7081

LEZIONI

DI

GEOMETRIA DESCRITTIVA

CON NOTE

CONTENENTI

I PRINCIPII DELLA GEOMETRIA SUPERIORE
OSSIA DI DERIVAZIONE,
E PARECCHIE REGOLE
PER LA MISURA DELLE AREE E DEI VOLUMI

DI

GIUSTO BELLAVITIS

PROFESSORE DI GEOMETRIA DESCRITTIVA NELL'UNIVERSITÀ DI PADOVA, MEMBRO EFFETTIVO DELL'IMP. REG. ISTITUTO VENETO, UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETÀ ITALIANA, SOCIO DELLE ACCADEMIE DI PADOVA, BOLOGNA, UDINE, E DEGLI ATENEI DI VENEZIA E BASSANO

PADOVA
COI TIPI DEL SEMINARIO
1841

L'autore intende di preservare il suo diritto di proprietà,
ovunque le leggi lo proteggano.

3.15

ALLA CARA ED ONORATA MEMORIA

DI CARLO CONTI

PER LE ALTE DOTI DELLO INGEGNO

E LE BELLE DEL CUORE

DESIDERATISSIMO

QUESTE PAGINE

DOLCE ED ACERBA RICORDANZA

DI COMUNI STUDII ED AFFETTI

CONSACRA

GIUSTO BELLAVITIS

PREFAZIONE

La più maravigliosa ed utile delle arti, — quella che toglie le distanze non solamente di spazio, ma sì ancora di tempo, — che trasfonde in noi le idee dei maggiori Ingegni non solo contemporanei, ma eziandio dei secoli già trascorsi, — quella senza cui ogni arte appena potrebbe esistere nonchè perfezionarsi, — la Scrittura — chiede bene spesso un necessario soccorso alla sua sorella maggiore, all'Arte del disegno. Poichè la parola, sì potente ad esprimere raziocinii e sentimenti, è non di rado inabile ad esprimere le forme; ed i modelli, che lo potrebbero compiutamente, mancano di quei vantaggi materiali, che sarebbero necessarii per porli in grado di accompagnarsi alla scrittura. Così egli è importantissimo problema quello di delineare in maniera facile e spedita sopra un *piano* tale disegno, che trasfonda in chi lo guardi l'idea dell'oggetto *a tre dimensioni*, che si volle rappresentare.

E dell'arte del disegno sentono continuamente il bisogno quasi tutte le arti e le scienze cosmologiche, e lo sente pure una scienza astratta quanto altra mai, cui la mente umana seppe a sè stessa creare, quale luminosa prova di sua rasso-

miglianza alla Suprema Mente Creatrice, voglio dire la Geometria. Poichè anche potenti intelletti di leggieri si smarrirebbero nei loro raziocinii geometrici senza la scorta di opportuna figura.

La Geometria descrittiva ha duplice scopo, offrire rigorosi principii al disegno rappresentativo, e dare le soluzioni dei problemi geometrici relativi alle figure dello spazio; essendo, sotto questo riguardo, continuazione e compimento della Geometria piana.

Parecchi principii della Geometria descrittiva erano qua e là sparsi nelle opere che aveano per oggetto la prospettiva, — l'esatto delineamento delle ombre, — il taglio delle pietre, — il tracciamento delle fortificazioni militari. Fu il Monge che seppe creare con questi elementi un nuovo ramo delle scienze matematiche.

Basterebbe accennare gli argomenti, a cui si applica la Geometria descrittiva, perchè se ne scorgesse l'importanza; se non che tutti i suoi pregi si compendiano nel dire, coll'illustre fondatore della scienza, che la Geometria descrittiva è il linguaggio degli Ingegneri: il linguaggio cioè di quegli uomini, le cui creazioni dettate dal genio, e le cui esecuzioni guidate da intelligente esattezza, contribuiscono sì maravigliosamente al ben essere della civile Società. — Nessun'epoca quanto la presente potrebbe a buon diritto chiamarsi l'epoca degli Ingegneri. Per loro nuove maniere di ponti furono sospese su fiumi profondi; ed altra volta quei fiumi furono con novello esempio valicati al di sotto delle loro acque. Dal seno della terra si trae, meglio che metalli preziosi ma poco utili, un minerale che sotto ignobile aspetto cela una forza prodi-

giosa; col suo mezzo gli Ingegneri danno vita ad opificii utilissimi, ed a quella mirabile macchina, che col rapidissimo corso, colla complicazione delle parti, e colla regolarità dei movimenti quasi si assomiglia a nuovo fortissimo animale, anzichè ad una umana produzione.

Quantunque la Geometria descrittiva conti poco più di mezzo secolo di vita, pure, per la sua importanza, parecchi trattati ne furono pubblicati presso ogni Nazione civilizzata. Quale scopo mi sia proposto nel pubblicarne un altro, mi sarebbe inutile il dirlo: a che io sia pervenuto, i Lettori lo giudicheranno. — Si vedrà che preferii alle altre l'opera del Leroy; spero che la massima parte delle teorie in essa trattate si troveranno qui comprese, e che nulladimeno questo mio lavoro non si giudicherà nè copia nè imitazione di alcun altro. — Di ogni problema diedi da prima la soluzione generale a sole parole e senza sussidio di figure; con ciò tentai esercitare la mente e l'immaginazione dello studioso, ed inoltre volli schivare quell'insegnamento per casi particolari, che in alcuni trattati fa perdere molte pagine a spiegare i problemi più semplici. Sempre inopportuno, talora impossibile, si è l'esaurire per casi particolari quello che si comprende in poche idee generali.

Perchè il libro fosse qualche cosa più che il testo di lezioni da potersi spiegare agli allievi Ingegneri (quali ordinariamente si presentano al secondo Corso dello studio matematico), aggiunsi alcuni saggi della Geometria superiore o di derivazione. Bramerei che essi valessero ad invogliare i Giovani di studii così generali e fecondi. Forse le Note presenteranno qualche interesse anche come raccolta di parecchi teoremi non affatto

comuni; e come compendiosa esposizione di formule di pratica applicazione, quali sono quelle della trigonometria sferica, e quelle per la misura dei volumi e delle aree.

Giustamente il Monge notò l'importanza di mostrare la corrispondenza tra la Geometria descrittiva e la Geometria analitica; ma ciò si riferisce al calcolo dei differenziali parziali, il quale non poteva entrare nel mio piano. Avrei stimato inopportuno dimostrare col calcolo quanto poteva ottenersi più speditamente colle considerazioni geometriche; ed anzi spiacemi di non aver sempre saputo raggiungere l'intento di rendere la Geometria descrittiva indipendente dalla analitica.

Ove nello scrivere non mi sia attenuto alle regole comunemente adottate per la nostra lingua, la colpa non fu della mia volontà. Riguardo al linguaggio geometrico credetti opportuni alcuni pochi cangiamenti, ed alcune aggiunte; chè in tanto progresso della scienza è mestieri progredisca anche il linguaggio: chieggo di esser giudicato non su qualche parola, ma su tutto l'insieme della nomenclatura. Questa apparisce più compiutamente dall'Indice alfabetico, di cui credetti opportuno corredare questo lavoro.

L'edizione è molto compatta, e spero che, sia per l'esecuzione tipografica sia per la scrittura, la materia si trovi maggiore di quanto lo mostri il volume. Anche le formule algebraiche occupano minore spazio del consueto, e ciò specialmente per l'uso dei due punti qual segno di divisione; il che forse le renderà meno chiare a chi è abituato all'altro segno; ma i calcoli per bene intenderli si deggiono scrivere. — Ed è ancora più necessario costruire da sè i *Disegni* di Geometria descrittiva; perlochè non si troverà grave difetto che le figure aggiunte a

queste lezioni sieno piccole e solo sufficienti all'intelligenza del testo. Chi vorrà imparare costruirà, seguendo quelle norme, dei Disegni grandi e particolarizzati. — In recentissimo Giornale si deplora che nella scuola politecnica di Parigi dall'origine della scienza fino al 1849 si sieno sempre copiati e ricopiati gli stessi *Disegni* (*Epures*), con quasi nessun altro studio dello Scolare.

Assistito da gentili amici procurai che troppi errori dei tipi o della penna non accrescessero agli Studiosi le oscurità, cui non avrò saputo schivare. Prego poi il Lettore di por mente alle correzioni ed aggiunte che stanno a pag. 257. — Sarò gratissimo a chi mi farà avvertito di qualche errore di qualsiasi fatta.

A chi ha sott'occhio l'opera col suo Indice è inutile parlare dell'ordine e della divisione degli argomenti; dirò nulladimeno che il primo Libro riguarda i punti, le linee rette ed i piani, — il secondo le linee e le superficie curve, — il terzo le mutue intersezioni di due o più superficie, — il quarto i loro contatti del primo ordine, — il quinto la curvatura delle linee e delle superficie.

Se verrà giudicato che in quest'opera i pregi non sieno soverchiati dai difetti, e che essa torni utile agli Studiosi, pubblicherò anche le applicazioni della Geometria descrittiva. Il primo Libro, che avrà per oggetto i modi di raffigurare i corpi mediante una sola projezione, conterrà anche il metodo delle sezioni orizzontali e dei *piani numerati* (*Plans cotés*); seguiranno le applicazioni — alla delineazione delle ombre — alla Gnomonica — alla Prospettiva lineare — alla Geografia — ed alla Stereotomia.

INDICE

DEI CAPITOLI E DELLE NOTE

LIBRO I. NOZIONI FONDAMENTALI E QUESTIONI RIGUARDANTI I PUNTI, LE RETTE ED I PIANI.

I. *Nozioni fondamentali, e convenzioni per rendere i disegni più espressivi* . . . . . Pag. 1

II. *Problemi elementari riguardanti i punti, le rette ed i piani* . . . . . » 13

Nota. *Teoremi e problemi sull'allineamento dei punti.* » 33

III. *Problemi relativi all'angoloide triedro* . . » 36

Nota. *Formule di triedrimetria ossia trigonometria sferica* . . . . . » 43

IV. *Problemi relativi ai poliedri, e ad altre figure composte di piani* . . . . . » 45

LIBRO II. DELLE LINEE E DELLE SUPERFICIE CURVE.

I. *Linee curve, loro tangenti, circoli osculatori, evolute ec.* . . . . . » 53

Nota. *Proprietà projettive delle sezioni coniche, e loro descrizione* . . . . . » 72

II. *Generazione delle superficie e loro descrizione grafica* . . . . . » 79

III. *Piani tangenziali alle superficie* . . . . » 104

Nota. *Proprietà dei coni del secondo ordine, loro focali, e focali delle superficie del secondo ordine.* » 110

IV. *Superficie sviluppabili ed Inviluppi delle superficie* . . . . . » 123

V. *Superficie rettilinee* . . . . . » 131

VI. *Di alcune altre superficie* . . . . . » 141

Nota. *Teoremi per la misura dei volumi e delle aree.* » 143

LIBRO III. INTERSEZIONI DELLE SUPERFICIE.
I. *Nozioni sui metodi da seguirsi* . . . Pag. 155
II. *Sezioni piane delle superficie sviluppabili* . » 159
Nota. *Principii della Geometria di derivazione; applicazione alle sezioni coniche* . . . . . » 168
III. *Sezioni piane delle superficie non isviluppabili.* » 181
IV. *Intersezioni di due superficie sviluppabili* . » 187
V. *Intersezioni di una superficie sviluppabile e di una non isviluppabile* . . . . . » 191
VI. *Intersezioni di due superficie non isviluppabili.* » 193
VII. *Intersezioni di una linea e di una superficie, oppure di tre superficie* . . . . . » 196

LIBRO IV. DEI CONTATTI. . . . . » 201
I. *Tangenziali ad una superficie per un punto dato fuori di essa, e coni o cilindri circoscritti.* » 202
II. *Tangenziali passanti per una data retta.* . » 212
III. *Tangenziali a due o più superficie, e loro inviluppo.* . . . . . » 217
Nota. *Poli e polari, e varie leggi di derivazione.* . » 220

LIBRO V. CURVATURE DELLE LINEE E DELLE SUPERFICIE . » 229
I. *Curvatura delle linee gobbe* . . . . . » 230
Nota. *Calcoli relativi* . . . . . » 235
II. *Curvatura delle superficie sviluppabili* . . » 238
III. *Curvatura delle superficie a due curvature* . » 244
Nota. *Dimostrazioni dei precedenti teoremi mediante il calcolo* . . . . . » 253

Aggiunte e Correzioni . . . . . » 257
Indice alfabetico . . . . . » 261

LIBRO I.

NOZIONI FONDAMENTALI E QUESTIONI RIGUARDANTI I PUNTI, LE RETTE ED I PIANI.

CAP. I.

Nozioni fondamentali e convenzioni per rendere i disegni più espressivi.

1. Quando voglia rappresentarsi un corpo od una qualunque figura dotata di tutte tre le dimensioni, e non si possa presentare un esatto modello, bensì soltanto un disegno fatto sopra un piano, è palese che non si conseguirà lo scopo se non se ammettendo alcune convenzioni, mediante le quali chi osservi il disegno possa raffigurarsi l'oggetto che con esso si volle rappresentare. Le vedute prospettiche sono all' uopo insufficienti, poichè quantunque guardando un quadro od una prospettiva talvolta si scorga con tutta chiarezza come si suppongano disposte le figure umane, le fabbriche e gli altri oggetti che vi sono delineati, ciò dipende dalla conoscenza che noi abbiamo delle forme naturali di quegli oggetti; ma se invece in una prospettiva sia disegnato un corpo di una forma a noi ignota, non potremo intendere qual sia questa forma, e ciò tanto più supponendo il disegno a semplici contorni, cioè senza colori ed ombre. — Quanto non può aversi dalla prospettiva si ottiene per altra via, e specialmente mediante due disegni: gli Architetti per rappresentare una fabbrica costumarono sempre di darne separatamente la *pianta* altrimenti detta *icnografia*, e l'*alzato* ossia *ortografia*; ed appunto col mezzo di una icnografia e di una ortografia la *Geometria de-*

scrittiva insegna a rappresentare compiutamente qualunque figura dotata delle tre dimensioni.

2. Lo scopo della Geometria descrittiva è pertanto offrire un linguaggio con cui si possa mediante disegni piani far nascere in chi li osserva l'idea del corpo che si volle rappresentare: ma perchè questo linguaggio sia compiuto bisogna non solo saper intendere qual sia la forma dell'oggetto rappresentato, e viceversa saper rappresentare un dato corpo qualunque; bisogna eziandio conoscer le regole per disegnare una figura che non si abbia presente, e della quale soltanto si conosca la relazione di posizione in cui deggiono stare le varie parti; — bisogna saper aggiungere altre parti che con quelle già disegnate abbiano date relazioni; — bisogna finalmente saper dedurne tutte le dipendenze geometriche fra le parti della figura rappresentata. — Così, per esempio, non basta saper rappresentare un prisma che si abbia tra le mani, e saper intendere qual prisma sia dalla figura rappresentato; bisogna eziandio saper descrivere un qualunque prisma solo che se ne conosca per definizione la forma e la posizione; bisogna saper aggiungere il cilindro circoscritto al prisma, ec.; bisogna saper trovare sotto qual inclinazione si taglino le facce del prisma già descritto, ec. ec. — Siccome l'oggetto principale della Geometria descrittiva si è di rappresentare quelle figure che, per la semplicità e precisione delle regole con cui sono formate, soglionsi dire geometriche; così la Geometria descrittiva, mentre è un'arte che serve di necessario compimento al Disegno lineare, è molto più una continuazione della Geometria elementare; essa insegna a risolvere mediante la riga ed il compasso, operando sopra un solo piano, i problemi riguardanti lo spazio; colla rappresentazione delle figure a tre dimensioni essa dà occasione di studiarne le proprietà. La considerazione di tali figure ed il loro uso nello studio delle figure a due sole dimensioni diede origine a vastissima ed elegante parte della Geometria, che frutto quasi esclusivo dei Geometri del secolo presente è una mirabile continuazione della Geometria sintetica dovuta al genio di venti e più secoli; mirabile specialmente in ciò che, in luogo delle astruse vie

di questa, offre strada facile, nella quale quasi per intuizione nuove verità si discoprono. Spero che non farò cosa inutile uscendo una qualche volta dai limiti comunemente attribuiti alla Geometria descrittiva per far qualche cenno di questa nuova Geometria *di derivazione*.

3. In quanto alle applicazioni della Geometria descrittiva vedremo che quella Prospettiva, che dicemmo insufficiente a rappresentare compiutamente i corpi, trae tutte le sue teorie dalla Geometria descrittiva, che ne è il più naturale e conveniente fondamento; si esporranno perciò i principii generali che servono a descrivere le figure prospettiche, e si dimostreranno le regole pratiche che si sogliono adoperare per abbreviare tal lavoro. — Una parte essenzialissima della Prospettiva, e quindi anche della Pittura, si è la teoria delle ombre, della quale pure si esporranno i principii che servirebbero alla loro esatta descrizione, se troppo lungo non ne fosse l'impiego rigoroso; ma che in ogni caso gioveranno a dirigere utilmente quella pratica che si acquista colla ragionata osservazione e col ben regolato esercizio. — Dopo che l'Architetto ha determinato quali forme debbano avere le parti di una fabbrica, e specialmente gli archi e le volte, perchè meglio soddisfacciano al doppio scopo della solidità e della bellezza, bisogna formare le sagome o modelli, secondo i quali debbono tagliarsi le pietre perchè formino le progettate costruzioni perfettamente tra loro combaciando: questa è un'altra applicazione della Geometria descrittiva; cioè dopo avere espresso col linguaggio in questa scienza adottato la vera figura di tali pietre, bisognerà insegnare a costruirne le varie facce, ed indicare all'Artigiano le norme da seguirsi per tagliare le pietre all'uopo occorrenti.

4. Vediamo ora in qual modo mediante due disegni, cui rassomigliammo alla pianta ed all'alzato, usati dagli architetti, si possa rappresentare la forma e la posizione di un oggetto posto comunque nello spazio. S'immagini un piano orizzontale e sopra di esso si *traccino* in primo luogo tutti i punti o linee che appartengono alla figura che vuol rappresentarsi, e che realmente si trovano compresi in quel piano: così avre-

mo formato ciò che dagli Architetti si direbbe la pianta dell'oggetto: ma in tal guisa rimarrebbero affatto ignote tutte le parti della figura che stanno fuori del predetto piano orizzontale (quando per caso non cadessero nel piano verticale, di cui or ora parleremo). Ci bisogna dunque trovar modo di delineare nell'assunto piano orizzontale anche ciò che sta fuori di tal piano: da ogni punto della figura che vogliamo rappresentare s'immagini calata una perpendicolare su quel piano orizzontale; il piede di tal perpendicolare (ossia il suo incontro col piano) lo diremo la *projezione* di quel punto: questa projezione non è sufficiente ad individuare, cioè a pienamente determinare, il punto di cui si tratta, poichè tutti i punti della predetta perpendicolare hanno la medesima projezione. Vedremo ben presto come si giunga a tale individuazione; intanto stabiliamo di chiamare *obbiettivo* il punto che vogliamo rappresentare, *retta projettante* la perpendicolare da esso abbassata, ed *icnografia* del punto la sua projezione sul piano orizzontale. Se nella figura posta nello spazio siavi una retta, dovremo immaginare che da tutti i suoi punti sieno abbassate le rette projettanti, ed i piedi di queste costituiranno la projezione od icnografia della retta; quelle projettanti saranno tutte comprese nel piano condotto per la retta perpendicolarmente all'orizzonte, piano che noi diremo il piano *projettante*, e l'icnografia della retta, essendo l'intersezione del piano projettante col piano orizzontale, sarà essa pure una retta. In ugual modo l'icnografia di una qualunque curva obbiettiva sarà costituita dalle icnografie di tutti i punti di quella: tale icnografia o projezione sarà, generalmente parlando, una curva, e tutte le rette projettanti costituiranno una superficie che dicesi *cilindrica* nel più generale significato della parola, e che noi chiameremo *cilindro projettante*: se per altro la curva obbiettiva fosse tutta in un piano perpendicolare al piano orizzontale, il cilindro projettante si ridurrebbe ad un piano, e la projezione della curva sarebbe una retta.

Per tal maniera possiamo immaginare che sul piano orizzontale sieno disegnati tutti i punti e tutte le linee della proposta figura; ma questo disegno non ci insegna quali sieno le

distanze dei punti obbiettivi del piano orizzontale, ossia le lunghezze delle rette projettanti; noi conseguiremo il nostro intento di pienamente determinare la figura obbiettiva, mediante una seconda projezione di tutta la figura sopra un piano perpendicolare al piano orizzontale, che noi diremo il *piano verticale*. Vale a dire, immagineremo che da tutti i punti della figura sieno condotte delle nuove rette projettanti tutte perpendicolari al piano verticale, ed i loro piedi costituiranno la *ortografia* della figura. Queste due projezioni eseguite sopra due piani ortogonali, che dicemmo l'uno orizzontale, l'altro verticale, non sarebbero ancora sufficienti a far conoscere la figura; bisogna in primo luogo saper distinguere le due projezioni che trassero origine da un medesimo punto, onde per caso non credere appartenenti ad uno stesso punto obbiettivo l'icnografia di un punto e l'ortografia di un altro; ciò si ottiene indicando tali projezioni con una medesima lettera, che si fa majuscola nel piano orizzontale, e minuscola nel verticale; bisogna inoltre conoscere la rispettiva posizione che dee darsi ai disegni contenenti le eseguite projezioni. — La disposizione più naturale sarebbe di porre i due disegni l'uno perpendicolare sull'altro nella stessa posizione in cui si trovavano quando su di essi furono descritte le due projezioni; ma in tal guisa non si raggiungerebbe lo scopo di servirsi di un solo piano, e malagevoli sarebbero le operazioni da eseguirsi su questi due disegni tra loro perpendicolari: per toglierli il meno possibile dalla loro naturale posizione, si supponga che uno di essi, per esempio il verticale, giri intorno alla loro comune intersezione, finchè venga ad applicarsi nello stesso piano in cui si trova il piano orizzontale; così i due disegni saranno ormai posti in uno stesso piano, e per la stretta connessione che tra loro esiste, e che or ora avremo occasione di osservare, potranno considerarsi come costituenti un solo *Disegno*.

5. Ecco a che si riduce tutto questo processo. S'immaginino due piani perpendicolari OXY, $OX(Z)$ (Fig. 1) che potremo supporre il primo orizzontale, il secondo verticale; da tutti i punti (D), (A), (B), ec. della proposta figura si consi-

derino abbassate su quei piani le perpendicolari (*rette projettanti*) $(D)D$, $(D)(d)$, $(A)A$, $(A)(a)$, $(B)B$, $(B)(b)$, ec., così il punto (D) darà le due projezioni D, (d), la retta $(A)(B)$ darà le due projezioni AB, $(a)(b)$, ec. Poscia si supponga che il piano $OX(Z)$ con tutta la projezione in esso disegnata giri intorno alla OX fino a prendere la posizione OXZ sullo stesso piano in cui si trova OXY. Questi due piani OXY OXZ colle projezioni in essi descritte si trasportino nella Figura 2 e si avrà ciò che dicesi un *Disegno* (*Epure, Figur*) di Geometria descrittiva. Si ometteranno le linee che chiudono i quadri dei due primitivi disegni, ma si conserverà la retta OX che separa i disegni, ossia le projezioni fatte originariamente sopra due piani differenti, della cui essenziale importanza ci convinceremo quando indicheremo il modo di adoperare questo complessivo *Disegno* (Fig. 2).

6. Ora premettiamo alcune denominazioni, delle quali ci serviremo, unendovi i sinonimi usati da varii autori, che gioveranno alla più immediata intelligenza delle loro opere. — I piani su cui si fecero le due projezioni si dicono *piani coordinati* (*piani di projezione, piani fondamentali, Grundebenen*), e conservano rispettivamente le qualificazioni di *orizzontale* e *verticale* anche quando hanno presa la posizione della Fig. 2. L'intersezione OX dei due piani coordinati dicesi *linea fondamentale* (*linea di terra, Projectionsaxe, schlechtweg Axe, Grundlinie*). Il punto D, la retta AB, ec. (Fig. 2), che dicemmo *icnografie*, si sogliono chiamare *projezioni orizzontali*; similmente le ortografie d, ab, ec. si dicono *projezioni verticali*; e con queste abbreviate espressioni s'intendono projezioni sul piano coordinato orizzontale o sul verticale. Quel punto, quella retta, ed in generale tutte le parti della proposta figura, delle quali il disegno presenta soltanto le projezioni, si dicono *punto, retta* ec. *obbiettivi*. Le rette ed i piani che uniscono i punti e le rette obbiettive coll'una o coll'altra delle loro projezioni li abbiamo già chiamati *rette* e *piani projettanti*. — Se dal punto obbiettivo (D, d), cioè dal punto che ha le projezioni D d, si abbassa la perpendicolare $(D)\delta$ sulla linea fondamentale OX, il suo piede δ dicesi *proje-*

zione sulla fondamentale del punto (D, d). — Se una linea obbiettiva, retta o curva incontra i piani coordinati, i punti di intersezione si dicono le sue *tracce*, distinguendole in *orizzontale* ed in *verticale* secondo che si trovano nell' uno o nell' altro dei piani coordinati. Diremo in seguito come si rappresentino i piani e le superficie curve; intanto noteremo che se un piano od una qualunque superficie taglia i piani coordinati, le intersezioni sono le *tracce orizzontale* e *verticale* del piano o della superficie.

7. Per interpretare il disegno (*épure*) espresso dalla Fig. 2, basterà por mente alla Fig. 1 da cui esso dipende, ed alle cose superiormente insegnate. Riconosceremo in primo luogo che le due projezioni $D.d$ di uno stesso punto qualunque sono sempre situate sopra una medesima retta perpendicolare alla linea fondamentale OX; infatti la projezione δ del punto obbiettivo sulla fondamentale dovrà trovarsi tanto abbassando su questa linea la perpendicolare $D\delta$, quanto abbassando la $d\delta$. Intenderemo poi facilmente che il punto obbiettivo che ha le projezioni $D\ d$ è situato sulla perpendicolare al piano orizzontale elevata sul punto D, e che la lunghezza di questa perpendicolare, ossia la distanza del punto obbiettivo dal piano coordinato orizzontale è uguale alla distanza $d\delta$ della projezione verticale dalla linea fondamentale. Similmente la distanza del punto obbiettivo (D,d) dal piano coordinato verticale, è uguale alla distanza $D\delta$ della sua projezione orizzontale dalla fondamentale. S'intenderà pure che un punto che ha la projezione verticale sulla fondamentale coincide colla propria projezione orizzontale, ossia icnografia; e che la projezione verticale, ossia ortografia, è la stessa cosa del punto obbiettivo, quando la projezione orizzontale di questo cade sulla fondamentale. — Le due projezioni di uno stesso punto si distinguono per essere segnate con lettere omonime, ed anche per essere insieme unite mediante una linea punteggiata sempre perpendicolare alla fondamentale. Per altro, onde rendere meno confuse le figure, spesso si ometteranno queste linee di unione fra le projezioni di uno stesso punto, giacchè è facile immaginarle: nella pratica costruzione dei disegni non si

dovrà mai tralasciare di tirarle, od almeno di provare se esse sieno realmente perpendicolari alla fondamentale; ciò servendo di verificazione dell'esattezza dei punti di projezione trovati in altro modo.

8. In qualche raro caso potrà rendersi necessario di considerare la projezione della figura obbiettiva sopra un terzo piano coordinato perpendicolare ai due piani di projezione; noi lo chiameremo *piano di profilo*; e supporremo che esso fosse originariamente elevato sopra la OY perpendicolare alla fondamentale OX, che esso fosse cioè il piano $YO(Z)$ della Figura 1, e che abbia girato intorno a questa OY fino ad adagiarsi sul piano, su cui fu già ribaltato il coordinato verticale. — Quando si conoscano le due prime projezioni di una figura, si potrà facilmente dedurne la projezione sul piano di profilo; infatti conducendo da ciascun punto A (Fig. 2) della projezione orizzontale la perpendicolare $A\alpha_1$ sopra la seconda linea fondamentale OY dimostreremo come precedentemente che la cercata projezione di profilo a_1 dovrà trovarsi sulla prolungazione di questa $A\alpha_1$, e precisamente nel punto che si determina, facendo $\alpha_1 a_1$ eguale alla distanza αa del punto obbiettivo dal piano orizzontale.

9. Un piano che taglia i due piani coordinati sarà pienamente determinato mediante le sue due *tracce*, le quali non potranno incontrarsi che in un punto della fondamentale, cioè nel punto in cui essa è tagliata dal piano proposto; che se le tracce saranno tra loro parallele lo saranno anche alla fondamentale, ed apparterranno ad un piano parallelo esso pure alla fondamentale. Se il piano proposto è parallelo ad uno dei coordinati non avrà su questo alcuna traccia, e la sua traccia sull'altro piano coordinato sarà parallela alla fondamentale. Tutte queste cose facilmente s'intenderanno supponendo che i piani coordinati riprendano la posizione perpendicolare che avevano originariamente (Fig. 1).

10. Le due projezioni di una linea o di altra porzione di una figura indicano bensì qual sia la posizione di tutti i suoi punti, ma non presentano, generalmente parlando, una giusta idea della sua grandezza e forma: infatti, eccettuato il caso

che la linea sia parallela ad uno dei piani coordinati, le projezioni sono minori della linea obbiettiva; ora riesce bene spesso importante di conoscere e di descrivere la vera grandezza dell'oggetto raffigurato dalle due projezioni; se l'oggetto non fosse piano questa esatta descrizione sarebbe impossibile, perchè le nostre figure sono sempre disegnate sopra un piano: ma quando la linea o la porzione di figura è tutta posta in un piano potremo descrivere, coi processi che saranno in seguito indicati, una figura ad essa precisamente uguale, che noi diremo la sua *rappresentazione*. La rappresentazione differisce dalla figura obbiettiva per la diversa situazione; giacchè questa è posta nello spazio, cioè fuori del piano del disegno, la rappresentazione invece è descritta su di esso. — Queste rappresentazioni delle varie parti di una figura potrebbero descriversi separatamente dal disegno contenente le due projezioni orizzontale e verticale, ma ordinariamente sarà più opportuno descriverle riunite al disegno stesso, il che ne mostrerà meglio la dipendenza. Nella maggior parte dei casi supporremo che una porzione della figura obbiettiva giri intorno ad un asse posto in uno dei piani coordinati, finchè venga ad adattarsi sul piano medesimo, e descrittala in questa nuova posizione essa rappresenterà la vera forma e grandezza della figura obbiettiva. Così si viene a descrivere la *rappresentazione* mediante il *ribaltamento* (rovesciamento, rabattement, Aufklappung) della figura obbiettiva. Gli esempii renderanno più chiaro questo metodo di rappresentazione facendone palese lo scopo.

11. Le projezioni sui piani coordinati s'indicheranno come dicemmo colle lettere majuscole e minuscole, quelle sulla linea fondamentale colle lettere greche; i punti e le linee obbiettive che non sono situati sui piani coordinati, li abbiamo fin qui indicati mediante le lettere che ne segnano le due projezioni separate da una virgola, e chiuse tra parentesi; quando non possa nascer equivoco porremo tra parentesi le lettere indicanti una sola projezione, facile essendo di sottintendere le lettere omesse omonime a quelle ritenute. I punti obbiettivi posti sul coordinato orizzontale uso segnarli con lettere

majuscole senza parentesi, e quelli del piano verticale con lettere minuscole tra parentesi, e ciò perchè si suppone che i primi sieno rimasti anche nel Disegno nella loro posizione obbiettiva, e che i secondi abbiano girato fino ad adagiarsi sul piano orizzontale. Per le *rappresentazioni* adopero le lettere stesse delle projezioni distinte mediante uno o più apici posti loro a destra ed in alto. Le lettere greche majuscole indicheranno nelle nostre figure i punti della fondamentale che sono obbiettivi, come per esempio le sue intersezioni colle tracce dei piani.— Altri autori adottarono convenzioni alcun poco differenti; così parecchi adoperano le lettere con uno o con due apici per indicare le projezioni orizzontali o le verticali; le lettere senza apice indicano allora i punti obbiettivi: per le rappresentazioni non si segue alcun uso costante. — Potrei aggiungere qualche cosa sulla opportuna scelta delle lettere, ma ciò meglio s'intenderà coll'uso; noterò soltanto che, analogamente a quanto si pratica con molto vantaggio nell'Algebra, ho preferite le ultime lettere dell'alfabeto per indicare i punti ricercati; e che quando si hanno parecchi punti analoghi, li indico colla stessa lettera distinguendoli con numeri posti a destra inferiormente della medesima (*).

12. Nei disegni giova adottare alcune convenzioni che facilitino l'intelligenza dei medesimi; ecco quelle che ci sembrano più opportune, e delle quali le seguenti figure presenteranno molti esempii.—Le linee che realmente appartengono ai piani coordinati si fanno *ingrossate*; tali sono la linea fondamentale, le tracce dei piani od in generale delle superficie che tagliano i piani coordinati; anche le tracce delle linee, ossia i punti nei quali esse trapassano i piani coordinati si potranno fare alcun poco ingrossati.—Si avverta che nella co-

(*) Nello insegnamento si aspetterà ad intrattenere lo studioso con queste convenzioni e con parecchie delle seguenti considerazioni, quando i problemi che si avranno a risolvere ne porteranno il bisogno od almeno l'opportunità; — lo stesso può farsi riguardo alle cose dette ai n. 8 e 9; ricordando che una delle maggiori difficoltà si è di giustamente apprendere e farsi abituale il linguaggio, lo s'insegnerà un poco per volta, nè si troverà mai soverchio di tornare di tratto in tratto a spiegarlo colla parola e col gesto.

struzione dei disegni è necessario di tracciare tutte le linee, compresa la fondamentale, molto sottili, altrimenti riuscirebbero poco precise le loro intersezioni; sicchè i suaccennati ingrossamenti si faranno dopo terminato il disegno.

13. Le linee che sono le projezioni di linee obbiettive poste fuori dei piani coordinati si segnano ordinariamente a tratto continuo e sottile, purchè la linea obbiettiva sia situata al di sopra del coordinato orizzontale e al di qua del verticale. — È palese che i due piani coordinati (Fig. 1) indefinitamente estesi separano tutto lo spazio in quattro regioni, che possono denominarsi *anteriore-superiore, posteriore-superiore, anteriore-inferiore,* e *posteriore-inferiore;* chiamando *superiori* le regioni che stanno al di sopra del coordinato orizzontale, *inferiori* quelle che ne stanno al di sotto, *anteriori* quelle che rispetto al coordinato verticale $OX(Z)$ stanno dalla parte Y, e *posteriori* quelle che stanno dalla parte opposta. Quando il coordinato verticale ruota intorno alla OX fino in OXZ, caderanno al di là della fondamentale OX (Fig. 2 e 3) non solo le projezioni *verticali* delle parti *superiori* dell'oggetto (sieno poi esse anteriori o posteriori), ma anche le projezioni *orizzontali* di tutte le parti *posteriori;* ed al di qua della fondamentale si troveranno insieme colle projezioni *orizzontali* delle parti *anteriori* anche le projezioni *verticali* delle parti *inferiori*. Per distinguere le une dalle altre queste projezioni, oltre che le projezioni orizzontali sono sempre indicate da lettere majuscole e le verticali da minuscole, gioverà, a mio credere, segnare a punti, anzichè a tratto continuo, le projezioni orizzontali che sono al di là della fondamentale, e le verticali che cadono al di qua, e segnare con tratto soltanto interrotto le projezioni orizzontali al di qua della fondamentale, ma la cui linea obbiettiva è al di sotto del coordinato orizzontale, e così pure le projezioni verticali di linee poste nella regione posteriore-superiore. Ciò si renderà più chiaro esaminando la Fig. 3, che presenta un quadrilatero $KLMN$, i cui lati sono rispettivamente posti nelle quattro regioni segnate in abbreviatura accanto a ciascuna projezione. — Anche le linee tracciate sui piani coordinati io le faccio punteggiate, a punti grossi.

quando hanno attraversato la fondamentale, cioè quando appartenendo al coordinato orizzontale sono al di là della fondamentale, oppure sono al di qua ed appartengono al verticale.

14. Le rette perpendicolari alla fondamentale che servono a riunire le projezioni corrispondenti di uno stesso punto si faranno sempre punteggiate a piccolissimi punti, e spesso anche si ometterà di tirarle, facile essendo l'immaginarle. — Si osservi peraltro che molti autori fanno a tratti interrotti le predette linee, facendo viceversa punteggiate quelle che noi facciamo a tratti interrotti. — Alcune linee ausiliarie che servono alla soluzione dei problemi, principalmente quelle con cui sono formate le *rappresentazioni*, si faranno a tratti interrotti alternati con punti: si noterà che anche nelle rappresentazioni sono soltanto punteggiate le rette ed alcuni archi di circolo, che servono a mostrare la corrispondenza fra le projezioni e le rappresentazioni di uno stesso punto obbiettivo. — Nei disegni dovrebbero distinguersi due sorta di linee; quelle che costituiscono l'oggetto e la soluzione del problema, e tutte le altre che servono alla risoluzione; quando si avrà da applicare la Geometria descrittiva si tireranno tutte le linee col lapis, poscia si darà l'inchiostro a quelle della prima specie e si cancelleranno le altre: nelle nostre figure tale distinzione non fu fatta, ma sarà facile immaginarla. Fra queste linee ausiliarie alcune furono da noi descritte a tratto continuo, altre a tratto interrotto od a punti; e ciò secondo la loro maggiore o minore importanza, poco curando se sieno coperte o no, giacchè debbono intendersi cancellate.

15. Se una figura comprende qualche piano od altra superficie si può supporre che questa superficie sia perfettamente trasparente, sicchè si veggano in ugual modo le linee che stanno al di sopra o al di sotto di tale superficie; ma bene spesso il disegno si renderà più espressivo attribuendo a quella superficie una semitrasparenza, per la quale si veggano diversamente le linee secondo che sono rispetto all'osservatore al di qua o al di là della superficie: per indicare tale differenza si lasciano a tratto continuo le porzioni di quelle linee che rimangono scoperte, e si fanno a tratti interrotti quelle

porzioni che risultano coperte dalla superficie. Onde intendere quando si supponga che la superficie copra la linea, si consideri che rispetto alla projezione sul piano orizzontale si suppone che la figura sia guardata da un osservatore posto perpendicolarmente sopra questo piano a distanza infinita, mentre rispetto alla projezione nel piano verticale l'osservatore s'intende situato a distanza infinita su d'una perpendicolare al piano verticale in avanti di questo piano. Ed è appunto per questo che nel n. 13 dicemmo di fare a tratto interrotto le projezioni orizzontali delle linee che stanno nella regione anteriore-inferiore, e le verticali di quelle che sono nella regione posteriore-superiore; considerando anche i piani coordinati come semitrasparenti. — I piani e molte superficie hanno per loro natura un'estensione indefinita; ma nei disegni se ne considera bene spesso soltanto una porzione, e solamente ad essa si ha riguardo nello stabilire quali linee rimangano coperte, e quindi debbano farsi a tratti interrotti.

CAP. II.

Problemi elementari riguardanti i punti, le rette ed i piani.

Problema I. *Descrivere le projezioni della retta che passa per due punti dati; stabilire la corrispondenza fra le due projezioni di uno stesso punto della retta; e trovare le tracce di questa.*

16. La projezione della retta che passa per due punti obbiettivi è la retta che unisce le projezioni dei punti medesimi, sicchè la prima parte della questione non può presentare alcuna difficoltà: si osservi nulladimeno che se uno dei punti pei quali dee passare la retta fosse dato sul piano coordinato orizzontale, la projezione verticale di quel punto si troverebbe sulla linea fondamentale nel piede della perpendicolare abbassata dal punto dato; in simil modo si opererebbe se uno dei punti dati appartenesse al coordinato verticale; chè già in ogni caso ciò che dicesi di uno dei piani coordinati può ripetersi del-

l'altro. — Le due projezioni di uno stesso punto sono sempre situate (n. 7) sopra una retta perpendicolare alla fondamentale; dunque quando conosceremo le due projezioni di una retta sarà facilissimo trovare quali sieno i loro punti che si *corrispondono*, cioè che sono le projezioni di uno stesso punto obbiettivo. — Finalmente osserviamo che tutti i punti del piano orizzontale, e quindi anche la traccia orizzontale della retta proposta, hanno le loro projezioni verticali sulla fondamentale; perciò se troveremo l'intersezione della projezione verticale colla linea fondamentale, il punto *corrispondente* sulla projezione orizzontale sarà la traccia della retta, cioè il punto in cui essa incontra il coordinato orizzontale.

17. *Disegno* 1.° Sieno $A\,a$, $B\,b$ (Fig. 4) le projezioni dei due punti; potremo in primo luogo assicurarci se le projezioni $A\,a$ possono realmente appartenere ad un medesimo punto obbiettivo, il che effettueremo osservando se la retta $A\,a$ sia perpendicolare alla fondamentale $\alpha\beta$; dicasi lo stesso della $B\,b$: dopo ciò tirate le rette $A\,B$, $a\,b$ queste saranno le projezioni della retta che passa pei due punti obbiettivi (A, a) (B, b), i quali più brevemente segneremo così (A) (B). Si noterà sempre che quando si tratta di trovare una retta, bisogna descriverne due, cioè le sue projezioni. — Se vogliasi trovare la projezione verticale del punto appartenente alla retta obbiettiva $(A\,B)$, che ha la projezione orizzontale C, tireremo la $C\gamma$ perpendicolare alla $\alpha\beta$, ed essa taglierà la projezione verticale $a\,b$ nel punto ricercato c. — Occorrendo spessissimo di condurre delle rette perpendicolari alla fondamentale gioverà tirare accuratamente una di tali perpendicolari, alla quale tutte le altre saranno parallele, e facilmente si tireranno mediante lo squadretto che si fa scorrere lungo una riga. — La projezione verticale $a\,b$ incontra la fondamentale nel punto x, dunque la traccia orizzontale della retta $(A\,B)$ sarà il punto X intersezione della $A\,B$ colla $x\,X$ elevata perpendicolarmente alla fondamentale. Similmente prolungheremo la $A\,B$ finchè incontri la fondamentale in Y, eleveremo la perpendicolare in Y, ed essa taglierà la $a\,b$ nella traccia verticale y. — Nella nostra Figura la $X\,Y$ è a tratto interrotto (n. 13), perchè la

retta obbiettiva (XY) è nella regione inferiore; e la xy è a punti, perchè essa è projezione verticale quantunque si trovi al di qua della fondamentale.

48. *Disegno* 2.° La precedente determinazione delle tracce della retta che passa pei due punti dati (A, a) (B, b) (Fig. 5) non potrebbe servire nel caso che le rette AB ab fossero perpendicolari alla fondamentale. — Si noti che in questo caso le projezioni AB ab non sarebbero sufficienti per determinare la retta obbiettiva; bisogna inoltre conoscere la corrispondenza delle projezioni A a, e B b di due punti (A) (B) di quella retta. — Per risolvere il problema ricorreremo al terzo piano coordinato (n. 8) cioè al piano di profilo: sia $O\alpha_1$ (perpendicolare ad $O\alpha$) la linea fondamentale appartenente al piano di profilo; le projezioni su di esso dei punti (A) (B) e quindi anche della retta (AB) si otterranno prendendo sulle prolungazioni delle perpendicolari $A\alpha_1$, $B\beta_1$ le porzioni $\alpha_1 a_1$, $\beta_1 b_1$ rispettivamente uguali alla αa βb. Dopo di ciò vedremo che le projezioni sul piano di profilo delle tracce della retta (AB), cioè delle sue intersezioni coi due primi piani coordinati, saranno x_1 ed y_1 e che si otterrà la traccia orizzontale X tirando $x_1 X$ perpendicolare alla $O\alpha_1$, e la traccia verticale prendendo αy uguale ad Oy_1. — Se si cercasse la projezione verticale del punto della retta (AB, ab) che ha la projezione orizzontale C si determinerebbe la projezione corrispondente c_1 sul piano di profilo, poscia si prenderebbe αc uguale a $\gamma_1 c_1$. — Può osservarsi che nella Fig. 5 la $a_1 b_1 x_1$ è una *rappresentazione* (n. 10) della retta obbiettiva.

49. *Disegno* 3.° Quand'anche le projezioni AB ab non fossero precisamente perpendicolari alla fondamentale, pure la costruzione del disegno 1.° darebbe con poca precisione le tracce X y, se quelle projezioni poco si discostassero da tal direzione: si potrebbe ricorrere anche in questo caso al piano di profilo, ma sarà più opportuno descrivere invece una *rappresentazione* della retta proposta (AB) (Fig. 6). — A tal fine si supponga che la retta obbiettiva insieme col suo *piano projettante* giri intorno alla projezione orizzontale AB fino ad adagiarsi sul piano orizzontale, ed a prendere la posizione

$A'B'$, che sarà la rappresentazione della (AB); ora siccome la distanza del punto obbiettivo (A) dalla sua projezione A è uguale alla αa, così è evidente che dovremo tirare la AA' perpendicolare alla AB ed uguale ad αa; similmente $BB'=\beta b$. — Ora per determinare le tracce X y, osserveremo che nel suaccennato giramento della (AB) intorno alla AB la traccia X rimane immobile, e la traccia verticale y va a situarsi in qualche punto Y' della YY' perpendicolare alla AB; dunque prolungheremo la rappresentazione $A'B'$ finchè incontri la AB nel punto X, che sarà la traccia orizzontale, e la traccia verticale y sarà determinata da $Yy=YY'$.

Problema II. *Descrivere la retta che passa per un punto dato ed è parallela a data retta.*

20. Si dovrà sempre sottintendere che i punti e le rette sono date mediante le loro projezioni, e che si tratta di descrivere le projezioni della retta ricercata. Le rette parallele hanno le projezioni parallele, e le projezioni della retta che passa per un punto passano per la projezione di questo; dunque per la projezione orizzontale del dato punto si tirerà la parallela alla projezione orizzontale della retta data, ed essa sarà la projezione orizzontale della retta richiesta: in simil modo se ne troverà la projezione verticale. — La facilità di questa soluzione dispensa dal darne alcun disegno.

Problema III. *Determinare la lunghezza di una retta di cui si conoscono le projezioni: e prendere su questa retta una lunghezza eguale ad una data.*

21. Se la retta sia parallela ad uno dei piani coordinati, essa sarà uguale alla sua projezione su questo piano; poichè la obbiettiva, le projettanti dei suoi estremi e la projezione formano in tal caso un parallelogrammo rettangolo. Noi riconosceremo che una retta obbiettiva è parallela al coordinato orizzontale scorgendo che la sua projezione verticale è parallela alla fondamentale: ed ogni qualvolta la projezione orizzontale sia parallela alla fondamentale, ne conchiuderemo che la obbiettiva è parallela al coordinato verticale. Eccettuati questi due casi, la retta obbiettiva è sempre maggiore di ciascuna delle sue projezioni.

22. Ambedue i proposti problemi si risolveranno descrivendo una rappresentazione della retta, di cui si conoscono le projezioni; ciò potrà effettuarsi in varii modi, che consistono nell' immaginare la retta obbiettiva ruotante intorno ad un asse, che la tagli in un punto e sia parallelo ad uno dei piani coordinati, e supporre che questa rotazione abbia ridotta la retta parallela all'uno o all'altro dei coordinati.

23. *Disegno*. Collo stesso metodo adoperato al § 19 potremo descrivere (Fig. 7) la rappresentazione $A'B'$ della retta obbiettiva (AB), supponendo che essa giri intorno ad AB fino ad applicarsi sul piano orizzontale; cioè tireremo le AA', BB' perpendicolari alla AB ed uguali alle αa, βb. — Siccome presentemente ci basta conoscere la lunghezza della $A'B'$, così potremo sostituire ad essa la sua uguale $A''B$, che si ha prendendo $AA''=ra=$ differenza delle αa, βb; ed è palese che *la retta obbiettiva (AB) è l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo che ha per cateti la projezione orizzontale AB, e la differenza ra delle distanze dalla fondamentale delle due estremità della projezione verticale ab.* Riconosceremo pure che la medesima (AB) è l'ipotenusa dei due cateti ab SB. Così la soluzione del problema si riduce a costruire l'uno o l'altro di questi triangoli rettangoli, il che può farsi in varie guise.

24. Ordinariamente si costruisce il triangolo rettangolo che ha i cateti AB ra, prendendo sulla rb parallela alla fondamentale la $rb'''=AB$, ed ab''' sarà la lunghezza della retta (AB). — Questa ab''' rappresentazione della (AB) può immaginarsi prodotta nel seguente modo: si supponga che il piano projettante della (AB) giri intorno alla retta projettante $(A)A$ fino a che divenga parallelo al piano coordinato verticale, ossia finchè la AB prenda la posizione AT parallela alla fondamentale; dopo ciò la projezione verticale di questo piano sarà ad esso uguale e darà la rappresentazione della (AB). — Giova moltissimo abituarsi a queste rotazioni parziali che permettono di descrivere delle projezioni uguali alle figure obbiettive; gli studiosi potranno eseguire una costruzione simile alla precedente supponendo che il piano projet-

tante, che comprende la obbiettiva (AB) e la projezione verticale ab, giri intorno alla retta (A)a fino a ridursi orizzontale.

25. Se sulla data retta (AB) debba prendersi partendo da A una lunghezza data, descriveremo l'una o l'altra delle rappresentazioni $A'B'$, $A''B$, ab''', e prenderemo una delle $A'X'$, $A''X''$, ax''' eguale alla data; poscia la $X'X''X$ perpendicolare alla AB, o la $x'''x$ parallela alla fondamentale determineranno le projezioni Xx del cercato punto. — È già noto che basta trovare una di queste projezioni, giacchè esse sono tra loro legate dalla condizione di dover essere Xx perpendicolare alla fondamentale.

Problema IV. *Riconoscere se due rette sieno poste in un medesimo piano o no: e, nel primo caso, determinarne il punto d'intersezione.*

26. Due rette poste in uno stesso piano o sono parallele, od hanno un punto comune: nel primo caso le loro projezioni sopra ciascuno dei piani coordinati saranno parallele, nel secondo si taglieranno in due punti *corrispondenti* (cioè che sono sopra una stessa perpendicolare alla fondamentale), ed essi saranno le projezioni del cercato punto d'intersezione. — Quando le date projezioni s'incontrassero in un punto molto distante, la precedente costruzione potrebbe riuscire incomoda; allora sceglieremo opportunamente due rette ausiliarie, ognuna delle quali tagli le due rette date, e indagheremo se quelle sieno in uno stesso piano.

27. *Disegno* 1.° Il punto d'intersezione delle rette obbiettive (AC) (BD) (Fig. 8) avrà le projezioni nei punti Xx, nei quali si tagliano le date projezioni di quelle rette, e quei punti dovranno trovarsi sopra una retta Xx perpendicolare alla fondamentale: che se ciò non fosse, se ne dedurrebbe che le rette proposte non si tagliano, e che non sono poste in un medesimo piano.

28. *Disegno* 2.° Se sieno proposte le rette (AB) (CD) (Fig. 8), che s'incontrano troppo lontano, si tireranno ad arbitrio le rette parallele AD BC, e si determineranno sulle ab cd i punti corrispondenti agli A B C D: le rette proposte saran-

no in un piano solamente quando le ad bc riescano parallele. — Si potrà operare in modo simile mediante le AC BD, che si tagliano in X. — Questo modo di conoscere se le rette (AB) (CD) s'incontrino, varrà anche nel caso che le projezioni AB ab sieno perpendicolari alla fondamentale, purchè si conoscano le projezioni corrispondenti $A.a$ e $B.b$.

29. Le rette (AD), (EF) non sono in uno stesso piano, perchè al punto d'intersezione L delle loro icnografie corrispondono due punti diversi m n delle ortografie: si vede che il punto (L, n) è più lontano dal piano orizzontale del punto (L, m), cioè che la retta (EF) passa al disopra della (AD); essa passa al disotto della (CD) e taglia la (BD). — Si noti la necessità d'indicare il punto obbiettivo (L, m) mediante ambedue le sue projezioni, perchè queste non sono segnate da lettere omonime.

30. *Disegno* 3.° Quando riesca poco precisa la determinazione dei punti corrispondenti delle due rette (AB), (CD) (Fig. 9), per conoscere se l'intersezione x delle ab cd corrisponda con quella delle AB CD, si formerà col punto ξ della $x\xi$ perpendicolare alla fondamentale, e con due punti A D delle date projezioni il triangolo $AD\xi$; poscia fra le stesse rette AB DC si tirerà la BC parallela alla AD, e le $B\eta$ $C\eta$ rispettivamente parallele alle $A\xi$ $D\xi$, e la $\xi\eta$ sarà diretta verso il punto di concorso delle AB DC; sicchè basterà osservare se questa $\xi\eta$ sia o no la prolungazione della $x\xi$. — Che veramente le tre rette AB DC $\xi\eta$ concorrano in uno stesso punto, noi lo riconosceremo immaginando che alle due projezioni AB DC corrispondano due rette obbiettive poste in uno stesso piano, e che il punto di concorso di queste sia unito col punto ξ mediante una terza retta, poscia queste tre rette obbiettive sieno tagliate da due piani tra loro paralleli $(AD\xi)$, $(BC\eta)$; queste sezioni daranno due triangoli coi lati rispettivamente paralleli, e lo stesso sarà delle loro projezioni $AD\xi$ $BC\eta$. — Veggasi la Nota alla fine del Capitolo.

Problema V. *Determinare l'inclinazione rispettiva di due rette date* (cioè delle quali si conoscono le projezioni).

31. Se le date rette obbiettive non si tagliano, potremo sup-

porre che per un punto di una di esse sia condotta una parallela all'altra, e così saremo sempre nel caso che le rette proposte sieno in uno stesso piano, e si tratti di determinare l'angolo da loro formato. Si supponga che tali rette sieno tagliate da una terza con cui formino un triangolo; si trovino (§ 22) le lunghezze dei suoi lati, e col loro mezzo si descriva la rappresentazione del triangolo, e si avrà l'angolo richiesto. Per semplificare la soluzione si potrà tirare la terza retta parallelamente ad uno dei piani coordinati, essa sarà perciò uguale alla sua projezione (§ 21), e rimarrà da trovare le lunghezze di due soli lati dell'immaginato triangolo. — È poi conforme agli usi della Geometria descrittiva di non costruire separatamente questo triangolo; bensì tenerlo unito al disegno supponendo che il triangolo obbiettivo ruoti fino a ridursi parallelo al coordinato, cui è parallelo il terzo suo lato, e in tal posizione descriverne la projezione, che sarà nello stesso tempo sua rappresentazione.

32. *Disegno*. Si voglia determinare l'angolo obbiettivo (BAC) (Fig. 10); si tiri arbitrariamente la bi parallela alla fondamentale, che sia la projezione verticale di una retta orizzontale che tagli le due rette date; le projezioni orizzontali BI si determineranno colle solite perpendicolari bB, iI. Per descrivere la rappresentazione del triangolo (ABI), osservato che la BI è uguale alla sua obbiettiva, basterà costruire sulla BI un triangolo $BA'I$, i cui lati BA' IA' sieno uguali alle rette obbiettive (BA) (IA), cioè (§ 24) alle $b''a$ $i''a$, essendo $rb''=AB$, $ri''=AI$. — La rappresentazione $BA'I$ è la projezione del triangolo obbiettivo dopo che ha girato intorno al suo lato (BI) fino a ridursi parallelo al piano orizzontale; in questo movimento il punto (A) non esce dal suo piano perpendicolare all'asse di rotazione; quindi le rette $A'A$ BI saranno perpendicolari: ciò servirà di verificazione.

Problema VI. *Trovare i punti di data retta che hanno conosciuta distanza da un punto dato; — ossia trovare le intersezioni di una retta e di una sfera.*

33. Si descriverà la rappresentazione di un triangolo che abbia la base sulla retta ed il vertice nel punto dato, poscia

la rappresentazione del circolo descritto nel suo piano coi dati centro e raggio, finalmente si determineranno le projezioni dei punti d'intersezione del circolo colla retta. — Se sceglieremo i due lati di quell'arbitrario triangolo, paralleli rispettivamente ai due piani coordinati, essi saranno uguali alle loro projezioni, sicchè ci resterà da trovare soltanto la lunghezza della base; e da ciò pure potremo dispensarci immaginando che la rappresentazione del triangolo si ottenga facendolo girare intorno ad uno dei suoi lati fino a ridursi parallelo al piano coordinato, nel qual movimento ciascun punto descriverà un arco di circolo projettato in una retta perpendicolare a quel lato che servì quale asse di rotazione.

34. *Disegno.* La retta data sia quella che ha le tracce $A\ b$ (Fig. 11), e perciò le projezioni $AB\ ab$, e sia (D) il punto dato; si tirino parallelamente alla fondamentale le rette de DF, e si determinino le projezioni corrispondenti $E\ f$. Ora per descrivere la rappresentazione DEF' del triangolo (DEF) possiamo trovare (§ 24) la lunghezza $ef'' = EF'$ del suo lato (EF), gli altri due essendo uguali alle loro projezioni orizzontale DE e verticale df: ma anche senza costruire la ef'' può bastare la considerazione che ruotando il triangolo obbiettivo intorno al suo lato orizzontale (DE), il punto (F) descrive un arco di circolo projettato nella FF' perpendicolare alla DE, sulla quale noi prenderemo $DF' = df$. — Poscia col centro D, e con raggio eguale alla distanza, che deve esservi tra (D) ed il punto ignoto della (EF), noi taglieremo la rappresentazione EF', ed avremo nei punti X' le rappresentazioni dei punti cercati. Ci resta da riportare ciascuno di questi X' nella sua vera posizione; per l'immaginata rotazione basterà condurre $X'X$ perpendicolare alla DE (ossia parallela alla $F'F$), e sarà X l'icnografia, da cui si deduce (§ 17) l'ortografia x, che d'altronde potrebbe aversi direttamente (§ 25) prendendo $ex'' = EX'$, e tirando $x''x$ parallela alla fondamentale.

Problema VII. *Per un dato punto condurre la retta che taglia una retta data e forma con essa angolo pur dato.*

35. In questo problema, come nel precedente, si descriverà

la rappresentazione del piano che passa pel punto e per la retta, nonchè della retta tirata su quel piano colla data condizione. — Così fatta la costruzione della Fig. 11 si tirerà la DX', che formi l'angolo dato $DX'F'$, e questa DX' sarà la rappresentazione della retta richiesta; sarà poi facile determinarne le projezioni.

Problema VIII. *Trovare le intersezioni di due circoli, dei quali si conoscano i centri, i raggi, ed un terzo punto del piano, in cui ambedue sono situati.*

36. Si descriva la rappresentazione di quel piano e dei circoli in esso compresi, poscia non sarà difficile determinare le projezioni dei punti d'intersezione. — I varii casi che possono occorrere serviranno d'utile esercizio. Per esempio, se nella Fig. 11 coi centri D F', e con dati raggi siasi determinato il punto Y' rappresentazione del punto ignoto posto nel piano (DEF), si potrà tirare la retta $DY'X'$ che incontri la EF' in X', trovare la sua projezione DX, poscia condurre $Y'Y$ perpendicolare alla DE. — Dopo aver parlato dei piani torneremo su questo problema, che qui abbiamo dato per compiere ciò che riguarda l'intersezione delle rette e dei circoli (§§ 16, 27, 25, 33).

Problema IX. *Trovare le tracce del piano di tre punti dati.*

37. Le tracce orizzontale e verticale del piano passano rispettivamente per le tracce orizzontali e verticali delle tre rette che uniscono i punti dati; così per determinare le due tracce ricercate si hanno sei punti, ed oltre a ciò la condizione che esse si tagliano (§ 9) sopra un punto della fondamentale. Del resto si potrebbero trovare quanti punti mai si volessero di quelle tracce considerando altre rette che taglino i lati del triangolo formato dai punti dati.

38. *Disegno.* La traccia orizzontale del piano (ABC, abc) (Fig. 12) passerà per le tracce orizzontali TU delle rette (BC) (AC), e supposto che la ab sia parallela alla fondamentale, cioè che non la incontri ad alcuna distanza finita, anche la TU non incontrerà a distanza finita la AB, cioè sarà ad essa parallela: la traccia verticale $\Psi\varphi$ del piano cercato passa per le tracce verticali dei lati del triangolo (ABC). Inoltre se

sieno per esempio D d due punti corrispondenti delle projezioni AC ac, le tracce del suddetto piano conterranno anche le tracce della (BD).

Problema X. *Trovare le tracce di un piano che passi per due punti e sia parallelo ad una retta; — oppure che passi per un punto e sia parallelo a due rette, o ad un piano.*

39. Questo problema può considerarsi come un caso particolare ed un necessario compimento del problema precedente; poichè quando uno dei punti del piano desiderato passa a distanza infinita, il piano dev'essere parallelo ad una retta: tornerà spesso occasione di fare considerazioni analoghe a questa. — Se sono dati due punti del piano cercato si uniranno con una retta, poscia per uno di essi, o se si voglia per ambedue, si condurranno (§ 20) le rette parallele alla retta data, e così si avranno le projezioni di due o tre rette che appartengono al piano cercato; poscia si procederà come nel problema IX. — Similmente se uno solo sia il punto dato si tireranno per esso due rette parallele a quelle, cui il piano cercato dev'essere parallelo, e si procederà come sopra. Quando il piano dev'essere parallelo ad altro piano, di cui sono date le tracce, queste si prenderanno per quelle due rette sopraccennate, e si vedrà che le tracce di piani paralleli sono rispettivamente parallele, come già risulta dal noto teorema che due piani paralleli sono tagliati da ogni piano in rette parallele.

40. *Osservazione.* I due ultimi problemi servono a determinare le ombre projette sui piani coordinati di uno spigolo rettilineo quando i raggi luminosi partono da un punto, oppure sono paralleli.

Problema XI. *Trovare le projezioni corrispondenti dei punti o delle rette appartenenti ad un piano dato* (cioè del quale si conoscono le tracce).

41. Cominciamo dal caso che sia data la projezione, per esempio, orizzontale di una retta appartenente al dato piano, e si cerchi la sua projezione verticale: quella projezione orizzontale incontrerà la traccia orizzontale del piano e la linea fondamentale in due punti, ai quali corrisponderanno rispet-

tivamente un punto della fondamentale ed un punto della traccia verticale; la retta che unirà questi punti sarà la projezione cercata. — Che se sia data la projezione di un punto appartenente al piano, per quel punto tireremo ad arbitrio una retta, che considerata come projezione di una retta del piano ci darà come sopra la projezione verticale corrispondente, ed il punto di questa che corrisponde alla data projezione orizzontale sarà la cercata projezione verticale. Quella retta condotta arbitrariamente potrà esser parallela alla traccia orizzontale del piano, ed allora la projezione verticale sarà parallela alla fondamentale.

42. *Disegno*. Se vogliasi determinare il punto appartenente al piano GJh (Fig. 13) che ha la projezione verticale d, si conduca de parallela alla fondamentale, si projetti e in E, si tiri ED parallela alla traccia GJ, e su di essa si determini la projezione D corrispondente a d. Oppure, condotta per d una retta arbitraria gh, si osservi che la retta appartenente al piano GJh e che è projettata in gh ha le tracce G h, e perciò la projezione orizzontale GH, sulla quale si troverà anche la projezione del punto (D, d).

Problema XII. *Trovare l'intersezione di due piani dati.*

43. Facilmente determineremo quanti punti si vogliano di quella intersezione; intanto se le tracce, per esempio, orizzontali dei due piani si tagliano, il loro punto comune è un punto obbiettivo della cercata intersezione; la projezione verticale di quel punto è situata sulla retta fondamentale. Se si considerano due rette situate rispettivamente sui due piani e le quali abbiano una stessa ortografia, e si determinano le loro icnografie (§ 41); queste si taglieranno in un punto che sarà l'icnografia di un punto della cercata intersezione; la sua ortografia si troverà poi sulla ortografia comune alle due rette ausiliarie. — Ordinariamente si prende per comune ortografia delle due rette una parallela alla fondamentale, allora quelle sono le intersezioni fatte nei dati piani da un piano orizzontale: avremo più volte occasione di servirci di questi piani orizzontali ausiliarii, il che costituisce il *metodo delle sezioni orizzontali*; s'intende da sè che il metodo è lo stesso

se i piani sono invece paralleli al piano coordinato verticale. — Quando i due piani incontrano la fondamentale in un medesimo punto, quello è intanto un punto della cercata intersezione, ed un altro se ne otterrà col suddetto metodo delle sezioni orizzontali; ma se ambedue i piani sono paralleli alla fondamentale, la comune ortografia delle due rette ausiliarie si prenderà obbliqua alla fondamentale: si potrebbe anche adoperare il piano di profilo.

44. *Disegno.* L'intersezione dei piani che hanno le tracce $M\Omega n$ (Fig. 14) PPq ha le tracce nei punti $X\ y$ dove si tagliano quelle tracce $M\Omega\ PP$, $\Omega n\ Pq$; quindi essa ha le projezioni $XY\ xy$. — Per determinarne qualche altro punto si tiri arbitrariamente la rs parallela alla fondamentale, le projezioni orizzontali delle rette poste rispettivamente nei due piani, e che hanno ambedue la projezione verticale rs, saranno le $RZ\ SZ$ parallele alle tracce $\Omega M\ PP$; il loro punto comune Z, ed il suo corrispondente z posto sulla rs, saranno projezioni di un punto della cercata intersezione, cioè di quel punto in cui si tagliano le *sezioni orizzontali* (RZ, rs) (SZ, sr). — Questa determinazione di $Z\ z$ sarà necessaria soltanto quando almeno uno dei punti $X\ y$ cada fuori del foglio del disegno. — Lascio allo studioso di costruire le figure per gli altri casi accennati alla fine del § 43.

45. Questo problema oppure il seguente può servire a condurre per un dato punto una retta obbiettiva che tagli due rette date; poichè i due piani (§ 37) che comprendono il punto e ciascuna delle due rette si taglieranno nella cercata intersezione, oppure uno dei piani taglierà l'altra retta in un punto appartenente alla cercata retta, che d'altronde dee passare pel punto dato.

Problema XIII. *Trovare l'intersezione di una retta e di un piano.*

46. Il problema si riduce al precedente immaginando che per la data retta passi un piano ausiliario (§ 37), il quale taglierà il piano dato (§ 43) in una retta, che incontrerà (§ 26) la retta proposta nel cercato punto d'intersezione. — Può anche cercarsi (§ 41) la projezione verticale di quella retta che

è situata nel piano dato e che ha la projezione orizzontale comune colla retta proposta: del resto facilmente si riconosce che questo metodo è un caso particolare del precedente, poichè esso consiste nel tagliare il piano proposto col piano projettante che contiene la retta data e la sua projezione orizzontale. — Veggasi il disegno del problema seguente. — Talvolta potrà tornare opportuno di descrivere la rappresentazione del piano projettante la retta data come vedremo nel § 58.

Problema XIV. *Per un dato punto condurre una retta perpendicolare ad un piano dato; — oppure un piano perpendicolare ad una retta.*

47. Quando vi sono nello spazio un piano ed una retta tra loro perpendicolari, il piano projettante la retta sopra un piano coordinato è perpendicolare ad ambedue i piani dato e coordinato; perciò l'intersezione di questi, cioè la traccia del piano dato sarà perpendicolare al piano projettante, e quindi anche alla projezione della retta data. Perciò *le tracce di un piano perpendicolare ad una retta sono rispettivamente perpendicolari alle projezioni della retta.* — Così il primo problema non ammette alcuna difficoltà; giacchè le projezioni della retta ricercata dovranno passare per le projezioni del dato punto ed essere perpendicolari alle tracce del piano dato. — Pel secondo problema il metodo di soluzione consisterà nell'immaginare una retta ausiliaria, la quale passi pel dato punto, e sia compresa nel piano cercato; suppostala orizzontale, la sua projezione orizzontale (parallela alla traccia orizzontale del piano cercato) sarà perpendicolare alla projezione della retta data, e la projezione verticale sarà parallela alla fondamentale; la traccia verticale di questa retta ausiliaria darà un punto della traccia verticale del piano richiesto.

48. *Disegno.* Debba descriversi il piano che passa pel punto (D) (Fig. 15) ed è perpendicolare alla retta (AB). La retta orizzontale (DV) sia posta nel piano richiesto, la dv sarà parallela alla fondamentale, e la DV sarà parallela alla traccia del piano cercato, e quindi perpendicolare alla AB: per la traccia verticale v della (DV) si conduca $v\Psi$ perpendicolare alla ab, poscia la ΨU perpendicolare alla AB passerà per la

traccia orizzontale U della $(D\,U)$ parallela al coordinato verticale; sarà $U\Psi v$ il piano dimandato. — Se invece si dovesse tirare pel punto (A) una retta perpendicolare al dato piano $U\Psi v$ si avrebbero immediatamente le cercate projezioni AB ab tirandole perpendicolari alle tracce $U\Psi$ Ψv. Per determinare poi il punto (X) in cui questa perpendicolare incontra il piano, si consideri (§ 46) la retta $(GB,\ gn)$ che appartiene al piano perchè passa pei suoi due punti $(G,\ g)$ $(B,\ n)$ e che ha la projezione orizzontale coincidente colla AB; questa retta $(GB,\ gn)$, — oppure la $(HM,\ ha)$, — taglierà la $(AB,\ ab)$ nel punto desiderato $(X,\ x)$.

49. Il disegno 15 è eseguito in riguardo al secondo problema, cioè si suppose che esistesse il piano $U\Psi v$ e che ad esso fosse condotta la perpendicolare (AX), e le projezioni di questa si fecero perciò in parte a tratto interrotto considerando quel piano (§ 15) come semitrasparente: si noti che rispetto all'osservatore che da distanza infinita guarda in giù sul coordinato orizzontale riesce coperta del piano $U\Psi v$ la porzione di retta AX, e che invece rispetto all'osservatore che guarda la figura perpendicolarmente al coordinato verticale il piano $U\Psi v$ copre la porzione di retta xb. — Ove possa nascer dubbio se nel punto k la projezione verticale della (AB) debba essere a tratto continuo, si determini la projezione orizzontale corrispondente K della suddetta linea, ed inoltre (§ 44) la projezione pur orizzontale L del punto $(L,\ k)$ che appartiene al piano $U\Psi v$; se L cadrà più al di qua di K la linea dovrà essere a tratto interrotto, altrimenti sarebbe a tratto continuo.

Problema XV. *Trovare le intersezioni di due circoli posti in dato piano.*

50. Questo problema si riduce alla costruzione della rappresentazione del piano e di quanto si suppone in esso descritto; a tal oggetto si potrà supporre che il piano tutto intero giri intorno alla sua traccia, per esempio, orizzontale, fino ad adagiarsi sul coordinato orizzontale; ogni retta del dato piano che avea la projezione orizzontale perpendicolare oppur parallela alla traccia orizzontale del piano stesso si manterrà

perpendicolare oppur parallela a questa traccia anche nella rappresentazione; ciò servirà ad abbreviare la costruzione; gioverà pure segnar fin da principio la rappresentazione della traccia verticale del piano proposto. — Per eseguire la suddetta rotazione potrebbe anche utilmente adoperarsi la rappresentazione di un piano perpendicolare alla traccia che serve da asse di rotazione; del che vedremo esempii nel Cap. IV.

51. *Disegno*. Nel piano GJh (Fig. 16) trovare i punti (X) che hanno date distanze dai punti (C) (D) posti essi pure in quel piano. — Pel punto D si tiri la HGH' perpendicolare alla traccia GJ, la JH' eguale alla Jh sarà la rappresentazione della traccia Jh, e per avere la rappresentazione D' basterà tirare dq parallela alla fondamentale, prendere $JQ' = Jq$ e tirare $Q'D'$ parallela alla JG; si potrà anche tirare DP parallela alla fondamentale e PD' parallela alla JH'. In simil modo si determinerà la rappresentazione C' del punto (C) che cadrà sulla CC' perpendicolare alla JG; poscia coi centri C' D' e coi dati raggi si formeranno le intersezioni X' rappresentazioni dei punti cercati. — Passeremo dalla rappresentazione X' alle projezioni X x procedendo inversamente a ciò che facemmo per passare dalle D d alla D'. Si noti che il punto D' viene ad essere riferito agli assi coordinati JP JQ' mediante l'ascissa $JP = Q'D'$ e l'ordinata $PD' = JQ'$, le quali quando sono ricondotte nel piano GJh sono date dalle loro projezioni QD, pd. — Potrà servire di verificazione che giacchè la $D'C'$ divide per metà la $X'X_1'$, lo stesso sarà delle DC dc rispetto alle XX_1 xx_1: le $D'C'$ $X'X_1'$ sono anche perpendicolari, non così le altre.

52. Il metodo ora descritto riuscirà opportuno ogni qual volta si voglia descrivere una figura o risolvere un problema nel piano dato GJh, che si ribalta in GJH', poscia si rimette nella posizione obbiettiva. — Potrebbesi risparmiare di descrivere la rappresentazione JH' prendendo $Hg'' = HG$, poscia sulla obbliqua $g''h$ portando in $g''x''$ la distanza del punto X' dalla JG, ed i due cateti del triangolo rettangolo che ha l'ipotenusa $g''x''$ darebbero la distanza di X dalla JG, e l'altezza di x. Si vede che $g''x''$ è la rappresentazione delle pro-

jezioni sopra un piano perpendicolare all'asse di rotazione JG.

Problema XVI. *Trovare i punti di un piano che hanno data distanza da un punto dato.*

53. Quei punti sono in un circolo che ha per centro la projezione del punto sul piano dato; questa projezione si trova mediante il problema XIV, e determinata anche la lunghezza (§ 23) della perpendicolare abbassata dal punto sul piano, sarà poi facile trovare il raggio del circolo ricercato, — descriverne la rappresentazione, — poscia riportarne (§ 51) quanti punti si vogliano nella posizione obbiettiva.

Problema XVII. *Trovare i punti che hanno date distanze da tre punti determinati.*

54. Il problema non può risolversi se non se ribaltando i tre punti sul piano del disegno; riferiremo adunque il punto cercato al piano dei tre punti. Tre sono le condizioni cui deve soddisfare il punto cercato; per ciascuna di esse il punto dee trovarsi sopra una sfera col centro in uno di quei punti e di dato raggio: col linguaggio della Geometria analitica si dice che ciascuna sfera è il *luogo geometrico* di tutti i punti che hanno dal centro una data distanza; — il circolo in cui si tagliano due di queste sfere è il luogo geometrico dei punti che hanno date distanze da due punti, cioè che soddisfanno a due delle condizioni del problema; — finalmente l'intersezione di questo circolo colla terza sfera determinerà i due punti che risolvono il problema. — Il circolo d'intersezione di due delle tre sfere è perpendicolare al piano dei tre centri delle sfere, perciò esso è projettato su questo piano in una retta: prendendo le sfere a due a due noi avremo tre circoli projettati in tre rette, la cui comune intersezione sarà la projezione del punto cercato. — (Per tal maniera la considerazione di tre sfere ci conduce ad un osservabile teorema di Geometria piana, che le corde comuni a tre circoli che si tagliano a due a due s'incontrano in un medesimo punto). Trovata la projezione del punto cercato sul piano dei tre punti dati, la considerazione di uno dei circoli in cui è posto quel punto ci darà facilmente la sua distanza dal piano: — dopo ciò noi passeremo dalla rappresentazione alle projezioni della posizione obbiettiva del pun-

to cercato, mediante il processo del § 51 combinato coi §§ 48 e 25.

55. *Disegno*. Supponiamo che i tre punti dati (A) (B) (C) (Fig. 17) sieno posti in un piano orizzontale, così l'icnografia di tal piano ne sarà anche la rappresentazione; il circolo d'intersezione delle due sfere che hanno i centri (A) (B) ed i raggi AD, BD si projetta nella DD_1; così pure il circolo d'intersezione delle due sfere coi centri (A) (C) si projetta nella EE_1; perciò i punti cercati avranno le projezioni nel punto Z, che sarà comune alle tre corde DD_1 EE_1 FF_1; esso si projetterà verticalmente in z. — Se il coordinato verticale sia parallelo alla AZ, il circolo descritto col centro a e col raggio $= AD$ sarà la projezione del circolo massimo della sfera nel quale si trovano i punti cercati, i quali saranno per conseguenza (Z, x) (Z, x_1). — Potremo anche in altro modo determinare la distanza dei punti cercati dal punto (Z), considerando il circolo DD_1X' come rappresentazione del predetto circolo massimo, e tirando ZX' perpendicolare alla AZ.

56. Noi abbiamo insegnato a descrivere la retta che passa per due punti dati (Probl. I.), il piano che passa per tre punti (IX.), l'intersezione di due rette (IV.), di due piani (XII.), di una retta e di un piano (XIII.), di una retta ed una sfera (III. VI.), di un piano ed una sfera (XVI.), di un piano e due sfere (VIII. XV.), finalmente di tre sfere (XVII.). Così abbiamo il mezzo di risolvere rispetto allo spazio qualunque problema del 1.° o del 2.° grado che si sappia risolvere mediante le rette, i piani e le sfere; quindi la Geometria descrittiva offre alla Geometria teorica tutto quanto può esigersi dall'uso della riga e del compasso. Gli altri problemi che andiamo esponendo servono soltanto a semplificare le soluzioni che sarebbero indicate dalla Geometria teorica.

Problema XVIII. *Determinare l'angolo diedro formato da due piani dati.*

57. Mediante due rette perpendicolari ai piani questo problema potrebbe ridursi al V. Per risolverlo direttamente basterà descrivere la rappresentazione di un piano perpendicolare all'intersezione dei due piani, e l'angolo compreso fra le

due intersezioni del piano ausiliario coi piani dati sarà l'angolo cercato.

58. *Disegno*. I piani $M\Omega n$ PPq (Fig. 18) si tagliano nella retta (GH), la MLP perpendicolare alla GH prendasi per traccia orizzontale del piano ausiliario, il quale tagli perpendicolarmente la (GH) in (V); per descriverne la rappresentazione lo si farà girare intorno alla MP finchè si adagi sul piano orizzontale, e se (V) venga a cadere in V' sarà $MV'P$ l'angolo ricercato; rimane da trovare la lunghezza della $L(V)$ che è perpendicolare alla MP ed alla (GH); a tal uopo si descriva la rappresentazione del piano projettante della (GH) ribaltato intorno alla GH, il che si ottiene tirando HH'' perpendicolare alla GH ed uguale a Hh; poscia la distanza LV'' del punto L della GH'' si porterà in LV'.

Problema XIX. *Determinare l'inclinazione fra una retta ed un piano.*

59. Dicesi inclinazione di una retta su di un piano l'angolo che essa forma colla sua projezione su quel piano; si potrà adunque determinare l'intersezione della retta col piano e la projezione di un altro punto della retta su quel piano, poscia descrivere la rappresentazione del triangolo rettangolo che ha per vertici quell'intersezione, quella projezione e quel punto. Si vede che l'inclinazione cercata è il complemento dell'angolo compreso fra la retta ed una perpendicolare al piano, così il problema può anche ridursi al V.

Problema XX. *Trovare la minima distanza di due rette non situate in uno stesso piano.*

60. La Geometria descrittiva ci assicura facilmente che la minima distanza tra due rette è la retta perpendicolare ad entrambe; infatti se abbiasi preso per piano coordinato orizzontale il piano che passa per una delle rette date AB (Fig. 19) ed è parallelo all'altra (CD), la retta xy corrispondente al punto X, in cui la projezione CD taglia la AB, sarà perpendicolare ad entrambe le rette, e sarà la minima distanza ricercata; poichè la distanza di due quali si vogliano punti delle rette obbiettive è (§ 23) uguale all'ipotenusa di un triangolo di cui un cateto è appunto la xy.

61. Le predette considerazioni ci offrono anche il metodo di soluzione del proposto problema, esso consisterà nel determinare (Fig. 20) (§ 39) il piano GJh che passa per la retta data (AB) ed è parallelo all'altra (CD), projettare su di esso (§ 47) la retta (CD) nella (KX), determinare il punto (X) dove questa projezione (KX) incontra la (AB), finalmente dal punto (X) innalzare la (XY) perpendicolare al piano GJh, la quale incontrerà la (CD) e sarà la minima distanza ricercata. — Giova osservare che la projezione (KX) è parallela alla (CD) e che essa può determinarsi anche col processo del § 43, essendo l'intersezione del piano GJh col piano passante per la (CD) e per la retta (CK) perpendicolare al GJh. — La projezione (K) del punto (C) sul piano GJh potrebbe trovarsi anche mediante la rappresentazione di un piano condotto per (C) perpendicolarmente ad una delle tracce GJ Jh; il che tornerebbe opportunissimo se l'altra traccia cadesse molto da lungi. — La minima distanza (XY) è anche l'intersezione di due piani che passano per le (AB) (CD) e sono perpendicolari ad un piano GJh parallelo ad entrambe le rette. Sotto questo punto di vista il presente problema è un caso particolare del § 45, poichè si tratta di tirare una retta che tagli le due rette date e vada a quel punto situato a distanza infinita, a cui si dirigono le perpendicolari al piano GJh. — La costruzione di questi varii modi di soluzione servirà di utile esercizio; l'ultimo mi sembra il più elegante; sarà facile determinare i due piani mediante le perpendicolari al piano GJh condotte per (A) e per (C).

62. *Disegno.* Sieno (AB) (CD) (Fig 20) le rette date; la la $G(Bh)$ parallela alla (CD) serve colle sue tracce a determinare il piano passante per la (AB) e parallelo alla (CD). Per (C) s'immagini un altro piano ausiliario perpendicolare alla traccia GJ; ed esso si rappresenti ribaltato sul coordinato orizzontale prendendo CC' perpendicolare a CB ed uguale a γc; così pure $BB' = \beta b$; l'intersezione dei due piani ausiliarii sarà rappresentata in LB', ad essa si tirerà perpendicolare la $C'K'$, poscia la $K'K$ perpendicolare alla CB, la KX parallela alla CD, finalmente le XY xy perpendicolari

alle tracce GJ Jh saranno le projezioni della cercata minima distanza.

Nota al Cap. II.

Al § 30 abbiamo accennato un modo per dirigere una retta verso un punto che cada fuori della carta del disegno: siccome avviene non di rado il bisogno di una tal costruzione; così crediamo utile l'aggiungere due teoremi a ciò particolarmente opportuni.

Teorema I. *Dati sopra un piano due triangoli* 1 2 3 4 5 6 (Fig. 21) *se le rette che uniscono i loro vertici omologhi s'incontrano in un medesimo punto* 0, *i tre punti d'intersezione* I II III *dei loro lati omologhi sono in linea retta; e viceversa.*

S'immagini che i dati triangoli sieno projezioni orizzontali di due triangoli obbiettivi 1 2(3) 4 5(6), i cui vertici (3) (6) sieno sopra una retta projettata verticalmente in 0 3′6′; nel disegno è presa la 0 1 4 per linea fondamentale. I piani di quei triangoli si taglieranno lungo una retta obbiettiva $III(II)$, e siccome i lati 2(3), 5(6) sono situati nel piano 0 5(6), così essi s'incontreranno in un punto (I) della $III(II)$: dicasi lo stesso del punto (II) intersezione dei lati 1(3) 4(6); ed essendo $III(II)(I)$ una retta, lo sarà anche la sua projezione III II I. — Viceversa se i punti d'intersezione I II III dei lati dei triangoli 1 2 3 4 5 6 sieno in linea retta, immagineremo una retta $III(II)$ projettata orizzontalmente nella III I, e due triangoli 1 2(3) 4 5(6) situati rispettivamente nei piani $III1h$ $III4h$; vedremo che i due piani 1 4(II) 2 5(I) si tagliano nella retta (3) (6), la quale passa pel punto d'intersezione 0 delle 1 4 2 5, e che perciò avviene lo stesso della sua projezione 3 6.

La dimostrazione precedente è un altro esempio (§ 54) dell'evidenza che la Geometria piana può talvolta ottenere dalla Geometria a tre dimensioni. — Il Teorema II. non può forse dimostrarsi con altrettanta eleganza, ma conduce a so-

luzioni più semplici, perchè esso riguarda nove punti anzichè dieci.

Teorema II. *Se un esagono* 1 2 3 4 5 6 *ha i vertici posti alternaticamente sopra due rette* 1 3 5 2 4 6 (Fig. 22), *i punti d'intersezione I II III dei suoi lati opposti sono in linea retta.*

S'immagini che il proposto esagono sia la projezione orizzontale di una figura piana (1 2 3 4 5 6), nella quale i due punti (3) (6) abbiano egual distanza dal piano coordinato orizzontale; preso ad arbitrio un punto (S) che abbia esso pure la loro stessa altezza, si descriva la traccia orizzontale della piramide che ha il vertice in S e per base la figura (1 2 3 4 5 6 I II III), cioè si determinino le tracce di ciascuna retta ($S1$), ($S2$), ec., si otterrà per tal maniera la figura $1_h III_h 4_h 2_h II_h 5_h$ coi lati alternativamente paralleli, e se si possa dimostrare che i punti I_h III_h II_h sono in linea retta, lo saranno anche gli obbiettivi (I) (II) (III), e quindi anche i proposti I II III. — Colla Geometria analitica prendendo le ascisse parallele alle $1_h 5_h = a$, $4_h III_h = b$, $2_h II_h = a + b$, le ordinate parallele alle $1_h III_h = c$, $4_h 2_h = d$, $5_h II_h = c + d$, e l'origine delle coordinate in 1_h vedremo che le rette $1_h 2_h$, $5_h 4_h$ $II_h III_h$ hanno rispettivamente le equazioni $(c + d)x + by = o$, $c(x - a) + (a + b)y = o$, $dx - a(y - c) = o$, delle quali la prima è uguale alla somma delle altre due; dunque le tre rette si tagliano in un medesimo punto I_h, le cui coordinate soddisfaranno á tutte tre quelle equazioni.

Problema I. *Dal dato punto I, o parallelamente a data retta, tirare la retta che concorre insieme colle date AB CD* (Fig. 23) *in uno stesso punto.*

Proponiamoci più propriamente di trovare il punto dove una data retta AF è tagliata da quella che unisce I col punto d'incontro delle AB CD. Tirata ad arbitrio la BDF segante le date rette, conduciamo le ICF CA IB, ed unito il punto d'incontro delle due ultime con D, questa retta ED taglierà la AF nel cercato punto II. — Basta osservare i numeri posti a canto delle lettere ($A6$, $B1$, $C4$, $D3$, $E2$, $F5$) per

iscorgere l'accordo di questa soluzione col teorema precedentemente dimostrato.

Bene spesso si potrà supporre che la retta BDF sia tutta a distanza infinita, e quindi tirar parallele le rette che prima concorrevano nei punti $B\ D\ F$; ciò si vede nella Figura 24, dove per determinare la $I\ II$ diretta al punto di concorso delle $Aa\ Cc$ si tirarono IC parallela alla AF, IE parallela alla Aa, ed EII alla Cc.

Chi abbia posto mente al modo con cui si deggiono modificare le costruzioni, quando invece di un punto a distanza finita se ne ha uno a distanza infinita, cioè quando una retta anzichè passare per dato punto deve esser parallela a data retta, intenderà facilmente che per determinare la retta parallela alla Ll (Fig. 25) che concorre insieme colle $AB\ CD$, si potrà tirare ad arbitrio la BFD, poscia guidare le $FC\ BE$ parallele alla Ll, la retta CAE, e la ED che taglierà la AF nel punto II appartenente alla retta desiderata. — Questa costruzione può semplificarsi supponendo che i punti $B\ E$ sieno a distanza infinita, e perciò tirando FD (Fig. 26) parallela alla Aa, FC parallela alla Ll, e DII parallela alla CA.

Problema II. *Date due paja di rette che s'incontrano fuori della carta, determinare qualsivoglia punto della retta che unisce i loro punti d'intersezione.*

Sieno $AB\ CD$ e $BE\ CF$ (Fig. 27) le due paja di rette, sia pur data la AF, e si cerchi in qual punto essa è tagliata dalla retta $I\ III$ che unisce i punti d'intersezione delle prime; si tirino le rette $BDF\ CEA$, e la DE taglierà la AF nel punto cercato II.

Il punto a distanza infinita della retta incognita $I\ III$ si determina supponendo che sia all'infinito la AF; perciò tirando BD (Fig. 28) parallela alla CI, CE parallela alla $BIII$, e la DE sarà parallela alla $I\ III$.

Nel caso che le rette $AB\ CD$ sieno parallele (Fig. 27), e così pure le $BE\ CF$; i punti $III\ I$ passano a distanza infinita, quindi avviene lo stesso di II appartenente alla retta $I\ III$; perciò la DE è parallela alla data AF. Così *date due paja di rette parallele si può, adoperando la sola riga, ti-*

rarne quante altre si vogliano. Questo è un bel teorema della elegantissima *Geometria della riga* (la quale insegna a risolvere parecchi problemi senza il sussidio del compasso), ma che non è per noi di alcuna utilità, essendo facilissimo tirare una retta parallela ad un'altra.

Il teorema II. ci ha date soluzioni molto semplici, ma spesso le intersezioni delle rette riescono sotto angoli troppo acuti: io raccomando agli studiosi di esercitarsi applicando alla soluzione dei precedenti problemi il teorema I., il quale essendo suscettibile di maggior arbitrarietà può dare soluzioni molto più opportune. Noi avremo più volte occasione di tornare sulla considerazione delle figure *omologhe*; nella projezione orizzontale del disegno 21 possiamo assumere uno qualunque di quei dieci punti, per esempio 0, come *centro di omologia*, e vediamo partire da esso tre raggi, su ciascuno dei quali sono presi due punti che si dicono tra loro *omologhi* (cioè 1 e 4, 2 e 5, 3 e 6), sicchè si hanno due figure *omologhe* 1 2 3 4 5 6, i cui lati *omologhi* s'incontrano nei punti dell'*asse d'omologia I II III*. Nella costruzione del § 30 (Fig. 9) se prendiamo per centro d'omologia il punto di concorso delle rette AB CD $\xi\eta$, i lati omologhi dei due triangoli $AD\xi$ $BC\eta$ sono paralleli, cioè concorrono in tre punti posti a distanza infinita, i quali deggiono sempre considerarsi come appartenenti ad una stessa retta. In questo caso dell'asse d'omologia a distanza infinita le due figure si dicono *omotetiche* (simili e similmente poste).

CAP. III.

Problemi relativi all'angoloide triedro.

63. Tre rette concorrenti in un punto non situate in uno stesso piano ed i tre piani da loro determinati formano un angolo solido, o meglio un *angoloide triedro*; lo studio di questa figura è importante quasi altrettanto che quello del triangolo. Le proprietà dell'angoloide triedro si sogliono in-

segnare come proprietà del triangolo sferico, che si ottiene descrivendo una porzione di sfera che abbia il centro nel vertice dell'angoloide, e sia compresa tra le facce di questo, cioè tra i piani dei suoi spigoli presi due a due. Nella Geometria descrittiva si considera l'angoloide triedro indipendentemente dalla sfera, e s'insegna a descriverlo ed a determinarne le varie parti, le quali sono i tre angoli formati dai tre spigoli o lati del triedro, ed i tre *diedri* formati dai piani o facce del triedro. Ora tratteremo non solo delle sei questioni generali che comprendono la compiuta risoluzione del triedro, ma anche di alcuni problemi che ad esse naturalmente si riferiscono.

Problema I. *Dati i tre angoli di un angoloide triedro, costruirlo e determinarne i diedri.*

64. Un triedro è formato da tre rette DA DB (DC) (Fig. 29) che insieme concorrono in D; si supponga che la faccia $AD(C)$ giri intorno a DA fino ad applicarsi sulla prolungazione della faccia ADB; similmente l'altra faccia $BD(C)$ si ribalti, intorno a BD, su quel medesimo piano; così si avranno le rappresentazioni delle tre facce del triedro proposto: ciò si dice il suo *sviluppo*. Conoscendo gli angoli di un triedro sarà dunque facile descriverne lo sviluppo $C'DA$ ADB BDC''; dove è da notarsi che i punti C' A B possono prendersi ad arbitrio, ma che lo spigolo DC'' essendo una seconda rappresentazione dello spigolo rappresentato in DC' è necessariamente $DC''=DC'$. — Ora in qualunque posizione voglia descriversi un triedro eguale al proposto si comincerà col descrivere (§ 35) l'angolo dato ADB, poscia il punto C sarà l'intersezione di tre sfere (§ 54) coi centri D A B ed i raggi rispettivamente uguali a DC' AC' BC'': dopo avere descritto il triedro, cioè le projezioni dei suoi spigoli, si potrà determinare (§ 37) le tracce dei piani che passano pei medesimi, e quindi anche (§ 57) i diedri da loro formati. — Che se il triedro non debba descriversi in una determinata posizione si sceglieranno i piani coordinati in modo di facilitare la sua costruzione e la determinazione dei suoi diedri. — Se la somma di due dei dati angoli fosse minore del

terzo, la costruzione renderebbe palese l'impossibilità del problema.

65. *Disegno*. Sul piano coordinato orizzontale sia descritto lo sviluppo (Fig. 29) del triedro che ha gli angoli dati $C'DA$ ADB BDC''; la fondamentale sia perpendicolare a DA, si prendano su di essa A e C', e si faccia $DC''=DC'$. Le sfere dei raggi DC' AC' si tagliano in un circolo posto nel piano coordinato verticale, che si descriverà col centro A ed il raggio AC'; le sfere poi che hanno i raggi DC'' BC'' si tagliano in un circolo, il cui piano è perpendicolare alla DB; perciò le sue tracce si avranno tirando $C''C$ perpendicolare alla DB, e Cc perpendicolare alla fondamentale; il punto c dove questa traccia verticale incontra il precedente circolo è la posizione obbiettiva del punto (C) rappresentato in C' C'' e projettato orizzontalmente in C: così abbiamo descritto il triedro $DAB(C)$, che è formato dal piano orizzontale DAB, e dai piani DAc DJc. Si noti che se la DB incontra la fondamentale in J si ha anche $Jc=JC'$. — Il diedro formato dai piani DAB DAc è misurato dall'angolo CAc; quello formato dai piani DAB DJc è misurato dall'angolo compreso tra la obbiettiva (Bc) e la sua projezione BC, perciò si prenderà $Cb'=CB$, $b'c$ risulterá $=BC''$, e l'angolo $Cb'c$ sarà il ricercato. Si potrebbe determinare (§ 58) anche il diedro che ha lo spigolo (DC), e ciò profittando delle rappresentazioni DC' DC'', alle quali si tirerebbero le perpendicolari dai punti d'intersezione delle DA DB colla traccia orizzontale del piano ausiliario perpendicolare alla (DC).

66. Se nella Figura 29 scambiamo tra loro i nomi dei due piani coordinati, vediamo che il problema risolto è identico con quello che in Geodesia si dice *riduzione di un angolo all'orizzonte*: cioè conoscendo l'angolo obbiettivo $(BDC)=$ $=BDC''$, e le inclinazioni dei suoi lati sul piano *orizzontale* cdJ (le quali sono i complementi degli angoli ADB ADC'), si determina l'angolo Jdc, che è la projezione di (BDC) sul piano orizzontale.

Problema II. *Per un determinato punto tirare una retta che abbia date inclinazioni sui piani coordinati.*

67. Conducendo per quel punto due rette perpendicolari ai piani coordinati, la retta cercata dovrà formare con esse un triedro, del quale si conoscono anche gli altri due angoli, che sono i complementi delle date inclinazioni; così il problema è ridotto (§ 64) alla ricerca delle intersezioni di tre sfere: quella che ha il centro nel punto dato taglia le altre due in circoli paralleli ai piani coordinati; si descriveranno ambedue, oppure uno solo ed il piano dell'altro.

68. *Disegno.* Pel punto (D) (Fig. 30) debba tirarsi una retta (DC) che formi colle (DA, d), (D, db) perpendicolari ai piani coordinati gli angoli ADC' bdc''; alla DC' che incontra la fondamentale in C' si faccia uguale la dc'', si tiri $c''cb$ parallela alla fondamentale; la $DC = bc''$, e la $dc = AC'$ saranno le due projezioni della cercata. Infatti il punto (C) dee trovarsi sulle tre sfere che hanno i centri (A, d), (D, d), (D, b), ed i raggi AC', $DC' = dc''$, bc''; le due prime si tagliano nel circolo descritto sul coordinato verticale col centro d ed il raggio $dc = AC'$, le due ultime nel circolo orizzontale projettato sulla bc'', e che ha il raggio $DC = bc''$.

Problema III. *Dati i tre diedri di un triedro determinarne gli angoli.*

69. Se da un punto si tirano tre rette rispettivamente perpendicolari alle tre facce d'un triedro, e ciascuna rivolta dalla parte interna alla esterna della faccia corrispondente del triedro (oppure tutte tre dirette dalla parte esterna all'interna) esse formano un secondo triedro che dicesi *polare* o *supplementare* del primo, perchè i suoi angoli ed i suoi diedri sono rispettivamente supplementi dei diedri e degli angoli del primo. — Viene da ciò che i problemi relativi al triedro dipendono fra loro a due a due; e che in particolare quello che ora ci occupa dipende dal primo, perchè la conoscenza dei diedri di un triedro trae seco quella degli angoli del triedro supplementare.

70. Talvolta invece del triedro polare o supplementare giova meglio costruire il triedro formato ancora da tre rette perpendicolari alle facce del primo triedro, ma alcune di esse dirette dalla parte interna all'esterna del triedro, ed alcuna dalla

esterna all'interna; allora ciascun triedro ha due angoli uguali ed uno supplemento dei diedri dell'altro triedro. Questo è il caso espresso dal *disegno* seguente, nel quale per costruire il triedro $DAB(C)$, di cui sono dati i tre diedri, si costruisce da prima il triedro $(C)Lmn$ collo spigolo cn perpendicolare alla faccia DAB e diretto dalla sua parte interna all'esterna (s'intende rispetto al triedro $DABc$), e cogli spigoli cm (cL) perpendicolari alle facce DAc DBc e diretti dalle loro parti esterne alle interne, il quale ha per conseguenza l'angolo (Lcm) supplemento del diedro (del triedro $DABc$) che ha lo spigolo Dc, e gli angoli mcn (Lcn) uguali ai diedri che hanno gli spigoli DA DB.

74. *Disegno*. Suppongo che i dati diedri sieno acuti. Tirata la nc (Fig. 31) perpendicolare alla fondamentale, gli angoli ncm ncl' sieno uguali a due dei dati triedri, ed mcl'' sia supplemento del terzo; si prenda $cl''=cl'$, poscia $nL=nl'$, $mL=ml''$; questa costruzione è identica con quella del § 65, e la $l''l$ è perpendicolare alla cm. Il triedro che ha il vertice (c) ed i cui piani hanno sul coordinato orizzontale le tracce mn nL mL ha due angoli uguali ed uno supplemento dei diedri del cercato triedro; questo sarà perciò formato dai tre spigoli DA DB $D(C)$ perpendicolari rispettivamente ai piani cmn Lnc Lmc, ed i suoi piani saranno perpendicolari agli spigoli (cL) cm cn: dunque si tirino le cA cJ AD CD JD rispettivamente perpendicolari alle cm cl mn Lm Ln ed il triedro $DAB(c)$ avrà negli spigoli DA DB $D(c)$ i diedri dati. Ora un angolo di questo triedro $DABc$ è l'angolo ADB, gli altri due si determinano colla costruzione della Figura 29.

Problema IV. *Descrivere un triedro di cui si conoscono due angoli e il diedro intercetto.*

72. *Disegno*. Sieno (Fig. 29) JDA ADC' gli angoli, e Jdc la misura del diedro intercetto; si faccia $dc=dC'$, $DC''=DC'$, $JC''=Jc$; tirata cC perpendicolare alla fondamentale, risulterà CC'' perpendicolare alla DJ; JDC'' sarà il terzo angolo, e $Cb'c$ la misura del diedro opposto all'angolo ADC'.

Problema V. *Descrivere un triedro conoscendone i due diedri e l'angolo intercetto.*

73. Ciò importa per due rette date in un piano far passare due piani, che formino con quello dati diedri: un punto qualunque della projezione sul piano dato dell'intersezione dei due piani cercati avrà le distanze dalle due rette nel rapporto delle cotangenti dei due diedri.

Disegno. Sia ADB (Fig. 32) il dato angolo; sul piano verticale perpendicolare a DA, si formino gli angoli $b'dc$ $db'c$ eguali ai dati diedri, il punto C abbia dalle rette DA DB distanze uguali a γd $\gamma b'$; sarà (DC, dc) il terzo spigolo del triedro, la cui costruzione sarà compiuta in $DJhd$.

Problema VI. *Descrivere un triedro di cui sono dati due angoli ed un diedro opposto.*

74. Per uno dei lati dell'angolo dato, non opposto al diedro, si faccia passare un piano che formi col piano di quell'angolo il dato diedro; poscia intorno all'altro lato di quell'angolo si faccia girare l'altro angolo dato finchè venga a formare un triedro col piano già costruito: ciò si riduce a trovare l'intersezione di questo piano con un circolo di cui quel lato è l'asse; gioverà prendere per piano coordinato quello di tal circolo.

Disegno. Sia ADB (Fig. 33) uno degli angoli dati, ed ADC' quello che è opposto al dato diedro; alla AB perpendicolare a DB si faccia uguale la Ab', e sia $Ab'k$ uguale al dato diedro, ed Ak perpendicolare alla fondamentale; saranno DJk le tracce di una delle facce del triedro; si tagli la Jk in c col circolo di raggio dC', e sarà (DC, dc) il terzo spigolo del triedro. Quando $ADC' < ADB$ il problema può ammettere due soluzioni.

Problema VII. *Dato un angolo e la sua projezione sopra uno dei coordinati e data l'inclinazione su questo piano di uno dei suoi lati, determinare la direzione dell'altro lato.*

75. Questo problema differisce dal precedente soltanto per la differente posizione che dee darsi al triedro, di cui si conoscono due angoli e un diedro opposto. Non volendo adoperare un nuovo piano, considereremo, invece del circolo men-

zionato nel § 74, due sfere, l'una col centro nel vertice del triedro, l'altra col centro nel piano coordinato su cui è data la projezione dell'angolo, e precisamente nella traccia del lato di cui si conosce l'inclinazione sul coordinato; questa seconda sfera taglierà il piano, che forma un dato diedro col piano dell'angolo dato, in un circolo minore, che sarà poi tagliato dal circolo massimo della prima sfera che giace in quel piano nei punti determinanti le due posizioni del lato ignoto.

Disegno. Sia BDC'' (Fig. 34) il dato angolo e Bdg la sua projezione sul piano verticale, inoltre DBd la data inclinazione del lato DB col coordinato verticale; si tratta di trovare l'intersezione del circolo descritto nel piano Ddg col raggio DC'' (preso ad arbitrio sulla retta DC''), e della sfera di raggio BC''. Col centro B e col raggio BC'' si tagli la dg in $f\ g$, ed il piano $Ddfg$ si rappresenti in $DdF'G'$, ove si descriva il circolo col diametro $F'G'$ (rappresentazione della intersezione di tal piano colla predetta sfera), nonchè il circolo col centro D ed il raggio DC''; la loro intersezione C' riportata nella sua posizione naturale (C,c) determinerà la direzione dell'altro lato (DC) dell'angolo rappresentato in BDC'' e projettato in Bdc.

Problema VIII. *Descrivere un triedro conoscendone due diedri ed un angolo opposto.*

76. Costruito il diedro adjacente al dato angolo, rimarrà da determinare un piano che abbia data inclinazione con un piano dato, e passi per data retta; se un punto di questa si projetti su quel piano, si dovrà descrivere un circolo col centro in tal projezione, il quale dovrà esser toccato dalla traccia del piano cercato.

Disegno. Sia ADC' (Fig. 29) il dato angolo, e fatto $dc = dC'$ sieno $b'dc$ $db'c$ le misure dei dati diedri, dei quali il secondo debba esser opposto a quell'angolo; si abbassi cC perpendicolare alla fondamentale, col centro C ed il raggio Cb' si descriva un circolo, al quale si conduca dal punto D la tangente DBJ, e sarà descritto il triedro.

Nota al Cap. III.

Dal disegno 29 si possono dedurre con molta facilità parecchie delle formule trigonometriche che servono per la risoluzione del triedro, ossia del triangolo sferico formato dai tre archi di circolo massimo nei quali i tre piani del triedro tagliano una sfera, che abbia il centro nel vertice D. — Non credo inutile di qui presentarle ai giovani studiosi.

Supponendo che la retta obbiettiva (DC) sia uguale all'unità, e chiamando $a\ b\ c$ i tre angoli $BDC'' = (BDC)$, $ADC' = (ADC)$, ADB, ed $A\ B\ C$ i diedri ad essi opposti, i due primi misurati dagli angoli Cdc $Cb'c$ ed il terzo formato dai due piani $DB(c)$ $DA(c)$, le definizioni della trigonometria piana danno $DA = \cos b$, $dc = \operatorname{sen} b$, $DB = \cos a$, $cb' = \operatorname{sen} a$; e perciò (I) $cC = \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} B$, dal che ne viene che *in ogni triedro i seni dei diedri sono proporzionali ai seni degli angoli opposti*. — Se caliamo su DB la perpendicolare AP ed osserviamo che $DP = DA \,.\, \cos c = \cos b \,.\, \cos c$, $AC = Ac \,.\, \cos A = \operatorname{sen} b \,.\, \cos A$, $PB = AC \,.\, \operatorname{sen} c$ avremo (II) $DB = \cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$ che è la formula fondamentale della triedrimetria relativa a tre angoli ed un triedro. — Così pure si trova $CB = \operatorname{sen} a \,.\, \cos B$, $AP = \cos b \,.\, \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \,.\, \cos B + \operatorname{sen} b \cos A \cos c$, questa mediante la (I) si riduce ad un'altra formula tra quattro elementi, la quale divisa per $\operatorname{sen} b$ può scriversi così (III) $\cot b \,.\, \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} A \cot B + \cos A \cos c$. — Finalmente applicando la (II) al triedro polare o supplementare (§ 69) si trova pel triedro primitivo la (IV) $\cos A + \cos B \cos C = \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \cos a$. — Queste sono le quattro fondamentali relazioni tra gli elementi del triedro.

Le formule si semplificano se uno dei diedri, oppure uno degli angoli, sia retto: ecco quelle corrispondenti ad $A = 90.^\circ$ (1) $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b$, (2) $\cos a = \cos b \cos c$, (3) $\operatorname{tg} B \operatorname{sen} c = \operatorname{tg} b$, (4) $\cos a \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 1$. Se nelle (III) (IV) permutiamo tra loro i diedri $A\ B$ nonchè gli angoli $a\ b$, poscia poniamo $A = 90.^\circ$ abbiamo le altre due (3.ª) $\operatorname{tg} a \cos B = \operatorname{tg} c$, (4.ª) $\cos B = \operatorname{sen} C \cos b$.

Queste sei relazioni fra tre elementi di un triedro avente un diedro retto danno modo facile di calcolare uno di essi conoscendo gli altri; tutte le possibili combinazioni si riducono con semplici permutazioni tra le lettere $B\ C\ b\ c$ alle seguenti sei, alle quali rispettivamente si riferiscono le formule indicate accanto di esse: $a\,b\,c$ (2); $B\,a\,b$ (1); $B\,a\,c$ (3.ª); $B\,a\,C$ (4); $B\,b\,c$ (3); $B\,b\,C$ (4.ª).

Spesso si risolve il triedro generale riducendolo a due triedri, ciascuno dei quali abbia un diedro retto; ciò si vede eseguito nella nostra figura dove il piano projettante lo spigolo $D\,(c)$ forma i due triedri $DAC\,(c)$, $DBC\,(c)$. Diciamo $m\ n$ i due angoli $ADC\ CDB$, ed $M\ N$ i diedri ad essi opposti formati lungo lo spigolo $D\,(c)$, e prendiamoli positivi o negativi in guisa che abbiano sempre luogo le relazioni $c=m+n$, $C=M+N$. — Mutando $C\ c$ in $N\ n$ le equazioni (3.ª) (4) danno

$$(3.^a)\ \mathrm{tg}\,n=\mathrm{tg}\,a\cos B,\quad (4)\ \cot N=\cos a\,\mathrm{tg}\,B.$$

La figura ci mostra che $CA=DC\,.\,\mathrm{sen}\,m=Cc\,.\,\cot A$, $CB=DC\,.\,\mathrm{sen}\,n=Cc\,.\,\cot B$ quindi dividendo

$$(5)\ \mathrm{sen}\,m:\mathrm{sen}\,n=\cot A:\cot B;$$

similmente $DA:DB$ ci dà

$$(6)\ \cos m:\cos n=\cos b:\cos a.$$

Nei due triedri a diedro retto i teoremi espressi dalle (1) (4.ª) danno $\mathrm{sen}\,b\,\mathrm{sen}\,M=\mathrm{sen}\,m$, $\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,N=\mathrm{sen}\,n$, $\cos M=\mathrm{sen}\,A\cos m$, $\cos N=\mathrm{sen}\,B\cos n$, col cui mezzo, rammentando il teorema (I), le precedenti (5) (6) danno $\mathrm{sen}\,M:\mathrm{sen}\,N=\mathrm{sen}\,m\,\mathrm{sen}\,a:\ \mathrm{sen}\,n\,\mathrm{sen}\,b=\cot A\,\mathrm{sen}\,A:\ \cot B\,\mathrm{sen}\,B$, $\cos M:\cos N=\mathrm{sen}\,A\cos m:\mathrm{sen}\,B\cos n=\mathrm{sen}\,a\cos b:\ \mathrm{sen}\,b\cos a$, e finalmente

$$(7)\ \mathrm{sen}\,M:\mathrm{sen}\,N=\cos A:\cos B,$$
$$(8)\ \cos M:\cos N=\cot b:\cot a,$$

la qual proporzione potrebbe dimostrarsi direttamente tagliando il triedro con un piano perpendicolare allo spigolo $D\,(C)$.

Ecco i varii casi della risoluzione del triedro e l'uso che si può fare delle precedenti formule.

1.° Dati due angoli $a\ b$ e un diedro opposto B si troverà A colla (I); n colla (3.ª), m colla (6), poscia $m+n=c$
N colla (4), M colla (8), $M+N=C$.

2.° Dati due diedri A B ed un angolo opposto a si troverà b colla (I); n colla (3.ª), m colla (5), $m+n=c$
N colla (4), M colla (7), $M+N=C$.

3.° Dati due angoli a c e il diedro intercetto B si troverà n colla (3.ª), $c-n=m$, b colla (6), ed A colla (5).

4.° Dati due diedri B C e l'angolo intercetto a si troverà N colla (4), $C-N=M$, b colla (8), ed A colla (7).

5.° e 6.° Se siano dati i tre angoli o i tre diedri possono servire le (II) (IV): come le (II) (III) possono servire a risolvere il caso 3.°, e le (IV) (III) il 4.°, quantunque nel calcolo logaritmico riescano alcun poco meno comode.

Chi non abbia frequenti occasioni di risolvere triedri potrà servirsi delle formule fondamentali senza curare poca abbreviazione di calcolo; l'importante si è di abituarsi con qualche esercizio a rettamente adoperarle.

CAP. IV.

Problemi relativi ai poliedri e ad altre figure composte di piani.

Problema I. *Descrivere un tetraedro conoscendone i sei lati.*

77. Sopra un dato piano formeremo un triangolo eguale ad una delle facce, e l'altro vertice del tetraedro sarà evidentemente l'intersezione di tre sfere date. Servirà di esercizio la costruzione di un particolare disegno.

Problema II. *Trovare il centro della sfera circoscritta ad un dato tetraedro.*

78. Il *luogo geometrico* di tutti i punti che stanno ad eguali distanze da due punti dati è il piano dimezzante perpendicolarmente la retta che unisce questi due punti (vale a dire quella proprietà appartiene a ciaschedun punto di quel piano e non appartiene ad alcun altro punto); perciò il centro ricercato dovendo essere ad uguali distanze dai quattro vertici del tetraedro, si troverà su tutti sei i piani che tagliano perpendicolarmente per metà i sei lati del tetraedro; tre di que-

sti piani saranno sufficienti a determinarlo, purchè essi non dipendano dai tre lati di una medesima faccia del tetraedro. Dividere per metà uno dei lati del tetraedro è cosa facilissima, bastando dimezzarne ambedue le projezioni; il § 48 c'insegna a condurre pel punto di mezzo del lato il piano perpendicolare a questo; pel § 43 determineremo l'intersezione di due fra questi piani; poscia o l'incontro di questa con un terzo piano (§ 46), o il punto comune (§ 27) a due di tali intersezioni di piani, darà il centro desiderato.

79. *Disegno.* Consiglio lo studioso a costruire da sè il disegno corrispondente ad una disposizione affatto arbitraria dei quattro vertici; le distanze del centro della sfera da ciascuno dei vertici (§ 23) se riusciranno esattamente eguali gli daranno la soddisfazione di aver operato a dovere e con diligenza. — La costruzione riuscirà più spedita se (Fig. 35) il tetraedro abbia una faccia orizzontale: le rette che dimezzano perpendicolarmente i lati della base ABC determinano il centro X del circolo circoscritto, e sono le tracce dei piani, luoghi geometrici dei punti che sono ad eguali distanze da due dei punti A B C; la retta verticale projettata in X (intersezione di quei piani) è il luogo geometrico dei punti che sono equidistanti dai tre A B C. Se uno dei tre lati fosse parallelo al coordinato verticale sarebbe facile descrivere il piano che lo dimezza perpendicolarmente; se ciò non sia, gioverà sostituire a quei tre lati la (DR) parallela al coordinato verticale e terminata (supponiamo che ciò sia possibile) in un punto (R) del circolo (ABC); essa è dimezzata perpendicolarmente dal piano tutto projettato sulla propria traccia verticale, che è la retta dimezzante perpendicolarmente la dr; questa retta passa quindi per la projezione verticale x del cercato centro.

Problema III. *Trovare il centro della sfera inscritta in un dato tetraedro* (Fig. 35).

80. Il centro dovendo essere ad eguali distanze dalle facce del tetraedro si troverà sopra ciascheduno dei piani che dimezzano uno dei diedri del tetraedro; poichè ognuno di questi è il *luogo geometrico* di tutti i punti che sono ad eguali distanze dalle due facce formanti il diedro: tre di questi piani

saranno sufficienti, purchè non appartengano ai tre lati di un medesimo angoloide del tetraedro. Il piano dimezzante un diedro si ottiene tagliando questo con un piano perpendicolare al suo spigolo, e dimezzando l'angolo che misura il diedro. — Il disegno riuscirà più facile se la base ABC del tetraedro sarà orizzontale; infatti per dimezzare il diedro che ha lo spigolo BC s'immaginerà il piano condotto pel vertice (D) perpendicolarmente a BC, e che supponiamo lo incontri in E; tal piano si faccia girare intorno alla sua orizzontale (DL) finchè esso si riduca parallelo al coordinato orizzontale, e si descriva la rappresentazione della sezione che esso faceva nel tetraedro; dopo di che si dovrà dimezzare l'angolo in E' con una retta, la quale incontri la predetta orizzontale (DL) in (L), e la retta condotta per (L) parallelamente al lato BC sarà l'intersezione del piano dimezzante il diedro suddetto col piano orizzontale condotto pel vertice (D). In questa costruzione il triangolo $DE'L$ ha due angoli uguali, perciò $DL = DE' =$ alla distanza obbiettiva del vertice (D) dal lato BC. Similmente le intersezioni col piano orizzontale condotto per D dei piani dimezzanti i diedri degli spigoli AC AB passeranno pei punti (M) (N); l'icnografia DM essendo perpendicolare alla AC ed uguale alla distanza obbiettiva di (D) da AC; dicasi lo stesso della DN rispetto ad AB. Le intersezioni a due a due dei piani dimezzanti i diedri si otterranno unendo i vertici della base ABC con quelli del triangolo *omotetico* (simile e similmente posto) formato dalle tre suddette rette passanti per L M N e parallele ai lati di ABC; il punto comune a queste tre intersezioni sarà il centro della sfera inscritta nel tetraedro.

Problema IV. *Descrivere un conosciuto parallelepipedo in modo che una sua faccia sia posta in un dato piano.*

81. Supponendo che il dato piano giri intorno alla sua traccia orizzontale fino ad adagiarsi sul piano coordinato, descriveremo da prima il parallelepipedo quando la faccia di cui si tratta è situata nel piano orizzontale, poscia lo descriveremo nella posizione che esso acquista quando gira insieme col piano che riprende la posizione data. Per passare dalla prima alla seconda posizione bisognerà che il piano coordinato verticale sia

perpendicolare alla retta intorno a cui si eseguisce la rotazione, e se non lo fosse si adoprerebbe un piano ausiliario, che farebbe precisamente le veci del coordinato verticale.

82. *Disegno.* Se si conoscessero i tre angoli che formano l'angoloide triedro $ABCD$ (Fig. 36), esso si costruirebbe come s'insegnò nel Capitolo precedente; supponiamo invece che si conosca l'angolo (BAC), che noi costruiremo da prima sul piano orizzontale in $B_1A_1C_1$; sia AD_1 la projezione su quel piano del terzo spigolo del parallelepipedo, e sia dato l'angolo che questo spigolo forma con quella projezione; presa $\delta_1 a' = AD_1$ e fatto l'angolo $\delta_1 a' d_1$ eguale al dato, saranno AD_1 ad_1 le projezioni del terzo spigolo del parallelepipedo quando esso è posto sul piano coordinato. Ora se la base (ABC) del parallelepipedo deve trovarsi sul piano Aah perpendicolare al coordinato verticale, le projezioni B C saranno situate sulle rette B_1B C_1C parallele alla fondamentale e corrisponderanno ai punti b c che sono i b_1 c_1 trasportati sulla traccia verticale ah; anche D sarà posto sulla D_1D parallela alla fondamentale, e d si troverà tirando la ad eguale alla ad_1 ed inclinata sulla ah quanto la ad_1 lo è sulla $a\delta_1$. — È poi facile compiere le due projezioni dell'intero parallelepipedo, ricordando che le projezioni delle rette che io dico *equipollenti*, cioè parallele ed uguali, sono pur esse *equipollenti*. Nella figura è descritto interamente anche il parallelepipedo nella posizione ausiliaria $(AB_1C_1D_1\ldots)$, ed è evidente che ogni vertice di $(AB\ldots)$ potrebbe dedursi da quello di $(AB_1\ldots)$ facendolo ruotare intorno ad Aa nello stesso modo con cui (D) si è dedotto dal (D_1).

83. Se c'importasse di avere la projezione del parallelepipedo $(ABCD..)$ sopra un piano verticale differente da quello perpendicolare alla Aa, di cui ci siamo dovuti servire, e fosse $a_2\delta_2$ la nuova fondamentale, cioè l'intersezione del nuovo piano verticale coll'orizzontale, si condurrebbero le perpendicolari analoghe alla $D\delta_2$, che si prolungherebbe finchè $\delta_2 d_2$ fosse uguale alla distanza δd del punto obbiettivo dal piano orizzontale; e così si formerebbe la figura $a_2b_2c_2d_2\ldots$ projezione del parallelepipedo sul desiderato piano. — Questo passaggio da un piano di projezione ad un altro è sempre facile

quando il nuovo piano $b_2 c_2 d_2$ è perpendicolare ad uno dei primi, e lo s'immagina ribaltato su di esso girando intorno alla loro intersezione $a_2 \delta_2$; ora tratteremo più in generale la questione del cangiamento dei piani coordinati.

Problema V. *Date le projezioni d'un sistema di punti, descrivere le sue projezioni sopra due altri piani coordinati.*

84. Questo generale problema di *permutare* i piani coordinati può risolversi coi precetti già dati (§§ 47, 23) per abbassare da un punto, di cui si conoscono le projezioni, la perpendicolare sopra un piano dato, e per determinare la lunghezza di questa perpendicolare: se non che giova moltissimo adottare un metodo di costruzione uniforme, che richiegga il minor numero possibile di rette ausiliarie così nel disegno dato, come in quello che vuol costruirsi. Noi indicheremo tal costruzione per un solo punto, facile essendo di applicarla ad un numero qualunque, il che formerà pei giovani studiosi un esercizio tanto più utile quanto maggiore è l'importanza di questo problema, mediante il quale si possono facilitare le questioni colla scelta più opportuna dei piani coordinati; giacchè la permutazione di tali piani serve poscia a sostituirvi quelli che fossero richiesti da peculiari circostanze. Così il problema della minima distanza di due rette (§ 60) potrà facilmente risolversi prendendo per nuovo piano coordinato uno perpendicolare ad una delle due rette. — Chiameremo *primo* e *secondo* piano i due coordinati primitivi; qualunque sia un *terzo* piano perpendicolare al *secondo* vedemmo al § 83 come si possa avere la projezione su di esso; per tal guisa noi possiamo facilmente sostituire ai piani *primo* e *secondo* i due *secondo* e *terzo*. Che se vogliasi la projezione sopra di un *quarto* piano, il quale non sia perpendicolare nè al *secondo* nè al *primo*, noi sceglieremo il *terzo* perpendicolare al *secondo* ed al *quarto*; e dalle projezioni *seconda* e *terza* passeremo colla stessa facilità alle *terza* e *quarta*. Se mai potesse occorrere, si sostituirebbe poscia al *terzo* un *quinto* piano esso pure perpendicolare al *quarto*.

85. *Disegno.* Sia GJh (Fig. 37) il *quarto* piano su cui vuol determinarsi la projezione del punto dato mediante le proje-

zioni d D, che diremo *prima* e *seconda*. Prendasi per *terzo* piano quello che si eleva sulla LM perpendicolare ai piani *secondo* e *quarto*, cioè alla loro intersezione GJ; sulla $D\delta_1$ perpendicolare alla LM si prenda $\delta_1 d_1 = \delta d$, e sarà d_1 la *terza* projezione, supposto che il *terzo* piano abbia ruotato intorno alla LM fino ad adagiarsi sul *secondo*. Per passare alla *quarta* projezione occorre l'intersezione Om' del quarto col terzo piano; a maggior chiarezza eseguiamo ciò nella figura 38, dove mediante le perpendicolari OM Mm rispettivamente uguali alle OM Mm della figura 37 (o, se queste fossero troppo corte, mediante le loro parallele e proporzionali GH Hh) si formò l'angolo MOm eguale all'inclinazione del quarto sul secondo piano. Trasportate dalla figura 37 alla figura 38 le $O\delta_1$, $\delta_1 D$ $\delta_1 d_1$ si tirerà $d_1\delta_2$ perpendicolare alla nuova fondamentale $O\delta_2$, e si prenderà $\delta_2 D_2 = \delta_1 D$ e saranno d_1 D_2 le desiderate projezioni *terza* e *quarta*. — Può risparmiarsi di tirare alcune linee prendendo $O\alpha_1$ eguale alla distanza di A dalla OG (la quale si misura col compasso senza calare alcuna perpendicolare), poscia perpendicolarmente alla LO si prenderà $\alpha_1 a_1 =$ alla distanza di a dalla JH, e finalmente sulla $a_1\alpha_2$ la $\alpha_2 A_2 =$ alla distanza di A dalla LO della figura 37. — È facile vedere come viceversa dalle projezioni terza e quarta a_1 A_2 si passi alle seconda e prima A a.

Problema VI. *Mostrare che per qualsiasi poliedro può costruirsi un poligono chiuso, i cui lati sieno rispetticamente perpendicolari alle facce di quello e proporzionali alle loro aree.*

86. Un poliedro può immaginarsi separato da piani secanti in tetraedri, e ciascun tetraedro, conducendo dal suo vertice tre piani perpendicolari alla base e che passino per gli angoli di questa, si separa in tre tetraedri aventi uno spigolo perpendicolare alla base. Uno di tali tetraedri è quello disegnato nella figura 39 con una faccia DBA posta sul coordinato orizzontale, la $(C)AB$ perpendicolare al coordinato verticale, e le due $(C)DA$ $(C)BD$ perpendicolari all'orizzontale; da un punto qualunque O conduciamo la OM perpendicolare alla

faccia $(C)DA$ e rivolta dalla parte interna all'esterna di questa faccia rispetto al tetraedro; — poscia la MN perpendicolare alla faccia $(C)BD$ e rivolta dalla sua parte interna all'esterna; — e la (O,ol) perpendicolare alla DBA e rivolta invece dalla sua parte esterna all'interna; e queste tre OM MN ol sieno rispettivamente proporzionali alle aree delle predette facce $(C)DA$ $(C)BD$ DBA. Le OM MN sono dunque proporzionali ai prodotti $dc.DA$ $dc.DB$, ossia alle DA DB e comprendono egual angolo, quindi la NO sarà perpendicolare alla AB, e proporzionale al prodotto $dc.AB$; mentre la ol è proporzionale al prodotto $da.AB$; perciò $no(=NO):ol=dc:da$, dal che risulta per la similitudine dei due triangoli rettangoli nol cda, che nl ossia la obbiettiva $N(L)$ è perpendicolare alla ac ed alla faccia $(C)AB$, ed è proporzionale al prodotto $ca.AB$, ossia all'area di questa faccia. Per tal maniera è dimostrato che i lati del poligono *gobbo* (non-piano, rovescio, *gauche*) $OMN(L)O$ sono perpendicolari e proporzionali alle facce del tetraedro $DAB(C)$ e tutti rivolti dall'interno all'esterno. Le facce del tetraedro potrebbero prendersi in ordine differente dal precedente, e le rette a loro perpendicolari e proporzionali formerebbero sempre un quadrilatero chiuso.

Supponiamo ora che a questo primo tetraedro se ne unisca un altro $DAE(C)$, che abbia con esso comune la faccia $(C)DA$, egli è certo che esisterà un poligono chiuso $MO(Q)PM$, i cui lati saranno perpendicolari e proporzionali alle facce $(C)AD$ DAE $(C)EA$ $(C)DE$ e rivolti dall'interno all'esterno. Ora i due predetti poligoni $OMN(L)$ $MO(Q)P$ hanno i due lati OM MO, dipendenti dalla faccia comune ai due tetraedri, eguali e di opposte direzioni, perciò coll'unione dei due poligoni possiamo formarne uno solo $(OQPMNL)$: inoltre notando che i due lati (OQ) (LO), perchè perpendicolari allo stesso piano, sono in una stessa linea retta, avremo il pentagono chiuso $(QPMNL)$, i cui lati saranno rispettivamente perpendicolari e proporzionali alle facce del pentaedro, o piramide a base quadrilatera, $(C)BAED$. — Aggiungendo successivamente col pensiero tutti gli altri tetraedri

birettangoli, nei quali si è supposto separato il poliedro, si scorge la verità dell'enunciato teorema.

87. Questo teorema stabilisce un'intima relazione fra i teoremi riguardanti le lunghezze dei lati dei poligoni, le loro projezioni su altre rette, ec., e quelli riguardanti le aree delle facce dei poliedri, le loro projezioni su altri piani, ec. Per un esempio supponiamo che nella nostra figura anche l'angolo BDA sia retto; il quadrilatero gobbo $(L)OMN$ avrà tre lati tra loro a due a due perpendicolari, e sarà $(LN)^2 = (LO)^2 + (OM^2) + (MN^2)$, perciò *nel tetraedro trirettangolo* $DBA(C)$ *la seconda potenza della faccia* ipotenusa $(C)AB$ *è uguale alla somma delle seconde potenze delle altre tre facce* DBA $(C)DA$ $(C)BD$.

LIBRO II.

DELLE LINEE E DELLE SUPERFICIE CURVE.

CAP. I.

Delle linee curve, delle loro tangenti, dei circoli osculari, delle evolute, ec.

88. Dopo aver parlato delle linee rette e dei piani, ci occuperemo delle linee e delle superficie curve: i due libri seguenti avranno per oggetto i mutui rapporti di due o più superficie; in questo si considererà ciascuna superficie curva isolatamente, si accenneranno le sue principali proprietà, e si insegnerà il modo di descriverla secondo i precetti della scienza. Prima parleremo delle linee curve.

89. Le linee curve si distinguono in due classi secondo che tutti i punti di ciascuna curva sono compresi in uno stesso piano, o no: le prime si dicono curve *piane*, le seconde si dicono curve *a doppia curvatura* (*gauches, windschiefen, aufwickelbaren*), e meno inesattamente si possono dire curve *gobbe*, cioè *non-piane*.

90. Per descrivere una curva qualunque, piana o gobba, data comunque nello spazio, bisognerà determinare le projezioni sui due piani coordinati di ciaschedun punto della curva; così si avranno le due projezioni della curva, le quali serviranno a mostrarne la forma e trovarne le proprietà. Quando la curva è piana si può anche formarne una giusta *rappresentazione* (§ 10), supponendo che essa venga ad adagiarsi sul piano del disegno: ciò non potrebbe mai farsi rispetto ad una curva gobba; vedremo in seguito come questa si sviluppi in un'altra piana, nel quale sviluppo peraltro essa necessariamente cangia di forma.

91. Una retta dicesi *tangente* ad una curva quando esse hanno di comune due punti infinitamente vicini; ossia, più chiaramente, se per due punti M N di una curva $ALMNB$ s'immagini condotta una retta, poscia il punto N vada successivamente e indefinitamente accostandosi al punto M, che rimanga fisso, la retta MN muterà la sua posizione e andrà sempre più e indefinitamente accostandosi ad una certa retta, che dicesi la *tangente* della curva nel punto M; e questo M è il punto di contatto della curva colla tangente. Ordinariamente si ottiene la medesima tangente tanto considerando il punto N compreso fra M e B, quanto considerando il punto L compreso tra M ed A, supposto che questo L si accosti indefinitamente ad M: se in qualche caso particolare ciò non fosse, si direbbe che nel punto M vi sono due tangenti differenti (le quali saranno rispettivamente i *limiti* delle secanti MN ML), e piuttosto di una sola curva $ALMNB$ si avrebbero due curve, o due rami di curva ALM MNB che si tagliano nel punto M.

Problema I. *Descrivere l'ellisse, che è la projezione di un circolo, e trovarne alcune delle principali proprietà.*

92. Per cominciare dalle curve più semplici descriveremo la projezione di un circolo posto in un piano non parallelo ai coordinati; a tal fine supporremo che quel piano girando intorno ad una sua traccia si adatti sul coordinato ed ivi tracceremo la rappresentazione del circolo, poscia, in uno dei modi già insegnati, ne dedurremo le projezioni di ciascun punto obbiettivo riportato alla sua primitiva posizione. — In quanto alle proprietà della curva projezione del circolo, esse possono dedursi da quelle del circolo mediante i seguenti principii per sè stessi evidentissimi. — Se due rette obbiettive sono parallele lo sono pure le loro projezioni; ed il rapporto di due porzioni qualunque di quelle rette è uguale al rapporto delle loro projezioni: la tangente di una curva ha le sue projezioni tangenti alle projezioni della curva, purchè la projezione della tangente non si riduca ad un punto. Si chiamano *affini* due figure che in ogni loro parte abbiano tali relazioni.

93. *Disegno*. Pel nostro scopo bastandoci descrivere una

sola projezione del circolo, supponiamo che il piano coordinato verticale sia perpendicolare al piano del circolo, così la ortografia si ridurrà ad una retta. Sia (C) (Fig. 40) il centro del proposto circolo, e GJh il piano in cui esso è situato; questo piano giri intorno alla sua traccia fino ad adagiarsi sul coordinato orizzontale; il punto (C) non uscirà dal piano, in cui si trova, perpendicolare all'asse di rotazione GJ, perciò la rappresentazione C' del centro del circolo si avrà prendendo, sulla prolungazione della CG perpendicolare a GJ, una GC' uguale alla distanza dei punti G (C), la quale è uguale alla sua projezione Jc. Col centro C' e il dato raggio si descriverà la rappresentazione del circolo, e, per quanto ora si disse, si vedrà che le projezioni L l del punto rappresentato in L' si ottengono tirando $L'L$ $L'l'$ perpendicolari alle GJ Jc, prendendo $Jl = Jl'$, ossia $cl = c'l'$, e tirando lL perpendicolare alla fondamentale.

94. Dalla precedente costruzione si vede che nella projezione ogni lunghezza parallela alla GJ (intersezione del piano del circolo con quello su cui si fa la projezione) è uguale e parallela alla sua obbiettiva, ed ogni lunghezza perpendicolare alla suddetta GJ ha un costante rapporto colla sua obbiettiva, che è essa pure perpendicolare alla GJ. Sicchè se la trovata projezione $ALBA_1$ nuovamente si projettasse sopra un piano tanto inclinato al piano ALB quanto lo è il primitivo GJh, e talmente disposto che la sua intersezione col piano ALB fosse perpendicolare alla GJ, ne risulterebbe una seconda projezione simile alla figura primitiva $A'L'B'A_1'$; poichè ambedue le dimensioni parallele alle $C'B'$ $C'A'$ si verrebbero a diminuire nello stesso rapporto. — Queste considerazioni ci daranno qualche facile modo di descrivere la curva $ALBA_1$, che dicesi *ellisse*. Descritto un circolo (Fig. 41) ogni sua ordinata XL' si taglierà in un costante rapporto nel punto L, e tutti i punti L costituiranno un'ellisse; e la stessa ellisse si avrà pure mediante il circolo descritto col raggio CB accrescendo ogni sua ordinata Yl in quello stesso rapporto, in cui si sono diminuite le XL': ed anzi, giacchè la figura alB dee risultare simile alla $AL'B'$, si potrà descrivere l'ellisse ta-

gliando i due circoli AL'.., al.. col mezzo di raggi ClL', poscia trovando i punti d'intersezione L delle $L'L$ parallele a CB, e delle lL parallele a CA. — Tirando nella figura 40 la $T'L'$ tangente al circolo, la sua projezione TL è tangente all'ellisse, e siccome la retta $C'A'T'$ è uguale alla sua projezione CAT, così per condurre nella figura 41 la tangente in L si tirerà la $L'T$ tangente al circolo, e sarà TL la cercata.

95. Se nel circolo della Figura 40 tiriamo per C' una corda $D'D'_1$, essa rimane dimezzata in C', e le tangenti nei punti D' D'_1 sono parallele: quindi (§ 92) anche l'ellisse è una curva dotata di *centro* C, pel quale condotta una qualunque corda DD_1 essa è dimezzata in C, e le tangenti in D D_1 sono parallele. — Nel circolo tutte le corde $M'M'_1$ parallele alle tangenti in D' D'_1 restano dimezzate dalla $D'D'_1$ che perciò prende il nome di *diametro*: lo stesso è vero (§ 92) per la ellisse. — Nel circolo è evidente che le tangenti in M' M'_1 si incontrano in un punto Q' del diametro $D'D'_1$: dunque anche nell'ellisse. — Nel circolo il diametro $E'E'_1$ parallelo alla corda $M'M'_1$ dimezza le corde parallele al diametro DD_1: lo stesso avviene nell'ellisse, ed i diametri DD_1 EE_1 avendo tra loro proprietà perfettamente reciproche diconsi *conjugati*.

96. La proprietà dei diametri conjugati d'essere ciascuno parallelo alle tangenti negli estremi dell'altro, e l'essere i diametri conjugati di un'ellisse *affini* (o se vogliamo invece dire *projezioni*) di diametri tra loro ortogonali di un circolo ci dà nel processo di descrizione esposto nel § 94 (Fig. 41) un modo facile di trovare oltre i punti dell'ellisse anche le rispettive tangenti (il che tanto giova alla più accurata descrizione della curva), e ciò prendendo sul circolo i punti L' M' tra loro distanti di un quadrante, dal che risulta che CL CM sono diametri conjugati dell'ellisse.

97. Nel circolo (Fig. 40) si ha $(C'P')^2+(P'M')^2=(C'A')^2$, alla qual equazione possiamo dare la forma

$$(C'P':C'D')^2+(P'M':C'E')^2=1,$$

dove ciascun termine è un rapporto di due rette parallele: questa medesima relazione può anche scriversi così

$$(P'M':C'E')^2=D'P'.D'_1P':(C'D')^2;$$

perciò (§ 92) anche nell'ellisse fra le *ascisse* CP e le *ordinate* PM ha luogo l'equazione $(CP:CD)^2+(PM:CE)^2=1$, e fra le ordinate ed i due segmenti del diametro la relazione $(PM:CE)^2=DP.D_1P:(CD)^2$. — Nello stesso modo partendo dalle note proprietà dei triangoli rettangoli $C'M'Q'$ $D'_1M'D'$ troveremo rispetto al circolo due relazioni, che per essere costituite da rapporti di rette parallele si applicano all'ellisse projezione del circolo, e danno

$$CP.CQ=(CD)^2, \quad CP.PQ=DP.D_1P.$$

98. Fra i diametri conjugati dell'ellisse meritano particolare distinzione quei due AA_1 BB_1 (Fig. 40, 41, 42) che sono tra loro perpendicolari, essi si dicono gli *assi*: anche rispetto a loro si ha (Fig. 42)

$$(PM)^2=(CB)^2-(CB)^2.(CP)^2:(CA)^2.$$

Sull'asse maggiore A_1A esistono due punti F F_1 le cui distanze da ogni punto M dipendono razionalmente dall'ascissa CP; per trovarli sostituiremo nell'equazione

$$(FM)^2=(PM)^2+(CF-CP)^2$$

il precedente valore di PM ed avremo

$$(FM)^2=(CB)^2+(CF)^2-2CF.CP+(CP)^2[(CA^2-CB)^2]:(CA)^2,$$

il cui secondo membro diviene un quadrato perfetto quando

$$CF=\pm\sqrt{[(CA)^2-(CB)^2]},$$

e si ha $FM=CA-CP.CF:CA$, $F_1M=CA+CP.CF:CA$: i punti F F_1 si dicono i *fochi*, e la distanza CF l'*eccentricità* dell'ellisse; le rette FM F_1M sono i *raggi vettori* del punto M; si vede che la loro somma è uguale all'asse maggiore A_1A. — Se poniamo $CG=(CA)^2:CF$ abbiamo

$$FM=(CG-CP)CF:CA=MQ.CF:CA;$$

onde il raggio vettore FM ha per tutti i punti dell'ellisse un costante rapporto colla distanza del punto M dalla retta GQ, che dicesi la *direttrice* relativa al foco F: vi è un'altra direttrice pel foco F_1.

99. La proprietà predetta dei due fochi può servire a descrivere per punti l'ellisse, ma il metodo insegnato al § 94 è migliore; perchè ogni punto si determina coll'intersezione di linee perpendicolari. La conoscenza dei fochi gioverà per condurre le tangenti all'ellisse, non solo pei punti dati su di es-

sa, ma eziandio pei punti esterni, e ciò anche senza che sia costruita l'ellisse. Infatti se MU è tangente, bisogna che ogni suo punto U cada fuori dell'ellisse, e sia perciò

$$FU + F_1U > FM + F_1M,$$

ed abbassando dal foco F la perpendicolare FI sulla tangente e prolungandola d'altrettanto fino in L sarà

$$LU + F_1U > LM + F_1M,$$

quindi F_1ML dovrà essere una linea retta: onde se sia dato il punto di contatto M, la tangente MU si otterrà dimezzando l'angolo LMF_1 formato da un raggio vettore e dalla prolungazione dell'altro. Che se invece la tangente debba condursi pel dato punto U si determinerà L osservando che $UL = UF$, e $F_1L = F_1M + FM = AA_1$, poscia la tangente MU sarà perpendicolare alla FL, ed il punto di contatto M si troverà tagliandola colla F_1L. Quando il punto U è a distanza infinita, cioè quando si vuol descrivere la tangente parallela ad una retta data, ad essa si tirerà perpendicolare la FL, che si taglierà in L col circolo di centro F_1 e di raggio $= A_1A$, la tangente ricercata dimezzerà perpendicolarmente la FL, ed il punto di contatto sarà sulla F_1L. — Ad ogni punto M dell'ellisse corrisponde un punto L del circolo col centro in F_1 ed il raggio eguale all'asse maggiore; i punti di mezzo I di ciascuna delle FL costituiranno una figura simile alla precedente, cioè un circolo col diametro eguale al predetto asse, ed è facile conoscere che esso è il circolo AII_1A_1. Perciò se pei due fochi si tirino due rette parallele FI F_1I_1 che taglino il circolo circoscritto all'ellisse, la retta II_1 sarà tangente all'ellisse; modo molto spedito di descrivere un'ellisse mediante le sue tangenti. — Questo modo, non meno di quanto abbiamo esposto nei §§ 97, 98, si estende facilmente all'iperbola, e con piccole differenze anche alla parabola.

100. Se CD CE (Fig. 43) sono due semidiametri conjugati dell'ellisse, il calcolo dimostra (*) che condotte pel punto

(*) Quanto qui è asserito può dimostrarsi nel seguente modo, secondo i principii del metodo delle equipollenze, che io esposi in un Saggio negli Annali delle scienze del Regno Lombardo Veneto pel 1835, ed in più estesa Memoria nei T. VII, VIII (1837, 1838) del medesimo Gior-

E le EK EK_1 perpendicolari ed uguali alla CD, l'asse maggiore divide per metà l'angolo KCK_1, e l'eccentricità CF è media proporzionale tra le CK CK_1. Cangiando i due diametri conjugati non mutano le lunghezze CK CK_1, che sono perciò la somma e la differenza degli assi dell'ellisse: se queste due rette si fanno ruotare di angoli uguali in versi opposti, sicchè gli angoli FCK K_1CF si conservino sempre uguali, il punto di mezzo della retta KK_1 descriverà l'ellisse, a cui essa KK_1 è sempre normale. — Anche senza trovare i fochi si potrà descrivere per punti l'ellisse, poichè tagliate proporzionalmente le CK CK_1 mediante la LL_1 parallela alla KK_1, coi centri L L_1 ed i raggi eguali al semidiametro CD si determineranno i due punti M M_1 dell'ellisse: si noti che le LM L_1M tagliano la retta CD in I I_1 in modo che $LI = HK$, $L_1I_1 = HK_1$. Così l'ellisse può anche esser generata dal punto M segnato sulla retta di costante lunghezza IML, che scorre tra le due rette fisse CD CK: dee avvertirsi che queste

nale, e nel T. I (1843) delle Memorie dell'I. R. Istituto Veneto. — Un punto qualunque E dell'ellisse, che ha i semiassi a b, è dato dall'equipollenza $CE \simeq a\cos x + b\,\mathrm{sen}\,x\sqrt{\ }$. (Pongo $\sqrt{\ }$ in luogo dell'apposito segno, che adopero come fattore ad esprimere un cangiamento di direzione di 90°, e che si calcola come l'immaginario $\sqrt{-1}$). Il semidiametro CD parallelo alla tangente in E è equipollente ad $a\,\mathrm{sen}\,x - b\cos x\sqrt{\ }$, quindi EK eguale e perpendicolare a CD è equipollente a $b\cos x + a\,\mathrm{sen}\,x\sqrt{\ }$; per lo che la CK equipollente alla composta $CE + EK$ sarà $\simeq (a+b)(\cos x + \mathrm{sen}\,x\sqrt{\ })$, cioè eguale alla somma dei due semiassi ed inclinata all'asse maggiore dell'angolo x; la CK_1 è uguale ad $(a-b)$ ed egualmente inclinata dall'altra parte dell'asse maggiore. Essendo $(CF)^2 \simeq (CE)^2 + (CD)^2 \simeq a^2 - b^2$, i punti F F_1 non cangiano se ai due semidiametri conjugati CD CE se ne sostituiscano altri due; la predetta equipollenza dà $-(CD)^2 \simeq FE.F_1E$, cioè i due raggi vettori FE F_1E sono ugualmente inclinati dalle due parti della EK_1 normale a CD, ed il loro prodotto è uguale a $(CD)^2$. — Un punto qualunque dell'ellisse è riferito ai due semidiametri conjugati mediante la $CM \simeq \cos t.\,CD + \mathrm{sen}\,t.\,CE$: se prendiamo $CL \simeq \mathrm{sen}\,t.\,CK$, abbiamo $LM \simeq CM - CL$ $CD(\cos t - \mathrm{sen}\,t\sqrt{\ })$, perciò $LM = CD = KE$. Confrontando tra loro gli ultimi termini dei binomii $\cos t.\,CD + \mathrm{sen}\,t.\,KE$, $\mathrm{sen}\,t.\,CH + \mathrm{sen}\,t.\,HK$ rispettivamente equipollenti alle rette LM, CL si scorge che le projezioni sulla HK della LM e della CL, ossia della IL, sono proporzionali alle EK HK; ed avendo già trovato $LM = EK$, ne risulta $IL = HK$.

rette possono avere le direzioni degli assi dell' ellisse, non mai di due suoi diametri conjugati obbliqui.

101. Del resto un modo più conforme ai nostri principii per descrivere l'ellisse, di cui sono dati due semidiametri conjugati CD CE (Fig. 44), si è di considerarla come *affine* del circolo di raggio CD', ed immaginare che derivi da questo inclinandone tutte le ordinate PM' di egual angolo, nello stesso tempo che tutte si mutano secondo un ugual rapporto. Soddisfaremo a questa duplice condizione tirando nel circolo il raggio CE' perpendicolare a CD, e quante si vogliano ordinate PM', poscia conducendo le PM parallele a CE, e le $M'M$ parallele alla $E'E$. Se sceglieremo sul circolo i punti M' N' distanti di un quadrante, i punti M N risulteranno conjugati, e perciò la tangente in M sarà parallela al semidiametro CN, e viceversa. — Si può verificare che la curva $DMED_1$ è un'ellisse notando che nel circolo è $(PM')^2 = D_1P.PD$, quindi essendo $PM' : PM = CD : CE$ sarà $(PM.CD)^2 = (CE)^2 D_1P.PD$, relazione che vedemmo (§ 97) appartenere all'ellisse.

Problema II. *Mostrare la generazione delle sezioni coniche mediante l'omòlogia.*

102. Se nel piano Iih (Fig. 45) siavi un circolo od una qualunque ellisse, e s' immaginino tirate tutte le rette che dai punti di questa curva concorrono in un punto fisso (S, s) posto fuori di quel piano, tali rette costituiranno una superficie denominata *cono*: e se questa si taglia con un altro piano qualsivoglia $\Omega\omega h$, la curva d' intersezione dicesi una *sezione conica*, ed è pure una sezion conica ogni projezione di tal curva: proponiamoci di descrivere una di queste projezioni. — Per maggior comodità supponiamo che il coordinato verticale sia perpendicolare ai due piani predetti; nel piano Iih esista una tale ellisse che sia projettata orizzontalmente nel circolo $A'M'$; a ciascheduh punto M' di questo circolo corrisponde la projezione verticale m', ed è facilissimo vedere come si determini l'intersezione (M, m) della retta (SM', sm') col piano $\Omega\omega h$: per tal guisa si otterranno quanti punti si vogliano della cercata projezione AM.

103. Le due figure $A'M'\ldots$ $AM\ldots$ si dicono tra loro *omologhe*: vediamo come una di esse possa dedursi dall'altra anche senza adoperare le projezioni verticali, solo che si conoscano due punti tra loro *omologhi* A' A. Il punto omologo di un dato M' deve trovarsi sulla retta $S'M'$; di più se la retta $A'M'$ incontri in H la retta HK, projezione dell'intersezione dei piani in cui si trovano le due figure obbiettive, sarà una retta anche la HMA; poichè le obbiettive (SAA') (SMM') sono in uno stesso piano, il quale è tagliato dal piano $\Omega\omega h$ nella retta obbiettiva projettata sulla AMH. — Abbiamo adunque i due principii, che serviranno a derivare da una figura una sua omologa: *Due punti omologhi sono in linea retta con un punto fisso, che dicesi centro d'omologia. Due rette omologhe si tagliano sempre in qualche punto di una retta, che dicesi asse di omologia.*

104. In due figure omologhe, alquante rette concorrenti in un medesimo punto hanno sempre per omologhe altre rette concorrenti esse pure in un punto: ora se nel piano $\Omega\omega h$ vi sieno delle rette parallele (e parallele saranno pure le loro projezioni) i piani che passano per esse e pel punto obbiettivo (S, s) comprenderanno la retta a loro parallela condotta per quel punto, retta che si projetterà verticalmente nella si, supposto che questa sia parallela alla traccia $h\omega$; dal che risulta che le omologhe delle predette parallele concorreranno in un qualche punto di una retta iI parallela all'asse d'omologia. Questa retta iI contiene tutti i punti della figura $A'M'\ldots$, che sono omologhi a quelli della figura $AM\ldots$, che stanno a distanza infinita; sicchè a buona ragione possono considerarsi come appartenenti ad una sola retta tutti i punti di un piano che sono a distanza infinita. — In simil modo tutti i punti a distanza infinita della figura $A'M'\ldots$ hanno i loro omologhi sopra una retta projezione orizzontale di quella che è projettata verticalmente nel punto ν, essendo $s\nu$ parallela alla traccia ih. — Nella figura si fece in guisa che $i\nu$ riuscisse perpendicolare alla fondamentale, e perciò ambedue le rette, che contengono i punti omologhi di quelli che stanno all'infinito, coincidono in una sola Ii: la quale, in questo caso partico-

lare di omologia, sta equidistante tra il centro e l'asse di omologia.

105. Potremo passare da una figura alla sua omologa anche in un altro modo, che consiste in sostanza nell'adoperare, in luogo di due punti omologhi A A', un punto a distanza infinita ed il suo omologo. — La retta omologa della $M'LI$, oltre passare pel punto L comune all'asse d'omologia, dev'essere diretta al punto omologo di I, che sta a distanza infinita e propriamente sulla direzione della SI; perciò la LM sarà parallela alla SI. Inoltre se la $M'K$ è parallela alla SI, la sua omologa sarà la KI; ed essa incontrerà la prima nel punto M omologo di M'. — Dalla proporzione $IM:IK=IL:IM'$, nella quale ai termini di ciascun rapporto possono sostituirsi le distanze dalla retta Ii dei punti M K, L M', risulta che: *Le distanze dalla retta Ii di due punti omologhi M M' hanno prodotto costante.* Per tal motivo quella retta dicesi *asse d'inversione.*

106. *Disegno* 1.° Descriviamo in primo luogo la curva omologa del circolo $A'M'I$ (Fig. 45), che tocca la retta Ii omologa dei punti all'infinito dell'altra figura: perciò la curva cercata avrà una tangente tutta situata a distanza infinita; carattere questo distintivo di quella sezione conica, che dicesi *parabola.* — Supponiamo per maggior semplicità che la SI sia perpendicolare alla Ii, e che l'asse d'omologia HK passi pel centro F del circolo. Per ciaschedun punto M' del circolo condurremo la $M'LI$, poi le $M'K$ LM parallele alla IF; finalmente si taglierà la LM colla IK, e si avrà un punto M della parabola. — Per avere la tangente alla parabola, si condurrà $M'T$ tangente al circolo, e dal punto T dove essa incontra l'asse d'omologia si tirerà la TM. — Se si volessero determinare le intersezioni della parabola con una data retta, si potrebbe determinare la retta omologa della proposta, poscia i punti omologhi di quelli nei quali l'ultima retta taglia il circolo.

107. Essendo $IA'=2.IF$ sarà $IA=\frac{1}{2}IF$. — Condotte le MP $M'P'$ perpendicolari alla IA abbiamo eziandio

$$PM:P'M'=IP:IF=IF:IP';$$

ora il circolo dà $(P'M')^2 = IP'.P'A'$, perciò nella parabola sarà $(PM)^2 = IP.P'A' = IP.IA' - IP.IP' = IF(2.IP - IF)$, e finalmente $(PM)^2 = 4.AF.AP$. — Il punto F dicesi il *foco* della parabola. — La precedente equazione dà pure

$$(FM)^2 = (AF + AP)^2, \text{ cioè } FM = IP:$$

ogni punto della parabola ha distanze uguali dal foco e dalla direttrice Ii. — In quanto alla tangente è noto che

$FT = (IF)^2 : P'M'$, poscia essendo $(IM)^2 = 2.IF.AP$,

sarà $FT = IF.IP : PM = IP.PM : 2AP$,

ed $LT = (IA - AP)PM : 2AP$, cioè $LT : ML = PM : 2AP$,

perciò: *la sottangente* PV *è doppia dell'ascissa* AP.

108. *Disegno* 2.° Ogniqualvolta il circolo $A'M'$ tagli la retta Ii omologa di quella che sta all'infinito, noi otterremo per curva omologa un' *iperbola*. — Prendiamo per maggior semplicità un circolo che abbia il centro C (Fig. 46) in I; colla precedente costruzione del raggio $CM'L$, — delle rette $M'K$ LM perpendicolari all'asse d'omologia $H\beta KL$, — e del raggio CKM, ogni punto M' del circolo darà un punto M di una iperbola. — Il punto G del circolo dà un punto all'infinito dell'iperbola, e se la tangente in G incontra l'asse d'omologia nel punto H sarà CH uno degli *assintoti* dell'iperbola.

109. Perpendicolarmente all'asse d'inversione CG ed all'asse d'omologia HB, conduciamo la retta $CA'\beta A$, e su di essa caliamo le perpendicolari $M'P'$ MP; dalle proporzioni

$$PM : P'M' = CP : C\beta = C\beta : CP',$$

e dall'equazione del circolo si deduce facilmente quella della iperbola $(PM)^2 = (AB.CP : CA)^2 - (AB)^2$, avendo posto in luogo di $C\beta$ la sua uguale AB guidata parallelamente alla LH fino ad incontrare l'assintoto.

110. Sull'asse A_1A dell'iperbola vi sono i fochi F F_1 determinati da $CF = CF_1 = CB$, i quali godono di proprietà affatto analoghe a quelle dei fochi dell'ellisse. — Si ha

$$FM = (CP.CF : CA) - CA, \quad F_1M - FM = A_1A \text{ ec.};$$

CA si dice il semiasse *primario* dell'iperbola, chiamandosi semiasse *secondario* una retta condotta pel centro C uguale e parallela alla AB. Conoscendo questi semiassi si ha subito l'assintoto CB; fatto $C\beta = AB$, tirata la βH, e descritto il

circolo col raggio $CA' = \beta H$, si ha l'asse d'omologia, ed il circolo col cui mezzo insegnammo a descrivere l'iperbola. — Se fossero dati gli assintoti CB CQ (e quindi anche le direzioni CP CG dei semiassi), e l'iperbola dovesse passare per un dato punto M, si determinerebbero l'asse d'omologia ed il circolo omologo dell'iperbola conducendo parallelamente agli assi le PMQ ML, e tagliando quest'ultima col centro C ed il raggio $CL = PQ$: infatti le proporzioni

$$CL : CM = CM : CK = CP : C\beta, \quad H\beta : C\beta = PQ : CP$$

danno $CL = PQ$, giacchè $CM = CG = H\beta$. — È già noto che si hanno le direzioni degli assintoti ogniqualvolta si conosca un semidiametro CM ed il semidiametro secondario ad esso conjugato. — Del resto conoscendo gli assintoti ed un punto M dell'iperbola, questa può facilmente costruirsi tirando per M una qualunque corda Mm, ed avvertendo che tanto all'iperbola quanto al sistema dei suoi assintoti appartengono gli stessi diametri, sicchè le porzioni MU mu di quella corda comprese tra l'iperbola e gli assintoti sono sempre tra loro uguali.

Problema III. *Verificare graficamente che fuori del piano di una sezione conica vi sono infiniti punti, che hanno proprietà analoghe a quelle dei suoi fochi.*

111. Nel piano coordinato orizzontale siavi l'ellisse A_1BA (Fig. 47) il coordinato verticale passi per l'asse maggiore A_1A e su di esso si descriva l'iperbola coi vertici nei fochi F F_1 dell'ellisse, ed i fochi nei vertici A A_1; sicchè il semiasse secondario $C\beta$ di questa iperbola sia uguale al semiasse minore CB dell'ellisse (sono omesse le metà dell'ellisse e dell'iperbola che cadrebbero nelle regioni posteriore ed inferiore). — Le equazioni dell'ellisse e dell'iperbola determinano i quadrati delle ordinate Mm $\Phi\varphi$, che sommati col quadrato di $m\Phi = C\Phi - Cm$, danno

$$(M\varphi) = (C\Phi \,.\, CA : CF) - (Cm \,.\, CF : CA).$$

Facilmente se ne deduce che mantenendo fisso il punto (φ) dell'iperbola, le distanze da esso di tutti i punti dell'ellisse sono proporzionali alle distanze dei medesimi punti da una retta posta nel piano dell'ellisse e parallela all'asse minore, la

cui posizione dipende da quella del punto φ, che può considerarsi come un foco dell'ellisse. Ne viene pure, e tosto lo si verifica graficamente, che scelti ad arbitrio sull'iperbola i due punti φ_1 φ, e consideratili come due fochi dell'ellisse, la somma delle distanze da essi di un qualunque punto di questa è costante, e perciò uguale ad $A\varphi + A\varphi_1$. Se i due punti φ φ_1 si fossero presi in uno stesso ramo dell'iperbola sarebbe costante la differenza, anzichè la somma, di quelle due distanze.

112. In egual maniera due punti quali si vogliano dell'ellisse possono prendersi per fochi dell'iperbola, poichè le distanze da quei due punti fissi di ciascun punto dell'iperbola hanno una differenza costante. Se per esempio prendiamo per fochi dell'iperbola i punti M A sarà $(M\varphi) - A\varphi = MF - AF$: quindi se si vogliano le intersezioni dell'iperbola col circolo avente il centro sull'asse primario in m ed il raggio $= mL = m\varphi$, basterà tagliare tal circolo coll'altro avente il centro in A ed il raggio $A\varphi = ML - MF + AF$. — Ricorrendo agli immaginarii è facile estendere questa costruzione alla ricerca delle intersezioni dell'iperbola, o dell'ellisse con ogni circolo, che abbia il centro sull'asse primario o maggiore: noteremo il solo caso delle intersezioni dell'ellisse con un circolo col centro in C ed un dato raggio; questo si porti da B in K e le due porzioni AK A_1K_1 dell'asse maggiore daranno i raggi vettori delle cercate intersezioni, vale a dire le distanze di K dai vertici A_1 A B sono uguali alle distanze di un punto dell'ellisse dai due fochi e dal centro.

113. Tutti i punti dell'ellisse possono considerarsi come fochi dell'iperbola anche sotto questo riguardo, che per un punto qualunque φ dell'iperbola non sono già soltanto le due rette φA φA_1, che facciano angoli uguali colla tangente dell'iperbola nel punto φ, ma sì bene tutte le rette obbiettive (φB) (φM) ec. Perlochè ciascun punto dell'iperbola può esser vertice di un cono rotondo che abbia per sezione la data ellisse A_1BA. Riconosceremo graficamente la giustezza di questa asserzione tirando la tangente in φ, che dimezza l'angolo $A\varphi A_1$, poscia facendo ruotare intorno ad

essa i varii punti dell'ellisse fino a giungere sul piano verticale, e vedremo che essi tutti vanno a situarsi sull'una o sull'altra delle ΦA ΦA_1. — Precisamente la stessa cosa può dirsi di tutti i punti dell'iperbola riguardo a ciascuno dell'ellisse. — Mediante l'iperbola $F\Phi$... potremo risolvere il problema: *Dato un cono rotondo determinarne la sezione che è uguale alla data ellisse A_1BA*: basterà descrivere nel piano dell'iperbola un arco di circolo che abbia la A_1A per corda, e i cui angoli inscritti sieno eguali all'angolo formato da due apotemi opposti del dato cono, l'intersezione di questo circolo coll'iperbola determinerà la posizione del vertice del cono rispetto alla sua sezione A_1BA.

444. L'ellisse e l'iperbola, che hanno le predette proprietà vicendevoli, potrebbero dirsi *conjugate*, ma le diremo invece *accoppiate*, giacchè si chiamano conjugate due iperbole, quando l'asse primario di una è asse secondario dell'altra e viceversa. — Due parabole sono *accoppiate* quando sono situate in piani tra loro perpendicolari, ed il vertice dell'una è foco dell'altra e viceversa. Sarà utile esercizio verificare graficamente che a tali parabole si estendono le proprietà or ora indicate per le altre due sezioni coniche tra loro accoppiate: e che in particolare la distanza obbiettiva di due punti presi ad arbitrio sulle due parabole accoppiate supera la propria projezione sull'asse comune costantemente del doppio della distanza tra i fochi delle due parabole, il che offre (come già vedemmo per l'iperbola) un facile modo di determinare le intersezioni della parabola coi circoli che hanno i centri sull'asse.

Problema IV. *Descrivere le tangenti o le normali di una curva piana data per punti.*

445. Nella Geometria descrittiva si ha frequente occasione di disegnare a mano la curva, della quale si è determinato un certo numero di punti: dev'essere studio del disegnatore scegliere quei punti che meglio dimostrino l'andamento della curva e tracciare con esattezza un tale andamento. Quando la curva è così descritta si può anche tirarne approssimatamente le tangenti (nella supposizione che la loro rigorosa determina-

zione non possa desumersi dalle condizioni del problema, dal quale risultò quella curva): nulladimeno potranno giovare alcune regole per tirare tali tangenti indipendentemente dal tracciato della curva, che passa pei dati punti; e ciò anche se la tangente o la normale debba condursi per un punto esterno.

116. *Disegno* 1.° La curva debba passare pei dati punti $\ldots M_4\ M_2\ M\ M_1\ M_3 \ldots$ e si voglia determinare approssimatamente la tangente nel punto M; per questo punto si tirino (Fig. 48) alquante secanti M_4M, M_2M, MM_1, MM_3 ec. e su di esse si prendano le lunghezze uguali M_4U_4, M_2U_2, M_1U_1, $M_3U_3 \ldots$, si descriva a mano la curva dei punti $\ldots U_4\ U_2\ U_1\ U_3 \ldots$, la quale si tagli in X col circolo, che ha il centro in M ed il raggio eguale alla predetta MU; sarà approssimatamente MX la tangente desiderata.

117. *Disegno* 2.° Dati alquanti punti $M_1\ M_2 \ldots$ (Fig. 49) di una curva se ad essa vuol tirarsi la tangente da un dato punto esterno D, si tireranno le M_1U_1, $M_2U_2, \ldots$ perpendicolari alle tangenti determinate col precedente metodo (§ 116), oppure per altra via conosciute; dal punto dato D si condurranno ad angolo retto con queste perpendicolari le DU_1, ec. e le curve $U_1\ U_2 \ldots$, $M_1M_2 \ldots$ descritte a mano si taglieranno nel punto X, che potrà considerarsi come il punto di contatto della tangente.

118. *Disegno* 3.° Se pel dato punto D (Fig. 50) dee condursi una *normale* alla curva $M_1M_2M_3$ (cioè una retta perpendicolare alla tangente nel punto in cui essa incontra la curva) si suol suggerire la medesima precedente costruzione, tirando peraltro le M_1U_1, ec. tangenti anzichè normali alla curva; ma in tal guisa la curva $U_1U_2 \ldots$ tocca la curva $M_1M_2 \ldots$, perciò riesce poco preciso il loro punto comune. Invece si tirino le M_1U_1, ec. tutte inclinate di un dato angolo, che potremo stabilire semiretto, ed in uno stesso senso sulle tangenti della curva, e dal punto D si guidino le DU_1, ec. perpendicolarmente a quelle tangenti; la curva $U_1U_2 \ldots$ taglierà la data nel punto X piede della normale abbassata da D.

119. *Disegno* 4.° Se la tangente alla data curva dev'essere parallela a retta data, si prenderanno sulle tangenti M_1N,

ec. (Fig. 51) delle porzioni tutte uguali, e ad esse pure si faranno eguali le $N_1 U_1$, ec. parallele alla cercata tangente; la curva $U_1 U_2 \ldots$ taglierà la $M_1 M_2 \ldots$ nel punto che ha la tangente parallela alla retta data.

120. Non sarà difficile intendere la ragione delle precedenti costruzioni: le curve ausiliarie che si descrivono e che tagliano la curva proposta nel punto cercato si chiamano *curve di errore*. — Per esercizio si applicheranno tali costruzioni alle sezioni coniche, per le quali abbiamo già insegnato a condurre esattamente le tangenti.

Problema V. *Trovare il raggio di curvatura di una data curva piana, e descriverne la sviluppata e la sviluppante.*

121. In un punto M di una curva (Fig. 52) sia condotta nel suo medesimo piano la retta MQ perpendicolare alla tangente MT, cioè la normale della curva; se immaginiamo una serie di circoli che abbiano i centri sulla normale MQ, che passino tutti pel punto M, e che inoltre taglino la curva nei punti M_2 $M_1 \ldots$ sempre più vicini al punto M, il limite di tutti questi circoli dicesi il *circolo osculatore* della curva nel punto M: siccome questo circolo è quello che più s'avvicina alla curva nei punti prossimi ad M, così esso ne determina la *curvatura* in M, ed il suo raggio RM dicesi il *raggio di curvatura*. Ordinariamente parlando da uno dei lati del punto M la curva è più incurvata del circolo osculatore, e dall'altro lato lo è meno; ne viene che il circolo osculatore taglia la curva rimanendone esterno dal lato M_2 ed interno dal lato M_1, mentre invece la tangente MT è tutta esterna alla curva. — Fra la curva ed il circolo osculatore ha luogo un contatto più intimo di quello che ha luogo colla tangente, esso dicesi contatto del 2.° ordine. Il circolo osculatore può anche definirsi quello che ha comuni colla curva tre punti infinitamente vicini; se ne avesse quattro si direbbe che il contatto è del 3.° ordine: ciò avviene per esempio nei vertici delle sezioni coniche; colà il circolo osculatore è tutto esterno o tutto interno alla curva.

122. *Disegno* 1.° Per determinare approssimatamente il centro di curvatura in M (Fig. 52) della linea che passa pei

dati punti M_2 M M_1..., si tiri (§ 116) la normale MQ e su di essa sia S_1 il centro del circolo che passa per M e per M_1 (esso si troverà facilmente, dopo avere preso ad arbitrio il punto Q, facendo $M_1Q_1 = MQ$, ed $MQ_1 = M_1Q$, poscia tagliando la MQ colla M_1Q_1); similmente sia S_2 il centro del circolo MM_2, ec.: perpendicolarmente alla MQ si prenda S_1U_1 eguale alla distanza del punto M_1 dalla normale MQ, ec. La curva dei punti U tracciata a mano taglierà la normale MQ nel centro di curvatura R: infatti la SU relativa al punto R essendo nulla, sarà pur nulla la distanza Mm del punto M dal punto m, in cui il circolo di raggio RM taglia la curva.

123. *Disegno* 2. Nelle curve di nota legge il raggio di curvatura può costruirsi esattamente; così nell'ellisse esso è uguale alla terza proporzionale dopo la distanza del punto M dal semidiametro conjugato con CM, e quello stesso semidiametro (*). Perciò nella figura 43 il raggio di curvatura ER è $=(CD)^2:EH$, e lo si può costruire tirando le K_1Q QR parallele alle HC CK_1. E nella figura 42 se CN è conjugato con CM, abbassando su di esso la perpendicolare $M\mu$, prendendo $\mu\nu = CN$, poscia formando l'angolo retto $M\nu\varrho$ sarà $\mu\varrho = MR$ il raggio di curvatura in M. — La parabola ha per raggio di curvatura nel punto generico M il doppio della porzione di normale MN, che è ipotenusa del triangolo rettangolo MFN col vertice dell'angolo retto nel foco F.

124. Ogni archetto infinitesimo della curva può supporsi coincidente col relativo circolo osculatore, ne viene che due normali infinitamente vicine della curva si tagliano nel centro del corrispondente circolo osculatore. Tutte queste intersezioni delle normali infinitamente vicine, cioè tutti i centri

(*) Col metodo delle equipollenze (Veggasi la nota al § 100) si giunge direttamente a questo generale teorema, che potrebbe dimostrarsi anche colla teoria degli infinitesimi: Se il punto generico M di una curva piana sia riferito ad un punto fisso C mediante l'equipollenza tra la retta CM ed una funzione di rette costanti e di una variabile indipendente t, e le rette MT MU sieno equipollenti alle derivate prima e seconda di tale funzione prese rispetto alla t, il raggio di curvatura in M sarà la terza proporzionale alla distanza del punto U dalla MT, ed a questa MT.

di curvatura formano una linea che si dice l'*evoluta* o *sviluppata* della curva proposta, e questa per converso chiamasi *evolvente* o *sviluppante* di quella. Siccome ogni normale della sviluppante è tagliata dalle due normali infinitamente vicine precedente e seguente, così quella normale comprende due punti infinitamente vicini della sviluppata, cioè è ad essa tangente; l'evoluta considerata sotto questo aspetto dicesi l'*inviluppo* di tutte le normali della sviluppante.

125. *Disegno* 3.° Tirando un numero sufficiente di normali della data curva M_2MM_1 (Fig. 53) si potrà descrivere a mano la sviluppata che è la curva R_2RR_1 toccanle tutte quelle rette. Se interessi di determinare con maggior precisione il punto di contatto R della MS_1 colla sviluppata; si opererà in modo poco differente dal § 122, e pei punti S_1, ec. dove la normale MS_1 è incontrata dalle altre, s'innalzeranno delle perpendicolari S_1U_1, ec. eguali alle distanze dei punti M_1, ... dalla MS_1; dopo di che la curva U_2U_1... taglierà la normale nel punto cercato R.

126. Quando invece voglia costruirsi una sviluppante della curva R_2RR_1, bisognerà tirare a questa le tangenti RM, R_1M_1, ec., e presa ad arbitrio la lunghezza RM, le R_1M_1 R_3M_3 ec., si faranno uguali a quella RM aumentata rispettivamente degli archi RR_1 RR_3 ec., mentre invece le R_2M_2 ec. ne saranno minori degli archi RR_2 ec. Ora l'archetto RR_1 di una curva può porsi sensibilmente eguale a $c(1+c^2:24r^2)$, essendo c la corda RR_1 ed r il raggio di curvatura dell'arco RR_1; basterà determinare ad occhio questo raggio, ed assicurarsi che sia trascurabile l'errore che si commette prendendo la corda in luogo dell'arco.

Problema VI. *Trovare la tangente, la normale, il piano normale, la curvatura ed il piano osculatore di una curva gobba.*

127. Se una curva piana o gobba (§ 89) ($AMNB$) è data mediante le sue projezioni $AMNB$ $amnb$ (non occorre aver sott'occhio alcuna figura) sui piani coordinati, è palese che la secante obbiettiva (MN, mn) ha sempre le projezioni MN mn per quanto vicini si suppongano i punti (M, m) (N, n), e

perciò anche quando si giunge al limite corrispondente alla tangente; dunque la tangente della curva obbiettiva ha le sue projezioni tangenti alle projezioni della curva, ed anche il punto di contatto obbiettivo ha le projezioni nei punti di contatto delle projezioni. — Nel caso che una curva gobba abbia una sua tangente perpendicolare ad uno dei piani coordinati, la projezione di questa si riduce ad un punto, e perciò essa più non determina la tangente della projezione della curva; ma viceversa la conoscenza delle tangenti delle curve projette basterà anche in questo caso a determinare la tangente della curva obbiettiva; poichè quando una di quelle è perpendicolare alla fondamentale, la tangente della curva obbiettiva è perpendicolare ad uno dei piani coordinati; che se poi ambedue quelle tangenti fossero perpendicolari alla fondamentale bisognerebbe ricorrere al terzo piano coordinato. — Tutte le perpendicolari alla tangente in un dato punto di una curva gobba formano il piano che dicesi *normale* alla curva; facile sarà costruirne le tracce mediante il § 47.

128. Tre punti infinitamente vicini di una curva determinano il circolo osculatore quand' anche essa sia gobba; ed il piano di questo circolo si dice il *piano osculatore* della curva nel punto di cui si tratta. — Quando si hanno le projezioni di una curva, se essa è piana, col mezzo di tre suoi punti quali si vogliano si determineranno le tracce del piano che la comprende; ma se essa è gobba, per avere il piano osculatore in un dato punto, poca precisione si avrebbe adoperando tre punti vicinissimi: invece si potrà determinare la traccia orizzontale T della tangente nel dato punto della curva gobba, poscia le tracce orizzontali TS_1 TS_2 ec. di alquanti piani che comprendano quella tangente ed alcuni punti della curva poco discosti dal punto proposto; con un raggio arbitrario e col centro T si descriverà l'arco $S_1 S_2 \ldots$ (facile è l' immaginare la figura) e sui raggi TS_1 ec. si prenderanno le porzioni $S_1 U_1$ ec. eguali alle distanze del punto proposto dai punti della curva che si trovano rispettivamente sui piani delle tracce TS_1, ec.; notando bene di prendere le $S_1 U_1$ $S_2 U_2$ ec. sui raggi verso il centro T o sulle loro prolunga-

zioni secondo che quei punti sono sulla curva dall'uno o dall'altro lato del punto proposto: la curva d'errore $U_1 U_2 \ldots$ taglierà il circolo in X, e TX sarà approssimatamente la traccia orizzontale del cercato piano osculatore. Dalla traccia orizzontale si deduce la verticale, essendochè il piano osculatore comprende la tangente.

129. Determinato il piano osculatore, se si voglia trovare il circolo osculatore, e quindi il raggio di curvatura della data curva gobba, bisognerà projettare questa curva sul piano osculatore, e descritta la rappresentazione di tal projezione se ne troverà poscia il circolo osculatore col processo del § 122. — Il centro del circolo osculatore si trova sulla intersezione del piano normale e del piano osculatore, la quale dicesi la *normale* della curva; pel medesimo centro passa pure l'*asse* della curva (nel punto di cui si tratta), che è l'intersezione di due piani normali infinitamente vicini, ed è perpendicolare al piano osculatore. — Nelle curve gobbe oltre la *curvatura* dipendente dall'allontanamento della curva dalla sua tangente, dee notarsi anche la *torsione* dipendente dall'allontanamento della stessa dal suo piano osculatore. La curvatura è misurata dal rapporto fra l'angolo di *contingenza* compreso fra due tangenti infinitamente vicine e la lunghezza del corrispondente archetto della curva; la torsione è misurata dal rapporto fra il diedro di torsione compreso tra due piani osculatori infinitamente vicini e quel medesimo archetto infinitesimo.

Nota al Cap. I. del Libro II.

Nella Nota alla fine del Cap. II. del Libro I. e nel § 102 e seg. abbiamo veduto qualche esempio di quel fecondissimo principio, con cui le proprietà di una figura si derivano da quelle di una sua *prospettiva*, intendendo per prospettiva una maniera di projezione più generale di quella che si usa nella Geometria descrittiva, perchè eseguita con rette o raggi projettanti, che possono non solamente essere obbliqui al piano, su cui si eseguisce la projezione, ma eziandio, anzichè paralleli, divergenti da un punto, il quale dicesi *centro di projezione*

o *di prospettiva*. — Lo sviluppare anche in parte questo vastissimo argomento ci trarrebbe troppo lungi dal nostro scopo: ne faremo qualche rapido cenno, non per appagare, ma per eccitare la curiosità di chi brami avere almeno una idea delle parti più importanti della Geometria Superiore.

Tra una figura piana ed una sua *prospettiva* ha luogo una relazione che dicesi di *collineazione*, per la quale se in una figura si abbiano dei punti in linea retta, saranno pure in linea retta i punti corrispondenti nella figura *collineare*, e se in una figura alquante rette concorrano in un medesimo punto, lo stesso sarà delle loro corrispondenti nella figura *collineare*. Anche le figure *omologhe*, quali le abbiamo definite al §. 103, sono tra loro collineari. — La *collineazione* è più generale della *affinità*, nella quale a rette parallele corrispondono sempre rette parallele; il che può esprimersi col dire che alla retta, che virtualmente contiene tutti i punti all'infinito di una figura, corrisponde nella figura *affine* la retta pur essa situata all'infinito. La prospettiva dà origine ad una figura affine quando le rette projettanti, che uniscono i punti corrispondenti delle due figure piane, sono parallele. — La *similitudine* è un caso particolare della *affinità*, come questa lo è della *collineazione*. Le figure simili nella posizione di omologia sono omotetiche (pag. 36).

Le relazioni riguardanti l'allineamento di alquanti punti, o il comune incontro di alquante rette, si dicono relazioni *grafiche*; e sono invece relazioni *metriche* quelle che si riferiscono alle lunghezze ed in generale alle grandezze. — Sono relazioni metriche delle figure simili, l'uguaglianza degli angoli, la proporzionalità delle lunghezze, ec. — La principale relazione metrica delle figure affini si è che i rapporti delle rette parallele si conservano gli stessi da una figura all'altra. — Molto meno semplici sono le relazioni metriche che si conservano da una figura ad una sua collineare: esaminiamo due figure nella loro posizione prospettiva, quali sono le obbiettive $(ABC...)$ $(A'B'C'...)$ (Fig. 54), o nella posizione di omologia, come le $AB...$ $A'B'...$. Chiamate p p' le distanze del centro d'omologia S da due rette omologhe AB $A'B'$ si ha

$$AB.p = SA.SB.\text{sen}\,ASB,$$
$$A'B'.p' = SA'.SB'.\text{sen}\,A'SB',$$
perciò $AB:A'B' = SA.SB.p':SA'.SB'.p$;
e due prodotti di tali rapporti saranno necessariamente uguali se contengano le stesse lettere e le stesse direzioni di rette. Così, per esempio, se sui lati di un triangolo ABC sieno posti rispettivamente i punti $N\ L\ M$ i due rapporti
$AN.BL.CM:A'N'.B'L'.C'M'$, $BN.CL.AM:B'N'.C'L'.A'M'$
saranno uguali, perchè contengono le stesse lettere e le stesse rette; quindi il rapporto $AN.BL.CM:BN.CL.AM$ mantiene lo stesso valore in tutte le figure tra loro collineari. Da ciò si traggono due importanti teoremi.

Teorema I. *Se i lati del triangolo ABC sono tagliati da una retta NLM, i loro sei segmenti danno i due prodotti uguali $AN.BL.CM = BN.CL.AM$.* Infatti noi possiamo supporre che nella figura collineare $A'B'C'$ quella retta passi a distanza infinita, sicchè le lunghezze $A'N'$ $B'N'$ ambedue infinite, e colla differenza finita $A'B'$, abbiano il rapporto $1:1$; e sia lo stesso delle $B'L'$ $C'L'$, e delle $C'M'$ $A'M'$.— Mediante questo teorema si può, senza misurare alcún angolo e senza tirare rette parallele, determinare la distanza, supposta inaccessibile, AN; giacchè il rapporto
$$AN:BN = CL.AM:BL.CM,$$
(misurata anche la AB) darà facilmente le AN BN.

Teorema II. *Se i lati del triangolo ABC sono tagliati da tre rette che dai vertici vanno ad un punto comune O, i sei segmenti dei lati formano i prodotti uguali*
$$AN.BP.CM = BN.CP.AM.$$
Poichè se immaginiamo una figura collineare della precedente, nella quale passino a distanza infinita due, N' M', di quei punti, le $A'B'$ $C'O'$ saranno parallele, così pure le $A'C'$ $B'O'$; e saranno uguali le infinite $A'N'$ $B'N'$ e le $C'M'$ $A'M'$: perciò nella figura $A'B'C'P'$ sussisterà quella uguaglianza di prodotti; e per gli stabiliti principii essa si verificherà anche nella figura primitiva. — Nei casi dei due predetti teoremi si dicono *involuzioni* quelle formate dai punti $ANBLCM$, oppure $ANBPCM$; esse potranno distinguersi, dicendo la

prima involuzione *positiva* e la seconda *negativa*, poichè, ove si tenga conto delle direzioni in cui sono prese le rette, si ha

$$AN.BP.CM = -BN.CP.AM.$$

A tutti i punti a distanza infinita della figura $A'B'C'$ corrispondono come omologhi i punti della retta Ii; viceversa i punti a distanza infinita della figura ABC sono omologhi a quelli della retta $J'E'$. Considerando le figure omologhe come projezioni di due figure prospettive, poste sui piani $Iih\,\Omega\omega h$, e tagliando questi piani con altri a loro paralleli condotti pel centro di prospettiva (S, s) si scorge che quelle due rette corrispondenti alle projezioni verticali i, η' sono parallele all'asse d'omologia HK, e che la distanza del centro d'omologia dalla Ii è uguale alla distanza della $J'E'$ dall'asse d'omologia HK. — Le distanze del punto qualsivoglia A dalla Ii, e del suo omologo A' dalla $J'E'$ sono inversamente proporzionali; ciò risulta dal teorema che i lati del parallelogrammo $sih\eta'$ sono tagliati da ogni retta saa' in guisa che $ia.\eta'a' = ih.\eta'h$: per questa ragione le due rette Ii $J'E'$ si dicono (§ 106) gli *assi d'inversione* delle due figure omologhe.

Lo Steiner mostrò quanta eleganza e generalità acquisti la Geometria colla considerazione delle figure elementari; quali sono una serie di punti in linea retta, od una serie di raggi partenti da un punto comune; per fissare meglio le idee daremo alla prima di queste serie il nome di *punteggiata* (Gerade dello Steiner) (*), ed alla seconda serie il nome di *stella* (ebene Strahlbüschel). Le *punteggiate* che appartenendo a due figure collineari tra loro si corrispondono, sono esse pure *collineari*: dicasi lo stesso delle *stelle* corrispondenti in due figure collineari. — Nelle figure affini le punteggiate corrispondenti sono *simili*, cioè le distanze tra i punti che costituiscono le punteggiate sono tutte proporzionali: le stelle corrispondenti sono soltanto collineari. — Nelle figure simili le pun-

(*) Alle punteggiate io diedi il nome di RETTE in un Saggio di Geometria derivata inserito nel Vol. IV. dei Nuovi Saggi dell'Accademia di Padova. 1836.

teggiate sono simili, e le stelle sono uguali; giacchè non si ha mai alcun riguardo alle lunghezze dei raggi di una stella, e soltanto si considerano le loro rispettive inclinazioni.

Essendochè in due figure collineari esistono sempre gli *assi d'inversione* (che di sopra determinammo pel caso che tali figure sieno nella posizione di prospettiva oppure di omologia) in due punteggiate collineari esisteranno i due *centri d'inversione* I E' rispettivamente corrispondenti ai punti a distanza infinita dell'altra punteggiata; e le distanze da essi di due punti corrispondenti A A' avranno il prodotto costante $IA.E'A'$.

Una punteggiata ed una stella si dicono tra loro *prospettive*, se tutti i raggi della stella passano rispettivamente pei punti della punteggiata. — È palese che due punteggiate prospettive ad una medesima stella sono tra loro collineari, giacchè una delle punteggiate può considerarsi come la prospettiva dell'altra, il centro di prospettiva essendo il centro della stella: — Anche due stelle prospettive ad una medesima punteggiata sono collineari; poichè esse sono omologhe rispetto all'asse d'omologia, che passa per tutti i punti della punteggiata. — In generale due punteggiate prospettive a due stelle collineari sono collineari; dicasi lo stesso di due stelle prospettive a due punteggiate collineari.

Coi principii della Geometria di derivazione si dimostrano facilmente due teoremi importanti e molto generali.

Teorema III. *Se in un piano si abbiano due punteggiate collineari, tutte le rette che uniscono i loro punti corrispondenti o s'incontrano in uno stesso punto* (nel qual caso quelle punteggiate sono prospettive), *o sono tutte tangenti ad una sezion conica, che tocca anche le rette delle punteggiate.*

Teorema IV. *Se in un piano vi sieno due stelle collineari, tutti i punti d'intersezione dei loro raggi corrispondenti o sono in linea retta o appartengono ad una sezion conica, che passa pei centri delle due stelle.*

Corollarii. 1.° Se due punteggiate sono simili, al punto all'infinito dell'una corrisponde il punto all'infinito dell'altra, perciò la retta che li unisce e che è una tangente della sezione

conica sia tutta a distanza infinita, quindi (§ 106) la curva è una parabola, e si ha il modo usitatissimo di descriverla prendendo sopra una delle tangenti le parti $A'I'$ $I'I'I'$ ec. (Fig. 55) proporzionali alle $A1$ 12 ec. prese sull'altra (e che possono essere tutte fra loro uguali) poscia tracciando la curva che tocca tutte le rette $I1$ $II2$ ec.

2.° I raggi di due stelle uguali s'intersecano per un teorema di Geometria elementare nei punti di un circolo; il quale facilmente si descrive sul terreno quando in A ed in B si abbiano (Fig. 56) due grafometri per formare gli angoli uguali $BAM=TAM$, $BAM'=TAM'$, ec.; sicchè i raggi che partono dai centri A B costituiscono due stelle uguali.

3.° Si formino due punteggiate simili $123\ldots$ $IIIII\ldots$ (Fig. 57, 58) (prendendo per brevità

$$12=23=\ldots,\quad II=IIII=\ldots),$$

le stelle coi centri A A_1 prospettive a quelle punteggiate, cioè formate dai raggi $A1$, $A2$, ... A_1I, A_1II, ... saranno collineari, e perciò le loro intersezioni costituiranno una sezion conica, che passerà pei centri A A_1 delle due stelle. — Se 0 sia il punto corrispondente a quello O in cui la punteggiata $III\ldots$ è tagliata dalla retta AA_1, la $A0$ sarà tangente alla sezion conica in A: similmente se la AA_1 incontri la punteggiata $12\ldots$ nel punto situato a distanza infinita, la tangente in A_1 sarà parallela alla $III\ldots$; perciò se la $12\ldots$ sia parallela alla A_1A, e la III sia parallela alla $A0$, sarà AA_1 un diametro della sezion conica, e se $A_1O=OA$, O ne sarà il centro. — Se inoltre, come nella figura 57, il punto B appartenente alle due punteggiate corrisponda a sè medesimo, cioè sia $01:OI=0B:OB$, la sezion conica passerà anche per B, ed OB sarà il semidiametro conjugato con OA. Per tal maniera traguardando dai punti fissi A A_1 a *paline* equidistanti disposti sul semidiametro OB e sulla tangente $B0$ sarà facile tracciare sul terreno il quarto d'ellisse AMB: potremo descrivere tutta l'ellisse disponendo le paline sul diametro BB_1 e sulle due tangenti parallele ed uguali al diametro conjugato A_1A. — Se invece, come nella figura 58, al punto B corrisponde nella punteggiata $III\ldots$ il

punto B_1 tale che $B_1O=OB$, i raggi corrispondenti AB A_1B_1 delle due stelle sono, nelle fatte supposizioni, paralleli, cioè concorrenti ad un punto all'infinito della curva, ossia paralleli ad un assintoto dell'iperbola, di cui A_1A è un diametro primario, e BB_1 il suo diametro secondario conjugato.

4.° Tutte le tangenti dell'ellisse A_1NA (Fig. 57) potranno determinarsi mediante le loro intersezioni colle due tangenti fisse A_1L B_1l, le quali intersezioni formeranno così le due punteggiate $A_1L\ldots$, $al\ldots$, che non saranno simili, ma soltanto collineari. Per trovare una relazione metrica tra i punti corrispondenti L l notiamo che ai punti I A_1 L a ed al punto a distanza infinita della prima punteggiata debbono rispettivamente corrispondere nella seconda il punto all'infinito ed i punti a l B_1 e, perchè le IB (parallela alla B_1l) A_1a Ll aB_1 Ae (parallela alla A_1L) sono tangenti all'ellisse; essendo adunque I e i centri d'inversione delle due punteggiate sarà $IL.el=IA_1.ea=Ia.eB_1$.

5.° Si può descrivere la sezione conica che passa per cinque punti con soli allineamenti, senza prendere alcuna misura, mediante il teorema del Pascal, pel quale: *In ogni esagono ABCDEM inscritto in una sezion conica i tre punti di incontro S e a dei lati opposti sono in linea retta.* Possiamo dimostrarlo osservando che tutti i raggi passanti pel punto S formano sulle due rette CD CB le punteggiate $Ca\ldots$ $Ce\ldots$ che per essere prospettive sono collineari; le due stelle coi centri A, E formate da tutti i raggi Aa Ee sono tra loro collineari perchè prospettive a due punteggiate collineari, quindi esse danno coi loro punti d'intersezione M una sezione conica; e facilmente si riconosce che essa oltre passare pei centri A E delle due stelle, passa anche pei punti B C D. — La figura 60 mostra come la stessa costruzione si applichi al caso che la sezion conica debba avere nei punti A E date tangenti, ed inoltre debba passare pel punto C. — E nella figura 61 si vede come si descriva la parabola, di cui si conoscono i tre punti A B C e la direzione Ca dei diametri; vi si suppone che i punti D E della figura 59 coincidano insieme nel punto della parabola, che sta a distanza infinita

(sicchè la retta *DES* sia quella tangente a distanza infinita che spetta ad ogni parabola), quindi per ciascuna *ea* parallela alla *AB* si tireranno i due raggi *AaM* *eM* (parallelo a *Ca*) e si avrà un punto della cercata parabola. — Queste costruzioni si possono mutare in varie guise.

CAP. II.

Generazione delle superficie e loro descrizione grafica.

130. Come le linee possono supporsi generate dal movimento di un punto, così dal movimento delle linee possono supporsi generate le superficie. Nel secondo caso peraltro rimane grande indeterminazione nella scelta delle linee *generatrici*, cioè una stessa superficie può supporsi generata in infiniti modi diversi: bisogna poi che per ciascuna posizione della generatrice questa sia una linea pienamente determinata; cioè se ne conosca la posizione ed anche la forma (in quanto questa fosse variabile). Talvolta la posizione e grandezza della generatrice si fa dipendere da una o più linee che restano immobili, e che diconsi *direttrici*. Avviene eziandio che si possa generare la medesima superficie supponendo che si muova la linea da prima assunta per direttrice, e che perciò questa divenga la generatrice; sicchè le qualificazioni di generatrice e di direttrice non sono assolute, ma soltanto relative al modo con cui si suppone generata la superficie. Gli esempii meglio mostreranno l'uso di tali vocaboli. — Diremo in seguito quali generatrici prendano talora il nome di *caratteristiche*: le caratteristiche che noi considereremo saranno le linee rette e le circolari, le prime appartenendo alle superficie sviluppabili, e le seconde alle superficie rotonde ed alle superficie-tubi.

131. Se una linea retta si muove passando successivamente pei varii punti di una circonferenza di circolo, e mantenendosi sempre perpendicolare al piano di questo circolo, quella retta genera la superficie d'un cilindro, ed è per questo che tutte le infinite posizioni della retta si dicono le *generatrici* della superficie, ed il circolo si chiama la *direttrice*. La mede-

sima superficie si può supporre generata dal moto di un circolo che si mantenga sempre parallelo a sè medesimo e che vada scorrendo fra due rette perpendicolari al suo piano, sotto questo aspetto i circoli possono considerarsi come le linee generatrici, e le due rette come le direttrici; peraltro queste ultime denominazioni non si sogliono adoperare, ed il cilindro si considera generato nel primo modo. — Il nome di *superficie cilindrica*, o per brevità quello di *cilindro*, si dà anche ad altre superficie più generali della precedente; purchè possano supporsi generate da rette parallele che vadano scorrendo pei punti di una curva qualunque; le rette sono le *generatrici caratteristiche* del cilindro; quella curva ne è la *direttrice*. È palese che un medesimo cilindro ha infinite direttrici, non essendo necessario che la direttrice sia perpendicolare alle generatrici, e nemmeno che essa sia una curva piana.

132. Se una retta, passando per un punto fisso, passa inoltre successivamente pei punti di una linea curva (il cui piano non comprenda il punto fisso) essa genera una *superficie conica*, che più brevemente diremo un *cono*. Tutte le successive posizioni della retta mobile sono le *caratteristiche* del cono: la linea che ne regola il movimento è una *direttrice*, il punto per cui passano tutte le generatrici caratteristiche è il *vertice* del cono.

133. Quando una linea ruota intorno ad un asse, in modo che tutti i suoi punti descrivano dei circoli aventi i centri su quell'asse ed i piani paralleli, essa genera una *superficie di rivoluzione*, che per ispeditezza di linguaggio diremo *superficie rotonda*: così se per esempio la linea è una retta posta in uno stesso piano coll'*asse di rotazione* la superficie generata è un cilindro od un cono rotondo quali si considerano nella Geometria elementare; e se un circolo ruota intorno ad un suo diametro esso genera una sfera. — Se sopra una superficie rotonda si segna una qualunque linea, che tagli tutti i circoli paralleli, essa può prendersi come generatrice della superficie; ma più specialmente si prende per generatrice quella curva nella quale la superficie è tagliata da un piano qualunque condotto per l'asse. Essa si chiama linea *meridiana*, e

meridiani si dicono tutte le posizioni di questa generatrice.— Del resto nelle superficie rotonde si può prendere per generatrice anche un circolo, e supporre che si muova in modo che il suo centro scorra sull'asse ed il piano vi rimanga sempre perpendicolare, e che la grandezza del circolo vada mutandosi in guisa che la sua circonferenza tagli costantemente una delle predette generatrici, che in tal caso farà l'ufficio di direttrice, ed i circoli si diranno le generatrici caratteristiche, perchè caratterizzano la natura delle superficie rotonde.

134. Qualunque sia la superficie che voglia descriversi graficamente, bisognerà delineare tutto quanto occorra per poter condurre una qualunque delle sue generatrici appartenente a quel modo di generazione che si avrà scelto come il più opportuno. Si potranno anche segnare le projezioni di alquante generatrici, ma in ciò vi vorrà una certa misura, poichè un soverchio numero di projezioni renderebbe confuso il disegno: nel tracciare tali projezioni gioverà seguire i precetti già dati (§ 15) per distinguere quelle porzioni di linee che rispetto all'uno o all'altro dei piani coordinati rimangono coperte dalla superficie di cui si tratta, od almeno da quella sua porzione che si suppone esistere. — Se fossero descritte le projezioni su un piano coordinato di tutte le generatrici della proposta superficie, esse in molti casi non coprirebbero tutto intero il piano coordinato, cioè vi sarebbero delle porzioni di questo, nelle quali non cadrebbe alcuna projezione di generatrice, mentre altre porzioni sarebbero tutte coperte da tali projezioni: le linee che separano queste due specie di porzioni del piano coordinato si dicono il *contorno apparente* della proposta superficie. — I contorni apparenti nei due piani coordinati contribuiranno a far meglio intendere la forma della superficie. — Quando questa trapassa il piano coordinato sarà pur da descriverne la traccia, la quale in qualche modo forma parte del contorno apparente (specialmente se si trascuri la porzione di superficie che sta al di là del piano coordinato); nulladimeno a questa traccia non daremo il nome di contorno apparente, poichè essa ne differisce per una essenziale proprietà, come diremo parlando dei piani tangenziali.

135. Uno dei primi problemi da risolversi mediante il disegno di una superficie sarà stabilire la corrispondenza fra le due projezioni di uno stesso punto appartenente alla superficie; a tal fine si descriveranno le due projezioni di quella generatrice che passa pel punto obbiettivo, e siccome su quelle projezioni dovranno trovarsi le projezioni del punto, così sarà poi facile stabilirne la corrispondenza mediante la solita retta perpendicolare alla fondamentale. — I dati precetti non varrebbero per le superficie di cui non si conoscesse alcun modo geometrico di generazione; allora per descrivere la superficie non vi sarebbe altro mezzo che disegnare le projezioni di un gran numero di linee ad essa appartenenti, indicando quali sieno le projezioni corrispondenti ad una medesima linea obbiettiva; ma questa specie di superficie non forma oggetto dei presenti studii, e soltanto avremo occasione di parlarne nelle applicazioni della Geometria descrittiva.

Problema I. *Descrivere una superficie sferica.*

136. Pochissimo si richiede per rappresentare una sfera, che è pienamente determinata quando se ne conoscono il centro ed il raggio, onde se sui due piani coordinati si descrivano con questo raggio due circoli che abbiano per centri le projezioni del centro della sfera, questa sarà bastantemente rappresentata. — I circoli predetti sono i contorni apparenti della sfera secondo che essa è riguardata in faccia ad uno od all'altro dei piani coordinati da un osservatore supposto a distanza infinita; ed è palese che le projezioni di tutti i punti della superficie cadono dentro di quei due circoli. — Ricordando che la sfera può esser generata dalla rotazione di un suo circolo massimo intorno ad un suo diametro qualunque, ci sarà facile descriverne le tracce sui piani coordinati, ed inoltre quante generatrici si vogliano della medesima; e col mezzo delle generatrici si potranno determinare le projezioni corrispondenti dei punti della sfera. Le generatrici quantunque circolari possono avere le projezioni ellittiche e quindi più malagevoli da descrivere; queste si dovranno per conseguenza schivare, e, o scegliere per generatrici i circoli descritti sulla sfera che hanno una projezione circolare e l'altra rettilinea.

o adoperare la rappresentazione di una generatrice anzichè la sua projezione.

137. *Disegno*. La sfera rappresentata da due circoli uguali AMA_1 $ax'a_1$ (Fig. 62) ha il centro in (C,c), quei due circoli ne sono i contorni apparenti; siccome il secondo taglia la fondamentale, così la porzione e_1e che cade al di sotto del piano orizzontale è segnata a punti; facilmente se ne ricava la traccia orizzontale E_1E della sfera. — Per trovare le projezioni verticali dei punti della sfera projettati in X, si consideri il circolo massimo che è projettato sul diametro CX, la sua projezione verticale è un'ellisse; ma se immaginiamo che esso giri intorno al diametro verticale fino a prendere la posizione AA_1, la sua projezione sarà allora il circolo $ax'a_1$, che sarà anche rappresentazione del circolo di cui si tratta; dopo il suddetto giro i punti projettati in X lo sono invece in X', ed è quindi facile trovarne le rappresentazioni x' x_1', che poscia daranno le projezioni verticali x x_1 corrispondenti ad X. — Invece potremo considerare il circolo della sfera che è projettato sulla corda MM_1 condotta per X parallelamente alla fondamentale, la sua projezione verticale sarà il circolo mxm_1, sul quale si determineranno immediatamente i punti corrispondenti ad X. Il circolo mxm_1 è descritto a tratto interrotto perchè esso riesce invisibile all'osservatore che guarda contro al piano coordinato verticale. — Se vogliamo adoperare i circoli che si projettano nel circolo XX', vedremo che essi sono projettati verticalmente nelle rette $x'x$ x'_1x_1 e saremo ricondotti alla stessa penultima costruzione. — Finalmente per rappresentare il circolo projettato in CX si può adoperare il circolo già descritto sul piano orizzontale, immaginando che il primo giri fino a ridursi orizzontale; allora X'' X_1'' rappresenteranno i cercati punti, dei quali si avranno le projezioni verticali facendo $\xi x = \xi x_1 = XX''$.

Problema II. *Descrivere una superficie conica conoscendone il vertice e la direttrice.*

138. Sarà facile descrivere le projezioni di quante si vogliano generatrici caratteristiche della superficie, le quali sono le rette condotte pel dato vertice e per ciascun punto della

direttrice; le intersezioni di queste generatrici coi piani coordinati daranno le tracce del cono. — Fra tutte le generatrici projettate sopra uno dei piani coordinati osserveremo che frequentemente ve ne sono alcune che formano il contorno apparente. — Sulle projezioni di una stessa generatrice si troveranno le projezioni corrispondenti dei punti della superficie. — In riguardo alla distinzione delle parti *visibili* dalle *invisibili* (§ 15) si osservi che quando si suppone che le generatrici sieno infinitamente prolungate da ambedue le parti del vertice (il che è propriamente richiesto dalla natura della superficie conica) avviene talvolta che una di queste falde della superficie copra per intero tutta la porzione dell'altra falda che rimane al di sopra e al di qua dei piani coordinati, sicchè non vi sia più luogo ad alcuna distinzione fra le parti visibili ed invisibili di questa seconda falda; potrà dunque riuscir vantaggioso supporre che della superficie conica esista soltanto una parte, o che una delle falde non influisca nel rendere invisibile l'altra falda.

139. *Disegno* 1.° Se (S, s) è il vertice del cono da descriversi (Fig. 63) ed MM_1 mm_1 le projezioni della sua direttrice; per due punti corrispondenti di queste e pei punti fissi S s si tireranno le rette SM sm, e sarà (SM, sm) una delle generatrici del cono; questa ha sui piani coordinati le tracce X y. Adoperando un sufficiente numero di generatrici descriveremo per punti le due tracce ACX bdy del cono proposto. — Tutte le projezioni orizzontali SX SA ec. delle generatrici sono comprese fra le due SC SC_1 che sono le tangenti alla traccia ACX, ed alla projezione della direttrice condotte dal punto S; queste SC SC_1 formano il contorno apparente del cono sul piano orizzontale. — La porzione di traccia CXC_1 e le generatrici che passano per essa sono sul piano orizzontale a tratto interrotto fino in S, perchè rimangono coperte dalla superficie; s'intenderà facilmente come debbano segnarsi tutte le altre parti della figura. — Per avere la projezione verticale corrispondente alla projezione orizzontale M di un punto posto sulla superficie conica basterà conoscere il vertice (S) ed una delle tracce; infatti la retta

SMX sarà la projezione orizzontale della generatrice che passa pel cercato punto, e sarà facile trovarne la projezione corrispondente sx, e su questa il punto m corrispondente ad M: soltanto succederà non di rado che ad una stessa projezione orizzontale corrispondano due o più projezioni verticali; questo è anche il caso della figura 63, ed un secondo punto projettato in M si otterrebbe prolungando SX finchè incontrasse una seconda volta la traccia AC_1.

140. *Disegno* 2.° Se la direttrice del cono sia un circolo ed il cono sia rotondo, sarà facile determinare l'asse maggiore ed una ordinata della traccia orizzontale, supposto che questa sia un'ellisse, della quale poscia si troverà l'asse minore coi principii esposti al § 94 figura 41. Ove l'asse di rivoluzione del cono (cioè la retta che unisce il suo vertice col centro del circolo) non fosse parallelo al piano coordinato verticale, ve lo si ridurrebbe mediante rotazione intorno ad una retta verticale, oppure si adoprerebbe un altro piano coordinato. — Sia (S) (Fig. 64) il vertice del cono rotondo che ha per direttrice un circolo di dato raggio, sia (C) il centro di questo; facciamo girare il cono intorno alla verticale projettata in H, finchè l'asse prenda la posizione $(S'C')$ parallela al piano coordinato, allora il circolo sarà projettato nella data retta $d'd_1'$ perpendicolare alla $s'c'$; tirate le $s'd'a'$ $s'd_1'a_1'$ sarà $(a'a'_1, A'A_1')$ l'asse maggiore della cercata ellisse, il quale si rimetterà nella sua posizione primitiva AA_1; la semiordinata HI è uguale alla hi' parallela alla $c'd'$. — La costruzione sarebbe riuscita più semplice facendo ruotare l'asse del cono intorno alla sua projezione SC. Questo processo si adoperò nel piano verticale, in cui mediante la rappresentazione $s''c''d''$, che fa le veci di un nuovo piano coordinato perpendicolare al verticale, si costruì la traccia blb_1.

Problema III. *Descrivere una superficie cilindrica conoscendone la direttrice ed una generatrice.*

141. Il cilindro può riguardarsi come un cono il cui vertice siasi infinitamente allontanato, sicchè tutte le generatrici che concorrevano in un punto sieno divenute parallele; pertanto considerando che le projezioni delle rette parallele

sono parallele, si scorgerà che le stesse costruzioni date pel problema precedente valgono anche per questo, purchè in luogo delle rette condotte rispettivamente pei punti S s si tirino delle rette parallele alle due projezioni della data generatrice.

142. I due precedenti problemi trovano immediate applicazioni nel descrivere l'ombra projetta sui piani coordinati, oppure la prospettiva di un dato oggetto.

Problema IV. *Descrivere una superficie rotonda* (ossia di rivoluzione) *conoscendone l'asse e la linea meridiana.*

143. Questo problema preso in tutta la sua generalità condurrebbe ad una soluzione non poco laboriosa; infatti considerando varie posizioni della linea meridiana (§ 133) come le generatrici della superficie, per avere le projezioni di ciascuna di esse, bisogna prima descriverne la rappresentazione, immaginando che il suo piano giri fino a divenir parallelo ad uno dei coordinati, poscia dedurne le cercate projezioni. Nè molto più breve sarebbe la descrizione delle ellissi projezioni dei circoli generatori della superficie e posti in piani perpendicolari all'asse di rivoluzione. Daremo in seguito le teorie dalle quali dipenderebbe in questo caso generale la determinazione dei contorni apparenti della superficie, e delle sue tracce sui piani coordinati. Ora ci limiteremo a descrivere una superficie rotonda nel caso più ordinariamente considerato che l'asse di rotazione sia perpendicolare ad uno dei piani coordinati.

144. *Disegno*. Sia ($AMHKA$, $bmhka$) (Fig. 66) la linea che ruotando intorno all'asse verticale (A, ab) genera la superficie proposta. Ogni punto (M, m) di quella linea genererà un circolo orizzontale, il cui raggio sarà la perpendicolare (MA, md) abbassata dal punto (M) sull'asse; perciò descritto il circolo XYM col raggio AM, e tirata la xmx_1 parallela alla fondamentale ed uguale al diametro di quel circolo, saranno queste le projezioni di uno di quei circoli, che possono considerarsi come le generatrici caratteristiche della superficie rotonda. Il punto H che ha la distanza massima dalla projezione A dell'asse di rivoluzione dà origine al circolo massimo

(EHE_1, ee_1) che dicesi l'*equatore* della superficie rotonda. Si noti che considerando la cosa in tutta la generalità una superficie rotonda può avere più equatori, ai quali competano dei raggi massimi rispetto ai circoli ad essi vicini, e che è da riguardarsi come analogo all'equatore anche un circolo che abbia il raggio minimo rispetto a quello dei circoli ad esso prossimi. — Tutte le estremità x x_1 delle projezioni verticali dei circoli generati da ciascun punto della linea (AMH) formano la ake_1bx projezione verticale e nello stesso tempo rappresentazione del meridiano (§ 133) della superficie, che è parallelo al piano coordinato, e che suol dirsi il meridiano *principale*. — Per descrivere la projezione verticale del meridiano che ha la projezione orizzontale AF, tirata una orizzontale qualunque dx, si projetti su di essa in y il punto Y determinato sulla AF facendo $AY=dx$; ed un sufficiente numero di questi punti y darà il modo di costruire la curva bya, il che può anche facilitarsi colla considerazione che ogni dy ha un costante rapporto colla corrispondente dx; ne viene che le rette ex fy s'incontrano in un punto dell'asse ab, e che lo stesso succede delle tangenti in x ed in y.

145. Conoscendo la linea meridiana ($AEXA$,$aexb$) è facile stabilire la corrispondenza fra le projezioni Y y di uno stesso punto della superficie. Se sia data la projezione verticale y, si tirerà dyx parallela alla fondamentale, e la projezione corrispondente Y sarà l'una o l'altra delle intersezioni del circolo che ha il centro A ed il raggio $=dx$ colla retta $y\eta Y$ perpendicolare alla fondamentale. Se invece sia data la projezione orizzontale Y si considererà (§ 137) $aexb$ come rappresentazione del meridiano projettato sulla AYF, e si farà $AX=AY$, $X\xi x$ Yy perpendicolari, e xy parallela alla fondamentale. — Le fatte considerazioni indicano abbastanza come si descrivano le tracce della superficie nel caso che essa tagli i piani coordinati. — La linea ($AMHKA$,$bmhka$), che è posta sulla superficie, e dalla cui rivoluzione si suppose generata la superficie, ha le sue projezioni disegnate in modo da distinguere la parte visibile da quella che si suppone resa invisibile dalla superficie stessa. Si scorge che in ambedue le

projezioni i contorni apparenti separano la parte visibile dalla invisibile.

Problema V. *Descrivere l'iperboloide ad una falda che è generato dalla rotazione di una retta.*

146. Quando una retta ruota intorno ad un asse che non la incontra nè le è parallelo, essa genera una superficie che dicesi *iperboloide rotondo ad una falda*, perchè la sua linea meridiana è un'iperbola che ha l'asse secondario nell'asse di rivoluzione. La superficie di cui ora si tratta è dunque costituita dalle infinite posizioni della retta generatrice; faremo vedere che esiste sempre un altro sistema di rette differenti dalle precedenti, le quali generano colla rotazione la medesima superficie. Il circolo minimo della superficie è quello generato dal punto della retta generatrice che meno si discosta dall'asse, quindi il suo raggio è la minima distanza fra l'asse e la retta; la projezione di questa retta sul piano di quel circolo sarà per conseguenza (§ 60) tangente al circolo.

147. *Disegno.* Il piano coordinato orizzontale sia quello stesso del circolo minimo, sicchè esso tagli la superficie in due parti uguali, delle quali descriveremo quella che rimane al di sopra di tal piano. Se $(M_1T_1,\ m_1t_1)$ (Fig. 65) è una delle posizioni della retta generatrice, e C è la projezione dell'asse, l'intersezione di quella col piano meridiano parallelo al coordinato verticale sarà il punto $(X_1,\ x_1)$: per trovare quante si vogliano di queste generatrici si descrivano da prima le projezioni $T_1T_6U\ zz_1$ di un circolo caratteristico della superficie rotonda, cioè di quello che è generato dal punto $(T_1,\ t_1)$ della data retta; tirata una qualunque MT tangente al circolo minimo sarà facilissimo determinare la corrispondente projezione verticale mt della generatrice, ed anche il punto in cui essa taglia il piano projettato in CEX_1. Che questa linea meridiana sia un'iperbola lo si dimostrerà osservando che atteso la costante inclinazione della generatrice $(MT,\ mt)$ sul piano orizzontale si ha ξx proporzionale ad MX, e quindi il quadrato di ξx ha un costante rapporto con

$$(MX)^2 = EX\,.\,E_4X = e\xi\,.\,e_4\xi\ ;$$

la qual proprietà appartiene (§ 109) all'iperbola che ha l'asse

primario e_4e: gli assintoti sono le d_2t_2 d_2t_6 projezioni verticali delle generatrici, le cui icnografie sono parallele alla fondamentale.

148. Ora immaginiamo una seconda retta che abbia sul piano orizzontale un'inclinazione eguale a quella della retta (MT, mt), ed essa pure abbia la projezione orizzontale tangente al circolo EM_1E_4, ma la sua inclinazione sia in direzione opposta a quella della (MT): questa nuova retta ruotando intorno all'asse (C) genererà la stessa superficie di cui si tratta; infatti se sia (M_7U_1, m_1t_1) una posizione qualunque della seconda retta, essa incontrerà il piano del meridiano (EX_1, ex_1) nel medesimo punto in cui è incontrato dalla prima retta quando ha la posizione (M_1T_1, m_1t_1) situata dall'altra parte e ad ugual distanza da quel meridiano; e siccome una simil cosa può dirsi di ogni altro meridiano, così ne viene che ogni punto della (M_7U_1, m_1t_1) appartiene ad una delle prime *generatrici* (MT, mt). Dunque *l'iperboloide ha due sistemi di generatrici rettilinee, ed ogni retta di un sistema si appoggia su tutte quelle dell'altro sistema*, eccettuata una sola a cui è parallela. Nel disegno per distinguere le generatrici dei due sistemi esse si sono tracciate diversamente; si osservi peraltro che ad ogni projezione spettano veramente due generatrici appartenenti ad ambedue i sistemi; così sulla M_1U_7 è projettata anche una generatrice del primo sistema, ma essa non si considera perchè è posta sotto del piano coordinato; e sulla m_3x_5 oltre la generatrice del secondo sistema (M_3X_5) è projettata anche la generatrice del primo sistema (M_5X_5, m_3x_5), ma questa non si considera, perchè rispetto all'osservatore che guarda contra il coordinato verticale rimane coperta dalla superficie; al contrario nella porzione x_5t_5 è visibile la generatrice del primo sistema (X_5T_5) e non quella del secondo.

Delle superficie doppiamente rettilinee.

149. Le superficie che sono generate dal moto di una linea retta noi le diremo, purchè non sieno *sviluppabili* (§ 173).

superficie rettilinee (*Surfaces réglées, Surfaces gauches, Regelflaechen, windschiefen Flaechen*). Il moto della retta generatrice può regolarsi facendo che essa si appoggi costantemente a tre linee fisse, che si prenderanno per direttrici. Nel caso che anche queste direttrici sieno rettilinee, si dimostra che esistono infinite direttrici tutte rettilinee, sulle quali si appoggia ciascuna generatrice; ne viene che le direttrici possono considerarsi a lor volta come generatrici, le quali scorrano appoggiandosi sopra tre rette scelte ad arbitrio fra quelle che da prima si consideravano come generatrici: in una parola, la superficie è composta di due sistemi di generatrici rettilinee tali che ogni generatrice di un sistema taglia tutte quelle dell'altro sistema. A motivo di questa doppia generazione tali superficie possono dirsi *doppiamente rettilinee*: una di esse è lo iperboloide rotondo ad una falda che abbiamo precedentemente descritto: passeremo ora a descrivere ed a trovare qualche proprietà delle due generali superficie di tal classe.

Problema VI. *Descrivere l'iperboloide ad una falda.*

150. Quando sono date tre generatrici di un sistema, le quali si prendano per direttrici, le generatrici dell'altro sistema si otterranno immaginando un piano che passi per una delle direttrici e tagli le altre due, la retta condotta pei due punti d'intersezione sarà evidentemente una delle cercate generatrici. Si faccia attenzione che due direttrici non debbono trovarsi in un medesimo piano, poichè altrimenti anzichè una superficie curva si avrebbe un piano; inoltre noi ora supponiamo che le tre direttrici non sieno parallele ad un medesimo piano. — Per dimostrare la doppia generazione dell'iperboloide cercheremo in primo luogo in qual modo la generatrice vada tagliando nel suo movimento due direttrici; per tale questione adopreremo la Geometria descrittiva prendendo i piani coordinati nel modo che conduca alla più facile soluzione. Il piano coordinato orizzontale sia perpendicolare alla direttrice (E, ef) (Fig. 67) per la quale supporremo che passino i piani che tagliano le altre due direttrici (AB, ab), (CD, cd); due di questi piani abbiano le tracce orizzontali AD BC, sicchè due posizioni della generatrice sieno le (AD) (BC): la

generatrice di cui vogliamo parlare sia la (XY), e si supponga che il piano coordinato verticale sia perpendicolare al piano che passa per la direttrice (E, ef) e per la generatrice (XY); ciò posto si cerchi una qualche relazione fra il modo con cui il punto (X) taglia la direttrice (AB), ed il modo con cui il punto (Y) taglia la direttrice (DC); osserviamo che le rette obbiettive sono tagliate nella stessa proporzione delle loro projezioni sulla linea fondamentale, sicchè

$$(AX):(BX)=\alpha\varepsilon:\beta\varepsilon, \quad (DY):(CY)=\delta\varepsilon:\gamma\varepsilon.$$
$$(AE):(DE)=\alpha\varepsilon:\delta\varepsilon, \quad (CF):(BF)=\gamma\varepsilon:\beta\varepsilon.$$

quindi risulta

$$(AX)(CY):(BX)(DY)=(AE)(CF):(DE)(BF) \ (^*):$$

perciò il rapporto $(AX):(BX)$, nel quale la direttrice (AB) è tagliata dalla generatrice (XY), ha un costante rapporto col rapporto $(DY):(CY)$, in cui la medesima generatrice taglia la direttrice (DC); giacchè il secondo membro della precedente equazione è affatto indipendente dalla generatrice (XY). Se ora sia $(E'F')$ una retta differente dalla (EF), che tagli essa pure le tre (AD) (BC) (XY), dimostreremo con una costruzione affatto simile alla precedente che

$$(AX)(CY):(BX)(DY)=(AE')(CF'):(DE')(BF'),$$

ma il primo membro di questa equazione conserva, per quello che vedemmo di sopra, lo stesso valore qualunque sia la generatrice (XY), perciò quella stessa $(E'F')$ che taglia una delle (XY) taglia eziandio tutte le altre generatrici. Così è dimostrata la doppia generazione rettilinea della superficie di cui si tratta, che è costituita da una rete di rette separate in due sistemi, e tali che ogni retta d'un sistema è in uno stesso piano con ciascheduna di quelle dell'altro sistema. Noi conti-

(*) Questa equazione può speditamente dimostrarsi mediante il teorema I. della Nota al Cap. precedente (pag. 74), poichè se il piano che taglia i lati del quadrilatero gobbo $abcd$ nei punti x f y e incontra la diagonale ac nel punto u, i due triangoli abc acd danno le involuzioni positive espresse da

$$ax.bf.cu=bx.cf.au, \quad au.cy.de=cu.dy.ae$$

il cui prodotto presenta la involuzione positiva di otto punti

$$ax.bf.cy.de=bx.cf.dy.ae$$

nueremo a chiamare direttrici le generatrici del sistema (AB) (DC) (EF) e generatrici quelle del sistema (AD) (BC) (XY), avvertendo però che i due sistemi hanno proprietà perfettamente analoghe, sicchè si possono sempre scambiare le direttrici in generatrici e queste in quelle.

151. Mediante la relazione or ora ritrovata si potrebbe determinare una qualunque generatrice (XY) conoscendo tre direttrici e due generatrici, e tale determinazione si effettuerebbe su ciaschedun piano coordinato indipendentemente dall'altra projezione, poichè la trovata relazione ha luogo tanto nella figura obbiettiva quanto in ogni sua projezione; ma senza bisogno di calcolare i predetti rapporti potremo adoperare un metodo più facile che dipende unicamente da considerazioni geometriche; se (R) (Fig. 68) è il punto d'intersezione della diagonale (BD) col piano che comprende la direttrice (EF) e la generatrice (XY), quel punto sarà anche situato sulle intersezioni (EX) (FY) del piano predetto coi due piani (ABD), (CBD); quindi le rette obbiettive (BD) (EX) (FY), e perciò anche le loro projezioni, s'incontrano in un medesimo punto. Così è facilissimo descrivere quante si vogliano generatrici della superficie, bastando di tirare per un qualunque punto R della BD le rette REX RFY: dalla projezione orizzontale XY si dedurrà poscia nel solito modo la verticale xy. Costruzione affatto simile si ha adoperando un punto qualunque della AC; e si hanno altre quattro costruzioni analoghe determinando il punto Z in luogo di uno dei X Y.

152. Prendendo il punto R in R_1 sulla EF si ottiene la generatrice $(X_1 Y_1, x_1 y_1)$, la quale ha sul piano orizzontale la stessa projezione della direttrice (EF), ed è sempre vero che la projezione di una direttrice è nello stesso tempo projezione di una generatrice e viceversa; quindi qualunque piano condotto per una direttrice dell'iperboloide taglia questo in una seconda retta che è una sua generatrice. — Ogni direttrice ha una generatrice ad essa parallela, poichè, per esempio, se la EH è parallela alla AB, ed il punto R passi in H, X andrà a distanza infinita, ed Y sarà l'intersezione della FH colla CD, e la generatrice (XY, xy) sarà allora parallela alla

direttrice (AB, ab). — Si potrebbe supporre che uno dei piani coordinati fosse perpendicolare ad una direttrice e quindi anche ad una generatrice, allora queste due si projetterebbero in due punti e tutte le altre generatrici e direttrici si projetterebbero in rette passanti rispettivamente per quei due punti. In tal caso si possono distinguere con tratti differenti le projezioni delle generatrici e quelle delle direttrici, distinzione che fu fatta anche nelle figure 67, 68, quantunque essa possa aver luogo solamente considerando una porzione della superficie, poichè, come dicemmo, in ogni retta è projettata una direttrice ed una generatrice. — Nel suddetto caso che le projezioni delle generatrici e quelle delle direttrici passino per due punti fissi è facilissimo trovare la generatrice che passa per un punto di cui si conosce una projezione; non così nel caso generale della figura 68, e se sia data la projezione orizzontale Z d'un punto della superficie per trovarne la projezione verticale (se non vogliamo ricorrere ad altri principii) dovremo cercare con ripetuti tentativi una delle projezioni di generatrici o direttrici la quale passi per Z, e trovata la EF, questa, considerata come projezione di direttrice, ci darà la corrispondente ef, e, considerata come projezione di generatrice, ci darà la corrispondente $x_1 y_1$; e perciò avremo i due punti (Z, z), (Z, z_1) dell'iperboloide.

153. Scelte ad arbitrio la direttrice (ab), la generatrice (bc) e la direttrice (ca_1), sieno (a) ed (a_1) i punti nei quali le predette direttrici sono incontrate dalle generatrici (ac_1) $(a_1 b_1)$ rispettivamente parallele alle direttrici (ca_1) (ab), e si prendano le lunghezze (ac_1) $(a_1 b_1)$ equipollenti (cioè uguali, parallele e dirette per lo stesso verso) alle (ca_1) (ba); la $(c_1 b_1)$ riuscirà equipollente alla generatrice (bc), e siccome essa inoltre taglia le due generatrici (ac_1) $(a_1 b_1)$, così essa sarà una terza direttrice dell'iperboloide. Facile è supplire alla figura immaginando nello spazio un esagono gobbo $(abca_1 b_1 c_1)$ i cui lati opposti sieno tra loro equipollenti; i suoi vertici sono quelli di un parallelepipedo quando si omettano due di questi tra loro diametralmente opposti: tre delle diagonali di tal parallelepipedo sono le (aa_1) (bb_1) (cc_1), le quali, come è noto,

si tagliano per metà in un medesimo punto (o), che è il centro, rispetto al quale il parallelepipedo è pienamente simmetrico. Ora una qualunque quarta generatrice dell'iperboloide dee tagliare le tre direttrici (ab) (ca_1) (b_1c_1): i punti diametralmente opposti, rispetto al centro (o), alle tre intersezioni cadranno sulle generatrici (a_1b_1) (c_1a) (bc), e perciò apparterranno ad una direttrice dell'iperboloide, che sarà parallela alla predetta quarta generatrice, e simmetricamente disposta rispetto al centro (o). Dunque: *L'iperboloide ad una falda è una superficie dotata di centro; pel quale passa ogni piano che taglia la superficie in due rette parallele.*

Problema VII. *Descrivere il paraboloide rettilineo.*

154. Quando nella superficie doppiamente rettilinea i due membri dell'equazione $\frac{(AX)(YC)}{(XB)(DY)}=\frac{(AE)(FC)}{(ED)(BF)}$ del § 150 sono uguali all'unità, la superficie ha delle speciali proprietà che la distinguono dal caso generale, che è quello dell'iperboloide ad una falda, e prende allora il nome di *paraboloide iperbolico.* — Si vede che nel suddetto caso ogni generatrice (XY) taglia proporzionalmente le direttrici (AB) (DC), e che nello stesso tempo la direttrice qualunque (EF) taglia in parti proporzionali le due generatrici quali si vogliano (AD) (BC). Ora se immaginiamo che per le rette (AD) (BC) sieno condotti due piani paralleli è noto che ogni piano ad essi parallelo taglia proporzionalmente le rette (AB) (DC) intercette fra i primi, dunque anche la generatrice (XY) dee trovarsi in uno di questi piani; cioè *tutte le generatrici del paroboloide sono parallele ad un medesimo piano.* E siccome il paraboloide è formato da una rete di due sistemi di rette (§ 150), che noi distinguiamo coi nomi di direttrici e di generatrici per sola facilità di discorso, così per la stessa ragione *tutte le direttrici sono parallele ad un medesimo piano,* differente però da quello cui sono parallele le generatrici. Questi due piani si dicono i piani *direttori.*

155. Per descrivere quante si vogliano generatrici o direttrici varrà la stessa costruzione insegnata al § 151: ed anche pel paraboloide vedremo che ogni retta EF che è proje-

zione di una direttrice (EF) è nello stesso tempo projezione di una generatrice (X, Y_1). Ma nel paraboloide, al contrario di quanto ha luogo nell'iperboloide, non vi è alcuna generatrice parallela ad una direttrice, poichè facendo la costruzione del § 152 si trova che ambedue i punti (X) (Y) passano nello stesso tempo a distanza infinita. Ed infatti, se vi potesse essere una generatrice parallela alla direttrice (AB), ambedue sarebbero parallele ai due piani direttori, ed allora le generatrici (BC) (AD), essendo parallele al piano cui è parallela anche la (AB), sarebbero situate in un medesimo piano, contra quanto dicemmo al § 150.

156. Se il piano coordinato orizzontale è perpendicolare al piano direttore, cui sono parallele le direttrici, queste hanno le projezioni orizzontali tutte parallele; e siccome esse debbono esser tagliate proporzionalmente dalle generatrici, così le projezioni orizzontali di queste concorreranno in un unico punto. In questo caso, come in quello notato nel § 152, si ha per conseguenza eccezione alla regola che ogni projezione appartenga nello stesso tempo ad una direttrice e ad una generatrice. Peraltro rimane sempre vero che i piani verticali condotti per una generatrice comprendono anche una direttrice, che è quella projettata orizzontalmente nel punto comune a tutte le projezioni delle generatrici. — In quanto ai piani verticali che passano per ciascuna direttrice essi non incontrano la superficie in alcun altro punto; proprietà che hanno comune con tutti i piani paralleli ad uno dei direttori: deggiono peraltro considerarsi come appartenenti al paraboloide le due rette che stanno a distanza infinita su tali piani paralleli all'uno o all'altro dei piani direttori; per tal modo si rende affatto generale il teorema, per cui *ogni piano, che taglia una superficie doppiamente rettilinea lungo una retta, la taglia pure in una seconda retta.*

157. Potrà lo studioso costruire da sè quello speciale paraboloide che ha i piani direttori ortogonali: pel vertice (V) passi la direttrice $(V)V$ perpendicolare al coordinato orizzontale, e la generatrice $(V)v$ perpendicolare al verticale: tutte le generatrici saranno perpendicolari alla direttrice $(V)V$.

quelle due che sono inclinate al coordinato verticale di un semiretto saranno distanti dalla $(V)v$ di una lunghezza che diremo il semiparametro del paraboloide; simil cosa avrà luogo per le direttrici rispetto al coordinato orizzontale. L'asse della superficie è la retta che passa per (V) ed è parallela alla fondamentale, cioè ai due piani direttori. — Si potrà verificare graficamente che questo paraboloide è il luogo geometrico di tutti i punti equidistanti da due rette fisse, le quali sono perpendicolari all'asse ed ugualmente inclinate al piano orizzontale, ma l'una per un verso, l'altra pel verso opposto; le distanze delle due rette dal vertice (V) sono ambedue eguali al semiparametro moltiplicato pel seno e pel coseno dell'inclinazione di ciascuna retta sul piano orizzontale. Questa inclinazione può prendersi ad arbitrio, mutandosi così le due rette fisse; la massima loro distanza dal vertice eguaglia un quarto del parametro e corrisponde all'inclinazione di un semiretto.

158. *Disegno.* Se il piano coordinato orizzontale è perpendicolare ad ambedue i piani direttori, le direttrici e le generatrici vi si projetteranno in due sistemi di rette parallele. Sia A (Fig. 69) la traccia orizzontale di una direttrice (AB, ab); descrivendo le tracce di altre direttrici (E_1F_1) (E_2F_2) ec., le quali tutte si appoggiano su due generatrici (AD) (XY), non è difficile riconoscere che una di tali tracce si troverà sulla AC perpendicolare alla linea fondamentale; sia C questa traccia e (CD, ad) la corrispondente direttrice. Le projezioni verticali di quante si vogliano direttrici si otterranno tagliando proporzionalmente le generatrici (AD, ad) (CB, ab); queste projezioni verticali e_1f_1 e_2f_2... avranno per *inviluppo* il contorno apparente del paraboloide sul coordinato verticale: tale inviluppo è una parabola, perchè la relazione fondamentale del § 154 ci dà $de:af=ae:bf=da:ab$, sicchè le due tangenti da ab restano tagliate proporzionalmente dalle tangenti ef (Veggasi il Corollario 1.° della Nota a pag. 76). — Per la stessa proprietà della parabola le due tangenti e_3m e_3d tagliate dalla tangente ab danno $mf_3.da=e_3f_3.e_3a$, perciò anche $E_3F_3:MF_3=DA:E_3A$, cioè $DC:MF_3=CB:F_3B$.

quindi il punto M corrispondente ad m cade sulla diagonale DB, la quale è per conseguenza la projezione orizzontale della parabola che dà il contorno apparente sul piano verticale.

Delle superficie del secondo ordine.

159. Le superficie del secondo *ordine* o *grado* possono separarsi in tre generi secondo che sono *sviluppabili, rettilinee,* o *convesse*; vale a dire secondo che per ogni loro punto si può tracciare una retta, che sia tutta compresa sulla superficie, — o se ne possono tirar due, — o non si può tirarne alcuna. Nel terzo caso la superficie volge tutta la convessità da un lato e la concavità dal lato opposto; — invece le superficie rettilinee sono *concavo-convesse*, perchè in ogni loro punto volgono da una stessa banda e la convessità e la concavità; — e le sviluppabili presentano una sola curvatura, togliendo la quale possono spiegarsi in un piano. — Questa separazione in generi è naturale, in quanto che le superficie di uno stesso genere possono derivarsi le une dalle altre in una maniera analoga a quella che dicemmo omologia o collineazione; sicchè tra due di tali figure può stabilirsi tale corrispondenza di punti, che a punti in linea retta corrispondano punti in linea retta, ed a punti in uno stesso piano corrispondano punti in uno stesso piano. — Diremo superficie della stessa *specie*, quelle che sono tra loro affini, cioè nelle quali può stabilirsi tale corrispondenza di punti, che a rette parallele corrispondano rette parallele.

160. Le superficie del secondo ordine sviluppabili sono di quattro specie: *Cilindro ellittico, parabolico, iperbolico,* e *Cono del secondo ordine.* Questa ultima specie presenta tutte le sorta di sezioni piane ellittiche, paraboliche, od iperboliche, nelle quali ultime si comprende il caso del sistema di due rette: vi è sempre una o due direzioni di piani secanti che danno sezioni circolari. Nelle tre specie di cilindri le sezioni sono o tutte ellittiche (comprese le circolari) o tutte paraboliche o tutte iperboliche.

161. La sfera dà origine mediante la derivazione di omologia alle tre specie di superficie del secondo ordine *convesse*; e secondo che si fa andare all'infinito od un piano che non taglia la sfera, — od un piano che la tocca in un punto, — od un piano che la taglia; si ha l'*ellissoide*, — il *paraboloide ellittico*, — o l'*iperboloide a due falde*. Nella prima specie le sezioni piane sono tutte ellittiche; nella seconda o paraboliche o ellittiche.

162. Finalmente le superficie del secondo ordine rettilinee sono quelle due specie di superficie doppiamente rettilinee, che abbiamo già descritte, e che sono l'*iperboloide ad una falda* ed il *paraboloide iperbolico*, il qual ultimo non presenta alcuna sezione ellittica.

Problema VIII. *Descrivere un ellissoide.*

163. *Disegno.* L'ellissoide può supporsi costituito da una serie di ellissi simili e similmente poste (cioè coi diametri corrispondenti paralleli), i cui centri sieno in linea retta, e le cui grandezze sieno tali che tutte le ellissi generatrici sieno tagliate da una ellisse fissa, che abbia un diametro in quella linea retta. — Perchè il disegno meglio rappresenti tal generazione, supponiamo che l'ellisse fissa cogli assi $(A_1 A, a_1 a)$. (BB_1, o) (Fig. 70) sia posta in un piano inclinato al coordinato orizzontale; così la projezione orizzontale dell'ellissoide riuscirà chiara quanto una prospettiva, e il disegno presenterà di leggieri le vere dimensioni, specialmente se si prenda l'asse $(B_1 B, o)$ perpendicolare al coordinato verticale. — Ora immaginiamo che in un piano perpendicolare all'asse $(A_1 A)$ sia descritta un'ellisse col semiasse (PM, p) eguale all'ordinata della ellisse direttrice $(A_1 BA)$, e il semiasse (PN) di una grandezza qualunque e perpendicolare al piano (OAB): poscia facciamo muovere quella ellisse (MNM_1), conservandola simile e similmente posta a sè stessa, e mutandola di grandezza in modo che un suo asse coincida successivamente con tutte le corde (MM_1) dell'ellisse direttrice: si genererà per tal guisa l'ellissoide coi semiassi (OA) (OB) (OC). — Facile si è l'intendere che tutti i punti dell'ellisse mobile descrivono altrettante ellissi aventi l'asse comune $(A_1 A)$; una di esse è

l'ellisse $(anca_1)$ parallela al coordinato verticale: perciò onde descrivere le projezioni di quante si vogliano generatrici dell'ellissoide si descriveranno le ellissi A_1BMA a_1cna; ogni ordinata PM della prima si projetterà in p, si tirerà l'ordinata pn della seconda, si projetterà n in N, e si descriverà l'ellisse coi semiassi PM PN.

164. Dimostreremo pure che ogni sezione dell'ellissoide è un'ellisse. Supponiamo da prima che la sezione sia fatta da un piano perpendicolare al piano (a_1ca), e sia (rqr_1) la loro intersezione: nel punto qualunque (q) l'ordinata della cercata sezione sarà quella stessa della ellisse generatrice projettata in $n'n_1'$, e siccome tutte le generatrici sono simili, così il quadrato di tale ordinata avrà (§ 97) un determinato rapporto col prodotto $n'q.qn_1'$. Ora è una proprietà dell'ellisse (la quale mediante la derivazione di affinità si deduce dal noto teorema riguardante il circolo), che se si abbiano altre corde rispettivamente parallele alle rr_1, $n'n'_1$, il rapporto $n'q.qn'_1:rq.qr_1$ dei prodotti dei loro segmenti è costante; onde il predetto quadrato avrà un determinato rapporto anche col prodotto $rq.qr_1$; dal che risulta non solamente che la sezione projettata in rr_1 è ellittica, ma eziandio che le sezioni ad essa parallele sono ellissi omotetiche. Questa dimostrazione si estenderà ad ogni altra sezione, purchè al piano (a_1ca) si sostituisca il piano che passa per l'asse (a_1a) e per quel diametro di ciascuna ellisse generatrice, il quale dimezza l'ordinata posta nel piano della sezione di cui si tratta.

165. Ogni piano che passa pel *centro* (O) dell'ellissoide dicesi un suo piano *diametrale*; sono piani *diametrali principali* quelli delle tre ellissi (ABA_1) (BCB_1) (ACA_1). — La aca_1c_1 è il contorno apparente della superficie sul piano verticale; in quanto al contorno apparente sul piano orizzontale, esso sarà l'inviluppo (§ 134) delle projezioni orizzontali MNM_1N_1 delle generatrici della superficie; tal inviluppo è l'ellisse projezione della sezione diametrale della superficie, che si projetta verticalmente nel diametro e_1e corrispondente alle ordinate verticali. — Se due degli assi (A_1A) (BB_1) (CC_1) sono uguali, l'ellissoide è rotondo, e dicesi anche *sfe-*

roide: se i tre assi sono uguali, si ha la sfera. — Quando $(OA) > OB > (OC)$, se si prende $or = or_1 = OB$ ogni sezione perpendicolare al piano verticale e parallela ad una delle or or_1 è circolare. — Che se si vogliano prendere per generatrici le sezioni che si projettano orizzontalmente in altrettanti circoli, si prenderà $OS = OB$, e si troverà s corrispondente ad S, poscia per ogni corda parallela ad os si determinerà il circolo projezione di quella sezione; anche questi circoli saranno inviluppati dal predetto contorno apparente orizzontale.

Problema IX. *Descrivere l'iperboloide a due falde.*

166. *Disegno*. Questa superficie può generarsi col movimento di un'ellisse sempre simile a sè stessa, la cui grandezza sia regolata come per l'ellissoide, la direttrice essendo però un'iperbola anzichè un'ellisse. Nella figura 71 serve da direttrice l'iperbola (AM, am) coll'asse primario $(a_1 a)$ ed il secondario (BB_1, o), oppure l'iperbola (aen) eguale alla propria projezione verticale: le generatrici sono ellissi simili perpendicolari al coordinato verticale, nonchè all'asse $(A_1 A)$; una di esse è projettata in NMN_1 ed in nn_1. — $(A_1 A)$ $(B_1 B)$ $(C_1 C)$ sono i tre assi dell'iperboloide; $(A_1 A)$ è *primario*, gli altri due *secondarii*: quando questi sono uguali l'iperboloide è rotondo.

167. Anche per l'iperboloide si dimostra che tutte le sezioni tra loro parallele sono omotetiche; esse potranno essere o iperbole o parabole o ellissi, e tra queste vi saranno sempre due direzioni, cui competeranno sezioni circolari. Supposto il coordinato verticale parallelo all'asse primario ed al minore dei due secondarii, se si descriva l'iperbola rcr_1 *conjugata* della nan_1, cioè (§ 114) che abbia l'asse primario cc_1 ed il secondario aa_1; poscia si prenda $or = or_1 = OB$, ogni piano perpendicolare al coordinato verticale e parallelo ad una delle or or_1 se taglierà l'iperboloide, lo taglierà in un circolo. — Il contorno apparente della superficie sul piano orizzontale è l'inviluppo delle ellissi MNM_1; non fu segnato nella figura, perchè solo scopo di questa è mostrare la generazione dell'iperboloide: del resto esso è la projezione della sezione diametrale che si projetta verticalmente sulla ee_1.

Problema X. *Descrivere il paraboloide ellittico.*

168. Anche questa superficie può supporsi generata da una ellisse che si muove mantenendosi simile e similmente posta, e descrivendo col suo centro una linea retta non appartenente al suo piano. — Questa superficie di una sola falda ha tutte le sezioni ellittiche o paraboliche; è priva di centro; fra i suoi diametri paralleli uno solo prende il nome di asse, perchè è perpendicolare ai suoi piani conjugati, cioè ai piani delle sezioni di cui esso comprende tutti i centri.

169. *Disegno.* La fondamentale sia parallela all'asse (AP) (Fig. 72) del paraboloide, sia (M_1AM) la parabola orizzontale che serve da direttrice; le ellissi generatrici essendo perpendicolari all'asse si projetteranno anche orizzontalmente in una retta; sia dunque $MN_1'M$ la rappresentazione di una di esse; per la similitudine di tali generatrici anche le estremità (N) dei loro assi verticali saranno situate in un'altra parabola, che si vede projettata sul piano verticale. — Per descrivere la traccia orizzontale del paraboloide, osserviamo che i punti della generatrice che sono projettati in l sono rappresentati in L' L_1' e projettati in L L_1, essendo

$$LL' = L_1L_1' = \alpha a.$$

Ora per una proprietà delle ellissi (§ 97) e per la similitudine di tutte le nostre generatrici il prodotto

$$ML : LM_1 = (PM)^2 - (PL)^2$$

ha un rapporto costante con $(LL')^2 = (\alpha a)^2$, quindi è costante; perciò tutti i $(PL)^2$ sono minori del corrispondente $(PM)^2$ di una quantità costante, e (§ 107) la traccia LKL_1 è una parabola eguale alla MAM_1.

Problema XI. *Descrivere l'iperboloide ad una falda.*

170. *Disegno.* Quando l'ellisse generatrice è perpendicolare anzichè all'asse primario (§ 166) dell'iperbola direttrice al suo asse secondario $(O, a_1 a)$ (Fig. 73), la superficie generata nel solito modo è un iperboloide ad una falda. L'ellisse diametrale principale (che è la più piccola) ha l'asse (B_1B) comune coll'iperbola ed un altro asse arbitrario (C_1C): quando questi sono uguali l'iperboloide è rotondo; al § 147 abbiamo già dimostrato che in questo caso la superficie è generata

anche dalla rotazione di una retta intorno ad un asse, che non è nello stesso piano con quella retta: ora dimostreremo che il più generale iperboloide ad una falda è la stessa superficie doppiamente rettilinea già descritta nel § 151. — Nel nostro disegno il coordinato verticale è parallelo all'iperbola direttrice $(b\,m\,r)$, e l'orizzontale è parallelo alle ellissi generatrici; oltre la diametrale $(B_1\,C\,B)$, sono descritte ad arbitrio le due generatrici $(M_1\,N\,M)$ $(R_1\,S\,R)$. Si tiri una qualunque $X\,Z$ tangente all'ellisse $B_1\,C\,B$, e che incontri la $R_1\,S\,R$ in Z, e, dopo aver determinati sopra $b_1\,b$ $r_1\,r$ i punti corrispondenti x z, si tiri la retta $x\,z$; si troverà che i punti Y y sono fra loro corrispondenti, cioè che la retta $(X\,Z)$ taglia anche l'ellisse $(M_1\,N\,M)$ nel punto (Y); e valendo la stessa cosa per tutte le ellissi generatrici, e per tutte le rette $(X\,Z)$, nonchè per tutte le $(X\,Z_1)$, ne risulterà che l'iperboloide è costituito da una doppia serie di rette in esso compiutamente comprese, e che perciò è la superficie considerata al § 150, poichè le rette $(X\,Z)$ non sono tutte parallele ad uno stesso piano. — Per dimostrare quanto ora si è asserito, s'immagini descritto un circolo col diametro $B\,B_1$, poscia il suo piano si faccia girare intorno a $B\,B_1$, finchè esso abbia per projezione l'ellisse $B\,C\,B_1$ (questa parte di figura è per maggior chiarezza descritta separatamente); sul piano suddetto si descrivano i circoli coi raggi $O\,M$ $O\,R$, i quali si projetteranno nelle ellissi $M_1\,N\,M$ $R_1\,S\,R$ simili alla $B_1\,C\,B$; si descriva pure la tangente $X'\,Y'\,Z'$, che ha la projezione $X\,Y\,Z$. È una proporzione identica la

$$(O\,M)^2-(O\,B)^2:(O\,R)^2-(O\,B)^2=(X'\,Y')^2:(X'\,Z')^2;$$

il secondo rapporto è anche quello di $(X\,Y)^2:(X\,Z)^2$; inoltre nell'iperbola $b\,m\,r$ si ha (§ 109)

$$(p\,m)^2-(o\,b)^2:(q\,r)^2-(o\,b)^2=(o\,p)^2:(o\,q)^2;$$

dunque $$X\,Y:X\,Z=x\,y:x\,z=o\,p:o\,q,$$

e perciò il punto y cade sulla $p\,m$, come si aveva asserito.

Problema XII. *Descrivere il paraboloide iperbolico.*

171. *Disegno.* Questo paraboloide si dice iperbolico perchè tutte le sue sezioni sono parabole od iperbole, e si può dire rettilineo perchè esso è formato da una rete di rette. —

Prenderemo per direttrice una parabola $(m_1 a m)$ (Fig. 74) posta in un piano parallelo al coordinato verticale; ogni sua doppia ordinata $(m_1 m)$ sarà l'asse primario di un'iperbola (MX) situata in un piano orizzontale; tutte queste iperbole generatrici sono simili, perciò i loro assi secondarii sono proporzionali alle ordinate pm: quando l'iperbola scorrendo da (m) verso (a) giunge in (a), i suoi assi spariscono insieme, ed essa si riduce alle due rette (AV) (AV_1) che sono parallele agli assintoti di tutte le iperbole. Al di sopra del punto (a) l'ordinata pm diventa immaginaria, così l'asse dell'iperbola, che era primario diventa secondario, viceversa diviene primario quello che era secondario; conservando essi del resto lo stesso rapporto tra di loro e la stessa relazione colla distanza del vertice (A), onde il semiasse primario (OS) è l'ordinata di una parabola eguale a quella che passa per tutte le estremità degli assi secondarii delle iperbole (MX). Queste due parabole (delle quali soltanto la prima appartiene alla superficie) non si veggono nella nostra figura, perchè sono projettate nelle rette as ap; avendosi scelto i piani coordinati in modo da facilitare la dimostrazione essere il paraboloide quello stesso considerato al § 155. — Sieno (MX) (RY) (SZ) tre sezioni orizzontali del paraboloide, oltre quella che passa pel vertice (A) ed è costituita dalle due rette (AV) (AV_1); si tiri $ZVXY$ parallela all'assintoto AV_1 di tutte le iperbole, e la projezione verticale vx sia tirata in modo che la retta (VX) passi pei due punti (V) (X) del paraboloide; dico che la stessa cosa avverrà anche nelle sue sezioni (RY) (SZ), cioè che anche i punti Y y, Z z saranno tra loro corrispondenti. Infatti da una nota proprietà dell'iperbola risulta

$$AV.VX:(AM)^2 = AV.VY:(AR)^2 \quad (*),$$

(*) Nella figura 46 se poniamo $CP \underline{\Omega} x.CA$, $PM \underline{\Omega} y.AB$ abbiamo $2.CM \underline{\Omega} (x+y)CB + (x-y)CB_1$ (giacchè $CM \underline{\Omega} CP + PM$, $CB \underline{\Omega} CA + AB$, $CB_1 \underline{\Omega} CA - AB$), e, tirata la MV parallela all'assintoto CB_1, sarà $2.CV \underline{\Omega} (x+y)CB$, $2.VM \underline{\Omega} (x-y)CB_1$; l'equazione dell'iperbola (§ 109) dà $(x+y)(x-y) = 1$, perciò $4.CV.VM = CB.CB_1$. Quindi nelle iperbole simili il prodotto $AV.VX$ (Fig. 74) è proporzionale al quadrato del semiasse primario AM: ed in due iperbole conjugate MX SZ sarà $VX = VZ$.

perciò la parabola amr dà

$$VX : VY = (pm)^2 : (qr)^2 = ap : aq = vx : vy,$$

quindi la Yy è parallela alle Vv Xx. Al di sopra del vertice (a) la parabola direttrice (AS) ha le ordinate che stanno a quelle (corrispondenti ad un'ugual ascissa) della parabola (am) come l'asse primario AS dell'iperbola SZ sta all'asse secondario; perciò se MX SZ sono due iperbole conjugate, il che dà $VX = VZ$, le ascisse as ap delle suddette parabole corrispondenti alle ordinate (AM, pm), (AS, a) sono uguali; quindi anche la Zz è perpendicolare alla fondamentale.

CAP. III.

Dei piani tangenziali alle superficie.

172. Tutte le curve situate sopra una qualunque superficie, e passanti per un medesimo punto, hanno in esso le tangenti che sono poste (eccettuati alcuni casi particolarissimi) in un medesimo piano; questo piano si dirà *tangenziale* (tangente) alla superficie in quel punto. — Infatti sia (Fig. 75) (M) il punto di cui si tratta, (GM) una generatrice che passa per esso, e (DM) un'altra curva che può sempre prendersi come direttrice; dico che la tangente di una qualunque altra curva (MM'') è posta in quello stesso piano che comprende le tangenti delle due curve (MG) (MD); poichè se $(GM'M')$ è una vicina posizione della generatrice, la quale vada indefinitamente accostandosi alla (GM), in tal movimento la secante (MM') si andrà avvicinando alla tangente in (M) della (MD), ed avrà questa tangente per limite; la retta (MM'') avrà per limite la tangente alla curva (MM''); finalmente siccome anche i punti (M') (M'') vanno a coincidere insieme in (M), così anche la secante $(M'M'')$ avrà per limite la tangente della generatrice (MG); quindi essendo le tre secanti situate sempre in un solo piano, lo saranno pure le tre tangenti che sono i loro limiti. — Quando la generatrice hà un punto di regresso, o lo acquista nel punto di cui si tratta, o

quando essa si riduce colà ad un solo punto, non sussiste la precedente dimostrazione; e la superficie in quel punto singolare manca di piano tangenziale: questo è il caso del vertice di un cono, e del punto posto nell'asse della superficie rotonda, quando la linea meridiana incontra l'asse sotto un angolo obbliquo.

173. Considerando una superficie in riguardo ai suoi piani tangenziali si riconosce che le superficie si possono separare in tre grandi classi: — 1.ª la superficie piana; — 2.ª le superficie che in un senso combaciano perfettamente con ciascheduno dei loro piani tangenziali, e negli altri sensi s'incurvano, esse si dicono superficie *sviluppabili*; — 3.ª le superficie incurvate in tutti i sensi, sicchè ogni piano tangenziale le tocca in un solo punto. — Le superficie della 3.ª classe possono talora suddividersi in superficie *convesse*, le quali s'incurvano interamente da una banda del piano tangenziale, con cui hanno quindi un solo punto comune, — ed in superficie *concavo-convesse*, le quali s'incurvano in parte da un lato e in parte dall'altro del tangenziale, sicchè sono tagliate da questo piano in due linee, che passano pel punto di contatto, il quale però è tuttavia l'unico punto in cui il piano tocca la superficie. — Una stessa superficie può essere in una porzione convessa, ed in una concavo-convessa; nei punti intermedii fra queste porzioni la superficie s'incurva in un senso, ed in un altro combacia coi piani tangenziali: non pertanto tali superficie non appartengono alla 2.ª classe, poichè a ciò si richiede che la superficie abbia la suddetta proprietà in tutti i punti e non in alcuni soltanto. — Dicemmo (§ 159) a quali di queste classi appartengano le varie superficie del secondo ordine.

174. Dalla definizione del piano tangenziale risulta, che lo si determinerà per un punto qualunque di una data superficie, costruendo il piano che contiene le tangenti di due linee condotte per quel punto sulla superficie; si potranno, per esempio, adoperare una generatrice ed una direttrice, che passino per quel punto, oppure due generatrici spettanti a due modi di generazione. Questo metodo generale potrà ricevere qualche

maggior facilità rispetto alle superficie sviluppabili, poichè siccome queste sono toccate da un medesimo piano tutto lungo una loro generatrice rettilinea, così invece di determinare il tangenziale pel punto di cui si tratta, si potrà determinarlo per un altro punto scelto su quella generatrice caratteristica nel modo più conveniente; ed è d'altronde palese che rimane da trovare una sola tangente, poichè tien luogo di una tangente la caratteristica, che è tutta posta sulla superficie. — Quando si è determinato il tangenziale, se ne deduce facilmente la *normale*, chiamandosi con tal nome la perpendicolare al piano tangenziale innalzata dal suo punto di contatto.— Dicesi pur piano *normale* alla superficie ogni piano perpendicolare al tangenziale.

175. Vedremo a suo tempo l'uso dei piani tangenziali nella teoria delle ombre e nelle prospettive; intanto possiamo osservare, che essi serviranno a tracciare quelli che dicemmo (§ 134) contorni apparenti sui piani coordinati; poichè il contorno apparente per un osservatore, supposto a distanza infinita, è la projezione di tutti i punti di contatto dei piani tangenziali alla superficie e perpendicolari al coordinato di cui si tratta.

Problema I. *Trovare i piani tangenziali ad un dato cono o cilindro.*

176. Se in una superficie conica o cilindrica s'immagina un piano che comprenda una data generatrice caratteristica (MX) (Fig. 63) ed una generatrice ad essa vicina, poscia si suppone che questa seconda generatrice si vada avvicinando alla prima, e che per conseguenza il piano ruoti intorno alla (MX) come asse, si riconosce facilmente che quando le due generatrici vengono a coincidere, il piano comprende tutte le tangenti delle curve che possono tracciarsi sulla superficie per ciascuno dei punti della (MX); perciò il piano è tangenziale alla superficie in tutti questi punti, ed i coni appartengono (come già si disse) alla classe delle superficie sviluppabili.

177. *Disegno.* Se si vuole il piano tangenziale (Fig. 63) al cono lungo la sua caratteristica (MX), basta determinare il piano che comprende oltre questa generatrice la tangente ad

una qualunque delle direttrici. Così prendendo per direttrice la traccia $AXA_{,}$, tirata ad essa la tangente $X\Psi$, questa sarà la traccia orizzontale del piano richiesto, la cui traccia verticale Ψv si determinerà considerando che il piano dee contenere la generatrice (SMX), e perciò passare pel vertice (S) del cono; la Ψv sarà anche tangente in y alla traccia verticale del cono. — La *normale* al cono nel punto (M) è la retta condotta per (M), le cui projezioni sono (§ 47) perpendicolari alle tracce del tangenziale $X\Psi y$. — Se invece di un cono si ha un cilindro, vale lo stesso metodo di soluzione, poichè invece del vertice (S) può adoperarsi qualunque punto della generatrice (MX).

Problema II. *Trovare il piano tangenziale ad una superficie rotonda in un suo dato punto.*

178. La linea, che colla sua rotazione genera la superficie, ed un circolo caratteristico saranno le due generatrici, di cui si determineranno le tangenti; siccome la tangente del detto circolo è perpendicolare al piano meridiano, così lo sarà pure il piano tangenziale. Se non sia descritta la linea meridiana che passa pel dato punto, si potrà servirsi di qualunque altro meridiano, prendendone il punto che appartiene allo stesso circolo caratteristico del punto dato: poichè dopo sarà facile far ruotare il tangenziale intorno all'asse della superficie, finchè prenda la posizione che spetta al punto dato: così se si trovi l'intersezione del tangenziale coll'asse è palese che questa intersezione rimarrà la stessa per tutti i piani che toccano la superficie nei punti di un suo circolo caratteristico; dopo ciò il piano tangenziale ricercato passerà per quel punto dell'asse e pel punto dato, e sarà inoltre perpendicolare al meridiano del dato punto. — Quest'ultimo metodo sarà molto opportuno anche per la determinazione della normale; è chiaro che nelle superficie rotonde tutte le normali incontrano l'asse, e che tutte le normali dei punti di un circolo caratteristico lo incontrano in un medesimo punto. Descritta la normale, è poi facile avere il tangenziale, che ha le tracce perpendicolari alle projezioni di quella.

179. *Disegno.* Nella figura 66 se si conosca la tangente

della generatrice $(AMHKA, bmhka)$ nel punto (M), mediante questa e mediante quella del circolo (XYM) sarà facile determinare il tangenziale in (M). — Che se sia già descritto un meridiano (bxa), e si voglia il piano tangenziale nel punto (Y), si descriverà da prima il tangenziale pel punto (X) posto in quel meridiano e sul medesimo circolo di (Y), poscia quel piano (xPS) si farà ruotare intorno all'asse della superficie, in modo che prenda la posizione $U\Psi v$, essendo la traccia $U\Psi$ perpendicolare ad AY, e v essendo determinato dalla condizione che il piano dee passare per (Y). Oppure si considererà che il tangenziale in (Y) dee incontrare l'asse nel punto (A, t); perciò la traccia verticale passerà anche pel punto w traccia della orizzontale (AW, tw) parallela alla $U\Psi$. — Oppure tirata xn normale alla curva meridiana bxa sarà (AY, ny) la normale in (Y), e a questa sarà perpendicolare il piano tangenziale. — Così le tracce del piano cercato sono perpendicolari alle AY ny, e passano pei punti U v w come sopra determinati: di queste cinque condizioni si sceglieranno in ciaschedun caso quelle che torneranno più comode: si noti che il punto U potrebbe anche determinarsi, osservando che il piano cercato dee comprendere la tangente al meridiano (bya), la quale pel § 144 è la (tyu, AYU).

Problema III. *Trovare i piani tangenziali di una superficie doppiamente rettilinea.*

180. Rammentando che il piano tangenziale è quello, che comprende le tangenti di due linee tracciate sulla superficie pel dato punto di contatto, e considerando che la superficie comprende due generatrici rettilinee (che noi abbiamo chiamate l'una direttrice, l'altra generatrice), le quali si confondono per conseguenza colle proprie tangenti, vedremo che basterà trovare la direttrice e la generatrice, che passano pel dato punto, ed il loro piano sarà il ricercato. Tutti i punti appartenenti ad una medesima generatrice rettilinea hanno i tangenziali differenti; poichè se due punti avessero il medesimo piano tangenziale, le due direttrici passanti per quei punti sarebbero in un medesimo piano.

181. *Disegno.* Nell'iperboloide rotondo ad una falda de-

scritto nella figura 65 le due generatrici che passano pel punto (T_1) sono le (T_1M_1) (T_1N_1); dunque la traccia orizzontale del tangenziale in (T_1) sarà (M_1N_1); facile sarà poi trovarne la traccia verticale ricordando che il piano passa per (T_1). — Se il punto (T_1) si allontana indefinitamente, la corda (M_1N_1) termina col divenir un diametro; perciò tutti i piani tangenziali all'iperboloide che hanno i punti di contatto a distanza infinita passano pel centro C; essi toccano un cono rotondo, la cui caratteristica è la (CS, ct_2) che ha la stessa projezione verticale della generatrice (D_2T_2, ct_2): questo cono, che ben a ragione dicesi il cono *assintotico* dell'iperboloide, incontra il piano orizzontale che ha la traccia z_1z in un circolo col raggio $= CS = D_2T_2$.

182. Per le superficie doppiamente rettilinee si può anche risolvere il problema: *Dato un piano che passi per una generatrice trovare il punto in cui esso tocca la superficie.* Si trovino le intersezioni del dato piano con altre due generatrici della superficie, la retta che unirà i due punti d'intersezione sarà la direttrice, che taglierà la prima generatrice nel punto ricercato. — Quando la superficie è un paraboloide, sarà sufficiente una sola di quelle intersezioni, poichè la direttrice è determinata dal dover incontrare la prima generatrice, ed esser parallela al piano direttore.

Problema IV. *Trovare i piani tangenziali di una superficie del secondo ordine.*

183. Ritenendo la generazione di queste superficie quale fu esposta (§ 163 ec.) mediante generatrici parallele e simili, si supponga descritta la generatrice, sulla quale è posto il punto di cui deesi trovare il tangenziale; questo comprenderà intanto la tangente a quella curva; se il punto fosse situato sulla direttrice, essa darebbe una seconda tangente, che determinerebbe compiutamente il tangenziale; altrimenti si dimostrerà che tutte le sezioni della superficie fatte dai piani che passano pel diametro conjugato col piano della generatrice hanno le tangenti, che incontrano questo diametro in un medesimo punto; onde, determinato questo punto mediante la direttrice, se ne dedurrà la tangente della curva, che passa pel punto dato.

184. *Disegno*. Il tangenziale nel punto (X) (Fig. 70) comprende la tangente della generatrice (MNX), la quale si sa determinare (§§ 99, 127); inoltre la direttrice (A_1MA), che ha il diametro (A_1A) e l'ordinata (PM), avrà la tangente (MT) determinata (§ 97) da $(OT)=(OA)^2:OP$, e la sezione dell'ellissoide fatta dal piano (A_1AX), di cui (A_1A) è ancora un diametro relativo all'ordinata (PX); ci darà essa pure per la sua tangente (XT), $(OT)=(OA)^2:(OP)$; dunque il tangenziale in (X) comprendendo la tangente (XT) passerà pel punto (T), in cui la tangente (MT) alla direttrice incontra il suo diametro (A_1A). — Nei due iperboloidi quando il punto di contatto si allontana indefinitamente, tutti i piani tangenziali passano pel centro, e toccano il cono assintotico. — Il paraboloide ellittico ha un solo punto a distanza infinita, ed in esso il tangenziale è tutto a distanza infinita.

Nota ai Cap. II. e III. del Libro II.

La Geometria suol dividersi in Geometria piana ed in Geometria dello spazio; ma una parte della seconda merita d'esserne distinta; e per l'importanza e per le moltissime analogie può quasi mettersi a paralello colla Geometria piana. Come in questa si considerano le proprietà dei punti — delle rette — e delle curve poste in un medesimo piano: così in quella si studiano le relazioni delle rette — dei piani — e dei coni passanti per un medesimo punto. — Appartiene a tal parte della Geometria lo studio del triedro, di cui ci siamo occupati nel Cap. III. del Libro I.; così pure lo studio di quanti e quali si vogliano *angoloidi*, purchè abbiano il vertice comune. Se questi angoloidi si tagliano con una sfera col centro in quel vertice, ne risultano i triangoli ed altre figure sferiche, che, come è notissimo, presentano molte analogie colle corrispondenti figure rettilinee.

Chiameremo *fascio* (*Strahlbüschel im Raume* dello Steiner) un complesso di raggi o di piani passanti per uno stesso punto, senza tener conto delle loro grandezze, solo badando alle loro mutue inclinazioni: un complesso di raggi può anche co-

stituire un cono. — La causa dell'analogia tra un *fascio* ed una figura piana, la si può scorgere, immaginando che i raggi — i piani — i coni del fascio passino rispettivamente per altrettanti punti — rette — curve della figura piana. Se un medesimo fascio è tagliato da due piani, si hanno due figure piane *prospettive*, precisamente quali le abbiamo considerate al principio della Nota al Cap. I. (pag. 72); il *centro di prospettiva* è quello che ora diciamo *centro del fascio*. — Nella predetta posizione diremo che il fascio e la figura piana sono *prospettivi*: se mutassero la rispettiva loro posizione, ma ne rimanessero invariate le forme, si direbbe che il fascio e la figura piana sono *collineari*; intendendosi per *collineazione*, che ogniqualvolta nella figura piana vi sieno punti in linea retta, o rette concorrenti in un medesimo punto, nel fascio vi saranno altrettanti raggi posti in uno stesso piano, ed altrettanti piani colla medesima comune intersezione. — Ad ogni sezione conica, ossia linea del secondo ordine, della figura piana corrisponde nel fascio un cono del secondo ordine.

Una cagione di essenziale differenza tra una figura piana ed un fascio sta in ciò, che quella può variare secondo che se ne fa andare all'infinito l'una o l'altra retta; invece tutti i piani di questo sono egualmente a distanza finita, nè vi è alcun carattere che distingua l'uno dall'altro. Viene da ciò che mentre si contano tre linee del secondo ordine, che differiscono perchè o nessun punto (ellisse), od un solo (parabola), o due (iperbola), stanno a distanza infinita, si ha invece un solo cono del secondo ordine.

Le relazioni metriche che si dicono *projettive*, perchè si conservano da una figura ad ogni sua *prospettiva* (o *projezione* nel significato più generale della parola (pag. 72)), si conservano anche passando da una figura piana ad un fascio ad essa prospettivo; purchè alle distanze dei punti si sostituiscano i seni degli angoli compresi tra i raggi. Ciò risulta evidentemente dalle relazioni $(AB)p=(SA)(SB)\operatorname{sen}(ASB)$, ec. adoperate a simil uso nella Nota al Cap. I. (pag. 74). — Così il teorema I. di quella pagina c'insegna che: *Se le facce di un triedro $SABC$ sono tagliate da un piano nelle rette*

SN SL SM, i seni dei sei segmenti degli angoli del triedro danno i due prodotti uguali

$$\text{sen}\,ASN.\,\text{sen}\,BSL.\,\text{sen}\,CSM = \text{sen}\,BSN.\,\text{sen}\,CSL.\,\text{sen}\,ASM.$$

I fasci presentano un importantissimo *dualismo*. Perpendicolarmente a ciascun raggio ed a ciaschedun piano di un fascio si conducano pel centro dello stesso fascio altrettanti piani e raggi; si formerà per tal maniera un fascio *polare* (§ 69) del primo, che avrà con esso un'intima relazione, ed il primo sarà a sua volta *polare* dell'altro. Se in un fascio vi è una serie di raggi posti in uno stesso piano (*stella*) (pag. 75), nel fascio polare vi corrisponderà una serie di piani passanti per uno stesso raggio, e viceversa: i seni degli angoli fra i raggi di un fascio saranno uguali ai seni dei diedri fra i piani dell'altro fascio.

Il dualismo nei fasci dà origine al *dualismo* nelle figure piane. Se due fasci *tra loro polari* sono tagliati da due piani, si ottengono due figure tra loro *derivate-polari*: ad una serie di punti in linea retta (*punteggiata*) corrisponde nella figura derivata-polare una serie di altrettante rette passanti per un punto (*stella*), e viceversa: le relazioni metriche *projettive* tra le distanze dei punti di una figura danno simili relazioni tra i seni degli angoli compresi dalle rette *derivate-polari* di quei punti. — Se i due fasci polari col centro comune si tagliano con un solo piano, le due figure piane hanno una più intima relazione di quelle che sono soltanto derivate-polari: esse possono dirsi figure *reciproche*, perchè, abbassata dal centro dei due fasci una perpendicolare sul loro piano comune, si ottiene un *centro di reciprocità* tale che le sue distanze da un punto e dalla retta sua derivata-polare (o, se così vogliasi chiamare, *reciproca*) hanno un prodotto costante, ossia una distanza è *inversa* dell'altra. Quel prodotto è uguale al quadrato della lunghezza della perpendicolare che dal centro dei fasci polari va al centro di reciprocità posto nel piano delle figure reciproche.

Cerchiamo alcune delle proprietà dei coni del secondo ordine analoghe a quelle delle curve piane dello stesso ordine, che sono le sezioni coniche. Cominciamo ad operare col calcolo

ammettendo che uno di tali coni sia tagliato da qualsiasi piano in una linea del secondo ordine. — Condotto ad arbitrio pel vertice (s) del cono il raggio (se), immaginiamo che il cono sia tagliato da una serie di piani passanti per (se); ed in ciascuno di essi sieno (sm) (sm_1) le caratteristiche del cono, e sia (se_1) un quarto raggio che formi la *stella armonica* $(sm)(se)(sm_1)(se_1)$; tutti i raggi (se_1) saranno in un medesimo piano (scd), che si dirà il piano *diametrale* del cono corrispondente alla direzione (se). — Se la retta (se) giri in un piano (sde) anche il piano diametrale girerà intorno ad una sua retta (sc); in guisa che quando (se) verrà in (sd) il piano diametrale sarà (sce); e le due stelle formate da tutti i raggi (se) e da tutti i raggi (sd) saranno tra loro collineari, o, il che torna lo stesso, affini. — Inoltre se la (se) giri intorno ad (s) nel piano (sce) il suo piano diametrale girerà intorno alla (sd): sicchè le tre rette (sc) (sd) (se) potranno a buon diritto dirsi tra loro *conjugate*.

Per dimostrare quanto ora abbiamo asserito premettiamo che dicesi stella armonica quella formata da quattro raggi tali che $\operatorname{sen} esm \,.\, \operatorname{sen} e_1sm_1 = -\operatorname{sen} esm_1 \,.\, \operatorname{sen} e_1sm$, dove il segno — dipende da ciò che debbono considerarsi come negativi gli angoli (e quindi anche i loro seni), che andando dalla prima alla terza lettera sono presi in verso opposto degli altri. Questa relazione metrica è projettiva, perciò se la stella si taglia con una retta qualsivoglia eme_1m_1, si ottiene una *punteggiata* di quattro punti *armonici*, che danno

$em \,.\, e_1m_1 = -em_1 \,.\, e_1m$, ed anche $ee_1 \,.\, mm_1 = 2 \,.\, em_1 \,.\, me_1$,

dalle quali si deducono eziandio le

$$\frac{1}{em} + \frac{1}{em_1} = \frac{2}{ee_1}, \quad \frac{1}{e_1m} + \frac{1}{e_1m_1} = \frac{2}{e_1e}, \quad \frac{1}{me} + \frac{1}{me_1} = \frac{2}{mm_1}.$$

Se uno dei quattro punti armonici, per esempio e, va a distanza infinita, il suo corrispondente e_1 diviene il punto di mezzo della retta mm_1.

Ciò premesso, immaginiamo che il cono sia tagliato da un piano parallelo ad (sde), le corde parallele alla (se) della risultante sezione conica saranno tutte dimezzate da un diametro (ce_1), il quale determinerà il predetto piano diametrale

(sce,d); e se la (se) si muova nel piano parallelo alla sezione, questo diametrale (scd) girerà intorno alla (sc) che dal vertice del cono va al centro della sezione; ed alla (sd) corrisponderà il piano diametrale (sce). Che se ora immaginiamo una sezione del cono fatta da un piano parallelo a (sce) le corde, sì del cono che della sezione, parallele alla (se) saranno dimezzate dallo stesso piano diametrale (sce,d); inoltre le corde parallele alla (sc) saranno dimezzate dal piano (sde) (poichè le due sezioni del cono fatte da piani paralleli ed equidistanti da (sde) sono uguali, ed ogni retta che ne unisce due punti corrispondenti è dimezzata dal piano (sde) ed è parallela alla retta (sc) che passa pei centri di quelle sezioni e pel vertice del cono); perciò la (sd) passerà pel centro della sezione parallela ad (sce), e quanto dicemmo della (se) e del piano (scd) potremo ripeterlo per la (se) e pel piano (sdc).

Nel piano diametrale corrispondente ad una retta (sc), che diremo un *diametro*, vi è un diametro conjugato e perpendicolare a (sc), e vi sono pure due diametri (sd) (se) tra loro perpendicolari, i quali ultimi sono paralleli ai due assi della sezione parallela al piano (sde). Non è altrettanto facile dimostrare (veggasi più sotto) che esiste sempre una direzione (sc), alla quale corrisponde un piano diametrale ad essa perpendicolare, e che perciò in ogni cono vi sono tre diametri conjugati tra loro perpendicolari, i quali prendono il nome di *assi*; diconsi piani diametrali *principali* quelli che passano per due assi e sono perpendicolari al terzo.

Gli assi di un cono sieno (sc) (SX) (SY) (Fig. 76) perpendicolari ai tre piani di projezione, e sia AMB la sua traccia orizzontale; ogni punto M di questa ellisse è riferito ai due assi CB CA mediante l'equazione $x^2:a^2+y^2:b^2=1$, essendo x y le distanze delle PM QM da quegli assi: questa medesima equazione servirà a riferire ogni caratteristica (SM) del cono ai due suoi diametrali principali (SZY) (SZX), essendo $x:c$ $y:c$ (posto $(sc)=c$) le tangenti trigonometriche dei diedri compresi tra quei diametrali ed i piani $(SPMY)$ $(SQMX)$; questi diedri sono misurati dagli angoli (CSP) (CSQ). — Le quattro caratteristiche del cono, nelle quali la

sua curvatura è massima o minima, sono determinate da $\operatorname{tg}(CSA)=\operatorname{tg}(CSA_1)=a:c$, $\operatorname{tg}(CSB)=\operatorname{tg}(CSB_1)=b:c$.

S'immagini che il quadrilatero gobbo $(SCPM)$ sia projettato ortogonalmente sulla retta (SM_1) determinata dalle coordinate x_1 y_1 come la (SM) lo è dalle x y: le projezioni sono eguali alle obbiettive moltiplicate pei coseni delle rispettive loro inclinazioni alla retta su cui sono projettate; perciò le projezioni delle (SC) (CP) (PM) saranno date da $c^2:(SM_1)$, $xx_1:(SM_1)$, $yy_1:(SM_1)$, la loro somma sarà identicamente eguale alla projezione della (SM) sulla (SM_1) che è la

$$(SM)\cos(MSM_1),$$

dal che risulta l'importante teorema: *Il coseno dell'inclinazione di due rette è uguale alla somma dei tre prodotti dei coseni degli angoli che esse formano con ciascheduno di tre assi ortogonali.*

Mediante questo teorema se pongasi

$$\operatorname{tg}(CSF)=\sqrt{(a^2-b^2)}:\sqrt{(c^2+b^2)}=e:c$$

sarà $\cos(FSM)=(c^2+ex):\sqrt{(c^2+e^2)}\sqrt{(c^2+x^2+y^2)}$, da cui si ricava con facile calcolo

$$\operatorname{tg}(FSM)=c(a^2-ex):a(c^2+ex);$$

e per una notissima formula trigonometrica da questa e dalla $\operatorname{tg}(CSA)=a:c$ si ricava $\operatorname{tg}[(CSA)-(FSM)]=ex:ac$. In simil modo si trova che lo stesso angolo, che ha la tangente $=ex:ac$, è uguale a $(F_1SM)-(CSA)$; perciò: I. *La somma dei due angoli vettori* (FSM) (F_1SM) *è costantemente uguale all'angolo compreso tra le due caratteristiche* (SA) (SA_1) *della curvatura minima.* Perlochè le rette (SF) (SF_1) sono dette a buona ragione le *focali* del cono. — Si noti che F F_1 non sono già i fochi dell'ellisse AMB: il rapporto di CF all'eccentricità dell'ellisse è $=(sc):(SB)$.

Il proposto cono ha un cono *polare*, le cui caratteristiche sono perpendicolari ai tangenziali del primo, e viceversa; esso è tagliato dal piano BAB_1 in una ellisse coi semiassi $C\beta=c^2:b$, $C\alpha=c^2:a$, e le sue focali passano pei punti γ γ_1 determinati da $C\gamma=c^2\sqrt{(a^2-b^2)}:b\sqrt{(a^2+c^2)}$. I piani perpendicolari a queste focali del cono polare si ottengono prendendo $CG=b\sqrt{(a^2+c^2)}:\sqrt{(a^2-b^2)}$; essi si dicono piani *ciclici*

del cono $(SAB\ldots)$, perchè tutte le sezioni circolari di questo sono parallele all'uno o all'altro dei piani (SGT) (SG_1T_1).

Per dare qualche saggio dell'evidenza, con che la Geometria derivata giunge a verità, cui sarebbe molto più lungo dimostrare col calcolo, applichiamo i principii di derivazione alla ricerca delle proprietà delle focali dei coni. Cerchiamo preventivamente qual sia in un piano la curva reciproca del circolo $A^0M^0A_1^0$ (Fig. 77) rispetto al centro di reciprocità R; per quanto abbiamo detto superiormente, si otterranno i punti M della curva, abbassando da R le perpendicolari RI^0 sulle tangenti M^0I^0 del circolo, e prendendo le RM inversamente proporzionale alle RI^0: e se si prendano le RI inversamente proporzionali alle RM^0, le IM perpendicolari alle RI saranno tangenti alla curva. Il centro comune dei due coni polari, che hanno sul piano della figura le tracce $A^0M^0\ldots$ $AM\ldots$, è sulla perpendicolare al piano innalzata in R, e ad una distanza $=\sqrt{RM^0.RI}$. La curva di tutti i punti I è il circolo AIA_1, giacchè per un teorema di Geometria elementare, le Ri sono inversamente proporzionali alle RM^0, perciò le RI sono proporzionali alle Ri (*); ponendo mente a quanto dicemmo sulla fine del § 99 (Fig. 42) se ne deduce che: II. *La curva reciproca di un circolo è una sezion conica, che ha un foco nel centro di reciprocità.*

La *reciprocità* nello spazio consiste nell'immaginare che per ogni punto M della figura primitiva sia tirato al *centro di reciprocità* R un raggio MR, il quale sia prolungato di una lunghezza RI^0 inversamente proporzionale alla RM, il piano condotto per I^0 perpendicolarmente al raggio MR si dirà il piano *reciproco* del punto M. I piani reciproci di due punti M M_1 s'intersecano in una retta, che taglia perpendicolarmente il piano MRM_1 in un punto che è *reciproco in quel piano* alla retta MM_1; per *lo spazio* si dice che l'intersezione di quei piani è *reciproca* della retta MM_1. I piani reciproci di

(*) Questa maniera di derivazione dal punto M al suo *inverso* I io la dico *inversione*; intorno ad essa, combinata anche colla *reciprocità*, pubblicai una Memoria nel T. VI degli Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto pel 1836.

tutti i punti di un piano MM_1M_2 hanno un punto comune, che dicesi *reciproco* di quel piano; ciò pure si rende palese considerando le reciprocità nei varii piani condotti pel centro R perpendicolarmente al piano MM_1M_2. Anche nello spazio vi è perfetta reciprocanza tra due figure *reciproche*.

Ora abbiasi un circolo (c^0), e fuori del suo piano il centro di reciprocità R; tutti i piani reciproci dei punti del circolo saranno tangenziali ad un cono (C) col vertice C reciproco del piano di (c^0); tal cono sarà del secondo ordine. Infatti se per (c^0) passi un cilindro rotondo (A^0), il quale sia tagliato perpendicolarmente dal piano condotto pel centro R nel circolo (b^0), la reciproca di tal cilindro sarà una curva (a), che nel proprio piano sarà reciproca del circolo (b^0), quindi pel teorema II. sarà dessa una sezion conica: siccome il circolo (c^0) appartiene al cilindro (A^0), così il cono (C) passerà per la curva (a). Questo (C) non differisce, se non se nella posizione del vertice, dal cono *polare* del cono che ha per vertice il punto R e per direttrice il circolo (c^0), poichè i tangenziali di quello sono perpendicolari alle caratteristiche di questo. Per tal maniera abbiamo dimostrato, che il cono polare di uno che ha per direttrice un circolo è del secondo ordine; tagliando questi coni polari con un piano qualunque abbiamo, più generalmente del teorema II.: III. *In un piano la reciproca di una sezion conica è pur essa una sezion conica*. — Dopo ciò, presa in luogo del circolo (c^0) una qualunque sezione conica, il precedente ragionamento dimostrerà che: IV. *Nello spazio una sezion conica è reciproca ad un cono del secondo ordine*. — V. *Il cono polare di un cono d. s. o. è pur esso del secondo ordine*.

In un qualunque cono d. s. o. $R(c^0)$ se (c^0) ne è una sua sezione circolare, il piano condotto pel vertice R parallelamente a tal sezione dicesi un suo piano *ciclico*; e nel cono (C) polare del predetto, la retta CR perpendicolare a quel piano ciclico, dicesi una sua *focale*. Pel teorema II. si vede che: VI. *In ogni cono d. s. o. le sezioni perpendicolari ad una focale hanno un foco nella focale stessa*.

Supponiamo che pel circolo (c^0) passi una sfera ((S^0)), e

rispetto al centro di reciprocità R si abbia una superficie ((S)), i cui tangenziali sieno reciproci dei punti della sfera, e viceversa; essa sarà toccata dal cono (C) reciproco di (c^o) tutto lungo una sua sezion conica, reciproca del cono circoscritto alla sfera lungo il circolo (c). — Tutti i piani condotti per R e pel centro della sfera la tagliano in circoli massimi, e tagliano per conseguenza (Teor. II.) la ((S)) in coniche uguali aventi un foco in R; dunque: VII. *La superficie reciproca di una sfera è una superficie del secondo ordine rotonda coi fochi sull'asse di rivoluzione, ed ogni cono* (C) *ad essa circoscritto ha una focale che passa pel foco della superficie.* — Siccome questa ha due fochi, e per ciascheduno di essi può ripetersi in ordine inverso quanto ora abbiamo detto, così: VIII. *Ogni cono d. s. o. ha due rette focali.* — Passando (Teor. V.) al cono polare si scorge che: IX. *Ogni cono d. s. o. ha due piani, ciclici, paralleli alle sue sezioni circolari.* Nei coni rotondi le due focali coincidono insieme, così pure i due piani ciclici.

Se per una tangente del circolo (c^o) e pel centro di reciprocità R si faccia passare un piano, il quale tagli la sfera ((S^o)) nel circolo (h^o), il suo reciproco sarà un cilindro (H) circoscritto alla superficie rotonda ((S)) e tangenziale al cono (C) lungo una sua caratteristica. I piani che passeranno per questa caratteristica e pei due fochi R F della superficie, e quindi per le due focali del cilindro, cioè pei fochi di tutte le sue sezioni rette, saranno (per una proprietà di tali sezioni) egualmente inclinate al tangenziale, che è comune al cilindro, alla superficie ed al cono (C); perciò: X. *In ogni cono del secondo ordine i piani condotti per una sua generatrice CM e per le due focali formano diedri uguali col tangenziale che passa per la CM.* Mediante l'analoga proprietà delle sezioni coniche, potremo estendere il precedente teorema al caso che la retta CM sia esterna al cono; allora *i due piani che passano per le focali e per la CM formeranno diedri uguali coi due tangenziali al cono condotti per la CM.*

Se dai fochi R F della superficie rotonda ((S)) si abbassano le perpendicolari su ciascun tangenziale, i piedi di tali per-

pendicolari sono sulla sfera, che tocca la superficie nei suoi due vertici; e il loro prodotto è costante. Infatti siccome quelle perpendicolari non escono dal piano meridiano, in cui si trova il punto di contatto, così questo teorema è conseguenza immediata di quello che vale per le sezioni coniche (§ 99) e di cui abbiamo già fatto uso: la sua seconda parte è conseguenza di una nota proprietà delle corde del circolo, in cui sono i piedi delle perpendicolari, e della simmetrica disposizione dei due fochi rispetto a quel circolo. Ne viene che: XI. *In ogni cono d. s. o. il prodotto dei seni delle inclinazioni delle due focali su ciaschedun tangenziale è costante.*

Il cono (C), e l'altro cono che ha per vertice un punto R della focale del primo, e per direttrice il circolo (c^o) reciproco del cono (C) rispetto al centro R, sono, come dicemmo, tra loro polari; e la sezione circolare (c^o) del secondo è perpendicolare alla focale CR del primo. Si può stabilire direttamente anche la direzione delle altre sezioni circolari che sono perpendicolari alla seconda focale di (C); poichè le caratteristiche del cono $R(c^o)$ che sono rispettivamente perpendicolari ai tangenziali del (C) li incontrano nei punti di una circonferenza di circolo. Infatti per la legge della reciprocità le lunghezze di quelle perpendicolari sono inversamente proporzionali alle lunghezze delle medesime caratteristiche da R ai punti del circolo (c^o), e la curva *inversa* di un circolo è sempre un circolo; il che si dimostra osservando che pel circolo (c^o) possono passare infinite sfere, e che la superficie *inversa* di una sfera è una sfera, giacchè ciascuna secante condotta da R ad una sfera è inversamente proporzionale alla sua parte esterna. Dunque: XII. *Due sezioni circolari di un cono sono tra loro inverse, cioè le lunghezze di ciascuna caratteristica dal vertice alle due sezioni danno prodotto costante.*

Il dualismo tra un cono ed il suo polare e tra le focali dell'uno e i piani ciclici dell'altro fa derivare dai teoremi I., X. e XI. i seguenti: XIII. *I diedri formati dai due piani ciclici con qualsivoglia tangenziale del cono hanno somma costante, che è il diedro compreso tra i due tangenziali lungo le caratteristiche di minima curvatura*: purchè si scelgano op-

portunamente i diedri o i loro supplementi. XIV. *Ogni tangenziale del cono taglia i piani ciclici in due rette egualmente inclinate alla caratteristica di contatto*; o più generalmente: *Se un piano taglia il cono e i piani ciclici in quattro rette, queste prese alternatamente formano due angoli uguali*. — XV. *Il prodotto dei due seni delle inclinazioni di ciascuna caratteristica del cono coi piani ciclici è costante.*

Se sulla focale CR di un cono (C) siavi il vertice D di un altro cono (D), il quale abbia la stessa focale DR; preso un punto R di questa per centro di reciprocità, quei due coni avranno per reciproci i due circoli (c^0) (d^0) posti in piani paralleli, giacchè ambedue sono perpendicolari alla focale comune; per questi due circoli possiamo far passare due coni (E^0) (E_1^0), perciò le loro reciproche (e) (e_1) apparterranno ad ambedue i coni (C) (D); cioè: XVI. *Due coni d. s. o. che hanno per focale comune la retta, che ne unisce i vertici, si tagliano in due curve piane.*

Coloro che bramano rendersi abituali le teoriche e la pratica della Geometria descrittiva, costruiranno in grande i disegni (§ 5) necessarii per verificare graficamente i precedenti teoremi: spero di far cosa grata, dando loro altro oggetto di esercizio, coll'esposizione di alcune proprietà delle superficie del secondo ordine.

Le superficie d. s. o. rotonde, i cui fochi non sono sull'asse (cioè lo sferoide schiacciato e l'iperboloide rotondo ad una falda), hanno un circolo *focale*, che contiene tutti i fochi delle linee meridiane. — Prendendo uno solo di questi fochi, e la *direttrice* (§ 98) che gli corrisponde nel piano meridiano di cui si tratta, si dimostra che: XVII. *La superficie rotonda è il luogo geometrico di tutti i punti, le cui distanze da un punto (foco) e da una retta (direttrice) hanno un costante rapporto*. Infatti se F (Fig. 42) è il foco, GQ la direttrice, AMA_1 la linea meridiana, CB l'asse di rotazione, si ha (§ 98) $FA:GA=FA_1:GA_1=FM:QM$; ora è noto, che tutti i punti del circolo generato dalla rotazione del punto A hanno dai punti fissi F G le distanze in quello stesso rappor-

to (*); inoltre tutti i punti, che hanno le distanze dai F Q in quel rapporto sono situati sopra una sfera, il cui centro cade sulla FQ; questa sfera taglierà il piano generato dalla rotazione della retta QM in un circolo, il quale dovendo comprendere i due punti in cui la retta QM incontra la curva, sarà precisamente il circolo parallelo prodotto dalla rotazione del punto M. — Se fosse costante il rapporto delle distanze da un punto F e da un piano, il luogo geometrico si otterrebbe facendo ruotare la sezione conica intorno all'asse dei fochi.

Datane occasione aggiungo gli enunciati di altri due teoremi: XVIII. *Tutti i punti, le cui distanze da due rette fisse hanno dato rapporto, appartengono ad un particolar iperboloide ad una falda*; esso diventa un paraboloide (§ 157) se il rapporto è di uguaglianza. — XIX. *Gli spigoli di tutti i diedri retti, le cui facce passano per due rette fisse, appartengono ad un iperboloide della stessa specie suindicata, le cui sezioni circolari sono perpendicolari all'una o all'altra delle due rette fisse, le quali ne sono una generatrice ed una direttrice* (§ 150).

Le superficie del secondo ordine hanno per *focali* due sezioni coniche accoppiate (§ 114); ciascuna di esse è situata nel piano di una sezione diametrale principale della superficie, e ne ha gli stessi fochi, avendo per vertici i fochi delle altre sezioni diametrali principali. — I paraboloidi hanno due sole sezioni diametrali principali, i cui fochi F E sono i vertici e i fochi delle due parabole accoppiate, ognuna delle quali è posta, come dicevamo, nel piano della sezione principale, di cui ha lo stesso foco. — L'ellissoide e i due iperboloidi hanno due sezioni principali coi fochi F F_1 E E_1 posti sopra uno stesso asse, e la terza sezione principale, se non è immaginaria, ha i fochi D D_1 in un altro asse: le *focali* sono l'ellisse e l'iperbola accoppiate che hanno i fochi e due vertici nei quattro punti F F_1 E E_1. — XX. *Ogni piano normale ad una focale taglia la superficie in una sezione conica, di cui*

(*) Poichè se a è un punto di quel circolo, dalla proporzione $CF:Ca=Ca:CG$ risulta la similitudine dei triangoli CFa CaG, perciò $Fa:Ga=CF:CA$.

un foco è nella stessa focale. — XXI. *Se una focale taglia la superficie, ciò avviene ad angolo retto*; perchè la focale ha gli stessi fochi della sezione principale della superficie; *ed in quella intersezione la sezione perpendicolare alla focale si riduce ad un circolo infinitesimo*; diremo in seguito che in quel punto (*ombilic*) la superficie ha la curvatura sferica.

XXII. *Ogni cono circoscritto ad una superficie d. s. o. e col vertice in un punto di una delle sue focali è rotondo.* — XXIII. *Ogni altro cono circoscritto alla superficie ha gli stessi assi e le stesse rette focali dei due coni, che col medesimo vertice hanno per direttrici le due curve focali.* — Siccome i coni colle rette focali comuni quando si tagliano, si tagliano ortogonalmente (teor. X.), così: XXIV. *Da qualunque punto si guardino due sezioni coniche accoppiate, esse sembrano tagliarsi ortogonalmente* — XXV. *I coni, che hanno il vertice sulla superficie e le curve focali per direttrici, hanno un asse che è normale alla superficie, e due che sono tangenti alle linee delle curvature principali di questa: se la superficie è costituita da linee rette, quelle due, che passano pel vertice del cono, ne sono le focali.*

XXVI. *Due piani, che passino per una tangente della superficie e tocchino una delle sue focali, sono ugualmente inclinati sul tangenziale alla superficie.* — XXVII. *Per ciascun punto di una curva focale possono esistere due piani tali, che le distanze di un qualunque punto della superficie dai piani abbiano il prodotto eguale al quadrato della distanza del medesimo punto da quel punto fisso.* — XXVIII. *Per ogni piano tangenziale ad una superficie d. s. o. è costante il prodotto delle sue distanze dai due punti di una delle curve focali, ove essa ha le tangenti parallele al tangenziale.*

CAP. IV.

Delle superficie sviluppabili, e degli inviluppi delle superficie.

185. Superficie *sviluppabili* sono quelle che hanno in qualche modo (§ 173) una sola curvatura, tolta la quale esse si *sviluppano* in un piano; ed una superficie piana flessibile può ravvolgersi sopra una superficie sviluppabile in guisa da coprirla interamente senza soffrire nè fenditure, nè ripiegature. Questo sviluppo può eseguirsi facendo ruotare la superficie sopra un piano, in modo che tutte le parti di quella vengano successivamente ad appoggiarvisi; bisogna dunque che la superficie ed il piano si tocchino sempre per tutta la lunghezza di una retta, che sarà una generatrice della superficie; questo piano tangenziale comprenderà perciò le tangenti di tutte le curve che possono tracciarsi sulla superficie partendo dai varii punti di quella generatrice, e quindi comprenderà due punti infinitamente vicini di ciascuna di tali curve, cioè due rette generatrici della superficie. — Quantunque le superficie sviluppabili sieno costituite da linee rette, noi, seguendo Monge ed Hachette, non le chiameremo rettilinee (*réglées*), riserbando questo nome per quelle che non sono sviluppabili.

186. Nelle superficie cilindriche e nelle coniche due generatrici rettilinee quali si vogliano, sono situate in un medesimo piano; nelle altre superficie sviluppabili sono in uno stesso piano soltanto le generatrici infinitamente vicine (Veggasi il § 211), queste colle loro intersezioni formano una curva che ha per tangenti tutte quelle generatrici: tal curva per conseguenza non è piana, poichè altrimenti tutte le sue tangenti sarebbero situate sopra un piano anzichè sopra una superficie sviluppabile; essa dicesi la *linea* o *lo spigolo di regresso* (*Wendecurve*) della superficie. Fra una curva gobba ed una superficie sviluppabile ha dunque luogo un'intima relazione, per cui una di esse trae seco l'altra: tutte le generatrici caratteristiche della superficie sono tangenti alla curva, e tutti i piani osculatori

di questa sono tangenziali a quella, e possono servire a generarla, poichè le intersezioni dei tangenziali infinitamente vicini sono le generatrici della superficie; per questa circostanza dicesi che i piani sono *inviluppati* dalla superficie, che prende il nome d'*inviluppo* del sistema dei piani.

187. I piani di un dato sistema, anzichè esser determinati mediante una curva, di cui sieno i piani osculatori, possono essere i piani normali di una data curva, ed ancora essi danno origine ad una superficie sviluppabile che ne è l'*inviluppo*: se la curva direttrice è piana, la superficie è un cilindro colle generatrici perpendicolari al piano della curva; e se quella è una curva gobba descritta sopra una sfera, la superficie è un cono, perchè tutti i piani normali alla curva passano pel centro della sfera. — Per un altro modo di definire un sistema di piani, supponiamo di avere una superficie non isviluppabile e su di essa sia descritta una curva qualunque; tutti i piani tangenziali alla superficie nei varii punti di quella curva saranno ancora inviluppati da una superficie sviluppabile, la quale toccherà la superficie proposta in tutti i punti di quella curva, avendo colà i tangenziali comuni; tale superficie sviluppabile si dirà *circoscritta* all'altra superficie.

188. La generazione delle superficie sviluppabili mediante l'inviluppo di piani può estendersi ad altre superficie; ed in generale si chiama *superficie inviluppo* il luogo delle intersezioni consecutive di un'altra superficie mobile, che varia di posizione od anche di forma secondo una legge determinata; ognuna di queste superficie dicesi *inviluppata*, e le intersezioni di due inviluppate infinitamente vicine prendono il nome di *generatrici caratteristiche* della superficie inviluppo. — Questo nome di *caratteristiche* noi lo adoperiamo peraltro nel solo caso che le superficie inviluppate sieno o piani o sfere, e perciò le caratteristiche saranno o rette o circoli; se non si facesse tal distinzione si correrebbe rischio di dover chiamare caratteristiche tutte le generatrici. — Ogni superficie inviluppata può considerarsi come contenente due generatrici della superficie inviluppo, quelle cioè in cui essa è tagliata dalle altre due superficie inviluppate infinitamente ad essa vicine; ne

viene che ogni superficie inviluppata tocca la superficie inviluppo tutto lungo una sua generatrice.

189. Una superficie rotonda ci presenta differenti maniere di generazione per mezzo dell'inviluppo di altre superficie. Se immaginiamo una serie di sfere, che abbiano i centri sull'asse della superficie, e la tocchino nei suoi varii circoli paralleli, la superficie è l'inviluppo di quelle sfere, e questi circoli sono generatrici caratteristiche. — Ogni superficie rotonda è anche l'inviluppo dei coni rotondi, che hanno i vertici sull'asse, e che la toccano nei suoi varii circoli caratteristici: e lo è anche dei cilindri che la toccano lungo ciaschedun suo meridiano. Ciascuno di questi coni o cilindri, piuttostochè inviluppato, si dice (§ 187) circoscritto alla superficie, e forse meglio si direbbe *abbracciante*.

190. Torniamo adesso alle superficie sviluppabili. Immaginiamo che il piano orizzontale sia quel tangenziale che comprende le due generatrici caratteristiche infinitamente vicine 1.ª e 2.ª; la superficie ruoti intorno alla 2.ª generatrice finchè il tangenziale che comprende la 2.ª e la 3.ª generatrice venga a combaciare col piano orizzontale; poscia, rimanendo fisse le prime generatrici, tutte le successive ruotino intorno alla 3.ª finchè anche la 4.ª cada sul piano orizzontale; così procedendo col pensiero si comprenderà in che consista l'esatto sviluppo di una superficie sviluppabile, e s'intenderà, che in tale sviluppo le generatrici della superficie si mantengono della stessa forma rettilinea e della stessa grandezza; — che ogni altra linea tracciata sulla superficie muta di forma e conserva la stessa lunghezza; — che la linea di regresso perde la propria torsione (§ 129), perchè i suoi piani osculatori girano intorno alle tangenti, e mantiene la sua curvatura; — che gli angoli compresi tra le caratteristiche e le linee tracciate sulla superficie non mutano di grandezza, e che quelle si conservano tangenti alla linea di regresso; — ne risulta pure, che la linea più breve che nella superficie possa condursi fra due punti determinati, diventa nello sviluppo una linea retta.

191. Per descrivere realmente lo sviluppo di una data superficie non può adoperarsi il predetto metodo, che è pura-

mente razionale; e, se in luogo delle caratteristiche infinitamente vicine, si prenderanno quelle che hanno fra loro piccole distanze, si avrà uno sviluppo soltanto approssimato; vediamo come in casi particolari possa descriversi lo sviluppo esatto. Se primieramente la superficie sia un cilindro, le caratteristiche saranno anche dopo lo sviluppo linee parallele, e se nel cilindro si abbia una direttrice, il cui piano sia perpendicolare a tutte le caratteristiche, essa si svilupperà in una linea retta perpendicolare alle caratteristiche sviluppate; dunque rimane da prendere sopra una retta delle porzioni uguali (§ 126) agli archi della direttrice, e tirare perpendicolarmente ad essa le caratteristiche nella posizione che prendono dopo lo sviluppo. In questo sviluppo piano ogni linea brevissima è una retta, la quale forma angoli uguali colle caratteristiche, perciò sulla superficie cilindrica le linee brevissime hanno la proprietà d'incontrar sotto ugual angolo tutte le caratteristiche; tali linee si dicono *eliche*, esse sono tutte curve gobbe, eccettuate quelle che sono perpendicolari alle caratteristiche. Avremo ben presto occasione di descrivere un'elica. Se un filo si ravvolge, tenendolo teso sopra un cilindro, esso vi si conforma in elica; poichè il filo a motivo della sua tensione prende su qualunque superficie la forma della linea più breve, che possa condursi da un punto ad un altro.

192. Se la superficie, che vuole svilupparsi, sia un cono; noteremo in primo luogo, che le sue generatrici saranno dopo lo sviluppo tanti raggi partenti da un medesimo punto; rimane da immaginare sul cono una direttrice, di cui si conosca la forma che prenderà dopo lo sviluppo. Ora se partendo dal vertice del cono si prendano su tutte le sue caratteristiche delle lunghezze uguali, le loro estremità saranno dopo lo sviluppo situate in un arco circolare; dunque bisogna determinare la lunghezza della direttrice, i cui punti sono ugualmente lontani dal vertice, e fare ad essa uguale un arco del circolo descritto col raggio eguale alla distanza della direttrice dal vertice. Anche di questa teoria faremo in seguito qualche applicazione.

193. Le linee brevissime descritte sulle superficie coniche non hanno, come quelle sulle superficie cilindriche, la proprietà di tagliare tutte le generatrici caratteristiche sotto un medesimo angolo; cerchiamo qual sia la proprietà comune alle linee brevissime descritte sopra qualunque superficie sviluppabile. Se rappresentiamo in $G'L'N'$ (Fig. 78 *b*) lo sviluppo della superficie, ogni sua linea brevissima sarà sviluppata in una retta $L'M'N'$; ora quando tal figura si piega intorno alla superficie il piano infinitesimo $G_1'M'N'$ ruota intorno alla caratteristica $G_1'M'$, e la retta $L'M'N'$ si conforma nella linea brevissima (LMN) (Fig. 78 *a*); ora se il piano coordinato orizzontale sia parallelo al piano (GLM), mentre il lato $M'N'$ gira di un angolo infinitesimo intorno alla generatrice (G_1M) esso si conserva nel piano verticale in cui è posto (LM), perciò la sua projezione MN si mantiene sulla prolungazione del lato LM; dunque quando una linea brevissima (LMN) si projetta sopra il piano tangenziale nel punto (M), i due archetti infinitesimi (LM) (MN) si projettano per diritto l'uno dell'altro, cioè la curvatura della projezione nel punto M è nulla: la stessa proprietà può esprimersi anche in altro modo considerando che il piano che comprende i due latercoli (LM) (MN) della curva dicesi il suo piano osculatore nel punto (M), e che ogni piano perpendicolare al tangenziale dicesi (§ 174) piano normale; perciò: *Le curve brevissime hanno tutti i loro piani osculatori normali alla superficie cui appartengono.* — Il predetto teorema si estende anche alle superficie non isviluppabili; infatti se abbiasi una superficie qualunque e su di essa sia descritta una curva brevissima, possiamo immaginare che una superficie sviluppabile (§ 187) sia circoscritta alla data tutto lungo quella curva, e la curva sarà brevissima anche rispetto a questa seconda superficie, poichè le due superficie hanno di comune un elemento infinitesimo in larghezza, ma che si estende per tutta quella curva: le due superficie hanno nei punti di quella curva i tangenziali comuni; dunque i piani osculatori della curva che sono normali alla superficie sviluppabile lo sono anche alla superficie data.

Problema. *Descrivere l'elicoide sviluppabile.*

194. Sopra un cilindro sia descritta una linea brevissima, che dicesi *elica* (§ 191); tutte le tangenti di questa curva gobba costituiscono (§ 186) una superficie che è l'*elicoide sviluppabile*. Per descriverlo cominceremo col disegnare l'elica, il che non sarà difficile considerando che nello sviluppo del cilindro l'elica si sviluppa in una retta; poscia per tirarne una tangente qualunque, osserveremo che essa è compresa nel tangenziale del cilindro e forma colla caratteristica un angolo dato. — Determinata la traccia dell'elicoide sopra uno dei piani coordinati, facile sarà avere il piano tangenziale lungo una caratteristica, poichè esso viene determinato (§ 173) dalla corrispondente tangente della traccia: ma anche senza di ciò potremo notare che i tangenziali della superficie essendo (§ 186) piani osculatori dell'elica, e questi essendo (§ 193) normali alla superficie cilindrica, cioè passando per una retta perpendicolare alla generatrice del cilindro ed alla tangente dell'elica, ne viene che l'inclinazione fra il tangenziale dell'elicoide e la generatrice del cilindro è uguale all'angolo costante formato con questa generatrice dalla tangente dell'elica. — Se vorremo sviluppare l'elicoide, osserveremo che nello sviluppo la sua linea di regresso (§ 190) conserva la stessa curvatura, ora è evidente, che se il cilindro sia rotondo, l'elica ha in tutti i suoi punti la medesima curvatura, perciò nello sviluppo dell'elicoide essa si ridurrà ad un circolo. Per trovar il raggio di questo circolo osserviamo che il piano osculatore dell'elica taglierà il cilindro in una ellisse, di cui l'estremità dell'asse minore apparterrà all'elica; ci sarà dunque facile trovar il raggio di curvatura di questa ellisse, e quindi anche dell'elica. Dopo aver descritto il circolo, in cui si sviluppa l'elica, prenderemo su di esso degli archi eguali ai varii archi dell'elica (i quali sono dati dallo sviluppo del cilindro), e le tangenti corrispondenti formeranno lo sviluppo delle caratteristiche dell'elicoide. — Se finalmente voglia descriversi una linea brevissima sull'elicoide, bisognerà prima tirare una retta sul suo sviluppo, poscia trasportare sull'elicoide i punti in cui essa taglia le caratteristiche.

195. *Disegno.* Sia proposto da descrivere l'elicoide sviluppabile dipendente da un'elica di un cilindro rotondo perpendicolare al piano coordinato orizzontale; descriviamo in primo luogo (§ 191) lo sviluppo del cilindro, e dell'elica che diverrà la retta $E'a'm'_1b'_2$.... (Fig. 79 *b*); supposto che questo sviluppo si ravvolga sul cilindro AM_1B_2... (Fig. 79 *a*), sarà facilissimo dedurne la projezione verticale am_1b_2...: dell'elica (questa curva am_1b_2... dicesi *linea dei seni* (*sinusoide*)). I tangenziali del cilindro hanno le tracce MX, dunque le rette tangenti dell'elica e caratteristiche dell'elicoide hanno le projezioni MX; inoltre esse hanno una costante inclinazione $A'E'a'$ (Fig. 79 *b*) sul piano orizzontale, e nel ravvolgersi della $A'M_1'B_2'$ intorno al circolo AM_1B_2 (Fig. 79 *a*), la $M_1'E'$ prende la posizione M_1X_1 ec.; così avremo la traccia orizzontale EX_1G.... dell'elicoide, ed è palese che essa è una sviluppante (§ 126) della base del cilindro; projettando i punti X_1 ec. sulla fondamentale avremo le projezioni verticali m_1x_1 ec. delle generatrici caratteristiche dell'elicoide, e ne dedurremo la traccia verticale Ωy_3y_4; questa ha l'assintoto b_2g; oltre il punto y_4 essa si abbassa nuovamente, e va a tagliare la fondamentale, unendosi colà alla continuazione della traccia orizzontale. Tutto ciò è prodotto da quella falda dell'elicoide, che discende obbliquamente dai varii punti dell'elica; ma le caratteristiche (M_1X_1) ec. si estendono anche al di sopra dell'elica in (M_1Y_1); così si ha sul piano orizzontale la traccia $_2X_3X$... prodotta dai punti dell'elica che sono sotto di esso piano, e sul verticale si hanno i rami analoghi a $_1yyy_1$ che si uniscono con quella $_2X_3X$.... Nella figura si sono segnate a tratti interrotti queste prolungazioni all'insù delle caratteristiche, e le tracce che ne risultano. — Si potrà risparmiare di costruire le porzioni troppo lontane della sviluppante del circolo, considerando che tutti i piani orizzontali tagliano l'elicoide in una sviluppante eguale alla EX_1...; così se prenderemo $M_5W_5=M_1X_1$ il punto della caratteristica che ha la projezione W_5 sarà situato sul piano orizzontale distante dal coordinato di tanto di quanto il punto m_5 è più elevato di $_1m_1$ perciò projetteremo W_5 in w_5 e sarà m_5w_5 la projezione di

una generatrice. Anzi con una simile considerazione di due piani orizzontali si possono condurre le projezioni verticali delle generatrici senza bisogno di descrivere la curva $m_1 m_3 \ldots$, la quale risulta l'inviluppo di quelle rette: per esempio, si può prendere il piano $m_7 z_5$, la cui distanza dal coordinato sia uguale al *passo* dell'elica, cioè alla distanza $_1 m m_7$ di due punti successivi posti sopra una stessa generatrice del cilindro, e projettando i punti $_1 X$ $_3 X$ ec. in z_6 z_5 ec. saranno $z_6 b_6 w_6 x_6$ $z_5 m_5 w_5 x_5$ ec. le projezioni verticali delle generatrici. — La predetta considerazione giova per fare un modello dell'elicoide sviluppabile: mediante un cilindro verticale si uniscano due piani orizzontali, su questi si disegnino le sviluppanti del circolo, e pei loro punti corrispondenti si tirino dei fili, i quali tutti toccheranno il cilindro e presenteranno la giusta forma della porzione di elicoide compresa fra i due piani.

196. Per descrivere il piano tangenziale all'elicoide lungo la sua generatrice $(M_1 X_1)$, basta condurre un piano che passi per questa retta e per la tangente in X_1 della traccia EX_1; ma la tangente della sviluppante è (§ 124) parallela alla normale dell'evoluta, dunque il tangenziale ricercato è parallelo al raggio OM_1. Così per la caratteristica $(B_2 G)$ il piano tangenziale è perpendicolare al coordinato verticale, ed ha la traccia $g v b_2$. — Venendo allo sviluppo dell'elicoide, il piano osculatore dell'elica nel punto (B_2) taglia il cono nell'ellisse, che ha i semiassi $(OB_2,\ b_2)$, $(OA,\ b_2 v)$; se ne determini (§ 123) il raggio di curvatura nel punto (B_2), che sarà anche il raggio di curvatura dell'elica; poscia con tal raggio si descriva il circolo $A'' M'' B''_2$ (Fig. 79 c), e su di esso si prendano gli archi $A'' M''_1$ ec. eguali agli archi $(A M_1)$ ec. dell'elica, e quindi ai loro sviluppi $a' m'_1$ ec. (Fig. 79 b); si tirino le tangenti $A'' E''$, $M''_1 X''_1$, ec. e si facciano eguali alle rette $(A E)$ $(M_1 X_1)$ ec. (che sono anche uguali alle $a' E'$, $m'_1 E'$, ec.); per tal modo si avrà descritto lo sviluppo dell'elicoide e della sua traccia sul piano orizzontale. — Se in questo sviluppo si tira una retta qualunque $E' S'$, $S''_2 \ldots$, essa rappresenta una linea brevissima della superficie: per descriverne le proje-

zioni si prenderanno sulle generatrici (MX) delle porzioni obbiettive (MS) eguali alle $M''S''$.

CAP. V.

Delle superficie rettilinee.

197. Dicemmo già che per superficie rettilinee noi intendiamo quelle fra le superficie generate dal moto di una retta (*rigate, réglées, Regelflaechen*) che non sono sviluppabili: altri le dicono superficie storte o gobbe (*gauches, windschiefen*); ma questi nomi non accennano alla loro generazione mediante una linea retta: sarebbe poi inutile estendere il nome di rettilinee anche alle superficie sviluppabili, giacchè quest'ultima loro qualificazione, mentre include la idea che sono generate da una retta, esprime la loro proprietà più osservabile di essere incurvate in un solo senso, e di potersi perciò spiegare fino a ridursi piane. Le superficie rettilinee si distinguono dalle sviluppabili in ciò, che due loro generatrici infinitamente vicine non sono situate in un medesimo piano (Veggasi § 211); così le superficie rettilinee non possono essere l'inviluppo di un piano mobile, nè le loro generatrici possono dirsi caratteristiche. Le superficie rettilinee sono da per tutto concavo-convesse (§ 173).

198. In varii modi può immaginarsi regolato il movimento della retta generatrice; è condizione essenziale, che per ogni punto non passi che un numero limitato di generatrici, poichè altrimenti le generatrici o formerebbero un cono, o riempirebbero una porzione di spazio, anzichè costituire una superficie; così non basterebbe il dire, che la retta generatrice deve incontrare due linee direttrici, ma se ne richieggono tre. Come, date tre direttrici curvilinee, si possano determinare le generatrici che passano per ciascheduno punto di una di esse, lo intenderemo quando avremo trattato dell'intersezione di due coni col vertice comune. — Se una delle direttrici è una retta, e s'immagina che essa sia indefinitamente allontanata, ne viene che le generatrici che dovevano incontrarla si

riducono parallele ad un piano fisso, il quale prende il nome di piano *direttore*. Quando oltre il piano direttore si ha una direttrice rettilinea, la superficie generata si chiama *Conoide*: si esclude il caso che anche l'altra direttrice sia rettilinea, poichè allora si ha il paraboloide; e delle superficie doppiamente rettilinee abbiamo già parlato. — I conoidi diconsi *retti*, quando la retta direttrice è perpendicolare al piano direttore; allora può dirsi, che la retta generatrice è costantemente perpendicolare ad una direttrice rettilinea; essa poi dovrà inoltre, o tagliare un'altra direttrice, o toccare una superficie curva, ec.

199. Prima di descrivere qualche particolare superficie rettilinea, diciamo di alcune proprietà a tutte comuni. Le superficie rettilinee non hanno lungo ogni loro generatrice un unico piano tangenziale, poichè questa proprietà spetta esclusivamente alle sviluppabili (§ 185); e nemmeno i piani tangenziali corrispondenti ai varii punti di una generatrice sono inviluppati (§ 187) da una superficie sviluppabile, poichè invece essi tutti comprendono questa generatrice. — Due superficie rettilinee possono toccarsi (cioè avere i piani tangenziali comuni) tutto lungo una loro generatrice comune; e perchè ciò avvenga, basta che le superficie si tocchino in tre punti di quella retta. Infatti sia (LMN) (Fig. 80) la generatrice di due superficie rettilinee, le quali si tocchino in tre punti (L) (M) (N); nei tre piani tangenziali comuni si tirino ad arbitrio le rette (LT), (MU), (NV); sia (L') un punto infinitamente vicino ad (L), sicchè esso possa considerarsi come appartenente ad ambedue le superficie che hanno la tangente (LT) comune; sia $(L'M'N')$ quell'unica retta, che passando pel punto (L') taglia le due (MU) (NV) (le quali non sieno situate in un medesimo piano); essa sarà la generatrice infinitamente vicina alla (LMN) tanto dell'una come dell'altra superficie: dunque queste hanno due generatrici infinitamente vicine comuni, e perciò anche nel punto qualunque (X) il loro piano tangenziale è comune, poichè esso comprende la (LM) ed il punto della $(L'N')$ infinitamente vicino ad (X).— La superficie doppiamente rettilinea che ha le tre direttrici

(LT) (MU) (NV) ha essa pure i tangenziali in tutti i punti della (LMN) comuni colle due proposte superficie; ed infinite di queste superficie doppiamente rettilinee si potranno avere mutando le rette (LT) (MU) (NV), purchè rimangano nei rispettivi piani tangenziali; è pur palese che le rette suddette possono condursi parallele ad un medesimo piano dato; dunque: *Per ogni superficie rettilinea vi sono infinite superficie doppiamente rettilinee, che la toccano tutto lungo una sua generatrice, e fra esse vi è anche un paraboloide col piano direttore parallelo ad un piano scelto ad arbitrio.* — Questo teorema ci gioverà per determinare il tangenziale ad una superficie rettilinea in un qualunque punto (X) conoscendone i tangenziali in (L) (M) (N); poichè dopo aver condotte le tre tangenti (LT) (MU) (NV) parallele ad un medesimo piano, la tangente in (X) del paraboloide rettilineo, che le comprende, si otterrà conducendo per (X) una retta parallela al suddetto piano, e che tagli una retta (TUV) la quale incontra tutte tre le (LT) (MU) (NV). — Che se invece sia dato un piano, che passi per la generatrice (LN), e si cerchi in qual punto esso tocca la data superficie, si determinerà come sopra la generatrice (TV) di un paraboloide, che tocchi la superficie tutto lungo la (LN), e se (Y) è l'intersezione di questa (TV) col piano dato, si condurrà (§. 182) la direttrice (YX) del suddetto paraboloide, ed (X) sarà il punto in cui il piano tocca la superficie.

200. *In qualunque superficie rettilinea tutte le normali condotte pei punti di una sua generatrice sono situate sopra un paraboloide rettilineo.* Infatti è intanto palese che la superficie comprendente le suddette normali è un conoide retto, il piano direttore essendo perpendicolare alla generatrice di cui si tratta; ora s'immagini che questa superficie compia un quarto di rotazione intorno alla generatrice (LMN) (Fig. 80), le normali diventeranno le tangenti (LT) (MU) (NV), ed il conoide in questa nuova posizione toccherà la superficie tutto lungo la (LN), dunque oltre la retta (LM) esso conterrà anche la generatrice infinitamente vicina $(LM'N')$, e perciò potrà esser generato da una retta (LT), che mantenendosi pa-

rallela ad un piano direttore si appoggia sulle due rette (LN) $(L'N')$: quindi esso sarà un paraboloide iperbolico.

Problema I. *Descrivere il cono-cuneo del Wallis.*

201. La superficie così denominata è un conoide retto, cioè generato da una retta che taglia perpendicolarmente una direttrice rettilinea, l'altra direttrice essendo un circolo, il cui piano è parallelo alla prima direttrice ed è perpendicolare al piano che passa per questa e pel centro del circolo. Se consideriamo dei piani perpendicolari alla direttrice, e che taglino il circolo direttore in due punti, avremo subito due posizioni della generatrice. — Si noti che le generatrici si estendono indefinitamente da ambedue i lati della direttrice, sicchè la superficie (alla maniera stessa delle superficie coniche) è costituita da due coni-cunei uguali che hanno la direttrice per ispigolo comune. Vedremo che le sezioni della superficie fatte da piani paralleli a quello del circolo direttore sono ellissi che hanno tutte un asse uguale. — I piani tangenziali del cono-cuneo possono determinarsi o direttamente mediante due tangenti (§ 172), oppure ricorrendo al teorema del § 199, e facendo vedere che il cono-cuneo è toccato tutto lungo una sua generatrice da un paraboloide, che ha per piani direttori quello perpendicolare alla direttrice e quello del circolo direttore.

202. *Disegno.* Il piano coordinato orizzontale sia perpendicolare alla direttrice; la figura sarebbe più semplice se il piano verticale fosse parallelo al circolo direttore, ma gli abbiamo data un'altra posizione acciocchè la projezione su di esso riuscisse più espressiva; sia (C, cd) (Fig. 81) la direttrice, ed $(AMBA_1)$ il circolo direttore, (ca) (db). (pm) le generatrici, che abbiamo terminate nei punti del circolo direttore, e che dall'altra parte della direttrice formano la traccia verticale della superficie. Per avere due generatrici si considera il piano che ha la traccia pm, e si trovano sulla AA_1 i punti corrispondenti ad mm_1; se non si voglia adoperare l'ellisse $ambA_1$ potrà servire la rappresentazione $a'm'b'$ del circolo obbiettivo, poscia prendere $AM = A_1M_1 = a'\mu'$. — È facile determinare le projezioni corrispondenti di un medesi-

mo punto della superficie, così se sia dato N il suo punto corrispondente n sarà situato sulla pm projezione verticale della generatrice projettata in CM. — Tutti i punti della retta HH_1 parallela alla AA_1 hanno le projezioni verticali corrispondenti che tagliano proporzionalmente le ca, pm, db, pm_1, ca_1, dunque la curva hnh_1, e perciò anche la sezione obbiettiva fatta dal piano verticale HH_1, è un'ellisse.

203. Il tangenziale nel punto (N) può determinarsi osservando che esso deve comprendere la generatrice (CM, pm) e la tangente alla sezione (HN): ora per la proprietà dell'ellisse questa tangente (NK, nu) si ottiene conducendo la tangente mt (oppure $m't'$), poscia tirando $sutt'$ parallela alla fondamentale, e tagliandola colla verticale Ku, ed il piano tangenziale sarà quello delle due rette (CM, pm), (RNK, rnu). — Si giunge alla stessa conclusione, partendo dal teorema generale del § 199, e servendosi del paraboloide, che ha — lo stesso piano direttore del conoide, — la stessa direttrice (cd), — ed inoltre la direttrice (QMB, qmt) tangente in (M) al circolo direttore; questo paraboloide tocca il conoide tutto lungo la (pm), ed ha le generatrici CQ, (CB, st); perciò sarà tangente al conoide in (N) la retta (RNK, rnu), che appartiene al paraboloide, perchè taglia proporzionalmente le sue generatrici. — Viceversa se sia dato un piano che passi per la generatrice (pm) ed abbia la traccia orizzontale LR, esso toccherà (§ 199) il cono-cuneo nel punto (N), che si determina tagliando la LR colla CQ dipendente come sopra dalla (pm), poscia tirando RN parallela alla AA_1.

Problema II. *Descrivere l'elicoide rettilineo, cioè non isviluppabile.*

204. La più semplice delle curve gobbe è l'elica descritta sopra un cilindro rotondo, essa può supporsi generata da due movimenti perpendicolari, l'uno circolare, l'altro rettilineo, e partecipa delle proprietà di queste linee: ha sempre ugual curvatura come il circolo, e sulla superficie del cilindro è la linea brevissima. L'elica genera immediatamente (§ 186) l'elicoide sviluppabile di cui abbiamo parlato, e serve da direttrice ad un elicoide rettilineo; questo è generato da una retta

che scorre sull'elica e taglia l'asse del cilindro con una costante inclinazione; se la generatrice è perpendicolare all'asse l'elicoide rettilineo cade nella classe dei conoidi retti, e si dirà elicoide *retto* (*helicoïde à plan directeur*). — La perfetta eguaglianza di tutte le parti dell'elica rende palese, che la generatrice nel mentre scorre con moto uniforme sull'elica, percorre uniformemente l'asse, e compie un giro, finchè la lunghezza percorsa sull'asse è uguale al passo dell'elica; si vede pure che tutti i punti della generatrice descrivono altre eliche di ugual passo. Le generatrici debbono prolungarsi indefinitamente anche oltre l'asse, ma noi descriveremo soltanto quella porzione che è compresa fra l'asse e l'elica. — Un paraboloide, che tocca l'elicoide tutto lungo una sua generatrice, avrà per direttrici l'asse dell'elicoide e la tangente dell'elica; se l'elicoide è retto le sue generatrici, e quindi anche quelle del paraboloide, saranno parallele al piano perpendicolare all'asse; perciò sarà facilissimo determinare una generatrice del paraboloide differente dalla generatrice, che esso ha comune coll'elicoide; altrimenti bisognerà ricorrere ad una terza direttrice che sia la tangente di una di quelle eliche descritte dai punti della generatrice, e col mezzo delle tre direttrici determinare una seconda generatrice del paraboloide.

205. *Disegno*. Il piano coordinato orizzontale sia perpendicolare all'asse dell'elicoide; il circolo AM_1A_4 (Fig. 82) sarà la projezione orizzontale dell'elica; la sua projezione verticale si otterrà dividendo in parti uguali la circonferenza AMB ed in altrettante parti dividendo il passo dell'elica, e prendendo i punti a m_1 ec. ognuno più alto del precedente di una di quelle parti. Fra le generatrici dell'elicoide quella, che ha la projezione OA parallela alla fondamentale, si determinerà facendo l'angolo opa eguale a quello, che le generatrici debbono formare coll'asse; e le successive generatrici (OM_1, p, m_1) ec. si avranno prendendo le pp_1 ec. uguali a quella stessa parte del passo dell'elica, di cui sopra abbiamo parlato. — Limitando l'elicoide fra l'elica e l'asse, il suo contorno apparente sarà costituito da porzioni dell'elica e da porzioni di curve, che sono gl'inviluppi delle projezioni p, m, ec. Se in

ciascuna di queste p, m, ec. si vorrà determinare il punto, in cui essa tocca il contorno apparente, bisognerà trovare (come insegneremo più sotto) il punto, in cui il piano tangenziale è perpendicolare al verticale. — La traccia della superficie sul piano orizzontale comincia nel punto N, dove tal piano è incontrato dall'elica; poscia siccome la generatrice nel ruotare si abbassa uniformemente, così essa incontrerà il piano orizzontale coi suoi punti sempre più vicini all'asse, e le distanze MV saranno proporzionali agli archi MN; dunque la traccia sul piano orizzontale è la spirale Archimedea NVO.

206. Per trovare i tangenziali, considereremo quelli che si riferiscono ai punti della generatrice (OA, pa); giacchè, per la eguaglianza di ogni parte della superficie, quanto si trova rispetto ad una generatrice si applica a tutte le altre. La tangente dell'elica nel punto (A) è la (AE, ae) determinata tirando AE perpendicolare ad OA ed uguale all'arco AN; dunque il piano tangenziale in (A) ha la traccia orizzontale ET, essendo T la traccia della generatrice (OA, pa): sia (X) il punto di mezzo della generatrice (pa), esso descriverà un'elica dello stesso passo di quella descritta da (A), e la cui circonferenza sarà la metà di prima, perciò sarà tangente a questa elica la (XY), essendo XY la metà della AE, ed $xy=ae$; ne viene che Y cade sulla OE, ed y sulla qe parallela alla pa. — Il paraboloide che tocca l'elicoide lungo la generatrice (OA, pa) ha le tre direttrici (AE) (XY) (O, pq), dunque una sua generatrice è la (OE, qe), che taglia le tre direttrici: ora per qualunque punto (X) della generatrice (OA, pa) avremo la direttrice del paraboloide (e perciò tangente dell'elicoide) tirando la retta (XY) che incontri la (OE, qe), e sia nello stesso tempo parallela al piano verticale AE a cui sono parallele le direttrici (AE), (O, pq). Sarebbe d'altronde facilissimo dimostrare direttamente, che la (XY) è tangente all'elica descritta dal punto (X), anche se X non è il mezzo della pm. Il tangenziale nel punto (X) comprende le due rette (OA, pa) (XY), e perciò la sua traccia orizzontale TZ si ottiene conducendo la (YZ, ye) parallela alla (OA, pa). — Viceversa se si domandi in qual punto della generatrice (OA, pa) l'elicoide

è toccato dal piano, che ha la traccia TZ; si tirerà AE perpendicolare ad OA ed uguale all'arco AN; e dal punto Z, in cui essa taglia la traccia TZ, si condurrà ZY parallela ad OA, che tagli la OE in Y, e YX parallela ad AE, e sarà X la projezione del punto cercato. Questo metodo, che viene attribuito a M. Gascheau, non consiste in altro, che in trovare l'intersezione del dato piano $(p)TZ$ colla generatrice (OE, qe) del paraboloide, che tocca l'elicoide lungo la generatrice (OA, pa): poscia tirare la direttrice (YX) del suddetto paraboloide. — Quando l'elicoide è retto le generatrici del paraboloide, che lo tocca lungo la (pa), sono orizzontali; ed una di esse è la (OE, oe), allora il tangenziale in (X) ha la traccia orizzontale YZ.

207. *Descrizione di una vite*. Come applicazione del presente problema si potrà descrivere una vite; questa è costituita da un risalto ravvolto a guisa d'elica intorno ad un cilindro formante quelli, che propriamente si dicono i *pani* (*filets*) della vite. Quando il risalto è rettangolare bisognerà descrivere le quattro eliche di ugual passo $am_1 \ldots$, $a'm_1' \ldots$, $cn_1 \ldots$, $c'n_1' \ldots$ (Fig. 83) generate dai vertici del rettangolo $(ACCA, acc'a')$ che si mantiene sempre in uno stesso piano coll'asse; poscia le facce del risalto generate dai lati orizzontali ac $a'c'$ saranno porzioni di elicoidi retti, e la faccia generata da aa' sarà una porzione di cilindro. — Non sarà molto più difficile descrivere la vite quando il risalto è generato da un triangolo isoscele, di cui la base poggiata sulla superficie è uguale al passo delle eliche descritte da tutti i punti del triangolo. — Potrà pur servire d'esercizio la descrizione dell'erta di una scala a chiocciola.

208. Non sarà inutile notare, che due eliche potrebbero essere uguali in ogni loro parte, senza che una potesse giammai combaciare coll'altra. Tale circostanza può sempre accadere tra due figure a tre dimensioni (purchè ciascuna non sia formata di due parti eguali in guisa d'essere simmetrica rispetto ad un piano che la dimezza); parmi che tali figure possano dirsi uguali, ma l'una *rovescia* rispetto all'altra; alcuni le dicono uguali *per simmetria*, o, meno esattamente, *simme-*

triche. — Un'elica, i pani di una vite, una chiocciola, ec. possono ravvolgersi in due sensi opposti, costituendo così due figure *uguali-rovescie*. Suole chiamarsi spira *dritta* quella che ascende nel senso $AM_1B_2M_3$ (Fig. 83), e spira *rovescia* quella che girando in quel senso discende. Le viti sono quasi tutte a spira dritta; se fossero a spira rovescia, ne riuscirebbe incomodo l'uso a chi è già abituato alle prime: anche le scale volgono il più spesso a spira dritta. Quando più fili debbono riunirsi a formare una funicella, e più funicelle una fune; se i fili si torcono a spira dritta, le funicelle deggiono torcersi a spira rovescia, e la fune a spira dritta. — Le figure piane quando sono uguali, sono sempre combaciabili; nulladimeno se stieno in uno stesso piano o in piani paralleli, si diranno *rovescie* quelle, che non potrebbero combaciare l'una sull'altra, se non se rovesciandone una.

209. Due generatrici di una superficie rettilinea hanno una minima distanza, che è (§ 60) perpendicolare ad entrambe; se immaginiamo che esse indefinitamente si vadano accostando, i punti di loro minima distanza si avvicineranno sempre più a certi punti limiti, che su ciascuna generatrice saranno quelli di minima distanza delle generatrici infinitamente vicine: tutti i punti così definiti costituiscono una linea di *stringimento* (*Einziehungslinie*) di quel sistema di generatrici; essa è la linea più breve, che possa tagliarle tutte. — Considerando che le rette di minima distanza sono perpendicolari alle generatrici, e che quando esse divengono evanescenti, si confondono coi punti della linea di stringimento, potrebbe credersi che questa linea tagli perpendicolarmente tutte le generatrici: gravissimo errore, che ci è di avvertimento con quanta cautela debba procedersi nei ragionamenti poggiati agli infinitesimi considerati come evanescenti. Nell'iperboloide ad una falda (Fig. 65, 73) la linea di stringimento è la minima ellisse appartenente alla superficie, ed essa non è per certo perpendicolare alle generatrici rettilinee. I due sistemi di generatrici rettilinee del paraboloide iperbolico hanno due differenti linee di stringimento, che sono due parabole, le quali nel caso del § 157 si riducono alle due genera-

trici perpendicolari all'asse. Nell'elicoide rettilineo la linea di stringimento delle generatrici è l'asse, il quale le taglia perpendicolarmente nel solo caso che l'elicoide sia retto.

210. Possiamo dimostrare nel seguente modo che l'asse è veramente la linea di stringimento dell'elicoide rettilineo. Sieno (OA, pa) (OM, qm) (Fig. 84) due generatrici di ugual lunghezza ed ugualmente inclinate all'asse (O, opq); per trovarne la minima distanza (RS), esse si projettino sul piano Aaq_1 perpendicolare alla prima di esse, sicchè la projezione di questa si riduca al punto A, e la seconda si projetti nella (Q_1M_1); l'altezza del punto (M) sopra di (A) sarà eguale a $pq=ag$; condotta la (AS_1) perpendicolare alla (Q_1M_1) ne dedurremo (§ 84) la minima distanza (RS). Ora se l'arco AM sia infinitesimo del primo ordine, tali saranno pure AF pq aq_1 AQ_1, e sarà infinitesima del secondo ordine la $MF=mg$, e quindi anche la sua projezione m_1q_1, ossia la differenza $(AQ_1)-(FM_1)$; perciò, quando le due generatrici indefinitamente si avvicinano, il punto (S_1) ha per limite (Q_1), e i punti di minima distanza delle generatrici infinitesime sono sull'asse.

211. Suol dirsi che nelle superficie sviluppabili due generatrici infinitamente vicine sono in uno stesso piano, ma ciò è inesatto; deve intendersi (purchè non si tratti delle superficie cilindriche) che allo avvicinarsi di due caratteristiche la loro minima distanza diventa infinitesima di ordine superiore all'infinitesima distanza di un punto qualunque di una generatrice dall'altra: ordinariamente quella distanza è (rispetto a questa) infinitesima del terzo ordine. — La linea di stringimento delle superficie sviluppabili è la loro linea di regresso, la quale è tangente a tutte le caratteristiche.

CAP. VI.

Di alcune altre superficie.

212. Fra le superficie nè sviluppabili, nè rettilinee noi abbiamo già insegnato a descrivere la sfera, le superficie rotonde, e le superficie del secondo ordine; infinite altre se ne possono immaginare; ne indicheremo due classi: — 1.ª Superficie che sono l'inviluppo di una serie di sfere; esse hanno per generatrici caratteristiche (§ 188) quei circoli, che sono intersezioni di due sfere infinitamente vicine, e nello stesso tempo linee di contatto delle sfere colla superficie inviluppo. — 2.ª Superficie costituite da direttrici tutte fra loro parallele, cioè che hanno i piani normali comuni e le loro distanze, misurate nei suddetti piani, costanti: tali superficie, che si dicono *superficie-canali*, hanno quindi una serie di generatrici piane tutte fra loro uguali e perpendicolari alle direttrici. — Le superficie rotonde appartengono nello stesso tempo ad ambedue queste classi, perchè esse sono l'inviluppo di sfere disuguali aventi i centri sull'asse, e d'altra parte perchè sono costituite da circoli paralleli tagliati perpendicolarmente da tutte le linee meridiane uguali, sicchè, sotto questo punto di vista, i circoli sono le direttrici tra loro parallele, e le linee meridiane sono le generatrici. — Appartengono ad ambedue le classi anche le superficie inviluppi di sfere uguali; infatti la caratteristica è sulla sfera mobile il circolo massimo perpendicolare alla direttrice percorsa dal centro della sfera, e tutti i punti di tal circolo descrivono delle curve parallele alla direttrice. Tali superficie da alcuni sono dette *surfaces-canaux*, noi le chiameremo *superficie-tubi* (*roehren formige Flaeche*), poichè il nome di *superficie-canali* spetta naturalmente a tutte quelle della predetta seconda classe: Ora descriveremo una di queste superficie-tubi, che è nello stesso tempo superficie rotonda.

Problema. *Descrivere una superficie anulare, ed un toro.*

213. La superficie rotonda generata dalla rotazione di un circolo intorno ad un asse posto nel suo piano forma, nel più dei casi, un anello; noi la diremo perciò superficie *anulare*: la sua parte esterna generata da mezza circonferenza costituisce quella parte architettonica che si denomina *toro*. Questa superficie ha due caratteristiche circolari: i meridiani ed i paralleli. Per descriverne il contorno apparente sopra un piano qualunque, bisognerà rammentare come si determinino i tangenziali delle superficie rotonde (§ 178) adoperando le normali della linea meridiana; per tal maniera si troveranno i tangenziali che riescono perpendicolari al piano, e l'inviluppo delle loro tracce sarà il desiderato contorno apparente.

214. *Disegno.* La superficie debba projettarsi sopra il piano orizzontale comunque inclinato all'asse della superficie; si prenderà il coordinato verticale parallelo all'asse (AQ) (Fig. 85). S'intende di per sè come si determinino i punti E E_1 F F_1 che cadono sulla projezione dell'asse e che appartengono al contorno apparente; così pure si determineranno i punti B B_1 D D_1 considerando che essi sono le projezioni del diametro equatoriale $b'd'a$, quando ruotando diventa orizzontale. All'uopo di trovar gli altri punti del contorno apparente, per ciascun punto x' del circolo $eb'y'$ si tiri il raggio cx' che incontri l'asse in n; in tutti i punti del circolo parallelo descritto da x' la superficie avrà la normale, che passerà pel punto (n, N), e sarà uguale alla nx'; quando questa normale è orizzontale, il corrispondente tangenziale è uno di quelli che toccano il contorno apparente; ora il predetto circolo parallelo ha la projezione $z'xx'$, e la normale, quando diviene orizzontale, si projetta nella nx parallela alla fondamentale, e nella NX uguale alla nx'; così si determinano i due punti (X) (X_1) che hanno i tangenziali verticali, e le cui tracce sono tangenti in X X_1 al contorno apparente ed anche al circolo descritto col centro N: similmente il punto y', tagliata la yY_1Y col centro N ed un raggio eguale ad ny', ci dà (sulle stesse rette NX) due punti e due tangenti del contorno apparente interno. Si noti che BB' dimezza i due contorni apparenti esterno ed interno. — Se si

vogliono i punti della superficie che hanno la projezione verticale z, si tireranno zz' perpendicolare all'asse aq, zq parallela, e zZ perpendicolare alla fondamentale, e si farà $QZ=qz'$: così (QZ) sarà la retta rappresentata in qz'. In questo modo fu descritta la traccia orizzontale della superficie.

Nota al Libro II.

Oltre descrivere le figure geometriche importa molto spesso determinarne le grandezze: le lunghezze delle linee possono ottenersi graficamente con bastante approssimazione (§ 126); non così le aree ed i volumi; qui daremo alcuni principii per determinarli (*).

Teorema I. *Due corpi sieno tali, che, tagliandoli con un qualsivoglia piano parallelo ad uno dato* (per esempio orizzontale), *le due sezioni abbiano eguali aree, dico che i volumi dei due corpi saranno pur essi uguali.* Supponiamo da prima che due sezioni sieno non solamente equivalenti (cioè di ugual area) ma ancora eguali, e che l'una sia posta a combaciare sull'altra; dopo ciò se consideriamo le porzioncelle dei due corpi che stanno fra due piani orizzontali vicinissimi, vedremo che in esse vi è una parte comune ad ambedue, ed alcune parti esclusivamente appartenenti all'uno o all'altro dei due corpi: e noi potremo col pensiero tanto avvicinare i due piani paralleli, che il rapporto di queste ultime parti alla parte comune divenga piccolo oltre ogni misura; e così avremo dimostrato impossibile che il rapporto dei due volumi compresi tra quei piani vicinissimi differisca dall'unità di una frazione quanto mai piccola si voglia. — Ora per ogni sottilissimo

(*) In una Memoria inserita nel Tomo IV. degli Annali delle scienze del Regno L. V. 1834, pubblicai due Teoremi generali, da cui si deduce l'area di un poligono o il volume di un poliedro, solo che si conoscano le distanze di tutti i suoi vertici tra di loro, oppure dai vertici di un poligono o di un poliedro conosciuto. Gli stessi Teoremi furono poscia pubblicati dallo Staudt nel Journal für die Mathematik. B. XXIV. 1842, S. 252.

strato dei due corpi possiamo formare nelle due sezioni equivalenti un ugual numero di figure tra loro rispettivamente eguali, e a ciascuna loro coppia riferire il precedente ragionamento. Rendendosi così palese, che i rapporti dei volumi di due strati corrispondenti non possono differire dall'unità di niuna benchè menoma frazione, ne verrà di conseguenza che essi, non meno che le loro somme, cioè i volumi dei due corpi, sono uguali.

Se tutte le sezioni orizzontali di un corpo sono tra loro equivalenti, il suo volume sarà dunque eguale a quello del parallelepipedo rettangolo di base equivalente e di ugual altezza; e, ammesse le solite convenzioni della Geometria, tal volume sarà espresso dal prodotto dell'area della base per l'altezza, cioè per la distanza dei due piani orizzontali che limitano il corpo.

Abbiasi in secondo luogo un corpo, la cui sezione orizzontale infima sia nulla, e le altre sezioni vadano crescendo proporzionatamente alla loro altezza, cioè alla loro distanza da quella prima. Ce ne offre esempio un prisma triangolare, che poggi un suo spigolo sul piano orizzontale, a cui sia parallela la faccia parallelogramma opposta a quello spigolo. *Il volume di tal corpo sarà eguale alla metà del prodotto della base superiore per l'altezza.* Infatti, se immaginiamo tagliato il corpo da $n-1$ piani orizzontali equidistanti, le basi dei singoli strati avranno le aree 0, ω; ω, 2ω; 2ω, 3ω; .... $(n-1)\omega$, $n\omega$ (essendo $b=n\omega$ l'area della base superiore del corpo) e le loro altezze, indicata con h l'altezza del corpo, saranno $=h:n$. Per ciascuno strato potremo immaginare due prismi di egual altezza, che abbiano rispettivamente per basi le due basi dello strato, e dei quali uno sia per conseguenza minore, l'altro maggiore dello strato stesso. Perciò sommando tutti questi prismi vedremo che il volume del corpo è per certo maggiore di

$$[0+\omega+2\omega\ldots+(n-1)\omega]h:n=(n-1)h\omega:2$$

e minore di

$$[\omega+2\omega+3\omega\ldots+n\omega]h:n=(n+1)h\omega:2.$$

Potendosi col pensiero indefinitamente accrescere il numero n,

vedremo che questi due confini $(b-b:n)h:2$ $(b+b:n)h:2$ possono indefinitamente avvicinarsi al loro comune limite $bh:2$, che esprimerà, come dicemmo, il volume del corpo.

Consideriamo in terzo luogo un corpo, le cui sezioni orizzontali sieno proporzionali ai quadrati delle altezze. Ne abbiamo l'esempio in una piramide col vertice nel piano, da cui si contano le altezze, e la base superiore orizzontale. *Il suo volume sarà uguale al prodotto della base per la terza parte dell'altezza.* Infatti dividendo l'altezza h in n parti uguali, le aree delle sezioni, posta $n^2\omega=b$ quella della base superiore, saranno ω, 4ω, 9ω, ec.; e vedremo come precedentemente che il volume del corpo è il limite a cui tende la quantità.

$$(\omega+4\omega+9\omega\ldots+n^2\omega)h:n=bh:3+bh:2n+bh:6n^2$$

all' indefinito aumentare di n, sicchè svaniranno i termini, che lo hanno per divisore.

Se in quarto luogo le sezioni orizzontali del corpo procederanno proporzionalmente alle terze potenze dell'altezza, *il suo volume sarà uguale al prodotto della base per la quarta parte dell'altezza*. Sia $b=n^3\omega$ la base superiore, e ω, 8ω. 27ω ec. le aree delle sezioni; vedremo col solito ragionamento, che il volume del corpo è il limite di

$$(\omega+8\omega+27\omega\ldots+n^3\omega)h:n=bh:4+bh:2n+bh:4n^2,$$

cioè $bh:4$.

Non è meraviglia che i quattro corpi ora considerati abbiano i volumi sempre minori bh, $bh:2$, $bh:3$, $bh:4$, poichè mentre il primo ha dall'alto al basso eguali sezioni, gli altri si ristringono ciascuno più rapidamente del precedente. — Possiamo dire sezione media quella, che moltiplicata per l'altezza h darebbe il volume; essa è nei predetti corpi b, $b:2$, $b:3$, $b:4$. Cerchiamo di determinarla conoscendo oltre le due basi anche la sezione, che è parallela ed equidistante da esse, e che noi diremo la sezione *mediana*; questa ha nei predetti corpi l'area b, $b:2$, $b:4$, $b:8$. Si scorge che pei tre ultimi il quadruplo della sezione *mediana* più la base superiore b eguaglia appunto il sestuplo della sezione media: ed otterremo lo stesso risultamento anche nel primo corpo se al quadruplo della sezione *mediana* somme-

remo oltre la base superiore anche la base inferiore, che in quel corpo è $=b$, mentre negli altri corpi è nulla. — Lo stesso valerà per un corpo che risulti da qualsiasi unione di parti comprese tra gli stessi piani paralleli, e che sieno nell' uno o nell'altro dei quattro casi superiormente considerati; per tal maniera giungeremo al

Teorema II. *Un volume compreso tra due piani paralleli, che supponiamo orizzontali, nel quale l'area di ciascuna sezione orizzontale dipenda dalla sua altezza mediante una funzione algebraica razionale intera di grado non superiore al terzo, sarà dato dalla sesta parte del prodotto dell'altezza per la somma delle due basi e del quadruplo della sezione* mediana.

Questo importantissimo teorema dovuto al Torricelli serve anche per determinare approssimatamente i volumi compresi tra piani paralleli, le cui sezioni non sieno esattamente soggette alla predetta legge: suddividendo il volume in molti strati, e ad ognuno di essi applicando il teorema predetto, si perviene alla nota formula del Simpson.

Corollarii. 1.° Il volume di un tronco di piramide o più generalmente di un corpo, che ha per basi due poligoni $ABCD$ $abcd$ coi lati rispettivamente paralleli, ed è perciò chiuso tutto intorno da trapezii $ABba$ $BCcb$ ec., si otterrà conoscendo i lati e gli angoli delle basi, poichè i lati della sezione *mediana* saranno le semisomme dei lati corrispondenti delle due basi e gli angoli ne saranno uguali. — Nel caso del tronco di piramide, le cui basi simili $ABCD\ldots$ $abcd\ldots$ abbiano le aree a b, la sezione mediana sarà pur essa simile ed avrà i lati proporzionali alla media aritmetica $(\sqrt{a}+\sqrt{b}):2$, perciò il quadruplo della sua area sarà $a+b+2\sqrt{ab}$; quindi *il volume del tronco di piramide è espresso dal prodotto della terza parte dell'altezza per la somma delle basi e della loro media proporzionale.*

Esempii. L'*esaedro* che ha l'altezza 0,046 0 e le due basi rettangole coi lati 0,300 0,400, e 0,080 0 0,100 0 (*)

(*) Posi tutti questi zeri per indicare che quelle dimensioni sono esatte fino all'ultima decimale: altrimenti sarebbe stato inutile calcolare il volume con quattro cifre significative. Nell'esempio seguente supposi

ha la sezione *mediana* rettangola coi lati 0,19 0,25 ed il volume 0,002 438. — La piramide, che ha l'altezza 10 e per base un trapezio coi lati paralleli 9 20 e i due lati non paralleli 7 8, ha il volume 245,432. — Il tronco di cono, che ha per basi due circoli coi raggi 0,007 000 0,003 600 e l'altezza 0,010 000, ha il volume 0,000 000 912 74.

2.° Un tronco di prisma triangolare può ridursi al precedente corollario prendendone per base il trapezio $ABCD$, sicchè la base superiore si riduca al solo spigolo ab parallelo ai due AB DC. In particolare: *Il volume del tronco di prisma triangolare $ABCDab$, che ha la faccia $ABCD$ rettangola e gli spigoli paralleli AB DC ab, sarà espresso dal prodotto del sesto dell'altezza per*

$$AB.BC+(AB+ab)BC=(2AB+ab)BC.$$

Esempio. $AB=2,70$, $BC=0,85$, $ab=1,90$, altezza $=0,50$; il volume è $=0,517$.

3.° Un volume compreso tra due piani paralleli ed una superficie del secondo ordine può determinarsi mediante il teorema Torricelliano; essendochè le sezioni parallele di tal superficie sono simili, ed i quadrati dei loro diametri omologhi sono funzioni del secondo grado delle loro distanze dal centro. — In particolare il volume di un intero ellissoide si otterrà considerandone per sezione mediana l'ellisse diametrale principale, che, avendo i semiassi a b ed essendo affine al circolo, ha l'area πab; le due basi sono i piani, che toccano l'ellissoide nei vertici, ed hanno tra loro la distanza $2c$; così: *Il volume dell'ellissoide, che ha i semiassi a b c, è $\frac{4}{3}\pi abc$.— Il volume della sfera eguaglia il cubo del raggio moltiplicato per $\frac{4}{3}\pi$.*

Esempio. La sfera di raggio 6366 ha il volume 1 080 650 000 000.

4. Il teorema II. si applica al corpo definito nel corollario 1.° anche se una sua faccia $ABba$, anzichè esser piana, sia costituita da un paraboloide rettilineo, di cui Aa Bb sieno

che le dimensioni fossero espresse esattamente da numeri interi: in tal caso ipotetico si può protrarre il calcolo decimale a qualsivoglia approssimazione.

due direttrici, e le generatrici AB ab ec. sieno tutte orizzontali. Infatti considerando la porzione di volume limitata da quel paraboloide, dai trapezii $BCcb$ $CAac$, e dai triangoli ABC abc, vedremo che ogni sua sezione orizzontale sarà un triangolo con un angolo $=ACB=acb$, e i due lati, che lo comprendono, rispettivamente proporzionali alle distanze del piano della sezione dai due punti d'incontro della retta Cc colle Aa Bb; sicchè l'area di tal sezione sarà una funzione del secondo grado dell'altezza.

Passiamo a cercare i volumi dei corpi chiusi tra due piani non paralleli. Sopra una figura $ABCDE$ immaginiamo elevato un prisma retto, che sia tagliato obbliquamente da un piano $abcde$: è chiaro che il suo volume sarà uguale alla base $ABCDE$ moltiplicata per una certa altezza media fra le perpendicolari Aa Bb ec. Dimostreremo che tale altezza media è la lunghezza della perpendicolare Gg elevata nel centro di gravità G dell'area $ABC...$, e terminata nel centro di gravità g della $abc...$

Dati alquanti punti M N P Q, dicesi *centro di gravità*, o *centro delle medie distanze*, o più speditamente *baricentro*, un punto G tale che possa formarsi un poligono chiuso, i cui lati sieno equipollenti (cioè uguali, paralleli e diretti per lo stesso verso) alle rette GM GN GP GQ. Perlochè se queste si projettino sopra una qualunque retta OX, la somma *algebraica* delle loro projezioni sarà nulla; vale a dire la somma di quelle, che si dirigono in un verso sarà uguale alla somma di quelle, che si volgono oppostamente. Ne viene che se, scelto ad arbitrio un punto O, si formi un poligono coi lati equipollenti alle rette OM ON OP OQ, occorrerà per chiuderlo un altro lato equipollente a tante volte la retta OG quanti sono i punti M N P Q; e la somma *algebraica* delle projezioni di queste OM ec. sarà eguale a tante volte la projezione della OG quanti sono i punti: queste projezioni sono anche le distanze dei punti da un piano condotto per O perpendicolarmente alla OX.

Ciò posto: immaginiamo che tutta l'area $ABCDE$ sia separata in piccolissime porzioncelle di uguali aree, i prismetti

che su di esse si elevano, e sono tagliati superiormente dal piano *abcde*, avranno i volumi eguali a quella piccolissima area moltiplicata per le altezze, le quali sono proporzionali alle distanze delle basi da un piano passante per l'intersezione dei piani *ABCDE abcde*; perciò la somma di tali volumi sarà uguale alla base *ABCDE* moltiplicata per l'altezza *Gg* corrispondente al *baricentro G* della base.

Se il tronco di prisma *ABCDdabc* fosse obbliquo, il suo volume sarebbe uguale alla base *ABCD* moltiplicata, non per la retta *Gg*, che unisce i centri di gravità delle aree *ABCD abcd*, bensì per la distanza di *g* dal piano *ABCD*; ed anche uguale all'area *abcd* moltiplicata per la distanza di *G* dal suo piano. Infatti i volumi dei prismetti obbliqui si hanno moltiplicando le basi (tutte uguali) per le altezze, che sono le distanze dei punti del piano *abcd* dalla base *ABCD*, e la cui media aritmetica si riconosce come sopra essere l'altezza del baricentro *g*.

Il baricentro di tre punti *A B C* si trova in *G* al terzo della diagonale *AD* del parallelogrammo *ABDC*; poichè (scelto il punto *A* a far l'ufficio di quel punto *O* di cui parlammo nella definizione del baricentro) il lato *BD* è equipollente alla retta *AC*, ed il lato *AD* che compie il poligono chiuso *ABD* deve essere equipollente a tante volte la *AG* quanti sono i punti *A B C*. — Lo stesso punto *G* è anche il baricentro dell'area *ABC*; infatti se questa si spartisca in infinitesime porzioncelle uguali, potremo col pensiero combinarle a due a due, per guisa che la retta, che le unisce, sia parallela alla *BC*, e resti dimezzata dalla retta *AD*, ed a ciascheduno di questi ambi di porzioncelle applicando il precedente ragionamento vedremo che il centro di gravità sta sulla *AD*, che dimezza il lato *BC*; e per la stessa ragione starà in ciascuna retta condotta da un vertice al mezzo del lato opposto, sulla quale è pure situato il centro di gravità dei tre vertici. — Viene da ciò che: *Il volume di un tronco di prisma triangolare ABCcab è espresso dalla base ABC moltiplicata per la media aritmetica delle altezze dei punti a b c*. Questa conseguenza non potrebbe estendersi agli altri tronchi di prisma.

Teorema III. *Se un corpo sia tagliato da una serie di piani in un numero infinito di strati tra loro distinti, e ciascheduno di grossezza infinitesima, in guisa che i centri di gravità delle aree di queste sezioni sieno posti sopra una curva che tagli perpendicolarmente tutti i piani delle sezioni, il suo volume sarà uguale a quello di altro corpo, che abbia altrettante sezioni parallele rispettivamente equivalenti alle predette sezioni, e le cui distanze sieno uguali agli archetti della predetta curva dei baricentri.* — Ciò risulta dall'uguaglianza dei singoli strati infinitesimi dei due corpi. — Il caso particolare, che tutte le sezioni sieno equivalenti, è conosciuto sotto il nome di teorema del Guldino.

Se la linea che comprende i baricentri delle sezioni non fosse perpendicolare ai loro piani, bisognerebbe sostituire a ciascun elemento di tal curva la sua projezione sopra una perpendicolare alle due sezioni infinitamente vicine. Ciò avviene, per esempio, nel risalto della vite (§ 207) generato da un rettangolo, il cui centro di gravità descrive un'elica, che è sempre ugualmente inclinata al piano del rettangolo: per avere il volume di una porzione di questo risalto basterà moltiplicare l'area del rettangolo per l'arco di circolo projezione della predetta elica sopra un piano perpendicolare a tutti i rettangoli generatori.

Corollario. Il volume chiuso da una porzione di superficie-canale (§ 212) *e dai piani di due generatrici è uguale (purchè le generatrici non si tàglino) al prodotto dell'area compresa in una generatrice per la lunghezza della direttrice, che passa pei baricentri.* — In particolare il volume di una superficie rotonda è uguale al prodotto dell'area della metà di un suo meridiano posta tutta da un lato dell'asse di rotazione, per la circonferenza descritta dal centro di gravità di tal mezzo meridiano. — Il volume di un anello (§ 213) generato dalla rotazione di un circolo di raggio r ruotando intorno ad un asse, che ha dal centro la distanza d (non minore di r), è $2\pi^2 r^2 d$.

Considerando l'ellissoide rotondo (di cui già trovammo il volume $= \frac{4}{3}\pi a b^2$) come prodotto dalla rotazione di mezza

ellisse, se ne deduce che il baricentro di questa ha dal suo asse $2a$ la distanza eguale al doppio dell'asse $2b$ diviso pel triplo del rapporto π della circonferenza al diametro.

Il teorema III. si estende con ugual facilità alle figure piane, cioè:-

Teorema IV. *L'area di una figura piana costituita dal complesso di un sistema di rette limitate* (Fig. 86 *a*) *le quali non si tagliano, è uguale all'area di altra figura costituita da rette rispetticamente uguali a quelle, tutte fra loro parallele* (Fig. 86 *b*), *e le cui distanze uguagliano gli archetti infinitesimi della curva, che passa pei punti di mezzo delle prime rette, moltiplicati pei seni delle loro inclinazioni sulle stesse generatrici.* Lo stesso può dirsi delle figure poste sopra una superficie sviluppabile.

Se la lunghezza di ciascuna MN è funzione algebraica razionale intera non oltrepassante il grado terzo della sua distanza OP, potremo applicare il teorema del Torricelli, e l'*area della figura* 86 *b sarà la sesta parte del prodotto dell'altezza* OQ *per la somma delle basi* AB CD *e del quadruplo della sezione mediana* EF.

Corollarii. 1.° Questa conclusione ha luogo in particolare se le due curve AEC BFD sieno due parabole coi diametri paralleli alla AB. Così *l'area di un segmento parabolico* $AECFA$ (Fig. 87) *eguaglia i due terzi del parallelogrammo circoscritto* ACC_1A_1. — Un arco di circolo può senza grave errore scambiarsi con un arco di parabola, perciò l'area del segmento circolare è all'incirca eguale ai due terzi del prodotto della corda $AC=c$ per la freccia $EF=f$ (che in tal caso è la perpendicolare elevata nel mezzo della corda); peraltro il segmento circolare supera il parabolico di circa $8f^3:15c$. — Così pel segmento circolare, il cui arco è di 60.° la corda $c=1$, e la freccia $f=0,133\ 975$, si avrebbe approssimatamente l'area $0,089\ 317$; la predetta correzione, pur essa approssimata, sarebbe $8f^3:15c=0,001\ 283$; il valore esatto è $0,090\ 586$.

2.° Se sulle tangenti MN di una curva (Fig. 51) si prendono delle lunghezze uguali $M_1N_1=M_2N_2=$ ec. l'area com-

presa tra le due curve $M_1M_2M_3$ $N_1N_2N_3$ e due tangenti M_1N_1 M_3N_3 è uguale al prodotto della M_1N_1 per la lunghezza dell'arco circolare, che ha il raggio metà della M_1N_1, e che misura un angolo uguale all'inclinazione delle estreme M_1N_1 M_3N_3.

3.° Considerando tutte le tangenti AE M_1X_1 (Fig. 79 *a*) ad un circolo, che sono uguali agli archi $_1MA$ $_1MAM_1$ ed i cui estremi costituiscono perciò la sviluppante (§ 126), si riconosce che le distanze tra i punti di mezzo di due tangenti infinitamente vicine uguagliano rispettivamente le distanze tra le uguali ordinate di una parabola, che ha il parametro quadruplo del raggio OA; quindi pel corollario 1.° si trova che *lo spazio compreso tra il circolo, la sua sviluppante* $_1MEX_1$, *e la tangente* M_1X_1 *è espresso dal cubo di questa tangente diviso pel sestuplo del raggio* OA.

In questa teoria così detta *centrobarica* è pure molto utile il

Teorema V. *L'area generata da una linea piana, la quale si muove descrivendo con tutti i suoi punti delle linee perpendicolari al suo piano, uguaglia il prodotto della lunghezza della generatrice e della linea descritta dal suo baricentro.* La predetta generazione è appunto quella delle superficie-canali (§ 212).

Corollarii. 1.° La porzione di superficie conica generata dalla rotazione intorno all'asse CA della retta TU (Fig. 88), che nel suo *punto di mezzo tocca il circolo di raggio* $CR=CB$ *è equivalente alla porzione di superficie cilindrica generata dalla rotazione della* VW, *che è la projezione della* TU *sulla tangente* BV *parallela all'asse di rotazione* CA. Poichè le lunghezze di quelle rette sono inversamente proporzionali alle circonferenze descritte dai loro baricentri ruotando intorno all'asse CA.

2.° Potendosi dire di ogni porzione infinitesima dell'arco MN quello che si disse della tangente TU, ne viene che *la zona descritta dall'arco circolare* MN *ruotando intorno all'asse* CA equivale in area al cilindro descritto dalla PQ, ed *è espressa dal prodotto dell'altezza* PQ *della zona per la cir-*

conferenza del circolo di raggio CA. Perciò il teorema c'insegna, che la distanza del centro di gravità dell'arco MN dal raggio CA è uguale al prodotto $PQ.CA$ diviso per l'arco MN, e che quindi la sua distanza dal centro C è quarta proporzionale all'arco, alla corda ed al raggio (*). Le analoghe distanze del centro di gravità del settore circolare CMN sono i due terzi delle predette:

In particolare *la superficie della sfera* è equivalente a quella della superficie cilindrica generata dalla rotazione della DD_1; quindi *equivale all'area di quattro suoi circoli massimi*. — Così la sfera di raggio 6366 ha la superficie 509 260 000.

3.° Il volume generato dalla rotazione del settore circolare CMN può ottenersi mediante il teorema III. (avendo ora trovato il baricentro di un arco di circolo, e quindi anche di un settore circolare), oppure osservando che esso uguaglia il prodotto della zona generata dall'arco MN pel terzo del raggio, quindi tal volume è i due terzi del prodotto di PQ per l'area del circolo di raggio CA. — Per lo stesso teorema III. il triangolo CMN genera ruotando intorno a CA un volume eguale al prodotto dell'area del triangolo per la circonferenza descritta dal suo centro di gravità, ossia pei due terzi della circonferenza descritta dal punto E; e siccome $eE = CE.PQ : MN$, così tal volume uguaglia eziandio i due terzi del prodotto della PQ per l'area del circolo che ha

(*) Per dimostrarlo direttamente cerchiamo da prima il baricentro di una porzione di poligono regolare $MJKL... N$ (Fig. 89), sieno A B... i baricentri dei singoli lati; la OG sarà equipollente alla composta

$$OA + OB + OC + ... + OT$$

divisa pel numero n di queste rette; e siccome pel metodo delle equipollenze è $OC \underline{\Omega} (OB)^2 : OA$, $OD \underline{\Omega} (OB)^3 : (OA)^2$, $OT \underline{\Omega} (OB)^{n-1} : (OA)^{n-2}$, così posto $OU \underline{\Omega} (OB)^n : (OA)^{n-1}$ sarà $n.OG \underline{\Omega} OA(OU - OA) : (OB - OA)$

cioè $OG \underline{\Omega} OA.AU : AV$,

essendo $AV \underline{\Omega} n.AB$ una retta prolungazione della AB ed uguale alla somma della AB, BC,..., TU. — Se invece di un poligono si ha un arco circolare MN, il suo baricentro è l'estremo della OG perpendicolare alla corda MN (come la AV lo è alla OA) ed uguale al prodotto della corda pel raggio diviso per l'arco.

il raggio CE. — Sottraendo il volume generato dal triangolo da quello generato dal settore si trova che *il volume generato dal segmento circolare $MENM$ eguaglia i due terzi del prodotto della projezione PQ per l'area del circolo, che ha per diametro la corda MN.*

Pel teorema Torricelliano il tronco di cono generato dalla rotazione del trapezio $pMENq$ ha il volume

$$\tfrac{1}{6}\pi\left[(Mp)^2+(Nq)^2+4(Ee)^2\right].PQ,$$

quindi si trova con facile calcolo che *il segmento sferico* generato dalla rotazione di $pMNq$ è espresso da

$$\tfrac{1}{6}\pi\left[(Mp)^2+(Nq)^2+4(Ee)^2+4(EM)^2\right].PQ=$$
$$=\tfrac{1}{6}\pi\left[3(Mp)^2+3(Nq)^2+(pq)^2\right].pq,$$

ed *equivale alla sfera, che ha per diametro l'altezza pq del segmento, più la semisomma di due cilindri, che hanno la stessa altezza e per basi ciascheduna delle basi del segmento.*

4.° Una mezza circonferenza di raggio $r=0,043\,3$ ruotando intorno ad un asse parallelo al suo diametro, e che ha da esso la distanza $d=0,325$, genera la superficie convessa di un toro (§ 213); l'area di questa è uguale al prodotto della semicirconferenza πr per la circonferenza del circolo, che ha per raggio la distanza d accresciuta della distanza $2r:\pi$ fra il baricentro della semicirconferenza ed il diametro; essa si trova $=0,301\,4$. Similmente la parte concavo-convessa della superficie anulare generata dall'altra mezza circonferenza ha l'area $0,254\,2$. — Il volume dell'anello è $0,012\,03$ e quello del toro chiuso dalla superficie anulare e da due circoli paralleli col raggio d è

$$\pi r\left[d(2d+\pi r)+\tfrac{1}{3}r^2\right]=0.035\,09$$