.};$$

perlochè il punto M lo segneremo con $(0, 0, 0)$, ed il punto M_1 con (x, y, z). La tangente in M_1 sarà parallela alla retta, che passa per l'origine M e pel punto

$$(1,\ x:r-sx^2:2r^2t+\text{ ec.},\ x^2:2rt+\text{ ec.}).$$

Il piano osculatore sarà eziandio parallelo alla retta che unisce l'origine $(0, 0, 0)$ col punto

$$(0,\ 1:r-sx:r^3t+\text{ ec.},\ x:rt+\text{ ec.}).$$

Quindi l'asse di curvatura R_1K_1 corrispondente al punto M_1 è parallelo alla retta perpendicolare alle due predette, la quale va dall'origine M al punto

$$(x^2:2rt+\text{ ec.},\ -x:t+\text{ ec.},\ 1-sx:rt+\text{ ec.}).$$

Finalmente la normale M_1R_1 essendo perpendicolare alla tangente, ed all'asse di curvatura (perchè posta nel piano osculatore), sarà parallela alla retta dei due punti (0, 0, 0)

$$(-x+3sx^2:2rt+\text{ec.},\ r-sx:t+\text{ec.},\ rx:t+\text{ec.}).$$

Se x aumenta dell'infinitesimo ω, l'arco MM_1 aumenta dell'archetto infinitesimo

$$\omega(1+x^2:2r^2-sx^3:2r^3t+\text{ec.}).$$

L'angolo di contingenza compreso tra due tangenti infinitamente vicine è $\omega(1:r-sx:r^2t+\text{ec.})$; dividendo per esso l'archetto, si ottiene il valore $r+sx:t+$ ec. del raggio di curvatura in M_1. Perciò il raggio di curvatura in M è $=r$, ed $s:t$ è la derivata di tal raggio rispetto all'arco

$$MM_1=x+\text{ec.}$$

Il diedro di *torsione* compreso tra due piani osculatori eguaglia l'angolo compreso tra l'asse di curvatura R_1K_1 e quello ad esso infinitamente vicino; lo si trova uguale ad $\omega(1:t+\text{ec.})$; quindi t è il *raggio di torsione* (*rayon de cambrure*). Nulla possiamo dire sulla variazione del raggio di torsione da M ad M_1, poichè a tal uopo bisognerebbe conoscere maggior numero di termini delle coordinate y z sviluppate secondo le potenze della x.

Si riconosce facilmente che l'angolo compreso tra la normale M_1R_1 e quella ad essa infinitamente vicina risulta dall'angolo di contingenza e dal diedro di torsione, come l'ipotenusa risulta dai due cateti di un triangolo rettangolo, cioè esso uguaglia $\sqrt{(\omega^2:r^2+\omega^2:t^2)}$.

L'intersezione tra la normale M_1R_1 e quella ad essa infinitamente vicina è il centro di curvatura R_1, determinato dalle coordinate

$$(-sx^2:2rt+\text{ec.},\ r+sx:t+\text{ec.},\ rx:t+\text{ec.}).$$

La linea $RR_1\ldots$ dei centri di curvatura, trasportando l'origine delle coordinate in R, è perciò espressa dalle coordinate

$$-sx^2:2rt+\text{ec.},\quad sx:t+\text{ec.},\quad rx:t+\text{ec.}$$

Quindi nel punto R la tangente della curva $RR_1\ldots$ sta nel piano MRK, ed il suo raggio di curvatura è $(r^2+s^2)r:st$.

L'asse di curvatura R_1K_1 incontra quello ad esso infinitamente vicino nel punto K_1 centro della sfera, che ha un con-

tatto del terzo ordine colla curva $MM_1\ldots$ nel punto M. Il punto K corrispondente ad M è espresso da $(0, r, s)$. Nulla possiamo dire sulla curva $KK_1\ldots$, la quale, coi dati da noi assunti, potrebbe anche ridursi ad un punto; solamente noi sappiamo (§ 328) che il rapporto tra i suoi raggi di curvatura e di torsione è $=t:r$.

Il raggio $KM=\sqrt{(r^2+s^2)}$ della predetta sfera è tagliato per metà dalla retta condotta dal centro di curvatura R perpendicolarmente al piano osculatore della curva $RR_1\ldots$; perciò questa linea dei centri di curvatura tocca il circolo MRK, che ha per diametro il raggio KM della sfera, avente colla curva MM_1 un contatto del terzo ordine.

Tutte le normali MR M_1R_1 ec. costituiscono una superficie rettilinea; per trovarne la linea di stringimento projetteremo la M_1R_1 sul piano parallelo alle due MR M_1R_1, e troveremo che la loro minima distanza taglia la $MR=r$ in due parti MX XR proporzionali ai quadrati t^2 r^2 dei raggi di torsione e di curvatura.

La curva (c) è linea di regresso della superficie sviluppabile (C) costituita da tutte le tangenti della (c). Vi è un'altra superficie sviluppabile (Γ), che ha colla curva (c) un'importante relazione; essa fu detta la superficie *rettificante*, perchè, quand'essa si sviluppa in un piano, la curva (c) si sviluppa in una retta: quindi questa (c) è una linea brevissima descritta sulla (Γ), e perciò (§ 193) le sue normali sono pur normali alla (Γ). Ne viene che la caratteristica MF della (Γ) essendo intersezione di due tangenziali è perpendicolare alla normale MR, e ad un'altra ad essa infinitamente vicina, quindi è parallela alla retta che unisce l'origine $(0, 0, 0)$ col punto $(r, 0, t)$.

Veniamo per ultimo a determinare l'evoluta LL_1L_2, il punto L essendo $(0, r, s-d)$ ed avendo la distanza d dal punto K della (a). Sugli altri assi di curvatura si devono prendere i punti L_1 in guisa che la tangente in ciascun punto L_1 passi pel corrispondente M_1. Così si trova che trasportando l'origine delle coordinate in L, il punto L_1 è determinato da

$$(-dx^2:2rt+\text{ec.},\ dx:t+\text{ec.},\ d(s-d)x:rt+\text{ec.}).$$

Perciò il raggio di curvatura in L della evoluta (b) è

$$d(r^2+(s-d)^2):rt.$$

Nulla si potrebbe stabilire sulla torsione dell'evoluta.

Quando $s=0$, la curva da noi considerata ha un contatto del terzo ordine coll'elica descritta sul cilindro di raggio $=rt^2:(r^2+t^2)$, e che ha il passo (§ 330) $2\pi r^2 t:(r^2+t^2)$. La linea dei centri di curvatura coincide in ogni punto R colla linea $KK_1\ldots$, perciò la sua tangente in R è l'asse di curvatura RL; nè si può più stabilire il raggio di curvatura della linea $RR_1\ldots$

CAP. II.

Curvatura delle superficie sviluppabili.

332. Sia la superficie sviluppabile (S) colla sua linea di regresso (s): la figura 113 rappresenta non la superficie ma il suo sviluppo in un piano; $KK_1\ldots$ ne è la linea di regresso, e KM ne sono le caratteristiche. La superficie (S) non ha alcuna curvatura lungo una qualunque sua caratteristica KM, e le normali alla superficie nei punti di questa KM sono tutte parallele e situate in un piano perpendicolare alla superficie; simil cosa avviene per le normali lungo la caratteristica infinitamente vicina K_1M_1. È palese che in questi due sistemi di rette parallele poste in piani differenti si potranno scegliere quelle che a due a due s'incontrano: sieno M M_1 i punti, le cui normali alla (S) s'incontrano nel punto F, il piano FMM_1 sarà perpendicolare alla KM, perchè lo è alla superficie (S); perciò l'archetto MM_1 sarà perpendicolare alla caratteristica. Se M_2 sia il punto infinitamente vicino ad M_1, la cui normale incontra quella spettante al punto M_1, e così in seguito; la curva $MM_1M_2\ldots$, che noi esprimeremo con (c), sarà una sviluppante della (s), linea di regresso della (S), essendo perpendicolare a tutte le sue tangenti; essa si dice una *linea di curvatura* della (S). La normale FM dicesi il raggio di curvatura *principale* della superficie (S) nel punto M. — La retta

KF intersezione dei piani normali alla (S) condotti per le KM K_1M_1 passa pel punto comune a due caratteristiche infinitamente vicine, e perciò appartenente alla linea di regresso (s); dunque *i raggi di curvatura principale corrispondenti a punti posti sopra una medesima caratteristica sono proporzionali alle porzioni di caratteristica comprese tra essi e la linea di regresso della superficie.*

333. Tutte le KF sono le caratteristiche di una nuova superficie (Σ) inviluppo dei piani normali condotti per le caratteristiche della (S); sulla (Σ) è situata anche la curva (s). Le normali alla superficie (S) nei punti M M_1 ec. della linea di curvatura (c) sono inviluppate da una curva (b) FF_1F_2...., che è evidentemente situata sulla (Σ): queste normali alla (S) sono perpendicolari alla (c) (non sono però quelle, che si dicono le sue normali, giacchè esse, generalmente parlando non sono comprese nei piani osculatori della (c)), quindi la (b) è un'evoluta della (c). Il piano FMM_1 osculatore della (b) è perpendicolare al piano KMF tangenziale alla (Σ), dunque (§ 193) tutte le (b) descritte sulla (Σ) sono sue linee brevissime.

334. Se la (Σ) si sviluppa in un piano, ciascuna (b) diventa una linea retta, il cui estremo M descrive la linea di curvatura (c) prendendo successivamente le posizioni M_1 M_2 ec.; lo stesso avviene di ciascun altro punto M' M'' ec.; sicchè la caratteristica KM va successivamente a situarsi sulle K_1M_1 ec.: perciò la (s), che è posta sulla superficie (Σ), si sviluppa in una linea retta, così: *La linea di regresso* (s) *di una superficie sviluppabile* (S) *è una linea brevissima sulla superficie* (Σ), *che contiene tutti i centri di curvatura principale della prima superficie* (S); *cioè la* (Σ) *è* (pag. 237) *la superficie rettificante della* (s).

335. Nel caso che la superficie (S) sia un elicoide sviluppabile le sue linee di curvatura (c), che sono le sviluppanti dell'elica (s) sono curve piane, perchè sono (§ 195) anche le sviluppanti dei circoli, sezioni rette del cilindro, su cui è descritta l'elica (s). Il cilindro è la superficie (Σ), che contiene tutti i centri di curvatura principale dell'elicoide (S), e che è

la superficie rettificante dell'elica (s). Le (B), che tagliano ortogonalmente le (S) lungo le sue linee di curvatura (c), hanno per ispigoli di regresso le (b), che sono eliche descritte sul cilindro (Σ).

336. Se per la FM normale alla (S) conduciamo un piano perpendicolare alla caratteristica KM, questa *sezione normale*, che passa per la tangente alla linea di curvatura MM_1M_2 dicesi la *sezione principale* della (S) nel punto M; essa ha il raggio di curvatura FM. — Per determinare la curvatura di tutte le altre sezioni normali spettanti al punto M ammetteremo, come cosa dimostrata dalla Geometria analitica, che in ogni punto di una superficie sviluppabile vi è un cilindro rotondo, che ha con essa un contatto del secondo ordine, cioè che, tagliati il cilindro e la superficie con un qualunque piano, l'ellisse e la curva, che ne sono le sezioni, hanno un contatto del secondo ordine. — Ci basterà dunque considerare le sezioni normali nel punto (M,m) (Fig. 114) del cilindro rotondo, il cui asse (KF,f) supponiamo essere situato sul piano coordinato orizzontale. La sezione fatta dal piano verticale elevato sopra FH è un circolo il cui raggio è uguale ad FH; ogni altra sezione normale fatta dal piano verticale che si eleva sopra FP è un'ellisse, che ha i due semiassi fm FP, perciò il suo raggio di curvatura è (§ 123) uguale ad

$$(FP)^2 : fm = (FP)^2 : FH.$$

Viene da ciò che: *In un punto di una superficie sviluppabile il raggio di curvatura di una sezione normale eguaglia il raggio di curvatura principale diviso pel quadrato del coseno del diedro compreso tra il piano della sezione normale e quello della sezione principale.*

337. Si dimostra col calcolo che per ogni sezione obbliqua al tangenziale di una superficie, la sua curvatura dipende unicamente dalla curvatura della sezione normale, che ha la tangente comune colla sezione obbliqua; perciò invece di una qualsiasi superficie noi possiamo considerare una sfera. Se per una tangente di questa immaginiamo condotti due piani, l'uno normale alla sfera e l'altro obbliquo; il raggio della seconda sezione sarà evidentemente uguale a quello della prima molti-

plicato pel coseno del diedro compreso tra i due piani. Questo teorema, che è conosciuto sotto il nome del Meunier può esprimersi anche così: *L'asse di curvatura della sezione obbliqua di una qualsivoglia superficie passa pel centro di curvatura della sezione normale condotta per l'intersezione del tangenziale alla superficie col piano della sezione obbliqua.*

338. Nel caso del cilindro rotondo tutte le sue sezioni normali od obbliqne projettate sopra un piano perpendicolare al cilindro hanno per projezione comune il circolo sezione retta del cilindro. — Possiamo stabilire anche in altra maniera il rapporto tra il raggio di curvatura di una curva obbiettiva e quello di una sua projezione. — Nella figura 40 il raggio di curvatura in D dell'ellisse, projezione del circolo (EDE_1), è (§ 123) $\overline{CE}^2 : CD.\,\text{sen}\,DCE = \overline{EC}^3 : \text{area}\,EDE_1$. Ora CE eguaglia il raggio del circolo obbiettivo moltiplicato pel coseno dell'inclinazione sul piano di projezione della tangente al circolo stesso nel punto (D); e l'area del triangolo EDE_1 è uguale al quadrato del suddetto raggio moltiplicato pel coseno dell'inclinazione del piano del circolo obbiettivo; perciò: *Il rapporto tra i raggi di curvatura di una curva obbiettiva e della sua projezione eguaglia il coseno dell'inclinazione del piano osculatore della curva obbiettiva sul piano di projezione diviso pel cubo del coseno dell'inclinazione della tangente obbiettiva.*

339. Se il piano osculatore della curva obbiettiva, e la sua tangente sono ugualmente inclinate al piano di projezione, il raggio di curvatura della curva obbiettiva è uguale a quello della projezione diviso pel quadrato del coseno dell'inclinazione. Il che si accorda col § 336. Si potrebbe per tal maniera dimostrare, rispetto al cilindro, anche il teorema del § 337.

340. Mediante il teorema del § 338 possiamo trovare il raggio di curvatura di una curva obbiettiva conoscendo quelli delle sue projezioni sopra due piani tra loro ortogonali; e ciò senza determinare la posizione del piano osculatore, ma soltanto quella della tangente, la quale è subito data dalle tangenti delle projezioni. — Se in primo luogo la tangente della

curva obbiettiva sia parallela ad ambedue i piani di projezione, e sieno R r i raggi di curvatura delle due projezioni; quello della curva obbiettiva sarà $R \cos I = r \operatorname{sen} I$, essendo I l'inclinazione del piano osculatore col primo piano di projezione. Perciò, costruito un triangolo rettangolo, i cui cateti sieno R r, la distanza dall'ipotenusa del vertice dell'angolo retto sarà il cercato raggio della curva obbiettiva.

341. Nel caso generale sieno Π π i raggi di curvatura delle due projezioni divisi rispettivamente pei cubi dei coseni delle inclinazioni della tangente obbiettiva sui piani di projezione: sia GJh (Fig. 13) un piano perpendicolare a questa tangente, e le FD ed abbiano dalla fondamentale distanze proporzionali ai Π π. Determinato (§ 42) il punto (D) del piano GJh, che ha le projezioni su queste due rette, il piano osculatore della curva sarà perpendicolare alla retta (JD,Jd); e presa su questa retta obbiettiva una lunghezza (JP) eguale a Π, l'altezza del punto (P) dal coordinato orizzontale eguaglierà il cercato raggio di curvatura $\Pi \cos I = \pi \cos i$, essendo I i le inclinazioni del piano osculatore coi piani di projezione. Il problema resta indeterminato se la tangente della curva obbiettiva è perpendicolare ad una retta parallela ad ambedue i piani di projezione.

342. Se sopra una superficie sviluppabile siavi una curva, la projezione di questa sul tangenziale in un punto determinato di essa curva differisce sì poco dalla posizione, che prende la curva nello svilupparsi della superficie sullo stesso tangenziale, che la projezione e lo sviluppo della curva hanno in quel punto il medesimo raggio di curvatura. Ora pel teorema del § 338 questo raggio eguaglierà quello della curva posta sulla superficie sviluppabile diviso pel coseno del diedro tra il piano osculatore di quella ed il tangenziale di questa. — Il Delaunnay, e prima di lui il Minding trovarono che la curva di data lunghezza, che sopra una data superficie racchiude un'area massima, ha i raggi di curvatura proporzionali ai coseni dei diedri tra i corrispondenti piani osculatori della curva ed i tangenziali della superficie; dunque *se si sviluppa in un piano la superficie sviluppabile circoscritta*

alla superficie lungo una curva racchiudente in dato perimetro massima area, questa curva si svilupperà in un circolo.

343. Tornando alle superficie sviluppabili i teoremi dei §§ 332, 336, 337 ci mostrano che se due di tali superficie si tocchino tutto lungo una loro caratteristica KM, e coincidano insieme i punti K dove tal caratteristica tocca le due linee di regresso, le due superficie avranno tutto lungo quella caratteristica un contatto del secondo ordine, se il rapporto $KM:MF$ sia lo stesso per ambedue le superficie. Questo rapporto è quello che ha luogo tra la torsione e la curvatura in K della linea di regresso di ciascheduna superficie.

344. Quando le due superficie bensì si toccano lungo una loro caratteristica, ma non coincidono i punti di contatto della caratteristica colle rispettive linee di regresso, si trova, mediante il teorema del § 332, che le due superficie si osculano in un solo punto di tal loro caratteristica comune. — Si dice che due superficie in un loro punto si osculano, od hanno un contatto del secondo ordine, quando ciò avviene d'ogni sezione fatta in ambedue le superficie da un qualsivoglia piano passante per quel punto.

345. Quanto dicemmo intorno alla curvatura delle superficie sviluppabili vale pei loro punti ordinarii, e può soffrire eccezione per qualche punto singolare. Così nei punti della linea di regresso il raggio di curvatura principale è nullo, e non può dirsi che esista propriamente un contatto del primo ordine tra la superficie ed il tangenziale.

CAP. III.

Curvatura delle superficie a due curvature.

346. Col calcolo si dimostra che, fatta astrazione da alcuni punti singolari, le curvature delle varie sezioni in qualunque punto di qualsivoglia superficie sono uguali a quelle relative al vertice di un paraboloide ellittico od iperbolico (§§ 168, 171). Vale a dire vi è sempre un paraboloide, che nel suo vertice oscula la data superficie; cioè ogni piano secante, che passi pel punto comune, taglia il paraboloide e la superficie in due curve, che hanno tra loro un contatto del secondo ordine. — È palese che dal genere del paraboloide dipende che la superficie sia nel punto di cui si tratta *convessa* (§ 173) o *concavo-convessa*. Il caso intermedio è quello che la superficie sia osculata da un cilindro, anzichè da un paraboloide; allora vi è una direzione, nella quale la superficie ha un contatto del secondo ordine col proprio tangenziale. In questi punti, che si possono dire di *curvatura cilindrica*, le curvature delle varie sezioni sono quelle stesse che competono a tutti i punti delle superficie sviluppabili (§§ 336, 337). — La superficie anulare ci presenta le tre sorta di curvature; in ciascuno dei punti dei due circoli, nei quali la superficie è toccata da un piano perpendicolare all'asse di rotazione, la curvatura è cilindrica; e quei due circoli separano la porzione di superficie, in cui essa è convessa, dalla porzione in cui è concavo-convessa.

347. Ci basterà adunque studiare quali sieno le curvature delle sezioni normali nel vertice di un paraboloide. Sia (M, m) (Fig. 115) il vertice di un paraboloide ellittico, cioè la retta $(M, m\mu)$ perpendicolare al tangenziale in (M) sia l'asse del paraboloide, il quale sarà tagliato da un piano parallelo al tangenziale nell'ellisse ABA_1B_1. Ogni sezione $(M)PP_1$ normale in (M) passa per l'asse $(m\mu)$ ed è una parabola, il cui parametro è $= MP.MP : m\mu$; il suo raggio di curvatura nel ver-

tice (M) (§ 123) è il semiparametro, perciò esso è proporzionale al quadrato del diametro PP_1, in cui l'ellisse ABB_1 è tagliata dal piano della sezione. Così si rende palese come le curvature delle varie sezioni normali procedano aumentando dalla sezione $(M)MA$ alla sezione $(M)MB$: a quella competendo il massimo raggio di curvatura, a questa il minimo. Si vede che le curvature delle sezioni sono simmetricamente disposte intorno a quelle due sezioni tra loro perpendicolari, che sono (§ 165) i piani diametrali principali del paraboloide, e che, rispetto alla superficie qualunque, cui il paraboloide è osculatore, si dicono le sue *sezioni principali*.

348. Nel caso del paraboloide iperbolico lo taglieremo (Fig. 116) con due piani paralleli al tangenziale nel vertice (M) e da esso equidistanti; così avremo due iperbole AP (BQ), che projettate su d'un piano parallelo ad entrambe daranno due iperbole *conjugate* (§ 114). I raggi delle sezioni elevate perpendicolarmente sopra i diametri PP_1 QQ_1 sono proporzionali ai quadrati di questi: coll'avvertenza che per le sezioni che tagliano l'iperbola AP, il raggio di curvatura è rivolto dall'alto al basso, ed è rivolto oppostamente per le sezioni che tagliano l'iperbola BQ. Così si vede che le curvature di tutte le sezioni normali pel punto (M) presentano due massimi corrispondenti alle *sezioni principali* $(M)MA$, $M(MB)$; e che tali curvature diminuiscono fino ad annullarsi nelle due direzioni MR MR_1 (che sono gli assintoti delle iperbole); sicchè in quelle due direzioni la superficie ha un contatto del secondo ordine col tangenziale.

349. La enunciata proporzionalità tra i raggi di curvatura delle sezioni normali, ed i quadrati dei diametri di un'ellisse o di due iperbole conjugate, è un teorema dovuto all'Eulero. Col suo mezzo si trasportano alle radici di quei raggi le proprietà di questi diametri. Così dalle equazioni dell'ellisse e delle iperbole si deduce facilmente l'espressione del quadrato del semidiametro MP espresso col mezzo dell'angolo $AMP=\varphi$ e dei quadrati dei semiassi MA MB: perciò segnati con r r' ρ i raggi di curvatura delle sezioni principali MA MB e della sezione normale $(M)MP$ sarà $1:\rho=\cos^2\varphi:r+\operatorname{sen}^2\varphi:r'$.

Si avverta che nei punti di curvatura concavo-convessa (Fig. 116) i raggi r r' sono di segno opposto.

350. Per due sezioni normali tra loro perpendicolari l'angolo φ avrà valori complementari, e dalla precedente espressione di $1:\rho$ si dedurrà che, chiamando *curvatura* il valore inverso $1:\rho$ del raggio, *la semisomma delle curvature di due sezioni normali tra loro perpendicolari è uguale alla semisomma delle due curvature principali*. Mediante la trigonometria può anche dimostrarsi che questa semisomma uguaglia pure la terza parte della somma delle curvature di tre sezioni normali, i cui piani formino tra loro diedri di 60°, nonchè la quarta parte della somma delle curvature di quattro sezioni formanti diedri di 45°, e così di seguito. Sicchè questo comune valore può dirsi la *curvatura media* delle sezioni normali equidistanti.

351. Se uno dei raggi di curvatura principale r r' diventa infinito, la curvatura è *cilindrica* (§ 346). Se ambedue sono infiniti, la curvatura è *nulla*, cioè la superficie è osculata dal proprio tangenziale. Se r r' sono uguali, in quel punto la curvatura è *sferica*; esso è detto, molto impropriamente, *umbilico*. Merita pure essere considerato il caso ($r' = -r$) in cui le curvature principali sono uguali, ma di opposte direzioni; allora le iperbole della figura 116 sono uguali ed hanno gli assintoti perpendicolari, esse si dicono *equilatere*, perchè due diametri conjugati sono sempre uguali: il paraboloide osculatore è quello a piani direttori perpendicolari considerato al § 157.

352. La curvatura delle sezioni obbliqne si deduce da quella delle sezioni normali col teorema del Meunier già dato al § 337.

353. Se nel tangenziale si tirano due rette (MP) (MQ) (Fig. 115, 116) parallele a due diametri conjugati dell'ellisse o dell'iperbola, che serve ad indicare (e che perciò dal Dupin è detta *indicatrice*) la curvatura delle varie sezioni normali, quelle sono due *tangenti conjugate*. La loro proprietà si è che circoscritta alla superficie una superficie sviluppabile, in ogni punto di contatto la caratteristica della superficie sviluppabile, e la tangente della linea di contatto sono due tangenti

conjugate. Ciò risulta dalla generale proprietà delle superficie del secondo ordine relativa ai coni ad esse circoscritti accennata al § 184. — Per una nota proprietà dei quadrati dei diametri conjugati si trova, come notammo al § 349, che: *La somma dei raggi di curvatura di due sezioni normali condotte per due tangenti conjugate è uguale alla somma dei due raggi di curvatura principale*. Se la superficie è concavo-convessa i raggi hanno segni opposti, e quindi la somma si cangia in differenza.

354. Pei punti ove la superficie è concavo-convessa, determinate le direzioni MR MR_1 (Fig. 116) nelle quali la curvatura è nulla, è facilissimo trovare la MQ tangente conjugata di una data MP; poichè la PQ parallela alla MR_1 rimane dimezzata in S dalla MR. — Pei punti ove la superficie è convessa, prese le MA MB (Fig. 115) proporzionali alle radici dei raggi di curvatura principale condurremo le AR AR_1 equipollenti alle MB MB_1 e saranno MR MR_1 due tangenti conjugate, alle cui sezioni normali competerà un raggio di curvatura eguale alla semisomma (§ 353) dei due raggi principali. Dopo ciò, per trovare la tangente MQ conjugata colla MP, tireremo la PS_1 parallela alla RM, e presa sulla MR la MS eguale alla MS_1, la SQ sarà parallela alla R_1M ed uguale alla S_1P.

355. Consideriamo la retta normale alla superficie nel punto (M), e le normali corrispondenti ai punti infinitamente vicini ad (M), e posti tutto intorno al medesimo, e dimostriamo che la prima incontra soltanto quelle che si trovano in una delle due sezioni principali. A tal fine supponiamo che la superficie sia tagliata da un piano parallelo ed infinitamente vicino al tangenziale in (M); esso sia il coordinato orizzontale delle figure 115, 116; la sezione sarà un'ellisse od una iperbola simile alla *indicatrice* (§ 353). Ora la normale alla superficie nel punto (M) ha l'icnografia M, e la normale in P ha l'icnografia normale alla sezione conica AB; perciò essa passa pel punto M, nel solo caso che P cada in uno dei quattro vertici A A_1 B B_1 dell'ellisse, o delle due iperbole conjugate, che sono le sezioni fatte da due piani vicinissimi al tan-

genziale, l'uno al di sopra e l'altro al di sotto del medesimo. Quindi le sole normali alla superficie nei punti A A_1 B B_1 sono quelle che tagliano la normale in (M).

356. Chiamiamo M_1 un punto infinitamente vicino ad M e posto nella direzione principale MA; dicendo di M_1 quello che abbiamo detto di M, vedremo che (salve le eccezioni in qualche punto singolare) la normale in M_1 sarà incontrata non solo dalla normale in M, ma eziandio da quella in M_2 posto dall'altra parte di M_1, in guisa che M_1M_2 differisca infinitamente poco dalla prolungazione della MM_1. Così continuando col pensiero verremo a tracciare sulla superficie una linea $MM_1M_2\ldots$, nella quale due punti infinitamente vicini apparterranno sempre ad una sezione principale, ed avranno perciò le normali che s'incontreranno. — Partendo dal punto M noi potevamo procedere anzichè nella direzione MA nell'altra MB, ed ottenere per tal guisa un'altra linea $MM'M''\ldots$ dotata della stessa proprietà della precedente. Inoltre pel punto M_1 abbiamo l'altra linea analoga $M_1M'_1M''_1\ldots$, e per M' anche la $M'M'_1M'_2\ldots$: dicasi lo stesso di tutti gli altri punti. — Per tal maniera la superficie è costituita da una rete di due sistemi di linee, le quali si tagliano ad angolo retto, e sono gl'inviluppi delle tangenti alle sezioni principali; esse furono dette dal Monge *linee di curvatura*. Egli osservò che il tratteggio di una superficie secondo le sue linee di curvatura sarebbe il più opportuno per presentarne una giusta immagine. Le linee di curvatura sono ancora più utili nelle Costruzioni architettoniche, dando la più conveniente separazione dei cunei di una cupola.

357. Nelle superficie sviluppabili vedemmo (§ 332) che un sistema di linee di curvatura è costituito dalle sviluppanti della linea di regresso; l'altro sistema è quello delle caratteristiche della superficie. — Per una superficie a due curvature, ossia non isviluppabile, ((S)) segniamo con (c) e con (c′) le linee di curvatura dell'uno e dell'altro sistema. Lungo ciascuna (c) le normali alla ((S)) formano una superficie sviluppabile (B), la cui linea di regresso (b) sarà una delle evolute della (c), e conterrà tutti i centri di curvatura delle se-

zioni principali della ((S)), che toccano la (c). Tutte queste (b) formeranno una superficie ((Σ)). — Similmente in ciascuna (c′) la ((S)) è tagliata ortogonalmente da una (B′) (della quale pure la (c′) è una linea di curvatura (§ 332)), e tutte le linee di regresso (b′) formano la ((Σ′)).

358. *La ((Σ)) luogo geometrico dei centri di curvatura di tutte le sezioni principali della ((S)), che toccano una delle linee di curvatura di un sistema, è anche l'inviluppo di tutte le superficie sviluppabili* (B′) *perpendicolari alla ((S)) lungo le sue linee di curvatura dell'altro sistema*. Infatti ciascuna (B′) contiene due normali alla ((S)), che sono tangenti a due infinitamente vicine fra le curve (b), le quali costituiscono la ((Σ)). — Siccome il piano osculatore della (b) ed il tangenziale alla (B′), e quindi anche alla ((Σ)), sono tra loro perpendicolari, perchè passano per le tangenti delle (c) (c′) e per la normale ad esse; così: *Ciascuna* (b) *che è quella particolare evoluta della linea di curvatura* (c), *che ha le tangenti normali alla ((S)), è una linea brevissima della superficie ((Σ)), cui appartiene.* — Similmente tutte le (B) toccano la ((Σ′)), e le (b′) ne sono sue linee brevissime.

359. Quando una normale alla ((S)) tocca in uno stesso punto le due (b) (b′) ad essa corrispondenti, in quel punto le superficie ((Σ)) ((Σ′)) si tagliano ortogonalmente; perchè i piani a loro tangenziali lo sono pure alle (B′) (B). Quella normale determina sulla ((S)) un punto di curvatura sferica. Se vi sia una linea, tutti i punti della quale abbiano tal proprietà, le corrispondenti normali alla ((S)) costituiranno una superficie sviluppabile (F), la cui linea di regresso (f) sarà comune intersezione delle ((Σ)) ((Σ′)); e la linea dei centri di curvatura sferica sarà una sviluppante della (f).

360. Un esempio delle due superficie ((Σ)) ((Σ′)) ce lo può presentare una sfera, ed un cono qualunque col vertice nel centro della sfera: la superficie ((S)) si otterrà descrivendo sopra un tangenziale del cono una sviluppante del circolo massimo della sfera, che sta su quel tangenziale; poscia immaginando che questo piano ruoti, senza strisciare, sulla superficie del cono. Le linee di curvatura saranno tutte quelle descritte

dai punti della sviluppante del circolo, e le successive posizioni di questa.

361. La proprietà di ogni linea di curvatura, che in due suoi punti infinitamente vicini le normali alla superficie si tagliano, può servire a determinare, senza bisogno di calcolo, tali linee su parecchie superficie. Così nelle superficie rotonde si vede che sono linee di curvatura le caratteristiche circolari, perchè le normali alla superficie nei punti di uno di tali circoli formano evidentemente un cono col vertice nell'asse della superficie. L'altro sistema di linee di curvatura è costituito dai meridiani, perchè essi tagliano perpendicolarmente tutti i circoli paralleli; ed è d'altronde evidente che le normali alla superficie non escono dal piano meridiano, e che esse si tagliano a due a due nei punti dell'evoluta del meridiano. — Più generalmente in ogni superficie-canale (§ 212) sono linee di curvatura le posizioni della generatrice piana, poichè le normali della superficie sono anche normali (§ 129) alla generatrice, attesochè il piano di questa è perpendicolare a tutte le direttrici; queste direttrici tagliano perpendicolarmente le generatrici, e formano perciò l'altro sistema di linee di curvatura.

362. Nelle superficie, che sono l'inviluppo di una serie di sfere (§ 212) i circoli caratteristici sono anche linee di curvatura; poichè le normali alla superficie tutto lungo uno di tali circoli s'incontrano nel centro della sfera inviluppata dalla superficie. Così il luogo di tutti i centri di quelle curvature principali è la linea descritta dal centro della sfera mobile.— Meritano particolare osservazione le superficie *ciclide* del Dupin, le quali sono gl'inviluppi di due sistemi di sfere; perlochè ambedue i sistemi delle linee di curvatura sono circoli caratteristici. La superficie anulare (§ 213) ne è un caso speciale. — Si abbiano due sezioni coniche accoppiate (§ 114) (Fig. 47), e descritta col centro F una sfera che, per fissare le idee, abbia il raggio r minore di FA, s'immaginino tutte le sfere, che hanno i centri M sull'ellisse ABA_1, e che toccano esternamente quella prima sfera, sicchè i loro raggi sieno $MF-r$, l'inviluppo di tutte queste sfere sarà una superficie *ciclida*.

Infatti la sfera, che ha il centro in un punto qualunque Φ dell'iperbola accoppiata all'ellisse, ed il raggio $=\Phi A-AF+r$, toccherà esternamente tutte le predette sfere, e quindi anche la superficie ciclida, giacchè è (§ 112) $MF+\Phi A-FA=(M\Phi)$. La stessa superficie sarà pur toccata e compresa nella sfera col centro Φ_1 ed il raggio $\Phi_1 A+AF-r$.

363. Si abbia attenzione di non confondere il raggio di curvatura principale in un dato punto di una linea di curvatura (c) col raggio di curvatura di questa linea; poichè il secondo è il raggio del circolo osculatore della (c), il primo è la lunghezza delle tangenti dell'evoluta (b), le quali sono nel piano normale alla superficie, che generalmente parlando è differente dal piano osculatore della (c). Così nel circolo caratteristico di una superficie rotonda il raggio di curvatura principale è la lunghezza delle normali alla superficie nei punti di quel circolo, le quali s'incontrano nell'asse. Invece il raggio di curvatura principale rispetto ad un punto del meridiano è identico col raggio di curvatura di questo; perchè il piano osculatore del meridiano coincide col piano normale alla superficie. — Quando una linea di curvatura è piana, o il suo piano è da per tutto normale alla superficie (e la curva è perciò una linea brevissima); od esso è da per tutto egualmente inclinato alla superficie: infatti le tangenti dell'evoluta posta nel piano stesso della linea di curvatura e le caratteristiche della superficie (B) normali alla superficie formano, come abbiamo notato al § 325, un angolo costante.

364. *L'elicoide retto* (§ 204) *ha in tutti i suoi punti le due curvature principali eguali e di opposte direzioni*. Infatti la generatrice dell'elicoide essendo perpendicolare all'asse dell'elica descritta da un qualunque suo punto è, per quel che vedemmo al § 196, la normale dell'elica; perciò il tangenziale dell'elicoide comprendendo la tangente e la normale dell'elica sarà il suo piano osculatore, cioè avrà con essa un contatto del secondo ordine. Dunque le due direzioni di curvatura nulla sono la generatrice dell'elicoide e la tangente dell'elica, le quali s'incontrano ad angolo retto; quindi (§ 354) i due raggi di curvatura principale sono tra loro uguali, ma opposti

di segno. Le linee di curvatura sono quelle che fanno angoli di 45° colle generatrici dell'elicoide.

365. Non mi arresterò a costruire le linee di curvatura dell'ellissoide non rotondo; esse sono linee del quarto ordine, ma hanno la proprietà, che su ciascuno dei tre piani diametrali principali dell'ellissoide si projettano in sezioni coniche. Ha luogo la singolarità che per ciascuno di quattro punti di curvatura sferica (*ombilics*) (pag. 122) passa una sola linea di curvatura: mentre nel punto di curvatura sferica che è vertice di una superficie rotonda passano infinite linee di curvatura. — Il Chasles mediante considerazioni geometriche dimostrò che *in ogni punto dell'ellissoide, le due linee di curvatura dimezzano gli angoli formati dalle tangenti alle due sezioni circolari* (§ 165), cioè dalle tangenti dell'ellissoide, che sono rispettivamente parallele ai tangenziali nei punti di curvatura sferica.

366. Lo stabilire un'unica misura della curvatura di una superficie, ossia cercare quella sfera, la cui curvatura è più conforme a quella della superficie, è problema che manca di precisione; essendochè la curvatura della superficie dipende da due elementi (raggi delle curvature principali) nè può paragonarsi a quella della sfera. Nulladimeno vi sono alcuni motivi per rassomigliare la curvatura di una superficie a quella di una sfera, che abbia per raggio la media armonica, oppure la media geometrica, tra i due raggi di curvatura principale. — Per quanto vedemmo al § 350 si è naturalmente indotto a prendere per *curvatura media* la semisomma dei valori inversi dei due raggi, e quindi assumere per raggio della sfera, la cui curvatura più si avvicina a quella della superficie, il medio armonico tra i due raggi delle curvature principali, cioè $\rho = 2rr' : (r + r')$ (*). Ed infatti, ponendo questa sfera a toccare la superficie, si trova che nei punti che hanno una data distanza infinitesima dal punto di contatto il maggiore dei loro allontanamenti, corrispondente ad una delle sezioni prin-

(*) Questa sfera di curvatura media fu anche da me proposta, fino dal 1828, in un articolo intorno alla Geometria descrittiva del Sereni.

cipali, è il minimo possibile: può eziandio notarsi che la somma algebraica di questi allontanamenti è nulla. — Delaunnay osservò che la superficie di *curvatura media* costante è quella che su un dato perimetro e con una data area racchiude il massimo volume; sicchè tal superficie rassomiglia sotto questo rispetto alla sfera. — Tra le superficie di curvatura media nulla vi è, oltre l'elicoide retto (§ 364), anche una superficie rotonda generata dalla rotazione della catenaria: ambedue presentano la minima area dentro un dato perimetro.

367. Sotto altro punto di vista si può dire che in un determinato punto la curvatura della superficie coi raggi principali r r' eguaglia quella della sfera il cui raggio P è medio proporzionale tra i due r r' presi collo stesso segno. Infatti Gauss e Rodrigue dimostrarono, mediante il calcolo integrale, che se due porzioncelle infinitesime della superficie e della sfera sieno tali che i loro punti corrispondenti abbiano le normali parallele, esse saranno equivalenti in area. Appunto come ciò avviene tra due porzioncelle di una curva e di un circolo, quando hanno la stessa curvatura. Il Gauss ed il Minding fecero palese l'importanza di questa *misura* ($1:\varrho=1:\sqrt{rr'}$) *della curvatura*, dimostrando che: *Quando una superficie si* spiega *sopra di un'altra, senza che avvenga nè fenditura nè raddoppiamento, in ciaschedun suo punto cangiano bensì i raggi delle curvature principali, ma non cangia la misura della curvatura.* — La misura della curvatura delle superficie sviluppabili è nulla in ogni punto, ed è per questo che esse possono spiegarsi su di un piano. — Le superficie che possono spiegarsi sopra di una sfera hanno in tutti i punti la curvatura di egual misura.

Nota ai Cap. II. e III. del Libro V.

Se sul tangenziale di una superficie partendo dal punto di contatto M si prendano le coordinate ortogonali x y, il valore della terza coordinata z di un punto M_1 della superficie potrà svilupparsi (ammenochè non si tratti di qualche punto singolare) secondo le potenze delle x y, e, trascurando i termini di

terzo grado, sarà $z=ax^2+bxy+cy^2$. — La sezione normale fatta nella superficie dal piano delle $x\ z$ è espressa dall'equazione $z=ax^2$, ed ha perciò il raggio di curvatura $=1:2a$. Per la sezione obbliqua, il cui piano passa per l'asse delle x, e forma con quello delle $x\ z$ il diedro φ, noteremo che il punto M_1 appartiene ad essa quando è $y=z\,\mathrm{tg}\,\varphi$, e potremo prendere come coordinate ortogonali in tal sezione la x e la $z:\cos\varphi=ax^2:\cos\varphi+bax^3\,\mathrm{tg}\,\varphi:\cos\varphi+$ ec. Quindi il raggio di curvatura della sezione obbliqua è $\cos\varphi:2a$; ciò costituisce il teorema del Meunier (§ 337, 352).

Nello stesso modo con cui, discutendo l'equazione generale delle linee del secondo ordine, si dimostra che, col sostituire alle $x\ y$ altre coordinate ortogonali, può sparire dal polinomio $ax^2+bxy+cy^2$ il termine bxy, si dimostra pure che, espresso (pag. 235) il punto M con $(0, 0, 0)$ potremo esprimere M_1 con $(x, y, x^2:2r+y^2:2r')$. Si rende per tal modo palese che ogni superficie ha un contatto del secondo ordine con un piano, — con un cilindro, — con un paraboloide ellittico, — o con un paraboloide iperbolico, — secondo che ambedue i raggi $r\ r'$ sono infiniti, — ne è infinito uno solo, — essi sono di egual segno, — o sono di segni opposti (§ 346).

Per la superficie sviluppabile che ha la linea di regresso $KK_1\ldots$ indicheremo, come nella Nota al Cap. I. (pag. 235), con $(x,\ x^2:2r-sx^3:6r^2t,\ x^3:6rt)$ il punto K_1 riferito all'origine delle coordinate ortogonali K. Il punto M_1 della superficie posto sulla caratteristica K_1M_1 alla distanza d da K_1 sarà espresso da

$$(d+x,\ dx:r+x^2:2r-dsx^2:2r^2t,\ dx^2:2rt).$$

E trasportando l'origine delle coordinate nel punto M determinato da $(d+\omega, 0, 0)$, il punto M_1 sarà espresso da

$$(x-\omega,\ dx:r+\text{ ec.},\ dx^2:2rt);$$

e se $\omega=x$, MM_1 sarà la sezione principale perpendicolare alla caratteristica KM. Possiamo considerare come ascissa di M_1 rispetto ad M la $X=dx:r+$ ec., e come ordinata la

$$Y=dx^2:2rt=rX^2:2dt,$$

quindi il raggio di curvatura principale sarà $dt:r$. Viene da

ciò che il raggio di curvatura principale della superficie è su ciascuna caratteristica proporzionale alla distanza del punto di contatto dalla linea di regresso; e per quanto dicemmo a pag. 237 si vede pure che il luogo di tutti i centri delle curvature principali è la superficie *rettificante* della linea di regresso KK_1...

Tornando all'espressione $(x, y, x^2:2r+y^2:2r')$ di un punto M_1 riferito ad un altro M, vedremo che la normale nel punto M_1 è parallela alla retta che unisce l'origine $(0, 0, 0)$ col punto $(-x:r, -y:r', 1)$. Perciò sulla sfera, che tocca in M la data superficie ed ha il raggio P, vi sarà il punto determinato da $(x\mathrm{P}:r, y\mathrm{P}:r', x^2\mathrm{P}:2r^2+y^2\mathrm{P}:2r'^2)$, in cui la normale sarà parallela alla precedente: le projezioni di questi punti corrispondenti sul tangenziale comune alla superficie ed alla sfera formeranno due figure tra loro affini, le quali saranno di egual area ogni qual volta sia $\mathrm{P}^2=rr'$. Con ciò si dimostra il teorema del Rodrigue (§ 367), poichè le differenze tra le aree infinitesime descritte sulle superficie curve e le loro projezioni sul tangenziale sono infinitesime del terzo ordine.

Se una porzione di superficie è concavo-convessa essa sarà limitata da una linea di curvatura, in tutti i punti della quale la curvatura sarà cilindrica. Su quella porzione di superficie vi saranno due sistemi di linee, ogni tangente delle quali sarà una direzione di curvatura nulla. Ciascun angolo compreso tra due di queste linee è dimezzato da una linea di curvatura

AGGIUNTE E CORREZIONI

A pag. 5 lin. 1 del CORREGGASI dal

A pag. 30 § 56 AGGIUNGASI

Noi abbiamo insegnato a determinare la distanza di due punti (Probl. III.), a descrivere la retta ec.

A pag. 34 lin. 15 AGGIUNGASI (perchè diretti verso i punti 3_h 6_h, che sono passati a distanza infinita).

A pag. 42 lin. 6 dell'angolo dato, CORREGGASI projettante quel lato.

A pag. 45 lin. 15 AGGIUNGASI

Per rettamente adoperare le date formule si prenda *ciascun angolo e ciascun diedro inferiore a due retti*; quindi se fosse superiore lo si sottrarrebbe da 360°. Gli angoli ed i diedri del triedro sieno inoltre tutti positivi. Si rammenti che il *seno è dello stesso segno dell'angolo*, — che *ogni angolo acuto ha il coseno positivo, e la tangente dello stesso segno dell'angolo*, — e che *ogni angolo ottuso ha il coseno negativo, e la tangente di segno opposto a quello dell'angolo.*

Inoltre è facile riconoscere che *i segmenti n N saranno positivi se il diedro B sia acuto, negativi se B sia ottuso;* così pure *i segmenti m M saranno positivi o negativi secondo che A sarà acuto od ottuso.*

La formula (1) adoperata nei casi 1.° e 2.° lascia dubbioso se A, oppure b, sia acuto od ottuso; e, se questo dubbio non sia tolto dal teorema che *al maggiore di due angoli si oppone diedro maggiore, e viceversa,* il problema ammetterà due soluzioni differenti, le quali nel caso 1.° si distingueranno l'una dall'altra mediante le precedenti regole relative ai segni dei segmenti.

Potrebbe anche servire l'altro teorema (che si deduce dal predetto colla considerazione del triedro adjacente ottenuto prolungando in verso opposto uno degli spigoli del triedro

dato): *Se la somma di due angoli è maggiore di due retti è lo stesso della somma dei due diedri opposti, e viceversa.* — Questi due teoremi insieme combinati faranno talvolta scorgere l'impossibilità di formare un triedro con tre elementi dati.

Nel caso 2.° occorrerà aver presente anche la regola, quale risulta dalle proporzioni (6) (8): *Secondo che a b sono della stessa specie (cioè ambedue acuti od ambedue ottusi) o di specie opposta (cioè uno acuto e l'altro ottuso) anche i due segmenti n m saranno della stessa specie o di specie opposta; dicasi lo stesso dei segmenti N M.*

Esempii calcolati con cinque decimali: 1.° Dati $a=50°$ $b=110°$ $B=120°$, si trova $n=-30°47',39$, $N=-44°55',8$, ed $A=44°54',5$ $c=86°24',57$ $C=66°53',81$. Se fossero dati $a=110°$ $b=50°$ $B=120°$, i due teoremi mostrerebbero l'impossibilità del triedro perchè darebbero $A>120°$ ed $A<60°$.

2.° Dati $A=130°$ $B=120°$ $a=160°$, si trova $n=-169°41',15$ $N=-148°26'$: poi si hanno le due soluzioni $b=22°44',8$ $c=175°13',87$ $C=169°16',07$; e $b=157°15',2$ $c=25°23',83$ $C=73°51',93$.

3.° Dati $a=50°$ $c=86°24',57$ $B=120°$, si trova $b=110°$ $A=44°54',58$.

4.° Dati $B=120°$ $C=169°16',07$ $a=160°$, si trova $b=22°44',83$ $A=130°$.

5.° Dati $a=113°$ $b=105°$ $c=126°$, si trova $A=134°0',08$ $B=130°59',5$ $C=140°47',1$.

6.° Dati $A=87°18',6$ $B=67°3',69$ $C=103°12',06$, si trova ec.

Negli angoloidi, ed in particolare nei triedri, dee considerarsi anche l'*ampiezza*, cioè il maggiore o minore spazio compreso tra le loro facce. Prendendo per unità delle ampiezze quella del triedro, che ha tutti i diedri e tutti gli angoli retti, è facile riconoscere che la somma delle ampiezze di tutti gli angoloidi formati intorno ad un vertice comune è espressa dal numero 8. — Per un celebre teorema del Cavalieri: *L'ampiezza di un triedro è espressa dall'eccesso della somma $A+B+C$ dei suoi tre diedri sopra due retti.* Infatti tutti gli

angoloidi, che potrebbero situarsi nei due spazii diedrici opposti compresi tra quei due piani del triedro, che formano il diedro A, eguagliano insieme $4A$; similmente i due spazii compresi tra i due piani, che formano il diedro B, hanno la somma $4B$, ed i due spazii compresi tra gli altri due piani del triedro sommano $4C$. Con leggero esame si riconosce che l'insieme di questi sei spazii diedrici supera la predetta somma 8 degli angoloidi formati intorno ad un punto, precisamente del quadruplo del dato triedro; poichè in quei sei spazii tal triedro è compreso tre volte, ed altrettante volte vi è compreso il suo uguale opposto al vertice (formato dalla prolungazione in verso opposto degli spigoli del triedro dato), mentre sì l'uno che l'altro triedro è compreso una sola volta in quella somma 8 degli angoloidi intorno ad un punto. Da ciò risulta tosto il teorema del Cavalieri.

Ne è un corollario che: *La somma dei tre diedri di un triedro supera due retti.* E passando al triedro supplementare (§ 69) si riconosce che: *La somma dei tre angoli è sempre inferiore a quattro retti.* Considerando un triedro adjacente, quale si ottiene prolungando in verso opposto uno degli spigoli del dato triedro, se ne deduce che: *La somma di due diedri è inferiore al terzo diedro accresciuto di due retti. La somma di due angoli supera sempre il terzo.*

Nell'angoloide triedro sembrami meritare d'essere indicato col nome particolare di *senoide* il prodotto dei seni di due angoli e del diedro intercetto, cioè

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \operatorname{sen} b .$$

Il senoide del triedro supplementare è $\operatorname{sen} B \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C =$ ec., e può dirsi *susenoide* del triedro primitivo. Il senoide è espresso mediante gli angoli, ed il susenoide mediante i diedri con formule molto analoghe a quella con cui l'area di un triangolo è espressa mediante i lati.

A pag.	47	lin.	19	D	CORREGG.	(D)
»	53	»	4	*osculari*	»	*osculatori*
»	59	»	5	degli assi	»	dei semiassi
»	61	»	5	$S'M'$	»	SM'
»	63	»	1	$I'P'$	»	IP'

A pag. 63 lin. 4 della parabola AGGIUNGASI
e $4.AF$ ne è il *parametro*.
» 63 » 8 $(IM)^2$ CORR. $(PM)^2$

Nella figura 46 pongasi la lettera S sull'asse A_1A in guisa che sia $SC=C\beta$.

A pag. 72 lin. 11 AGGIUNG. Veggasi il § 340.
» 75 » 19 (§ 106) CORR. (§ 105)
» 101 » 14 MN'_1M » MN'_1M_1
» 102 » 28,31 SI PONGANO TRA PARENTESI I QUATTRO BINOMII.
» 104 » 9 (AS,a) CORREGG. (AS,s)
» 115 » 27 *minima* » *massima*
» 142 » pen. BB' » BB_1
» 145 » 22 AGGIUNG.

Ciò dipende dal noto teorema d'Algebra

$$1+8+27\ldots+n^3=n^4:4+n^3:2+n^2:4\,.$$

Per dimostrarlo osserviamo che togliendo ad ambedue i membri il termine n^3, e mutando la forma del secondo membro, ne viene che quella equazione è esatta se lo sia la

$$1+8+27\ldots+(n-1)^3=(n-1)^4:4+(n-1)^3:2+(n-1)^2:4\,,$$

la quale non differisce dalla prima se non pel cangiamento di n in $n-1$. Collo stesso ragionamento vedremo che questa è esatta se lo è quella relativa ad $n-2$. Siccome procedendo in tal guisa si giunge al caso di $n=1$, ed allora l'equazione è identica; così ne dedurremo che la proposta è esatta per tutti i valori interi positivi del numero n. — Nella stessa maniera si dimostrano le formule adoperate precedentemente.

A pag. 192 lin. 13 (z_1) (z_3) CORR. (z_2) (z_3)
» 217 » 11 questioni, generali » questioni generali,
» 235 » 11, 13, 15 $\sqrt{a:c}$ » $\sqrt{c:a}$.

INDICE ALFABETICO

Abbracciante § 189, 276. — Accoppiate (Sezioni coniche) § 114, 362 pag. 121. — Affinità § 92, 101 p. 73, 225. — Alzato § 1. — Ampiezza di un angoloide o di un cono è proporzionale alla porzione di sfera col centro nel vertice che è compresa nell'angoloide o cono p. 258. — Anello vegg. Anulare. — Angoloide § 63 p. 43, 110. — Anulare (Superficie) § 213, 243, 346 p. 150, 154. — Apice comune p. 176, 180. — Archimedea (Spirale) § 205. — Aree, loro misura p. 143, 151. — Armonici (Punti, Centro, Conjugati, Omologia) p. 113, 177, 221, 224, 228. — Assi delle sezioni coniche e delle superficie § 98, 165 p. 114. Veggasi Omologia, ed Inversione. — Assintoti e Cono assintotico § 108, 181, 235.

Baricentro, o Centro di gravità, o Centro delle medie distanze p. 148, 153. — Bernoulli § 243. — Brevissime (Linee), o Geodetiche § 193, 325, 334, 358, p. 237. — Brianchon p. 175.

Cambrure p. 236. — Canali (Superficie) § 212, 361 p. 150, 152. — Caratteristiche (Generatrici) § 130, 188. — Cassiniane (Ellissi) § 243. — Catenaria § 366. — Cavalieri p. 258. — Centro § 95, 153, 165. — Centrobarica (Teoria) p. 152. — Chasles § 365, p. 223, 227, 228. — Ciclici (Piani) p. 115, 117, 119. — Ciclide (Superficie) § 362. — Cilindro e Superficie cilindrica § 131, 141, 160, 176, 229, 252, 254, 284, 296. — Circoli paralleli o caratteristici § 133. — Circolo § 34, 36, 50, 92, p. 77, 151. — Circoscritto (Cono) § 187, 276. — Classe di una curva è l'ordine della sua reciproca p. 168. — Collineazione p. 73, 111, 223. — Comune (Corda, o Secante, od Apice) p. 171, 176. — Concavo-convesse (Superficie) § 159, 173, 346. — Conjugati (Diametri) § 95, 98, 354. (Iperbole) § 114, 167, 348. (Direzioni, o Tangenti) § 353. — Cono e Superficie conica § 113, 132, 138, 160, 223, 235, 251, 257, 274, 284, 292, 300, 311 p. 112, 117, 223. — Cono-cuneo § 204. — Contatti § 121, 276. — Contingenza (Angolo di) § 129, 327 p. 236. — Continuità (Legge di) § 216, p. 171. — Contorno apparente § 134. — Convesse (Superficie) § 159, 173, 346. — Coordinati (Piani) § 6, 84. — Correlative (Figure), quelle stesse che noi diciamo derivate-polari. — Corrispondenti § 16, 41. — Curvatura cilindrica, o sferica § 346, 351, 359, 364, p. 122, 254. — Curvatura principale, e (Linee di) § 318, 332, 356, 361, 363, 365. — Curvatura media, e (Misura della) § 350, 366, 367. — Curvatura (Raggio, Centro, Asse di) § 121, 123, 129, 322, 326, 337, 340, p.

236. — Curvatura (Curve a doppia) § 89. Veggasi Gobbe. — Curvature (Superficie a due) § 221, p. 254. — Curve piane o gobbe § 89, 272, 319, p. 235.

Delaunnay § 342, 366. — Derivate-polari p. 112, 116, 225, 227. — Derivazione (Geometria di) § 2, p. 75, 116, 223. — Diametrali (Piani) § 165, p. 113. — Diametri § 95, p. 114. — Diedri § 57, 63. — Direttori (Piani) § 154, 198, 204. — Direttrici § 130, 198. — Direttrici delle sezioni coniche § 98, 107, p. 178, 223. — Disegno § 5. Distanza di due punti § 23, di due rette § 60. — Dualismo p. 112. — Dupin § 353, 362.

Eccentricità § 98. — Elica § 191, 194, 329, p. 238. — Elicoide rettilineo § 204, 364. — Elicoide sviluppabile § 194, 237. — Ellisse § 92, 112, 123, p. 77. — Ellissoide § 161, 163, 308, 365, p. 147, 150. — *Epure* § 5. — Equatore § 144. — Equipollente, e Metodo delle equipollenze § 82, 100, 123, p. 103, 153, 235. — Errore (Curve di) § 120, 275. — Eulero § 349. — Evolute, e (Superficie delle) § 124, 320, 321, p. 237. — Evolvente, veggasi Sviluppante.

Fascio p. 110, 224. — Fittizii (Punti) p. 172, 177, 180. — Focali dei coni p. 115, 223; delle superficie d. s. o. p. 121, 223. — Fochi § 98, 107, 111, p. 118, 177. — Fondamentali (Piani e Linea) § 6.

Gascheau § 206. — *Gauche* § 86, 149, 197. — *Gauche* (*Plan*), nome dato da alcuni al Paraboloide rettilineo. — Gauss § 367. — Generatrici § 130, 148, 154. — Genere delle curve o delle superficie § 159. — Geodetiche, così alcuni chiamano le linee brevissime descritte sulle superficie. — Gobbe (Curve), cioè non-piane § 89, 127, 272, 319. — Gobbe (Superficie), quelle che noi diciamo rettilinee § 197. — Grado, veggasi Ordine. — Grafiche (Proprietà) p. 73, 168. — Gravità (Centro di), veggasi Baricentro. — Guldino p. 150.

Hachette § 185.

Icnografia § 1. — Ideale (Secante od Apice) p. 172, 176, 179. — Inclinazione § 31, 59, p. 115. — Indicatrice § 353. — Intersezioni § 26, 36, 43, 46, 50, 215. — Inversione, e (Centro d') e Figure inverse p. 76, 116, 119, 227. — Inversione (Assi e Piani d') § 105, 228, p. 75, 224. — Inviluppo ed inviluppate § 124, 158, 188, 212, 311. — Inviluppo (Superficie) di sfere § 212, 363. — Involuzioni p. 74, 169. — Iperbola § 108, 111, 114, p. 77, equilatera § 351. — Iperboloide ad una falda o rettilineo § 146, 150, 162, 170, 244, 270, p. 121. — Iperboloide a due falde o convesso § 161, 166. — Ipotenusa (Faccia) § 87, (Angolo), quello di un triedro quando il diedro opposto è retto.

Lemniscata § 243. — Leroy p. vii. — Limiti (Punti) § 215, 280, p. 172. — Luogo geometrico § 54, 78.

Mediana (Sezione), quella intermedia ed equidistante tra le due basi parallele p. 145. — Medie distanze (Centro delle) p. 148. — Meridiani § 133, 144. — Metriche (Proprietà) p. 73, 168. — Meunier § 337, 352, p. 254. — Minding § 342, 367. — Minima distanza § 60, 209. — Monge p. vi, § 185, 356, p. 227.

Normale (Retta, o Piano) § 118, 127, 174.

Obbiettivi (Punti, Linee, ec.) § 4, 6. — *Ombilic* § 351, 365, p. 122. — Omografia p. 223. — Omologia, e (Centro, Asse, Piano di) § 102, 228, p. 33, 36, 73, 173, 224, 226. — Omotetiche (Figure) p. 36, 176, 225. — Ordine delle curve o delle superficie § 159, 168. — Orizzontale (Piano coordinato) § 4, 6. — Ortografia § 1, 4. — Osculatore (Circolo, o Piano) § 121, 128, 319.

Pani della vite § 207. — Parabola § 106, 123, p. 77, 151, 226. — Paraboloide iperbolico, ossia rettilineo § 154, 157, 162, 171, 200, 348, 351, p. 121. — Paraboloide ellittico, ossia convesso § 161, 168, 347. — Parametro della parabola è il quadruplo della distanza del foco dal vertice § 107, 347. — Pascal (Esagono del) p. 78, 175. — Passo dell'elica § 195, 330. — Permutazione dei piani coordinati § 84. — Piani numerati p. IX. — Pianta § 1. — Piramide, suo volume p. 146. — Polare (Derivazione, Retta, Piano) e Polo p. 125, 126, 220, 222. — Polare (Cono, Fascio, Triedro) § 69, p. 43, 112, 115. — Polare (Asse) o Linea dei poli, veggasi Curvatura (Asse di). — Poliedri § 81, 86, p. 143. — Poligono gobbo § 86. Area dei poligoni p. 143. — Poncelet p. 228. — Primario (Asse, o Diametro) § 110, 166. — Prisma p. 147, 149. — Profilo (Piano di) § 8. — Projettante (Retta, Piano, Cilindro) § 4. — Projettive (Proprietà) p. 111. — Projezione, e (Centro, e Piani di) § 4, 6, p. 73, 111, 224. — Prospettiva, e Figure prospettive § 3, p. 72, 76, 111, 168, 170, 173, 223. — Punteggiata p. 75, 112, 224.

Quadrilatero gobbo p. 91.

Radicale (Centro) di tre circoli, quello in cui s'incontrano le tre secanti comuni a due dei circoli (le quali si dicono anche assi radicali); è il punto Z della figura 17 § 55. — Rappresentazione § 10, 90. — Reciproche (Figure), e Reciprocità, e (Centro di) p. 112, 116, 179, 225, 226. — Regioni § 13. — *Reglées* § 185. — Regolari, cattiva denominazione equivalente a Rigate. — Regresso (Linea, o Spigolo di) § 186, 319. — Rettificante (Superficie) § 334, p. 237, 255. — Rettificazione approssimata § 126. — Rettilinee (Superficie) § 149, 159, 180, 197, 248, 266, 300. — Ribaltamento § 10. — Riduzione di un angolo all'orizzonte § 66. — Riga (Geometria della) p. 36. — Rigate, così furono chiamate le Superficie generate dal moto di una retta, sieno desse rettilinee oppure sviluppabili. — Risalto della vite § 207. — Rivoluzione (Superficie di), veggasi Rotonde. — Rodrigue § 367, p. 255. — Rotazione (Asse di) § 133. — Rotonde (Superficie) § 133, 143, 178, 212, 239, 257, 260, 266, 286, 292, 307, 312, 361. — Rovescie (Figure uguali e) § 208.

Sbieche (Superficie). Quelle che noi diciamo rettilinee § 197. — Secante comune p. 171. — Secondario (Asse e Diametri) § 110, 166. — Senoide di un triedro, così può chiamarsi il seno di uno dei suoi angoli moltiplicato pel seno dell'inclinazione sul suo piano dello spigolo opposto. Il volume di un tetraedro è la sesta parte del senoide di uno dei suoi triedri moltiplicata per le lunghezze dei tre lati che lo formano p. 259. —

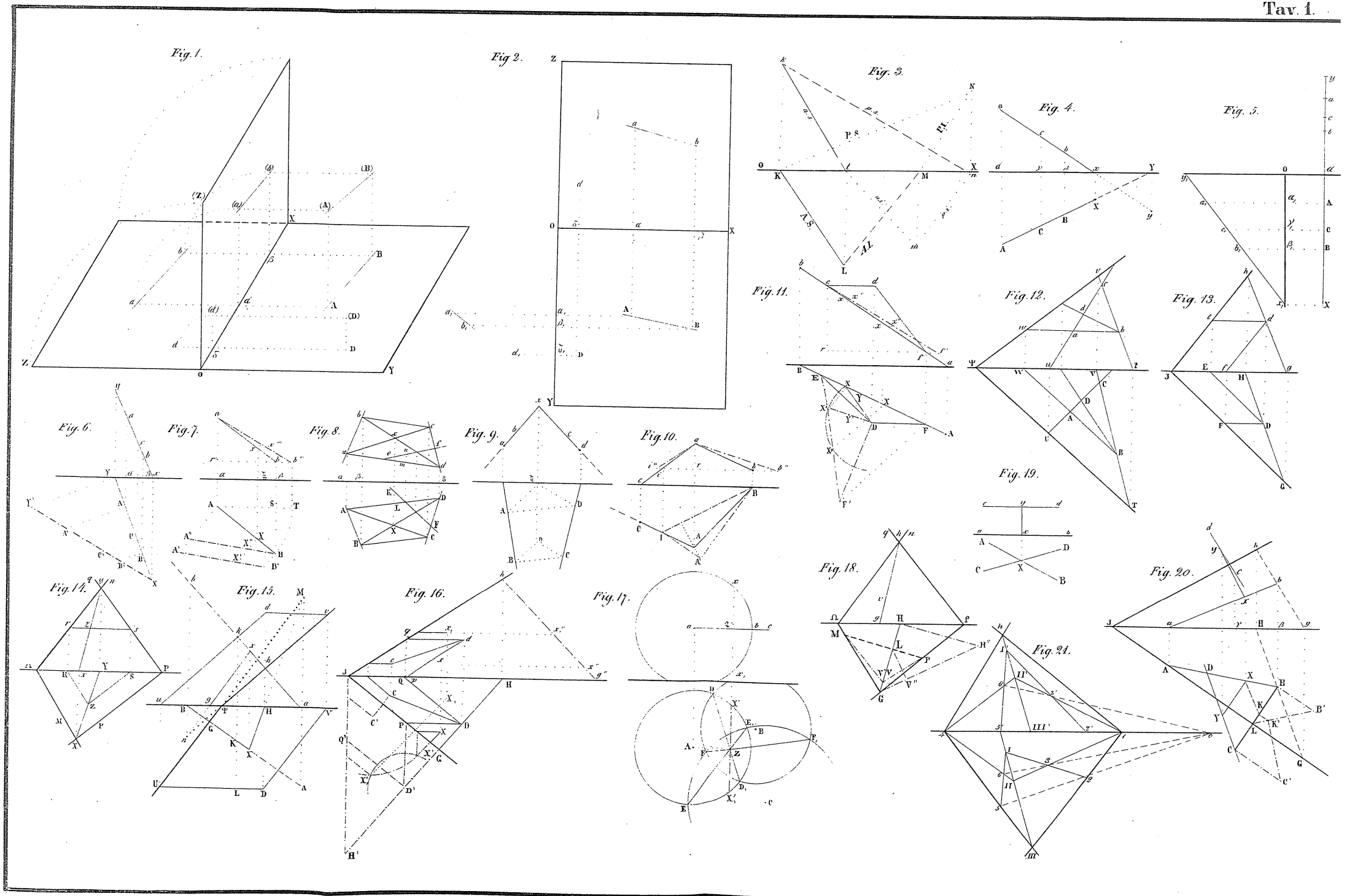
Sereni § 264, 366, p. 252. — Sezioni circolari § 165, 167, 365, p. 116, 119. — Sezioni coniche § 102, p. 76, 116, 168, 221. — Sezioni orizzontali (Metodo delle) § 43, 220-242, 255. — Sezioni principali § 335, 347. — Sfera § 78, 80, 136, 259, 268, 293, 304, 312, 323, 367, p. 147, 153, 237. — Similitudine, e (Centri di) § 316, p. 73, 176. — Simmetriche (Figure), veggasi Rovescie. — Simpson p. 146. — Sinusoide o Linea dei seni § 195, 231. — Solidità, veggasi Volume. — Sottangente § 107. — Specie delle curve e delle superficie § 159. — Spira dritta o rovescia § 208. — Stelle p. 75, 112, 224. — Storte (Superficie). Quelle che noi diciamo rettilinee § 197. — Stringimento (Linea di) § 209, p. 237. — Superficie curve § 130, 212. — Superficie d. s. o. (cioè del secondo ordine) § 159, 183, 263, 301, 308, p. 118, 121, 222, 224. — Supplementare (Triedro) § 69, p. 43. — Susenoide di un triedro = al prodotto del seno di un suo diedro pel seno dell'inclinazione dello spigolo di questo sulla faccia opposta; ossia senoide del triedro supplementare. Ciascuna faccia di un tetraedro è proporzionale al susenoide del triedro opposto; dunque (§ 86) ciascun lato di un quadrilatero gobbo è proporzionale al senoide del triedro, che ha gli spigoli paralleli agli altri tre lati p. 259. — Sviluppabili (Superficie) § 159, 173, 185, 222, 249, 256, 272, 282, 315, 319, 332, 342, 343, 367, p. 254. — Sviluppata, veggasi Evoluta. — Sviluppante § 124, 320, 360, p. 152. — Steiner p. 75, 110.

Tangente § 91, 99, 115. — Tangenziale (Piano) § 172, 276, 278, 302, 311. — Terra (Linea di) § 6. — Tetraedro § 77, 78, 80, 86, 87, 273. — Topografia § 275. — Toro § 213. — Torricelli p. 146, 151, 154. — Torsione, e (Raggio di) § 129, 319, 327, p. 236. — Tracce § 6, 9, 16, 37. — Trasformazione p. 227. — Triedro § 63, p. 43, 110. — Trigonometria sferica p. 43. — Trocoide, lo stesso che Sinusoide. — Tubi (Superficie-) § 212, 297, 362.

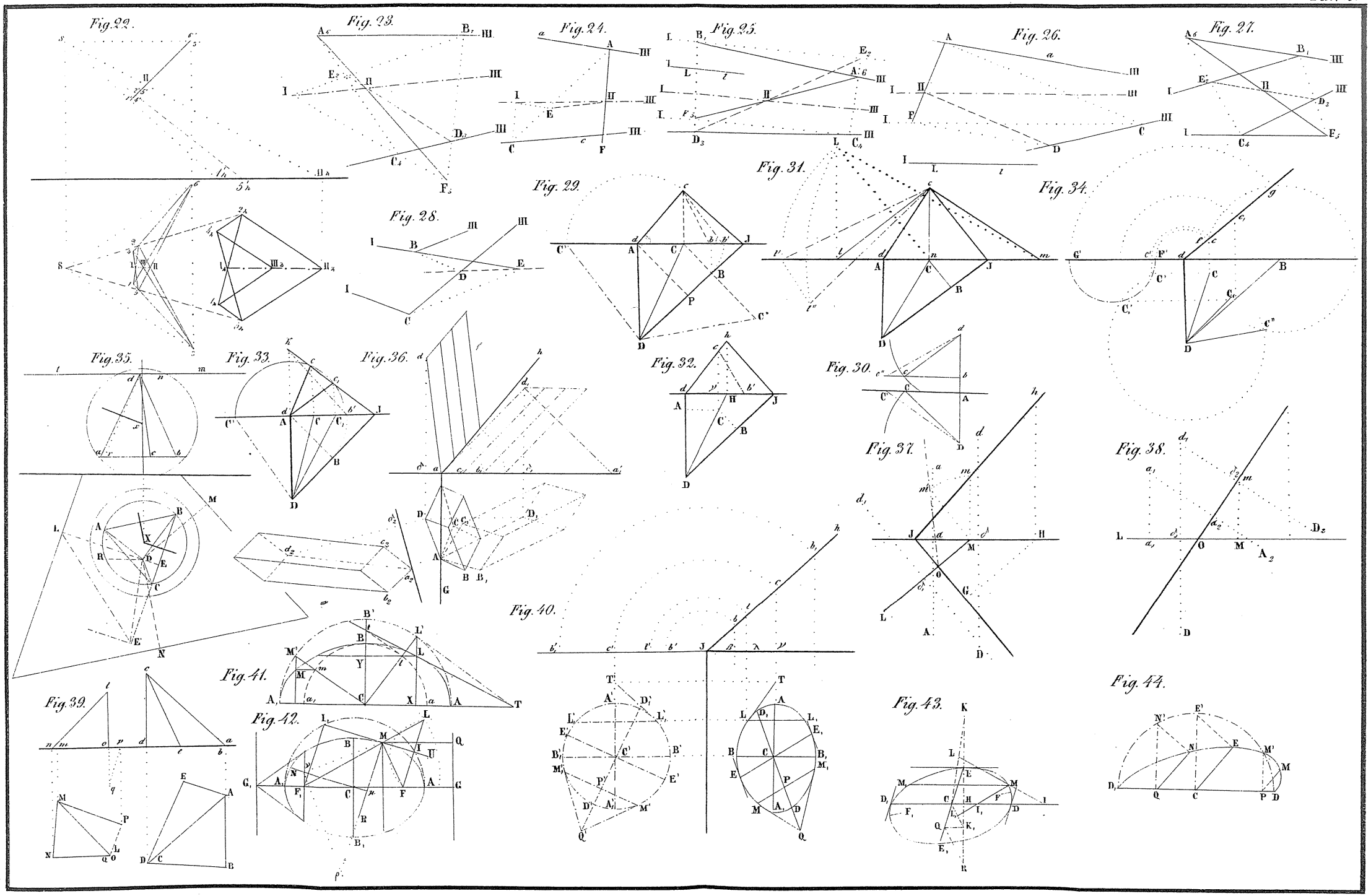
Vertice o Centro di un cono § 132. — Vertici delle sezioni coniche e delle superficie d. s. o., i punti dove sono incontrate dai loro assi, e nei quali hanno un contatto del 3.° ordine coi circoli osculatori. — Verticale (Piano coordinato) § 4, 6. — Vettori (Raggi) § 98, (Angoli) p. 115. — Vite § 207. — Volte (Intersezione di due) § 266. — Volumi, loro determinazione p. 143. — Wallis § 201.

FINE

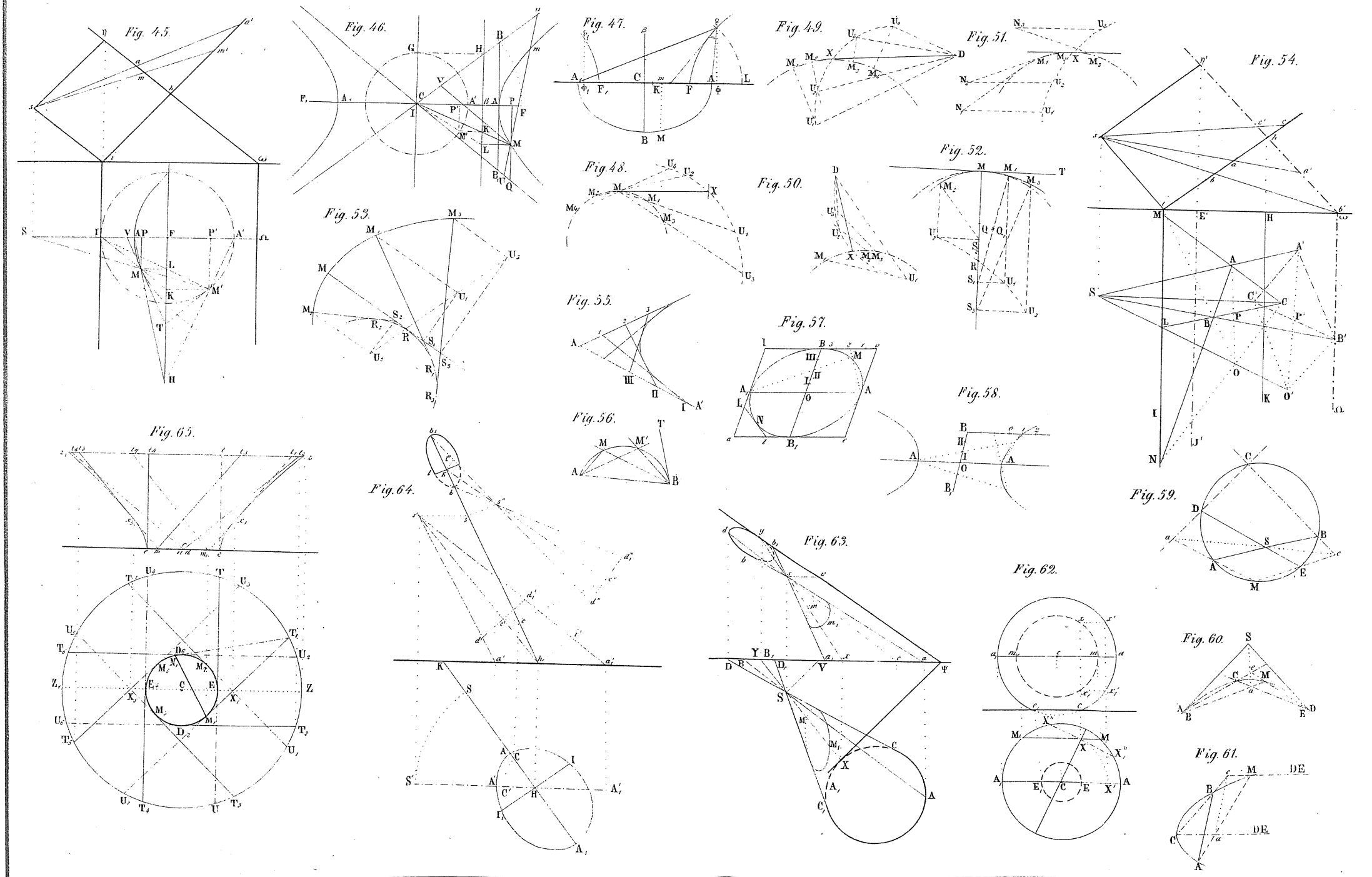
SCUOLA NORMALE SUP. BIBLIOTECA



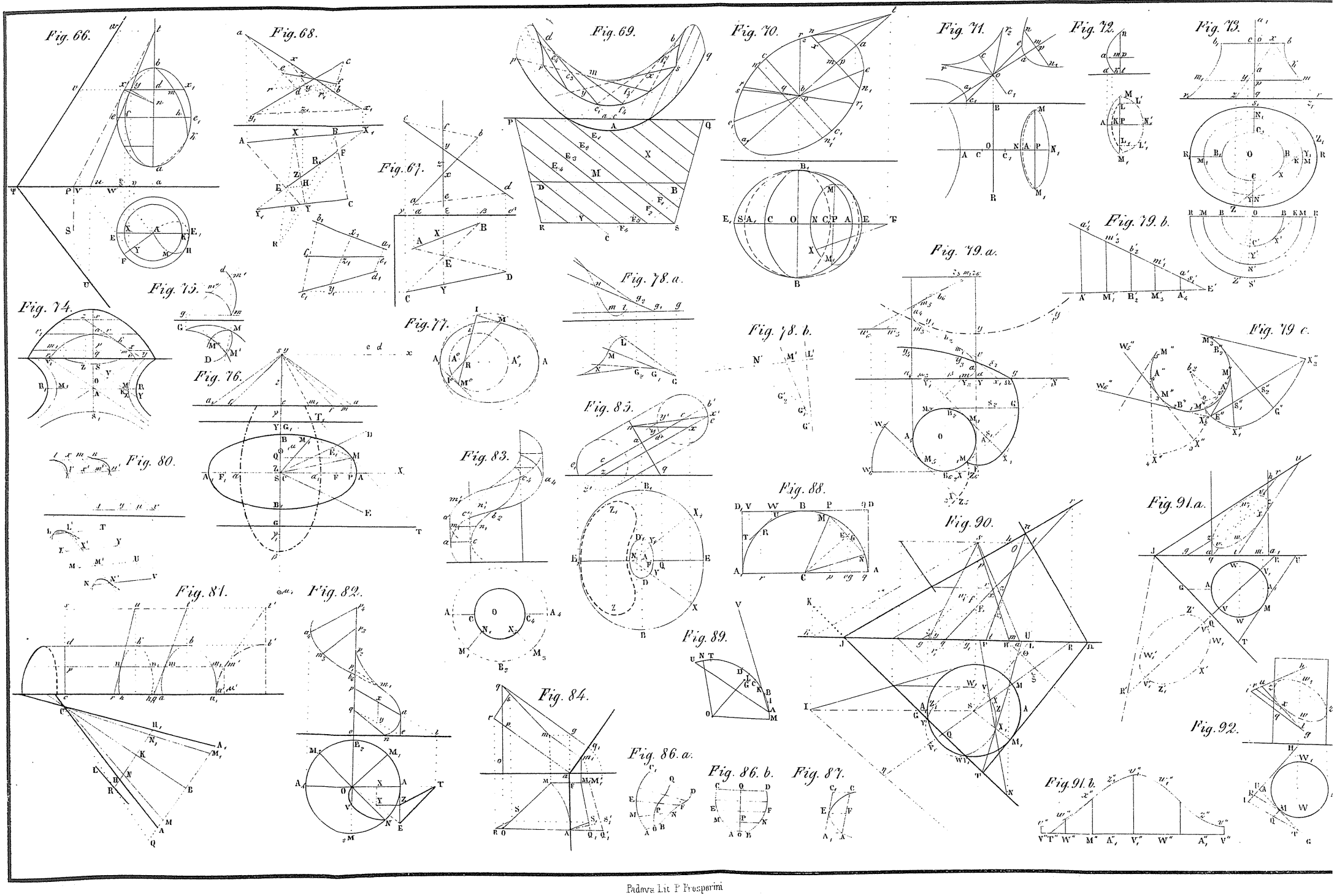
Padova Lit. Pietro Prosperini



Padova Lit. P. Prosperini



Padova Lit. P. Prosperini



Padova Lit. P. Prosperini

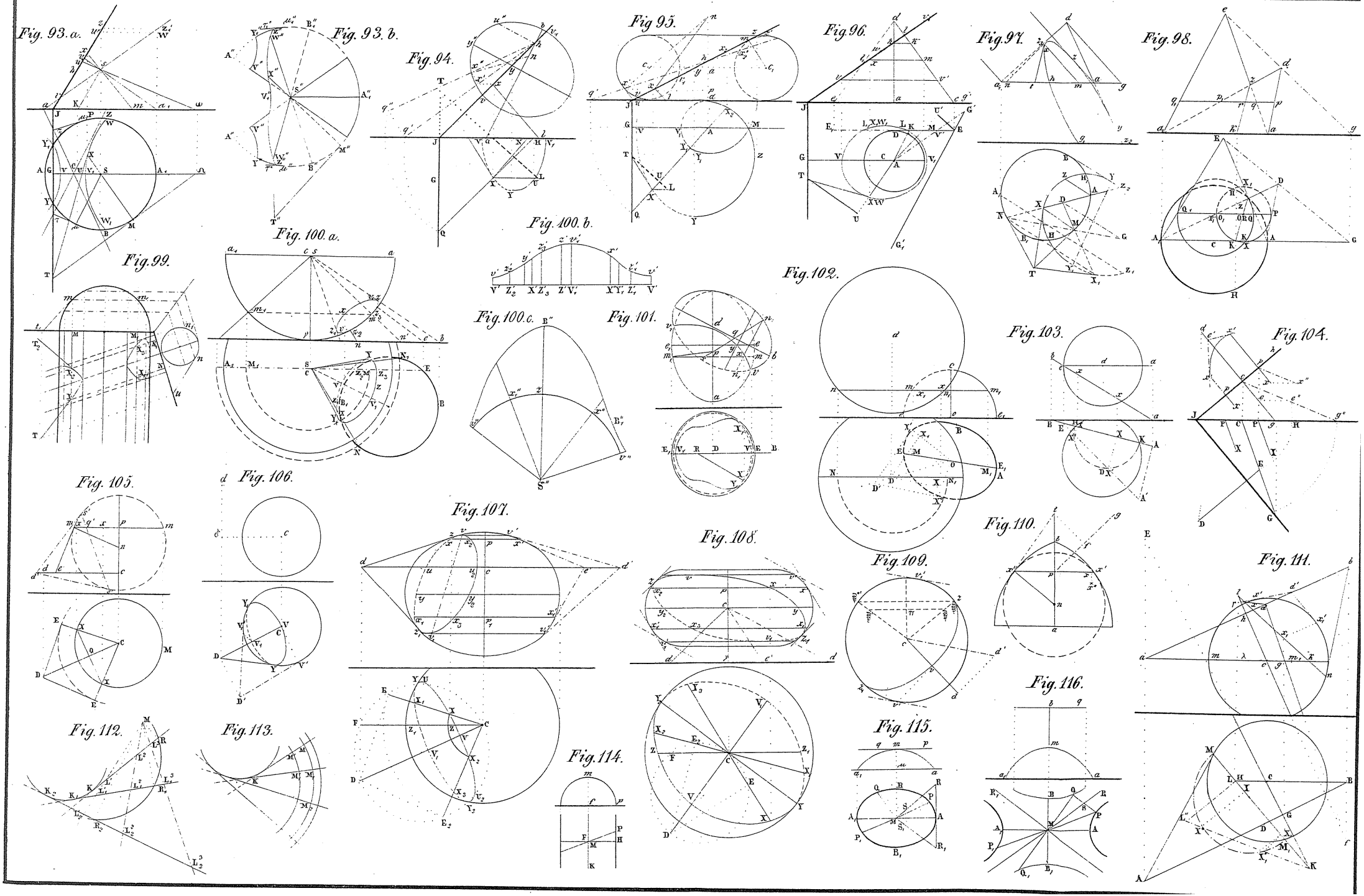


Fig. 93. a.
Fig. 93. b.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100. a.
Fig. 100. b.
Fig. 100. c.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.