CAPITOLO VIII.

Numeri variabili.

---

82. Si consideri l'espressione $2x$, dove x rappresenta un numero qualunque. Sinchè il valore di x è indeterminato, anche il valore dell'espressione $2x$ è tale; ma se alla lettera x si attribuisce un valore particolare p. es. 0, ovvero -1, ovvero $\frac{1}{3}$, ec., allora resulta subito determinato il valore dell'espressione medesima, e precisamente esso è eguale a 0, ovvero a -2, ovvero a $\frac{2}{3}$, ec.: secondochè si fa $x=0$, o $x=1$, o $x=\frac{1}{3}$, ec., ec. E se effettivamente si danno alla lettera x un dopo l'altro i valori

$$-3,\ -1,\quad 0,\ \frac{1}{3},\ 4,\ 5,\ \ldots.$$

scelti a piacere, l'espressione $2x$ assumerà corrispondentemente i valori

$$-6,\ -2,\quad 0,\ \frac{2}{3},\ 8,\ 10\ldots.$$

Si esprime questo fatto dicendo, che la lettera x rappresenta, o più semplicemente, è un numero *variabile indipendente*, e l'espressione $2x$ rappresenta, ovvero, è un numero *variabile dipendente* da quello, oppure, secondo una denominazione adottata in tutti i rami della Matematica *funzione di quello;* e se si denota con y l'espressione $2x$, cioè si pone

$$y=2x,$$

si dirà dunque che x e y sono due *numeri variabili;* la x *variabile indipendente o arbitraria,* giacchè va assumendo valori scelti da noi a piacere, la y *variabile dipendente o funzione,* perchè per ogni valore particolare assunto da quella, prende un determinato valore speciale.

Parimente, l'espressione $2x^2-3$ non ha valore determinato sinchè rimane indeterminato il valore di x, ma, se a questa si dà un valore particolare, anche quella assume un unico e determinato valore speciale; p. es. se si fa successivamente

$$x=-1,\ x=0,\ x=\frac{1}{2},\ x=2,\ \ldots.$$

l'espressione $2x^2-3$ prende, corrispondentemente a quelli, i valori rispettivi

$$-1,\quad -3,\quad \frac{-5}{2},\quad 5,\ \ldots.$$

Se si pone

$$z=2x^2-3$$

si dovrà dunque dire: che x e z sono due *numeri variabili:* x *variabile indipendente o arbitraria,* z *funzione di quella.*

Così pure l'espressione $\frac{1}{x}$, se in essa si attribuiscono alla x successivamente diversi valori, per ciascuno di questi (escluso però lo zero) prende un unico e determinato valore: si esprime ciò dicendo che l'espressione $\frac{1}{x}$ è una *funzione* della variabile arbitraria x.

Senza recare altri esempi, che è facile moltiplicare all'infinito, porremo dunque questa definizione: *se* y *ed* x *rappresentano due numeri indeterminati tali, che, se si attribuiscono successivamente ad* x *valori differenti,* y *prende, in corrispondenza a ciascuno di questi, un unico e determinato valore speciale, allora* y *si chiamerà funzione della variabile arbitraria* x.

83. Un concetto analogo a questo che noi abbiamo qui posto pei numeri, ci si offre anche nella considerazione delle grandezze concrete.

Basta gettare uno sguardo nel campo della Geometria:

1° Si considerino due rette che si tagliano: formano due angoli opposti al vertice, che possiamo designare l'uno con $\hat{x}$ l'altro con $\hat{y}$ (si noti bene che qui $\hat{x}$ e $\hat{y}$ non rappresentano numeri): si faccia ruotare una delle rette intorno al vertice, l'altra rimanendo fissa: l'angolo $\hat{x}$ cresce o decresce secondo il senso della rotazione; e ad ogni *stato*, per cui passa nel suo variare l'angolo $\hat{x}$ corrisponde uno *stato* e uno solo dell'angolo $\hat{y}$, si dirà dunque che questo è una *grandezza variabile dipendente* da quello: e la legge di dipendenza, come è ben noto, è questa: che gli stati successivi dell'uno sono rispettivamente eguali agli stati corrispondenti dell'altro.

2° Un triangolo Δ ha la sua base B sopra una retta illimitata e il vertice sopra un'altra parallela alla base; se s'immagina che, rimanendo fisso un estremo della B, l'altro si muova, la B cresce o decresce secondo il senso del moto; e ad ogni *stato* per cui passa la base B nel suo variare corrisponde uno *stato* e uno solo del triangolo Δ; si dirà dunque che questo è una *grandezza variabile dipendente* da quella: e la legge di dipendenza, come si sa, è questa: che se la base diviene doppia, tripla, ec., ovvero metà, un terzo, ec., anche il triangolo diventa doppio, triplo, ec., ec., ovvero metà, un terzo, ec., ec.

3° Sopra una data retta si faccia il quadrato: se s'immagina che un estremo della retta si muova e sopra ciascuno dei successivi stati, per cui essa passa si intende costruito il quadrato, giacchè sopra una retta si può fare un solo quadrato, così si vede che ad ogni *stato*, per cui passa la grandezza *lato*, corrisponde uno e un solo *stato* della grandezza *quadrato:* perciò questo è *dipendente* da quello, e precisamente con questa legge: che se il lato diviene doppio, triplo, quadruplo, ec., il quadrato diventa rispettivamente quattro, nove, sedici, ec.,... volte più grande.

4° Dati due lati e l'angolo compreso si può costruire un determinato triangolo: si tenga fisso uno dei lati dati, e si faccia muovere l'altro, conservandone la lunghezza, intorno al vertice; cresce o decresce, a seconda del senso del moto, l'angolo compreso tra essi, ma, come si vede, cresce o decresce insieme anche il lato opposto: ed ogni *stato* di quello corrisponde uno ed un solo *stato* di questo: il lato è dunque, quando riman fissa la lunghezza degli altri due lati, una grandezza dipendente dall'angolo opposto: ma la legge di questa dipendenza non può essere data qui.

5° Una retta cadendo sopra un'altra fa due angoli adiacenti, che insieme valgono due retti; se si fa ruotare quella retta intorno al punto d'intersezione, uno degli angoli cresce o decresce secondo il senso della rotazione e contemporaneamente l'altro decresce o cresce; e perchè ad uno *stato* di quello corrisponde un solo *stato* di questo, così l'uno è grandezza variabile *dipendente* dall'altro; con la legge, che di quanto

l'uno cresce o decresce, d'altrettanto l'altro decresce o cresce rispettivamente.

6° Sopra una retta data si descriva una semicirconferenza: unendo un punto qualunque di questa coi due estremi del diametro si forma un triangolo rettangolo: s'immagini che quel punto partendo da uno degli estremi del diametro percorra la semicirconferenza: uno dei cateti cresce, mentre l'altro decresce: ad ogni *stato* di quello corrisponde un solo *stato* di questo; l'uno è dunque *dipendente* dall'altro; e la legge di dipendenza non è quella dell'esempio precedente, come facilmente ci si persuade, se si osserva, che, quando uno dei cateti è piccolissimo, la somma di essi differisce pochissimo dall'ipotenusa, mentre negli altri casi tale differenza è sensibile; la legge di dipendenza ci è qui data dal Teorema di Pitagora.

A questi esempi, che noi abbiamo ricavato dalle prime nozioni della Geometria, se ne potrebbero poi aggiungere infiniti altri che s'incontrano nella Geometria stessa e anche fuori del campo della Geometria.

A noi basta aver fatto vedere che il concetto della *variabilità dipendente* cioè, *di funzione* che sopra abbiamo stabilito pei numeri, lo si incontra effettivamente ad ogni passo quando si considerano le grandezze concrete.

84. Ritornando ora alla considerazione di un numero y funzione di un numero variabile x, diremo, che y è funzione *intera* di x, se l'espressione di essa è, o può ridursi a un polinomio nel quale ogni termine è il prodotto di un numero determinato per una potenza della x ad esponente positivo o nullo [1]; funzione fratta invece quando ciò non accade.

[1] La potenza x^0 ordinariamente si omette, perchè, come si sa, qualunque valore si dia alla x essa è sempre eguale a 1.

Così le

1) $y = 3x + 4$

2) $y = x^2 - 2x - 3$

3) $y = \frac{2}{3} \cdot x - \frac{1}{4} + 2x^2$

4) $y = \left(-\frac{2}{11}\right)x^3 + 3 - \frac{4}{7}x$

5) $y = \frac{x^{3n}}{x^n - 1} - \frac{x^{2n}}{x^n + 1} - \frac{1}{x^n - 1} + \frac{1}{x^n + 1}$

sono funzioni *intere;* i coefficienti che moltiplicano la x nei differenti termini possono essere qualunque, interi o frazionari, positivi o negativi, come pure possono essere qualunque i termini che non contengono la variabile x cioè, contengono x^0, e che si chiamano termini *costanti* o termini *noti*.

Le

6) $y = \frac{1}{x}$

7) $y = 2 - \frac{2}{x+1} + 5x$

sono funzioni fratte.

Una funzione *intera* si dice di 1°, 2°, 3°,... grado secondochè il massimo esponente, a cui in essa comparisce la variabile, è 1, o 2, o 3,... ; così tra le precedenti la 1) è di 1° grado, le 2) e 3) sono di 2° grado, la 4) è di 3° grado.

Si può osservare che una funzione *intera* di 1° grado può contenere due sole specie di termini: termini contenenti la variabile x come fattore al 1° grado e termini *costanti*, cioè, che non la contengono; se si raccolgono in un solo tutti quelli della 1ª specie, dando per coefficiente alla x la somma algebrica dei coeffi-

cienti che essa ha nei differenti termini, e si raccolgono pure in un solo tutti quelli della 2ª, si potrà sempre ricondurre la funzione intera data alla forma

$$ax+b$$

dove a significa il numero, che resulta dalla somma dei coefficienti di x nei varii termini, e b il numero che resulta dalla somma dei termini costanti; e così nell'espressione $ax+b$, a e b esprimono numeri qualunque ma determinati, x invece è il numero variabile che può successivamente ricevere differenti valori.

Considerazioni analoghe a queste ci permettono di dire che una funzione *intera* di 2° grado si può sempre ricondurre alla forma

$$ax^2+bx+c$$

dove a, b, c rappresentano numeri qualunque ma determinati e x il numero variabile che può ricevere successivi valori differenti.

Equazioni.

85. Riguardo alle funzioni si presenta ora naturalmente la seguente questione:

α) *Essendo* y *una funzione di* x, *giacchè ad ogni valore particolare di* x *corrisponde un determinato valore di* y, *si domanda: è possibile dare alla* x *un valore o più generalmente, valori, a ciascuno dei quali corrisponda per la* y *il valore zero?*

E per dilucidare subito la cosa con un esempio, si consideri la funzione

$$y=2x+4;$$

si diano alla x, successivamente i valori

0, 1, 2, 3, 4

si vede che y assume rispettivamente i valori

4, 6, 8, 10, 12

e se si continua a porre in luogo di x un numero positivo è manifesto che y non diverrà mai *zero:* si provino dunque i valori negativi: ponendo per x successivamente

$$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5$$

si trovano per y i valori

$$+2,\quad 0,\ -2,\ -4,\ -6:$$

ecco dunque che dando alla x il valore -2, si è ottenuto per y il valore *zero*.

Così, se si ha la funzione

$$y=x^2-1$$

si vede subito che, dando alla x il valore $+1$ ovvero il valore -1, la y prende il valore 0.

Qui la questione è stata facilmente risoluta: ma si domanda, si può risolverla per ogni altra funzione?

Ma possiamo anche proporci un'altra questione più generale della precedente: possiamo, cioè, domandarci:

β) *È possibile dare alla* x *un valore tale, ovvero, valori tali che a ciascuno di essi corrisponda per la* y *un valore eguale a un numero qualunque assegnato?*

Riprendendo la funzione

$$y=2x+4$$

si può domandare, qual è il valore, ovvero, quali sono quei valori della x che sostituiti nella y la rendono uguale p. es. a 12.

E subito si vede che $x=4$ è un tale valore.

Possiamo poi anche proporci quest'altra questione:

γ) *Se* y *e* z *sono due funzioni della variabile* x, *è possibile dare alla* x *un valore tale, ovvero, valori tali che a ciascuno di essi corrispondano valori eguali di* y *e di* z ?

Se si hanno le funzioni

$$y=2x+4 \quad \text{e} \quad z=-3x+1$$

e si fa in esse

$$x=-\frac{3}{5}$$

divengono ambedue eguali a

$$2\left(-\frac{3}{5}\right)+4=-3\left(-\frac{3}{5}\right)+1=\frac{14}{5}.$$

Quando, avendosi una funzione y della variabile x p. es. $y=2x+4$, ci si propone la questione α), cioè, si vuol trovare quel valore di x o quei valori di x ciascuno dei quali rende y eguale a zero, ciò manifestamente si può anche esprimere dicendo: che si cerca quel valore o quei valori di x, se ve ne sia più d'uno, ciascuno de' quali verifica la relazione

$$\delta) \qquad 2x+4=0.$$

Così, il proporci la questione β) lo si può esprimere dicendo: che si cerca quel valore o quei valori di x, quando sono più, per ciascuno dei quali è verificata la relazione

$$\varepsilon) \qquad 2x+4=12$$

se 12 è il valore, che si vuol fare acquistare alla funzione $2x+4$.

Infine, il proporci la questione γ) a riguardo p. es. delle due funzioni

$$y=2x+4 \quad , \quad z=-3x+1 \, ,$$

lo si può enunciare dicendo: che si cerca quel valore o quei valori di x che verificano la relazione:

$$\eta) \qquad 2x+4=-3x+1.$$

Il volere esprimere col linguaggio algebrico una delle questioni α), o β), o γ), ci conduce dunque a scrivere una delle relazioni δ), o ε), o η); si dice allora che si stabilisce un'*equazione*.

È manifesta la differenza essenziale che corre tra le equazioni e le identità, delle quali abbiamo parlato nel capitolo precedente. — In queste si può attribuire alle lettere che vi compariscono qualunque valore e sempre si ha uguaglianza tra i due membri; nelle equazioni non è così: in esse, quando si pone per la variabile x che chiamasi l'*incognita* dell'equazione, un valore qualunque, in generale il 1° membro, chiamando così l'espressione scritta a sinistra del segno $=$, assume un valore diverso da quello che assume il 2°, chiamando così l'espressione a destra: e appunto si domanda qual è quel valore di x o quali sono quelli pei quali essi divengono eguali.

Il trovare siffatto valore o siffatti valori di x dicesi *risolvere* l'equazione. — Trovati che sieno, se uno qualunque di essi è sostituito in questa, in luogo di x, essa diventa un'identità.

Così se si ha l'equazione

$$2x+3=x+5$$

se si dà ad x un valore qualunque diverso da 2, i due membri sono diseguali, ma se si fa $x=2$ quella diventa

$$2.2+3=2+5.$$

Il valore o i valori dell'incognita x, per ciascuno

dei quali l'equazione diventa un'identità, o come anche si suol dire, pei quali essa è verificata, ovvero essa è soddisfatta, chiamansi *radici* o *soluzioni* dell'equazione.

Due equazioni si dicono *equivalenti*, se ammettono la stessa radice o le stesse radici nel caso che ne abbiano più d'una. — Dimodochè, quando si tratta di risolvere una data equazione, si può invece di questa risolverne un'altra, la quale si sappia equivalente alla data. — Appunto in ciò consiste la risoluzione di una equazione; consiste cioè, nel sostituire all'equazione proposta un'altra equivalente, ma più semplice, a questa, una terza anche più semplice, e così di seguito sino a trovarne una così semplice che la soluzione o le soluzioni di essa sieno manifeste.

Siamo dunque condotti a studiare in che modo si possa da un'equazione data dedurne un'altra equivalente.

86. Siffatta trasformazione di un'equazione in un'altra equivalente riposa sui principii che seguono.

Per brevità rappresenteremo un'equazione scrivendo

$$A = B$$

dove s'intende che A e B denotino i due membri della medesima, e quindi A, o B, o anche ambedue rappresentano funzioni della variabile x.

1° *Le due equazioni*

$$A = B$$

e

$$A - B = 0$$

sono equivalenti.

Sappiamo [5, 4)] infatti che se due numeri sono uguali, la loro differenza è zero e viceversa: quindi,

se per un certo valore attribuito alla x in A e in B questi assumono valori, che designamo con A_α e B_α, e che sono eguali, cioè se si ha

$$A_\alpha = B_\alpha,$$

è anche vera l'altra

$$A_\alpha - B_\alpha = 0;$$

ma $A_\alpha - B_\alpha$ rappresenta il valore che assume la differenza $A - B$ quando in essa si pone α in luogo di x: dunque $A - B$ assume il valore *zero*, ossia, è verificata l'equazione

$$A - B = 0$$

ogniqualvolta che lo sia la

$$A = B.$$

Viceversa, se per un certo valore attribuito alla x la differenza $A - B$ assume il valore *zero*, ciò porta che per quello stesso valore di x, A e B assumano valori eguali: e così, se è sodisfatta l'equazione

$$A - B = 0$$

lo è anche l'altra

$$A = B.$$

Ogni valore dell'incognita, che sodisfa una delle due equazioni, sodisfa dunque anche l'altra.

Osservazione. Il principio ora dimostrato ci permette di ricondurre sempre la questione β) e la γ) alla α). Invero, data una funzione y della variabile x, sia proposto di trovare quel valore o quei valori della x che le fanno acquistare un valore eguale a c: si sarebbe condotti a risolvere l'equazione

$$y = c:$$

ma, pel principio ora detto, essa è equivalente all'altra

$$y - c = 0,$$

e, come è manifesto, questa equazione è quella la cui risoluzione risponde alla domanda: *trovare quel valore o quei valori della* x *che rendono eguale a zero la funzione* (y——c).

Parimente, se date due funzioni y e z della variabile x ci si propone di trovare quel valore o quei valori della variabile x, che fanno acquistare ad esse valori eguali, si è condotti a risolvere l'equazione

$$y = z:$$

ma essa è equivalente all'altra

$$y - z = 0$$

la cui risoluzione risponde alla domanda: *trovare quei valori della* x *che rendono nulla la funzione* y—z.

Così è provato, come si voleva, che ogni questione presentata nella forma β), o γ) si può sempre ricondurre a una della forma α).

2° *Se si ha una equazione*

$$A = B$$

e una identità

$$m = m,$$

l'equazione

$$A + m = B + m$$

ottenuta addizionando quelle membro a membro è equivalente alla proposta.

Infatti l'equazione

$$A = B$$

è, pel principio che precede, equivalente all'equazione

$$A - B = 0:$$

ma è manifesto che si ha identicamente:

$$\begin{aligned} A - B &= A - B + m - m \\ &= (A + m) - (B + m): \end{aligned}$$

quindi il porre l'equazione

$$A - B = 0$$

equivale a por l'altra

$$(A + m) - (B + m) = 0,$$

il che è quanto si voleva dimostrare.

Giacchè m è qualunque, se gli si suppone la forma $-n$, allora si ha che l'equazione

$$A - n = B - n$$

è pure equivalente alla proposta.

Si può dunque enunciare il seguente principio generale:

Aggiungendo o sottraendo uno stesso numero ai due membri di una equazione, si ottiene una nuova equazione equivalente a quella.

Corollario I. *In una equazione si può trasportare un termine da un membro all'altro purchè gli si cangi segno.*

Abbiasi, p. es., l'equazione

$$2x - 1 = 6x - 4:$$

si aggiunga 4 ad ambedue i membri: si ottiene, come ora si è provato, l'equazione equivalente

$$2x - 1 + 4 = 6x - 4 + 4$$

cioè

$$2x - 1 + 4 = 6x:$$

ora qui si tolga $2x$: si ha

$$2x - 1 + 4 - 2x = 6x - 2x$$

ossia

$$-1 + 4 = 6x - 2x.$$

Il che prova quanto si è enunciato.

COROLLARIO II. *Si può in una equazione cangiare segno a tutti i termini del 1° e del 2° membro.*

Applicando la regola ora data, si trasportino tutti i termini del 1° nel 2° membro e tutti quelli del 2° nel 1°, si otterrà l' equazione equivalente

$$-B = -A$$

che si può scrivere

$$-A = -B.$$

e questa è appunto quella che si ricava dalla proposta

$$A = B$$

cangiando il segno (16) a tutti i termini di A e di B.

3° *Se si ha una equazione*

$$A = B$$

e una identità

$$m = m,$$

dove m *denota un numero che è diverso da zero e non contiene l' incognita* x *dell' equazione proposta, allora l equazione*

$$mA = mB$$

che si ottiene moltiplicando le precedenti membro a membro, è equivalente alla proposta medesima.

Invero, come già abbiamo detto, l' equazione

$$A = B$$

è equivalente all' altra

$$A - B = 0.$$

Ora le due equazioni

$$A - B = 0 \quad \text{e} \quad m(A - B) = 0$$

sono equivalenti. Come si sa (23), perchè un prodotto sia nullo è necessario e sufficiente che lo sia uno dei

fattori: quindi, affinchè un valore di x verifichi l'equazione

$$m \,.\, (A - B) = 0$$

è necessario e sufficiente che verifichi l' una o l' altra delle due

$$m = 0 \quad , \quad A - B = 0 :$$

ma, per le ipotesi fatte sopra m, è escluso che esso sia identicamente nullo o che lo possa divenire per qualche valore particolare di x; dunque ogni valore di x che verifica la

$$m(A - B) = 0$$

ovvero la

$$mA = mB$$

deve verificare la

$$A - B = 0 :$$

viceversa, come è evidente, ogni valore di x che sodisfa a questa sodisfa anche a quella.

OSSERVAZIONE I. Se ad m si suppone la forma $\frac{1}{n}$, il che è permesso, purchè sia n diverso da zero, allora la proposizione precedente si trasforma in quest' altra:

Se si ha un' equazione

$$A = B$$

e una identità

$$n = n$$

n *denotando un numero che è diverso da zero e non contiene l' incognita* x, *l' equazione*

$$\frac{A}{n} = \frac{B}{n}$$

ottenuta dividendo quelle membro a membro, è equivalente alla proposta.

Questa proposizione e la precedente si possono comprendere in una sola, dicendo:

Moltiplicando o dividendo i due membri di un'equazione per uno stesso numero, che sia diverso da zero e non sia funzione dell' incognita dell' equazione, si ottiene una nuova equazione equivalente alla data.

Osservazione II. Importa che ci fermiamo alquanto intorno alle condizioni poste per m. Se m fosse zero, è chiaro che il ragionamento sopra esposto non reggerebbe più: sarebbe verificata la

$$mA = mB$$

anche quando non lo fosse la

$$A = B.$$

Se m è un numero espresso coi segni dell'Aritmetica, il valore di esso è sempre conosciuto: ma se m, pur non essendo funzione della x, è espresso con lettere, bisognerà evitare, circa ai valori da attribuirsi a queste, tutte le ipotesi che possano fare acquistare ad m il valore zero.

Appunto per questa ragione si è pure escluso che m sia funzione della variabile x: giacchè, se fosse, potrebbero esistere dei valori particolari della x, pei quali si ha $m = 0$: e allora la

$$m(A-B) = 0$$

potrebbe essere verificata non solo pei valori che sodisfano la

$$A-B = 0$$

ma anche per quelli che verificano l' equazione

$$m = 0$$

che si può stabilire eguagliando a zero il fattore m funzione della x; e questi potrebbero essere differenti dai primi.

Ciò in sostanza significa, che se si hanno due equazioni

$$A-B = 0 \quad , \quad m = 0$$

l' equazione

$$m(A-B) = 0$$

ottenuta moltiplicando quelle membro a membro non può dirsi equivalente a una di esse: perchè essa può avere per radici, le radici dell' una e dell' altra invece che le radici di una sola.

Il moltiplicare ambo i membri di una equazione per un fattore m funzione della x può dunque introdurre delle radici oltre quelle che già può avere la proposta.

Ad esempio prendiamo l' equazione

$$5x+1 = 2x$$

la quale manifestamente ammette la soluzione $x = -\frac{1}{3}$, e moltiplichiamone i due membri per l'espressione $x-2$.

Si otterrà l' equazione

$$(5x+1)(x-2) = 2x(x-2):$$

ammette anche essa la radice $-\frac{1}{3}$, ma oltre a questa ammette anche la radice 2, che non è radice della proposta, ma lo è invece dell'equazione

$$x-2 = 0.$$

Ma non accade sempre così: si consideri ad esempio l' equazione

$$2 = \frac{4}{x-1},$$

essa ammette la sola radice $x=3$: si moltiplichi un membro e l'altro pel fattore $x-1$; si otterrà

$$2(x-1)=4$$

la quale ammette pure la sola radice $x=3$.

Qui dunque la moltiplicazione pel fattore $x-1$ non ha introdotto alcuna radice estranea, per quanto il fattore medesimo si annulli per $x=1$.

Osservazione III. La moltiplicazione dei due membri di una equazione

$$A=B$$

per un numero m, ordinariamente, si fa allo scopo di mandar via i denominatori dei termini frazionari che possono trovarsi in essa.

Invero, quando si voglia ottenere ciò, basta moltiplicare ambo i membri dell'equazione per un multiplo comune a tutti i denominatori che in essa compariscono, perchè una moltiplicazione siffatta porta nel numeratore di ogni termine frazionario un fattore eguale al denominatore del termine medesimo, e quindi, colla soppressione dei fattori comuni, spariscono tutti i denominatori.

Se nessuno dei denominatori contiene l'incognita x, allora prendendo come moltiplicatore m il prodotto di essi, ovvero, se lo si sa trovare, il loro minimo comune multiplo, l'equazione

$$mA=mB$$

è certo equivalente alla proposta

$$1) \qquad A=B.$$

purchè alle lettere, che possono comparire nell'espressione di m, non si attribuiscano mai valori atti a renderlo nullo.

Esempio 1° Sia l'equazione

$$\frac{2x}{9}-\frac{1}{6}=\frac{x}{12}-\frac{1}{4}.$$

Per mandar via i denominatori basterà moltiplicare tutti i termini dell'equazione per 36, minimo comune multiplo di 9, 6, 12, 4, e si avrà

$$8x-6=3x-9$$

equivalente a quella.

Esempio 2° Si abbia l'equazione

$$\frac{x}{4bc}-\frac{1}{6b^2}=\frac{x}{3ac^2}-\frac{1}{2a^2}$$

dove, a nessuna delle lettere a, b, c si dia mai il valore 0.

Il minimo comune multiplo (58) sarà $12a^2b^2c^2$ e moltiplicando per esso i due membri dell'equazione si avrà l'altra equivalente

$$3a^2bcx-2a^2c^2=4ab^2x-6b^2c^2.$$

Ma se qualcuno dei denominatori contiene l'incognita x, allora anche il loro prodotto e il loro minimo comune multiplo, e in generale ogni loro multiplo comune, quando essi sieno espressioni *intere in* x,[1] dovrà contenerla; saremmo dunque nel caso, per mandar via i denominatori, di dovere moltiplicare i due membri dell'equazione per un fattore *funzione della* x, e la nuova equazione, che si ottiene, potrebbe perciò non esser più equivalente alla proposta.

È importante ricercare se si possa anche in questo caso condurre siffatta operazione del mandar via i deno-

[1] Se i denominatori non sono tutti *interi in* x, il loro prodotto può non contenere la x: p. es. il prodotto delle due espressioni ax, $\frac{1}{bx}$ è $\frac{a}{b}$.

minatori in modo che l'equazione priva dei medesimi, a cui si perviene, sia equivalente alla proposta.

Si raccolgano in un membro tutti i termini frazionari, o almeno tutti quelli che contengono la x nel denominatore, e nell'altro i rimanenti; si riducano i primi allo stesso denominatore, e se si può, al minimo denominatore comune; se ne faccia la somma algebrica dimodochè la proposta venga ad assumere la forma

$$2) \qquad \frac{C}{m} = D$$

dove C, m e D son espressioni *intere* rispetto a x: si sopprimano tutti i fattori comuni a C e a m: quella diverrà

$$3) \qquad \frac{C'}{m'} = D$$

indicando C' e m' ciò che divengono C ed m, dopochè ad essi sono tolti i fattori comuni; se ora si moltiplicano ambo i membri della 3) per m' si ottiene l'equazione

$$4) \qquad C' = m'D$$

che è priva di denominatori contenenti la x ed è equivalente alla proposta.

Se, come è possibile, m' non contiene la x, allora l'equivalenza è manifesta; ma pongasi che la contenga: C' ed m' sono espressioni *intere* in x che non ammettono alcun divisore comune, non potrà dunque esistere alcun valore a di x che le annulli contemporaneamente, perchè, se esistesse, allora C' e m' ammetterebbero (52) un divisore comune $x - a$, il che non è; e perciò un valore di x che annulla m' annullerà $m'D$, ma non già C': quindi tale valore non è radice della 4): passando dunque dalla 1) alla 4) non si è introdotto alcuna radice estranea, epperò la 4) è equivalente alla 1).

Questa, che qui abbiamo tracciata, sarebbe la via corretta per dedurre da una data equazione un'altra equivalente e priva di denominatori; ma, per essere certi del successo, è mestieri, come si vede, saper scoprire, per poi sopprimerli, tutti i fattori in x comuni a C e ad m, e quando questi sono polinomi, noi non abbiamo dato un metodo generale atto a ciò. — Appunto il non sapere sopprimere nella 2) tutti i fattori comuni a C e a m è causa che non si possa poi sempre da essa, moltiplicando per m, dedurne un'altra equivalente.

In pratica, quando da una data equazione si vogliono mandar via i denominatori, non si ha sempre la avvertenza di seguire passo per passo la via anzidetta: l'avvertenza cioè di ridurre prima la 1) alla forma 2): indi tentare di togliere tutti i fattori in x comuni ai due termini della frazione, che costituisce il 1° membro della 2) e moltiplicare infine pel denominatore che rimane: più spesso si suole operare nel modo seguente: si riduce, per quanto lo si sa fare, a più semplice espressione ciascun termine frazionario che trovasi nei due membri dell'equazione; si ricerca, se si può, il minimo comune multiplo, e se no, si fa il prodotto di tutti i denominatori; indi si moltiplicano ambo i membri per questo o per quello secondochè fu trovato l'uno o l'altro: così spariscono i denominatori. — Ma è manifesto, che se il moltiplicatore adoperato contiene l'incognita x, l'equazione così ottenuta può non essere equivalente alla proposta. Allora si deciderà se lo sia o no, uguagliando a zero il moltiplicatore adoperato e ricercando se tra le radici dell'equazione così formata ve ne siano di quelle che sodisfano la equazione medesima priva di denominatori, che si considera; se non ve ne sono, ciò è sufficiente per con-

cludere che essa è equivalente alla proposta; ma se ve ne sono, allora per sceverare le radici estranee dalle radici proprie di questa bisognerà operare così: dopo aver trovato le radici dell'equazione priva di denominatori, si sostituirà successivamente ciascuna di esse in luogo dell'incognita x nella proposta, e si riterranno come radici proprie di questa solamente quelle per le quali la proposta medesima resulta verificata.

Esempio 1°. Sia l'equazione

$$(1) \qquad 2+\frac{1}{x}=x-1+\frac{3}{x+1};$$

moltiplicando i due membri per $x(x+1)$, diviene

$$(2) \qquad 2x^2+2x+x+1=x^3-x+3x.$$

Si eguagli a zero il moltiplicatore $x(x+1)$: l'equazione

$$x(x+1)=0$$

ha le due radici $x=0$, $x=-1$, delle quali nessuna verifica l'equazione 2): dunque il moltiplicare la 1) pel fattore $x(x+1)$ non ha introdotto alcuna radice estranea; epperò le 1) e 2) sono equivalenti.

Alla quale conclusione si è subito condotti anche tenendo la via da noi primieramente indicata: cioè, si trasportino in un membro i termini frazionari, nell'altro i termini interi: si ha l'equazione

$$\frac{1}{x}-\frac{3}{x+1}=x-3$$

onde

$$\frac{x+1}{x(x+1)}-\frac{3x}{x(x+1)}=x-3$$

ovvero

$$\frac{1-2x}{x(x+1)}=x-3$$

ma la frazione $\frac{1-2x}{x(x+1)}$ è manifestamente irriducibile: quindi l'equazione

$$1-2x=x(x+1)(x-3)$$

è equivalente alla precedente.

Esempio 2° Sia l'equazione

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2},$$

giacchè è

$$1) \qquad x^2-a^2=(x-a)(x+a)$$

così si vede che per mandar via i denominatori basta moltiplicare per x^2-a^2: si ottiene l'equazione:

$$2) \qquad x+a+x-a=1$$

ovvero

$$2x-1=0.$$

L'equazione

$$x^2-a^2=0,$$

giacchè è sodisfatta se è $x-a=0$ e anche se è $x+a=0$, ha due radici $x=+a$ e $x=-a$ delle quali nessuna verifica la 2): dunque il moltiplicare per x^2-a^2 la 1) non ha introdotto alcuna radice estranea; epperò la 1) e la 2) sono equivalenti.

Esempio 3° Sia ancora l'equazione

$$1) \qquad 1-\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{1-x}-6:$$

si moltiplichino ambo i membri per $x-1$, si ottiene

$$2) \qquad x-1-x^2=-1-6(x-1).$$

Si eguagli a zero il moltiplicatore adoperato; e si ha l'equazione

$$x-1=0$$

che ammette la radice $x=1$; la 2) ammette le radici 6 e 1, delle quali solo la prima sodisfa la 1); moltiplicando la 1) per $x-1$ si è dunque introdotta la radice estranea $x=1$.

Se, invece di questo, applichiamo alla 1) il processo dianzi indicato come il più corretto, dedurremo subito un' equazione equivalente alla 1) medesima e priva di denominatori.

Dalla 1) si passa alla

$$\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{1-x}=-1-6$$
$$\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{1-x}=7$$
$$\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}=7$$
$$\frac{x^2-1}{x-1}=7$$

e sopprimendo il fattore comune $x-1$, si ha infine

$$x+1=7.$$

Questo esempio mostra bene, come possa riuscire vantaggioso seguire il detto processo.

Osservazione IV. Avvertenze analoghe a quelle che abbiamo fatto intorno all' equazione ottenuta moltiplicando per un numero m i due membri della proposta, si debbono ripetere riguardo a quella che si può ottenere dividendo.

Non si possono dividere per un numero eguale a zero i due membri di una equazione, perchè il dividere per zero non ha significato; quindi, se il divisore adoperato n è una espressione letterale, bisognerà poi evitare, circa ai valori particolari da attribuirsi alle

lettere in essa, le ipotesi che potrebbero renderla eguale a zero.

E in particolare, se la divisione consiste nella soppressione di un fattore, funzione della x, che sia contenuto in tutti i termini di una equazione proposta

$$A=B,$$

può accadere che con ciò si tolga ad essa qualcuna delle sue radici, appunto perchè la moltiplicazione per un tale fattore, come si è veduto, potrebbe introdurne.

Esempio. Se nell' equazione

$$(x-1)(2x+1)=(x-1)\left(3+\frac{1}{x}\right)$$

si sopprime il fattore $x-1$ comune ai due membri si ottiene l' equazione

$$2x+1=3+\frac{1}{x}.$$

Ora la prima è verificata pel valore $x=1$, mentre la seconda non lo è; si è dunque soppressa una radice.

4° Aggiungiamo qui anche quest' altra proposizione, quantunque di essa non avremo per ora da fare applicazione.

Elevando i due membri di una equazione a una stessa potenza, la nuova equazione ottenuta non sarà, in generale, equivalente alla data.

Sia l' equazione

1) $$A=B:$$

elevando ciascun membro alla potenza m^{ma}, si ottiene l' altra

2) $$A^m=B^m.$$

Ogni soluzione della 1) è manifesto che sodisfa anche

alla 2): ma non possiamo dire che ogni soluzione della 2) sodisfi anche la 1): a persuaderci di ciò basta rammentare la proposizione 8ª del n. 81.

Se in particolare si suppone $m=2$, allora si ha

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$$

e quindi l'equazione

$$A^2=B^2$$

ammette non solo le radici della

$$A=B$$

ma anche quelle dell'altra

$$A=-B.$$

Equazione di primo grado ad una incognita.

87. Quando la funzione y della variabile x, riguardo alla quale ci si propone la questione α) o β), (85) è una funzione intera di 1° grado (84), ovvero quando le due funzioni y e z, riguardo alle quali ci si propone la questione γ), sono ambedue funzioni intere di 1° grado, allora l'equazione, che così si è condotti a stabilire, si dice *equazione di 1° grado ad una incognita:* dimodochè un'equazione di 1° grado ad una incognita può contenere, sia nel 1°, sia nel 2° membro, due sole specie di termini: termini aventi l'incognita x come fattore al 1° grado e termini che non la contengono; e quindi si può dire che la sua forma generale è

$$ax+b=a'x+b'$$

dove a, b, a' b' indicano numeri determinati qualunque.

Si considera però come equazione di 1° grado, anche una equazione, che, pur non presentandosi sotto

questa forma, è però tale che da essa si può, secondo i principii stabiliti, dedurne un'altra equivalente che si presenti nella forma anzidetta.

Quindi se si ha un'equazione, in cui vi sieno dei termini, nel denominatore dei quali comparisca l'incognita x, bisognerà, per decidere se essa sia o no di 1° grado, mandar via questi denominatori moltiplicando, come si sa, per un fattore conveniente e esaminare poi se l'equazione nuova ottenuta è equivalente alla proposta, e se abbia la forma richiesta.

E veramente, si manderanno via non solo i denominatori contenenti l'incognita, ma, per ottenere poi una maggiore semplicità nei calcoli successivi, si manderanno via *tutti* i denominatori, quelli che contengono l'incognita e quelli che non la contengono.

Noi vogliamo adesso vedere come si risolve una equazione di 1° grado ad una incognita ovvero una che si possa ridur tale nel modo che ora abbiamo detto.

Alcuni esempi ci indicheranno la via da tenersi in tutti i casi.

1° Sia l'equazione

$$\frac{5x-11}{4}-\frac{x-1}{10}=\frac{11x-1}{12}$$

Il minimo comune multiplo dei denominatori è 60: si moltiplichi tutta l'equazione per esso: si ha

$$\frac{60.(5x-11)}{4}-\frac{60.(x-1)}{10}=\frac{60.(11x-1)}{12}$$

ovvero

$$15(5x-11)-6(x-1)=5(11x-1)$$

e sciogliendo le parentesi:

$$75x-165-6x+6=55x-5.$$

Questa è certo equivalente alla proposta, perchè il moltiplicatore adoperato è un numero diverso da zero.

Trasportiamo nel 1° membro tutti i termini contenenti l'incognita x e nel 2° quelli che non la contengono, si avrà

$$75x-6x-55x=165-6-5$$

che si può scrivere

$$(75-6-55)x=165-6-5$$

ovvero

$$14 \,.\, x=154.$$

Dividendo anche i membri per 14, si ha

$$x=\frac{154}{14}=11\,.$$

Ora quest' ultima è sodisfatta quando in essa in luogo di x si ponga 11, e solamente in questo caso: dunque 11 è la sola radice della proposta.

Si può verificare la giustezza dei calcoli fatti sostituendo 11 in luogo di x nella proposta e vedendo se essa è sodisfatta.

2° Sia l'equazione

$$1)\qquad \frac{5}{2x+1}=\frac{2}{5x-8}.$$

Si moltiplichino i due membri pel prodotto

$$(2x+1\,(5x-8):$$

si ha

$$2)\qquad 5(5x-8)=2(2x+1).$$

Per essere certi che questa sia equivalente alla

proposta si deve eguagliare a zero il moltiplicatore adoperato, che in questo caso è una funzione di x: si ha

$$(2x+1)(5x-8)=0;$$

manifestamente, perchè questa equazione sia verificata, è necessario e sufficiente che sia verificata l'una o l'altra delle due

$$2x+1=0 \quad , \quad 5x-8=0.$$

La 1ª di queste dà

$$2x=-1$$

onde

$$x=-\frac{1}{2};$$

la 2ª dà

$$5x=8$$

onde

$$x=\frac{8}{5}$$

dimodochè i valori di x pei quali può annullarsi il moltiplicatore sono

$$x=-\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x=\frac{8}{5}:$$

ora di essi nessuno verifica l'equazione 2): quindi la 2) è equivalente alla 1ª.

Ciò posto, la 2), sciogliendo le parentesi, si può scrivere

$$25x-40=4x+2:$$

portando nel 1° membro i termini contenenti l'incognita, nel 2° quelli che non la contengono si ha:

$$25x-4x=40+2$$

ossia

$$(25-4)x=42$$

o anche

$$21x=42$$

onde

$$x=\frac{42}{21}=2:$$

2 è dunque la sola radice della 1).

3° Sia ancora l'equazione

$$\frac{x}{a+3}+\frac{x}{a-3}=\frac{4a^2}{a^2-9}.$$

Avendosi

$$a^2-9=(a+3)(a-3)$$

per liberare l'equazione dai denominatori si moltiplicherà per a^2-9, escludendo che sia

$$a=\pm 3.$$

Avremo

$$(a-3)x+(a+3)x=4a^2$$

ovvero

$$ax-3x+ax+3x=4a^2$$

e anche

$$2a.x=4a^2$$

dividendo anche i membri per $2a$ (supposto a diverso da zero), si ha

$$x=2a;$$

se si suppone a eguale a zero, tale divisione non si può fare, ma si può osservare che allora la proposta è un'identità.

88. Dopo questi esempi possiamo enunciare la regola:

1° *Per risolvere un'equazione, generalmente, s'incomincia col liberarla dai denominatori.*

2° *Se dopo siffatta operazione l'equazione è di 1° grado, allora si trasportano in un membro i termini contenenti l'incognita, e nell'altro quelli che non la contengono.*

3° *Si raccoglie la incognita a fattore comune di tutti i termini che la contengono e si eseguiscono nel coefficiente che così si ottiene, e nell'altro membro noto tutte le riduzioni possibili.*

4° *Infine si dividono ambo i membri pel coefficiente dell'incognita; il valore così ottenuto è la soluzione della equazione proposta.*

Discussione della formula generale risolutiva di una equazione di primo grado ad una incognita.

89. Noi abbiamo ora imparato quale via si debba tenere per determinare il valore che sodisfa un'equazione di 1° grado ad una incognita.

Ora si domanda: *Si perverrà sempre effettivamente a determinare questo valore? può presentarsi qualche caso in cui esso non esista o ne esista più d'uno?*

Per rispondere a questa domanda, prendiamo a considerare l'equazione di 1° grado nella sua forma generale

1) $$ax+b=a'x+b'.$$

Portiamo in un membro i termini contenenti l'incognita e nell'altro quelli che non la contengono; si ha:

$$ax-a'x=b'-b$$

OSSERVAZIONE. Il teorema ora dimostrato ci conduce a fare un'utile osservazione intorno all'equazione (Osservazione III, n. 86)

$$1) \qquad mA = mB$$

che si deduce da una data

$$2) \qquad A = B,$$

moltiplicando questa per un fattore m allo scopo di liberarla dai denominatori contenenti l'incognita x, che vi si possono trovare.

Osserveremo, cioè, che se la 1) è di 1° grado, essa, come ora fu mostrato, ammette, tranne in casi speciali, una sola radice; e giacchè le radici della 2), se m è un'espressione intera rispetto alla x, sono certo radici della 1), così anche la 2) ammetterà quella sola radice, ovvero nessuna. Quindi per essere certi che la 1) è equivalente alla 2), quando la 1) è di 1° grado, basta vedere che la radice della 1) sodisfa alla 2).

Esercizi.

1. Risolvere le seguenti equazioni:

1° $x-2=3, \quad x+a=d, \quad x-b=-c$

2° $x+50=4x+12, \quad 16x-11=7x+70$

3° $5(x-1)-9(x+1)=3, \quad 16(x-5)=4(5-x)$

4° $a+b(c-x)=x, \quad x+a=a-x$

5° $2\{a+x(b-c)\}=3\{x-3(a-x)\}$

6° $(x+5)^2-12=x^2-7x+47$

(si sopprimeranno i termini uguali nel 1° e 2° membro)

7° $(a-x)(b-x)=x^2$

8° $(a+x)(b+x)=(a-x)(b-x)+2$

9° $\frac{2x}{3}=4, \quad \frac{x}{5}=6x-1$

10° $\frac{a}{x}=b, \quad \frac{cx}{b}=\frac{b}{a}, \quad \frac{a+x}{b}=\frac{c+x}{d}$

11° $\frac{2x+1}{2}=\frac{7x+5}{8}, \quad \frac{x}{2}-2=\frac{x}{4}+\frac{x}{5}-1$

12° $\frac{x+1}{2}+\frac{3x-4}{5}+\frac{1}{8}=\frac{6x+7}{8}$

13° $\frac{5x-11}{4}-\frac{x-1}{10}=\frac{11x-1}{12}$

14° $\frac{x+7}{11}-\frac{2x-16}{3}+\frac{2x+5}{4}=\frac{16}{3}+\frac{3x+7}{12}$

15° $\frac{\frac{7x}{3}-2}{4}-\frac{5x-\frac{1}{2}}{4}=\frac{\frac{x}{4}-2}{5}-\frac{10}{3}$

16° $a+\frac{c-x}{x}=b-1+\frac{d}{x}$

17° $\frac{2x+a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab}$

18° $\frac{3bx}{2a^2}-\frac{x-b}{a+b}=\frac{bx-a^2}{a^2-b^2}-\frac{x}{4a}$

19° $\frac{x-5}{x-7}=\frac{x+3}{x+9}$

20° $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-7}{x-8}-\frac{x-8}{x-9}$

(prima di mandar via i denominatori conviene eseguire le sottrazioni indicate nei due membri.)

21° $\frac{2x+3}{x+1}=\frac{4x+5}{4x+4}+\frac{5x+3}{3x+1}$

22° $0,5+\frac{0,45.x-0,75}{0,6}=\frac{1,2}{0,2}-\frac{0,3.x-0,6}{0,9}$

23° $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{x^2-ab}$

24° $\frac{x+1}{7}+x(x-2)=(x-1)^2$

25° $\frac{3x^2-2x-8}{5}=\frac{(7x-2)(3x-6)}{35}$

26° $\frac{3-2x}{1-2x}-\frac{2x-5}{2x-7}=1-\frac{4x^2-1}{7-16x+4x^2}$

27° $\frac{x-a}{a}-\frac{2x}{x+a}=3-\frac{x^3-x^2a}{a^3-ax^2}$

28° $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{x+3}{2(x^2+1)}=\frac{6}{x^4-1}$

29° $\frac{a}{x}+\frac{x}{a}+\frac{a(x-a)}{x(x+a)}-\frac{x(x+a)}{a(x-a)}=\frac{ax}{a^2-x^2}-2$

30° $\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x^2+x+1}{x+1}=2x$

31° $0,15+\frac{0,135x-0,225}{0,6}=\frac{0,36}{0,2}+\frac{0,09x-0,18}{0,9}$

32° $(x+1)(x+2)(x+3)=(x-1)(x-2)(x-3)+$
$+3(4x-2)(x-1)$

33° $\frac{mx-a-b}{nx-c-d}=\frac{mx-a-c}{nx-b-d}$

34° $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$

35° $\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{37}{x^2+5x+6}$

36° $\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(x-\frac{a}{5}\right)=0$

37° $(ax-b)(d-cx)=0$

38° $\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)-(x-5)(x+3)-\frac{93}{4}=0$

39° $(x-a)^3(x+a-2b)=(x-b)^3(x-2a+b)$

40° $\frac{x-a}{x-a-1}-\frac{x-a-1}{x-a-2}=\frac{x-b}{x-b-1}-\frac{x-b-1}{x-b-2}$

Problemi.

90. Sia proposto il seguente problema:

= *In una società di 90 persone, il numero degli uomini supera di 4 quello delle donne, e il numero dei ragazzi supera di 10 quello degli adulti.*

Di quanti uomini, donne, ragazzi è composta la società?

Parrebbe a prima giunta che i numeri da determinarsi fossero tre, ma facilmente si vede, che, se si conoscesse il numero delle donne, si conoscerebbero subito anche gli altri due, giacchè l'enunciato del problema ci dice che il numero degli uomini è il numero delle donne aumentato di 4, e il numero dei ragazzi è la somma del numero di quelli col numero di queste aumentata di 10: dimodochè il solo numero incognito è veramente quello delle donne.

Ora la via, che si offre prima per trovare questo numero, è quella di vedere se un numero pensato a caso sodisfi alla questione: ed ecco, come ciò si fa: si pensi, ad es., il numero 20: se esso sodisfacesse alla questione, allora $20+4$ sarebbe il numero degli uomini: $24+20+10=54$ sarebbe quello dei ra-

gazzi e il numero totale dei componenti la società sarebbe

$$54+24+20=98,$$

ma *per dato* deve essere 90, dunque il numero 20 non è giusto; e giacchè aumentando o diminuendo il numero delle donne aumentano o diminuiscono rispettivamente gli altri due, e quindi aumenta o diminuisce il numero totale, così si dee concludere che il 20 è troppo grande; si dovrà dunque provare un numero minore; provando il 19 si trova pure che esso è troppo grande: provando il 18 si trova che il numero degli uomini sarebbe 22, quello dei ragazzi 50, e giacchè è

$$18+22+50=90$$

così si conclude che 18 è veramente il numero delle donne; e la questione è così risoluta.

Ma subito s'intuisce quanto siffatto modo di procedere per tentativi debba, in generale, riuscire faticoso. Nell'esempio ora citato, dopochè si era provato un numero, che si riconosceva essere troppo grande, rimanevano solo a provare i numeri *intieri* assoluti minori di quello: il numero delle prove da farsi era dunque limitato, epperciò la riuscita del metodo era certa; ma non accade ogni volta così: dopo fatta una prima prova, dai resultati di questa non si deduce sempre pel numero delle prove, che ancora sono da farsi, una limitazione così definita, come quella incontrata nel problema precedente.

Si consideri la questione: *trovare un numero che aggiunto ai due termini della frazione* $\frac{2}{5}$ *la renda eguale a* $\frac{3}{5}$.

In virtù del teorema 69, se si hanno le frazioni

$\frac{a}{b}<1$ e $\frac{m}{m}=1$ a, b ed m numeri positivi, è noto che la frazione $\frac{a+m}{b+m}$ è compresa tra $\frac{a}{b}$ e 1.

Ora, nel caso nostro avendosi

$$\frac{2}{5}<\frac{3}{5}<1,$$

trattasi, come si vede, di aggiungere ai termini 2 e 5 della frazione $\frac{2}{5}$ un numero che la ingrandisca pur conservandola minore di 1. Questo numero, per l'osservazione precedente, si prenderà positivo: la qual cosa costituisce già una certa limitazione nei tentativi da farsi.

Si provino successivamente i numeri 1, 2, 3: cioè si aggiunga ciascuno di questi ai due termini della frazione $\frac{2}{5}$: si ottengono i resultati $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$; giacchè si ha:

$$\frac{4}{7}<\frac{3}{5}<\frac{5}{8}$$

così si conclude che il numero da aggiungersi è compreso tra 2 e 3: i numeri frazionari che cadono tra due interi consecutivi essendo infiniti, il numero delle prove da farsi potrebbe anche moltiplicarsi all'infinito senzachè mai s'incontrasse il numero che si cerca.

Questo inconveniente ci fa sentire la necessità di possedere un metodo sistematico da sostituire a questo del procedere per tentativi che ora abbiamo esposto.

Riprendiamo il 1° problema.

Invece di pensare a caso un numero da provarsi, si ragioni a questo modo: indichiamo con una lettera p. es. con x il numero incognito che si tratta di deter-

minare e operiamo con questo x come si è operato prima, con uno dei numeri che furono provati; cioè diciamo: se x è il numero delle donne, $x+4$ sarà quello degli uomini, $x+(x+4)+10=2x+14$ quello dei ragazzi: per conseguenza sarà

$$x+(x+4)+(2x+14)$$

ossia

$$4x+18$$

il numero totale. — Questa espressione $4x+18$ del numero totale ha un valore indeterminato, sinchè è indeterminato il valore di x e acquista un unico valore determinato appena si attribuisca ad x un valore particolare: essa è perciò una funzione di x.

Ora l'enunciato del problema richiede che il numero totale dei componenti la società sia 90: la domanda che si fa nel problema si riduce dunque a questa: *qual è il valore di* x *pel quale la funzione* $4x+18$ *prende il valore 90?*

Si è così condotti a stabilire l'equazione

$$4x+18=90;$$

facendo ciò, si suol dire, che si sono tradotte in linguaggio algebrico, si sono espresse coi segni algebrici le condizioni contenute nell'enunciato del problema.

Giunti a questo punto non rimane più altro a fare se non risolvere quell'equazione colle regole certe che abbiamo stabilito per le equazioni di 1° grado ad una incognita.

Si deduce

$$4x=90-18$$
$$4x=72$$

onde

$$x=\frac{72}{4}=18$$

18 è dunque il numero delle donne, 22 quello degli uomini, 50 quello dei ragazzi.

Si consideri anche il 2° problema, e si dica: indichiamo con x il numero da aggiungersi ai due termini della frazione $\frac{2}{5}$; si ottiene l'espressione $\frac{2+x}{5+x}$ che è manifestamente una funzione di x; ora il problema domanda: *quale è il valore di* x *pel quale questa funzione prende il valore* $\frac{3}{5}$?

Così si è condotti a stabilire l'equazione

$$1)\qquad \frac{2+x}{5+x}=\frac{3}{5};$$

e ora non rimane più altro che risolvere questa colle regole note.

Si mandano via i denominatori moltiplicando per $5(5+x)$ e si ottiene l'equazione

$$2)\qquad 5(2+x)=3(5+x)$$

che è equivalente alla 1), perchè essa è di 1° grado, (Osservazione, n. 89) e la sola radice, che ammette, sodisfa, come ora si vedrà, alla 1).

La 2) si può scrivere:

$$5.2+5.x=3.5+3.x$$
$$10+5x=15+3x$$
$$5x-3x=15-10$$
$$2x=5$$
$$x=\frac{5}{2}$$

e questo è il valore cercato: si ha infatti, sostituendo

nella 1), l'identità

$$\frac{2+\frac{5}{2}}{5+\frac{5}{2}}=\frac{\left(\frac{4+5}{2}\right)}{\left(\frac{10+5}{2}\right)}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

91. Un problema, la risoluzione del quale si fa dipendere da un'equazione di 1° grado ad un'incognita, dicesi problema di 1° grado ad un'incognita.

In un problema, in generale, si tratta sempre di determinare uno o più numeri incogniti conoscendone certi altri i quali abbiano tra di loro e coi numeri incogniti relazioni determinate, le quali appunto costituiscono la natura speciale del problema.

Noi per ora consideriamo soltanto problemi in cui si tratti di determinare un solo numero incognito.

La risoluzione di un problema siffatto consta, come si è veduto nei precedenti esempi, di due parti distinte: l'una quella di esprimere col linguaggio algebrico le relazioni che l'enunciato del problema medesimo stabilisce fra i numeri che in esso sono dati, e il numero che si vuole determinare; questa prima operazione conduce sempre a porre un'equazione. — Quando si è fatto ciò, si dice, che si *è intavolato il problema*, che lo *si è messo in equazione*. — L'altra parte consiste nel risolvere l'equazione così stabilita. — Ora, quando l'equazione è di 1° grado, noi abbiamo dato delle regole certe, mediante le quali si può risolverla; ma non è possibile assegnare principii generali, che insegnino a condurre felicemente la prima parte della risoluzione di un problema, cioè la *messa in equazione* di esso. La riuscita di questa operazione dipende dall'acume di colui che si accinge ad eseguirla. — Si può solamente indicare la traccia che, almeno in generale, è utile seguire.

Si osservi che, se si è ben penetrati di tutte le condizioni del problema, si potrà sempre verificare se un numero preso a caso sodisfi. Ciò posto, si designi con x il numero incognito e si facciano, quando è possibile, su questo x e sui numeri dati nell'enunciato, e quando no, si indichino coi segni convenienti le operazioni che si farebbero se, invece di rappresentare il numero incognito con x, si fosse scelto a caso un numero particolare e si volesse verificare se esso sodisfa al problema. — Il verificare se un numero sodisfa a un problema porta sempre a vedere se il resultato di certe operazioni su questo numero e sui numeri dati nell'enunciato è eguale al resultato di certe altre operazioni, ovvero a un numero dato nell'enunciato medesimo; ma se il numero incognito è indicato con x, il resultato di operazioni sopra di esso e su altri numeri è un'espressione algebrica; il seguire dunque il processo della verificazione anzidetta porta ad eguagliare tra loro due espressioni algebriche, delle quali una almeno contiene x, ovvero a eguagliare una, che contiene x, a un numero determinato. — Così si sarà stabilita l'equazione del problema.

Questa è appunto la via che abbiamo tenuta negli esempi dati sopra.

Del resto meglio di qualunque precetto in questo argomento, gioverà l'esercitarsi a lungo nella risoluzione di svariati problemi.

Problemi.

1° La somma di due numeri è 89 e la loro differenza 31: trovare questi numeri.

2° Qual è il numero che sommato colla sua quinta e colla sua sesta parte dà 52 per resultato?

3° Una linea retta lunga 28 metri deve dividersi in due parti tali che una di esse sia i tre quarti dell'altra.

4° Un padre ha 30 anni e suo figlio ne ha 2: dopo quanti anni l'età del padre diventerà otto volte quella del figlio?

5° Si domanda un numero tale, che prendendone $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{9}$ si ottenga per somma 654.

6° A può compiere un certo lavoro in 8 giorni e B in 10: in quanti giorni lo compiranno lavorando insieme?

7° La differenza dei quadrati di due numeri interi consecutivi è 15: trovare i numeri.

8° Il denominatore di una frazione supera di 3 il numeratore. Aumentandoli entrambi di 1, la frazione diventa eguale a $\frac{2}{3}$. Trovisi la frazione.

9° Una frazione è equivalente a $\frac{5}{7}$ e la somma dei suoi termini è eguale 108. Trovisi la frazione.

10° Sia $\frac{a}{b}$ una frazione data: si domanda quel numero che aggiunto ai due termini di essa la rende eguale a un'altra frazione data $\frac{c}{d}$.

11° Un padre lascia un'eredità a, che deve essere divisa nel modo seguente fra i suoi figli: la parte del secondo deve essere eguale a m volte quella del primo, diminuita di b: e la parte del terzo deve essere la n^a parte di quella del secondo, aumentata di c. Quali sono le tre parti?

Trovata la soluzione, si supponga $a = 100{,}000$, $m = 2$, $b = 20{,}000$, $n = 2$, $c = 10{,}000$.

12° A, B e C riunirono insieme lire 276: A pose il doppio di B, più 12 lire, e B il doppio di C, più 12 lire; quanto versò ciascuno?

13° La prima cifra di un numero supera di 4 la seconda. Dividendo il numero per la somma delle sue due cifre, si ha 7 per quoziente. Trovisi questo numero.

14° La somma di due numeri è 100, la differenza dei loro quadrati è 1400. Trovinsi questi numeri.

15° La differenza di due numeri è 10, la differenza dei loro quadrati è 600. Dicansi questi numeri.

16° La somma delle età di due fratelli è a. L'uno ha oggi un'età, che è m volte quella che esso avea, allorquando l'altro avea un'età eguale a n volte quella che il primo ha oggidì.

Quali sono le età?

17° Una lepre precede di 80 suoi salti un cane levriere: essa fa 3 salti nel tempo che il cane ne fa due; ma la lunghezza del salto del cane è eguale alla lunghezza di due salti della lepre. Si domanda quanti salti avrà fatto la lepre allorquando sarà raggiunta dal cane.

18° A può compiere un lavoro in 10 giorni e B in 8. Dopo che A ha lavorato per 3 giorni viene B ad aiutarlo. In quanti giorni il lavoro sarà condotto a compimento?

19° Una fontana può riempire una vasca in a ore: un'altra la può riempire in b ore. In quanto tempo la riempiranno versando tutte e due contemporaneamente? (in un'ora la 1ª fontana riempie la parte $\frac{1}{a}$ della vasca: la 2ª, la parte $\frac{1}{b}$: dunque versando insieme, riempiono la parte $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$: questa parte moltiplicata pel numero x delle ore, deve divenire 1).

20° Un orologio ha due indici concentrici: il più celere fa una rivoluzione ogni dodici ore e il più lento fa una rivoluzione in sedici ore: in quanto tempo il più celere guadagnerà una rivoluzione completa sul meno celere?

21° In quale istante fra le 3 e le 4 i due indici di un'orologio si troveranno nella stessa direzione?

22° I due indici di un orologio si trovano ad angolo retto alle 3: determinare dopo quanto tempo si troveranno di nuovo ad angolo retto.

23° Si hanno due verghe d'argento, i titoli delle quali sono 0,775 e 0,940 (cioè su mille parti, nel primo caso 775, nel secondo 940 sono d'argento puro e le rimanenti di lega). Qual peso si deve prendere di ciascuna di esse, per formare 25 grammi di lega al titolo di 0,900?

24° Il carbone costa a Firenze lire 9, 42 ogni 100 chilogrammi, e a Pistoia lire 9, 20; la distanza da Firenze a Pistoia è 34 chilometri: sapendo che le spese di trasporto si elevano a lire 0, 12 per ogni tonnellata e per ogni chilometro, si domanda in qual punto della strada vi ha lo stesso vantaggio a far venire il carbone sì dall'una che dall'altra città.

25° Un corriere percorre c chilometri in d ore, ed un altro e chilometri in f ore: decorse b ore dalla partenza del primo, si fa partire il secondo da un luogo distante a chilometri dal punto di partenza del primo: quante ore occorrono al secondo per raggiungere il primo?

26° Un colonnello voleva disporre il suo reggimento in forma di quadrato. In una prima prova avanzavano 88 uomini, ma disponendo un soldato di più per riga, gli mancavano, a compiere il quadrato, 57 uomini. Si vuol sapere la forza del reggimento.

27° Una contadina porta al mercato un canestro d'uova coll'intenzione di venderle a 7 centesimi l'una. Deponendo il canestro ne rompe 5, e facendo poi i suoi conti trova, che riscuoterebbe la stessa somma vendendo le rimanenti a 8 centesimi. Quante uova aveva nel canestro?

28° Un vaso si può votare mediante tre cannelli; aprendo solamente il primo, il vaso si vuota in m minuti primi: aprendo solo il secondo, si vuota in n minuti secondi e aprendo solo il terzo si vuota in p ore.

In quanto tempo si vuoterebbe se tutti e tre i cannelli fossero aperti insieme?

29° Gli indici delle ore, dei minuti e dei secondi sono tutti e tre sulla cifra XII del quadrante. Si domanda dopo quanto tempo l'indice dei secondi dividerà in due parti uguali l'angolo formato dai due altri.

30° Tre mobili percorrono una medesima linea retta con moto uniforme e con le velocità v, v' e v''. Essi sono attualmente alle distanze a, a' e a'' rispettivamente da un punto O di questa retta, dal quale si allontanano tutti e tre. Si domanda dopo quanto tempo il primo sarà ai $\frac{3}{5}$ della distanza che separa gli altri due.

CAPITOLO IX.

Funzioni di due variabili.

92. Si consideri l'espressione $2x-3y+1$, che rappresenteremo con z, nella quale x e y indicano numeri indeterminati. Sinchè si lasciano tali x e y, o semplicemente si lascia indeterminato uno di essi dando all'altro un valore determinato, la z rimane indeterminata; essa assume invece un valore determinato, appena si dieno valori determinati ad ambedue x e y. Dimodochè la z prende un valore determinato ogni volta e solamente allora, che si dà contemporaneamente un valore determinato a ciascuna delle due x e y.

Si esprime ciò dicendo che *la* z *è funzione delle due* x *e* y, *le quali si chiamano variabili indipendenti.*

Analogamente le espressioni

$$z=x+y$$

$$v=\frac{1}{x}-\frac{2}{y}+3$$

$$u=2x^2-3y^2+1$$

si dicono funzioni delle due x e y.

E in generale, ogni espressione algebrica, che contiene i due numeri indeterminati x, y e altri numeri determinati, uniti in modo qualunque gli uni cogli altri dai segni delle operazioni da noi sin qui considerate, sarà funzione dei due x, y.

Ciò è manifesto, quando si pensi che le operazioni d'addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e innalzamento a potenza, applicate a numeri determinati, danno ciascuna per resultato un numero determinato e quindi anche tutte le possibili combinazioni delle cinque operazioni precedenti applicate a numeri determinati producono un numero determinato. Perciò un'espressione algebrica, la quale contenga i numeri indeterminati x, y e altri numeri determinati, rappresenta un unico e determinato numero ogni volta che ai due x, y si attribuiscono valori determinati: essa deve dunque riguardarsi come una funzione, nel senso da noi inteso, dei due numeri variabili x, y.

93. La considerazione delle grandezze concrete ci offre facilmente esempi di grandezze, la determinazione delle quali dipende dalla determinazione di due altre.

Si considerino i tre angoli $\hat{X}$, $\hat{Y}$ e $\hat{Z}$ di un triangolo: giacchè la loro somma deve sempre uguagliare due retti, uno di essi p. es. $\hat{X}$ è determinato in modo unico, ognivolta e solamente allora che sono determinati $\hat{Y}$ e $\hat{Z}$. L'angolo $\hat{X}$ è dunque una grandezza *variabile dipendente* dalle due $\hat{Y}$ e $\hat{Z}$, perchè può successivamente passare per *stati* diversi al variare di $\hat{Y}$ e $\hat{Z}$, e resulta determinata, quando sono determinate queste.

Così la porzione di piano contenuta entro il perimetro di un triangolo può passare successivamente per *stati* diversi, quando variano la base e l'altezza del triangolo medesimo: e resulta determinata in modo unico, quando si prende una determinata base e una determinata altezza: quella porzione di piano è dunque una grandezza *variabile dipendente* dalle altre due *base* e *altezza*.

E si potrebbero trovare moltissimi altri esempi consimili anche fuori del campo della Geometria.

94. Ritornando ora al nostro primitivo soggetto, chiameremo funzione *intera* delle due variabili x e y una funzione la cui espressione è, o può ridursi, a un polinomio nel quale ogni termine è il prodotto di un numero determinato per l'una o per l'altra o per ambedue le x e y elevate ciascuna ad un esponente positivo o nullo. Funzione *fratta* quella, la cui espressione è, o può ridursi a una frazione avente per numeratore e per denominatore, o almeno per denominatore,[1] una funzione intera delle x e y; e la funzione-numeratore non è divisibile esattamente per la funzione-denominatore. Uno dei due, numeratore o denominatore potrà contenere una sola delle due variabili, purchè l'altro contenga l'altra di esse, ovvero le contenga ambedue. Il massimo tra i numeri, che si ottengono sommando in ciascun termine di una funzione *intera* gli esponenti di x e y che vi compariscono, dicesi *grado* della funzione.

Così la

$$z = x^3 + y^2 + 3xy^3 + 2$$

è una funzione intera di 4° grado.

Noi ora considereremo qui specialmente le funzioni intere di 1° grado.

Una funzione intera di 1° grado di due variabili x e y può, secondo la definizione data, contenere tre sole specie di termini: termini che contengono la variabile x, termini che contengono la y, termini che non contengono nè x nè y, cioè termini *costanti* o come anche si suol dire, termini *noti:* dimodochè se si raccolgono in un solo i termini contenenti la x, in un solo

[1] Il numeratore potrebbe essere semplicemente un numero costante.

quelli contenenti la y, e in un solo i termini noti, una funzione intera di 1° grado di due variabili potrà sempre ridursi alla forma

$$ax + by + c$$

dove a indica il numero determinato che resulta dal raccogliere insieme i coefficienti di x nei vari termini, b quello pure determinato che resulta dal raccogliere quelli di y, e c rappresenta l'insieme dei termini *noti.*

Equazioni a due incognite.

95. Data una funzione qualunque z di due variabili x e y ci si può proporre la questione analoga a quella propostaci per le funzioni di una sola variabile: possiamo cioè domandarci: β') *è possibile trovare una coppia di valori, uno per* x *e uno per* y, *tali che la* z *assuma, corrispondentemente ad essi, il valore* zero, *o più generalmente un valore assegnato* d ?

γ') o anche: *date due funzioni* z *e* z' *delle due variabili* x *e* y, *è possibile trovare una coppia di valori, uno per* x *e uno per* y, *tali che, corrispondentemente ad essi, le due funzioni assumano valori eguali?*

Siffatte questioni si possono anche enunciare dicendo che ci si propone di *trovare una coppia di valori uno per* x *e uno per* y, *ovvero le coppie di valori, se ve ne ha più d'una, atti a verificare la relazione* z=d *ovvero l'altra* z=z'.

Quando si scrive una di queste relazioni $z=d$, $z=z'$ dove z e z' indicano funzioni a due variabili, si dice che si stabilisce una equazione a due incognite x e y. — Risolverla significa trovare le coppie di valori delle x e y che la verificano, che la sodisfano, ossia, che la riducono una identità. Una coppia, un si-

stema di valori, uno per x e uno per y, atti a ciò, costituiscono una *soluzione*, un *sistema di radici* dell'equazione medesima.

Come per un'equazione a una incognita, così per una a due incognite diremo, che *essa è equivalente ad un'altra quando ogni soluzione della prima è anche soluzione della seconda e viceversa.*

E a questo riguardo osserviamo qui subito che i principii stabiliti nel capitolo VIII intorno all'equivalenza di due equazioni ad una incognita continuano a sussistere anche per equazioni a due incognite.

A persuaderci di ciò basta notare che i ragionamenti, coi quali abbiamo stabilito quei principii, si possono ripetere identicamente sostituendo in essi alla considerazione di una incognita la considerazione di due.

Così, per considerazioni analoghe a quelle svolte nella Osservazione II (principio 3° n. 86), riguardo al moltiplicare ambo i membri di un'equazione a due incognite per un fattore non costante, cioè, che può contenere una e anche ambedue le incognite, dovremo ritenere che siffatta moltiplicazione possa produrre una equazione non equivalente alla proposta, dimodochè ogni volta che si sarà condotti a far ciò, bisognerà poi esaminare se la nuova equazione ottenuta sia o no equivalente alla prima.

In virtù del 1° principio (86), ogni equazione a due incognite $z=d$ ovvero $z=z'$ si può ricondurre alla forma $Z=0$: perchè la $z=d$ si può scrivere $z-d=0$ e la $z=z'$ si può scrivere $z-z'=0$; e allora rappresentando con Z, in un caso $(z-d)$, nell'altro $(z-z')$, si vede che si ottiene la forma $Z=0$: cioè, il proporci la questione di trovare i valori di x e y che rendono z eguale a d ovvero uguali le due z e z' equivale a ri-

cercare quelli che rendono nulla la funzione $(z-d)$ ovvero l'altra $(z-z')$.

In particolare se z e z' sono funzioni intere di 1° grado delle due variabili x e y e quindi riducibili sempre alle forme $ax+by+c$, e $a'x+b'y+c'$ rispettivamente, le tre equazioni

$$z=0,\ z=d,\ z=z'$$

si potranno presentare nelle forme

$$ax+by+c=0$$

$$ax+by+c-d=0$$

$$(ax+by+c)-(a'x+b'y+c')=0,$$

la 2ª delle quali, ponendo $c-d=f$ diviene

$$ax+by+f=0,$$

e la 3ª, ponendo $a-a'=a''$, $b-b'=b''$, $c-c'=c''$, diviene

$$a''x+b''y+c''=0,$$

e quindi in ogni caso si ottiene sempre la forma

$$1)\qquad Ax+By+C=0,$$

dove A, B e C indicano numeri determinati. Essa è la forma generale di una equazione di 1° grado a due incognite.

Si vede subito che vi sono infiniti sistemi di valori per x e y che la sodisfano: perchè, se alla x si dà un valore particolare x_0 scelto a caso, la 1) diviene

$$Ax_0+By+C=0$$

la quale è una equazione di 1° grado a una incognita y, e come è noto, tranne in casi speciali, è sempre possibile trovare per y un valore y_0 e uno solo, tale che

essa sia verificata, cioè la

$$Ax_0+By_0+C=0$$

sia una identità.

I due valori x_0, y_0 costituiscono una soluzione della 1): giacchè x_0 è scelto a piacere e y_0 è determinato in seguito a ciò, così è manifesto che dei sistemi di valori, come il sistema x_0, y_0, se ne possono avere in numero infinito.

Si consideri, p. es., l'equazione

$$2x-3y+1=0$$

si prenda $x=0$ si ottiene

$$-3y+1=0$$

onde

$$y=\frac{1}{3};$$

ed ecco una prima soluzione composta dei valori

$$x=0,\ y=-\frac{1}{3}\ .$$

Si prenda $x=\frac{1}{2}$: si ottiene

$$1-3y+1=0$$

onde

$$y=\frac{2}{3};$$

i valori $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{2}{3}$ costituiscono una seconda soluzione: così se ne possono trovare quante se ne vogliono.

Osservazione. Si può osservare che, per ogni valore particolare dato alla x nella 1) ricavandosi da essa

un determinato valore di y, e così ad ogni valore scelto ad arbitrio per la x corrispondendo un unico e determinato valore di y, secondo il concetto da noi posto (82) si deve dire che, quando i numeri x e y debbono sodisfare un'equazione come la 1), il numero y è funzione dell'altro x che si riguarda come variabile arbitraria; ed è evidente, che se invece, il che evidentemente è permesso, i valori arbitrarii si dessero alla y, allora sarebbe x da riguardarsi come funzione di y.

Se si aggiunge che, pei rammentati principii sull'equivalenza di due equazioni, la

$$1)\qquad Ax+By+C=0$$

si può scrivere anche nella forma

$$By=-C-Ax$$

onde

$$2)\qquad y=\frac{-C-Ax}{B}\ ,$$

questa mostra esplicitamente come y sia funzione di x.

Quando dalla 1) si passa alla 2) si dice, che *si è risoluta la* 1) *rispetto a* y.

Sistemi di equazioni.

96. La questione del risolvere una data equazione di 1° grado a due incognite cioè la questione β') o γ') non è una questione ben determinata perchè, come si è veduto, ammette infinite soluzioni diverse.

Proponiamoci quest'altra questione:

Date due funzioni z *e* z' *delle due variabili* x *e* y, *è possibile trovare un sistema di valori, uno per* x *e uno per* y, *tali che facciano acquistare a ciascuna delle* z *e* z'

il valore zero? *ovvero, il valore* d *alla* z *e il valore* d' *alla* z', d *e* d' *essendo numeri qualunque assegnati? ovvero anche, è possibile trovare per* x *e* y *valori tali che facciano acquistare alle due* z *e* z' *valori rispettivamente eguali a quelli che fanno acquistare a due altre funzioni date* v *e* v'?

Le questioni ora enunciate si traducono in linguaggio algebrico dicendo che si domanda di determinare una coppia di valori, uno per x e uno per y, atti a sodisfare contemporaneamente le due equazioni

$$1) \qquad z=0 \text{ e } z'=0$$

ovvero le due

$$2) \qquad z=d \text{ e } z'=d$$

ovvere, le altre

$$3) \qquad z=v, \quad z'=v'.$$

Quando si pongono due equazioni come le 1) o come le 2), o le 3) e ci si propone di trovare un sistema di valori per x e y che sodisfi ad ambedue, si dice, che le due equazioni poste costituiscono *un sistema di due equazioni a due incognite*, o anche che sono *due equazioni simultanee tra due incognite*.

Un sistema di due equazioni si dice *equivalente* a un altro pure di due equazioni, se ogni coppia di valori per le due incognite, che verifica ambedue le equazioni componenti il 1° sistema, verifica anche quelle del 2°, e viceversa.

1° Di qui deriva subito, che *due sistemi i quali si compongono di equazioni equivalenti, ciascuna a ciascuna, evidentemente sono equivalenti.*

Così il sistema 2) è equivalente all' altro

$$z-d=0, \quad z'-d'=0$$

e il sistema 3) all' altro

$$z-v=0, \quad z'-v'=0;$$

dimodochè si può dire che una qualsiasi delle questioni precedentemente enunciate conduce sempre a dover risolvere un sistema di due equazioni a due incognite della forma

$$Z=0, \quad Z'=0$$

dove Z e Z' denotano funzioni delle variabili x e y.

Intorno all'equivalenza dei sistemi di equazioni, oltre a quello ora enunciato, stabiliremo due altri principii, che, convenientemente estesi, varranno non solo pei sistemi di due equazioni a due incognite, che noi qui consideriamo, ma anche per quelli di un numero qualunque di equazioni, che appresso studieremo. A persuaderci di ciò, basterà osservare che i ragionamenti che ora faremo, sono applicabili anche a sistemi di un numero d' equazioni superiore a due.

2° *Dato un sistema di due equazioni, si ottiene un sistema equivalente, sostituendo a una qualunque di esse l' equazione ottenuta addizionando le proposte, membro a membro.*

Rappresentiamo, per brevità, le due equazioni con

$$1) \qquad \begin{array}{l} A=B \\ A'=B' \end{array}$$

Si vuol provare che questo sistema è equivalente all' altro

$$2) \qquad \begin{array}{l} A+A'=B+B' \\ A'=B'. \end{array}$$

Infatti, se un sistema di valori per le incognite x e y rende A identico a B e A' identico a B', allora

per quegli stessi valori dovrà anche essere (6, 3°) $A+A'$ identico a $B+B'$: dunque ogni sistema di valori che verifica le 1), verifica anche le 2). Reciprocamente, se un sistema di valori per x e y, rende $A+A'$ identico a $B+B'$, e A' identico a B', e quindi anche $-A'$ identico a $-B'$, renderà anche $A+A'+(-A')$ identico a $B+B'+(-B')$ cioè A identico a B: dunque ogni sistema di valori che verifica le 2) verifica le 1). — Così è provato il teorema.

Osservazione. Prima di addizionare le 1) membro a membro si può anche moltiplicare ciascuna per un numero qualunque, purchè siffatta moltiplicazione produca sempre un'equazione equivalente a quella medesima che si moltiplica. — Cioè: al sistema 1) si può sostituire quest'altro

$$\begin{aligned} mA &= mB \\ nA' &= nB' \end{aligned}$$

e a questo, l'altro

$$\begin{aligned} mA &= mB \\ mA+nA' &= mB+nB' \end{aligned}$$

o anche

$$\begin{aligned} A &= B \\ mA+nA' &= mB+nB'. \end{aligned}$$

3° *Se si risolve una delle equazioni proposte rispetto a una incognita e si sostituisce l'espressione così trovata nell'altra equazione in luogo dell'incognita medesima, il sistema composto di questa equazione e di quella ottenuta risolvendo la prima rispetto a una incognita, è equivalente al sistema dato.*

Il sistema

$$1) \qquad \begin{aligned} A &= B \\ A' &= B' \end{aligned}$$

è equivalente al sistema

$$2) \qquad \begin{aligned} x &= C \\ A'_c &= B'_c \end{aligned}$$

essendo $x = C$ la prima delle 1) risoluta rispetto a x, e $A'_c = B'_c$ la seconda delle 1) dopochè in essa in luogo di x si è posto C.

Incominciamo dall'osservare che il sistema 1) è manifestamente equivalente al sistema

$$3) \qquad \begin{aligned} x &= C \\ A' &= B' \end{aligned}$$

giacchè queste due equazioni sono rispettivamente equivalenti alle 1).

Basta dunque mostrare che i sistemi 2) e 3) sono equivalenti.

Sia x_0 y_0 una coppia di valori per le x e y che verifica uno dei sistemi 2), o 3): si vuol provare che verifica anche l'altro.

Poichè la 1ª delle 2) e la 1ª delle 3) sono identiche, vi è dunque da mostrare, che se la coppia x_0 y_0, verifica questa 1ª equazione $x = C$ comune ai due sistemi, e inoltre una delle due $A' = B'$, $A'_c = B'_c$, verifica certo anche l'altra di queste.

Il fatto, che per $x = x_0$, $y = y_0$ è verificata la $x = C$, significa che ponendo nella C (che contiene y) y_0 nel luogo di y, la C acquista il valore x_0.

Esaminiamo ora le due $A' = B'$, $A'_c = B'_c$; esse differiscono solamente in ciò che, dove nella 1ª vi è x, nella 2ª vi è C: quindi, se nella $A' = B'$ si fa, $x = x_0$ e $y = y_0$, gli è come se nella $A'_c = B'_c$ si ponesse x_0 al posto di C e y_0 al posto di y; e ciò si fa, ponendo nell'equazione medesima $A'_c = B'_c$ semplicemente y_0 al posto di y, giacchè così appunto il C diviene x_0.

È dunque provato che si ottiene il medesimo risultato sia ponendo, nella $A'=B'$, x_0 in luogo di x e y_0 in luogo di y, sia ponendo nella $A'_c=B'_c$, y_0 in luogo di y, essendo, ben inteso, x_0, y_0 una soluzione della $x=C$; quindi, se così facendo una delle due $A'=B'$, $A'_c=B'_c$ è verificata, lo è certo anche l'altra.

Risoluzione dei sistemi di due equazioni di 1° grado a due incognite.

97. Noi qui supponiamo, che le funzioni rispetto alle quali ci si propone l'una o l'altra delle questioni enunciate al principio del n. 96, sieno intere e di 1° grado: allora si vede subito (95) che le due equazioni da risolversi saranno, o potranno sempre ricondursi alla forma

$$1)\qquad \begin{aligned} ax+by+c&=0\\ a'x+b'y+c'&=0 \end{aligned}$$

delle quali si dirà, che costituiscono un sistema di due equazioni di 1° grado a due incognite.

Ciascuna di esse ammette, come si è fatto vedere al n. 95, infinite soluzioni: ora si vuole ricercare se tra le infinite soluzioni dell'una e tra le infinite dell'altra ve ne siano di comuni.

S'immagini di dare alla x nella prima equazione successivamente i valori x_0, x_1, x_2,.... scelti ad arbitrio: si troveranno i valori corrispondenti y_0, y_1, y_2,... Le coppie di valori $x_0\ y_0$, $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$,.... saranno le soluzioni della prima.

Anche nella seconda, giacchè si cerca una soluzione comune alle due, si diano alla x successivamente i medesimi valori

$$x_0,\ x_1,\ x_2\ \ldots;$$

si troveranno i valori corrispondenti

$$y^{(0)},\ y^{(1)},\ y^{(2)},\ \ldots;$$

dimodochè i sistemi $x_0\ y^{(0)}$, $x_1\ y^{(1)}$, $x_2\ y^{(2)}$, ... saranno le soluzioni della seconda.

È manifesto, che la condizione necessaria e sufficiente affinchè fra le soluzioni

$$x_0\ y_0,\ x_1\ y_1,\ x_2\ y_2,\ \ldots$$

ve ne sia una identica a una delle soluzioni

$$x_0\ y^{(0)},\ x_1\ y^{(1)},\ x_2\ y^{(2)},\ \ldots$$

è, che uno dei valori

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots$$

sia identico al suo corrispondente tra i valori

$$y^{(0)},\ y^{(1)},\ y^{(2)},\ \ldots$$

Perchè si possa avere una soluzione comune alle due equazioni, bisogna dunque poter scegliere per la x un valore x_s tale che, ponendo in esse questo x_s in luogo di x, e risolvendo le due equazioni a una sola incognita y che si ottengono, i due valori, che così si trovano per y, risultino eguali. Ecco dunque detto in qual modo deve essere scelto il valore x_s.

Se si fa $x=x_s$ nelle due equazioni, esse divengono

$$2)\qquad \begin{aligned} ax_s+by+c&=0\\ a'x_s+b'y+c'&=0 \end{aligned}$$

risolvendo la prima si ha

$$y=-\frac{c+ax_s}{b}=y_s$$

risolvendo la seconda

$$y = -\frac{c'+a'x_s}{b'} = y^{(s)}$$

dovrà dunque essere identicamente

$$y_s = y^{(s)}$$

ovvero

$$\frac{c+ax_s}{b} = \frac{c'+a'x_s}{b'};$$

cioè il valore x_s dato ad x deve sodisfare l'equazione

$$3) \qquad \frac{c+ax}{b} = \frac{c'+a'x}{b'}.$$

Si conclude dunque che, affinchè esista una soluzione comune alle due equazioni proposte, è necessario e sufficiente che esista un valore di x tale che verifichi l'equazione 3). Ora è noto che essendo questa un'equazione di 1° grado a una incognita, si sa sempre, eccettuati casi speciali, trovare un valore e uno solo di x, che la sodisfa: e giacchè le 2) sono pure ciascuna di 1° grado e quindi se ne ricava un solo valore per y, così è provato, che esiste sempre, tranne in casi speciali, un sistema e uno solo di valori, uno per x e uno per y, che sodisfano le 1).

In sostanza si vede, che se al sistema delle 1) si sostituisce il sistema equivalente costituito dalle due

$$y = -\frac{c+ax}{b}$$

$$y = -\frac{c'+a'x}{b'}$$

e si conviene di attribuire alla x nell'una e nell'altra di queste due espressioni gli stessi valori, la questione

propostaci si riduce a questa: *avendo due funzioni l'una* $y = -\frac{c+ax}{b}$, *l'altra* $y = -\frac{c'+a'x}{b'}$, *di una stessa variabile* x, *è possibile trovare per la* x *un valore tale, che faccia acquistare a quelle valori eguali?*

Ora è questa appunto la questione 7) propostaci al n. 85, e già risoluta in senso affermativo.

È dunque provato il teorema:

Dato un sistema di due equazioni di 1° grado a due incognite esiste sempre, tranne in casi speciali, una coppia, e una sola, di valori uno per x *e uno per* y, *che le sodisfano.*

98. Diciamo ora come si possa trovare questa coppia di valori.

Metodo di confronto. Il metodo tenuto per dimostrarne la esistenza è anche idoneo alla effettiva determinazione di essa.

Alle due equazioni proposte

$$1) \qquad \begin{aligned} ax+by+c &= 0 \\ a'x+b'y+c' &= 0 \end{aligned}$$

si suol dare comunemente la forma

$$\begin{aligned} ax+by &= -c \\ a'x+b'y &= -c' \end{aligned}$$

e, ponendo $-c = k$, $-c' = k'$, si ha

$$2) \qquad \begin{aligned} ax+by &= k \\ a'x+b'y &= k'. \end{aligned}$$

Al sistema di queste equazioni 2) si sostituisce il sistema equivalente

$$y = \frac{k-ax}{b}$$

$$y = \frac{k'-a'x}{b'}$$

ottenuto risolvendo rispetto a una stessa incognita y ciascuna di quelle.

Si eguagliano le due espressioni trovate per y e si ha così l'equazione

$$\frac{k-ax}{b}=\frac{k'-a'x}{b'}$$

dalla quale si dedurrà il valore di x.

Ottenuto questo, lo si sostituisce in una qualunque delle 2) e se ne ha quello corrispondente di y. — Ma, per ottenere il valore di y, si può anche seguire la stessa via che si è tenuta per quello di x, cioè: risolvere le 2) rispetto a x: così si avrebbero le

$$x=\frac{k-by}{a}$$

$$x=\frac{k'-b'y}{a'}$$

eguagliando si ha:

$$\frac{k-by}{a}=\frac{k'-b'y}{a'}$$

dalla quale si deduce il valore di y.

Questo si chiama il *metodo di confronto.*

Osservazione. Quando, da un dato sistema di due equazioni se ne trae un altro equivalente, nel quale una delle equazioni contenga una sola delle due incognite, allora si dice che l'altra incognita è stata *eliminata.*

Metodo di sostituzione. È un'applicazione del 3° principio del N. 96. Si risolve una delle equazioni rispetto a una incognita p. es. la 1ª rispetto a x; si ottiene una equazione della forma

$$x=c$$

dove c contiene y: si sostituisce c in luogo di x nella 2ª e avutasi così una equazione contenente la sola incognita y, si risolve questa nel modo che già conosciamo.

Trovato il valore di y, lo si sostituisce in c e così si ottiene il valore di x.

Eseguiamo i calcoli. Dalla 1ª si ha

$$3)\qquad x=\frac{k-by}{a}:$$

portando tale espressione in luogo di x nella 2ª, questa diviene

$$4)\qquad a'\left(\frac{k-by}{a}\right)+b'y=k'.$$

Il sistema costituito dalla 3) e 4) è equivalente al sistema 1).

Dalla 4) si ricava il valore di y. Si moltiplichi per a, essa diviene

$$a'(k-by)+ab'y=ak'$$

ovvero

$$a'k-a'by+ab'y=ak'$$

o anche

$$-a'by+ab'y=ak'-a'k$$

$$y(ab'-a'b)=ak'-a'k$$

onde

$$5)\qquad y=\frac{ak'-a'k}{ab'-a'b}.$$

Si sostituisca questo valore di y nella 3): si ha

$$x=\frac{k-b.\left(\frac{ak'-a'k}{ab'-a'b}\right)}{a}$$

$$x=\frac{\left(\frac{k(ab'-a'b)-b(ak'-a'k)}{ab'-a'b}\right)}{a}$$

$$x = \frac{k(ab'-a'b) - b(ak'-a'k)}{a(ab'-a'b)}$$

$$x = \frac{kab'-ka'b-bak'+ba'k}{a(ab'-a'b)}$$

$$x = \frac{kab'-bak'}{a(ab'-a'b)}$$

$$x = \frac{a(kb'-k'b)}{a(ab'-a'b)}$$

e infine

$$6) \qquad x = \frac{kb'-k'b}{ab'-a'b}.$$

Le due formule 5) e 6) ci danno dunque i valori di x e y atti a sodisfare il sistema proposto: si chiamano *formule di risoluzione*. Esse mostrano bene come esista una sola soluzione per un sistema di due equazioni di 1° grado a due incognite.

METODO DI RIDUZIONE ALLO STESSO COEFFICIENTE. Date le equazioni

$$1) \qquad \begin{aligned} ax+by &= k \\ a'x+b'y &= k' \end{aligned}$$

si moltiplichi la 1ª per a', la 2ª per a: avremo le altre

$$\begin{aligned} a'ax+a'by &= a'k \\ aa'x+ab'y &= ak': \end{aligned}$$

in queste la x ha lo stesso coefficiente: sottraendole membro a membro, si ottiene

$$2) \qquad a'by-ab'y = a'k-ak'$$

la quale, in virtù del secondo principio, può nel sistema 1) essere sostituita a una qualunque delle equazioni proposte.

Si moltiplichi ora la 1ª delle 1) per b', la 2ª per b: si ottengono le due

$$\begin{aligned} ab'x+bb'y &= kb' \\ a'bx+bb'y &= k'b \end{aligned}$$

nelle quali la y ha lo stesso coefficiente; sottraendole membro a membro, si ha

$$3) \qquad ab'x-a'bx = kb'-k'b.$$

Le due equazioni 2) e 3) costituiscono un sistema equivalente al sistema 1): ma ciascuna delle 2) e 3) contiene una sola incognita; sappiamo dunque risolverle: dalla 2) si ricava

$$y = \frac{a'k-ak'}{a'b-ab'} = \frac{ak'-a'k}{ab'-a'b},$$

dalla 3)

$$x = \frac{kb'-k'b}{ab'-a'b}.$$

Si possono anche, in alcuni casi, dedurre dalle 1) due equazioni, nelle quali la x o la y abbiano un medesimo coefficiente più semplice di quello che sia il prodotto dei due coefficienti di x o di y, rispettivamente, nelle proposte.

Si trovi il minimo comune multiplo dei due coefficienti di quell'incognita x o y alla quale si vuol dare uno stesso coefficiente nelle due equazioni; e si moltiplichi poi ciascuna equazione pel quoziente che si ottiene dividendo questo minimo comune multiplo pel coefficiente della detta incognita nella equazione medesima: così il coefficiente comune verrà ad essere il minimo comune multiplo.

99. Abbiamo dunque esposto tre metodi per la risoluzione di un sistema di due equazioni a due inco-

gnite, e le formule trovate sono

$$x=\frac{kb'-k'b}{ab'-a'b}\,,\quad y=\frac{ak'-a'k}{ab'-a'b}\,.$$

Si può dare una regola pratica semplicissima per stabilirle. Si osservi che il denominatore è lo stesso in entrambi e che esso è la differenza di due prodotti, l'uno dei quali risulta dal moltiplicare il coefficiente di x nella 1ª equazione per quello di y nella 2ª: l'altro dal moltiplicare il coefficiente di y nella 1ª per quello che ha la x nella 2ª. Dal denominatore comune poi si ottiene ciascun numeratore, sostituendo ai coefficienti dell'incognita, il cui valore si vuole trovare, i termini *noti* rispettivamente corrispondenti.

La differenza di due prodotti, ciascuno di due fattori, p. es. $mn-pq$, si chiama *determinante* del sistema dei quattro numeri

$$\begin{vmatrix} m & p \\ q & n \end{vmatrix}$$

e si suole appunto denotarla con questo simbolo, cioè, disponendo i numeri m, n, p, q così che la figura da essi occupata renda immagine di un quadrato; e precisamente ponendo sulla diagonale che discende da sinistra a destra i due fattori del 1° prodotto: sull'altra, gli altri due.

Dimodochè, secondo questa notazione, scriveremo

$$x=\frac{\begin{vmatrix} k & b \\ k' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}\,,\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & k \\ a' & k' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}\,,$$

In un determinante

$$\begin{vmatrix} m & p \\ q & n \end{vmatrix}$$

i numeri m, n, p, q si chiamano gli *elementi* del determinante: m, q sono gli elementi della 1ª colonna, p, n quelli della 2ª; m, p quelli della 1ª riga, q, n quelli della 2ª.

Avendo sott'occhio le equazioni proposte

$$ax+by=k$$
$$a'x+b'y=k'$$

si può enunciare la regola: *Il valore di una qualunque delle incognite* x *o* y *è espresso da una frazione avente per denominatore il determinante del sistema dei coefficienti delle incognite nelle due equazioni, e per numeratore il determinante che si deduce da quello, mutando la colonna formata coi coefficienti dell'incognita che si considera, nella colonna formata coi rispettivi termini noti.*

Esempio. Siano le due equazioni

$$7x+3y=47$$
$$6x-\ y=0,$$

si ha

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 47 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{47}{25}\,,\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 7 & 47 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{282}{25}$$

Esempio 2°. Sia il sistema

$$x-3y=\frac{1}{3}$$
$$-4y=1,$$

si avrà

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}}=-\frac{5}{12}\,,\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}}=-\frac{1}{4}\,.$$

OSSERVAZIONE. Il determinante $\begin{vmatrix} m & p \\ q & n \end{vmatrix} = mn - pq$ dicesi di 2° ordine.

Sarebbe facilissimo dimostrare alcune proprietà che noi qui ci contentiamo di accennare.

Il determinante non cangia, se si mutano le linee in colonne.

Il determinante cangia solamente il segno e non il valore assoluto, se si scambiano tra loro le due linee o le due colonne.

Il determinante si moltiplica per un numero, moltiplicando per questo tutti gli elementi di una linea o di una colonna.

Il determinante è nullo, se le due linee o le due colonne sono identiche.

Discussione delle formule di risoluzione.

100. Nel dimostrare, che per un sistema di due equazioni

$$1) \qquad \begin{aligned} ax+by&=k \\ a'x+b'y&=k' \end{aligned}$$

esiste una soluzione e una sola, abbiamo accennato a casi speciali, in cui questo può non accadere.

Prendiamo a esaminare intimamente i metodi di risoluzione esposti, e ricerchiamo le condizioni, perchè essi sieno sempre applicabili.

Si osservi anzitutto che ciascuno dei tre processi dati consiste propriamente in questo: nel ricavare dalle 1) una equazione contenente una sola incognita, cioè, nel pervenire all'equazione

$$2) \qquad x(ab'-a'b)=kb'-k'b$$

ovvero alla

$$3) \qquad y(ab'-a'b)=ak'-a'k\,;$$

e ottenuta poi una di queste, nel dedurre anche l'altra, sia seguendo lo stesso processo, sia sostituendo in una delle 1) il valore dell'incognita che si trae da quella delle 2) e 3), che è stata prima ottenuta. — In sostanza, si viene sempre a sostituire al sistema 1) il sistema formato dalle 2) e 3), ciascuna delle quali, contenendo una sola incognita, già si sa risolvere.

Ora, *perchè si possa dalle* 1) *dedurre legittimamente le* 2) *e* 3) *e ricavare da queste un valore unico per ciascuna delle* x *e* y, *è necessario e sufficiente che il determinante* $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-a'b$ *del sistema dei coefficienti delle incognite nelle equazioni proposte sia diverso da zero.*

La condizione è sufficiente.

Se $ab'-a'b$ non è zero, ciò significa intanto che dei quattro numeri a, b, a', b' nessuno è zero, o lo è uno solo, o se lo sono due di essi, questi sono i due a e b' ovvero a' e b; ma non lo possono essere i due a ed a', o i due b e b' insieme, ovvero, i due a e b, o, a' e b'; e tanto meno lo possono essere tre di essi.

Se nessuno dei quattro numeri a, b, a', b' è zero allora è sempre possibile o col *metodo di confronto* o con *quello di riduzione allo stesso coefficiente* dedurre dalle 1) le 2) e 3), giacchè il dividere o moltiplicare per a ed a' e per b e b', che è ciò che si fa in quei metodi, è sempre concesso; e dalle 2) e 3) si hanno valori determinati per x e y, giacchè è permesso dividere per $ab'-a'b$. — Se poi uno di quei numeri, p. es. a, è zero, allora la 1ª delle 1) si riduce alla forma

$$by=k$$

e terrebbe essa il luogo della 3); di qui ricavando

$y=\frac{k}{b}$ e sostituendo nella 2ª della 1) si otterrebbe la 2) da cui si dedurrebbe il valore di x.

Infine se sono nulli i due a e b' le 1) si riducono alla forma

$$by=k, \qquad a'x=k'$$

e queste saranno appunto le 2) e 3): e di qui si deducono i valori di x e y.

Se sono nulli i due b ed a' allora le 1) divengono:

$$ax=k, \qquad b'y=k'$$

e siamo nel caso precedente.

È dunque provato che la condizione è sufficiente.

Mostriamo ora che è anche necessaria.

Infatti, pongasi che sia $ab'-a'b=0$, senzachè sia nullo alcuno dei numeri a, a', b, e b'; allora è sempre possibile, come dianzi dicemmo, dedurre dalle 1) le 2) e 3): ma è noto (89) che, a voler ricavare da queste 2) e 3) valori determinati per le x e y, è condizione necessaria che $ab'-a'b$ sia diverso da zero; dimodochè, se ciò non è, non esisteranno valori determinati atti a sodisfare le 1).

Pongasi poi che sia $ab'-a'b=0$ e insieme sia nullo qualcuno dei numeri a, a', b, e b': si vede subito che, se lo è uno, lo è certamente anche un altro almeno; e così saranno nulli insieme i due a ed a', ovvero a e b; oppure i due b' e a', o i due b' e b; ma allora manifestamente non si potrà, con alcuno dei metodi noti, dedurre legittimamente dalle 1) le 2) e 3).

Così è chiaramente provato, che l'essere $ab'-a'b$ diverso da zero è condizione necessaria perchè si possa dalle 1) dedurre, applicando uno dei metodi noti, le due formule

$$4) \qquad x=\frac{kb'-k'b}{ab'-a'b}, \qquad y=\frac{ak'-a'k}{ab'-a'b}.$$

101. Ma possiamo ora mostrare che effettivamente l'essere $ab'-a'b=0$ significa sempre che il sistema 1) o non ammette alcuna soluzione o ne ammette un numero infinito.

1° Pongasi primieramente che sia $ab'-a'b=0$ senzachè alcuno dei numeri a, b, a', b' sia nullo.

Si ha

$$ab'=a'b$$

onde, dividendo per $a'b'$,

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}:$$

e se si pone

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=r$$

r sarà un numero determinato diverso da zero, e si otterrà $a=a'r$, $b=b'r$: dimodochè la 1ª della 1) diviene

$$a'rx+b'ry=c$$

ovvero

$$a'x+b'y=\frac{c}{r}.$$

La 2ª essendo

$$a'x+b'y=c'$$

si vede che, per ogni sistema di valori determinati attribuiti alle x e y, i due primi membri di esse divengono identici; quindi, perchè esista un sistema di valori che le sodisfi ambedue, è necessario che sia

$$\frac{c}{r}=c'$$

ovvero

$$c=rc'.$$

Se questa condizione non è verificata, vuol dire che non esiste alcun sistema di valori per x e y, atto a sodisfare contemporaneamente le 1): il che si esprime dicendo che esse sono *incompatibili*. — Se poi quella condizione è verificata, allora le due equazioni sono identiche, dimodochè, invece di due equazioni distinte si ha veramente una sola equazione a due incognite: e quindi esistono infinite coppie di valori per le x e y che le sodisfano.

Così, pel caso qui considerato, è provato quanto abbiamo asserito.

Osservazione. Prima di passare alla considerazione del caso, in cui qualcuno dei numeri a, b, a', b' sia nullo, osserviamo che la condizione

$$rc' = c$$

sostituendo ad r successivamente $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, equivale alle due

$$\frac{a}{a'}.c' = c \quad , \quad \frac{b}{b'}.c' = c$$

ovvero

$$ac' - a'c = 0 \quad , \quad bc' - b'c = 0 :$$

vogliamo cioè, notare specialmente questo, che, quando si verifica la relazione

$$ab' - a'b = 0$$

senzachè alcuno dei numeri a, b, a', b' sia nullo, le due relazioni precedenti non possono verificarsi separatamente, vale a dire, o non è verificata alcuna delle due, ovvero, lo sono entrambe.

2° Suppongasi ora che, essendo $ab' - a'b = 0$, sia nullo anche qualcuno dei numeri a, b, a' b'.

Si vede subito, che se è nullo uno, di necessità

dovrà esserlo anche un altro; dunque poniamo senz'altro che sieno nulli due di essi: potranno essere nulli a ed a', o b e b': ovvero a e b, o a' e b'; se lo fossero i due a e b' ovvero a' e b, lo dovrebbe poi essere anche un terzo.

Siano nulli a ed a': allora le equazioni si riducono alla forma

$$0.x + by = c \quad , \quad 0.x + b'y = c' :$$

perchè si possano assegnare alle x e y valori atti a sodisfarle, è manifesto che sarà necessario e sufficiente che esista un valore di y che sodisfi le due

$$by = c \quad , \quad b'y = c'$$

per il chè deve essere

$$\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} .$$

Se questo non si verifica, non esisterà alcun sistema di valori per x e y, che sodisfi le proposte, ma se si verifica, allora se ne avranno infiniti, cioè, tutti quelli che è possibile formare associando al valore $\frac{c}{b}$ preso per y, un valore qualunque per x.

Se fossero nulli b e b' si ragionerebbe in modo analogo.

Sieno nulli a e b: le equazioni divengono

$$0.x + 0.y = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

per ogni sistema di valori assegnabili per x e y la 1ª è sempre della forma

$$0 = c$$

che è assurda, se c non è zero: dunque se c è diverso da zero, non esiste alcun sistema di valori per x e y

atti a sodisfare le proposte: se poi c è zero, allora la 1ª equazione diviene

$$0.x+0.y=0$$

che è sodisfatta da tutti i possibili valori di x e y; rimane quindi solo a verificare la 2ª e si hanno infiniti sistemi atti a ciò.

Dicasi analogamente, se sono nulli a' e b'.

Sieno nulli a e b': lo dovrà essere anche uno almeno dei due a' e b: lo sia a': le due equazioni si riducono alla forma

$$0.x+by=c$$
$$0.x+0.y=c';$$

è evidente che se c' è diverso da zero, non esiste alcun sistema di valori per x e y atti a sodisfarle: se c' è nullo, allora se ne hanno infiniti, tutti quelli cioè, che si formano associando al valore $\frac{c}{b}$ preso per y un valore qualunque per x.

Altrettanto si concluderebbe, se fossero nulli tre altri qualunque dei numeri a, b, a', b'.

Se tutti e quattro sono nulli, è chiaro, che non esiste alcuna soluzione, se dei due c e c' uno sia diverso da zero; e se ambedue c e c' sono nulli, allora ogni coppia di valori assegnabili per x e y verifica le proposte.

Così è dimostrato come si voleva, che l'essere nullo $ab'-a'b$ porta sempre, che le 1) o non ammettono alcuna soluzione o ne ammettono infinite.

102. In pratica, quando si hanno da risolvere due date equazioni a due incognite si sogliono, per brevità, scrivere le espressioni

$$\frac{kb'-k'b}{ab'-a'b}\ ,\quad \frac{ak'-a'k}{ab'-a'b}$$

che danno i valori di x e y, secondochè insegna la regola del n. 99, e non si pensa affatto a dedurli applicando ogni volta uno dei metodi noti.

Dalla discussione, che qui siamo venuti esponendo, discende la conclusione: *che se il denominatore comune* ab'—a'b *di quelle due espressioni è diverso da zero, esse ci dànno per* x *e* y *valori ben definiti, i quali sodisfano effettivamente alle equazioni proposte, perchè, come sappiamo, le espressioni medesime si potrebbero dedurre legittimamente dalle* 1) *mediante uno dei noti metodi di risoluzione. — Se poi* ab'—a'b *è nullo, quelle espressioni, secondochè non sono o sono nulli anche i numeratori rispettivi, si presentano nelle forme* $\frac{m}{0}$, *o* $\frac{0}{0}$ *e allora si deve sempre ritenere che le equazioni proposte o non ammettono alcuna soluzione o ne ammettono un numero infinito. — Nel caso particolare che, essendo* ab'—a'b *nullo, non lo sia però nessuno dei numeri* a, b, a', b', *si può anzi aggiungere* (vedi ultima Osservazione) *che tali due forme singolari non si presentano mai contemporaneamente, vale a dire, che ambedue le espressioni di* x *e* y *assumono la forma* $\frac{m}{0}$ *o ambedue la forma* $\frac{0}{0}$, *secondochè non è, ovvero è verificata la condizione* c'r=c, *e che il presentarsi della forma* $\frac{m}{0}$ *significa, che le equazioni* 1) *sono incompatibili, cioè, non ammettono alcuna soluzione, e il presentarsi della forma* $\frac{0}{0}$ *significa che le due equazioni sono identiche e ammettono quindi infinite soluzioni: o come anche suol dirsi brevemente, la forma* $\frac{m}{0}$ *significa l'impossibilità del sistema,* $\frac{0}{0}$ *significa l'indeterminazione.*

Tralasciamo di investigare, il che sarebbe facile in seguito alla discussione fatta precedentemente, se il presentarsi delle forme $\frac{m}{0}$ e $\frac{0}{0}$ associate o no, nel caso in cui qualcuno dei numeri a, b, a', b' sia nullo, significhi l'impossibilità o l'indeterminazione del sistema proposto.

103. Termineremo questa discussione considerando un sistema di due equazioni in cui i secondi membri sono nulli, della forma cioè:

$$1)\qquad \begin{aligned} ax+by&=0\\ a'x+b'y&=0 \end{aligned}$$

le formule

$$x=\frac{kb'-k'b}{ab'-a'b},\quad y=\frac{ak'-a'k}{ab'-a'b}$$

divengono allora

$$2)\quad x=\frac{0}{ab'-a'b},\quad y=\frac{0}{ab'-a'b}$$

Se $ab'-a'b$ è diverso da zero, allora le 2) sono equivalenti alle 1), e giacchè le 2) ci dànno solamente i valori $x=0$, $y=0$, così sono questi i soli valori atti a sodisfare le 1).

Se poi $ab'-a'b$ è zero, allora le 2) assumono le forme

$$x=\frac{0}{0},\quad y=\frac{0}{0}$$

e tali quozienti sono indeterminati, ma non si può dire allora che le 2) sieno equivalenti alle 1): studiamo dunque queste direttamente.

Dalla $$ab'-a'b=0$$

se nessuno dei numeri a, b, a', b' è zero, segue

$$\frac{a}{b'}=\frac{b}{b'}=r$$

ed r è diverso da zero:

onde $$a=a'r,\quad b=b'r:$$

sostituendo, la 1ª delle 1) diviene

$$a'rx+b'ry=0$$

ovvero

$$a'x+b'y=0$$

che è identica alla 2ª.

Le due equazioni si riducono dunque ad una sola: epperò si hanno per esse infinite soluzioni, che si ottengono, come si sa, prendendo per una delle incognite un valore a piacere e ricavando dalla equazione proposta il valore di y corrispondente.

Si può però osservare che il quoziente dei due valori di x e y che costituiscono una medesima soluzione, ha uno stesso valore determinato per tutte le soluzioni.

Invero, se si divide ciascuna equazione per x si ha

$$a+b\left(\frac{y}{x}\right)=0$$
$$a'+b'\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

e giacchè è $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, così esiste un unico valore determinato di $\left(\frac{y}{x}\right)$ che le sodisfa entrambe.

Dovendo essere

$$\frac{y}{x}=-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$$

tutti i sistemi di valori atti a sodisfare le equazioni proposte saranno dati dalle formule

$$y = -\lambda a \quad , \quad x = \lambda b$$

ovvero

$$y = -\lambda a' \quad , \quad x = \lambda b'$$

dove λ indica un numero arbitrario.

Lasciamo al lettore la discussione del caso in cui, essendo $ab' - a'b = 0$, è anche nullo qualcuno dei numeri a, b, a', b'.

Funzioni di tre variabili.

104. Indichino x, y e z tre numeri indeterminati: *se, ogni volta che ad essi si attribuiscono contemporaneamente valori speciali determinati, un altro numero* v *acquista esso pure un determinato valore, si dice allora che* v *è funzione delle tre variabili* x, y, z.

Ad esempio sia

$$v = x + y + z$$

e anche

$$u = xyz;$$

sinchè i numeri x, y, z, o tutti, o alcuni di essi solamente, sono indeterminati, son pur tali v ed u, che ne rappresentano la somma e il prodotto: ma se a tutti e tre x, y, z contemporaneamente si danno valori particolari determinati, anche la somma e il prodotto prenderanno ciascuno un determinato valore; v e u sono dunque *funzioni* dei tre numeri x, y, z, che si dicono *variabili indipendenti*, perchè si possono per essi scegliere valori a piacere.

E in generale ogni espressione che contenga i tre numeri indeterminati x, y, z legati fra di loro e con altri determinati mediante i segni delle cinque operazioni sin qui considerate, sarà una *funzione* dei tre x, y e z.

Ora considereremo solamente funzioni, l'espressione delle quali è un polinomio di cui ogni termine è il prodotto di un numero determinato per una delle variabili x, o y, o z elevata alla prima potenza, ovvero è semplicemente un numero determinato; dimodochè se si raccolgono in un solo i termini contenenti la variabile x, in un solo quelli contenenti la y, e in un solo quelli che contengono la z e infine pure insieme i termini *costanti*, cioè, che non contengono alcuna delle variabili, una tale funzione si potrà sempre ricondurre alla forma

$$ax + by + cz + d$$

dove a, b, c, d indicano numeri determinati.

Tale espressione dicesi funzione intera di 1° grado delle tre variabili x, y, z.

105. Ci proporremo ora la questione analoga a quella già risoluta per le funzioni a due e a una variabile, cioè, ci proporremo di *determinare quelle terne di valori pei numeri* x, y, z, *che fanno acquistare a una data funzione* v *di essi un valore assegnato* h, *ovvero, che fanno acquistare valori eguali a due date funzioni* v *ed* u.

Si esprime algebricamente una questione siffatta dicendo che si cercano i valori di x, y, z atti a sodisfare la relazione

$$v = h, \text{ ovvero l'altra } v = u.$$

Quando si scrive una relazione, come una di queste, v ed u essendo funzioni intere di 1° grado delle tre variabili x, y e z, si dice che si stabilisce un'equazione di 1° grado a tre incognite.

Un'equazione siffatta può dunque avere l'una o l'altra di queste forme

$$ax+by+cz+d=h$$
$$ax+by+cz+d=a'x+b'y+c'z+d'.$$

Se, analogamente a quanto si è fatto per le equazioni a una e a due incognite, due equazioni a tre incognite si dicono *equivalenti*, quando ogni terna di valori che verifica l'una, verifica anche l'altra e viceversa, per la stessa considerazione esposta al n. 95 per le equazioni a due incognite dovremo ritenere, che i principii stabiliti nel capitolo 8° intorno all'equivalenza di due equazioni a una incognita valgono anche per quelle a tre incognite. E così, in virtù del 2° di quei principii, si ha subito che ognuna delle precedenti equazioni può essere ricondotta alla forma

$$1)\qquad Ax+By+Cz=K$$

che sarà quella, sotto cui in generale prenderemo una equazione di 1° grado a tre incognite.

Ora si vede immediatamente, che la questione propostaci è indeterminata, giacchè si può fissare ad arbitrio un valore per z e allora la 1) diviene un'equazione a due incognite x e y, per la quale già sappiamo che esistono infinite soluzioni.

Anche l'altra questione: — *date due funzioni* v *e* v' *delle variabili* x, y, z, *determinare le terne di valori per* x, y, z, *che fanno acquistare ad esse valori rispettivamente assegnati* d *e* d', *ovvero, che fanno loro acquistare valori rispettivamente eguali a quelli di due altre date funzioni* u *e* u': — sarebbe indeterminata, giacchè qui saremmo condotti a stabilire due equazioni simultanee a tre incognite della forma

$$2)\qquad \begin{aligned} Ax+By+Cz&=K\\ A'x+B'y+C'z&=K' \end{aligned}$$

e manifestamente si avrebbero infinite soluzioni, perchè, scelto a piacere un valore per z, le 2) costituirebbero un sistema di due equazioni a due incognite x e y, pel quale sappiamo che, tranne in casi speciali, sempre esiste una soluzione.

Proponiamoci dunque questa terza questione:

Date tre funzioni v, v', v'' *delle tre variabili* x, y, z, *determinare quelle terne di valori che fanno ad esse acquistare valori rispettivamente assegnati* d, d', d'': ovvero, *che fanno loro acquistare valori rispettivamente eguali a quelli che contemporaneamente assumono tre altre funzioni* u, u', u'' *delle stesse variabili* x, y e z.

Si è così condotti a stabilire il sistema di tre equazioni a tre incognite

$$1)\qquad \begin{aligned} Ax+By+Cz&=K\\ A'x+B'y+C'z&=K'\\ A''x+B''y+C''z&=K'' \end{aligned}$$

e si domanda se esistono e come si determinino le terne di valori per x, y, z atti a sodisfarle.

Analogamente a quanto si è detto pei sistemi di due equazioni, chiameremo *equivalenti* due sistemi di tre equazioni, se ogni terna di valori per le incognite, che sodisfano il 1°, sodisfano anche il 2° e viceversa. E come già osservammo i tre principii stabiliti per l'equivalenza dei sistemi di due equazioni valgono identicamente anche pei sistemi di tre, giacchè le dimostrazioni che ne furono date si applicano immediatamente anche a questi.

Ciò posto, dimostriamo anzitutto, che, tranne in casi speciali, *esiste una terna e una sola di valori determinati per* x, y, z *atti a sodisfare il sistema* 1).

Consideriamo una delle 1) p. es. la 1ª: giacchè per ogni coppia di valori determinati per x e y, che si

pongano in essa, resulta determinato un unico valore per z, così questa può riguardarsi come una funzione delle due variabili x e y; e infatti, pei noti principii, si può scrivere l'equazione anche nella forma

$$Cz = K - Ax - By$$

onde

$$2) \qquad z = \frac{K - Ax - By}{C}$$

la quale mostra bene come z sia funzione delle due x, y.

Quando dalla 1ª delle 1) si passa alla 2), si dice che si è risoluta l'anzidetta 1ª equazione rispetto a z.

Si risolva parimente ciascuna delle altre due delle 1) rispetto a z; si otterrà dalla 2ª)

$$3) \qquad z = \frac{K' - A'x - B'y}{C'}$$

dalla 3ª)

$$4) \qquad z = \frac{K'' - A''x - B''y}{C''}.$$

Le tre equazioni 2), 3), 4) costituiscono un sistema di equazioni equivalente al sistema proposto 1). Ora se si considera il sistema delle 2), 3) e 4), si vede che la questione propostaci si riduce a questa: a ricercare se esistono coppie di valori per le due x e y, che facciano acquistare valori eguali alle tre espressioni di z che si hanno, cioè, si dee vedere se esistono coppie di valori per x e y che sodisfino alla doppia relazione

$$\frac{K - Ax - By}{C} = \frac{K' - A'x - B'y}{C'} = \frac{K'' - A''x - B''y}{C''}$$

ovvero alle due

$$\frac{K - Ax - By}{C} = \frac{K' - A'x - B'y}{C'}$$

e

$$\frac{K - Ax - By}{C} = \frac{K'' - A''x - B''y}{C''},$$

ma queste sono due equazioni simultanee a due incognite, per le quali è noto che, tranne in casi speciali, esiste una soluzione e una sola: così rimane provato che anche pel sistema 1) esiste una soluzione e una sola.

Risoluzione dei sistemi di tre equazioni.

106. Il processo tenuto per dimostrare l'esistenza di una soluzione ci dà un metodo per trovare effettivamente questa soluzione.

1° Si risolve, come si è veduto, ciascuna delle tre equazioni rispetto a una delle incognite: eguagliando due a due le espressioni che si ottengono per questa, si è condotti a stabilire un sistema di due equazioni contenenti solo le altre due incognite: risolute le quali con uno dei metodi noti, si avrà poi il valore della prima incognita sostituendo i valori trovati per le altre due in una qualunque delle espressioni che si hanno per l'incognita medesima.

Questo si chiama *metodo di confronto*.

Quando dal sistema proposto si deduce un sistema di due equazioni con due sole incognite si dice che l'altra incognita è stata eliminata.

2° Un secondo metodo è questo: si risolve una delle equazioni rispetto a una incognita, e si sostituisce l'espressione ottenuta nelle altre due equazioni:

il sistema costituito da queste due e dalla precedente è, in virtù del principio 3° (n. 96), equivalente al sistema proposto; ma intanto nel nuovo sistema due delle equazioni contengono due sole incognite; se ne ricavano i valori di queste, e sostituendoli poi nell'espressione che si è primitivamente ottenuta per la prima incognita si ottiene il valore della medesima.

Questo è il *metodo di sostituzione.*

3° Un terzo metodo è quello di rendere eguali, moltiplicando per fattori convenienti, i coefficienti di una stessa incognita nelle tre equazioni, e di sottrarle poscia due a due in modo che se ne ottengano due equazioni con due sole incognite: queste due, associate a una qualunque delle proposte, costituiscono un sistema equivalente al proposto. Si risolvono, al solito, le due equazioni a due incognite e portando poi i valori trovati in una qualunque delle proposte, se ne trae il valore dell'incognita rimanente.

È questo il metodo di *riduzione allo stesso coefficiente.*

Si vede che ciascuno dei tre metodi, che abbiamo qui indicato, consiste nel dedurre dal sistema proposto un sistema avente una equazione di meno e una incognita di meno, il quale si sa risolvere.

107. Aggiungiamo ora un altro metodo detto *dei fattori indeterminati.*

Sieno le tre equazioni:

$$1)\qquad \begin{aligned} Ax+By+Cz&=K\\ A'x+B'y+C'z&=K'\\ A''x+B''y+C''z&=K'' \end{aligned}$$

Si moltiplichi la 1ª per 1, la 2ª per λ', la 3ª per λ'', λ' e λ'' essendo due numeri indeterminati diversi però da zero.

Quelle diverranno

$$2)\qquad \begin{aligned} Ax+By+Cz&=K\\ \lambda'A'x+\lambda'B'y+\lambda'C'z&=\lambda'K'\\ \lambda''A''x+\lambda''B''y+\lambda''C''z&=\lambda''K'' \end{aligned}$$

Sommandole membro a membro si ottiene:

$$3)\qquad \begin{aligned} &x(A+\lambda'A'+\lambda''A'')+y(B+\lambda'B'+\lambda''B'')+\\ &+z(C+\lambda'C'+\lambda''C'')=K+\lambda'K'+\lambda''K'' \end{aligned}$$

Giacchè i numeri λ', λ'' sono indeterminati, è concesso porre le equazioni

$$4)\qquad \begin{aligned} B+\lambda'B'+\lambda''B''&=0\\ C+\lambda'C'+\lambda''C''&=0 \end{aligned}$$

le quali servono a dare valori determinati per λ' e λ'': risolvendole si ha

$$5)\qquad \lambda'=\frac{CB''-BC''}{B'C''-C'B''}\quad,\quad \lambda''=\frac{BC'-CB'}{B'C''-C'B''}\,.$$

Ora se nella 3) sostituiamo in luogo di λ' e λ'' i valori 5) trovati, è manifesto, in virtù delle 4), che spariscono i termini contenenti le incognite y e z, e si ha l'equazione.

$$6)\qquad x\left[A+\left(\frac{B''C-BC''}{B'C''-C'B''}\right)A'+\left(\frac{BC'-B'C}{B'C''-C'B''}\right)A''\right]=$$
$$=K+\left(\frac{B''C-BC''}{B'C''-C'B''}\right)K'+\left(\frac{BC'-B'C}{B'C''-C'B''}\right)K''$$

contenente la sola incognita x e che si sa risolvere. Moltiplicando per $B'C''-C'B''$ diviene

$$\begin{aligned} &x\,[A(B'C''-C'B'')+A'(B''C-BC'')+A''(BC'-B'C)]=\\ &=[K(B'C''-C'B'')+K'(B''C-BC'')+K''(BC'-B'C)] \end{aligned}$$

onde

$$7)\qquad x=\frac{K(B'C''-C'B'')+K'(B''C-BC'')+K''(BC'-B'C)}{A(B'C''-C'B'')+A'(B''C-BC'')+A''(BC'-B'C)}\,.$$

Se invece di stabilire le 4), poniamo le

$$8)\qquad \begin{array}{l} A+\lambda' A'+\lambda'' A''=0 \\ C+\lambda' C'+\lambda'' C''=0 \end{array}$$

in virtù di queste la 3), operando in modo analogo a quello tenuto ora, si riduce a contenere la sola y; risolvendola si ha

$$y=\frac{K(A'C''-C'A'')+K'(A''C-AC'')+K''(AC'-A'C)}{B(A'C''-C'A'')+B'(A''C-AC'')+B''(AC'-A'C)}$$

ovvero

$$9)\qquad y=\frac{K(C'A''-A'C'')+K'(AC''-A''C)+K''(A'C-AC')}{B(C'A''-A'C'')+B'(AC''-A''C)+B''(A'C-AC')}.$$

Se infine, invece delle 4) e delle 8) si stabiliscono le

$$10)\qquad \begin{array}{l} A+\lambda' A'+\lambda'' A''=0 \\ B+\lambda' B'+\lambda'' B''=0 \end{array}$$

la 3) si riduce a contenere la sola z, e se ne ricava

$$11)\qquad z=\frac{K(A'B''-A''B')+K'(A''B-AB'')+K''(AB'-A'B)}{C(A'B''-A''B')+C'(A''B-AB'')+C''(AB'-A'B)}.$$

Noi abbiamo qui dedotto i valori di y e z direttamente dalla 3): ma, una volta ottenuto il valore di x, è possibile dedurre quelli delle y e z mediante una semplicissima operazione. — Si immagini per un momento di avere già risoluto il sistema 1) proposto, di avere, cioè, dedotto dalle 1) tre equazioni della forma

$$12)\qquad x=M\ ,\quad y=N\ ,\quad z=P$$

dove M, N e P rappresentano espressioni algebriche contenenti i coefficienti delle incognite e i termini noti.

Appunto in ciò consiste la risoluzione.

Il sistema 1) e il sistema 12) essendo equivalenti, se eseguendo una certa operazione sulle equazioni del sistema 1) questo non cangia, la stessa operazione potrà pure farsi sulle 12) senzachè il sistema di esse cessi di essere equivalente al sistema 1).

Ora si vede subito che se nella 1ª delle 1) si muta x in y, y in z e z in x: poi A in B, B in C e C in A, questa equazione non cangia. Altrettanto accade delle altre se si opera su esse in modo analogo. — Si facciano dunque queste stesse operazioni nelle 12), cioè, in esse si muti x con y, y con z, z con x; A con B, B con C, C con A: A' con B', B' con C', C' con A': A'' con B'', B'' con C'', C' con A'': allora il 1° membro x della 1ª diviene il 1° membro y della 2ª, quindi M dovrà divenire N, cioè la 1ª delle 12 diviene la 2ª; così la 2ª diviene la 3ª, e la 3ª diviene la 1ª; — ecco dunque che, ottenuta la 1ª delle 12), se in essa si opera come ora si è detto, se ne trae la 2ª): e da questa allo stesso modo se ne trae la 3ª; epperò ottenuta la 7), da essa si otterrà la 9), e da questa la 11).

108. Nella pratica però, quando si hanno da risolvere tre equazioni a tre incognite, non si fa tutto il calcolo che noi abbiamo fatto qui per dedurre dalle 1) le formule 7), 9), 11). — Si può dare una regola assai semplice per comporle.

Si osservi che il denominatore è lo stesso per tutte e tre e che il numeratore di ciascuna si ricava dal denominatore sostituendo in esso ai coefficienti dell'incognita che si vuol trovare i rispettivi termini noti; dimodochè basta dire come si componga il denominatore comune. — Se lo si considera nella espressione che dà il valore di x, esso è la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando:

1° Il coefficiente A di x nella 1ª equazione per

$B'C''-C'B''$ differenza dei prodotti *in croce* dei coefficienti delle altre due incognite y e z nella 2ª e 3ª equazione;

2° Il coefficiente A' di x nella 2ª equazione per $B''C-BC''$ differenza dei prodotti *in croce* dei coefficienti delle altre due incognite y e z nelle 3ª e 1ª equazione;

3° Il coefficiente A'' di x nella 3ª equazione per la differenza dei prodotti *in croce* dei coefficienti di y e z nella 1ª e 2ª.

Se si considerasse il denominatore nelle espressioni di y e z, se ne dedurrebbe un modo di formarlo interamente analogo a questo.

Osservazione. L'espressione

$$1)\qquad AB'C''-AC'B''+A'B''C-A'BC''+A''BC'-A''B'C$$

denominatore comune dei valori di x, y e z, dicesi determinante dei 9 numeri costituenti lo schema

$$2)\qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

che si ottiene trascrivendo dalle equazioni proposte semplicemente i coefficienti delle incognite nell'ordine con cui essi ivi si presentano.

A, B, C sono gli elementi della 1ª riga;
A', B', C' quelli della 2ª;
A'', B'', C'' quelli della 3ª;
A A' A'' quelli della 1ª colonna
. . . . . .

Il determinante 1) che si suole rappresentare mediante lo schema 2), dicesi del 3° ordine.

Da quanto ora dicemmo, segue immediatamente che in ciascuna delle formule 7), 9), 11) del numero

precedente, il numeratore può presentarsi nella forma di un determinante che si deduce dal determinante 2) col sostituire alla colonna formata dai coefficienti dell'incognita che si considera la colonna formata coi secondi membri delle equazioni proposte; dimodochè le formule 7), 9) e 11) si scrivono anche così:

$$3)\qquad x=\frac{\begin{vmatrix} K & B & C \\ K' & B' & C' \\ K'' & B'' & C'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} A & K & C \\ A' & K' & C' \\ A'' & K'' & C'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix} A & B & K \\ A' & B' & K' \\ A'' & B'' & K'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}}$$

Vediamo ora di enunciare una regola che insegni, dato lo schema 2), a dedurne l'espressione 1), ossia, come anche si suol dire, a fare lo sviluppo del determinante rappresentato collo schema 2).

Avendosi

$$AB'C''-AC'B''+A'B''C-A'BC''+A''BC'-A''B'C=$$
$$=A(B'C''-C'B'')+A'(B''C-BC'')+A''(BC'-B'C)$$

e rammentando (99) che

$$B'C''-C'B'' \quad , \quad B''C-BC'' \quad , \quad BC'-B'C$$

sono determinanti del 2° ordine che si possono rappresentare cogli schemi rispettivi

$$\begin{vmatrix} B' & C' \\ B'' & C'' \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} B'' & C'' \\ B & C \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}$$

se ne conclude l' eguaglianza

$$4) \quad \begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} &= A\begin{vmatrix} B' & C' \\ B'' & C'' \end{vmatrix} + A'\begin{vmatrix} B'' & C'' \\ B & C \end{vmatrix} + A''\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} \\ &= A\begin{vmatrix} B' & C' \\ B'' & C'' \end{vmatrix} + (-A')\begin{vmatrix} B & C \\ B'' & C'' \end{vmatrix} + A''\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ma si ha anche

$$5) \quad \begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} &= B(C'A''-A'C'')+B'(AC''-A''C)+ \\ &\quad +B''(A'C-AC') \\ &= (-B)\begin{vmatrix} A' & C' \\ A'' & C'' \end{vmatrix} + B'\begin{vmatrix} A & C \\ A'' & C'' \end{vmatrix} + (-B'')\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

e parimente si ha:

$$6) \quad \begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} &= C(A'B''-A''B')+C'(BA''-AB'')+ \\ &\quad +C''(AB'-A'B) \\ &= C\begin{vmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{vmatrix} + (-C')\begin{vmatrix} A & B \\ A'' & B'' \end{vmatrix} + C''\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Le uguaglianze 4), 5), 6) ci autorizzano a enunciare la regola:

Lo sviluppo di un determinante del 3° ordine è la somma algebrica dei prodotti ottenuti moltiplicando gli elementi di una colonna rispettivamente pei determinanti del 2° ordine, che si deducono da quello dato sopprimendo in esso la riga e la colonna a cui appartiene l' elemento che si considera, il quale deve essere preso col segno che ha o con segno contrario secondochè la somma dei due numeri indicanti la riga e la colonna, nelle quali esso è situato, è un numero pari o dispari.

Esempio. Sia il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} 4x-2y+z&=1 \\ x-3y+2z&=2 \\ 3x+y-2z&=3 \end{aligned}$$

In virtù delle formule 3) si ha:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}$$

Ma per la regola ora data si ha:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(6-2) - 1(4-1) + 3(-4+3)$$

$$= 10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(6-2) - 2(4-1) + 3(-4+3)$$

$$= -5$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-4-6) - 1(-2-3) + 3(2-2)$$

$$= -35$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-9-2) - 1(-6-1) + 3(-4+3)$$

$$= -40;$$

quindi

$$x = \frac{-5}{10},\ y = \frac{-35}{10},\ z = \frac{40}{-10}$$

ovvero

$$x = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{7}{2},\ z = -4.$$

Funzioni di n variabili.

109. *Sieno* $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ n *numeri indeterminati; se, ogni volta che ad essi si attribuiscono valori determinati, contemporaneamente un altro numero* z *acquista un unico e determinato valore, si dice allora che* z *è funzione di quelli* n *numeri, che chiamansi variabili indipendenti.*

Per esempio, se è

$$z = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

ovvero

$$z = x_1\, x_2 \ldots x_n$$

manifestamente z è funzione di $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Ogni espressione algebrica che contenga n numeri indeterminati $x_1, x_2, \ldots x_n$ e che anche possa contenerne altri determinati, uniti quelli e questi in qualunque modo dai segni delle operazioni a noi note, è una funzione di $x_1, x_2, \ldots x_n$.

La dimostrazione è analoga a quella data per le espressioni contenenti due numeri indeterminati x, y.

Noi considereremo qui solamente funzioni l'espressione delle quali è un polinomio, in cui ogni termine è il prodotto di un numero determinato per una delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ elevata alla prima potenza, ovvero, è semplicemente un numero determinato.

Le chiameremo *funzioni intere di 1° grado delle* n *variabili* $x_1\, x_2 \ldots x_n$.

Una funzione siffatta, se in essa si raccolgono in un solo i termini contenenti la variabile x_1, in un solo quelli contenenti la x_2, ec., ec., e in un solo i termini costanti, si potrà sempre ricondurre alla forma

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \ldots + a_n\, x_n + b_1$$

dove $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1$ sono numeri determinati.

110. Si abbiano n di queste funzioni: ci si può proporre la questione: *trovare i sistemi di valori per le* $x_1, x_2 \ldots x_n$ *atti a fare acquistare alle* n *funzioni date gli* n *valori rispettivamente assegnati* $d_1, d_2, \ldots d_n$.

Si è così condotti a stabilire le n relazioni

$$1)\quad \begin{array}{l} a_{11}\,x_1+a_{12}x_2+\ldots\ldots+a_{1n}x_n+b_1=d_1 \\ a_{21}\,x_1+a_{22}x_2+\ldots\ldots+a_{2n}x_n+b_2=d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1+a_{n2}x_2+\ldots\ldots+a_{nn}x_n+b_n=d_n \end{array}$$

che costituiscono un sistema di n equazioni a n incognite $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ che si tratta di risolvere.

Come si vede, abbiamo indicato i coefficienti delle x con una stessa lettera alla quale abbiamo apposto due indici, ciascuno dei quali assume tutti i valori da 1 a n; i coefficienti in una stessa equazione hanno tutti lo stesso 1° indice e il 2° varia da 1 a n: i coefficienti poi di una stessa incognita nelle varie equazioni si distinguono tra loro per avere differenti i 1ⁱ indici.

Per ciascuna delle equazioni 1) valgono i principii intorno all'equivalenza stabiliti al capitolo VIII, giacchè i ragionamenti fatti allora si potrebbero ripetere qui: e così trasportando nel 2° membro i termini noti $b_1, b_2; \ldots\ldots b_n$, si riducono quelle alla forma

$$2)^1\quad \begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots\ldots+a_{1n}x_n=k_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots\ldots+a_{2n}x_n=k_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots\ldots+a_{nn}x_n=k_n. \end{array}$$

A questa forma si ricondurrebbero immediatamente anche delle equazioni, in cui ambedue i membri contenessero le variabili.

Consideriamo dunque il sistema 2) e dimostriamo che *per esso esiste sempre, tranne in casi speciali, un*

[1] Se in qualcuna delle equazioni non compariscono tutte le n incognite, si può intendere, quando occorra presentar *complete* le equazioni medesime che le incognite mancanti vi sieno moltiplicate per coefficienti nulli.

sistema e uno solo di valori per le incognite $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n$ *atti a soddisfarlo.*

Il metodo di dimostrazione che adopreremo indicherà al tempo stesso la via idonea a trovare effettivamente questi valori.

Rammentiamo anzitutto che, se due sistemi di n equazioni si dicono *equivalenti* l'uno all'altro quando ogni soluzione dell'uno è una soluzione dell'altro e viceversa, i principii stabiliti al capitolo VIII intorno all'equivalenza dei sistemi di due equazioni valgono anche per questi di n equazioni. I ragionamenti fatti allora sarebbero invero applicabili immediatamente anche qui.

Si risolva ciascuna delle 2) rispetto a una stessa incognita, la x_1 p. es.; si ottengono le n nuove equazioni

$$3)\quad \begin{array}{l} x_1=\dfrac{k_1-a_{12}x_2-\ldots\ldots-a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_1=\dfrac{k_2-a_{22}x_2-\ldots\ldots-a_{2n}x_n}{a_{21}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1=\dfrac{k_n-a_{n2}x_2-\ldots\ldots-a_{nn}x_n}{a_{n1}}. \end{array}$$

Affinchè esista una soluzione per le 2) cioè per le 3), sarà necessario e sufficiente che esista un sistema di valori per le $x_2\ x_3 \ldots\ldots x_n$ atti a fare acquistare valori eguali alle n precedenti espressioni ricavate per la x_1: così siamo condotti ad eguagliare quelle n espressioni tra loro due a due e con ciò si stabilisce un sistema di $n-1$ equazioni tra le $n-1$ incognite $x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$.

Ecco dunque che il sistema proposto di n equazioni ammetterà soluzioni se e quante ne ammetterà il nuovo sistema di $n-1$.

Se per questo sistema di $n-1$ equazioni si ripete

lo stesso ragionamento tenuto ora sul sistema proposto, si sarà condotti a concludere che tale sistema di $n-1$ equazioni e quindi anche quello proposto di n, ammette soluzioni se e quante ne ammette il sistema di $n-2$, che col processo suesposto si deduce da quello di $n-1$.

Allo stesso modo si è condotti a concludere che questo sistema di $n-2$ e quindi anche il proposto di n, ammette soluzioni se e quante ne ammette uno di $n-3$ equazioni, che si deduce da quello.

E così continuando si perviene a questa conclusione: che il sistema proposto ammette soluzioni se e quante ne ammette un sistema di due equazioni; ma questo, come si sa, tranne in casi speciali, ammette sempre una, e una sola, soluzione: quindi altrettanto accade pel sistema proposto.

Il metodo di dimostrazione, che qui abbiamo tenuto, e che chiamasi *di confronto*, quando sia effettivamente applicato a un dato sistema, condurrà sempre alla determinazione dei valori delle $x_1\ x_2 \ldots x_n$ componenti la soluzione del sistema medesimo.

Ma si può anche indicare un'altra via atta a ciò.

Si risolva una, p. es. la 1ª delle equazioni proposte rispetto a una incognita p. es. x_1 e si sostituisca l'espressione così trovata nelle altre $n-1$ equazioni, le quali così si ridurranno a contenere solo le altre $n-1$ incognite.

Il sistema composto della 1ª equazione risoluta rispetto a x_1 e delle altre $n-1$, dalle quali è stata *eliminata* la x_1 è (96) equivalente al proposto.

Risoluto che sia il sistema che resulta composto di queste $n-1$ equazioni tra le $n-1$ incognite $x_2 \ldots x_n$, si ottiene subito il valore di x_1 dall'espressione che per x_1 si è ricavata dalla 1ª equazione.

Si consideri dunque tale sistema di $n-1$ equazioni contenenti le incognite $x_2, x_3 \ldots x_n$. Operando su questo, come sul proposto, cioè risolvendo una delle equazioni di esso rispetto p. es. a x_2 e sostituendo l'espressione trovata nelle altre $n-2$ equazioni, si farà dipendere la risoluzione del detto sistema di $n-1$ equazioni, e, per conseguenza anche quella del sistema proposto, da quella del sistema ora dedotto di $n-2$ equazioni tra $n-2$ incognite.

Allo stesso modo si fa dipendere la risoluzione di queste da quelle di una di $n-3$ equazioni con $n-3$ incognite $x_4, x_5 \ldots x_n$.

Così continuando si perviene a un sistema di tre o due equazioni fra altrettante incognite, che si sa risolvere.

Determinati i valori di queste ultime incognite, risalendo per le espressioni delle altre incognite precedentemente trovate, si otterranno anche i valori di queste. Questo è detto il *metodo di sostituzione*.

111. Si può però applicare a un sistema generale di n equazioni il metodo di risoluzione detto *dei fattori indeterminati*, che sopra applicammo a un sistema di tre equazioni.

Si riprenda dunque il sistema:

$$1)\quad \begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=k_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=k_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=k_n \end{array}$$

si moltiplichi la 2ª equazione per λ_2, la 3ª per $\lambda_3, \ldots$ la n^a per λ_n, $\lambda_2\ \lambda_3 \ldots \lambda_n$ indicando numeri indeterminati, e poi si sommino tutte le n equazioni membro a membro.

Si ottiene

$$
2)\qquad \begin{aligned}
&x_1(a_{11}+\lambda_2 a_{21}+\lambda_3 a_{31}+\ldots+\lambda_n a_{n1})+\\
&+x_2(a_{12}+\lambda_2 a_{22}+\lambda_3 a_{32}+\ldots+\lambda_n a_{n2})+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\
&+x_n(a_{1n}+\lambda_2 a_{2n}+\lambda_3 a_{3n}+\ldots+\lambda_n a_{nn})=\\
&=k_1+\lambda_2 a_{2n}+\lambda_3 a_{3n}+\ldots+\lambda_n a_{nn},
\end{aligned}
$$

e questa equazione può sostituirsi (96) a una qualunque delle proposte. Ora noi possiamo valerci della indeterminazione dei numeri $\lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_n$ e stabilire che essi debbano sodisfare le $n-1$ equazioni che si ottengono eguagliando a zero i coefficienti di $n-1$ delle incognite nella 2). Si possono porre, ad es., eguali a zero i coefficienti delle $x_2, x_3 \ldots x_n$, e si hanno le equazioni:

$$
3)\qquad \begin{aligned}
&a_{12}+a_{22}\lambda_2+a_{32}\lambda_3+\ldots+a_{n2}\lambda_n=0\\
&a_{13}+a_{23}\lambda_2+a_{33}\lambda_3+\ldots+a_{n3}\lambda_n=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{1n}+a_{2n}\lambda_2+a_{3n}\lambda_3+\ldots+a_{nn}\lambda_n=0
\end{aligned}
$$

in cui le incognite sono $\lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_n$; così facendo si stabilisce un sistema di $n-1$ equazioni con altrettante incognite e si sa allora, che esiste sempre una soluzione. — Determinati i valori delle λ, che sodisfano le 3), se si sostituiscono nella 2), questa si riduce a contenere la sola x_1, ed è quindi subito risoluta.

Se invece si pongono eguali a zero i coefficienti delle $x_1, x_3, x_4 \ldots x_n$ nella 2), si avrà un altro sistema analogo al sistema 3), in virtù del quale la 2) si ridurrà a contenere la sola x_2.

Analogamente operando si ridurrà la 2) a contenere successivamente, una alla volta, le incognite x_3, $x_4 \ldots x_n$, e queste equazioni contenenti ciascuna una sola incognita sono subito risolute.

Come si è visto, a ciascuna di queste equazioni si perviene risolvendo un sistema di $n-1$ equazioni a $n-1$ incognite: così dunque la risoluzione di un sistema di n equazioni si fa dipendere da quella di un sistema di $n-1$: questa allo stesso modo si farà dipendere dalla risoluzione di un sistema di $n-2$ equazioni: e così via via continuando si sarà condotti a risolvere di un sistema di 3 o 2 sole equazioni, il che si sa sempre fare.

Osservazione I. Può accadere che non tutte le equazioni del sistema dato contengano tutte le incognite: allora è possibile, mediante qualche speciale riguardo, abbreviare il calcolo.

Si consideri, ad es., il sistema

$$
\begin{aligned}
4x-y+z-2t &= 3\\
x-2y+z &= 5\\
2x+y-3z &= 1\\
x-2y &= 4
\end{aligned}
$$

La t entra solamente nella 1ª equazione; si può dunque considerarla come se essa fosse già stata eliminata dalle altre tre: quindi si vede subito che è conveniente risolvere anzitutto il sistema delle ultime tre, giacchè portando poi nella 1ª i valori di x, y, z trovati, se ne trae subito la t. Ora si osservi che la z entra in due sole di queste equazioni: epperò se si risolve una di esse rispetto a z e si porta l'espressione trovata nell'altra si otterrà un'equazione colle sole incognite x e y, che associata all'ultima delle proposte ci darà un sistema di due equazioni a due incognite.

Si risolva dunque rispetto a z la

$$x-2y+z=5$$

nella quale z ha coefficiente più piccolo che nell'altra: si ha

$$z=5-x+2y:$$

sostituendo nella

$$2x+y-3z=1$$

questa diviene

$$2x+y-15+3x-6y=1$$
$$5x-5y=16.$$

Le due equazioni

$$5x-5y=16$$
$$x-2y=4$$

sono subito risolute: dalla 2ª si ha

$$x=2y+4$$

sostituendo nella 1ª

$$10y+20-5y=16$$
$$5y=-4$$
$$y=-\frac{4}{5}$$

e quindi

$$x=-\frac{8}{5}+4$$
$$x=\frac{12}{5}\,.$$

Portando i valori di x e y nell'espressione di z, si ha:

$$z=5-\frac{12}{5}-\frac{8}{5}$$
$$z=1$$

e portando infine i valori di x, y e z nella 1ª delle proposte:

$$4\,.\,\frac{12}{5}+\frac{4}{5}+1-2t=3$$

onde

$$t=\frac{21}{5}\,.$$

Da quanto si è fatto qui si raccoglie: 1° che se una delle incognite comparisce in una sola delle equazioni è utile risolvere anzitutto il sistema formato dalle rimanenti equazioni tra le rimanenti incognite: 2° che se una delle incognite comparisce non in tutte le equazioni di un sistema ma però in più d'una, come la z nel sistema delle tre ultime precedenti, è utile far subito la eliminazione di questa incognita e nel fare questa eliminazione se si adopera il metodo di sostituzione conviene risolvere rispetto a questa incognita quella equazione in cui l'incognita medesima ha il più piccolo coefficiente in valore assoluto.

Osservazione II. Qualche volta le equazioni del sistema proposto presentano delle forme particolari cosicchè si possa adoperando qualche speciale artifizio pervenire alla soluzione più speditamente di quello che si farebbe applicando qualcuno dei metodi generali. Non possiamo assegnare regole generali a questo riguardo; la pratica insegnerà l'uso di tali artifizii: noi daremo qualche esempio.

Sia il sistema

$$x+y+z+t=a$$
$$y+z+t+v=b$$
$$z+t+v+x=c$$
$$t+v+x+y=d$$
$$v+x+y+z=e.$$

Addizionando membro a membro queste cinque equazioni, si ha:

$$4(x+y+z+t+v)=a+b+c+d+e$$

onde

$$x+y+z+t+v=\frac{a+b+c+d+e}{4}$$

se da questa si sottraggono membro a membro successivamente le proposte si ottengono le equazioni

$$v=\frac{b+c+d+e-3a}{4}$$

$$x=\frac{a+c+d+e-3b}{4}$$

$$y=\frac{a+b+d+e-3c}{4}$$

$$z=\frac{a+b+c+e-3d}{4}$$

$$t=\frac{a+b+c+d-3e}{4}$$

e queste sono appunto le formule di risoluzione.

2° Sia il sistema

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

$$mx+ny+pz=k.$$

È noto (68) che

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{mx+ny+pz}{ma+nb+pc}$$

e quindi

$$\frac{x}{a}=\frac{k}{ma+nb+pc}$$

$$\frac{y}{b}=\frac{k}{ma+nb+p}$$

$$\frac{z}{c}=\frac{k}{ma+nb+pc}$$

dalle quali

$$x=\frac{ak}{ma+nb+pc}$$

$$y=\frac{bk}{ma+nb+pc}$$

$$z=\frac{ck}{ma+nb+pc}.$$

Sistemi di equazioni
che non si presentano nella forma sinora considerata.

112. Se è dato un sistema di equazioni, nelle quali compariscono dei termini frazionari contenenti le incognite nel denominatore, allora i metodi di risoluzione, che abbiamo qui esposto, non sono ad essi applicabili: ma si potrà sempre mandar via questi denominatori moltiplicando, come è noto, ciascuna delle equazioni, pel prodotto o pel minimo comune multiplo, quando lo si sappia trovare, dei denominatori che nell'equazione medesima si presentano. Così si ridurranno sempre le equazioni a *forma intera* rispetto alle variabili: e se le equazioni così ottenute saranno anche ciascuna di 1° grado, allora si potrà risolverle con uno dei metodi dati. È da notarsi però, che il sistema delle nuove equazioni ottenute moltiplicando le proposte per fattori che contengono le incognite, potrà non essere equivalente al sistema dato.

Invero, abbiasi il sistema di due equazioni a due incognite

1) $\qquad A=0\ ,\ B=0:$

per semplicità prendiamo due sole equazioni, ma il ragionamento è applicabile a sistemi di un numero qualunque d'equazioni; A e B sono espressioni alge-

briche qualunque che contengono le variabili x e y. — Sieno m ed n due espressioni algebriche contenenti x, o y, o anche ambedue x e y, e *intere* rispetto alle medesime.

Il sistema

$$2) \qquad mA=0 \quad , \quad nB=0$$

non può dirsi equivalente al sistema 1).

Sia x_0, y_0 una soluzione delle 1); se in A e in B si fa $x=x_0$ e $y=y_0$, A e B divengono identicamente nulli: m ed n, se anche in essi si fa $x=x_0$, $y=y_0$, assumono valori determinati: quindi anche mA ed nB sono nulli per $x=x_0$, $y=y_0$. — Ogni soluzione del sistema 1) sodisfa dunque al sistema 2); ma non è vera la reciproca, perchè le 2) *possono*[1] essere verificate non solo per le coppie di valori di x e y che annullano contemporaneamente A e B, ma anche per quelle che annullano insieme m ed n, ovvero m e B, ovvero anche n e A.

Per concludere che il sistema 2) è equivalente al sistema 1) bisognerebbe accertarsi che nessuna delle soluzioni dei sistemi

$$3) \qquad \begin{cases} m=0 & n=0 \\ m=0 & B=0 \\ n=0 & A=0 \end{cases}$$

[1] Si dice qui che le 2) *possono* essere verificate anche da coppie di valori che annullano m ed n, ovvero m e B, o n e A.—Invero sia x_1, y_1 una coppia di valori che annulla m ed n; se ponendo x_1 e y_1 in luogo di x e y in A e in B, A e B assumono valori determinati allora i prodotti mA e nB saranno nulli per $x=x_1$ e $y=y_1$; ma se A e B per $x=x_1$, $y=y_1$ non essendo espressioni *intiere* in x e in y, non assumono, come è possibile, valori determinati, p. es. qualche termine in essi si riduce alla forma $\frac{p}{0}$, allora non si può dire che i prodotti mA e nB sieno nulli.

sodisfa al sistema 2): e in luogo dei sistemi 3) si potranno considerare i sistemi

$$4) \qquad \begin{cases} m=0 & n=0 \\ m=0 & nB=0 \\ n=0 & mA=0 \end{cases}$$

giacchè o questi sono precisamente equivalenti ai precedenti ciascuno a ciascuno, o se anche gli ultimi due dei sistemi 4) non sono rispettivamente equivalenti agli ultimi due dei 3), però le soluzioni che ciascuno di questi ultimi due sistemi 4) può ammettere oltre quelle che ammette il corrispondente sistema 3), sono solamente le soluzioni del sistema $m=0$, $n=0$; quindi, in complesso, tutte le soluzioni dei sistemi 4) sono tutte quelle e solamente quelle dei sistemi 3).

È così provato che quando, per mandar via i denominatori, si devono moltiplicare le 1) per delle espressioni m ed n contenenti le incognite, le nuove equazioni che si ottengono

$$2) \qquad mA=0 \quad , \quad nB=0$$

possono non essere equivalenti alle 1).

Osserveremo però che quando queste equazioni 2) prive di denominatori contenenti le incognite, sono di 1° grado, ed è appunto questo il caso del quale qui specialmente ci occupiamo, per accertarsi che il sistema 2) è equivalente al sistema 1) non vi è bisogno di seguire la via dianzi tracciata, cioè quella di verificare che nessuna soluzione dei sistemi 3) sodisfa al sistema 2); infatti, essendo le 2) di 1° grado, esse in generale ammettono una sola soluzione x_0, y_0: e quindi si può senz'altro concludere che anche il sistema

$$1) \qquad A=0 \quad , \quad B=0$$

ammette quest'unica soluzione, ovvero, non ne ammette alcuna. — Si risolverà dunque il sistema 2), e trovata l'unica soluzione di esso, rimarrà solamente a verificare se questa soluzione sodisfa anche al sistema 1). — Diamo un esempio.

Siano le due equazioni

$$5)\quad \frac{x+6}{y-x}-\frac{3}{4}=0,\ \frac{x}{y-2}-\frac{1}{2}=0$$

si moltiplichi la 1ª per $y-x$, la 2ª per $y-2$: si ottengono le

$$x+6-\frac{3}{4}(y-x)=0,\ x-\frac{y-2}{2}=0$$

ovvero

$$6)\quad 7x-3y=-24,\ 2x-y=-2.$$

Risolvendo queste si trovano i valori

$$x=-18,\ y=-34,$$

che verificano anche le 5).

113. Qualche volta si può, cambiando convenientemente incognite, ricondurre alla forma di equazioni *intere* e di 1° grado, certe equazioni, che non vi si potrebbero ricondurre in altro modo. Non si può assegnare una regola generale riguardo a ciò; daremo solo un esempio.

Sia il sistema

$$1)\quad \begin{aligned} &\frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=5\\ &\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=6\\ &\frac{2}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{aligned}$$

se si pone

$$2)\quad \frac{1}{x}=t,\ \frac{1}{y}=u,\ \frac{1}{z}=v$$

le equazioni date divengono

$$3)\quad \begin{aligned} 2t-3u+\ v&=5\\ t+2u-3v&=6\\ 2t-\ u+\ v&=1 \end{aligned}$$

e queste sono *intere* e di 1° grado rispetto alle incognite t, u e v. — Si trovano i valori di t, u e v; e se questi sono diversi da zero, allora dalle 2) si ricavano subito i valori di x, y e z.

Sistemi in cui il numero delle equazioni supera o è superato da quello delle incognite.

114. Abbiamo dimostrato al num. 107 che un sistema di n equazioni di 1° grado a n incognite ammette sempre, tranne in casi speciali, una, e una sola, soluzione.

1° Pongasi ora che sia dato un sistema di $n+p$ equazioni tra n incognite: scelte n delle equazioni proposte, queste costituendo un sistema di n equazioni tra n incognite ammettono una sola soluzione. Ora non vi è ragione, perchè i valori componenti questa soluzione sodisfino anche le rimanenti p equazioni; il sistema proposto di $n+p$ equazioni tra n incognite può dunque non ammettere alcuna soluzione.

Se i coefficienti delle incognite o qualcheduno di essi sono delle lettere per le quali non siano già fissati valori particolari, allora sostituendo le espressioni ricavate per le incognite dalle n equazioni scelte, nelle p rimanenti, queste dopo la sostituzione non conterranno

più le incognite, ma bensì le lettere che rappresentano i coefficienti, e saranno così p relazioni, alle quali debbono sodisfare questi coefficienti letterali, affinchè i valori delle incognite dedotte da n delle equazioni sodisfino anche le p rimanenti.

Sia il sistema

$$1)\quad \begin{aligned} x+y&=2a\\ x-y&=2b\\ 2x+3y&=a+2b\\ 3x+4y&=2a+3b-1. \end{aligned}$$

Le due prime equazioni dànno

$$x=a+b,\ y=a-b,$$

sostituendo queste espressioni nelle due ultime equazioni si ha

$$2)\quad \begin{aligned} 2(a+b)+3(a-b)&=a+2b\\ 3(a+b)+4(a-b)&=2a+3b-1. \end{aligned}$$

Se si vuole che i valori di x e y dedotte dalle prime due delle 1), sodisfino anche le ultime due, bisognerà quindi che ad a e a b si dieno valori tali che sodisfino le 2); si considereranno dunque queste come due equazioni in cui le incognite sono a e b: risolvendole si trova

$$a=3,\ b=4.$$

Se nelle 1) si pongono per a e per b questi valori esse divengono

$$\begin{aligned} x+y&=6\\ x-y&=8\\ 2x+3y&=11\\ 3x+4y&=17 \end{aligned}$$

le quali sono sodisfatte per $x=7$, $y=-1$. Le 2) si

dicono *le equazioni di condizione* perchè il sistema 1) ammetta una soluzione.

Sia ancora il sistema

$$\begin{aligned} x+2y&=c\\ 3x-y&=d\\ x+4y&=c-d. \end{aligned}$$

Le due prime equazioni dànno

$$x=\frac{c-2d}{7}\quad,\quad y=\frac{3c-2d}{7}\ ;$$

sostituendo queste espressioni nell'ultima equazione, si ha

$$\frac{c-2d}{7}+\frac{12c-8d}{7}=c-d$$

ovvero

$$2c-d=0.$$

Affinchè un medesimo sistema di valori per le x e y sodisfi a tutte e tre le equazioni proposte, è necessario e sufficiente che si prendano per c e d valori che verifichino l'ultima relazione trovata; ed è manifesto che questa può verificarsi in infiniti modi.

Di quanto qui si è detto, si rileva che dato un sistema di $n+p$ equazioni con n sole incognite, se si vuole che esista per esso una soluzione, è necessario che i coefficienti letterali sieno almeno in numero di p.

2° Sia dato un sistema di n equazioni contenenti $n+p$ incognite: si vede subito che esso è indeterminato, ammette, cioè, infinite soluzioni: invero, se a p delle incognite si attribuiscono valori scelti a piacere, le n equazioni si ridurranno a contenere solo n incognite, e quindi si avrà per esse una sola soluzione; potendosi dunque scegliere ad arbitrio i valori di p in-

cognite e ogni volta trovare un valore determinato per ciascuna delle altre è provato che si hanno pel sistema proposto infinite soluzioni.

Esercizi.

Sistemi di equazioni a risolvere.

1° $3x-4y=2 \quad , \quad 7x-9y=7$

2° $\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}y=1 \quad , \quad \frac{7}{3}x+\frac{5}{6}y=6$

3° $x+y=a \quad , \quad x-y=b$

(si sommino e si sottraggano membro a membro).

4° $mx+ny=c \quad , \quad mx-ny=d$

(si faccia altrettanto).

5° $\frac{x+y}{8}+\frac{x-y}{6}=5 \quad , \quad \frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=10$

(si cangino le incognite ponendo $x+y=u$, $x-y=v$).

6° $0{,}3x+0{,}125y=x-6, \; 3x-0{,}5y=28-0{,}25y$

7° $0{,}08x-0{,}21y=0{,}33 \quad , \quad 0{,}12x+0{,}7y=3{,}54$

8° $\dfrac{\frac{2x}{3}-\frac{5y}{12}}{\frac{7}{4}}-\dfrac{\frac{3}{2}x-\frac{y}{3}}{\frac{23}{2}}=2 \quad , \quad \frac{x-y}{x+y}=\frac{1}{5}$

9° $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}=1 \quad , \quad \frac{n}{x}+\frac{m}{y}=1$

$\left(\text{si ponga } \frac{1}{x}=u \quad , \quad \frac{1}{y}=v\right).$

10° $x+ay=b \quad , \quad ax-by=c$

11° $(a-b)x+(a+b)y=c \quad , \quad (a^2-b^2)(x+y)=d$

$\left[\text{si trova } \; x=\frac{1}{2b}\left(\frac{d}{a-b}-c\right),\right.$

$\left. y=\frac{1}{2b}\left(c-\frac{d}{a+b}\right)\right]$

12° $x+cxy+y=b \quad , \quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=c$

(si moltiplichi la 2ª per xy: si aggiunga poi membro a membro questa equazione ottenuta alla 1ª ec. ec.)

13° $\frac{5}{x+2y}=\frac{7}{2x+y} \quad , \quad \frac{7}{3x-2}=\frac{5}{6-y}$

(si inverta).

14° $x+y=a \quad , \quad x^2-y^2=b$

15° $2x+3y+4z=16$

$3x+2y-5z=8$

$5x-6y+3z=6$

(si trova $x=3$, $y=2$, $z=1$).

16° $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$

$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$\left(\text{si trova } \; x=\frac{a}{2} \quad , \quad y=\frac{b}{2} \quad , \quad z=\frac{c}{2}\right)$

17° $\frac{a}{z}+\frac{b}{y}=1$

$\frac{b}{y}+\frac{z-c}{x}=0$

$x+y+z=2c$

$$\left(\text{si trova } x=\frac{2c^2(c-b-a)}{(c-b+a)(c+b-a)}\right.$$

$$y=\frac{2bc}{b-a+c}$$

$$\left.z=\frac{2ac}{a-b+c}\right).$$

18° $x+y+z=0$

$(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z=0$

$bcx+acy+abz=1$

$$\left(\text{si trova } x=\frac{1}{(a-b)(a-c)},\ y=\frac{1}{(b-a)(b-c)}\right.$$

$$\left.z=\frac{1}{(c-a)(c-b)}\right).$$

19° $a^4+a^3x+a^2y+az+u=0$

$b^4+b^3x+b^2y+bz+u=0$

$c^4+c^3x+c^2y+cz+u=0$

$d^4+d^3x+d^2y+dz+u=0$

(si sottraggano dalla 1ª successivamente le 2ª, 3ª e 4ª: si ottengono tre equazioni colle sole x, y e z: si semplicizzino e nuovamente si sottraggano allo stesso modo).

20° $\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{5}$, $\frac{xz}{x+z}=\frac{1}{6}$, $\frac{yz}{y+z}=\frac{1}{7}$

(si inverta e si semplicizzi).

21° $7u-13z=87$

$3u+x=57$

$20y-3x=11$

$2x+11z=39$

(si trova $x=3$, $y=1$, $z=3$, $u=18$).

22° $7x-2z+3u=17$

$4y-2z+t=11$

$5y-3x-2u=8$

$4y-3u+2t=9$

$3z+8u=33$

(si trova $x=2$, $y=4$, $z=3$, $u=3$, $t=1$).

23° $x-y-z=33$

$x+y=75$

$x+z=72$

(si sommino la 2ª e la 3ª: poi quella così ottenuta colla 1ª).

24° $x-y=11$

$x-z=22$

$y-z=11$

(sommando la 1ª e la 3ª membro a membro, si ottiene la 2ª: dunque il sistema è indeterminato: si vegga che forma prendono le formule risolutive).

25° $x+y=10$

$x+z=11$

$x-z=2$

(sommando la 2ª e la 3ª si ottiene una equazione che contraddice alla 1ª: il sistema è dunque impossibile: si vegga che forma prendono le formule risolutive).

26° $\frac{6y-4x}{3z-7}=1$, $\frac{5z-x}{2y-3z}=1$, $\frac{y-2z}{3y-2z}=1.$

27° $$\begin{aligned}
1 &= x+y+z+u+v+w+t \\
0 &= x+ay+bz+cu+dv+ew+ft \\
0 &= x+a^2y+b^2z+c^2u+d^2v+e^2w+f^2t \\
0 &= x+a^3y+b^3z+c^3u+d^3v+e^3w+f^3t \\
0 &= x+a^4y+b^4z+c^4u+d^4v+e^4w+f^4t \\
0 &= x+a^5y+b^5z+c^5u+d^5v+e^5w+f^5t \\
0 &= x+a^6y+b^6z+c^6z+d^6v+e^6w+f^6t.
\end{aligned}$$

Problemi.

1° Trovare due numeri, che divisi l'uno per l'altro diano per quoziente $\frac{2}{3}$ e tali che aggiungendo 4 a ciascuno le somme ottenute divise rispettivamente l'una per l'altra diano per quoziente $\frac{4}{5}$.

2° Trovare due numeri che divisi l'uno per l'altro diano per quoziente $\frac{3}{4}$, e il prodotto dei quali sia eguale a 12 volte la loro somma.

3° Un numero è composto di due cifre, la cui somma è 5: aggiungendo 9 al numero stesso si ottiene il numero che è composto colle stesse cifre scritte però in ordine inverso. Trovare il numero.

4° Una frazione è tale che diviene eguale a 1, se si aumenta di 1 il suo numeratore e insieme si diminuisce di 1 il suo denominatore: diviene invece eguale a 4, se il numeratore si aumenta del denominatore e questo si diminuisce del numeratore. Trovare questa frazione.

5° Una certa somma è stata divisa in parti eguali fra più persone; se queste fossero state 3 di più, ciascuna avrebbe ricevuto una lira di meno, e se fossero state 2 di meno, ciascuna avrebbe ricevuto una lira di più. Trovare il numero delle persone e il numero di lire toccate a ciascuna.

6° In un certo paese il giorno più lungo supera di 10 ore e 2 minuti la notte più corta. Si domanda quanto durino ivi il giorno più lungo e la notte più corta.

7° Entro un cerchio di diametro d si trova un punto che ha una distanza a dal centro: quali sono le distanze, la massima e la minima, di questo punto dalla circonferenza?

8° In una adunanza di 80 persone fu eletto il Presidente con una maggioranza di 18 voti. Quanti gli votarono contro e quanti in favore?

9° Il rombo di un cannone percorse in un secondo m. 344, 64 nella direzione del vento e 336, 12 nella direzione contraria. Quali erano le velocità del suono e del vento in quell'istante?

10° 2 monete d'argento di due lire e 2 monete d'argento di una lira messe in fila fanno un decimetro. Il diametro della moneta di una lira è $\frac{23}{27}$ di quello della moneta di due lire. Qual è il diametro di ciascuna moneta.

11° Il diametro di una moneta d'argento da 2 lire è di mm. 27 e per la moneta da 5 lire è mm. 37. Ponendo in fila 30 di tali monete si ottiene una lunghezza di un metro. Quante ne furono impiegate di una specie e quante dell'altra?

12° La differenza dei quadrati di due numeri è eguale a 840. Aumentando ciascun numero di 3 la differenza dei quadrati è 900. Trovinsi questi numeri.

13° Su di una circonferenza la cui lunghezza è

100 metri, si muovono due punti, che si incontrano ogni 20 secondi quando si muovono nella stessa direzione, e ogni 4 secondi quando si muovono in direzioni contrarie.

Si vuol sapere quanti metri ciascun punto percorre in un secondo.

(Si considerino i due punti nell'istante in cui si sono incontrati; essi continuano poi il loro movimento e s'incontrano un'altra volta dopo 20", ovvero dopo 4", secondochè si muovono nella stessa direzione o in direzioni opposte).

14° Su di una circonferenza lunga m. 999 si muovono due punti nella stessa direzione: essi si raggiungono ad ogni 37 secondi e uno dei punti è 4 volte più veloce dell'altro. Si vuol sapere quanti metri sieno percorsi in un secondo dall'uno e quanti dall'altro di quei due punti.

15° Sommando ordinatamente tre a tre i lati di un quadrilatero, si ottengono le lunghezze seguenti: 130, 135, 147, 152 metri. Si vuole conoscere la lunghezza di ciascuno dei lati.

16° Su di una circonferenza si muovono due punti e questi si incontrano ad ogni 20 secondi quando si muovono nella stessa direzione, e ad ogni 10 secondi quando si muovono in direzioni opposte. Nel secondo caso se si trovino a una distanza di 30 metri l'un dall'altro, dopo 3 secondi si trovano nuovamente tra di loro a una distanza di 30 metri. Da questi dati dedurre la lunghezza della circonferenza e il numero dei metri percorsi da ciascuno dei punti in un secondo.

17° Una cisterna che contiene 1200 m. c. è riempita da tre condotti A, B e C che versano insieme, in 24 minuti. Il condotto A da solo impiegherebbe 20 minuti più di quanti ne impiegherebbe C solo, per riempire la cisterna; e il condotto C versa in un minuto 10 m. c. meno di quanti ne versano insieme A e B.

In quanto tempo ciascuno, versando solo riempirebbe la cisterna?

(Si prendano come incognite i numeri di m. c. versati rispettivamente dai tre condotti in un secondo).

18° Determinare i coefficienti del trinomio

$$ax^2+bx+c$$

in modo che questo trinomio si annulli per $x=m$ e per $x=n$ e divenga eguale a p per $x=q$.

(Si stabiliscano tre equazioni nelle quali si riguardano come incognite a, b e c).

19° Due individui A e B percorrono un chilometro; e A, che ha dato a B, 44 m. di vantaggio, arriva 51 secondi prima di B: nel ritorno poi, B si muove 1 minuto e 15 secondi prima di A, ed è vinto per 81 metri. Trovare i tempi, che A e B impiegano a percorrere un chilometro.

(Se x indica il numero di secondi che impiega A a percorrere un chilometro, $x+51$ sarà quello che impiega B a percorrere $1000-44$ metri; in un secondo B nell'andata percorre dunque $\frac{1000-44}{x+51}$ metri; si trovi l'espressione analoga pel ritorno; la velocità di B essendo una sola, quelle due espressioni saranno eguali, ec., ec.).

20° Un treno, dopo aver viaggiato per un'ora, per una cagione imprevista, è obbligato a trattenersi per un'ora, dopo di che continua il viaggio con velocità eguale ai $\frac{3}{5}$ di quella che avea prima, e così arriva al termine del viaggio prefisso 3 ore dopo del

tempo fissato: se la fermata di un'ora fosse accaduta 50 chilometri più innanzi, il ritardo sarebbe stato solo di 1 ora e 40 minuti. Trovare la lunghezza del viaggio e la velocità primitiva del treno.

(Indichi z la lunghezza del viaggio e x la velocità primitiva del treno, cioè, il numero di metri percorsi in un minuto nella prima corsa; dopo la 1ª ora, il cammino che ancora rimane a fare, sarà $z-60x$; il tempo che ci vorrebbe a percorrerlo colla velocità x sarebbe $\frac{z-60x}{x}$: quello invece che ci vuole colla velocità $\frac{3}{5}.x$, è $\frac{z-60x}{\frac{3}{5}x}$: e questo, per *dato*, supera quello di due ore; ec., ec.).

21° A, B e C si mettono a giuocare e ciascuno possiede un certo numero di lire. A perde con B e C tante lire, quante ne ha ciascuno di essi: poscia, B perde con A e C tante lire, quante ne possiede ora ciascuno di essi: da ultimo C perde con A e B tante lire, quante ne possiede ora ciascuno di essi.

Dopo tutto questo giuoco, ciascuno dei giocatori si trova con 16 lire: trovare quante lire ciascuno possedeva prima del giuoco.

22° Due persone A e B potrebbero, lavorando insieme, compiere un lavoro in m giorni: ma, dopo aver lavorato insieme n giorni, A è chiamato altrove e B termina da solo il lavoro in altri p giorni. In quanti giorni ciascuna persona da sè sola compierebbe il lavoro?

(Indichi x il numero dei giorni che vi impiegherebbe A, y quello che vi impiegherebbe B: in un giorno A fa, di tutto il lavoro, una parte che è $\frac{1}{x}$: B, pure in un giorno, ne fa una parte $\frac{1}{y}$: dunque insieme ne fanno $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$: e per *dato* tutto il lavoro è m volte $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$; ec., ec.).

23° Due treni rispettivamente lunghi 92 e 84 metri si muovono ciascuno con velocità uniforme sopra due rotaie parallele. Quando i due treni si muovono in direzioni opposte, ci vuole un minuto secondo e mezzo perchè l'uno *passi* l'altro; mentre quando si muovono nella stessa direzione il treno più lungo *passa* l'altro in 6 secondi. Trovare le velocità di ciascun treno.

24° Data la serie

$$a+b,\ ap+bq,\ ap^2+bq^2,\ ap^3+bq^3,\ ap^4+bq^4,\ \ldots.$$

trovare due numeri x e y tali che ogni termine di questa serie possa ottenersi, moltiplicando il precedente per x, e l'antiprecedente per y, e sommando i resultati.

(Il termine generale della serie data è ap^n+bq^n un altro qualunque sarà ap^m+bq^m: dovranno dunque verificarsi le equazioni

$$ap^n+bq^n=(ap^{n-1}+bq^{n-1})x+(ap^{n-2}+bq^{n-2})y$$
$$ap^m+bq^m=(ap^{m-1}+bq^{m-1})x+(ap^{m-2}+bq^{m-2})y).$$

25° Sia data la serie

$$a+b+c,\ ap+bq+cr,\ ap^2+bq^2+cr^2,\ ap^3+bq^3+cr^3,$$

e si domanda di trovare tre numeri x, y e z tali che ogni termine di questa serie si ottenga, moltiplicando il precedente per x, l'antiprecedente per y e quello che precede di tre posti per z.

26° Ponendo

$$1)\qquad \begin{aligned} x &= \alpha t + \beta u \\ y &= \alpha' t + \beta' u \end{aligned}$$

nelle equazioni

$$2)\qquad \begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

si ottengono due equazioni colle incognite t ed u: verificare che il denominatore dei valori t e u, che se ne deducono, è il prodotto dei denominatori che si trovano, risolvendo le equazioni 1) rispetto a t e a u, e le 2) rispetto a x e y.

27° Fare la stessa verificazione pei sistemi di equazioni

$$1)\qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha t + \beta u + \gamma v \\ y &= \alpha' t + \beta' u + \gamma' v \\ z &= \alpha'' t + \beta'' u + \gamma'' v \end{aligned} \right.$$

e

$$2)\qquad \left\{ \begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'' \end{aligned} \right.$$

28° Un treno T, la velocità del quale è v, parte dopo un altro treno T', la cui velocità è v', e il ritardo è calcolato in modo che debbano arrivare contemporaneamente al punto destinato. Il treno T' è costretto a diminuire per metà la sua velocità, dopo aver percorsi i due terzi della corsa: e i due treni si raggiungono ad a leghe prima della fine del viaggio. Trovare la lunghezza totale del viaggio.

Si trova

$$x = 6a - 3a\frac{v'}{v}\,.$$

29° Qual relazione bisogna supporre tra A, B, A' e B' perchè l'espressione $\frac{Ax + B}{A'x + B'}$ che è, come si vede, funzione di x, abbia sempre un medesimo valore, comunque si prenda x?

(Chiamando h questo valore, bisognerà che l'equazione

$$\frac{Ax + B}{A'x + B'} = h$$

sia verificata per ogni valore di x: ec., ec.).

30° Quali relazioni bisogna supporre tra A, B, C A', B', C' perchè la espressione $\frac{Ax + By + C}{A'x + B'y + C'}$ abbia sempre un medesimo valore, comunque si prendano x e y, cioè sia, come suol dirsi, indipendente da x e da y? Può essere indipendente da x senza esserlo anche da y?

31° Trovare due frazioni che abbiano per denominatore, una $3 + 4z$, l'altra $6 + 7z$ e tali che la loro somma sia eguale alla frazione

$$\frac{27 + 34z}{(3 + 4z)(6 + 7z)}$$

dove z indica un numero indeterminato.

32° Cercare la condizione per cui il sistema delle tre equazioni

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \\ a''x + b''y + c'' &= 0 \end{aligned}$$

è sodisfatto dai medesimi valori di x, y e trovare questi valori.

33° Cercare la condizione per cui il sistema delle quattro equazioni

$$x = az + p \qquad x = a'z + p'$$
$$y = bz + q \qquad y = b'z + q'$$

è sodisfatto dai medesimi valori di x, y e z e trovare questi valori.

CAPITOLO X.

Discussione della soluzione di un problema.

115. La risoluzione di un problema a più incognite consta, come quella di un problema a una incognita, di due operazioni distinte: l'una, quella di tradurre in linguaggio algebrico le relazioni che l'enunciato del problema stabilisce fra i numeri incogniti e i numeri dati nell'enunciato medesimo: e questa prima operazione condurrà sempre a stabilire delle equazioni contenenti i numeri incogniti; l'altra consiste nel risolvere queste equazioni.

Questa seconda operazione, quando le equazioni sono di 1° grado, noi sappiamo sempre eseguirla: non così la prima, per la quale possiamo solo indicare la traccia che è utile seguire, e che è anologa a quella indicata pei problemi a una incognita.

Si denotino con le lettere x, y, z .... i numeri incogniti e si indichino, e, quand'è possibile, si facciano su essi e sui numeri dati nell'enunciato tutte le operazioni di calcolo che si farebbero se, invece di rappresentare i numeri incogniti con lettere, si prendessero per essi dei valori particolari scelti a caso, e si volesse verificare se questi valori sodisfano al problema. Ora una tale verificazione consisterebbe propriamente in questo: nell'esaminare se i resultati di certe serie di operazioni sopra gli anzidetti valori scelti a caso e sui numeri dati nell'enunciato sono

eguali rispettivamente ai resultati di certe altre serie di operazioni sui medesimi, o a certi numeri dati; ma se i numeri incogniti, invece che sostituiti da valori particolari, sono rappresentati con lettere, allora i resultati di operazioni sopra di essi saranno espressioni algebriche: e così si sarà condotti ad eguagliare siffatte espressioni algebriche, contenenti le lettere x, y, z..... tra di loro, ovvero a dei numeri dati.

Di qui si vede intanto che un problema sarà determinato, cioè, ammetterà una soluzione unica determinata,[1] se tradotto in linguaggio algebrico darà luogo a un sistema di tante equazioni di 1° grado o riducibili al 1° grado, quante sono le incognite, delle quali si domanda la determinazione, e se inoltre tale sistema di equazione ammetterà una soluzione unica.

Fermiamoci ora su quest'ultima condizione. Noi sappiamo che così un' equazione a un' incognita come un sistema di equazioni a più incognite non ammette sempre una soluzione determinata: qualche volta non ne ammette alcuna e qualche volta può ammetterne infinite.

Se applicando a un sistema di equazioni uno dei noti metodi di risoluzione, o in qualsiasi altro modo, se ne deduce legittimamente una relazione assurda per sè stessa, ovvero contradittoria a qualcuna delle equazioni del sistema, allora ciò manifestamente significa che esso è un sistema insolubile, e se invece si è condotti a una identità, ovvero si scopre che qualcuna delle equazioni è conseguenza delle altre, dimodochè non si abbiano tante equazioni distinte quante sono le incognite, allora ciò significa che il sistema ammette infinite soluzioni.

[1] S' intende dire che il problema è determinato in questo caso, senza escludere, per adesso, che lo possa essere anche in altri casi.

Or si domanda: quando il sistema di equazioni corrispondente a un certo problema non ammette alcuna soluzione o ne ammette un numero infinito, che si deve concludere rispetto al problema medesimo?

Se nelle equazioni sono riprodotte fedelmente tutte e sole le condizioni, che l'enunciato del problema impone alle incognite, allora è manifesto che anche del problema si dovrà dire che non ammette alcuna soluzione, che è un problema assurdo, ovvero che ne ammette infinite, vale a dire che è indeterminato, secondochè l'una circostanza o l'altra si presenta pel sistema di equazioni.

E veramente, nel caso che il sistema d'equazioni non ammette alcuna soluzione, per concludere che anche il problema non ne ammette, non è affatto necessario che le equazioni riproducano *tutte* le condizioni, che l'enunciato impone alle incognite; è sufficiente che esse esprimano delle condizioni *necessarie* a cui debbono sodisfare le incognite medesime.

Rammentiamo poi che nel caso particolare di una sola equazione, ovvero di un sistema di due, nelle quali nessuno dei coefficienti sia nullo, la mancanza di ogni soluzione, ci è rivelata dal presentarsi della forma $\frac{m}{0}$ per la formula o per le formule risolutive: l'esistenza di infinite soluzioni dalla forma $\frac{0}{0}$[1]; quindi l'in-

[1] Si noti che una frazione può ridursi alla forma $\frac{0}{0}$ in seguito a ipotesi particolari circa i valori da attribuirsi alle lettere in essa; e allora è da avvertire che la forma anzidetta non provenga dall'annullarsi di un fattore comune ai due termini della frazione; in tale caso la forma $\frac{0}{0}$ non sarebbe simbolo di indeterminazione, perchè, se le ipotesi particolari, alle quali è dovuto l'annullarsi del detto

contrare queste forme ci fa concludere altrettanto rispetto al problema, cioè che esso è assurdo o indeterminato rispettivamente.

Se, dato un problema, fosse sempre facile o almeno possibile, colla sola considerazione dell'enunciato, scoprire se esso ammetta o no una soluzione determinata, si penserebbe a tradurlo in equazione solamente allora, che l'esistenza di una soluzione determinata fosse prima riconosciuta, e la risoluzione della equazione o delle equazioni nelle quali fossero riprodotte esattamente tutte le condizioni del problema, condurrebbe alla conoscenza di questa soluzione. Ma nonchè facile, non è sempre possibile, alla sola lettura dell'enunciato, riconoscere se esista o no una soluzione. È per questo che ordinariamente la traduzione del problema in equazioni si fa senza affatto preoccuparsi in antecedenza della sua risolubilità o no, e si tenta poi di risolvere le equazioni: così si affida al calcolo non solo la determinazione della soluzione, quando essa esiste, ma ancora la decisione se ne esista una sola, o nessuna o un numero illimitato.

Diamo alcuni esempi.

fattore, si fanno dopochè il fattore medesimo è stato soppresso dai due termini della frazione, allora questa non assumerà più la forma $\frac{0}{0}$.

Se ne ha un esempio nella frazione $\frac{a^2-b^2}{a-b}$, che diviene $\frac{0}{0}$ se si fa $a=b$; e ciò previene dal fattore $a-b$ che è comune ai due termini, e che appunto si annulla per $a=b$; se, prima di supporre $a=b$, si sopprime il detto fattore, la frazione si riduce all'espressione $a+b$, che per $a=b$ diviene $2a$.

È dunque mestieri, innanzi di fare ipotesi particolari intorno ai valori da attribuirsi alle lettere, sopprimere i fattori comuni, che i due termini della frazione che si considera, possono presentare.

Esempio 1°. *Trovare due numeri* x *e* y *tali che il quintuplo del primo più il triplo del secondo facciano* 17, *e il decuplo del primo, più il sestuplo del secondo facciano* 31.

Le equazioni del problema sono

$$5x+3y=17 \quad , \quad 10x+6y=31.$$

Applicando la regola (99), si ha

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 17 & 3 \\ 31 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}}=\frac{9}{0}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 17 \\ 10 & 31 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}}=\frac{-15}{0}$$

il che rivela che non esiste alcuna soluzione; ciò si vede anche, come è naturale, applicando alle equazioni proposte uno dei metodi di risoluzione; giacchè ricavando x dalla 1ª, e sostituendo nella 2ª, si ottiene l'assurdità $34=31$.

Il problema è dunque impossibile.

Esempio 2°. *Trovare due numeri tali che il terzo del primo eguagli la metà del secondo meno* 1, *e il secondo eguagli i* $\frac{2}{3}$ *del primo più* 2.

Le equazioni che emanano dall'enunciato sono

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}-1: \quad y=\frac{2}{3}x+2$$

ovvero

$$2x-3y=-6, \quad -2x+3y=6.$$

Le formule risolutive danno

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-6 & -3\\ 6 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ -2 & 3\end{vmatrix}}=\frac{0}{0};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & -6\\ -2 & 6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ -2 & 3\end{vmatrix}}=\frac{0}{0},$$

il che mostra che il sistema ammette infinite soluzioni e il problema è perciò indeterminato. Si può veder subito, che le due equazioni poste sono identiche l'una all'altra.

Osservazione. Se l'incognita di un problema fosse la distanza tra un punto dato sopra una retta e il punto in cui essa è incontrata da un'altra, e si trovasse per la detta distanza l'espressione $\frac{m}{0}$ ciò significherebbe, che non esiste una distanza assegnabile a partire dal dato punto, a cui le due rette s'incontrano, vale a dire le medesime sarebbero parallele; se poi si trovasse la forma $\frac{0}{0}$, ciò significherebbe che quella distanza può avere infiniti valori: le due rette dunque coinciderebbero.

116. Quando le equazioni riproducono fedelmente tutte le condizioni contenute nell'enunciato di un problema, la soluzione di quelle è la soluzione giusta del problema. Ma non accade sempre che le equazioni riproducano tutte ed esattamente le condizioni dell'enunciato. Alcune volte non è possibile esprimere perfettamente col linguaggio algebrico certe condizioni, che l'enunciato impone alle incognite e così le equazioni, che si pongono, rimangono più *generali* di quello che veramente dovrebbero essere; allora se il problema ammette una soluzione, certo questa deve essere anche soluzione delle equazioni, ma se queste ammettono

una soluzione non ne segue che la medesima sodisfi pure il problema, il quale può benissimo non ammetterne alcuna.

Diamo qualche esempio.

Esempio 1° *In una società di 10 persone si è fatta una colletta pei poveri; ciascun uomo ha dato 6 lire, ciascuna donna ha dato 4 lire. La somma totale raccolta è di 45 lire. Si domanda il numero degli uomini e il numero delle donne.*

Sia x il numero degli uomini, y quello delle donne. Si ha dapprima

$$x+y=10.$$

Poichè ciascun uomo ha dato 6 lire, x uomini hanno dato $6x$: poichè ogni donna ha dato 4 lire, y donne han dato $4y$. Dunque si ha:

$$6x+4y=45.$$

Risolvendo queste due equazioni, si trova

$$x=\frac{5}{2}\quad,\quad y=\frac{15}{2}.$$

Questa è l'unica soluzione del sistema d'equazioni. Le equazioni esprimono delle condizioni *necessarie*, che l'enunciato del problema impone alle incognite: esso non potrebbe dunque avere altra soluzione all'infuori di quella; ma intanto quella ci offre numeri frazionari, epperò non può convenire a un problema la cui natura richiede numeri interi. Si dee dunque concludere che il problema proposto è assurdo; assurdità che avremmo dovuto rilevare dal solo enunciato. Si spiega in che modo accada che le equazioni abbiano una soluzione, mentre il problema non ne ha alcuna, osservando che in questo si richiede che

i numeri incogniti sieno interi e tale condizione non è riprodotta nelle equazioni, le quali sono così più generali di quello che sarebbe richiesto.

Esempio 2° *Ripartire 6 palle in due urne di guisa che nell' una se ne trovino 8 più che nell' altra.*

Sia x il numero delle palle da porsi nella prima urna, y quello da porsi nella seconda: dovrà essere

$$x+y=6$$

e

$$x-y=8$$

onde

$$x=7 \quad , \quad y=-1.$$

Ma è evidente, che un numero negativo qui non può avere significato; la soluzione trovata rivela dunque l' impossibilità del problema la quale del resto si scopre immediatamente alla sola lettura dell' enunciato.

Le due equazioni poste sono veramente la traduzione del seguente problema: *trovare due numeri la somma dei quali sia 6 e la differenza 8:* e questo problema è ben più generale di quello proposto, perchè in esso non si richiede affatto che i numeri sieno positivi il che è invece essenzialmente richiesto dalla natura del problema proposto.

Esempio 3° *Una persona impiega un operaio durante 13 giornate di estate e ritiene sul suo salario 22 lire per alcuni guasti, che l' operaio ha arrecati. Un' altra volta essa impiega il medesimo durante 17 giorni d' inverno; essa gli dà ogni giorno 2 lire di meno che per una giornata di estate, ma aggiunge al salario un regalo di 28 lire come ricompensa dello zelo mostrato nel lavoro. Ciascuna volta l' operaio ha ricevuto la stessa somma. Si domanda la mercede di una giornata di estate.*

Sia x questa mercede: $x-2$ sarà quella di una giornata d' inverno. La prima volta l' operaio ha ricevuto $(13x-22)$ lire: la seconda volta $17(x-2)+28$; si ha dunque l' equazione

$$13x-22=17(x-2)+28.$$

Risolvendola si ha

$$x=-4.$$

Le equazioni esprimendo condizioni *necessarie* contenute nell' enunciato, il problema non può avere altra soluzione all' infuori di questa, che sodisfa all' equazione: d' altronde le unità, che qui compongono il numero x, cioè le lire che costituiscono la mercede di una giornata, non possono evidentemente essere contate in due versi opposti, cioè, come credito e come debito (4), il segno — qui non può dunque avere significato. Se ne conclude, che il problema è assurdo. La condizione imposta dalla natura della questione, che x sia un numero positivo, non è riprodotta nell' equazione.

Esempio 4° *Trovare un numero di due cifre tali, che il quadruplo della cifra delle unità sorpassi di una unità il triplo della cifra delle decine: e che sottraendo da questo il numero scritto inversamente si abbia 36 per resto.*

Sia x la cifra delle decine, e y quella delle unità: si hanno evidentemente le equazioni

$$4y-3x=1$$

$$10x+y-10y-x=36.$$

Risolvendo si ha

$$x=17 \quad , \quad y=13.$$

Il problema non potrebbe avere altra soluzione

all' infuori di questa, ma la natura di esso esige che i numeri x e y sieno ciascuno minori di 10: dunque il problema è assurdo. La condizione che x e y debbano essere minori di 10, non è espressa nelle equazioni.

117. Da tutto quello che siamo venuti sin qui esponendo si raccoglie, che ottenuta la soluzione di un sistema di equazioni corrispondenti a un certo problema, se non ci si è accertati *a priori* che le condizioni del problema sono tutte, e solo esse, esattamente riprodotte nelle equazioni, rimane sempre ad esaminarsi se effettivamente la soluzione trovata convenga anche al problema.

E a questo riguardo noi riterremo come segno di assurdità nella questione da risolvere la comparsa di una soluzione che oltrepassa i limiti, entro cui l'indole della questione esige che rimanga contenuta la soluzione medesima, e anche la comparsa di un numero, che non è della specie voluta dall' indole concreta della questione proposta. Così un numero frazionario lo sarà sempre, quando comparisca come soluzione di una questione, che per l'indole sua non consente, che le unità, a cui il detto numero frazionario si riferisce, si possano pensare divise in parti: un numero negativo lo sarà parimente ogni volta che si presenti come soluzione di una questione, la cui natura non permetta, che le unità, alle quali il detto numero negativo si riferisce, si possono contare in due versi opposti (4).

118. Abbiamo dunque mostrato, che quando non è possibile riprodurre nelle equazioni tutte le condizioni che l' indole concreta del problema impone alle incognite, allora le equazioni rimangono più generali di quello che veramente sarebbe richiesto; e la soluzione, che queste possono ammettere, può non convenire al problema, il quale, non potendo d' altronde ammetterne altra all' infuori di quella, devesi ritenere come impossibile.

Accade però qualche volta che le condizioni, che non è possibile riprodurre nelle equazioni, non sono propriamente condizioni *necessarie* volute dall' indole concreta del problema, ma piuttosto sono imposte da colui che, accingendosi alla risoluzione invece che intendere il problema nell' aspetto più generale compatibile colla natura del medesimo, ne considera un particolare aspetto ed è condotto così a presupporre nelle incognite condizioni di esistenza tali che anche senza di esse il problema avrebbe pure un significato concreto ben definito.

In questo caso dunque, come in quello precedente, le equazioni rimangono più generali di quanto il problema particolare veramente porterebbe, ma così generali, come esse sono, corrispondono a un problema che è in sostanza il problema medesimo, modificato ovvero generalizzato: e allora la soluzione che esse ammettono, se non conviene al problema particolare primitivamente pensato, che sarà così riconosciuto come impossibile, potrà però convenire al problema generale che comprende quello come caso particolare.

Ecco dunque che, trovata la soluzione di una equazione o di un sistema di equazioni, dopo avere riconosciuto che essa non conviene al problema, come esso è proposto, vi è qualche volta luogo a ricercare se non si possa da questo trarre un problema più generale, al quale quella soluzione convenga.

L'occasione di siffatta generalizzazione si presenta specialmente per quei problemi, nei quali i numeri incogniti si riferiscono a unità, per le quali, considerate per loro stesse, è ammissibile il conteggio in due

versi opposti (4), e all'indole del problema che si considera, non repugna, che effettivamente queste unità si contino piuttosto in un verso che in un altro.

119. Ed ecco in che modo: sia proposto un problema in cui il numero incognito (qui si parla per semplicità di un solo numero incognito, ma il ragionamento è applicabile anche a più) si riferisca, come è stato ora detto, a una specie di unità, per le quali è ammissibile il conteggio in due versi opposti, ma nella domanda, che si fa nell'enunciato, sia esplicitamente richiesto che queste unità si debbano contare in un verso determinato.

Sia già stabilito il verso *positivo* e il verso *negativo:* cioè, siasi già fissato (4) che ai numeri d'unità contate in un certo verso si debba anteporre il segno $+$, ai numeri d'unità contate nel verso opposto si debba anteporre il $-$: allora se nella domanda che si fa nel problema, si richiede un numero d'unità da contarsi in un certo verso, è manifesto che, affinchè la domanda sia soddisfatta, bisogna che si trovi effettivamente un numero affetto dal segno corrispondente.

Si indichi con x questo numero: la condizione che esso abbia un segno determinato o il $+$, o il $-$, può accadere che non sia riprodotta nell'equazione: e così questa non sarà propriamente la traduzione fedele del problema enunciato, bensì di un problema più generale nel quale sia soppressa la condizione che il numero incognito debba avere un segno determinato.

Allora se l'equazione ci dà pel numero incognito un numero avente il segno voluto, questo sarà veramente la soluzione del problema enunciato, ma se ci dà un numero di segno contrario a quello, ciò significa che il problema come è stato primitivamente proposto, non è possibile, ma lo è invece il problema più

generale, che comprende il proposto come caso particolare.

Non si possono stabilire principii generali rispetto al modo di fare simili generalizzazioni dei problemi. Daremo solo alcuni esempi.

1° *Due mobili che percorrono una linea retta, partono dai due punti* A *e* B, *posti a una distanza* d *l'uno dall'altro, e si muovono nella stessa direzione colle velocità date* v *e* v'. *Dopo quanto tempo si raggiungeranno?*

Sia convenuto di rappresentare con numeri positivi le lunghezze percorse verso destra, negative quelle percorse verso sinistra: e con un numero positivo si rappresenti il tempo futuro, con uno negativo il passato.

Se con x si indica il tempo richiesto, affinchè la domanda del problema sia soddisfatta, bisognerà che si trovi per x un numero positivo. Il 1° mobile la cui velocità è v, percorre lo spazio v nell'unità di tempo, e quindi nel tempo x percorrerà vx: il 2°, nello stesso tempo percorre lo spazio $v'x$; ora perchè si raggiungano, bisogna che il primo abbia percorso lo spazio d e inoltre lo spazio del 2°: dunque si deve avere

$$vx - v'x = d$$

onde

$$x = \frac{d}{v - v'}.$$

Se la direzione in cui si muovono i mobili è quella verso destra, d, v e v' saranno positivi e se è $v > v'$, allora si ha di qui per x un valore positivo, che risponde precisamente alla domanda fatta nell'enunciato; ma se è $v < v'$, allora si ha per x un valore negativo, e ciò significa che il problema, così come è proposto, non è possibile. Per spiegare come nasce questo valore negativo, si osservi che nell'equazione

$$vx - v'x = d$$

la condizione che x rappresenti unicamente un numero positivo, non è riprodotta. Il ragionamento fatto per stabilire quell'equazione sussiste pure se si suppone x un numero qualunque algebrico: non solo, ma, a dir vero, neanche la condizione che i mobili *partano* dai punti A e B rispettivamente, è contenuta nell'equazione; si può benissimo pensare che essi siano in moto da tempo indefinito e che in un certo istante si trovino nei punti A e B e si misuri il tempo a partire da quell'istante, e così quell'equazione è la traduzione in linguaggio algebrico, non precisamente del problema enunciato, ma di quest'altro che si ottiene generalizzando il proposto:

Due mobili che da tempo indefinito percorrono una linea retta, si trovano in un certo istante nei due punti A *e* B, *posti a una distanza* d *l'uno dall'altro e si muovono nella stessa direzione colle velocità* v *e* v'. *Trovare il tempo, a partire dal detto istante, dell'incontro dei due mobili.*

Allora si vede bene che il valore negativo trovato per x ha un significato ben chiaro: esso ci dà il tempo trascorso dall'istante dell'incontro già avvenuto, all'istante in cui i mobili sono in A e B.

Osservazione. Se è $v=v'$ allora si ha $x=\frac{d}{0}$, e l'incontro dei due mobili non è avvenuto, nè avverrà mai; se contemporaneamente è anche $d=0$, allora l'incontro succede ad ogni istante.

2° *Le età di due individui sono* a *e* b: *dopo quanto tempo l'età del primo sarà doppia di quella del secondo?*

Indichi x il tempo richiesto: l'equazione del problema è evidentemente

$$1) \qquad a+x=2(b+x)$$

onde

$$2) \qquad x=a-2b$$

se è $a>2b$, x ha un valore positivo che sodisfa appunto il problema enunciato, ma se è $a<2b$, allora x ha un valore negativo, e ciò significa che la domanda del problema non può essere sodisfatta. Si spiega in che modo si è prodotto questo numero negativo, se si osserva che, non essendo fatta alcuna ipotesi su a e b, non è espressa nell'equazione la condizione che x, come richiede l'enunciato, debba essere un numero positivo: quella equazione corrisponde, non propriamente al problema proposto, ma a quest'altro più generale: *le età di due individui sono* a *e* b: *trovare l'epoca in cui l'età del primo è doppia di quella del secondo.* E a questo problema sodisfa tanto un valore positivo, quanto uno negativo; un valore positivo indicherà che l'epoca è futura, uno negativo che è passata, e nel problema medesimo non è richiesto, come in quello proposto, che sia quella anzichè questa.

Si noti che vi è anche un caso d'impossibilità: se è $a<b$, allora x è negativo e ha un valore assoluto maggiore di b: nel nostro problema esso non può dunque avere significato: ma intanto la 1) è sodisfatta in questo come in ogni altro caso.

Si osservi che veramente l'equazione 1) è la traduzione in linguaggio algebrico di questo problema, cioè: *dati due numeri* a *e* b, *trovare quale numero* x *si deve aggiungere ad* a *e a* b, *perchè la somma* a+x *resulti doppia della somma* b+x; e se qui le parole *numero, somma, aggiungere* hanno il loro significato algebrico, è manifesto che questo problema è anche più generale del precedente, ed esso veramente è sodisfatto dal valore di x che si ricava dalla 1), qualunque sia questo valore.

3° *Una vasca, che in questo istante è vuota, è alimentata da due fontane, la prima delle quali può riem-*

pirla in a *minuti, la seconda in* b, *e contemporaneamente è aperto un foro nel fondo della vasca che, se essa fosse piena, la vuoterebbe in* c *minuti. Si domanda in quanto tempo la vasca si riempirà.*

Sia x il numero dei minuti richiesti.

La 1ª fontana da sola riempie in un minuto la parte $\frac{1}{a}$ della vasca; la 2ª da sola riempe la parte $\frac{1}{b}$; versando insieme in un minuto riempiono dunque la parte $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; ma nel medesimo tempo il foro praticato nel fondo lascia uscire il liquido occupante la parte $\frac{1}{c}$ della vasca: dunque alla fine del 1° minuto il liquido che rimarrà nella vasca, occuperà la parte $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$ della vasca: alla fine di x minuti sarà quindi occupato il volume $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)x$; poichè questo deve esser quello dell'intiera vasca, si avrà dunque

$$1)\qquad \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)x=1$$

onde

$$x=\frac{abc}{bc+ac-ab}.$$

Sia $(b+a)c>ab$; allora x ha un valore positivo, e indica appunto il numero di minuti, dopo il quale, come è domandato nel problema, la vasca sarà riempita; ma se è $(b+a)c<ab$, cioè, se è negativo $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$, allora x è negativo: e ciò significa che la vasca non si riempirà mai. Si osservi che l'espressione $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$ indica la porzione di vasca che è

riempita in un minuto, se è $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$, giacchè, allora entrando nella vasca più liquido di quello che non ne esca, effettivamente una parte di vasca sarà riempita; ma se $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$ è negativo, ciò significa che la quantità di liquido che esce, supera quella che entra, e quindi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$ veramente rappresenterebbe la porzione di vasca che sarebbe *vuotata* in un minuto, se la vasca essendo piena in antecedenza, si aprisse nel suo fondo il foro, e si facessero in essa contemporaneamente versare le due fontane alle condizioni esposte nell'enunciato. — In questo caso dunque in cui è negativo $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$, l'equazione 1) che dà per x un valore negativo, è la traduzione del seguente problema: *una vasca, che in questo istante è vuota, è stata alimentata da due fontane, la prima delle quali può riempirla da sola in* a *minuti, la seconda in* b; *mentre però queste versavano, era rimasto aperto un foro nel fondo della vasca, capace di vuotarla in* c *minuti, se le due fontane non avessero versato; si domanda: in quanti minuti è stata vuotata? ossia quanti minuti sono trascorsi dall'istante in cui era piena, a questo in cui è vuota?*

Ecco dunque, che un valore positivo per x ci dà il numero dei minuti che ci vogliono per riempirla, quand'essa sia vuota: un valore negativo ci dice in quanti minuti è stata vuotata, supposto che essa fosse piena in antecedenza.

Se è $(b+a)c=ab$, allora si ottiene $x=\frac{abc}{0}$: l'equazione, come il problema, non ammette alcuna soluzione, cioè, la vasca non sarà mai piena se ora è vuota, e rimarrà sempre piena, se lo fu una volta. E

invero questo è il caso in cui è $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$: e ciò significa che la parte di vasca riempita dalle due fontane in un minuto è eguale a quella votata dal foro aperto nel fondo, la qual cosa mostra appunto quanto ora dicevamo.

4° *Dati sopra una retta due punti* A *e* B, *il primo alla sinistra di un punto* O *alla distanza* a, *il secondo alla diritta, a una distanza* b: *determinare sopra questa linea un terzo punto* X, *in modo che prendendo il punto* M *in mezzo a* BX, *poi il terzo di* AM, *a partire da* A, *il punto così determinato coincida con* O.

Sia stabilito di rappresentare con numeri positivi le lunghezze contate verso destra, con numeri negativi quelle verso sinistra, dimodochè a sia negativo, b positivo.

Chiamando x la distanza OX, si ha:

$$OM = x + \frac{b-x}{2}$$
$$= \frac{b+x}{2}$$

AO deve essere il terzo di AM, cioè, $-a$ deve essere eguale ad un terzo di $-a+OM$, quindi

$$-3a = -a + \frac{b+x}{2}$$

onde

$$x = -4a - b$$

e indicando con a' il valore assoluto di a

$$x = 4a' - b.$$

Se è $4a' > b$, x ha un valore positivo, e ciò significa che il punto X è a destra di O: se è $4a' < b$,

allora x ha un valore negativo e ciò significa che il punto X è a sinistra di O. — E così l'una come l'altra soluzione convengono al problema, nel quale, come è stato enunciato, non si è posta alcuna restrizione intorno alla posizione del punto X.

120. Se, dato un problema, invece che considerarlo sotto un aspetto particolare, che non riesce sempre di riprodurre esattamente nelle equazioni, lo si intendesse ogni volta nel suo aspetto più generale possibile, allora non si sarebbe obbligati a studiare poi le modificazioni o generalizzazioni convenienti da introdursi nell'enunciato del problema allo scopo di dare un significato concreto alla soluzione che si trae dalle equazioni, e che qualche volta non conviene al problema inteso nell'aspetto particolare anzidetto.

Lo studio, come quello che noi abbiamo fatto negli esempi contenuti in questo capitolo, di tutte le circostanze notevoli che può offrire la soluzione di un sistema di equazioni, sia rispetto a questo medesimo, sia rispetto al problema, dal quale si è dedotto il sistema d'equazioni che si considera, costituisce la *discussione della soluzione*.

CAPITOLO XI.

Diseguaglianze.

---

121. *Un numero* a, come è noto (n. 6), *si dice maggiore di un altro* b, *e si scrive* a > b, *quando la differenza* a — b *è un numero positivo.*

La relazione

$$a > b$$

equivalente all'altra

$$a - b > 0$$

e che anche può scriversi

$$b < a$$

dicesi *diseguaglianza.*

Stabiliamo intorno alle diseguaglianze alcune regole che sono di facilissima dimostrazione.

1ª *Se si ha*

$$a > b$$

si ha anche

$$a + m > b + m$$

essendo m *un numero qualunque positivo o negativo.*

Ciò è manifesto, quando si pensi che è

$$a - b = (a + m) - (b + m)$$

e quindi l'essere $a - b > 0$ porta che sia

$$(a + m) - (b + m) > 0.$$

Osservazione. Si può anche enunciare questo principio dicendo: *si può aggiungere o sottrarre uno stesso*

numero ai due membri di una diseguaglianza, senzachè essa si alteri. E di qui segue *che si può trasportare un termine da un membro all'altro di una diseguaglianza, purchè gli si cangi segno.*

2ª *Se si ha*

$$a > b$$

si ha anche

$$am > bm$$

se m *è un numero positivo: si ha invece*

$$am < bm$$

se m *è negativo.*

Invero, la diseguaglianza

$$a > b$$

equivale all'altra

$$a - b > 0;$$

il prodotto $m(a - b)$ è dunque positivo, cioè si ha

$$ma > mb$$

se è m positivo: invece il prodotto $m(a - b)$ è negativo, cioè si ha

$$ma < mb$$

se m è negativo.

Osservazione. Se ad m si suppone la forma $\frac{1}{n}$, dalla

$$a > b$$

si ha l'altra

$$\frac{a}{n} > \frac{b}{n}$$

se n è positivo: e invece

$$\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$$

se n è negativo.

OSSERVAZIONE. Le regole 3ª e 4ª si possono enunciare dicendo: *due diseguaglianze del medesimo senso si possono addizionare membro a membro e si ottiene una diseguaglianza del medesimo senso: non si possono però sottrarre; si possono invece sottrarre membro a membro, non però addizionare, due diseguaglianze di senso contrario, e si ottiene una diseguaglianza del senso di quella da cui si sottrae.*

5ª *Se si ha*

1) $a > b$

2) $a' > b'$

se ne deduce

3) $aa' > bb'$

ovvero

4) $aa' < bb'$

secondochè i quattro numeri a, a', b, b' *sono positivi o negativi.*

Si moltiplichi la 1) per a', la 2) per b; se essi sono positivi, si ottengono le disuguaglianze

$$aa' > ba'$$
$$a'b > bb'$$

dalle quali discende immediatamente

$$aa' > bb';$$

se poi a' e b sono negativi, allora dalle 1) e 2) si hanno le altre

$$aa' < ba'$$
$$a'b < bb'$$

onde

$$aa' < bb'.$$

OSSERVAZIONE I. Se è positivo b, lo deve essere anche a; ma se lo è a', non ne deriva necessariamente

che lo sia anche b': la 2) è vera *a fortiori* se, essendo a' positivo, b' sia negativo; dunque, veramente, perchè dalle 1) e 2) si possa sempre dedurre la 3), è sufficiente che sieno positivi i tre a, b e a'. — Analogamente, perchè si possa sempre dedurre la 4), è sufficiente che sieno b, a' e b' negativi.

OSSERVAZIONE II. Se è $a > b$, a e b essendo positivi se ne deduce $a^n > b^n$, n intero e positivo.

Se poi a e b sono negativi, ed è $a = -a'$, $b = -b'$ la diseguaglianza $a > b$ porta che sia $a' < b'$: quindi $a'^n < b'^n$. Ora se n è dispari, si ha

$$a^n = (-a')^n = -a'^n$$
$$b^n = (-b')^n = -b'^n.$$

Ma è

$$-a'^n > -b'^n$$

quindi

$$a^n > b^n.$$

Se n è pari, allora si ha

$$a^n = (-a')^n = a'^n$$
$$b^n = (-b')^n = b'^n$$

ed è quindi

$$a^n < b^n.$$

OSSERVAZIONE III. Dalle 1) e 2) non si può dedurre necessariamente la diseguaglianza

$$\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'}$$

ovvero l'altra

$$\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'}$$

ovvero l'eguaglianza

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'};$$

colle 1) e 2) è compatibile una qualunque di queste tre relazioni; onde segue, che, se la 3) è conseguenza delle 1) e 2), una di queste però non può dirsi conseguenza necessaria dell'altra e della 3) medesima. — Parimente dalla 4) e da una delle 1), e 2) non si può necessariamente dedurre l'altra di queste.

6ª *Se si ha*

1) $a > b$

2) $a' < b'$

se ne deduce

3) $\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'}$

ovvero

4) $\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'}$

secondochè i quattro numeri a, b, a', b', *sono positivi o negativi.*

Invero, le 1) e 2) si possono scrivere nella forma

$$a > b, \quad b' > a'$$

e allora, per la regola precedente,

$$ab' > ba'$$

ovvero

$$ab' < ba'$$

secondochè a, a', b, b' sono positivi o negativi.

Dividendo ambo i membri di ciascuna di queste ultime diseguaglianze per $a'b'$, che è un numero positivo, dalla 1ª si ha

$$\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'}$$

dalla 2ª

$$\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'};$$

che è quanto si voleva.

OSSERVAZIONE. Le regole 5ª e 6ª si possono enunciare raccolte in una sola dicendo: *due disuguaglianze del medesimo senso si possono moltiplicare membro a membro, se i quattro membri di esse sono tutti del medesimo segno, e si ottiene una disuguaglianza del medesimo senso delle date, se questo segno è il* +: *se ne ottiene una di senso contrario se questo segno è il* —.

Se si hanno due disuguaglianze di senso contrario si può dividere la 1ª *per la* 2ª *membro a membro, se i quattro membri di esse sono tutti del medesimo segno, e si ottiene una disuguaglianza del medesimo senso della* 1ª, *se il segno di essi è il* +: *se ne ottiene una del senso della* 2ª, *se il segno è il* —.

Non si può dare regola generale negli altri casi.

Disuguaglianze ad una incognita.

122. Sia y una funzione della variabile x; ci si può proporre la questione: *per quali valori di* x *la funzione* y *assume valori superiori a un numero assegnato* d, *ovvero, superiori a quelli che contemporaneamente assume altra funzione* z *della stessa variabile* x?

Ciò si traduce in linguaggio algebrico dicendo, che ci si propone di trovare per quali valori della x è verificata la disuguaglianza

$$y > d$$

ovvero l'altra

$$y > z$$

le quali chiamansi *disuguaglianze a una incognita.*

Una disuguaglianza ad una incognita si dice equivalente a un'altra se i valori dell'incognita, che sodisfano la prima, sodisfano anche la seconda e viceversa.

Intorno all'equivalenza di due disuguaglianze si dimostrano facilissimamente le seguenti proposizioni:

colle 1) e 2) è compatibile una qualunque di queste tre relazioni; onde segue, che, se la 3) è conseguenza delle 1) e 2), una di queste però non può dirsi conseguenza necessaria dell'altra e della 3) medesima. — Parimente dalla 4) e da una delle 1), e 2) non si può necessariamente dedurre l'altra di queste.

6ª *Se si ha*

1) $a > b$

2) $a' < b'$

se ne deduce

3) $\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'}$

ovvero

4) $\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'}$

secondochè i quattro numeri a, b, a', b', *sono positivi o negativi.*

Invero, le 1) e 2) si possono scrivere nella forma

$$a > b, \quad b' > a'$$

e allora, per la regola precedente,

$$ab' > ba'$$

ovvero

$$ab' < ba'$$

secondochè a, a', b, b' sono positivi o negativi.

Dividendo ambo i membri di ciascuna di queste ultime diseguaglianze per $a'b'$, che è un numero positivo, dalla 1ª si ha

$$\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'}$$

dalla 2ª

$$\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'};$$

che è quanto si voleva.

OSSERVAZIONE. Le regole 5ª e 6ª si possono enunciare raccolte in una sola dicendo: *due disuguaglianze del medesimo senso si possono moltiplicare membro a membro, se i quattro membri di esse sono tutti del medesimo segno, e si ottiene una disuguaglianza del medesimo senso delle date, se questo segno è il* +: *se ne ottiene una di senso contrario se questo segno è il* —.

Se si hanno due disuguaglianze di senso contrario si può dividere la 1ª per la 2ª membro a membro, se i quattro membri di esse sono tutti del medesimo segno, e si ottiene una disuguaglianza del medesimo senso della 1ª, se il segno di essi è il +: *se ne ottiene una del senso della 2ª, se il segno è il* —.

Non si può dare regola generale negli altri casi.

Disuguaglianze ad una incognita.

122. Sia y una funzione della variabile x; ci si può proporre la questione: *per quali valori di* x *la funzione* y *assume valori superiori a un numero assegnato* d, *ovvero, superiori a quelli che contemporaneamente assume altra funzione* z *della stessa variabile* x?

Ciò si traduce in linguaggio algebrico dicendo, che ci si propone di trovare per quali valori della x è verificata la disuguaglianza

$$y > d$$

ovvero l'altra

$$y > z$$

le quali chiamansi *disuguaglianze a una incognita.*

Una disuguaglianza ad una incognita si dice equivalente a un'altra se i valori dell'incognita, che sodisfano la prima, sodisfano anche la seconda e viceversa.

Intorno all'equivalenza di due disuguaglianze si dimostrano facilissimamente le seguenti proposizioni:

1ª *La disuguaglianza*

1) $$A > B$$

dove A, *o* B *o anche ambedue sono funzioni della variabile* x, *e l'altra*

2) $$A + m > B + m$$

dove m *è un numero qualunque, sono equivalenti.*

Invero, se per un valore α di x, è sodisfatta la 1), cioè si ha

$$A_\alpha > B_\alpha$$

indicando con A_α e B_α i valori che assumono A e B per $x = \alpha$, allora, per la regola 1ª, del n. 121, è anche

$$A_\alpha + m_\alpha > B_\alpha + m_\alpha$$

dove m_α indica il valore che prende m per $x = \alpha$, se m contiene la x; così è sodisfatta la 2): se poi per un valore β di x è verificata la 2), cioè, si ha

$$A_\beta + m_\beta > B_\beta + m_\beta ;$$

per la rammentata regola, è anche

$$A_\beta + m_\beta - m_\beta > B_\beta + m_\beta - m_\beta$$

ossia

$$A_\beta > B_\beta$$

cioè, è verificata la 1).

Corollario. Segue di qui manifestamente, che si può trasportare un termine da un membro all'altro di una disuguaglianza ad una incognita purchè gli si cangi segno.

2° *La disuguaglianza*

$$A > B$$

dove A, *o* B, *o anche ambedue, sono funzioni della* x, *e l'altra*

$$mA > mB$$

ovvero

$$mA < mB$$

secondochè m, *numero costante, è positivo o negativo, sono equivalenti.*

Invero, se per un valore α di x, si ha

$$A_\alpha > B_\alpha$$

si avrà anche, per la regola 2ª n. 121,

$$mA_\alpha > mB_\alpha$$

se m è positivo, e

$$mA_\alpha < mB_\alpha$$

se m è negativo.

Reciprocamente, se un valore β di x rende

$$mA_\beta > mB_\beta$$

essendo m un numero positivo, di qui si deduce, mediante la regola rammentata (Osservazione)

$$A_\beta > B_\beta :$$

e se si ha invece

$$mA_\beta < mB_\beta$$

m essendo negativo, deriva

$$A_\beta > B_\beta .$$

Osservazione. Supponendo ad m la forma $\frac{1}{n}$ si ha che la disuguaglianza

$$A > B$$

è equivalente all'altra

$$\frac{A}{n} > \frac{B}{n}$$

ovvero

$$\frac{A}{n} < \frac{B}{n}$$

secondochè n è positivo o negativo.

Disuguaglianze di 1° grado ad una incognita.

123. Se la funzione y della variabile x, ovvero le due funzioni y e z, rispetto alle quali ci si propone la questione enunciata al n. 122, sono funzioni intere di 1° grado, allora la disuguaglianza

$$y > d$$

ovvero

$$y > z$$

che così si è condotti a stabilire, dicesi disuguaglianza di 1° grado ad un' incognita; dimodochè una disuguaglianza siffatta sarà dunque della forma

$$ax+b > d$$

ovvero

$$ax+b > a'x+b'$$

a, b, a', b' essendo numeri dati qualunque.

Osservando che la 1ª di queste due disuguaglianze può riguardarsi come caso particolare della 2ª, quando in questa sia $a'=0$, così si vede che si può ritenere come forma generale di una disuguaglianza di 1° grado a una incognita la 2ª delle precedenti.

Per risolverla, si trasportano (122, regola 1ª Corollario) in un membro tutti i termini contenenti l'incognita, nell'altro quelli che non la contengono: si otterrà la forma

$$ax-a'x > b'-b$$

ovvero

$$(a-a')x > b'-b.$$

Qui conviene distinguere due casi:

1° Se $a-a'$ è positivo, allora, dividendo (regola 2ª Corollario), si ha

$$x > \frac{b'-b}{a-a'};$$

2° Se poi $a-a'$ è negativo, allora si ha

$$x < \frac{b'-b}{a-a'}.$$

Onde si vede che la *disuguaglianza*

$$ax+b > a'x+b'$$

è sodisfatta per infiniti valori di x; *per tutti quelli che sono superiori a* $\frac{b'-b}{a-a'}$, *se è* a—a' *positivo: per tutti quelli che ne sono inferiori se è* a—a' *negativo.* — Si può notare, che questo limite inferiore o superiore rispettivamente è il valore di x atto a rendere eguali i due membri della disuguaglianza.

Esercizi.

1° Dimostrare che è

$$\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right) > ab$$

a e b essendo numeri disuguali.

2° Mostrare che fra tutte le coppie di numeri, che sodisfano la relazione $x+y=a$, quella a cui corrisponde il massimo prodotto xy, si ha prendendo eguali i numeri x e y.

(Ci si vale della disuguaglianza dell'esercizio precedente).

3° Mostrare che fra tutti i sistemi di numeri positivi x_1, $x_2 \ldots x_n$, che verificano la relazione

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a$$

a numero dato, quella, a cui corrisponde il massimo prodotto $x_1x_2x_3\ldots x_n$, si ha prendendo eguali i numeri x_1, $x_2 \ldots x_n$.

(Ci si vale dell'esercizio precedente).