R. UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA

PROF. GIUSEPPE BAGNERA

LEZIONI

sopra la

Teoria delle Funzioni Analitiche

raccolte dal Dr. GIOVANNI RICCI

ANNO SCOLASTICO 1926 - 1927

Stab. Tipo-Litografico
ATTILIO SAMPAOLESI
Via Sediari, 75
ROMA

G. Ricci

Queste litografie riproducono, con qualche aggiunta, le lezioni con le quali il compianto amato Maestro iniziò quel Corso di Analisi Superiore che Egli non doveva condurre a termine.

Esse si limitano quindi a dare un'introduzione alla teoria delle funzioni analitiche; la loro redazione, curata da Lui stesso quasi completamente per i primi due capitoli, è stata da me poi continuata sulla scorta, essenzialmente, di appunti presi alle Sue lezioni.

Mi auguro che il loro insieme non sia troppo indegno per la Sua venerata Memoria.

Roma, giugno 1927.

Giovanni Ricci.

Correzioni

pag.	riga	invece di	leggere
5,	11	considerate	considerare
6,	3	espicita	esplicita
7,	-10	multiplicità	multiplicità,
9,	13	δ	δ_0
10,	9	da	di
",	13	semplice o	semplice, e
11,	-10	C	$C;$
",	-7	banda σ_1''	banda di σ_1''
12,	11	punti comuni con	punti comuni con gli archi C_1, C_2, e nemmeno ha punti comuni con
",	-9	interno R	interno a R
20,	5	esterni all'altro	esterni l'uno all'altro
21,	4	$C_1;$	$C_1,$
",	12	C_1'' o dai	C_1'' e dai
22,	-1	degli estremi, il	degli estremi della linea; se invece z_0 è uno dei detti estremi, il
24,	10	al zero	a zero
",	-7	numero	numero,
32,	3	z_0 questo	z_0, questo
34,	5	reale, del	reale e del
46,	13	Si Δ_1	Sia Δ_1
",	-8	primo nell'ordine stabilito che	primo, nell'ordine stabilito, che
47,	11	b_r	l_r
54,	8	$< \frac{\varepsilon}{C}$	$< \frac{\varepsilon}{C'}$
91,	9	$\frac{\sigma_s}{2\pi}$	$\frac{\sigma_s\, \rho^{s-n}}{2\pi}$
15,	9	ed alla	e dalla

CAPITOLO I°

FUNZIONI OLOMORFE

§ 1. LINEE E AREE

N° 1. Una linea piana si dice *regolare* se le coordinate cartesiane (x,y) del suo punto generico si possono esprimere mediante due funzioni:

$$x=\varphi(t) \quad , \quad y=\psi(t) \qquad (1)$$

dotate di derivate *continue non entrambe nulle* per tutti i valori di t in un intervallo $a \vdash b$.

S'intende, supposto $a<b$, che negli estremi a e b dell'intervallo si ammette soltanto l'esistenza e la continuità delle derivate a destra di a ed a sinistra di b. Segue che le funzioni (1) risultano di per sè stesse *continue* in *tutto* l'intervallo $a \vdash b$.

In questo Corso, senza che sia ulteriormente avvertito, considereremo solamente linee regolari o linee composte con un *numero finito* di linee regolari.

In quest'ultima accezione, l'intervallo $a \vdash b$ resta diviso in un numero finito d'intervalli in ciascuno dei quali le (1) definiscono una linea regolare; ma nei punti di divisione, pur sussistendo la continuità delle funzioni (1), si può soltanto parlare di derivate destra e sinistra, generalmente distinte.

Per es., se in ogni singolo intervallo in cui è diviso $a \vdash b$ le funzioni (1) sono lineari in t, la linea (1) è una poligonale e i punti di divisione corrispondono ai *vertici*.

Tornando al caso generale, sia $t = c$ un punto interno ad $a \vdash b$ per cui le derivate destre delle funzioni (1) non coincidano con le derivate sinistre.

Ma Nel caso che le prime risultino proporzionali alle seconde con un fattore di proporzionalità *positivo* k, cioè nel caso che si abbia:

$$\varphi'(c+0) = k\varphi'(c-0) \quad , \quad \psi'(c+0) = k\psi'(c-0) , \tag{2}$$

la irregolarità della linea (1) nel punto $t = c$ è soltanto apparente e si ha niente altro che una irregolarità della rappresentazione parametrica.

Infatti, lasciamo inalterate le posizioni (1) nell'intervallo $a \vdash c$ e poniamo invece nell'intervallo $c \vdash b$:

$$x = \varphi\left(c + \frac{t-c}{k}\right) \quad , \quad y = \psi\left(c + \frac{t-c}{k}\right) . \tag{1'}$$

S'intende che in $c \vdash b$ varia l'argomento

$$c + \frac{t-c}{k}$$

e quindi il nuovo parametro t si deve far variare nell'intervallo che ha per estremi c e $c + k(b-c)$.

I valori (1') coincidono con i valori (1) per $t = c$; ma in questo punto le derivate destre delle (1') sono eguali alle derivate destre delle (1) divise per k, e quindi *coincidono* con le derivate sinistre. (rivedi dalle (2)) allora $t = c$ non è un vertice

Dunque, cambiando il parametro t nel modo esposto, si vede che la linea (1) è regolare per $t = c$.

Se invece hanno luogo le (2) con k *negativo*, o se le

(3) diventano $\varphi'\left(\frac{c}{k} + 0\right)$

(2) non sussistono addirittura, diremo che in corrispondenza a $t = c$ la linea (1) presenta un *punto angoloso* che, nel primo caso, si dirà più propriamente un *punto cuspidale*.

N° 2. Una stessa linea regolare ammette evidentemente infinite rappresentazioni parametriche (1), le quali si ottengono da una di esse cambiando il parametro.

Poniamo infatti

$$\tau = \vartheta(t) ,$$

essendo $\vartheta(t)$ una qualsivoglia funzione di t dotata di derivata *continua* e *diversa da zero* in $a \vdash b$; così che si possa,

para-

a t=c b

Se per ogni punto t da a b le φ' e ψ' sinistre coincidono con le φ' e ψ' destre la linea non ha vertici

cordi-

Se φ' e ψ' sinistre non coincidono con le destre

uzioni

la linea ha in quel punto un punto angoloso

$a \vdash b$,

teri

Il punto non è vertice neppure se le sinistre sono ≠ dalle destre ma però sono proporzionali

(t) si

lle (1)

… sostituendo nella seconda delle (1), questa funzione di x in luogo di t, si vede che la linea (1) viene rappresentata da una sola equazione del tipo:

$$y = f(x) . \tag{3}$$

(2) non sussistono addirittura, diremo che in corrispondenza a $t=c$ la linea (1) presenta un punto angoloso che, nel primo caso, si dirà più propriamente un punto cuspidale.

N° 2. Una stessa linea regolare ammette evidentemente infinite rappresentazioni parametriche (1), le quali si ottengono da una di esse cambiando il parametro.

Poniamo infatti

$$\tau = \vartheta(t),$$

essendo $\vartheta(t)$ una qualsivoglia funzione di t dotata di derivata continua e diversa da zero in $a \vdash b$; così che si possa, inversamente, considerare t come funzione del nuovo parametro τ e scrivere:

$$t = \omega(\tau).$$

Sostituendo questa espressione di t nelle (1), le coordinate (x, y) del punto generico della linea divengono funzioni di τ definite nell'intervallo $\alpha \vdash \beta$ corrispondente ad $a \vdash b$, e si vede subito che queste funzioni presentano i caratteri di regolarità avanti detti.

In particolare, se la derivata della funzione $\varphi(t)$ si mantiene in $a \vdash b$ sempre diversa da zero, la prima delle (1) definisce t come funzione di x. E, sostituendo nella seconda delle (1), questa funzione di x in luogo di t, si vede che la linea (1) viene rappresentata da una sola equazione del tipo:

$$y = f(x). \tag{3}$$

Si suole dire che la (3) è *l'equazione esplicita* della linea (1): analogamente, se in $a \vdash\!\dashv b$ si mantiene sempre diversa da zero la derivata della funzione $\psi(t)$, si ha l'altra equazione esplicita:

$$x = g(y), \qquad (3')$$

della linea in discorso.

In ogni caso, si può sempre spezzare l'intervallo $a \vdash\!\dashv b$ in un *numero finito* d'intervalli tali che i varii tratti di linea corrispondenti ammettano una rappresentazione (3) o (3').

Infatti, dividiamo $a \vdash\!\dashv b$ in

$$2,\ 4,\ 8,\ \ldots\ldots$$

parti uguali, e supponiamo che, ogni volta, si trovi un intervallo dove tanto $\varphi'(t)$ che $\psi'(t)$ prendono, naturalmente in punti diversi, il valore zero.

Considerando ogni volta il *primo intervallo*, nel verso da a a b, dove ciò accade, questi intervalli, col procedere delle divisioni, si addenseranno evidentemente attorno un punto limite t_0 nel quale le derivate in discorso, a causa della loro continuità, si annullano entrambe; e ciò è escluso dalle nostre ipotesi.

Segue che si presenterà necessariamente una divisione tale che in ogni intervallo si mantiene sempre diversa da zero la $\varphi'(t)$ o la $\psi'(t)$, e allora si ha in corrispondenza la rappresentazione esplicita (3) o la (3').

N° 3. Se per i valori estremi $t=a$ e $t=b$ dell'intervallo $a \vdash\!\dashv b$ le (1) forniscono uno stesso punto (x, y), la linea

(1) si dice *chiusa*.

In questo caso, per la regolarità della linea, si esige che le derivate delle funzioni (1) a destra di a siano ordinatamente eguali alle derivate a sinistra di b, a meno di uno stesso fattore *positivo*: se ciò non avviene la linea (1) presenta un punto angoloso nel punto di chiusura corrispondente agli estremi di $a \vdash\!\dashv b$.

Ma può anche accadere che si abbia uno stesso punto (x, y) in corrispondenza a due o più valori di t che non siano gli estremi di $a \vdash\!\dashv b$.

Questi valori di t sono però sempre in *numero finito*.

Infatti, se si avessero infiniti di siffatti valori, essi ammetterebbero in $a \vdash\!\dashv b$ almeno un punto limite t_0 nel quale si annullerebbero evidentemente $\varphi'(t)$ e $\psi'(t)$.

Se i valori in discorso di t sono in numero di m, il corrispondente punto (x, y) si dirà un *nodo di multiplicità* m della linea (1), in quanto che la linea *passa* per il detto punto m volte.

Nel computo della multiplicità tutte le volte che la linea è chiusa, gli estremi dell'intervallo $a \vdash\!\dashv b$ debbono ritenersi come un solo punto.

Una linea senza nodi, chiusa o no, si dice una *linea semplice*.

In altri termini, la linea (1) è semplice se a valori diversi di t in $a \vdash\!\dashv b$ corrispondono sempre punti (x, y), diversi, fatta eccezione per gli estremi a e b quando la linea è chiusa.

Per esempio, una linea che ammette una rappresentazione esplicita (3) o (3') è sempre una linea semplice aperta.

N° 4. *Linee vicinali* - Avendosi una linea L che sia rappresentata esplicitamente, ad esempio, da una equazione (3), si consideri la linea $\bar{L}$ che si ottiene facendo subire alla L una traslazione nel verso positivo o negativo dell'asse delle y e di ampiezza δ. La traslazione può anche essere fatta secondo una direzione arbitraria, purchè le parallele in quella direzione comprese tra le due estreme incontrino L ciascuna in un solo punto; allora L ed $\bar{L}$ *non hanno punti comuni*, e, se l'ampiezza della traslazione è sempre δ, diremo brevemente che $\bar{L}$ è una *linea vicinale ad L di scarto δ*.

Consideriamo ora una qualsivoglia linea *semplice* L.

Per costruire una linea vicinale $\bar{L}$, ci appoggeremo su quanto abbiamo stabilito al N° 2, e cioè che ogni linea può sempre decomporsi in un numero finito di archi che si rappresentano nella forma (3) o (3').

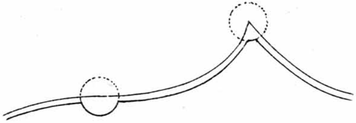
Racchiudiamo i punti di L per cui si passa dall'una all'altra rappresentazione e gli eventuali punti angolosi entro cerchi di raggio δ_0 aventi i centri nei punti stessi.

È chiaro, essendo la linea L semplice, che, se δ_0 si prende sufficientemente piccolo, le circonferenze risultano esterne l'una all'altra e ciascuna ha in comune con L due soli punti.

Costruiamo poi degli archi vicinali ai singoli archi in cui resta divisa L, con scarto $\delta < \delta_0$, arrestandoli però sopra le circonferenze avanti descritte in guisa che i due estremi che cadono sopra una stessa circonferenza non siano separati dai due punti d'incontro della circonferenza con L.

Quando lo scarto δ è abbastanza piccolo, è evidente che

questi archi vicinali non hanno punti comuni tra loro nè con L, e, presi insieme ai piccoli archi di circonferenza che ne congiungono gli estremi contigui, costituiscono una linea semplice $\bar{L}$, vicinale ad L, con scarto δ.



Tra i punti di L e di $\bar{L}$ ha luogo una corrispondenza biunivoca definita da una traslazione che può essere diversa da arco ad arco, ma sempre di ampiezza δ: fanno eccezione al più un *numero finito* di tratti delle due linee, *infinitesimi insieme a* δ_0, nelle vicinanze dei centri dei cerchi.

N° 5. *Aree* - Data una linea *chiusa semplice*, che chiameremo anche più brevemente un *circuito*, si dimostra per via puramente analitica, cioè senza far ricorso all'intuizione o ai postulati della geometria, che:

Un circuito divide i punti del piano non posti sul circuito in due classi, tali che due punti appartengono alla stessa classe solo quando è possibile congiungerli con una linea che non abbia punti comuni col circuito.

Noi tralasceremo la dimostrazione di questa proposizione, che riguarda la teoria degli insiemi numerici, avvertendo che C. Jordan ha stabilito una siffatta ripartizione sotto ipotesi più larghe delle nostre, cioè ammettendo soltanto *la continuità* delle funzioni che definiscono la linea chiusa semplice.

Giacchè i punti (x, y) di un circuito costituiscono un insieme limitato, è evidente che i punti (x, y) del piano molto distanti dall'origine, cioè i punti per cui $\sqrt{x^2+y^2}$ supera un numero abbastanza grande, appartengono ad una stessa delle due menzionate classi; questa classe è un insieme *non limitato* di punti e costituisce ciò che si dice la *regione esterna* al circuito.

L'altra classe è invece un insieme *limitato* di punti e costituisce ciò che si dice la *regione interna* al circuito, o anche *l'area limitata* dal circuito.

Una regione limitata da un circuito si dirà brevemente una *regione semplice* e il circuito stesso si chiama il *contorno* della regione.

Se ai punti interni ad una regione semplice si aggiungono i punti del contorno, si ha un insieme *chiuso e connesso* di punti; la connessione avendo anche luogo, separatamente, sia per l'insieme dei punti interni, e ciò per definizione, sia per l'insieme *continuo* di punti che costituiscono il contorno.

N° 6. Preso un punto a sul contorno C di una regione R, si conduca per esso una retta diversa dalla tangente al contorno in a, e sopra questa retta si scelgano due punti a', a'', situati da bande opposte ad a in modo che il segmento $a'a''$ non abbia, tranne a, altri punti comuni col contorno.

Due punti fuori di un arco, la cui congiungente tagli

l'arco in un solo punto, li diremo brevemente *da bande opposte* rispetto all'arco.

È intuitivo che i punti tali che a', a'' sono uno *interno* e l'altro *esterno* alla regione R; ma si può ciò stabilire logicamente ragionando come segue:

Si prendano due punti a piacere b', b'' il primo interno ed il secondo esterno ad R e, mediante due linee semplici uscenti ordinatamente da b' e da b'' e che *non abbiano* punti comuni col contorno C, si venga in due altri punti b_1' e b_1'' abbastanza vicini al contorno C in modo che, seguendo due linee vicinali a C passanti per b_1' e b_1'', si venga in due punti a_1' e a_1'' del segmento $a'a''$ anzidetto.

L'esistenza delle prime due linee è manifesta, considerando ad esempio i due segmenti che uniscono b' e b'' con i punti del contorno che hanno distanze minime da b' e b''.

I punti a_1' e a_1'' sono certamente il primo interno e il secondo esterno alla regione R come i punti di partenza, perchè le linee tracciate non hanno punti comuni col contorno C, e perciò il segmento $a_1'a_1''$ dovrà tagliare C.

Dunque a_1' e a_1'' stanno, come a' e a'', da bande opposte di a: se a' è ad esempio, della stessa banda di a_1', viene a'' della stessa banda di a_1'', e si conclude che a' è interno e a'' esterno ad R.

N° 7. Tagli - Sopra il contorno C di una regione semplice R prendiamo due punti a e b e congiungiamoli con una linea semplice L tutta *interna* ad R ad eccezione degli estremi a, b. Una tale linea L si dice un *taglio* fatto nella regione R.

Il circuito C viene diviso dagli estremi a e b del taglio in due archi C_1, C_2; ed è manifesto che anche la regione R viene *spezzata* da L in due regioni semplici R_1, R_2, l'una esterna all'altra, i cui contorni sono formati da C_1L e C_2L.

Di questo fatto intuitivo possiamo dare una dimostrazione logica.

Consideriamo un punto c'' esterno ad R e congiungiamolo con un secondo punto, pure esterno ad R, mediante una linea semplice *tutta esterna* ad R. Questa linea non ha dunque punti comuni con gli archi C_1, C_2, e nemmeno ha punti comuni con la linea L, la quale, per ipotesi, è interna ad R; ma allora scegliendo il secondo punto abbastanza lontano affinchè risulti esterno ad R_1 e R_2, concludiamo che anche c'' è esterno a R_1 e R_2.

Dunque, ogni punto c'' esterno ad R è anche esterno ad R_1 e R_2 e *perciò* ogni punto interno ad R_1 o ad R_2 è certamente interno ad R.

Reciprocamente, ogni punto interno ad R, se non sta sopra L, è interno o ad R_1 o ad R_2.

Sia c' un punto interno ad R: si tratta di far vedere che se si suppone c' esterno, per esempio, ad R_2, esso risulta interno ad R_1.

Infatti, congiungiamo c' con un punto esterno ad R (e quindi esterno ad R_2) mediante una linea semplice **esterna** ad R_2. Questa linea, che unisce un punto interno con un punto esterno ad R e che non ha punti comuni col contorno di R_2, deve necessariamente incontrare l'arco C_1, una prima volta, in un punto c_1 diverso da a e b

Ora, i punti della linea in discorso che precedono c_1, nel verso da c' a c_1 e vicini a c_1, sono *ancora* interni ad R; e sono **anche interni** ad R_1, perchè i punti situati da banda opposta rispetto all'arco C_1 e vicini a c_1 sono esterni ad R, e **quindi esterni** ad R_1.

Dunque c' è interno alla regione R_1.

Per mostrare infine che le regioni R_1 ed R_2, sono esterne l'una all'altra, premettiamo che due punti scelti ordinatamente sugli archi C_1, C_2 e diversi da a e b, sono il primo **esterno** ad R_2 ed il secondo **esterno** ad R_1. Infatti, un punto, ad esempio, di C_1 si può unire a un punto vicino esterno ad R, e quindi esterno ad R_2, mediante un piccolo segmento, che non abbia punti comuni col contorno di R_2.

Ciò posto, consideriamo, ad esempio, un punto interno ad R_1 e congiungiamolo con un altro punto interno molto vicino all'arco C_1 mediante una linea semplice tutta interna ad R_1. Questa linea non può avere punti comuni con l'arco C_2 il quale, come si è visto, è esterno ad R_1; allora, giacchè il punto molto vicino a C_1 è, come i punti di C_1, esterno ad R_2, lo stesso accade per il punto preso in considerazione.

Dunque, ogni punto interno ad una delle due regioni R_1, R_2 è esterno all'altra.

N° 8. <u>Versi sopra una linea</u>- Sopra ogni linea, semplice o no, possiamo stabilire **due versi** che, in una data rappresentazione parametrica della linea, corrispondono uno al verso crescente e l'altro al verso decrescente del parametro. Questi versi vengono perciò scambiati quando si cambia il parametro in un altro che sia funzione sempre decrescente del primo.

Però, nel caso di una linea *chiusa semplice*, possiamo definire il *verso diretto di circolazione* e il verso *retrogrado* indipendentemente dalla rappresentazione parametrica della linea.

Supponiamo che gli assi di riferimento siano, oltre che *orientati*, anche *ordinati*, per esempio nell'ordine x, y.

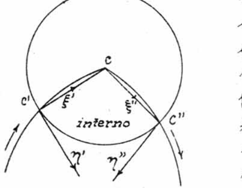
Dopo ciò, fissiamo un verso sopra il circuito e, in ogni suo punto, orientiamo la tangente ξ nel verso *concorde* a quello che si considera e la normale η all'*interno* del circuito.

Se la coppia orientata e ordinata (ξ, η) è *congruente* alla coppia (x, y), cioè se è possibile portare a coincidere le due coppie con un *movimento nel piano*, il verso fissato si dirà *verso diretto*, e, in caso contrario, si dirà il verso *retrogrado*.

Nel primo caso, il determinante formato ordinatamente con i coseni direttori di ξ ed η vale $+1$, e nel secondo caso vale -1; e siccome questi coseni sono evidentemente funzioni *continue* dell'arco della linea quando questa è regolare, segue che il determinante in discorso si mantiene *costante* in tutti i punti del circuito.

Se il circuito è costituito da diversi archi regolari, una breve analisi è necessaria, al passaggio di un punto angoloso dove i detti coseni subiscono una effettiva discontinuità.

Sia c un punto angoloso e descriviamo una circonferenza col centro in c e di raggio abbastanza piccolo affinchè essa tagli il circuito in due soli punti c', c'', i quali si suppongono il primo precedente c e il secondo seguente c nel verso che si considera.



La coppia (ξ, η) avanti definita nel punto c' è congruente alla coppia (ξ', η') formata dalla congiungente $c'c$ diretta da c' a c e dalla tangente alla circonferenza diretta all'interno del circuito, perchè quest'ultima coppia forma con la prima angolo infinitesimo al tendere a zero del raggio del circolo.

Similmente, la coppia (ξ, η) nel punto c'' è congruente alla coppia (ξ'', η'') formata dalla congiungente $c c''$, diretta da c a c'', e dalla tangente in c'' alla circonferenza, diretta sempre all'interno del circuito.

Intanto, quando con una rotazione attorno c si porta c' in c'' descrivendo l'arco di circonferenza interno al circuito, la direzione ξ' si sovrappone alla direzione opposta a ξ''; ma, nello stesso tempo, la direzione η' si sovrappone alla direzione opposta ad η''.

Dunque, le due coppie (ξ', η') e (ξ'', η'') sono congruenti, e allora anche le due coppie (ξ, η) nei punti c' e c'', prima e dopo il passaggio per il punto angoloso c, sono congruenti.

In una regione semplice R facciamo un taglio L e consideriamo le due regioni R_1, R_2 in cui viene spezzata R.

Percorrendo il taglio L in un assegnato verso, dobbiamo dirigere in ogni punto di L, la normale in versi opposti, secondo che si vuole considerare L come parte del contorno di R_1 o come parte del contorno di R_2; così che il verso assegnato sopra L è diretto per una e retrogrado per l'altro di questi due circuiti.

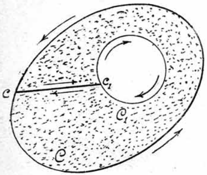
Dunque, se descriviamo i contorni di R_1 e R_2 entrambi nel verso diretto, il taglio L viene descritto in versi opposti.

N° 9. Aree a contorno multiplo

Si abbiano due circuiti C, C_1, il secondo tutto interno al primo.

E si vede facilmente che allora C risulta esterno a C_1.

Consideriamo l'insieme dei punti del piano che sono nello stesso tempo interni al circuito C ed esterni al circuito C_1. L'esistenza di siffatti punti è manifesta: basta osservare che i punti esterni a C_1 e abbastanza vicini a C_1 sono interni a C, perchè il circuito C_1 si è supposto interno a C.

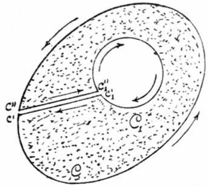


L'insieme dei punti anzidetti costituisce ciò che si dice una regione o un'area a contorno doppio.

Denotando con $R^{(1)}$ la regione in discorso, l'insieme dei punti esterni ad $R^{(1)}$ è formato dai punti esterni a C e dai punti interni a C_1, e questo insieme di punti non è connesso; come pure non

perchè un punto esterno a C è esterno anche a C_1 e, di conseguenza, ogni punto interno a C_1 è interno a C

è connesso l'insieme dei punti del contorno di $R^{(1)}$, il quale è qui costituito da due circuiti separati.



Invece l'insieme dei punti interni ad $R^{(1)}$ è, come ora vedremo, connesso.

Possiamo nella regione $R^{(1)}$ eseguire un taglio che unisca un punto c di C con un punto c_1 di C_1.

Per esempio, possiamo considerare il segmento che unisce c con c_1, e, se questo segmento ha altri punti comuni con i due circuiti, sceglieremo per c e c_1 i due punti di minima distanza. Il segmento $c\,c_1$ così costruito ha soltanto gli estremi sul contorno di $R^{(1)}$ e per il resto risulta interno ad $R^{(1)}$, perchè essendo c_1 interno a C, tali sono gli altri suoi punti tranne c, ed essendo c esterno a C_1 tali sono gli altri suoi punti tranne c_1.

Un taglio si concepisce come se i suoi punti non facciano parte della regione tagliata dando perciò luogo a due orli, proprio come avverrebbe se si facesse un taglio materiale con una forbice. Per rendere sensibile questa concezione, basta allontanare i due orli $c'c_1'$ o $c''c_1''$ mettendo in evidenza il taglio, come abbiamo fatto nella seconda figura.

Si vede così che la regione tagliata può considerarsi come una regione semplice, cioè limitata da un solo circuito (di cui fanno parte i due orli del taglio), che si può descrivere nel verso indicato dalle frecce. Si noti che, quando si descrive il circuito esterno C nel verso diretto, il circuito interno C_1 viene descritto nel verso retrogrado, perchè la regione che si considera è esterna a C_1.

Intanto sappiamo che una regione semplice è connessa, cioè due suoi punti interni arbitrariamente scelti (che riteniamo fuori del taglio, cambiando caso mai il taglio) si possono unire con una linea tutta interna alla regione; questa possibilità sussiste dunque anche per la regione $R^{(1)}$ non tagliata, anzi si può imporre alla linea la condizione di non attraversare il taglio.

La regione tagliata, essendo semplice, qualunque taglio la spezza in due regioni semplici. Dunque, non si può eseguire nella data regione $R^{(1)}$ più di *un solo* taglio senza che questa si spezzi.

Per esprimere ciò si dice che l'area $R^{(1)}$ ha la *connessione 1*.

N° 10. Supponiamo ora di tracciare internamente ad un circuito C *due* circuiti separati C_1, C_2, esterni l'uno all'altro.

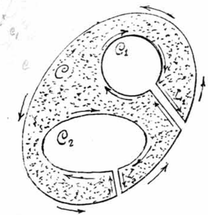
Possiamo allora considerare l'insieme dei punti che sono nello stesso tempo interni a C ed esterni a C_1 e C_2.

Questo insieme costituisce una regione a *contorno triplo*, che denotiamo con $R^{(2)}$.

Eseguiamo in $R^{(2)}$ un primo taglio L_1 che unisca un punto di C con un punto di C_1 o di C_2.

Per mostrare la possibilità di un siffatto taglio, consideriamo il segmento che unisce due tali punti. Se questo

segmento ha ulteriori punti comuni con i tre circuiti, divideremo questi punti in due gruppi: quelli che stanno sopra C e quelli che stanno complessivamente sopra C_1 e C_2; poi sceglieremo nei due gruppi i due punti che si trovano a distanza minima.



Il segmento che ha per estremi i due punti così scelti è uno dei tagli richiesti.

Dopo eseguito un tale taglio, la regione $R^{(2)}$ si trasforma in una regione $R^{(1)}$ a contorno doppio, perchè i due circuiti che sono riuniti dal taglio formano ora un solo circuito del quale fanno parte gli orli del taglio.

Abbiamo visto che una regione $R^{(1)}$ a contorno doppio è connessa; dunque, anche la regione data $R^{(2)}$ è connessa.

Inoltre, giacchè sopra $R^{(1)}$ non si può eseguire più di un solo taglio senza spezzarla, si deduce che sopra $R^{(2)}$ non si possono eseguire più di *due* tagli senza spezzarla; allora diciamo che *la connessione* di $R^{(2)}$ è 2.

Eseguendo effettivamente il secondo taglio L_2, la $R^{(2)}$ diviene una regione semplice, cioè limitata da un solo circuito che si può descrivere nel verso indicato dalle freccie: anche qui osserviamo che, quando si descrive il circuito esterno nel verso diretto, i circuiti interni C_1 e C_2 vengono descritti nel verso retrogrado, perchè l'area che si considera è esterna a questi due circuiti.

In generale, se internamente ad un circuito C sono tracciati μ circuiti senza punti comuni ed esterni l'uno all'altro:

$$C_1 \,,\; C_2 \,, \dots, C_\mu \,,$$

l'insieme dei punti che sono nello stesso tempo *esterni* a tutti questi circuiti e *interni* a C costituiscono una regione $R^{(\mu)}$ a contorno multiplo e precisamente formato di $\mu+1$ circuiti.

Un primo taglio eseguito in $R^{(\mu)}$ può unire due punti di circuiti differenti oppure due punti di uno stesso circuito.

Nel primo caso si ottiene una regione $R^{(\mu-1)}$ limitata da μ circuiti; perchè i due circuiti uniti dal taglio vengono a formare un solo circuito. E se, ragionando per induzione, si ammette che l'insieme dei punti interni ad $R^{(\mu-1)}$ è connesso e che non è possibile eseguire in $R^{(\mu-1)}$ più di $\mu-1$ tagli senza spezzarla, si deduce che anche $R^{(\mu)}$ è connessa e che il massimo numero di tagli che non la spezza è μ.

Nel secondo caso, il taglio non è di quelli di cui vogliamo occuparci, perchè *spezza* la regione $R^{(\mu)}$ in due parti come ora vedremo.

Infatti, se il taglio ha gli estremi sopra C, una delle due parti è limitata dal circuito C', costituito dal taglio e da uno degli archi in cui C è diviso dagli estremi del

taglio, e dai circuiti dati che cadono eventualmente internamente a C': l'altra parte si definisce nello stesso modo considerando il circuito C'' formato dal taglio e dall'altro arco di C.

Se invece il taglio ha gli estremi, ad esempio, sopra C_1, consideriamo i due circuiti C_1' e C_1'' che si ottengono associando al taglio l'uno o l'altro dei due archi in cui C_1 è diviso dagli estremi del taglio. Nel caso in esame, uno di questi due circuiti, per esempio C_1', lascia all'esterno la regione limitata da C_1, e l'altro la contiene all'interno. Ciò posto una delle regioni in cui il taglio spezza $R^{(\mu)}$ è limitata da C_1' e dai circuiti dati che cadono eventualmente all'interno di C_1'; e l'altra regione è limitata dal circuito C_1'' e dai circuiti dati esterni a C_1'', tra i quali è certamente C.

Resta così stabilito che il *massimo* numero di tagli che si possono fare nella regione $R^{(\mu)}$ *senza spezzarla* è precisamente μ, e questo numero si chiama la *connessione* della regione in discorso.

Una regione piana semplice ha connessione *zero*, perchè non esiste alcun taglio che non la spezzi.

---

§2. FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

N° 11 - Siano $u(x,y)$ e $v(x,y)$ due funzioni reali delle variabili reali x, y definite in tutti i punti (x,y) di una linea o di una regione piana.

Se poniamo $z = x + iy$, un punto complesso della regione piana, dove i denota l'unità immaginaria, e

$$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y), \qquad (1)$$

quest'ultima posizione definisce una *funzione della variabile complessa* z nei punti z della linea o della regione, perchè, dato z, cioè il punto (x,y), si ha in corrispondenza un ben determinato valore di $u + iv$ denotato con $f(z)$.

La funzione $f(z)$ si dice *continua* in un punto z_0 se, assegnato arbitrariamente un numero positivo ε, esiste un corrispondente numero positivo δ tale che, per tutti i punti z della linea o della regione che soddisfino alla limitazione $|z - z_0| < \delta$, si abbia:

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \qquad (2)$$

Se z varia sopra una linea, i punti z che hanno da z_0 uno *scarto* $|z - z_0|$ minore di δ costituiscono un piccolo arco della linea il quale comprende nel suo *interno* il punto z_0 tutte le volte che z_0 non è uno degli estremi della linea; se invece z_0 è uno di detti estremi, il

piccolo arco è situato tutto da una banda di z_0.

Se z varia in una regione, i punti z che hanno da z_0 uno scarto minore di δ sono i punti di un piccolo cerchio di centro z_0 e raggio δ, che si può supporre tutto interno alla regione se z_0 è interno; se invece z_0 sta sul contorno della regione, si debbono solo considerare i punti z comuni al detto cerchio e alla regione.

Si dimostra come nella teoria delle funzioni di variabile reale che una funzione $f(z)$ continua in tutti i punti di una linea, compresi i punti estremi, o continua in tutti i punti di una regione, compresi i punti del contorno, è ivi *uniformemente continua*. Ciò significa che si può determinare δ in modo che la (2) abbia luogo per due qualsivogliano punti z, z_0 variabili sopra la linea o nella regione, *purchè* lo scarto $|z - z_0|$ sia minore di δ.

Se una funzione $f(z)$ è continua in tutti i punti di una linea compresi i punti estremi oppure in tutti i punti di una regione compreso il contorno diremo che la funzione è *continua in senso stretto* nei punti della linea oppure nei punti della regione.

È quasi superfluo osservare che la continuità della funzione $f(z)$ importa la continuità delle due funzioni reali $u(x,y)$ e $v(x,y)$, e reciprocamente.

N° 12. *Integrale curvilineo* - Sia $f(z)$ una funzione *continua* in tutti i punti di una data linea L.

Detti z_0 e z gli estremi di L, mediante punti di divisione:

$$z_0,\ z_1,\ z_2, \ldots\ldots, z_{n-1},\ z_n = z$$

che si seguono in un determinato verso, decomponiamo L in archi parziali ciascuno di *scarto* minore di un assegnato numero positivo δ, chiamando scarto di un arco la *massima* distanza di due suoi punti. Siano poi:

$$f_1 \,,\, f_2 \,, \ldots\ldots, f_n$$

valori che la funzione $f(z)$ prende in punti scelti ad arbitrio nei singoli archi parziali ordinatamente, e formiamo la somma:

$$S = (z_1 - z_0) f_1 + (z_2 - z_1) f_2 + \ldots\ldots + (z - z_{n-1}) f_n \qquad (3)$$

Faremo vedere che, al tendere a zero del numero δ, *l'insieme* delle somme S tende ad un limite.

Questo limite si denota con la scrittura

$$\int_L f(z)\, dz \qquad (4)$$

e si chiama *l'integrale della funzione $f(z)$ lungo la linea L* nel verso assegnato.

Dicendo che l'insieme delle somme S tende ad un limite al tendere di δ a zero, intendiamo dire che esiste un numero, precisamente quello rappresentato dal simbolo (4), tale che, in corrispondenza ad un ε positivo arbitrario, si possa trovare un δ in modo che, per *tutte* le somme S relative ad archi di scarto minore di δ, si abbia

$$\left| \int_L f(z)\, dz - S \right| < \varepsilon \,.$$

Per dimostrare l'esistenza del limite (4), si dividano ordinatamente gli archi relativi ad S in $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ parti

e si consideri la somma S^*, analoga ad S, relativa a tutte le nuove divisioni di L.

La somma S^* è costituita di più somme parziali:

$$S^* = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots\ldots + \sigma_n \,,$$

ciascuna relativa agli archi nei quali è ulteriormente decomposto ogni arco di S.

Così, se

$$z_0 \,,\, z_1^{(1)}, \, z_1^{(2)}, \ldots\ldots, \, z_1^{(\alpha-1)}, \, z_1$$

sono i punti di divisione del primo arco $z_0 z_1$ di S e:

$$f_1^{(1)}, \, f_1^{(2)}, \ldots\ldots, \, f_1^{(\alpha)}$$

sono valori di $f(z)$ nei singoli archi che questi punti determinano, si ha

$$\sigma_1 = (z_1^{(1)} - z_0) f_1^{(1)} + (z_1^{(2)} - z_1^{(1)}) f_1^{(2)} + \ldots\ldots + (z_1 - z_1^{(\alpha-1)}) f_1^{(\alpha)}$$

D'altra parte, il primo termine di (3) si può scrivere:

$$(z_1 - z_0) f_1 = (z_1^{(1)} - z_0) f_1 + (z_1^{(2)} - z_1^{(1)}) f_1 + \ldots + (z - z_1^{(\alpha-1)}) f_1 \,,$$

e, a causa della uniforme continuità di $f(z)$ sopra L, si può prendere δ abbastanza piccolo affinchè la differenza dei valori di $f(z)$ in due punti qualunque di uno stesso arco di S abbia il modulo minore di un assegnato numero positivo $\frac{\varepsilon}{L}$. Dunque, sottraendo membro a membro e prendendo i moduli, si ha:

$$\left| \sigma_1 - (z - z_1) f_1 \right| < \frac{\varepsilon}{L} \left| z_1^{(1)} - z_0 \right| + \frac{\varepsilon}{L} \left| z_1^{(2)} z_1^{(1)} \right| + \ldots\ldots + \frac{\varepsilon}{L} \left| z_1 - z_1^{(\alpha-1)} \right| ;$$

poi, mettendo a secondo membro in luogo delle corde le lunghezze degli archi, risulta:

$$/\sigma_1 - (z-z_1)f_1/ < \frac{\varepsilon}{L} l_1 ,$$

dove l_1 denota la lunghezza dell'arco $z_0 z_1$.

Similmente, paragonando la somma parziale σ_2 con il secondo termine di (3), si ha:

$$/\sigma_2 - (z_2 - z_1)f_2/ < \frac{\varepsilon}{L} l_2 ,$$

dove l_2 denota la lunghezza dell'arco $z_1 z_2$,...... e così di seguito. Sommando membro a membro tutte queste diseguaglianze corrispondenti ai varii termini di S, si conclude:

$$/S^* - S/ < \varepsilon$$

Ciò posto, si divida L successivamente in 2, 4, 8,.... archi di lunghezze eguali prendendo ogni volta i valori di $f(z)$ nel primo estremo di ciascun arco: si ha così una particolare e ben determinata successione di somme S:

$$S_1 , S_2 , S_3 , \ldots\ldots$$

La somma S_ν, quando ν supera un certo posto p, ha gli archi di scarto minori di δ, e la somma S_μ, per $\mu > \nu$, si ottiene suddividendo in parti gli archi di S_ν; dunque, per quanto abbiamo visto, si ha

$$/S_\mu - S_\nu / < \varepsilon \qquad (\mu > \nu > p)$$

Segue, in base al principio generale di convergenza, che la successione in discorso tende ad un ben determinato limite che denotiamo col simbolo (4).

Sia ora S una *qualsivoglia* somma S i cui archi abbiano uno scarto minore di δ, e paragoniamola con la particolare somma S_ν.

Si costruisca la somma S^* relativa alla divisione in archi di L che si ha prendendo insieme i punti di divisione di S e di S_ν considerati sempre nell'ordine in cui si seguono nel verso assegnato.

La somma S^* si può pensare come ottenuta decomponendo in parti gli archi di S mediante i punti di divisione di S_ν, o come ottenuta decomponendo in parti gli archi di S_ν mediante i punti di divisione di S. Dunque si ha

$$/S^* - S/ < \varepsilon \quad \text{e} \quad /S^* - S_\nu/ < \varepsilon ,$$

donde si deduce

$$/S - S_\nu / < 2\varepsilon$$

E siccome si può fissare ν abbastanza grande affinchè S_ν si scarti dal suo limite (4) per meno di ε, si vede che, *qualunque sia la somma* S, questa si scarterà da (4) per meno del numero positivo arbitrario 3ε, *purchè* gli scarti dei corrispondenti archi siano minori di δ.

N° 13. Per esempio, l'integrale:

$$\int_L dz$$

è, per definizione, il limite verso cui tende la somma:

$$(z_1-z_0)+(z_2-z_1)+\cdots\cdots+(z-z_{n-1});$$

ma questa somma si mantiene costantemente eguale a $z-z_0$, e perciò si ha

$$\int_L dz = z-z_0 .$$

Consideriamo in secondo luogo l'integrale

$$\int_L z\,dz .$$

Esso è il limite della somma:

$$z_0(z_1-z_0)+z_1(z_2-z_1)+\cdots+z_{n-1}(z-z_{n-1})$$

e anche il limite della somma:

$$z_1(z_1-z_0)+z_2(z_2-z_1)+\cdots+z(z-z_{n-1})$$

Ma la somma di queste due somme, come si vede subito riducendo, è costantemente eguale alla differenza $z^2-z_0^2$, la quale è perciò il doppio dell'integrale che si considera.

Dunque si ha:

$$\int_L z\,dz = \frac{1}{2}(z^2-z_0^2).$$

Nell'uno e nell'altro esempio si vede che il valore dell'integrale non dipende dalla linea d'integrazione, ma soltanto dai punti estremi della linea.

Se la linea L è chiusa, essendo $z=z_0$, i due integrali considerati sono nulli.

N° 14. Se sopra la linea L si cambia il verso andando da z a z_0 invece che da z_0 a z, si viene a cambiare il senso delle differenze tra i punti di divisione, e quindi la somma S cambia di segno.

Dunque, se denotiamo con $-L$ la linea L descritta nel verso opposto a quello assegnato sopra L, si ha

$$\int_{-L} f(z)\,dz = -\int_L f(z)\,dz .$$

Anche per l'integrale lungo una linea di una funzione di variabile complessa vale il principio della decomposizione in parti del campo d'integrazione, e cioè, se la linea L si compone di due parti L_1, L_2, si ha

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz$$

E vale anche il principio della decomposizione in parti della funzione integranda, e cioè, se la funzione $f(z)$ risulta dalla somma di due funzioni $f_1(z)$ ed $f_2(z)$, continue sopra L, si ha

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L f_1(z)\,dz + \int_L f_2(z)\,dz .$$

N° 15. Teorema del modulo dell'integrale.

Prendendo i moduli dei due membri di (3), si ha

$$|S| \le |z_1-z_0||f_1| + |z_2-z_1||f_2| + \cdots + |z-z_{n-1}||f_n| .$$

Se, partendo da un punto fisso di L, denotiamo con s_i $(i=0,1,2,\dots,n)$ la lunghezza dell'arco di L che termina al punto z_i, e il verso che si stabilisce sopra L è quello *crescen-*

te degli archi, dall'ultima diseguaglianza segue

$$|S| \leq (s_1-s_0)|f_1| + (s_2-s_1)|f_2| + \dots\dots + (s-s_{n-1})|f_n| .$$

Ma il limite del primo membro è il modulo di (4), e il limite del secondo membro è un integrale ordinario, precisamente l'integrale di $|f(z)|$ considerato come funzione dell'arco s della linea. Dunque, passando al limite, risulta:

$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \leq \int_L |f(z)|\,ds \qquad (5)$$

Questa diseguaglianza esprime che:

Il modulo dell'integrale di $f(z)$ lungo una linea L non supera l'integrale di $|f(z)|$, considerato come funzione dell'arco s della linea, in un intervallo di ampiezza L.

N° 16. Teorema della continuità dell'integrale -

Sia $f(z,u)$ una funzione continua delle due variabili z, u quando u varia sopra una linea L e z sopra una seconda linea o in una regione, compresi i punti estremi delle linee o i punti del contorno della regione.

Vogliamo dimostrare che l'integrale

$$\varphi(z) = \int_L f(z,u)\,du$$

risulta una funzione continua di z.

Effettivamente l'integrale in discorso definisce una funzione di z, perchè esso assume un ben determinato valore quando si fissa z nel suo campo di variabilità.

Ora, se z e z_0 sono due punti di questo campo, si ha

$$\varphi(z) - \varphi(z_0) = \int_L [f(z,u) - f(z_0,u)]\,du .$$

Intanto, giacchè $f(z,u)$ risulta, come abbiamo avvertito, una funzione continua di z, **uniforme rispetto ad u**, fissato ad arbitrio un numero positivo $\frac{\varepsilon}{L}$, si può trovare un numero positivo δ tale che, per $|z-z_0| < \delta$, si abbia:

$$|f(z,u) - f(z_0,u)| < \frac{\varepsilon}{L} ,$$

qualunque sia il punto u di L.

Dunque, prendendo i moduli dei due membri dell'eguaglianza che precede, viene:

$$|\varphi(z) - \varphi(z_0)| < \frac{\varepsilon}{L} \int_L ds .$$

ossia

$$|\varphi(z) - \varphi(z_0)| < \varepsilon$$

per $|z-z_0| < \delta$.

E ciò prova la continuità di $\varphi(z)$ in un punto z_0 qualsiasi del campo di variabilità di z.

§ 3. - FUNZIONI OLOMORFE -

N° 17. Sia $f(z)$ una funzione definita in tutti i punti z *interni* ad una regione R.

Se, essendo z e z_0 due siffatti punti distinti, il rapporto

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \qquad (1)$$

tende ad un limite al tendere di z a z_0, questo limite si chiama la *derivata* della funzione $f(z)$ nel punto z_0, e si suole denotare con $f'(z_0)$.

Dicendo che il rapporto (1) tende al limite $f'(z_0)$ al tendere di z a z_0, intendiamo dire che, fissato ad arbitrio un numero positivo ε, esiste un altro numero positivo δ tale che sia

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon \qquad (2)$$

per tutti i punti z, diversi da z_0, che soddisfano alla limitazione $|z-z_0|<\delta$, cioè per tutti i punti z interni ad un cerchio contenuto in R di centro z_0 e raggio δ, eccettuato il centro z_0.

(2') È evidente che una funzione $f(z)$, che ammetta derivata in un punto z_0, è ivi continua. (1)

Giacchè la definizione di derivata per una funzione $f(z)$ della variabile complessa z è la stessa di quella posta per le funzioni di variabile reale, segue che le regole fondamentali allora stabilite per derivare la somma, la differenza, il prodotto e il quoziente di due funzioni sussistono inalterate nel caso attuale, come pure sussiste la regola per la derivazione di una funzione composta.

Per esempio, un polinomio in z ammette derivata in ogni punto z del piano; una funzione razionale di z ammette derivata in tutti i punti z che non annullano il suo denominatore.

(1) Vedi anche ... pag 378 (... che ammette derivata è ivi continua, ...) R

Una funzione $f(z)$ che ammetta derivata in tutti i punti z *interni* ad una regione R, si dice una funzione *olomorfa* nella regione R.

Veramente, circa questa denominazione, la nomenclature è alquanto varia secondo i diversi Autori, perchè, invece di olomorfa, la $f(z)$ si dice anche *monogena* o *sinettica* o *regolare*; ma noi adopereremo sempre la parola "olomorfa".

N° 18. Condizioni di olomorfismo

Quando una funzione

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \qquad (3)$$

è olomorfa in una regione, le derivate parziali prime delle funzioni reali u, v esistono e soddisfano a due equazioni lineari della massima importanza dette *condizioni di olomorfismo* o, più comunemente, *condizioni di monogeneità*.

Per arrivare a queste equazioni consideriamo un punto $z=x+iy$ interno alla regione ed un secondo punto $z+\Delta z = (x+\Delta x)+i(y+\Delta y)$ infinitamente vicino al primo, e siano Δf, Δu, Δv gli incrementi che subiscono le funzioni f, u, v quando si passa dal primo al secondo punto, così che:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\,\Delta v}{\Delta x + i\,\Delta y}. \qquad (4)$$

Se si fa tendere Δz a zero il rapporto incrementale a primo membro tende, *per ipotesi* a un ben determinato limite che è $f'(z)$.

Si faccia tendere, in un primo tempo, Δz a zero mantenendo *costantemente* $\Delta y = 0$; in altri termini, si faccia tendere $z+\Delta z$ a z sopra la parallela all'asse delle x condotta per z. Allora la (4) diviene:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + i\,\frac{\Delta v}{\Delta x}\;;$$

e, giacchè il primo membro tende ad un limite, debbono esistere, separatamente, i limiti della parte reale e del coefficiente dell'immaginario i; i quali limiti, essendo y costante, sono le derivate parziali $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}$. Dunque si ha:

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}}\,. \qquad (3')$$

Si faccia tendere, in un secondo tempo Δz a zero mantenendo costantemente $\Delta x = 0$; in altri termini, si faccia tendere $z+\Delta z$ a z sopra la parallela all'asse delle y, condotta per z. Allora la (4) diviene:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = -i\,\frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y}\,,$$

e si deduce, passando al limite:

$$\boxed{f'(z) = -i\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}} \qquad (3'')$$

perchè x si mantiene costante.

Dunque, confrontando le due espressioni di $f'(z)$, risulta:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}\,, \qquad (5)$$

che sono le equazioni che volevamo stabilire.

N° 19. Osserviamo che le (3') e (3'') mostrano che $f'(z)$ è identicamente nulla nella regione che si considera solo quando sono tali le derivate parziali prime di u e v; allora u e v si riducono a costanti, e lo stesso avviene di $f(z)$.

Ciò equivale a dire che, se due funzioni olomorfe in una regione hanno ivi derivate eguali, la loro differenza è una costante.

Quando $f(z)$ è olomorfa in una regione R e non è ivi costante, le funzioni u e v delle variabili x, y risultano sempre *funzionalmente indipendenti*.

In altri termini, se $F(u,v)$ denota una funzione reale non identicamente nulla dei due argomenti u, v che supponiamo dotata di derivate parziali prime continue, *non è possibile* che sia

$$F(u,v) = 0$$

per tutte le coppie di valori u, v che vengono in corrispondenza ai punti (x,y) interni ad R; sempre che, s'intende, queste coppie u, v cadano nel campo dove la funzione F è definita.

Infatti, consideriamo le equazioni:

$$u = u(x,y)$$
$$v = v(x\,y)$$

ed osserviamo che il determinante funzionale dei secondi membri, in base alle condizioni di olomorfismo, si può scrivere come segue:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 ;\neq 0$$

e non può questo determinante essere nullo, identicamente in R a meno che ivi non sia tale $f'(z)$, e perciò $f(z)$ costante. (contro l'ipotesi)

Mettendoci dunque nelle vicinanze dei valori u, v corrispondenti ad un punto (x, y) dove il detto determinante sia diverso da zero, possiamo, come è noto, assegnare ad arbitrio i valori di u e v e determinare poi un punto (x, y) per cui u e v prendano i valori assegnati.

Dunque, giacchè u e v possono assegnarsi ad arbitrio, non è possibile che essi soddisfino alla relazione avanti scritta.

In particolare, una funzione $f(z)$, olomorfa in R non può mantenere in R costante il suo modulo senza che la funzione stessa si riduca ad una costante.

Perchè l'ipotesi $|f(z)| = c$ con c costante, importa tra u e v la relazione:

$$u^2 + v^2 = c^2,$$

e abbiamo visto che ciò è impossibile se $f(z)$ non è costante.

N° 20. Dimostreremo in seguito che, sempre sotto l'ipotesi che $f(z)$ sia olomorfa in una regione, le derivate parziali prime di $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono ivi continue.

Vogliamo ora dimostrare che, inversamente, se due funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$, definite nei punti (x, y) di una regione, ammettono derivate parziali prime continue legate dalle relazioni (5), la funzione (3) della variabile complessa $z = x + iy$ è una funzione olomorfa in quella regione.

Infatti, riferendoci alla (4), sappiamo che, sotto l'ipotesi della continuità delle derivate parziali prime, di u e v, gl'incrementi Δu, Δv differiscono dai corrispondenti differenziali du, dv per infinitesimi che sono di ordine superiore in confronto di $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = |\Delta z|$. Dunque possiamo scrivere la (4) in questo modo

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{du + i\,dv}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y} \qquad (4')$$

dove α e β sono variabili tali che il modulo dell'ultimo rapporto a secondo membro, cioè:

$$\left|\frac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y}\right| = \sqrt{\left|\frac{\alpha}{\Delta z}\right|^2 + \left|\frac{\beta}{\Delta z}\right|^2},$$

tende a zero al tendere a zero di Δz.

D'altra parte, si ha per definizione:

$$du + i\,dv = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y;$$

e, sfruttando la (5), possiamo anche scrivere così:

$$du + i\,dv = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y).$$

Dunque la (4') si riduce a:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\Delta y},$$

e dimostra che, comunque Δz tenda a zero, il rapporto incrementale a primo membro, tende ad un ben determinato limite, che è $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Concludiamo che esiste la derivata di $f(z)$ in ogni punto z della regione che si considera.

Resta così provato che, ammessa la continuità delle derivate parziali prime di u e v in una data regione, le condizioni (5) sono necessarie e sufficienti affinchè la funzione (3) sia funzione olomorfa del punto $z = x + iy$ in quella regione.

N° 21. Funzioni armoniche

N° 21. *Funzioni armoniche* - Salvo a dimostrare in seguito che, quando $f(z)$ è olomorfa in una regione R, esistono ivi e sono anche continue le derivate parziali seconde di u e v, deriviamo la prima delle (5) rispetto ad x, la seconda rispetto ad y e sommiamo poi membro a membro.

Giacchè è lecito di invertire l'ordine delle derivazioni nelle derivate seconde miste, si vede che la funzione u soddisfa all'equazione (di Laplace) a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 . \qquad (6)$$

E si vede analogamente che alla stessa equazione soddisfa la funzione v.

Una funzione, dotata di derivate parziali prime continue in una data regione R, che soddisfi all'equazione (6), si dice una *funzione armonica* nella detta regione.

Così che, tanto la parte reale u che il coefficiente v dell'immaginario i di una funzione olomorfa, sono funzioni armoniche.

Vogliamo ora dimostrare che, data ad arbitrio una funzione armonica u in R, si può sempre considerare u come la parte reale di una funzione olomorfa in R.

E difatti, la forma differenziale lineare:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

risulta, in base alla (6), un differenziale totale; esiste quindi una funzione $v(x, y)$ tale che sia

$$dv = \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx .$$

La funzione v è definita dalla equazione ora scritta, a meno di una costante addiettiva, in tutti i punti interni ad R, e si ha

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y} .$$

Essendo dunque soddisfatte le (5) la funzione $u + iv$ è una funzione olomorfa della variabile $z = x + iy$ in R.

E segue anche che, ad ogni soluzione u di (6) è associata un'altra soluzione v, determinata a meno di una costante addiettiva arbitraria.

N° 22. Trasformazioni conformi

N° 22. *Trasformazioni conformi* - Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in una regione R e poniamo:

$$\zeta = f(z) . \qquad (7)$$

Allora, ad ogni punto z di R corrisponde un punto ζ, e si ha una rappresentazione della regione R sul piano dove varia ζ.

La corrispondenza (7) si può esplicitare nel campo reale ponendo:

$$\zeta = \xi + i\eta \;, \; f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \;;$$

ciò che traduce la (7) nelle due equazioni:

$$\xi = u(x,y) \quad , \quad \eta = v(x,y) \qquad (7')$$

Per un punto z interno ad R, dove non sia nulla $f'(z)$ $\neq 0$, facciamo passare una linea L regolare, e sia:

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t)$$

una rappresentazione parametrica di questa linea. Allora le (7') mostrano che ξ, η risultano funzioni di t, le cui derivate si esprimono così:

$$\xi' = \frac{\partial u}{\partial x}\, x' + \frac{\partial u}{\partial y}\, y'$$

$$\eta' = \frac{\partial v}{\partial x}\, x' + \frac{\partial v}{\partial y}\, y'$$

e sono perciò, come x' e y', funzioni continue di t (1)

Inoltre il determinante di queste equazioni, tenendo conto delle (5), si scrive:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 . \neq 0$$

ed è diverso da zero nel punto z che si considera, altrimenti dovrebbe essere $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, e quindi nulla $f'(z)$. Dunque, a causa della continuità di $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$, esso si mantiene diverso da zero nelle vicinanze di z e ciò prova che le derivate ξ' ed η' non possono essere entrambe nulle, come non lo sono x' e y'.

Segue che, stando in un conveniente intorno di z, alla linea L del piano (x,y) corrisponde nel piano (ξ,η) una linea Γ, pure regolare, uscente dal punto ζ corrispondente a z.

(1) sono continue perché x' e y' sono continue, e le ∂ di u e v sono pure continue per le prime righe del n° 20

Supponendo gli assi ξ, η sovrapposti agli assi x, y, e chiamando ϑ l'angolo formato dalle due tangenti alle linee L e Γ nei punti corrispondenti z e ζ, si ha, come è noto,

$$tg\,\vartheta = \frac{x'\eta' - y'\xi'}{x'\xi' + y'\eta'} ;$$

e, se sostituiamo in luogo di ξ' ed η' i valori avanti trovati, viene:

$$tg\,\vartheta = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\, x'^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) x'y' - \frac{\partial u}{\partial y}\, y'^2}{\frac{\partial u}{\partial x}\, x'^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) x'y' + \frac{\partial v}{\partial y}\, y'^2} \qquad (8)$$

Tenendo ora conto delle (5), risulta:

$$tg\,\vartheta = -\frac{\partial u}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial x} ,$$

e quindi $tg\,\vartheta$ non dipende da x' e y', ma solo da z.

Ciò significa che, se consideriamo una seconda linea $\bar{L}$ uscente da z e la corrispondente linea $\bar{\Gamma}$ uscente da ζ, l'angolo formato dalle tangenti ad $\bar{L}$ e $\bar{\Gamma}$ nei punti corrispondenti z e ζ è sempre ϑ.

Segue che l'angolo secondo cui si tagliano le due linee L ed $\bar{L}$ in z è lo stesso dell'angolo secondo cui si tagliano le due linee corrispondenti Γ e $\bar{\Gamma}$ nel punto ζ.

Dunque la trasformazione (7) definita dalla funzione olomorfa $f(z)$ è una *trasformazione conforme*, chiamando con questo nome una corrispondenza puntuale tra due piani o porzioni di piani la quale *conservi gli angoli*.

Anzi, possiamo aggiungere che la trasformazione (7) è *conforme diretta* nel senso che conserva anche il *verso di rotazione* degli angoli.

N° 23. Reciprocamente, una trasformazione conforme diretta, comunque data, è sempre definita da una funzione olomorfa.

In generale, una corrispondenza puntuale *regolare* tra due piani o porzioni di piani si definisce mediante due equazioni come le (7') dove le funzioni u e v si suppongono dotate di derivate parziali prime continue in una data regione R con determinante funzionale non identicamente nullo.

Mettiamoci in un punto (x, y) interno ad R dove questo determinante sia diverso da zero, e scriviamo la formola (8) che dà la tangente dell'angolo ϑ formato dalle due tangenti a due linee regolari corrispondenti L e Γ nei punti corrispondenti (x, y) e (ξ, η).

Giacchè la trasformazione (7') si suppone conforme diretta, l'angolo ϑ deve essere sempre lo stesso qualunque sia la coppia di linee corrispondenti L e Γ uscenti dai due punti ora detti, cioè la (8) deve aver luogo qualunque siano le variabili x', y', lasciando costante ϑ. Dunque, moltiplicando la (8) per il denominatore del secondo membro, vengono a primo e a secondo membro due forme quadratiche in x', y' *identiche*, e perciò deve essere:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \operatorname{tg} \vartheta = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}$$

Moltiplicando l'ultima equazione per $\operatorname{tg} \vartheta$ e tenendo conto delle prime due, si trova

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \operatorname{tg}^2 \vartheta = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

e quindi bisogna che sia

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 .$$

E allora, dalla anzidetta ultima equazione segue anche:

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Dunque, essendo soddisfatte le (5), la $u + iv$ è una funzione olomorfa $f(z)$ del punto $z = x + iy$ in R.

Concludiamo che, affinchè la corrispondenza (7) sia una trasformazione conforme diretta, è necessario e sufficiente che $f'(z)$ sia una funzione olomorfa nella regione dove si fa variare z.

I punti dove si annulla $f'(z)$ sono punti *singolari* della trasformazione.

N° 24. Esistono delle trasformazioni conformi *inverse*, cioè che conservano gli angoli ma non il verso di rotazione: tale sarebbe, ad esempio, una simmetria rispetto ad una retta.

Se denotiamo con $\bar{\xi}$ il numero complesso coniugato di ξ, l'equazione:

$$\bar{\xi} = z$$

rappresenta la simmetria rispetto all'asse delle x, ed è chiaro che facendo seguire una trasformazione conforme inversa qualunque da questa particolare simmetria, si ottiene una trasformazione conforme diretta.

Dunque, una trasformazione conforme inversa si ottiene facendo seguire ad una trasformazione conforme diretta la simmetria in discorso, e perciò l'equazione che definisce una trasformazione conforme inversa è del tipo

$$\bar{\xi} = f(z) \tag{7''}$$

dove $f(z)$ è una funzione olomorfa nella regione dove si fa variare z.

A questo tipo appartiene la particolare trasformazione:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{z}$$

detta *per raggi vettori reciproci* e che lascia inalterati tutti i punti della circonferenza di raggio 1 avente il centro nell'origine degli assi.

---

§.4. TEOREMA FONDAMENTALE DI CAUCHY-

N°25. *Se la funzione $f(z)$ è olomorfa all'interno di una regione semplice, l'integrale di $f(z)$ lungo una linea chiusa tutta interna alla regione è nullo.*

Questo teorema, dovuto sostanzialmente ad A. Cauchy, ha ricevuto in seguito dei perfezionamenti nel senso di rendere sempre meno restrittive le ipotesi per la sua validità: l'ultimo, che segna un passo decisivo, è dovuto al Prof. E Goursat, e porta all'enunciato precedente dove si ammette *soltanto l'esistenza* della derivata di $f(z)$ nei punti interni alla regione.

Ponendo:

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) = g(z) \tag{1}$$

per z diverso da z_0 e $g(z_0)=0$, la funzione $g(z)$ risulta continua in tutti i punti z interni alla regione, *non escluso* il punto $z=z_0$ nel quale si annulla.

Supponiamo in primo luogo che la linea d'integrazione sia il perimetro di un triangolo Δ, e dimostriamo che, dato ad arbitrio un numero positivo ε, è possibile decomporre Δ in un numero finito di triangoli simili a Δ e abbastanza piccoli in modo che in ciascuno di essi esista un punto z_0 per cui si abbia

$$|g(z)| < \varepsilon \tag{2}$$

per tutti i punti z del triangolo parziale che si considera.

Procediamo per assurdo, ammettendo che una siffatta decomposizione non sia possibile.

Siano A, B, C i vertici di Δ considerati in questo ordine, e decomponiamo Δ in quattro triangoli uguali e simili a Δ congiungendo i punti di mezzo A', B', C' dei lati ordinatamente opposti ad A, B, C, per i quali triangoli stabiliamo l'ordine:

$$AB'C' \ , \ A'BC' \ , A'B'C \ , A'B'C' .$$

Così che, fissato l'ordine dei vertici A, B, C, viene *fissato* l'ordine dei detti quattro triangoli e viene anche *fissato* l'ordine dei vertici di ciascuno di essi, scrivendo prima la lettera A, poi B e poi C, con o senza apici.

Se la decomposizione in discorso non è possibile per il triangolo Δ, esiste almeno uno dei quattro triangoli in cui è decomposto Δ dove la condizione (2) richiesta non è soddisfatta, non solo, ma nemmeno è possibile decomporlo in triangoli simili in modo che la detta condizione sia soddisfatta in ciascuno dei triangoli parziali. Sia Δ_1 il *primo* triangolo nell'ordine assegnato, che possiede queste due qualità negative.

Decomponiamo Δ_1 in quattro triangoli congiungendo i punti di mezzo A'', B'', C'' dei lati ordinatamente opposti al primo, secondo, terzo vertice di Δ_1, come abbiamo fatto per Δ, e sia Δ_2 il *primo*, nell'ordine stabilito, che abbia le stesse qualità negative di Δ_1.

Così proseguendo si viene a costruire una ben determinata successione di triangoli (nei quali la (2) non è soddisfatta)

$$\Delta \ , \Delta_1 \ , \Delta_2 \ , \ldots\ldots$$

ciascuno contenuto nel precedente, i quali, impiccolendo sempre più, si restringono attorno un punto limite z_0 che appartiene a *tutti* i triangoli della successione, eventualmente situato sopra i loro perimetri da un certo posto in poi.

Ma, a causa della continuità della funzione $g(z)$, nulla per $z = z_0$, esiste un cerchio di centro z_0 nel quale è soddisfatta la (2); e, d'altra parte, per quanto piccolo sia il detto cerchio, cadono in esso infiniti triangoli della successione dove la (2) per ipotesi, non è soddisfatta. Ciò è assurdo.

Dimostrata così la possibilità della anzidetta decomposizione di Δ, siano

$$T_1 \ , \ T_2 \ , \ldots\ldots , \ T_n$$

i triangoli in cui Δ si trova decomposto, e chiamiamo σ_r e l_r l'area ed il perimetro di T_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$.

Considerando in T_r un punto z_0, che per ipotesi esiste, tale che sia soddisfatta la (2) in tutti i punti di T_r, dalla definizione (1) di $g(z)$ si ricava:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + (z - z_0) g(z) ,$$

e quindi:

$$\int_{l_r} f(z)\,dz = \int_{l_r} f(z_0)\,dz + \int_{l_r} (z - z_0) f'(z_0)\,dz + \int_{l_r} (z - z_0) g(z)\,dz$$

I due primi integrali del secondo membro sono nulli perchè la linea l_r è chiusa (N° 13); dunque, prendendo i moduli dei due membri risulta:

$$\left| \int_{l_r} f(z)\,dz \right| \leq \int_{l_r} |z - z_0| \, |g(z)| \, ds .$$

Ora, essendo la distanza $|z - z_0|$ tra due punti z_0 e z di T_r certamente minore del semi-perimetro $\frac{1}{2} l_r$, si ha, per la (2):

$$\left|\int_{l_r} f(z)dz\right| < \frac{\varepsilon}{2}\, l_r \int_{l_r} ds = \frac{\varepsilon}{2}\, l_r^2 .$$

E giacchè il triangolo T_r è simile a Δ, se A ed L denotano l'area e il perimetro di Δ, ha luogo la proporzione:

$$l_r^2 : a_r = L^2 : A ,$$

dalla quale possiamo ricavare il valore di l_r^2 e sostituirlo nel secondo membro della diseguaglianza precedente: otteniamo così:

$$\left|\int_{l_r} f(z)dz\right| < \frac{\varepsilon}{2}\, \frac{a_r}{A}\, L^2$$

Sommando membro a membro tutte le diseguaglianze come questa, che si hanno facendo $r = 1, 2, \dots, n$ risulta

$$\left|\sum_1^n \int_{l_r} f(z)\, dz\right| < \frac{\varepsilon}{2}\, L^2.$$

Intanto, nella somma che figura a primo membro sotto il segno di modulo, si elidono due a due gli integrali presi lungo i lati *interni* a Δ dei varii triangoli, perchè un siffatto lato è commune a due triangoli e quindi viene descritto due volte ma in versi opposti quando si percorrono i perimetri dei detti due triangoli nei *versi diretti*.

Dunque restano soltanto gli integrali lungo i lati che stanno sul perimetro L di Δ e tutti descritti nel verso diretto; così che la detta somma si riduce all'integrale:

$$\int_L f(z)dz .$$

E questo integrale, avendo il modulo minore di un

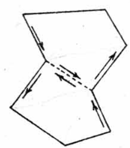
numero positivo arbitrario quale è $\frac{\varepsilon}{2} L^2$, deve essere nullo.

N° 26. Supponiamo ora che la linea L d'integrazione sia una poligonale chiusa *semplice* di $n > 3$ lati.

Si vede facilmente che è possibile scegliere due vertici *non consecutivi* in modo che il segmento che li unisce risulti interno all'area limitata dalla poligonale; così che si vengono ad avere due poligonali chiuse L_1 ed L_2 che hanno come lato commune il segmento ora detto, e ciascuna ha un numero di lati *minore di n*.

Allora, ragionando per induzione, possiamo ammettere che siano separatamente nulli i due integrali di $f(z)$ lungo i circuiti L_1 ed L_2 descritti nei versi diretti; e concludiamo che è nulla anche la loro somma.

Questa somma è appunto l'integrale di $f(z)$ lungo la poligonale L di n lati, perchè il lato commune ad L_1 ed L_2 viene descritto due volte in versi opposti, e quindi i corrispondenti integrali si elidono.



Se la linea L d'integrazione è invece una poligonale chiusa *non semplice di n* lati, ci limiteremo a considerare i nodi ove si *tagliano* due lati non consecutivi e i nodi che sono vertici communi a *più di due* lati.

Per $n = 2$ la poligonale si riduce ad un segmento descritto due volte in versi opposti e non esistono di siffatti nodi; ma in questo caso possiamo affermare senz'altro che il corrispondente integrale è nullo.

Supponendo ora $n>2$ e procedendo per induzione, partiamo da uno degli anzidetti nodi e descriviamo la poligonale in un dato verso fino a ritornare per la *prima* volta al nodo di partenza: veniamo così a descrivere una poligonale chiusa con *meno* di n lati, e perciò il corrispondente integrale di $f(z)$ è nullo. Ed è anche nullo l'integrale di $f(z)$ lungo la rimanente parte di L, perchè anche questa parte è una poligonale chiusa con meno di n lati: dunque è nullo l'integrale di $f(z)$ lungo l'intera poligonale L.

Supponiamo in ultimo luogo di avere una qualsiasi linea chiusa L.

Se C denota il circuito che limita la regione dove $f(z)$ è olomorfa, possiamo costruire un secondo circuito $\bar{C}$, vicinale a C e *interno* a C, in modo che L risulti anche interna a questo nuovo circuito $\bar{C}$.

Ciò posto, dividiamo L in archi di scarto minore di un assegnato numero positivo δ mediante punti

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \dots\dots,\ z_{m-1},\ z_m = z_0$$

che si seguono in un dato verso, e consideriamo la poligonale $\bar{L}$ che ha per successivi vertici questi punti.

Dato ad arbitrio un numero positivo ε, possiamo determinare δ in modo che la somma

$$S=(z_1-z_0)f_1+(z_2-z_1)f_2+\dots+(z_m-z_{m-1})f_m$$

si scarti dall'integrale di $f(z)$ lungo L per meno di ε, cioè in modo da avere:

$$\left|\int_L f(z)\,dz - S\right| < \varepsilon\ ; \qquad (3)$$

e per $f_1, f_2, \dots, f_m$ possiamo prendere, ordinatamente, i valori di $f(z)$ negli estremi sinistri dei singoli archi parziali, estremi che sono i vertici della poligonale $\bar{L}$.

Possiamo inoltre determinare δ in modo che questa poligonale risulti pure interna al circuito $\bar{C}$ e che per due punti z_r e z di uno stesso lato si abbia:

$$(4) \qquad \left|f(z_r)-f(z)\right| < \frac{\varepsilon}{L} \qquad (r=0,1,\dots,m-1)$$

Quest'ultima condizione può essere soddisfatta, perchè $f(z)$ è *uniformemente continua* dentro $\bar{C}$.

E adesso confrontiamo la somma S, che possiamo scrivere così

$$S=\int_{(z_0z_1)} f_1\,dz+\int_{(z_1z_2)} f_2\,dz+\dots\dots+\int_{(z_{m-1}z_m)} f_m\,dz\ ,$$

con l'integrale di $f(z)$ lungo la poligonale $\bar{L}$, cioè:

$$\int_{\bar{L}} f(z)\,dz=\int_{(z_0z_1)} f(z)\,dz+\int_{(z_1z_2)} f(z)\,dz+\dots\dots+\int_{(z_{m-1}z_m)} f(z)\,dz.$$

Sottraendo membro a membro e prendendo i moduli dei due membri, risulta

$$\left|S-\int_{\bar{L}} f(z)\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{L}\left(|z_1-z_0|+|z_2-z_1|+\dots+|z_m-z_{m-1}|\right),$$

purchè si tenga conto di (4).

La somma in parentesi al secondo membro è la lunghezza di $\bar{L}$, e noi possiamo sostituirla con la lunghezza di L, che è maggiore o eguale alla prima.

Si ha dunque

$$\left|S-\int_{\bar{L}} f(z)\,dz\right| < \varepsilon \;;$$

e quindi, in base a (3), risulta:

$$\left|\int_{L} f(z)\,dz-\int_{\bar{L}} f(z)\,dz\right| < 2\varepsilon \,.$$

Intanto, come abbiamo avanti dimostrato, l'integrale lungo la poligonale $\bar{L}$ è nullo, e perciò resta

$$\left|\int_{L} f(z)\,dz\right| < 2\varepsilon \,.$$

Così che, l'integrale di $f(z)$ lungo la linea L, avendo il modulo minore di un numero positivo arbitrario, è nullo.

Il teorema fondamentale di *Cauchy* resta dunque dimostrato.

N° 27. *Se la funzione $f(z)$, olomorfa all'interno di una regione semplice $\mathcal{R}$, si suppone inoltre* **continua** *nei punti del contorno C di $\mathcal{R}$, si ha:*

$$\int_{C} f(z)\,dz = 0 \,. \tag{5}$$

Infatti, si costruisca un secondo circuito $\bar{C}$, vicinale a C e interno a C.

Sappiamo (N° 4) che il circuito $\bar{C}$ si può costruire dividendo C in un numero finito di archi e facendo subire ad ogni arco una traslazione di ampiezza δ sufficientemente piccola, così che tra i punti z e $\bar{z}$ di C e $\bar{C}$ si ha una corrispondenza espressa dalla formola:

$$z = \bar{z} + h \,,$$

con h *costante* che può essere diversa da arco ad arco, ma sempre di modulo δ. Sono eccettuati in questa corrispondenza degli archi di C e $\bar{C}$ posti nelle vicinanze dei punti di divisione, e che si possono supporre *piccoli a piacere* facendo diminuire δ.

Denotando con E ed $\bar{E}$ gli insiemi di questi piccoli archi di C e $\bar{C}$ che sono eccettuati nella corrispondenza in discorso, possiamo scrivere:

$$\int_{C} f(z)\,dz = \int_{C-E} f(z)\,dz + \int_{E} f(z)\,dz \,,$$

$$\int_{\bar{C}} f(\bar{z})\,d\bar{z} = \int_{\bar{C}-\bar{E}} f(\bar{z})\,d\bar{z} + \int_{\bar{E}} f(\bar{z})\,d\bar{z} \,.$$

L'integrale lungo gli archi $C-E$ che figura nella prima eguaglianza può trasformarsi in un integrale lungo gli archi corrispondenti $\bar{C}-\bar{E}$ in base alla relazione che lega z con $\bar{z}$, e precisamente si ha:

$$\int_{C-E} f(z)\,dz = \int_{\bar{C}-\bar{E}} f(\bar{z}+h)\,d\bar{z} \,.$$

Dunque, sottraendo membro a membro le due eguaglianze precedenti e poi prendendo i moduli dei due membri, risulta:

$$\left|\int_{C} f(z)\,dz - \int_{\bar{C}} f(\bar{z})\,d\bar{z}\right| \leq \int_{\bar{C}-\bar{E}} |f(\bar{z}+h)-f(\bar{z})|\,ds + \int_{E} |f(z)|\,ds + \int_{\bar{E}} |f(\bar{z})|\,ds \,.$$

Gli ultimi due integrali del secondo membro si possono ritenere ciascuno minore di un prefissato numero positivo ε, perchè ciascuno di essi è calcolato lungo archi che hanno complessivamente una lunghezza che si può supporre piccola a piacere, e inoltre le funzioni integrande $|f(z)|$ e $|f(\bar{z})|$ si mantengono limitate.

In quanto al primo integrale, si osservi che, a causa della uniforme continuità della funzione $f(z)$ in tutta la regione R, compresi i punti del contorno, si può prendere $|h| = \delta$ abbastanza piccolo affinchè sia

$$|f(\bar{z}+h) - f(\bar{z})| < \frac{\varepsilon}{\bar{C}}$$

per tutti i punti $\bar{z}$ degli archi $\bar{C} - \bar{E}$, e quindi

$$\int_{\bar{C}-\bar{E}} |f(\bar{z}+h) - f(\bar{z})| ds < \frac{\varepsilon}{\bar{C}} \int_{\bar{C}-\bar{E}} ds < \varepsilon .$$

E allora, dalla disequaglianza avanti scritta, segue:

$$\left| \int_C f(z)dz - \int_{\bar{C}} f(\bar{z})d\bar{z} \right| < 2\varepsilon .$$

Intanto l'integrale esteso a $\bar{C}$ è *nullo*, perchè il circuito $\bar{C}$ è interno a C; e quindi resta che il modulo del primo membro di (5) è minore del numero positivo arbitrario 2ε. Dunque ha luogo la (5).

N° 28. Derivata di un integrale rispetto all'estremo superiore.

Il teorema fondamentale di Cauchy si può anche enunciare sotto questa forma:

Se la funzione $f(z)$ è olomorfa in una regione semplice R, l'integrale di $f(z)$ lungo una linea interna ad R dipende soltanto dai punti estremi della linea.

Ciò significa che, se L ed $\bar{L}$ sono due linee inter-

(1)

ne ad R aventi gli stessi estremi a e z, ciascuna descritta nel verso da a a z, si ha:

$$\int_L f(z)dz = \int_{\bar{L}} f(z)dz .$$

E difatti la linea $\bar{L}$ e la linea L, descritta nel verso opposto a quello anzidetto costituiscono una linea chiusa lungo la quale l'integrale di $f(z)$ è nullo. Dunque si ha

$$\int_{\bar{L}} f(z)dz + \int_{-L} f(z)dz = 0 ,$$

che equivale all'eguaglianza precedente.

In base a ciò, possiamo rappresentare brevemente col simbolo

$$\int_a^z f(z)dz \qquad (6)$$

l'integrale di $f(z)$ lungo una linea *qualunque* interna ad R che congiunga a con z.

In particolare si ha:

$$\int_a^a f(z)dz = 0 ,$$

perchè l'integrale di $f(z)$ lungo una linea chiusa è nullo.

Tenendo fisso a, l'integrale (6) definisce una funzione $\varphi(z)$ del punto z che fa da estremo superiore d'integrazione.

Vogliamo dimostrare che la funzione

$$\varphi(z) = \int_a^z f(z)dz . \qquad (6')$$

è olomorfa in R, e la sua derivata è:

(2)

$$\varphi'(z) = f(z). \qquad (7)$$

Scelto ad arbitrio un punto z_0 interno ad R e un numero positivo ε, si può descrivere un circolo con centro in z_0 e interno ad R e di raggio abbastanza piccolo affinchè in tutti i suoi punti z sia

$$|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon.$$

Ciò posto, se L denota una linea interna ad R che unisce il punto a con z_0 e (z_0z) denota il segmento che unisce z_0 con un altro punto z del detto circolo, si ha:

$$\varphi(z)-\varphi(z_0) = \int_{L+(z_0z)} f(z)\,dz - \int_L f(z)\,dz,$$

e quindi, semplificando il secondo membro e dividendo per $z-z_0$, risulta:

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_0}\int_{(z_0z)} f(z)\,dz.$$

Togliamo dall'uno e dall'altro membro il valore $f(z_0)$, osservando che questo valore si può scrivere sotto forma d'integrale come segue:

$$f(z_0) = \frac{1}{z-z_0}\int_{(z_0z)} f(z_0)\,dz.$$

Si ha allora, con questo accorgimento,

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z-z_0}\int_{(z_0z)}[f(z)-f(z_0)]\,dz.$$

E prendendo i moduli dei due membri, risulta

$$\left|\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0} - f(z_0)\right| < \frac{\varepsilon}{|z-z_0|}\int_{(z_0z)} dz = \varepsilon.$$

Ciò prova che il rapporto incrementale:

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}$$

tende a $f(z_0)$ al tendere di z a z_0, e quindi resta dimostrata la (7) nel punto generico z_0 interno ad R.

Si noti che la (7) è stata dimostrata sotto le ipotesi che $f(z)$ sia continua in R e che l'integrale di $f(z)$ lungo una qualsiasi linea chiusa interna ad R sia nullo.

Dunque, sotto le ora dette ipotesi, $f(z)$ è eguale alla derivata di una funzione $\varphi(z)$ olomorfa in R; e giacchè, come vedremo nel successivo paragrafo, la derivata di una funzione olomorfa in una regione è pure olomorfa nella stessa regione, segue che:

Se una funzione $f(z)$ è continua in una regione semplice R e se è nullo l'integrale di $f(z)$ lungo una qualsiasi linea chiusa interna ad R, la $f(z)$ è olomorfa in R.

Questa semplice osservazione, che inverte il teorema di **Cauchy**, è dovuta al **Morera**.

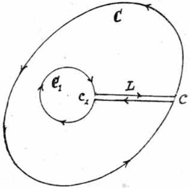
N° 29. Il teorema di Cauchy per le regioni a contorno multiplo

- Consideriamo in primo luogo una regione $R^{(1)}$ il cui contorno sia formato da due circuiti C, C_1, il secondo tutto interno al primo (N° 9), e sia $f(z)$ una funzione strettamente continua in $R^{(1)}$ e olomorfa all'interno di $R^{(1)}$.

Eseguiamo in $R^{(1)}$ un taglio L che unisca un punto c_1 di C_1 con un punto c di C, considerato, tanto per fissare le idee, nel verso da C_1 a C. La regione tagliata risulta semplice, perchè limitata da un solo circuito C' del quale fanno parte i due orli del taglio (N°9); e la funzione $f(z)$ è ivi strettamente continua e olomorfa all'interno. Dunque (N 27) l'integrale di $f(z)$ lungo il circuito C' che possiamo supporre descritto nel verso diretto, è *nullo*, cioè si ha:

$$\int_{C'} f(z)\,dz = \int_{C} f(z)\,dz + \int_{-L} f(z)\,dz + \int_{-C_1} f(z)\,dz + \int_{L} f(z)\,dz = 0$$

purchè si tenga conto che, descrivendo C' nel verso diretto, i circuiti C e C_1 vengono descritti il primo nel verso diretto e il secondo nel verso retrogrado rispetto alle corrispondenti aree interne, e che il taglio L viene descritto due volte in versi opposti.



Dall'eguaglianza precedente, giacchè gli integrali lungo L e $-L$ si elidono, si ricava:

$$\int_{C} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz .$$

Dunque l'integrale lungo il circuito esterno eguaglia l'integrale lungo il circuito interno, intendendo i circuiti descritti nei versi diretti rispetto alle corrispondenti aree interne.

In generale, ragionando per induzione, si dimostra che, se una funzione $f(z)$ è *strettamente* continua in una regione $R^{(n)}$ limitata da $n+1$ circuiti e *olomorfa* all'inter-

no di $R^{(n)}$, l'integrale di $f(z)$ lungo il circuito esterno C eguaglia la somma degli integrali di $f(z)$ lungo i circuiti interni a C ed esterni l'uno all'altro $C_1, C_2, \ldots, C_n$; cioè si ha:

$$\int_{C} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz . \qquad (8)$$

Infatti, eseguiamo in $R^{(n)}$ un taglio che unisca un punto di C_1 con un punto di C; allora i due circuiti C e C_1, presi insieme agli orli del taglio, formano un solo circuito C' al quale sono interni i rimanenti circuiti $C_2, \ldots, C_n$.

Come avanti si è visto, si ha

$$\int_{C'} f(z)\,dz = \int_{C} f(z)\,dz + \int_{-C_1} f(z)\,dz ;$$

e d'altra parte, ammettendo il teorema in discorso per una regione limitata da n circuiti, quale è la regione tagliata, si ha:

$$\int_{C'} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots\cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz .$$

Allora, dal confronto delle due espressioni dell'integrale di $f(z)$ lungo C' segue la (8).

Avvertiamo ancora una volta che nella (8) i varii circuiti s'intendono descritti nei versi diretti rispetto alle corrispondenti aree interne.

§ 5. - LA FORMOLA INTEGRALE DI CAUCHY -

N° 30. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa all'interno di una regione semplice R e continua anche nei punti del contorno C, di questa regione.

Se a è un punto qualsiasi interno ad R, vogliamo dimostrare la formola di capitale importanza:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}. \qquad (1)$$

Si descriva una circonferenza C_1 col centro in a e interna ad R e si osservi che la funzione

$$\frac{f(z)}{z-a}$$

è olomorfa nella regione $R^{(1)}$ limitata dai due circuiti C e C_1, perchè ivi il denominatore non si annulla mai.

Dunque si ha, per quanto si è visto nel N° precedente,

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_{C_1} \frac{f(z)\,dz}{z-a} \; ;$$

e se dai due membri di questa eguaglianza togliamo l'integrale

$$\int_{C_1} \frac{f(a)\,dz}{z-a},$$

risulta:

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} - \int_{C_1} \frac{f(a)\,dz}{z-a} = \int_{C_1} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz. \qquad (2)$$

Il secondo integrale a primo membro si calcola subito ponendo

$$z - a = \rho e^{i\vartheta},$$

dove ρ denota il raggio di C_1, e perciò costante sopra C_1. Dunque si ha:

$$dz = i\rho e^{i\vartheta} d\vartheta,$$

e quindi segue

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z-a} = i\int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi i,$$

purchè si noti che, percorrendo C_1 nel verso diretto, l'argomento ϑ di $z-a$, contato ad esempio a partire da zero, cresce da 0 a 2π.

Sostituendo in (2) e prendendo i moduli dei due membri dopo averli divisi per $2\pi i$, risulta

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} - f(a) \right| \le \frac{1}{2\pi\rho}\int_{C_1} |f(z)-f(a)|\,ds. \qquad (3)$$

D'altra parte, dato ad arbitrio un numero positivo ε, si può prendere ρ abbastanza piccolo affinchè in tutti i punti z di C_1 sia

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon \; ;$$

e allora segue:

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int_{C_1} |f(z)-f(a)|\,ds < \varepsilon .$$

Dunque, la differenza che figura sotto il segno di modulo a primo membro di (3), avendo il modulo minore di un numero positivo arbitrario ε, è nulla.

Osserviamo che la formola integrale di Cauchy vale anche per le regioni a contorno multiplo, e si stabilisce servendosi della formula (8) del N.° 29. Allora il contorno C al quale bisogna estendere l'integrale è costituito da varî circuiti che limitano la regione ciascuno descritto nel verso diretto rispetto alla regione che si considera.

N.° 31. Formole dell'incremento finito e della derivata.

Scrivendo la (1) per un altro punto b interno ad R e poi sottraendo membro a membro le due eguaglianze, si trova subito:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)}, \qquad (4)$$

che chiameremo formola dell'incremento finito.

Scegliendo i punti a, b in una regione semplice $\bar{R}$ tutta interna ad R, si vede che la funzione integranda a secondo membro è una funzione continua dei tre argomenti z, a, b, perchè il denominatore non si annulla; dunque, tenendo fermo a, l'integrale risulta una funzione continua di b (N.° 16) in $\bar{R}$. E quindi, facendo tendere b ad a, si ottiene:

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}, \qquad (5)$$

che si chiama la formola della derivata.

Questa formola dimostra che la derivata $f'(a)$ di una funzione olomorfa in una regione R, risulta sempre una funzione continua dell'argomento in tutti i punti a interni ad R.

N.° 32. Derivazione sotto il segno integrale.

Sia $f(z,u)$ una funzione continua dei due argomenti z, u quando u varia sopra una linea L e z in una regione R. Supponiamo inoltre che $f(z,u)$, per ogni valore di u fissato sopra L risulti una funzione olomorfa di z all'interno di R, e dimostriamo che la funzione

$$\varphi(z) = \int_L f(z,u)\,du \qquad (6)$$

è pure una funzione olomorfa di z all'interno di R, e si ha:

$$\varphi'(z) = \int_L \frac{\partial f}{\partial z}\,du. \qquad (6')$$

Se z e ξ sono due punti interni ad R, segue dalla definizione di $\varphi(z)$;

$$\frac{\varphi(\xi)-\varphi(z)}{\xi-z} = \int_L \frac{f(\xi,u)-f(z,u)}{\xi-z}\,du \qquad (7)$$

Descriviamo due circonferenze C' e C'', interne ad R, col centro comune nel punto z e la prima interna alla seconda; poi supponiamo che ξ varii nel cerchio minore.

Allora, applicando la formola dell'incremento finito al rapporto incrementale che figura sotto il segno integrale, si ha:

$$\frac{f(\xi,u)-f(z,u)}{\xi-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C''} \frac{f(v,u)}{(v-z)(v-\xi)}\,dv;$$

e questa eguaglianza dimostra che il rapporto incrementale in discorso è una funzione *continua* dei due argomenti ζ, u *non escluse* le coppie z, u, purchè al primo membro si dia *lo stesso significato* che ha il secondo membro per tali coppie, cioè, in base alla (5),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(v,u)}{(v-z)^2}\,dv = \frac{\partial f}{\partial z} . \qquad (8)$$

Dunque, nella eguaglianza (7), che dà il valore del rapporto

$$\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}{\zeta - z},$$

l'integrale a secondo membro risulta una funzione *continua* di ζ (N° 16); e perciò, quando ζ tende a z, l'integrale ora detto tende ad un limite, e questo limite è il valore che l'integrale assume per $\zeta = z$. Così che, facendo tendere nella (7), ζ a z, viene la formola (6').

Si noti che, in base alla (8), la $\frac{\partial f}{\partial z}$ risulta una funzione continua dei due argomenti u, z nel loro campo di variabilità e funzione olomorfa di z all'interno di R per ogni punto u di L; dunque si può ancora applicare la regola di derivazione sotto il segno integrale alla (6') nei punti z interni ad R, ... e così di seguito.

N° 33. Formola generale delle derivate

Riprendendo la formola integrale di **Cauchy**:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}, \qquad (1)$$

osserviamo che, essendo per ipotesi $f(z)$ continua in

senso stretto nella regione R dove $f(z)$ è olomorfa all'interno, la $f(z)$ è senz'altro funzione continua dei punti z del contorno C di questa regione; e quindi la funzione integranda a secondo membro risulta funzione continua dei due argomenti z, a per i punti z ora detti e per i punti a *interni* ad R; e dippiù è manifestamente funzione olomorfa di a in R ogni volta che si fissa z.

Dunque possiamo derivare *quante volte vogliamo* il secondo membro di (1) rispetto ad a, applicando la regola di derivazione sotto il segno integrale.

Derivando una prima volta, si trova la formola (5) già stabilita direttamente; derivando n volte di seguito si trova subito la formola:

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}, \qquad (9)$$

che dà l'espressione della derivata $f^{(n)}(a)$, di ordine n, della funzione $f(a)$.

Si giunge così a un risultato che non ha riscontro nella teoria delle variabili reali, e cioè:

Se una funzione è olomorfa in una regione, ossia se ammette derivata nei punti interni alla regione, la funzione ammette ivi derivate di ordine comunque elevato.

E perciò «Ogni derivata di una funzione olomorfa in una regione è pure una funzione olomorfa nella regione stessa».

Ponendo, al solito:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y),$$

giacchè esistono e sono continue all'interno della regione R le derivate di qualsiasi ordine di $f(z)$, segue che **esistono e sono continue** le derivate parziali di qualsiasi ordine delle funzioni reali $u(x,y)$ e $v(x,y)$ in tutti i punti (x,y) interni ad R.

Si nóti che facendo nelle formole (1) e (9) $f(z)=1$, si ha:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z-a}=1\ ; \qquad \int_C \frac{dz}{(z-a)^{n+1}}=0. \qquad (10)$$

In queste due formole il circuito C, che comprende il punto a all'interno, può essere scelto in modo completamente arbitrario; anzi, per la seconda formola, C può essere una linea chiusa qualsiasi, anche non semplice, non passante per a.

N° 34. Dalla formola di Cauchy si deduce anche l'importante teorema:

Se $f(z)$ è una funzione olomorfa in una regione R, non esiste il massimo dei valori che $|f(z)|$ assume nei punti z interni ad R, a meno che $f(z)$ non si riduca ad una costante. (1)

Supponiamo che $|f(z)|$, all'interno di R, raggiunga il massimo in un punto $z=a$, cioè si abbia:

$$|f(a)| \geq |f(z)|$$

per qualunque altro punto z interno ad R.

Consideriamo un cerchio, di centro a, interno ad R, e facciamo l'ipotesi che sopra la circonferenza C di questo cerchio esista un punto z per cui sia:

$$|f(a)| > |f(z)| \ .$$

Allora, a causa della continuità di $|f(z)|$ sopra C, questa disequaglianza ha luogo per tutti i punti di un arco E di C, sia pure molto piccolo, che comprende il punto z.

Spezzando C nei due archi E e $C-E$, si ha per la formola di Cauchy,

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C-E}\frac{f(z)\,dz}{z-a}+\frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{f(z)\,dz}{z-a}\ ;$$

e quindi, prendendo i moduli dei due membri, risulta

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi r}\int_{C-E}|f(z)|\,ds+\frac{1}{2\pi r}\int_E |f(z)|\,ds\ ,$$

dove r denota il raggio di C.

Nel primo integrale a secondo membro $|f(z)|$ non supera $|f(a)|$ e nel secondo integrale $|f(z)|$ è minore di $|f(a)|$; dunque, se nei due integrali poniamo $|f(a)|$ in luogo di $|f(z)|$, si ha certamente

$$|f(a)| < \frac{|f(a)|}{2\pi r}(C-E)+\frac{|f(a)|}{2\pi r}E\ .$$

Ma ciò è assurdo, perchè, essendo $C=2\pi r$, il secondo membro vale $|f(a)|$.

Concludiamo che in tutti i punti z di C deve essere

$$|f(z)| = |f(a)|\ ; \qquad (11)$$

e siccome il ragionamento può ripetersi per ogni cerchio concentrico a C e interno a C, si vede che la (11) ha luogo anche per i punti z interni a C.

Sia ora z un punto qualunque interno alla regione $\mathcal{R}$, e congiungiamolo con a mediante una linea L tutta interna ad $\mathcal{R}$; poi costruiamo una catena di cerchi, ciascuno avente il centro interno al precedente, tale che il primo abbia il centro in a e l'ultimo contenga all'interno il punto z. La possibilità di costruire una siffatta catena di cerchi è evidente potendo scegliere i centri sopra L e i raggi minori della minima distanza tra i punti di L e i punti del contorno di $\mathcal{R}$.

Giacchè nel secondo cerchio $|f(z)|$ raggiunge il massimo nel centro, perchè ivi ha il valore $|f(a)|$, segue dal ragionamento fatto che la (11) sussiste anche per i punti z di questo secondo cerchio, ...; e, così andando avanti, si conclude che la (11) sussiste per il punto z che sta dentro l'ultimo cerchio.

Dunque $|f(z)|$ si mantiene costante all'interno di $\mathcal{R}$, e quindi (N° 19) si mantiene ivi costante $f(z)$.

Segue che, se la funzione $f(z)$ è continua anche nei punti del contorno di $\mathcal{R}$, essendo l'insieme dei punti z chiuso, la funzione continua $|f(z)|$ (1) ha certamente un massimo; ma, per quanto abbiamo dimostrato, questo massimo sarà raggiunto sempre in un punto del contorno.

N° 35 - Ciò che abbiamo detto per il massimo di $|f(z)|$ non può ripetersi per il minimo di $|f(z)|$, perchè la funzione $f(z)$ può annullarsi all'interno di $\mathcal{R}$.

Però, se $f(z)$ non prende mai il valore zero in $\mathcal{R}$,

(1) è una funzione continua [illegible] ha un massimo

non può $|f(z)|$ essere minimo <u>in un punto interno ad $\mathcal{R}$</u>, perchè il modulo della funzione $\frac{1}{f(z)}$, che allora è pure olomorfa all'interno di $\mathcal{R}$, non può essere massimo in un tale punto.

Dal teorema stabilito nel precedente numero si deduce che una funzione $u(x,y)$, armonica (N° 21) in una regione $\mathcal{R}$, non può essere nè massima nè minima in punti interni ad $\mathcal{R}$.

Infatti sappiamo che alla $u(x,y)$ possiamo associare un'altra funzione $v(x,y)$, pure armonica in $\mathcal{R}$, in modo che

$$\varphi(z) = u + i v$$

sia una funzione olomorfa della variabile $z = x + iy$ all'interno di $\mathcal{R}$.

E allora sarà ivi pure olomorfa la funzione

$$f(z) = e^{\varphi(z)}$$

per la quale è:

$$|f(z)| = e^{u}.$$

Siccome $f(z)$, essendo una funzione esponenziale, non prende mai il valore zero in $\mathcal{R}$ perchè $\varphi(z)$ è ivi olomorfa, segue che $|f(z)|$ non può essere nè massimo nè minimo in un punto interno ad $\mathcal{R}$; e allora lo stesso avviene per $u(x,y)$, sempre che u non sia una costante.

Capitolo II°

FUNZIONI MONODROME

§ 6. - SERIE DI FUNZIONI -

N° 36. *Convergenza uniforme* - Si abbia una serie:

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots \qquad (1)$$

dove ogni termine di assegnato posto è una ben determinata funzione definita nei punti z di una linea L o di una regione R.

Supponendo che la serie sia sempre convergente nei detti punti, la somma della serie definisce una funzione

$$F(z)=f_1(z)+f_2(z)+f_3(z)+\cdots \qquad (2)$$

sopra la linea o nella regione.

Se denotiamo con $F_n(z)$ la somma dei primi n termini della serie (1), tutte le volte che assegniamo z nel suo campo di variabilità e un numero positivo ε ad arbitrio, esiste un posto p tale da avere per ogni $n>p$:

$$|F(z)-F_n(z)|<\varepsilon, \qquad (3)$$

perchè $F_n(z)$ tende, per definizione, ad $F(z)$ al crescere inde-

finitamente di n.

In generale accade che il posto p varia quando si cambia il valore assegnato a z; ma, se, per ogni ε, è possibile trovare p in modo che la (3) valga per *tutti* i punti z del campo di variabilità, si dice che la serie (1) è *uniformemente convergente* in quel campo.

La nozione di convergenza uniforme in un dato campo può anche presentarsi sotto questo aspetto:

La serie (1) si dice uniformemente convergente nel campo dove varia z, se, per ogni ε, esiste un posto p tale che, per due indici qualunque m,n maggiori di p, si abbia:

$$(3') \qquad |F_m(z)-F_n(z)|<\varepsilon, \qquad (m>n>p)$$

per tutti i punti z del campo.

La equivalenza delle condizioni (3) e (3') si stabilisce subito.

E difatti, se ha luogo la (3), scrivendo la (3) anche per l'indice m e sommando poi membro a membro le due diseguaglianze, si ottiene la (3'), dove sta 2ε al posto di ε; ma ciò non importa perchè ε è arbitrario. Viceversa, se ha luogo la (3'), si può affermare anzitutto, in base al principio generale di convergenza, che $F_m(z)$ tende ad un limite $F(z)$ al crescere indefinitamente di m; e quindi, facendo divergere m nella (3') si ottiene la (3), dove al posto di ε si può scrivere 2ε.

N° 37. *Teorema di confronto* - Per decidere circa l'uniforme convergenza di una serie di funzioni, si adopera communemente un criterio di confronto molto semplice.

Confrontiamo la serie (1) con una serie convergente a termini costanti positivi:

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots\cdots\cdots \qquad (1')$$

Se, per tutti gli indici n, si ha

$$|f_n(z)| \leq c_n , \qquad (4)$$

qualunque sia z nel suo campo di variabilità, la serie (1) è assolutamente e uniformemente convergente in quel campo.

Che la (1) sia assolutamente convergente, è conseguenza immediata dell'ipotesi (4), la quale assicura la convergenza della serie formata con i moduli dei termini di (1), essendo convergente la (1').

Inoltre, sempre per la convergenza di (1'), possiamo determinare, in corrispondenza al numero ε, un posto p in modo che per $n > p$ risulti:

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_m < \varepsilon$$

qualunque sia l'indice $m > n$.

E allora, essendo

$$F_m(z) - F_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots\cdots\cdots + f_m(z),$$

viene subito, prendendo i moduli dei due membri e tenendo conto di (4):

$$|F_m(z) - F_n(z)| < \varepsilon ,$$

la quale diseguaglianza, come la (4), sussiste qualunque sia z nel suo campo di variabilità.

Dunque la (1) è uniformemente convergente in questo campo.

È quasi superfluo avvertire che, per le nostre conclusioni, basta che la (4) sia soddisfatta per tutti i valori dell'indice n da un certo posto in poi.

La condizione di convergenza uniforme in un dato campo di una serie di funzioni è di somma importanza, perchè, quando è soddisfatta, permette di considerare la serie, sotto certi riguardi essenziali posti in rilievo dai tre teoremi che seguono, come una somma di un numero finito di termini.

N° 38. Teorema della continuità - Se i singoli termini della serie (1) sono funzioni continue dei punti z di una linea o di una regione, e se la serie converge ivi in modo uniforme, anche la somma della serie è funzione continua di z.

Se z_0 e z sono due punti del campo di variabilità di z, possiamo scrivere identicamente, qualunque sia l'indice n,

$$F(z)-F(z_0) = \left[F_n(z)-F_n(z_0)\right] + \left[F(z)-F_n(z)\right] - \left[F(z_0)-F_n(z_0)\right].$$

Ora, in corrispondenza ad un dato numero positivo ε, fissiamo n in modo che sia soddisfatta la (3) per tutti i punti z del campo, ciò che è possibile per la convergenza uniforme della serie (1). Poi, giacchè $F_n(z)$ è certamente funzione continua nel punto $z=z_0$, perchè somma di un numero finito n di siffatte funzioni, possiamo determinare un numero positivo δ in modo che sia anche

$$|F_n(z) - F_n(z_0)| < \varepsilon$$

per tutti i punti z del campo che saddisfano alla limitazione $|z-z_0| < \delta$.

Dunque, prendendo i moduli dei due membri dell'eguaglianza che precede, si ha:

$$|F(z)-F(z_0)| < 3\varepsilon, \qquad |z-z_0|<\delta$$

e ciò prova che la somma $F(z)$ della serie (1) è funzione continua nel punto generico $z=z_0$ del campo.

Se i termini della serie (1) sono funzioni *continue*, anzi che di una sola variabile z, per esempio, di due variabili z, u, potendo ciascuna variare sopra una linea o in una regione, e sempre che la serie converga *uniformemente nel campo di variabilità* di z, u, si conclude egualmente che la somma della serie risulta funzione *continua* dei due argomenti z, u, nel detto campo se tali sono i singoli termini di (1).

N° **39**. Teorema dell'integrabilità - *Se i singoli termini della serie (1) sono funzioni continue nei punti z di una linea L, e se la serie è ivi uniformemente convergente, si ha:*

$$\int_L F(z)dz = \int_L f_1(z)dz + \int_L f_2(z)dz + \cdots\cdots \qquad (5)$$

Si osservi anzitutto che nelle attuali ipotesi la somma $F(z)$ della serie è, per il teorema precedente, una funzione continua di z sopra L, e perciò esiste lo integrale di $F(z)$ lungo L.

Ciò posto, possiamo scrivere qualunque sia l'indice n,

$$\int_L F(z)\,dz - \left(\int_L f_1(z)\,dz + \cdots + \int_L f_n(z)\,dz\right) = \int_L [F(z)-F_n(z)]\,dz;$$

e quindi se, in corrispondenza ad un dato ε positivo, si sceglie n al di là di un certo posto p in modo da avere

$$|F(z)-F_n(z)| < \frac{\varepsilon}{L}$$

per tutti i punti z di L, prendendo i moduli dei due membri dell'eguaglianza ora scritta, viene subito

$$\left|\int_L F(z)\,dz - \left(\int_L f_1(z)dz + \cdots + \int_L f_n(z)dz\right)\right| < \varepsilon. \qquad (n>p)$$

E si conclude che la somma dei primi n termini della serie a secondo membro di (5) tende precisamente all'integrale che sta a primo membro al crescere indefinitamente di n.

Supponiamo che i termini della serie (1) siano funzioni, oltre che di z, di un secondo argomento u, variabile sopra una linea o in una regione, e che siano funzioni continue dei punti z di L ogni volta che venga fissato u.

Allora, se la serie è uniformemente convergente nel campo di variabilità di z, u, l'ultima diseguaglianza dimostra che la serie a secondo membro di (5), la quale è nel nostro caso una serie di funzioni di u, è uniformemente convergente nel campo dove varia u.

N° 40 <u>Teorema della derivabilità</u>: Se i singoli termini della serie (1) sono funzioni olomorfe all'interno di una regione semplice R e continue al contorno, e se la serie è uniformemente convergente sul contorno C di R, la somma della serie risulta pure una funzione olomorfa all'interno di R, e si ha:

$$F'(z) = f_1'(z) + f_2'(z) + f_3'(z) + \cdots\cdots \qquad (6)$$

Essendo la (1) uniformemente convergente sopra C, possiamo trovare in corrispondenza a un dato ε positivo, un posto p in modo che, per $m > n > p$, si abbia:

$$\left| F_m(z) - F_n(z) \right| < \varepsilon$$

per tutti i punti z di C.

Ma il modulo della funzione $F_m(z) - F_n(z)$, olomorfa in R e continua al contorno, prende il suo massimo valore in un punto del contorno (N° 34); quindi la diseguaglianza ora scritta, essendo soddisfatta in questo punto, è soddisfatta certamente anche in tutti i punti z interni ad R.

Dunque la serie (1) risulta uniformemente convergente in tutta R, compresi i punti del contorno.

Sia ora $\bar{C}$ un circuito qualunque interno ad R, e consideriamo due punti z e ξ della regione $\bar{R}$ limitata da $\bar{C}$. Si ha:

$$\frac{F(\xi) - F(z)}{\xi - z} = \frac{f_1(\xi) - f_1(z)}{\xi - z} + \frac{f_2(\xi) - f_2(z)}{\xi - z} + \cdots\cdots;$$

e quindi, applicando ad ogni rapporto del secondo membro la formola dell'incremento finito, viene

$$\frac{F(\xi) - F(z)}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_1(u)\,du}{(u-z)(u-\xi)} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_2(u)\,du}{(u-z)(u-\xi)} + \cdots\cdots$$

Ora, la serie formata con le funzioni integrande è uniformemente convergente nel campo di variabilità degli argomenti u, z, ξ, perchè tale è la serie formata con i numeratori, e i due fattori a denominatore, hanno i loro moduli non minori di un numero fisso, che è la minima distanza tra C e $\bar{C}$.

Inoltre le dette funzioni integrande sono funzioni continue dei tre menzionati argomenti: dunque, tenendo fermo z, la serie degli integrali risulta una serie di funzioni continue di ξ e uniformemente convergente in $\bar{R}$.

Segue che, facendo tendere ξ a z, la somma della serie degli integrali, che viene funzione continua di ξ, tende a un ben determinato limite, e questo limite è la somma stessa calcolata per $\xi = z$, cioè si ha:

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_1(u)\,du}{(u-z)^2} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_2(u)\,du}{(u-z)^2} + \cdots\cdots$$

Questa eguaglianza, per la formola della derivata, non è altro che la (6); oltre a ciò viene dimostrato che la serie a secondo membro di (6) risulta *uniformemente convergente* in ogni regione $\bar{R}$ *interna* ad R, così che si può derivare la (6) termine a termine quante volte si vuole, sempre nei punti z interni ad R.

È quasi superfluo osservare che il teorema della derivabilità sussiste inalterato anche quando la regione R è a contorno multiplo; ma allora s'intende che bisogna supporre l'uniforme convergenza della serie (1) sopra tutti i circuiti che limitano R.

§. 7- - SERIE DI POTENZE -

N° 41. Tra le serie di funzioni, le più semplici e nello stesso tempo le più importanti dell'Analisi, sono le *serie di potenze*, cioè le serie del tipo

$$c_0 + c_1 (z-a) + c_2 (z-a)^2 + \dots\dots \qquad (1)$$

che procede secondo le potenze naturali della differenza $z-a$, dove a è una costante, che si chiama *centro della serie*, e

$$c_0, \; c_1, \; c_2, \dots\dots$$

sono pure delle costanti, dette *coefficienti* della serie.

Si possono facilmente dare esempî di serie di potenze (1) che non sono convergenti per alcun valore dell'argomento z tranne che per $z = a$, come sarebbe la serie

$$z + 2!\, z^2 + 3!\, z^3 + \dots$$

la quale è convergente solo per $z = 0$.

Ma noi daremo il nome di *elemento analitico* ad una serie (1) per cui *esistano* punti z *diversi da* a dove la serie è convergente.

Per la serie di potenze si ha il seguente teorema fondamentale:

"Se la serie (1) è convergente in un punto z_0 diverso da a, essa è assolutamente convergente in ogni punto z interno al cerchio di centro a e di raggio $|z_0 - a|$."

Supponendo scritta la serie (1) per $z = z_0$, dall'ipotesi che questa è convergente, segue che il suo termine generico $c_n (z_0 - a)^n$ tende a zero al crescere indefinitamente di n, e perciò, quando n supera un certo posto p, sarà certamente

$$|c_n (z_0 - a)^n| < 1.$$

E allora, dividendo i due membri per $|z_0 - a|^n$ e moltiplicandoli poi per $|z-a|^n$, si ottiene

$$|c_n (z-a)^n| < \left| \frac{z-a}{z_0 - a} \right|^n \qquad (n > p)$$

Se il punto z è interno al detto cerchio, si ha $|z-a| < |z_0 - a|$, e quindi la serie che ha come termine generico il secondo membro di questa diseguaglianza è convergente, perchè è una serie geometrica di ragione minore di 1: dunque, in base alla diseguaglianza stessa, è assolutamente convergente la serie (1) per un tale punto z.

N.° 42. <u>Cerchio di convergenza</u>. - Consideriamo l'insieme dei numeri positivi $|z_0 - a|$ in corrispondenza a tutti i punti z_0 nei quali la serie (1) è convergente.

Se questo insieme *non è limitato* la serie (1) è convergente in qualunque punto z del piano.

Infatti, qualunque sia il punto z, esiste per ipotesi un punto z_0 tale che

$$|z-a| < |z_0 - a| \,;$$

ed essendo la serie in discorso convergente per $z = z_0$, essa risulta assolutamente convergente nel punto z che si considera, in base al teorema precedente.

Se invece l'insieme in discorso è *limitato*, chiamiamo ρ il suo estremo superiore e consideriamo il cerchio di centro a e di raggio ρ.

La serie (1) non può risultare convergente in un punto z_0 esterno a questo cerchio, perchè allora si avrebbe un numero $|z_0 - a|$ del nostro insieme maggiore dell'estremo superiore.

La serie (1) è invece assolutamente convergente in ogni punto z interno al detto cerchio, perchè allora, es-

sendo $|z-a| < \rho$, esiste, per la definizione stessa di estremo superiore, un punto z_0 tale che sia

$$|z-a| < |z_0 - a| \,;$$

quindi la serie (1) risulta assolutamente convergente nel punto z che si considera.

Il cerchio in discorso, la cui circonferenza separa i punti z del piano dove la (1) è convergente dai punti dove non è tale, si chiama *cerchio di convergenza* della serie (1), e il raggio ρ del cerchio si chiama il *raggio di convergenza* della serie.

Quando una serie di potenze converge in tutti i punti z del piano, si dice anche che il suo raggio di convergenza è ∞.

N.° 43. Nulla può dirsi, in generale, circa la convergenza o meno di una serie di potenze sopra la circonferenza di convergenza. Per es. le tre serie

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

$$1 + \frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \dots$$

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

hanno tutte, come facilmente si verifica, per cerchio di convergenza il cerchio col centro nell'origine e raggio 1.

È intanto nei punti z della circonferenza di questo cerchio la prima serie non è mai convergente,(1) men-

(1) Infatti per $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, è $|a_n z^n| = |\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta| = 1$ e quindi [illegible]

tre la seconda serie è sempre convergente. In quanto alla terza serie essa è divergente nel punto $z = 1$, e si dimostra che è convergente in ogni altro punto z della circonferenza in discorso.

Più generalmente possiamo dimostrare che

Se una serie di potenze

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots$$

ha come raggio di convergenza 1 e i suoi coefficienti sono numeri positivi decrescenti e tendenti a zero, la serie è convergente in tutti i punti della circonferenza di convergenza, fatta al più eccezione del punto $z=1$.

In un punto $z = e^{i\vartheta}$ della detta circonferenza, la serie in discorso diviene

$$a_0 + a_1 e^{i\vartheta} + a_2 e^{i2\vartheta} + \dots\dots\dots \qquad (2)$$

Ora, se z è diverso da 1, cioè se ϑ è diverso da zero a meno di multipli di 2π, la somma:

$$s_n = 1 + e^{i\vartheta} + e^{i2\vartheta} + \dots\dots + e^{i(n-1)\vartheta} = \frac{1-e^{in\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}} \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

si mantiene limitata al crescere indefinitamente di n, perchè, applicando la formola di Euler all'ultima espressione, si trova facilmente:

$$|s_n| = \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{n\vartheta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left|\operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2}\right|} = K.$$

Dunque la serie

$$(a_0 - a_1) s_1 + (a_1 - a_2) s_2 + (a_2 - a_3) s_3 + \dots\dots \qquad (3)$$

risulta assolutamente convergente, perchè, essendo le differenze $a_{n-1} - a_n$ positive, i valori assoluti dei termini di questa serie sono minori dei corrispondenti termini della serie manifestamente convergente

$$(a_0 - a_1)K + (a_1 - a_2)K + (a_2 - a_3)K + \dots$$

Intanto la somma dei primi m termini della serie (3), ordinata rispetto ai coefficienti a_r $(r = 0, 1, \dots\dots, m)$, è

$$a_0 + a_1(s_2 - 1) + a_2(s_3 - s_2) + \dots + a_{m-1}(s_m - s_{m-1}) - a_m s_m,$$

e questa, tenendo presenti le espressioni delle s_n, coincide con la somma dei primi m termini di (2), fatta astrazione del termine $-a_m s_m$ che tende a zero al crescere indefinitamente di m.

Dunque, dalla convergenza della (3) segue la convergenza della (2), come si voleva dimostrare.

N° 44. Teorema di Cauchy - Hadamard.

Si tratta di vedere se, data la successione

$$c_0, c_1, c_2, \dots$$

dei coefficienti della serie (1), è possibile trovare il raggio di convergenza della serie. ([illegible])

A questo proposito Cauchy ha dato sostanzialmente un criterio, che venne poi meglio precisato da J. Hadamard e che si può enunciare così:

Se $\frac{1}{\rho}$ denota il massimo limite della successione

$$(4) \qquad \sqrt[n]{|c_n|}, \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

il numero ρ è il raggio di convergenza della serie (1).

Anzitutto osserviamo che, se la serie (1) è effettivamente un elemento analitico, la successione (4) è limitata.

Infatti, se così non fosse, per un punto z diverso da a, si avrebbero *infiniti* valori dell'indice n tali che risulti:

$$|z-a|\sqrt[n]{|c_n|}>1, \text{ ossia } |c_n(z-a)^n|>1$$

Allora, il termine generale di (1) non tende a zero al crescere indefinitamente dell'indice, e quindi la serie (1) non è convergente nel detto punto z, e converge soltanto per $z=a$.

La successione (4) essendo dunque limitata, ammette certamente punti limiti.

Consideriamo in primo luogo il caso che la (4) ammette come *unico* punto limite lo zero. Allora, fissato z ad arbitrio e un numero k positivo e *minore* di 1, esiste un posto p tale che, per $n>p$, si abbia:

$$|z-a|\sqrt[n]{|c_n|}<k, \text{ ossia } |c_n(z-a)^n|<k^n;$$

così che la serie (1) risulta assolutamente convergente in tutti i punti z del piano.

Escluso questo caso, il *massimo* dei punti limiti di (4), massimo che certamente esiste perchè l'insieme di questi punti limiti è chiuso, sarà un numero positivo, che possiamo denotare con $\frac{1}{\rho}$.

Allora il *massimo limite* del prodotto

$$|z-a|\sqrt[n]{|c_n|} \qquad (4')$$

è $\frac{|z-a|}{\rho}$; quindi, nell'ipotesi di $|z-a|>\rho$, essendo questo limite maggiore di 1, esistono infiniti indici n per i quali risulta

$$|z-a|\sqrt[n]{|c_n|}>1.$$

Dunque la serie (1) non è convergente per i punti z, tali che $|z-a|>\rho$, cioè per i punti z *esterni* al cerchio di centro a e di raggio ρ.

Nell'ipotesi di $|z-a|<\rho$, essendo $\frac{|z-a|}{\rho}<1$, scegliamo un numero k tale che

$$\frac{|z-a|}{\rho}<k<1,$$

e osserviamo che possono eventualmente esistere soltanto un numero *finito* di termini (4') maggiori o eguali a k, altrimenti la successione (4') avrebbe un punto limite maggiore del massimo $\frac{|z-a|}{\rho}$.

Dunque, quando n supera un certo posto p, si ha sempre

$$|z-a|\sqrt[n]{|c_n|}<k;$$

e perciò la serie (1) è convergente assolutamente per i punti z tali che $|z-a|<\rho$, cioè per i punti z *interni* al cerchio di centro a e di raggio ρ.

Concludiamo che ρ è il raggio di convergenza della serie in discorso.

N° 45. **Teorema** - La somma di una serie di potenze di $z-a$ è, all'interno del suo cerchio di convergenza, una funzione olomorfa di z.

Sia C la circonferenza di convergenza della serie (1) e poniamo in ogni punto z interno a C:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \qquad (1')$$

Consideriamo una seconda circonferenza $\bar{C}$ concentrica e interna a C, e sia z_0 un punto fisso posto sopra $\bar{C}$; così che, per ogni punto z del cerchio limitato da $\bar{C}$, si ha $|z-a| \leq |z_0-a|$, e quindi:

$$|c_n(z-a)^n| \leq |c_n(z_0-a)^n| .$$

Siccome la serie (1) è assolutamente convergente per $z = z_0$, si deduce, in base al teorema di confronto (N° 37), che questa serie è uniformemente convergente in tutto il cerchio limitato da $\bar{C}$. Allora, essendo i singoli termini di (1) funzioni olomorfe di z in qualunque regione del piano, possiamo applicare il teorema di derivabilità (N° 40) e concludere che $f(z)$ è funzione olomorfa di z all'interno di $\bar{C}$, e si ha:

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \dots \qquad (5)$$

E possiamo anche dire che $f(z)$ è olomorfa all'interno di C, perchè ogni punto interno a C si può sempre ritenere interno ad una circonferenza tale che $\bar{C}$

Dunque, in ogni punto z interno a C si può derivare la (1') termine a termine quante volte si vuole.

Segue che i coefficienti della serie (1') sono perfet-

tamente determinati, cioè che non è possibile una stessa funzione $f(z)$ con due diverse serie di potenze (1).

Infatti, facendo in (1') $z = a$, viene

$$\boxed{c_0 = f(a) ;} \qquad (6)$$

poi, derivando la (1') n volte di seguito e facendo $z = a$ si ha

$$(6') \qquad \boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} ;} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

così che qualunque sviluppo di $f(z)$ del tipo (1) coincide con la serie (di Taylor):

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \qquad (1'')$$

Si noti che, essendo la serie (5) convergente all'interno di C, non può il raggio di convergenza di (5) essere minore del raggio di convergenza di (1); e nemmeno può essere maggiore, perchè si ha:

$$|c_n(z-a)^n| < |n\, c_n (z-a)^{n-1}|$$

appena che n supera $|z-a|$, e quindi la serie (1) è convergente nei punti interni al cerchio di convergenza di (5).

Dunque la serie (1) e la serie (5), formata con le derivate dei singoli termini di (1), hanno lo stesso cerchio di convergenza.

Se la serie (1) è convergente in tutti i punti z del piano, la sua somma $f(z)$ è una funzione olomorfa in tutto il piano, e allora si chiama comunemente una *funzione intera*.

Nelle funzioni intere rientrano le funzioni *razionali intere* di z, cioè i polinomii in z, i quali si presentano quando i coefficienti di (1), da un certo posto in poi, sono tutti nulli.

Una funzione intera che non si riduca ad un polinomio, si chiama più specificamente una *trascendente intera*.

Tali sono, ad esempio, le funzioni:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\cdots$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\cdots$$

le quali restano definite anche per valori complessi dell'argomento z dalle serie stesse.

N° 46. Teorema di Liouville.

Si abbia una serie di potenze:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots\cdot$$

e sia C una circonferenza concentrica e interna al cerchio di convergenza della serie.

Applicando la formola delle derivate tenendo presente le (6'), si ha:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} \;;$$

e quindi, denotando con r il raggio di C e prendendo i moduli dei due membri, viene:

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi r^{n+1}}\int_C |f(z)|\,ds\,.$$

Dunque, se chiamiamo μ il massimo di $|f(z)|$ sopra C, si ha subito:

$$|c_n| \leq \frac{\mu}{r^n}\,. \qquad (7)$$

Supponiamo ora che $f(z)$ sia una funzione *intera*, così che il suo sviluppo in serie di potenze converge in ogni punto z del piano, e che sopra infinite circonferenze di raggi crescenti indefinitamente si abbia:

$$|f(z)| < \mu\,,$$

essendo μ un numero *fisso* positivo.

Allora la (7) deve aver luogo per valori indefinitamente crescenti di r e quindi deve essere $c_n = 0$ per $n > 0$.

Dunque, essendo nulli tutti i coefficienti dello sviluppo di $f(z)$, fatta al più eccezione di c_0, la $f(z)$ si riduce alla costante c_0.

Resta così dimostrato il seguente teorema (di Liouville):

"Il modulo di una funzione intera non può mantenersi limitato sopra infinite circonferenze di raggi indefinitamente crescenti senza che la funzione si riduca ad una costante".

N° 47. Più generalmente, possiamo dimostrare che:

Se la parte reale u di una funzione intera $f(z)$ soddisfa alla limitazione

$$u < \mu\, r^m \qquad (m \text{ positivo o nullo}) \tag{8}$$

sopra infinite circonferenze i cui raggi r possano crescere indefinitamente, la funzione $f(z)$ si riduce ad un polinomio in z di grado m al più.

Per semplicità sviluppiamo $f(z)$ in serie di potenze nell'intorno del punto origine $z=0$, e sia:

$$f(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\cdots\cdots,$$

la quale serie risulta convergente in ogni punto z del piano, e denotiamo con $\bar f(z)$ il numero coniugato di $f(z)$ cioè poniamo:

$$\bar f(z)=\bar a_0+\bar a_1\bar z+\bar a_2\bar z^2+\cdots\cdots$$

i cui termini sono i numeri coniugati dei corrispondenti termini di $f(z)$. Allora si ha:

$$u=\frac{f(z)+\bar f(z)}{2};$$

e quindi, dividendo i due membri per z^{n+1}, con $n>m$, e integrando lungo una circonferenza C, col centro nell'origine e di raggio r, viene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u}{z^{n+1}}\,dz=\frac{1}{4\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz+\frac{1}{4\pi i}\int_C\frac{\bar f(z)}{z^{n+1}}dz. \tag{9}$$

Il primo integrale del secondo membro vale $\frac{1}{2}a_n$. L'ultimo integrale è nullo.

Infatti la serie che dà $\bar f(z)$ è una serie di funzioni continue di z (non olomorfe) uniformemente convergente sopra C, come lo sviluppo di $f(z)$. L'integrazione può dunque farsi termine a termine: integrando il termine generico $\bar a_s\frac{\bar z^s}{z^{n+1}}$ e ponendo $z=re^{i\vartheta}$, si trova

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \bar a_s\frac{\bar z^s dz}{z^{n+1}}=\frac{\bar a_s r^{s-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i(s+n)\vartheta}d\vartheta=0,$$

perchè la somma $s+n$ non è mai nulla.

Ciò posto, eseguendo la stessa trasformazione sul primo membro della formola (9), questa diviene:

$$\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}u\,d\vartheta=\frac{1}{2}a_n;$$

poi, prendendo i moduli dei due membri risulta:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u|\,d\vartheta\geq\frac{1}{2}r^n|a_n|. \tag{10}$$

D'altra parte si ha:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{dz}{z}=a_0,$$

ossia:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z)\,d\vartheta=a_0;$$

e quindi, prendendo le parti reali dei due membri, viene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\, d\vartheta = \frac{a_0+\bar{a}_0}{2}.$$

Sommando membro a membro questa eguaglianza con la (10), risulta:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|u|+u)\,d\vartheta \geq \frac{1}{2} r^n |a_n| + \frac{a_0+\bar{a}_0}{2}.$$

Si osservi adesso che, essendo u reale, la somma $|u|+u$ è nulla tutte le volte che u è negativo, ed è invece eguale a $2u$ quando u è positivo. In ogni caso, in base all'ipotesi (8), la detta somma è minore di $2\mu r^m$; dunque, se nel primo membro dell'ultima diseguaglianza poniamo sotto il segno integrale il numero $2\mu r^m$ e dividiamo poi i due membri per $2r^m$, si ha

$$\mu > \frac{1}{4} r^{n-m}|a_n| + \frac{a_0+\bar{a}_0}{4r^m}.$$

Ciò dimostra che a_n deve essere nullo per $n>m$, altrimenti il secondo membro cresce indefinitamente al crescere indefinitamente di r e non si può mantenere al disotto del numero fisso μ.

Dunque $f(z)$ si riduce ad un polinomio di grado m al più.

Applicando il teorema ora dimostrato alla funzione $-f(z)$, si vede che, se è soddisfatta la limitazione

$$-u < \mu r^m,$$

la funzione $f(z)$ si riduce egualmente ad un polinomio in z di grado m al più.

In particolare, per $m=0$, si deduce, che la parte reale di una funzione intera, cioè una funzione u armonica in tutto il piano, non può essere limitata nè superiormente, nè inferiormente senza ridursi ad una costante.

In altri termini, una tale funzione u deve assumere valori positivi e valori negativi assolutamente maggiori di ogni numero positivo assegnato; così che, a causa della continuità della funzione u, essa prende, in infiniti punti (x,y), qualunque valore c dato a piacere.

Dal teorema dimostrato segue subito che:

Teorema Se sopra infinite circonferenze i cui raggi crescono oltre ogni limite si ha

$$|f(z)| < \mu r^m \tag{11}$$

la funzione intera $f(z)$ si riduce ad un polinomio di grado m al più.

Infatti, essendo: $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2} \geq u$, dalla diseguaglianza (11) segue la (8).

Però, l'ultima proposizione può dimostrarsi direttamente in modo molto semplice.

Si ha

$$\frac{f(z)}{z^m} = \frac{a_0}{z^m} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{z} + a_m + a_{m+1} z + \cdots\cdots$$

Siccome al crescere indefinitamente di $r=|z|$ il modulo del primo membro si mantiene limitato in base alla (11), mentre la parte fratta del secondo membro tende a zero, segue che si mantiene limitato il modulo della funzione intera

$$a_m + a_{m+1}\, z + \cdots\cdots$$

Ma allora, per il teorema di *Liouville*, questa si deve ridurre alla costante a_m, e quindi dalla precedente eguaglianza si deduce che $f(z)$ è un polinomio di grado m al più.

N° 48. Sviluppo in serie di Taylor di una funzione olomorfa

Abbiamo visto che una serie di potenze definisce una funzione olomorfa all'interno del cerchio di convergenza; vogliamo ora dimostrare che, inversamente, si ha il teorema fondamentale:

Ogni funzione $f(z)$, olomorfa in una regione R, si può sempre sviluppare in una serie di Taylor in ogni cerchio interno ad R.

Si abbia un cerchio interno ad R limitato da una circonferenza C di centro a, e si consideri una seconda circonferenza $\bar{C}$ concentrica e interna a C.

Se z è un punto qualsiasi interno a $\bar{C}$, si ha per la formola di *Cauchy*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z}.$$

Intanto possiamo scrivere identicamente:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi-a)-(z-a)} = \frac{1}{\xi - a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\xi-a}};$$

e giacchè il rapporto $\frac{z-a}{\xi-a}$ ha il modulo minore dell'unità, l'ultima frazione si può sviluppare in serie geometrica convergente secondo le potenze naturali di questo rapporto, e si ha:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi-a} + \frac{z-a}{(\xi-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\xi-a)^3} + \cdots\cdots$$

Moltiplicando per $f(\xi)$, si ottiene

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{\xi-a} + \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^2}(z-a) + \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^3}(z-a)^2 + \cdots\cdots, \quad (12)$$

e si vede che la serie a secondo membro è uniformemente convergente nei punti ξ di C qualunque sia z interno a $\bar{C}$. (12'')

Infatti, se μ denota il massimo di $|f(\xi)|$ sopra C e r ed $\bar{r}$ denotano i raggi di C e $\bar{C}$, si ha che il modulo del termine di posto $n+1$ della serie (12) non supera il termine costante $\frac{\mu}{r^{n+1}}(\bar{r})^n =$

$$= \frac{\mu}{r}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^n,$$

che è quello di una serie geometrica di ragione $\frac{\bar{r}}{r} < 1$. L'uniforme convergenza della serie (12) segue perciò dal teorema di confronto (N° 37).

Dunque, integrando termine a termine (N° 39) lungo C la serie (12), dopo averla moltiplicata per $\frac{1}{2\pi i}$, risulta

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots\cdots$$

(12')

avendo posto:

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}} \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

questi valori di c_n $(n=0,1,2,\dots)$ coincidono appunto (N° 45) con quelli dati dalle formole (6) e (6').

Lo sviluppo in serie di **Taylor** ora stabilito vale per i punti z del cerchio limitato da $\bar{C}$; ma si può dire che esso vale per ogni punto z interno a C, perchè un tale punto si può sempre ritenere interno ad una circonferenza come $\bar{C}$.

Una funzione si dice **regolare** in un punto a quando esiste un cerchio di centro a dove la funzione si possa sviluppare in serie di **Taylor**.

Si può dunque dire che una funzione olomorfa in una regione, è regolare in ogni punto interno alla regione.

N° 49. Sappiamo (N° 40) che una serie di funzioni:

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \cdots\cdots, \qquad (13)$$

olomorfe in una regione R e continue al contorno, ha come somma una funzione $F(z)$ pure olomorfa all'interno di R, purchè la serie sia *uniformemente convergente* sul contorno. Inoltre la serie risulta uniformemente convergente in R.

Nei punti z di un cerchio interno alla regione in discorso e di centro a, possiamo dunque scrivere:

$$F(z) = C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \cdots\cdots$$

e

$$f_s(z) = c_{s0} + c_{s1}(z-a) + c_{s2}(z-a)^2 + \cdots\cdots \qquad (s=1,2,3,\dots)$$

Dividendo i due membri di (13) per $(z-a)^{n+1}$ $(n=0,1,2,\dots)$ la serie che viene a secondo membro converge in modo uniforme sopra la circonferenza C del detto cerchio, e si può quindi integrare termine a termine lungo C. Si ha quindi:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_1(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_2(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} + \cdots$$

ossia, in base alle formole che dànno i coefficienti dello sviluppo in serie di potenze:

$$C_n = c_{1n} + c_{2n} + c_{3n} + \cdots\cdots$$

Resta così stabilito il seguente teorema (di **Weierstrass**)

Se si ha una serie di funzioni olomorfe in una regione R e continue al contorno, che sia su questo uniformemente convergente, sviluppando in serie di potenze la somma della serie in un cerchio interno ad R, un coefficiente di assegnato posto di questo sviluppo è eguale alla somma della serie formata con i coefficienti dello stesso posto negli sviluppi dei singoli termini della serie di funzioni.

La regione R può essere in particolare un cerchio di centro a e si possono considerare gli sviluppi in serie di potenze di $z-a$.

N° 50. Serie di Laurent. Se insieme alle potenze naturali di $z-a$ consideriamo anche quelle di $\frac{1}{z-a}$, possiamo rappresentare nei punti z di una corona circolare ogni funzione $f(z)$ che sia ivi olomorfa.

Sia $f(z)$ una funzione olomorfa nella corona circolare limitata da due circonferenze concentriche C, C', la seconda interna alla prima, e supponiamo che $f(z)$ sia continua anche nei punti delle dette circonferenze.

Consideriamo un punto z interno alla corona e circondiamolo con un cerchio C'' col centro in z e pure interno alla corona.

La funzione $\frac{f(\xi)}{\xi-z}$ dell'argomento ξ è olomorfa nella regione limitata dai tre circuiti C, C', C'', e quindi, per la formola (8) del N° **29**., si ha:

$$\int_C \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z} = \int_{C'} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z} + \int_{C''} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z},$$

gl'integrali essendo presi nei versi diretti.

L'ultimo integrale a secondo membro, qualora si divida per $2\pi i$, vale $f(z)$; così che dall'eguaglianza ora scritta si ricava:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z}, \qquad (14)$$

che è la formola di *Cauchy* estesa ad una regione limitata da due circuiti (N° 30).

Se a denota il centro delle due circonferenze C, C', possiamo scrivere:

$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{(\xi-a)-(z-a)};$$

ed essendo lungo C il modulo del rapporto $\frac{z-a}{\xi-a}$ minore di 1, si ha come precedentemente

$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{\xi-a} + \frac{z-a}{(\xi-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\xi-a)^3} + \cdots\cdots$$

e quindi:

$$\frac{f(\xi)}{\xi-z} = \frac{f(\xi)}{\xi-a} + \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^2}(z-a) + \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^3}(z-a)^2 + \cdots\cdots$$

Integrando termine a termine la serie a secondo membro lungo C, dove essa è uniformemente convergente, e ponendo

$$(15') \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}, \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

si ottiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z} = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

Per calcolare l'integrale lungo C' della (14), scriviamo così:

$$\frac{1}{\xi-z} = -\frac{1}{(z-a)-(\xi-a)};$$

poi, essendo lungo C' il modulo del rapporto $\frac{\xi-a}{z-a}$ minore di 1, si ha, analogamente a quanto precede:

$$\frac{1}{\xi-z} = -\frac{1}{z-a} - \frac{\xi-a}{(z-a)^2} - \frac{(\xi-a)^2}{(z-a)^3} - \cdots\cdots,$$

e quindi:

$$-\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{1}{z-a} f(\xi) + \frac{\xi - a}{(z-a)^2} f(\xi) + \frac{(\xi-a)^2}{(z-a)^3} f(\xi) + \cdots$$

Si vede facilmente, applicando il criterio di confronto come abbiamo fatto avanti, che la serie a secondo membro è uniformemente convergente sopra C'; dunque, integrando termine a termine lungo C' e ponendo:

$$(15'') \qquad c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} (\xi - a)^{n-1} f(\xi)\, d\xi \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

si ha:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z} = \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-3}}{(z-a)^3} + \cdots$$

Se nel secondo membro di (14) poniamo al posto dei due integrali che vi figurano gli sviluppi trovati, otteniamo:

$$(16) \qquad f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1 (z-a) + c_2 (z-a)^2 + \cdots$$

che si chiama lo sviluppo della funzione $f(z)$ in *serie di Laurent*.

Questo sviluppo procede secondo le potenze intere, positive, negative o nulle, di $z-a$, ed è valido per ogni punto z interno alla corona circolare dove $f(z)$ è olomorfa.

I coefficienti dello sviluppo (16) sono dati dalle due formole (15') e (15''), le quali si possono compendiare in una sola formola

$$(15) \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$$

dove n prende tutti i valori interi, positivi, negativi, o nulli, e C_0 è una qualsiasi circonferenza di centro a e interna alla corona (15') e (15'').

Infatti, le funzioni integrande in (15') e (15'') sono olomorfe nella corona in discorso, e quindi (N.° 29) gli integrali lungo C e lungo C' valgono gli integrali delle stesse funzioni lungo C_0. E allora si vede, essendo i due integrali calcolati lungo lo stesso circuito C_0, che si passa dall'uno all'altro cambiando n in $-n$, così che basta ritenere la sola formola (15) per i valori dell'indice n avanti detti.

Osserviamo infine che l'ipotesi della continuità di $f(z)$ anche nei punti delle due circonferenze C e C' che limitano la corona è superflua per la validità di (16). Perchè possiamo descrivere altre due circonferenze $\bar{C}$ e $\bar{C}'$ di centro a, la prima di raggio un poco minore di quello di C e la seconda di raggio un poco maggiore di quello di C'; e allora la validità di (16) viene assicurata nei punti z interni alla corona limitata da $\bar{C}$ e $\bar{C}'$. Ma qualunque punto interno alla prima corona si può sempre ritenere interno ad una corona come la seconda.

§ 8. - PROLUNGAMENTO ANALITICO -

N° 51. Zeri di una funzione olomorfa.

Sappiamo (N° 48) che una funzione $f(z)$ olomorfa in una regione R può essere rappresentata, in un cerchio interno ad R avente il centro in un punto a, mediante una serie di potenze naturali di $z-a$; cioè mediante uno sviluppo in serie di Taylor:

$$f(z) = c_0 + c_1\,(z-a) + c_2\,(z-a)^2 + \cdots \qquad (1)$$

Se $c_0 = 0$, la funzione $f(z)$ si annulla per $z = a$, e si dice allora che $f(z)$ ha nel punto a uno zero, il quale si dice *semplice* se è $c_1 \neq 0$, e si dice di *multiplicità* μ se è $c_1 = 0, \ldots\ldots, c_{\mu-1} = 0$, ma $c_\mu \neq 0$.

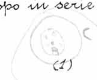
L'ordine di multiplicità di uno zero è sempre un numero finito, a meno che la funzione $f(z)$ non sia *identicamente* nulla in tutto il cerchio dove è valido lo sviluppo (1), per essere nulli tutti i suoi coefficienti.

Vogliamo ora dimostrare il seguente teorema fondamentale:

Se una funzione $f(z)$ è olomorfa in una regione R e si annulla in infiniti punti di un intorno comunque piccolo di un punto a interno alla regione, la funzione $f(z)$ è ivi identicamente nulla.

La nostra ipotesi significa che in un cerchio comunque piccolo di centro a cadono sempre dei punti z, diversi da a, nei quali $f(z)$ prende il valore zero.

Intanto, essendo a interno ad R, in un cerchio di centro a e tutto contenuto in R, vale lo sviluppo in serie di Taylor:



$$f(z) = c_0 + c_1\,(z-a) + c_2\,(z-a)^2 + \cdots\cdots \qquad (1)$$

Ora, se c_0 non è nullo, giacchè $f(z)$ tende a c_0 al tendere di z ad a, si può descrivere un cerchio di centro a e di raggio δ abbastanza piccolo affinchè in tutti i suoi punti z sia

$$|\, f(z) - c_0 \,| < \frac{1}{2}\, |\, c_0 \,| \; ;$$

ma allora, contrariamente all'ipotesi, $f(z)$ non può annullarsi dentro il detto cerchio.

Dunque c_0 deve essere nullo.

Supponiamo, in generale, che sia anche $c_1 = 0, \ldots\ldots, c_{n-1} = 0$, ma che esista un primo coefficiente c_n non nullo.

Allora possiamo scrivere:

$$f(z) = (z-a)^n \left[\, c_n + c_{n+1}(z-a) + \cdots\cdots \right]$$

e si vede come prima che la serie in parentesi quadra non si annulla mai in un cerchio di centro a e di raggio δ sufficientemente piccolo; così che, in questo cerchio $f(z)$ si annulla soltanto per $z = a$, sempre contrariamente all'ipotesi.

Segue che *tutti* i coefficienti dello sviluppo (1) sono nulli, e perciò $f(z)$ è identicamente nulla nel cerchio dove il detto sviluppo è valido.

(1) Considerando ora un qualsivoglia punto z interno alla regione R dove $f(z)$ è olomorfa, possiamo prima unire a con z mediante una linea semplice L interna ad R, e costruire poi lungo L una catena di cerchi interni ad R aventi ciascuno il centro interno al precedente; della quale catena, il primo cerchio abbia il centro in a e l'ultimo contenga nel suo interno il punto z.

La possibilità di costruire una siffatta catena è manifesta se si pensa che i cerchi possono avere i centri sopra L e raggi minori della minima distanza tra L e il contorno di R.

Giacchè il secondo cerchio della catena ha il centro dentro il primo cerchio, la funzione $f(z)$ è nulla in infiniti punti in vicinanza di questo centro, e perciò è identicamente nulla in tutto il secondo cerchio; e, così andando avanti, si vede che $f(z)$ è identicamente nulla nell'ultimo cerchio, e in particolare nel punto z scelto ad arbitrio internamente ad R. (2)

Il teorema fondamentale ora dimostrato può anche enunciarsi sotto quest'altra forma:

Se due funzioni $f(z)$ e $g(z)$, olomorfe in una stessa regione R, prendono valori eguali in infiniti punti di un intorno comunque piccolo di un punto a interno ad R, si ha $f(z)=g(z)$ in tutti i punti z interni ad R.

Perchè allora la differenza $f(z)-g(z)$, che è pure olomorfa in R, essendo nulla in infiniti punti di un intorno comunque piccolo di a è identicamente nulla in tutta R.

N° 52. Fondandoci sopra il teorema ultimamente stabilito, possiamo esporre tutto un ordine di idee dovuto a Weierstrass, che ha dato alla teoria delle Funzioni Analitiche un assetto pienamente soddisfacente sia dal punto di vista logico che estetico.

Sia dato un elemento analitico

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots\cdots,$$

il quale, come si sa, definisce una funzione olomorfa $f(z)$ all'interno del suo cerchio C di convergenza. N°45

E perciò, preso a piacere un punto a' interno a C, la stessa funzione $f(z)$ si può sviluppare in serie di potenze di $z-a'$ in un secondo cerchio Γ tutto contenuto in C e di centro a'. N°43 Questo sviluppo sia:

$$f_1(z)=c'_0+c'_1(z-a')+c'_2(z-a')^2+\cdots\cdots$$

così che, in tutti i punti z di Γ si ha $f_1(z)=f(z)$.

Chiamando C' il cerchio di convergenza della serie che dà $f_1(z)$, accade, in generale, che C' non è tutto contenuto in C, ma ha soltanto una parte in comune con C nella quale sta Γ.

In questa parte comune $f(z)$ ed $f_1(z)$ sono funzioni olomorfe, e siccome si ha $f_1(z)=f(z)$ nei punti del cerchio Γ, in base al citato teorema $f_1(z)$ ed $f(z)$ coincidono in tutta la parte comune.

Allora Weierstrass definisce la funzione $f(z)$ fuori del suo cerchio di convergenza, assumendo come valori di questa funzione quelli forniti da $f_1(z)$ nei punti

(1) è dato da una serie diversa da quella che dà $f(z)$ ma che ha la stessa somma nei punti comuni ai 2 cerchi di convergenza

interni a C' e fuori di C, e chiama l'elemento analitico $f_1(z)$ un *prolungamento analitico* (1) dell'elemento originario $f(z)$.

Si noti che il cerchio di convergenza C' della serie $f_1(z)$ non è minore del cerchio di centro a' e tangente internamente a C, perchè ivi la serie è convergente. E C' non è maggiore del cerchio di centro a' e tangente esternamente a C, perchè, se fosse C tutto *interno* a C', lo sviluppo $f(z)$ rappresenterebbe $f_1(z)$ dentro C, e quindi il detto sviluppo dovrebbe convergere in un cerchio maggiore di C.

Dunque, se denotiamo con $\rho(a)$ e $\rho(a')$ i raggi dei cerchi C e C', si ha, essendo $|a'-a|$ la distanza dei centri,

$$\rho(a') \geq \rho(a) - |a'-a| \ , \quad \rho(a') \leq \rho(a) + |a'-a| \ ;$$

e si vede che quando a' tende ad a, $\rho(a')$ tende a $\rho(a)$.

La serie $f_1(z)$ si dice un elemento analitico *dedotto da $f(z)$ mediante il centro a'*.

Come abbiamo dedotto $f_1(z)$ da $f(z)$, scegliendo un punto a'' interno a C', possiamo *dedurre da* $f_1(z)$ un terzo elemento analitico:

$$f_2(z) = c''_0 + c''_1(z-a'') + c''_2(z-a'')^2 + \dots\dots ,$$

il quale dà gli stessi valori di $f_1(z)$ nei punti z di un cerchio di centro a'' e interno a C', ma che può avere un cerchio di convergenza C'' non tutto contenuto in C'.

Questo terzo elemento $f_2(z)$ è un prolungamento analitico di $f_1(z)$, ma si chiama anche un *prolungamento* *analitico* dell'elemento originario $f(z)$.

E, in generale, si dice che una serie di potenze $g(z)$ è un prolungamento analitico di $f(z)$ quando si può costruire una catena di elementi analitici, ciascuno *dedotto* dal precedente, di cui $f(z)$ sia il primo elemento e $g(z)$ l'ultimo.

Come abbiamo visto, un elemento analitico $f_1(z)$ dedotto da $f(z)$ gode la proprietà di rappresentare $f(z)$ nel la parte comune ai due cerchi di convergenza C e C' e di avere il centro interno a C.

Più generalmente, diciamo *contigui* due elementi analitici $f(z)$ ed $\bar{f}(z)$ quando i loro cerchi di convergenza C e $\bar{C}$ hanno *una parte comune* ed ivi le due funzioni $f(z)$ ed $\bar{f}(z)$ *coincidono*, senza fare alcuna ipotesi circa la posizione dei centri.

Dimostriamo che due elementi contigui sono sempre l'uno prolungamento analitico dell'altro.

Si osservi che i due elementi contigui $f(z)$ ed $\bar{f}(z)$ definiscono un'*unica* funzione olomorfa $\varphi(z)$ nella regione del piano coperta dai due cerchi ponendo $\varphi(z) = f(z)$ nei punti z di C e $\varphi(z) = \bar{f}(z)$ nei punti z di $\bar{C}$: nella parte comune a C e $\bar{C}$ le due definizioni di $\varphi(z)$ coincidono, perchè si ha, per ipotesi, $f(z) = \bar{f}(z)$. Si costruisca ora, lungo il segmento che unisce i centri di C e $\bar{C}$, una catena di cerchi interni alla detta regione di cui il primo sia concentrico a $\bar{C}$ e l'ultimo concentrico a C e ciascuno avente il centro interno al precedente. Sviluppando in serie di potenze la funzione olomorfa $\varphi(z)$ in ciascuno di questi cerchi, gli sviluppi in due cerchi consecutivi forniscono valori eguali nella parte comune ai due cerchi, appunto perchè i due sviluppi rappresentano una stessa funzione $\varphi(z)$; ed inoltre il centro di un cerchio è interno al precedente. Dunque ciascuno dei detti sviluppi si può pensare come dedotto dal precedente; così che l'ultimo, $f(z)$, è un prolungamento analitico del primo, $\bar{f}(z)$.

Segue che se $g(z)$ è un prolungamento analitico di $f(z)$, nella catena di elementi contigui che lega $f(z)$ a $g(z)$, gli elementi che precedono $g(z)$ sono prolungamenti analitici di $g(z)$, e, in particolare, $f(z)$ è un prolungamento analitico di $g(z)$.

Si chiama *funzione analitica* definita da un dato elemento $f(z)$, questo stesso elemento *preso insieme* a tutti i suoi prolungamenti.

E si vede che un prolungamento analitico $g(z)$ di $f(z)$ definisce *la stessa* funzione analitica definita da $f(z)$, perchè tra i prolungamenti di $g(z)$ si trova $f(z)$.

Dunque, dal punto di vista etimologico, una funzione analitica può anche dirsi una *funzione monogena* perchè essa è individuata da un solo elemento analitico.

N° 53. Definizione di una funzione analitica lungo una linea.

Per brevità, diremo che un punto è interno ad un dato elemento analitico quando è interno al cerchio di convergenza dell'elemento. Diremo inoltre che una successione di elementi analitici costituiscono una *catena* quando ciascuno è contiguo al precedente.

Si consideri ora una linea L che unisca un punto z_0 interno ad un dato elemento analitico $f(z)$ con un punto z del piano, e *supponiamo*:

Che si possa dividere L in parti mediante punti:

$$z_0\,,\ z_1\,,\ z_2\,,\ldots\ldots,\ z_{n-1}\,,\ z_n = z$$

che si seguono nel verso da z_0 a z, e costruire, in corrispondenza alla divisione fatta, una catena di elementi analitici:

$$f(z)\ ,\ f_1(z)\,,\ f_2(z)\,,\ldots\ldots,\ f_{n-1}(z)$$

in modo che il primo arco $z_0\,z_1$ sia interno al primo elemento $f(z)$; il secondo arco $z_1\,z_2$ sia interno al secondo elemento $f_1(z)$; .... l'ultimo arco $z_{n-1}\,z$ sia interno all'ultimo elemento $f_{n-1}(z)$.

Allora si definisce la funzione analitica nei punti z del primo arco mediante $f(z)$; nei punti z del secondo arco mediante $f_1(z)$; .... e nei punti z dell'ultimo arco mediante $f_{n-1}(z)$.

In un punto di divisione, essendo questo interno a due elementi contigui, la funzione viene definita in modo unico.

Per giustificare la precedente definizione di una funzione analitica lungo una linea, bisogna far vedere che, se si fa un'altra divisione della linea L in parti mediante nuovi punti:

f. anal. lungo una linea L è definita in vari archi da vari elementi analitici

$$z_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots\ldots, \bar{z}_{m-1}, \bar{z}_m = z$$

in modo che si possa costruire una catena di elementi analitici:

$$f(z), \bar{f}_1(z), \bar{f}_2(z), \ldots\ldots, \bar{f}_{m-1}(z)$$

analoga alla precedente rispetto alla nuova divisione, i valori lungo L della funzione analitica forniti da questa seconda catena sono *gli stessi* di quelli forniti dalla prima catena, sempre che si parta da *uno stesso elemento originario* $f(z)$.

Consideriamo insieme i due sistemi di punti di divisione e ordiniamoli in una unica successione:

$$z_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots\ldots, \zeta_{q-1}, \zeta_q = z \qquad (q < n+m)$$

secondo l'ordine in cui s'incontrano sopra L nel verso da z_0 a z. L'arco $z_0\zeta_1$ appartiene sia a $z_0 z_1$ che a $z_0\bar{z}_1$ e quindi i valori della funzione definiti dalle due catene coincidono nei punti del detto arco, perchè sono dati dallo stesso elemento originario $f(z)$. Procedendo ora per induzione, supponiamo che i valori della funzione dati dalle due catene coincidano in tutti i punti dell'arco da z_0 fino a ζ_p $(p<q)$ e dimostriamo che coincidono anche nel tratto successivo $\zeta_p\zeta_{p+1}$.

Infatti, l'arco $\zeta_p\zeta_{p+1}$ è certamente contenuto in un arco $z_r z_{r+1}$ della prima divisione e in un arco $\bar{z}_s\bar{z}_{s+1}$ della seconda divisione e perciò è interno ai due elementi analitici $f_r(z)$, $\bar{f}_s(z)$. Intanto, essendo ζ_p in-

terno a questi due elementi, si può segnare un punto ζ di L che preceda ζ_p e abbastanza vicino a ζ_p affinchè l'arco $\zeta\zeta_p$ risulti ancora interno agli elementi stessi; e, per i punti z del piccolo arco $\zeta\zeta_p$, si deve avere $f_r(z)=\bar{f}_s(z)$, perchè, per ipotesi, i valori della funzione dati dalle due catene coincidono fino a ζ_p.

Dunque si ha $f_r(z)=\bar{f}_s(z)$ in tutta la parte comune ai due cerchi di convergenza dei due elementi in discorso, e quindi in tutti i punti z dell'arco $\zeta_p\zeta_{p+1}$.

Resta così dimostrato che i valori della funzione analitica generata dall'elemento $f(z)$ sono perfettamente determinati nei punti z di L.

N° 54. <u>*Funzioni monodrome*</u>- Consideriamo una regione R e sia $f(z)$ un elemento analitico che abbia il centro in un punto z_0 interno ad R.

Se, per *qualunque linea chiusa* L passante per z_0 e interna ad R, lungo la quale si possa definire la funzione analitica generata da $f(z)$, accade che, partendo da z_0 con l'elemento iniziale $f(z)$ si ritorni a z_0 con un elemento analitico finale $g(z)$ *contiguo* ad $f(z)$, si dice che $f(z)$ definisce una funzione analitica *monodroma* in R.

Si può anche dire che, quando la funzione è monodroma, si ritorna a z_0 con lo stesso elemento analitico di partenza $f(z)$, perchè si può fare in modo che l'elemento analitico finale abbia pure il centro in z_0.

<u>Una funzione analitica monodroma in una regione R ha</u>

un ben determinato valore in ogni punto z di R dove può essere definita; cioè un valore *indipendente* dalla linea di R secondo la quale si va da z_0 a z e lungo la quale la funzione può essere definita.

Infatti, siano L ed $\bar{L}$ due linee di R che congiungono z_0 con z, considerate nei versi da z_0 a z.

Prendendo $\bar{L}$ insieme a $-L$ si viene ad avere una linea chiusa lungo la quale si può costruire, per ipotesi, una catena di elementi analitici che abbia come primo e ultimo elemento $f(z)$. Sia $g(z)$ l'elemento di questa catena che contiene il punto z, estremo comune ad L e $\bar{L}$. Allora, partendo da $f(z)$ e seguendo $\bar{L}$, si giunge a z con $g(z)$; poi, continuando a descrivere la catena lungo $-L$, si giunge a z_0 con l'elemento $f(z)$. Dunque, partendo da $f(z)$ e descrivendo la catena in senso inverso lungo L si arriva a z con $g(z)$, cioè con lo stesso elemento analitico ottenuto descrivendo la catena lungo $\bar{L}$.

Segue che, definendo la funzione lungo le due linee L ed $\bar{L}$ mediante le due ora dette catene di elementi, si ottiene nell'estremo z lo stesso valore della funzione, perchè esso è dato dallo stesso elemento analitico $g(z)$.

Una funzione analitica che sia monodroma in tutto il suo campo di esistenza, cioè in ogni regione del piano dove può essere definita, si dice più propriamente una *funzione uniforme*.

§9. - PUNTI CRITICI -

N. 55. Consideriamo una linea L che unisca il punto z_0 con un punto a del piano.

Partendo da un dato elemento analitico $f(z)$ che ha per centro il punto z_0, può accadere che si possa definire la funzione in ogni punto z di L *diverso da a*, ma che non si possa definire la funzione nell'estremo a.

In altri termini, può accadere che si possa costruire lungo L, a partire da $f(z)$, una catena di elementi analitici di cui l'ultimo contenga all'interno un punto z di L, vicino quanto si vuole ad a ma diverso da a, mentre non riesce possibile di costruire lungo L una catena di elementi analitici di cui l'ultimo contenga all'interno a.

In questo caso si dice che a è un *punto critico* (1) della *funzione analitica* definita dall'elemento $f(z)$.

Quando la funzione non è monodroma, può accadere che il punto a sia critico sopra la linea L e non sia critico sopra un'altra linea $\bar{L}$ che congiunga z_0 con a; cioè che si possa, seguendo $\bar{L}$ e partendo sempre da $f(z)$, costruire una catena di elementi analitici di cui l'ultimo racchiuda all'interno il punto a, mentre ciò non può far-

(1) punto in cui la f. non è definita

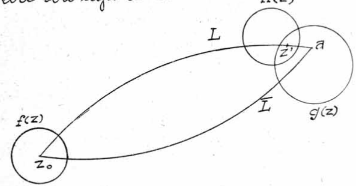
si seguendo L.

Ma chiameremo a sempre punto critico della funzione in discorso quando a è critico sopra una linea.

Però, se la detta funzione è monodroma, faremo vedere che:

Un punto a che è critico sopra una linea L, è tale sopra ogni altra linea $\bar{L}$ che termini in a.

S'intende che le linee che si considerano non passano mai per punti critici e che questi si possono trovare solo agli estremi.



Supponiamo che a non sia critico sopra $\bar{L}$: ciò significa che, partendo da $f(z)$ e seguendo $\bar{L}$, si può costruire una catena di elementi analitici di cui l'ultimo, $g(z)$, comprende all'interno a. Questo elemento $g(z)$ definisce la funzione anche nei punti di un piccolo arco az' di L sempre interno a $g(z)$: d'altra parte, partendo da $f(z)$, si può costruire lungo L una catena di elementi analitici di cui l'ultimo, $h(z)$, contenga all'interno il punto z' diverso da a. Ma, essendo la funzione monodroma, deve essere $h(z) = g(z)$ nel punto z' ed in infiniti punti di L abbastanza vicini a z' in modo da risultare interni ai due elementi $h(z)$ e $g(z)$;

così che questi due elementi sono contigui.

Ma allora si può aggiungere alla catena lungo L l'elemento $g(z)$, ottenendo così una catena che definisce la funzione in tutti i punti di L, a incluso, contrariamente all'ipotesi che a sia un punto critico sopra L.

N° 56. Dimostriamo ora il seguente teorema fondamentale:

Se in una regione semplice R non cadono punti critici della funzione analitica generata da un dato elemento, essa è ivi funzione olomorfa.

L'ipotesi fatta significa che, partendo da un dato elemento analitico $f(z)$ di centro z_0, interno ad R, si possa definire la funzione lungo una qualsivoglia linea uscente da z_0 e interna ad R.

Basterà dimostrare che la funzione in discorso è monodroma in R, perchè allora essa ha un ben determinato valore in ogni punto z di R; inoltre, questo valore essendo dato da un elemento analitico, la funzione ammette derivata in z.

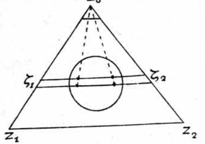
Per dimostrare che la funzione è monodroma, bisogna far vedere che, partendo da $f(z)$ e definendo la funzione lungo una linea chiusa L passante per z_0 e contenuta in R, si ritorna in z_0 con lo stesso elemento analitico di partenza $f(z)$.

Supponiamo in primo luogo che L sia il perimetro di un triangolo $z_0 z_1 z_2$ avente un vertice in z_0.

Da un punto ζ_1 del lato $z_0 z_1$ conduciamo la parallela $\zeta_1\zeta_2$ al lato $z_1 z_2$ e poniamo:

$$t = \left|\frac{\zeta_1 - z_0}{z_1 - z_0}\right| ;$$

così che, variando ζ_1 da z_0 a z_1, t varia da 0 a 1 e viceversa. Assegnato t nell'intervallo $0 \vdash 1$, resta perfettamente determinato il triangolo $z_0\zeta_1\zeta_2$, e, definendo la funzione lungo il perimetro di questo triangolo, si giungerà in z_0 con un ben determinato elemento analitico finale, che è perciò una serie di potenze in $z - z_0$ i cui coefficienti sono funzioni di t nella più generale concezione di funzione: noi possiamo denotare questo elemento analitico finale con $f(z,t)$.



Ad un valore $t + \Delta t$ infinitamente vicino a t corrisponde una parallela al lato $z_1 z_2$ infinitamente vicina a $\zeta_1\zeta_2$, e quindi, per valori abbastanza piccoli di Δt, possiamo definire la funzione lungo il perimetro del triangolo corrispondente a $t+\Delta t$ con *la stessa catena di* elementi analitici che ha servito a definire la funzione lungo il perimetro del triangolo corrispondente a t; così che l'elemento analitico finale resta lo stesso, cioè si ha:

$$f(z, t + \Delta t) = f(z, t) .$$

Disegnando, come in figura, un cerchio di un elemento della prima catena al quale è interno uno dei tratti in cui si trova diviso il lato $\zeta_1\zeta_2$, basta prendere il lato parallelo del nuovo triangolo così vicino a $\zeta_1\zeta_2$ in modo che la proiezione su di esso del detto tratto, fatta dal punto z_0, risulti interna allo stesso cerchio.

L'eguaglianza precedente mostra che la derivata parziale di $f(z,t)$ rispetto a t è identicamente nulla, e quindi $f(z,t)$ *non dipende* da t.

Intanto, per valori molto piccoli di t, tali che il triangolo $z_0\zeta_1\zeta_2$ risulti interno al primo elemento $f(z)$, si ha:

$$f(z,t) = f(z),$$

perchè allora, potendo definire la funzione lungo il perimetro di questo piccolo triangolo col solo elemento $f(z)$, questo è elemento iniziale e finale.

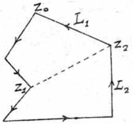
Dunque si ha anche

$$f(z,1) = f(z);$$

il che significa che, definendo la funzione lungo il perimetro del triangolo dato $z_0 z_1 z_2$, si ritorna in z_0 con un elemento analitico finale $f(z,1)$ coincidente con l'elemento analitico originario $f(z)$.

N: 57. Procedendo ora per induzione, possiamo dimostrare l'eguaglianza tra l'elemento iniziale e l'elemento finale, quando la linea L è una poligonale chiusa semplice di n lati, ammettendo che ciò sia vero quando il numero dei lati è minore di n.

Congiungiamo due vertici non consecutivi z_1 e z_2 di L scelti in modo che il segmento $z_1 z_2$ risulti interno al poligono limitato da L: si ottengono così due poligonali chiuse semplici L_1, L_2 aventi il lato comune $z_1 z_2$. Definendo la funzione lungo L_1 partendo da z_0 con l'elemento $f(z)$, si giunga, ad esempio, in z_1 con un elemento $f_1(z)$; poi proseguendo lungo il lato $z_1 z_2$, si giunga in z_2 con un elemento $f_2(z)$; infine, continuando a descrivere L_1, si ritorna in z_0 con l'elemento originario $f(z)$, perchè la poligonale L_1 ha meno di n lati. Si descriva ora L_2 partendo dal punto z_2 con l'elemento $f_2(z)$ e percorrendo in senso inverso la catena di elementi analitici già costruita lungo $z_1 z_2$: si arriverà in z_1 con l'elemento $f_1(z)$; poi, continuando a descrivere L_2, si ritorna in z_2 certamente con l'elemento di partenza $f_2(z)$, perchè anche la poligonale L_2 ha meno di n lati.



Si vede dunque che, definendo la funzione lungo L mediante le catene di elementi già costruite, partendo da z_0 con $f(z)$ si passa successivamente per i punti z_1 e z_2 con gli elementi $f_1(z)$ e $f_2(z)$, e quindi si ritorna in z_0 con l'elemento originario $f(z)$.

Se la poligonale chiusa L, di n lati, non è semplice, considereremo soltanto i nodi dove si tagliano

due lati non consecutivi e i nodi che sono vertici per dove passano più di due lati.

Per $n = 2$ non si hanno di siffatti nodi, perchè in questo caso la poligonale si riduce ad un segmento uscente da z_0 e percorso due volte in versi opposti; ma allora è manifesto che, partendo da z_0 con l'elemento $f(z)$, si ritorna in z_0 con lo stesso elemento $f(z)$.

Supponiamo dunque $n > 2$ e ammettiamo che la proposizione che vogliamo dimostrare sia vera per una poligonale chiusa che abbia meno di n lati

Partendo da z_0 con l'elemento iniziale $f(z)$ e descrivendo L, si giunga ad uno dei detti nodi con un elemento $g(z)$; poi, continuando a descrivere L, si ritorna una prima volta allo stesso nodo certamente con lo stesso elemento $g(z)$, perchè la poligonale chiusa che si è descritta ha meno di n lati; infine, continuando a descrivere L, si ritorna in z_0 con l'elemento originario $f(z)$, perchè il primo tratto di poligonale da z_0 fino al nodo e l'ultimo tratto dal nodo fino a z_0, presi insieme, formano pure una poligonale chiusa con meno di n lati.

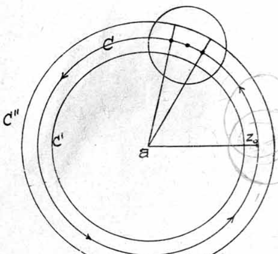
Si abbia in ultimo luogo una qualsivoglia linea chiusa L passante per z_0, e definiamo la funzione lungo L mediante una catena di elementi analitici partendo da z_0 con l'elemento originario $f(z)$.

Nei singoli archi nei quali si suppone divisa L per la costruzione della detta catena, inscriviamo delle poligonali di lati abbastanza piccoli affinchè queste poligonali risultino pure interne ai singoli elementi analitici, ai quali sono interni gli archi.

Si ottiene così una poligonale chiusa lungo la quale si può definire la funzione con la stessa catena di elementi analitici adoperata per la linea L. Ma sappiamo che, descrivendo una tale poligonale, si ritorna al punto z_0 con lo stesso elemento originario $f(z)$; dunque si conclude egualmente per la linea L.

N° 58. Teorema - *Sopra la circonferenza del cerchio di convergenza di un elemento analitico, esiste almeno un punto critico della funzione generata dall'elemento stesso.*

Supponiamo, ragionando per assurdo, che sopra la circonferenza C del cerchio di convergenza della serie



$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\dots$$

non cada nessun punto critico della funzione analitica generata dall'elemento $f(z)$.

Ciò significa che, partendo da a con l'elemento $f(z)$, si può definire la funzione lungo un raggio $a z_0$ giungendo al

punto z_0 di C con un elemento $g(z)$, e poi si può continuare a definire la funzione in tutti i punti di C fino a ritornare nuovamente in z_0 con un elemento $h(z)$.

Descriviamo due circonferenze C', C'' concentriche a C, la prima interna e la seconda esterna a C, ma, così vicine a C, in modo che la corona circolare limitata da C' e C'' risulti interna alla catena di elementi analitici che ha servito a definire la funzione lungo C.

Disegnando, come in figura, il cerchio di un elemento della catena, al quale è interno uno degli archi in cui si trova divisa C per la costruzione della detta catena, bisogna prendere C' e C'' tanto vicini a C in modo che il pezzo di corona compreso tra i due raggi che vanno agli estremi dell'arco risulti interno al cerchio dell'elemento che si considera.

La catena serve dunque a definire la funzione lungo la circonferenza C' dove la funzione può anche essere definita dall'elemento iniziale $f(z)$; ma, giacchè i valori della funzione lungo una data linea sono perfettamente determinati purchè si parta da uno stesso elemento iniziale, segue che ogni elemento della catena in discorso è *contiguo* ad $f(z)$, perchè i valori dati dall'elemento e da $f(z)$ coincidono nel tratto di C' interno all'elemento

In particolare, i due elementi $g(z)$ e $h(z)$ avanti menzionati, e che contengono all'interno il punto z_0, sono *contigui*, perchè in infiniti punti z sufficientemente vicini a z_0 e interni a C, si ha $g(z)=f(z)$, $h(z)=f(z)$, e quindi $g(z) = h(z)$.

Segue che la catena di elementi analitici costruita lungo C, presa insieme a $f(z)$, definisce *una funzione olomorfa in tutti i punti* del cerchio limitato da C'', ogni elemento della catena definendo la funzione nel pezzo di corona $C'C''$ interno all'elemento.

Ma allora la serie $f(z)$, che rappresenta la ora detta funzione, dovrebbe convergere in un cerchio di raggio maggiore del raggio di C.

N° 59. Teorema di Vivanti - In un caso particolare notevole si può precisare la posizione di un punto critico sopra la circonferenza di convergenza di una serie di potenze in base al seguente teorema di **G. Vivanti**:

Se l'elemento analitico

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots$$

ha tutti i suoi coefficienti positivi o, in parte, nulli e il raggio di convergenza ρ, il punto $z = \rho$ è certamente critico per la funzione analitica definita da questo elemento.

Ragionando per assurdo, supponiamo che il punto $z = \rho$ non sia critico per la funzione in discorso. Allora essa può essere definita in tutto il raggio $O \vdash \rho$, e vi sarà un elemento finale $g(z)$, *contiguo* ad $f(z)$, che comprende nel suo *interno* il punto $z = \rho$.

Possiamo supporre che questo elemento finale abbia

il centro in un punto $z = a$ interno all'intervallo $O \vdash \rho$ e abbastanza vicino a ρ, così che si ha

$$g(z) = c_0 + c_1 (z-a) + c_2 (z-a)^2 + \dots$$

I coefficienti di questo nuovo sviluppo sono tutti positivi o nulli, perchè tali sono i valori di $f(z)$ e delle sue successive derivate calcolate per il numero positivo $z = a$.

Si ponga ora

$$\bar{a} = a e^{i\vartheta}$$

e si scriva l'elemento analitico dedotto da $f(z)$ mediante il centro $\bar{a}$; questo elemento sia:

$$\bar{g}(z) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 (z-\bar{a}) + \bar{c}_2 (z-\bar{a})^2 + \dots$$

Intanto, essendo:

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} a_\nu a^{\nu-n},$$

$$\bar{c}_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\bar{a}) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} a_\nu \bar{a}^{\nu-n},$$

risulta

$$|\bar{c}_n| \leq c_n ,$$

perchè i termini dello sviluppo di c_n sono i moduli dei corrispondenti termini dello sviluppo di $\bar{c}_n$.

Segue che il raggio di convergenza della serie $\bar{g}(z)$ *non può essere minore* del raggio di convergenza della serie $g(z)$. E siccome il cerchio di convergenza di $g(z)$

comprende nel suo interno il punto $z=\rho$, il cerchio di convergenza di $\overline{g}(z)$ contiene certamente nel suo interno il punto $z=\rho e^{i\vartheta}$, che è un punto qualunque della circonferenza di convergenza della serie $f(z)$.

Ma allora, contrariamente al teorema del N° 58, sopra questa circonferenza non esisterebbe alcun punto critico della funzione analitica definita dall'elemento $f(z)$.

---

§10. CLASSIFICAZIONE DELLE SINGOLARITÀ DELLE FUNZIONI MONODROME -

N° 60. I punti critici delle funzioni monodrome in una data regione, o in tutto il loro campo di esistenza (funzioni uniformi), si chiamano più propriamente *punti singolari*.

Un punto singolare si dice *isolato* se è possibile descrivere un cerchio col centro nel punto dentro cui non cadono altri punti critici della funzione. Un punto singolare isolato a si chiama un *polo* di una funzione analitica monodroma $f(z)$, se esiste un minimo numero intero *positivo* μ tale che il prodotto

$$(z-a)^{\mu} f(z)$$

sia *regolare* nel punto $z=a$.

Il numero μ si dice l'*ordine* del polo.

Dunque, se a è un polo di ordine μ di $f(z)$, il detto prodotto può svilupparsi in serie di potenze di $z-a$: (pag 96)

$$(z-a)^{\mu} f(z) = c_0 + c_1 (z-a) + c_2 (z-a)^2 + \dots\dots, \quad (1)$$

dove il coefficiente c_0 non è nullo, altrimenti sarebbe regolare nel punto $z=a$ il prodotto $(z-a)^{\mu-1} f(z)$, e quindi l'ordine del polo sarebbe minore di μ, e, nel caso di $\mu=1$, il punto a addirittura non sarebbe polo di $f(z)$.

Il cerchio C di convergenza della serie (1) è il cerchio di centro a la cui circonferenza passa per il punto critico di $f(z)$ più vicino ad a e diverso da a (N° 58); se la funzione $f(z)$ non ha altri punti critici all'infuori di a, la serie converge in un cerchio comunque grande e rappresenta quindi una funzione intera. (pag 88)

Dalla (1) si ricava:

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-a)^{\mu}} + \dots\dots + \frac{c_{\mu-1}}{z-a} + c_{\mu} + c_{\mu+1}(z-a) + \dots\dots, \quad (2)$$

che si chiama lo *sviluppo* di $f(z)$ nell'*intorno* del polo a. Esso dà il valore di $f(z)$ in ogni punto z interno a C e diverso da a: quando z tende ad a, $f(z)$ diverge.

La somma dei termini (in numero finito) che contengono le potenze di $z-a$ a denominatore si dice la *caratteristica* del polo, o anche la *parte principale* dello sviluppo; e il coefficiente $c_{\mu-1}$ del termine di *primo* grado in $\frac{1}{z-a}$ (che potrebbe, in particolare, mancare nel caso di $\mu > 1$) si dice il *residuo* del polo.

Si noti che se $f(z)$ ha nel punto $z=a$ un polo di ordine μ, la funzione $\frac{1}{f(z)}$ ha in questo punto uno zero di ordine μ, e reciprocamente.

N° 61. Consideriamo una funzione *razionale fratta*:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \qquad (3)$$

dove i *polinomii* in z, $\varphi(z)$ e $\psi(z)$, si suppongono primi tra loro, così che i valori di z che annullano $\psi(z)$ non annullano $\varphi(z)$.

Se a è uno zero di ordine μ del polinomio $\psi(z)$, possiamo scrivere

$$\psi(z)=(z-a)^{\mu}\chi(z)$$

dove $\chi(z)$ è pure un polinomio in z che non si annulla per $z=a$.

Dunque il prodotto

$$(z-a)^{\mu}f(z) = \frac{\varphi(z)}{\chi(z)}$$

è una funzione regolare nel punto $z=a$ che in questo punto è diversa da zero, perchè tale è $\varphi(z)$: dunque possiamo sviluppare questa funzione in serie di potenze di $z-a$ come (1). E il cerchio di convergenza di questa serie è il cerchio di centro a la cui circonferenza passa per lo zero di $\chi(z)$ più vicino ad a.

Si vede così che una funzione razionale ha come punti singolari soltanto poli, e questi sono i punti dove si annulla il polinomio a denominatore senza che si annulli il numeratore.

Le funzioni razionali sono funzioni uniformi che hanno un numero finito di poli: un semplice esempio di funzione uniforme con infiniti poli è dato dalla funzione:

$$\pi \cot \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} \qquad (4)$$

la quale, come ora vedremo, ammette poli di primo ordine, nei punti $z=n$, essendo n un numero intero positivo, negativo o nullo.

Infatti, la funzione intera $\operatorname{sen}\pi z$ si annulla per $z=n$, e quindi possiamo scrivere:

$$\operatorname{sen}\pi z = (z-n)\,\psi(z)$$

dove $\psi(z)$ è una funzione intera che non si annulla nel punto $z=n$, perchè $\psi(z)$ è la derivata di $\operatorname{sen}\pi z$ calcolata nel detto punto, ossia

$$\psi(n) = (-1)^n \pi .$$

Dunque la funzione

$$\pi(z-n)\cot\pi z = \pi\frac{\cos\pi z}{\psi(z)}$$

è regolare nel punto $z=n$, e prende in questo punto il valore 1; così che, si può sviluppare in serie di potenze di $z-n$ così:

$$\pi(z-n)\cot\pi z = 1 + c_1(z-n) + c_2(z-n)^2 + \cdots$$

Questa serie ha come cerchio di convergenza il cerchio di centro n e raggio 1, perchè i poli più vicini ad n distano da n di 1.

Dall'eguaglianza che precede si ricava:

$$\pi\cot\pi z = \frac{1}{z-n} + c_1 + c_2(z-n) + \cdots\cdots$$

e si vede che i punti $z = n$ sono per la funzione (4) tutti poli del primo ordine con i residui eguali ad 1.

Una funzione monodroma che, in una data regione, non ha altre singolarità che poli, si dice *meromorfa* in quella regione. Una funzione uniforme che in tutto il piano, non ha, al finito, altre singolarità che poli, si dirà una *funzione fratta*, e può essere razionale, come la (3), o *trascendente*, come la (4).

N°62. *Punti singolari essenziali* - Un punto singolare *isolato* di una funzione monodroma, che non sia un polo, si chiama un punto *essenziale*.*

Se a denota un siffatto punto (isolato) per una funzione monodroma $f(z)$, *isoliamolo* con un cerchio C di centro a dagli altri eventuali punti singolari di $f(z)$, e descriviamo un secondo cerchio $\bar{C}$ concentrico e interno a C.

Nella corona circolare limitata da C e $\bar{C}$, la funzione $f(z)$ è olomorfa, e quindi si può sviluppare in serie di *Laurent* (N°50); si ha così lo sviluppo:

$$f(z) = \cdots\cdots \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots\cdots \quad (5)$$

* E si dice anche „essenziale" un punto singolare (non isolato) che sia punto d'accumulazione di infiniti altri punti singolari.

il quale rappresenta $f(z)$ in ogni punto z di C diverso da a, perchè ~~in~~ tale punto si può sempre ritenere interno alla corona che si considera facendo impiccolire il raggio di $\bar{C}$.

I termini che contengono le potenze di $z-a$ a denominatore debbono essere infiniti, perchè, se fossero in numero finito, il punto a sarebbe un polo per $f(z)$; e, se mancassero addirittura, il detto punto non sarebbe singolare per $f(z)$.

La serie formata dai termini in discorso è una *funzione intera* considerata come funzione dell'argomento $\frac{1}{z-a}$, perchè procede secondo le potenze naturali di questo argomento e converge, comunque grande sia il modulo dell'argomento stesso; cioè per quanto z si prenda vicino ad a.

Il coefficiente del termine di primo grado in $\frac{1}{z-a}$, cioè c_{-1}, si chiama il *residuo* relativo al punto essenziale a.

Teorema di Casorati - Se a è un punto essenziale di $f(z)$, dati ad arbitrio un numero c reale o complesso ed un numero positivo ε, in un cerchio $\bar{C}$ di raggio comunque piccolo e di centro a, esistono infiniti punti z per i quali è:

$$|f(z)-c| < \varepsilon \qquad (6)$$

Se $f(z)$ prende il valore c in punti z di un cerchio $\bar{C}$ di raggio comunque piccolo, il teorema è dimostrato.

Supponiamo dunque che esista un cerchio $\bar{C}$ dove $f(z)$ non prende mai il valore c. Allora la funzione

$$\frac{1}{f(z)-c}$$

resta definita in tutti i punti z di $\bar{C}$ fatta eccezione del punto $z=a$, che è evidentemente singolare essenziale per la funzione ora considerata.

Questa funzione può dunque svilupparsi in serie di *Laurent* nel cerchio $\bar{C}$ in modo perfettamente analogo a (5). La parte dello sviluppo che procede secondo le potenze naturali di $z-a$ si mantiene limitata dentro $\bar{C}$, mentre la parte che procede secondo le potenze naturali dell'argomento

$$\zeta = \frac{1}{z-a},$$

e che è una funzione intera di questo argomento, *non può mantenersi limitata* quando z varia successivamente sopra infinite circonferenze concentriche a $\bar{C}$ che si restringano indefinitamente attorno al punto a, perchè allora dovrebbe mantenersi limitata l'anzidetta funzione intera di ζ quando ζ varia sopra infinite circonferenze col centro in $\zeta=0$ i cui raggi crescono indefinitamente. Ciò contraddice il teorema di *Liouville* (N° 46).

Dunque, esistono infiniti punti z prossimi quanto si vuole ad a per i quali è:

$$\frac{1}{|f(z)-c|} > \frac{1}{\varepsilon},$$

e da questa diseguaglianza segue la (6).

Il teorema ora dimostrato stabilisce che *qualsivoglia* numero c è un limite dei valori che la funzione monodroma $f(z)$ prende nell'intorno di un suo punto singolare essenziale a. (1)

N° 63. *Sviluppo nell'intorno del punto* $z=\infty$.

Si chiama *intorno del punto* $z=\infty$ la regione del piano esterna ad un cerchio C col centro nell'origine (o in un altro punto a) e di raggio comunque grande.

Questa denominazione si giustifica pensando ad una sfera tangente al piano della variabile complessa z nel punto $z=0$, e proiettando i punti del piano sopra la sfera dal punto ω della sfera diametralmente opposto al punto di contatto. Allora il punto $z=\infty$ viene rappresentato dal centro di proiezione ω, e i punti *esterni* ad un cerchio C di raggio grandissimo sono proiettati nei punti della sfera *interni* ad un piccolo cerchio col centro in ω.

Si può anche dire che un intorno del punto $z=\infty$ è il trasformato di un intorno del punto origine mediante la trasformazione

$$\zeta = \frac{1}{z},$$

perchè ai punti z esterni a C corrispondono i punti interni ad un piccolo cerchio col centro nel punto $\zeta=0$.

Ciò posto, supponiamo di avere una funzione unifor-

(1) In vicinanza di [illegible] la f [illegible] volte un medesimo valore, mentre nella vicinanza di un polo [illegible] in vicinanza di un punto essenziale [illegible] infinite volte tutti i valori possibili

me $f(z)$ e che si possa descrivere un cerchio C al di fuori del quale non cada alcun punto singolare di $f(z)$. Quando un siffatto cerchio esiste, diremo che il punto $z=\infty$ è un *punto isolato* per la funzione $f(z)$.

In questo caso, la funzione $f(z)$ risulta olomorfa in una corona circolare limitata da C e da una seconda circonferenza $\bar{C}$ avente pure il centro nell'origine ed esterna a C; così che $f(z)$ si può ivi sviluppare in serie di *Laurent*:

$$f(z)=\cdots\cdots+a_{-2}z^2+a_{-1}z+a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots\cdots \qquad (7)$$

Questo sviluppo è valido in ogni punto z esterno a C; perchè in un tale punto si può sempre ritenere interno ad una corona come quella limitata da C e $\bar{C}$, e si chiama lo sviluppo di $f(z)$ in un intorno del punto $z=\infty$.

Il coefficiente del termine di primo grado in $\frac{1}{z}$, *preso con segno cambiato*, cioè il numero $-a_1$ si chiama il *residuo* relativo al punto $z=\infty$.

Si noti che la serie che procede secondo le potenze naturali di z rappresenta una *funzione intera* perchè questa serie converge per quanto grande sia il modulo di z.

Conviene ora distinguere tre casi:

1) - Può la funzione intera ora detta ridursi alla costante a_0 per essere nulli tutti i coefficienti a_{-n} con indice negativo.

In questo caso si ha:

$$f(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots\cdots \qquad (7')$$

e la funzione $f(z)$ si dice *regolare* nel punto $z=\infty$.

Se è $a_0=0$, si dice che $f(z)$ ha uno *zero* nel punto $z=\infty$, perchè $f(z)$ tende a zero al crescere indefinitamente di $|z|$: questo zero si dice di *ordine* μ se è anche $a_1=0,\ldots\ldots, a_{\mu-1}=0$ ma a_μ diverso da zero.

2°) - Può la funzione intera che figura nello sviluppo (7) di $f(z)$ ridursi ad un polinomio di grado $\mu>0$.

Allora si ha:

$$f(z)=a_{-\mu}z^{\mu}+\cdots\cdots+a_{-1}z+a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots\cdots \qquad (7'')$$

e si dice che $f(z)$ ha nel punto $z=\infty$ un *polo di ordine* μ, perchè $f(z)$ diverge quando si fa divergere z.

Per esempio, un polinomio in z di grado $\mu>0$ (funzione razionale intera di z) ha un polo di ordine μ nel punto $z=\infty$, e rientra come caso particolare nella (7'') quando sono nulli tutti i coefficienti a_n con indice positivo.

3) - Se la funzione intera che figura nello sviluppo (7) è trascendente, cioè se si hanno infiniti coefficienti a_{-n} con indice negativo non nulli, si dice che la funzione $f(z)$ ha nel punto $z=\infty$ una singolarità essenziale.

Per esempio, una funzione intera trascendente ha nel punto $z=\infty$ una singolarità essenziale, e rientra come caso particolare nella (7) quando sono nulli tutti i coefficienti a_n con indice positivo.

Se si trasforma l'intorno del punto $z=\infty$ nell'intorno dell'origine cambiando z in $\frac{1}{z}$, si vede che se $f(z)$ è regolare, o ha un polo, o ha un punto essenziale nel punto $z=\infty$, la funzione $f(\frac{1}{z})$, ordinatamente è regolare, o ha un polo, o ha un punto essenziale nel punto $z=0$.

Osserviamo infine che, se il punto $z=\infty$ è isolato per la funzione $f(z)$, scelto ad arbitrio un punto a in luogo dell'origine, la funzione $f(z)$ non ha punti singolari al finito all'esterno di un cerchio di centro a e di raggio sufficientemente grande; così che lo sviluppo di $f(z)$ in un intorno del punto $z=\infty$ si può anche fare secondo le potenze intere (positive, negative o nulle) di $z-a$. Ma è importante notare che, comunque si faccia, il residuo relativo al punto $z=\infty$ rimane sempre lo stesso.

N° 64. *Punti singolari non isolati* - Le funzioni monodrome possono presentare punti singolari non isolati, cioè tali che in un cerchio comunque piccolo col centro in un siffatto punto cadono sempre infiniti altri punti singolari.

Chiameremo *punto singolare di addensamento* un punto limite di punti singolari *isolati*.

Così, la funzione:

$$\pi \cot \frac{\pi}{z}$$

ha infiniti poli (di primo ordine) nei punti $z=\frac{1}{n}$ con n intero positivo o negativo i quali hanno come punto limite il punto $z=0$, che è perciò un punto singolare di addensamento.

Quando il punto $z=\infty$ non è isolato per la funzione uniforme $f(z)$, cioè se, esternamente ad un cerchio di raggio comunque grande avente il centro in un punto fisso, cadono sempre punti singolari di $f(z)$,

il punto $z=\infty$ deve ritenersi come un punto singolare di addensamento.

Così accade, ad esempio, per la funzione avanti considerata (N° 61):

$$\pi \cot \pi z .$$

che ha infiniti poli nei valori interi di z i quali formano un insieme non limitato.

Infine, una funzione monodroma può avere delle *linee singolari* (o *essenziali*), che sono delle linee costituite tutte di punti singolari.

Esempio I° - Si consideri la serie:

$$f(z)=1+az^2+a^2z^4+a^3z^8+\ldots\ldots \tag{8}$$

dove a denota un numero positivo minore di 1.

Questa serie ha come raggio di convergenza 1, perchè, considerando la serie formata con i valori assoluti dei suoi termini, si vede subito, applicando ad esempio il criterio del rapporto, che questa è convergente se $|z|<1$ ed è invece divergente se $|z|>1$. La serie in discorso è anche assolutamente convergente per $|z|=1$, cioè in tutti i punti della circonferenza di convergenza.

Intanto si sa che su questa circonferenza deve esistere almeno un punto critico; e uno di tali punti è certamente il punto $z=1$ in base al teorema di Vivanti

Si ponga ora:

$$z=z_0\, e^{i\vartheta}$$

dove z_0 è un punto variabile nel cerchio di convergenza di (8), e prendiamo

$$\vartheta = \frac{2\pi m}{2^n}$$

essendo m ed n numeri naturali.

Sostituendo il precedente valore di z in (8), si ottiene una serie di potenze in z_0 la quale coincide con (8) facendo astrazione dei primi n termini. Infatti tenendo conto del valore di ϑ, si ha

$$a^s z^{2^s} = a^s z_0^{2^s}$$

per $s \geq n$.

Dunque, per la funzione definita dalla serie trasformata, il punto $z_0 = 1$ è punto critico, e si conclude che il punto

$$z = e^{i\vartheta}$$

è critico per la funzione analitica definita da (8).

Così che, facendo $m = 0, 1, \ldots\ldots, 2^n - 1$, possiamo dire che la funzione $f(z)$ ha come punti critici i vertici di un poligono regolare di 2^n lati inscritto nella circonferenza di convergenza; e perciò, facendo crescere indefinitamente n, si conclude che ogni punto di questa circonferenza è critico, per la funzione definita dall'elemento analitico $f(z)$, perchè, o il punto coincide con un vertice dei detti poligoni, o è punto limite di tali vertici.

Segue che l'elemento $f(z)$ non ammette prolungamenti analitici al di fuori del suo cerchio di convergenza

così che il campo di esistenza della funzione si riduce esclusivamente al detto cerchio.

Esempio II° - Si abbia una linea regolare semplice L rappresentata parametricamente dalle equazioni

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t),$$

e supponiamo che le funzioni $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ siano anche dotate di derivate seconde.

Se i punti di L si hanno, ad esempio, in corrispondenza ai valori di t nell'intervallo $0 \dashv 1$, ordiniamo in una successione i valori razionali compresi in questo intervallo, e siano

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots \qquad (9)$$

i punti di L corrispondenti ai detti valori razionali di t.

Sia, d'altra parte:

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots\ldots$$

una serie convergente di numeri positivi, e formiamoci la serie:

$$f(z) = \frac{k_1}{z - a_1} + \frac{k_2}{z - a_2} + \frac{k_3}{z - a_3} + \ldots\ldots \qquad (10)$$

Questa serie di funzioni definisce una funzione $f(z)$ olomorfa in ogni punto z del piano posto fuori della linea L.

Infatti, se c è fuori di L, si può descrivere un cerchio di centro c che non abbia punti comuni con L; e allora, se Δ denota la minima distanza tra la circonferenza del cerchio e L, si ha per i punti z di questo cerchio:

$$\frac{k_n}{|z-a_n|} \leq \frac{k_n}{\Delta}.$$

Dunque la serie (10) risulta, in base al teorema di confronto (N.° 37), uniformemente convergente nel cerchio in discorso, e perciò definisce ivi una funzione olomorfa di z, come tali sono i singoli termini della serie (N.° 40). Questa funzione $f(z)$ può quindi essere rappresentata dentro il cerchio mediante una serie di potenze di $z-c$.

I punti di L sono per la funzione analitica uniforme $f(z)$ *tutti* punti singolari.

Consideriamo in primo luogo un punto della successione (9), per esempio a_1. Sopra la normale ad L nel punto a_1 si può segnare un punto z_0, dall'una o dall'altra banda di a_1, sufficientemente vicino ad a_1 in modo che ogni punto z del segmento $z_0 a_1$ abbia come minima distanza da L precisamente la lunghezza del segmento $z a_1$. Ciò si dimostra facilmente appoggiandosi sopra l'ipotesi che le funzioni $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ ammettono derivate seconde.

Moltiplicando i due membri di (10) per $z-a_1$, viene:

$$(z-a_1)f(z) = k_1 + k_2\frac{z-a_1}{z-a_2} + k_3\frac{z-a_1}{z-a_3} + \cdots\cdots,$$

e la serie a secondo membro è *uniformemente convergente* nei punti z del segmento $z_0 a_1$, perchè per questi punti si ha:

$$\left|\frac{z-a_1}{z-a_n}\right| < 1, \text{ e quindi } k_n\left|\frac{z-a_1}{z-a_n}\right| < k_n.$$

E giacchè i singoli termini della serie sono funzioni continue di z sopra $z_0 a_1$, segue (N.° 38) che, facendo tendere z ad a_1, si ha

$$\lim_{z\to a_1}(z-a_1)f(z) = k_1.$$

Dunque $f(z)$ certamente diverge quando z tende ad a_1 sopra $z_0 a_1$ e perciò a_1 è certamente un punto singolare sopra la linea $z_0 a_1$.

Egualmente si dimostra che sono singolari tutti i punti (9); e siccome questi punti formano un insieme dappertutto denso sopra L, come tale è l'insieme dei numeri razionali in $0 \mapsto 1$, sono singolari per $f(z)$ anche i punti di L diversi dai punti (9), perchè sono punti limiti di punti (9).

Se la linea L è chiusa, per esempio se è una circonferenza, la serie (10) definisce una funzione $f(z)$ all'interno della circonferenza e una funzione $f(z)$ all'esterno; ma queste sono *due funzioni analitiche distinte*, in quanto che gli elementi analitici dell'una non sono prolungamenti degli elementi analitici dell'altra.

Stando sempre nell'ipotesi che L sia una circonferenza, dividiamo questa in due semicirconferenre C_1 e C_2 mediante due punti diametralmente opposti e diversi dai punti (9); e scindiamo poi la serie (10) in due parti: una costituita dai termini i cui punti (9) cadono in C_1 e l'altra costituita dai termini i cui punti (9) cadono in C_2.

Ciascuna di queste due serie definisce una sola funzione analitica in tutto il piano, eccettuati i punti di C_1 per una di esse che chiamiamo $f_1(z)$, ed eccettuati i punti di C_2 per l'altra che chiamiamo $f_2(z)$. È intanto accade che la loro somma

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)$$

non è, come abbiamo osservato, una sola funzione analitica.

L'esempio in discorso mostra che esistono funzioni analitiche il cui campo di esistenza è costituito da certe regioni, e non ne comprende invece altre.

N° 65. Teorema dei residui- Se la funzione $f(z)$ è monodroma in una regione semplice R sul cui contorno C non cadano punti singolari, e se $f(z)$ possiede nella detta regione soltanto punti singolari isolati, l'integrale:

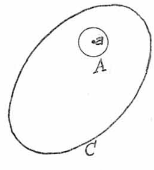
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$$

è eguale alla somma dei residui relativi ai punti singolari che cadono nella regione.

Siano:

$$a,\ b, \ldots\ldots, l$$

i punti singolari (necessariamente in numero finito); descriviamo col centro in tali punti altrettante circonferenze $A, B, \ldots\ldots, L$ interne alla regione ed esterne l'una all'altra. La funzione $f(z)$ è olomorfa nella regione $\bar{R}$ limitata dai circuiti $C, A, B, \ldots\ldots, L$ ed anzi è nella stessa regione strettamente continua. Applicando il teorema di Cauchy (N° 29) si ottiene:



$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_A f(z)\,dz+\cdots\cdots+\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)\,dz\,.$$

Calcoliamo il primo integrale del secondo membro. Sappiamo che (N° 62) all'interno della circonferenza A, la funzione $f(z)$ è rappresentata dallo sviluppo (di Laurent):

$$f(z)=\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots\cdots$$

La parte

$$a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots\cdots$$

dello sviluppo è una funzione olomorfa nel cerchio limitato da A e il suo integrale esteso ad A è nullo. In quanto alla parte rimanente

$$\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots\cdots,$$

possiamo integrare termine a termine, poichè, se a è un polo essa è costituita da un numero finito di termini, e nel caso in cui il punto a sia essenziale, essa è una serie uniformemente convergente su A.

La formola integrale di Cauchy (N° 30) ci porge:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_A \frac{a_{-1}}{z-a}\,dz = a_{-1}$$

e la formola delle derivate (N° 33) ci porge:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_A \frac{a_{-2}}{(z-a)^2}\,dz = 0, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_A \frac{a_{-3}}{(z-a)^3}\,dz = 0, \ldots\ldots$$

Abbiamo dunque:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_A f(z)\,dz = a_{-1}$$

dove a_{-1} è precisamente il residuo relativo al punto singolare a (N° 60).

Ripetendo lo stesso ragionamento per ogni integrale al secondo membro e indicando con $a_{-1}, b_{-1}, \ldots\ldots, l_{-1}$ i residui relativi ai punti singolari, otteniamo la formola che esprime il teorema enunciato

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = a_{-1} + b_{-1} + \cdots + l_{-1}. \qquad (11)$$

Vogliamo adesso considerare il punto $z = \infty$.

Sia (N° 63)

$$f(z) = \cdots + c_{-2}\,z^2 + c_{-1}\,z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots\cdots$$

lo sviluppo di una funzione $f(z)$, per la quale il punto $z = \infty$ sia isolato, valido all'esterno di una circonferen-

za C, col centro nell'origine, al di fuori della quale non cada alcun punto singolare di $f(z)$. Integrando termine a termine tale sviluppo, si ottiene, come precedentemente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-C} f(z)\,dz = -c_1,$$

dove l'integrale è esteso alla circonferenza C nel verso retrogrado. Il numero $-c_1$ è il residuo relativo al punto $z = \infty$.

Tenendo conto di questa osservazione, in modo analogo al teorema precedente possiamo dimostrare il seguente.

Se la funzione $f(z)$ è monodroma all'esterno di un circuito semplice C sul quale non cadano punti singolari, e se $f(z)$ possiede all'esterno di C soltanto un numero finito di punti singolari $a, b, \ldots\ldots, l$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-C} f(z)\,dz = a_{-1} + b_{-1} + \cdots\cdots + l_{-1} + R_\infty, \qquad (11)'$$

dove $a_{-1}, \ldots\ldots, l_{-1}, R_\infty$ sono i residui relativi rispettivamente ai punti $a, \ldots, l$, $z = \infty$.

Vogliamo notare una conseguenza di questa formola.

Se la funzione analitica uniforme $f(z)$ esiste in tutto il piano complesso e possiede soltanto un numero finito di punti singolari, la somma dei residui relativi a questi punti e del residuo relativo al punto $z = \infty$, è nulla.

Infatti in tal caso è possibile descrivere una circonferenza C col centro nell'origine e raggio abbastanza grande, in guisa che al di fuori di essa non cadano punti singolari per $f(z)$. L'integrale:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$$

è eguale al residuo relativo a $z=\infty$ cangiato di segno, ed anche eguale alla somma dei residui relativi ai punti singolari, ciò che dimostra l'asserto.

N. 66. Integrale indicatore. Se la funzione analitica $f(z)$ all'interno di una regione semplice R possiede soltanto singolarità polari, e sul contorno C di R non ha nè zeri, nè punti singolari, si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P \qquad (12)$$

dove N e P denotano rispettivamente il numero degli zeri e il numero dei poli di $f(z)$ interni a R (quando si computi ciascuno di essi un numero di volte eguale all'ordine di molteplicità).

Sia a uno zero di molteplicità μ di $f(z)$ interno a R; in un piccolo cerchio di centro a che non comprenda altri zeri o poli di $f(z)$ si ha:

$$f(z) = (z-a)^{\mu}\cdot\varphi(z)$$ (Vedi Cesàro pag. 518)

dove $\varphi(z)$ è una funzione olomorfa di z che non si annulla nel cerchio stesso. Derivando questa relazione si ricava:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\mu}{z-a} + \varphi_1(z)$$

dove $\varphi_1(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ è olomorfa nel detto cerchio; perciò il punto a è un polo di *primo ordine* per la funzione $\frac{f'(z)}{f(z)}$ e il residuo ad esso relativo è μ.

Dunque la somma dei residui provenienti dagli zeri di $f(z)$ interni a R è

$$\Sigma\mu = N,$$

cioè il numero di questi zeri, ciascuno contato un numero di volte eguale al proprio ordine di molteplicità.

Sia ora b un polo di $f(z)$ interno a R, di molteplicità ν; in un piccolo cerchio col centro in b, che non comprenda altri zeri e poli della funzione $f(z)$, si ha:

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-b)^{\nu}},$$

dove $\psi(z)$ è una funzione olomorfa di z che non si annulla nel cerchio stesso. Derivando si ottiene:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\nu}{z-b} + \psi_1(z),$$

dove $\psi_1(z) = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ è una funzione di z olomorfa nel detto cerchio; perciò il punto b è un polo di *primo ordine* per la funzione $\frac{f'(z)}{f(z)}$ e il residuo ad esso relativo è $-\nu$.

Dunque la somma dei residui provenienti dai poli di $f(z)$ interni a R è

$$-\Sigma\nu = -P,$$

cioè il numero di questi poli cambiato di segno, quando ciascun polo si computi un numero di volte eguale al proprio ordine di molteplicità.

D'altra parte, la funzione $\frac{f'(z)}{f(z)}$ è olomorfa in ogni regione interna a R che non comprenda nè zeri nè poli, di $f(z)$; dunque, applicando il teorema dei residui, si ha appunto la (12).

Consideriamo adesso il punto $z=\infty$. Se esso è uno zero di ordine μ per la funzione $f(z)$, si può descrivere, col centro nell'origine, una circonferenza C di raggio abbastanza grande in modo che fuori di C non cadano nè zeri, nè punti singolari per $f(z)$. Lo sviluppo di questa funzione all'esterno di C ha la forma:

$$f(z)=\frac{C_\mu}{z^\mu}+\frac{C_{\mu+1}}{z^{\mu+1}}+\cdots\cdots=\frac{\varphi(z)}{z^\mu}, \qquad (C_\mu \neq 0)$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione di z, olomorfa all'esterno di C, che non si annulla.

Derivando, si ha

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-\mu}{z}+\varphi_1(z)$$

dove la funzione

$$\varphi_1(z)=\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\frac{-\frac{C_{\mu+1}}{z^2}-\frac{2C_{\mu+2}}{z^3}-\cdots}{C_\mu+\frac{C_{\mu+1}}{z}+\cdots}$$

è olomorfa all'esterno di C ed ha uno zero nel secondo ordine in $z=\infty$; perciò il punto $z=\infty$ risulta uno zero del *primo ordine* per la funzione $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ed il residuo ad esso relativo è μ.

In modo analogo si vede che se il punto $z=\infty$ è un polo di ordine ν per una funzione $f(z)$, il detto punto è uno zero per la funzione $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ed il residuo ad esso relativo è $-\nu$.

Queste considerazioni pel punto $z=\infty$ ci mostrano come il *teorema dell'integrale indicatore* valga anche quando la funzione analitica $f(z)$ possegga un numero finito di singolarità polari all'esterno di un circuito semplice C sul quale non si annulli e non possegga singolarità. In tal caso fra gli zeri oppure fra i poli di $f(z)$ potrà eventualmente comparire il punto $z=\infty$.

N° 67. Teorema fondamentale dell'algebra.

Il teorema dell'integrale indicatore fornisce una dimostrazione immediata del teorema fondamentale dell'algebra:

Qualunque polinomio di grado $n (\geq 1)$

$$f(z)=c_0 z^n+c_1 z^{n-1}+\cdots+c_n \qquad (c_0\neq 0)$$

possiede precisamente n zeri. (soluzioni del polinomio uguagliato a 0).

Derivando si calcola facilmente

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{z}\cdot\frac{1+\cdots\cdots+\frac{c_{n-1}}{n c_0 z^{n-1}}}{1+\cdots\cdots+\frac{c_n}{c_0 z^{n-1}}}=\frac{n}{z}\cdot\varphi(z)$$

dove $\varphi(z)$ è il rapporto di due polinomi in $\frac{1}{z}$ i cui termini costanti sono ambedue eguali a 1; perciò la funzione $\varphi(z)$ è una funzione dell'argomento $\frac{1}{z}$, olomorfa in un cerchio sufficientemente piccolo col centro nel punto $\frac{1}{z}=0$; e quindi ammette lo sviluppo in serie:

$$\varphi(z)=1+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots$$

Lo sviluppo di $\varphi(z)$, considerato come funzione di z, non è altro che lo sviluppo di Laurent, valido per i punti esterni ad una circonferenza sufficientemente grande C col centro nell'origine.

Lo sviluppo in discorso converge uniformemente su una circonferenza $\bar{C}$, concentrica a C, e con raggio maggiore di questa.

Concludendo si ha

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{z}+\frac{na_1}{z^2}+\frac{na_2}{z^3}+\cdots\cdots$$

e integrando termine a termine lungo $\bar{C}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{C}}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=n.$$

Entro la circonferenza $\bar{C}$ non cade nessun polo di $f(z)$, quindi il valore n dell'integrale indicatore dice che entro $\bar{C}$ cadono n zeri. Poichè a $\bar{C}$ si può sostituire una qualunque circonferenza concentrica più grande, ne segue l'asserto.

N° 68. Il teorema relativo all'integrale indicatore si può generalizzare come segue:

Nelle stesse ipotesi del N° 66 per la funzione $f(z)$, se la funzione $\varphi(z)$ è olomorfa in R, allora l'integrale:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)\,dz$$

è eguale alla somma dei valori che la funzione $\varphi(z)$ prende negli zeri di $f(z)$ diminuita della somma dei valori che $\varphi(z)$ prende nei poli di $f(z)$.

In altri termini si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)\,dz=\Sigma\,\varphi(a)-\Sigma\,\varphi(b)\qquad(13)$$

dove le somme si intendono estese rispettivamente a tutti gli zeri a e a tutti i poli b di $f(z)$ interni a R, ciascuno contato un numero di volte eguale al proprio ordine di molteplicità.

Sia a uno zero di molteplicità μ di $f(z)$; possiamo porre (N° 66)

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\mu}{z-a}+g(z);\qquad \varphi(z)=\varphi(a)+(z-a)\,\psi(z)$$

dove $g(z)$ e $\psi(z)$ sono funzioni di z olomorfe in un cerchio sufficientemente piccolo di centro a.

Moltiplicando membro a membro risulta:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)=\frac{\mu\cdot\varphi(a)}{z-a}+h(z)$$

con $h(z)$ funzione di z olomorfa nel detto cerchio.

Si vede dunque che la funzione integranda in (13) ha un polo semplice nel punto $z=a$ col residuo $\mu\cdot\varphi(a)$, e questo residuo è precisamente la somma dei valori di $\varphi(z)$ nei μ zeri di $f(z)$ riuniti in a.

Analogamente, se b è un polo di $f(z)$ di molteplicità ν, risulta:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z) = \frac{-\nu\,\varphi(b)}{z-b} + h_1(z),$$

dove $h_1(z)$ è una funzione di z, olomorfa in un cerchio sufficientemente piccolo di centro b.

Dunque la funzione integranda in (13) possiede nel punto $z=b$ un polo del primo ordine, col residuo $-\nu\,\varphi(b)$ eguale alla somma cambiata di segno dei valori che $\varphi(z)$ prende nei ν poli riuniti in b.

D'altra parte la funzione integranda in (13) è olomorfa in ogni regione interna a R che non contenga nè zeri, nè poli di $f(z)$; dunque applicando il teorema dei residui a tale funzione otteniamo la formola (13).

In particolare se poniamo $\varphi(z)=1$ si ha il teorema dell'integrale indicatore; se poniamo invece $\varphi(z)=z$; si ha:

$$\frac{1}{2\pi i}\int z.\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \Sigma a - \Sigma b, \qquad (13)'$$

cioè l'integrale al primo membro dà la differenza tra la somma degli zeri e la somma dei poli di $f(z)$ che cadono dentro la regione R.