

CAPITOLO XII.

Limiti.

124. Si consideri il numero y definito dalla relazione

$$y = \frac{1}{x}$$

ad ogni valore di x , eccettuato il valore zero, corrisponde un determinato valore di y : y è dunque funzione di x .

Si attribuiscono alla x successivamente i valori

$$1, 2, 3, \dots;$$

subito si vede che i valori corrispondenti di y

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

vanno sempre decrescendo: e se si danno alla x valori che crescono indefinitamente, i valori corrispondenti della y decrescono indefinitamente, cioè, si può, ingrandendo la x , rendere y minore di qualsivoglia numero positivo assegnato, comunque piccolo: invero, affinchè, per es. sia

$$y < 0,001, \text{ ovvero } y < 0,0001, \text{ ovvero } y < 0,00001, \dots$$

basta dare ad x valori rispettivamente maggiori di

$$1000, 10000, 100000, \dots$$

Così si vede che il numero y , al crescere indefinito di x , passa per una serie illimitata di valori, i

quali, decrescendo sempre, si avvicinano allo zero, sino a differirne per meno di qualsiasi numero positivo assegnabile. Si esprime questa proprietà del numero y dicendo che esso ha per limite zero, oppure tende al limite zero, quando la variabile x va assumendo valori crescenti indefinitamente.

Si noti che y non diviene mai eguale a zero.

Parimente se alla x , invece che valori positivi, si danno successivamente valori negativi

$$-1, -2, -3, \dots$$

anche i valori corrispondenti di y

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots$$

sono negativi, e quindi tutti minori di zero: vanno però, come si vede, sempre crescendo: e al decrescere indefinito di x per valori negativi, possono avvicinarsi indefinitamente a zero; si dirà anche qui che, y ha per limite zero quando la variabile x va assumendo valori negativi decrescenti indefinitamente cioè, crescenti indefinitamente in valore assoluto.

In questo caso abbiamo dunque un numero y variabile che tende al limite zero passando per valori successivamente crescenti, mentre nel caso precedente il numero y tendeva a zero passando per valori successivamente decrescenti. — Nell' un caso come nell' altro è il valore assoluto di y , che va decrescendo indefinitamente.

Si consideri ora la funzione

$$y = \frac{(-1)^x}{x}$$

della variabile x : se si danno alla x successivamente i valori

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

la y assume i valori corrispondenti

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots;$$

questi valori essendo alternativamente positivi e negativi, si vede che y al crescere indefinito di x per valori interi e positivi non va sempre crescendo o sempre decrescendo, ciò che accadeva negli esempi precedenti: in certo modo esso *oscilla* intorno allo zero avvicinandovisi sempre e indefinitamente, perchè i valori assoluti di esso sempre decrescono e possono, senza mai divenire effettivamente nulli, ridursi minori di qualsivoglia numero positivo arbitrariamente piccolo; si dirà anche qui che y ha per limite zero al crescere indefinito di x .

Si consideri ancora la funzione

$$y = \frac{1 + (-1)^x}{x}$$

e si diano alla x i valori

$$1, 2, 3, 4, \dots;$$

i valori corrispondenti di y sono

$$0, \frac{2}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{4}, \dots;$$

y , sempre positivo, non va sempre decrescendo: per ogni valore dispari di x assume il valore zero, per ogni valore pari di x assume un valore maggiore di zero: ma via via che x cresce, il valore per cui y , ad ogni valore pari di x , si allontana da zero, va impiccolendo sempre più, dimodochè, assegnato un numero positivo σ piccolo quanto si voglia, è possibile dare ad x un valore abbastanza grande perchè per tutti i valori successivi, sia dispari, sia pari, che x assume, la y risulti sempre minore di σ . — Perciò si

dice qui pure che y , al crescere indefinito di x per valori interi e positivi, ha per limite zero.

Ecco dunque la definizione generale, che noi porremo:

Se i valori assoluti, che un numero variabile y va assumendo, si succedono in modo che essi, da uno in poi, siano tutti minori di qualsiasi numero positivo che si possa assegnare piccolo ad arbitrio, si dirà allora che y ha per limite zero e si scriverà $\lim. y = 0$.

OSSERVAZIONE I. È da notarsi che nel caso in cui i valori assoluti successivi di y costituiscono una serie illimitata sempre decrescente, nessuno di essi potrà mai divenire effettivamente nullo; perchè, non esistendo valori assoluti minori di zero, i valori assoluti di y successivi a quello che fosse zero, non potrebbero più decrescere. Questa condizione si è presentata nei primi tre degli esempi precedenti. — Ma, secondo la definizione posta, perchè di un numero variabile si possa dire che ha per limite zero, non è affatto necessario che esso vada sempre decrescendo in valore assoluto, e non si può quindi escludere che esso divenga anche effettivamente nullo. — Si è avuto esempio di ciò nel numero

$$y = \frac{1 + (-1)^x}{x}$$

OSSERVAZIONE II. Se un numero variabile y ha per limite 0, anche il numero variabile $-y$ ha per limite 0.

Questa è una conseguenza immediata della definizione precedente.

125. Ogni volta che la differenza $(l-v)$ tra un numero finito e determinato l , e un numero variabile v ha per limite zero, e solamente allora, noi diremo che il

numero variabile v ha per limite 1, tende al limite 1, e si scriverà $\lim. v = 1$.

È manifesto, per l'Osservazione II precedente, che invece della differenza $(l-v)$ si può considerare l'altra $(v-l)$, perocchè le due $(l-v)$, $(v-l)$ vanno a zero contemporaneamente: quindi, osservando che è $v-l = (-l)-(-v)$, se ne deduce che se v ha per limite l , $-v$ ha per limite $-l$.

ESEMPIO. Il numero variabile

$$v = \frac{2+x}{3+x}$$

ha per limite 1, quando x cresce indefinitamente per valori positivi.

Infatti, la differenza

$$1-v = 1 - \frac{2+x}{3+x}$$

essendo per ogni valore di x eguale a

$$\frac{3+x-(2+x)}{3+x} = \frac{1}{3+x}$$

è sempre positiva per x positivo, e decresce al crescere di x . Ora mostreremo che può divenire minore di qualsiasi numero positivo assegnabile, cioè, che ha per limite 0.

Sia ε un numero positivo arbitrariamente piccolo e si ponga

$$\frac{1}{3+x} < \varepsilon;$$

perchè questa sia soddisfatta, basta che io sia l'altra

$$1 < \varepsilon(3+x)$$

ovvero

$$\frac{1-3\varepsilon}{\varepsilon} < x$$

dal che si vede, che per ogni valore di x maggiore di $\frac{1-3\varepsilon}{\varepsilon}$, la differenza $1 - \frac{2+x}{3+x}$ è minore di ε ; e questo prova che il numero

$$v = \frac{2+x}{3+x}$$

ha per limite 1, al crescere indefinito di x .

OSSERVAZIONE I. Se la differenza $(l-v)$ tende al limite zero decrescendo sempre in valore assoluto, come accade nell'esempio arrecato, allora essa non diviene mai effettivamente nulla, e quindi non è mai $l=v$; ma se $(l-v)$ non decresce sempre in valore assoluto, non si può escludere che v divenga eguale ad l .

OSSERVAZIONE II. Di un numero costante, se si applica anche ad esso la definizione precedente, si può dire che ha per limite sè stesso, perocchè, se questo numero è l , la differenza $(l-l)$ essendo nulla, è in valore assoluto minore di qualsiasi numero assegnabile.

126. Dalla definizione data di limite discende immediatamente questo importante teorema:

Nella serie dei valori, che una variabile v assume tendendo a un limite l determinato e finito, si può sempre trovare un valore tale che la differenza tra esso e uno qualunque dei successivi, sia in valore assoluto minore di qualsivoglia numero positivo scelto arbitrariamente piccolo.

Sia

$$v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+r}, \dots$$

la serie dei valori successivi che v assume tendendo al limite l .

Si consideri la serie delle differenze

$$(l-v_1), (l-v_2), \dots, (l-v_n), (l-v_{n+1}), \dots, (l-v_{n+r}), \dots$$

Secondo la definizione di limite, queste, da un certo punto in poi, saranno tutte minori in valore assoluto di qualsivoglia numero scelto piccolo ad arbitrio. Sia σ un tal numero, e sia $(l - v_n)$ quella differenza, a partire dalla quale tutte le successive sono minori di σ in valore assoluto.

Ora si ha

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+r} &= l - l + v_n - v_{n+r} \\ &= (l - v_{n+r}) + (v_n - l). \end{aligned}$$

Il valore assoluto di una somma è minore od eguale alla somma dei valori assoluti dei termini della somma (n° 5): quindi il valore assoluto di $(v_n - v_{n+r})$ è minore od eguale alla somma dei valori assoluti di $(l - v_{n+r})$ e $(v_n - l)$, ciascuno dei quali è per quanto dicemmo, minore di σ ; per conseguenza il valore assoluto di $(v_n - v_{n+r})$ è minore di 2σ , e 2σ può esser preso piccolo a piacere, il che prova il teorema.

127. Riprendasi la funzione già dianzi considerata

$$y = \frac{1}{x}$$

dove x è un numero variabile ad arbitrio.

Si attribuiscono alla x valori positivi che successivamente decrescendo tendano al limite *zero*: p. es. i valori della serie indefinita

$$\alpha) \quad 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, \dots;$$

y corrispondentemente a questi, assume i valori

$$\beta) \quad 10, 100, 1000, 10000, \dots$$

ed è manifesto, che, prolungando indefinitamente la serie dei valori $\alpha)$ si prolunga indefinitamente anche la serie dei valori $\beta)$, i quali vanno crescendo sino a superare qualsiasi numero assegnabile; si esprime ciò

dicendo che, *mentre la variabile x decrescendo per valori positivi tende al limite 0, y cresce indefinitamente, ovvero ha per limite l'infinito positivo e si scrive $\lim. y = +\infty$, rappresentando col segno ∞ , un numero infinito cioè superiore a qualunque numero assegnabile.*

Se invece si dessero alla x successivamente i valori della serie

$$\alpha') \quad -0,1, -0,01, -0,001, \dots$$

la y , corrispondentemente a questi, assumerebbe i valori

$$\beta') \quad -10, -100, -1000, \dots$$

cioè decrescerebbe sino a divenire minore di qualsiasi numero negativo assegnabile: si esprimerebbe ciò dicendo che, *mentre la x passando per valori negativi tende al limite 0, y ha per limite l'infinito negativo e si scriverebbe $\lim. y = -\infty$.*

In generale, se il numero variabile y va assumendo successivi valori assoluti, tali che, da uno in poi, sieno tutti maggiori di qualsiasi numero positivo, che si possa assegnare grande ad arbitrio, allora si dirà che y ha per limite l'infinito: e se da un certo valore in poi, tutti i valori successivi di y , sono del medesimo segno positivo o negativo il limite sarà l'infinito positivo o negativo rispettivamente.

128. Un esempio di variabile, che ha per limite l'infinito si ha considerando la funzione $y = a^x$, dove a è un numero determinato maggiore di 1. — Si dimostra infatti che se si attribuiscono alla x successivi valori positivi crescenti indefinitamente, contemporaneamente y assume successivi valori positivi pure crescenti indefinitamente.

Invero, se è $a > 1$, si può porre

$$a = 1 + h$$

e h sarà un numero positivo: se ne trae

$$a - 1 = h$$

onde, moltiplicando per a

$$a^2 - a = ah$$

e moltiplicando nuovamente per a

$$a^3 - a^2 = a^2 h$$

e così continuando

$$a^4 - a^3 = a^3 h$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a^k - a^{k-1} = a^{k-1} \cdot h.$$

ma è $a > 1$: quindi

$$a^2 - a > h$$

$$a^3 - a^2 > h$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a^k - a^{k-1} > h$$

Addizionando membro a membro tutte queste disuguaglianze e la eguaglianza, $a - 1 = h$, otterremo:

$$a^k - 1 > kh$$

ovvero

$$a^k > 1 + kh;$$

ma è sempre possibile dare a k valori che soddisfino la disuguaglianza

$$1 + kh > \omega$$

ω indicando un numero positivo grande quanto si voglia, giacchè basta prendere $k > \frac{\omega-1}{h}$; quindi per gli stessi valori di k sarà anche

$$a^k > \omega$$

e questo è quanto si voleva dimostrare.

E in seguito a ciò, noi possiamo ora anche presentare un esempio di limite determinato e finito che ci offre l'Aritmetica.

Sia la frazione decimale periodica

$$0, 81 \ 81 \ 81, \dots;$$

si prendano in essa x periodi, x indicando un numero intero; e sia y il numero che così risulta; cioè:

$$1) \quad y = 0, \overset{1}{81} \ \overset{2}{81} \ \overset{3}{81} \ \dots \ \overset{x-1}{81} \ \overset{x}{81},$$

evidentemente y è funzione di x .

Moltiplicando per 100, si ha

$$100y = 81, \overset{1}{81} \ \overset{2}{81} \ \dots \ \overset{x-1}{81}$$

e aggiungendo di qua e di là $\frac{81}{100^x}$

$$100y + \frac{81}{100^x} = 81, \overset{1}{81} \ \overset{2}{81} \ \dots \ \overset{x-1}{81} + \frac{81}{100^x}$$

$$100y + \frac{81}{100^x} = 81, \overset{1}{81} \ \overset{2}{81} \ \dots \ \overset{x-1}{81} \ \overset{x}{81}$$

dalla quale eguaglianza sottraendo membro a membro la 1) si ottiene:

$$99y + \frac{81}{100^x} = 81$$

onde

$$y = \frac{81}{99} - \frac{81}{99 \cdot 100^x}$$

ovvero

$$0, \overset{1}{81} \ \overset{2}{81} \ \dots \ \overset{x}{81} = \frac{81}{99} - \frac{81}{99 \cdot 100^x};$$

se si danno alla x successivi valori interi crescenti indefinitamente, 100^x (vedi es. precedente) crescerà in-

riabile secondo una legge determinata, è sufficiente per individuare quel numero costante.

2° Sieno v e v' due numeri variabili con questa legge, che, corrispondendosi i valori successivi che essi vanno assumendo, ciascuno a ciascuno, la differenza tra essi abbia per limite zero. Se contemporaneamente uno dei numeri, p. es. v , ha un limite l determinato e finito, anche l'altro v' avrà lo stesso limite.

Invero, si ha identicamente

$$\begin{aligned} l - v' &= l - v' + v - v \\ &= (l - v) + (v - v'). \end{aligned}$$

Il valore assoluto di una somma essendo (n. 5) eguale o minore della somma dei valori assoluti dei numeri componenti, il valore assoluto di $(l - v')$ sarà eguale o minore della somma dei valori assoluti di $(l - v)$ e $(v - v')$; dimodochè, indicando con δ il valore assoluto di $(l - v')$, con δ_1 quello di $(l - v)$, con δ_2 quello di $(v - v')$, si ha

$$\delta \leq \delta_1 + \delta_2.$$

Ora $(l - v)$ e $(v - v')$, per ipotesi, tendono contemporaneamente al limite 0: se con σ si indica un numero positivo piccolo a piacere, si potrà dunque rendere

$$\delta_1 < \frac{\sigma}{2}$$

$$\delta_2 < \frac{\sigma}{2}$$

onde (121, 3°)

$$\delta_1 + \delta_2 < \sigma$$

e quindi anche

$$\delta < \sigma.$$

Il valore assoluto di $(l - v')$ può dunque divenire minore di qualsiasi numero positivo assegnabile: si deve quindi concludere, secondo la definizione del n. 124, che $l - v'$ tende al limite 0 e quindi v' tende al limite l : il che è quanto si voleva dimostrare.

COROLLARIO. Se due numeri v e v' variano assumendo successivi valori eguali ciascuno a ciascuno, e uno di essi ha un limite, anche l'altro ha lo stesso limite.

3° È vera anche la proposizione reciproca: cioè, se v e v' sono due numeri variabili che tendono contemporaneamente a uno stesso limite l determinato e finito, la differenza tra essi avrà allora per limite zero.

Si ha identicamente

$$v - v' = (l - v') + (v - l)$$

e se si indica con δ il valore assoluto di $(v - v')$, con δ_1 quello di $(l - v')$, con δ_2 quello di $(v - l)$, si ha

$$\delta \leq \delta_1 + \delta_2$$

ma $(l - v')$ e $(v - l)$ hanno, per ipotesi, per limite zero; i loro valori assoluti δ_1 , δ_2 divengono dunque minori di qualsiasi numero positivo assegnabile; e ragionando come precedentemente, se ne deduce, che anche il valore assoluto δ di $(v - v')$ può divenire minore di qualsiasi numero positivo assegnabile.

4° Se due o più numeri variabili tendono simultaneamente al limite 0, anche la loro somma avrà per limite 0.

Sieno δ e δ' due numeri variabili, i quali tendono al limite 0: diciamo che anche $(\delta + \delta')$ tenderà contemporaneamente al limite 0.

Indichi δ_1 il valore assoluto di δ , δ'_1 quello di δ' , $(\delta + \delta')_1$ quello di $(\delta + \delta')$. Il valore assoluto della

somma di due numeri è eguale o minore della somma dei valori assoluti di essi; si ha dunque

$$(\delta + \delta')_1 \leq \delta_1 + \delta'_1.$$

Ora denoti σ un numero positivo piccolo a piacere: si potrà sempre rendere

$$\delta_1 < \frac{\sigma}{2}$$

e

$$\delta'_1 < \frac{\sigma}{2}$$

e quando siano verificate queste due, sarà pure verificata sempre l'altra

$$\delta_1 + \delta'_1 < \sigma$$

e a più forte ragione sarà

$$(\delta + \delta')_1 < \sigma$$

il che prova che la somma $(\delta + \delta')$ ha per limite zero.

Il teorema enunciato è dunque dimostrato vero per la somma di due variabili.

Lo si dimostra subito anche per la somma di tre.

Sieno i numeri variabili δ , δ' e δ'' aventi simultaneamente per limite 0; si ponga per un momento $\Delta = \delta + \delta'$: per quanto è stato ora dimostrato, Δ ha per limite zero: ma è

$$\Delta + \delta'' = \delta + \delta' + \delta''$$

dunque (130, 2°, corollario) giacchè la somma $\Delta + \delta''$, per quanto ora fu dimostrato, ha per limite 0, anche la somma $(\delta + \delta' + \delta'')$ ha per limite zero; il che è quanto si voleva.

In modo analogo si dedurrebbe di qui che il teorema è vero per la somma di quattro variabili, e con-

tinuando lo si dimostrerebbe vero per un numero qualunque di variabili.

Il processo di dimostrazione qui adoperato è effettivamente applicabile per un numero qualunque finito di variabili; se il numero delle variabili fosse infinito o tendesse a divenir tale a misura che le variabili tendono ciascuna a zero, è manifesto che applicando questo processo non si giungerebbe mai ad esaurire tutte quante le variabili; non si potrebbe dunque, col metodo precedente, dimostrare vero il teorema per un numero di variabili infinito o crescente indefinitamente; nè si potrebbe dimostrarlo in altra qualsiasi maniera, perchè infatti il teorema non è allora vero in generale.

ESEMPIO. Si abbiano le frazioni

$$\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{2n};$$

che, come si vede, sono in numero di n ; al crescere indefinito di n per valori interi ciascuna ha per limite 0 e anche il numero di esse cresce indefinitamente: ora si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{n}{2n} \\ &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

il che mostra che il valore della somma

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

al crescere di n è sempre maggiore di $\frac{1}{2}$, e quindi la somma medesima non ha per limite 0.

5° Se due o più numeri variabili, tendono ciascuno a un limite determinato e finit'o, la somma di essi tende contemporaneamente a un limite, che è eguale alla somma dei limiti dei numeri variabili considerati.

Sieno $v_1, v_2, \dots, v_n$, (n numero finito), i numeri variabili; $l_1, l_2, \dots, l_n$ i limiti rispettivi.

Pongasi

$$l_1 - v_1 = \delta_1, l_2 - v_2 = \delta_2, \dots, l_n - v_n = \delta_n$$

$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ saranno numeri variabili, che tendono a zero, mentre $v_1, v_2, \dots, v_n$ tendono ai limiti $l_1, l_2, \dots, l_n$. Or dunque sommando le precedenti uguaglianze membro a membro si ottiene

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n - (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n;$$

n essendo un numero finito, la somma $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n$ (4°) tende al limite 0, mentre le δ tendono ciascuna a 0: epperò la somma $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ha per limite $l_1 + l_2 + \dots + l_n$.

Si ha dunque

$$\lim. (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = l_1 + l_2 + \dots + l_n.$$

6° Se δ è una variabile, che ha per limite 0, il prodotto $m\delta$, dove m è un numero costante, avrà contemporaneamente per limite 0.

Indichi ϵ un numero positivo, piccolo ad arbitrio, e $m_1, \delta_1, (m\delta)_1$ indichino rispettivamente i valori assoluti di $m, \delta, m\delta$: il valore assoluto di un prodotto essendo il prodotto dei valori assoluti dei fattori (20) si ha

$$(m\delta)_1 = m_1 \delta_1$$

ora, per ipotesi, si può rendere

$$\delta_1 < \frac{\epsilon}{m_1}$$

onde

$$m_1 \delta_1 < \epsilon$$

e quindi anche

$$(m\delta)_1 < \epsilon;$$

così rimane provato che il valore assoluto del prodotto $(m\delta)$ può divenire minore di qualsiasi numero positivo assegnabile: e quindi il prodotto medesimo $m\delta$ ha per limite 0.

7° Reciprocamente: se il prodotto $m\delta$ di una costante m , diversa da zero, per una variabile δ ha per limite 0, la variabile δ deve avere per limite 0.

Invero, se δ non avesse per limite 0, ciò significherebbe che il valore assoluto di essa si conserva sempre maggiore di un certo numero determinato a positivo e allora il valore assoluto del prodotto $m\delta$ si conserverebbe maggiore di $m_1 a$ e quindi $m\delta$ non avrebbe per limite zero.

8° Se $v_1 v_2$ è il prodotto di due fattori variabili, uno dei quali v_1 ha per limite zero mentre l'altro non cresce indefinitamente in valore assoluto, il prodotto medesimo ha per limite 0.

Indicando con a un numero positivo, di cui il valore assoluto di v_2 si conserva sempre minore, e con $v'_1, v'_2, (v_1 v_2)_1$ i valori assoluti rispettivi di $v_1, v_2, (v_1 v_2)$, si ha

$$(v_1 v_2)_1 = v'_1 v'_2$$

ma è

$$v'_1 v'_2 < a v'_1$$

e quindi

$$(v_1 v_2)_1 < a v'_1;$$

ma, pel teorema (7°) il prodotto $a v'_1$ ha per limite 0,

dunque $(v_1 v_2)_1$ può divenire minore di qualsiasi numero assegnabile, così è

$$\lim (v_1 v_2) = 0.$$

9° Reciprocamente, se il prodotto $v_1 v_2$ ha per limite 0, dei due fattori v_1, v_2 uno almeno deve avere per limite 0.

Se nessuno dei due v_1, v_2 avesse per limite 0, ciò significherebbe che il valore assoluto di ciascuno si conserva sempre maggiore di un certo numero a positivo, determinato; quindi si avrebbe sempre, tenute ferme le notazioni del teorema precedente,

$$(v_1 v_2)_1 = v'_1 v'_2 > a^2$$

cioè, il valore assoluto del prodotto $(v_1 v_2)$ non diverrebbe minore di qualsiasi numero assegnabile: il prodotto medesimo dunque non avrebbe per limite 0.

10° Se v è un numero variabile avente per limite 1 numero finito e determinato e m è una costante, il prodotto mv ha per limite ml .

Pongasi

$$l - v = \delta$$

δ avrà per limite 0; ora si ha:

$$ml - mv = m(l - v) = m\delta,$$

e pel teorema (7°) $m\delta$ ha per limite 0: dunque mv ha per limite ml , come si voleva dimostrare.

OSSERVAZIONE. Se il limite di v fosse infinito, sarebbe tale anche quello di mv , del medesimo segno di v , o di segno contrario secondochè m è positivo o negativo.

La cosa è manifesta, poichè il valore assoluto di mv cresce indefinitamente insieme con quello di v .

11° Se due o più numeri variabili, tendono ciascuno a un limite determinato e finito, il prodotto di essi ha

contemporaneamente un limite, che è eguale al prodotto dei limiti.

Dimostriamo anzitutto vero il teorema pel prodotto di due variabili.

Sieno v_1, v_2 i numeri variabili; l_1, l_2 i limiti rispettivi.

Pongasi

$$l_1 - v_1 = \delta_1, \quad l_2 - v_2 = \delta_2$$

δ_1 e δ_2 tenderanno al limite 0, quando v_1 e v_2 tendono ai limiti l_1, l_2 .

Da quelle si ha

$$v_1 = l_1 - \delta_1, \quad v_2 = l_2 - \delta_2$$

moltiplicando le quali membro a membro:

$$v_1 v_2 = l_1 l_2 - \delta_1 l_2 - \delta_2 l_1 + \delta_1 \delta_2$$

onde

$$l_1 l_2 - v_1 v_2 = \delta_1 l_2 + \delta_2 l_1 - \delta_1 \delta_2.$$

Si vede subito che il valore assoluto di $l_1 l_2 - v_1 v_2$ può divenire minore di qualsiasi numero positivo assegnabile perchè i singoli termini $\delta_1 l_2, \delta_2 l_1, \delta_1 \delta_2$ evidentemente possono rendersi piccoli sinchè si vuole, coll'impiccolire delle δ_1, δ_2 , e il valore assoluto di una somma algebrica è minore od eguale alla somma dei valori assoluti de' termini.

Così $l_1 l_2 - v_1 v_2$ ha per limite 0: quindi è

$$\lim (v_1 v_2) = l_1 l_2.$$

Dimostrato vero il teorema per un prodotto di due variabili, lo si dimostra subito anche per uno di tre.

Sieno v_1, v_2, v_3 i numeri variabili: l_1, l_2, l_3 i limiti rispettivi, si ha

$$v_1 v_2 v_3 = (v_1 v_2) v_3$$

e ponendo

$$v_1 v_2 = V$$

si ha

$$v_1 v_2 v_3 = V v_3 :$$

ma $V = v_1 v_2$, per quanto ora si è dimostrato, ha per limite $l_1 l_2$, v_3 ha per limite l_3 ; quindi per la stessa ragione ora invocata, $V v_3 = v_1 v_2 v_3$ ha per limite $(l_1 l_2) l_3 = l_1 l_2 l_3$.

Dimostrato vero il teorema per tre variabili ragionando analogamente lo si dimostrerebbe vero anche per quattro: continuando allo stesso modo, lo si dimostrerebbe per un numero qualsiasi, purchè finito, di variabili, cioè si dimostrerebbe che:

$$\lim. (v_1 v_2 \dots v_n) = l_1 l_2 \dots l_n.$$

COROLLARIO. Se in questa formula si fa

$$v_1 = v_2 = \dots = v_n = v$$

e quindi (n° 130, 2° Corollario)

$$l_1 = l_2 = \dots = l_n = l$$

si ottiene

$$\lim. v^n = l^n;$$

cioè, se un numero variabile v ha per limite un numero determinato e finito l , v^n ha per limite l^n , essendo n un esponente intero e positivo.

12° Se v^n ha per limite l^n , allora v ha per limite l , v ed l essendo presi del medesimo segno.

Se n è dispari, v^n e v , come pure l^n e l , sono del medesimo segno: e giacchè v^n ed l^n sono per dato del medesimo segno, così sono pur tali v ed l .

Se n è pari, allora esistono due numeri $+v$ e $-v$ che hanno v^n per potenza n^a , come pure $+l$ e $-l$ hanno l^n per potenza n^a : in tal caso, si deve intendere che è $+v$, che ha per limite $+l$, e $-v$, che ha per limite $-l$.

Invero si ha l'identità (54)

$$l^n - v^n = (l - v)(l^{n-1} + l^{n-2}v + \dots + lv^{n-2} + v^{n-1});$$

v ed l essendo presi del medesimo segno, il polinomio

$$l^{n-1} + l^{n-2}v + \dots + lv^{n-2} + v^{n-1}$$

ha tutti i suoi termini sempre del medesimo segno, cioè tutti positivi o tutti negativi; e giacchè l e quindi l^{n-1} è costante, così al variare di v il polinomio medesimo si conserva sempre in valore assoluto maggiore di l^{n-1} ; d'altronde, per dato, $(l^n - v^n)$ ha per limite zero, dunque dei due fattori in cui $(l^n - v^n)$ è decomposto, uno (9°) deve tendere al limite zero, e tale fattore è manifestamente $(l - v)$: v ha dunque per limite l .

13° Se v ha per limite l , numero finito, determinato e diverso da zero, il reciproco $\frac{1}{v}$ ha per limite $\frac{1}{l}$.

Si ha costantemente

$$v \cdot \frac{1}{v} = 1$$

epperò, in virtù dell'Osservazione II (n. 125), si può dire:

$$\lim. \left(v \cdot \frac{1}{v} \right) = 1$$

ma è (11°)

$$\lim. \left(v \cdot \frac{1}{v} \right) = \lim. v \cdot \lim. \left(\frac{1}{v} \right)$$

quindi

$$\lim. v \cdot \lim. \left(\frac{1}{v} \right) = 1$$

onde

$$\lim. \left(\frac{1}{v} \right) = \frac{1}{\lim. v}$$

ovvero

$$\lim. \left(\frac{1}{v} \right) = \frac{1}{l}$$

come si voleva dimostrare.

14° Se v_1 e v_2 sono due numeri variabili, che tendono contemporaneamente ai limiti rispettivi l_1 , l_2 numeri finiti e determinati, e dei quali almeno l_2 è anche diverso da zero, allora il quoziente $\frac{v_1}{v_2}$ ha per limite il quoziente dei limiti $\frac{l_1}{l_2}$.

Per le ipotesi fatte v_1 ha per limite l_1 , v_2 ha per limite l_2 ; quindi, pel teorema antecedente, $\frac{1}{v_2}$ ha per limite $\frac{1}{l_2}$; e si ha pel teorema (11°)

$$\begin{aligned} \lim. \left(\frac{v_1}{v_2} \right) &= \lim. \left(v_1 \cdot \frac{1}{v_2} \right) = \lim. v_1 \cdot \lim. \frac{1}{v_2} = \\ &= l_1 \cdot \frac{1}{l_2} = \frac{l_1}{l_2} \end{aligned}$$

come si voleva dimostrare.

OSSERVAZIONE. Sia a un numero determinato, finito e diverso da zero, e v un numero variabile avente per limite 0: $\frac{1}{v}$ avrà (n. 127) per limite l'infinito: quindi il quoziente $\frac{a}{v} = a \cdot \left(\frac{1}{v} \right)$ avrà (teorema 10°, Osservazione) per limite l'infinito positivo o negativo, secondochè a e v sono del medesimo segno o di segno contrario. — Per questa ragione, che il quoziente $\frac{a}{v}$ di un numero costante a diverso da zero, per un numero variabile v avente per limite 0, ha per limite l'infinito, si è convenuto di riguardare il simbolo $\frac{a}{0}$, a' valore assoluto di a , (che nel concetto or-

dinario di quoziente non ha significato) come simbolo di un valore assoluto infinito.¹

Parimente, poichè, se v ha per limite l' ∞ , $\frac{1}{v}$ ha (124) per limite 0, si vede (teorema 6°) che il quoziente $\frac{a}{v} = a \cdot \left(\frac{1}{v} \right)$ a numero determinato e finito, ha per limite 0: ed è per questa ragione, che si è convenuto di riguardare il simbolo $\frac{a}{\infty}$ come equivalente al simbolo 0.

Numeri irrazionali.

131. Già osservammo a pag. 4 che coi soli numeri dell'Aritmetica ordinaria non erano sempre possibili la sottrazione e l'estrazione di radice.

Allo scopo di rendere sempre possibile la sottrazione, introducemmo i numeri negativi; e sui numeri positivi e negativi, che divennero così oggetto delle nostre considerazioni, mostrammo come fossero possibili sempre le operazioni di addizione e sottrazione, moltiplicazione e divisione e quella di elevazione a potenza.

Ora dobbiamo occuparci delle operazioni inverse di questa ultima; diciamo delle operazioni inverse, perchè, a differenza dell'addizione e moltiplicazione, le quali hanno ciascuna una sola operazione inversa, cioè la sottrazione e la divisione rispettivamente, l'elevazione a potenza invece ne ha due.

La sottrazione di un numero a da un numero c , c ed a numeri qualunque positivi o negativi, si propone, come si sa, di determinare un numero b che sommato

¹ È per questa ragione, che quando nella risoluzione di equazioni (n. 89 e 102) s'incontra il simbolo $\frac{m}{0}$, si suole anche dire, che esse sono soddisfatte da valori infiniti.

con a produca c ; ora poichè in una somma di due numeri $c = a + b$ si possono scambiare tra loro i numeri medesimi a e b componenti la somma, così l'operazione per la quale dato c ed a si vuol trovare b , e quella per la quale dato c e b si vuole trovare a , sono sostanzialmente identiche.

Ecco perchè l'addizione ammette una sola operazione inversa.

La divisione di un numero c per un numero a si propone di determinare un numero b , che moltiplicato per a produca c : ora, poichè in un prodotto di due fattori $c = ab$, si possono scambiare tra loro i fattori medesimi a e b , così l'operazione per la quale dato c ed a si vuol trovare b e quella per la quale dato c e b si vuol trovare a , sono essenzialmente identiche.

Ed ecco che anche la moltiplicazione ammette una sola operazione inversa.

Si consideri invece l'elevazione a potenza.

Sia $c = a^n$, ove n è numero intero, positivo o negativo.

Chiamasi operazione inversa dell'elevazione a potenza quella, per la quale dato c e n ci si propone di trovare a : come anche l'altra, per la quale dato c ed a ci si propone di trovare n .

Queste sono due operazioni essenzialmente differenti fra loro; invero, pongasi che operando in un certo modo sopra c ed n si trovi a tale che sia $a^n = c$, e che operando poi allo stesso modo sopra c ed a si trovi n ; questo n , appunto perchè è ottenuto da c e da a , nello stesso modo come dianzi a era ottenuto da c e da n , dovrà essere tale che sia $n^a = c$; lo che non può essere, a meno che non si abbia $a^n = n^a$, e questo in generale non è.¹

¹ Ad es. non è $2^3 = 3^2$, $5^2 = 2^5$, ec., ec.

Il non potersi dunque nel simbolo a^n scambiare i due numeri a ed n fa sì che si abbiano due differenti operazioni inverse dell'elevazione a potenza.

La prima è quella per la quale data la potenza c e l'esponente n ci si propone di determinare la base a ; tale operazione è detta estrazione di radice, chiamandosi radice n^a di c , e denotandosi col simbolo $\sqrt[n]{c}$, il numero a tale che sia $a^n = c$, dimodochè si ha per definizione $(\sqrt[n]{c})^n = c$; n considerato nel simbolo $\sqrt[n]{c}$ prende il nome di indice della radice, e quello di radicando.

Se $n = 1$, si ha evidentemente $\sqrt[1]{c} = c$; se $n = 2$, la radice si chiama radice seconda o radice quadrata e si indica semplicemente con $\sqrt{c}$; se $n = 3$ si dice radice terza o cubica e si indica con $\sqrt[3]{c}$; ec., ec.

La seconda è quella per la quale data la potenza c e la base a ci si propone di determinare l'esponente n ; e questa operazione vien detta estrazione o ricerca di logaritmo, dandosi il nome di logaritmo di c a base a e denotandosi col segno $\log_a c$, il numero n tale che sia $a^n = c$.

Noi qui ora vogliamo occuparci solo della prima operazione.

132. Il valore assoluto di un prodotto è (20), il prodotto dei valori assoluti dei fattori; quindi il valore assoluto di un numero che è potenza n^a di un altro, è la potenza n^a del valore assoluto di questo. — Per conseguenza, affinchè un numero sia potenza n^a di un altro numero è intanto necessario che il suo valore assoluto sia esso potenza n^a del valore assoluto dell'altro numero, ovvero, che il suo valore assoluto ammetta la radice n^a .

Occupiamoci dunque per adesso solo dei valori assoluti dei numeri positivi e negativi; limitiamoci cioè, a considerare l'estrazione di radice applicata solamente ai numeri ordinari dell' Aritmetica.

133. È noto che un numero intero non può essere potenza n^a di un numero frazionario: dimodochè di un numero intero che non è potenza n^a di un altro numero intero, senz'altro si può affermare che non lo è di alcun numero, cioè che di esso non esiste la radice n^a , ed è manifesto che di numeri interi tali ve ne ha infiniti. Parimente, perchè un numero frazionario a termini interi sia potenza n^a di un altro numero frazionario, richiedendosi che esso ridotto alla sua più semplice espressione abbia per termini delle potenze n^o di numeri interi, così, non potendo d'altronde un numero frazionario essere potenza di un numero intero, si vede che per tutti quei numeri frazionari, i quali ridotti alla loro più semplice espressione non hanno per termini delle potenze n^o di numeri interi, non esiste la radice n^a .

Ciò mostra chiaramente, come esistano infiniti numeri interi e frazionari, pei quali, tra i numeri che noi sinora conosciamo, manca la radice seconda, la radice terza, la radice quarta, ec. ec.

Ecco dunque messa in evidenza la necessità di nuovi numeri oltre gli interi e i frazionari, se pure si vuole assegnare ad ogni numero la sua radice n^a .

Noi qui ci proponiamo appunto di definirli.

Si consideri, ad es., il numero 2: esso non è quadrato di alcun numero intero o frazionario: non esiste dunque la sua radice quadrata: si hanno però delle regole certe che insegnano a determinare dei numeri frazionari, i quadrati dei quali sieno minori di 2, e ne differiscano per meno di qualsivoglia numero preso

arbitrariamente piccolo: e parimente si sanno determinare dei numeri frazionari, i quadrati dei quali sieno maggiori di 2, e ne differiscano per meno di qualsivoglia numero preso arbitrariamente piccolo, cioè, si sanno trovare quei numeri che in Aritmetica si chiamano radici approssimate per difetto e per eccesso.

Le radici di 2 approssimate per difetto a meno di 1, 0,1, 0,001, 0,0001, ec. ec., sono

$$\alpha) \quad 1, \quad 1,4, \quad 1,41, \quad 1,414, \quad 1,4142, \quad \dots$$

quelle approssimate per eccesso a meno di 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, ec. ec., sono

$$\beta) \quad 2, \quad 1,5, \quad 1,42, \quad 1,415, \quad 1,4143, \quad \dots$$

I numeri α) costantemente crescono, e i β) costantemente decrescono, ed è possibile prolungare la serie degli α) abbastanza sino a trovare in essa un numero avente un quadrato sempre minore di 2, ma che ne differisca per meno di qualsiasi numero assegnabile: e parimente si può prolungare la serie dei numeri β) sino a trovarne uno avente un quadrato,

¹ I numeri α), come è noto, sono ottenuti così: si moltiplica e si divide il 2 successivamente per 100, 100², 100³, ec. ec. e si ha la serie di numeri frazionari della forma

$$\frac{2:100}{100}, \quad \frac{2:100^2}{100^2}, \quad \frac{2:100^3}{100^3}, \quad \dots$$

ovvero

$$\frac{200}{10^2}, \quad \frac{20000}{100^2}, \quad \frac{2000000}{1000^2}, \quad \dots$$

tutti eguali a 2: si trova la radice quadrata del massimo quadrato intero contenuto nel numeratore di ciascuno, cioè la radice a meno di un'unità di questo numeratore, e si divide poi questa radice per 10, 100, 1000, rispettivamente.

I numeri β) sono ottenuti dai numeri α) aumentando di una unità l'ultima cifra di questi.

sempre maggiore di 2, ma che ne differisca meno di qualsiasi numero assegnabile.

Si considerino dunque le due serie formate coi quadrati rispettivi dei numeri α) e β)

$\alpha')$ 1, $(1, 4)^2$, $(1, 41)^2$, $(1, 414)^2$,

$\beta')$ 4, $(1, 5)^2$, $(1, 42)^2$, $(1, 415)^2$,

evidentemente il numero 2, secondo il concetto da noi posto (125) è il limite comune verso cui tendono i numeri $\alpha')$ e i numeri $\beta')$, crescendo quelli, decrescendo questi; dimodochè se si pensa un numero x variabile che va assumendo per valori i numeri della serie $\alpha)$ e uno y pure variabile, che va assumendo per valori i numeri della serie $\beta)$, sarà x^2 il numero variabile che assume per valori i numeri $\alpha')$ e y^2 quello che assume per valori i numeri $\beta')$, e per quanto ora dicemmo, si avrà

$$\lim. x^2 = 2 = \lim. y^2.$$

Le serie $\alpha')$ e $\beta')$ dei quadrati dei numeri $\alpha)$ e $\beta)$ ammettono dunque un limite comune: esiste un numero, il 2, che le separa.

Ora noi osserviamo che i valori componenti ciascuna delle serie $\alpha)$ e $\beta)$ soddisfano alla condizione (vedi n. 126) alla quale soddisfano i valori di una variabile che tende a un limite: anzi più precisamente soddisfano alle stesse condizioni, a cui soddisfano i valori delle serie $\alpha')$ e $\beta')$: cioè i numeri $\alpha)$ sono tutti minori dei numeri $\beta)$, e, crescendo quelli, decrescendo questi, possono avvicinarsi così da differire tra di loro meno di qualsiasi numero assegnabile, rimanendo però sempre nettamente separati: e intanto non esiste un numero intero o frazionario che sia sempre compreso tra gli uni e gli altri, cioè, che li separi; per-

rocchè se un tale numero esistesse, sarebbe il loro limite comune, si avrebbe cioè, indicandolo con l ,

$$\lim. x = l = \lim. y.$$

e allora pel Corollario del Teorema 11° (Teoria dei limiti) ne verrebbe

$$\lim. x^2 = l^2 = \lim. y^2$$

e quindi (pel Teorema 1°) dovrebbe essere

$$l^2 = 2$$

il che non è.

Giacchè le due serie $\alpha)$ e $\beta)$ sono nella condizione per avere un limite comune, e intanto questo limite non esiste tra i numeri interi e frazionari, così noi converremo di riguardare le serie medesime come effettivamente convergenti ad un limite, e di dare anche ad esso la denominazione di *numero*. Ben s'intende che questo così definito come limite delle serie $\alpha)$ e $\beta)$, non è un numero che, come quelli sin qui considerati, si possa effettivamente ottenere contando unità o parti d'unità; esso è inesprimibile in unità e parti d'unità: perciò si chiama *irrazionale*, per distinguerlo dai numeri interi o frazionari, i quali si comprendono nell'unica denominazione di *razionali*, cioè, esprimibili per unità e parti d'unità.

Nella parola *numero* comprendiamo adesso un'idea più vasta di quella avuta sin qui; abbiamo ora tre modi di pensare un numero: lo si può pensare come riunione di unità (numero intero), di parti di unità (numero frazionario), come limite comune (numero irrazionale) al quale convergono due numeri variabili come gli anzidetti x e y .

Ed è manifesto che se si prende qualsiasi altro numero intero o frazionario, che non sia quadrato di un altro intero o frazionario, noi possiamo sempre

costruire due serie di numeri che soddisfino alle stesse condizioni, alle quali soddisfano i numeri delle serie α) e β): e la considerazione di tali serie, come quella delle serie α) e β). ci condurrà sempre a pensare un limite comune per esse: limite che riguarderemo come un numero.

Analogamente, se si considera un numero a intero o frazionario, che non sia potenza n^a di un altro intero o frazionario, si possono sempre costruire due serie illimitate di numeri razionali, l'una di numeri continuamente crescenti e aventi ciascuno la sua potenza n^a minore di a , l'altra di numeri continuamente decrescenti e aventi ciascuno la sua potenza n^a maggiore di a , e tali che immaginandone in ciascuna serie un numero sempre più grande si possa colle potenze n^a degli uni e degli altri avvicinarsi ad a quanto si vuole, dimodochè sia a il limite comune di queste potenze n^a ; allora, giacchè per l'ipotesi fatta sopra a , non esiste un numero razionale, che sia minore di tutti i numeri pensabili nella serie decrescente e maggiore di tutti quelli pensabili nella serie crescente, si converrà di ammettere un limite comune per le serie medesime, e a questo limite si darà il nome di *numero irrazionale*.

Vedremo in appresso che i numeri così pensati sono precisamente le radici delle quali dianzi avvertimmo la mancanza; il chè giustificherà l'introduzione di tali nuovi numeri nella Aritmetica.

134. Le serie di numeri razionali, che ora abbiamo considerate e per le quali si è convenuto di ammettere come limite un numero irrazionale, erano composte di numeri positivi o meglio di numeri ordinari dell'Aritmetica, e inoltre costantemente crescenti, ovvero costantemente decrescenti; ma perchè sia con-

cesso pensare che una serie di numeri razionali tende a un limite determinato, non è *necessario* che la serie medesima sia precisamente composta di numeri positivi e costantemente crescenti, ovvero costantemente decrescenti. Vedemmo (n. 126) qual'è la condizione a cui *necessariamente* soddisfano i valori successivi di una variabile che tende a un limite razionale; ora ogni volta che una serie di numeri razionali qualunque soddisfa a quella condizione, se per essa non esiste un limite razionale, non sarà *contraddittorio* il pensare che la serie medesima tenda pure a un limite. Noi siamo così condotti a porre la seguente convenzione:

Ogni volta che si ha una serie di numeri razionali qualunque, positivi o negativi, pei quali si verifichi l'anzidetta condizione, cioè, si possa nella serie medesima trovare un numero tale che la differenza tra esso e uno qualunque dei successivi sia in valore assoluto minore di un numero positivo scelto arbitrariamente piccolo, allora, se i numeri di questa serie non hanno per limite un numero razionale, si ammetterà per essi un limite a cui si darà il nome di numero irrazionale, che si considererà positivo o negativo secondochè i numeri della detta serie sono, da uno in poi, tutti positivi o tutti negativi.

In virtù di questa convenzione, si può enunciare il teorema: *Data una serie di numeri razionali pei quali si verifichi la nota condizione, che nella serie medesima si possa sempre trovare un numero tale, che la differenza tra esso e uno qualunque dei successivi sia in valore assoluto minore di un numero scelto piccolo ad arbitrio, esiste sempre un numero razionale o irrazionale, che è il limite dei numeri della serie.*

Manifestamente è vera la reciproca.

Operazioni sui numeri irrazionali.

135. Dobbiamo ora sottoporre al calcolo i nuovi numeri, dei quali qui abbiamo stabilito il concetto.

Ne definiremo anzitutto l'eguaglianza, e poscia le operazioni di calcolo.

Nel dare siffatte definizioni, noi dovremo avvertire che esse sieno in armonia con quelle che già si hanno pei numeri razionali.

Ora, ci è subito indicato in che modo ciò possa farsi agevolmente, quando si pensi che i numeri irrazionali sono definiti come *limiti* di numeri razionali variabili, e che anche certi numeri razionali, come nella precedente Teoria vedemmo, possono avere la proprietà di essere *limiti* di numeri razionali variabili; e poichè il carattere di *limite*, come serve a definire un numero irrazionale, così basta pure a individuare (Teorema 1°, n. 130) un numero razionale, si vede che, considerati gli irrazionali e i razionali, in quanto sono *limiti*, possono riguardarsi come costituenti una sola e medesima classe di enti aritmetici, che potremmo denotare col nome di *numeri-limiti*.

Deriva di qui, che si dovranno definire le operazioni sui numeri irrazionali in modo che i teoremi dimostrati precedentemente intorno ai numeri razionali che sono limiti di altri numeri razionali variabili, vengano a sussistere anche quando i limiti che si considerano sono numeri irrazionali. — Quei teoremi varranno allora in generale pei *numeri-limiti*, sieno questi razionali o irrazionali.

1° EGUAGLIANZA. Sia a un numero irrazionale limite della serie di numeri irrazionali

$$\alpha) \quad s_0, s_1, s_2, \dots$$

a_1 un altro numero irrazionale limite della serie di numeri razionali.

$$\beta) \quad t_0, t_1, t_2, \dots$$

Se i numeri $\alpha)$ sono eguali ai numeri $\beta)$ ciascuno a ciascuno, ovvero, se la serie formata colle differenze rispettive

$$s_0 - t_0, s_1 - t_1, s_2 - t_2, \dots$$

ha per limite zero, allora si dirà, che a ed a' sono eguali.

Evidentemente, ponendo questa definizione noi non facciamo altro se non estendere al caso di limiti irrazionali i teoremi 1° e 2° dimostrati nella precedente Teoria dei limiti.

2° SOMMA. Si consideri la serie, che si ottiene sommando i termini corrispondenti delle $\alpha)$ e $\beta)$ che definiscono i numeri irrazionali a ed a_1 come loro limiti, cioè la serie

$$\gamma) \quad s_0 + t_0, s_1 + t_1, s_2 + t_2, \dots$$

Questa serie soddisfa alla condizione richiesta perchè per essa esista un limite. Invero, sia σ un numero positivo piccolo a piacere: indicando con $s_n + t_n$ uno qualunque dei numeri della serie, e con $s_{n+r} + t_{n+r}$ uno qualunque dei successivi, si ha:

$$(s_n + t_n) - (s_{n+r} + t_{n+r}) = (s_n - s_{n+r}) + (t_n - t_{n+r})$$

ma per ipotesi si può sempre, prendendo n convenientemente, rendere ciascuna delle $(s_n - s_{n+r})$, $(t_n - t_{n+r})$ minore in valore assoluto di $\frac{\sigma}{2}$: quindi si può rendere la differenza $(s_n + t_n) - (s_{n+r} + t_{n+r})$ minore in valore assoluto di σ .

Esiste dunque (134) un numero A razionale o irrazionale limite dei numeri $\gamma)$: a questo numero A noi

daremo il nome di *somma dei due numeri* a ed a_1 , e scriveremo

$$a + a_1 = A.$$

Con questa definizione noi non facciamo altro, se non estendere al caso dei limiti irrazionali il teorema 5° della Teoria precedente, dimostrato vero per limiti razionali.

Se uno dei due numeri p. es. a_1 fosse razionale e l'altro a irrazionale definito dalla serie

$$\alpha) \quad s_0, s_1, s_2, \dots$$

il numero irrazionale limite della serie

$$\gamma) \quad s_0 + a_1, s_1 + a_1, s_2 + a_1, \dots$$

sarebbe *somma* dei due numeri a ed a_1 .

Definita la somma di due numeri irrazionali, e di uno irrazionale con uno razionale, si definirebbe poi la somma di più numeri, dei quali alcuni o tutti fossero irrazionali, precisamente come si fa per una somma di più numeri razionali.

3° **PRODOTTO.** Si consideri la serie che si ottiene moltiplicando i termini corrispondenti delle α) e β), cioè la serie

$$\delta) \quad s_0 t_0, s_1 t_1, s_2 t_2, \dots$$

Osservando che è

$$s_n t_n - s_{n+r} t_{n+r} = s_n (t_n - t_{n+r}) + t_{n+r} (s_n - s_{n+r})$$

e che per ipotesi le differenze $(t_n - t_{n+r})$, $(s_n - s_{n+r})$ col prendere n convenientemente, si possono rendere minori in valore assoluto di quel numero che più ci piace, così si vede che altrettanto accadrà della

$$(s_n t_n - s_{n+r} t_{n+r}) :$$

il che prova che *esisterà per la serie δ) un limite P ra-*

zionale o irrazionale: a questo numero P daremo il nome di prodotto dei due numeri a ed a_1 e scriveremo

$$P = a \cdot a_1.$$

Così facendo, noi estendiamo al caso dei limiti irrazionali il teorema 11° dimostrato per limiti razionali.

Se a e a_1 hanno il medesimo segno, lo avranno anche i numeri delle due serie α) e β): i numeri δ) saranno dunque positivi, e quindi positivo P : se a e a_1 hanno segni contrari, i numeri della serie α) avranno tutti segno contrario a quello che hanno i numeri della serie β): quindi i numeri δ) saranno negativi, epperò P negativo; in ogni caso il valore assoluto del prodotto sarà, secondo lo stesso concetto, il prodotto dei valori assoluti dei fattori.

Se uno dei due numeri p. es. a_1 fosse razionale e l'altro a irrazionale definito della serie

$$\alpha) \quad s_0, s_1, s_2, \dots$$

il numero limite della serie

$$a_1 s_0, a_1 s_1, a_1 s_2, \dots$$

sarebbe il prodotto aa_1 .

Si definisce poi il prodotto di più numeri irrazionali, nello stesso modo come si fa per più numeri razionali.

4° **POTENZA.** Sia a il numero irrazionale limite della serie

$$\alpha) \quad s_0, s_1, s_2, \dots$$

se ne facciano le potenze p^{esimo} , indicando p un numero intero e positivo; si ottiene la serie

$$\epsilon) \quad s_0^p, s_1^p, s_2^p, \dots$$

si ha (54)

$$s_n^p - s_{n+r}^p = (s_n - s_{n+r}) (s_n^{p-1} + s_n^{p-2} s_{n+r} + \dots + s_n s_{n+r}^{p-2} + s_{n+r}^{p-1})$$

e poichè $s_n - s_{n+r}$, col prendere n convenientemente, si può rendere in valore assoluto piccolo a piacere, cioè al crescere di n ha per limite zero, mentre il polinomio $s_n^{p-1} + s_n^{p-2} s_{n+r} + \dots + s_n s_{n+r}^{p-2} + s_{n+r}^{p-1}$, comunque grande si prenda n , non cresce indefinitamente in valore assoluto, così se ne deduce (Teorema 8°, Teoria dei limiti) che anche la differenza $(s_n^p - s_{n+r}^p)$ al crescere di n si può rendere piccola quanto si vuole, e così è provato che esiste un numero L razionale o irrazionale limite della serie ϵ); a questo limite L noi daremo il nome di potenza p^a del numero a e scriveremo

$$L = a^p.$$

Se p è pari, i numeri ϵ) sono sempre positivi quindi anche L è positivo: se p è dispari, i numeri ϵ) hanno rispettivamente i medesimi segni dei corrispondenti α): quindi L ha il segno di a .

Così facendo, noi estendiamo al caso di limiti irrazionali il corollario del Teorema 11° della già menzionata Teoria dei limiti.

Rimane ora che definiamo le operazioni inverse. Di esse noi daremo le definizioni medesime che sono state date pei numeri razionali.

5° Chiameremo differenza di due numeri a ed a_1 entrambi irrazionali, ovvero irrazionale l'uno, razionale l'altro, il numero d tale che sommato con a_1 dia a .

Un tale numero esiste sempre.

Siano

$$\alpha) \quad s_0, s_1, s_2, \dots$$

$$\beta) \quad t_0, t_1, t_2, \dots$$

le due serie che definiscono rispettivamente i numeri a ed a_1 : si formi la serie

$$\delta) \quad s_0 - t_0, s_1 - t_1, s_2 - t_2, \dots$$

ottenuta sottraendo quelle termine a termine: si ha

$$(s_n - t_n) - (s_{n+r} - t_{n+r}) = (s_n - s_{n+r}) - (t_{n+r} - t_n)$$

le differenze $(s_n - s_{n+r})$, $(t_n - t_{n+r})$, col prendere n convenientemente, si possono rendere piccole quanto si vuole in valore assoluto: dunque altrettanto avviene della differenza $(s_n - t_n) - (s_{n+r} - t_{n+r})$; e questo prova che esiste un numero d razionale o irrazionale limite dei numeri della serie δ).

Questo numero d è quello che sommato con a_1 produce a ; invero il numero somma dei due d ed a_1 è, per la definizione di somma data sopra, il numero-limite della serie

$$\pi) (s_0 - t_0) + t_0, (s_1 - t_1) + t_1, (s_2 - t_2) + t_2, \dots$$

ottenuta sommando termine a termine le serie δ) e α): la serie π) è identica alla serie

$$\alpha) \quad s_0, s_1, s_2, \dots$$

il limite della π) è dunque a , e si ha perciò

$$a = d + a_1.$$

Scriveremo quindi

$$d = a - a_1.$$

Nel caso che dei due numeri a ed a_1 , uno p.es. a_1 sia razionale, la serie che definisce il numero d sarà

$$\lambda) \quad s_0 - a_1, s_1 - a_1, s_2 - a_1, \dots$$

OSSERVAZIONE. Estenderemo ai numeri irrazionali la definizione di disuguaglianza che si dà pei numeri razionali, cioè, diremo che a è maggiore o minore di a_1 , secondo che $(a - a_1)$ è positivo o negativo: e così in particolare (vedi n. 132) se il numero irrazionale a è definito come limite comune di due serie l'una a termini costantemente crescenti, l'altra a termini decrescenti, esso sarà maggiore di qualunque numero razionale compreso nella serie crescente e minore di qualunque numero compreso nella serie decrescente. È perciò che i numeri della serie crescente si sogliono anche chiamare *valori del numero a approssimati per difetto* e quelli della serie decrescente *valori approssimati per eccesso*, ed è evidente che prolungando le serie abbastanza, si può nell'una e nell'altra trovare dei numeri prossimi al numero a sino a differirne meno di ogni numero positivo assegnabile.

6° QUOZIENTE. Chiameremo *quoziente di due numeri a ed a_1 , entrambi irrazionali, ovvero irrazionale l'uno, razionale l'altro (a_1 però diverso da zero), il numero Q tale che moltiplicato per a_1 produce a .*

Un tale numero esiste sempre.

Tenendo ferme le notazioni precedenti, sia il numero a definito dalla serie α): il numero a_1 , dall'altra β).

Si consideri la serie

$$\nu) \quad \frac{s_0}{t_0}, \quad \frac{s_1}{t_1}, \quad \frac{s_2}{t_2}, \quad \dots$$

si ha

$$\frac{s_n}{t_n} - \frac{s_{n+r}}{t_{n+r}} = \frac{s_n t_{n+r} - s_{n+r} t_n}{t_n t_{n+r}} :$$

ora il numeratore

$$s_n t_{n+r} - s_{n+r} t_n = s_n (t_{n+r} - t_n) + t_n (s_n - s_{n+r})$$

al crescere di n tende al limite zero perchè vi tendono le differenze $(t_{n+r} - t_n)$, $(s_n - s_{n+r})$, mentre il denominatore $t_n t_{n+r}$ non ha per limite zero, a_1 essendo supposto diverso da zero: si vede dunque che al crescere di n la differenza

$$\frac{s_n}{t_n} - \frac{s_{n+r}}{t_{n+r}}$$

ha per limite zero: per conseguenza la serie ν) ammette un limite Q razionale o irrazionale.

Questo numero Q è appunto quello che moltiplicato per a_1 produce a ; invero il numero prodotto dei due Q ed a_1 è, per la definizione di prodotto data sopra, il numero-limite della serie

$$\rho) \quad \frac{s_0}{t_0} \cdot t_0, \quad \frac{s_1}{t_1} \cdot t_1, \quad \frac{s_2}{t_2} \cdot t_2, \quad \dots$$

ottenuta moltiplicando termine a termine la serie ν) e la serie β): la serie ρ) è identica alla serie

$$\alpha) \quad s_0, \quad s_1, \quad s_2, \quad \dots$$

il limite della serie ρ) è dunque a , e si ha quindi

$$a = Q a_1$$

come si voleva dimostrare.

Scriveremo dunque

$$Q = \frac{a}{a_1}.$$

Nel caso che uno dei due numeri dati p. es. a_1 fosse razionale, il quoziente Q sarebbe il limite della serie

$$\nu) \quad \frac{s_0}{a_1}, \quad \frac{s_1}{a_1}, \quad \frac{s_2}{a_1}, \quad \dots$$

7° RADICE. Così per un numero irrazionale, come per un razionale a che non è potenza p^a di alcun altro

numero razionale, chiameremo *radice* p^a (p intero e positivo) quel numero irrazionale R che elevato alla potenza p^a produce a .

Questo numero, eccettuato il caso che sia a negativo e p pari, esiste sempre.

Si consideri il valore assoluto a' del numero a . Suppongasi primieramente a' razionale, non però potenza p^a di alcun altro numero razionale.

Si costruisca una serie di numeri razionali, come si può sempre e come si è veduto al n. 133,

$$\alpha) \quad s_0, s_1, s_2, \dots$$

costantemente crescenti e aventi ciascuno la sua potenza p^a minore di a' , e la legge con cui essi procedono sia tale, che permetta di trovare nella serie medesima un numero la cui potenza p^a differisca da a' per meno di un numero positivo scelto piccolo ad arbitrio: manifestamente, se si forma la serie delle potenze p^a dei numeri α), cioè la

$$\tau) \quad s_0^p, s_1^p, s_2^p, \dots;$$

questa serie avrà per limite a' ; quindi la differenza $(s_n^p - s_{n+r}^p)$, al crescere indefinito di n , ha per limite zero.

Ora si ha l'identità

$$\omega) \quad s_n^p - s_{n+r}^p = (s_n - s_{n+r}) (s_n^{p-1} + s_n^{p-2} s_{n+r} + \dots + s_n s_{n+r}^{p-2} + s_{n+r}^{p-1}),$$

osservando che la $(s_n^p - s_{n+r}^p)$, al crescere di n , ha per limite zero e che $s_n^{p-1} + s_n^{p-2} s_{n+r} + \dots + s_n s_{n+r}^{p-2} + s_{n+r}^{p-1}$ somma di termini tutti positivi non ha per limite zero al crescere di n , così in virtù del teorema 9° (Teoria

dei limiti) si conclude che la differenza $(s_n - s_{n+r})$ deve essa al crescere di n avere per limite zero. Questo prova appunto l'esistenza di un limite R per la serie α). Ora questo numero R ha per potenza p^a (vedi definizione di potenza) il limite a cui tendono le potenze p^a dei numeri α): si ha dunque $R^p = a'$: R è perciò un numero irrazionale.

Così rimane provato che i numeri interi e frazionari, che non sono potenze p^a di altri interi e frazionari, sono potenze di numeri irrazionali: epperò l'impossibilità notata nell'estrazione di radice pei numeri dell'Aritmetica è ormai tolta: possiamo dunque enunciare la proposizione generale: *esiste sempre la radice p^a del valore assoluto di un numero razionale.*

Si sarebbe anche potuto costruire la serie α) di numeri decrescenti e aventi ciascuno la sua potenza p^a maggiore di a' e ripetere un ragionamento analogo; e veramente la condizione che i numeri α) sieno crescenti o decrescenti non è precisamente necessaria: ciò che è necessario è che le potenze p^a dei numeri α) abbiano per limite a' .

Suppongasi ora a' irrazionale: e sia definito come limite della serie di numeri razionali

$$\alpha) \quad s_0, s_1, s_2, \dots;$$

$s_0, s_1, s_2, \dots$ sono valori assoluti: di essi alcuni potranno essere potenze p^a di numeri razionali, altri non lo saranno: ma per ciascuno di questi è possibile, come si è visto dianzi, trovare un numero razionale tanto prossimo ad esso quanto si vuole, che sia potenza p^a di un numero razionale.

Ciò posto, si consideri la serie

$$\alpha') \quad s'_0, s'_1, s'_2, \dots$$

che si ottiene dalla precedente α) sostituendo a quelli tra i numeri α) che non sono potenze p° di numeri razionali, rispettivamente i numeri $s'_0, s'_1, s'_2, \dots$ che sono potenze p° di numeri razionali e sono scelti prossimi a $s_0, s_1, s_2, \dots$ tanto quanto si vuole; ben s'intende che dei numeri α') alcuni potranno essere identici ai corrispondenti α).

La serie α') ammette lo stesso limite a' della serie α), perchè la serie delle differenze successive

$$s_0 - s'_0, \quad s_1 - s'_1, \quad s_2 - s'_2, \quad \dots$$

ha manifestamente per limite zero: dimodochè a' può considerarsi come limite della serie α').

Si prendano le radici p° dei numeri α'): si formerà la serie

$$\alpha'') \quad \sqrt[p]{s'_0}, \quad \sqrt[p]{s'_1}, \quad \sqrt[p]{s'_2}, \quad \dots$$

di numeri razionali, pei quali, valendosi dell'identità analoga alla ω) precedente, si dimostra subito che esiste un limite B_1 . Questo numero B_1 ha per potenza p° il limite delle potenze p° dei numeri $\alpha'')$, cioè il limite dei numeri α'), che è a' : dunque $B_1^p = a'$; ed è evidente che, a' essendo irrazionale, anche B_1 è irrazionale.

Enunciamo dunque la proposizione generale:

Esiste sempre tra i numeri razionali e irrazionali la radice p° del valore assoluto di un numero qualsivoglia razionale o irrazionale.

Veniamo ora alla considerazione del segno del numero a il cui valore assoluto abbiamo indicato con a' .

Diciamo che esiste sempre, tranne in un caso, il numero c positivo o negativo che è radice p° di a .

Sia c' la radice p° di a' valore assoluto di a ;

prendendo innanzi a c' un segno conveniente si ottiene l'anzidetto numero c .

Si osservi infatti:

1° Se a è positivo e p dispari, allora si ha:

$$\begin{aligned} (+c')^p &= +(c'^p) = +a' = a \\ (-c')^p &= -(c'^p) = -a' = -a: \end{aligned}$$

quindi si deve prendere $c = +c'$, cioè: *per un numero positivo esiste una sola radice d'indice dispari ed è un numero positivo.*

2° Se a è positivo e p pari, allora si ha:

$$\begin{aligned} (+c')^p &= +(c'^p) = +a' = a \\ (-c')^p &= +(c'^p) = +a' = a \end{aligned}$$

si può dunque prendere $c = +c'$ e anche $c = -c'$: cioè *per un numero positivo esistono due radici d'indice pari eguali in valore assoluto ma di segni contrari.*

3° Sia a negativo e p dispari, si ha:

$$\begin{aligned} (+c')^p &= +(c'^p) = +a' = -a \\ (-c')^p &= -(c'^p) = -a' = a \end{aligned}$$

si deve dunque prendere $c = -c'$: *per un numero negativo vi è una sola radice d'indice dispari ed è negativa.*

4° Sia a negativo e p pari, allora è

$$\begin{aligned} (+c')^p &= +(c'^p) = +a' = -a \\ (-c')^p &= +(c'^p) = +a' = -a \end{aligned}$$

non si può dunque prendere c eguale nè a $+c'$, nè a $-c'$, e d'altronde non si potrebbe prenderlo eguale ad altro numero avente un valore assoluto diverso da c' : tra i numeri razionali e irrazionali, positivi o negativi, non ne esiste dunque alcuno che sia radice d'indice pari di un numero negativo: ecco dunque,

anche dopo l'introduzione dei numeri irrazionali, un caso d'impossibilità nell'estrazione di radice: *non esistono le radici d'indice pari dei numeri negativi.*

136. Poste nel modo, che noi qui abbiamo fatto, le definizioni delle operazioni sui numeri irrazionali, facilmente si dimostra che le leggi fondamentali a cui soddisfano le operazioni di calcolo sui numeri razionali, valgono anche pei numeri irrazionali.

Per dare un esempio, mostreremo che anche pei numeri irrazionali valgono i teoremi:

Una somma è indipendente dall'ordine dei termini.

Un prodotto è indipendente dall'ordine dei fattori.

Siano a ed a' due numeri irrazionali definiti come limiti rispettivi delle serie di numeri razionali

$$\alpha) \quad s_0, s_1, s_2, \dots$$

$$\alpha') \quad t_0, t_1, t_2, \dots$$

La somma $a+a'$ è, secondo la definizione, il limite della somma dei numeri

$$\beta) \quad s_0+t_0, s_1+t_1, s_2+t_2, \dots;$$

la somma $a'+a$ è il limite della serie

$$\beta') \quad t_0+s_0, t_1+s_1, t_2+s_2, \dots$$

ma le serie $\beta)$ e $\beta')$ sono identiche perchè $s_0, s_1, \dots$ e $t_0, t_1, \dots$ sono numeri razionali e quindi per essi già sussiste il teorema, che si possono in una somma invertire le parti: dunque i limiti delle dette serie sono eguali, epperò

$$a+a' = a'+a.$$

Il prodotto aa' è il limite della serie

$$\gamma) \quad s_0t_0, s_1t_1, s_2t_2, \dots;$$

il prodotto $a'a$ è il limite della serie

$$\gamma') \quad t_0s_0, t_1s_1, t_2s_2, \dots$$

ma nei prodotti di numeri razionali già si sa, che si possono invertire i fattori, dunque i numeri $\gamma')$ sono identici ai numeri $\gamma)$: epperò

$$aa' = a'a.$$

E si potrebbero ora anche dimostrare veri pei numeri irrazionali tutti i teoremi fondamentali sui quali è fondato il calcolo algebrico pei numeri razionali, come ad es. i seguenti:

Per moltiplicare una somma di più numeri per un numero basta moltiplicare per questo ognuna delle parti della somma.

Per moltiplicare un numero pel prodotto di più altri, lo si può moltiplicare successivamente per ciascuno di essi.

Per moltiplicare un prodotto per un numero, basta moltiplicare uno dei suoi fattori per questo numero.

Per moltiplicare un prodotto per un altro, basta formare un prodotto unico coi fattori del moltiplicando e con quelli del moltiplicatore.

Per moltiplicare due potenze di uno stesso numero basta sommare gli esponenti, ec. ec.

Questi principii generali valgono dunque per tutti i numeri sin qui considerati, razionali o irrazionali. D'ora innanzi con una lettera, a meno che per essa non si faccia espressamente qualche riserva, o l'indole dell'ufficio che essa fa (come ad es. se essa fosse esponente), non richiegga in modo esclusivo una determinata specie di numeri, intenderemo di rappresentare indifferentemente un numero qualsivoglia razionale o irrazionale; e questa lettera sarà trattata nel calcolo algebrico colle stesse regole alle quali era soggetta, quando essa si riferiva unicamente a numeri razionali.

Così, noi intenderemo estesa anche al caso che a sia irrazionale la convenzione relativa al significato di un esponente nullo o negativo; intenderemo cioè, che a^0 rappresenti 1 e che a^{-p} rappresenti $\left(\frac{1}{a^p}\right)$, e per tal modo sarà, anche per un numero irrazionale definita la potenza ad esponente nullo e quella ad esponente negativo.

Inoltre, se, come è permesso, pensiamo un numero che varia assumendo valori razionali e irrazionali e contemporaneamente un altro numero variabile dipendente da quello, secondo il concetto stabilito nel Capitolo VIII, tutte le considerazioni ivi esposte continuano a sussistere, se il campo dei valori, che la variabile e la funzione può assumere, si estende a tutti i numeri razionali e irrazionali, e se i numeri determinati, che compariscono nell'espressione di una funzione, sono irrazionali.

Dicasi altrettanto circa il contenuto del Capitolo IX intorno alle funzioni di più variabili.

E così tutta la Teoria delle equazioni e disuguaglianze esposta nel Capitolo VIII e seguenti sussiste senza eccezione, se i coefficienti delle incognite in esse e i termini noti sono numeri irrazionali.

Infine, se anche ai numeri variabili per valori razionali e irrazionali applichiamo il concetto di limite, noi dovremo ritenere che i teoremi sui limiti stabiliti precedentemente nella supposizione che le variabili sieno numeri razionali, valgono anche per variabili e limiti irrazionali, perchè, come è facile osservare, le dimostrazioni date di quei teoremi sono affatto indipendenti dall'ipotesi che le variabili e i limiti sieno razionali, e una volta esteso il calcolo algebrico, come noi abbiamo fatto, ai numeri irrazionali, si possono quelle dimostrazioni applicare identicamente anche a questi.

Calcolo dei radicali.

137. Per quel che abbiamo veduto al n. 135 (7°) il simbolo $\sqrt[m]{a}$ ha un significato ben definito quando il numero a è positivo, qualunque sia il numero intero e positivo m , e anche quando a è negativo purchè m sia dispari.

È facile poi vedere che $\sqrt[m]{a}$ ha un significato definito anche quando m è un numero intero negativo $-m'$ (escluso che m' sia pari quando a è negativo) purchè s'intenda sempre che $\sqrt[m]{a}$ rappresenti il numero che elevato alla potenza m produce a .

Esiste infatti un numero c razionale o irrazionale tale che sia

$$c^{-m'} = a,$$

poichè questa relazione equivale all'altra

$$\frac{1}{c^{m'}} = a$$

ovvero

$$c^{m'} = \frac{1}{a},$$

ed il numero c che sodisfa a questa, è il numero $\sqrt[m']{\frac{1}{a}}$ che, come a principio si è detto, esiste sempre, tranne quando sia a negativo ed m' pari.

Si può dunque dire: il simbolo $\sqrt[m]{a}$, dove a è un numero qualunque, e m un numero intero positivo o negativo, ha un significato ben definito in tutti i casi tranne in quello, in cui a è negativo ed m pari, e per analogia di precisione, rammenteremo che, se m è dispari, $\sqrt[m]{a}$ rap-

presenta un unico e determinato numero, positivo o negativo secondochè è positivo o negativo a ; se m è pari ed a positivo, esistono due numeri eguali in valore assoluto e di segno contrario, che possono essere rappresentati col simbolo $\sqrt[m]{a}$.

Noi prendiamo ora a considerare questo simbolo $\sqrt[m]{a}$, e anzi per maggiore generalità consideriamo $\sqrt[m]{a^n}$ (eccettuato, ben s'intende, il caso di m pari e a^n negativo) e ci proponiamo di stabilire alcune regole, alle quali esso nel calcolo va soggetto.

138. Per definizione, si ha

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m = a^n.$$

La proprietà fondamentale di una radice è contenuta nel seguente teorema:

Il valore assoluto di un radicale $\sqrt[m]{a^n}$ non è alterato, se si moltiplica l'indice m e l'esponente n del numero, che è sotto il segno, per un medesimo numero ovvero anche se si sopprime un fattore che m ed n abbiano a comune.

Si vuole dunque dimostrare che sussiste l'eguaglianza tra i valori assoluti dei radicali

$$\sqrt[m]{a^n} \quad \text{e} \quad \sqrt[mp]{a^{np}},$$

dove p è un numero intero qualunque.

Ci varremo qui della proposizione 8^a (Capitolo VII).

Si elevi ciascuno dei radicali $\sqrt[m]{a^n}$ e $\sqrt[mp]{a^{np}}$ alla potenza mp : la potenza mp di $\sqrt[m]{a^n}$ si fa elevando prima alla potenza m , indi il risultato alla potenza p : ma

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m = a^n$$

quindi

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^{mp} = \left(a^n\right)^p = a^{np}.$$

La potenza mp di $\sqrt[m]{a^n}$ è a^{np} , per definizione; così le potenze mp esime di $\sqrt[m]{a^n}$ e $\sqrt[mp]{a^{np}}$ sono eguali, e però, pel rammentato principio, è dimostrata in ogni caso l'eguaglianza tra i valori assoluti dei radicali

$$\sqrt[m]{a^n} \quad \text{e} \quad \sqrt[mp]{a^{np}}.$$

Questa eguaglianza

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}$$

(tra i valori assoluti, ben inteso) presentata, come è permesso, nella forma

$$\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$$

prova la 2^a parte del teorema enunciato, cioè che si può sopprimere un fattore comune all'indice mp e all'esponente np del numero, che è sotto il segno.

In particolare, se si ha $n = mp$, allora è

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{mp}} = \sqrt[1]{a^p} = a^p = a^{\left(\frac{n}{m}\right)}.$$

E se $n = m$

$$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[1]{a^1}\right) = a.$$

OSSERVAZIONE I. Quanto ai segni, osserviamo che se m e p sono dispari, come si sa, vi è anche eguaglianza nei segni; difatti, allora a^n e a^{np} sono del medesimo segno, $\sqrt[m]{a^n}$ e $\sqrt[mp]{a^{np}}$ hanno ciascuno un solo valore del medesimo segno di a^n e a^{np} rispettivamente,

quindi si può scrivere incondizionatamente

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m_p]{a^{n_p}}.$$

Se p è pari, mentre m è dispari, $\sqrt[m]{a^n}$ ammette un unico valore del segno di a^n , e $\sqrt[m_p]{a^{n_p}}$ ne ammette due differenti pel segno: allora l'eguaglianza

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m_p]{a^{n_p}}$$

come è naturale, s'intenderà posta tra il valore che ha $\sqrt[m]{a^n}$ e il valore di $\sqrt[m_p]{a^{n_p}}$ che ha il medesimo segno di quello.

Infine, se è p pari e anche m pari, $\sqrt[m]{a^n}$ e $\sqrt[m_p]{a^{n_p}}$ hanno ciascuno due valori differenti pel segno; allora l'eguaglianza precedente s'intende sussistere tra i valori di $\sqrt[m]{a^n}$ e $\sqrt[m_p]{a^{n_p}}$ del medesimo segno.

OSSERVAZIONE II. Il valore assoluto di un radicale $\sqrt[m]{a^n}$ rimane invariato sinchè rimane tale il numero a e il quoziente $\frac{n}{m}$ dell'esponente del radicando per l'indice.

Sia $\frac{n_1}{m_1} = \frac{n}{m}$; $\frac{n}{m}$ ridotto alla più semplice espressione sia $\frac{n'}{m'}$: dovrà essere $n = pn'$, $m = pm'$, $n_1 = qn'$, $m_1 = qm'$: quindi, per quanto ora è stato dimostrato, sono eguali i valori assoluti dei radicali $\sqrt[m]{a^n}$ e $\sqrt[m']{a^{n'}}$, come pure quelli dei radicali $\sqrt[m_1]{a^{n_1}}$ e $\sqrt[m']{a^{n'}}$: sono dunque pure eguali i valori assoluti dei radicali $\sqrt[m_1]{a^{n_1}}$ e $\sqrt[m]{a^n}$; il che è quanto si voleva dimostrare.

Reciprocamente i quozienti $\frac{n}{m}$ e $\frac{n_1}{m_1}$ debbono essere

eguali, se sono eguali i valori assoluti di $\sqrt[m]{a^n}$ e $\sqrt[m_1]{a^{n_1}}$.

Si scriva l'eguaglianza tra questi valori assoluti

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m_1]{a^{n_1}};$$

ed elevando l'un membro e l'altro alla potenza mm_1 , si otterrà

$$\left[\left(\sqrt[m]{a^n} \right)^m \right]^{m_1} = \left[\left(\sqrt[m_1]{a^{n_1}} \right)^{m_1} \right]^m$$

cioè

$$(a^n)^{m_1} = (a^{n_1})^m$$

ovvero

$$a^{nm_1} = a^{n_1m}$$

il che porta

$$nm_1 = n_1m$$

onde

$$\frac{n}{m} = \frac{n_1}{m_1}$$

come si voleva dimostrare.

Se dunque si considerano come variabili il numero a e il quoziente $\frac{n}{m}$, giacchè assegnato il valore di a e quello di $\frac{n}{m}$ risulta determinato in modo unico il valore assoluto di $\sqrt[m]{a^n}$, così, secondo il concetto posto al Capitolo IX, *devesi riguardare questo valore assoluto di $\sqrt[m]{a^n}$ come funzione delle due variabili a*

ed $\frac{n}{m}$, cioè, e questo è ciò che merita specialmente di essere notato, il valore assoluto di $\sqrt[m]{a^n}$ quando si tenga fisso il numero a , non dipende precisamente dai valori particolari di m e di n , bensì dipende dal loro quoziente.

Giacchè poi dall'essere eguali i valori assoluti di $\sqrt[m]{a^n}$ e $\sqrt[m_1]{a^{n_1}}$ deriva, che sono eguali i quozienti $\frac{n}{m}$ e $\frac{n_1}{m_1}$, così si vede che i radicali $\sqrt[m_1]{a^{n_1}}$ e $\sqrt[m_2]{a^{n_2}}$ eguali in valore assoluto a $\sqrt[m]{a^n}$ e nei quali è sempre tenuto fisso il numero a , si ottengono prendendo $\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2} = \dots = \frac{n}{m}$, e tra essi quello, in cui compariscono il più piccolo indice e il più piccolo esponente di a , si ha prendendo primi tra loro questo indice e questo esponente. Se m ed n sono primi tra loro, si dice allora che $\sqrt[m]{a^n}$ è ridotto alla sua più semplice espressione.

140. RIDUZIONE DI PIÙ RADICALI ALLO STESSO INDICE. — Sul teorema (139) si fonda la riduzione di più radicali allo stesso indice cioè, l'operazione per la quale dati più radicali con indici differenti si può trovarne altri rispettivamente eguali ai dati in valore assoluto e aventi tutti un medesimo indice.

La regola per eseguire una tale riduzione è la seguente: si moltiplica l'indice di ciascun radicale e l'esponente del numero sotto il segno pel prodotto degli indici di tutti gli altri radicali.

È manifesto infatti che così facendo non si altera il valore assoluto di alcun radicale, e tutti i nuovi radicali che si ottengono, hanno per indice il prodotto degli indici di tutti i radicali primitivi.

ESEMPIO. I radicali

$$\sqrt[m]{a^n}, \sqrt[p]{b^q}, \sqrt[r]{c^s}$$

divengono con questa trasformazione

$$\sqrt[mpr]{a^{npr}}, \sqrt[mpr]{b^{qpr}}, \sqrt[mpr]{c^{spr}}.$$

OSSERVAZIONE. Quando gli indici di più radicali non sono primi tra loro, è possibile ridurre i radicali medesimi a un indice comune minore del prodotto di tutti gli indici.

Sieno i radicali

$$\sqrt[m]{a^n}, \sqrt[p]{b^q}, \sqrt[r]{c^s}$$

e sia μ il minimo comune multiplo di m , p ed r ; e si abbia $\mu = mm^1$, $\mu = pp^1$, $\mu = rr^1$.

I tre radicali

$$\sqrt[mm^1]{a^{nm^1}}, \sqrt[pp^1]{b^{qp^1}}, \sqrt[rr^1]{c^{sr^1}}$$

ovvero

$$\sqrt[\mu]{a^{nm^1}}, \sqrt[\mu]{b^{qp^1}}, \sqrt[\mu]{c^{sr^1}}$$

sono rispettivamente eguali ai dati in valore assoluto e hanno per indice comune il minimo comune multiplo degli indici primitivi.

La regola è questa: si trova il minimo comune multiplo degli indici dei radicali dati e si dà per indice questo minimo comune multiplo a ciascuno dei radicali, avvertendo di moltiplicare l'esponente del numero sotto il segno pel quoziente ottenuto dividendo il minimo comune multiplo per l'indice primitivo del radicale medesimo.

Si può notare, che se ciascun radicale è ridotto alla sua più semplice espressione, non si può dare a più radicali, quando in ciascuno si tenga ferma la base

della potenza che è sotto il segno, un indice comune minore del minimo comune multiplo degli indici di essi: perocchè noi possiamo, nella condizione ora detta, trasformare un radicale, che sia ridotto alla sua più semplice espressione, in un altro avente lo stesso valore assoluto, solo moltiplicando l'indice e l'esponente che è sotto il segno, per un medesimo numero: per conseguenza l'indice comune che si può dare a più radicali deve essere un multiplo comune agli indici di essi; epperò il più piccolo indice comune possibile sarà il minimo comune multiplo.

Operazioni sui radicali.

141. Intendiamo, in quello che segue, per non entrare in troppi dettagli, di considerare solo i valori assoluti dei radicali e quindi nel simbolo $\sqrt[m]{a^n}$, a^n sarà sempre, a meno che non si dica espressamente il contrario, un valore assoluto.

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE. Della somma e differenza di due radicali $\sqrt[m]{a^n}$, $\sqrt[m]{b^q}$ non è possibile avere un'espressione più semplice di quella che nasce dalla indicazione dell'operazione cioè, più semplice di quella che si ha scrivendo

$$\sqrt[m]{a^n} + \sqrt[p]{b^q} \text{ e } \sqrt[m]{a^n} - \sqrt[p]{b^q};^1$$

quando però si abbiano da addizionare più termini contenenti tutti come fattore un medesimo radicale, si può, raccogliendo questo a fattore comune, semplificare l'espressione della loro somma.

¹ Si avverta bene di non fare

$$\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a+b}.$$

Così è

$$5a\sqrt[m]{x^n} + 2b\sqrt[m]{x^n} + 3c\sqrt[m]{x^n} = (5a+2b+3c)\sqrt[m]{x^n}$$

142. MOLTIPLICAZIONE. Il valore assoluto della radice m^a di un prodotto è eguale al prodotto dei valori assoluti delle radici m^e dei singoli fattori.

Si vuol dimostrare che è

$$\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}.$$

Si elevi l'uno e l'altro membro alla potenza m^a : si ha per definizione

$$(\sqrt[m]{abc})^m = abc;$$

inoltre, giacchè per elevare un prodotto a potenza si eleva ciascun fattore, così è

$$[\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}]^m = (\sqrt[m]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{b})^m \cdot (\sqrt[m]{c})^m = abc.$$

Le potenze m^e dei numeri

$$\sqrt[m]{abc} \text{ e } \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}$$

essendo uguali, è dunque provata l'uguaglianza tra i valori assoluti dei numeri medesimi.

Se l'uguaglianza precedente si scrive nella forma:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc},$$

essa ci indica il modo di fare la moltiplicazione di più radicali aventi il medesimo indice: si ha cioè la regola:

Si fa il prodotto di più radicali dello stesso indice, moltiplicando tra loro i radicandi e sovrapponendo al prodotto di questi un segno radicale collo stesso indice dei radicali dati.

ESEMPIO.

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a.$$

OSSERVAZIONE I. Quando si abbiano da moltiplicare più radicali con indici differenti, converrà ridurli ad indice comune e poi applicare la regola precedente.

ESEMPIO.

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{b^2} &= \sqrt[30]{a^{15}} \cdot \sqrt[30]{a^{20}} \cdot \sqrt[30]{b^{12}} \\ &= \sqrt[30]{a^{15} \cdot a^{20} \cdot b^{12}} \\ &= \sqrt[15]{a^{35} \cdot b^{12}} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE II. Un numero può sempre sottoporsi a un segno radicale di indice eguale all'unità: cioè, può sempre scriversi:

$$a = \sqrt[1]{a};$$

segue di qui che un prodotto della forma $a^n \sqrt[m]{b}$ può scriversi come prodotto di due radicali $\sqrt[1]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b}$ e allora si può applicare la regola precedente: così si ha:

$$a^n \sqrt[m]{b} = \sqrt[1]{a^n} \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^{nm}} \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^{nm} \cdot b}.$$

Quando dall'espressione $a^n \sqrt[m]{b}$ si passa all'altra equivalente $\sqrt[m]{a^{nm} \cdot b}$, si dice che si è fatto passare sotto il segno radicale il fattore esterno a^n , e come si vede, ciò si fa elevando questo fattore esterno a un esponente eguale all'indice; quando poi inversamente si passa dall'espressione $\sqrt[m]{a^{nm} \cdot b}$ all'altra $a^n \sqrt[m]{b}$ si dice

che si è fatto uscire dal segno radicale il fattore a^n , e ciò si fa sopprimendo all'esponente, che questo numero ha sotto il segno, un fattore eguale all'indice.

ESEMPIO.

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a^2} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2}.$$

143. DIVISIONE. Il valore assoluto della radice m^a del quoziente di due numeri è il quoziente dei valori assoluti delle radici m^e dei termini del quoziente dato.

Si vuol dimostrare che è

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

Si elevi alla potenza m^a il radicale $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ e si ha

$$\left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^m = \frac{a}{b} :$$

si elevi anche l'espressione $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, e si ha

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{\left(\sqrt[m]{a}\right)^m}{\left(\sqrt[m]{b}\right)^m} = \frac{a}{b} :$$

così è provata l'eguaglianza dei valori assoluti di

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} \text{ e } \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

Se l'eguaglianza precedente si scrive nella forma

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

essa ci dà la regola per ottenere il quoziente di due radici dello stesso indice, ed è:

Si dividono due radicali del medesimo indice, dividendo i due radicandi e sovrappponendo al loro quoziente un segno radicale coll'indice comune.

ESEMPIO.

$$\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{32}{2}} = \sqrt[3]{16} = 4$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{ab}} = \sqrt[3]{\frac{a^2b}{ab}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{a}} = \sqrt[3]{a}.$$

OSSERVAZIONE. Quando si voglia dividere, uno per l'altro, due radicali d'indice differente, converrà ridurli ad indice comune e si applicherà poi la regola precedente.

ESEMPIO.

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[6]{a}} = \sqrt[6]{a^3}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b^n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b^n}}.$$

144. POTENZA. La potenza m^a della radice n^a di un numero, in valore assoluto è eguale alla radice n^a della potenza m^a del numero medesimo.

Si vuol dimostrare che è

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Si elevi $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ alla potenza n^a : avremo l'espressione $\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n$; ma in questa si possono scambiare i due esponenti n ed m e allora si ha l'altra equivalente $\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m$: ma è $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$: dunque infine

$$\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m = a^m;$$

si elevi $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)$ alla potenza n^a ; evidentemente si ottiene a^m ; dunque, le potenze n^a di $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ e $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)$ essendo eguali, è provato che sono eguali i valori assoluti di queste espressioni.

Si può enunciare il teorema ora dato anche in questo modo: *dovendo fare successivamente un'elevazione a potenza e un'estrazione di radice, è indifferente in quale ordine si succedano le due operazioni.*

145. RADICE. La radice m^a della radice n^a di un numero, è eguale in valore assoluto alla radice mn^a del numero medesimo.

Si vuol dimostrare che è

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

si elevi $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ alle potenze mn^a : il che si fa elevando prima alla potenza m^a poi il risultato alla po-

tenza n^a : si ha

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = \sqrt[n]{a}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

dunque

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = a;$$

la potenza mn^a poi di $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)$ è a per definizione; così è dimostrato che sono eguali i valori assoluti di $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ e di $\sqrt[mn]{a}$.

OSSERVAZIONE. Applicando ripetutamente il teorema si ha:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}}} = \sqrt[mnpq]{a}$$

la quale, letta a rovescio, ci dice: che per estrarre da un numero la radice d'indice $mnpq$, si può estrarre prima la radice d'indice q , poi dal risultato quella d'indice p , indi la radice n^a ec., ed è indifferente l'ordine in cui si succedono queste operazioni.

ESEMPIO.

$$\begin{array}{l} \sqrt[8]{7} = \sqrt[2 \cdot 2 \cdot 2]{7} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{7}}} \\ \sqrt[30]{10} = \sqrt[2 \cdot 3 \cdot 5]{10} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{10}} \end{array}$$

Esponenti frazionari.

146. Si è veduto (Osservazione II, n. 139) che il valore assoluto del radicale $\sqrt[m]{a^n}$ è funzione del numero a e del quoziente $\frac{n}{m}$. Il simbolo $\sqrt[m]{a^n}$ non è dunque il più appropriato per rappresentare quel valore: sarà preferibile un simbolo che ponga dinanzi agli occhi i due elementi a ed $\frac{n}{m}$ dai quali dipende la quantità che si vuole rappresentare.

La proprietà dimostrata al n. 139 ci mette subito sulla via per stabilire un modo di rappresentare i radicali tale che oltre a soddisfare alla condizione predetta, ci permetterà di abbracciare in un solo aspetto generale quantità, da noi considerate fin qui come distinte.

Si è mostrato infatti che, quando n è divisibile per m cioè, è $n = mp$, allora si ha

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Eccoci dunque in questo caso il radicale $\sqrt[m]{a^n}$ rappresentato nella forma di una potenza avente per base a e per esponente il quoziente $\frac{n}{m}$, la quale forma soddisfa alla condizione richiesta di mettere in evidenza i due elementi a ed $\frac{n}{m}$.

Questo fatto ci indica senz'altro il simbolo da adottarsi in generale.

Converremo d'ora innanzi di scrivere $a^{\frac{n}{m}}$ in luogo di $\sqrt[m]{a^n}$ anche quando n non è divisibile per m ;

siffatta convenzione è permessa perchè il simbolo $a^{\frac{n}{m}}$ quando n non è divisibile per m , non ha ricevuto sin qui significato alcuno, ed è quindi in nostro arbitrio l'attribuirgliene uno. A questa forma $a^{\frac{n}{m}}$ daremo il nome di *potenza con esponente frazionario*.

Per tal modo noi estendiamo il significato della parola *potenza*: in Aritmetica si dà il nome di potenza ad un prodotto di fattori tutti eguali fra loro e l'esponente è di necessità un numero intero e positivo; in questo libro, al Capitolo VI, noi abbiamo convenuto di riguardare come *potenze* ad esponente negativo di un numero, le reciproche delle potenze ad esponente positivo del numero medesimo; ora facciamo una nuova estensione: conveniamo di riguardare quali potenze ad esponente frazionario le radici dei numeri.

Prima di procedere innanzi, notiamo subito che la convenzione di scrivere $a^{\frac{n}{m}}$ in luogo di $\sqrt[m]{a^n}$ si fa qualunque sieno, positivi o negativi, i numeri interi m ed n , e che la forma $a^{-\frac{n}{m}}$ ad esponente frazionario negativo sta a rappresentare $a^{\frac{1}{\frac{n}{m}}}$.

Invero è

$$\begin{aligned} a^{-\frac{n}{m}} &= \sqrt[m]{a^{-n}} = \sqrt[m]{a^{-n}} = \\ &= \sqrt[m]{\frac{1}{a^n}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} \\ &= \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} \end{aligned}$$

come si voleva dimostrare.

La relazione

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

sussiste dunque per p intero o frazionario, positivo o negativo.

147. Dobbiamo ora determinare le regole di calcolo per queste potenze ad esponente frazionario, che abbiamo introdotto; e faremo vedere che, applicando ad esse le regole già stabilite pel calcolo delle potenze ad esponente intero, si ottiene sempre per risultato un'espressione, che, interpretata secondo le convenzioni poste, ci dà il risultato medesimo che si sarebbe ottenuto operando direttamente sui radicali che con le *potenze frazionarie* s'intendono rappresentati.

Nel Capitolo VI (79) abbiamo stabilito per esponenti interi, positivi o negativi, le formule

$$1) \quad (abc\dots d) = a^m b^m c^m \dots d^m$$

$$2) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$3) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$4) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$5) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

nelle quali appunto sono contenute le regole di calcolo per le *potenze intiere*.

Mostriamo che queste formule valgono anche se gli esponenti che in esse compariscono si suppongono frazionari. Delle espressioni come la $a^{\frac{n}{m}}$ intendiamo ora, a meno che non si dica espressamente il contrario, di considerare solo il valore assoluto.

148. 1° Si consideri l'espressione

$$(abc....d)^{\frac{n}{m}};$$

essa rappresenta, secondo la nostra convenzione, il radicale $\sqrt[m]{(abc....d)^n}$: ma per la 1) si ha

$$\sqrt[m]{(abc....d)^n} = \sqrt[m]{a^n b^n c^n d^n}$$

pel teorema (142) si ha poi

$$\sqrt[m]{a^n b^n c^n d^n} = \sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^n} \cdot \sqrt[m]{c^n} \sqrt[m]{d^n}$$

onde

$$\sqrt[m]{(abc....d)^n} = \sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^n} \cdot \sqrt[m]{c^n} \sqrt[m]{d^n}$$

la quale, per la nostra convenzione, può scriversi:

$$(abc....d)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}} \cdot b^{\frac{n}{m}} \cdot c^{\frac{n}{m}} d^{\frac{n}{m}};$$

e questo prova che la formula 1) precedente, vale anche per un esponente frazionario; cioè si vede che la formula 1) applicata nel caso di un esponente frazionario, se alle potenze con esponente frazionario si sostituiscono i radicali corrispondenti, si trasforma nella formula che si ottiene operando direttamente sui radicali medesimi, secondo le regole che già si hanno per essi.

2° Si consideri l'espressione $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}}$; essa, per de-

finitione, rappresenta il radicale $\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^n}$; ma per la 2) è

$$\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \sqrt[m]{\frac{a^n}{b^n}}$$

e pel teorema (143)

$$\sqrt[m]{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{b^n}}$$

quindi

$$\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{b^n}}$$

la quale può scriversi

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$$

che è appunto la formula 2) nel caso di un esponente frazionario.

3° Passiamo ora alla moltiplicazione di due potenze della stessa base.

Si abbiano da moltiplicare le due

$$a^{\frac{n}{m}} \text{ per } a^{\frac{p}{q}}.$$

Per la nostra convenzione è:

$$a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[q]{a^p}$$

ora (142, Osservazione I) è

$$\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[mq]{a^{nq}} \cdot \sqrt[q]{a^p}$$

e per la 3)

$$\sqrt[mq]{a^{nq}} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[mq]{a^{nq+pm}}$$

e per definizione

$$\sqrt[mq]{a^{nq+pm}} = a^{\frac{nq+pm}{mq}} = a^{\frac{nq}{mq} + \frac{pm}{mq}} = a^{\frac{n}{m} + \frac{p}{q}};$$

quindi

$$a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m} + \frac{p}{q}}$$

cioè, la formula 3) è vera anche se in essa gli esponenti sono frazionari.

4° Si consideri l'espressione $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{p}{q}}$; per definizione è

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

quindi

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[m]{a^n}\right)^{\frac{p}{q}}$$

e per la stessa definizione

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p}$$

ma pel teorema (144)

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p = \sqrt[m]{a^{np}}$$

quindi

$$\sqrt[q]{\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[m]{a^{np}}};$$

pel teorema (145) è

$$\sqrt[q]{\sqrt[m]{a^{np}}} = \sqrt[mq]{a^{np}}$$

e per definizione

$$\sqrt[mq]{a^{np}} = a^{\frac{np}{mq}} = a^{\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q}}$$

quindi, finalmente

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q}}$$

facendo successivamente $m=1$, $q=1$ si hanno le formule

$$\left(a^n\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{np}{q}}$$

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^p = a^{\frac{np}{m}};$$

le tre ultime formule provano che la formula 4) vale anche se i due esponenti in essa o uno solo è frazionario.

5° Si consideri ora la divisione di due potenze della stessa base: cioè abbiassi

$$\frac{a^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{p}{q}}};$$

questa espressione rappresenta il quoziente $\frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[q]{a^p}}$: e si

ha (143, Osservazione)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[q]{a^p}} &= \frac{\sqrt[mq]{a^{nq}}}{\sqrt[mq]{a^{mp}}} = \\ &= \sqrt[mq]{\frac{a^{nq}}{a^{mp}}} \end{aligned}$$

e per la 5)

$$\sqrt[mq]{\frac{a^{nq}}{a^{mp}}} = \sqrt[mq]{a^{nq - mp}}$$

e si può scrivere

$$\begin{aligned}\sqrt[mq]{a^{nq-mp}} &= a^{\frac{nq-mp}{mq}} \\ &= a^{\frac{nq}{mq} - \frac{mp}{mq}} \\ &= a^{\frac{n}{m} - \frac{p}{q}}\end{aligned}$$

quindi è

$$\frac{a^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{n}{m} - \frac{p}{q}}$$

nella quale facendo $m=1$, $q=1$ successivamente, si hanno le altre

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{a^{\frac{p}{q}}} &= a^{n - \frac{p}{q}} \\ \frac{a^{\frac{n}{m}}}{a^p} &= a^{\frac{n}{m} - p}.\end{aligned}$$

Queste tre ultime formule mostrano che la 5) sussiste anche se in essa ambedue gli esponenti o uno solo è frazionario.

Le formule del n. 147 sussistono dunque, in generale, per esponenti intieri e frazionari.

6° Si consideri per ultimo la formula

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

che è stata dimostrata pel caso di n divisibile per m ed è stata stabilita come convenzione nel caso di n non divisibile per m . Sinora in essa m ed n sono stati esponenti intieri, positivi o negativi.

Ora si vuol mostrare che questa formula, come le altre suaccennate, sussiste pure se in essa m , o n , o ambedue si suppongono frazionari; purchè si stabilisca che il simbolo $\sqrt[r]{C}$ rappresenti in ogni caso, cioè, anche se r è frazionario, il numero che elevato alla potenza r produce C .

Si consideri dunque il simbolo $\sqrt[n]{a^{\frac{p}{q}}}$: esso, per definizione, rappresenta il numero b che elevato all'esponente $\frac{n}{m}$ produce $a^{\frac{p}{q}}$, cioè si ha

$$b^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{p}{q}}$$

ed elevando alla potenza m^a l'un membro e l'altro

$$b^n = a^{\frac{pm}{q}}$$

onde

$$b = \sqrt[n]{a^{\frac{pm}{q}}}$$

ovvero

$$b = \sqrt[n]{\sqrt[q]{a^{pm}}}$$

e anche

$$b = \sqrt[nq]{a^{pm}}$$

che può scriversi

$$b = a^{\frac{pm}{nq}}$$

ossia

$$b = a^{\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{n}{m}\right)}$$

per conseguenza è

$$\sqrt[n]{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\left(\frac{p}{q}\right)\frac{1}{n}}$$

che è appunto ciò che volevasi dimostrare.

OSSERVAZIONE. La formula

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

sussiste dunque per tutti i valori razionali di n e m . In particolare si ha, essendo r un numero qualunque razionale,

$$\begin{aligned}\sqrt[mr]{a^{nr}} &= a^{\frac{nr}{mr}} \\ &= a^{\frac{n}{m}}\end{aligned}$$

e quindi

$$\sqrt[mr]{a^{nr}} = \sqrt[m]{a^n}$$

la quale relazione ci permette di enunciare in modo generale il teorema (139) dicendo: *il valore assoluto di un radicale $\sqrt[m]{a^n}$, m ed n numeri razionali qualunque, non si altera moltiplicando o dividendo m ed n per un medesimo numero r razionale qualunque.*

148. Riassumendo, noi abbiamo definito il significato del simbolo a^h , per qualsiasi valore razionale e irrazionale di a , e per ogni valore razionale di h , e abbiamo stabilito delle regole generali, a cui esso nel calcolo va soggetto.

Queste regole, che qui raccogliamo, e nelle quali, per non entrare in troppi dettagli, intendiamo di rife-

rirci solo ai valori assoluti delle potenze ad esponente frazionario, sono le seguenti:

1^a La potenza n^a di un prodotto, indicando n un numero razionale qualunque, è eguale al prodotto delle potenze n^e dei fattori.

2^a La potenza n^a di un quoziente (n razionale qualunque) è il quoziente delle potenze n^e dei termini di esso.

3^a Il prodotto di due potenze della stessa base con esponenti razionali qualunque, è quella potenza della base, che ha per esponente la somma degli esponenti di quelle.

4^a Il quoziente di due potenze, con esponenti razionali qualunque, della stessa base è quella potenza della base, che ha per esponente la differenza degli esponenti di quelle.

5^a La potenza n^a della potenza m^a (n ed m numeri razionali qualunque) di un numero è la potenza mn^a del numero stesso.

6^a La radice n^a della potenza m^a (n ed m razionali qualunque) di un numero è la potenza $\frac{m}{n}$ del numero stesso.

Si può infine osservare che la 4^a di queste regole è contenuta nella 3^a, perchè il dividere un numero per un altro elevato ad un esponente qualunque equivale a moltiplicare quello per questo elevato al medesimo esponente preso negativamente; parimente la 6^a è contenuta nella 5^a, perchè l'estrarre da un numero la radice n^a equivale elevarlo alla potenza $\frac{1}{n}$.

Le quattro operazioni moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza, estrazione di radice, possono quindi in certo modo considerarsi come ridotte a due sole, moltiplicazione e elevazione a potenza.

Applicazioni.

149. Nelle espressioni algebriche, che abbiamo considerato nei capitoli precedenti a questo, erano solamente indicate le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e innalzamento a potenza con esponente intero, e le espressioni medesime si distinguevano in intere o fratte secondo che non erano o erano in esse indicate delle divisioni, ovvero delle potenze ad esponente negativo; d'ora innanzi avremo pure a considerare espressioni nelle quali sieno contenute delle estrazioni di radice ovvero potenze ad esponente frazionario: si chiamerà *razionale* un'espressione algebrica nella quale non comparisca alcuna estrazione di radice, nè alcuna potenza ad esponente frazionario: *irrazionale* invece, se vi compariscono estrazioni di radice o potenze con esponente frazionario. Ben s'intende che questa denominazione di *razionale* o *irrazionale* data ad un'espressione algebrica si riferisce solamente alla forma e non al valore, il quale dipenderà dai valori particolari che si attribuiranno alle lettere contenute nell'espressione medesima e potrà benissimo essere razionale quando anche l'espressione contenga delle *irrazionalità*.

ESEMPIO: $a + \frac{b}{d} + c^2$ è una espressione razionale fratta; $2\sqrt{a} + 3b^{\frac{1}{4}} + c$ è un'espressione irrazionale: però ad es. il valore di essa sarà razionale se si prende per c un valore razionale, per a un valore che sia il quadrato di un numero razionale, e per b un valore che sia la quarta potenza di un numero razionale.

150. Indichi x un numero variabile, m un numero razionale determinato: allora $\sqrt[m]{x}$ ha un unico va-

lore determinato per ogni valore di x (sempre escluso che sia x negativo e m pari) ovvero *ne* ha due differenti pel segno, a seconda del valore *di* m ; e p. es. se m è intero, $\sqrt[m]{x}$ ha un solo valore *se* m è dispari, *ne* ha due se m è pari: quindi se m *è* intero dispari, $\sqrt[m]{x}$ è una funzione della variabile x *nel* senso da noi stabilito al n. 82; se m è intero *pari*, giacchè ad ogni valore positivo di x corrispondono due determinati valori di $\sqrt[m]{x}$, così diremo *ancora* che $\sqrt[m]{x}$ è *funzione* di x , ma, per distinguerla, *diremo*, *funzione a due valori*; quando però si convenga di considerare sempre uno solo dei due valori, allora si potrà riguardare $\sqrt[m]{x}$ come funzione di x a un *sol* valore, cioè, nel senso da noi inteso al n. 82.

Si consideri ora un'espressione algebrica con un numero *finito* di termini, nella quale *si* contenga la variabile x non sottoposta a segni radicali nè elevata ad esponenti frazionari: se le altre lettere, che in essa compariscono, rappresentano numeri *determinati*, questa espressione sarà una *funzione algebrica razionale della x*. — Pongasi invece che nella espressione algebrica, che si considera, si contenga la variabile x *sottoposta* a segni radicali o elevata ad esponenti frazionari: se innanzi a ciascuno di questi radicali, o potenze ad esponente frazionario si conviene di prendere *sempre*, cioè per ciascuno dei valori di x che si *considerano*, un segno determinato, allora quella espressione sarà pure *funzione della x a un sol valore* e si *dirà* *funzione algebrica irrazionale di x*.

Considerazioni e denominazioni *analoghe* si estendono alle espressioni algebriche che *contengono* più di una variabile: noi per brevità *tralasciamo* di fermarci intorno a ciò.

150. Indichi y una funzione irrazionale della variabile x : ci si può proporre, riguardo ad essa, la questione α) o β), ovvero anche, avendosi pure un'altra funzione z , la questione γ) del n. 85: e allora si è condotti a stabilire delle equazioni, nelle quali l'incognita x compare sotto segni radicali, o elevata ad esponenti frazionari.

Ad esempio sia

$$y = \sqrt{4+x} + \sqrt{x}$$

intendendosi di prendere sempre innanzi a ciascun radicale il segno $+$. Si domandi il valore di x , pel quale y assume il valore 4; si porrà l'equazione

$$\sqrt{4+x} + \sqrt{x} = 4.$$

Per equazioni di questa forma come per le altre già considerate sussistono i principii stabiliti al n. 86, giacchè i ragionamenti ivi tenuti sono affatto indipendenti dalla forma delle equazioni.

E ora mostreremo, trattando alcuni esempi, come si possa qualche volta, mediante l'applicazione di quei principii, ricondurre equazioni, in cui l'incognita compare sotto segni radicali, o elevata ad esponenti frazionari, alla forma di equazioni di 1° grado.

1° Prendasi l'equazione precedente:

$$1) \quad \sqrt{4+x} + \sqrt{x} = 4:$$

si isoli nel 1° membro il radicale $\sqrt{4+x}$, trasportando $\sqrt{x}$ nel 2° membro: si ha

$$2) \quad \sqrt{4+x} = 4 - \sqrt{x}$$

si elevi l'un membro e l'altro a quadrato: in virtù del 4° principio (86), risulta

$$4+x = 16 - 8\sqrt{x} + x$$

e isolando ancora il termine $8\sqrt{x}$ nel 2° membro

$$-12 = -8\sqrt{x},$$

ovvero

$$2\sqrt{x} = 3$$

e elevando di nuovo a quadrato

$$3) \quad 4x = 9$$

onde

$$x = \frac{9}{4}.$$

L'equazioni 3) e 2) non possono dirsi precisamente equivalenti (4° principio, 86): ogni soluzione della 2) è soluzione della 3), ma non si può dire che ogni soluzione della 3) sia anche soluzione della 2): per conseguenza non si è sicuri che la soluzione $x = \frac{9}{4}$ soddisfi anche la 2) ossia la 1), perciò è necessario verificare la cosa mediante una sostituzione diretta. Ora sostituendo a x nella 1) il valore $\frac{9}{4}$, si ha

$$\sqrt{4+\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{9}{4}} = 4$$

$$\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$$

che è una identità: dunque la soluzione $x = \frac{9}{4}$ soddisfa anche la 1).

151. Per ridurre una equazione *irrazionale* a una *razionale e intera*, bisogna qualche volta ricorrere ad artifizii, che si imparano colla pratica: però non si riesce sempre a ridurla al 1° grado: qualche volta si riduce un'equazione irrazionale a una razionale e intera di grado superiore al 1°; vedremo in seguito la risoluzione delle equazioni di 2° grado e di certe forme di equazioni di grado anche superiore.

Un artificio spesso usato è quello di prendere come nuova incognita un radicale contenente l'incognita proposta.

Ad es. sia l'equazione

$$\frac{ax - b^2}{\sqrt{ax} + b} - \frac{\sqrt{ax} - b}{c} = c$$

Essendo il numeratore della prima frazione divisibile pel denominatore, l'equazione diventa

$$\sqrt{ax} - b - \frac{\sqrt{ax} - b}{c} = c$$

togliendo il denominatore si ottiene

$$c\sqrt{ax} - cb - \sqrt{ax} + b = c^2$$

equazione, che diviene di 1° grado, se si prende come incognita $\sqrt{ax}$: si ponga infatti

$$y = \sqrt{ax}:$$

quella diventa

$$cy - cb - y + b = c^2$$

ovvero

$$(c - 1)y = c^2 + cb - b$$

onde

$$y = \frac{c^2 + cb - b}{c - 1};$$

ma è $y = \sqrt{ax}$: dunque

$$\begin{aligned}\sqrt{ax} &= \frac{c^2 + cb - b}{c - 1} = \\ &= \frac{(c - 1)b + c^2}{c - 1} \\ &= b + \frac{c^2}{c - 1}.\end{aligned}$$

Elevando a quadrato

$$ax = \left(b + \frac{c^2}{c - 1}\right)^2$$

onde

$$x = \frac{1}{a} \left(b + \frac{c^2}{c - 1}\right)^2.$$

152. Se si hanno più equazioni *irrazionali* fra altrettante incognite; giacchè anche pei sistemi d'equazioni tali sussistono i principii stabiliti al n. 96, e parimente per ciascuna di esse equazioni sussistono quelli del n. 86, così mediante l'applicazione degli uni e degli altri è qualche volta possibile ricondurre la risoluzione di un dato sistema di equazioni irrazionali a quella di un sistema di equazioni di 1° grado.

Ad es. sia il sistema

$$\sqrt{y} - \sqrt{20 - x} = \sqrt{y - x}$$

1)

$$3\sqrt{20 - x} = 2\sqrt{y - x}$$

si moltiplichino per 2 la 1ª equazione

$$2\sqrt{y} - 2\sqrt{20 - x} = 2\sqrt{y - x}$$

e in virtù della 2ª, si ha

$$2\sqrt{y} - 2\sqrt{20 - x} = 3\sqrt{20 - x}$$

ovvero

$$2\sqrt{y} = 5\sqrt{20 - x}$$

la quale può sostituirsi alla 1ª.

Si può dunque considerare il sistema equivalente:

$$2\sqrt{y} = 5\sqrt{20 - x}$$

2)

$$3\sqrt{20 - x} = 2\sqrt{y - x}$$

si elevi a quadrato un membro o l'altro di ciascuna di queste, si ottiene:

$$3) \quad \begin{aligned} 4y &= 25(20 - x) \\ 9(20 - x) &= 4(y - x) \end{aligned}$$

che sono due equazioni di 1° grado.

Queste risolte danno

$$x = 16, \quad y = 25.$$

Osserviamo però che le 3) sono ottenute elevando a quadrato ambo i membri di ciascuna delle 2): non si può dunque dire che le une siano equivalenti alle altre: perciò è mestieri assicurarci mediante la sostituzione diretta, se la soluzione trovata soddisfa o no alle 2) ossia alle 1).

Si vede subito che i valori trovati verificano effettivamente le 1).

153. Qualche volta analogamente a quanto si è visto per una sola equazione si riduce un sistema di equazioni irrazionali a un sistema di equazioni di 1° grado, mutando convenientemente le incognite.

Ecco un esempio semplicissimo.

Sia il sistema

$$1) \quad \begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{y} &= 2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 1 \end{aligned}$$

si ponga $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$ e si prendano per incognite u e v : si hanno dunque le equazioni

$$\begin{aligned} u - v &= 2 \\ u + v &= 1 \end{aligned}$$

onde

$$u = \frac{3}{2}, \quad v = -\frac{1}{2}.$$

Le due

$$\sqrt{x} = u, \quad \sqrt{y} = v$$

divengono

$$2) \quad \sqrt{x} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{y} = -\frac{1}{2};$$

onde, elevando a quadrato,

$$3) \quad x = \frac{9}{4}, \quad y = \frac{1}{4}.$$

Si osservi che le 3) non equivalgono precisamente alle 2): dalle 3) infatti si trae

$$\sqrt{x} = \pm \frac{3}{2}, \quad \sqrt{y} = \pm \frac{1}{2}$$

le quali sono più generali delle 2), e le 2) ci mostrano quali tra questi valori di $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$ si debbono prendere perchè le proposte sieno soddisfatte.

154. COME SI POSSA RENDERE RAZIONALE IL DENOMINATORE DI UNA FRAZIONE.

Quando il denominatore di una frazione contiene dei radicali, spesso può essere utile, specialmente se si abbia da calcolare un valore numerico approssimato di quella frazione, di eliminare questi radicali, cioè può convenire di avere il denominatore razionale.

Qui appresso daremo alcuni esempi, limitandoci a considerare radicali d'indice 2.

1° Sia $\frac{m}{\sqrt{a}}$; moltiplicando i due termini della frazione per $\sqrt{a}$ si ottiene

$$\frac{m}{\sqrt{a}} = \frac{m\sqrt{a}}{a}$$

2° Sia $\frac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$: moltiplicando i due termini per $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ il denominatore diventa la differenza (35) di due quadrati e si ha

$$\frac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

3° Analogamente sarà

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

$$4^\circ \quad \frac{m}{a+\sqrt{b}} = \frac{m(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$$

$$5^\circ \quad \frac{m}{a-\sqrt{b}} = \frac{m(a+\sqrt{b})}{a^2-b}$$

6° Sia ora $\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; consideriamo il denominatore come somma di $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ e di $(\sqrt{c})$: allora si vede subito che conviene moltiplicare per la differenza $(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{c})$ e si ha

$$\begin{aligned} \frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} &= \frac{m[\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}]}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c} \\ &= \frac{m[\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}]}{a+b+2\sqrt{ab}-c} \\ &= \frac{m[\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}]}{(a+b-c)+2\sqrt{ab}} \end{aligned}$$

e così siamo ricondotti al 4° caso.

7° Sia infine l'espressione $\frac{m}{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$: si considererà il denominatore come somma di $(a+\sqrt{b})$ e di $(\sqrt{c}+\sqrt{d})$; moltiplicando i due termini della frazione per la differenza $a+\sqrt{b}-(\sqrt{c}+\sqrt{d})$, si avrà:

$$\begin{aligned} \frac{m}{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}} &= \frac{m[(a+\sqrt{b})-(\sqrt{c}+\sqrt{d})]}{(a+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2} \\ &= \frac{m[(a+\sqrt{b})-(\sqrt{c}+\sqrt{d})]}{a+b+2a\sqrt{b}-c-d-2\sqrt{cd}} \\ &= \frac{m[(a+\sqrt{b})-(\sqrt{c}+\sqrt{d})]}{(a+b-c-d)+2a\sqrt{b}-2\sqrt{cd}} \end{aligned}$$

e siamo così ridotti al 6° caso.

155. TRASFORMAZIONE DEL RADICALE $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ NELLA SOMMA DI DUE RADICALI SEMPLICI. Consideriamo l'espressione $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ (che appresso incontreremo) dove supponiamo b numero razionale positivo, non però quadrato di un altro numero razionale, e a pure numero razionale positivo, ovvero anche negativo, ma minore in tal caso di $\sqrt{b}$ in valore assoluto, dimodochè $a+\sqrt{b}$ sia sempre positivo. Questa espressione si può qualche volta trasformare nella somma $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ di due radici di numeri razionali x e y ; ciò può tornare utile specialmente quando si debba calcolare il valore numerico di quella espressione. — Dei radicali qui consideriamo i valori assoluti.

Premettiamo due lemmi.

1° Se si ha una eguaglianza

$$1) \quad a+\sqrt{b} = a'+\sqrt{b'}$$

dove a, a', b, b' sono numeri razionali, b e b' però non sono quadrati di altri numeri razionali, allora deve essere

$$a = a' \quad , \quad b = b'.$$

Infatti, la 1) può scriversi

$$a-a'+\sqrt{b} = \sqrt{b'}.$$

Si elevi qui a quadrato ciascun membro: si ha

$$(a-a')^2 + b + 2(a-a')\sqrt{b} = b'$$

onde

$$2(a-a')\sqrt{b} = b' - b - (a-a')^2:$$

il 2° membro è razionale, mentre il 1° è irrazionale se $(a-a')$ non è zero; affinchè l'eguaglianza sussista, bisogna dunque che sia $a=a'$: e quindi anche $b=b'$: il che è quanto si voleva dimostrare.

2° Se è

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

dove per a, b, x, y , valgono le condizioni dette dianzi, sarà

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x-\sqrt{y}}.$$

Invero, si elevi a quadrato ciascun membro della proposta: si ottiene

$$a+\sqrt{b} = x+y+2\sqrt{xy}:$$

pel 1° lemma precedente, sarà

$$a = x+y$$

$$b = 4xy:$$

per conseguenza

$$a-\sqrt{b} = x+y-2\sqrt{xy}$$

onde

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x-\sqrt{y}}$$

come volevasi.

Veniamo ora alla trasformazione propostaci.

Si vuol dunque vedere se, nelle ipotesi fatte precedentemente sopra a e b , sia possibile *determinare due numeri razionali x e y tali che*

$$1) \quad \sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x+\sqrt{y}}$$

Pongasi per un momento che questa eguaglianza si verifichi: allora, pel 2° lemma dimostrato, sarà anche

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x-\sqrt{y}}$$

e moltiplicando questa colla precedente, membro a membro

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt{a-\sqrt{b}} = (\sqrt{x+\sqrt{y}})(\sqrt{x-\sqrt{y}})$$

ovvero

$$\sqrt{a^2-b} = x-y.$$

Ma se si elevano a quadrato i due membri della 1° eguaglianza, si ha

$$a+\sqrt{b} = x+y+2\sqrt{xy}$$

onde, pel 1° lemma

$$a = x+y.$$

Dalle due

$$x+y = a$$

$$x-y = \sqrt{a-b^2}$$

si ha subito

$$x = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}, \quad y = \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}.$$

Ecco dunque i valori di x e y atti a verificare la 1): se a^2-b è il quadrato di un numero razionale che indicheremo con c , allora x e y sono razionali e dati dalle formule

$$x = \frac{a+c}{2}, \quad y = \frac{a-c}{2}$$

e si ha la trasformazione che si voleva

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}};$$

ma se a^2-b non è il quadrato di un numero razionale, allora non si ha più nessun vantaggio dalla trasformazione eseguita.

La relazione

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

sussiste anche se a^2-b non è il quadrato di un numero razionale, perchè elevandone i due membri a quadrato si perviene a una identità; però in tal caso si ha il radicale $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ trasformato nella somma di due radicali che sono della sua stessa forma.

ESEMPIO.

$$\begin{aligned}\sqrt{7+\sqrt{24}} &= \sqrt{\frac{7+\sqrt{49-24}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-24}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{7+5}{2}} + \sqrt{\frac{7-5}{2}} \\ &= \sqrt{6} + 1.\end{aligned}$$

Esercizi.

Semplicizzare ed eseguire le operazioni indicate:

- 1° $\sqrt[4]{b^{10}}$, $\sqrt{a^{2n}}$, $\sqrt[6]{(a-b)^{12}}$
- 2° $\sqrt{16a^2bc^5}$, $\sqrt[3]{27a^4b^3}$
- 3° $\sqrt{28}$, $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[7]{8}$
- 4° $2\sqrt{27} - 3\sqrt{12} - \sqrt{75}$
- 5° $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$, $(a\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}})(a\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}})$
- 6° $(\sqrt{x+y} + \sqrt{y})(\sqrt{x+y} - \sqrt{y})$, $\sqrt{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt{a-\sqrt{b}}$
- 7° $\left(\sqrt{x}\right)^{3y-p} \times \left(\sqrt{x}\right)^{2x-3y} \left(\sqrt{x}\right)^{p-x}$
- 8° $\sqrt[27]{(2^{-9})^{-3}} + \left[\left(\sqrt[12]{4}\right)^{-6}\right]^{-2} - (\sqrt{3} \cdot \sqrt{5})^2$
- 9° $(3\sqrt{x})^2 + (4\sqrt[3]{x})^3 - (2\sqrt[4]{x-y})^4$
- 10° $\sqrt{xy}\left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}}\right)$, $\sqrt{a+b+\sqrt{2ab}} \cdot \sqrt{a+b-\sqrt{2ab}}$

- 11° $a\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}}$, $\sqrt[5]{n\sqrt{n^2}}$, $\frac{\sqrt[3]{ax}}{\sqrt{x}}$
- 12° $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[2n]{y} \cdot \sqrt[2n]{z}$, $\left(\sqrt[m]{a+b}\right) \cdot \left(\sqrt[m]{a-b}\right)$
- 13° $\sqrt[105]{(a^3)^5}$, $\sqrt[112]{(a^2)^7}$, $\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt{b}}$
- 14° $\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{7}}\right)^{\frac{14}{13}}$, $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{5}}$
- 15° $\left(\frac{ay}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{bx}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{y^2}{a^2b^2}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{a^3}}$, $\frac{a^8}{a^{-3}}$
- 16° $32^{0,2}$, $81^{0,75}$, $(-a^{-3})^{-12}$.

Moltiplicare

- 17° $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} \cdot b$ per $ab^{-\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$
- 18° $a^{\frac{7}{12}} - a^3 + a^{\frac{5}{2}} - a^2 + a^{\frac{11}{12}} - a + a^{\frac{1}{2}} - 1$ per $a^{\frac{1}{2}} + 1$
- 19° $-3a^{-5} + 2a^{-4}b^{-1}$ per $-2a^{-3} - 3a^{-4}b$.

Dividere

- 20° $x^{\frac{3}{4}} - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y - y^{\frac{3}{4}}$ per $x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}$
- 21° $a^{\frac{5}{12}} - a^{\frac{5}{2}}b + ab^{\frac{5}{2}} - 2ab^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{5}{12}}$ per $a^{\frac{5}{12}} - ab^{\frac{1}{2}} + ab^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{5}{12}}$
- 22° $a^{\frac{3n}{2}} - a^{-\frac{3n}{2}}$ per $a^{\frac{n}{2}} - a^{-\frac{n}{2}}$.

Trasformare le seguenti espressioni in modo che il denominatore divenga razionale:

- 23° $\frac{7}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$

$$24^{\circ} \quad \frac{28}{3+\sqrt{2}+\sqrt{7}} \quad , \quad \frac{3+\sqrt{2}}{5-\sqrt{8}+\sqrt{18}}$$

$$25^{\circ} \quad \frac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$26^{\circ} \quad \sqrt{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}} \quad , \quad \frac{2}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}$$

Semplificare le espressioni :

$$27^{\circ} \quad \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

(si trova $4x\sqrt{x^2-1}$)

$$28^{\circ} \quad \frac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}$$

(si trova $\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}$)

$$29^{\circ} \quad \frac{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{xy^2}-2\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{xy^3}-\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{y^3}}$$

(si trova $\frac{x-\sqrt[3]{x^2y}}{x+y}$)

$$30^{\circ} \quad \sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^2b^2}} + \sqrt{b^2+\sqrt[3]{ab^3}}$$

(si trova $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$)

31° Che diviene l'espressione

$$\frac{1-ax}{1+ax} \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}$$

quando vi si fa

$$x = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a}{b}} - 1 ?$$

(diviene eguale a 1).

32° Che diviene l'espressione

$$2(uv - \sqrt{u^2-1}\sqrt{v^2-1}) ,$$

quando vi si fa

$$2u = x + \frac{1}{x} , \quad 2v = y + \frac{1}{y} ?$$

(diviene eguale a $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$).

33° Che diviene nella medesima ipotesi l'espressione

$$2(uv + \sqrt{u^2-1}\sqrt{v^2-1}) ?$$

(diviene $xy + \frac{1}{xy}$).

34° Che diviene l'espressione

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

quando si fa

$$x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) ?$$

(diviene eguale ad $a+b$).

35° Che diverrà l'espressione

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$$

quando si fa

$$x = \frac{2ab}{b^2+1}$$

(diviene eguale a b).

36° Verificare l'eguaglianza

$$\left[\frac{a + (a^2 - b)^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{a - (a^2 - b)^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} = (a + b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}.$$

37° Verificare che il valore

$$x = \left[-q + (q^2 + p^3)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-q - (q^2 + p^3)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

sodisfa l'equazione

$$x^3 + 3px + 2q = 0.$$

38° Risolvere l'equazione

$$x = \sqrt{x^3 - 2a\sqrt{a^2 + x^2}} - a$$

(si trova $x = \frac{3a}{4}$).

$$39^\circ \quad \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$$

(si trova $x = \frac{5}{4}$ e $x = 0$; quest'ultimo valore non soddisfa la proposta).

$$40^\circ \quad \sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x}$$

(si trova $x = -\frac{2a}{3}$)

$$41^\circ \quad \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \sqrt{b}$$

(si trova $x = \frac{2a\sqrt{b}}{b+1}$).

$$42^\circ \quad \sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$$

(si trova $x = a^2 - \frac{(b-2a)^3}{27b}$).

$$43^\circ \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{a} = \sqrt{\frac{1}{a^2}} + \sqrt{\frac{1}{a^2 x^2} + \frac{1}{x^4}}$$

(si trova $x = -\frac{4a}{3}$, valore che non soddisfa alla equazione proposta; si ricerchi quale cangiamento sia da arrecarsi in essa, perchè il valore trovato la soddisfi).

$$44^\circ \quad \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

(si trova $x = \frac{25}{16}$ e $x = 0$).

$$45^\circ \quad 2x + 2\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{5a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

(si trova $x = \frac{3a}{4}$)

$$46^\circ \quad \frac{(a+x)^{\frac{1}{n}}}{a} + \frac{(a-x)^{\frac{1}{n}}}{x} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{c}$$

(si trova $x = \frac{a}{\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1}$)

$$47^\circ \quad \sqrt{a-x} + 2\sqrt{a+x} = \sqrt{a-x} + \sqrt{ax+x^2}$$

(si trova $x = -a$, $x = 0$ e $x = \frac{64a}{1025}$; i due ultimi valori non soddisfano la proposta).

CAPITOLO XIII.

Equazioni di 2° grado.

156. Indichi y una funzione razionale intera di 2° grado della variabile x ; vedemmo al n. 84 che una tale funzione può sempre ricondursi alla forma

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

dove A, B, C indicano numeri qualunque determinati; è escluso però che sia $A = 0$, perchè in tal caso si avrebbe $y = Bx + C$ e questa non è di 2° grado.

Proponiamoci la questione del n. 85, cioè: *se esistono e quali sieno i valori della x pei quali la funzione y assume il valore zero, ovvero un valore d'assegnato comunque; e se contemporaneamente si ha anche un'altra funzione z della variabile x di 1° o di 2° grado, ci si può anche far la domanda: se esistano e quali sieno i valori della x pei quali le due funzioni y e z assumono valori eguali.*

Siffatte questioni ci conducono a stabilire le equazioni

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C &= 0 \\ Ax^2 + Bx + C &= d \end{aligned}$$

e supponendo che sia data z sotto la forma

$$z = A'x^2 + B'x + C'$$

oppure

$$z = Mx + N$$

in conseguenza dell'ultima domanda si scriveranno le altre

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C &= A'x^2 + B'x + C' \\ Ax^2 + Bx + C &= Mx + N, \end{aligned}$$

e si avrà da ricercare se esistano e quali sieno i valori di x che le soddisfano.

Queste equazioni si dicono di 2° grado. Giacchè i principii posti al n. 86 intorno alle equazioni equivalenti sono generali ed applicabili quindi anche alle equazioni che ora si considerano, così, trasportando in ciascuna di esse i termini del 2° membro nel 1° e riducendo quelli che sono simili, si ricondurrà sempre ciascuna delle precedenti alla forma

$$1) \quad ax^2 + bx + c = 0$$

nella quale a, b, c sono numeri qualunque, escluso però che sia $a = 0$.

Assumeremo dunque questa come forma generale per l'equazione di 2° grado ad una incognita.

Ci proponiamo di risolverla, di trovare cioè, i valori di x che la soddisfano.

Essendo a , per ipotesi, diverso da zero, si può scrivere

$$2) \quad ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right);$$

si osservi che nell'espressione $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$ l'aggregato dei primi due termini con l'aggiunta del termine $\frac{b^2}{4a^2}$ forma il quadrato del binomio $\left(x + \frac{b}{2a} \right)$; si aggiunga dunque e si tolga alla detta espressione il

termine $\frac{b^2}{4a^2}$; si avrà

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} &= x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}; \end{aligned}$$

epperò, dalla 2) si ha:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right];$$

sarà nulla l'espressione $ax^2 + bx + c$, cioè sarà soddisfatta l'equazione 1), ogni volta che sia nulla e solamente quando lo sia l'espressione

$$3) \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right),$$

giacchè a è un numero costante diverso da zero.

La 1ª parte di questa somma 3) essendo il quadrato di $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$, per qualsiasi valore razionale o irrazionale, positivo o negativo dato alla x non è mai negativa: può esser nulla solamente quando sia nulla la base stessa del quadrato, cioè l'espressione $x + \frac{b}{2a}$; la 2ª parte è un numero costante che sarà negativo, o nullo, o positivo, e se si osserva che il denominatore dell'espressione $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$, essendo il quadrato di un numero diverso da zero, è sempre positivo, si vede che la espressione medesima è negativa, nulla o positiva secondochè è tale il suo numeratore $4ac - b^2$.

Distinguiamo questi tre casi.

1° Il valore dell'espressione $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ sia negativo, cioè $b^2 - 4ac > 0$; allora esiste sempre un numero β positivo che è radice quadrata di $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, cioè si ha

$$\beta = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

onde

$$\beta^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

epperò all'espressione 3) si può dare la forma

$$4) \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \beta^2.$$

2° Sia $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ nullo, cioè $b^2 - 4ac = 0$; allora l'espressione 3) si riduce a

$$5) \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

3° Sia infine $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ positivo, cioè $b^2 - 4ac < 0$; in questo caso esiste un numero positivo B che è radice quadrata di esso, cioè

$$B^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2},$$

epperò all'espressione 2) si può dare la forma

$$6) \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + B^2.$$

Riassumendo, si ha dunque: nel 1° caso l'espressione 3) è la differenza di due quadrati, nel 2° è un unico quadrato, nel 3° è la somma di due quadrati.

Ora, la differenza di due quadrati $p^2 - q^2$ può presentarsi come il prodotto di due fattori $(p+q)(p-q)$. In conseguenza di ciò l'espressione 3) nel 1° caso, cioè la 4) è eguale al prodotto di due fattori

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \beta\right) \left(x + \frac{b}{2a} + \beta\right)$$

ciascuno dei quali contiene la x al 1° grado.

Questo prodotto si annulla ogni volta che si annulla e solamente quando si annulla uno dei suoi fattori: il 1° fattore si annulla se si dà ad x il valore $-\frac{b}{2a} + \beta$ e solamente si annulla in questo caso: il 2° fattore si annulla pel valore $-\frac{b}{2a} - \beta$ dato alla x e solamente per questo: l'espressione 3) nel caso, in cui è $b^2 - 4ac$ positivo, si annulla dunque per ciascuno dei due valori

$$-\frac{b}{2a} + \beta, \quad -\frac{b}{2a} - \beta$$

dato in essa alla x e solamente per questi; e così, per quanto sopra dicemmo, questi due valori sono le radici dell'equazione proposta.

Ecco dunque: nel caso, in cui $b^2 - 4ac$ è positivo, l'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ha per radici i due valori disuguali

$$-\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, \quad -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

e non può ammetterne altre.

Denoteremo questi valori con ξ_1 e ξ_2 ; si vede che

ad essi si può dare la forma

$$\xi_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\xi_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Nel 2° caso, cioè in quello in cui $b^2 - 4ac$ è nullo, l'espressione 3) riducendosi all'espressione 5), si annulla solo quando si annulla l'espressione $x + \frac{b}{2a}$, e questa si annulla unicamente pel valore $-\frac{b}{2a}$ dato alla x .

L'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

quando è $b^2 - 4ac = 0$, ammette una sola radice che è

$$\xi = -\frac{b}{2a}.$$

Nel 3° caso poi, cioè quello in cui l'espressione 3) si riduce all'espressione 6), poichè B^2 è sempre maggiore di zero e $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ può solamente essere positivo o nullo, l'espressione 6) sarà sempre maggiore di zero. Si ha perciò:

L'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

quando è $b^2 - 4ac$ negativo, non ammette alcuna radice.

Aggiungeremo infine che in virtù della 2) e delle 4), 5) 6) si possono nei tre casi dare alla funzione $ax^2 + bx + c$ rispettivamente le tre forme seguenti:

Nel 1° caso

$$3) \left\{ \begin{array}{l} \text{nel 2°} \\ \text{nel 3°} \end{array} \right. \begin{cases} ax^2+bx+c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \beta^2 \right] \\ ax^2+bx+c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \\ ax^2+bx+c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + B^2 \right]. \end{cases}$$

ESEMPLI. È nel 1° caso la funzione x^2+x-1 , e si ha

$$x^2+x-1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{4}.$$

le radici dell'equazione $x^2+x-1=0$ sono

$$\xi_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \xi_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2};$$

nel 2° caso è la funzione $2x^2-12x+18$ e si ha

$$2x^2-12x+18 = 2(x-3)^2;$$

l'equazione $2x^2-12x+18=0$ ha per unica radice

$$\xi = 3;$$

è nel 3° caso la funzione x^2+x+1 , e si ha

$$x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$$

e l'equazione $x^2+x+1=0$ non ha radici.

Decomposizione di una funzione di 2° grado in un prodotto di due fattori di 1° grado.

157. Si consideri la funzione della variabile x

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

nella quale il coefficiente del termine in x è l'unità, e a, b, c sono numeri qualunque.¹

Vedemmo nel numero precedente che, quando b^2-4ac è positivo, si può scrivere

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \beta^2 \\ &= \left(x + \frac{b}{2a} - \beta \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \beta \right) \\ &= \left[x - \left(-\frac{b}{2a} + \beta \right) \right] \left[x - \left(-\frac{b}{2a} - \beta \right) \right] \end{aligned}$$

essendo $\beta = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$; e giacchè si è posto

$$\xi_1 = -\frac{b}{2a} + \beta, \quad \xi_2 = -\frac{b}{2a} - \beta$$

così ne segue

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \xi_1)(x - \xi_2);$$

¹ Si potrebbe, poichè $\left(\frac{b}{a}\right)$ e $\left(\frac{c}{a}\right)$ sono numeri qualunque, considerare la funzione medesima nella forma più semplice x^2+px+q , ma preferiamo continuare colle notazioni del numero precedente.

nell'altro caso, in cui $b^2 - 4ac$ è nullo, vedemmo che si ha

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \\ = \left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right] \left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right],$$

e giacchè si è posto $\xi = -\frac{b}{2a}$, così è

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \xi)(x - \xi).$$

Ecco dunque: la funzione di 2° grado $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$, nella quale il coefficiente di x^2 è l'unità e gli altri coefficienti $\left(\frac{b}{a}\right)$ e $\left(\frac{c}{a}\right)$ sono numeri qualunque, può nei due casi, in cui $b^2 - 4ac$ è positivo o nullo, scriversi nella forma di un prodotto di due fattori ciascuno dei quali è di 1° grado rispetto alla x ed è formato sottraendo da x una radice dell'equazione che si ha eguagliando a zero la funzione medesima. Se questa equazione ha due radici disuguali, i due fattori sono pure disuguali: se ha una sola radice, i due fattori sono eguali.

Nel caso in cui $b^2 - 4ac$ è negativo, non potendosi ammettere che la funzione $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ si annulli, non può essa essere rappresentata sotto forma di un prodotto di due fattori

$$(x - \alpha)(x - \beta)$$

dove α e β sono numeri costanti.

Infatti, se ciò fosse, poichè un tale prodotto si

annulla per $x = \alpha$ e per $x = \beta$, anche la funzione $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ si annullerebbe per i medesimi valori, il che non è.

Riassumendo, si ha dunque che, se $b^2 - 4ac$ è positivo, la funzione $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ può decomorsi in un prodotto di due fattori $(x - \xi_1)(x - \xi_2)$, dove ξ_1 e ξ_2 sono le due radici differenti dell'equazione $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$; se $b^2 - 4ac$ è nullo, allora la funzione medesima $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ può presentarsi nella forma del prodotto $(x - \xi)(x - \xi)$ dove ξ è l'unica radice dell'equazione $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$; se poi $b^2 - 4ac$ è negativo, non è possibile decomporre in fattori di 1° grado in x la funzione considerata.

OSSERVAZIONE. — Quando si ha, nel caso in cui è $b^2 - 4ac > 0$,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \xi_1)(x - \xi_2)$$

i due fattori $x - \xi_1$, $x - \xi_2$ non si annullano contemporaneamente; mentre nel caso, in cui è $b^2 - 4ac = 0$, avendosi

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \xi)(x - \xi)$$

i due fattori $x - \xi$, $x - \xi$ si annullano insieme per $x = \xi$; ecco dunque: nel 1° caso, ciascuno dei valori ξ_1 e ξ_2 , che si dia alla x , annulla uno solo dei fattori, nel secondo caso, il valore ξ gli annulla ambedue: si nota questa diversità dicendo che nel caso in cui è $b^2 - 4ac > 0$, l'equazione

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ha le radici *semplici* ξ_1 e ξ_2 : nel caso, in cui è $b^2 - 4ac = 0$, ha la radice *doppia* ξ , volendosi con ciò in certo modo significare che questa radice ξ pel fatto che essa annulla i due fattori di $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$, equivale a due radici distinte. E per questa ragione si suole anche dire ed è anzi questa la locuzione più usata: *l'equazione*

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ammette due radici disuguali, se è $b^2 - 4ac > 0$: ne ammette due uguali, se è $b^2 - 4ac = 0$: in un caso come nell'altro le due radici, disuguali, o uguali rispettivamente, sono date dalle formule

$$\xi_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \xi_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

E se si rammenta che in virtù della formula 2) (156) le radici dell'equazione

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

sono le radici dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

così si può, nell'enunciato del teorema, sostituire quest'ultima equazione alla precedente.

ESEMPL. Sia la funzione

$$x^2 + x - 1:$$

per essa si ha $b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5$: siamo dunque nel 1° caso e l'equazione $x^2 + x - 1 = 0$ ha due radici differenti, che sono

$$\xi_1 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \xi_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

e quindi si può scrivere

$$x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right).$$

Parimente, sia la funzione

$$x^2 - 6x + 9:$$

si ha qui $b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 9 = 0$: l'equazione

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

ha perciò una radice doppia che è

$$\xi = 3:$$

si può dunque scrivere

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3).$$

Infine, sia la funzione

$$x^2 + x + 1$$

qui si ha $b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$; non vi sono dunque radici per l'equazione

$$x^2 + x + 1 = 0$$

e non si può perciò presentare la $x^2 + x + 1$ decomposta in fattori di 1° grado.

158. La possibilità o impossibilità della decomposizione della funzione $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ secondochè $b^2 - 4ac$ è positivo, nullo ovvero negativo, dipende da ciò che, come si è veduto, nel 1° caso quella funzione è uguale a una differenza di quadrati, nel 2° a un unico quadrato, nel 3° a una somma di quadrati.

Una differenza di quadrati $a^2 - b^2$ è eguale al prodotto dei fattori $a - b$ e $a + b$, che sono di 1° grado rispetto ad a e a b .

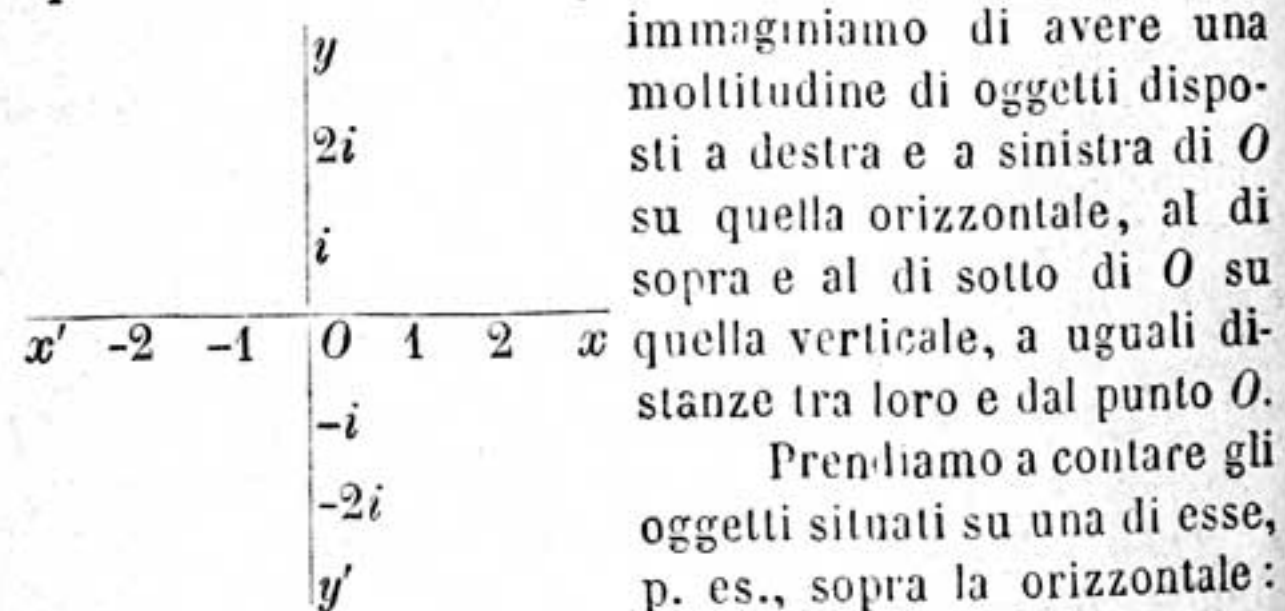
si avrebbe

$$a^2 + b^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 - \beta^2 = (a - \beta)(a + \beta)$$

e questa sarebbe appunto la decomposizione richiesta.

Proponiamoci dunque di definire dei nuovi numeri atti a rappresentare le radici d'indice pari dei numeri negativi.

160. Consideriamo due rette che si tagliano perpendicolarmente in un punto O ; su ciascuna di esse



contando a destra (2) formeremo i numeri

$$\alpha) \quad 1, 2, 3, \dots$$

contando a sinistra, i numeri

$$\beta) \quad -1, -2, -3, \dots$$

Prendiamo poi a contare gli oggetti sulla verticale: se si vogliono distinguere i numeri, che così si ottengono, da quelli ottenuti contando sulla orizzontale bisognerà adottare segni speciali.

Se si considera uno degli oggetti sulla verticale, si acquista l'idea di un *unità* che potrà distinguersi da quella di cui si acquista l'idea considerando uno degli oggetti sull'orizzontale, *convenendo* di designare la prima col simbolo i e lasciando per la seconda il

segno 1; dimodochè i numeri formati uno, due, tre oggetti, ec., sulla verticale p. es., al di sopra di O , si indicheranno coi simboli

$$\gamma) \quad +i, +2i, +3i, \dots$$

e di conseguenza coi simboli

$$\delta) \quad -i, -2i, -3i, \dots$$

quelli ottenuti contando uno, due, tre, ec., oggetti al di sotto di O .

Vediamo subito, che questi numeri, se ad essi si applica il noto (20) concetto di prodotto, hanno per quadrati dei numeri negativi.

Si voglia, invero, il quadrato di i ; esso è, per definizione, il numero formato col moltiplicando i , nello stesso modo come il moltiplicatore i è formato con 1, o anche si può dire, è quel numero nel quale si trasforma il moltiplicando i , se si prende per unità 1 il moltiplicatore i .

Per veder bene, quale effetto produce questo cambiamento d'unità, sulla retta orizzontale si segnino i numeri 1, 2, 3, a destra di O ; i numeri $-1, -2, \dots$ a sinistra: sulla verticale i numeri $i, 2i, 3i, \dots$ al di sopra di O , i numeri $-i, -2i, \dots$ al di sotto.

Se s'immagina un osservatore situato in O colla faccia rivolta nella direzione dei numeri 1, 2, 3, esso avrà i numeri $i, 2i, 3i, \dots$ alla sua sinistra.

Ora, il prendere i per 1 ha per effetto di cangiare la direzione nella quale si contano i numeri 1, 2, 3,; cioè, conduce ad assumere la verticale come direzione nella quale gli oggetti si numerano coi segni 1, 2, 3, e poichè i numeri $i, 2i, 3i, \dots$ sono alla sinistra di un osservatore che stia rivolto ai numeri 1, 2, 3,, così è manifesto che, dopo il detto can-

Il quadrato a^2 è eguale al prodotto di due fattori eguali ad a .

La somma di due quadrati $a^2 + b^2$, al contrario, non può essere eguale a un prodotto di due fattori che sieno di 1° grado rispetto ad a e a b .

Pongasi, se è possibile, che ciò sia, e si abbia l'identità, essendo a e b indeterminati,

$$a^2 + b^2 = (\lambda a + \mu b + \nu)(\lambda' a + \mu' b + \nu')$$

dove $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ sono numeri che non dipendono da a e b .

Si vede subito intanto che λ, μ e ν non possono essere nulli insieme, perchè in tal caso il 1° fattore del 2° membro sarebbe nullo, qualunque fossero i valori di a e b , e così sarebbe nullo *sempre* il 2° membro medesimo, non potrebbe dunque sussistere la precedente identità. Per la stessa ragione non possono essere nulli insieme i tre λ', μ' e ν' . Non possono neanche essere nulli insieme $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$, perchè, se fossero, il 2° membro diverrebbe indipendente da a e b : non potrebbe dunque essere uguale al 1° per tutti i possibili valori di a e b . — Si potrebbe anche far vedere che la precedente identità porta che non sieno nulli insieme i due λ e μ , e parimente non lo sieno i due λ' e μ' , e debbano invece essere nulli ν e ν' : ma pel nostro scopo ci basta sapere che dei quattro numeri $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ uno almeno deve essere diverso da zero; sia μ questo: il 1° fattore del 2° membro avrà allora una delle forme $\mu b, \mu b + \nu, \lambda a + \mu b, \lambda a + \mu b + \nu$ secondochè sono nulli insieme λ e ν , ovvero lo è solamente λ o solamente ν , oppure non lo è alcuno dei due; e giacchè inoltre non possono essere nulli insieme i tre λ', μ', ν' , così il 2° fattore non sarà identicamente nullo.

Se il 1° fattore ha la forma μb , cioè se sono nulli λ e ν , ecco che si può farlo eguale a zero, dando ad a un valore qualunque, e a b il valore zero.

Se ha la forma $\mu b + \nu$ si può farlo parimente nullo dando a b il valore $-\frac{\nu}{\mu}$ e ad a un valore qualunque.

Se ha la forma $\lambda a + \mu b$, perchè sia nullo basta prendere per a e b valori tali che sia $\frac{a}{b} = -\frac{\mu}{\lambda}$.

Se infine ha la forma $\lambda a + \mu b + \nu$, allora si può renderlo nullo prendendo per a un valore a piacere e dando poi a b il valore $-\frac{\lambda a + \nu}{\mu}$.

Se si fosse supposto diverso da zero uno dei due numeri λ', μ' si ragionerebbe analogamente sul 2° fattore $\lambda' a + \mu' b + \nu'$.

Così è dimostrato che si può sempre rendere eguale a zero uno dei due fattori del 2° membro, e quindi zero il 2° membro medesimo, senzachè sieno insieme nulli a e b ; il che mostra che l'identità posta è assurda, perchè il 1° membro può essere nullo solo quando sono nulli insieme a e b .

Numeri immaginari.

159. Noi vedemmo al n. 135 (7°) che tra i numeri positivi e negativi sin qui considerati non esistono le radici d'indice pari dei numeri negativi: non esiste dunque, in particolare, la radice quadrata di un numero negativo. Da ciò appunto dipende la impossibilità, che dianzi notammo, della decomposizione in fattori di una somma di due quadrati: imperocchè, se esistesse un numero β tale che fosse $\beta^2 = -b^2$, allora

giamento d'unità, i numeri $i, 2i, 3i, \dots$ cadono nella direzione ove prima erano i numeri $-1, -2, -3$.

In sostanza, questo prendere i per 1 gli è come se si facesse ruotare il sistema delle due rette di un angolo retto intorno al punto O , nel verso da Ox a Oy . Si vede bene che 1 coincide con i , e i va a cadere in -1 .

Per conseguenza -1 è il quadrato del numero i .

Parimente si dimostra che il quadrato di $2i$ è -4 .

Il quadrato di $2i$ è il numero in cui si trasforma $2i$ se si prende $2i$ per 1. Ora il prendere $2i$ per 1 porta, come dianzi, ad assumere la verticale come direzione nella quale gli oggetti si numerano coi segni 1, 2, 3, e i numeri $i, 2i, \dots$ cadranno quindi nella direzione, ove prima erano i numeri $-1, -2, \dots$: inoltre, poichè il $2i$ che ora si prende per 1, è la riunione di due delle precedenti unità, così, mentre 1 cade in $2i$, 2 in $4i$, 3 in $6i$, ec., contemporaneamente i cade in -2 , $2i$ in -4 , ec. Gli è insomma, come se si facesse ruotare il sistema delle due rette di un angolo retto intorno al punto O , nel verso da Ox verso Oy , e su ciascuna retta si contassero poi due oggetti in luogo di ciascuno di quelli che si contavano prima del cangiamento di unità.

Allora si vede bene, che $2i$ si trasforma in -4 ; -4 è dunque il quadrato di $2i$.

I quadrati dei numeri

$$i, 2i, 3i, \dots$$

e come sarebbe facile dimostrare, anche quelli dei numeri

$$-i, -2i, -3i, \dots$$

sono dunque

$$-1, -4, -9, \dots$$

rispettivamente.

Perciò si può scrivere

$$i = \sqrt{-1}$$

e quindi anche

$$2i = 2\sqrt{-1}, \quad 3i = 3\sqrt{-1}, \dots$$

e si vede che i quadrati

$$-4, -9, \dots$$

si possono considerare come ottenuti applicando ai numeri

$$2i, 2i, \dots$$

la regola ordinaria di calcolo, per la quale si eleva a quadrato un prodotto.

Qui si è dunque osservato questo fatto, che se il contare nei due versi a partire da un punto O sopra una retta dà origine ai numeri

$$1, 2, 3, \dots$$

$$-1, -2, -3, \dots$$

rispettivamente, il contare nei due versi sopra una retta normale a quella nel punto O medesimo dà origine ai numeri

$$i, 2i, 3i, \dots$$

$$-i, -2i, -3i, \dots$$

i quali, secondo il concetto di prodotto, hanno per quadrati dei numeri negativi.

161. Ora, noi ricerchiamo appunto dei numeri, i cui quadrati sieno negativi: ammetteremo dunque nella scienza i numeri che abbiamo ora incontrato e che definiremo, indipendentemente da ogni idea di grandezza concreta, nel modo seguente:

Si designi col simbolo i un numero tale che sia

$$1) \quad i^2 = -1$$

e con esso e col suo opposto $-i$ definito dalla relazione

$$2) \quad (+i) + (-i) = 0$$

si formino dei numeri

$$\begin{array}{ccc} i, & 2i, & 3i, \dots \\ -i, & -2i, & -3i, \dots \end{array}$$

nello stesso modo come con le unità $+1$, e -1 sono formati i numeri

$$\begin{array}{ccc} 1, & 2, & 3, \dots \\ -1, & -2, & -3, \dots \end{array}$$

rispettivamente.

Al numero i definito dalla relazione 1) si dà il nome di unità immaginaria, e precisamente si chiama unità immaginaria positiva il numero $+i$, unità immaginaria negativa il numero $-i$; e i numeri derivati da esse si dicono numeri immaginari; per contrapposto si dice che $+1$ e -1 rappresentano l'unità reale positiva e negativa rispettivamente, e i numeri derivati da essa si dicono numeri reali.

Un numero immaginario $+bi$ o $-bi$ può considerarsi, secondo il noto concetto di prodotto, come il prodotto del numero reale $+b$ o $-b$, per l'unità i : *invero*, il numero $+bi$, o $-bi$, è derivato da i nello stesso modo come il numero $+b$, o $-b$ rispettivamente è derivato da 1 .

In virtù di quest'ultima osservazione, si conviene di sottoporre al calcolo i numeri immaginari trattandoli come prodotti ciascuno di due fattori, secondo le note regole del calcolo algebrico pei prodotti di numeri reali, e nei risultati che così si ottengono si sostituisce ovunque -1 al simbolo i^2 .

162. Questo, che noi così poniamo, è un concetto puramente aritmetico; al solo scopo di fornire all'Al-

gebra i simboli adatti a rappresentare le radici d'indice pari dei numeri negativi noi ammettiamo un nuovo ente aritmetico la cui definizione è contenuta nella relazione

$$i^2 = -1$$

e da esso, come dall'unità 1 , deriviamo dei numeri, che si sottopongono poi al dominio del calcolo.

Questo, in sostanza, è ciò che si fa; e un tale concetto si sarebbe potuto stabilire anche senza aver prima esposto la considerazione del conteggio nelle due direzioni orizzontale e verticale: dimodochè la ragione di essere dei numeri

$$\begin{array}{ccc} i, & 2i, & \dots \\ -i, & -2i, & \dots \end{array}$$

come enti aritmetici, non deve affatto riporsi in quella considerazione, ma semplicemente nella loro definizione, alla quale si è condotti dalla necessità di rendere in ogni caso possibile l'operazione inversa dell'elevazione a potenza. La considerazione del conteggio nelle due direzioni perpendicolari l'una all'altra fa però vedere che i numeri *immaginari*, così come i numeri *reali*, posson trovare applicazione nell'ordine concreto; la qual cosa, da un certo aspetto, si può dire che giustifichi, autorizzi l'introduzione nella scienza dei numeri immaginari medesimi.

Noi, basandoci sulla loro definizione aritmetica, diremo di essi quel tanto che è richiesto dallo scopo nostro immediato, che è quello di ottenere la *formale* decomposizione di una funzione di 2° grado in fattori di 1° grado.

I limiti entro cui deve essere contenuto questo libro non ci consentono di esporne una *teoria* completa; sviluppando l'osservazione, fatta sopra, di sot-

toporre al calcolo i numeri immaginari trattandoli come prodotti, estenderemo ad essi le operazioni aritmetiche, tralasciando di ricercare quella interpretazione nell'ordine concreto che si può dare ai risultati di queste, quando pei numeri, sui quali le medesime si eseguono, si tenga presente il significato concreto che dianzi mostrammo che è possibile attribuire ad essi.

Prima però di parlare delle operazioni, osserviamo che non si hanno solamente i numeri immaginari

$$i, \quad 2i, \dots \\ -i, \quad -2i, \dots$$

nei quali il coefficiente di i è un numero intero.

Si prendono anche in considerazione i numeri della forma $\frac{m}{n}i$, (m ed n numeri interi) derivati da i come i numeri della forma $\frac{m}{n}$ lo sono da 1, e perciò un numero $\frac{m}{n}i$ è definito dalla proprietà, che, moltiplicato per n produce mi .

Parimente si designa col simbolo hi , dove h è un numero irrazionale, un numero che è rispetto a i quello che è h rispetto a 1, cioè, se h è il limite della serie di numeri razionali

$$s_0, \quad s_1, \quad s_2, \dots$$

hi lo sarà della serie di numeri immaginari

$$s_0i, \quad s_1i, \quad s_2i, \dots$$

Questi numeri $\frac{m}{n}i$, hi si sottopongono al calcolo secondo il concetto precedentemente accennato pei numeri della forma mi , dove m è intero.

In quello che segue il simbolo bi , dove b è un numero qualunque razionale o irrazionale, positivo o negativo, cioè un numero *reale* qualunque, rappresenterà un numero immaginario qualunque.

163. 1° Due numeri immaginari bi , di si dicono eguali se è $b = d$.

2° Somma di due numeri bi , di è il numero immaginario $(b+d)i$.

3° Differenza è il numero immaginario $(b-d)i$.

4° Prodotto dei due numeri bi , di è il numero reale $-bd$.

Infatti, l'applicazione pura e semplice della regola di moltiplicazione dà

$$bi \cdot di = bdi^2$$

e poichè è per definizione

$$i^2 = -1$$

così

$$bi \cdot di = -bd.$$

Nel caso particolare che sia $b = d$ e quindi $bi = di$ si ha

$$bi \cdot di = (bi)^2 = -b^2$$

onde

$$bi = \sqrt{-b^2}.$$

ecco dunque: un numero negativo ha per radice quadrata un numero immaginario.

164. Si chiama *numero complesso* l'espressione $a+bi$ somma di un numero reale a con un numero immaginario bi e a si chiama *parte reale*, b coefficiente della *parte immaginaria* bi .

Si conviene di sottoporre al calcolo i numeri complessi applicando ad essi, considerati come binomi, le

note regole del calcolo algebrico avvertendo però di sostituire nei risultati -1 a i^2 .

1° Perchè sussista l'eguaglianza di due numeri complessi

$$a+bi = a'+b'i$$

è necessario e sufficiente che sia

$$a = a' \quad , \quad b = b'.$$

Ogni altro modo d'intendere l'eguaglianza tra due numeri complessi conduce sempre a questa conseguenza, che i sia eguale a un numero reale: il che è assurdo perchè i ha per quadrato un numero negativo e qualunque numero reale ha un quadrato positivo.

Segue da ciò, che un numero complesso $a+bi$ non può essere zero se non è $a=0$, $b=0$.

Se è solamente $a=0$, allora $a+bi$ si riduce al numero immaginario bi : se è solamente $b=0$, si riduce al numero reale a : i numeri complessi comprendono dunque come casi particolari, i numeri reali e i numeri immaginari.

2° Secondo il modo anzidetto d'introdurre nel calcolo i numeri complessi, si chiamerà *somma di due numeri complessi* $a+bi$, $a'+b'i$ il numero complesso che si ottiene sommando le parti reali e le parti immaginarie.

Si scrive dunque

$$(a+bi) + (a'+b'i) = (a+a') + (b+b')i.$$

Si vede subito che la somma di due numeri complessi è indipendente dall'ordine dei termini.

3° Si chiama *prodotto dei numeri* $a+bi$, $a'+b'i$ il numero che risulta dall'eseguire, secondo le note regole, la moltiplicazione di queste due espressioni, e dal sostituire -1 a i^2 nel risultato.

Si ha dunque

$$(a+bi)(a'+b'i) = (aa' - bb') + (ba' + ab')i$$

Si vede subito che il prodotto è indipendente dall'ordine dei fattori.

E secondo questa regola si ha in particolare

$$\alpha) \quad (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

formula che ci dà quella scomposizione di una somma di due quadrati in un prodotto, la quale appunto avevamo in mira di ottenere.

I due numeri $a+bi$, $a-bi$, che differiscono solo pel segno della parte immaginaria, si dicono numeri complessi *coniugati*.

OSSERVAZIONE. Importa ora che ci fermiamo a dimostrare che anche per un prodotto di due numeri complessi sussiste la proposizione: *affinchè esso sia nullo, è necessario e sufficiente che sia nullo uno dei fattori*.

Giacchè si ha:

$$(a+bi)(a'+b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

perchè questo numero complesso sia nullo, è necessario e sufficiente (164, 1°) che sia

$$aa' - bb' = 0 \quad , \quad ab' + a'b = 0,$$

ora queste due insieme equivalgono all'unica condizione

$$(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2 = 0;$$

ma è

$$(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$$

quindi, affinchè il detto numero complesso, cioè il prodotto $(a+bi)(a'+b'i)$ sia nullo, è necessario e suffi-

ciente che sia

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = 0$$

e poichè questo è un prodotto di numeri reali, così per esso sussiste la proposizione che ora si vuol dimostrare; è dunque necessario e sufficiente che sia

$$a^2 + b^2 = 0, \text{ ovvero } a'^2 + b'^2 = 0$$

cioè $a = 0$ insieme con $b = 0$, ovvero $a' = 0$ insieme con $b' = 0$.

Se è $a = 0$, e $b = 0$, è $a + bi = 0$: se è $a' = 0$, $b' = 0$, è invece $a' + b'i = 0$: così è dimostrato il teorema.

4° Si chiama potenza m^a (m intero e positivo) del numero complesso $a + bi$, il numero complesso che risulta dal prodotto di m fattori eguali ad $a + bi$.

$$(a + bi)^m = (a + bi)(a + bi) \dots (a + bi).$$

165. Le operazioni inverse sui numeri complessi sono sempre possibili.

1° Esiste sempre un numero complesso che sommato col numero $a' + b'i$ produce $a + bi$.

Un tale numero è evidentemente

$$(a - a') + (b - b')i$$

si ha infatti, secondo la regola di addizione

$$(a - a') + (b - b')i + (a' + b'i) = (a - a' + a') + (b - b' + b')i = a + bi.$$

Questo numero $(a - a') + (b - b')i$ ottenuto sottraendo le parti reali e le parti immaginarie rispettivamente dei numeri $a + bi$, $a' + b'i$ si dice differenza di essi.

2° Esiste sempre un numero complesso che moltiplicato pel numero $a' + b'i$ produce $a + bi$.

Un tale numero è

$$(a + bi) \left(\frac{a'}{a'^2 + b'^2} - \frac{b'}{a'^2 + b'^2} i \right).$$

Invero si ha

$$\left(\frac{a'}{a'^2 + b'^2} - \frac{b'}{a'^2 + b'^2} i \right) (a' + b'i) = 1;$$

quindi è

$$(a + bi) \left(\frac{a'}{a'^2 + b'^2} - \frac{b'}{a'^2 + b'^2} i \right) (a' + b'i) = a + bi.$$

Questo numero $(a + bi) \cdot \left(\frac{a'}{a'^2 + b'^2} - \frac{b'}{a'^2 + b'^2} i \right)$ chiamasi quoziente dei numeri $a + bi$ e $a' + b'i$ e si rappresenta per ciò colla notazione $\frac{a + bi}{a' + b'i}$.

3° Esistono sempre m numeri complessi differenti che elevati alla potenza m producono il numero $a + bi$.

Noi ci limiteremo a dimostrare vero questo teorema per $m = 2$, cioè mostreremo che, dato un numero complesso $a + bi$, esistono due numeri complessi, che hanno per quadrato $a + bi$.

Si denoti con r il valore assoluto della radice quadrata della somma di quadrati di numeri reali $a^2 + b^2$; r sarà manifestamente maggiore del valore assoluto di a , dimodochè $r + a$ e $r - a$ sono certamente numeri positivi ambedue; epperò per ciascuno di essi la radice quadrata è reale ed ha due valori differenti solo pel segno.

Ciò premesso, i numeri complessi suaccennati sono:

$$\sqrt{\frac{r+a}{2}} + \sqrt{\frac{r-a}{2}} \cdot i \text{ e } -\sqrt{\frac{r+a}{2}} - \sqrt{\frac{r-a}{2}} \cdot i.$$

Invero, si ha

$$\begin{aligned} & \left[\sqrt{\frac{r+a}{2}} + \sqrt{\frac{r-a}{2}} \cdot i \right]^2 = \\ &= \frac{r+a}{2} - \frac{r-a}{2} + 2 \sqrt{\frac{r+a}{2}} \cdot \sqrt{\frac{r-a}{2}} \cdot i \\ &= a + \sqrt{r^2 - a^2} \cdot i \\ &= a + bi \end{aligned}$$

poichè, per dato è

$$r^2 = a^2 + b^2$$

onde

$$r^2 - a^2 = b^2$$

e

$$\sqrt{r^2 - a^2} = b.$$

Analogamente si dimostra che è:

$$\left[-\sqrt{\frac{r+a}{2}} - \sqrt{\frac{r-a}{2}} \cdot i \right]^2 = a + bi.$$

Noi abbiamo ora detto intorno ai numeri complessi quanto è richiesto dallo scopo che ci siamo proposto.

Scomposizione di ogni funzione di 2° grado di una variabile in un prodotto di fattori di 1° grado.

166. Abbiamo dimostrato (157) che per la funzione

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

si presentano due casi: o essa può, per valori convenienti di x , ricevere il valore zero, e allora è decomponibile in un prodotto di due fattori

$$(x - \xi_1)(x - \xi_2)$$

ξ_1 e ξ_2 numeri determinati: ovvero, non può per alcun

valore di x , divenire zero, e allora non può neanche essere eguale a un tale prodotto $(x - \xi_1)(x - \xi_2)$.

L'introduzione dei numeri complessi nel calcolo ha per effetto di togliere questa diversità.

Si è veduto (156) che nel caso ultimo, che è quello in cui è $b^2 - 4ac < 0$, la funzione

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

può scriversi nella forma

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + B^2$$

essendo

$$B^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

Ora, dopo l'introduzione dei numeri complessi, noi possiamo applicando la formula α) del n. 164, scomporre la precedente somma di due quadrati nel prodotto

$$\left(x + \frac{b}{2a} - iB\right) \left(x + \frac{b}{2a} + iB\right).$$

Noi abbiamo dunque, nel caso in cui è $b^2 - 4ac < 0$

$$1) \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} - iB\right) \left(x + \frac{b}{2a} + iB\right)$$

epperò noi possiamo adesso enunciare la proposizione generale: ogni funzione razionale intera $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ nella quale il coefficiente di x^2 sia l'unità, può presentarsi come prodotto di due fattori ciascuno di 1° grado in x .

E dalla formula 1) precedente, rammentando quanto sopra (164, Osservazione) si è dimostrato riguardo al-

l'annullarsi di un prodotto di due numeri complessi, si trae anche subito un'altra conseguenza, cioè che la funzione $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$, in questo caso in cui è $b^2 - 4ac < 0$, si annullerà, vale a dire sarà soddisfatta l'equazione

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

quando si dia alla x il valore complesso $-\frac{b}{2a} + iB$ ovvero il valore pure complesso $-\frac{b}{2a} - iB$; giacchè per $x = -\frac{b}{2a} + iB$, e solamente per questo, si annulla il fattore $x + \frac{b}{2a} - iB$: per $x = -\frac{b}{2a} - iB$, e solamente per questo, si annulla l'altro fattore $x + \frac{b}{2a} + iB$.

Dunque, nel caso in cui è $b^2 - 4ac < 0$, l'equazione, precedente che non ha per radici numeri reali, ha invece per radici i due numeri complessi coniugati,

$$\xi_1 = -\frac{b}{2a} + iB$$

$$\xi_2 = -\frac{b}{2a} - iB$$

e poichè è

$$B = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \text{ così}$$

$$\xi_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$\xi_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

che anche si possono scrivere nella forma

$$\xi_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\xi_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La formula 1) si può scrivere più semplicemente

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \xi_1)(x - \xi_2).$$

Richiamando qui il contenuto dell'Osservazione (n. 157) si può dunque dire: l'equazione di 2° grado

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ammette in ogni caso due radici date dalle formule:

$$\xi_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2)

$$\xi_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

se è $b^2 - 4ac > 0$, esse sono due numeri reali disuguali, se è $b^2 - 4ac = 0$, sono due numeri reali ed eguali: se infine è $b^2 - 4ac < 0$, sono due numeri complessi coniugati.

La funzione di 2° grado $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ è in ogni caso eguale al prodotto $(x - \xi_1)(x - \xi_2)$ dove ξ_1 e ξ_2 indicano le radici dell'equazione

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Se ora si riprende la formula

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right),$$

essendo a un numero costante diverso da zero, così, come già dicemmo, si vede che la funzione ax^2+bx+c si annulla per quegli stessi valori di x pei quali si annulla la funzione $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$; quindi l'equazione

$$ax^2+bx+c=0$$

che è quella primitivamente propostaci al n. 156, ha le stesse radici dell'equazione

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

e quindi date in ogni caso dalle formule 2) le quali, come si vede, sono composte così: *si prende, cangiandogli segno, il coefficiente della 1^a potenza di x nell'equazione proposta, e vi si aggiunge per avere la prima, vi si toglie invece per avere la seconda, la radice quadrata del numero formato sottraendo dal quadrato del detto coefficiente il quadruplo del prodotto del coefficiente di x^2 pel termine che non contiene x : poi si divide il risultato pel doppio del coefficiente di x^2 .*

Inoltre si vede anche immediatamente che si può scrivere:

$$ax^2+bx+c=a(x-\xi_1)(x-\xi_2)$$

cioè: *la funzione ax^2+bx+c può scriversi come prodotto di tre fattori, dei quali uno è il coefficiente di x^2 , e gli altri due sono le differenze tra x e ciascuna radice dell'equazione*

$$ax^2+bx+c=0.$$

Questi fattori $x-\xi_1$, $x-\xi_2$ saranno *reali diseguali*, se è $b^2-4ac > 0$: *reali ed uguali* se è $b^2-4ac = 0$; *complessi coniugati* se è $b^2-4ac < 0$.

467. Determineremo infine la somma e il prodotto delle due radici.

Si ha

$$\begin{aligned}\xi_1+\xi_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \\ \xi_1\xi_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a}.\end{aligned}$$

Si ha dunque: *la somma delle due radici di una equazione di 2° grado è in ogni caso eguale al quoziente, cambiato di segno, del coefficiente di x pel coefficiente di x^2 : il prodotto è eguale al quoziente del termine noto pel coefficiente di x^2 .*

168. Mediante le due formule

$$\xi_1+\xi_2 = -\frac{b}{a}, \quad \xi_1\xi_2 = \frac{c}{a}$$

che danno la somma e il prodotto delle radici, si può, quando esse sieno reali, determinarne i segni, senza risolvere l'equazione.

Distinguiamo tutti i casi che possono presentarsi rispetto ai segni dei coefficienti a , b e c : se si osserva che a può sempre supporre positivo (giacchè, se non fosse, si ridurrebbe tale cangiando segno a tutti i termini dell'equazione), si vede che i casi possibili

sono messi in evidenza nel seguente quadro

	a	b	c
1°	+	+	+
2°	+	+	—
3°	+	—	+
4°	+	—	—

nel quale i tre segni posti su una medesima riga sono quelli che a , b e c possono avere contemporaneamente.

Nel 1° caso c ed a essendo positivi, è positivo $\frac{c}{a}$, e quindi le due radici, dovendo dare un prodotto positivo, avranno lo stesso segno; e giacchè per essere b ed a positivi, $-\frac{b}{a}$ è negativo, così le due radici, dovendo anche dare una somma negativa, saranno ambedue negative. — Nel 2° caso $\frac{c}{a}$ è negativo: le due radici hanno dunque segni contrari; e poichè è $-\frac{b}{a}$ negativo, sarà negativa la radice più grande in valore assoluto. — Nel 3° caso, $\frac{c}{a}$ è positivo; dunque le due radici hanno lo stesso segno: e poichè $-\frac{b}{a}$ è positivo, così le due radici sono entrambe positive. — Nel 4° caso infine, $\frac{c}{a}$ è negativo: epperò le due radici hanno segni contrari e giacchè $-\frac{b}{a}$ è positivo, sarà positiva la radice più grande in valore assoluto.

Dimodochè i segni di ξ_1 , ξ_2 sono (ξ_1 essendo la maggiore in valore assoluto)

	ξ_1	ξ_2
nel 1° caso	—	—
nel 2°	—	+
nel 3°	+	+
nel 4°	+	—

E se si chiama *variazione* il succedersi di due segni differenti, *permanenza* il succedersi di due segni uguali nella equazione, si ha il seguente teorema:

Se una equazione di 2° grado ha il primo termine positivo e le sue radici reali, il numero delle radici positive sarà eguale a quello delle sue variazioni e il numero delle negative a quello delle sue permanenze, e la radice più grande in valore assoluto sarà positiva o negativa, secondo che si avrà prima, una variazione, o una permanenza.

Osserveremo qui, che le radici sono sempre reali, quando a e c hanno segni contrari: perchè, allora, ac è negativo e quindi $-4ac$ positivo e a fortiori $b^2 - 4ac$ positivo; ma a e c hanno segni contrari, quando abbiamo nell'equazione una permanenza e una variazione. Dunque: se una equazione di 2° grado ha una permanenza e una variazione, le sue radici sono reali.

Applicazioni.

169. 1° Costruire un'equazione di 2° grado, quando ne siano date le radici.

Si voglia un'equazione, che abbia per radici i numeri α e β .

L'equazione richiesta è evidentemente

$$(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

ovvero

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0.$$

2° Trovare due numeri, quando ne è data la somma e il prodotto.

Sieno S la somma, P il prodotto dei due numeri: le due radici dell'equazione

$$x^2 - Sx + P = 0$$

hanno (167) per somma S e per prodotto P : esse sono dunque i numeri cercati, nè vi può essere altra soluzione all'infuori di questa, perchè se si mette in equazione il problema proposto senza pensare alle proprietà dell'equazione di 2° grado, si è pure condotti all'equazione precedente.

Invero, si indichi con x uno dei due numeri, che si cercano: l'altro sarà $S-x$; per dato, deve essere

$$x(S-x) = P$$

cioè

$$x^2 - Sx + P = 0$$

che è identica alla precedente.

Da questa veramente si hanno due valori x_1 e x_2 per x , e quindi si ottengono due valori corrispondenti $S-x_1$, $S-x_2$ per $S-x$: sono dunque due le soluzioni del problema: una composta dei valori x_1 e $S-x_1$, l'altra dei valori x_2 e $S-x_2$: ma si vede che esse coincidono, perchè è $x_1+x_2=S$, e quindi $S-x_1=x_2$, $S-x_2=x_1$: epperò i numeri x_1 , $S-x_1$ coincidono coi numeri x_1 e x_2 rispettivamente, e i due x_2 , $S-x_2$ sono i numeri medesimi x_2 , x_1 .

OSSERVAZIONE. Dati S e P reali, affinchè i numeri, che si domandano nel problema precedente, sieno reali, è necessario e sufficiente che sia $S^2-4P \geq 0$, cioè $P \leq \left(\frac{S}{2}\right)^2$; e questa ci mostra, che quando sia fissata la somma di due numeri reali, il più grande valore che si potrà prendere per prodotto di essi, sarà il quadrato della semi-somma; l'equazione, che li dà, è allora

$$x^2 - Sx + \left(\frac{S}{2}\right)^2 = 0$$

e questa ha le due radici eguali a $\frac{S}{2}$. Di qui si con-

clude: che il massimo prodotto, che è possibile ottenere colle due parti di un numero, lo si ottiene quando le parti sono eguali tra loro.

170. Si è veduto al n. 166 che se si denotano con ξ_1 e ξ_2 le due radici dell'equazione

$$ax^2+bx+c=0$$

o, come anche si suol dire, le due radici della funzione ax^2+bx+c , si può scrivere questa funzione nella forma di un prodotto, cioè:

$$ax^2+bx+c = a(x-\xi_1)(x-\xi_2).$$

Questa proprietà si presta utilmente a dimostrare i seguenti teoremi:

1° Allorchè le radici ξ_1 e ξ_2 della funzione ax^2+bx+c sono reali e disuguali, cioè, se è $b^2-4ac > 0$, la funzione medesima prende un valore reale di segno contrario a quello di a per ogni valore reale della x , compreso tra ξ_1 e ξ_2 : prende invece un valore del medesimo segno di a per ogni valore della x non compreso tra ξ_1 e ξ_2 .

Invero, suppongasi $\xi_1 > \xi_2$; ogni valore dato a x che sia compreso tra ξ_1 e ξ_2 rende $x-\xi_1$ negativo e $x-\xi_2$ positivo: esso rende dunque negativo il prodotto $(x-\xi_1)(x-\xi_2)$: epperò siffatto valore di x fa acquistare al prodotto $a(x-\xi_1)(x-\xi_2)$, cioè alla funzione ax^2+bx+c , un valore di segno contrario a quello di a . — Se, al contrario, il valore dato alla x è maggiore di ξ_1 o minore di ξ_2 , i fattori $x-\xi_1$, $x-\xi_2$ sono ambedue positivi o ambedue negativi: il loro prodotto è positivo e quindi il prodotto $a(x-\xi_1)(x-\xi_2)$, cioè la funzione ax^2+bx+c ha il medesimo segno di a .

2° Allorchè le radici ξ_1 , ξ_2 della funzione ax^2+bx+c sono reali ed uguali, cioè se è $b^2-4ac=0$, la funzione

medesima prende un valore dello stesso segno di a per qualsivoglia valore attribuito alla x , tranne per quello che la rende nulla.

Invero, in questo caso è

$$\xi_1 = \xi_2 = -\frac{b}{2a}$$

e si ha come anche ci dà la 2^a delle formule 3) (n. 156)

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 :$$

per qualsivoglia valore dato alla x il quadrato $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ è positivo; solamente si eccettua il valore $x = -\frac{b}{2a}$ che lo rende nullo: la funzione dunque, tranne per questo valore, ha sempre un valore del medesimo segno di a .

3° Allorchè le radici ξ_1 e ξ_2 della funzione $ax^2 + bx + c$ sono numeri complessi, cioè, quando è $b^2 - 4ac < 0$, la funzione medesima prende, per qualsivoglia valore reale dato alla x , un valore dello stesso segno di a .

In questo caso si ha [n. 156, 3)]

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + B^2\right] :$$

la somma dei due quadrati entro parentesi è positiva per qualsivoglia valore di x e non può mai esser nulla, perchè non è nullo B . Ciò mostra che il valore di $ax^2 + bx + c$, per x reale, è sempre del medesimo segno di a .

OSSERVAZIONE. Riassumendo, i tre teoremi precedenti possono comprendersi in un solo enunciato: La funzione $ax^2 + bx + c$ ha un valore del medesimo segno del suo primo coefficiente a , per qualsivoglia valore reale dato alla x , salvo quando, essendo le radici reali,

si attribuisce alla x per valore una delle radici, nel qual caso la funzione si annulla: e quando, essendo le radici reali e disuguali, si attribuisce alla x un valore compreso tra esse, nel qual caso la funzione prende un valore di segno contrario a quello di a .

171. DISUGUAGLIANZE DI 2° GRADO. Se si ha una funzione di 2° grado $ax^2 + bx + c$ e ci si propone di determinare i valori di x pei quali la funzione medesima acquista un valore maggiore o minore di un numero h assegnato, ovvero maggiore o minore di quello che contemporaneamente assume un'altra funzione di 1° o di 2° grado della stessa variabile x , si è condotti a stabilire relazioni come queste

$$ax^2 + bx + c > h \text{ oppure } < h$$

$$ax^2 + bx + c > a'x + b' \text{ oppure } < a'x + b'$$

$$ax^2 + bx + c > a'x^2 + b'x + c' \text{ oppure } < a'x^2 + b'x + c'$$

che si chiamano *disuguaglianze di 2° grado*, e si tratta ora di risolverle.

Poichè per queste disuguaglianze sussistono i principii stabiliti per quelle di 1° grado, così si potrà in esse trasportare i termini del 2° membro nel 1°, e riducendo i termini simili, ciascuna prenderà una o l'altra delle forme

$$1) \quad Ax^2 + Bx + C > 0$$

$$2) \quad Ax^2 + Bx + C < 0.$$

I teoremi dati nel numero precedente trovano la loro immediata applicazione nella risoluzione di queste.

Si porrà eguale a zero il 1° membro della disuguaglianza data, e si formerà così l'equazione di 2° grado

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Distinguiamo i tre casi:

1° Le radici ξ_1 e ξ_2 di questa equazione sieno reali e disuguali; allora dal 1° dei menzionati teoremi si trae subito questa conseguenza: *se A è positivo, è soddisfatta la disuguaglianza 1) per qualsivoglia valore reale di x, che non sia compreso tra le due radici: è soddisfatta invece la 2) per qualsivoglia valore reale di x che sia compreso tra esse. — Se A è negativo accade il contrario: è verificata la 1) per i valori di x compresi tra le radici; è verificata la 2) per quelli non compresi tra le medesime.*

2° Sieno ξ_1 e ξ_2 reali ed uguali a $-\frac{B}{2A}$; dal 2° teorema (170) si ha che: *se A è positivo, è soddisfatta la 1) per tutti i possibili valori reali di x, eccettuato il valore $-\frac{B}{2A}$, e non lo è mai la 2); se invece A è negativo, allora è verificata la 2) per qualsiasi valore reale di x, tranne pel menzionato valore $-\frac{B}{2A}$, mentre la 1) non lo è per alcun valore reale di x.*

3° Sieno ξ_1 e ξ_2 numeri complessi; dal 3° teorema (170) discende la conclusione: *se A è positivo, è soddisfatta la 1) per qualsiasi valore reale di x, e non lo è mai la 2); se A è negativo, è soddisfatta la 2) per ogni valore reale di x e non lo è mai la 1).*

ESEMPLI. Sia la disuguaglianza

$$3x^2 + 5x + \frac{4}{3} < 0.$$

Le radici dell'equazione

$$3x^2 + 5x + \frac{4}{3} = 0$$

sono $-\frac{1}{3}$ e $-\frac{4}{3}$; siamo dunque nel 1° caso: il 1° coef-

ficiente 3 essendo positivo, sarà verificata la disuguaglianza per ogni valore di x compreso tra $-\frac{1}{3}$ e $-\frac{4}{3}$; cioè deve essere $-\frac{4}{3} < x < -\frac{1}{3}$.

Sia ancora la disuguaglianza:

$$-x^2 + 6x - 9 < 0.$$

Le radici dell'equazione

$$-x^2 + 6x - 9 = 0$$

sono reali e ambedue eguali a 3; siamo dunque nel 2° caso: il 1° coefficiente -1 è negativo: epperò la disuguaglianza è verificata per qualsiasi valore di x , salvo pel valore 3.

Sia infine la disuguaglianza

$$x^2 - 3x + 7 > 0.$$

Le radici dell'equazione

$$x^2 - 3x + 7 = 0$$

sono numeri complessi: siamo dunque nel 3° caso: il 1° coefficiente 1 è positivo e perciò, la disuguaglianza è soddisfatta per tutti i possibili valori di x .

172. Termineremo questo capitolo dando alcuni esempi di equazioni, che contengono l'incognita nel denominatore di qualche termine, ovvero sotto segni radicali, e che si riconducono facilmente alla forma normale di equazioni di 2° grado.

Ciò si ottiene spesso mediante artifizi che si imparano colla pratica.

1° Sia l'equazione

$$1) \quad \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}.$$

Liberandola dai divisori si ottiene

$$6x^2 + 6x^2 + 12x + 6 = 13x^2 + 13x$$

questa equazione è di 2° grado; riducendola alla forma normale si ha:

$$2) \quad x^2 + x - 6 = 0.$$

L'equazione 1) e la 2) sono equivalenti, poichè i valori di x che annullano il fattore $x(x+1)$, per cui si è moltiplicato la 1), sono $x=0$ e $x=-1$, e nessuno di essi soddisfa all'equazione 2). (Vedi Osservazione III, n. 86).

Applicando le formule 2) del n. 166 all'equazione 2) si hanno le radici

$$\xi_1 = 2, \quad \xi_2 = -3.$$

2° Sia a risolvere l'equazione

$$1) \quad 2\sqrt{x-a} + 3\sqrt{2x} = \frac{7a+5x}{\sqrt{x-a}}$$

Moltiplicando i due membri per $\sqrt{x-a}$ si ottiene

$$2(x-a) + 3\sqrt{2x(x-a)} = 7a+5x;$$

$$2) \quad 3\sqrt{2x(x-a)} = 9a+3x$$

il valore $x=a$, che annulla il moltiplicatore $\sqrt{x-a}$, non soddisfa alla 2): questa è dunque equivalente alla 1).

Si dividano ambo i membri della 2) per 3, e poi si elevino al quadrato: risulterà

$$2x^2 - 2ax = 9a^2 + 6ax + x^2$$

ossia

$$3) \quad x^2 - 8ax - 9a^2 = 0$$

dalla quale si ricavano le radici

$$\xi_1 = 9a, \quad \xi_2 = -a.$$

La 3) può non essere equivalente alla 2) (n. 86, 4°): è dunque necessario verificare se queste radici soddisfino alla 2). Sostituendo $9a$ ad x nella 2) ambo i membri prendono il valore $36a$: sostituendo invece il valore $-a$, il primo diviene $-6a$, il secondo $+6a$: la radice $-a$ va dunque rigettata come estranea; essa, invece che alla 2), soddisfa all'equazione

$$-3\sqrt{2x(x-a)} = 9a+3x.$$

3° Sia ancora l'equazione

$$1) \quad 2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0.$$

È opportuno prendere come incognita ausiliaria il trinomio $2x^2 + 3x + 3$. Pongasi

$$2) \quad 2x^2 + 3x + 3 = y.$$

La 1) diviene allora

$$3) \quad y - 5\sqrt{y+6} = 0$$

onde

$$y = 5\sqrt{y+6}$$

ad elevando a quadrato

$$4) \quad \begin{aligned} y^2 &= 25(y+6) \\ y^2 - 25y - 150 &= 0 \end{aligned}$$

dalla quale si hanno le radici

$$y_1 = 30 \text{ e } y_2 = -5$$

sostituendo l'uno e l'altro di questi valori nella 3) si vede che solo il valore 30 soddisfa: -5 è dunque una radice prodotta dall'inalzamento a quadrato.

Portando il valore 30 nella 2) si ottiene l'equazione

$$2x^2 + 3x + 3 = 30$$

dalla quale si ricaveranno i valori di x

$$x_1 = 3 \text{ e } x_2 = -\frac{9}{2}.$$

Esercizi.

- 1° $2x^2 - 7x + 3 = 0$, 2° $7x^2 - 3x = 160$
 3° $(x-1)(x-2) = 6$, 4° $4(x^2 - 1) = 4x - 1$
 5° $(3x-5)(2x-5) = (x+3)(x+1)$,
 6° $(x-1)(x-2) + (x-2)(x-4) = 6(2x-5)$
 7° $(a-b)x = ab - x^2$, 8° $cx + \frac{ac}{a+b} = (a+b)x^2$
 9° $\frac{3x+4}{5} - \frac{30-2x}{x-6} = \frac{7x-14}{10}$, 10° $x = 2 + \frac{5}{4x}$
 11° $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{9}{5}$, 12° $\frac{x-3}{x-2} - \frac{x-1}{x-4} = -\frac{6}{5}$
 13° $\frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$, 14° $(ax-b)(bx-a) = c^2$
 15° $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} + \frac{x+c}{x-c} = 3$,
 16° $\frac{a+c(a+x)}{a+c(a-x)} + \frac{a+x}{x} = \frac{a}{a-2cx}$
 17° $\frac{x^2}{5} - \frac{x^2-10}{15} = 7 - \frac{50+x^2}{25}$,
 18° $\frac{a^2-x^2}{b^2} + \frac{b^2-x^2}{a^2} + \frac{2x^2}{ab} = 2$
 19° $\sqrt{1+x+x^2} = a - \sqrt{1-x+x^2}$,
 20° $\frac{1}{a-\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{1}{a+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a}{x^2}$

- 21° $\frac{1-ax}{1+ax} \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = 1$,
 22° $\sqrt{(1+x)^2 - ax} + \sqrt{(1-x)^2 + ax} = 0$
 23° $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$,
 24° $\sqrt{\frac{20}{x^2} + 9} - \sqrt{\frac{20}{x^2} - 9} = 3$
 25° $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+2x} = 0$,
 26° $\frac{\sqrt{x^2+x+6}}{3} = \frac{20 - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+x+6}}{\sqrt{x^2+x+6}}$
 27° $\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}$
 28° $\frac{\sqrt{a-x}}{x} - \frac{\sqrt{a-x}}{x} = \sqrt{x}$
 29° $\frac{x^3-10x^2+1}{x^2-6x+9} = x-3$, 30° $\frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{x^2-1} = \frac{1}{4}$
 31° $3\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} = 12$ (si prenda per incognita $y = \sqrt[4]{x}$)
 32° $2x^2 + 3\sqrt{x^2-x+1} = 2x+3$
 (si prenda per incognita il radicale....)
 33° $\frac{x}{9-x} + \frac{9-x}{x} = 2, 5$.
 (È data qui la somma di due quantità, il cui prodotto è 1....)
 34° $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = c$ (dicasi altrettanto).

$$35^\circ \sqrt[m]{(1+x)^2} - \sqrt[m]{(1-x)^2} = \sqrt[m]{1-x^2}$$

$$\left(\text{si prenda per incognita } z = \sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}} \right)$$

$$36^\circ \sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0$$

$$37^\circ 2x\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\left[\text{si osservi che è } x\sqrt[3]{x} = \left(x\sqrt[3]{\frac{1}{x}} \right)^2 \right]$$

$$38^\circ x^2 + \sqrt{5x+x^2} = 42 - 5x$$

(si prenda per incognita il radicale)

$$39^\circ \sqrt[2pq]{x^{p+q}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \left(\sqrt[p]{x} + \sqrt[q]{x} \right) = 0$$

$$\left(\text{si prenda per incognita } z = \frac{\sqrt[p]{x}}{\sqrt[q]{x}} \right)$$

40° Formare la somma dei quadrati, quella dei cubi, quella delle quarte potenze e quella delle inverse delle quarte potenze delle radici dell'equazione

$$ax^2+bx+c=0$$

(si osservi che è $(\xi_1+\xi_2)^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2$,

$(\xi_1+\xi_2)^3 = \xi_1^3 + \xi_2^3 + 3\xi_1\xi_2(\xi_1+\xi_2)$ ec., ec.).

41° Trovare le condizioni, perchè la frazione

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{A'x^2+B'x+C}$$

abbia sempre un medesimo valore, qualunque sia quello che si attribuisce alla x .

42° Scrivasi l'equazione di 2° grado, una cui radice è eguale a $\sqrt{a+b}$, ed il cui termine noto è eguale ad a^2-b .

43° Formare l'equazione le cui radici sono reciproche di quelle dell'equazione $ax^2+bx+c=0$.

44° Formare l'equazione le cui radici sono i quadrati di quelle dell'equazione $ax^2+bx+c=0$.

45° Formare l'equazioni le cui radici sono multiple di quelle dell'equazione $ax^2+bx+c=0$, secondo il numero K .

46° Che relazione vi deve essere tra $\left(\frac{b}{a}\right)$ e $\left(\frac{c}{a}\right)$ perchè sia $\xi_1 = 2\xi_2$, ξ_1 e ξ_2 essendo le due radici dell'equazione $ax^2+bx+c=0$?

47° Qual'è la condizione, perchè le due equazioni

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a'x^2+b'x+c'=0$$

abbiano una radice comune?

48° Per quale valore di m l'equazione

$$2x^2+8x+m=0$$

avrà le due radici eguali?

49° Dimostrare che le radici di $x^2+px+q=0$ saranno

razionali se è $p = K + \frac{q}{K}$, dove p , q , K sono

quantità qualunque razionali.

50° Per quali valori di x è soddisfatta la disuguaglianza

$$\frac{x+a}{\sqrt{a^2+x^2}} > \frac{x+b}{\sqrt{b^2+x^2}}$$

dove è $a > b$?



CAPITOLO XIV.

Equazioni biquadratiche.

173. Si consideri l'equazione biquadratica.

$$1) \quad ax^4 + bx^2 + c = 0$$

nella quale, come si vede, è solamente contenuta la 4^a e la 2^a potenza dell'incognita.

La risoluzione di un'equazione siffatta si fa dipendere da quella di una di 2° grado assumendo come incognita x^2 : cioè, si pone $x^2 = y$, onde $x^4 = y^2$: dimodochè la 1) diviene:

$$2) \quad ay^2 + by + c = 0$$

che è di 2° grado.

Essa ammette le due radici (166)

$$3) \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ y_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

sostituendo successivamente l'una e l'altra di queste in luogo di y nella $x^2 = y$, si ottiene

$$4) \quad \begin{aligned} x^2 = y_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x^2 = y_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

dalla 1^a delle quali, si hanno le due radici

$$5) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= +\sqrt{y_1} = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ x_2 &= -\sqrt{y_1} = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}; \\ x_3 &= +\sqrt{y_2} = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ x_4 &= -\sqrt{y_2} = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}; \end{aligned} \right.$$

ecco dunque, la 1) ammette le quattro radici date dalle formule 5).

Consideriamo separatamente i tre casi possibili rispetto alla quantità $b^2 - 4ac$.

1° Sia $b^2 - 4ac > 0$: y_1 e y_2 sono allora due numeri reali e disuguali; se sono anche ambedue positivi, i quattro valori x_1, x_2, x_3, x_4 saranno reali: se sono uno positivo, l'altro negativo, allora sono reali due dei valori di x , immaginari gli altri due; infine, se entrambi y_1 e y_2 sono negativi, allora i quattro valori x_1, x_2, x_3, x_4 saranno immaginari.

2° Sia $b^2 - 4ac = 0$: y_1 e y_2 in tal caso sono reali ed uguali a $-\frac{b}{2a}$; se b ed a hanno segni contrari, y_1 e y_2 sono positivi, epperò x_1, x_2, x_3, x_4 sono reali: se poi b ed a hanno il medesimo segno, y_1 e y_2 sono negativi, quindi x_1, x_2, x_3, x_4 sono immaginari.

3° Sia $b^2 - 4ac < 0$: y_1 e y_2 sono due numeri complessi coniugati (166); x_1, x_2, x_3, x_4 sono dunque numeri complessi, poichè (165, 3°) la radice quadrata di un numero complesso è sempre un numero complesso.

OSSERVAZIONE. Si è presentato qui il radicale della forma $\sqrt{A+\sqrt{B}}$: al n. 155 vedemmo come sia qualche volta possibile trasformare un simile radicale nella somma di due radicali semplici $\sqrt{M}+\sqrt{N}$.

Sistemi d'equazioni di grado superiore al primo.

174. Ci proponiamo di considerare un sistema di due equazioni, l'una di 1°, l'altra di 2° grado tra le due incognite x e y .

Un'equazione di 2° grado a due incognite x e y , ridotta che sia a forma razionale e intera rispetto alle medesime, non può contenere se non sei specie di termini: termini in x^2 , in y^2 , in xy , in x , in y e termini non contenenti nè x , nè y , cioè termini noti; dimodochè, raccogliendo quelli che sono simili, si potrà ridurla alla forma

$$1) \quad Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

Perciò assumeremo questa come forma generale per un'equazione di 2° grado a due incognite.

Le due equazioni componenti il sistema, che abbiamo detto di voler considerare, saranno dunque le due

$$2) \quad \begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F &= 0. \end{aligned}$$

La risoluzione di un tale sistema si fa nel modo seguente: si risolve l'equazione di 1° grado rispetto a una delle incognite, p. es. rispetto a y , e si ha

$$3) \quad y = -\frac{ax+c}{b}:$$

si sostituisca questa espressione in luogo di y nel-

l'equazione di 2° grado, la quale così diventa:

$$Ax^2 + B\left(-\frac{ax+c}{b}\right)^2 + Cy\left(-\frac{ax+c}{b}\right) + D\left(-\frac{ax+c}{b}\right) + Ey + F = 0$$

che contiene la sola incognita x ed è di 2° grado: eseguendo le operazioni in essa indicate e riducendo i termini simili, si ridurrà alla forma normale

$$4) \quad Mx^2 + Nx + P = 0.$$

Risolvendo questa, otterremo due valori di x , x_1 e x_2 ; sostituendo successivamente l'uno e l'altro di questi nella 3) si avrà un valore y_1 corrispondente a x_1 e uno y_2 corrispondente a x_2 . I due valori x_1, y_1 costituiscono una soluzione; i due x_2, y_2 ne costituiscono una seconda.

Il sistema 1) ha dunque due soluzioni.

Si riscontrano però talvolta dei sistemi che possono risolversi con l'aiuto di taluni particolari artifici, dei quali ci proponiamo di dare un esempio.

1° Sia il sistema

$$1) \quad \begin{aligned} x + y &= a \\ x^2 + y^2 &= b^2 \end{aligned}$$

Elevando a quadrato i due membri della 1°, e sottraendone poi rispettivamente quelli della 2°; si ha

$$2xy = a^2 - b^2;$$

in luogo del sistema 1) si consideri dunque l'altro:

$$2) \quad \begin{aligned} x + y &= a \\ xy &= \frac{a^2 - b^2}{2} \end{aligned}$$

Qui si vede che di x e y è nota la somma e il prodotto: x e y sono dunque le radici (169, 2°) del-

l'equazione :

$$z^2 - az + \frac{a^2 - b^2}{2} = 0$$

epperò si hanno le due soluzioni, l'una composta dei valori :

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}, \quad y_1 = \frac{a - \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$$

l'altra dei valori

$$x_2 = \frac{a - \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}, \quad y_2 = \frac{a + \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}.$$

175. In modo analogo a quello dianzi tenuto per un sistema di due, si risolve un sistema di n equazioni, una di 2° grado e le altre $n-1$ di 1°, tra n incognite.

Si risolvono le $n-1$ equazioni di 1° grado rispetto a $n-1$ delle incognite: indi si sostituiscono le espressioni trovate nell'equazione di 2° grado in luogo delle $n-1$ incognite medesime; l'equazione di 2° grado si riduce così a contenere una sola incognita. — Da essa si ricavano due valori per questa: portando poi successivamente l'uno e l'altro di questi due valori nelle espressioni che si hanno per le altre $n-1$ incognite, per ciascuna di esse si otterrà un valore corrispondente a ciascuno di quelli; così si avranno due soluzioni, ciascuna composta di n valori, uno per ogni incognita.

176. In generale non è possibile risolvere coll'Algebra Elementare un sistema di due equazioni tra due incognite, di grado ambedue superiore al 1°, e tanto meno un sistema di più di due equazioni tra le quali due almeno sieno di grado superiore al 1°.

Dato un tale sistema, l'eliminazione di tutte le incognite meno una conduce, almeno in generale, a una

equazione ad una incognita di grado superiore al 2° e quindi generalmente non risolvibile colle cognizioni dell'Algebra Elementare.

Talvolta però s'incontrano dei sistemi nei quali due equazioni almeno sono di grado superiore al 1°, e che si possono risolvere mediante particolari artifici, pei quali non si possono assegnare norme precise.

Diamone qualche esempio.

1° Sia il sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \\ xy &= b^2. \end{aligned}$$

Si moltiplichino ambo i membri della 2ª per 2 e si sommi membro a membro colla 1ª: si avrà

$$x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + 2b^2$$

cioè

$$(x+y)^2 = a^2 + 2b^2$$

onde

$$x+y = \pm \sqrt{a^2 + 2b^2}.$$

Così è trovata la somma delle incognite; il prodotto è dato: la questione è dunque ricondotta ad un caso già considerato (169, 2°).

2° Sia il sistema

$$x^2y + xy^2 = 30$$

1)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$$

o anche, mandando via i denominatori della seconda,

$$xy(x+y) = 30$$

$$y+x = \frac{5}{6}(xy).$$

Considerando xy e $x+y$ come due incognite u e v , avremo

$$uv = 30$$

$$6v = 5u.$$

La seconda dà $v = \frac{5}{6}u$; sostituendo questo valore nella prima, essa diviene

$$\frac{5}{6}u^2 = 30$$

ossia

$$u^2 = 36$$

onde si traggono due valori per u

$$u_1 = 6, \quad u_2 = -6$$

e quindi i valori corrispondenti di v sono:

$$v_1 = 5, \quad v_2 = -5.$$

Si ha dunque

$$x+y = 6$$

$$xy = 5$$

se si prendono per u e v i valori 6 e 5: si ha

$$x+y = -6$$

$$xy = -5$$

se si prendono per u e v i valori -6 e -5 . — In un caso e nell'altro si conosce la somma e il prodotto di x e y , si sa dunque trovare questi medesimi.

3° Sia ancora il sistema

$$x+y+z = a$$

$$1) \quad x^2+y^2+z^2 = b^2$$

$$yx = cz.$$

Se si elevano a quadrato i due membri della

1ª equazione, dopo aver fatto passare z nel 2º membro, si ha

$$x^2+y^2+2xy = a^2+z^2-2az$$

e se si sostituisce a x^2+y^2 e a xy i loro valori dedotti dalle altre due, si otterrà

$$2z^2-2(a+c)z+(a^2-b^2)=0$$

che ci darà due valori z_1 e z_2 per z . — Conoscendo z si avrà $x+y$ dalla 1ª equazione, xy dalla 3ª, e allora nel modo solito si troveranno x e y .

Risoluzione e discussione di alcuni problemi di grado superiore al primo.

177. Calcolare la profondità di un pozzo, conoscendo il tempo t decorso tra l'istante in cui si è lasciata cadere in esso una pietra, e quello in cui è stato inteso il romore fatto da questa pietra battendo nel fondo.

Per una legge fisica, lo spazio s , che un grave cadendo verticalmente percorre durante un tempo t , è espresso, astrazion fatta dalla resistenza dell'aria, colla formula

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

nella quale g è un numero costante che si dice l'*accelerazione della gravità* e che nelle nostre latitudini ha prossimamente il valore 9^m, 809. Onde chiamando x la profondità del pozzo, e θ il tempo impiegato dalla pietra ad arrivare al fondo sarà $x = \frac{1}{2} g \theta^2$, e quindi $\theta = \sqrt{\frac{2x}{g}}$. D'altra parte il suono si propaga con moto uniforme: e indicando con v la sua velocità, che è conosciuta, e con θ_1 il tempo impiegato dal suono a giungere dal fondo del pozzo all'orecchio dell'osservatore sarà $x = v \theta_1$, e quindi $\theta_1 = \frac{x}{v}$; ma deve essere

per dato

$$t = \theta + \theta_1,$$

dunque l'equazione del problema è

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v} = t$$

ed anche

$$1) \quad \sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v}.$$

Elevando a quadrato i due membri e riducendo, si trova:

$$2) \quad \frac{x^2}{v^2} - 2\left(\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right)x + t^2 = 0$$

la quale ha le radici

$$\xi_1 = \frac{\frac{t}{v} + \frac{1}{g} + \sqrt{\left(\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{t^2}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}}$$

$$\xi_2 = \frac{\frac{t}{v} + \frac{1}{g} - \sqrt{\left(\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{t^2}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}}.$$

Queste due radici sono reali, giacchè la quantità sotto il segno radicale è manifestamente positiva. — Si vede inoltre che sono ambedue positive, giacchè l'equazione presenta due variazioni (168). Intanto il problema non può ammettere che una sola soluzione, non potendo il pozzo avere due profondità differenti. — Si spiega questa singolarità osservando che i valori ξ_1 e ξ_2 sono le radici dell'equazione 2) e questa non è precisamente l'equazione del nostro problema; l'equazione del problema è la 1), e la 2) è più generale della 1);

essa è soddisfatta non solo quando lo è la 1), ma anche se lo è quest'altra

$$3) \quad t - \frac{x}{v} = -\sqrt{\frac{2x}{g}};$$

la 2) dunque equivale propriamente alla 1) e alla 3); e noi dobbiamo ricercare quale delle due radici ξ_1 e ξ_2 soddisfi alla 1). La 1) ci dice che deve essere

$$t - \frac{x}{v} > 0$$

ossia

$$\frac{x}{v} - t < 0$$

mentre la 3) richiede invece che sia

$$t - \frac{x}{v} < 0$$

cioè:

$$\frac{x}{v} - t > 0.$$

Ora si può scrivere

$$\xi_1 = v \left[t + \frac{v}{g} + \sqrt{\frac{v}{g} \left(\frac{v}{g} + 2t \right)} \right]$$

$$\xi_2 = v \left[t + \frac{v}{g} - \sqrt{\frac{v}{g} \left(\frac{v}{g} + 2t \right)} \right]$$

$$\frac{\xi_1}{v} - t = \frac{v}{g} + \sqrt{\frac{v}{g} \left(\frac{v}{g} + 2t \right)}$$

$$\frac{\xi_2}{v} - t = \frac{v}{g} - \sqrt{\frac{v}{g} \left(\frac{v}{g} + 2t \right)}$$

e poichè evidentemente è $\frac{v}{g} < \sqrt{\frac{v}{g} \left(\frac{v}{g} + 2t \right)}$ così $\frac{\xi_1}{v} - t$ è positivo, $\frac{\xi_2}{v} - t$ è negativo, epperò ξ_1 soddisfa

all'equazione 3), ξ_2 sodisfa all'equazione 1); la profondità del pozzo è dunque ξ_2 . — La radice ξ_1 è una soluzione prodotta dall'elevamento a quadrato della 1).

2° *Dividere una retta AB in due parti tali che il quadrato costruito sulla maggiore sia equivalente al rettangolo contenuto dalla parte minore e dall'intera retta.*

Sia a la lunghezza AB : indichiamo AX con x e quindi BX con $a-x$: avremo l'equazione

$$\begin{aligned} 1) \quad & x^2 = (a-x)a \\ \text{cioè} \quad & x^2 + ax - a^2 = 0 \end{aligned}$$

onde si hanno le radici

$$\xi_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

$$\xi_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{a}{2}(-1 - \sqrt{5}).$$

Come si vede, ambedue le radici sono reali, e poichè $\sqrt{5}$ è compresa tra 2 e 3, così è ξ_1 positivo, e minore di a : mentre ξ_2 è negativo e di un valore assoluto maggiore di a .

Il valore ξ_1 risponde dunque precisamente alla domanda dell'enunciato, perchè ci fa conoscere un punto compreso tra A e B , come è richiesto; l'altro valore ξ_2 è estraneo alla questione, come essa è proposta.

Si spiega in che modo esso è nato, osservando che mentre nell'enunciato si domanda propriamente un numero assoluto, nell'equazione non è poi riprodotta questa condizione.

L'equazione 1) è veramente la traduzione in linguaggio algebrico del seguente problema:

Sopra una retta indefinita dati due punti A e B con una distanza a fra di loro, determinare un punto X tale

che il quadrato costruito sulla distanza AX sia equivalente al rettangolo contenuto dalla retta AB data e dalla BX.

Essendo assurda l'ipotesi che il punto X si trovi a destra di B , perchè, per un notissimo teorema di geometria, è assurda allora la relazione

$$\text{quadrato di } AX = \text{rettangolo di } AB \text{ per } BX,$$

così rimangono solo le due ipotesi che il punto X si trovi tra A e B ovvero a sinistra di A .

Ora l'equazione

$$x^2 = a(a-x)$$

quando s'intenda che x (distanza AX) in essa rappresenti un numero algebrico qualsivoglia, conviene all'una come all'altra ipotesi.

Invero, se si considera la 1ª ipotesi, come si è fatto nell'enunciato primitivamente proposto, allora si è già veduto, che indicando con x un numero positivo, che rappresenta AX , l'equazione del problema è la precedente: se ora si considera la 2ª ipotesi, e si rappresenta (4) con un numero negativo $-x'$ la lunghezza AX a sinistra di A , l'equazione del problema è

$$(-x')^2 = a(a - (-x'))$$

la quale ricade nella precedente, se in luogo di $-x'$ si pone x .

Così è provato che l'equazione

$$x^2 = a(a-x)$$

dove x rappresenta un numero algebrico qualsivoglia corrisponde veramente al problema più generale dianzi enunciato; e dalle spiegazioni date si rivela immediatamente il significato da attribuirsi alle due radici tro-

vate; la radice positiva minore di a ci dà un punto X tra A e B : la radice negativa ci dà un punto X a sinistra di A .

Il problema generale ha così due soluzioni.

Esercizi.

Risolvere le equazioni:

$$1^a \quad cx = (\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)$$

(si pone $\sqrt{1+x} = z$)

$$2^a \quad (x+2)^2 + 2(x+2)\sqrt{x-3} = 46 + 2x$$

(si pone $x + \sqrt{x+2} = z$)

$$3^a \quad x^4 - 2x^3 + x^2 - 132 = 0$$

(si aggiunga e si tolga $x^2 - \frac{1}{4}$: si condurrà alla forma $\left[(x^2 - x) - \frac{1}{2}\right]^2 = \frac{529}{4}$)

$$4^a \quad (x^2+5)^2 - 4x^2 - 160 = 0$$

$$5^a \quad x^2 + \sqrt{x^2+11} - 31 = 0$$

$$6^a \quad x^n - 2ax^{\frac{n}{2}} - b^2 = 0$$

(si prenda per incognita $x^{\frac{n}{2}} = y$)

$$7^a \quad x(x-c)^2 = a(a-c)^2$$

(una radice è evidentemente $x = a$: il che prova che $x(x-c)^2 - a(a-c)^2$ è divisibile per $x-a$: le altre radici si troveranno eguagliando a zero il quoziente di tale divisione).

Risolvere le equazioni binomie:

$$8^a \quad x^3 - 1 = 0$$

(ammette la radice $x = 1$)

$$9^a \quad x^3 + 1 = 0$$

(si ponga $x = -y$)

$$10^a \quad x^4 - 1 = 0$$

$$[x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)]$$

$$11^a \quad x^4 + 1 = 0$$

(si aggiunga e si tolga $2x^2$)

$$12^a \quad x^6 - 1 = 0$$

$$[x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)]$$

$$13^a \quad x^6 + 1 = 0$$

(si ponga $x = y\sqrt{-1}$).

Risolvere le equazioni trinomie:

$$14^a \quad ax^6 + bx^3 + c = 0$$

(si ponga $x^3 = y$)

$$15^a \quad ax^8 + bx^4 + c = 0.$$

Risolvere:

$$16^a \quad \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x - \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x}{a}$$

(ammette la radice $x = a$)

$$17^a \quad x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$$

(ammette due volte la radice $x = 1$)

$$18^a \quad (a+x)^{\frac{1}{4}} + (a-x)^{\frac{1}{4}} = h$$

$$19^a \quad \frac{x+c+\sqrt{x^2-c^2}}{x+c-\sqrt{x^2-c^2}} = \frac{9(x+c)}{8c}$$

(si osservi che se è $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$, è anche $\frac{a-b}{b} = \frac{p-q}{q}$,

$\frac{a-b}{b} = \frac{p-q}{q}$, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{p+q}{p-q}$: si applichi quest'ul-

tima formula alla proposta, che si presenta appunto come eguaglianza di due quozienti)

- 20^a Esprimere sotto forma di somma di due irrazionali semplici le radici dell' equazione

$$4x^4 - 2ax^2 + b^2 = 0$$

- 21^a Simile trasformazione per le radici dell' equazione

$$4x^4 - 4(1+n^2)a^2x^2 + n^2a^4 = 0.$$

Risolvere i sistemi d' equazioni :

$$22^a \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{b^2}$$

(si prendano per incognite $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$)

$$23^a \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad x + y = b$$

(si prendano per incognite $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$)

$$24^a \quad x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ xy = b^2$$

(si sommino membro a membro)

$$25^a \quad \frac{xy}{z} = q, \quad \frac{xz}{y} = q', \quad \frac{yz}{x} = q''$$

(si moltiplichino due a due)

$$26^a \quad x(y+z) = p, \quad y(x+z) = p', \quad z(x+y) = p''$$

(si trovano xy , xz , yz);

$$27^a \quad a^n x^m + b^m y^n = 2(ax)^{\frac{n}{2}} \cdot (by)^{\frac{n}{2}} \\ xy = ab$$

(si elimina y ; indi si pone $\sqrt{x^{m+n}} = z$)

$$28^a \quad x + y = a, \quad x^3 + y^3 = d^3$$

[si osservi che $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$]

$$29^a \quad x + y = a, \quad x^4 + y^4 = d^4$$

(si trovi $x^4 + y^4$ espresso per $x+y$ e per xy)

$$30^a \quad x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{5}} = 35, \quad x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{5}} = 5$$

(si prendano per incognite $x^{\frac{1}{4}}$ e $y^{\frac{1}{5}}$: si è condotti al sistema 28°)

$$31^a \quad \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{61}{\sqrt{xy}} + 1, \quad \sqrt{x^3 y} + \sqrt{xy^3} = 78$$

(si prendano per incognite $x+y$ e xy)

$$32^a \quad x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{20}{x+y}, \quad x^2 + y^2 = 34$$

$$33^a \quad (x+y)(xy+1) = 18xy$$

$$(x^2+y^2)(x^2y^2+1) = 208x^2y^2$$

(si divide la 1^a equazione per xy , la 2^a per x^2y^2 : poi si prendono per incognite $u = x + \frac{1}{x}$ e $v = y + \frac{1}{y}$)

$$34^a \quad \sqrt{x^2 + \sqrt{x^3 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt{x^3 y^2}} = a \\ x + y + 3\sqrt{bxy} = b$$

(La 1^a equazione può scriversi $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \sqrt{a^2}$; la 2^a si trova inalzando a cubo i due membri di quest' altra $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{b}$, si prendano poi per incognite $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$)

$$35^a \quad x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} = a$$

$$x^3 + x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} + y^3 = b$$

(La 2^a si può scrivere $(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})^2 = b + x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}$, la 1^a

dà $x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} = a - x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}$; si confrontino, ec.)

$$36^a \quad \frac{x^2+xy+y^2}{x+y} = a, \quad \frac{x^2-xy+y^2}{x-y} = b$$

(si osservi che è

$$x^2+xy+y^2 = \frac{x^3-y^3}{x-y}, \quad x^2-xy+y^2 = \frac{x^3+y^3}{x+y})$$

$$37^a \quad x+y+z = 13$$

$$x^2+y^2+z^2 = 61$$

$$2yz = x(z+y)$$

$$38^a \quad x^3-y^3-3y(x-y) = 0$$

$$3x^2-2xy-y^2 = 0$$

(in ciascuna equazione si può mettere in evidenza un fattore $(x-y)$: il sistema è dunque soddisfatto per $x=y$, ec., ec.).

Problemi.

1° Che lunghezza ha la diagonale di un quadrato il cui perimetro è eguale a 100 metri?

2° Due punti, partiti simultaneamente dal vertice di un angolo retto, ne percorrono i lati. Uno percorre metri 4, 5 al minuto e l'altro 6. Dopo quanti minuti i punti avranno una distanza di 300 metri?

3° Trovare un numero di due cifre tale, che diviso pel prodotto di queste due cifre, dia per quoziente $5 + \frac{1}{3}$, e che diminuito di 9, divenga eguale al numero che si ottiene rovesciando le sue cifre.

4° Trovare un numero di tre cifre tale che il quadrato della seconda cifra sia eguale al prodotto delle altre due, che il quoziente di esso diviso per la somma delle sue cifre sia eguale a $\frac{124}{7}$ e che aumentato di

594 divenga eguale al numero che si ottiene rovesciando le sue cifre.

5° Un viaggiatore parte da un punto B per andare ad un punto C mentre un altro viaggiatore parte dal punto C per andare verso il punto B . Ciascuno cammina con velocità costante. Queste due velocità sono tali che il 1° giunge in C quattro ore dopo che si sono incontrati, e il 2° arriva in B , nove ore dopo questo incontro. Qual è il quoziente delle due velocità?

(Si indichino con x e y le velocità, con d la distanza BC , con z la distanza dal punto B al punto d'incontro; si troveranno le equazioni

$$\frac{z}{x} = \frac{d-z}{y}, \quad \frac{d-z}{x} = 4, \quad \frac{z}{y} = 9).$$

6° Nel mezzo di una piazza, lunga 70 metri e larga metri 52, 5 si vuol tracciare un rettangolo, che abbia una superficie eguale alla metà di quella della piazza ed i cui lati sieno egualmente distanti da quelli della piazza. Quali dimensioni devono dare al rettangolo?

7° Le ruote minori di una carrozza, mentre questa percorre 120 metri, fanno sei giri più delle maggiori. Se la circonferenza delle une e delle altre fosse un metro più lunga, a percorrere la stessa strada, le prime farebbero soltanto 4 giri più che le seconde. Trovare la circonferenza delle ruote.

8° Calcolare i lati di un triangolo rettangolo ABC conoscendo la differenza d dei due cateti e la differenza δ dei due segmenti BD , DC determinati sulla ipotenusa dalla perpendicolare condotta dal vertice A dell'angolo retto.

9° Decomporre la frazione $\frac{1}{4}$ in due fattori la cui

somma sia eguale ad

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

10° Trovare le condizioni, perchè la frazione

$$\frac{Ax^2 + Bx + C}{A'x^2 + B'x + C'}$$

abbia un valore indipendente da x .

11° Se è

$$\frac{Ax^2 + Bx + C}{A'x^2 + B'x + C'} = \frac{Ay^2 + By + C}{A'y^2 + B'y + C'} = \frac{Az^2 + Bz + C}{A'z^2 + B'z + C'}$$

due dei numeri x, y, z saranno eguali, a meno che non sia

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

(prendendo due a due quelle espressioni si hanno tre equazioni; si riducono ad avere per secondo membro 0: si vedrà che il 1° membro avrà un fattore $x-y$, o $x-z$, o $z-y$; se è nullo uno di questi, allora è provata la 1ª parte dell'enunciato: se nessuno lo è, dovrà esser nullo per ciascuna equazione l'altro fattore del 1° membro: ciò porterà all'ultima condizione, osservando che in un'equazione di 1° grado $ax+b=0$, che ammette più di una radice, deve essere $a=0, b=0$).

12° Determinare le condizioni, perchè la frazione

$$\frac{Ay^2 + Byx + Cx^2 + Dx + Ey + F}{A'y^2 + B'yx + C'x^2 + D'x + E'y + F'}$$

abbia un valore indipendente da x e da y .

13° Decomporre un numero a nella somma di due parti, il cui prodotto sia massimo.

(Indichi x una delle parti, $a-x$ sarà l'altra: si chiami p il prodotto $x(a-x)$: la condizione perchè

le radici dell'equazione

$$x(a-x) = p$$

sieno reali, ci condurrà a trovare quand'è che è massimo p).

14° Decomporre un numero a nel prodotto di due fattori la cui somma sia minima.

(Metodo analogo al precedente).

15° Trovare qual è il valore minimo che può assumere l'espressione $\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}$, a essendo costante e x variabile.

(Si osservi che è $\frac{a+x}{a-x} \cdot \frac{a-x}{a+x} = 1$).

16° Qual'è l'area del massimo di tutti i rettangoli che hanno lo stesso perimetro n ?

17° Fra tutti i quadrati che possono inscrivere in un quadrato dato in modo che ciascun lato contenga un vertice, qual è il più piccolo?

(Quello che ha per vertice i punti medii dei lati del quadrato dato).

18° Trovare tra quali limiti può variare il trinomio ax^2+bx+c , quando si danno ad x tutti i possibili valori reali.

(Si indichi con m il valore di ax^2+bx+c ; la condizione perchè le radici in x dell'equazione $ax^2+bx+c=m$ sieno reali, ci condurrà a trovare il massimo e il minimo di m).

19° Due corpi si muovono colle velocità costanti v e v' sopra due rette tagliantisi ad angolo retto, verso il punto d'intersezione, e la loro distanza da questo sono a e b . Quando si troveranno alla minima distanza l'uno dall'altro?

(Si chiami d la distanza a cui si trovano dopo il tempo t ; si avrà $d^2 = (a-vt)^2 + (b-v't)^2$; la condizione,

perchè le radici di questa equazione in t sieno reali, darà il minimo di d).

20° Dal vertice di un angolo retto partono sui lati del medesimo, n secondi uno prima dell'altro, due mobili con costanti velocità; t secondi dopo la partenza del secondo la loro distanza è d metri, e t' secondi dopo la stessa partenza la loro distanza è d' metri. Calcolare le velocità dei due corpi.

21° Dati due cerchi, uno interno all'altro, trovare sulla linea dei centri un punto tale che le distanze del medesimo, dai due punti dove le circonferenze sono intersecate da una stessa perpendicolare alla linea dei centri, divise l'una per l'altra diano un quoziente costante, comunque varii la posizione della perpendicolare.

(Sia R il raggio del circolo esterno, r il raggio del circolo interno, d la distanza dei centri: si chiami y la distanza tra il centro del circolo interno e il piede della perpendicolare sulla linea dei centri, x la distanza tra il centro medesimo e il punto cercato, la domanda dell'enunciato porta a questo, che la frazione

$$\frac{R^2 - (d+y)^2 + (x-y)^2}{r^2 - y^2 + (x-y)^2}$$

abbia un valore indipendente da y ; per questo veggasi l'esercizio 10).

22° Condizioni, perchè sia soddisfatta, qualunque sieno x e y , la disuguaglianza

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F > 0$$

(se A è positivo, si scrive

$$Ay^2 + y(Bx + D) + (Cx^2 + Ex + F):$$

perchè questo trinomio sia positivo per tutti i possi-

bili valori di y e di x , bisogna (171) che abbia per radici in y numeri complessi, qualunque sia x : cioè per ogni valore di x deve essere soddisfatta la disuguaglianza

$$(Bx + D)^2 - 4A(Cx^2 + Ex + F) > 0$$

ec. ec.).

23° Calcolare i cateti di un triangolo rettangolo, conoscendo l'ipotenusa a e l'altezza h abbassata dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa.

24° Data la somma q delle aree di due rettangoli, la somma a delle loro basi, e le aree p e p' di due rettangoli che abbiano la base dell'uno e l'altezza dell'altro, trovare le dimensioni di questi rettangoli.

25° Trovare due numeri la cui differenza dei loro quadrati dia per risultato il numero 117 e la cui somma, moltiplicata per la somma dei loro quadrati, dia per prodotto 1157.

(Si prendano per incognite la somma e la differenza dei numeri cercati).

CAPITOLO XV.

Funzione esponenziale.

178. È stato (n° 70, 146, 148) definito il significato del simbolo a^x per qualunque valore razionale e irrazionale di a , numero positivo, e per ogni valore razionale di x ; e si sa che a^x ha un unico valore positivo, se x è un numero intero; se poi è $x = \frac{p}{q}$, p e q essendo due numeri interi, a^x ha un unico valore positivo, ovvero due valori differenti pel segno, secondo che q è dispari o pari.

Basta, per ciò, rammentare la formula $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, e quello che riguardo ai radicali è stato detto al n. 137.

Noi converremo qui di considerare sempre il solo valore positivo che l'espressione a^x ammette per qualsiasi valore razionale di x : dimodochè ad ogni valore di x corrispondendo così un unico e determinato valore all'espressione a^x , questa sarà, secondo il noto concetto (82), *funzione* della x : ben s' intende che alla x si potranno solo attribuire valori razionali: cioè, la funzione a^x è definita per ora per i soli valori razionali della variabile.

In tutto questo capitolo a indica sempre un numero positivo.

Vogliamo ora studiare le proprietà di questa funzione a^x : il che ci condurrà naturalmente a stabilire un significato pel simbolo medesimo a^x nel caso che x rappresenti un numero irrazionale.

179. Una potenza ad esponente positivo di un numero positivo è maggiore dell'unità, se il numero considerato è maggiore dell'unità: è minore dell'unità, sempre però maggiore di zero, se il numero stesso è minore dell'unità.

Si consideri il numero a positivo e la potenza a^h , dove h è un numero positivo. — Se h è intero, allora è

$$a^h = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_h$$

ed è evidente che questo prodotto è maggiore dell'unità, se è $a > 1$: è minore dell'unità, sempre però positivo, se è $a < 1$. — Se h è frazionario $\frac{p}{q}$, p e q essendo numeri interi, allora è

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

e se è $a > 1$, cioè $a^p > 1$, sarà $\sqrt[q]{a^p} > 1$, poichè è $(\sqrt[q]{a^p})^q = a^p$ e quindi $(\sqrt[q]{a^p})^q > 1$; e secondo quello che abbiamo detto, solamente un numero che è maggiore dell'unità può, elevato a un esponente intero q , produrre un numero maggiore dell'unità: se invece è $a < 1$, cioè $a^p < 1$, sarà $\sqrt[q]{a^p} < 1$, perchè, per la ragione già detta, solamente un numero minore dell'unità può, elevato a un esponente intero q , produrre un numero minore dell'unità.

180. Una potenza ad esponente negativo di un numero positivo è minore dell'unità, se il numero considerato è maggiore dell'unità; è maggiore dell'unità, se il numero stesso è minore dell'unità.

Sia a il numero e a^{-h} la potenza a esponente negativo che si considera: è

$$a^{-h} = \frac{1}{a^h}$$

e questa formula, in virtù della proposizione precedente, mostra che, sia h intero o frazionario, la potenza a^{-h} è minore dell'unità, quando è $a > 1$: è maggiore dell'unità, quando è $a < 1$.

181. La funzione a^x cresce o decresce al crescere della variabile x , secondochè è $a > 1$, ovvero $a < 1$.

Si attribuiscono alla x successivamente due valori p e q razionali, e sia $q > p$: i valori corrispondenti della funzione a^x saranno a^p, a^q .

Si consideri il quoziente del primo pel secondo: si ha

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q},$$

ma $p-q$ è negativo, per ipotesi: quindi, per la proposizione precedente, a^{p-q} è minore dell'unità, epperò $a^p < a^q$, se è $a > 1$: a^{p-q} è maggiore dell'unità, epperò $a^p > a^q$ se è $a < 1$. — Ora l'essere $a^p < a^q$ significa che a^x cresce, mentre la variabile x cresce passando dal valore p al valore q : l'essere $a^p > a^q$ significa che a^x decresce, mentre la x cresce dal valore p al valore q .

Ciò prova la proposizione enunciata.

OSSERVAZIONE. Se si forma la serie di potenze

$$\alpha) \quad a^{n_1}, a^{n_2}, a^{n_3}, \dots$$

dove $n_1, n_2, n_3, \dots$ sono numeri razionali positivi o negativi che soddisfano alla relazione

$$\beta) \quad n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

dalla proposizione ora dimostrata deriva che i termini, che s'incontrano percorrendo, a partire da uno qualunque, la serie $\alpha)$ anzidetta da sinistra a destra, vanno crescendo se è $a > 1$, epperò vanno decrescendo quelli che s'incontrano percorrendo la serie da destra a sini-

stra: se invece è $a < 1$, accade il contrario: decrescono quelli che s'incontrano andando da sinistra a destra, crescono quelli che s'incontrano andando nel verso opposto.

Pongasi ora che la serie di numeri razionali

$$\beta) \quad \dots < n_1, < n_2, < n_3, < \dots$$

si prolunghi indefinitamente a destra e a sinistra sino a oltrepassare da una parte qualsiasi numero positivo assegnabile, dall'altra qualsiasi numero negativo assegnabile.

La serie delle potenze di a

$$\alpha) \quad \dots a^{n_1}, a^{n_2}, a^{n_3}, \dots$$

aventi per esponenti i numeri della serie precedente presi nell'ordine in cui sono disposti in questa, si prolungherà essa pure indefinitamente da una parte e dall'altra, avendo però sempre i suoi termini tutti positivi; e se è $a > 1$, percorrendo la serie medesima nel verso da sinistra a destra si perverrà a trovare un termine che sarà, esso e tutti i successivi, maggiore di qualsiasi numero positivo assegnato grande ad arbitrio: percorrendola nel verso opposto, si perverrà a incontrarne uno che sarà, esso e tutti i successivi, minore di qualsivoglia numero positivo assegnato piccolo a piacere.

La 1ª parte di questa proposizione discende immediatamente da quanto fu detto al n. 128; infatti, fu ivi mostrato che, essendo $a > 1$, potevasi elevare a a un esponente intero k tale da produrre a^k maggiore di un numero positivo ω grande ad arbitrio; ora, nella serie dei numeri $\beta)$, per ipotesi, si troverà andando da sinistra a destra, un numero n , che sia, esso e tutti i successivi, maggiore di k : allora, per la proposizione (181) sopra dimostrata, è

$$a^n > a^k$$

onde segue

$$a^{n_s} > \omega;$$

si trova dunque nella serie β) un termine a^{n_s} maggiore di ω , comunque grande sia scelto questo ω . A più forte ragione ne saranno maggiori i termini successivi ad a^{n_s} .

La 2ª parte poi deriva subito dall'osservare che percorrendo la serie da destra a sinistra s'incontrano le potenze ad esponente negativo, e per queste si ha la formula

$$a^{-h} = \frac{1}{a^h};$$

denoti σ un numero positivo piccolo a piacere: affinché sia

$$a^{-h} < \sigma$$

basta che sia

$$\frac{1}{a^h} < \sigma$$

cioè

$$a^h > \frac{1}{\sigma}$$

e per questa, come dianzi abbiamo veduto, per quanto grande sia $\frac{1}{\sigma}$, si troverà sempre un valore positivo h che la verifichi.

Nel caso poi in cui è $a < 1$ accade il contrario: procedendo da sinistra a destra nella serie α) si perverrà sempre a trovare un termine, che sia, esso e tutti i successivi, minore di qualsivoglia numero positivo assegnato piccolo a piacere: e procedendo da destra a sinistra si perverrà sempre a trovarne uno, che sia, esso e tutti i successivi, maggiore di qualsivoglia numero positivo assegnato comunque grande.

Ciò appare manifesto se si riflette che un numero positivo a minore dell'unità, può porsi sotto la forma

$$a = \frac{1}{a'}$$

dove a' è un numero maggiore dell'unità, e in conseguenza la serie α) si trasforma nell'altra

$$\alpha') \dots \frac{1}{a'^{n_1}}, \frac{1}{a'^{n_2}}, \frac{1}{a'^{n_3}}, \dots;$$

e poichè per la serie di potenze

$$\dots a'^{n_1}, a'^{n_2}, a'^{n_3}, \dots$$

sussiste la proposizione dimostrata dianzi, così segue subito che per la $\alpha')$ sussiste la proposizione ultima enunciata.

182. Se alla variabile x si attribuiscono successivi valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

i quali tendono al limite 0, contemporaneamente la funzione a^x assume i valori

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots$$

i quali tendono al limite 1.

Per mostrare che la funzione a^x tende al limite 1, quando alla x si attribuiscono successivamente i valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

aventi per limite 0, è necessario e sufficiente (125) far vedere che il valore assoluto della differenza $a^x - 1$, può ridursi minore di qualsivoglia numero positivo σ assegnato piccolo a piacere. — Mostriamo dunque, che dando alla x successivamente i valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

si perviene sempre a incontrarne uno tale, che, per esso e per tutti i successivi, sia verificata la doppia disuguaglianza

$$-\sigma < a^x - 1 < \sigma$$

ovvero l'altra equivalente

$$\varepsilon) \quad 1 - \sigma < a^x < 1 + \sigma.$$

Ora perchè lo sia questa, è sufficiente che, tra i valori che si danno alla x , si pervenga a trovarne uno tale, ¹ che per ciascuno di quelli, tra i valori successivi ad esso, che sono positivi, sia soddisfatta la disuguaglianza

$$\gamma) \quad (1 - \sigma)^{\frac{1}{x}} < a < (1 + \sigma)^{\frac{1}{x}} :$$

per ciascuno di quelli, che sono negativi, lo sia invece l'altra

$$\delta) \quad (1 - \sigma)^{\frac{1}{x}} > a > (1 + \sigma)^{\frac{1}{x}}.$$

Invero, se per un certo valore positivo x_s della x è verificata la γ), cioè se si ha

$$(1 - \sigma)^{\frac{1}{x_s}} < a < (1 + \sigma)^{\frac{1}{x_s}},$$

da questa, elevando all'esponente positivo x_s i numeri positivi $1 - \sigma$, a , $1 + \sigma$, si trae l'altra

$$1 - \sigma < a^{x_s} < 1 + \sigma$$

che è appunto la ε) soddisfatta dal valore $x = x_s$.

¹ Circa ai valori $x_1, x_2, x_3, \dots$ essendosi fatta semplicemente l'ipotesi che essi tendano al limite 0. è solo richiesto (124) per ciò, che i valori assoluti di essi decrescano indefinitamente e del resto i segni possono essere qualunque. — Se si suppone che i numeri $x_1, x_2, x_3, \dots$ sieno tutti del medesimo segno, la dimostrazione diviene un poco più semplice, ma cessa di esser generale.

Se poi per un valore negativo $-x'_r$, dato alla x è verificata la δ), cioè si ha

$$(1 - \sigma)^{-\frac{1}{x'_r}} > a > (1 + \sigma)^{-\frac{1}{x'_r}},$$

si osservi che questa può scriversi

$$\frac{1}{(1 - \sigma)^{\frac{1}{x'_r}}} > \frac{a}{1} > \frac{1}{(1 + \sigma)^{\frac{1}{x'_r}}}$$

e questa equivale all'altra

$$(1 - \sigma)^{\frac{1}{x'_r}} < \frac{1}{a} < (1 + \sigma)^{\frac{1}{x'_r}}$$

dalla quale, elevando all'esponente positivo x'_r i numeri positivi $1 - \sigma$, a , $1 + \sigma$, si deduce l'altra:

$$1 - \sigma < \frac{1}{a^{x'_r}} < 1 + \sigma$$

che può scriversi

$$1 - \sigma < a^{-x'_r} < 1 + \sigma :$$

e questa è appunto la ε) soddisfatta pel valore $-x'_r$, dato alla x .

È dunque dimostrato, che se tra i valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

se ne trova uno tale, che per ciascuno dei valori successivi ad esso e positivi sia soddisfatta la relazione

$$\gamma) \quad (1 - \sigma)^{\frac{1}{x}} < a < (1 + \sigma)^{\frac{1}{x}}$$

e per ciascuno dei negativi lo sia invece l'altra

$$\delta) \quad (1 - \sigma)^{\frac{1}{x}} > a > (1 + \sigma)^{\frac{1}{x}},$$

allora da ciò si deduce subito, che per tutti indistin-

tamente i valori successivi a quello menzionato, è verificata la relazione

$$\varepsilon) \quad 1 - \sigma < a^x < 1 + \sigma.$$

Ora, che effettivamente nella serie dei valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

se ne trovi uno tale, che per ciascuno di quelli successivi ad esso sia verificata o la γ) o la δ), lo si vede riflettendo, che i numeri anzidetti, tendendo al limite 0, descomponono indefinitamente in valore assoluto, e perciò il numero $\frac{1}{x}$, che va assumendo i valori $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots$ reciproci di quelli, cresce indefinitamente in valore assoluto; e, rammentando il contenuto dell'Osservazione precedente, si trae subito la conseguenza che da uno di essi in poi i valori di $\frac{1}{x}$ saranno certamente tali, che per ciascuno di quelli che sono positivi sarà verificata la γ), per ciascuno di quelli che sono negativi lo sarà invece la δ), epperò sempre o l'una o l'altra.

E con ciò è dimostrata la proposizione enunciata.

183. È vera anche la reciproca: cioè, se, attribuendo alla x successivi valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

contemporaneamente la funzione a^x assume i valori

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots$$

che tendono al limite 1, i valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

tenderanno al limite 0.

Qui si ha dunque per ipotesi, che mentre la x assume i valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

la differenza $a^x - 1$ diviene in valore assoluto minore di qualsivoglia numero positivo σ assegnato piccolo a piacere: dando ad x quei valori, si perverrà dunque a trovare verificata da un certo valore in poi, la relazione

$$-\sigma < a^x - 1 < \sigma$$

ovvero l'altra

$$\varepsilon) \quad 1 - \sigma < a^x < 1 + \sigma.$$

Ora perchè lo sia questa, è necessario che lo sia l'una o l'altra delle due precedenti relazioni γ) o δ), cioè, per un valore positivo di x lo deve essere la γ) per uno negativo lo deve essere la δ).

Invero, se per un valore positivo x , della x è soddisfatta la ε), cioè, se si ha $1 - \sigma < a^x < 1 + \sigma$, elevando all'esponente $\frac{1}{x}$ i numeri positivi $1 - \sigma$, a^x , $1 + \sigma$, ne deriva l'altra

$$(1 - \sigma)^{\frac{1}{x}} < a < (1 + \sigma)^{\frac{1}{x}}$$

cioè, è soddisfatta la γ) per lo stesso valore x , di x .

Se poi la ε) è verificata per un valore negativo $-x'$, della x , cioè se si ha

$$1 - \sigma < a^{-x'} < 1 + \sigma$$

ovvero

$$1 - \sigma < \frac{1}{a^{x'}} < 1 + \sigma,$$

questa equivale all'altra

$$\frac{1}{1 - \sigma} > a^{x'} > \frac{1}{1 + \sigma},$$

dalla quale, elevando all'esponente positivo $\frac{1}{x'_r}$ i numeri positivi $\frac{1}{1-\sigma}$, $a^{x'_r}$, $\frac{1}{1+\sigma}$, si trae *necessariamente* l'altra

$$\frac{1}{(1-\sigma)^{\frac{1}{x'_r}}} > a > \frac{1}{(1+\sigma)^{\frac{1}{x'_r}}}$$

e questa può scriversi

$$(1-\sigma)^{-\frac{1}{x'_r}} > a > (1+\sigma)^{\frac{1}{x'_r}}$$

la quale appunto è la δ) medesima, in cui ad x si è sostituito $-x'_r$.

Così è provato, che il verificarsi della relazione γ) per un valore positivo della x , o il verificarsi della δ) per uno negativo, è condizione *necessaria*, affinchè per i medesimi valori della x sia soddisfatta la ϵ).

Ora affinchè, come richiede la γ), la potenza $(1+\sigma)^{\frac{1}{x}}$ ad esponente positivo $\frac{1}{x}$ del numero $1+\sigma > 1$

divenga maggiore, e quella $(1-\sigma)^{\frac{1}{x}}$ collo stesso esponente $\frac{1}{x}$ del numero $1-\sigma < 1$ divenga minore del numero a , che è un numero dato comunque, manifestamente, pel contenuto dell'Osservazione precedente, bisognerà che l'esponente $\frac{1}{x}$ quando x va assumendo quelli tra i valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

che sono positivi, possa divenire grande quanto si vuole: parimente affinchè, come richiede la δ), la po-

tenza $(1+\sigma)^{\frac{1}{x}}$ ad esponente negativo $\frac{1}{x}$ del numero $1+\sigma > 1$ divenga minore, e quella $(1-\sigma)^{\frac{1}{x}}$ del numero $1-\sigma < 1$ collo stesso esponente $\frac{1}{x}$ divenga maggiore del numero a , qualunque questo sia, bisognerà pure che l'esponente $\frac{1}{x}$, quando x va assumendo quelli tra i valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

che sono negativi, possa divenire grande quanto si vuole in valore assoluto; per conseguenza, affinchè, da un certo valore di x in poi, sia sempre verificata l'una o l'altra delle due γ), o δ), i valori

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \dots$$

che va assumendo l'esponente $\frac{1}{x}$, dovranno andare crescendo indefinitamente in valore assoluto: epperò i numeri

$$x_1, x_2, x_3,$$

dovranno andar decrescendo indefinitamente in valore assoluto, cioè avere per limite 0: il che è quanto si voleva dimostrare.

184. Se si attribuiscono alla variabile x successivi valori razionali

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

che tendono ad un limite h determinato e finito, contemporaneamente la funzione a^x assume i valori

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots$$

che tendono ad un limite H determinato e finito.

Poichè i numeri

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

tendono a un limite h , così (126, 134) se ne troverà sempre uno tale che la differenza tra esso e uno qualunque dei successivi sia in valore assoluto piccola quanto si vuole. — Mostriamo che la stessa proprietà sussiste pei numeri

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots$$

Invero, si consideri la differenza $a^{x_n} - a^{x_{n+r}}$, dove a^{x_n} indica uno qualunque dei numeri precedenti e $a^{x_{n+r}}$ è uno qualunque dei successivi ad esso. Se si pone

$$x_n - x_{n+r} = \delta$$

si ha

$$\begin{aligned} a^{x_n} - a^{x_{n+r}} &= a^{x_{n+r} + \delta} - a^{x_{n+r}} \\ &= a^{x_{n+r}} \cdot a^{\delta} - a^{x_{n+r}} \cdot 1 \\ &= a^{x_{n+r}} \cdot (a^{\delta} - 1). \end{aligned}$$

Ora, poichè i valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

tendono a un limite *finito* h , $a^{x_{n+r}}$ non può, qualunque sia x_{n+r} , superare un certo numero finito: la δ , come osservammo a principio, scegliendo convenientemente x_n , può ridursi in valore assoluto piccola quanto si vuole, epperò, per la proposizione (182) antecedente, la differenza $a^{\delta} - 1$ potrà divenire parimente piccola quanto si vuole in valore assoluto, e così il prodotto $a^{x_{n+r}} (a^{\delta} - 1)$ (prop. 8^a. Teoria dei limiti) potrà pure ridursi in valore assoluto piccolo quanto si vuole; è così provato che tra i numeri

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots$$

se ne può trovare uno tale che la differenza tra esso e uno qualunque dei successivi sia in valore assoluto piccola quanto si vuole. — In virtù del teorema del n. 134 si conclude che i numeri medesimi

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots$$

tendono a un limite H determinato e finito.

Il che è quanto si voleva dimostrare.

185. È vera anche la reciproca, cioè, se attribuendo alla x successivamente i valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

i valori corrispondenti

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots$$

della funzione a^x tendono a un limite determinato H , i valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

debbono pure tendere a un limite determinato h .

Per ipotesi qui si ha, che nella serie di numeri

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots$$

se ne trova uno a^{x_n} tale la differenza $a^{x_n} - a^{x_{n+r}}$ tra esso e uno qualunque $a^{x_{n+r}}$ dei successivi sia, in valore assoluto, minore di qualsiasi numero positivo assegnato comunque piccolo. — Ma se si pone

$$x_n = x_{n+r} + \delta$$

si ha

$$\begin{aligned} a^{x_n} - a^{x_{n+r}} &= a^{x_{n+r} + \delta} - a^{x_{n+r}} \\ &= a^{x_{n+r}} (a^{\delta} - 1); \end{aligned}$$

ora, poichè i numeri

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots$$

hanno un limite H , che ha un determinato valore po-

sitivo, saranno, da uno in poi, tutti maggiori di un certo numero positivo: epperò si può supporre che a^{x_n+r} , qualunque sia x_{n+r} , superi un certo numero positivo: dal che segue, che (prop. 9^a. Teoria dei limiti) dovrà la differenza $a^\delta - 1$ essere essa, in valore assoluto, piccola quanto si vuole; e ciò richiede (prop. 183) che sia δ piccolo quanto si vuole.

Tra i numeri

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

se ne trova dunque uno x_n tale che la differenza δ tra esso e uno qualunque x_{n+r} dei successivi, è piccola quanto si vuole. — I numeri medesimi dunque (126, 134) ammettono un limite determinato h come si voleva provare.

186. Qui si presenta un'osservazione importante. Si distinguano i due casi, che il limite h dei valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

che si danno alla x , sia razionale, ovvero sia irrazionale.

Se h è razionale, allora se si pone

$$x = h + \delta$$

si ha

$$\begin{aligned} a^x - a^h &= a^{h+\delta} - a^h \\ &= a^h \cdot a^\delta - a^h \cdot 1 \\ &= a^h (a^\delta - 1) \end{aligned}$$

e quando la x assumendo i successivi valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

si approssima al suo limite h , contemporaneamente la δ si approssima a 0, il che ci mostra che la differenza $a^\delta - 1$, e quindi anche l'altra $a^x - a^h$ diviene in va-

lore assoluto piccola quanto si vuole: ciò prova che la funzione a^x ha per limite a^h , e poichè, per una variabile vi può essere un limite solo, deve essere dunque $H = a^h$.

Si enuncia quindi la proposizione:

Se la variabile x assume successivi valori che tendono a un limite h razionale, contemporaneamente la funzione a^x tende al limite a^h .

E reciprocamente, se dando alla x i successivi valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

la funzione a^x ha per limite una potenza di a ad esponente razionale a^h , necessariamente la x , assumendo quei valori, deve tendere al limite h .

Si faccia, invero

$$x = h + \delta:$$

sarà

$$\begin{aligned} a^x - a^h &= a^{h+\delta} - a^h \\ &= a^h (a^\delta - 1). \end{aligned}$$

La differenza $a^x - a^h$, mentre x assume i valori anzidetti, per ipotesi, tende al limite 0; a^h essendo costante, bisognerà dunque che tenda a 0 la differenza $a^\delta - 1$ (7^a prop., Teoria dei limiti) e perchè questo accada, δ deve avere (prop. 183) per limite 0: se δ ha per limite 0, x ha per limite h , come si voleva dimostrare.

187. Ma, come (184) dianzi vedemmo, un limite determinato H per la funzione a^x esiste sempre quando la x tenda a un limite determinato h , e quindi anche nel caso in cui la x assuma valori aventi un limite h irrazionale; se non che il limite H , che sarà un numero positivo razionale o irrazionale, in questo caso non può, come nel caso precedente, essere presentato nella forma

di una potenza di a : perchè noi conosciamo sin qui solamente potenze ad esponente razionale, e quando la variabile x tende a un limite irrazionale h , il limite H di a^x non può essere una potenza di a ad esponente razionale, perocchè, se fosse, allora la x (prop. 186) dovrebbe avere per limite questo esponente razionale.

Or dunque, allo scopo di raggiungere la massima generalità e semplicità nelle forme algebriche, si è naturalmente condotti a pensare in qual modo si possa, anche nel caso ora menzionato in cui i valori della variabile x tendano a un limite irrazionale h , presentare il limite H dei valori corrispondenti della funzione a^x , nella forma di una potenza di a .

Ciò si ottiene facendo una nuova estensione, oltre quella già fatta ai n° 78 e 146, del significato della parola *potenza*: converremo di chiamare *potenza del numero* a (a positivo, poichè qui consideriamo solo numeri positivi) *coll'esponente irrazionale* h , il numero H *limite dei valori che la funzione* a^x *assume, quando alla variabile* x *si attribuiscono successivamente i valori razionali*

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

aventi per limite h : e a rappresentare questo numero-limite H introdurremo il simbolo a^h .

In conseguenza di questa definizione si può enunciare in modo più generale la prop. del n. 186, dicendo:

Se la variabile x *assume successivi valori razionali, che tendono a un limite* h , *razionale o irrazionale, contemporaneamente la funzione* a^x *tende al limite* a^h .

Manifestamente è vera anche la reciproca.

188 A questo modo noi abbiamo definito il significato del simbolo a^h , per qualsiasi valore positivo di a e per ogni valore positivo o negativo, razionale o irrazionale di h .

Dobbiamo però far vedere che le regole di calcolo (148) stabilite per le potenze ad esponente *razionale* valgono anche per quelle ad esponente *irrazionale*, che ora abbiamo introdotte.

Per brevità, ci limiteremo a dar qui la dimostrazione di una sola di queste regole.

Dimostreremo che *il prodotto di due potenze della stessa base con esponenti irrazionali qualunque, è quella potenza della base, che ha per esponente la somma degli esponenti di quelle.*

Sieno h ed h' definiti come limiti rispettivi delle serie di numeri razionali

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, \dots \\ x'_1, x'_2, x'_3, \dots; \end{aligned}$$

si vuol provare che è

$$a^h \cdot a^{h'} = a^{h+h'};$$

si osservi che per definizione a^h è il limite dei valori

$$\alpha) \quad a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots;$$

e $a^{h'}$ è il limite dei valori

$$\beta) \quad a^{x'_1}, a^{x'_2}, a^{x'_3}, \dots$$

e si consideri il prodotto $a^h \cdot a^{h'}$; esso è (prop. 11^a. Teoria dei limiti) il limite della serie di prodotti

$$\gamma) \quad a^{x_1} a^{x'_1}, a^{x_2} a^{x'_2}, a^{x_3} a^{x'_3}, \dots$$

ottenuti moltiplicando ordinatamente i numeri $\alpha)$ pei numeri $\beta)$. Ma i numeri $\gamma)$, poichè gli esponenti in essi sono razionali, possono scriversi

$$\gamma) \quad a^{x_1+x'_1}, a^{x_2+x'_2}, a^{x_3+x'_3}, \dots$$

e questi, per la prop. del n. 187 antecedente hanno per

limite $a^{h+h'}$, perchè la serie dei numeri

$$x_1 + x'_1, \quad x_2 + x'_2, \quad x_3 + x'_3, \dots$$

ha per limite (135, 2°) il numero $h + h'$; per conseguenza, potendo la serie di numeri γ) avere un solo limite, deve essere

$$a^h \cdot a^{h'} = a^{h+h'}$$

il che è quanto volevasi dimostrare.

Con ragionamenti analoghi a questo si dimostrerebbero vevoli per esponenti irrazionali anche tutte le altre regole enunciate al n. 148.

189. Ma si può inoltre aggiungere che tutte le proprietà dimostrate in questo stesso capitolo dal n. 179 al n. 187 per le potenze ad esponente razionale sussistono pure per le potenze ad esponente irrazionale.

Intanto si osservi, che le proposizioni 179 e 180 si deducono immediatamente dalla stessa definizione di potenza ad esponente irrazionale.

Sia h un numero irrazionale definito come limite della serie di numeri razionali

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \dots$$

allora a^h (a positivo) è il limite dei numeri

$$a^{x_1}, \quad a^{x_2}, \quad a^{x_3}, \dots$$

Sia h positivo: ciò significa che, da uno in poi, i numeri $x_1, x_2, x_3, \dots$ sono (134) tutti positivi: epperò (179) i numeri positivi

$$a^{x_1}, \quad a^{x_2}, \quad a^{x_3}, \dots$$

da uno in poi, saranno tutti maggiori dell'unità se è $a > 1$, saranno tutti minori dell'unità, se è $a < 1$; dalchè segue che a^h , *limite dei numeri medesimi*, sarà maggiore dell'unità se è $a > 1$: sarà minore, se è $a < 1$

Ecco dunque la proposizione n. 179 dimostrata vera per una potenza ad esponente irrazionale.

Sia h negativo: i numeri $x_1, x_2, \dots$, da uno in poi, saranno tutti negativi: epperò (180) i numeri positivi

$$a^{x_1}, \quad a^{x_2}, \dots,$$

da uno in poi, saranno tutti minori dell'unità, se è $a > 1$: tutti maggiori, se è $a < 1$: il numero a^h , *limite di essi*, è dunque minore dell'unità se è $a > 1$, maggiore, se è $a < 1$.

Il che mostra vera la proposizione n. 180 per una potenza ad esponente irrazionale.

Premesso ciò, si osservi, che nelle dimostrazioni delle proposizioni che seguono dal n. 181 al n. 187, la condizione che le potenze, che in esse si considerano, sieno ad esponente razionale, non è veramente mai invocata come condizione necessaria; il ragionamento, che ivi si fa, è fondato unicamente sulle regole del calcolo per le potenze e sulle proprietà contenute nelle proposizioni 179 e 180.

Ma si è già veduto, che così queste due proposizioni come le anzidette regole di calcolo sussistono per potenze ad esponente qualunque; perciò quelle dimostrazioni si potrebbero identicamente ripetere anche se in esse si prendessero in considerazione potenze ad esponente irrazionale. Si deve dunque ritenere che le proposizioni dei n. 181 e seguenti sino al n. 187, valgano per potenze ad esponente qualunque, cioè, razionale o irrazionale.

190. Riassumendo quanto siamo venuti esponendo in questo capitolo, noi abbiamo dunque, che ad ogni valore reale di x corrisponde, in virtù delle definizioni poste, un unico valore reale determinato dell'espressione a^x , dove a è un numero positivo, dimodochè

questa espressione a^x è ora una funzione definita per tutti i possibili valori reali della x . — Nel calcolo essa va soggetta a delle regole, applicabili senza eccezione, che sono espresse dalle formule seguenti:

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$$

delle quali veramente tre sole, cioè la 1^a, la 3^a e la 5^a, sono distinte, potendosi la 2^a, la 4^a e la 6^a far rientrare rispettivamente nella 1^a, 3^a e 5^a.

Inoltre la funzione medesima ha le proprietà contenute nelle seguenti proposizioni:

1^a Per qualsiasi valore positivo o negativo di x , il valore della a^x è sempre positivo: se x ha un valore positivo, a^x ha un valore maggiore dell'unità se è $a > 1$: minore, se è $a < 1$; se x ha un valore negativo, a^x ha un valore minore dell'unità se è $a > 1$: maggiore, se è $a < 1$.

2^a La funzione a^x cresce, al crescere dell'esponente x , se è $a > 1$: decresce, se è $a < 1$. Inoltre (Osservazione n. 181) se è $a > 1$, a^x cresce sino a superare qualsiasi numero positivo assegnato comunque grande, quando alla x si danno successivi valori crescenti indefinitamente: decresce sino a divenire minore di qualsiasi numero positivo assegnato comunque piccolo, quando

alla x si danno successivi valori decrescenti indefinitamente, cioè, sino a divenire minori di qualsiasi numero negativo assegnabile. — Se poi è $a < 1$, accade il contrario: a^x decresce sino a divenire minore di qualsiasi numero positivo assegnato comunque piccolo, quando x cresce indefinitamente: cresce sino a superare qualsiasi numero positivo assegnabile, quando x decresce indefinitamente.

Si vede dunque, che in un caso come nell'altro si può, dando alla x tutti i valori possibili da $-\infty$ a $+\infty$, fare acquistare alla a^x valori maggiori di qualsiasi numero positivo comunque grande, e valori minori di qualsiasi numero positivo comunque piccolo.

3^a Se alla x si danno successivi valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

che tendono a un limite h , i valori corrispondenti

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots$$

della funzione a^x tendono a un limite determinato H , che è eguale ad a^h : reciprocamente se, dando alla x i successivi valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

i valori corrispondenti

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots$$

della funzione a^x tendono a un limite determinato e finito H , i valori

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

debbono pure tendere a un limite determinato e finito h : e sarà $H = a^h$.

OSSERVAZIONE. Per la ragione che, se si danno alla x successivi valori $x_1, x_2, x_3, \dots$ i quali succedendosi con una legge qualunque tendono a un limite h ,

i valori corrispondenti

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots$$

della funzione a^x sempre tendono al limite a^h , che è il valore particolare che la funzione a^x prende quando si dà ad x il valore h , si dice che la funzione a^x è *continua pel valore h di x* : e poichè qui h è un numero qualunque, così si dee dire che a^x è *funzione continua di x per qualsiasi valore reale che si voglia assegnare a questa*.

Equazione esponenziale. — Logaritmi.

191. Per quello che abbiamo veduto precedentemente, se si indica con y la funzione a^x , cioè, se si pone

$$y = a^x,$$

dove a è supposto positivo, ad ogni valore reale di x corrisponde un unico valore reale determinato della y , che, come è noto, è sempre positivo.

Inversamente, ci si può ora far la domanda: *è possibile dare alla x un valore, o più generalmente, valori tali, che per ciascuno di essi la y assuma un valore assegnato b ?*

Ciò si traduce in linguaggio algebrico dicendo che si domanda, *se esistano valori di x , che soddisfino la relazione*

$$1) \quad a^x = b$$

la quale chiamasi *equazione esponenziale*.

Noi ci proponiamo ora di rispondere a questa domanda nel caso che b , come lo è a , sia un numero positivo. — Proveremo che esiste sempre, nell'ipotesi ora detta che a e b sieno positivi, a però diverso dall'unità, un valore reale della x e solamente uno, atto

a soddisfare l'equazione 1): e il processo, che adoperemo per ciò, come si vedrà, sarà anche idoneo a determinare effettivamente siffatto valore della x : dimodochè nel medesimo tempo che si proverà l'esistenza di una soluzione per l'equazione 1), sarà anche indicata la via per trovare effettivamente questa soluzione.

Anzitutto però è utile far qui un'osservazione.

Dicemmo al n. 131, che l'elevazione a potenza ammette due equazioni inverse: l'estrazione di radice e la ricerca di logaritmo. Ci occupammo allora della prima e per togliere le *impossibilità*, che essa presentava, introducemmo i numeri irrazionali, e in seguito per avere le radici quadrate dei numeri negativi, i numeri immaginari. Ora, occupandoci della risoluzione dell'equazione esponenziale, noi, in sostanza, non facciamo altro se non occuparci della seconda delle anzidette operazioni inverse.

La risoluzione dell'equazione esponenziale è, o meglio comprende in sè la ricerca di logaritmo, alla quale accennammo al n. 131.

Infatti ivi si è chiamata *ricerca di logaritmo* l'operazione per la quale, dati b ed a , si trova il numero n tale che sia

$$b = a^n$$

ed è precisamente in questo, che consiste la risoluzione dell'equazione esponenziale, dimodochè, secondo il concetto posto al n. 131, si può dire che la risoluzione dell'equazione

$$a^x = b$$

è l'operazione per la quale dati i numeri positivi a e b si trova il *logaritmo di b nella base a* , chiamandosi logaritmo di b nella base a il valore di x che soddisfa l'equazione medesima.

Però la ricerca di logaritmo, come qui è intesa, è più generale di quella della quale intendevasi parlare al n. 131. — L'elevazione a potenza, considerata allora, era l'elevazione ad esponente intero: e la ricerca di logaritmo, una delle due operazioni inverse ad essa; ora invece, noi abbiamo l'elevazione ad esponente *reale* qualunque, e la ricerca di logaritmo, che si considera, è l'operazione inversa a questa; non vi è più dunque pel logaritmo la condizione di dovere essere un numero intero; esso può essere un numero reale qualunque.

E si noti che mentre l'elevazione ad esponente intero ammette effettivamente due operazioni inverse, l'elevazione ad esponente reale qualunque, intesa nella sua generalità, ammette, almeno *formalmente*, una sola operazione inversa, *la ricerca di logaritmo*. — Perocchè l'estrazione di radice d'indice h (h qualunque), cioè l'operazione per la quale dati i numeri b ed h si vuol trovare il numero a tale che sia $b = a^h$, si riduce ad un'elevazione a potenza, cioè ad elevare il numero b all'esponente $\frac{1}{h}$ poichè è

$$b^{\frac{1}{h}} = a.$$

Perciò, mentre l'estrazione di radice d'indice intero non rientra nell'elevazione ad esponente intero, dimodochè, quando si considera questa, si hanno effettivamente due operazioni inverse ad essa, quando poi si considera nella sua generalità l'elevazione ad esponente reale qualunque si ha una sola operazione inversa, *la ricerca di logaritmo*; l'altra, *l'estrazione di radice* è, come già dicemmo al n. 148 in certo modo sparita dalla scienza, o meglio è divenuta, in virtù delle convenzioni poste, un'elevazione a potenza.

192. Premesso ciò, torniamo al nostro soggetto, che è la risoluzione dell'equazione

$$1) \quad a^x = b$$

ovvero, la ricerca del logaritmo di b nella base a .

Primieramente mostriamo che non può esistere mai, più di un valore che sodisfi la 1).

Pongasi, se è possibile, che ne esistano due h e k : si avrebbe

$$b = a^h \quad \text{e} \quad b = a^k,$$

dividendo l'una per l'altra, membro a membro, si ottiene

$$1 = a^{h-k}$$

la quale, essendo a diverso dall'unità, non può essere vera a meno che non sia

$$h - k = 0$$

cioè

$$h = k.$$

Ciò prova quanto dicemmo.

Ora considerando prima il caso che sia $a > 1$ e $b > 1$, dimostriamo che una soluzione della 1) esiste sempre.

Immaginiamo di dare successivamente alla x i valori della serie

$$0, 1, 2, 3, \dots:$$

la funzione a^x prenderà rispettivamente i valori

$$1, a^1, a^2, a^3, \dots$$

che, come i precedenti, formano una serie illimitata.

Si confrontino questi valori della funzione a^x col numero b , o meglio si percorra la serie precedente di potenze di a a partire dall'unità verso destra; se si rammenta la proposizione 2ª (n. 190) si vede subito

che dovrà accadere uno di questi due casi: o una delle potenze che s'incontrano, è precisamente eguale a b : ovvero, se non si trova una potenza di a eguale a b , si perverrà a incontrarne una, che per la prima supera b , e allora la precedente a questa sarà minore di b , e si avranno così due potenze consecutive di a che comprendono b .

Per conseguenza, o si ha

$$b = a^{n_1}$$

n_1 essendo un numero intero positivo, e allora n_1 è il valore che sodisfa la 1), cioè il logarimo di b nella base a , ed è provato così ciò che si voleva; ovvero si ha

$$\alpha) \quad a^{n_1} < b < a^{n_1+1}.$$

In quest'ultimo caso si deve concludere che il valore di x che sodisfa la 1), se esiste, deve essere compreso tra n_1 ed $n_1 + 1$, cioè deve essere

$$n_1 < x < n_1 + 1,$$

si potrà dunque porre

$$x = n_1 + \frac{1}{y}$$

dove y rappresenta un numero positivo maggiore dell'unità; e allora la

$$a^x = b$$

diviene

$$a^{n_1 + \frac{1}{y}} = b$$

ovvero

$$a^{n_1} \cdot a^{\frac{1}{y}} = b$$

onde

$$a^{\frac{1}{y}} = \frac{b}{a^{n_1}}$$

cioè

$$2) \quad a = \left(\frac{b}{a^{n_1}} \right)^y$$

Questa è l'equazione a cui deve sodisfare il numero y , e poichè è $b > a^{n_1}$, e quindi $\frac{b}{a^{n_1}} > 1$, si vede che essa è della stessa natura della 1).

Per determinare y si ripeterà dunque il processo precedente: poichè è $a > 1$, si formano le potenze successive ad esponente intero positivo.

$$\left(\frac{b}{a^{n_1}} \right)^0, \left(\frac{b}{a^{n_1}} \right)^1, \left(\frac{b}{a^{n_1}} \right)^2, \dots$$

di $\frac{b}{a^{n_1}}$: o se ne troverà una eguale ad a , ovvero due consecutive, che la comprendono.

Se si trova

$$\left(\frac{b}{a^{n_1}} \right)^{n_2} = a$$

ecco, che allora è $y = n_2$, e quindi $x = n_1 + \frac{1}{n_2}$, se poi si trova

$$\left(\frac{b}{a^{n_1}} \right)^{n_2} < a < \left(\frac{b}{a^{n_1}} \right)^{n_2+1}$$

allora è

$$n_2 < y < n_2 + 1$$

e quindi

$$n_1 + \frac{1}{n_2} > x > n_1 + \frac{1}{n_2+1}$$

epperò

$$\beta) \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2}} > b > a^{n_1 + \frac{1}{n_2+1}}$$

Si porrà in tal caso

$$y = n_2 + \frac{1}{z}$$

dove z indica un numero positivo maggiore dell'unità.

Sostituendo nella 2) questo valore di y , essa diviene

$$\left(\frac{b}{a^{n_1}}\right)^{n_2} + \frac{1}{z} = a$$

$$\left(\frac{b}{a^{n_1}}\right)^{n_2} \cdot \left(\frac{b}{a^{n_1}}\right)^{\frac{1}{z}} = a$$

onde

$$\left(\frac{b}{a^{n_1}}\right)^{\frac{1}{z}} = \frac{a}{\left(\frac{b}{a^{n_1}}\right)^{n_2}}$$

ovvero

$$\frac{b}{a^{n_1}} = \left[\frac{a}{\left(\frac{b}{a^{n_1}}\right)^{n_2}} \right]^z$$

Questa è l'equazione, a cui deve soddisfare z , e poichè è $a > \left(\frac{b}{a^{n_1}}\right)^{n_2}$, e quindi $\frac{a}{\left(\frac{b}{a^{n_1}}\right)^{n_2}} > 1$, così si

vede che essa è della stessa natura della 1) e della 2).

Adoperando lo stesso processo, troveremo dunque

$$z = n_3$$

n_3 numero intero, ovvero due interi consecutivi che comprendono z , cioè

$$n_3 < z < n_3 + 1:$$

se è $z = n_3$, allora è $y = n_2 + \frac{1}{n_3}$ e quindi

$$x = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}$$

ed è trovato il valore che si cerca.

Se poi è

$$n_3 < z < n_3 + 1$$

allora ne segue

$$n_2 + \frac{1}{n_3} > y > n_2 + \frac{1}{n_3 + 1}$$

e

$$n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}} < x < n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + 1}}$$

e in conseguenza

$$\gamma) \quad \frac{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}}{a} < b < \frac{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + 1}}}{a}$$

In tal caso si porrà

$$z = n_3 + \frac{1}{u}$$

e in modo analogo a quello tenuto per y e per z si troverà

$$u = n_4$$

essendo n_4 un numero intero, ovvero due interi consecutivi che comprendono u , cioè

$$n_4 < u < n_4 + 1.$$

Si vede, che con questo processo o si trova che uno dei numeri x , o y , o z , o u , ec., ec., è un numero intero, ovvero può accadere che per quanto si prolunghi il processo medesimo non si trovi mai alcuno dei numeri x , o y , o z , ec., ec., che sia intero.

Se si trova che uno dei numeri x , o y , o z , ec., ec., è intero, allora è determinato il numero x , cioè, si ha:

$$x = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots + \frac{1}{n_4}}}$$

e si vede che esso è un numero razionale.

Reciprocamente, se esiste un numero razionale $\frac{r}{t}$, dove r e t sono interi, che soddisfa alla 1), il processo precedente ci condurrà sempre a determinarlo.

Invero, si osservi che il detto processo consiste in sostanza, nel determinare successivamente la parte intera di ciascuno dei numeri x , y , z , ec., ec., e perciò il processo medesimo ha fine quando si trova uno di questi, che sia intero. — Ora quando x deve essere un numero razionale $\frac{r}{t}$, accadrà sempre che uno dei numeri y , o z , ec., se non lo è x medesimo, sia intero.

Ed ecco, come ciò si prova.

Colla 1^a operazione, che si fa nel processo anzidetto, si determinerà la parte intera n_1 di $\frac{r}{t}$: ora si noti che si può scrivere

$$\frac{r}{t} = n_1 + \frac{r_1}{t}$$

r_1 essendo il resto della divisione di r per t : ovvero anche

$$\frac{r}{t} = n_1 + \frac{1}{\left(\frac{t}{r_1}\right)},$$

e $\left(\frac{t}{r_1}\right)$ è il numero che sopra è indicato con y .

Colla 2^a operazione si determina la parte intera n_2 di $\frac{t}{r_1}$: si potrà scrivere

$$\frac{t}{r_1} = n_2 + \frac{r_2}{r_1}$$

r_2 resto della divisione di t per r_1 : e anche si può

porre

$$\frac{t}{r_1} = n_2 + \frac{1}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$$

e $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$ sta qui in luogo del numero z precedente, ec., ec., si vede dunque che si è condotti a trovare successivamente la parte intera di ciascuno dei numeri $\frac{r}{t}$, $\frac{t}{r_1}$, $\frac{r_1}{r_2}$, ec.: questi sono i quozienti esatti delle divisioni successive che si fanno quando si cerca il massimo comune divisore r e t : uno di essi dunque è necessariamente intero. — Il che è quanto si voleva provare.

Consideriamo ora l'altro caso in cui accade che, per quanto si prolunghi il processo dianzi esposto, non si trova mai uno dei numeri x , o y , o z , ec., ec., che sia intero; allora si hanno, come si è veduto, le relazioni

$$\begin{aligned} a^{n_1} &< b < a^{n_1+1} \\ a^{n_1+\frac{1}{n_2}} &> b > a^{n_1+\frac{1}{n_2+1}} \\ a^{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3}}} &< b < a^{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+1}}} \\ &\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{aligned}$$

in numero indefinito.

I due esponenti di a che compariscono in una qualunque di esse in generale hanno, come si vede, la forma

$$n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots + \frac{1}{n_{i-1} + \frac{1}{n_i}}}}$$

e

$$n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots + \frac{1}{n_{s-1} + \frac{1}{n_s + 1}}}}$$

rispettivamente.

Ora si vuole dimostrare, che la differenza tra queste due espressioni può, in valore assoluto, ridursi indefinitamente piccola, se il numero s dei numeri $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$, aumenta indefinitamente.

Si ponga

$$\alpha_1 = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots + \frac{1}{n_s}}}, \quad \beta_1 = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots + \frac{1}{n_s + 1}}}$$

$$\alpha_2 = n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots + \frac{1}{n_s}}, \quad \beta_2 = n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots + \frac{1}{n_s + 1}}$$

$$\alpha_3 = n_3 + \frac{1}{n_4 + \dots + \frac{1}{n_s}}, \quad \beta_3 = n_3 + \frac{1}{n_4 + \dots + \frac{1}{n_s + 1}}$$

.....

$$\alpha_{s-1} = n_{s-1} + \frac{1}{n_s}, \quad \beta_{s-1} = n_{s-1} + \frac{1}{n_s + 1}$$

$$\alpha_s = n_s, \quad \beta_s = n_s + 1.$$

Si ha manifestamente

$$\alpha_1 - \beta_1 = \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\beta_2} = \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\alpha_2 \beta_2}$$

$$\alpha_2 - \beta_2 = \frac{1}{\alpha_3} - \frac{1}{\beta_3} = \frac{\beta_3 - \alpha_3}{\alpha_3 \beta_3}$$

.....

$$\alpha_{s-1} - \beta_{s-1} = \frac{1}{\alpha_s} - \frac{1}{\beta_s} = \frac{\beta_s - \alpha_s}{\alpha_s \beta_s}$$

$$\beta_s - \alpha_s = 1.$$

Moltiplicando membro a membro le prime $s-1$ di queste uguaglianze, si ha

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) \dots (\alpha_{s-1} - \beta_{s-1}) = \\ & = \frac{(\beta_2 - \alpha_2)(\beta_3 - \alpha_3) \dots (\beta_{s-1} - \alpha_{s-1})(\beta_s - \alpha_s)}{\alpha_2 \dots \alpha_s \beta_2 \dots \beta_s} \\ & = \frac{(-1)^{s-2}(\alpha_2 - \beta_2)(\alpha_3 - \beta_3) \dots (\alpha_{s-1} - \beta_{s-1})}{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_s \beta_2 \beta_3 \dots \beta_s} \end{aligned}$$

e sopprimendo i fattori comuni ai due membri, se ne deduce

$$\alpha_1 - \beta_1 = \frac{(-1)^{s-2}}{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_s \beta_2 \beta_3 \dots \beta_s}$$

La differenza tra i due esponenti α_1, β_1 è dunque una frazione, che ha per numeratore $+1$, o -1 secondo che s è pari o dispari, e per denominatore un prodotto di $2(s-1)$ fattori, ciascuno dei quali è maggiore dell'unità perchè i numeri $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ come gli altri $\beta_2, \beta_3, \dots$ sono maggiori rispettivamente di $n_2, n_3, \dots$ e questi, essendo le parti intere rispettive dei numeri $y, z, \dots$ sono almeno eguali all'unità.

È dunque manifesto, che la differenza $\alpha_1 - \beta_1$, al crescere indefinito di s , cioè del numero dei numeri $n_1, n_2, \dots, n_s$, diviene in valore assoluto piccola quanto si vuole.

Contemporaneamente diverrà tale anche la differenza $a^{\alpha_1} - a^{\beta_1}$, perchè, se si pone

$$\alpha_1 - \beta_1 = \delta$$

si ha

$$\begin{aligned} a^{\alpha_1} - a^{\beta_1} &= a^{\beta_1 + \delta} - a^{\beta_1} \\ &= a^{\beta_1} (a^{\delta} - 1) \end{aligned}$$

e mentre il fattore a^{β_1} non può crescere indefinitamente perchè non cresce indefinitamente il suo esponente β_1 , l'altro fattore $a^{\delta} - 1$ all'impiccolire indefinito di δ , diviene (prop. 182) piccolo quanto si vuole in fattore assoluto.

Ma il numero b è sempre compreso tra a^{α_1} e a^{β_1} : dunque ciascuna delle due differenze $b - a^{\alpha_1}$, $b - a^{\beta_1}$ è in valore assoluto minore della differenza $a^{\alpha_1} - a^{\beta_1}$: epperò, al crescere indefinito di s ciascuna delle due $b - a^{\alpha_1}$, $b - a^{\beta_1}$ diviene piccola quanto si vuole in valore assoluto: b è dunque il limite comune a cui tendono le potenze a^{α_1} , a^{β_1} al crescere indefinito di s ; così è dimostrato, che prolungando indefinitamente il processo sopra esposto per la determinazione del valore di x atto a soddisfare la 1), se non si trova un valore x_0 razionale tale che renda

$$a^{x_0} = b.$$

si formano però due serie di potenza di a , ad esponenti razionali, l'una

$$a^{n_1}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2}}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}}, \quad \dots$$

l'altra

$$a^{n_1 + 1}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2 + 1}}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + 1}}}, \quad \dots$$

ciascuna delle quali ha per suo limite il numero b .

Riassumendo, noi abbiamo dimostrato che se il numero b non è potenza ad esponente razionale del numero a , è però il limite di serie di potenze di a ad esponenti razionali, che è sempre possibile costruire col processo dianzi esposto.

Ora, in virtù della prop. 3^a, n. 190, se le potenze

$$a^{n_1}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2}}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}}, \quad \dots$$

tendono, come si è provato, a un limite b , anche gli esponenti

$$n_1, \quad n_1 + \frac{1}{n_2}, \quad n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}, \quad \dots$$

debbono pure tendere ad limite determinato h ; ma se questi numeri

$$n_1, \quad n_1 + \frac{1}{n_2}, \quad n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}, \quad \dots$$

tendono a un limite h , le potenze

$$a^{n_1}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2}}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}}, \quad \dots$$

tendono (prop. 3^a, n. 190) al limite a^h : deve dunque essere

$$a^h = b$$

esiste dunque il numero determinato h che soddisfa la 1); e giacchè a per dato non è potenza ad esponente razionale di a , così h è un numero irrazionale definito come limite delle serie di numeri razionali

$$n_1, \quad n_1 + \frac{1}{n_2}, \quad n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}, \quad \dots$$

determinati successivamente dal processo esposto.

si ha

$$\begin{aligned} a^{\alpha_1} - a^{\beta_1} &= a^{\beta_1 + \delta} - a^{\beta_1} \\ &= a^{\beta_1} (a^{\delta} - 1) \end{aligned}$$

e mentre il fattore a^{β_1} non può crescere indefinitamente perchè non cresce indefinitamente il suo esponente β_1 , l'altro fattore $a^{\delta} - 1$ all'impiccolire indefinito di δ , diviene (prop. 182) piccolo quanto si vuole in fattore assoluto.

Ma il numero b è sempre compreso tra a^{α_1} e a^{β_1} : dunque ciascuna delle due differenze $b - a^{\alpha_1}$, $b - a^{\beta_1}$ è in valore assoluto minore della differenza $a^{\alpha_1} - a^{\beta_1}$: epperò, al crescere indefinito di s ciascuna delle due $b - a^{\alpha_1}$, $b - a^{\beta_1}$ diviene piccola quanto si vuole in valore assoluto: b è dunque il limite comune a cui tendono le potenze a^{α_1} , a^{β_1} al crescere indefinito di s ; così è dimostrato, che prolungando indefinitamente il processo sopra esposto per la determinazione del valore di x atto a soddisfare la 1), se non si trova un valore x_0 razionale tale che renda

$$a^{x_0} = b.$$

si formano però due serie di potenza di a , ad esponenti razionali, l'una

$$a^{n_1}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2}}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}}, \quad \dots$$

l'altra

$$a^{n_1 + 1}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2 + 1}}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + 1}}}, \quad \dots$$

ciascuna delle quali ha per suo limite il numero b .

Riassumendo, noi abbiamo dimostrato che se il numero b non è potenza ad esponente razionale del numero a , è però il limite di serie di potenze di a ad esponenti razionali, che è sempre possibile costruire col processo dianzi esposto.

Ora, in virtù della prop. 3^a, n. 190, se le potenze

$$a^{n_1}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2}}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}}, \quad \dots$$

tendono, come si è provato, a un limite b , anche gli esponenti

$$n_1, \quad n_1 + \frac{1}{n_2}, \quad n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}, \quad \dots$$

debbono pure tendere ad limite determinato h ; ma se questi numeri

$$n_1, \quad n_1 + \frac{1}{n_2}, \quad n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}, \quad \dots$$

tendono a un limite h , le potenze

$$a^{n_1}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2}}, \quad a^{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}}, \quad \dots$$

tendono (prop. 3^a, n. 190) al limite a^h : deve dunque essere

$$a^h = b$$

esiste dunque il numero determinato h che soddisfa la 1); e giacchè a per dato non è potenza ad esponente razionale di a , così h è un numero irrazionale definito come limite delle serie di numeri razionali

$$n_1, \quad n_1 + \frac{1}{n_2}, \quad n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}, \quad \dots$$

determinati successivamente dal processo esposto.

Si conclude dunque: l'equazione esponenziale

$$a^x = b$$

dove a e b sono numeri maggiori dell'unità ammette sempre una sola soluzione che è positiva e della quale, mediante il processo precedentemente esposto, si sa sempre determinare il valore esatto, se essa è un numero razionale, si sa invece determinare un valore tanto approssimato quanto si vuole, se essa è un numero irrazionale.

193. Rimane che consideriamo il caso in cui a e b non sono ambedue maggiori dell'unità. — Si può sempre allora trasformare l'equazione

$$1) \quad a^x = b$$

in un'altra che soddisfa a questa condizione.

Infatti, sia $a > 1$ e $b < 1$.

Si risolverà col metodo precedente l'equazione

$$a^x = \frac{1}{b}$$

dove a e $\frac{1}{b}$ sono ambedue maggiori dell'unità: si troverà un numero positivo: questo numero preso col segno —, soddisfarà alla 1).

Sia $a < 1$ e $b > 1$.

Si risolverà l'equazione

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = b$$

dove $\frac{1}{a}$ e b sono ambedue maggiori dell'unità: il valore positivo che così si trova, preso col segno —, soddisfarà alla 1).

Infine, sia $a < 1$ e $b < 1$; si risolverà l'equazione

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{b}$$

e il valore x che si trova per questa, soddisfa evidentemente anche alla 1).

Calcolo con logaritmi.

194. Dati i numeri a e b positivi esiste sempre, come si è veduto, un solo numero h razionale o irrazionale tale che per esso sia soddisfatta la

$$a^x = b.$$

Questo numero h , come già fu detto, si chiama *logaritmo di b nella base a* , il che si indica scrivendo $h = \log_a b$; e poichè ad ogni valore assegnato al numero b , supposto questo variabile, corrisponde un unico e determinato valore di x , così si può dire che x è funzione del numero b .

Se è $a > 1$, ad un numero $b > 1$, corrisponde un logaritmo positivo: ad un numero $b < 1$ ne corrisponde uno negativo.

Se è $a < 1$, accade il contrario; ad un numero $b > 1$ corrisponde un logaritmo negativo, ad un numero $b < 1$ ne corrisponde uno positivo.

Ciò discende immediatamente dalla proposizione 1^a del n. 190.

Il logaritmo dell'unità è sempre, qualunque sia la base a , eguale a zero; poichè è $a^0 = 1$.

Il logaritmo della base a è l'unità, perchè è $a^1 = a$.

Se è $a > 1$, il logaritmo di un numero b cresce, se cresce questo, e divenendo il numero b grande oltre ogni limite, il logaritmo cresce pure indefinitamente: decresce il logaritmo al decrescere del numero b , e decrescendo questo sino a divenire prossimo a zero tanto quanto si vuole, decresce il logaritmo sino a divenire minore di qualsiasi numero negativo assegnabile.

Se è $a < 1$, accade il contrario: crescendo il numero b indefinitamente, il logaritmo di b decresce sino a divenire minore di qualsiasi numero negativo assegnabile: decrescendo il numero b sino a divenire prossimo a zero quanto si vuole, il logaritmo cresce oltre ogni numero positivo assegnabile.

Questo è una conseguenza immediata della proposizione 2^a del n. 190.

L'insieme dei logaritmi, in una base a , di tutti i numeri positivi, si dice, che costituisce il sistema di logaritmi a base a .

195. Per il calcolo con logaritmi appartenenti a un medesimo sistema, cioè presi nella medesima base, si hanno alcune regole fondamentali che sono un' immediata conseguenza di quelle pel calcolo delle potenze (190).

Si abbia

$$1) \quad \begin{aligned} x_1 &= \log_a b_1 \\ x_2 &= \log_a b_2 \end{aligned}$$

b_1, b_2 essendo due numeri positivi, e a pure un numero positivo.

Le 1) equivalgono rispettivamente alle altre

$$2) \quad \begin{aligned} a^{x_1} &= b_1 \\ a^{x_2} &= b_2 \end{aligned}$$

ora da queste, in virtù delle rammentate regole (190) per le potenze, si trae immediatamente

$$a^{x_1 + x_2} = b_1 b_2$$

$$a^{x_1 - x_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$a^{n x_1} = b_1^n.$$

La 1^a di queste due, poichè per ogni numero vi è un solo logaritmo, ci mostra che è

$$x_1 + x_2 = \log_a (b_1 b_2);$$

e la 2^a, che è

$$x_1 - x_2 = \log_a \left(\frac{b_1}{b_2} \right)$$

la 3^a che è

$$n x_1 = \log_a b_1^n.$$

Ma si ha dalle 1)

$$x_1 + x_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

$$x_1 - x_2 = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

$$n x_1 = n \log_a b_1;$$

se ne conclude

$$\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

$$\log_a \left(\frac{b_1}{b_2} \right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

$$\log_a (b_1^n) = n \log_a b_1;$$

Si può dunque enunciare: 1^a Il logaritmo del prodotto di due numeri è la somma dei logaritmi di questi numeri.

2^a Il logaritmo del quoziente di due numeri è la differenza dei logaritmi di questi numeri.

3^a Il logaritmo di una potenza ad esponente qualunque di un numero è il prodotto del logaritmo di questo numero per l'esponente della potenza considerata.

OSSERVAZIONE I. — La 1^a di queste proposizioni sussiste anche per un prodotto di più di due numeri: invero, se si hanno le uguaglianze

$$x_1 = \log_a b_1$$

$$x_2 = \log_a b_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_r = \log_a b_r$$

queste si possono scrivere

$$a^{x_1} = b_1$$

$$a^{x_2} = b_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a^{x_r} = b_r$$

delle quali moltiplicando membro a membro si ottiene

$$a^{x_1+x_2+\dots+x_r} = b_1 b_2 \dots b_r$$

e questa ci mostra che è

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = \log_a (b_1 b_2 \dots b_r)$$

ovvero

$$\log_a b_1 + \log_a b_2 + \dots + \log_a b_r = \log_a (b_1 b_2 \dots b_r).$$

Epperò: *Il logaritmo del prodotto di quanti si vogliono fattori è eguale alla somma dei logaritmi dei fattori.*

OSSERVAZIONE II. — Se si osserva che si può scrivere

$$\sqrt[r]{b} = b^{\frac{1}{r}}$$

così ne segue

$$\log_a \sqrt[r]{b} = \log_a \left(b^{\frac{1}{r}} \right)$$

ma, per la 3^a prop. precedente, è

$$\log_a \left(b^{\frac{1}{r}} \right) = \frac{1}{r} \log_a b$$

quindi

$$\log_a \sqrt[r]{b} = \frac{1}{r} \log_a b.$$

Si ha dunque: *il logaritmo di un radicale si ottiene dividendo il logaritmo del radicando per l'indice del radicale.*

196. Sulle regole che noi abbiamo qui stabilito, si fonda la grande importanza pratica, che il calcolo con logaritmi ha per la esecuzione di moltiplicazioni, divisioni, innalzamenti a potenze, e estrazioni di radici.

Invero, in virtù della 1^a proposizione (195) generalizzata poi nell'Osservazione I, si potrà trovare un prodotto mediante un'addizione. — Si cercheranno i logaritmi dei fattori e si sommeranno. La somma sarà il logaritmo del prodotto che si cerca. Conoscendo il logaritmo, si avrà da trovare il numero corrispondente. — Parimente, per trovare un quoziente si cercherà il logaritmo del dividendo, se ne sottrarrà quello del divisore e la differenza sarà il logaritmo del quoziente incognito. Rimarrà a trovare il numero corrispondente a questo logaritmo.

Analogamente si applicherà la prop. 3^a e l'Osservazione II a trovare una potenza e una radice.

Si vede così che sapendosi trovare il logaritmo di un numero, e inversamente, il numero corrispondente a un dato logaritmo, le quattro operazioni, moltiplicazione, divisione, innalzamento a potenza e estrazione di radice sono ridotte rispettivamente alle altre somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione.

Se non che l'operazione del determinare il logaritmo di un dato numero è, come si è veduto, laboriosissima, e non lo è meno l'altra del determinare il numero, dato che sia il logaritmo, la quale è in sostanza un innalzamento a potenza con esponente qualunque. — Il dovere eseguire ogni volta tali operazioni, distruggerebbe affatto il vantaggio delle regole precedenti.

Appunto per evitare ciò, sono state costruite le *tavole di logaritmi*. — Esse consistono essenzialmente in una doppia colonna: in una si trovano segnati i nu-

meri, nell'altra, e in corrispondenza a questi, sono scritti i loro logaritmi presi tutti in una medesima base, che dicesi *base del sistema dei logaritmi*.

È manifesto che avendo tavole siffatte, vi si trova subito il logaritmo di un numero dato, e reciprocamente vi si trova il numero, di cui sia noto il logaritmo.

È da notarsi però che una tavola a due colonne, nell'una delle quali sieno scritti *tutti* i numeri positivi possibili, nell'altra i logaritmi corrispondenti, manifestamente non si potrebbe costruire.

Le tavole, che si usano nella pratica, contengono i logaritmi, presi nella base 10, dei soli numeri interi, non però di tutti i numeri interi, il che non sarebbe possibile, perchè la serie dei numeri interi è illimitata, ma solo dei numeri interi da 1 sino a un certo numero intero più o meno grande secondo l'importanza delle tavole medesime.

197. Nel sistema di logaritmi che ha per base il 10 e che chiamasi sistema *dei logaritmi volgari*, si distinguono i numeri interi aventi logaritmo razionale da quelli che lo hanno irrazionale, mediante il teorema: *nel sistema a base 10, ogni numero razionale, che non è potenza ad esponente intero positivo o negativo di 10, ha per logaritmo un numero irrazionale.*

Si consideri un numero razionale e positivo b ; si vuol dimostrare che il numero che sodisfa l'equazione

$$1) \quad 10^x = b$$

è irrazionale ogni qualvolta b non è potenza intera di 10.

Se è possibile, pongasi che esista un numero razionale, che sodisfi la 1): lo si indichi con $\frac{m}{n}$, m ed

n essendo due numeri intieri positivi, se è $b > 1$, con $-\frac{m}{n}$ se è $b < 1$.

Si consideri prima il caso che sia $b > 1$.

Si dovrà avere l'identità

$$10^{\frac{m}{n}} = b$$

cioè, elevando all'esponente n ,

$$10^m = b^n$$

ovvero

$$2^m \cdot 5^m = b^n.$$

Il 1° membro essendo un numero intero, lo deve essere anche il 2°, e quindi lo è b ; inoltre il 1° membro non ammette altri fattori primi se non il 2 e il 5: altrettanto deve accadere del 2°. — Se b^n non ammette altri fattori primi, se non il 2 e il 5, anche b non ammetterà altri fattori se non questi, sarà dunque

$$b = 2^\alpha \cdot 5^\beta$$

e allora l'identità precedente diviene

$$2^m \cdot 5^m = 2^{\alpha n} \cdot 5^{\beta n}$$

e questa richiede che sia

$$m = \alpha n, \quad m = \beta n$$

dalle quali si ha

$$\alpha = \beta$$

epperò è

$$b = (2 \cdot 5)^\alpha = 10^\alpha$$

ecco dunque: un numero razionale, maggiore dell'unità non può essere potenza ad esponente razionale del numero 10, se non è potenza ad esponente intero positivo: i soli numeri interi, che, nel sistema a base 10,

abbiano logaritmi razionali sono le potenze successive intere di 10

$$10^0, 10^1, 10^2, \dots$$

che, come si vede, hanno per logaritmi rispettivamente i numeri

$$0, 1, 2, \dots$$

Per conseguenza ogni altro numero intero, nel sistema a base 10, ha un logaritmo irrazionale.

Si consideri ora che sia $b < 1$; si potrà porre

$$b = \frac{1}{b'}$$

dove b' è un numero razionale maggiore dell'unità; e dovrà avere l'identità

$$10^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{b'}$$

onde

$$10^{-in} = \frac{1}{b'^n}$$

ovvero

$$\frac{1}{10^m} = \frac{1}{b'^n}$$

la quale porta

$$10^m = b'^n;$$

per la dimostrazione precedente b' dovrà dunque essere una potenza di 10 ad esponente intero positivo: epperò il numero b sarà uno dei numeri

$$10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$$

i quali hanno rispettivamente per logaritmi i numeri

$$-1, -2, -3, \dots$$

Così è pienamente provato che i soli numeri razionali i quali nel sistema a base 10 abbiano logaritmi

razionali sono le potenze di 10 ad esponente intero positivo e negativo.

Da ciò segue che dei numeri razionali, che non sono potenze ad esponente intero di 10, non è possibile avere i logaritmi espressi in unità e parti di unità: si possono solo avere, espressi così, dei valori approssimati di essi per calcolare i quali si danno nell'Algebra Superiore metodi assai più spediti di quello da noi qui esposto.

È per ciò che nelle tavole, di contro ad ogni numero intero che non è potenza ad esponente intero di 10, si trova scritto un *numero decimale*, che rappresenta un valore approssimato del logaritmo del numero corrispondente. — La parte intera di questo numero decimale dicesi *caratteristica* del logaritmo: la parte decimale *mantissa*.

Nelle tavole generalmente si trova scritta solamente la mantissa, perchè la caratteristica è subito trovata osservando che essa è eguale all'esponente della potenza di 10 immediatamente inferiore al numero che si considera.

Per il modo di adoperare le tavole alla ricerca del logaritmo di un numero qualunque, che si trovi o no tra quelli in esse considerati, e inversamente alla ricerca del numero corrispondente a un dato logaritmo, che sia o no tra quelli scritti nelle tavole medesime, noi rimandiamo alla trattazione speciale che intorno a ciò tutti gli autori di queste sogliono premettere.

OSSERVAZIONE. Termineremo facendo osservare che se si considerano due sistemi di logaritmi, l'uno a base a , l'altro a base a' , il logaritmo a base a' di un numero b qualunque è eguale al logaritmo a base a del medesimo numero b , moltiplicato per un fattore che è indipendente dal numero b considerato.

Invero sia

$$h = \log_a b$$

$$h' = \log_{a'} b$$

cioè

$$a^h = b$$

$$a'^{h'} = b.$$

Prendendo i logaritmi a base a' di ambo i membri della

$$a^h = b$$

si ha

$$h \log_{a'} a = \log_{a'} b$$

ovvero

$$h \cdot \log_{a'} a = h'$$

e questa mostra quanto è stato enunciato perchè il fattore $\log_a a$, che moltiplica h , non dipende affatto dal numero b .

Si ha dunque: *dal logaritmo di un numero qualunque in una base a , si ottiene il logaritmo del numero medesimo in un'altra base a' , moltiplicando quello pel logaritmo del numero a , preso nella base a' .*

Esercizi.

Determinare il valore di x che sodisfa alle seguenti equazioni:

$$1^\circ \log. x = 2, \quad \log. x = 3, \quad \log. x = 0,5$$

$$2^\circ \log. x = \log. a - \log. b, \quad \log. x = n \log. a + n \log. b$$

$$3^\circ \log. x = 3 \log. 18 - 4 \log. 12$$

(basta tener presente che sono eguali due numeri che hanno logaritmi eguali).

Risolvere le equazioni

$$4^\circ x^2 + y^2 = a^2, \quad \log. x + \log. y = \frac{m}{n}$$

(la seconda può scriversi $xy = \sqrt[n]{10^m}$.)

$$5^\circ x^4 + y^4 = a^4, \quad \log. x + \log. y = \frac{p}{q}$$

$$6^\circ x^y = y^x, \quad x^p = y^q$$

(si prendano i logaritmi dei due membri di ciascuna).

$$7^\circ 10^{(5-x)(6-x)} = 100, \quad a \cdot b = \sqrt[x]{c}$$

(si prendano i logaritmi dei due membri).

$$8^\circ (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = \frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2}$$

$$9^\circ a^{x+1} + \frac{b}{a^{x-1}} = c.$$

CAPITOLO XVI.

Proporzioni.

198. Si chiama *rapporto* di due numeri a e b il quoziente di essi $\frac{a}{b}$.

Si dice che *quattro numeri reali*¹ a, b, c, d sono in *proporzione*, quando il rapporto del primo al secondo è eguale al rapporto del terzo al quarto.

Una proporzione è rappresentata scrivendo

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

o anche, come più comunemente si suole, colla notazione

$$a : b = c : d ;$$

e invece di leggere

a diviso b eguale a c diviso d

si suole leggere

a sta a b come c sta a d .

I numeri a, b, c, d si chiamano i termini della proporzione: $a : b$ è il 1° rapporto, $c : d$ il 2°; a e c si dicono gli *antecedenti*, b e d i *consequenti*; b e c i *medii*, a e d gli *estremi*.

¹ In tutto questo capitolo si considerano solo numeri reali.

Una proporzione si dice *continua* se i medii sono eguali tra loro, cioè, se è della forma

$$a : b = b : d ;$$

b dicesi *medio proporzionale* tra a e d .

Una proporzione non è altro, in sostanza, se non un'eguaglianza, i cui due membri hanno la forma speciale di quozienti. — Sarà una identità se i quattro termini sono numeri noti: un'equazione, se alcuno di essi è incognito.

Al punto in cui siamo, una trattazione speciale e completa della teoria delle proporzioni sarebbe superflua; sarebbe facile osservare che tutto quanto noi possiamo dire intorno ad esse è contenuto implicitamente o esplicitamente in proposizioni già note o per lo meno ne è conseguenza facilissima a dedursi. Però, giacchè certe modificazioni, delle quali una proporzione è suscettibile, sono di uso assai frequente, così noi presenteremo qui raccolte le principali proposizioni relative ad esse, contentandoci di enunciarle; il dimostrarle d'altronde è estremamente facile, e potrà essere un esercizio pei giovani.

1° In una proporzione il prodotto degli estremi è eguale a quello dei medii, cioè se è

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

è anche

$$ad = bc.$$

OSSERVAZIONE I. Se i medii sono eguali, cioè se è $b = c$, allora ne segue

$$ad = b^2$$

onde, il medio proporzionale tra due numeri a e d è la radice quadrata del loro prodotto.

OSSERVAZIONE II. L'eguaglianza

$$ad = bc$$

serve a determinare uno dei quattro termini, quando sono noti gli altri tre.

2° *Quattro numeri a, b, c, d sono in proporzione se il prodotto degli estremi è eguale a quello dei medii.*

Si ha

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

se è

$$ad = bc$$

OSSERVAZIONE III. Dai due precedenti teoremi segue che una proporzione è giusta ogni volta e solamente allora che il prodotto degli estremi è eguale a quello dei medii: dimodochè in una proporzione si possono disporre i termini in tutti quei modi, nei quali non è alterata l'uguaglianza tra il prodotto degli estremi e quello dei medii. — Si hanno così otto diversi modi di disporre i termini di una proporzione.

OSSERVAZIONE IV. In una proporzione si può moltiplicare o dividere uno degli estremi e insieme uno dei medii per un medesimo numero.

3° *In una proporzione la somma dei due primi termini sta al secondo, come la somma dei due ultimi sta al quarto, vale a dire, se è*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

è anche

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

4° *In una proporzione la differenza dei due primi termini sta al secondo, come la differenza dei due ultimi*

sta al quarto, cioè se è

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ne segue

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

5° *In una proporzione la somma dei due primi termini sta alla loro differenza, come la somma dei due ultimi sta alla loro differenza, cioè dalla*

$$a : b = c : d$$

deriva l'altra

$$a + b : a - b = c + d : c - d.$$

6° *In una proporzione la somma o la differenza degli antecedenti sta alla somma o differenza rispettivamente dei conseguenti, come un antecedente al suo conseguente, cioè dalla*

$$a : b = c : d$$

discende l'altra

$$a + c : b + d = a : b$$

e anche

$$a - c : b - d = a : b.$$

7° *Moltiplicando tra loro ordinatamente i termini di più proporzioni si ottiene una nuova proporzione.*

Se è

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1}$$

e

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d_2}$$

è anche

$$\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} = \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2}.$$

8° *Dividendo tra loro ordinatamente i termini di due proporzioni si ottiene una nuova proporzione.*

Dalle due

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1}, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d_2}$$

deriva l'altra

$$\frac{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}{\left(\frac{b_1}{b_2}\right)} = \frac{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)}$$

9° *Se quattro numeri sono in proporzione, anche le loro potenze m° sono in proporzione.*

Se è

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

è anche

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$$

10° *Dati più rapporti eguali, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come un antecedente al suo conseguente.*

Se è

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots$$

ne segue

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots} = \frac{a_1}{b_1}$$

PROBLEMA. *Dividere un dato numero n in parti, che stieno fra loro ordinatamente come certi numeri dati a, b, c,*

Sieno x, y, z, queste parti: si ha

$$x + y + z + \dots = n$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \dots$$

Applicando l'ultimo teorema,

$$\begin{aligned} \frac{x + y + z + \dots}{a + b + c + \dots} &= \frac{x}{a} \\ &= \frac{y}{b} \\ &= \frac{z}{c} \\ &\dots \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \frac{n}{a + b + c + \dots} &= \frac{x}{a} \\ \frac{n}{a + b + c + \dots} &= \frac{y}{b} \\ \frac{n}{a + b + c + \dots} &= \frac{z}{c} \\ &\dots \end{aligned}$$

dalle quali si deducono x, y, z,

Progressioni aritmetiche.

199. *Dicesi progressione aritmetica o per differenza una serie di numeri tali che la differenza tra uno qualunque di essi e l'antecedente sia un numero costante.*

La differenza costante tra un termine di una progressione e il precedente chiamasi *ragione* della progressione.

Una progressione di n termini si rappresenta generalmente scrivendo

$$1) \quad \div a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n.$$

Indichi d la ragione; se a_r è uno qualunque dei termini, la legge a cui essi soddisfano è espressa dalla relazione

$$2) \quad a_r - a_{r-1} = d$$

onde

$$a_r = a_{r-1} + d$$

$$a_{r-1} = a_r - d$$

cioè, aggiungendo la ragione a un termine qualunque si ottiene il termine seguente: sottraendola si ottiene l'antecedente; dal che segue, che conoscendo la ragione e un termine, la progressione può essere prolungata indefinitamente da una parte e dall'altra del termine medesimo.

200. Se si indica con a_1 un termine qualunque, una progressione illimitata da una parte e dall'altra di esso si rappresenterà scrivendo

$$\div \dots a_{-3} \cdot a_{-2} \cdot a_{-1} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots$$

La serie dei numeri interi, positivi e negativi,

$$\dots -2. -1. 0. 1. 2. 3. \dots$$

è una progressione illimitata nei due sensi avente per ragione 1.

Se la ragione di una progressione è positiva, ciascun termine è maggiore del precedente e la progressione allora si dice *crescente*: se la ragione è negativa, ciascun termine è minore di quello che lo precede e la progressione dicesi *decrescente*.

$$\dots -4. -2. 0. 2. 4. 6. \dots$$

è una progressione crescente:

$$\dots 4. 2. 0. -2. -4. \dots$$

è decrescente.

201. Un termine qualunque di una progressione aritmetica è eguale a un altro qualsiasi, di quelli che lo precedono, aumentato del prodotto della ragione pel numero intero successivo a quello che indica quanti ter-

mini si trovano tra l'uno e l'altro; e anche, è eguale a un altro qualsiasi, di quelli che lo seguono, diminuito del prodotto della ragione pel numero intero successivo a quello che indica quanti termini si trovano tra l'uno e l'altro.

Sia la progressione

$$\div \dots a_{-3} \cdot a_{-2} \cdot a_{-1} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots$$

Si consideri un termine qualunque a_r : uno qualunque a destra di esso sarà a_{r+s} : uno qualunque a sinistra sarà a_{r-t} : s e t sono due numeri interi, positivi qualunque.

Si ha per definizione

$$a_{r+1} - a_r = d$$

$$a_{r+2} - a_{r+1} = d$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{r+s} - a_{r+s-1} = d$$

sommando le quali membro a membro si ottiene

$$a_{r+s} - a_r = sd$$

$$\begin{aligned} 1) \quad a_{r+s} &= a_r + sd \\ &= a_r + (s - 1 + 1) d \end{aligned}$$

e questa prova la 1^a parte dell'enunciato.

Poi si hanno le altre

$$a_r - a_{r-1} = d$$

$$a_{r-1} - a_{r-2} = d$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{r-t} - a_{r-t-1} = d$$

sommando le quali membro a membro si ha

$$a_r - a_{r-t} = td$$

onde

$$\begin{aligned} 2) \quad a_{r-t} &= a_r - td \\ &= a_r - (t - 1 + 1) d. \end{aligned}$$

e questa prova la 2^a parte.

OSSERVAZIONE I. Percorrendo, a partire da un termine qualunque, una progressione aritmetica illimitata nei due sensi, si incontreranno da una parte termini che supereranno qualunque numero positivo assegnabile, dall'altra termini che saranno più piccoli di qualunque numero negativo che si voglia assegnare.

Ciò discende immediatamente dalle relazioni 1) e 2). Essendo d un numero costante e potendo s e t prendersi grande quanto si vuole, anche i prodotti sd e td (130, 10°) potranno divenire grandi quanto si vuole in valore assoluto: epperò, se d è positivo, saranno positivi sd e td , e a_{r+s} , a_{r-t} diverranno, al crescere indefinito di s e t , quello maggiore di qualunque numero positivo, questo minore di qualunque numero negativo: se d è negativo, saranno negativi sd e td , e a_{r+s} , a_{r-t} , al crescere indefinito di s e t , diverranno quello minore di ogni numero negativo, questo maggiore di ogni numero positivo assegnabile.

OSSERVAZIONE II. La formula 1) che in sostanza è identica alla 2), è una relazione tra i quattro elementi a_r , a_{r+s} , s , d , che permette di determinare uno di essi, quando sieno noti gli altri tre.

Specialmente notiamo che se ne deduce

$$3) \quad d = \frac{a_{r+s} - a_r}{s}$$

cioè la ragione è eguale al quoziente della differenza tra un termine e un altro qualunque che lo procede, divisa pel numero dei termini intermedi ad essi aumentato di 1.

202. INSERZIONE DEI MEDII. La formula 3) precedente serve a risolvere il seguente problema: *inserire m medii aritmetici tra due numeri dati a e b ,*

cioè trovare m numeri $x_1, x_2, \dots, x_m$ tali che la serie

$$a, x_1, x_2, \dots, x_m, b$$

sia una progressione aritmetica.

Manifestamente, per far ciò basta conoscere la ragione, poichè aggiungendo questa ad a si ottiene x_1 , aggiungendola ad x_1 si ottiene x_2 , ec., ec. Ora la formula 3) fa appunto al caso nostro, perchè ci dà immediatamente

$$d = \frac{b - a}{m + 1}.$$

203. PROBLEMA. *Determinare la condizione necessaria e sufficiente, perchè tre numeri dati a , b e c facciano parte di una stessa progressione aritmetica.*

Pongasi primieramente che esista una progressione nella quale si trovino i termini a , b e c , e che, procedendo verso destra nella progressione medesima, s'incontri prima a , di seguito ad a un numero m di termini, dopo i quali si trovi b ; a b succedano n termini e dopo questi s'incontri c .

La ragione d della progressione sarà data (vedi problema antecedente) dalla formula

$$d = \frac{b - a}{m + 1}$$

e anche dall'altra

$$d = \frac{c - b}{n + 1};$$

dovrà dunque essere

$$\frac{b - a}{m + 1} = \frac{c - b}{n + 1}$$

ovvero

$$\frac{b - a}{c - b} = \frac{m + 1}{n + 1}.$$

$\frac{a_3 - a_2}{m + 1}$ quella della progressione tra a_2 e a_3 :

.....
.....

le differenze $a_{-1} - a_{-2}$, $a_1 - a_{-1}$, $a_2 - a_1$ sono eguali, perchè tutte rappresentano la ragione della progressione primitiva : si ha dunque :

$$\dots = \frac{a_1 - a_{-1}}{m + 1} = \frac{a_2 - a_1}{m + 1} = \frac{a_3 - a_2}{m + 1} = \dots$$

Le progressioni parziali, tra a_1 e a_2 , tra a_2 e a_3 ec. ec., tra a_{-1} e a_1 , tra a_{-2} e a_{-1} hanno dunque tutte la medesima ragione. Inoltre l'ultimo termine di ciascuna di esse è il primo della seguente : per conseguenza esse possono considerarsi come costituenti una sola progressione la cui ragione è il quoziente della ragione primitiva divisa pel numero dei medii inseriti aumentato di 1.

205. *In una progressione aritmetica di n termini, la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante ed uguale alla somma degli estremi stessi.*

Sia la progressione di n termini

$$\div a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n ;$$

due termini qualunque equidistanti dagli estremi sono a_r e a_{n-r+1} : e si ha (201)

$$a_r = a_1 + (r - 1) d$$

$$a_{n-r+1} = a_n - (r - 1) d$$

sommando le quali membro a membro si ottiene

$$a_r + a_{n-r+1} = a_1 + a_n$$

il che è quanto si voleva.

OSSERVAZIONE. Se il numero n dei termini è dispari, vi è un termine egualmente distante dai due

estremi. Se è $n = 2m - 1$, quel termine sarà a_m , e giacchè vi saranno $m - 1$ termini innanzi e $m - 1$ termini dopo di esso, così avremo

$$a_m = a_1 + (m - 1) d$$

$$a_m = a_n - (m - 1) d$$

delle quali si trae

$$2a_m = a_1 + a_n$$

onde

$$a_m = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

si può dire dunque :

In una progressione aritmetica con un numero dispari di termini, il termine medio è uguale alla semi-somma degli estremi.

La semi-somma di due numeri si chiama *media aritmetica* di essi.

206. *La somma di n termini consecutivi di una progressione aritmetica è eguale alla semi-somma dei due estremi moltiplicata per n.*

Si considerino gli n numeri in progressione aritmetica

$$\div a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{n-1} \cdot a_n.$$

Si indichi con s la somma di essi, cioè

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n ;$$

si può anche scrivere

$$s = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$$

sommando membro a membro queste due uguaglianze e chiudendo entro una parentesi i due termini che sono sopra una stessa verticale, si ha :

$$2s = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

ma ciascuna delle somme racchiuse entro parentesi, essendo la somma di due termini equidistanti degli

estremi, è eguale alla somma degli estremi stessi: il numero di tutte queste somme è n ; si ha dunque

$$2s = (a_1 + a_n) n$$

onde

$$1) \quad s = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \cdot n$$

formula che dimostra la proposizione enunciata.

OSSERVAZIONE. Nella formula precedente la somma s è espressa pei termini estremi e pel numero totale dei termini: si può in essa sostituire all'ultimo termine a_n la sua espressione

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

e allora si ha

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \right) n \\ &= \left(\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \right) n \end{aligned}$$

cioè la somma s espressa pel primo termine, per la ragione e pel numero dei termini.

La formula 1) n. 201 e la 1) n. 206 stabiliscono due relazioni tra le cinque quantità a_1 , a_n , d , n , s , dimodochè date tre di queste, è possibile, considerando quelle due relazioni come equazioni, determinare le altre due quantità incognite.

Progressioni per quoziente.

207. *Dicesi progressione geometrica o per quoziente una serie di numeri tali che il quoziente dell'a divisione di uno qualunque di essi per il precedente sia costante.*

Questo quoziente costante si chiama *ragione* della progressione.

Per indicare che n numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono in progressione geometrica, si scrive

$$\div a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_{n-1} : a_n$$

La legge con cui si succedono i termini di una progressione geometrica è espressa dalla legge

$$1) \quad \frac{a_r}{a_{r-1}} = q$$

dove q indica la ragione della progressione e a_r , e a_{r-1} rappresentano due termini consecutivi qualunque.

Dalla 1) si ricava

$$a_r = a_{r-1} q$$

$$a_{r-1} = \frac{a_r}{q}$$

e queste ci dicono che: *moltiplicando un termine di una progressione geometrica per la ragione si ottiene il termine successivo e dividendo un termine di una progressione geometrica per la ragione si ottiene il termine antecedente.*

Da ciò segue che conoscendo un termine e la ragione di una progressione geometrica, può la progressione medesima prolungarsi indefinitamente da una parte e dall'altra del termine dato.

Se un termine della progressione è positivo ed è positiva la ragione, necessariamente debbono essere positivi tutti gli altri: e allora se la ragione è maggiore dell'unità i termini che s'incontrano percorrendo la progressione nel verso da sinistra a destra vanno crescendo: vanno invece decrescendo, se la ragione è minore dell'unità.

208. *Un termine qualunque di una progressione geometrica è eguale a un altro qualsiasi di quelli che lo precedono, moltiplicato per una potenza della ragione avente*

per esponente il numero intero successivo a quello che indica quanti termini si trovano tra l'uno e l'altro: e anche è eguale ad un altro qualsiasi di quelli che lo seguono, diviso per una potenza della ragione avente per esponente il numero intero successivo a quello che indica quanti termini si trovano tra l'uno e l'altro.

Sia la progressione illimitata nei due sensi

$$\div \dots a_{r-s} \dots a_r \dots a_{r+t} \dots$$

Per definizione si ha:

$$a_{r-s+1} = a_{r-s} q$$

$$a_{r-s+2} = a_{r-s+1} q$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_r = a_{r-1} q:$$

moltiplicando le quali membro a membro, si deduce

$$a_r = a_{r-s} q^s$$

$$1) \quad a_r = a_{r-s} q^{(s-1)+1}$$

e questa prova la 1ª parte dell'enunciato.

Si hanno poi anche le altre uguaglianze

$$a_{r+1} = a_r q$$

$$a_{r+2} = a_{r+1} q$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{r+t} = a_{r+t-1} q$$

le quali moltiplicate membro a membro danno

$$a_{r+t} = a_r q^t$$

onde

$$a_r = \frac{a_{r+t}}{q^t} = \frac{a_{r+t}}{q^{(t-1)+1}}$$

che è, in sostanza, identica alla precedente, e che prova la 2ª parte dell'enunciato.

OSSERVAZIONE. La formula 1) precedente stabilisce una relazione tra le quantità a_r , a_{r-s} , q , s , talchè date tre di queste si può determinare la quarta.

209. Percorrendo una progressione geometrica a termini positivi, illimitata nei due sensi, si incontrano da una parte termini maggiori di qualunque numero positivo assegnato grande ad arbitrio, dall'altra termini minori di qualsiasi numero positivo assegnato comunque piccolo.

Per la proposizione precedente, la progressione può scriversi

$$\alpha) \dots \frac{a_1}{q^n} \dots \frac{a_1}{q^2} : \frac{a_1}{q} : a_1 : a_1 q : a_1 q^2 : \dots a_1 q^n \dots$$

cioè i termini di essa si ottengono moltiplicando per a_1 che è un numero determinato, i termini della progressione

$$\beta) \dots q^{-n} \dots q^{-2} : q^{-1} : 1 : q : q^2 : \dots : q^n : \dots$$

e ora basta rammentare la proposizione 2ª (190) per vedere subito che il teorema qui enunciato è vero per la serie di numeri β ; ma se è vero per la serie β , manifestamente è vero anche per la serie α .

210. INSERZIONE DEI MEDII. La formula 1) n. 208 serve a risolvere il seguente problema: *inserire m medii geometrici tra due numeri dati positivi a e b, cioè trovare m numeri $x_1, x_2, \dots, x_m$ tali che la serie*

$$a, x_1, x_2, \dots, x_m, b$$

sia una progressione geometrica.

Manifestamente per far ciò basta conoscere la ragione, poichè moltiplicando a per essa si ottiene x_1 , moltiplicando x_1 per la medesima si ottiene x_2 , ec., ec. Ora la detta formula 1) ci fa appunto conoscere la

ragione giacchè ci dà, indicando con q la ragione incognita

$$b = aq^{m+1}$$

onde

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

e si prenderà qui per q il valore reale e positivo che $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ ammette sempre, essendo a e b positivi.

211. *Se fra ciascun termine e il successivo di una progressione geometrica a termini positivi s'inserisce uno stesso numero m di medii, la nuova serie di numeri è una progressione che ha per ragione la radice d'indice $m+1$ della ragione primitiva.*

Invero, sia la progressione

$$\div \dots a_{-2} : a_{-1} : a_1 : a_2 : a_3 : \dots$$

S'immagini d'inserire m medii tra a_1 e a_2 , tra a_2 e a_3 , ec., ec., e parimente tra a_{-1} e a_1 , tra a_{-2} e a_{-1} , ec., ec.

Tra a_1 e a_2 si formerà una progressione avente per ragione $\sqrt[m+1]{\frac{a_2}{a_1}}$; tra a_2 e a_3 un'altra avente per ra-

gione $\sqrt[m+1]{\frac{a_3}{a_2}}$, ec., ec., tra a_{-1} e a_1 una avente per ra-

gione $\sqrt[m+1]{\frac{a_1}{a_{-1}}}$, ec., ec., ma i quozienti $\dots \frac{a_1}{a_{-1}}, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2} \dots$ sono tutti eguali alla ragione della progressione proposta; si ha dunque

$$\dots = \sqrt[m+1]{\frac{a_1}{a_{-1}}} = \sqrt[m+1]{\frac{a_2}{a_1}} = \sqrt[m+1]{\frac{a_3}{a_2}} = \dots$$

Le progressioni parziali tra a_1 e a_2 , tra a_2 e a_3 , ec., ec., hanno dunque la medesima ragione. Inoltre l'ultimo termine di ciascuna di esse è il primo della seguente: perciò esse possono considerarsi come costituenti una sola progressione, la cui ragione è la radice d'indice $m+1$ della ragione primitiva.

212. PROBLEMA. *Determinare la condizione perchè tre numeri dati positivi a, b, c facciano parte di una stessa progressione geometrica.*

S'immagini che effettivamente esista una progressione in cui procedendo verso destra s'incontri prima il termine a , poi b , e infine c e che tra a e b siano m termini: e ne siano n tra b e c .

Si avrà allora, chiamando q la ragione

$$b = aq^{m+1}$$

$$c = bq^{n+1}$$

dalla 1^a delle quali si trae

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}};$$

dalla 2^a

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{c}{b}}$$

si deve dunque avere

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[n+1]{\frac{c}{b}}$$

ossia

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} = \left(\frac{c}{b}\right)^{m+1}.$$

Questa è la condizione necessaria, cioè, debbono esistere due numeri interi $m+1$ ed $n+1$ tali che la po-

tenza $(n+1)^a$ del rapporto $\left(\frac{b}{a}\right)$ sia eguale alla potenza $(m+1)^a$ del rapporto $\left(\frac{c}{b}\right)$.

Ma è facile vedere che questa condizione è anche sufficiente. Invero, pongasi che essa sia soddisfatta. Si inseriscano m medii tra a e b : si formerà una progres-

sione avente per ragione $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$: se ne inseriscano n tra b e c : la progressione così formata ha per ragione $\sqrt[n+1]{\frac{c}{b}}$: e poichè è

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} = \left(\frac{c}{b}\right)^{m+1}$$

se ne deduce estraendo la radice d'indice $(n+1)(m+1)$

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[n+1]{\frac{c}{b}}$$

così le due progressioni hanno la medesima ragione e la prima termina col numero b col quale la seconda incomincia. Esse formano dunque una sola progressione, nella quale si trovano i tre numeri a , b e c .

È manifesto che se esiste una coppia di numeri interi $m+1$, $n+1$ che sodisfa alla condizione anzi detta, ne esistono infinite altre: tutte quelle che si ottengono moltiplicando per uno stesso numero intero i due $m+1$ e $n+1$ o sopprimendo ad essi un fattore comune: infatti se è soddisfatta la

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1} = \left(\frac{c}{b}\right)^{n+1}$$

lo è anche l'altra

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{(m+1)p} = \left(\frac{c}{b}\right)^{(n+1)p}.$$

APPLICAZIONE. Quali sono i numeri razionali che possono far parte di una progressione per quoziente nella quale si trovano i termini 1 e 10?

Indichi p uno di questi numeri; secondo la posizione che si suppone che p possa occupare nella progressione rispetto ai numeri 1 e 10, dovrà essere verificata l'una o l'altra di queste condizioni, cioè

$$10^{m+1} = \left(\frac{p}{10}\right)^{(n+1)}$$

$$p^{m+1} = \left(\frac{10}{p}\right)^{n+1}$$

$$\left(\frac{1}{p}\right)^{m+1} = 10^{n+1}$$

ovvero

$$10^{m+n+2} = p^{n+1}$$

$$p^{m+n+2} = 10^{n+1}$$

$$p^{m+1} = 10^{-(n+1)}$$

la prima delle quali, per quanto fu detto al n. 197, ci mostra che p deve essere una potenza ad esponente intero e positivo di 10: la seconda, dove p è un numero compreso tra 1 e 10 non può mai essere soddisfatta: la terza ci dice, che p è una potenza ad esponente intero e negativo di 10.

Le potenze di 10 sono dunque i soli numeri razionali che possono far parte di una progressione geometrica in cui si trovano i termini 1 e 10.

213. In una progressione di n termini il prodotto di due termini egualmente distanti dagli estremi è costante ed eguale al prodotto degli estremi stessi.

Sia la progressione di n termini

$$\div a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n.$$

Due termini equidistanti rispettivamente dal primo e dall'ultimo sono a_r e a_{n-r+1} : ora si ha:

$$a_r = a_1 q^{r-1}, \quad a_{n-r+1} = \frac{a_n}{q^{r-1}}$$

moltiplicando le quali membro a membro si ha:

$$a_r a_{n-r+1} = a_1 a_n$$

il che è quanto si voleva.

214. Il prodotto di n numeri in progressione geometrica è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi elevato all'esponente n .

Siano gli n numeri in progressione

$$\div a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_{n-1} : a_n$$

s'indichi con P questo prodotto, cioè

$$P = a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n$$

si può anche scrivere

$$P = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$$

moltiplicando membro a membro, e aggruppando i fattori che sono sulla stessa verticale:

$$P^2 = (a_1 a_n) (a_2 a_{n-1}) \dots (a_{n-1} a_2) (a_n a_1).$$

Ma pel teorema ora dimostrato ciascuno dei prodotti chiusi entro parentesi è eguale al prodotto degli estremi: e poichè il numero di essi è n , si ha:

$$P^2 = (a_1 a_n)^n$$

onde

$$P = \sqrt{(a_1 a_n)^n}.$$

215. La somma di n termini di una progressione geometrica è il quoziente che si ottiene dividendo per la differenza tra l'unità e la ragione, la differenza tra il primo degli n termini e il prodotto dell'ultimo per la ragione.

Siano gli n termini in progressione:

$$\div a_1 : a_2 : \dots : a_{n-1} : a_n$$

se ne indichi con s la somma, cioè

$$1) \quad s = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

si moltiplichi da una parte e dall'altra per la ragione q : si otterrà

$$sq = a_1 q + a_2 q + \dots + a_{n-1} q + a_n q$$

e poichè, per definizione, è

$$a_1 q = a_2, \quad a_2 q = a_3, \quad \dots \quad a_{n-1} q = a_n$$

risulta

$$sq = a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_n q$$

sottraendo questa, membro a membro, dalla 1) si ha

$$s - sq = a_1 - a_n q$$

$$s(1 - q) = a_1 - a_n q$$

onde

$$s = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$$

la quale dimostra il teorema enunciato.

OSSERVAZIONE I. Se nella formula precedente ad a_n si sostituisce la sua espressione

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

si ottiene

$$2) \quad s = \frac{a_1 - a_1 q^{n-1} \cdot q}{1 - q} = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}.$$

OSSERVAZIONE II. La formula 1) n. 207, e la 2) qui precedente stabiliscono due relazioni tra le quantità a_1 , a_n , q , n , s : talchè date tre di esse, si possono determinare le altre due.

Limite della somma n di termini in progressione geometrica per n crescente indefinitamente.

216. La somma di n termini di una progressione geometrica che indicheremo con S_n è evidentemente una funzione di n . Ora si vuol vedere come varia questa funzione S_n

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

al variare di n .

Per non entrare in dettagli, consideriamo solamente il caso che la progressione sia a termini positivi; la ragione q sarà dunque positiva. Si consideri che si ha

$$S_n = \frac{a_1}{a-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q} = \frac{a_1}{a-q} + \frac{a_1 q^n}{q-1}.$$

1° Sia $q > 1$: al crescere indefinito di n , cresce q^n , (190, prop. 2°) indefinitamente; cresce dunque parimente il termine $\frac{a_1 q^n}{q-1}$, epperò cresce S_n . Al crescere indefinito di n , S_n ha dunque per limite l'infinito.

2° Sia $q < 1$: al crescere indefinito di n , q^n (190, prop. 2°) decresce approssimandosi indefinitamente allo zero: il prodotto $\frac{a_1 q^n}{1-q}$ tende esso pure (prop. 6°, Limiti) contemporaneamente allo zero.

Dalla formula

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q}$$

segue subito che, quando n cresce indefinitamente, S_n tende al limite $\frac{a_1}{1-q}$

Logaritmi dei termini di una progressione geometrica.

217. Consideriamo la progressione geometrica illimitata nei due sensi.

$$\div \dots q^{-2} : q^{-1} : q^0 : q^1 : q^2 : \dots$$

dove q è un numero positivo.

Sia r il logaritmo di q nella base a , cioè si abbia

$$a^r = q :$$

noi avremo allora

$$\begin{aligned} q^2 &= a^{2r}, & q^3 &= a^{3r} \dots \\ q^{-1} &= a^{-r}, & q^{-2} &= a^{-2r}, \dots \end{aligned}$$

dimodochè, osservando che è $q^0 = a^0$, si vede che i logaritmi rispettivi dei termini della progressione sono

$$\dots -2r, -r, 0, r, 2r, 3r, \dots$$

i quali, come è manifesto, costituiscono una progressione aritmetica avente per ragione il logaritmo della ragione della progressione geometrica data.

E se tra un termine e l'altro di questa, si inserisce costantemente uno stesso numero m di medii, i termini della nuova progressione geometrica che così si ottiene, hanno per logaritmi nella stessa base a i termini della progressione aritmetica che si forma inserendo costantemente m medii tra un termine e l'altro della precedente progressione aritmetica.

Invero, i medii che si inseriscono per es. tra q^0 e q^1 sono $q^{\left(\frac{1}{m+1}\right)}, q^{\left(\frac{2}{m+1}\right)}, \dots, q^{\left(\frac{m}{m+1}\right)}$ e questi hanno per logaritmi, nella base a , rispettivamente i numeri $\left(\frac{1}{m+1}\right) \cdot r, \left(\frac{2}{m+1}\right) \cdot r, \dots, \left(\frac{m}{m+1}\right) \cdot r$, i quali sono appunto gli m medii aritmetici tra 0 e r .

Reciprocamente, se si considerano due progressioni l'una geometrica, l'altra aritmetica come le seguenti

$$\begin{array}{ccccccc} \div & \dots & q^{-2} & : & q^{-1} & : & q^0 : q^1 : q^2 : \dots \\ \div & \dots & -2r & . & -r & . & 0 . r . 2r \dots \end{array}$$

dove q è positivo, ed r è positivo o negativo, esiste sempre un numero a positivo tale che i termini della progressione aritmetica sono i logaritmi, a base q , dei termini corrispondenti di quella geometrica, cioè 0 logaritmo di q^0 , r di q^1 , ec. ec.

Questo numero a è $q^{\frac{1}{r}}$.

Invero si ha

$$\begin{aligned} \left(q^{\frac{1}{r}}\right)^0 &= 1 = q^0, & \left(q^{\frac{1}{r}}\right)^r &= q^1; & \left(q^{\frac{1}{r}}\right)^{2r} &= q^2; \dots \\ & & \left(q^{\frac{1}{r}}\right)^{-r} &= q^{-1}; & \left(q^{\frac{1}{r}}\right)^{-2r} &= q^{-2}; \dots \end{aligned}$$

e queste relazioni mostrano che dando per esponenti successivi al numero $a = q^{\frac{1}{r}}$ i termini della progressione aritmetica, si producono i termini di quella geometrica; ciò che prova appunto che i termini dell'aritmetica sono i logaritmi nella base $q^{\frac{1}{r}}$ dei termini di quella geometrica.

In Aritmetica si suol definire un sistema di logaritmi partendo dalla considerazione di due progressioni come le due precedenti.

Esercizi.

1° Trovare il 15° termine della serie

$$-6, -3, 0, +3, +6; \dots$$

2° Qual posto occupa nella progressione aritmetica

$$\div 2 . 5 . 8 \dots$$

il termine maggiore di 1000 ?

3° Inseriscansi dieci medii aritmetici tra -7 e 114 .

4° Trovare la somma degli n primi numeri interi

$$1+2+3+\dots+n.$$

5° Trovare la somma degli n primi numeri interi dispari: degli n primi numeri interi pari.

6° Quanti termini occorrerà di prendere di una progressione aritmetica, il cui primo termine è 7 e la ragione 2 per avere una somma eguale a 567 ?

7° Trovare la somma dei primi n numeri della forma $4r+1$.

(Si ottengono questi numeri facendo successivamente $r=0, 1, \dots, n-1$)

8° Trovare la somma di $2n$ termini della serie

$$1-3+5-7+9\dots$$

(Si sommino prima i positivi, poi i negativi).

9° Per scavare un pozzo artesiano fino alla profondità di 500 metri si pagano lire $3,24$ per il 1° metro e lire $0,05$ di più per ogni metro seguente. Quanto si pagherà per l'ultimo metro e quanto per tutto il pozzo ?

10° Dimostrare che le differenze dei quadrati dei numeri naturali costituiscono una progressione aritmetica.

11° Se nell'equazione $ax+b=y$ si mettono successivamente per x i valori $c, c+d, c+2d, \dots$ anche i valori corrispondenti di y formano una progressione geometrica.

12° Sopra una retta si trovano disposte n pietre alla distanza di 10 metri l'una dall'altra: quale sarà il punto X di questa retta tale che per trasportare in esso successivamente ciascuna pietra occorra un cammino doppio di quello necessario per trasportarle nel luogo occupato dalla prima pietra.

(Si supponga in ambedue i casi di partire dalla prima pietra).

13° Trovare la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali.

(Si osservi che è $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$: si ponga in questa successivamente, invece di n , $n-1$, $n-2$, 2, 1, e si sommi).

14° Trovare la somma dei cubi dei primi n numeri naturali.

(Si osservi che è

$$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1,$$

e si operi in modo analogo al precedente).

15° Trovare la somma di n termini della serie

$$1 \cdot 2 + \dots + n(n+1).$$

(Si osservi che è $n(n+1) = n^2 + n$).

16° Trovare la somma di n termini della serie

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots + n(n+1)(n+2).$$

17° Quali sono le progressioni per differenza, nelle quali la somma di due termini qualunque fa parte della progressione?

18° Trovare cinque numeri in progressione aritmetica conoscendo la loro somma s e il loro prodotto p .

(Si indichi con x il medio, con y la ragione. — Le equazioni sono $5x = s$

$$2500 \cdot sy^4 - 125 \cdot s^3 y^2 + s^5 - 3125 \cdot p = 0).$$

19° Trovare la somma di n termini della serie

$$a^2 - b^2, \quad a + b, \quad \frac{a+b}{a-b}, \dots$$

20° Trovare la somma di 10 termini della serie

$$2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots$$

21° Quali sono le progressioni per quoziente nelle quali il prodotto di due termini qualunque fa parte della progressione?

22° Provare che, se in una serie di numeri ciascuno è la semi-somma di quelli che lo comprendono, questi numeri formano una progressione per differenza. Se ciascuno è medio proporzionale tra i due che lo comprendono, essi formano una progressione per quoziente.

23° Quand'è che il rapporto tra la somma dei primi n termini di una progressione geometrica e la somma degli n che seguono, è indipendente da n ?

24° $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ possono far parte di una stessa progressione per differenza e per quoziente?

(Si fonderà questa ricerca sui numeri 202 e 211).

25° Se si prende la serie dei numeri impari 1, 3, 5, 7, e la si separa in gruppi, il 1° dei quali abbia un termine, il 2° due termini, il 3° tre termini ec. ec. la somma dei termini di uno stesso gruppo è un cubo.

26° Trovare il rapporto di due numeri x e y , sapendo che il loro medio geometrico sta al loro medio aritmetico come b sta ad a .

(Si ha $\sqrt{xy} : \frac{x+y}{2} = b : a$, che si riduce al-

l'altra

$$\frac{\frac{x}{y} - 1}{\frac{x}{y} + 1} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

27° Il prodotto di tre numeri in proporzione geometrica è 64 e la somma dei loro cubi è 584: quali sono questi numeri?

28° Trovare il limite di ciascuna delle somme

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27} - \dots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{10} + \dots$$

quando il numero dei termini di ciascuna cresce indefinitamente.

(Per l'ultima si osserverà che è

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$$

ec. ec.).

29° Trovare, applicando la prop. 2^a, (216) le frazioni ordinarie generatrici delle frazioni decimali periodiche

$$0, 1111 \dots$$

$$0, 378 378 \dots$$

30° Mostrare che è

$$\sqrt{0, 444 \dots} = 0, 666 \dots$$

31° Se in un quadrato dato si costruisce il quadrato che ha per vertici i punti di mezzo dei suoi lati, e si ripete la medesima costruzione su questo secondo quadrato e poi sul terzo, e così di seguito: quale sarà il limite delle aree dei quadrati inscritti successivamente gli uni negli altri, quando il numero di essi aumenta indefinitamente?

32° Se da un punto di uno dei lati di un angolo di 60° si abbassa sull'altro lato una perpendicolare, e

dal piede di questa si abbassa una seconda perpendicolare sul primo lato e dal piede di quest'ultima un'altra sul secondo lato e così di seguito sino all'infinito, quale sarà il limite della somma delle lunghezze di esse, dato che la prima sia di m millimetri?

33° In un cerchio di raggio r sono tirati due diametri perpendicolari: in ciascuno dei quadranti è inscritto un cerchio tangente al cerchio dato e ai due diametri: poi un nuovo cerchio tangente a questo cerchio e ai due diametri: poi un terzo cerchio tangente all'ultimo cerchio descritto e ai due diametri: e così di seguito indefinitamente. — Si trovi il limite della somma delle aree di questi cerchi, il cui numero aumenta indefinitamente.

NOTA

sui numeri irrazionali.

Nell'introdurre il concetto dei numeri irrazionali, al capitolo XII, non abbiamo recato innanzi alcuna considerazione che esca dal dominio dell'Aritmetica pura; ma possiamo anche mostrare che un numero irrazionale, così come uno razionale, può assumersi come *misura* di una grandezza concreta.

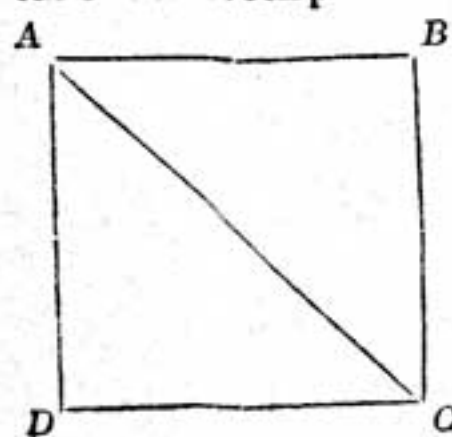
Quando si istituisce un confronto fra due grandezze omogenee A e B possono accadere tre casi distinti:

1° Che la A si possa pensare come la riunione di un certo numero m di grandezze tutte eguali all'altra B : e allora si dice che *questo numero intero m è la misura di A quando si prende per unità di misura B .*

2° Che la A non si possa pensare come riunione di un certo numero di grandezze eguali ciascuna alla B ; ma che ciascuna delle A e B si possa pensare come la riunione di un certo numero, diverso per ognuna delle due, di grandezze tutte eguali a una terza C omogenea alle due A e B : ad es. la A sia la riunione di m grandezze eguali alla C , e la B lo sia di n : la C sarebbe in tal caso la parte n^a della B , e la A sarebbe la riunione di m di queste parti n^e di B : allora diremo che il numero frazionario $\frac{m}{n}$ è la misura di A quando si prende B per unità di misura.

3° Che le due A e B non si possano contemporaneamente pensare come riunioni di grandezze eguali a un'altra grandezza qualsiasi omogenea con quelle.

Per provare come ciò possa accadere, basterà portare un esempio.



Abbiasi un quadrato $ABCD$: non esiste alcuna lunghezza la quale si possa pensare come contenuta esattamente un certo numero di volte nella diagonale AC e contemporaneamente un certo numero di volte nel lato AB .

Pongasi, se è possibile, che questa lunghezza esista: si potrà sempre supporre che sia una retta. Essa sarebbe una certa parte ad es. la m^a parte di AC e contemporaneamente la parte n^a di AB e poichè è

$$AB < AC < 2AB$$

così sarebbe

$$n < m < 2n.$$

Il quadrato costruito sulla parte m^a di AC sarebbe dunque eguale a quello costruito sulla parte n^a di AB :

ma il quadrato costruito sulla parte m^a di AC è la parte $(m^2)^{esima}$ di quello fatto su tutta la AC ; così quello fatto sulla parte n^a di AB è la parte $(n^2)^{esima}$ di quello fatto su tutta la AB : dunque l'intero quadrato fatto sulla AC è eguale ad m^2 volte la parte $(n^2)^{esima}$ di quello fatto sulla AB ; epperò il numero $\frac{m^2}{n^2}$ sarebbe la misura del quadrato fatto sulla AC quando si prendesse per unità di superficie il quadrato fatto sulla AB ; ma per un notissimo teorema il quadrato della AC è il doppio di quello della AB : quindi, secondo questo teorema, il numero che misura il quadrato di AC quando si prende per unità quello di AB deve essere il 2: bisognerebbe che fosse

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

il che è impossibile.

Se si chiama comune misura di due grandezze A e B una terza grandezza C , che può essere la stessa B , la quale si possa pensare contenuta esattamente un certo numero di volte in A e un certo numero di volte in B , dobbiamo concludere che esistono grandezze che considerate l'una rispetto all'altra ammettono una comune misura, e ne esistono altre che non ammettono alcuna comune misura, cioè due grandezze date potranno essere commensurabili ovvero incommensurabili.

Quando due grandezze sono commensurabili, la relazione che il confronto reciproco rivela fra esse, si esprime con un numero intero o frazionario cioè con un numero razionale che si chiama la misura dell'una rispetto all'altra, cioè la misura dell'una quando si prende per unità di misura l'altra: e viceversa, è manifesto che se la misura di una grandezza rispetto

a un'altra è un numero razionale, le due grandezze sono *commensurabili*. Perciò i numeri *razionali* soglionsi anche chiamare *commensurabili*.

Se dunque si hanno più grandezze omogenee delle quali alcune sieno commensurabili con una certa grandezza omogenea con esse, altre invece sieno incommensurabili con questa, esisteranno i numeri razionali, che sono le *misure* delle prime rispetto alla detta grandezza: per le seconde, quando non si conoscessero altro che numeri razionali, non esisterebbero le misure di essa rispetto alla data. — Epperò, quando si avessero solamente numeri razionali, non si potrebbero sempre rappresentare con numeri tutte le grandezze possibili di una data specie, quando si riferissero tutte a una di esse presa per unità.

Ecco dunque per questo riguardo manifesta la necessità di nuovi numeri, oltre i razionali; cioè quando si voglia che il numero serva ad esprimere la relazione di una grandezza ad un'altra omogenea, il solo numero razionale non basta a ciò in tutti i casi, giacchè non si può con esso esprimere la relazione che pure si comprende che esiste, tra una grandezza ed un'altra incommensurabile con essa.

Ora mostreremo che il numero atto a ciò è il numero irrazionale, da noi definito come *limite* di una serie di numeri razionali che procedono secondo una certa legge.

Dobbiamo investigare intimamente, la relazione che passa tra una grandezza ed un'altra incommensurabile con essa.

Trasportando dai numeri alle grandezze il concetto di *limite*, (125, 129), limitandoci per lo scopo nostro a considerare grandezze variabili sempre crescenti ovvero sempre decrescenti, noi diremo:

Una grandezza V variabile secondo una certa legge ha per limite una grandezza costante L, se V passando per stati successivamente crescenti ovvero per stati successivamente decrescenti può differire da L meno di ogni grandezza assegnabile, ma non diviene mai eguale ad L.

Ciò posto, prendiamo a considerare una retta OA incommensurabile colla OB che si assume come unità di misura; i ragionamenti che qui faremo sono identicamente applicabili a grandezze di qualunque altra specie, purchè esse godono della proprietà di essere indefinitamente divisibili in parti.

Si vede subito che

$$O \xrightarrow{1} B \xrightarrow{A'} A' \xrightarrow{A''} A'' \xrightarrow{A'''} A''' \xrightarrow{A''''} A'''' \xrightarrow{B''} B' \xrightarrow{B'''} B''' \xrightarrow{B''''} B'''' \xrightarrow{B'''''} B''''' \dots$$
 esistono sempre due lunghezze OA' e OB' misurate da due numeri interi consecutivi a ed $a+1$, una minore, l'altra maggiore di OA ; poi se immaginiamo divisa ciascuna unità da O a B' in n parti uguali e segnati i punti di divisione, il punto A estremo della OA cadrà tra due consecutivi di questi punti A'' , B'' : e la OA sarà così compresa tra due lunghezze OA'' , OB'' misurate da due numeri frazionari $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$: se poi immaginiamo ciascuna unità da O a B' divisa in $n' = np$ parti uguali, il punto A cadrà pure tra due consecutivi dei nuovi punti di divisione A''' e B''' , e la OA sarà compresa tra le due OA''' , OB''' misurate coi numeri $\frac{m'}{n'}$ e $\frac{m'+1}{n'}$; dividendo poi ancora ciascuna unità in $n'' = n'p$ parti uguali, troveremo due lunghezze OA'''' , OB'''' misurate coi numeri $\frac{m''}{n''}$ e $\frac{m''+1}{n''}$ le quali pure comprendono la OA . — A questo modo si può continuare indefinitamente e formare così due serie di lunghezze, le une

$\alpha) \quad OA', \quad OA'', \quad OA''', \quad \dots$

sempre crescenti, o almeno non mai decrescenti, e sempre minori della OA : le altre

$$\beta) \quad OB', \quad OB'', \quad OB''', \dots$$

sempre decrescenti, o almeno non mai crescenti, e sempre maggiori della OB .

Ed è manifesto che, scegliendo in altro modo i numeri $n', n'', n''' \dots$, delle serie di grandezze che soddisfino alle condizioni, a cui soddisfano le serie $\alpha)$ e $\beta)$, se ne possono costruire in quante maniere si vogliono. Qualunque sia la legge, secondo cui le grandezze di ciascuna delle due serie si succedono, e per quanto ciascuna serie si prolunghi, non sarà mai possibile che tra le grandezze dell'una o dell'altra serie se ne trovi una eguale alla OA , perchè essa è incommensurabile coll'unità.

Se ora si ammette che possa esistere una sola grandezza la quale abbia la proprietà di essere sempre compresa tra le grandezze dell'una e dell'altra serie, si dee concludere che la OA è precisamente quest'unica grandezza e, secondo il concetto da noi stabilito, è il limite delle une e delle altre.

Appunto in questo carattere di *limite comune* alle due serie di grandezze commensurabili che scegliendo comunque i numeri $n, n', n'' \dots$ nel modo anzidetto si possono costruire, consiste la *relazione* che una grandezza incommensurabile ha coll'unità, perchè solamente una grandezza incommensurabile coll'unità può avere questo carattere. Infatti anche per una grandezza, che è commensurabile coll'unità, si potranno costruire due determinate serie, l'una di grandezze commensurabili crescenti, l'altra di grandezze commensurabili decrescenti, che abbiano per limite la grandezza commensurabile data, ma non sarà possibile che essa

continui ad essere il limite comune anche di tutte le altre serie di grandezze, che in infinite maniere diverse si possono costruire cambiando la legge secondo cui sono presi i numeri $n, n', n'' \dots$; perocchè, essendo essa commensurabile, si potranno anche prendere questi numeri così, che tra le grandezze dell'una o dell'altra serie o anche di entrambe si trovi appunto la grandezza commensurabile che si considera: e allora, secondo il concetto da noi posto, essa non potrebbe dirsi il limite delle due serie di grandezze così formate.

Così è dimostrato, che una grandezza incommensurabile coll'unità, cioè che non può essere pensata come riunione di grandezze eguali all'unità o a una parte di questa, può essere considerata come il limite, nel concetto da noi sopra stabilito, di serie di grandezze commensurabili.

Ciò posto, quando, come precedentemente, si sono costruite le due serie di grandezze

$$\alpha) \quad OA', \quad OA'', \quad OA''', \dots$$

$$\beta) \quad OB, \quad OB'', \quad OB''', \dots$$

aventi per limite comune la OA , contemporaneamente si hanno anche le due serie di numeri razionali

$$\alpha') \quad \frac{m}{n}, \quad \frac{m'}{n'}, \quad \frac{m''}{n''}, \dots$$

$$\beta') \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'+1}{n'}, \quad \frac{m''+1}{n''}, \dots$$

Ora un numero razionale maggiore di tutti i numeri $\alpha')$ e minore di tutti i numeri $\beta')$ non esiste, giacchè, se esistesse, sarebbe esso la misura della OA : le serie $\alpha')$ e $\beta')$ (vedi n° 133, 134) definiscono dunque come loro limite comune un numero irrazionale.

Questo numero irrazionale, così definito, è rispetto al numero 1, quello che è la grandezza OA rispetto alla grandezza OB ; esso esprime dunque la relazione che passa tra la grandezza OA e la OB , cioè è la *misura* della OA rispetto alla OB .

Così è dimostrato che, come un numero razionale, così anche uno irrazionale può assumersi come *misura* di una grandezza concreta; e se, quando le grandezze che si considerano sono di quelle per le quali sussiste la divisibilità dell'infinito, è ora permesso dire, che per ognuna di esse esiste un numero che ne è la *misura*, ciò accade solamente perchè, oltre ai numeri razionali, si hanno anche i numeri irrazionali.

Per la ragione ora detta, che i numeri irrazionali sono le *misure* delle grandezze incommensurabili coll'unità, sogliono anche essere chiamati numeri *incommensurabili*.

FINE.

INDICE.

AVVERTIMENTO	Pag. III
SPIEGAZIONE DEI SEGNI ALGEBRICI.	1
CAPITOLO I. Numeri positivi e negativi.	3
Addizione e sottrazione sui numeri algebrici.	42
Polinomi	22
» II. Moltiplicazione algebrica	34
» III. Divisione algebrica.	62
» IV. Massimo comune divisore e minimo comune multiplo.	97
» V. Frazioni algebriche	406
» VI. Potenze	424
Esponenti negativi.	430
» VII. Eguaglianze	446
» VIII. Variabile — Funzione	454
Equazioni.	160
Equazioni di 4° grado	180
Problemi	191
» IX. Funzioni di due variabili	202
Sistemi d'equazioni	209
Discussione delle formule di risoluzione	224
Funzioni di tre variabili	234
Sistemi di tre equazioni.	239
Funzioni di n variabili	248
Sistemi d'equazioni speciali.	259
» X. Discussione della soluzione di un problema	279
» XI. Diseguaglianze	298
Diseguaglianze di 4° grado.	308
» XII. Limiti	312
Numeri irrazionali	335
Calcolo dei radicali.	359
Esponenti frazionari	373

CAPITOLO XIII. Equazioni di 2° grado.	Pag. 402
Numeri immaginari	445
Disuguaglianze di 2° grado	439
» XIV. Equazioni biquadratiche	448
Sistemi d'equazioni di grado superiore al	
primo	450
» XV. Funzione esponenziale.	470
Equazione esponenziale. — Logaritmi.	492
Calcolo con logaritmi.	507
» XVI. Proporzioni.	518
Progressioni aritmetiche	523
Progressioni geometriche	532
NOTA sui numeri irrazionali.	549

		ERRORI	CORREZIONI
Pagina	Linea		
17	23	$b + a'$	$a' + b'$
21	4	$a + (-b') - (-c')$	$a + (-b') + (-c')$
39	1	nelle precedenti relazioni	nella penultima relazione
64	13	e	o
70	11	divisore	quoziente
158	32	fratta invece quando ciò non accade	fratta quella la cui espressione è, o può ridursi a una fra- zione avente per nu- meratore e per de- nominatore una fun- zione intera della x , e la funzione nume- ratore non è divisi- bile esattamente per la funzione-denomi- natore. — Il nume- ratore potrà anche essere costante.
417	1	formati uno ec.	formati contando uno
420	17	essa.	esse.