7084

TRATTATO

DI

ALGEBRA ELEMENTARE

AD USO DEI LICEI

DI

CESARE ARZELÀ

Prof. di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Bologna.

BIBLIOTECA
DONO BETTI
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

FIRENZE.
SUCCESSORI LE MONNIER.

1880.

Proprietà degli Editori.

AVVERTENZA.

Questo libro di Elementi di Algebra fu composto allo scopo che possa servire come libro di Testo nei nostri Licei.

Or dirò brevemente a quale concetto esso è informato.

L' argomento più difficile a trattarsi con rigore e chiarezza, fra quanti ne offre la matematica elementare, è senza dubbio quello dei numeri irrazionali; e come sa per prova chi deve insegnare, la difficoltà di trattazione, che il soggetto ha già di per sè, diviene addirittura grandissima quando si voglia esporlo al suo naturale luogo, cioè in quella parte di Aritmetica che si insegna ai giovani della quinta classe ginnasiale; e veramente si può bene asserire che una trattazione un po' rigorosa dei numeri irrazionali dovrà riuscire difficile anche agli alunni della prima classe liceale, tra i quali spesso si raccolgono, dai differenti Ginnasi, giovani di scarsissima coltura matematica.

Per questa ragione io penso, e mi conforta a ciò anche il parere di autorevolissime persone, che

nell' insegnamento liceale convenga ritardare ogni considerazione di numeri irrazionali sino al punto in cui ai giovani, e per l' età e per l' istruzione ricevuta, fatti più maturi di mente, sia concesso apprestare argomenti di studio alcun poco più elevati.

E ciò può ottenersi agevolmente disponendo la materia, come io ho fatto in questo libro.

Presupposto che i giovani conoscano quel tanto d' Aritmetica che riguarda i numeri interi e frazionari, e che nell' apprendere la teoria dell' estrazione di radice abbiano solamente avvertito, senz' altro insistere su ciò, la mancanza di numeri atti a rappresentare le radici di certi numeri interi e frazionari, incomincio coll' introduzione dei numeri positivi e negativi, ed espongo poi la teoria delle quattro operazioni sui monomi e sui polinomi.

Tien dietro un cenno sul massimo comun divisore e sul minimo comune multiplo: indi la teoria delle frazioni algebriche e il calcolo delle potenze ad esponente intero positivo e negativo.

Al Capitolo VII sono raccolti alcuni principii sulle eguaglianze: nel seguente è stabilito il concetto di variabile e di funzione, e da questo si è naturalmente condotti a quello di equazione.

Seguono le teorie delle equazioni e delle disuguaglianze di 1° grado.

Si esaurisce così quella parte di Algebra nella quale si considerano soltanto numeri interi e frazionari, e che formerebbe la materia d' insegnamento del primo anno liceale e anche del principio del secondo.

Al Capitolo XII è introdotto il concetto di limite e sono stabiliti i teoremi elementari relativi ad esso. Si definiscono poi, come limiti di certe serie di numeri razionali, i numeri irrazionali, i quali a questo modo sono ammessi nella scienza come puri enti aritmetici, indipendentemente da ogni idea di grandezza concreta; in fine del libro è parso però utile aggiungere una nota nella quale si mostra che anche i numeri irrazionali, così come i numeri razionali, possono essere *misure* di grandezze concrete.

Rapidamente si estendono ai nuovi numeri le operazioni aritmetiche e si dimostra che le regole fondamentali del calcolo con numeri razionali, stabilite nella prima parte del libro, sussistono anche pei numeri irrazionali.

Così è esteso il campo dell' Algebra.

In seguito si prendono in particolare considerazione i radicali e, introdotti poi gli esponenti frazionari, si generalizzano le regole del calcolo delle potenze.

Formano argomento dei Capitoli che seguono: le equazioni di 2° grado, i numeri immaginari e complessi, le disuguaglianze di 2° grado, le equazioni biquadratiche, i sistemi d' equazioni di grado superiore al 1°, la funzione esponenziale, i logaritmi, le proporzioni e progressioni.

Questa è la disposizione della materia; e a me pare che essa, oltrechè non offra in sè alcuna disarmonia, si coordini poi anche perfettamente con quella dell' insegnamento geometrico, quando que-

sto si faccia, almeno per la parte piana, col metodo euclideo: giacchè in tal caso il concetto di numero in generale, non interviene in esso prima che l'insegnamento dell'Algebra, procedendo parallellamente, abbia fornito anche il concetto di numero irrazionale.

In fine di ogni capitolo ho aggiunto buon numero di esercizi, che ho tolti in gran parte dai libri di Bertrand, Todhunter e Faifofer, e pei più difficili dei quali ho anche indicata la via di risoluzione.

Ho cercato, meglio che ho saputo, la precisione dei concetti e il rigore dei ragionamenti, avendo pur sempre la massima cura perchè l'esposizione fosse facile e piana, quale si conviene a un libro destinato alle scuole secondarie.

Forse la viva sollecitudine di accoppiare la facilità al rigore, mi ha condotto qua e là a dare troppo largo sviluppo a certe considerazioni, a insistere troppo su certe dimostrazioni: e in conseguenza di ciò qualche numero del libro potrà parere meno importante o non necessario in un corso di lezioni. Il professore vedrà da sè quali numeri si possano saltare senza danno. — E potrà pure sembrare opportuno mutare in qualche parte l'ordine della materia: per esempio la teoria delle proporzioni potrà senza danno essere trasportata immediatamente dopo quella dei numeri irrazionali.

Queste ed altrettali modificazioni, l'Insegnante vorrà arrecarle da sè, ogniqualvolta le giudichi convenienti.

A me nella molta peritanza, con che presento questo libro, sia concesso sperare, che nel recarne giudizio non si vorrà dimenticar mai che esso aspira solamente a essere una guida, un aiuto all'alunno nel seguire con frutto le lezioni orali del professore, alle quali è pur sempre riserbata la parte più efficace dell'insegnamento.

È mio dovere, e di buon grado lo adempio, esprimere i più vivi ringraziamenti ai miei amici, i professori Padelletti dell'Università di Napoli, e Grandi del Liceo di Pistoia, che hanno avuta la bontà di leggere le prove di stampa, e mi furono larghi di utili consigli e di osservazioni. Simile ringraziamento io lo debbo pure, per la prima parte del libro, al signor Cantone, mio allievo dell'Università di Palermo.

Santo Stefano di Magra, ottobre 1880.

L'Autore.

Alcune pagine, non più di dieci, nei primi Capitoli, sono tolte letteralmente dal *Trattato d'Algebra* di Giuseppe Bertrand, tradotto dal professore Enrico Betti: ciò è accaduto, perchè il primo progetto del libro fu quello di una compilazione condotta sulle traccie dell'anzidetto *Trattato*, progetto che fu poi subito abbandonato.

TRATTATO ELEMENTARE D'ALGEBRA.

Spiegazione dei segni Algebrici.

I segni abbreviativi che si usano nell'Algebra sono, quasi tutti quei medesimi impiegati nell'aritmetica e perciò conosciuti dal lettore: nondimeno crediamo utile di farne parola.

$+$ è il segno dell'addizione; si pronunzia *più;* $a+b$ indica la somma dei due numeri rappresentati da a e da b.

$-$ è il segno della sottrazione: si pronunzia *meno;* $a-b$ indica la differenza dei due numeri rappresentati da a e b.

$\times$ è il segno della moltiplicazione; si pronunzia *moltiplicato per;* $a\times b$ indica il prodotto dei due numeri rappresentanti da a e b. Si omette spesso questo segno e s'indica la moltiplicazione scrivendo i fattori l'uno dopo l'altro, ab invece di $a\times b$, $(a+b)(c+d)$ invece di $(a+b)\times(c+d)$. Ciò non può farsi per i prodotti di fattori numerici, perchè allora si dovrebbe, per esempio, rappresentare nello stesso modo il numero 54 e il prodotto 5×4.

$:$ significa *diviso per;* $a:b$ indica il quoziente della divisione dei numeri rappresentati da a e b. S'indicano le divisioni anche scrivendo il dividendo sopra al divisore, e separandoli con una linea orizzontale; $\frac{a}{b}$ indica il quoziente della divisione di a per b.

$=$ esprime la eguaglianza delle espressioni poste a destra e a sinistra di questo segno; $a=b$ esprime la eguaglianza dei numeri rappresentati da a e b.

$>$ significa *maggiore di;* $a>b$ esprime che il numero rappresentato da a è maggiore del numero rappresentato da b.

$<$ significa *minore di;* $a<b$ esprime che il numero rappresentato da a è minore del numero rappresentato da b.

Allorchè si pone una espressione tra due parentesi, bisogna riguardare come effettuate le operazioni che vi sono indicate, e la parentesi come esprimente il numero che ne risulta. Così

$$c-(a-b-c)$$

indica la differenza che passa tra c e il numero $a-b-c$.

CAPITOLO I.

Numeri positivi e negativi.

1. Nell'Aritmetica noi abbiamo primieramente considerato i numeri interi, cioè i numeri esprimenti collezioni di unità, e poscia i numeri frazionari, cioè, quelli esprimenti collezioni di parti di unità e per gli uni e per gli altri abbiamo stabilito le regole di calcolo.

Vedemmo che le tre operazioni di addizione, moltiplicazione e innalzamento a potenza effettuate sopra numeri interi davano sempre per resultati dei numeri interi, e che effettuate sopra numeri frazionari davano per resultati dei numeri frazionari e anche potevano dare dei numeri interi.

E se noi consideriamo come *possibile* un'operazione quando essa conduce a un resultato che è uno di quei numeri, dei quali già abbiamo conoscenza, dovremo dire che le tre anzidette operazioni sopra numeri interi e frazionari sono sempre *possibili.*

Veramente, secondo il concetto da noi posto della *possibilità* di una operazione, anche la divisione è sempre *possibile:* perchè fu dimostrato che un numero frazionario a termini interi è il quoziente del suo numeratore pel suo denominatore e quindi, quando il quoziente di due numeri interi non è un numero intero, allora è un numero frazionario che ha per numeratore il dividendo e per denominatore il divisore; e parimente fu fatto vedere che il quoziente di due numeri

frazionari sempre si esprime con un numero frazionario a termini interi.

Ma non accade altrettanto per le altre operazioni, cioè, per la sottrazione e estrazione di radice.

Quanto alla sottrazione, osserviamo, che in Aritmetica abbiamo imparato a sottrarre un numero da uno maggiore di esso e anche da uno eguale, ma non abbiamo idea di ciò che possa essere il resultato di una sottrazione in cui il sottraendo superi il minuendo, e noi diciamo senz'altro che una tale operazione è *impossibile* perchè tra i numeri dei quali abbiamo conoscenza, non ne esiste alcuno che possa esserne il resultato.

Analogamente riguardo all'estrazione di radice quadrata già osservammo, che tutti i numeri interi compresi tra i quadrati di due numeri interi consecutivi come non erano quadrati di altri numeri interi, così non lo erano neanche di numeri frazionari; e che tutti quei numeri frazionari, i quali ridotti alla loro più semplice espressione non aveano per termini dei quadrati perfetti, non potevano essere quadrati di numeri frazionari. Dimodochè, se per certi numeri interi e frazionari era possibile trovare le radici rispettive, cioè, quei numeri interi e frazionari rispettivamente che elevati a quadrato riproducevano quelli, per infiniti altri invece, ciò era impossibile: numeri interi o frazionari, che li avessero per quadrati, non esistevano, ed era solamente possibile, il trovare le radici quadrate approssimate a meno di una frazione dell'unità così piccola come si voleva, cioè, trovare dei numeri frazionari, i quadrati dei quali differissero dai detti numeri per meno di una quantità piccola a piacere.

Sino a che si ragiona sopra numeri dei quali sono conosciuti i valori, si sa sempre quando un'operazione è possibile e quando è impossibile: ma nell'Algebra non

è così: essa studia le operazioni indipendentemente dai valori particolari dei numeri, sui quali si debbono eseguire; e appunto perciò, in generale, essa li rappresenta non più coi soliti segni dell'Aritmetica ma con lettere: così i numeri, sui quali si opera, sono indeterminati, almeno sinchè alle lettere, che li rappresentano, non sono attribuiti dei valori particolari; e le operazioni non si possono più eseguire nel modo che, così dicendo, s'intende in Aritmetica: solamente si possono indicare: ed è appunto a una indicazione di operazioni, a un insieme di lettere e segni, che si dà il nome di *espressione algebrica;* così ad es. $a+b-c$, $a(c+d)-\frac{e}{f}$ sono espressioni algebriche.

Or dunque non conoscendosi il valore dei numeri sui quali si opera, non si può più sapere quando una certa operazione sia possibile e quando sia impossibile; e giacchè, come dicemmo, in Algebra le operazioni si indicano, così non potremmo sapere, se una certa indicazione di operazioni, un'espressione algebrica abbia o no un significato, cioè, se rappresenti un numero a noi noto; per essere sicuri di ciò, bisognerebbe fare intorno ai valori da potersi attribuire alle lettere, che entrano in essa, tutte le ipotesi, le restrizioni necessarie, perchè e le operazioni ivi indicate e tutte quelle che possono essere occorse per pervenire a quella espressione e delle quali in essa non sia più rimasta traccia, fossero sempre possibili; la qual cosa ognun vede quanto intralcerebbe i ragionamenti e quanto infine limiterebbe il significato delle espressioni algebriche.

È dunque importante di togliere le impossibilità di certe operazioni, che sopra abbiamo messo in evidenza.

Noi qui per adesso non ci occuperemo affatto dell'estrazione di radice e dei numeri nuovi che bisogne-

rebbe introdurre perchè essa fosse sempre possibile; intenderemo di considerare solo numeri interi e frazionari, dimodochè la parola numero significherà per noi un numero intero o frazionario, e ci occuperemo subito di togliere l'impossibilità della sottrazione, che sopra abbiamo notato; e giacchè essa proviene da questo che tra i numeri interi e frazionarii che noi abbiamo detto di considerare, non ve ne sono, che possano rappresentarne i resultati nei casi dianzi notati in cui il sottraendo supera il minuendo, così si vede che bisognerà inventare, definire dei numeri nuovi atti a ciò, ed applicando poi anche ad essi le operazioni del calcolo, introdurli nel dominio dell'Algebra.

2. Immaginiamo di avere una moltitudine indefinita di oggetti disposti sopra una retta illimitata nei due sensi a partire da un punto O.

Se prendiamo a contare questi oggetti incominciando dal primo a destra di O e procedendo verso destra, noi formiamo così la serie dei numeri naturali

$$\alpha) \qquad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots;$$

Se poi contiamo gli oggetti a sinistra di O, procedendo verso sinistra, formiamo parimente i numeri

$$\beta) \qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots;$$

ma è diverso il modo con cui questi e quelli sono ottenuti: si ottengono i primi contando verso destra, i secondi contando verso sinistra.

Se si vogliono distinguere, si potrà evitare di doverlo fare con parole, *convenendo* p. es. di rappresentare i numeri α) mediante i soliti segni

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots;$$

e i numeri β coi segni

$$1',\ 2',\ 3',\ \ldots\ldots;$$

Ma così facendo, introdurremmo nella scienza dei segni affatto nuovi; il che devesi, quanto si può, evitare. Epperò, noi ci faremo ora ad investigare più intimamente i significati dei segni $+$ e $-$ nell'Aritmetica, e da ciò saremo naturalmente condotti, allo scopo di distinguere i numeri α) dai numeri β), a fare la *convenzione* di premettere agli uni il segno $+$ agli altri il segno $-$.

Prendasi uno dei numeri

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$$

che son quelli considerati in Aritmetica, ad es. il 5 e ad esso vogliasi aggiungere il 3, vogliasi, cioè, il numero eguale a $5+3$: secondo il concetto che noi abbiamo dell'addizione, dopo aver contate cinque unità ne conteremo altre tre di seguito; e se per meglio fissare le idee, pensiamo (il che non restringe affatto la generalità del ragionamento) che le unità da contarsi siano gli oggetti disposti sopra la retta come sopra dicemmo, si vede che l'operazione indicata dal segno $+$ nell'espressione $5+3$ consiste propriamente nel contare, dopo avere contato i primi 5 oggetti a destra di O, i tre che vengono poi, procedendo così in avanti; e più precisamente nel contare di seguito al numero 5 il numero 3 in quello stesso verso in cui si è contato quando si è formato il numero 3 nella serie α); allora si sono contati tre oggetti verso destra a partire dal punto O, cioè prima che ancora ne siano stati contati altri, e anche si potrebbe dire, dopo non averne ancora contato alcuno; mentre ora si contano tre oggetti pure procedendo verso destra, ma dopo averne già prima contati cinque; il verso dunque in cui si conta quando si aggiunge 3 a 5 è quello stesso in cui si conta quando si

forma primitivamente il 3 nella serie α): solo è cambiato il punto di partenza.

Vogliasi ora da 5 sottrarre 3, cioè trovare il numero eguale a $5-3$; secondo l'idea che abbiamo della sottrazione in Aritmetica, è manifesto che, pensando al solito le unità come oggetti disposti sopra la retta, si potrà operare così: cioè, contare prima sulla retta sino al quinto oggetto e poi contare 3 a ritroso: e precisamente nel verso opposto a quello in cui si è contato per formare primitivamente il numero 3 nella serie α); e così si viene a contare il 3 in quello stesso verso in cui si è contato per formare il numero 3' nella serie β); solamente differisce il punto da cui s'incomincia a contare; *nell'un caso si conta* 3, *nel* verso ora detto, dopo aver già contato 5; nell'altro, si conta pure 3 nello stesso verso, ma dopo non avere ancora contato nulla.

Raccogliendo le cose esposte si vede, che i segni $+$ e $-$ in Aritmetica hanno propriamente l'ufficio d'indicare le due operazioni del contare il numero innanzi a cui sono preposti, di seguito a un altro numero dato procedendo in avanti o tornando indietro con questa sola limitazione, che se si tratta di contare in avanti, cioè, dell'operazione indicata col segno $+$ il numero da contarsi di seguito a un altro può essere uno qualunque dei numeri

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots;$$

se si tratta invece di contare all'indietro cioè, dell'operazione indicata dal segno $-$, allora il detto numero deve essere minore o al più eguale a quello di seguito al quale deve essere contato.

Ma i numeri α) e i numeri β) sono appunto formati mediante le due operazioni del contare in un verso ovvero in quello opposto, a partire dal numero 0, significando col simbolo *0* il non aver contato nessun oggetto; vien dunque fatto naturalmente di pensare a valersi anche qui dei segni $+$ e $-$; *converremo*, cioè, di estendere l'uso dei segni $+$ e $-$ a indicare le due operazioni del contare nei due versi opposti anche quando queste si fanno a partire da 0; e così allora i numeri α) verrebbero rappresentati colle notazioni

$$\alpha)\qquad 0+1,\quad 0+2,\quad 0+3,\quad \ldots\ldots$$

e i β) colle altre

$$\beta)\qquad 0-1,\quad 0-2,\quad 0-3,\quad \ldots\ldots$$

Si vede bene che a questo modo il significato dei segni $+$ e $-$ non è cambiato, ma solamente esteso; d'ora innanzi si indicheranno con questi segni le due operazioni del contare in due versi opposti, non solamente quando le si fanno a partire da un dato numero della serie α), ma anche quando le si fanno a partire da 0, cioè, senza aver prima già contato un altro numero.

Per brevità nelle notazioni precedenti si tralascia il segno 0, e si hanno così i simboli

$$+1,\quad +2,\quad +3,\quad \ldots\ldots$$

che rappresentano numeri *positivi*, secondo una denominazione addottata; e i simboli

$$-1,\quad -2,\quad -3,\quad \ldots\ldots$$

che rappresentano numeri *negativi*.

Innanzi ai positivi si ommette spesso il segno $+$, e gli uni e gli altri si possono comprendere in una sola classe disponendo i positivi a destra di 0 i negativi a sinistra

$$\gamma)\quad \ldots\ldots\quad -3,\quad -2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots\ldots;$$

se in uno qualunque di questi numeri che chiameremo *algebrici* si astrae dal segno, rimane uno degli ordinari numeri dell'Aritmetica, che dicesi *valore assoluto* di quello.

Prima di procedere innanzi, facciamo subito osservare che colla considerazione dei numeri negativi sparisce quella impossibilità di certe sottrazioni, per la quale appunto fummo condotti a sentire la necessità di nuovi numeri oltre quelli dell'Aritmetica. Invero, se a e b sono due dei numeri ordinari dell' Aritmetica ed è $b>a$, si eseguisce, secondo il concetto noto, l' operazione indicata nell' espressione $a-b$ contando prima il numero a, a partire da 0, nella serie γ): e quindi contando il numero b all' indietro: ed è evidente che facendo ciò, si cade sul numero negativo $-c$: essendo c eguale all' eccesso di b sopra a: dimodochè si ha

$$a-b=-(b-a);$$

così si vede che le sottrazioni prima impossibili danno come resultati dei numeri negativi.

3. Sin qui noi abbiamo sempre parlato di contare unità in un verso o in quello opposto, e abbiamo così generato i numeri precedenti, cioè i numeri interi positivi e negativi; ma è manifesto che tutte le considerazioni già fatte valgono pure se in luogo di contare unità, supposta questa divisibile in parti, si contano parti d'unità; e allora si producono i numeri frazionari positivi e negativi; così se quella che si conta è la parte n^a dell' unità si genera la serie

$$\delta) \ldots\ldots -\left(\frac{3}{n}\right), -\left(\frac{2}{n}\right), -\left(\frac{1}{n}\right), 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n} \ldots\ldots$$

che comprende in sè la precedente, giacchè evidentemente si ha

$$\left(\frac{n}{n}\right)=1, \left(\frac{2n}{n}\right)=2, \left(\frac{3n}{n}\right)=3, \ldots\ldots$$

$$-\left(\frac{n}{n}\right)=-1, -\left(\frac{2n}{n}\right)=-2, -\left(\frac{3n}{n}\right)=-3, \ldots;$$

dalla serie δ) generale, si deducono infinite serie dando ad n successivamente i valori 1, 2, 3, 4, ...; per $n=1$, si ha la serie dei numeri interi

$$\ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

per $n=2$, si ha

$$\ldots\ldots -\left(\frac{2}{2}\right), -\left(\frac{1}{2}\right), 0, \frac{1}{2}\ \frac{2}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{4}{2} \ldots\ldots$$

per $n=3$

$$\ldots\ldots -\left(\frac{2}{3}\right), -\left(\frac{1}{3}\right), 0, \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{3}\ \frac{4}{3} \ldots\ldots$$

e così di seguito.

4. Dopo avere così stabilito il concetto dei numeri positivi e negativi, dovremmo applicare ad essi le operazioni di calcolo: ma prima di ciò vogliamo fare un' osservazione.

Per generare i numeri positivi e negativi, noi abbiamo finto di contare oggetti disposti su una retta, a destra e a sinistra di un punto O; ma è da osservarsi, che le due operazioni del contare unità in due versi opposti sono operazioni che effettivamente si ha assai spesso occasione di fare nella pratica. Così, quando sopra una retta indefinita nei due versi a partire da un punto fisso O, si prendono delle lunghezze a destra e delle lunghezze a sinistra del detto punto O, ciò si fa appunto contando un numero di metri a destra e un numero di metri a sinistra; e giacchè per le nostre convenzioni, a quello si antepone il segno $+$, a questo il segno $-$, ecco che la considerazione dei numeri positivi e negativi ci offre il mezzo atto a distinguere le lunghezze prese a destra da quelle prese a sinistra evitandoci così l' uso della frase, *numero a di metri a destra* o *a sinistra*, la quale altrimenti bisognerebbe

pure adoperare. — Parimente si leggono i gradi sulla colonna termometrica a partire dallo 0 contando verso l'alto o verso il basso; e i numeri che si ottengono si distingueranno coi segni + e —: la qual cosa ci evita di dovere aggiungere ad un dato numero di gradi letto sulla colonna del termometro le parole « *al di sotto o al di sopra di zero* » come saremmo pure obbligati fare se non avessimo all'uopo gli anzidetti segni. Una certa quantità di danaro può essere contata come un credito o come un debito: un numero di anni può essere passato o futuro; e così si possono avere mille altri casi in cui si debbono contare unità in due versi opposti, ed è quindi manifesto intanto il vantaggio reale che nasce dall'avere delle notazioni semplici per distinguere in tutti i casi queste due operazioni.

Addizione e sottrazione sui numeri algebrici.

5. Incominciamo anzitutto col definirne l'eguaglianza.

Diremo *eguali i numeri* a *e* b, rappresentando con *a* e *b* due numeri qualunque algebrici, *quando avranno lo stesso valore assoluto e lo stesso segno; eguali in valore assoluto e non in segno, se è sodisfatta la prima condizione e non la seconda.*

Riguardo ai numeri frazionari positivi e negativi è utile far qui subito la seguente avvertenza: che *se si hanno più numeri frazionari positivi e negativi appartenenti a differenti serie, cioè, con differenti denominatori si possono sempre trovare altrettanti numeri frazionari rispettivamente eguali a quelli e che appartengano a una medesima serie, cioè, abbiano lo stesso denominatore.*

Si faccia per un momento astrazione dai segni; rimarranno allora dei numeri frazionari come quelli dell'Aritmetica che si potranno perciò ridurre, secondo le regole note, al medesimo denominatore; trovati così dei numeri frazionari equivalenti in valore assoluto ai numeri proposti, si ristabiliranno i segni rispettivamente eguali a quelli che si avevano nei proposti medesimi.

ADDIZIONE. — *Ad un numero* a *addizionare un numero* b, essendo *a* e *b* numeri interi algebrici, ovvero frazionari appartenenti alla medesima serie, *intenderemo che significhi contare, di seguito al numero* a, *il numero* b *nel verso stesso in cui si conta*, nella serie a cui essi appartengono, *per avere questo numero* b.

SOTTRAZIONE. — *Da un numero* a *sottrarre un numero* b *significa contare, di seguito al numero* a, *il numero* b *nel verso opposto a quello in cui si conta per avere questo numero* b.

Queste definizioni sono, come si vede, in perfetta armonia coi significati che le parole *addizionare* e *sottrarre* hanno nell'Aritmetica e che dianzi noi abbiamo richiamato e giustificano pienamente la denominazione di *operazione inversa dell'addizione,* che si suol dare alla sottrazione.

Intanto si ha qui manifesto che le due operazioni si riducono ad una sola, giacchè se il sottrarre un numero b, positivo o negativo che sia, significa contarlo in verso opposto a quello in cui si conta per formarlo, cioè nel verso opposto a quello che è indicato dal suo segno, è chiaro che ciò equivale all'addizionare il numero b cambiato di segno; si hanno, cioè, le relazioni:

se b è un numero positivo $+b'$

$$a-(+b')=a+(-b')$$

α) se b è negativo $-b'$

$$a-(-b')=a+(+b').$$

Dobbiamo dunque propriamente occuparci solo dell'addizione sui numeri algebrici.

E anzitutto si vede subito che l'addizione di due numeri algebrici dà sempre un resultato che si trova tra i numeri algebrici; se i numeri a e b, che si addizionano o si sottraggono, sono ambedue interi positivi o negativi, è chiaro che il resultato sarà sempre un numero intero; e se saranno frazionari col medesimo denominatore, cioè, appartenenti alla medesima serie, il resultato sarà pure un numero appartenente alla stessa: perchè la differenza tra gli interi e i frazionari è solamente questa, che mentre quelli sono collezioni di unità, questi sono collezioni di parti di unità: e quindi se, dopo avere contato un certo numero di parti d'unità, si conta di seguito, in un verso o nell'altro, un altro numero di eguali parti dell'unità, evidentemente il resultato sarà un certo numero di queste stesse parti d'unità.

Quanto poi all'addizione di numeri algebrici frazionari con differenti denominatori, è chiaro, per l'osservazione fatta qui a principio, che si riconduce sempre all'addizione di numeri frazionari aventi il medesimo denominatore.

Vediamo ora i differenti casi.

1° Siano a e b due numeri positivi $+a'$ e $+b'$, ovvero due negativi $-a'$ e $-b'$: si avrà, secondo la definizione

$$1)\qquad \begin{aligned}(+a')+(+b')&=+(a'+b')\\(-a')+(-b')&=-(a'+b')\end{aligned}$$

cioè, *la somma algebrica di due numeri di egual segno è un numero del medesimo segno degli addendi ed eguale in valore assoluto alla somma dei loro valori assoluti, e*

in particolare, se sono frazionari e hanno, come si può sempre supporre, il medesimo denominatore, se ne farà la somma algebrica addizionando, come l' Aritmetica insegna, i numeri frazionari, che ne rappresentano i valori assoluti, e dando poi al resultato il segno comune ai numeri proposti.

2° Sia a positivo $+a'$ e b negativo $-b'$, ovvero negativo a e positivo b: si ha

$$(+a')+(-b')=c$$

essendo c *un numero eguale in valore assoluto alla differenza dei valori assoluti* a' *e* b' *e avente il segno che sta innanzi al maggiore di questi due, dimodochè se* a *e* b *sono frazionari e col medesimo denominatore, si applicherà la nota regola della sottrazione delle frazioni in Aritmetica e al resultato si darà poi il segno conveniente.*

Altrettanto dicasi del numero

$$d=(-a')+(+b');$$

dimodochè se è $a'>b'$, si avrà

$$2)\qquad \begin{aligned}(+a')+(-b')&=+(a'-b')\\(-a')+(+b')&=-(a'-b');\end{aligned}$$

se è $a'<b'$, allora

$$3)\qquad \begin{aligned}(+a')+(-b')&=-(b'-a')\\(-a')+(+b')&=+(b'-a');\end{aligned}$$

se poi è $a'=b'$, si ha

$$\begin{aligned}(+a')+(-b')&=0\\(-a')+(+b')&=0\end{aligned}$$

cioè, *la somma di due numeri eguali in valore assoluto, ma di segni contrari, è zero;* e viceversa, se è

$$a+b=0$$

a e *b sono eguali in valore assoluto, ma di segni contrari;* perchè da quella segue

onde $$a+b-b=-b$$

$$4) \qquad a=-b;$$

ma per la α) si ha

$$a+b=a-(-b)$$

e se *a* e *b* sono di segni contrari, *a* e $-b$ saranno di segni eguali: quindi le proposizioni ora dette si possono anche enunciare così: *la differenza di due numeri eguali in valore assoluto e in segno, è zero:* e viceversa *se la differenza di due numeri è zero, questi sono eguali in valore assoluto e in segno.*

6. Qui si offrono alcune osservazioni.

1° *Si dirà che* a *è maggiore di* b, a *e* b *essendo qualunque, se* a—b *è un numero positivo.*

Secondo questa definizione, di due numeri positivi è maggiore quello che ha un più grande valore assoluto; ogni numero positivo e anche lo 0 è maggiore di qualunque numero negativo: e di due numeri negativi è maggiore quello che ha un più piccolo valore assoluto.

E così non si deve più pensare, che, come accade in Aritmetica, l'addizione di un numero *b* ad *a*, produca sempre un numero maggiore di ciascuno degli addendi, e che la sottrazione produca sempre un numero minore del minuendo.

2° *La somma di due numeri algebrici gode,* come la somma di due numeri ordinari dell'Aritmetica, *della proprietà commutativa,* cioè, *non se ne altera il valore cambiando l'ordine degli addendi.*

Richiamando le formule precedenti si vede che essendo evidentemente

$$+(a'+b')=+(b'+a')$$
$$-(a'+b')=-(b'+a')$$

così per le 1) sarà

$$(+a')+(+b')=(+b')+(+a')$$
$$(-a')+(-b')=(-b')+(-a');$$

Dalla *1ª* delle 2) e *2ª* delle 3) poi, se è $a'>b'$, si ha

$$(+a')+(-b')=+(a'-b')$$
$$(-b')+(+a')=+(a'-b')$$

d'onde

$$(+a')+(-b')=(-b')+(+a');$$

e dalla *2ª* delle 2) e *1ª* delle 3), se è $a'<b'$ si ha

$$(-b')+(+a')=-(b'-a')$$
$$(+a')+(-b')=-(b'-a')$$

d'onde

$$(-b')+(+a')=(+a')+(-b');$$

il che è quanto si voleva.

3° Se si ha

$$a=a'$$
$$b=b'$$

ne segue

$$a+b=b+a'$$

Ciò è manifesto, quando si tenga presente la definizione data di *addizione.*

Somme di più numeri.

7. La somma $a+b+c+d+e$ di più numeri algebrici è il numero s ottenuto aggiungendo ad a, b, poi ad $a+b$, e: indi ad $a+b+c$, d e via di seguito; — a, b, c, d, e sono i *termini* della somma.

Richiamiamo, dandone una dimostrazione generale, due principii noti e già adoperati in Aritmetica:

1° *Per aggiungere a un numero* P *la somma* a+b+c *di più numeri positivi, si può aggiungere successivamente ciascuno di essi.*

2° *Per sottrarre da un numero* P *la somma* a+b+c *di più numeri positivi, si può sottrarre successivamente ciascuno di essi.*

Qui il numero P è qualunque, positivo o negativo, e la somma $a+b+c$ può anche in valore assoluto superare P.

Abbiasi dunque la somma $s=a+b+c$ e si voglia a P aggiungere o sottrarre s; secondo le definizioni, bisognerà, dopo aver contato il numero P, contare di seguito in un verso o nell'altro il numero s; ma questo computo di s, si può pensare di farlo contando una unità alla volta; e allora si perverrà anzitutto a contare a unità, giacchè è $a<s$; continuando poi a contare unità, dopo queste prime a, se ne conteranno altre b, giacchè è, $a+b<s$: ed è chiaro che dopo averne contate $a+b$, ne rimarranno ancora a contare c, se si vuole che tutte insieme le unità contate sieno s; dunque di seguito al numero P si è contato prima il numero a, poi, di seguito al numero $P+a$, o $P-a$ si è contato b; infine di seguito a $P+a+b$ o $P-a-b$ si è contato c; così è reso manifesto che per aggiungere o

sottrarre s a P, si aggiunge o si sottrae successivamente ciascuna delle parti di s, il che si esprime scrivendo:

$$P+(a+b+c)=P+a+b+c$$
$$P-(a+b+c)=P-a-b-c$$

Tutto questo ragionamento si rende intuitivo, pensando le unità da contarsi come oggetti distribuiti sulla solita retta.

Si è qui presa la somma s composta di tre parti a, b, c; ma è evidente, che si può, ragionando allo stesso modo, pervenire alla stessa conclusione anche se la somma s si compone di più di tre parti.

8. *La somma* s=a+b+c *dei tre numeri* a, b *e* c *rimane immutata, qualunque sieno i primi due numeri che si sommano, cioè si ha:*

$$(a+b)+c=(a+c)+b=(b+c)+a$$

Primieramente suppongasi che i tre numeri a, b, c sieno positivi; allora la cosa è subito manifesta, giacchè il numero s è la collezione di unità resultante dal contare prima le unità di a, poi di seguito, procedendo innanzi, quelle di b, e continuando poi, quelle di c; dimodochè in s vi sono tutte le unità che sono in a, in b e in c ciascuna una volta sola; ora, che prima si contino le unità di a e b per contare poi quelle di c, ovvero prima quelle di a e c e poi quelle di b, ovvero infine quelle di b e c per poi contare quelle di a, ciò è indifferente pel numero totale delle unità che si contano, giacchè in tutti i casi ciascuna unità è contata una volta, e una volta sola.

La cosa può rendersi intuitiva immaginando un cerchio sul quale siano distribuite a partire da un punto o le unità di d, di seguito a queste le unità di b, indi quelle di c per modo che l'ultima unità di c cada con-

tigua alla prima di a; è evidente che il resultato è sempre lo stesso, sia che si incominci a contare partendo dalla 1ª unità di a e si continui poi con quelle di b e di c; sia che s' incominci dalla 1ª di b per continuare con quelle di c e di a: sia che infine s' incominci dalla 1ª di c per continuare con quelle di a e di b.

Suppongasi ora che uno dei tre numeri sia negativo, cioè $c=-c'$; si ha

$$a+b+c=(a+b)+(-c')=(-c')+(a+b)$$

giacchè considerando la somma come composta di due parti $a+b$ e $-c'$ si può in essa scambiare queste parti (6, 2ª); ma pel 1° dei principii dimostrati al n. 7

$$(-c')+(a+b)=-c'+a+b$$

e quindi

$$(a+b)+(-c')=(-c'+a)+b$$

e questa relazione ci dice appunto che è indifferente il far prima la somma $a+b$ o la somma $-c'+a$.

Avendosi poi anche

$$\begin{aligned}(-c')+(a+b)&=(-c')+(b+a)\\&=-c'+b+a\\&=(-c'+b)+a,\end{aligned}$$

così si vede che si può anche incominciare col far la somma $-c'+b$.

Sieno ora negativi b e c, cioè $b=-b'$, $c=-c'$; si ha (5, α)

$$a+b+c=a+(-b')+(-c')=a-b'-c'$$

e (7, 2°)

$$\begin{aligned}a-b'-c'&=a-(b'+c')\\&=a-(c'+b')\\&=a-c'-b'\\&=a+(-c')+(-b')\end{aligned}$$

dunque intanto, è indifferente far prima la somma $a+(-b')$ ovvero la somma $a+(-c')$.

Inoltre

$$\begin{aligned}a+(-b')-(-c')&=a-(b'+c')\\&=a+[-(b'+c')]\\&=-(b'+c')+a\\&=-b'-c'+a\\&=[(-b')+(-c')]+a\end{aligned}$$

cioè, si può anche far prima la somma $(-b')+(-c')$.

Sieno infine tutti e tre negativi, $a=-a'$, $b=-b'$, $c=-c'$; allora è

$$a+b+c=(-a')+(-b')+(-c')=-(a'+b'+c');$$

ma, essendo a', b', c' numeri positivi,

$$\begin{aligned}-(a'+b'+c')&=-(a'+c'+b')\\&=(-a')+(-c')+(-b')\end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned}-(a'+b'+c')&=-(b'+c'+a')\\&=(-b')+(-c')+(-a');\end{aligned}$$

così qui pure è provato che è indifferente far prima la somma $(-a')+(-b')$ o l'altra $(-a')+(-c')$ o l'altra $(-b')+(-c')$.

Le relazioni

$$(a+b)+c=(a+c)+b=(b+c)+a$$

sono dunque vere sempre.

Il significato di queste si può anche enunciare così:

9. *Per aggiungere un numero* c *ad una somma* a+b, *lo si può aggiungere all' una o all' altra parte della somma stessa.*

Osservando poi che è $a+b=b+a$, $a+c=c+a$; $b+c=c+b$ si avrà

$$(a+b)+c=(b+a)+c=(a+c)+b=(c+a)+b$$
$$(b+c)+a=(c+b)+a$$

lo che prova che il valore della somma $a+b+c$ è indipendente dall'ordine con cui si aggiungono le parti.

Tutti i ragionamenti e quindi le conclusioni esposte nei n^i 7 e 8 sussistono identicamente anche se P, a, b, c sono numeri frazionarii: infatti, posto che abbiano tutti lo stesso denominatore, come si può sempre supporre, quei ragionamenti si possono ripetere identicamente sostituendo in essi alla parola *unità* le altre *parte d' unità*; giacchè, come già dicemmo e come ripetiamo qui una volta per sempre, di un numero frazionario si può in certo modo dire che esso è un numero intero in cui è una parte d'unità che fa da unità.

Polinomi.

10. Una somma di più termini, come la somma di due e di tre, gode della proprietà commutativa, cioè, *il valore di essa è indipendente dall'ordine che si tiene nell'aggiungere i diferenti termini.*

Dimostriamo primieramente che se nel fare la somma si scambiano due termini consecutivi qualunque, il valore di essa non muta.

Siasi ottenuta la somma $a+b+c=s$; ad essa si aggiunga d e poi alla somma $s+d$ si aggiunga e: si avrà $s+d+e$; ma noi sappiamo (9) che per aggiungere un numero e a una somma $s+d$ si può aggiungerlo a una delle parti s: si ha così

$$(s+d)+e=(s+e)+d$$

aggiungendo poi f ad ambedue,

$$(s+d)+e+f=(s+e)+d+f$$

cioè

$$a+b+c+d+e+f=a+b+c+e+d+f$$

il che prova ciò che dicemmo.

Ora mediante una serie di scambi di due termini consecutivi si potranno portare i termini di una somma a essere disposti in quell'ordine che si vuole. In effetto, si potrà scegliere uno qualunque tra essi e condurlo al 1° posto mutandolo successivamente con quelli che si troveranno alla sua sinistra; ciò fatto, si potrà scegliere un secondo e condurlo al modo stesso al 2° posto, poi un terzo che si porterà al 3° posto, e così di seguito, dimodochè, dati i termini disposti in un certo ordine, si può, mediante i detti scambi, trasportarli nei posti, che possono ad essi essere rispettivamente assegnati in un'altra disposizione della somma.

Così è pienamente provato il teorema.

11. Una somma $a+b$ di due numeri algebrici chiamasi *binomio;* di tre numeri $a+b+c$, *trinomio;* di più numeri $a+b+c+d+e+f$ *polinomio.*

Se fra i numeri a, b, c, d, e, f ve ne sono di negativi e per esempio è $b=-b'$ $e=-e'$, mettendo in evidenza i segni si ha

$$a+b+c+d+e+f=a+(-b')+c+d+(-e')+f$$
$$=a-b'+c+d-e'+f$$

che è la forma sotto la quale si presenta più spesso un polinomio, cioè, come un insieme di più termini legati tra loro da segni $+$ e $-$.

Il valore di un polinomio è la differenza tra la somma dei termini preceduti dal segno $+$ e la somma di quelli preceduti dal segno $-$.

Infatti, giacchè si possono scrivere i suoi termini nell'ordine che si vuole, chiamando P questo valore si ha

$$P=a-b'+c+d-e'+f=a+c+d+f-b'-e'$$
$$=(a+c+d+f)-(b'+e')$$

come si voleva.

12. *In una somma di più numeri algebrici si può sempre sostituire a due o più di essi la loro somma eseguita.*

Sia

$$s=a+b+c+d+e \text{ e } p=c+d;$$

giacchè è

$$s=c+d+a+b+e$$

così si vede che per avere s si può incominciare coll'ottenere la somma $c+d=p$; e quindi a questa aggiungere a, poi b, e poi e: si ha dunque:

$$s=p+a+b+e$$

e anche

$$s=a+b+p+e.$$

13. *Per aggiungere un numero ad una somma di più numeri, si può aggiungerlo a uno di questi.*

Sia $s=a+b+c+d$ e si voglia ad s aggiungere e; si può considerare s come la somma di due parti, l'una $a+b+c$, l'altra d e allora si sa (9) che si può aggiungere e a una di queste parti, p. es. a d: quindi

$$s+e=(a+b+c+d)+e=a+b+c+(d+e)$$

14. *Per aggiungere una somma ad un'altra somma si forma una somma unica coi singoli termini delle due somme.*

Sia

$$s_1=a+b+c+d \text{ e } s_2=e+f+g;$$

diciamo che è

$$s_1+s_2=a+b+c+d+e+f+g.$$

Infatti, giacchè (11) in una somma si può sempre sostituire a più termini la loro somma eseguita, così se si prende la somma

$$s=a+b+c+d+e+f+g$$

si può in essa al luogo di $a+b+c+d$ sostituire s_1 e in luogo di $e+f+g$ sostituire s_2: si ha quindi

$$s=s_1+s_2$$

che si può scrivere

$$a+b+c+d+e+f+g=(a+b+c+d)+(e+f+g)$$

ovvero, ciò che è lo stesso

$$(a+b+c+d)+(e+f+g)=a+b+c+d+e+f+g$$

e questa relazione dimostra appunto il teorema.

15. La proposizione ora dimostrata ci dà la regola per aggiungere un polinomio ad un altro.

Sieno

$$P=a-b+c+d-e \text{ e } Q=f+g-h+m-n$$

due polinomi e si voglia a P addizionare Q. I due polinomi si possono scrivere, come si sa, sotto forma di somme: cioè

$$P=a+(-b)+c+d+(-e)$$

e

$$Q=f+g+(-h)+m+(-n);$$

e allora, aggiungendo al primo tutti i termini del secondo (14) si ha

$$P+Q=a+(-b)+c+d+(-e)+f+g+(-h)+m+(-n)$$

ovvero

$$P+Q=a-b+c+d-e+f+g-h+m-n$$

la quale relazione ci dice:

Per aggiungere un polinomio ad un altro si scrivono i termini di quello di seguito ai termini di questo coi segni che hanno.

16. *Si cambia il segno di un polinomio cambiando il segno a tutti i suoi termini.*

Sia il polinomio

$$P=a-b+c+d-e-f$$

e sia

$$Q=-a+b-c-d+e+f$$

diciamo che è

$$Q=-P.$$

Infatti addizioniamo Q con P: avremo

$$P+Q=a-b+c+d-e-f-a+b-c-d+e+f;$$

e giacchè si possono scrivere i termini nell'ordine che si vuole

$$P+Q=a-a+b-b+c-c+d-d+e-e+f-f$$

e quindi

$$P+Q=o$$

onde, per la 4) del n. 5

$$Q=-P.$$

17. *Per sottrarre un polinomio da un altro basta scrivere di seguito ai termini di questo i termini di quello coi segni cambiati.*

Sia

$$P=a-b+c+d-e-f$$

e

$$Q=h-g+l-m+n.$$

Si sa (5, α) che il sottrarre un numero da un altro è lo stesso che aggiungerlo, cambiato però di segno: dimodochè

$$P-Q=P+(-Q):$$

ora è (16)

$$-Q=-h+g-l+m-n$$

quindi

$$\begin{aligned} P-Q &= (a-b+c+d-e-f)-(h-g+l-m+n) \\ &= (a-b+c+d-e-f)+(-h+g-l+m-n \\ &= a-b+c+d-e-f-h+g-l+m-n \end{aligned}$$

che è quanto si voleva.

18. Da quanto ai n^i 14 e 15 si è veduto, risulta che, presentando il polinomio da aggiungersi ad un altro sotto la forma di una somma, la regola per l'addizione si può in sostanza enunciare dicendo: *per aggiungere un polinomio ad un altro, si aggiungono a questo tutti i termini di quello.*

Si può ora dare un enunciato analogo per la regola della sottrazione, dire cioè: *per sottrarre un polinomio da un altro, si sottraggono da questo successivamente tutti i termini di quello.*

Infatti se si scrive

$$Q=h+(-g)+l+(-m)+n:$$

si ha

$$P-Q=(a-b+c+d-e-f)-[h+(-g)+l+(-m)+n]:$$

ma si è già trovato

$$P-Q=a-b+c+d-e-f-h+g-l+m-n$$

che si può scrivere

$$P-Q=a-b+c+d-e-f-h-(-g)-l-(-m)-n$$

e questo prova quanto dicevamo.

Formule algebriche.

19. Due espressioni algebriche si dicono *equivalenti* quando prendono *valori* eguali qualunque sieno i valori particolari che si attribuiscono alle lettere in esse contenute.

Già dicemmo che nell'Algebra, i numeri rappresentandosi per mezzo di lettere, le operazioni su di essi potevano solo indicarsi, e da siffatte indicazioni di operazioni nascevano appunto le espressioni algebriche: aggiungeremo ora che il calcolo algebrico consiste nel trasformare, quand'è possibile, un'espressione in un'altra equivalente.

L'equivalenza di due espressioni algebriche che si rappresenta ponendo tra esse il segno $=$, costituisce una *formula*.

Così le relazioni stabilite al n. 5, cioè

$$a-(+b')=a+(-b')$$
$$a-(-b')=a+(+b')$$
$$(+a')+(+b')=+(a'+b')$$
$$(-a')+(-b')=-(a'+b')$$
$$(+a')+(-b')=+(a'-b') \text{ se è } a'>b'$$
$$=-(b'-a') \text{ se è } a'<b'$$

le altre

$$P+(a+b+c)=P+a+b+c$$
$$P-(a+b+c)=P-a-b-c$$

del n. 7

le

$$(a+b)+c=(a+c)+b=(b+c)+a$$

del n. 8

e tutte le altre dei numeri seguenti sono altrettante formule.

Per chi conosce il linguaggio algebrico queste formule esprimono le proposizioni corrispondenti con la stessa chiarezza che si ha usando le parole e quasi, si potrebbe dire, in modo più intuitivo: certamente poi in modo più breve.

Ma non è solo questo il vantaggio delle formule; come già è manifesto anche da quanto si è fatto in questo stesso capitolo, e come avremo spesso occasione di notare in seguito, l'uso delle formule rende le dimostrazioni dei teoremi assai più semplici di quello che sarebbero se si usasse il solo ragionamento con parole: e ne mette in più viva evidenza tutte le conseguenze.

Parentesi.

20. Aggiungiamo alcuni schiarimenti intorno all'uso delle parentesi.

Già fu detto, che un'espressione chiusa tra due parentesi rappresenta il numero che resulterebbe dall'effettuare le operazioni, in essa indicate, quando alle lettere si attribuissero valori particolari.

Secondo questo concetto, per indicare che ad un numero P si aggiunge o si sottrae un polinomio $a-b+c-d$, come già si è fatto, si scrive

$$P+(a-b+c-d) \text{ ovvero } P-(a-b+c-d):$$

e se si osserva che per la regola del n. 15 si ha

$$P+(a-b+c-d)=P+a-b+c-d$$

così si può dire: *se un polinomio è chiuso tra parentesi e vi è preposto il segno* $+$, *questa si può sopprimere.*

Parimente, dalla regola del n. 17, si ha:

$$P-(a-b+c-d)=P-a+b-c+d$$

la quale ci permette di enunciare che: *se un polinomio è chiuso fra parentesi e vi è preposto il segno —, questa si può sopprimere purchè si cangi il segno a tutti i termini entro di essa.*

Se le due formule precedenti si scrivono sotto la forma

$$P+a-b+c-d=P+(a-b+c-d)$$

e

$$P-a+b-c-d=P-(a-b+c-d)$$

ci permettono di dire che: *in un polinomio un certo numero di termini può chiudersi entro parentesi, lasciando loro i segni che hanno, o cangiandoli a tutti, secondochè innanzi alla parentesi si mette il segno + o il —.*

Alcune volte occorre di racchiudere tra parentesi un insieme di termini che già appartengono a una espressione che è pure racchiusa da parentesi; allora si sogliono adoperare parentesi di forme diverse: così p. es. l'espressione

$$P+[a-(b-c)+d]$$

significa che a P si dee aggiungere il numero che resulta dal sottrarre da a il numero $b-c$ e dall'aggiungere poi d; — dimodochè per ottenere il valore dell'espressione entro la parentesi si dovrebbe incominciare col calcolare $b-c$, cioè l'espressione racchiusa entro la parentesi interna; e quindi quando si voglia sopprimere una parentesi che ne contiene delle altre, si comincierà sempre dal sopprimere le più interne: così nell'espressione precedente il primo passo da farsi è quello indicato dall'eguaglianza

$$P+[a-(b-c)+d]=P+[a-b+c+d],$$

il secondo passo è questo:

$$P+[a-b+c+g]=P+a-b+c+d:$$

e infine si ha:

$$P+[a-(b-c)+d]=P+a-b+c+d.$$

Si può però seguire anche la via inversa, cioè, incominciare col sopprimere la parentesi esterna e poi via via le altre, tenendo sempre presente che si dee considerare l'espressione entro una parentesi come un numero unico; così si ha:

$$P+[a-(b-c)+d]=P+a-(b-c)+d$$

e

$$P+a-(b-c)+d=P+a-b+c+d.$$

Esercizi.

1. Ponendo $a=1$, $b=\frac{2}{3}$, $c=3$, $d=\frac{4}{7}$, $e=-5$, $f=6$, $g=-\frac{7}{11}$, $h=8$ trovare i valori delle seguenti espressioni:

1° $a-b+c-d-e+f$

2° $a-f^2+e$

3° $-b-(c-d)+f$

4° $a-(b+h+d)+e+f$

5° $(a+g+c)-(d^2+h^2+f^2)$

6° $a-[b-c-(d+e)-f]$

7° $a-\{b-[c-(d+e)-g]+h\}$

8° $a+\{b-[g+h-(c+d+e)-c]-f\}$

2. Effettuare le operazioni indicate nelle espressioni:

1° $(a+b)+(a-b)$
2° $(a+b)-(a-b)$
3° $(a+b-c)-(b+c-a)+(c+a-b)-(a+b-c)$

3. Calcolare il valore del polinomio

$$a.10^3+b.10^2+c.10+d$$

quando è $a=3$, $b=4$, $c=1$, $d=6$.

4. Tre giuocatori pongonsi a giocare; il primo con a lire, il secondo con b, il terzo con c lire e pattuiscono che colui che perde raddoppi le lire degli altri. — Dopo tre partite, che sono perdute successivamente dal primo, dal secondo e dal terzo, quanto rimane a ciascuno?

Risposta: al 1° $4a-4b-4c$
al 2° $6b-2a-2c$
al 3° $7c-a-b$.

5. Dimostrare che la somma dei primi n numeri interi, cioè $s=1+2+3+,\ldots\ldots+(n-1)+n$ è data dalla formula

$$s=\frac{n(n+1)}{2}.$$

(Si osservi prima di tutto che se si sommano due termini equidistanti dagli estremi, cioè, 2 e $n-1$, 3 e $n-2$, e così di seguito, si ottengono *sempre* somme eguali a quella dei due estremi stessi n ed 1: provato ciò, si noti che si può scrivere anche

$$s=n+(n-1)+(n-2)+\ldots\ldots+3+2+1$$

e allora si sommi membro a membro questa con la prima espressione di s).

6. Dimostrare che la somma dei primi n numeri dispari è eguale ad n^2.

(Si scrivano i numeri 1, 3, 5, 7, 9 .....: si osservi che possono anche scriversi

$$2.1-1,\ 2.2-1,\ 2.3-1,\ 2.4-1,\ 2.5-1,\ldots\ldots;$$

di qui si rileva subito l'espressione del termine n°, $(n-1)^\circ$, $(n-2)^\circ$ .....; e allora si seguirà in tutto la via tenuta nel problema precedente).

7. Qual'è la somma dei primi n numeri pari?

8. Tre vasi contengono acqua e vino: il primo a litri di acqua e b di vino: il secondo a' litri di acqua e b' di vino: il terzo a'' di acqua e b'' di vino.

Si prende la metà del liquido contenuto nel primo vaso e si versa nel secondo: poi il terzo del liquido che si trova allora contenuto in questo, e si versa nel terzo. Trovare le espressioni che indicano le quantità di acqua e vino contenute in ogni vaso dopo queste operazioni.

Sono le seguenti:

1° vaso: acqua $=\dfrac{a}{2}$, vino $=\dfrac{b}{2}$

2° vaso: » $=\dfrac{2a'+a}{3}$, » $=\dfrac{2b'+b}{3}$

3° vaso: » $=\dfrac{6a''+2a'+a}{6}$, » $=\dfrac{6b''+2b+b}{6}$.

CAPITOLO II.

Moltiplicazione algebrica.

Prodotto di due numeri algebrici.

20. In Aritmetica moltiplicare p. es. 3 per 4 significa ripetere il 3 quattro volte, cioè, si ha

$$3.4 = 3+3+3+3$$

onde si vede che il prodotto è formato col moltiplicando 3 come il moltiplicatore 4 è formato con 1, giacchè è

$$4 = 1+1+1+1.$$

Parimente, giacchè moltiplicare p. es. $\frac{3}{5}$ per $\frac{2}{7}$ significa prendere i $\frac{2}{7}$ di $\frac{3}{5}$, e questo si fa prendendo prima $\frac{1}{7}$ di $\frac{3}{5}$ e ripetendo poi *due* volte il resultato $\frac{3}{5.7}$, così si vede, che anche qui il prodotto è formato col moltiplicando come il moltiplicatore coll'unità, perchè per formare $\frac{2}{7}$ si prende prima $\frac{1}{7}$ di 1, indi si ripete questo *due* volte.

Ora, per formare il prodotto di due numeri algebrici a e b, noi partiremo da questo stesso concetto: *formeremo*, cioè, *col moltiplicando* a *un numero* c, *nello stesso modo come il moltiplicatore* b *è composto con* 1.

Vediamo nei differenti casi che possono presentarsi, come, partendo da questa definizione, si ottenga il valore assoluto e il segno del prodotto, dati che sieno i valori assoluti e i segni dei fattori a e b.

1° Sia a intero, o frazionario positivo; b intiero positivo o negativo; in b vi è a distinguere il valore assoluto e il segno, cioè, il quante volte è contata l'unità per formarlo, e il verso in cui è contata.

Secondo il nostro concetto, per formare il prodotto c si dovrà dunque contare di seguito tante volte a, quante volte si è contato 1 per formare b: il segno di b non influisce affatto su questo *quante volte* si ha da contare a per formare c: esso indicherà solo il verso in cui si deve contare: il segno di b non influisce dunque sul valore assoluto del prodotto: perocchè in sostanza il prodotto c è la riunione di tante volte il dato numero a, quante ne dice b, o anche si può dire: il prodotto c è formato contando tanti gruppi, ciascuno di a unità se a è intiero, ovvero ciascuno di p parti q^{esime} dell'unità, se è $a = \left(\frac{p}{q}\right)$, quante sono le unità che si contano per formare b; e che la riunione di tutti questi a si faccia, contandoli piuttosto in un verso che in un altro, ciò non fa nulla al valore assoluto del prodotto.

Così è provato intanto che il valore assoluto del prodotto c è il prodotto dei valori assoluti dei numeri a e b, che si sa ottenere colle regole dell'Arimetica.

Vediamo il segno.

Se si distinguono i due casi di b positivo e di b negativo si vede subito che i prodotti

$$a(+b) \text{ e } a(-b)$$

debbono essere di segni contrarii, perocchè in quello

deve contarsi a come si conta 1 per formare $+b$: in questo invece, come si conta per formare $-b$: dunque nei due casi si conta in due versi opposti: e notando poi che $a(+b)$ è in sostanza una somma di numeri positivi, si deduce che $a(+b)$ è positivo, $a(-b)$ negativo.

Tutto ciò si rende intuitivo, se si osserva che si può scrivere:
se b è positivo $+b'$, denotando con b' il valore assoluto di b,

$$b = +b' = +\left(\overset{1}{1}+\overset{2}{1}+\overset{3}{1}+\ldots\ldots+\overset{b'-1}{1}+\overset{b'}{1}\right);$$

e se b è negativo $-b'$

$$b = -b' = -\left(\overset{1}{1}+\overset{2}{1}+\overset{3}{1}+\ldots\ldots+\overset{b'-1}{1}+\overset{b'}{1}\right);$$

e quindi, giacchè, per la nostra definizione, il prodotto è in sostanza il numero che si ottiene quando nel moltiplicatore in luogo di 1 si pone il moltiplicando $+a'$, indicando a' il valore assoluto di a, si ha manifestamente:

$$(+a')(+b') = +\left(\overset{1}{+a'}\right)+\left(\overset{2}{+a'}\right)+\left(\overset{3}{+a'}\right)+\ldots\ldots$$
$$+\left(\overset{b'-1}{+a'}\right)+\left(\overset{b'}{+a'}\right) = +(a'b')$$

e

$$(+a')(-b') = -\left[\left(\overset{1}{+a'}\right)+\left(\overset{2}{+a'}\right)+\left(\overset{3}{+a'}\right)+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\left(\overset{b'-1}{+a'}\right)+\left(\overset{b'}{+a'}\right)\right] = -(a'b')$$

e queste due formule mostrano bene, come il valore assoluto nell'un caso e nell'altro sia il prodotto dei valori assoluti, e inoltre, come sia positivo il prodotto $(+a')(+b')$, negativo il prodotto $(+a)'(-b')$.

2° Sia ora a negativo $-a'$; tenendo sempre presente il concetto ora detto di prodotto, si vede che si ha:

$$(-a')(+b') = +\left[\left(\overset{1}{-a'}\right)+\left(\overset{2}{-a'}\right)+\left(\overset{3}{-a'}\right)+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\left(\overset{b'-1}{-a'}\right)+\left(\overset{b'}{-a'}\right)\right]$$
$$= -\left(\overset{1}{a'}+\overset{2}{a'}+\overset{3}{a'}+\ldots\ldots+\overset{b'-1}{a'}+\overset{b'}{a'}\right)$$
$$= -(a'b');$$

e

$$(-a')(-b') = -\left[\left(\overset{1}{-a'}\right)+\left(\overset{2}{-a'}\right)+\left(\overset{3}{-a'}\right)+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\left(\overset{b'-1}{-a'}\right)+\left(\overset{b'}{-a'}\right)\right]$$
$$= +\left(\overset{1}{a'}+\overset{2}{a'}+\overset{3}{a'}+\ldots\ldots+\overset{b'-1}{a'}+\overset{b'}{a'}\right)$$
$$= +(a'b');$$

queste altre formule mostrano pure che il valore assoluto del prodotto è sempre il prodotto dei valori assoluti dei fattori, e che $(-a')(+b')$ è negativo, e $(-a')(-b')$ è positivo.

3° Sin qui abbiamo supposto b intiero ed a qualunque, intiero cioè o frazionario.

Fermiamoci ora a considerare più specialmente il caso che sia $a = +\frac{p}{q}$, ovvero $a = -\frac{p}{q}$ e $b = +b'$, p, q e b' essendo valori assoluti interi.

Sia $$a = +\frac{p}{q};$$

avremo

$$a.b = \left(+\frac{p}{q}\right)(+b') = +\left(\frac{p}{q}.b'\right) = +\left(\frac{pb'}{q}\right)$$

e quindi un numero frazionario positivo $\left(+\frac{p}{q}\right)$ può considerarsi come il prodotto di $\left(+\frac{1}{q}\right)$ per $(+p)$, giacchè si ha

$$\left(+\frac{1}{q}\right)(+p)=+\left(\frac{1}{q}.p\right)=+\left(\frac{p}{q}\right).$$

Se nella relazione antecedente si prende $b'=q$, si ottiene:

$$\left(+\frac{p}{q}\right)(+q)=+\left(\frac{pq}{q}\right)=+p,$$

cioè, il numero $+\frac{p}{q}$ è tale che moltiplicato per $+q$, produce $+p$: dimodochè, se si trasporta qui la denominazione dell'Aritmetica, il numero $+\frac{p}{q}$ si dovrà chiamare *quoziente* di $+p$ diviso per $+q$.

Parimente, osservando che è:

$$\left(+\frac{p}{qs}\right)(+s)=+\left(\frac{p}{qs}.s\right)=+\left(\frac{ps}{qs}\right)=+\left(\frac{p}{q}\right)$$

si dirà che $+\frac{p}{qs}$ è il *quoziente* di $+\frac{p}{q}$ per $+s$.

Si prenda ora $a=-\frac{p}{q}$;

sarà

$$a.b=\left(-\frac{p}{q}\right)(+b')=-\left(\frac{p}{q}b'\right)=-\left(\frac{pb'}{q}\right);$$

e così un numero frazionario negativo $\left(-\frac{p}{q}\right)$ può considerarsi come il prodotto di $\left(-\frac{1}{q}\right)$ per $(+p)$ o di $\left(+\frac{1}{q}\right)$ per $(-p)$, giacchè si ha

$$\left(-\frac{p}{q}\right)=-\left(\frac{1}{q}.p\right)=\left(-\frac{1}{q}\right)(+p)=\left(\frac{1}{q}\right)(-p).$$

Se nelle precedenti relazioni si prende $b'=q$, si ottiene:

$$\left(-\frac{p}{q}\right).q=-\left(\frac{pq}{q}\right)=-p$$

cioè il numero $-\frac{p}{q}$ moltiplicato per q dà per prodotto $-p$: epperò si dovrà dire che $-\frac{p}{q}$ è il *quoziente* di $-p$ diviso per q; parimente osservando che è

$$\eta)\ \left(-\frac{p}{qs}\right).s=-\frac{ps}{qs}=-\frac{p}{q}$$

si dirà che $-\frac{p}{qs}$ è il *quoziente* di $-\frac{p}{q}$ per s.

Abbiamo così definito il quoziente di un numero positivo o negativo intiero o frazionario diviso per un intiero positivo: e questo ci servirà ora per la determinazione del prodotto ab, quando b è frazionario.

4° Si consideri dunque il prodotto $a.b$, essendo a intiero o frazionario ma positivo, e b frazionario positivo o negativo $+\frac{p}{q}$ o $-\frac{p}{q}$.

Il b è formato contando p volte di seguito la parte q^a dell'unità in un verso o nell'altro a seconda del segno; per avere $c=ab$, si dovrà dunque prendere la parte q^a di a, cioè il quoziente di a per q che abbiamo ora imparato ad esprimere in tutti i casi, e contarla p volte di seguito in un verso o in un altro: torniamo dunque così nel caso 1° precedentemente trattato, soltanto che, in quello si contava più volte di seguito il numero a, in questo si conta invece una parte di a: dunque intanto anche qui si conclude subito che il valore assoluto del prodotto non dipende affatto dai segni

di a e di b, e quindi esso è il prodotto dei valori assoluti di a e di b.

Quanto ai segni, con un ragionamento analogo a quello fatto prima, si prova subito che i prodotti

$$a(+b),\ a(-b)$$

sia a intero o frazionario, debbono anche qui avere segni contrari, positivo quello, negativo questo.

Ma ciò si rende più chiaro, osservando che si può scrivere se è b positivo

$$b = +\frac{p}{q} = +\left(\overset{1}{\frac{1}{q}} + \overset{2}{\frac{1}{q}} + \overset{3}{\frac{1}{q}} + \ldots\ldots + \overset{p}{\frac{1}{q}}\right)$$

e se b è negativo $-\frac{p}{q}$,

$$b = -\frac{p}{q} = -\left(\overset{1}{\frac{1}{q}} + \overset{2}{\frac{1}{q}} + \ldots\ldots + \overset{p}{\frac{1}{q}}\right):$$

dimodochè, secondo il dato concetto di prodotto, essendo a' il valore assoluto di a, si ha:

$$(+a')\left(+\frac{p}{q}\right) = +\left[\left(\overset{1}{\frac{+a'}{q}}\right) + \left(\overset{2}{\frac{+a'}{q}}\right) + \ldots + \left(\overset{p}{\frac{+a'}{q}}\right)\right]$$

ovvero, giacchè è $\frac{+a'}{q} = +\frac{a'}{q}$,

$$(+a')\left(+\frac{p}{q}\right) = +\left(\overset{1}{\frac{a'}{q}} + \overset{2}{\frac{a'}{q}} + \ldots + \overset{p}{\frac{a'}{q}}\right) = +\left(\frac{a'}{q}\cdot p\right)$$

e

$$(+a')\left(-\frac{p}{q}\right) = -\left(\overset{1}{\frac{a'}{q}} + \overset{2}{\frac{a'}{q}} + \ldots + \overset{p}{\frac{a'}{q}}\right) = -\left(\frac{a'}{q}\cdot p\right)$$

le quali relazioni mostrano che $(+a')\left(+\frac{p}{q}\right)$ è positivo e $(+a')\left(-\frac{p}{q}\right)$ negativo, e il valore assoluto dell'uno e dell'altro è $\frac{a'}{q}\cdot p = a'\cdot\frac{p}{q}$ cioè il prodotto dei valori assoluti dei fattori.

5° Sia ora a negativo $-a'$; si ha:

$$(-a')\left(+\frac{p}{q}\right) = +\left[\left(\overset{1}{\frac{-a'}{q}}\right) + \left(\overset{2}{\frac{-a'}{q}}\right) + \ldots + \left(\overset{p}{\frac{-a'}{q}}\right)\right]$$

e

$$(-a')\left(-\frac{p}{q}\right) = -\left[\left(\overset{1}{\frac{-a'}{q}}\right) + \left(\overset{2}{\frac{-a'}{q}}\right) + \ldots + \left(\overset{p}{\frac{-a'}{q}}\right)\right]$$

dove $\frac{-a'}{q}$ rappresenta la parte q^a di $-a'$, cioè il quoziente di $-a'$ per q, che sopra abbiamo definito tanto per a' intiero quanto per a' frazionario; si ha dunque

$$(-a')\left(+\frac{p}{q}\right) = -\left(\overset{1}{\frac{a'}{q}} + \overset{2}{\frac{a'}{q}} + \ldots + \overset{p}{\frac{a'}{q}}\right) = -\left(\frac{a'}{q}\cdot p\right)$$

e

$$(-a')\left(-\frac{p}{q}\right) = +\left(\overset{1}{\frac{a'}{q}} + \overset{2}{\frac{a'}{q}} + \ldots + \overset{p}{\frac{a'}{q}}\right) = +\left(\frac{a'}{q}\cdot p\right)$$

onde si vede che $(-a')\left(+\frac{p}{q}\right)$ è negativo e $(-a')\left(-\frac{p}{q}\right)$ è positivo, e che il valore assoluto di entrambi è $a'\frac{p}{q}$.

Raccogliendo le cose sin qui dette, si ha dunque:

Il prodotto di due numeri algebrici è un numero algebrico, il cui valore assoluto è il prodotto dei valori assoluti dei fattori, e il cui segno è il + o il —, secondochè questi hanno lo stesso segno o segni differenti.

21. *Non cambia il prodotto di due numeri algebrici cambiando l'ordine dei fattori:* invero, non cambia il suo valore assoluto, perchè esso è il prodotto di due

numeri aritmetici: non cambia il segno, perchè questo non dipende affatto dall'ordine con cui si succedono nei fattori i segni + e —.

22. Se si ha

$$a=a'$$
$$b=b'$$

è manifesto che sarà

$$ab=a'b'.$$

23. *Se i due numeri* a *e* b *sono diversi da zero, il prodotto* ab *è pure diverso da zero;* ciò discende immediatamente da quanto è stato ora detto sul prodotto di due numeri algebrici e d'altronde è anche manifesto per la stessa definizione di prodotto.

Se poi uno dei fattori è zero, il prodotto è sempre zero.

Sia $c=a.0$: per definizione c è formato contando il numero a tante volte e nello stesso verso, come si conta 1 per formare 0; ma per formare 0, non si conta affatto nè in un verso nè in un altro; dunque c si ottiene non contando affatto, epperò è $c=0$.

Sia $c=0.a$; c è formato contando 0 come si conta 1 per formare a; ma, sinchè si contano degli *zeri*, si ha per resultato *zero;* dunque è $c=0$.

Raccogliendo, si può dunque dire:

Affinchè un prodotto ab *sia zero, è necessario e sufficiente che uno dei due fattori sia zero.*

È poi evidente che è

$$0.0=0.$$

24. *Il prodotto di più numeri algebrici si fa* come in Aritmetica, *moltiplicando i primi due, indi il prodotto ottenuto per il terzo e così via via sino ad esaurire tutti i numeri dati.* Dal che segue subito che il valore assoluto del prodotto è il prodotto dei valori assoluti dei fattori. — Quanto poi al segno, facilmente sarà mostrato che esso sarà il +, se il numero dei fattori negativi è pari, sarà il —, se è dispari.

Osserviamo perciò, che si può sempre introdurre +1 come primo fattore; perchè moltiplicando un numero per +1 non se ne cambia nè il valore nè il segno. — Nelle moltiplicazioni successive che bisognerà eseguire per fare il prodotto, il segno che così al principio è +, cangerà tante volte quanti fattori negativi vi sono: ora è evidente che ridiventerà + se il numero dei cangiamenti è pari, e — nel caso contrario.

Se, come in Aritmetica, *si chiama potenza un prodotto di fattori tutti eguali tra loro,* da quel che precede risulta evidentemente che le potenze con esponente pari di un numero negativo sono positive e quelle con esponente dispari negative, mentre le potenze di un numero positivo sono tutte positive.

È poi anche manifesto che il prodotto di più numeri algebrici non muta mutando l'ordine dei fattori, giacchè, per quanto si è detto sopra, si vede che non muta il suo valore assoluto, essendo esso il prodotto di numeri aritmetici: e non muta il segno, perchè questo dipende solo dal numero dei fattori negativi, che vi sono.

25. Da quanto abbiamo qui esposto discendono come immediate conseguenze (e si dimostrerebbero come si fa in Aritmetica) i teoremi:

1° *Per moltiplicare un numero algebrico pel prodotto di più numeri algebrici, si può moltiplicarlo successivamente per ciascuno di questi.*

2° *Per moltiplicare un prodotto per un numero basta moltiplicare uno dei suoi fattori per questo numero.*

3° *Si può moltiplicare un prodotto per un altro prodotto, formando un prodotto unico coi fattori del moltiplicando e quelli del moltiplicatore.*

4° *In un prodotto si può sostituire a un numero qualunque di fattori il loro prodotto effettuato.*

5° *Per moltiplicare due potenze di uno stesso numero, è sufficiente aggiungere i loro esponenti.*

Moltiplicazione dei monomi.

26. Dalla moltiplicazione di più numeri algebrici, sinchè alle lettere che li rappresentano non si assegnano valori particolari, nascono delle espressioni come le seguenti

$$+5a^2b^3c, \quad -8a^4bc^2d^3f$$

che si dicono *monomi;* chiamandosi in generale *monomio* un' espressione in cui le lettere e i numeri aritmetici, che vi compariscono, non sono riuniti fra loro da segni + e — ; i fattori 5 e 8 si chiamano *coefficienti numerici.*

Si vogliano moltiplicare tra loro questi due monomi.

Dal teorema (3°-25) si deduce che il prodotto di essi è un monomio che contiene i fattori di ambedue; il segno sarà dato, secondo la nota regola; così si avrà

$$(+5a^2b^3c)(-8a^4bc^2d^3f) = -(5.a^2b^3c.8.a^4.b.c^2.d^3.f):$$

e mutando l'ordine dei fattori

$$(+5a^2b^3c)(-8a^4bc^2d^3f) = -(5.8.a^2.a^4.b^3b.c.c^2d^3.f).$$

Per il teorema (4°-25) si può sostituire a 5×8, il

prodotto 40; ad $a.^2a^4$ il prodotto a^6 (teorema 5°); a b^3b, b^4; a cc^2, c^3; dimodochè si ha

$$(+5a^2b^3c)(-8a^4bc^2d^3f) = -40a^6b^4c^3d^3f.$$

Il metodo è generale e conduce alla regola seguente:

Il prodotto di due monomi si ottiene moltiplicando i coefficienti tra loro, dando a ogni lettera comune ai due monomi un esponente eguale alla somma di quelli dai quali è affetta in ognuno di essi e prendendo le altre lettere come fattori, senza cangiare i loro esponenti; si dà poi il segno al monomio prodotto secondo la regola nota pel prodotto di due numeri algebrici.

Si fa il prodotto di un numero qualunque di monomi moltiplicando tra loro i due primi, poi il prodotto, che è un monomio, per il terzo, e così di seguito.

Moltiplicazione dei polinomi.

27. Abbiasi da moltiplicare una somma $a+b+c$ di numeri algebrici qualunque a, b e c per un numero algebrico m.

1° Sia m intiero e positivo: allora è

$$\begin{aligned}(a+b+c)m &= (\overset{1}{a}+b+c)+(\overset{2}{a}+b+c)+\ldots(\overset{m}{a}+b+c)\\ &= \overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\ldots\ldots+\overset{m}{a}+\overset{1}{b}+\overset{2}{b}+\ldots\ldots+\overset{m}{b}+\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\ldots\ldots+\overset{m}{c}\\ &= am+bm+cm\end{aligned}$$

Se m è negativo $(-m')$, si ha per la regola dei segni

$$\begin{aligned}(a+b+c)m &= (a+b+c)(-m') = [-(a+b+c)m'] =\\ &= [(-a)+(-b)+(-c)]m'\end{aligned}$$

e allora siamo nel caso precedente: quindi

$$(a+b+c)m = [(-a)+(-b)+(-c)]m' = \\ = (-a)m'+(-b)m'+(-c)m'$$

ma

$$(-a)m' = a(-m') = am,$$
$$(-b)m' = b(-m') = bm$$
$$(-c)m' = c(-m') = cm$$

onde

$$(a+b+c)m = am+bm+cm$$

anche se m è negativo: s'intende che ai prodotti parziali am, bm, cm i segni saranno dati secondo la nota regola.

2° Sia m frazionario e positivo $\frac{p}{q}$; si dovrà, secondo la definizione di prodotto, prendere la q^a parte della somma $a+b+c$, cioè, dividere $a+b+c$ per q e poi ripetere il quoziente così ottenuto p volte di seguito. Ora una somma di numeri algebrici $a+b+c$ si divide per un numero intero q dividendo ciascun termine di essa per q; giacchè, da quanto già si è detto sopra, resulta immediatamente l'eguaglianza

$$\left(\frac{a}{q}+\frac{b}{q}+\frac{c}{q}\right).q = \frac{a}{q}.q+\frac{b}{q}.q+\frac{c}{q}.q = a+b+c$$

epperò $\frac{a}{q}+\frac{b}{q}+\frac{c}{q}$ è il quoziente di $a+b+c$ diviso per q.

Avremo dunque

$$(a+b+c)\left(\frac{p}{q}\right) = \overset{1}{\frac{a+b+c}{q}}+\overset{2}{\frac{a+b+c}{q}}+\ldots+\overset{p}{\frac{a+b+c}{q}}$$
$$=\left(\frac{a}{q}+\frac{b}{q}+\frac{c}{q}\right)+\left(\frac{a}{q}+\frac{b}{q}+\frac{c}{q}\right)+\ldots\left(\frac{a}{q}+\frac{b}{q}+\frac{c}{q}\right)$$

$$=\overset{1}{\frac{a}{q}}+\overset{2}{\frac{a}{q}}+\ldots+\overset{p}{\frac{a}{q}}+\overset{1}{\frac{b}{q}}+\overset{2}{\frac{b}{q}}+\ldots+\overset{p}{\frac{b}{q}}+\overset{1}{\frac{c}{q}}+\ldots+\overset{p}{\frac{c}{q}}$$
$$=\frac{a}{q}.p+\frac{b}{q}.p+\frac{c}{q}.p$$
$$=a.\frac{p}{q}+b.\frac{p}{q}+c.\frac{p}{q}$$

come si voleva.

Se m fosse negativo, si ragionerebbe in modo analogo a quello tenuto nel caso di m intiero e negativo.

È dunque dimostrata in generale la formula

1) $$(a+b+c)m = am+bm+cm$$

dalla quale, mediante l'inversione dei fattori, si ha subito l'altra.

2) $$m(a+b+c) = ma+mb+mc$$

28. Le due formule ora stabilite contengono le regole per la moltiplicazione di un polimonio per un monomio e viceversa, perchè un polimonio può sempre scriversi sotto la forma di una somma. — Così se si ha da moltiplicare il polimonio

$$a-b+c+d-e-f$$

pel monomio m, si avrà

1) $$(a-b+c+d-e-f)m \\ = [a+(-b)+c+d+(-e)+(-f)]m \\ = am+(-b)m+cm+dm+(-e)m+(-f)m \\ = am-bm+cm+dm-em-fm$$

onde si ha la regola:

Per moltiplicare un polinomio per un monomio, si moltiplica ciascun termine del polinomio pel monomio, applicando ad ogni prodotto parziale, che così si forma, le note regole pel prodotto di due monomi e aggiungendo poi algebricamente i prodotti parziali ottenuti.

Invertendo i fattori, si ha:

$$2) \qquad m(a-b+c+d-e-f) = \\ = ma-mb+mc+md-me-mf.$$

29. Se nella formula 1) del n. 28 si scambiano l'uno con l'altro i due membri, cioè, se si scrive

$$am-bm+cm+dm-em-fm=(a-b+c+d-e-f)m$$

essa ci fa vedere, che, quando i varii termini di un polinomio

$$am-bm+cm+dm-em-fm$$

presentano un fattore comune m, questo si può scrivere fuori di una parentesi dentro la quale si scrive il polinomio medesimo sopprimendo però in ogni termine il fattore m.

Così facendo, si dice che si raccoglie il numero m a fattore comune dei termini del polinomio.

Se, p. es., si ha il polinomio

$$-20a^4bc^3+12ab^2c-8a^2bc^3f:$$

questo si può scrivere

$$(-5a^3c^2+3b-2ac^2f).4abc.$$

30. In un polinomio si dicono *simili* quei termini che contengono le stesse lettere affette rispettivamente dagli stessi esponenti.

Così $15a^3b^2c$, $-7a^3b^2c$ sono termini simili.

I termini simili possono dunque differire solo per i coefficienti e per i segni.

Le cose dette precedentemente sul *raccoglimento a fattore comune* permettono sempre di sostituire un solo termine a più termini simili che possono presentarsi in un polinomio.

Sia il polinomio

$$8a^3bc-2a^3cb-5ab^2c^2+10ab^2c^2$$

dove sono dei termini simili.

Si può scrivere evidentemente

$$8a^3bc-2a^3bc=(8-2)\,a^3bc=6a^3bc$$

e

$$5ab^2c^2+10ab^2c^2=(5+10)\,ab^2c^2=15ab^2c^2$$

dimodochè il polinomio dato si riduce al seguente:

$$6a^3bc+15ab^2c^2.$$

Quando in un polinomio si hanno più termini simili si può così raccogliere a fattore comune la parte letterale di essi scrivendo entro la parentesi, fuor della quale si mette questo fattore, i termini stessi sopprimendone però il detto fattore: entro la parentesi si avranno dunque dei coefficienti sui quali sarà possibile eseguire le operazioni, e si potrà quindi alla parentesi stessa sostituire un unico coefficiente.

Questa operazione si chiama *riduzione dei termini simili*: e giacchè per essa un polinomio acquista una forma più semplice, così, sia nei polinomi da sottoporsi a delle operazioni di calcolo, sia nei resultati ottenuti da queste, sarà sempre opportuno, almeno in generale, fare tutte le possibili riduzioni di termini simili.

Moltiplicazione dei polinomi.

31. Abbiansi da moltiplicare i due polinomi

$$A) \qquad a-b+c+d-e-f$$
$$B) \qquad m+n-p+q-r.$$

Se alle lettere m, n, p, q, r si attribuissero valori particolari conosciuti, si potrebbero eseguire su questi le operazioni indicate, e si troverebbe così come valore del polinomio B) un numero β positivo o negativo: altrettanto vale pel polinomio A); è dunque concesso dire: rappresentiamo con una lettera β il valore del polinomio B), e β sarà indeterminato sinchè sono tali m, n, p, q, r; diverrà determinato, quando lo siano m, n, p, q, r.

Ciò posto, si indichi per un momento con β il valore del polinomio B): allora si ha

$$(a-b+c+d-e-f)\,(m+n-p+q-r) = \\ = (a-b+c+d-e-f).\,\beta$$

e così siamo condotti a moltiplicare un polinomio per un monomio.

Si ha quindi (n. 28):

$$(a-b+c+d-e-f)\,(m+n-p+q-r) = \\ = a\beta-b\beta+c\beta+d\beta-e\beta-f\beta$$

e sostituendo a β il polinomio $m+n-p+q-r$

$$\begin{aligned}(a-b+c+d-e-f)\,(m+n-p+q-r) &= \\ &= a(m+n-p+q-r) \\ &- b(m+n-p+q-r) \\ &+ c(m+n-p+q-r) \\ &+ d(m+n-p+q-r) \\ &- e(m+n-p+q-r) \\ &- f(m+n-p+q-r)\end{aligned}$$

e per l'ultima formula del n. 28

$$\begin{aligned}(a-b+c+d-e-f)\,(m+n-p+q-r) &= \\ &= am+an-ap+aq-ar \\ &- bm-bn+bp-bq+br \\ &+ cm+cn-cp+cq-cr \\ &+ \text{etc. etc.}\end{aligned}$$

Si ha dunque la seguente regola:

Per moltiplicare due polinomi, si moltiplica ciascun termine del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore applicando ogni volta le regole note pel prodotto di due monomi: e si fa infine la somma algebrica dei prodotti parziali ottenuti.

Osservazione. Se nella formula precedente si invertono i due membri, cioè si legge prima quello che ivi è 2° e poscia quello che ivi è 1° membro, si vede che si può enunciare anche quest'altra regola: *Se i termini di un polinomio sono ciascuno il prodotto di due fattori, e possono disporsi su tante righe orizzontali, in ciascuna delle quali ne comparisca un egual numero, e ponendo i termini delle differenti orizzontali gli uni al di sotto degli altri, resultano distribuiti anche sopra tante verticali, in modo che quelli appartenenti alla medesima orizzontale, come pure quelli appartenenti alla medesima verticale, presentino un fattore comune, allora il polinomio dato è il prodotto dei due polinomi aventi per termini, l'uno i fattori comuni che si raccolgono da tutte le orizzontali, l'altro quelli che si raccolgono da tutte le verticali.*

Moltiplicazione di un numero qualunque di polinomi.

32. Per fare il prodotto di un numero qualunque di polinomi, bisogna moltiplicare il primo per il se-

condo, poi il resultato per il terzo, e così di seguito. Poichè il prodotto eseguito di due polinomi è sempre un polinomio, basterà, qualunque sia il numero dei fattori, sapere moltiplicare due polinomi uno per l'altro.

Siano P_1, P_2, P_3, P_4, i polinomi dei quali si vuol fare il prodotto; moltiplicando P_1, per P_2, si otterrà un prodotto Q_1 i termini del quale sono (n. 31) i prodotti di tutti i termini di P_1 per tutti quelli di P_2, si moltiplicherà Q_1 per P_3, e si otterrà un prodotto Q_2 che sarà la somma dei prodotti di tutti i termini di Q_1 per tutti quelli di P_3; cioè la somma di tutti i prodotti di tre fattori, che si ottengono, prendendo un fattore tra i termini di P_1, uno tra i termini di P_2 e uno finalmente tra i termini di P_3. Quindi Q_2 si moltiplicherà per P_4. Il risultato Q_3 di questa moltiplicazione sarà la somma dei prodotti dei termini di Q_2 per quelli di P_4; cioè, di tutti i prodotti di quattro fattori presi rispettivamente nei polinomi P_1, P_2, P_3, P_4. Si potrà così continuare indefinitamente il ragionamento, e si vedrà che il *prodotto dei polinomi* P_1, P_2, P_3, ... P_n *è la somma di tutti i prodotti di* n *fattori, formati con un termine di* P_1, *uno di* P_2, *uno di* P_3, ... *e uno di* P_n.

Prodotto di due polinomi ordinati rapporto a una lettera.

33. Si dice che un polinomio è ordinato rapporto a una lettera, quando i termini sono disposti secondo l'ordine di grandezza degli esponenti di questa lettera; in modo che gli esponenti vadano continuamente diminuendo o aumentando dal primo fino all'ultimo.

Esempio. $8x^5+3x^4+2x^2-x-1$

è un polinomio ordinato rapporto a x.

Osservazione I. Se la lettera rapporto a cui si ordina, si trova in più termini collo stesso esponente, si riuniscono questi termini in un solo, e si riguarda come coefficiente di questa potenza della lettera ordinatrice, la somma dei fattori che la moltiplicano in questi differenti termini.

Esempio. Per ordinare il polinomio

$$a^5+4a^3b+2a^3c^2+a^2b+c,$$

rapporto ad a, si scrive nel modo seguente:

$$a^5+(4b+2c^2)a^3+ba^2+c.$$

Osservazione II. L'esponente che ha la lettera ordinatrice in un termine si chiama il grado di questo termine rispetto a questa lettera. Il grado di un polinomio rispetto ad una lettera è quello del termine di grado maggiore rispetto alla medesima.

Non vi è da mutar niente nella regola della moltiplicazione, quando si vuole applicarla a due polinomi ordinati rapporto a una stessa lettera. Faremo soltanto una osservazione sulla forma del risultato.

Quando sarà eseguito il prodotto, si potrà diminuire il numero dei suoi termini, riunendo quelli che sono simili; ma si può dimostrare, e questa osservazione è molto importante, che almeno due termini del prodotto sussisteranno senza riduzione. Questi due termini sono: il prodotto del primo termine del moltiplicando per il primo moltiplicatore, e il prodotto dell'ultimo termine del moltiplicando per l'ultimo del moltiplicatore.

Infatti: è evidente che il primo di questi prodotti conterrà la lettera ordinatrice a una potenza più alta,

e il secondo a una potenza meno alta di tutti gli altri. Non potranno adunque ridursi con essi, finchè la lettera ordinatrice rimarrà indeterminata.

Esempio. Se si moltiplica

$$x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$

per

$$x-1,$$

il termine x^8 e il termine -1, che nascono rispettivamente dalla moltiplicazione dei primi e degli ultimi termini tra loro, non si ridurranno con alcun altro. Eseguendo la moltiplicazione, si trova che il prodotto si riduce a questi due soli termini, gli altri distruggendosi due a due.

34. Il prodotto di due polinomi è, per ciò che abbiamo detto, composto almeno di due termini. Se i polinomi contengono più lettere, potranno ordinarsi successivamente rapporto a ciascuna di esse, e applicando la precedente osservazione, si otterrà un certo numero di termini che dovranno sussister senza riduzione nel prodotto. Se, per esempio, si moltiplicano i due polinomi seguenti, ordinati rapporto ad a,

$$a^4+a^3b^5+a^2b^3+b^4,$$
$$a^6+a^4b+a^3b^7+ab^2;$$

i termini $a^4\times a^6$, $b^4\times ab^2$ dovranno sussister senza riduzione nel prodotto. Ordinando i medesimi polinomi rapporto a b, i primi termini sono a^3b^5 e a^3b^7, e gli ultimi a^4 e a^6; i due termini $a^3b^5\times a^3b^7$ e $a^4\times a^6$ dovranno dunque sussistere senza riduzione nel resultato. Il termine $a^4\times a^6$ si presenta, come si vede, in due modi differenti, e abbiamo soltanto tre termini distinti che nel risultato non possono provare riduzione.

Alcune formule di uso frequente.

35. Applicando le regole esposte per la moltiplicazione si hanno immediatamente le formule

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$$

α)

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Queste formule sono ottenute lasciando a e b completamente indeterminati; sono dunque vere anche se si suppone b negativo $-b'$; e allora esse diventano

$$(a-b')^2=a^2+2a(-b')+(-b')^2=a^2-2ab'+b'^2$$

β)

$$(a-b')^3=(a-b')^2(a-b')=$$
$$=a^3+3a^2(-b')+3a(-b')^2+(-b')^3=a^3-3a^2b'+3ab'^2-b'^3$$

Le formule α) ci danno più propriamente lo sviluppo della 2ª e 3ª potenza di una somma di due termini: le β), quello della 2ª e 3ª potenza di una differenza.

Si ha pure immediatamente

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

che ci insegna a scomporre la differenza dei quadrati di due numeri in un prodotto di due fattori, dei quali uno è la somma, l'altro la differenza dei numeri stessi.

36. Faremo una applicazione del metodo di dimostrazione che spesso si adopera e si chiama *d'induzione matematica*, dimostrando il seguente teorema:

Il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati dei suoi differenti termini, aumentata di due volte la somma dei loro prodotti due a due.

La formula

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

già dimostrata ci dice intanto che il teorema è vero per un binomio.

Ora si fa subito vedere che di qui discende come conseguenza immediata la verità del teorema stesso anche per un trinomio.

Sia il trinomio $a+b+c$: si rappresenti per un momento con s la somma $a+b$: avremo

$$(a+b+c)^2=(s+c)^2=s^2+2sc+c^2:$$

sostituendo ad s il suo valore e sviluppando:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\&=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\end{aligned}$$

come si voleva.

Dall'esser vero il teorema per un trinomio con processo analogo si dedurrebbe che è pur vero per un quadrinomio e così di seguito.

Ora si può dimostrare in modo generale, che dall'esser vero il teorema per un certo polinomio discende sempre come conseguenza la verità del teorema stesso per un polinomio avente un termine di più; cioè si può far vedere che, se si ammette vero il teorema per un polinomio di n termini, ne segue che esso è pur vero per un polinomio di $n+1$ termini.

Sia

$$P=a_1+a_2+\ldots\ldots+a_r+\ldots\ldots+a_n$$

e

$$\begin{aligned}Q&=a_1+a_2+\ldots\ldots+a_r+\ldots\ldots+a_n+a_{n+1}\\&=P+a_{n+1}:\end{aligned}$$

si supponga vera la eguaglianza

$$\begin{aligned}P^2&=(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)^2=\\&=a^2_1+a^2_2+\ldots\ldots+a^2_n+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_{n-1}a_n.\end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}Q^2&=(P+a_{n+1})^2=P^2+2Pa_{n+1}+a^2_{n+1}=\\&=a^2_1+a^2_2+\ldots+a^2_n+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_{n-1}a_n+\\&\quad+2(a_1+a_2+\ldots+a_n)a_{n+1}\\&\quad+a^2_{n+1}\\&=a^2_1+a^2_2+\ldots+a^2_{n+1}+\\&\quad+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_{n-1}a_n+\\&\quad+2a_1a_{n+1}+2a_2a_{n+1}+\ldots+2a_na_{n+1}\\&=a^2_1+a^2_2+\ldots+a^2_n+a^2_{n+1}+\\&\quad+2(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_sa_r+\ldots+a_na_{n+1}).\end{aligned}$$

Si vede come il quadrato di Q contenga i quadrati di tutti i suoi termini, giacchè i quadrati dei primi n termini sono contenuti nel quadrato di P e vien poi aggiunto il quadrato del termine $(n+1)^o$; contiene inoltre tutti i doppi prodotti possibili perchè tutti quelli che si possono ottenere moltiplicando tra loro due a due i primi n termini, già si hanno nel quadrato di P, e si hanno poi ancora tutti quelli, che si possono formare col moltiplicare il termine $(n+1)^o$ per ciascuno dei primi n, nel termine $2Pa_{n+1}$; dimodochè il quadrato di Q è precisamente formato secondo l'enunciato del teorema.

Così è provata la sopraccennata dipendenza.

Ciò posto, rammentiamo che il teorema è effettivamente dimostrato vero per un binomio e per un trinomio: dalla dimostrazione generale ora esposta segue dunque che esso è vero anche per un polinomio di 4 termini; ma se è vero per un polinomio di 4 ter-

mini, è vero anche per uno di 5: quindi per uno di 6: ec. ec., il teorema è dunque effettivamente vero per un polinomio di un numero qualunque di termini

OSSERVAZIONE. Lo sviluppo della 2ª e della 3ª potenza di un polinomio si può dedurre agevolmente e anzi in modo più diretto, anche da quanto è stato detto al n. 322. Non ci tratteniamo intorno a ciò, bastandoci averne fatto cenno affinchè i giovani vi trovino occasione di un utile esercizio.

Esercizi.

1. Addizionare i polinomi:

1° $x^2-3xy+y^2+x+y-1, 2x^2+4xy-3y^2-2x-2y+3,$
2° $3x^2-5xy-4y^2+3x+4y-2, 6x^2+10xy+5y^2+x+y,$
3° $x^3-2ax^2+a^2x, x^3+3ax^2, 2x^3-ax^2,$
4° $yab-x^2, 3x^2-2ab, 2ax-2bx,$
5° $x^3+xy^2+xz^2-x^2y-xyz-x^2z,$
$x^2y+y^3+yz^2-xy^2-y^2z-xy2,$
$x^2z+y^2z+z^3-xyz-yz^2-xz^2.$

2. Sottrarre:

1° $2a-2b+3c-d$ da $5a-3b+4c-7d,$
2° $x^4+2x^3-2x^2+6x-1$ da $x^4+4x^3-2x^2+7x-1,$
3° $a-b-2(c-d)$ da $2(a-b)-c+d,$
4° $(a-b)x-(b-c)y$ da $(a+b)x+(b+c)y,$
5° $4x^3-2x^2-2x-14$ da $7x^3-2x^2+2x+2,$
e dal resultato sottrarre $2x^3-8x^2+4x+16.$

(Nei resultati di queste operazioni si dee fare la riduzione dei termini simili; e si avverta che a questo scopo è utile scrivere i polinomi da aggiungersi o da sottrarsi gli uni al disotto degli altri, come si fa pei numeri in Aritmetica, in modo che i termini simili sieno situati nella medesima colonna.)

3. Eseguire per ciascuno dei quattro casi seguenti le tre operazioni di addizione sottrazione e moltiplicazione:

$$\begin{array}{cccc} +7a^2b & +7a^2b & -7a^2b & -7a^2b \\ +3a^2b & -3a^2b & +3a^2b & -3a^2b \end{array}$$

4. Raccogliere $x-y$ a comun fattore dall' espressione:

$$(x-y)(3a-4b)-(4a-5b)(x-y)+(x-y)(2a-8b)$$

5. Raccogliere a fattore comune $x+y$ dall' espressione $(x^2-y^2)+(x+y)^2$.

6. Raccogliere a fattore comune a^2-b^2 dall' espressione $a^4-b^4-(b^2-a^2)$.

7. Decomporre in fattori il polinomio

$$ac-ad+bc-bd.$$

8. Porre sotto forma di prodotto il polinomio

$$m^2-mx-m+x.$$

9. Decomporre in tre fattori a^4-b^4; in quattro fattori a^8-b^8.

10. Moltiplicare

1° $3x^2-4y^2+5z^2$ per $2x^2y$
2° $x^2y^3-y^3z^4+z^4x^2$ per $x^2y^2z^2$
3° $x^3+6x^2+24x+60$ per $x^3-6x^2+12x+12$
4° $x-3, x-1, x+1$, e $x+3$
5° x^2-x+1, x^2+x+1, e x^4-x^2+1
6° $x^5-5x^4+13x^3-x^2-x+2$ per x^2-2x-2.

(Si avverta sempre nell'eseguire le moltiplicazioni, di scrivere i prodotti parziali, che debbono poi essere addizionati, in modo che i termini simili sieno nella medesima colonna: così si ottiene subito nel resultato finale la riduzione di essi).

11. Semplificare le espressioni

1° $(a+b+c+d)^2+(a-b-c+d)^2+(a-b+c-d)^2+$
$+(a+b-c-d)^2.$

2° $(a+b+c)^2-a(b+c-a)-b(a+c-b)-c(a+b-c).$

3° $(a^2+b^2+c^2)^2-(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$

12. Dimostrare che

1° $4xy(x^2+y^2)=(x^2+xy+y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2$

2° $4xy(x^2-y^2)=(x^2+xy-y^2)-(x^2-xy-y^2)^2$

3° $(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=$
$=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$

4° Essendo

$$a+b+c+d=A, \qquad a+b-c-d=B$$
$$a-b+c-d=C, \qquad a-b-c+d=D$$
$$ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$$

ne segue

$$AB(A^2+B^2)=CD(C^2+D^2)$$

5° $2y^2+3z^2+6t^2=(y+z+t)^2+(y-z-t)^2+(z-2t)^2.$

13. Dimostrare che il cubo di un polinomio è uguale alla somma dei cubi dei termini, più tre volte la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando ciascun termine per il quadrato di ciascuno degli altri, più sei volte la somma dei prodotti dei termini tre a tre.

(La dimostrazione si fa in modo analogo a quello tenuto per dimostrare lo sviluppo del quadrato).

14. Dimostrare che se due numeri interi a e b sono tutti e due pari o tutti e due impari, la semi-somma dei loro quadrati è una somma di due quadrati.

15. Se si fa nel polinomio

$$ax^2+2bxy+cy^2$$

la sostituzione

$$x=\alpha x'+\beta y'$$
$$y=\alpha' x'+\beta' y'$$

esso prenderà la forma

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2$$

e si avrà la relazione

$$B^2-AC=(b^2-ac)(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2.$$

16. Di quanto varia il prodotto di due fattori eguali, se l'un fattore aumenti di n, e l'altro diminuisca di altrettanto?

17. Di quanto varia il prodotto di due numeri, se a ciascuno dei due fattori si aggiunge o si toglie 1?

18. Provare che

1° $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(a-b+c)^3-(a+b-c)^3=$
$=24abc$

2° $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$

3° $(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b^3)+a^3+b^3+c^3=$
$=6abc$

4° $[(ax+by)^2+(ay-bx)^2][(ax+by)^2-(ay+bx)^2]=$
$=(a^4-b^4)(x^4-y^4)$

5° $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a).$

CAPITOLO III.

Divisione algebrica.

37. *Dividere un numero* a *per un numero* b, a *e* b *essendo numeri algebrici significa*, come in Aritmetica, *trovare un numero* c *che moltiplicato per* b *riproduca* a.

È questa l'operazione inversa della moltiplicazione, perchè dato il prodotto a di due fattori b e c e uno dei fattori b, essa si propone di trovare l'altro c.

Si vede facilmente che *essa è sempre possibile, cioè, che presi comunque* a *e* b *nella serie*

$$A) \quad \ldots\ldots -\frac{3}{n}, -\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots\ldots$$

dove n *è intero qualunque, e escludendo che sia* b = 0, *sempre esiste nella medesima serie il numero* c *tale che sia* bc = a.

Intanto, per quanto dicemmo intorno ai prodotti, il valore assoluto di a è il prodotto dei valori assoluti di b e di c: quindi il valore assoluto di c è il quoziente, secondo la definizione data, del valore assoluto di a diviso per quello di b: ma nella serie A) precedente si trovano sempre, scegliendo n opportunamente, due numeri, l'uno positivo, l'altro negativo aventi un valore assoluto dato arbitrariamente: dunque vi si trovano anche i due numeri aventi ciascuno un valore assoluto eguale a quello del quoziente di a diviso per b; di questi due numeri poi aventi il detto

valore assoluto, sarà quoziente di a per b il positivo o il negativo, secondochè a e b hanno lo stesso segno o segni contrari.

Ciò resulta subito dalla regola dei segni data nella moltiplicazione.

Giacchè deve essere

$$a = b.c$$

se a e b sono ambedue positivi, è chiaro che c dovrà esser positivo: se a e b sono negativi, c dovrà pure essere positivo. Se poi a è positivo, b negativo, c dovrà essere negativo perchè altrimenti non potrebbe essere a positivo: e se infine a è negativo, b positivo, sarà c negativo, perchè ci vogliono due fattori di segno contrario per avere un prodotto negativo.

È provato così, come si voleva, che il quoziente di a per b, esiste sempre nella serie A): e raccogliendo le cose qui dette, si può enunciare la regola:

Il quoziente di un numero algebrico a *per un altro* b, *è un numero* c *eguale in valore assoluto al quoziente del valore assoluto di* a *per quello di* b, *e di segno positivo o negativo secondochè* a *e* b *hanno lo stesso segno o segni contrari.*

Osservazione I. Abbiamo escluso che sia $b = 0$, perchè, comunque si prenda n, non si può pensare nella serie A) un numero che moltiplicato per *zero* produca a, essendo a diverso da *zero;* sappiamo infatti (23) che il prodotto di un numero qualunque b per lo *zero* è uguale a *zero*.

Il quoziente di un numero a, diverso da *zero*, per sè stesso è uguale all'unità, perocchè si ha manifestamente

$$a.1 = a;$$

ma non è più così, se sia $a = 0$; come ora abbiamo

rammentato, se b indica un numero qualunque della serie A) si ha

$$0.b=0,$$

quindi il quoziente $\frac{0}{0}$ non ha un unico valore determinato.

Osservazione II. Se è $a=a'$, $b=b'$, è manifesto che si ha

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

escluso, s'intende, che sia $b=b'=0$, a' ed a' essendo diversi da *zero:* e che sia $b=b'=0$ e insieme anche $a=a'=0$.

38. *Il quoziente di due numeri algebrici non muta moltiplicando e dividendo entrambi per uno stesso numero diverso da zero.*

È, come si vede, la proprietà fondamentale già posta pei quozienti in Aritmetica.

Infatti non cambia il valore assoluto del quoziente di due numeri algebrici col moltiplicarli o dividerli per uno stesso numero, perchè esso è il quoziente dei valori assoluti dei numeri dati: quindi vale per esso la proposizione dimostrata in Aritmetica: non cambia il segno, perchè moltiplicando o dividendo i due numeri per uno stesso numero, o conservano ambedue i segni che hanno, o ambedue li cangiano: sono quindi tra loro, rispetto ai segni, sempre nella stessa relazione tanto prima della moltiplicazione o divisione per uno stesso numero, quanto dopo di essa; e da ciò solo dipende il segno del quoziente.

Mediante i ragionamenti analoghi a quelli fatti in Aritmetica si dimostrerebbero veri anche pei numeri algebrici i seguenti teoremi:

1° *Per dividere un prodotto di numeri algebrici per uno dei suoi fattori, basta sopprimere questo fattore.*

2° *Per dividere un prodotto per un numero basta dividere uno dei fattori del prodotto per questo numero.*

3° *Per dividere un numero pel prodotto di molti fattori, è sufficiente dividerlo successivamente per ciascuno di essi.*

4° *Per dividere due potenze di uno stesso numero, basta sottrarre gli esponenti.*

Divisione dei monomi.

39. Giacchè un monomio è in sostanza un numero algebrico, vale intanto per la divisione dei monomi la regola precedente: cioè *si divideranno l'uno per l'altro i due monomi dati facendo astrazione dai segni, e si darà poi al quoziente ottenuto il segno, secondo quella regola.*

Dobbiamo dunque occuparci della divisione di due monomi considerandoli come non preceduti da alcun segno.

Un monomio p. es. $40a^3b^2c^4$ è un prodotto, ove le lettere differenti a, b, c possono considerarsi, sinchè rimangono indeterminate, come numeri ciascuno dei quali non ha alcun divisore comune con numeri rappresentati da altre lettere: e quindi si potranno riguardare come fattori *primi* del monomio: e se il coefficiente numerico di questo è effettivamente scomposto nei suoi fattori primi, il monomio potrà considerarsi come un prodotto di fattori primi.

Allora, ragionando come si fa in Aritmetica, si dimostra il seguente teorema:

Perchè due monomi sieno divisibili l'uno per l'altro

cioè, perchè esista un monomio che ne rappresenti il quoziente, è necessario e sufficiente che il dividendo contenga tutti i fattori primi del divisore elevati ad esponenti rispettivamente eguali o superiori a quelli che essi hanno nel divisore medesimo.

Questa condizione è necessaria: pongasi infatti che i due monomi dati sieno divisibili, e si immagini che il dividendo, il divisore, e il quoziente sieno, nel senso che noi abbiamo detto, risoluti in fattori primi; il dividendo essendo il prodotto del divisore pel quoziente, è il prodotto di tutti i fattori di questi due numeri. Tutti i fattori del divisore debbono dunque trovarsi nel dividendo elevati rispettivamente ad esponenti per lo meno eguali a quelli, che essi hanno nel divisore medesimo.

Questa condizione è poi sufficiente: se infatti essa è sodisfatta, prendendo tutti quei fattori del dividendo che non appartengono al divisore, e inoltre tutti quegli altri, che sono comuni al dividendo e al divisore, ciascuno con un esponente eguale all'eccesso dell'esponente che esso ha nel dividendo sopra quello che ha nel divisore, omettendo affatto i fattori comuni aventi esponenti eguali nel dividendo e nel divisore si potrà di tutti i fattori così scelti formare un prodotto unico, che moltiplicato pel divisore riproduce il dividendo; questo prodotto sarà appunto il monomio quoziente.

Sia da dividersi il monomio $40a^3b^2cd$ pel monomio $8ab^2c$, ossia risolvendoli in fattori primi

$$5.2^3.a^3b^2cd \quad \text{per} \quad 2^3.a.b^2.c.$$

Si vede subito che sono divisibili e che il quoziente, secondo quanto si è detto, sarà il monomio $5a^2d$.

Se si osserva che, operando sui coefficienti numerici dei due monomi da dividersi nel modo che si è esposto nella precedente dimostrazione e come si è fatto nell'esempio ora dato, non si fa altro se non la divisione (Vedi Aritmetica) dei coefficienti stessi; così, raccogliendo le cose dette, si può enunciare la regola seguente:

Per dividere un monomio per un altro, quando sieno sodisfatte le condizioni di divisibilità; 1° si divide il coefficiente numerico del dividendo per quello del divisore: 2° le lettere comuni al dividendo e al divisore si scrivono come fattori del monomio quoziente dando a ciascuna un esponente eguale all'eccesso di quello che essa ha nel dividendo su quello che ha nel divisore: 3° le lettere che si trovano nel dividendo e non nel divisore si trascrivono come esse sono, a fattori nel quoziente: 4° le lettere comuni al dividendo e al divisore e aventi esponenti eguali, si ommettono: 5° al monomio così composto si dà il segno secondo la nota regola.

40. Quando qualcuna delle condizioni di divisibilità non è sodisfatta, allora il quoziente dei due monomi si può solamente indicare scrivendoli l'uno al disopra dell'altro separati da una lineetta, dando così origine ad un'espressione come la seguente:

$$\frac{40a^4bcf^3h^4}{35f^2g^4b^2m}$$

che si chiama *monomio frazionario* e anche *frazione algebrica a termini monomi.*

I monomi considerati sin qui, e nei quali non era indicata alcuna divisione, si chiameranno d'ora innanzi, per distinguerli, *monomi interi:* interi di forma, s'intende, chè i valori da attribuirsi alle lettere in essi possono essere qualunque.

Un *monomio frazionario* si può qualche volta sem-

plicizzare applicando i due teoremi: *un quoziente di numeri algebrici non muta, dividendo ambedue i termini per uno stesso numero;* e l'altro: *per dividere un prodotto per uno dei suoi fattori, basta sopprimere questo.*

Di qui deriva subito che si possono sopprimere i fattori comuni al dividendo e al divisore: e così l'espressione precedente si ridurrebbe all'altra:

$$\frac{8a^4cfh^3}{7g^4bm}$$

Quando una frazione con i termini monomi è stata ridotta alla più semplice espressione, non deve più contenere nessuna lettera comune ai due termini, perchè altrimenti la si potrebbe sopprimere in ambedue elevata ad un esponente eguale al minore di quelli che ha nei due termini.

Divisione di un polinomio per un monomio.

41. *Perchè un polinomio intero,*[1] *i cui termini sieno tutti dissimili un dall'altro, sia divisibile per un monomio intero cioè si possa esprimere il quoziente di una siffatta divisione con un altro polinomio intero, è necessario e sufficiente che ciascun termine del polinomio dividendo sia divisibile pel monomio divisore.*

Sia $A+B+C+D+E$ il polinomio dato; A, B, C, D, E, rappresentano i differenti termini positivi e negativi del polinomio stesso: sia M il monomio divisore.

Pongasi primieramente che ciascuno dei termini

[1] Un polinomio dicesi intero, se in esso non è indicata alcuna divisione.

A, B, C, D, E, sia divisibile per M, e si abbia

$$\frac{A}{M}=a,\ \frac{B}{M}=b,\ \frac{C}{M}=c,\ \frac{D}{M}=d,\ \frac{E}{M}=e,$$

a, b, c, d, e essendo monomi interi: si avrà l'identità

$$A+B+C+D+E=(a+b+c+d+e)M$$

quindi $a+b+c+d+e$ è un polinomio intero che è il quoziente di $A+B+C+D+E$ diviso per M.

Ciò prova che la condizione posta è sufficiente; ma è anche necessaria, perchè se supponiamo che il polinomio $A+B+C+D+E$ sia divisibile per M, ciò significa che esiste un polinomio intero che moltiplicato per M produce $A+B+C+D+E$; ora tale polinomio, supposto, come si può, che non abbia termini simili, avrà tanti termini dissimili un dall'altro quanti ne ha il dividendo, perchè dovendosi ottenere nel prodotto di detto polinomio per M i termini A, B, C, D, E, ed essendo questi dissimili, possono essi, solo provenire dal moltiplicare per M altrettanti termini dissimili: dunque il detto polinomio quoziente sarà della forma

$$a+b+c+d+e$$

a, b, c, d, e indicando monomi interi: e si avrà identicamente

$$A+B+C+D+E=aM+bM+cM+dM+eM:$$

ma i termini A, B, C, D, E,, come pure gli altri aM, bM, cM, dM, eM, sono tutti dissimili fra loro, dunque quella identità può sussistere solo quando i termini del polinomio a sinistra sieno identici ciascuno a ciascuno a quelli del polinomio a destra: si hanno perciò le identità

$$A=aM,\ B=bM,\ C=cM,\ D=dM,\ E=eM$$

le quali provano che A, B, C, D, E, sono appunto divisibili per M.

Così è provato che la condizione è anche necessaria.

Dalla dimostrazione ora fatta discende immediatamente anche la regola per eseguire effettivamente, quando sia possibile, la divisione di un polinomio per un monomio:

Si divide ciascun termine del dividendo pel monomio divisore; i quozienti così ottenuti sono i differenti termini del polinomio divisore.

Divisione dei polinomi.

42. Il più delle volte il quoziente di due polinomi si può solamente indicare scrivendo l'uno al di sopra dell'altro e separandoli con una linea, ed è impossibile trasformare una tale espressione in altra più semplice.

Quando però il dividendo e il divisore sono polinomi *interi* rispetto a una medesima lettera in essi contenuta, si può, *qualche volta*, porre il quoziente sotto la forma di un nuovo polinomio *intero* rispetto alla medesima lettera.

Un polinomio dicesi *intero* rispetto ad una lettera in esso contenuta, quando in nessun termine essa comparisce come divisore. — Gli altri fattori poi che in un termine possono moltiplicare la potenza di questa lettera, che ivi comparisce e di cui essi nel loro insieme costituiscono il *coefficiente numerico* o *letterale*, potranno anche essere frazionari.

Prendiamo i due polinomi *interi* rispetto a una lettera ordinati secondo le potenze decrescenti di essa, e supponiamo che esista un terzo polinomio intero rispetto alla medesima lettera che ne rappresenti il quoziente. — Vogliamo vedere come si debba operare per trovare effettivamente questo polinomio, del quale presupponiamo l'esistenza.

Incominceremo col ragionare su un esempio particolare, e stabiliremo poi la regola generale.

Si debba dividere

$$A=x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1 \text{ per } B=x^2+x-1$$

e supponiamo che esista un terzo polinomio C intero rispetto alla lettera x che moltiplicato per B riproduca A e si immagini anche il polinomio C ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x.

Giacchè deve essere identicamente

$$A=B.C$$

così per quanto si sa dalla moltiplicazione dei polinomi ordinati (33), il 1° termine x^5 di A deve essere il prodotto del 1° termine x^2 di B pel 1° termine di C; dunque questo 1° termine di C è il quoziente del 1° termine di A pel 1° termine B, ed, è

$$x^3=\frac{x^5}{x^2}.$$

Disponiamo l'operazione che prendiamo a fare, scrivendo il divisore alla destra del dividendo e separandoli con una linea verticale nel modo seguente:

$$\begin{array}{l|l}
x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1 & x^2+x-1 \\ \cline{2-2}
x^5+x^4-x^3 & x^3+5x^2+1 \\ \cline{1-1}
\quad 5x^4+5x^3-4x^2+x-1 & \\
\quad 5x^4+5x^3-5x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad x^2+x-1 & \\
\qquad\qquad x^2+x-1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Trovato il 1° termine del quoziente, che scriveremo sotto il divisore, si moltiplichi questo 1° termine x^3 pel divisore e si sottragga il prodotto dal dividendo: si ottiene il resto $5x^4+5x^3-4x^2+x-1$.

Questo resto che indicheremo con A_1 è il prodotto del divisore per la parte di quoziente che ancora rimane a trovare oltre il 1° termine x^3.

Si indichi questa parte di quoziente con C_1: allora il quoziente C si potrà rappresentare con x^3+C_1: e sostituendo nella

$$A=B.C$$

si ottiene

$$A=B(x^3+C_1)$$

ovvero

$$A=Bx^3+BC_1$$

d'onde

$$A-Bx^3=BC_1$$

ma $A-Bx^3$ non è altro se non A_1: dunque

$$A_1=B.C_1$$

e quindi C_1 è il quoziente di A_1 per B: come si voleva provare.

Ecco dunque che, per trovare C_1 cioè la parte di quoziente che ancora rimane oltre x^3, siamo condotti a dovere cercare il quoziente di

$$A_1=5x^4+5x^3-4x^2+x-1 \text{ per } B=x^2+x-1$$

cioè ad una divisione che si presenta nelle stesse condizioni di quella di A per B.

A_1, che si chiama 1° dividendo parziale, e B divisore sono ordinati secondo le potenze decrescenti

della lettera x, precisamente come lo erano A e B; C_1 loro quoziente è supposto ordinato pure secondo le potenze descrescenti di x, perchè esso è la parte di C che segue il termine x^3; dunque ripetendo lo stesso ragionamento fatto prima si ha, che il 1° termine di C_1 cioè il 2° termine di C si trova dividendo il 1° termine di A_1 pel 1° termine di B: questo 1° termine di C_1 ovvero 2° di C è dunque

$$5x^2=\frac{5x^4}{x^2}$$

Trovato questo termine $5x^2$, si moltiplichi per esso il divisore e si sottragga il prodotto da A_1: si ottiene il resto $A_2=x^2+x-1$.

Questo resto, che chiameremo 2° dividendo parziale, è il prodotto del divisore per la parte del quoziente C_1 che ancora rimane a trovare oltre il termine $5x^2$ ovvero per la parte del quoziente C che ancora rimane oltre i termini x^3 e $5x^2$.

Ciò si prova subito ragionando come precedentemente; se si indichi con C_2 questa parte di quoziente, che ancora rimane a trovare, si avrà

$$C_1=5x^2+C_2$$
$$C=x^3+5x^2+C_2$$

e inoltre

$$A_2=B.C_2:$$

quindi per trovare C_2 siamo condotti a dividere A_2 per B, cioè nuovamente a una divisione che si presenta nelle stesse condizioni di quella di A per B, e di quella di A_1 per B, che abbiamo incontrato prima: dunque troveremo il 1° termine di C_2, che sarà il 2° di C_1 o anche il 3° di C, dividendo il 1° termine di A_2

pel 1° termine di B: il termine cercato sarà così

$$1=\frac{x^2}{x^2}$$

Moltiplicando ora il divisore per questo termine trovato e sottraendo il prodotto da A_2 si ottiene per resto 0: onde si conclude che il polinomio

$$x^3+5x^2+1$$

è tale che moltiplicato pel divisore B riproduce il dividendo A: giacchè col togliere da A come si è fatto prima il prodotto di B per x^3, poi dal resto A_1, il prodotto di B per $5x^2$, infine dal nuovo resto A_2 il prodotto di B per 1, siamo venuti in sostanza a sottrarre da A il prodotto di B per tutto il polinomio

$$x^3+5x^2+1\,;$$

e l'aver trovato come resto 0, ciò significa manifestamente che è

$$A=B(x^3+5x^2+1):$$

dunque è

$$C=\frac{A}{B}=x^3+5x^2+1.$$

43. Se invece dei due polinomi A e B ora considerati, se ne hanno due altri qualunque interi rispetto a una medesima lettera, è manifesto che si potrà per essi ripetere identicamente tutto il ragionamento ora fatto; giacchè esso è interamente fondato su ciò, che i polinomi, che si considerano, sieno ordinati secondo le potenze decrescenti di una stessa lettera, ciò che può sempre ottenersi; e inoltre sulla presupposizione che esista il polinomio-quoziente.

Il ragionamento è dunque generale, e ci conduce a dire:

Dati due polinomi interi rispetto alla stessa lettera, se esiste un polinomio intero rispetto alla stessa lettera, che sia il quoziente dell'uno diviso per l'altro, lo si può determinare operando secondo la regola seguente:

1° *Si ordinano i polinomi dati secondo le potenze decrescenti della lettera, rispetto a cui sono interi.*

2° *Si divide il 1° termine del dividendo pel 1° termine del divisore: il quoziente così ottenuto sarà il 1° termine del quoziente dei due polinomi.*

3° *Si moltiplica il divisore per questo 1° termine del quoziente e si toglie il prodotto dal dividendo.*

4° *Si ordina il residuo, come sono stati ordinati i due polinomi, e si divide il 1° termine di questo residuo pel 1° termine del divisore. Così si ottiene il 2° termine del quoziente.*

5° *Pel nuovo termine del quoziente si moltiplica il divisore e si sottrae il prodotto dal detto residuo.*

6° *Ordinato il nuovo residuo ottenuto, se ne divide il 1° termine pel 1° del divisore: ciò dà il 3° termine del quoziente.*

7° *Con questo 3° termine si opera come si è operato* col 2°, e così via si continua sino a che non si trovi un resto nullo.

44. Il ragionamento precedente suppone essenzialmente, che il quoziente possa esprimersi con un polinomio; dimodochè parrebbe che questa regola fosse da applicarsi, solo quando, già prima si sapesse che il polinomio quoziente esiste: ma è facile accorgersi, che non dobbiamo affatto preoccuparci di questa questione: si applicherà la regola, senzachè si sia già prima in qualche modo riconosciuto che il polinomio

quoziente esiste; vuol dire, che, se esso esiste, la regola data ce lo farà effettivamente trovare; se poi non esiste, a un certo punto dell'operazione avremo sempre il modo di riconoscere ciò, e potremo tralasciare di continuarla.

Vediamo come ciò accada.

Osserviamo che quando il polinomio quoziente esiste, dividendo, divisore e quoziente essendo ordinati per le potenze discendenti di una stessa lettera, come il 1° termine del dividendo è il prodotto del 1° termine del divisore pel 1° del quoziente, così, per quanto si sa dalla moltiplicazione dei polinomi ordinati, anche l'ultimo termine del dividendo è il prodotto dell'ultimo del divisore per l'ultimo del quoziente: dunque quest'ultimo termine si ha dividendo l'ultimo del dividendo per l'ultimo del divisore.

Quindi, perchè una divisione sia possibile è necessario intanto che: *il primo e l'ultimo termine del dividendo sieno rispettivamente divisibili pel primo e per l'ultimo termine del divisore.*

Inoltre, *il primo termine di ciascun resto, che via via si ottiene nel processo dell'operazione sopra descritta, deve essere divisibile pel primo termine del divisore,* perchè il primo termine di un resto è il prodotto del primo termine del divisore per un certo termine del quoziente.

Infine, *dopo un certo numero di divisioni parziali successive deve ottenersi al quoziente un termine, che moltiplicato pel divisore, riproduca il dividendo parziale dal quale fu ottenuto:* cosicchè si abbia di qui un resto nullo.

Se queste condizioni sono sodisfatte, è manifesto che l'operazione suesposta ci darà effettivamente un polinomio, che moltiplicato pel divisore riproduce il dividendo, giacchè appunto nel corso dell'operazione

noi veniamo a togliere dal dividendo successivamente i prodotti del divisore pei singoli termini ottenuti al quoziente, cioè, in sostanza, togliamo dal dividendo il prodotto del divisore pel polinomio composto con questi termini, e se infine il resto è zero, vuol dire che siffatto polinomio è veramente il quoziente cercato.

D'altronde, se una delle due prime anzidette condizioni non si verifica, l'operazione della divisione, a quel punto in cui ciò si avverte, non potrà più continuarsi; esse sono dunque condizioni necessarie perchè possa trovarsi un polinomio che rappresenti il quoziente, ed è evidente di per sè la necessità della terza condizione.

45. Nel fare dunque, come sopra si è insegnato, la divisione di un polinomio per un altro, dovremo arrestarci e concludere che non esiste un polinomio quoziente, appena incontreremo un dividendo parziale il cui 1° termine non sia divisibile pel 1° termine del divisore, il che accadrà solo quando quello contenga la lettera ordinatrice a un grado minore di questo, giacchè noi vogliamo che il quoziente sia intero rispetto alla lettera ordinatrice e del resto i coefficienti di questa ne' varii termini possono essere qualunque: ma l'impossibilità dell'operazione sarà spesso più facilmente riconosciuta, se prima ancora d'incominciarla, dividendo l'ultimo termine del dividendo per l'ultimo del divisore determineremo il termine, che dovrebbe essere l'ultimo del polinomio quoziente quando questo esistesse. Ottenuto un tale termine, se poi nel formare i successivi termini del quoziente col processo indicato, se ne incontrerà uno, che sia rispetto alla lettera ordinatrice di grado eguale a quello, senza essergli identico: ovvero anche uno di grado inferiore, si potrà subito concludere che il polinomio quoziente

non esiste, giacchè, i dividendi parziali successivi vanno diminuendo sempre di grado, e quindi anche i termini che si trovano al quoziente, sono via via di grado minore: epperò se, dopo incontrato un termine come quello anzidetto, si continuasse ancora l'operazione, si otterrebbero termini di grado sempre più basso: sarebbe dunque impossibile ottenere quello che dovrebbe essere l'ultimo del polinomio quoziente, se questo esistesse.

46. Diamo qui un esempio; sia da dividere

$$x^5+5x^4+2x^3 \text{ per } x^3+x.$$

$$\begin{array}{l|l} x^5+5x^4+2x^3 & x^3+x \\ \quad 4x^4+2x^3 & x^2+4x^2. \end{array}$$

Il primo termine del quoziente è x^2, quoziente della divisione di x^5 per x^3. Moltiplicando x^5 per il divisore e sottraendo il prodotto dal dividendo, il resto è $4x^4+2x^3$; $4x^4$ diviso per x^3 dà per quoziente $4x^2$ che dovrebbe essere il secondo termine del quoziente. Ma, senza andare più avanti, si vede che l'operazione non potrà riuscire, perchè l'ultimo termine del quoziente dovrebbe essere il quoziente della divisione di $2x^3$ per x, cioè $2x^2$, e quindi se esistesse un quoziente esatto, il termine $4x^2$ non potrebbe farne parte.

47. Osservazione. Le regole precedenti non suppongono in alcun modo che le potenze della lettera ordinatrice abbiano coefficienti numerici. Questi coefficienti possono essere letterali e anche composti di più termini, senza che vi sia nulla da cangiare nei ragionamenti e nelle regole.

Esempio. Dividere

$$\begin{array}{l|l} a^5+(a^2-2c^2)x^3-(a^2-c^2)x^2-a^3-2a^2c^2-a^2c^2 \text{ per } x^3-a^2-c^2. \\ \quad (2a^2-c^2)x^3-(a^2-c^2)x^2-a^3-2a^2c^2-a^2c^2 & x^2-a^2-c^2 \\ \qquad (a^2+a^2c^2)x^2-a^3-2a^2c^2-a^2c^2 & a^2+(2a^2-c^2)x+a^2+a^2c^2 \end{array}$$

Il primo termine del quoziente, è il quoziente della divisione di x^5 per x^3, ossia x^2. Moltiplicando x^2 per il divisore, e sottraendo il prodotto dal dividendo, resta

$$(2a^2-c^2)x^3-(a^2-c^2)x^2-a^3-2a^2c^2-a^2c^2.$$

Il secondo termine del quoziente è $(2a^2-c^2)x^2$, quoziente della divisione di $(2a^2-c^2)x^3$ per x^3. Moltiplicando il divisore per $(2a^2-c^2)x^2$, e sottraendo il prodotto dal dividendo, resta

$$(a^2+a^2c^2)x^2-a^3-2a^2c^2-a^2c^2.$$

Il terzo termine del quoziente è $a^2+a^2c^2$, quoziente della divisione di $(a^2+a^2c^2)x^2$ per x^3. Sottratto il prodotto di $a^2+a^2c^2$ per il divisore dall'ultimo dividendo parziale resta 0; dunque la divisione si fa esattamente, il quoziente è

$$x^2+(2a^2-c^2)x^2+a^2+a^2c^2.$$

Esempio 2°. Si debba dividere

$$(a^4-b^4)x^4+(a^3b^4-a^4b^3-a^3b-b^4a)x^3$$
$$+(a^2b^4-a^4b^2+a^2b^3+b^3+a^2)x^2-(a^3b^4+b^3a^3)x+b^3a^4,$$

per

$$(a^2+b^2)x^2-a^2bx+a^3.$$

Il primo termine del quoziente è

$$\frac{(a^4-b^4)x^4}{(a^2+b^2)x^2}=(a^2-b^2)x^2;$$

continuando l'operazione, si vedrà che il calcolo di ogni termine del quoziente richiede la divisione di due polinomi algebrici ordinati rapporto ad a, il divisore essendo sempre a^2+b^2. Effettuando i calcoli, si troverà per quoziente

$$(a^2-b^2)x^2-ab^2x+b^3.$$

Delle divisioni che non si possono fare esattamente.

48. Quando due polinomi non hanno per quoziente un terzo polinomio, si dice che non sono divisibili uno per l'altro. Ma si può dare, in generale, all'espressione del loro quoziente, una forma più semplice di quella che risulterebbe dalla sola indicazione dell'operazione. Infatti, si può dimostrare il teorema seguente:

Se due polimoni interi A *e* B *contengono una stessa lettera* x, *si può sempre porre il quoziente* $\frac{A}{B}$, *sotto la forma di un polinomio* Q *intero rapporto a* x, *aumentato di una espressione frazionaria* $\frac{R}{B}$ *che ha il denominatore eguale a quello di* $\frac{A}{B}$, *e per numeratore un polinomio* R, *in* x *di grado inferiore a* B.

Applichiamo ai due polinomi A e B il metodo di divisione esposto (43), fino a che si trovi un resto di grado minore di quello di B; i termini che così si otterranno al quoziente costituiranno un polinomio, che indicheremo con Q, *intero* rispetto a x, giacchè i dividendi parziali dai quali quei termini derivano sono tutti di grado non inferiore a B, cioè il 1° termine in ciascuno di tali dividendi contiene x a un grado più alto o eguale a quello del 1° termine di B, e quindi la divisione di quello per questo, se anche produrrà un termine in cui rimanga indicata qualche divisione, nel divisore di questa però non sarà mai contenuta la x.

Il dividendo parziale di grado inferiore a B, a cui si perviene dopo un certo numero di divisioni, si indichi con R; esso è ciò che resta del dividendo A, dopo

aver sottratti successivamente i prodotti di B per i diversi termini di Q; R è dunque eguale ad $A-BQ$, e si ha

$$A=BQ+R,$$

onde

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$$

il quoziente $\frac{A}{B}$ è quindi posto sotto la forma enunciata.

Osservazione. Se A fosse di grado minore di B, il quoziente Q sarebbe eguale a zero, e lo stesso dividendo sarebbe il resto.

Esempi. Si trova col metodo precedente,

$$\frac{x^5-2x^3+x-1}{x^2-3}=x^3+x+\frac{4x-1}{x^2-3},$$

$$\frac{2x^4+3x^2-5x+7}{7x^3+x-1}=\frac{2}{7}x+\frac{\frac{19}{7}x^2-\frac{33}{7}x+7}{7x^3+x-1}$$

Osservazione. Quando si applica al quoziente di due polinomi A e B la trasformazione precedente, si dà al polinomio intero Q il nome di quoziente *intero*, e al numeratore R della frazione $\frac{R}{B}$ quello di *resto* della divisione.

Divisione dei polinomi ordinati secondo le potenze crescenti di una lettera.

49. In alcuni casi, invece di ordinare un polinomio secondo le potenze decrescenti della lettera ordinatrice, si dispongono i termini in modo che l'esponente di questa lettera vada aumentando dal primo termine

fino all'ultimo. Si può fare la divisione di due polinomi ordinati in questo modo e trovare i diversi termini del quoziente, cominciando da quelli nei quali la lettera ordinatrice ha il minore esponente. La teorica è precisamente eguale a quella che abbiamo esposta per il modo ordinario, ma quando l'operazione non è possibile esattamente, cioè, quando non esiste un polinomio *intero* in x che esprima esattamente il quoziente, allora, come si sa, si rappresenterà questo scrivendo il dividendo al di sopra del divisore e separandoli con una lineetta, e non sarà più possibile, come dimostreremo, trasformare tale espressione del quoziente nel modo, come nel n. 48 si è veduto che si può, quando si prendono i due polinomi ordinati secondo le potenze discendenti.

Diamo un esempio di questo modo di fare l'operazione, riprendendo la divisione effettuata al paragrafo (42). Ordinando i due polinomi, secondo le potenze crescenti di x,

$$\begin{array}{r|l} -1+x-4x^2+4x^3+6x^4+x^5 & -1+x+x^2 \\ \cline{2-2} -5x^2+4x^3+6x^4+x^5 & 1+5x^2+x^3 \\ -x^3+x^4+x^5 & \end{array}$$

diremo: poichè il dividendo è il prodotto del divisore per il quoziente, il termine che in esso contiene x al più basso esponente deriva senza riduzione dal prodotto dei termini analoghi del divisore e del quoziente, e quindi, il primo termine del quoziente è il quoziente del primo termine del dividendo per il primo termine del divisore.

Dimostreremo come abbiamo fatto (42) che sottraendo dal dividendo il prodotto del divisore per il primo termine del quoziente che sarà il quoziente di -1 diviso per -1, cioè 1, si ottiene un resto

$-5x^2+4x^3+6x^4+x^5$, che diviso per il divisore darà i termini che devono completare il quoziente.

Il primo di questi, per le ragioni date sopra, sarà eguale al quoziente di $-5x^2$ diviso per -1, cioè a $5x^2$.

Sottraendo dal primo resto il prodotto di $5x^2$ moltiplicato per il divisore, si ha un secondo resto $-x^3+x^4+x^5$, che diviso per il divisore darà gli altri termini del quoziente. Il primo di questi sarà x^3, quoziente di $-x^3$ diviso per -1.

Sottraendo il prodotto di x^3 moltiplicato per il divisore del secondo resto, si trova una differenza nulla, e quindi l'operazione è terminata.

50. Nell'esempio precedente, l'operazione ha un termine, e il resultato è identico con quello trovato nell'altro modo; ma non avverrebbe lo stesso, quando la divisione non potesse effettuarsi esattamente. Riprendiamo la divisione accennata (48)

$$\begin{array}{r|l} -1+x-2x^3+x^5 & -3+x^2 \\ \cline{2-2} x-\frac{1}{3}x^2-2x^3+x^5 & \frac{1}{3}-\frac{x}{3} \\ -\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{3}x^3+x^5 & \end{array}$$

i due primi termini ottenuti in quoziente sono $\frac{1}{3}$ e $-\frac{x}{3}$, e non hanno alcun rapporto con quelli che ottenemmo ordinando i polinomi per le potenze decrescenti di x; il resto ha l'esponente minimo eguale a due se ci si arresta a questi termini, ma continuando l'operazione andrà continuamente aumentando. Da questo è facile dedurre in generale, in modo analogo a quello che abbiamo tenuto (48), il seguente teorema:

Il quoziente di due polinomi interi A *e* B, *quando non è un polinomio intero, può sempre porsi sotto la forma di un polinomio* Q *intero e di grado elevato quanto*

si vuole, rispetto a una lettera x *contenuta in* B, *aumentato di una frazione* $\frac{R}{B}$, *che ha per numeratore un polinomio* R *che non contiene* x *inalzata a esponente minore del grado di* Q.

Esempio. Eseguendo nel modo indicato la divisione di 1 per $1-x$, si trova

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n+1}+\frac{x^n}{1-x}$$

dove n è un numero positivo qualunque.

Osservazione. Quando si fa l'operazione della divisione sopra due polinomi ordinati secondo le potenze ascendenti, se questa non è possibile esattamente, non avremo più, per accorgerci di ciò, il criterio che si aveva nell'altro caso: quello cioè di pervenire ad incontrare un dividendo parziale, il cui 1° termine fosse di grado minore di quello del divisore. In una divisione di polinomi ordinati secondo le potenze ascendenti, i dividendi parziali successivi vanno continuamente aumentando di grado: epperò, non preoccupandoci noi della divisibilità dei coefficienti, la divisione del 1° termine di ciascuno di essi pel 1° del divisore è sempre possibile. Ma ci sarà un criterio analogo al secondo di quelli dati nell'altro caso: invero, se la divisione è possibile, l'ultimo termine del polinomio quoziente dovrà ottenersi dividendo l'ultimo del dividendo per l'ultimo del divisore; si potrà dunque determinare quest'ultimo termine del quoziente anche prima d'incominciare l'operazione; fatto ciò, se poi, nel processo di questa, si incontra al quoziente un termine di grado eguale a quello e che non gli sia identico, ovvero uno di grado superiore, si potrà senz'altro tralasciare di continuarla, perchè i

termini successivi, che si troverebbero al quoziente, sarebbero di grado via via più alto, e quindi non si potrebbe più incontrare il termine che dovrebbe essere l'ultimo del quoziente.

Differenze e analogie tra la divisione aritmetica e la divisione dei polinomi.

51. I polinomi ordinati secondo le potenze di una lettera, presentano con i numeri interi alcune analogie, le quali sarà bene osservare. Un numero intero come 783214 esprime $7\times10^5+8\times10^4+3\times10^3+2\times10^2+1\times10+4$, e coincide col polinomio

$$7x^5+8x^4+3x^3+2x^2+x+4,$$

quando si ponga $x=10$. Non bisogna credere, però che ogni questione d'aritmetica relativa a numeri interi sia puramente e semplicemente un caso particolare di una questione d'algebra, nella quale siano sostituiti a questi numeri i polinomi corrispondenti.

Confrontiamo, per esempio, le due questioni seguenti:

Dividere

783214 per 231.

Dividere

$7x^5+8x^4+3x^3+2x^2+x+4$ per $2x^2+3x+1$.

Le condizioni dei due problemi hanno tra loro delle differenze sostanziali, che non permettono di considerare il primo come un caso particolare del secondo.

1° Il quoziente della divisione aritmetica dev'essere un numero intero, mentre il quoziente della di-

visione algebrica può essere un polinomio intero rispetto a x, ma che abbia i coefficienti frazionari.

2° Le cifre del quoziente e del resto, nella divisione aritmetica, devono essere minori di 10, mentre i coefficienti delle diverse potenze di x nella divisione algebrica non hanno alcun limite.

3° Nella divisione aritmetica, il resto dev'essere minore del divisore. Nella divisione algebrica deve essere di grado minore.

4° Finalmente, i risultati ottenuti in algebra convengono a tutti i valori di x; non vi è condizione analoga in aritmetica.

Condizione perchè un polinomio sia divisibile per un binomio della forma $(x-a)$.

52. Rappresentiamo per brevità con X il polinomio da dividersi; ordiniamolo secondo le potenze discendenti dalla lettera x contenuta in esso, e immaginiamo di eseguire la divisione di X per $x-a$. L'operazione continuerà fino a che non si sia trovato un resto di grado minore del divisore: sia R questo resto; esso dunque non conterrà affatto x: sia Q il polinomio intero rispetto a x trovato al quoziente. Si ha identicamente

$$X=(x-a)Q+R$$

cioè, questa eguaglianza si verifica indipendentemente da qualsiasi valore che possa attribuirsi alle lettere che compariscono nei due membri; quindi continua pure a sussistere, se si attribuisce alla lettera x il valore a; se nei polinomi X e Q si mette a al posto di x, essi assumeranno valori speciali che indicheremo con X_a, Q_a; mentre in R non possiamo affatto fare una tale

sostituzione, giacchè esso non contiene x; l'eguaglianza precedente dunque, se dappertutto in essa si mette a al posto di x, diviene

$$X_a=(a-a)Q_a+R$$

ovvero

$$X_a=R$$

il che ci fa enunciare il teorema:

Il resto R *ottenuto nella divisione di un polinomio* X *per un binomio della forma* x—a, *è il valore* X_a *che il polinomio assume quando in esso si mette* a *al posto di* x.

Di qui discende subito la conseguenza:

Affinchè un polinomio sia divisibile per un binomio x—a, *è necessario e sufficiente che il polinomio si annulli, quando in esso si faccia* x=a.

Modo semplice di calcolare il resultato della sostituzione di a ad x in un polinomio.

53. Cade qui opportuno mostrare un modo semplice di calcolare il valore che un polinomio X assume, quando in esso si dia alla x un valore particolare a, nell'ipotesi, ben s'intende, che i coefficienti di x nei differenti termini sieno numeri conosciuti.

Si prenda per esempio un polinomio del 3° grado, cioè, della forma

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3:$$

a_0, a_1, a_2, a_3 sieno numeri assegnati e alla x si dia il valore a: si vuol dunque calcolare il resultato

$$a_0a^3+a_1a^2+a_2a+a_3.$$

Si farà così:

Primieramente si ottenga $a_0 a$

si aggiunga a_1, il che dà $a_0 a + a_1$

si moltiplichi per a, si avrà $a_0 a^2 + a_1 a$

si aggiunga a_2, ci dà $a_0 a^2 + a_1 a + a_2$

si moltiplichi per a, $a_0 a^3 + a_1 a^2 + a_2 a$

si aggiunga a_3, si ha infine $a_0 a^3 + a_1 a^2 + a_2 a + a_3$

Si può disporre il calcolo nel modo seguente:

$$\begin{array}{llll} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ & a_0 a & a_0 a^2 + a_1 a & a_0 a^3 + a_1 a^2 + a_2 a \\ \hline & a_0 a + a_1 & a_0 a^2 + a_1 a + a_2 & a_0 a^3 + a_1 a^2 + a_2 a + a_3 \end{array}$$

Il metodo è evidentemente applicabile a polinomi di qualsiasi grado.

Legge di formazione del quoziente *intero* (48) nella divisione di un polinomio per $x-a$.

54. La differenza $x^m - a^m$ è sempre divisibile per $x-a$ giacchè se in $x^m - a^m$ si fa $x=a$, si ottiene $a^m - a^m = o$.

Se si eseguisce la divisione, dopo alquanti termini trovati al quoziente facilmente si riconosce la legge con cui essi procedono e si ha:

$$\alpha) \quad \frac{x^m - a^m}{x-a} = x^{m-1} + a x^{m-2} + \ldots + a^{m-2} x + a^{m-1}$$

la quale identità, del resto, può dimostrarsi anche eseguendo la moltiplicazione del 2° membro di essa per $x-a$: si troverà come prodotto $x^m - a^m$.

Premesso ciò, si prenda a considerare un polinomio di grado m, cioè della forma:

$$X = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

Si indichi con $X_a = a_0 a^m + a_1 a^{m-1} + \ldots + x_{m-1} + a_m$

il resto della divisione di X per $x-a$, con Q il quoziente *intero:* si ha l'identità:

$$X = (x-a)Q + X_a$$

d'onde

$$X - X_a = (x-a)Q$$

la quale identità ci mostra che Q è il quoziente *esatto* della divisione di $X - X_a$ per $x-a$.

Abbiamo dunque

$$Q = \frac{X - X_a}{x-a} =$$

$$\frac{(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m) - (a_0 a^m + a_1 a^{m-1} + \ldots + a_{m-1} a + a_m)}{x-a}$$

ovvero

$$Q = \frac{a_0(x^m - a^m) + a_1(x^{m-1} - a^{m-1}) + \ldots + a_{m-2}(x^2 - a^2) + a_{m-1}(x-a)}{x-a}$$

$$= a_0\left(\frac{x^m - a^m}{x-a}\right) + a_1\left(\frac{x^{m-1} - a^{m-1}}{x-a}\right) + \ldots$$

$$+ a^{m-2}\left(\frac{x^2 - a^3}{x-a}\right) + a_{m-1}\left(\frac{x-a}{x-a}\right)$$

ma per la formola α)

$$\frac{x^m - a^m}{x-a} = x^{m-1} + a x^{m-2} + \ldots + a^{m-2} x + a^{m-1}$$

$$\frac{x^{m-1} - a^{m-1}}{x-a} = x^{m-2} + a x^{m-3} + \ldots + a^{m-3} x + a^{m-2}$$

. . . . . .

$$\frac{x^3 - a^3}{x-a} = x^2 + a x + a^2$$

$$\frac{x^2 - a^2}{x-a} = x + a$$

Sostituendo si ha:

$$\begin{aligned}Q=a_0(&x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-3}x^2+a^{m-2}x+a^{m-1})\\ &+a_1(x^{m-2}+ax^{m-3}+\ldots+a^{m-4}x^2+a^{m-3}x+a^{m-2})\\ &+a_2(x^{m-3}+ax^{m-4}+\ldots+a^{m-4}x+a^{m-3})\\ &+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+a_{m-3}(x^2+ax+a^2)\\ &+a_{m-2}(x+a)\\ &+a_{m-1}\end{aligned}$$

e ordinando secondo le potenze di x, si otterrà

$$\begin{aligned}Q=&a_0x^{m-1}+(a_0a+a_1)x^{m-2}+(a_0a^2+a_1a+a_2)x^{m-3}+\ldots+\\ &+(a_0a^{m-2}+a_1a^{m-3}+\ldots+a_{m-3}a+a_{m-2})x+\\ &+(a_0a^{m-1}+a_1a^{m-2}+\ldots+a_{m-3}a^2+a_{m-2}a+a_{m-1})\end{aligned}$$

che possiamo brevemente dinotare così

$$Q=q_0x^{m-1}+q_1x^{m-2}+q_2x^{m-3}+\ldots+q_{m-2}x+q_{m-1}$$

avendo posto

$$q_0=a_0,\ q_1=a_0a+a_1,\ q_2=a_0a^2+a_1a+a_2,\ldots$$

Si vede che:

Il quoziente intero Q *di un polinomio* X *intero in* x *e di grado* m *per* x—a, *è un polinomio intero in* x *del grado* m—1, *ordinato secondo le potenze decrescenti di* x *come lo è il polinomio proposto* X. *Il 1° coefficiente del quoziente è lo stesso primo coefficiente del dividendo; il 2° coefficiente si deduce dal 1°, moltiplicando questo per* a *e aggiungendo il 2° coefficiente del dividendo: il 3° coefficiente si deduce dal 2° moltiplicando questo per* a *e aggiungendo il 3° coefficiente del dividendo: e così in generale, il coefficiente* n° *nel quoziente si trova moltiplicando il coefficiente* (n—1)° *per* a *e aggiungendo al prodotto il coefficiente* n° *nel dividendo. Se il dividendo non è un polinomio completo si introdurranno i termini mancanti, dando ad essi per coefficiente lo zero.*

Se X_a fosse zero, allora il polinomio Q formato secondo la legge qui esposta sarebbe il quoziente *esatto* della divisione di X per $x-a$.

Applicazioni.

55. 1° Già si è veduto che x^m-a^m *è sempre divisibile per* x—a e che si ha

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+\ldots\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}.$$

Si possono ora aggiungere alcune utili applicazioni dei teoremi esposti:

2°. x^m-a^m *è divisibile per* x+a, *quando* m *è pari:* infatti al binomio $x+a$ si dia la forma di una differenza scrivendolo $x-(-a)$ e nel polinomio x^m-a^m si faccia $x=-a$: si otterrà il resultato $(-a)^m-a^m$ che è zero, solo quando m è pari, mentre se m è dispari, è uguale a $-2a^m$.

Si avrà dunque, se m è pari (54)

$$\frac{x^m-a^m}{x+a}=$$
$$=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots\ldots-a^{m-3}x^2+a^{m-2}x-a^{m-1}$$

e se m è dispari (48)

$$\frac{x^m-a^m}{x+a}=$$
$$=(x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots\ldots-a^{m-2}x+a^{m-1})-\frac{2a^m}{x+a}.$$

3° x^m+a^m *non è mai divisibile per* $x-a$ perchè mettendo a in luogo di x si ha $2a^m$: quindi è (48) e (54)

$$\frac{x^m+a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+\ldots\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}+\frac{2a^m}{x-a}.$$

4° x^m+a^m *è divisibile per* $x+a$, *quando* m *è dispari*: perchè se si scrive $x+a=x-(-a)$ e in x^m+a^m si mette $-a$ al posto di x si ottiene il resultato $(-a)^m+a^m$, che è zero, solo quando m è dispari: mentre se m è pari, è $2a^m$. Si ha dunque, se m è dispari

$$\frac{x^m+a^m}{x+a}=$$

$$=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots\ldots+a^{m-3}x^2-a^{m-2}x+a^{m-1}$$

e se m è pari

$$\frac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots\ldots$$

$$-a^{m-3}x^2+a^{m-2}x-a^{m-1}+\frac{2a^m}{x+a}.$$

56. Dimostreremo ancora che:

Se un polinomio X *intero in* x *si annulla, quando in esso in luogo della* x *si sostituisce uno qualunque dei numeri* a, b, c....l *differenti tra loro, il polinomio è divisibile pel prodotto.*

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-l).$$

Infatti, poichè X si annulla per $x=a$, ciò significa che esso è divisibile per $x-a$ (52). Si indichi con Q il quoziente: si avrà identicamente

$$X=(x-a)\,Q.$$

Questa identità sussiste qualunque sia il valore che si voglia attribuire alla x: si faccia $x=b$: si ottiene

$$X_b=(b-a)\,Q_b$$

denotando X_b e Q_b i valori che i polinomi X e Q assumono per $x=b$; ma per ipotesi è $X_b=0$; dunque si ha

$$(b-a).Q_b=0;$$

giacchè non è $b-a=0$, così ne segue che debba essere

$$Q_b=0;$$

dunque il polinomio Q intero in x si annulla se in esso si faccia $x=b$; quindi è divisibile (52) per $x-b$; e si avrà

$$Q=(x-b)\,Q'$$

Q' essendo un polinomio intero in x: e sostituendo verrà

$$X=(x-a)(x-b).Q'$$

la quale prova che X è divisibile pel prodotto $(x-a)(x-b)$.

Se in questa identità si fa $x=c$, si otterrà

$$0=(c-a)(c-b).Q'_c$$

e giacchè non è $c-a=0$, nè $c-b=0$, se ne conclude $Q'_c=0$: e così il polinomio Q' è divisibile per $x-c$, cioè sarà

$$Q'=(x-c)\,Q'';$$

epperò sostituendo

$$X=(x-a)(x-b)(x-c).Q''$$

il che prova che X è divisibile pel prodotto

$$(x-a)(x-b)(x-c).$$

Procedendo così, si proverebbe che X è divisibile pel prodotto $(x-a)\ldots(x-l)$.

Esercizi.

1. Dividere

1° $15x^5$ per $3x^2$
2° $24x^6$ per $8x^3$
3° $18x^7y^2$ per $6x^5y$
4° $20a^4b^4x^7y^3$ per $5b^2x^3y$
5° $4x^3-8x^5+16x$ per $4x$
6° $x^3y-3x^2y^2+4xy^3$ per xy
7° $60a^7b^7c^2-48a^2b^4c^2+36a^2b^2c^4-20abc^6$ per $4abc^2$
8° x^3+1 per $x+1$
9° a^5+b^5 per $a+b$
10° $x^3-x^2y+xy^2-y^3$ per $x-y$
11° $x^2-7x+12$ per $x-3$
12° $7x^3-24x^2+58x-21$ per $7x-3$
13° $x^4-5x^3+11x^2-12x+6$ per x^2-3x+3
14° $x^4+x^3-24x^2-35x+57$ per x^2+2x-3
15° $1-x-3x^2-x^5$ per $1+2x+x^2$
16° $\frac{1}{3}-6x^2+27x^4$ per $\frac{1}{3}+2x+2x^2$
17° $a^3+b^3+c^3-3abc$ per $a+b+c$
18° $a^3-b^3-c^3-3abc$ per $a-b-c$
19° $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$
per $x^2-(a+b)x+ab$
20° $x^3-2ax^2+(a^2+ab-b^2)x-a^2b+ab^2$ per $x-a+b$
21° $(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3$
per $(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$.

2. Dividere

1° $1+2x$ per $1-3x$
2° $1-ax$ per $1-bx$
3° 1 per $1-2x+x^2$.

3. Calcolare il valore del polinomio

1° $6x^4-2x^3+5x^2+2x+8$ per $x=3$.
2° $12x^6-4x^4+8x^2-12$ per $x=2$ e per $x=-2$.
3° $x^5-4x^4+2x^3-2x^2+9$
per $x=-3$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=-1$.
4° $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{7}x-\frac{4}{11}$ per $x=2$, $x=\frac{4}{5}$.

4. Risolvere in fattori le seguenti espressioni:

1° x^4-81
2° x^3+125
3° x^6-64
4° x^8-256
5° $x^2+9x+20$
6° $x^2+x-132$
7° $x^2-7x-44$
8° $x^2-20x+100$
9° $2(x+y)^2-7(x+y)(a+b)+3(a+b)^2$
10° $a^{15}-x^{15}$ in cinque fattori.
11° $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$ in quattro fattori.

5. Dividere

1° $(a^4+a^2b^2+b^4)(a+b)$ per a^2+ab+b^2
(si osservi che è $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+b^2)^2-a^2b^2$).

2° $(a^2+ax+x^2)(a^3+x^3)$ per $a^4+a^2x^2+x^4$
(osservazione analoga alla precedente)

3° $b(x^3+a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x+a)$ per $(a+b)(x+a)$

4° $a^8-b^8+a^2b^2(a^4-b^4)$ per $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

5° $(x^3-3x+2)(x+4)$ per x^2+x-2.

6. Dimostrare che

1° $(x^2-xy+y^2)^3+(x^2+xy+y^2)^3$ è divisibile per $2x^2+2y^2$.

2° $(x+y)^7-x^7-y^7$ è divisibile per $(x^2+xy+y^2)^2$.

3° $x^qy^r+y^qz^r+z^qx^r-x^ry^q-y^rz^q-z^rx^q$ è divisibile per $(x-y)(x-z)(y-z)$.

4° $x^py^qz^r+y^pz^qx^r+z^px^qy^r-x^ry^qz^p-y^rz^qx^p-z^rx^qy^p$ è divisibile pel medesimo prodotto.

5° Che se m è dispari, il polinomio

$$(a+b+c)^m-a^m-b^m-c^m$$

è divisibile pel prodotto $(a+b)(a+c)(b+c)$
(così per questo come pei due precedenti esercizi si farà uso del teorema del n. 56).

7. Trovare la condizione necessaria e sufficiente perchè x^m-a^m sia divisibile per x^n-a^n:
(si eseguisce la divisione col processo ordinario; dopo alquante divisioni si vede qual'è la forma generale dei dividendi parziali; e di qui si deduce la condizione perchè se ne possa trovare uno che sia nullo).
Deve essere m multiplo di n.

8. Trovare la condizione perchè $x^p+2x^{p-q}y^q+y^p$ sia divisibile per $(x+y)^2$.

CAPITOLO IV.

Massimo comune divisore e minimo comune multiplo di più monomi interi.

57. Dalle condizioni di divisibilità pei monomi interi esposte al n. 39 si può, come in Aritmetica, fare utile applicazione alla ricerca del *m. c. d.*[1] e del *m. c. m.* di più monomi interi.

Massimo comune divisore.

Abbiansi più monomi *interi* decomposti nei loro fattori *primi:* pel teorema menzionato del n. 39 un monomio, che sia divisore comune di essi, deve essere un prodotto di fattori primi che sono comuni ai monomi dati e dei quali ciascuno è preso con un esponente minore o eguale al più al minimo di quelli che esso ha nei monomi medesimi, e reciprocamente un monomio così composto è sempre un divisore comune di essi.

Si potranno dunque formare tutti i divisori comuni a più monomi dati formando tutti *i possibili* prodotti di fattori primi comuni ad essi nel modo ora detto.

Il prodotto composto di tutti i fattori primi comuni ai monomi dati preso ciascuno con un esponente eguale

[1] Colle segnature *m. c. d.* e *m. c. m.* si vuole significare *massimo comune divisore* e *minimo comune multiplo* rispettivamente.

al minimo degli esponenti che esso ha nei monomi medesimi, mentre sarà un divisore comune ai monomi dati, sarà alla sua volta divisibile per ogni altro divisore comune ai monomi medesimi.

Un tale prodotto, per analogia con ciò che si fa in Aritmetica, si chiamerà il massimo comune divisore dei monomi dati.

Se ora osserviamo che il prodotto composto di tutti i fattori primi comuni ai coefficienti numerici dei monomi dati presi cogli esponenti che abbiamo detto, non è altro (vedi Aritmetica) se non il massimo comune divisore dei coefficienti medesimi, così possiamo enunciare la regola:

Il m. c. d. *di più monomi interi è il prodotto del* m. c. d. *dei coefficienti numerici dei monomi dati per tutti i fattori letterali comuni, preso ciascuno col più piccolo tra gli esponenti che esso ha nei monomi medesimi.*

Siano per esempio i monomi

$$40a^4b^2x \qquad 50a^3b^2dx \qquad 25ab^3dx^2$$

ovvero anche, decomponendo i coefficienti in fattori primi

$$5.\,2^3.\,a^4.\,b^2.\,x \qquad 5^2.\,2.\,a^3.\,b^2.\,d.\,x \qquad 5^2.\,a.\,b^3.\,d.\,x^2.$$

Il *m. c. d.* sarà

$$5.\,ab^2x.$$

Dalla definizione data del *m. c. d.* di più monomi interi discendono immediatamente i teoremi:

Moltiplicando due o più monomi interi per uno stesso monomio, il loro m. c. d. *è moltiplicato per questo.*

Dividendo due o più monomi pel loro m. c. d. *questo si ridurrà all'unità, e i monomi si diranno* primi *fra loro.*

Il m. c. d. *di due monomi non si altera moltiplicando o dividendo uno di essi per un monomio che è* primo *con l'altro.*

Minimo comune multiplo.

58. Un monomio *intero* divisibile per ciascuno di più monomi *interi* dati si dirà un multiplo comune di essi.

Quindi un monomio intero per essere multiplo comune a più altri deve contenere tutti i fattori primi contenuti in essi, preso ciascuno con un esponente superiore o almeno eguale *al massimo di quelli che ha nei monomi dati.*

Il numero dei multipli comuni a più monomi interi è evidentemente infinito: tra essi quello che è il prodotto dei fattori primi differenti, contenuti nei monomi dati, preso ciascuno con un esponente eguale *al massimo di quelli che esso ha nei monomi medesimi* sarà un divisore comune di tutti gli altri multipli comuni.

Questo sarà il *m. c. m.*

La regola per comporre il *m. c. m.* di più monomi interi è dunque questa:

Si trova il m. c. m. *dei coefficienti numerici di essi e si scrivono di seguito a questo, come fattori, tutte le lettere contenute nei monomi dati, dando a ciascuna per esponente il massimo tra gli esponenti che essa ha nei monomi medesimi.*

Così, pei monomi, dei quali dianzi abbiamo trovato il *m. c. d.*, il *m. c. m.*, sarà:

$$5^2.\,2^3.\,a^4.\,b^3.\,d.\,x^2.$$

Divisori e multipli comuni a più polinomi dati.

59. Dati due o più polimoni *interi* rispetto a una stessa lettera contenuta in essi, si chiama *loro divisore comune intero*, qualunque polinomio *intero* rispetto alla stessa lettera, che divide esattamente ciascuno di quelli. Si chiama *multiplo comune intero*, qualunque polinomio *intero* rispetto alla stessa lettera, che è divisibile per ciascuno di quelli.

Non possiamo, per amore di brevità, occuparci in questo libro della teoria generale dei divisori e dei multipli comuni a più polinomi dati: possiamo solo fare un' osservazione che è spesso utile.

Dato un polinomio intero rispetto a una certa lettera x, mediante applicazione dei teoremi 52 e 56, è possibile qualche volta scoprire, se esso ammetta dei fattori binomi della forma $x-a$, dove a indica un numero determinato qualunque.

Ora dunque quando sieno dati più polinomi interi rispetto a una lettera x, potrà accadere che, col mezzo che ora abbiam detto, si pervenga a scoprire per ciascuno di essi alcuni fattori binomi di primo grado in x in modo che ciascun polinomio dato si possa presentare nella forma del prodotto dei fattori binomi in esso scoperti, moltiplicati per un polinomio, intero in x, di grado inferiore a quello del polinomio dato, ovvero per un polinomio indipendente da x, e anche potrà accadere che si riesca a decomporre completamente ciascuno dei polinomi dati in un prodotto di fattori binomi, in modo che ciascuno possa presentarsi nella forma di un prodotto come

$$M.(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p\ldots.(x-l)^q$$

dove M è un monomio che non contiene x.

Nell' un caso come nell' altro la semplice ispezione dei prodotti, nei quali sono stati rispettivamente decomposti i polinomi, farà conoscere se tra quelli, che così sono stati messi in evidenza, vi sieno divisori comuni binomi o polinomi, e se si possano comporre multipli comuni di grado in x inferiore a quello che ha il prodotto di tutti i polinomi dati; ma, nel secondo caso noi potremo fare anche di più: potremo cioè sempre, comporre un polinomio (che potrà anche essere un binomio), che, per analogia con ciò che si fa pei monomi, dovremo chiamare *m. c. d.* o *m. c. m.* rispettivamente dei polinomi dati.

Infatti, se ciascun polinomio dato è decomposto in un prodotto della forma

$$M.(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p\ldots.(x-l)^q$$

dove M è un monomio che non contiene x, e i numeri a, b, c.... sono differenti, allora si potranno considerare i fattori

$$x-a,\ x-b,\ x-c,\ldots.$$

come i fattori *primi* del polinomio, e rappresentandoli con lettere differenti, cioè, ponendo

$$x-a=A,\ x-b=B,\ x-c=C,\ldots.\ x-l=L$$

ciascun polinomio assumerà la forma di un monomio, come

$$M.\ A^m.\ B^n.\ C^p\ldots.\ L^q.$$

epperò si potranno applicare le regole date precedentemente per trovare il *m. c. d*, e il *m. c. m*, di più monomi.

Per non entrare in troppi dettagli, non consideriamo l' altro caso in cui M sia un polinomio.

Dilucidiamo le cose dette con degli esempi:

Siano i due polinomi

$$A=8x^4-12x^3-8x^2-12x+24$$
$$B=6x^4-20x^3-10x^2-16x+8;$$

facilmente si vede che così l'uno come l'altro si annullano per $x=1$, e $x=2$: dimodochè ciascuno è divisibile pel prodotto $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$; e si trova che si possono decomporre nel modo seguente:

$$A=4(x-1)(x-2)(2x^2+3x+3)$$
$$B=2(x-1)(x-2)(3x^2-x+2).$$

Ora si vede subito che $x-1$, come $x-2$ come anche il prodotto $2(x-1)(x-2)$ è un divisore comune di A e di B, ma non possiamo affermare che non esistano anche altri divisori comuni, che sieno rispetto a x di grado superiore a quello; giacchè non sappiamo ora vedere se $2x^2+3x+3$ e $3x^2-x+2$ non ammettano qualche divisore comune.

Così il prodotto

$$4(x-1)(x-2)(2x^2+3x+3)(3x^2-x+2)$$

è certamente un multiplo comune di A e B di grado inferiore al prodotto A, B, ma, per la ragione detta dianzi, non possiamo ora dire che non esistono altri multipli comuni di grado inferiore a quello.

Consideriamo ora i due polinomi

$$C=2x^3-12x^2+22x-12$$
$$D=4x^3-36x^2+46x-30$$

C si annulla per $x=1$, $x=2$, $x=3$,
D si annulla per $x=1$, $x=3$, $x=5$,
C è dunque divisibile per il prodotto $(x-1)(x-2)(x-3)$,

D lo è pel prodotto $(x-1)(x-3)(x-5)$: e facilmente si trova

$$C=2(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$D=4(x-1)(x-3)(x-5).$$

Di qui si vede che $(x-1)$, $(x-3)$, $(x-1)(x-3)$, $2(x-1)$, $2(x-3)$, $2(x-1)(x-3)$ sono divisori comuni di C e D: e secondo la denominazione posta sopra, $2(x-1)(x-3)$ si deve chiamare *m. c. d.* dei polinomi dati.

Così il prodotto

$$4(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$$

sarà il *m. c. m.*

Termineremo dando qui due formule che riescono spesso di facile applicazione per la decomposizione in fattori binomi dei polinomi di 2° e 3° grado.

Si ha, come è facile verificare:

$$1)\qquad x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$
$$2)\qquad x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=$$
$$=(x-a)(x-b)(x-c)$$

Ad esempio la 1) ci dà subito:

$$x^2+9x+20=x^2+(4+5)x+4.5=(x+4)(x+5)$$
$$x^2-15x+50=x^2+[(-5)+(-10)]x^2+(-5)(-10)=$$
$$=[x+(-5)][x+(-10)]=$$
$$=(x-5)(x-10).$$
$$x^2-7x-44=x^2+[4+(-11)]x+4(-11)=$$
$$=(x+4)[x+(-11)]=$$
$$=(x+4)(x-11).$$

La 2) ci dà

$$x^3-6x^2+11x-6=x^3-(1+2+3)x^2+$$
$$+(1.2+1.3+2.3)-$$
$$-1.2.3=$$
$$=(x-1)(x-2)(x-3).$$

Esercizi.

Trovare il *m. c. d.* o il *m. c. m.* ovvero un divisore o un multiplo comune alle seguenti espressioni:

1° $15x^4$, $18x^2$
2° $16a^2b^3$, $20a^3b^2$
3° $36x^4y^5z^6$, $48x^3y^5z^4$.
4° $35a^2b^3x^3y^4$, $49a^2b^4x^4y^3$.
5° $4(x+1)^2$, $6(x^2-1)$
6° $6(x+1)^3$, $9(x^2-1)$
7° $12(a^2+b^2)^2$, $8(a^4-b^4)$.
8° x^6-y^6 x^4-y^4
9° x^2-3x+2 e x^2-x-2
10° $6(a^3-b^3)(a-b)^3$, $9(a^4-b^4)(a-b)^2$, $12(a^2-b^2)^3$
11° x^5-y^5 e x^2-y^2.
12° $x^2-9x+14$, $x^2-11x+28$
13° $(x+1)(x^2-1)$, x^3-1
14° $x^2+2x-120$, $x^2-2x-80$
(si ha $x^2+2x-120=(x^2+1)^2-11^2$;
$x^2-2x-80=(x-1)^2-9^2$).
15° $x^2+8x+15$, $x^2+9x+20$
16° $(a-b)^2$, a^2-b^2.
17° $4a(a+b)$, $6b(a^3+b^3)$

18° a^2-b^2, a^3-b^3.
19° x^2-3x-4, x^2-x-12.
20° $4a^3b^2c$, $5ab^3c^2$, $18a^2bc^3$,
21° $8(a^2-b^2)$, $12(a+b)^2$, $20(a-b)^2$
22° $4(a+b)$, $6(a^2-b^2)$, $8(a^3+b^3)$
23° $15(a^2b-ab^2)$, $21(a^3-ab)$, $35(ab^2+b^3)$
24° x^2-1, x^3+1, x^3-1,
25° x^2-1, x^2+1, x^4+1, x^8+1
26° x^2-1, x^3+1, x^3-1, x^6+1
27° x^2+3x+2, x^2+3x+3, x^2+5x+6.
28° x^2-1 e x^2+x-2,
29° x^3-x, x^3-1, x^3+1
30° x^2-4a^2, $(x+2a)^3$, $(x-2a)^3$
31° $2x-1$, $4x-1$, $4x^2+1$.

CAPITOLO V.

Frazioni algebriche.

---

60. Abbiamo veduto che quando non esiste un monomio intero che sia il quoziente di due monomi interi dati, questo lo si indica scrivendoli l'uno al disopra dell'altro e separandoli con una lineetta: in modo analogo si indica il quoziente di due polinomi, quando non esiste un terzo polinomio che ne possa essere il quoziente.

Da questi casi d'impossibilità nella divisione nascono dunque delle espressioni della forma $\frac{A}{B}$ dove A e B sono monomi o polinomi: e che sono definite da questa proprietà, cioè, che $\left(\frac{A}{B}\right).B = A$.

Noi ora, generalizzando, prenderemo a considerare delle espressioni $\frac{A}{B}$ dove A e B rappresentano monomi o polinomi, interi di forma, senza affatto presupporre nulla sulla loro divisibilità, e le chiameremo *frazioni algebriche;* A sarà il *numeratore* e B il *denominatore* della frazione $\frac{A}{B}$.

Mostreremo che per le *frazioni algebriche* valgono le stesse regole di calcolo che per le frazioni aritmetiche, per quanto quelle sieno tanto più generali di queste: e la ragione di questo fatto sta in ciò, che per le

algebriche sussiste la stessa proprietà fondamentale, che per le aritmetiche: cioè:

Il valore di una frazione algebrica $\frac{A}{B}$ *non muta quando i suoi due termini si moltiplicano o si dividono per una stessa espressione che non sia nulla.*

Già si è veduto che il quoziente $\frac{a}{b}$ di due numeri algebrici a e b non muta, moltiplicando o dividendo ambedue per uno stesso numero algebrico; ma A e B non sono altro, in sostanza, che numeri algebrici; quindi moltiplicando o dividendo A e B per una stessa espressione che potrà essere un monomio o un polinomio, ma sarà sempre in valore eguale a un numero algebrico, non deve mutare il quoziente di A per B cioè la frazione $\frac{A}{B}$.

L'importanza della proposizione ci spinge a darne una dimostrazione diretta.

Sia $\frac{A}{B}$ una frazione algebrica: A e B, essendo come si è detto, in valore eguali a due numeri algebrici, e la frazione $\frac{A}{B}$ rappresentandone il quoziente, essa sarà in valore eguale a un certo numero algebrico q, giacchè si sa che il quoziente di due numeri algebrici è sempre un numero algebrico. — Si ponga dunque

$$\frac{A}{B} = q$$

e perchè per definizione si ha

$$\left(\frac{A}{B}\right) B = A$$

così resulta

$$A = B.\,q.$$

Moltiplichiamo i due membri di questa eguaglianza per una espressione che indichiamo con m; avremo

$$mA = mB.\,q$$

la quale ci fa vedere che q è il quoziente di mA diviso per mB: quindi si può scrivere

$$\frac{mA}{mB} = q$$

epperò

$$\frac{A}{B} = \frac{mA}{mB}$$

la quale mostra che $\frac{A}{B}$ non muta moltiplicando A e B per m; e se si considera la formula precedente nella forma

$$\frac{mA}{mB} = \frac{A}{B}$$

si vede che $\frac{mA}{mB}$ non muta dividendo mA e mB per m. Così è provato il teorema.

In particolare, supponendo $m = -1$, si ha

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}.$$

Riduzione di una frazione algebrica a forma più semplice.

61. *Una frazione algebrica si rende più semplice sopprimendo i fattori comuni ai suoi due termini.*

È evidente che questa operazione, in virtù del

teorema precedente, non muta affatto il valore della frazione algebrica.

Per vedere come nella pratica si eseguisca tale semplificazione distinguiamo qui due casi:

1° I termini della frazione sieno monomi:

Cerchiamo il *m. c. d.* di essi e dividiamoli ambedue per questo *m. c. d.*: i due termini diverranno primi tra loro e si dimostra allora, ragionando precisamente come in Aritmetica, che la frazione è ridotta alla sua più semplice espressione: cioè, dato che A e B sieno monomi primi fra loro non potrà essere

$$\frac{A}{B} = \frac{M}{N}$$

M e N monomi interi, a meno che non sia $M = \mu A$, $N = \mu B$ essendo μ un monomio o anche un numero intero.

Infatti perchè la precedente eguaglianza sussista deve essere

$$\frac{AN}{B} = M$$

epperò il monomio AN deve essere divisibile per B: cioè deve contenere nel modo noto (39) i fattori di B; ma A non ne contiene alcuno: dunque è il monomio N che contiene tutti i fattori di B: cioè si ha

$$N = \mu B$$

e quindi $M = \mu A$ il che è quanto si voleva.

Sia ad es. la frazione

$$\frac{36a^4b^3c^2d}{28ab^5cd};$$

il *m. c. d.* dei due termini è $4ab^3cd$, dividendo cia-

scuno di essi per questo *m. c. d.*: la frazione diventa

$$\frac{9a^3c}{7b^2}.$$

2° I termini della frazione sieno dei polinomi.

Se vi è un monomio fattore comune a tutti i termini del numeratore lo si pone in evidenza, e altrettanto si fa pel denominatore; si cerca poi il *m. c. d.* dei monomi così trovati e si sopprime nei due termini della frazione questo *m. c. d.*

Così la frazione

$$\frac{12a^4b^3-8a^3b^2}{16a^5b-20a^2b^4}$$

si può scrivere nella forma

$$\frac{4a^3b^2(3ab-2)}{4a^2b(4a^3-5b^3)}$$

e allora si vede subito che si può sopprimere il *m.c. d.* $4a^2b$ dei due monomi $4a^3b^2$ e $4a^2b$ e la frazione assume la forma:

$$\frac{ab(3ab-2)}{4a^3-5b^3}=\frac{3a^2b^2-2ab}{4a^3-5b^3}.$$

Dopo una tale soppressione dei fattori monomi comuni ai due termini della frazione, rimarrebbe a vedere se esistono anche dei fattori polinomi comuni i quali pure si possano sopprimere; ma intorno alla ricerca dei fattori polinomi comuni a due polinomi dati, non possiamo fare altro che richiamare le cose dette al n. 59.

Sia, ad es., la frazione

$$\frac{a^4-2a^3+4a^2-7a+4}{a^2+5a-6}$$

Si riconosce che ciascuno dei suoi termini si annulla quando in esso si fa $a=1$; dunque ciascuno è divisibile pel binomio $a-1$; e dividendo numeratore e denominatore per $a-1$ la frazione si riduce alla forma

$$\frac{a^3-a^2+3a-4}{a+6},$$

Riduzioni delle frazioni allo stesso denominatore.

62. *Si riducono più frazioni allo stesso denominatore moltiplicando, come si fa in Aritmetica, i due termini di ciascuna pel prodotto dei denominatori di tutte le altre.*

Sieno le frazioni

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{e}{f}$$

operando sopra di esse, come sopra si è detto, esse divengono

$$\frac{adf}{bdf},\ \frac{cbf}{dbf},\ \frac{ebd}{bdf}$$

che sono rispettivamente eguali alle precedenti e hanno lo stesso denominatore bdf.

Se i denominatori delle frazioni date sono dei monomi interi, giacchè si sa trovare il loro *m. c. m.* si possono formare delle frazioni eguali rispettivamente alle proposte e aventi per denominatore comune questo minimo comune multiplo.

Sieno per esempio le frazioni

$$\frac{A}{12a^3b^2c},\ \frac{B}{16a^2b^4},\ \frac{C}{18abc^3}$$

il *m. c. m.* dei denominatori è $2^4.3^2a^3b^4c^3$; i quozienti di esso diviso successivamente per ciascuno dei denominatori sono

$$2^2.3b^2c^2;\ 3^2ac^3;\ 2^3a^2b^3;$$

moltiplicando i due termini della prima frazione per il primo di questi quozienti; i due termini della seconda pel secondo, ec., ec., si hanno le tre

$$\frac{12Ab^2c^2}{144a^3b^4c^3},\quad \frac{9Bac^3}{144a^3b^4c^3},\quad \frac{8Ca^2b^3}{144a^3b^4c^3};$$

Ma se i denominatori delle frazioni sono dei polinomi, allora non possiamo qui indicare una regola generale che insegni a ridurre più frazioni a un denominatore più semplice di quello che sia il prodotto dei loro denominatori e solamente richiamiamo quanto fu detto al n. 59 sulla ricerca dei multipli comuni a più polinomi dati.

Sieno le frazioni

$$\frac{2a}{3b^2},\quad \frac{a+b}{2b(a-b)},\quad \frac{a-b}{4a(a+b)},\quad \frac{a^3+2b^3}{9a^2(a^2-b^2)}$$

giacchè è $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, così l'espressione $36a^2b^2(a^2-b^2)$ è, (59), il minimo multiplo comune di tutti i denominatori; i quozienti di essa divisa per questi sono:

$$12a^2(a^2-b^2),\ 18a^2b(a+b),\ 9ab^2(a-b),\ 4b^2$$

e le frazioni equivalenti alle proposte sono

$$\frac{24a^3(a^2-b^2)}{36a^2b^2(a^2-b^2)}\quad \frac{18a^2b(a+b)^2}{36a^2b^2(a^2-b^2)}\quad \frac{9ab^2(a-b)^2}{36a^2b^2(a^2-b^2)}\quad \frac{4b^2(a^3+2b^3)}{36a^2b^2(a^2-b^2)};$$

Il prodotto dei denominatori sarebbe stato

$$216a^3b^3(a^2-b^2)^2.$$

Operazioni.

63. Addizione. *Per fare l'addizione di frazioni aventi lo stesso denominatore, si sommano i numeratori e si dà alla somma il denominatore comune.*

Ad esempio si ha

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c}{m}$$

Infatti il 2° membro rappresenta il quoziente di $a+b+c$ diviso per m: dunque moltiplicandolo per m produce $a+b+c$: ora anche il 1° membro moltiplicato per m dà per resultato $a+b+c$, giacchè si ha

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right)m=\frac{am}{m}+\frac{bm}{m}+\frac{cm}{m}$$
$$=a+b+c;$$

ma due numeri moltiplicati per uno stesso numero, che non sia nullo, dànno prodotti eguali solo quando essi medesimi sieno uguali; nel nostro caso m non essendo zero, è così provata l'eguaglianza precedente.

Osservazione. Se le frazioni da addizionarsi avranno denominatori differenti, si ridurranno prima allo stesso denominatore e poi si applicherà la regola precedente.

64. Sottrazione. *Quando le frazioni hanno lo stesso denominatore, dal numeratore della frazione minuendo si sottrae il numeratore della frazione sottraendo e si dà alla differenza il denominatore comune cioè, si ha:*

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.$$

Infatti per definizione si ha $\left(\frac{a-b}{m}\right) m = a-b$: e inoltre $\left(\frac{a}{m} - \frac{b}{m}\right) m = \frac{am}{m} - \frac{bm}{m} = a-b$.

OSSERVAZIONE. Se le due frazioni hanno denominatori differenti si ridurranno prima allo stesso denominatore, indi si applicherà la regola precedente.

65. MOLTIPLICAZIONE. *Si fa il prodotto di due frazioni, dividendo il prodotto dei numeratori pel prodotto dei denominatori.*

Sia da moltiplicare la frazione $\frac{a}{b}$ per la frazione $\frac{c}{d}$: rappresentiamo con p e q i valori di queste frazioni: cioè si ponga

$$\frac{a}{b} = p, \quad \frac{c}{d} = q:$$

si avrà per definizione

$$a = bp, \quad c = dq$$

e moltiplicando membro a membro queste uguaglianze

$$ac = bp.\ dq$$

ovvero

$$ac = bd.\ pq$$

la quale prova che pq è il quoziente di ac per bd, onde si ha

$$\frac{ac}{bd} = pq$$

ovvero

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{d}$$

come volevasi dimostrare.

OSSERVAZIONE. Il prodotto di più frazioni si ottiene dividendo il prodotto dei numeratori pel prodotto dei denominatori.

66. DIVISIONE. *Si divide una frazione per un'altra, moltiplicando la frazione dividendo per la frazione divisore rovesciata; cioè si ha:*

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Infatti è

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}:$$

il che prova che $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ è il quoziente di $\frac{a}{b}$ diviso per $\frac{c}{d}$.

67. OSSERVAZIONE. Nella teoria qui esposta abbiamo fatto vedere come le operazioni da eseguirsi sopra le frazioni conducono sempre ad operazioni da eseguirsi sopra i termini di esse: e giacchè questi termini, secondo l'ipotesi fatta a principio, erano dei monomi e dei polinomi *interi di forma,* così erano già state stabilite le regole per le operazioni sopra di essi. Ma può anche occorrere di dovere considerare delle espressioni che rappresentino il quoziente di due frazioni algebriche, espressioni cioè, aventi la forma

$$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\left(\frac{C}{D}\right)}$$

Espressioni di questa forma si possono sempre ricondurre alla forma di frazioni come quelle già considerate inquantochè è

$$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\left(\frac{C}{D}\right)} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC},$$

ma quando le si vogliano conservare nella forma nella quale sono proposte, si può subito vedere che a siffatte frazioni *a termini frazionari,* si applicano tutti i principii fondamentali di calcolo che abbiamo stabilito per le frazioni *a termini interi di forma:* basta osservare che in tutti i ragionamenti esposti per stabilire quei principii, la condizione che i termini delle frazioni fossero *interi di forma* non è mai stata invocata: tutti quei ragionamenti si potrebbero ripetere identicamente per le frazioni a *termini frazionari:* dunque quei principii valgono anche per queste: e in virtù di essi le operazioni da eseguirsi sopra siffatte frazioni sono ricondotte ad operazioni da eseguirsi sopra i loro termini, cioè, sopra frazioni a *termini interi di forma,* e queste operazioni, per gli stessi principii, si riconducono ad operazioni sopra espressioni di forma intera. Noi possiamo dunque ritenere, e questo è ciò che importa, che la teoria precedentemente stabilita vale per frazioni $\frac{A}{B}$, i cui termini sono espressioni algebriche qualunque intere, cioè o frazionarie.

Noteremo che alla forma anzidetta $\frac{\left(\frac{M}{N}\right)}{\left(\frac{P}{Q}\right)}$ si riconducono le espressioni della forma

$$\frac{a+\frac{b}{c}+\frac{d}{e}+\ldots\ldots}{f+\frac{g}{h}-l+\ldots\ldots}$$

nelle quali cioè, il numeratore, o il denominatore, o anche ambedue contengono termini di forma intera e termini di forma frazionaria; è manifesto infatti che,

riducendo in ciascuno tutti i termini allo stesso denominatore, si condurranno numeratore o denominatore alle forme rispettive $\frac{M}{N}$, $\frac{P}{Q}$, dove M, N, P, Q sono espressioni *intere*, e così si ricondurrà sempre una di quelle espressioni alla forma

$$\frac{\left(\frac{M}{N}\right)}{\left(\frac{P}{Q}\right)}$$

la quale poi, quando si voglia, si ridurrà all'altra

$$\frac{M.Q}{N.P}.$$

Applicazioni.

68. Teorema. *Se più frazioni sono eguali tra loro si ottiene una frazione eguale a ciascuna di esse dividendo la somma dei numeratori per la somma dei denominatori.*

Si abbia

$$\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\frac{a'''}{b'''}=\ldots\ldots=q$$

onde

$$a'=b'q,\ a''=b''q,\ a'''=b'''q,\ \ldots\ldots$$

addizionando queste uguaglianze membro a membro, si ha:

$$a'+a''+a'''+\ldots\ldots=b'q+b''q+b'''q+\ldots\ldots$$

ovvero

$$a'+a''+a'''+\ldots\ldots=(b'+b''+b'''+\ldots\ldots)\,q$$

il che prova che q è il quoziente di $a'+a''+a'''+\ldots\ldots$ diviso per $b'+b''+b'''+\ldots\ldots$: cioè si ha

$$q=\frac{a'+a''+a'''+\ldots\ldots}{b'+b''+b'''+\ldots\ldots}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots\ldots$$

OSSERVAZIONE. Siccome si ha evidentemente:

$$\frac{a'}{b'}=\frac{a'\lambda'}{b'\lambda'},\quad \frac{a''}{b''}=\frac{a''\lambda''}{b''\lambda''},\quad \frac{a'''}{b'''}=\frac{a'''\lambda'''}{b'''\lambda'''},\ \ldots.$$

così pel teorema precedente si ha anche

$$\frac{a'\lambda'+a''\lambda''+a'''\lambda'''+\ldots.}{b'\lambda'+b''\lambda''+b'''\lambda'''+\ldots.}=\frac{a'\lambda'}{b'\lambda'}=\frac{a'}{b'}=\ldots.$$

69. TEOREMA. *Se più frazioni a termini positivi sono disuguali, la somma dei numeratori divisa per la somma dei denominatori dà una frazione compresa fra la più grande e la più piccola di quelle.*

Siano le frazioni

$$\frac{a'}{b'}<\frac{a''}{b''}<\frac{a'''}{b'''}<\ldots.<\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}$$

si ponga $\frac{a'}{b'}=q$, onde $a'=b'q$: si avrà

$$\frac{a''}{b''}>q,\ \frac{a'''}{b'''}>q,\ \ldots.\ \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}>q$$

onde

$$a'=b'q,\ a''>b''q,\ a'''>b'''q,\ \ldots.\ a^{(n)}>b^{(n)}q$$

e addizionando membro a membro

$$a'+a''+a'''+\ldots.+a^{(n)}>b'q+b''q+b'''q+\ldots.+b^{(n)}q$$
$$>(b'+b''+b'''+\ldots.+b^{(n)})q$$

quindi

$$\frac{a'+a''+a'''+\ldots.+a^{(n)}}{b'+b''+b'''+\ldots.+b^{(n)}}>q$$
$$>\frac{a'}{b'}.-$$

Si ponga ora $\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}=p$, si avrà

$$a'<b'p,\ a''<b''p\ \ldots.\ a^{(n)}=b^{(n)}p$$

e quindi

$$a'+a''+\ldots.+a^{(n)}<(b'+b''+\ldots.+b^{(n)})p$$

onde

$$\frac{a'+a''+\ldots.+a^{(n)}}{b'+b''+\ldots.+b^{(n)}}<\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}.$$

Esercizi.

1. Semplificare le seguenti frazioni:

1° $\frac{12a^4b^2x}{18a^2b^2y}$, $\frac{a^2+ab}{20ab}$, $\frac{a^2+ab}{a^2-ab}$

2° $\frac{10a^2x}{5a^2x-15ay^3}$, $\frac{4(a+b)^2}{5(a^2-b^2)}$, $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$

3° $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$, $\frac{x-x^2}{x-1}$, $\frac{x^4-1}{x^6-1}$

4° $\frac{mx+m-x-1}{m^2-1}$, $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$

5° $\frac{x^2+3x+2}{x^2+6x+5}$, $\frac{x^2+10x+21}{x^2-2x-15}$

6° $\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2+(a+c)x-ac}$, $\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2+(c-a)x-ac}$

7° $\frac{(x+a)^2-(b+c)^2}{(x+b)^2-(a+c)^2}$, $\frac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^6-a^6}$

8° $\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^5-1}$, $\frac{x^6+a^2x^3y}{x^6-a^4y^2}$.

2. Ridurre al minimo comune denominatore le seguenti frazioni:

1° $\frac{3}{4x}, \frac{4}{6x^2}, \frac{5}{12x^3}$

2° $\frac{1}{x+1}, \frac{3}{4x+4}, \frac{x}{x^2-1}$

3° $\frac{a}{a-x}, \frac{x}{a-x}, \frac{a^2}{x^2-a^2}, \frac{ax}{a^2-x^2}$

4° $\frac{a}{x-a}, \frac{a+x}{x^2+ax+a^2}, \frac{ax}{x^3-a^3}$

5° $\frac{1}{x^2-ax+a^2}, \frac{1}{x^2+ax+a^2}, \frac{a^2}{x^4+a^2x^2+a^4}$

3. Eseguire le operazioni indicate nelle seguenti espressioni:

1° $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}$

2° $\frac{a}{2a-2b}+\frac{b}{2b+2a}$

3° $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}$

4° $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}$

5° $\frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a-b)^2}-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-2$

6° $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$

7° $\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}+\frac{1}{x+y}+\frac{xy}{x^3+y^3}$

8° $\frac{x^2+y^2}{xy}-\frac{x^2}{xy+y^2}-\frac{y^2}{x^2+xy}$

9° $\frac{2}{x+4}-\frac{x-3}{x^2-4x+16}+\frac{x^3}{x^3+64}$

10° $\frac{x^{3n}}{x^n-1}-\frac{x^{2n}}{x^n+1}-\frac{1}{x^n-1}+\frac{1}{x^n+1}$

11° $\frac{a+b}{ab}\left(a^2+b^2-c^2\right)+\frac{b+c}{bc}\left(b^2+c^2-a^2\right)+$
$+\frac{a+c}{ac}\left(a^2+c^2-b^2\right)$

12° $\frac{(a-b)^2}{b+a}\times\frac{b}{x(a-b)}$

13° $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}-\frac{4y^2}{x^2-y^2}\right)\times\frac{x+y}{2y}$

14° $(x^2-x+1)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)$

15° $\left(\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$

16° $\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right):\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)$

17° $\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right):\left(x+\frac{1}{x}\right)$

18° $$\frac{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{x}{1-x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x}{1+x}}.$$

Verificare le seguenti uguaglianze:

1° $$\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}=1$$

2° $$\frac{x^2y^2z^2}{b^2c^2}-\frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+$$
$$+\frac{(x^2-c^2)(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}=x^2+y^2+z^2-b^2-c^2$$

3° $$\frac{x^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(x^2-b^2)(b^2-z^2)y^2}{(y^2-b^2)b^2(c^2-b^2)}+\frac{(x^2-c^2)(c^2-z^2)y^2}{(c^2-y^2)c^2(c^2-b^2)}=$$
$$=\frac{(y^2-x^2)(y^2-z^2)}{(y^2-b^2)(y^2-c^2)}$$

4° $$\frac{1}{p^2q^2}=\frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{2}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$$

5° $$\frac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)(x+b)}+$$
$$+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}=\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

6° $$\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}=\frac{1}{1-x^2}$$

7° $$\frac{\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{c}{a+2b}}{\dfrac{c}{a+2b}-\dfrac{c}{a+3b}}=\frac{\dfrac{c}{a+b}}{\dfrac{c}{a+3b}}.$$

Trovare i valori delle seguenti espressioni:

1° $\dfrac{a-x}{b-x}$ quando è $x=\dfrac{ab}{a+b}$

2° $\dfrac{a^2x+b^2y}{x+y}$ quando è $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$

3° $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{y^2}{x^2-y^2}$ quando è $y=\dfrac{3x}{4}$

4° $\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)^3-\dfrac{x-2a+b}{x+a-2b}$ quando è $x=\dfrac{a+b}{2}$

5° $\dfrac{x+y-1}{x-y+1}$ quando è $x=\dfrac{a+1}{ab+1}$ e $y=\dfrac{ab+a}{ab+1}$.

CAPITOLO VI.

Potenze.

70. *Potenza è il prodotto di più fattori eguali:* il numero che è così preso come fattore più volte dicesi *base* della potenza; il numero *che indica quante volte lo è,* chiamasi *esponente, o grado.*

Così il prodotto $a.a$ chiamasi *potenza seconda* o, anche impropriamente *quadrato* di a e si scrive a^2: $a.a.a$ *potenza terza* o *cubo* di a e si scrive a^3 e via di seguito.

Il numero a si suole pure considerare come una potenza, cioè, come la *potenza prima* di sè stesso: è per ciò che qualche volta si scrive

$$a = a^1.$$

Queste sono definizioni ben note.

71. Anzitutto osserveremo che una potenza di un numero algebrico, essendo un prodotto di numeri algebrici, è sempre un numero algebrico: e distinguendo i varii casi noteremo che, se a è un numero positivo, ogni potenza di a è pure un numero positivo; mentre se a è negativo, è positiva ogni potenza di a con esponente pari, negativa ogni potenza con esponente dispari.

Anche questo fu già detto al n. 24.

Se poi a è un numero intero, ogni sua potenza è sempre un numero intero.

Se a è frazionario $+\frac{p}{q}$, o, $-\frac{p}{q}$ ed è irriducibile,

come si può sempre supporre, allora ogni sua potenza è pure un numero frazionario irriducibile: perchè, astraendo ora dal segno, pel quale vale la regola data dianzi, si ha:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \left(\frac{p}{q}\right)^1 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2 \cdots\cdots \left(\frac{p}{q}\right)^n$$

$$= \frac{p.p.\ldots.p}{q.q.\ldots.q}$$

$$= \frac{p^n}{q^n}$$

e come si sa dall'Aritmetica, se p e q sono primi tra loro, sono pur tali p^n e q^n.

Aggiungeremo ancora che se è

$$a = a'$$

$$m = m'$$

m ed m' interi e positivi, è manifesto che si ha

$$a^m = a'^{m'}$$

giacchè a^m e $a'^{m'}$ sono prodotti composti l'uno e l'altro di uno stesso numero di fattori rispettivamente eguali ciascuno a ciascuno.

Esporremo ora intorno alle potenze alcuni teoremi, che in parte sono già noti, ma per l'importanza di essi è utile raccoglierli qui, dandone delle dimostrazioni generali.

72. *La potenza* n^a *di un prodotto è eguale al prodotto delle potenze* n^e *dei fattori.*

Abbiasi il prodotto $a.b.c.\ldots.l$; si ha:

$$(abc\ldots l)^n = (\overset{1}{a}bc\ldots l)(\overset{2}{a}bc\ldots l)\ldots\ldots(\overset{n}{a}bc\ldots l)$$

ma, come si sa (25), si forma il prodotto di più prodotti formando un prodotto unico con tutti i fattori di quelli; si ha dunque:

$$(abc\ldots l)^n = abc\ldots l\ .\ abc\ldots l\ldots\ldots abc\ldots l$$

e giacchè l'ordine dei fattori è indifferente, così

$$(abc\ldots l)^n = a.\ a.\ a\ldots a\ .\ bbb\ldots b\ .\ ccc\ldots c\ldots\ldots lll\ldots l.$$

e infine

$$(abc\ldots l)^n = a^n\ b^n\ c^n\ldots l^n$$

come si voleva.

Questo teorema contiene, in particolare, la regola per l'innalzamento a potenza di un monomio intero; questo infatti non è altro se non un prodotto di numeri algebrici.

73. *La potenza* n^a *di una espressione frazionaria è il quoziente delle potenze* n^e *dei termini di questa.*

Infatti si ha:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \overset{1}{\frac{A}{B}} \cdot \overset{2}{\frac{A}{B}} \cdots\cdots \overset{n}{\frac{A}{B}}$$

e giacchè si fa il prodotto di più espressioni frazionarie moltiplicando i numeratori fra loro e i denominatori fra loro, così:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A\,.\,A\ldots.A}{B\,.\,B\ldots.B}$$

e infine

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$

come si voleva.

Questo teorema e il precedente ci insegnano ad innalzare a potenza un monomio frazionario: giacchè pel teorema ora dato s'innalza a potenza un monomio frazionario, che è il quoziente di due monomi interi, innalzando i suoi due termini: e l'innalzamento a potenza di questi si fa secondo che insegna il teorema precedente.

Riguardo all'innalzamento a potenza di un polinomio, noi rammentiamo di aver dato la regola per l'innalzamento a quadrato, ma non possiamo dare in questo libro la regola generale per l'innalzamento alla potenza n^a.

74. *Il prodotto di due potenze della stessa base è quella potenza della base che ha per esponente la somma degli esponenti di quelle.*

Sia il prodotto $a^m.\ a^n$.

Si ha
$$a^m = \overset{1}{a}.\ \overset{2}{a}.\ \overset{3}{a}\ldots\ldots\overset{m}{a}$$
$$a^n = \overset{1}{a}.\ \overset{2}{a}.\ \overset{3}{a}\ldots\ldots\overset{n}{a}$$

quindi (25) il prodotto $a^m\ .\ a^n$ resulta composto degli m fattori di a^m e degli n di a^n, cioè di $m+n$ fattori a: è dunque

$$a^m.\ a^n = \overset{1}{a}.\ \overset{2}{a}.\ \overset{3}{a}\ldots\ldots\overset{m+n}{a}$$
$$= a^{m+n}.$$

Osservazione. In modo analogo si dimostra che è:

$$a^m.\ a^n.\ a^p\ldots\ldots a^r = a^{m+n+p+\cdots\cdots+r}$$

75. *La potenza* n^a *della potenza* m^a *di un numero è la potenza* mn^a *del numero stesso.*

Sia a^m da innalzare alla potenza n^a; si ha per definizione

$$(a^m)^n = \overset{1}{a^m}.\ \overset{2}{a^m}\ldots\ldots\overset{n}{a^m}$$

e pel teorema precedente (osservazione)

$$(a^m)^n = a^{m+m+\cdots\cdots+m}$$

cioè

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Così, si ha pure:

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

e giacchè è:

$$mn = nm$$

ne segue

$$(a^m)^n = (a^n)^m.$$ [1]

Osservazione. Si deduce immediatamente che è:

$$\left[(a^m)^n\right]^p = a^{mnp}:$$

infatti si ha:

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

quindi sostituendo:

$$\left[(a^m)^n\right]^p = (a^{mn})^p,$$

ma, pel teorema ora dato, è:

$$(a^{mn})^p = a^{mnp}:$$

quindi,

$$\left[(a^m)^n\right]^p = a^{mnp}.$$

E di qui si vede anche subito, che, come in $(a^m)^n$ si possono scambiare fra loro i due esponenti m ed n, così in $\left[(a)^{m^n}\right]^p$ si possono scambiare in modo qualunque tra loro i tre esponenti m, n, e p.

[1] Si avverta bene di non confondere $(a^m)^n$ con $a^{(m^n)}$; perchè fossero eguali, bisognerebbe che fosse $mn = m^n$, e questo, in generale, non è.

In generale si ha:

$$\left(\cdots\left(\left((a^m)^n\right)^p\right)\cdots\right)^r = a^{mnp\cdots\cdots r}$$

e si possono permutare in tutti i modi possibili gli esponenti m, n, p, ... r.

76. *Il quoziente di due potenze della stessa base è quella potenza della medesima base, che ha per esponente la differenza fra l'esponente del dividendo e l'esponente del divisore, se quello è maggiore di questo.*

Abbiasi $\frac{a^m}{a^n}$, e sia $m = n + p$

si ha

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{n+p}}{a^n}$$
$$= \frac{a^n . a^p}{a^n}$$
$$= a^p;$$

ma è $p = m - n$: quindi

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

come si voleva dimostrare.

77. *Il quoziente di due potenze della stessa base è eguale all'unità, quando l'esponente del dividendo è eguale a quello del divisore: se poi quello è minore di questo, allora il detto quoziente è una frazione avente per numeratore l'unità e per denominatore quella potenza della stessa base, che ha per esponente la differenza fra l'esponente del divisore e l'esponente del dividendo.*

La prima parte del teorema è evidente, giacchè se in $\frac{a^m}{a^n}$ è $m = n$, ne deriva $a^m = a^n$, e quindi

$$\frac{a^m}{a^n} = 1.$$

Quanto alla seconda parte, si osserva che se è $n > m$, si potrà porre $n = m + r$: quindi

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+r}}$$

$$= \frac{a^m . 1}{a^m . a^r}$$

$$= \frac{1}{a^r}$$

e giacchè è $r = n - m$, così

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

come si voleva.

Esponenti negativi.

78. Intorno al quoziente di due potenze della stessa base, cui si riferiscono i due ultimi teoremi, si presenta qui una osservazione importante.

La formola

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

valevole nel caso di $m > n$, e l'altra

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

che vale, se è $m < n$, pongono sotto gli occhi i due elementi dai quali propriamente dipende il valore del quoziente $\frac{a^m}{a^n}$; si vede, cioè, che se è $m > n$, esso dipende da a e dalla differenza $(m-n)$, se è $m < n$, dipende da a e dalla differenza $(n-m)$; e dicendo così, noi

vogliamo significare che il quoziente $\frac{a^m}{a^n}$, se per a si prende sempre uno stesso valore, ha un valore unico e determinato per ogni valore che si attribuisca alla $(m-n)$ in un caso e alla $(n-m)$ nell'altro; e lo muta, quando muta il valore di questa.

Ciò si spiega rammentando la nota proprietà, che ha il quoziente, di rimanere invariato se si moltiplicano o si dividono i suoi due termini per un medesimo numero, e di cangiare valore, se si moltiplicano o si dividono per numeri differenti.

Moltiplichiamo i due termini a^m ed a^n per a^p; così i due nuovi termini che si ottengono, saranno ancora potenze di a: avremo

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m . a^p}{a^n . a^p}$$

$$= \frac{a^{m+p}}{a^{n+p}}$$

lo chè mostra bene come si può aggiungere ad m e ad n uno stesso numero p, senza che $\frac{a^m}{a^n}$ cangi valore. Parimente se dividiamo a^m e a^n per a^p, essendo $p < m$ e $p < n$: si ha:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\left(\frac{a^m}{a^p}\right)}{\left(\frac{a^n}{a^p}\right)} = \frac{a^{m-p}}{a^{n-p}}$$

e questo spiega, perchè si può togliere ad m e ad n uno stesso numero p, senzachè $\frac{a^m}{a^n}$ cangi valore: mentre cangerebbe sicuramente, se si moltiplicasse o dividesse a^m per una potenza a^p, e a^n per un'altra a^q, cioè,

se ad m si aggiungesse o togliesse p, mentre ad n si aggiunge o si toglie q.

Così è chiaramente spiegato come accada, che il valore del quoziente $\frac{a^m}{a^n}$, quando si prende per a sempre uno stesso valore, non dipende propriamente dai valori particolari che possono avere m ed n, ma bensì dalla loro differenza, giacchè è appunto questa che rimane invariata quando si aggiunge o si toglie uno stesso numero ad m e ad n, e che cangia, quando a questi si aggiungono o si tolgono numeri differenti.

Le due notazioni a^{m-n} e $\frac{1}{a^{n-m}}$, che si hanno dalle formule precedenti per rappresentare il quoziente $\frac{a^m}{a^n}$ nei due casi di $m > n$ e $n < m$, sono dunque meglio appropriate della stessa notazione $\frac{a^m}{a^n}$, inquantochè pongono sotto gli occhi i due elementi a ed $(m-n)$, ovvero a ed $(n-m)$, dai quali veramente dipende la quantità che si vuole rappresentare.

È da considerarsi però, che l'avere forme differenti per rappresentare $\frac{a^m}{a^n}$, secondochè è $m > n$ o $n < m$, evidentemente nuoce alla semplicità e generalità dei calcoli; nasce quindi naturalmente il desiderio di vedere se non si possa in qualche modo, senza contraddire a principii stabiliti, ridurre le due forme ad una sola; e giacchè delle due notazioni a^{m-n} e $\frac{1}{a^{n-m}}$ la prima è la più semplice, così si è condotti a ricercare come si possa ridurre la seconda alla prima, cioè, come si possa, anche quando è $m < n$, rappresentare il quoziente $\frac{a^m}{a^n}$

scrivendo a^{m-n}, precisamente come si fa quando è $m > n$.

Ora questo si ottiene subito *stabilendo la convenzione di scrivere* a^{-p} *invece di* $\frac{1}{a^p}$.

Allora infatti, se è $m < n$ e precisamente $n = m + p$, abbiamo

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^p},$$

e quindi se si scrive

$$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$$

giacchè è $-p = m - n$, così segue:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

che è appunto ciò che si voleva.

Al nuovo simbolo (a^{-p}), che così viene introdotto nell'Algebra, daremo il nome di *potenza con esponente negativo* chiamando $-p$ il suo esponente, o più brevemente lo diremo *potenza negativa*. — A questo modo noi estendiamo il significato della parola potenza: sin qui si è dato il nome di *potenza* a un prodotto di fattori tutti eguali tra loro, e l'esponente era di necessità un numero intero e positivo, e secondo questo concetto, il numero $\frac{1}{a^p}$ sarebbe propriamente la potenza p^a del numero $\frac{1}{a}$ inverso di a, poichè è $\frac{1}{a^p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$; d'ora innanzi si riguarderanno come *potenze* di un numero a anche quelle che, nel senso inteso in Aritmetica, sarebbero veramente potenze del numero $\frac{1}{a}$, cioè: le po-

tenze, nel significato aritmetico della parola, così del numero a come del suo inverso $\frac{1}{a}$ si conviene di considerarle tutte quali *potenze* di a, con esponente positivo quelle, negativo queste.

Se poi, oltre la convenzione di scrivere a^{-p} in luogo di $\frac{1}{a^p}$, con che si rende valevole la formula

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

nel caso di $m < n$, ne facciamo ancora un'altra relativa al caso di $m = n$, renderemo quella formula completamente generale.

La convenzione da farsi è, che *il simbolo* a^o *rappresenti l'unità:* infatti, giacchè, quando è $m = n$, si ha

$$\frac{a^m}{a^n} = 1,$$

posta la detta convenzione, potremo scrivere $\frac{a^m}{a^n} = a^o$ e quindi

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Dunque, riassumendo, mediante le due convenzioni

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p},\ a^o = 1$$

noi rendiamo completamente generale, come appunto si vuole, la formula

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

ed è manifesto che così facendo non contraddiciamo a

nessun principio già stabilito, inquantochè i simboli a^{-p} a^o che introduciamo per rappresentare le quantità $\frac{1}{a^p}$ e 1 prima d'ora non sono stati contemplati nell'Algebra e quindi per essi è concesso stabilire quei significati che meglio ci piacciono.

79. Dobbiamo ora determinare le regole di calcolo per queste potenze ad esponente negativo e nullo, che abbiamo introdotte; e faremo vedere che, applicando ad esse le regole già stabilite pel calcolo delle potenze ad esponente positivo, si ottiene sempre per resultato un'espressione, che, interpretata secondo le convenzioni poste, ci dà il resultato medesimo che si sarebbe ottenuto operando direttamente sulle quantità che con *le potenze negative e zero s'intendono rappresentate.*

Le regole fondamentali pel calcolo delle potenze ad esponente positivo sono, come abbiamo veduto, espresse dalle seguenti formule:

1) $(abc \ldots . d)^m = a^m . b^m . c^m \ldots . d^m$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

3) $a^m . a^n = a^{m+n}$

4) $(a^m)^n = a^{mn}$

5) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$

Mostriamo che queste formule valgono anche se gli esponenti, che in esse compariscono, si suppongono negativi o nulli.

1° Si consideri l'espressione:

$$(abc \ldots d)^{-m};$$

essa rappresenta, secondo le nostre convenzioni, la frazione $\frac{1}{(abc...d)^m}$; ma per la 1) si ha:

$$\frac{1}{(abc...d)^m} = \frac{1}{a^m . b^m . c^m ... d^m}$$

$$= \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} \cdot \frac{1}{c^m} \cdots \frac{1}{d^m} : \quad (65)$$

e giacchè è

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m} \ , \ \frac{1}{b^m} = b^{-m}, \ldots \frac{1}{d^m} = d^{-m}$$

così

$$(abc...d)^{-m} = a^{-m} . b^{-m} . c^{-m} \ldots\ldots d^{-m}.$$

La formula 1) sussiste dunque anche se l'esponente, che in essa comparisce, è negativo.

Se ora si osserva che, per convenzione, è:

$$(abc...d)^0 = 1$$
$$a^0 = 1$$
$$b^0 = 1$$
$$c^0 = 1$$
$$\ldots\ldots$$

evidentemente si ha pure:

$$(abc...d)^0 = a^0 . b^0 . c^0 \ldots\ldots d^0.$$

Così è provato che la formula

1)' $$(abc...d)^m = a^m . b^m . c^m ... d^m$$

vale qualunque sia m, cioè per m positivo, nullo e negativo.

2° Si consideri l'espressione $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}$: essa, per definizione, rappresenta la frazione $\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$: ma per la 2) è:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

quindi

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a^m}{b^m}\right)}$$

$$= \frac{b^m}{a^m} \qquad (66)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{a^m}\right)}{\left(\frac{1}{b^m}\right)} \qquad \text{onde}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}$$

come si voleva.

È poi evidente che è

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = \frac{a^0}{b^0}.$$

poichè questa non è altro se non l'identità

$$1 = \frac{1}{1}.$$

La formula

2)' $$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

sussiste dunque per m positivo, nullo e negativo.

3° Passiamo ora alla moltiplicazione di due potenze della stessa base.

Primieramente si abbiano da moltiplicare le due

$$a^{-m} \quad \text{per} \quad a^{n}.$$

Per le nostre convenzioni, è:

$$a^{-m}=\frac{1}{a^{m}},$$

quindi

$$a^{-m}.a^{n}=\frac{1}{a^{m}}\cdot a^{n}$$

$$=\frac{a^{n}}{a^{m}} \qquad (65)$$

ma è stato stabilito che, sia $n \gtrless m$, sempre si ha:

$$\frac{a^{n}}{a^{m}}=a^{n-m}$$

quindi

$$a^{-m}\cdot a^{n}=a^{n-m}$$

$$=a^{-m+n}$$

cioè la formula

$$a^{m}.\,a^{n}=a^{m+n}$$

è vera anche se uno dei due esponenti è negativo.

Sieno ora negativi entrambi gli esponenti: cioè sia da moltiplicare

$$a^{-m} \quad \text{per} \quad a^{-n}.$$

Avendosi

$$a^{-m}=\frac{1}{a^{m}}$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$$

così ne deriva

$$a^{-m}\cdot a^{-n}=\frac{1}{a^{m}}\cdot\frac{1}{a^{n}}$$

epperò

$$a^{-m}\cdot a^{-n}=\frac{1}{a^{m+n}}$$

ma, per la solita convenzione,

$$\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-(m+n)}$$

$$=a^{-m-n}$$

$$=a^{(-m)+(-n)}$$

quindi

$$a^{-m}\cdot a^{-n}=a^{(-m)+(-n)}$$

il che prova vera la formula 3) anche se i due esponenti in essa sono negativi.

È poi evidente che essa sussiste pure se uno o entrambi hanno il valore zero; dunque la

3)' $$a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}$$

vale per ogni valore di m e di n positivo, nullo o negativo.

4° Per l'innalzamento a potenza di una potenza distingueremo tre casi:

1° Sia $(a^{m})^{-n}$.

Si ha, per definizione

$$(a^{m})^{-n}=\frac{1}{(a^{m})^{n}}$$

ma per la 4), è

$$(a^{m})^{n}=a^{mn}$$

quindi

$$(a^{m})^{-n}=\frac{1}{a^{mn}}$$

e per la nostra convenzione

$$\frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$$

onde

$$(a^m)^n = a^{-mn}$$

come si voleva.

2° Abbiasi ora $(a^{-m})^n$.

Si ha

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

onde

$$(a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n$$

$$= \frac{1}{a^{mn}} \qquad (73)$$

$$= a^{-mn}$$

3° Sia infine $(a^{-m})^{-n}$.

Si ha

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

onde

$$(a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{mn}}\right)}$$

$$= a^{mn}.$$

Le tre formule

$$(a^m)^{-n} = a^{-mn}\ ;\ (a^{-m})^n = a^{-mn}\ ,\ (a^{-m})^{-n} = a^{mn}$$

provano che la formula

$$4)' \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

sussiste anche se m o n o ambedue sono negativi: ed è poi evidente che essa vale pure se uno, o ambedue sono nulli.

5° Si consideri infine la divisione di due potenze della stessa base: e suppongasi prima di tutto che sia a^{-m} da dividersi per a^n.

Si ha

$$\frac{a^{-m}}{a^n} = \frac{\left(\frac{1}{a^m}\right)}{a^n}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{a^m}\right)}{\left(\frac{a^n}{1}\right)}$$

$$= \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} \qquad (66)$$

$$= \frac{1}{a^{m+n}} \qquad (65)$$

$$= a^{-(m+n)}$$

$$= a^{-m-n}$$

come si voleva.

Sia poi $\frac{a^m}{a^{-n}}$: si ha

$$\frac{a^m}{a^{-n}} = \frac{a^m}{\left(\frac{1}{a^n}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{a^m}{1}\right)}{\left(\frac{1}{a^n}\right)}$$

$$= \frac{a^m}{1} \cdot \frac{a^n}{1}$$
$$= a^{m+n}$$
$$= a^{m-(-n)}.$$

Sia infine $\frac{a^{-m}}{a^{-n}}$.

Abbiamo

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{\left(\frac{1}{a^m}\right)}{\left(\frac{1}{a^n}\right)}$$
$$= \frac{1}{a^m} \cdot \frac{a^n}{1}$$
$$= \frac{a^n}{a^m}$$
$$= a^{n-m}$$
$$= a^{-m+n}$$
$$= a^{(-m)-(-n)}.$$

Le tre formule

$$\frac{a^{-m}}{a^n} = a^{-m-n}, \quad \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)}, \quad \frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{(-m)-(-n)}$$

mostrano che la formula

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

vale anche se m, o n, o entrambi sono negativi.

Se poi fosse zero m, ed n positivo, quella diverrebbe:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

che è appunto la convenzione stabilita: e se n è negativo, diviene

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^{-(-n)} \qquad \text{ossia}$$
$$\frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)} = a^n$$

che evidentemente è giusta.

Se è zero n ed m positivo o negativo, allora diviene

$$\frac{a^m}{1} = a^m$$

che è una identità; e se entrambi sono zero, allora diviene

$$\frac{1}{1} = 1.$$

Concludendo, la formula

5)' $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

vale per ogni valore positivo, nullo, o negativo di m e di n.

Raccogliendo il sin qui detto, si può concludere che la *convenzione* fatta di riguardare come *potenze ad esponente negativo* le frazioni aventi per numeratore l'unità e per denominatore una potenza nel senso aritmetico della parola, mentre ci arreca il vantaggio di rendere generale l'importante formula

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

non produce poi nell'esecuzione dei calcoli alcuna

complicazione maggiore, perchè per queste *nuove potenze,* come si è veduto, valgono le stesse regole che si hanno per quelle ad esponente positivo; e tali regole di calcolo acquistano così una maggiore generalità. L'introduzione degli esponenti negativi è dunque pienamente giustificata.

Esercizi.

1. Eseguire le operazioni indicate nelle seguenti espressioni:

1° $(2x^2y^3z^4)^3$, 2° $(-2x^2y^2z^2)^3$

3° $(-3ab^2c^3)^4$, 4° $\left(\frac{2x^3}{3y^2}\right)^2$

5° $\left(\frac{-4x}{3y^2}\right)^3$, 6° $\left(\frac{-x^3}{y^2z^2}\right)^4$

7° $(a+b)^3(a-b)^3$, 8° $(1+x)^4(1-x)^4$

9° $\left(\frac{6a}{5b}\right)^2 \times \left(\frac{-5b}{3a}\right)^3$

10° $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{x}\right)^n$

11° $(a-b)^{m-1} \cdot (a-b)$

12° $\frac{(x+y)^{m-1}}{x^{n-1}} - \frac{x^n}{(x+y)^m}$

13° $(a-b)^{2n+1} \cdot (b-a)^{2n}$

14° $\left[(a^3bc^2)^5\right]^6$, 15°. $(x^{n+1})^4$

16° $\frac{(a^2-x^2)^3}{(a+x)^3}$, 17°. $\frac{a^{b+c}}{a^{b-c}}$

18° $\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^3 \cdot \left(\frac{a-b}{x-y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\right)^2$.

2. Semplificare le seguenti espressioni:

1° $(2^{-2})^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\frac{1}{4^{-2}}$, $(0,2)^{-1}$

2° $a\left(\frac{a}{x}\right)^{-1}$, $c^7 . c^{-8} . c^1$

3° $\frac{a^8}{a^{-3}}$, $\frac{ab^{-4}}{x^{-2}}$, $\frac{a^{-8}}{-a^8}$

4° $(-a^3)^{-12}$, $(-a^{2n-1})^2$

5° $\frac{(2^{-3} . 5^{-3} . 7^{-3})^{-2}}{10^{-4}}$

6° $(x^{-3}+y^{-3}) \times (x^{-3}-y^3)$

7° $(a^{-2}+a^{-1}+1) \times (a^{-1}-1)$

8° $(a^4-2+a^{-4}) \times (a^2-a^{-2})$

9° $(64x^{-3}+27y^{-6}) : (4x^{-1}+3y^{-2})$

10° $(2x^5y^{-3}-5x^4y^{-2}+7x^3y^{-1}-5x^2+2xy) :$
$: (x^3y^{-3}-x^2y^{-2}+xy^{-1})$

11° $(-3a^{-5}+2a^{-4}b^{-1}) \times (-2a^{-3}-3a^{-4}b)$

12° $(x^{-4}+x^{-2}a^{-2}-a^{-4}) : (x^{-2}+a^{-1}x^{-1}+a^{-2})$

CAPITOLO VII.

Eguaglianze.

---

80. Quando si afferma che un numero a è eguale ad un numero b e si esprime ciò scrivendo:

$$a = b$$

si dice, che si stabilisce *un' eguaglianza:* a e b sono i membri dell'eguaglianza: a il 1°, e b il 2°; ed è evidente che si può anche scrivere

$$b = a.$$

Sono *eguaglianze* tutte le formule, che siamo venuti sin qui stabilendo e mediante le quali abbiamo espresso le regole di calcolo: così le

$$\alpha) \quad \begin{aligned} a+b &= b+a \\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)\,(a-b) &= a^2-b^2 \\ a(b+c) &= ab+ac \\ a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \end{aligned}$$

sono altrettante *eguaglianze.*

Anche queste altre

$$\beta) \quad \begin{aligned} 2 &= 2 \\ a &= a \\ a+b &= a+b \\ ab &= ab \end{aligned}$$

sono eguaglianze, ma tra queste e quelle vi ha una differenza essenziale: le β) affermandoci che un numero è eguale a sè stesso affermano cosa che è evidente di per sè, e la nostra mente non acquista per esse alcuna cognizione; le α) invece sono eguaglianze non affatto evidenti per loro stesse, ma che discendono come conseguenze di una serie di definizioni e giudizi, e così esse ci offrono sempre una cognizione che di per sè non apparisce.

Le β), in cui i due membri hanno la stessa forma e lo stesso valore, si dovrebbero più propriamente chiamare *identità di forma e di valore;* le α), in cui i due membri hanno lo stesso valore ma forme differenti, *identità di valore e non di forma,* o anche, più semplicemente, *identità* le prime, *equivalenze* le seconde.

81. Richiamiamo qui, allo scopo di presentarli raccolti insieme, alcuni principii già stabiliti e dei quali già abbiamo fatto uso nei ragionamenti precedenti.

1° *Se a due numeri eguali si aggiungono numeri eguali, si ottengono numeri eguali.*

2° *Se due numeri eguali si moltiplicano per numeri eguali, i prodotti saranno pure eguali.*

3° *Se due numeri eguali si dividono per numeri eguali, si ottengono numeri eguali.* [1]

4° *Se due numeri eguali si elevano ad esponenti eguali, si ottengono numeri eguali.*

Vediamo ora che delle prime tre di queste proposizioni sono vere anche le reciproche; non è però vera sempre la reciproca della 4ª.

[1] I numeri eguali, pei quali si divide, debbono essere diversi da zero, perchè, come è noto, il dividere per zero dei numeri diversi da zero non ha per noi significato.

5° *Se, aggiungendo numeri eguali a due numeri dati si ottengono numeri eguali, i dati numeri debbono pure essere eguali.*

Se si ha

$$a+b=a'+b'$$

ed è

$$b=b'$$

diciamo essere anche

$$a=a'$$

Aggiungansi ai numeri eguali $a+b$ e $a'+b'$ rispettivamente i numeri eguali $-b$ e $-b'$; in virtù della 1ª proposizione, si otterranno numeri eguali: cioè

$$a+b-b=a'+b'-b'$$

ovvero

$$a=a'.$$

6° *Se, moltiplicando due dati numeri per numeri eguali, che non siano zero, si ottengono numeri eguali, i dati numeri saranno pure eguali.*

Se è

$$ab=a'b'$$

e

$$b=b'$$

ne deriva

$$a=a'$$

purchè non sia

$$b=b'=0.$$

Si dividano i numeri eguali ab e $a'b'$ pei numeri eguali b e b': in virtù della 3ª proposizione, si avranno numeri eguali; cioè

$$\frac{ab}{b}=\frac{a'b'}{b'}$$

ovvero

$$a=a'.$$

Se fosse $b=b'=0$, allora non si potrebbe necessariamente concludere $a=a'$; l'eguaglianza

$$ab=a'b'$$

cioè

$$a\times 0=a'\times 0$$

sussisterebbe anche se a ed a' fossero differenti.

Osservazione. Se l'uguaglianza $ab=a'b'$ si scrive

$$ba=b'a',$$

così, supponendo sempre che si abbia

$$b=b',$$

ne segue, come dianzi

$$a=a'$$

il che si può enunciare dicendo: *se due numeri eguali* b *e* b' *moltiplicati rispettivamente pei numeri* a *ed* a' *producono numeri eguali, allora i moltiplicatori* a *ed* a' *considerati, debbono pure essere uguali,* escluso sempre che sia $b=b'=0$.

7° *Se, dividendo due dati numeri per numeri eguali, che non sieno zero, si ottengono numeri eguali, anche i dati numeri debbono essere eguali.*

Se è

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

e

$$b=b'$$

ne deriva

$$a=a'$$

supposto che non sia $b=b'=0$.

Si moltiplichino i numeri eguali $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ pei numeri eguali b e b': in virtù della 2ª proposizione si ot-

tengono numeri eguali; cioè

$$\frac{a}{b} \cdot b = \frac{a'}{b'} \cdot b'$$

cioè

$$a = a';$$

si esclude che sia $b = b' = 0$, perchè i quozienti $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ in tale ipotesi non avrebbero significato.

Osservazione. Se si suppone

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

insieme con l' altra

$$a = a',$$

ne deriva

$$b = b'$$

Infatti, si moltiplichino i numeri eguali $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ rispettivamente per b e b'; si ottengono i numeri a ed a' che sono eguali: quindi per l' *osservazione* fatta precedentemente dovrà essere

$$b = b';$$

escluso che sia $a = a' = 0$: perchè, se ciò fosse, verrebbe $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = 0$ e quindi $\frac{a}{b} \cdot b = 0, \frac{a'}{b'} \cdot b' = 0$ anche se b e b' sono differenti.

8° *Se due dati numeri elevati ad esponenti eguali producono numeri eguali, i dati numeri sono necessariamente eguali quando gli esponenti sono dispari, possono non esserlo quando gli esponenti sono pari.*

1. Sia m positivo e dispari; avendosi

$$A^m = B^m$$

diciamo che deve essere

$$A = B;$$

si vede subito intanto che A e B debbono essere positivi se A^m e B^m sono positivi, negativi se A^m e B^m sono negativi (24): dunque A e B sono sempre di segni eguali. Ora si osservi che sussiste l'eguaglianza (54)

$$A^m - B^m = (A - B)\,(A^{m-1} + A^{m-2}B + A^{m-3} \cdot B^2 + \\ + \ldots + AB^{m-3} + B^{m-1}$$

e che l'espressione $A^{m-1} + A^{m-2}B + \ldots + B^{m-3}$ è sempre positiva, perchè ogni termine di essa è positivo; ciò è evidente, se A e B sono positivi; se poi sono negativi, si noti che, m essendo dispari, $m-1$ è pari, quindi A^{m-1} è positivo: $m-2$ è dispari, epperò A^{m-2} è negativo, ma anche B essendo tale, $A^{m-2} \cdot B$ è positivo: $m-3$ è pari, epperò $A^{m-3} \cdot B^2$ è positivo: così continuando si trova che ogni termine della detta espressione è, come dicemmo, sempre positivo; ma deve essere $A^m - B^m = 0$: giacchè non è zero l'altro fattore, sarà dunque (23) $A - B = 0$ cioè, $A = B$, come si voleva.

Se m è negativo e dispari $-m'$, si sa che

$$A^m = \frac{1}{A^{m'}}, \quad B^m = \frac{1}{B^{m'}};$$

ora l' eguaglianza

$$\frac{1}{A^{m'}} = \frac{1}{B^{m'}}$$

(7°, *Osservazione*), richiede che sia $A^{m'} = B^{m'}$, e allora cadiamo nel caso precedente: quindi si conclude anche qui

$$A = B.$$

2. Sia m positivo e pari $2n$;[1] si può scrivere

$$A^m - B^m = A^{2n} - B^{2n} = (A^2)^n - (B^2)^n :$$

e se per un momento si pone $A^2 = x$, $B^2 = y$, avremo

$$A^m - B^m = (A^2)^n - (B^2)^n = x^n - y^n$$
$$= (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1});$$

ma x e y sono numeri positivi, perchè quadrati di altri numeri, dunque l'espressione

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

non può essere zero: quindi perchè sia

$$A^m - B^m = x^n - y^n = 0$$

è necessario e sufficiente che sia $x - y = 0$, cioè $A^2 - B^2 = 0$; ma:

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

quindi dovrà essere

$$A - B = 0$$

ovvero

$$A + B = 0:$$

cioè

$$A = B \quad \text{ovvero} \quad A = -B.$$

Così è provato che se m è pari, dall'essere $A^m = B^m$, deriva che A e B sono eguali in valore assoluto, ma

[1] Un numero intero, come è noto, si dice *pari*, quando è divisibile per 2, ossia, quando è un multiplo di 2: è quindi evidente che un numero pari è sempre della forma $2n$ dove n indica un numero intero qualsiasi.

Ne deriva di conseguenza che un numero dispari è della forma $2n+1$ ovvero, ciò che lo è stesso, $2n-1$.

non però necessariamente che sieno anche eguali di segno.

Se m è negativo e pari $-2n$, si ha

$$A^{-2n} = \frac{1}{A^{2n}} \quad , \quad B^{-2n} = \frac{1}{B^{2n}} ,$$

e dall'eguaglianza

$$\frac{1}{A^{2n}} = \frac{1}{B^{2n}}$$

deriva (7°, *Osservazione*)

$$A^{2n} = B^{2n} ,$$

e quindi, per quanto dianzi è stato detto,

$$A = B \quad \text{ovvero} \quad A = -B.$$

Osservazione. Se m è *zero*, dall'essere

$$A^m = B^m$$

non si può affatto concludere

$$A = B ,$$

perchè qualunque numero elevato all'esponente *zero* vale 1.