LEZIONI

DI

CALCOLO SUBLIME

DI

ANTONIO BORDONI

PROFESSORE NELL' I. R. UNIVERSITA' DI PAVIA,
UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETA' ITALIANA,
ecc. ecc.

TOMO II.

MILANO
PER P. E. GIUSTI FONDITORE-TIPOGRAFO
1831.

LEZIONI

DI

CALCOLO SUBLIME

PARTE OTTAVA

PRIMITIVE DELLE EQUAZIONI TRA DERIVATE PRESE RISPETTO AD UNA SOLA VARIABILE.

LEZIONE PRIMA

Delle primitive complete delle equazioni alle derivate del primo ordine.

277. Una equazione tra due variabili, si chiama *primitiva* di una alle derivate del primo ordine, quando la sua derivata esatta combinata opportunamente con essa, se occorre, dia quella alle derivate; e si chiama, *primitiva completa*, se essa contiene una costante arbitraria non esistente nella equazione alle derivate; *primitiva particolare*, se si può desumere da questa, dando un valore costante ed individuato all'arbitraria; e *primitiva singolare*, quando, per desumerla dalla

L'equazione $au' - bu = \mathrm{o}$, per l'esposto dianzi, somministra $u = Be^{\int\frac{b}{a}}$, e la seconda cioè $aut' = c$ evidentemente $t' = \frac{c}{au}$ ossia $t = \frac{\mathrm{I}}{B}\int\frac{c}{a}e^{-\int\frac{b}{a}} + K$; e però si avrà

$$y = \left(K + \frac{\mathrm{I}}{B}\int\frac{c}{a}e^{-\int\frac{b}{a}}\right)Be^{\int\frac{b}{a}} \text{ ovvero } y = \left(D + \int\frac{c}{a}e^{-\int\frac{b}{a}}\right)e^{\int\frac{b}{a}}$$

per primitiva richiesta. La D, posta visibilmente in vece di BK, esprime la costante arbitraria; e sì la primitiva $\int\frac{b}{a}$, che la $\int\frac{c}{a}e^{-\int\frac{b}{a}}$ entrambe rispetto alla x, sono particolari.

279. Quando una equazione alle derivate sia ridotta alla forma $ay' + b = \mathrm{o}$, e che la a sia funzione della sola y, e la b funzione della sola x, si suol dire, che in essa le variabili sono separate.

La primitiva di sì fatte equazioni è $\int a\,dy + \int b\,dx = K$, ove la K esprime la costante arbitraria; e la conoscenza effettiva della equazione richiesta dipenderà dalle primitive $\int a\,dy$, $\int b\,dx$; cioè dalle quadrature (§ 180) degli spazj ordinari delle curve aventi le ordinate $a(y)$, $b(x)$ corrispondenti alle ascisse y, x.

Vogliasi la primitiva della equazione

$$ahy' + bk = \mathrm{o}$$

nella quale h, k siano funzioni della sola y, e le a, b della sola x.

Si divida pel prodotto ak, e si avrà la $\frac{h}{k}y' + \frac{b}{a} = \mathrm{o}$; equazione nella quale le variabili sono separate; e la cui primitiva è

$$\int\frac{h}{k}\,dy + \int\frac{b}{a}\,dx = K.$$

Per iscoprire, se le α, β, che entrano in una equazione della forma $\alpha y' + \beta = \mathrm{o}$, ove la y' vi è nel solo modo visibile, siano ciascuna il prodotto di due funzioni l'una della x e l'altra della y, come si è supposto nella equazione qui trattata, si potrà procedere colla regola seguente.

Si cerchi quel massimo divisor comune delle funzioni $\alpha(x, y)$, $\alpha'(x)$, che è funzione della sola y; per esso si divida la $\alpha(x, y)$, e se il quoto non conterrà la y, la $\alpha(x, y)$ eguaglierà il prodotto di due funzioni l'una della x e l'altra della y, la prima delle quali sarà il quoto ottenuto e l'altro lo stesso massimo divisor comune trovato: altrettanto dicasi della $\beta(x, y)$.

280. Troviamo la primitiva della equazione $\alpha y' + \beta = \mathrm{o}$, supposto le α, β funzioni delle x, y *omogenee* e di dimensioni eguali entrambi ad n.

Le equazioni che hanno questa proprietà, si chiamano *equazioni omogenee*.

Si supponga $y = xu$, ove la u esprima una funzione incognita della x: pongasi questo valore della y nelle $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$; e si abbia

$$\alpha(x, xu) = ax^n, \text{ e } \beta(x, xu) = bx^n,$$

ove le a, b sono funzioni della sola u; e lo stesso xu si sostituisca anco nella equazione data; e si avrà la seguente

$$a(u + xu')x^n + bx^n = \mathrm{o} \text{ ossia } a(u + xu') + b = \mathrm{o},$$

la quale visibilmente riducesi alla

$$\frac{1}{x} + \frac{au'}{au + b} = 0,$$

in cui le variabili x, u sono separate; ed ha per primitiva

$$\log . x + \int \frac{a}{au + b}\, du = K.$$

Sostituendo in questa equazione, dopo aver eseguita l'operazione $\int \frac{a}{au+b} du$, in luogo della u il suo valore $\frac{y}{x}$, essa si ridurrà tra le x, y, la quale sarà la primitiva richiesta.

281. Si voglia la primitiva della equazione

$$y + xf(y') + F(y') = 0,$$

la quale comprende come caso particolare le omogenee.

Suppongasi $y = \int u$, e però $y' = u$; e l'equazione data ridurrassi

$$\int u + xf(u) + F(u) = 0,$$

la cui derivata esatta è la seguente

$$u + f(u) + \left(xf'(u) + F'(u)\right) u' = 0.$$

In questa equazione cangisi la variabile principale, dalla x nella u, cioè pongasi in essa (§ 66) $\frac{1}{x'(u)}$ in vece della u'; e si avrà la

$$\left(u + f(u)\right)\left(\frac{dx}{du}\right) + xf'(u) = -F'(u),$$

la quale è lineare, per cui si sa trovare la primitiva (§ 278). Di fatto, supposto $x = \mu\xi$, ove ξ, μ esprimano due funzioni della u, la ricerca della sua primitiva

riducesi a quella delle primitive delle due

$$\left(u+f(u)\right)\left(\frac{d\xi}{du}\right) + \xi f'(u) = 0, \quad \left(u+f(u)\right)\xi\left(\frac{d\mu}{du}\right) + F'(u) = 0,$$

nelle quali le variabili sono immediatamente separabili, come abbiamo già veduto nel § 278 medesimo.

Combinando la primitiva della

$$\left(u + f(u)\right)\left(\frac{dx}{du}\right) + xf'(u) = -F'(u),$$

alla $y + xf(u) + F(u) = 0$ talmente da eliminare la quantità u, avrassi una equazione tra le x, y ed una costante arbitraria, la quale sarà equivalente alla data e però ne sarà la primitiva richiesta.

Se fosse $F(y') = 0$, cioè se mancasse l'ultimo termine della equazione qui trattata, essa si ridurrebbe alla

$$y + xf(y') = 0,$$

che sciolta rispetto alla y' si riduce omogenea; e però la sua primitiva si potrà avere e col metodo esposto nel paragrafo antecedente ed anco coll'eliminare la u dalla equazione $y + xf(u) = 0$ mediante la primitiva della $\left(u + f(u)\right)\left(\frac{dx}{du}\right) + xf'(u) = 0$.

282. Così, la primitiva di una equazione contenente le sole quantità x, y', ovvero le y, y' si può anch'essa scoprire colla stessa regola esposta nel paragrafo antecedente: comunemente però si scopre col metodo seguente.

Sciolta rispetto alla y', abbiasi per la prima $y' = \psi(x)$, e per la seconda $y' = \Delta(y)$: la primitiva della $y' = \psi(x)$ è $y - \int \psi\, dx = K$, e quella della $y' = \Delta(y)$ è $\int \frac{1}{\Delta(y)} dy - x = K$, ove K esprime la costante arbitraria: tutto ciò è evidente.

283. Vi sono molte equazioni alle derivate del primo ordine, le quali si possono condurre all'una od all'altra famiglia o forma di quelle già contemplate, mediante opportune trasformazioni, e con ciò conseguire le loro primitive; per dare un esempio abbiasi la

$$(a+bx+cy)y'+d+ex+gy=0$$

ove le a, b, c, d, e, g esprimono quantità date e costanti.

Si supponga $x=\alpha+t$, ed $y=\beta+u$: le α, β esprimano due costanti, e le t, u due funzioni della x.

Sostituendo questi valori delle x, y nella proposta equazione, si ha la

$$(a+b\alpha+c\beta+bt+cu)u'+(d+e\alpha+g\beta+et+gu)t'=0:$$

si determinino le α, β talmente da soddisfare le due equazioni

$$a+b\alpha+c\beta=0, \quad d+e\alpha+g\beta=0,$$

le quali danno

$$\alpha=\frac{cd-ag}{bg-ce}, \quad \beta=\frac{bd-ae}{bg-ce};$$

e la equazione trovata tra le funzioni t, u si ridurrà alla

$$(bt+cu)u'+(et+gu)t'=0 \text{ ossia } (bt+cu)\left(\frac{du}{dt}\right)+et+gu=0,$$

della quale si sa trovare la primitiva, perchè è omogenea.

La primitiva di quest'ultima equazione suppongasi

$$F(t, u, k)=0,$$

ove la k esprime la costante arbitraria; e sarà

$$F(x-\alpha, y-\beta, k)=0$$

la richiesta; giacchè dalle due supposte $x=\alpha+t$, $y=\beta+u$ hansi $t=x-\alpha$, $u=y-\beta$.

Se fosse $bg=ce$ ossia $b=\frac{ce}{g}$, la trasformazione qui eseguita non avrebbe più luogo: in questo caso però la proposta equazione riducesi

$$\left(a+\frac{c}{g}(ex+gy)\right)y'+d+ex+gy=0,$$

per la quale supposto $ex+gy=u$, e però $y'=\frac{u'-e}{g}$, si ottiene la seguente

$$\left(a+\frac{c}{g}u\right)\left(\frac{u'-e}{g}\right)+d+u=0$$

di cui le variabili si possono separare, e perciò avere la sua primitiva mediante l'esposto nel § 279.

284. Si incontrano alcune equazioni alle derivate, che ridotte ad avere la forma $ay'+b=0$, le a, b riescono funzioni di entrambe le variabili x, y, ma tali, che è identica la equazione seguente $a'(x)=b'(y)$, per cui (§ 275) il binomio $ay'+b$ è una derivata esatta di una funzione delle x, y: queste sono quelle equazioni, che si chiamano derivate esatte.

Quando le a, b siano cosiffatte funzioni delle x, y, che si concepisca immediatamente, di qual funzione delle x, y la $ay'+b$ sia derivata, eguagliando questa funzione ad una costante, si ottiene senza altre considerazioni la primitiva completa della $ay'+b=0$.

Negli altri casi, supposto sempre identica la equazione $a'(x)=b'(y)$ si potrà avere la primitiva richiesta col metodo seguente.

Trovisi una primitiva della a rispetto alla y, e sia $p(x, y)$; indi si trovi una primitiva della $b-p'(x)$ rispetto alla x, e sia $q(x)$: e la equazione primitiva richiesta sarà $p(x, y)+q(x)=K$.

Comincio a dimostrare, che la quantità $b - p'(x)$ non contiene la y.

Per essere $p'(y) = a$, hassi $\left(\frac{dp'(y)}{dx}\right)$ ossia $\left(\frac{dp'(x)}{dy}\right) = a'(x)$; per cui, essendo $a'(x) = b'(y)$, sarà anco

$$b'(y) = \left(\frac{dp'(x)}{dy}\right) \text{ cioè } \left(\frac{d\big(b - p'(x)\big)}{dy}\right) = 0 ;$$

equazione che significa appunto, che $b - p'(x)$ non contiene la y.

Fatto ciò, osservisi, che dalla equazione $p(x, y) + q(x) = K$ si ha la seguente

$$p'(x) + p'(y)y' + q'(x) = 0 \text{ ossia la}$$

$$p'(x) + ay' + b - p'(x) = 0 \text{ cioè la } ay' + b = 0,$$

che è la stessa data. Quindi la $p(x, y) + q(x) = K$ sarà effettivamente l'equazione primitiva della data medesima.

285. Qualunque sia la equazione data alle derivate del primo ordine, esiste sempre un fattore od una quantità funzione delle x, y, per la quale moltiplicando ciascun membro della medesima equazione data, già ridotta alla forma $y' + \frac{b}{a} = 0$, ne somministra un'altra, che è derivata esatta.

La equazione data, ridotta alla forma qui esposta, si indichi colla $y' + f(x, y) = 0$; e la $F(x, y) = a$ rappresenti la sua primitiva completa, ove la a è l'opportuna costante arbitraria.

Questa primitiva dà $y' = -\frac{F'(x)}{F'(y)}$; e però avrassi

$$f(x, y) = \frac{F'(x)}{F'(y)} \text{ ossia } y' + f(x, y) = y' + \frac{F'(x)}{F'(y)}, \text{ cioè}$$

$$\big(y' + f(x, y)\big)\, F'(y) = F'(x) + F'(y)y'.$$

Moltiplicando adunque ciascun membro della equazione data per la quantità $F'(y)$, si ha la $y'F'(y) + F'(x) = 0$, che è visibilmente derivata esatta.

Dalla stessa ultima equazione, qui trovata, si desume anco la seguente

$$\big(y' + f(x, y)\big)\, F'(y)\,\psi(F) = F' \cdot \psi(F),$$

la quale, qualunque sia la funzione indicata colla $\psi(F)$, ha il secondo membro derivata esatta.

Si concluda per tanto, che tutti i fattori o le quantità della forma $\psi(F)\,F'(y)$ ossia $\psi(a)\left(\frac{da}{dy}\right)$ sono atti a rendere la equazione

$$y' + f(x, y) = 0$$

una derivata esatta.

Ora esporrò una proprietà del fattore atto a rendere la equazione $ay' + b = 0$ una derivata esatta, qualunque funzione delle x, y siano a, b, col soccorso della quale talvolta si può individuare lo stesso fattore, senza conoscere la primitiva della equazione data.

Il fattore si chiami $\mu(x, y)$: dovrà essere derivata esatta il binomio $\mu a y' + b\mu$, e però identica la equazione $\left(\frac{d \cdot \mu a}{dx}\right) - \left(\frac{d \cdot \mu b}{dy}\right) = 0$ (§ 273), la quale sviluppata si riduce alla seguente

$$a\mu'(x) - b\mu'(y) + \big(a'(x) - b'(y)\big)\,\mu = 0:$$

dimodochè, ogni valore della funzione μ, che soddisfaccia questa equazione, sarà un fattore atto a rendere derivata esatta la proposta equazione cioè la $ay'+b=o$.

La ricerca di valori della μ soddisfacenti la equazione, qui trovata, include difficoltà, non minori di quelle della ricerca della primitiva della $ay'+b=o$; per cui, generalmente parlando, la cognizione della medesima equazione trovata in μ e sue derivate parziali $\mu'(x)$, $\mu'(y)$ è di poca utilità.

Se la quantità $\frac{1}{a}\big(a'(x)-b'(y)\big)$ riescirà funzione della sola x, ovvero la $\frac{1}{b}\big(a'(x)-b'(y)\big)$ funzione della sola y, si potranno individuare valori delle μ, i quali nel primo caso siano funzioni della sola x, e nell'altro della sola y.

Di fatto, nel primo caso, suppongasi μ funzione della sola x, ossia ammettasi $\mu'(y)=o$, e la equazione in μ trovata, ridurrassi alla

$$\mu'(x)-\frac{1}{a}\big(b'(y)-a'(x)\big)\mu=o,$$

della quale, per essere lineare, si sa trovare la primitiva; e però si potranno individuare funzioni della sola x, che siano fattori atti a rendere derivata esatta la equazione $ay'+b=o$, sempreché $\frac{1}{a}\big(b'(y)-a'(x)\big)$ riesca funzione della sola x, o non contenga la variabile y.

Così, pel secondo caso, cioè quando $\frac{1}{b}\big(a'(x)-b'(y)\big)$ non contenga esplicitamente la x; supposto μ funzione della sola y ossia $\mu'(x)=o$, la medesima anzidetta equazione si riduce alla seguente

$$\mu'(y)-\frac{1}{b}\big(a'(x)-b'(y)\big)\mu=o,$$

che somministra facilmente funzioni della sola y valori della μ, che siano fattori atti a rendere la equazione $ay'+b=o$ una derivata esatta, quando, lo ripeto, la quantità $\frac{1}{b}\big(a'(x)-b'(y)\big)$ non contenga la x esplicitamente.

Qualora fosse preventivamente nota la famiglia delle funzioni delle x, y, alla quale appartenesse la $\mu(x,y)$, potrebbesi individuare la μ, soddisfacendo la equazione risultante, col porre tal famiglia di funzioni nella equazione

$$a\mu'(x)-b\mu'(y)+\big(a'(x)-b'(y)\big)\mu=o$$

in vece della μ stessa, e determinando gli opportuni valori dei parametri arbitrari contenuti in tal famiglia di funzioni, onde soddisfare la equazione risultante indipendentemente dalle due variabili x, y.

Si trattò anco la quistione: scoprire quali sono le equazioni di tali famiglie, che sono rese derivate esatte da fattori di forme date; ma di essa non ci occuperemo.

286. Il metodo usato (§ 278) per trovare la primitiva della equazione lineare

$$ay'+by=c$$

cioè nella ipotesi, che le a, b, c siano funzioni della sola x, si può usare anco in molti casi, nei quali le a, b, c contengono la y; purchè si possano determinare le t, u mediante le due equazioni

$$au'+bu=o, \quad aut'=c.$$

Per esempio, se si avesse la equazione seguente

$$h(x)y^m y' + y^{m+1} = l(x)y^n,$$

cioè fosse $a = y^m h$, $b = y^m$, e $c = y^n l$, le due equazioni alle derivate tra t, u e la x sarebbero

$$h t^m u^m u' + t^m u^{m+1} = 0, \quad h t^m u^{m+1} t' = l t^n u^n$$

$$\text{ossia } u' + \frac{u}{h} = 0, \quad t' t^{m-n} = \frac{l}{h} u^{n-m-1},$$

la prima delle quali dà $u = Ap$, ove p esprime $e^{-\int \frac{1}{k}}$, e riduce la seconda alla $t' t^{m-n} = \frac{l}{h}(Ap)^{n-m-1}$, la quale somministra

$$\frac{t^{m-n+1}}{m-n+1} = B + \int \frac{l}{h}(Ap)^{n-m-1} \text{ ossia } t = \left(C + (m-n+1)\int \frac{l}{h}(Ap)^{n-m-1}\right)^{\frac{1}{m-n+1}}.$$

Quindi la equazione richiesta sarebbe

$$y = Ap\left(C + (m-n+1)\int \frac{l}{h}(Ap)^{n-m-1}\right)^{\frac{1}{m-n+1}} \text{ cioè}$$

$$y = e^{-\int \frac{1}{h}}\left(D + (m-n+1)\int \frac{l}{h} e^{(m-n+1)\int \frac{1}{h}}\right)^{\frac{1}{m-n+1}}$$

ove le primitive indicate sono particolari, perchè A, B sono costanti arbitrarie; e la D è posta in vece di $CA^{\frac{1}{m-n+1}}$ e la C di $B(m-n+1)$.

Ed in generale si potrà, colla supposizione di $y = tu$, trovare la primitiva della equazione $ay' + b = c$, quando la $u' \cdot a(x, tu) + u\, b(x, tu) = 0$ non contenga la t, ovvero si possa eliminare la t o colla divisione o colla moltiplicazione, e che la rimanente tra le x, u, u' sia di quelle, di cui si sanno trovare le primitive: e tale sia pure quella che si ottiene, col porre per u il suo valore nella $t' ua(x, ut) = c(x, ut)$.

287. Si intenda colla $f(x, y, y') = 0$ una equazione di cui si conosca la primitiva; e vogliasi la primitiva della

$$f\big(x + a, \phi(y), y'\phi'(y)\big) = 0,$$

ove la a esprime una costante e la ϕ una funzione qualunque della y.

Suppongasi $\phi(y) = u$, u nuova funzione della x; e si avrà

$$f(x + a, u, u') = 0 \text{ oppure } f\left(x + a, u, \frac{u'}{x'}\right) = 0$$

ove le derivate si riferiscono a qualunque variabile. Questa variabile sia t, la quale eguagli $x + a$; e la equazione trovata ridurrassi

$$f\big(t, u, u'(t)\big) = 0,$$

per essere $x + a = t$, ed $x' = 1$.

La primitiva di quest' ultima equazione sarà formata colle t, u, come la primitiva della $f(x, y, y') = 0$ lo sarà colle x, y; e però, la primitiva della $f\big(x + a, \phi(y), \phi'(y)y'\big) = 0$ sarà quella equazione, che avrassi, sostituendo nella primitiva della $f(x, y, y') = 0$ in luogo delle x, y rispettivamente $x + a$, $\phi(y)$.

288. Si incontrano equazioni alle derivate, le quali con opportune trasformazioni riduconsi ad altre, delle quali non si sanno trovare immediatamente le primitive, ma lasciano travedere, che, operando su di esse, come si è operato sulle prime, si ridurrà finalmente la ricerca delle loro primitive a scoprire quelle di equazioni, che appartengono a qualche famiglia delle superiormente contemplate.

Darò di questo metodo un esempio, facendo vedere, come si possa trovare la primitiva completa della equazione del Riccati

$$y'(x) + y^2 = a x^m,$$

nel caso di m eguale ad uno dei numeri espressi colla frazione $-\frac{4i}{2i+1}$, ove l'i esprime 0, 1, 2, - - - cioè un numero intero positivo.

Si generalizzino le derivate, e si avrà

$$y' + (y^2 - a x^m) x' = 0:$$

pongasi $x = r^{\frac{1}{m+1}}$, ed $y = \frac{a}{m+1} \cdot \frac{1}{s}$, dove le r, s esprimano due nuove variabili funzioni della x; e la equazione proposta si ridurrà alla

$$s' + \left(s^2 - \frac{a}{(m+1)^2} r^{-\frac{m}{m+1}}\right) r' = 0:$$

si ponga in quest'ultima $r = \frac{1}{t}$, ed $s = t - u t^2$, ove t ed u esprimano due altre nuove variabili; e la equazione, qui trovata, ridurrassi alla seguente

$$u' + \left(u^2 - \frac{a}{(m+1)^2} t^{\frac{m}{m+1} - 4}\right) t' = 0, \text{ ossia}$$

$$u' + u^2 = \frac{a}{(m+1)^2} t^{\frac{m}{m+1} - 4}$$

supposto t la variabile principale.

Essendo $m = -\frac{4i}{2i+1}$, si ha $\frac{m}{m+1} - 4 = -\frac{4(i-1)}{2(i-1)+1}$; cioè nell'ultima equazione, la cui forma è visibilmente analoga a quella della data, l'esponente della t variabile principale è ciò, che si ha cambiando nella medesima data $y'(x) + y^2 = a x^m$ l'i in $i - 1$.

E per tanto, se per l'equazione tra t ed u ultima trovata, si faranno trasformazioni analoghe alle due eseguite per la data, la sua primitiva dipenderà da quella di una analoga, dove però l'esponente della variabile principale sarà

$$-\frac{4(i-2)}{2(i-2)+1}:$$

e facendo altrettanto per questa e per le successive, si arriverà finalmente ad una equazione analoga anch'essa alla data, dove la variabile principale avrà per esponente $-\frac{4(i-i)}{2(i-i)+1}$ cioè *zero*, la cui forma sarà

$$y' + y^2 = h^2 \text{ o } y' + y^2 - h^2 = 0,$$

nella quale le variabili si separano col dividerla per $y^2 - h^2$; ed ha per primitiva

$$\log.\frac{y-h}{y+h} + 2hx = K:$$

K costante arbitraria.

Quindi col regresso delle operazioni eseguite, onde passare dalla equazione data a quest'ultima avrassi la primitiva della data medesima.

Se nella equazione data

$$y' + y^2 - a x^m = 0$$

fosse $m = -\frac{4i}{2i-1}$, mediante la seconda delle trasformazioni superiormente eseguite, essa si ridurrebbe ad una della forma stessa della data, ove però l'esponente della variabile principale sarebbe $-\frac{4(i-1)}{2(i-1)+1}$, che ha la forma anzi considerata; e conseguentemente anco in questo caso saprassi trovare la primitiva della equazione del Riccati.

289. Se una equazione

$$f(x, y, y') = 0$$

alle derivate fosse decomponibile nelle

$$f_1(x, y, y') = 0, f_2(x, y, y') = 0, f_3(x, y, y') = 0, ---$$

le quali avessero per primitive ordinatamente le

$$F_1(x, y) = 0, \; F_2(x, y) = 0, \; F_3(x, y) = 0, \; - - - ;$$

queste sarebbero altrettante primitive della stessa

$$f(x, y, y') = 0 :$$

anzi questa sarebbe soddisfatta anco dalle

$$F_1(x, y) F_2(x, y) = 0, \; F_1(x, y) F_3(x, y) = 0,$$
$$F_2(x, y) F_3(x, y) = 0, \; - - -,$$

tutto ciò è per sè stesso evidente.

L' equazione alle derivate sia

$$xyy'^2 + (x^2 - y^2)y' - xy = 0,$$

che è quella alla quale si riduce la $Ay'^2 - By' - C = 0$ (§ 226) pel caso di $z = \phi(x^2 + y^2)$, cioè che la superficie sia di rotazione ed abbia per suo asse lo stesso delle ordinate z.

Questa equazione alle derivate si decompone nelle due

$$y' - \frac{y}{x} = 0, \; y' + \frac{x}{y} = 0,$$

le cui primitive complete evidentemente sono

$$y - ax = 0, \; y^2 + x^2 - b^2 = 0,$$

ove le a, b esprimono due costanti arbitrarie.

Queste equazioni entrambe primitive della $xyy'^2 + (x^2 - y^2)y' - xy = 0$ esprimono che le linee di curvatura di una superficie di rotazione sono i meridiani ed i paralleli di essa medesima.

L' osservazione fatta qui sopra per le equazioni alle derivate del primo ordine vale anco per quelle alle derivate dell' ordine *n esimo*, quando siano decomponibili in più alle derivate anch' esse dell' ordine *n esimo*: anzi, se fra queste componenti ve ne fossero di ordine inferiore all' *n esimo*, esse medesime sarebbero primitive della proposta. Per esempio, se fra i fattori della funzione $f(x, y, y')$ vi fosse una funzione delle sole variabili x, y, esso eguagliato a *zero*, darebbe una equazione primitiva della $f(x, y, y') = 0$.

290. Le ricerche delle primitive di alcune equazioni, ove le variabili sono già separate, talvolta presentano ancora difficoltà, che si possono superare facilmente, mediante alcuni artifizi particolari; darò due esempj, col trovare le primitive delle seguenti equazioni

$$\frac{1}{\sqrt{(a + bx + cx^2)}} - \frac{y'}{\sqrt{(a + by + cy^2)}} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4)}} - \frac{y'}{\sqrt{(a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4)}} = 0.$$

Comincio dalla prima. Si suppongano le x, y funzioni della t nuova variabile; e si avrà $\frac{x'}{\sqrt{(a + bx^2 + cx^2)}} = \frac{y'}{\sqrt{(a + by + cy^2)}}$: sia x tal funzione della t, da rendere $x' = \sqrt{(a + bx + cx^2)}$, e sarà $y' = \sqrt{(a + by + cy^2)}$, ossia

$$x'^2 = a + bx + cx^2, \text{ ed } y'^2 = a + by + cy'^2.$$

Queste due equazioni danno

$2x''=b+2cx$, $2y''=b+2cy$; e però sarà

$$2(x''+y'')=2b+2c(x+y) \text{ ovvero}$$

$$2(x'+y')(x''+y'')=2b(x'+y')+2c(x+y)(x'+y'),$$

equazione derivata esatta, che somministra

$$(x'+y')^2=K+2b(x+y)+c(x+y)^2 \text{ ossia}$$

$$x'+y'=\sqrt{\left(K+2b(x+y)+c(x+y)^2\right)},$$

ove la K esprime la costante arbitraria.

Sostituendo in quest'ultima equazione per le x', y' i loro valori, si ottiene la

$$\sqrt{(a+bx+cx^2)}+\sqrt{(a+by+cy^2)}=\sqrt{\left(K+2b(x+y)+c(x+y)^2\right)},$$

che è la primitiva richiesta.

Per la seconda equazione, fatto

$$x'^2=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4, \text{ e però}$$

$$y'^2=a+by+cy^2+dy^3+ey^4, \text{ si ha}$$

$$2x''=b+2cx+3dx^2+4ex^3$$

$$2y''=b+2cy+3dy^2+4ey^3,$$

e conseguentemente

$$x'^2-y'^2=b(x-y)+c(x^2-y^2)+d(x^3-y^3)+e(x^4-y^4), \text{ e}$$

$$2(x''+y'')=2b+2c(x+y)+3d(x^2+y^2)+4e(x^3+y^3).$$

Suppongasi, per semplicità, $x+y=p$, $x-y=q$ ossia $x=\frac{1}{2}(p+q)$ ed $y=\frac{1}{2}(p-q)$; e si sostituiscano tanto questi valori delle x, y, quanto le rispettive derivate nelle ultime due equazioni; ed avransi le

$$p'q'=bq+cpq+\frac{d}{4}q(3p^2+q^2)+\frac{e}{2}pq(p^2+q^2),$$

$$p''=b+cp+\frac{3}{4}d(p^2+q^2)+\frac{1}{2}e(p^2+3q^2)p,$$

le quali danno

$$p''-\frac{p'q'}{q}=\frac{1}{2}dq^2+epq^2, \text{ ossia } \left(\frac{p'^2}{q'^2}\right)'=dp'+2epp';$$

e però sarà

$$p'^2=q^2(dp+ep^2+K) \text{ cioè } x'+y'=q\sqrt{(K+dp+ep^2)},$$

ove la K esprime la costante arbitraria.

Questa equazione, sostituendo in essa i valori delle x', y', p, q, si riduce alla seguente

$$\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)}+\sqrt{(a+by+cy^2+dy^3+ey^4)}$$
$$=(x-y)\sqrt{\left(K+d(x+y)+e(x+y)^2\right)},$$

che è primitiva dell'attuale proposta.

291. Nella primitiva completa di una equazione alle derivate del primo ordine essendovi una costante arbitraria o disponibile, essa si potrà determinare talmente d'ottenere quella primitiva particolare, che sia soddisfatta da una data coppia di valori corrispondenti per le variabili. La $F(x, y, a)=0$ rappresenti la primitiva completa della equazione $f(x, y, y')=0$: e vogliasi quella primitiva particolare, che è soddisfatta da $x=m$ ed $y=n$, ossia che dia $y=n$, quando in essa si faccia $x=m$.

Ponghansi questi valori delle x, y nella primitiva completa, e si avrà $F(m, n, a)=0$; sciolgasi questa equazione rispetto alla a, ed abbiasi $a=\vartheta(m, n)$: e la equazione

$$F\left(x, y, \vartheta(m, n)\right)=0$$

sarà la primitiva particolare richiesta, quella cioè soddisfatta dall'$x=m$ ed $y=n$.

LEZIONE II.

Delle primitive singolari delle equazioni alle derivate del prim' ordine, e delle primitive complete di una classe speciale delle medesime.

292. Vi sono molte equazioni alle derivate del primo ordine, che hanno primitive individuate, le quali non sono primitive particolari di esse: l'esposizione di alcune proprietà di queste nuove primitive formeranno lo scopo principale della presente lezione.

La equazione

$$F(x, y, a)=0$$

rappresenti la primitiva completa della

$$f(x, y, y')=0;$$

e la $\phi(x, y)$ esprima il valore della quantità a, cavato dalla equazione

$$F'(a)=0:$$

la nuova equazione

$$F\big(x, y, \phi(x, y)\big)=0,$$

che si ha, ponendo nella primitiva completa in vece della a la funzione $\phi(x, y)$, sarà anch'essa una primitiva della

$$f(x, y, y')=0.$$

Per comprendere questa interessante proprietà, osservisi, che l'equazione $F'(\phi)=0$ è identica, ossia che la quantità $F'(\phi)$, che si ottiene, cambiando nella $F'(a)$ dovunque la a in $\phi(x, y)$, è *zero* indipendentemente dalle sue componenti.

Si formi la derivata prima della equazione

$$F\big(x, y, \phi(x, y)\big)=0, \text{ e si avrà}$$

$$F'(x)+y'F'(y)+\phi'\cdot F'(\phi)=0 \text{ ovvero}$$

$$F'(x)+y'F'(y)=0,$$

per essere $F'(\phi)$ come abbiamo osservato, identicamente *zero*.

La equazione $F(x, y, \phi)=0$ e la $F'(x)+y'F'(y)=0$, sua derivata dianzi trovata, contengono evidentemente la ϕ, nello stesso modo che la $F(x, y, a)=0$ e la $F'(x)+y'F'(y)=0$ sua derivata, contengono la a; e però, eliminando la ϕ dalle prime due, e la a da queste ultime, avransi due risultanti identiche fra loro. Ma, eliminando la a da queste ultime due, si ottiene la equazione

$$f(x, y, y')=0;$$

adunque, anco eliminando la ϕ dalle prime due, avrassi questa medesima ultima equazione. Vale a dire, la equazione

$$F(x, y, \phi)=0$$

si può combinare colla sua derivata prima esatta talmente d'ottenere la $f(x, y, y')=0$; quindi anch'essa sarà una primitiva di questa: come si è dichiarato. Quando la primitiva $F\big(x, y, \phi(x, y)\big)=0$, qui contemplata, non si potrà desumere dalla $F(x, y, a)=0$ col dare alla a un valore *individuato costante*, cioè quando essa non risulterà una primitiva particolare della

$$f(x, y, y')=0,$$

si chiamerà *primitiva singolare* di questa medesima equazione alle derivate.

293. Se una equazione $\Delta(x, y) = o$ individuata è primitiva della $f(x, y, y') = o$ essa sarà o una primitiva particolare ovvero la singolare.

Formata l' equazione $\Delta(x, y) = F(x, y, a)$, e sciolta rispetto alla a, abbiasi $a = \lambda(x, y)$. Essendo la funzione $\Delta(x, y)$ identica alla $F\big(x, y, \lambda(x, y)\big)$, la primitiva $\Delta(x, y) = o$ si rappresenti colla equazione

$$F\big(x, y, \lambda(x, y)\big) = o,$$

insieme alla quale ha luogo anco la seguente

$$F'(x) + y' F'(y) + F'(\lambda) \lambda' = o:$$

pongasi nella parte $F'(x) + y' F'(y)$ in vece della λ il suo valore cavato dalla medesima equazione $F(x, y, \lambda) = o$, ed il risultamento sarà evidentemente lo stesso, che si avrebbe, ponendo nella equazione $F'(x) + y' F'(y) = o$ derivata prima esatta della $F(x, y, a) = o$ in vece della a il suo valore cavato da questa e però essa sarà la funzione $f(x, y, y')$ ovvero il prodotto di questa medesima funzione per una medesima quantità, che chiameremo M; per cui la equazione derivata prima della

$$F\big(x, y, \lambda(x, y)\big) = o$$

si ridurrà alla

$$F'(\lambda) \lambda' + M f(x, y, y') = o.$$

Ma la $\Delta(x, y) = o$ ossia $F(x, y, \lambda) = o$ soddisfa la $f(x, y, y') = o$; adunque la derivata qui trovata ridurrassi alla seguente $\lambda' F'(\lambda) = o$, la quale insegna, che dev' essere, o $\lambda' = o$, ovvero $F'(\lambda) = o$, cioè λ quantità costante, ovvero quella che soddisfa la equazione $F'(\lambda) = o$, che è la ϕ sopra usata. Quindi la equazione $F(x, y, \lambda) = o$, che è la medesima $\Delta(x, y) = o$, si avrà, o ponendo nella $F(x, y, a) = o$ in vece di a una costante, ovvero ponendovi quella funzione, che la riduce alla $F(x, y, \phi) = o$ primitiva singolare. Vale a dire la $\Delta(x, y) = o$ primitiva della $f(x, y, y') = o$ sarà, o una sua primitiva particolare, o la primitiva singolare; dimodochè una equazione alle derivate del primo ordine non è soddisfatta, che dalle primitive particolari e dalla primitiva singolare.

294. Ogni valore della y dato dalla primitiva singolare di una equazione alle derivate del primo ordine ha un *avvicinamento del primo ordine* (§ 129) col valore della y, desunto dalla primitiva particolare della stessa equazione alle derivate.

Per semplicità, chiamiamo n il valore della y cavato dalla equazione $F\big(m, y, \phi(m, y)\big) = o$ che si ha, ponendo m in vece della x nella primitiva singolare, cioè m, n siano valori corrispondenti delle x, y per la primitiva singolare medesima.

Si ponga nella $F(x, y, a) = o$ primitiva completa in vece della a il numero $\phi(m, n)$, e si avrà la primitiva particolare $F\big(x, y, \phi(m, n)\big) = o$: questa dà per y tale funzione della x, il cui valore corrispondente alla $x = m$ ha un avvicinamento di prim' ordine colla y desunto dalla $F\big(x, y, \phi(x, y)\big) = o$ primitiva singolare.

Di fatto, se nella $F\big(x, y, \phi(m, n)\big) = o$ si fa $x = m$ ed $y = n$ hassi $F\big(m, n, \phi(m, n)\big) = o$, equazione evidentemente soddisfatta, perchè n è il valore della y desunto dalla

$$F\big(m, y, \phi(m, y)\big) = o.$$

Si formino le derivate prime esatte di entrambe le equazioni $F(x, y, \phi(m, n)) = 0$, $F(x, y, \phi(x, y)) = 0$; e si avranno

$$\left(\frac{dF(x, y, \phi(m, n))}{dx}\right) + y'\left(\frac{dF(x, y, \phi(m, n))}{dy}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dF(x, y, \phi)}{dx}\right) + y'\left(\frac{dF(x, y, \phi)}{dy}\right) = 0$$

ove le derivate sono rispetto alle sole variabili visibili.

Queste equazioni manifestano che i valori della y' desunti da esse, e corrispondenti entrambi alla $x = m$, e però alla $y = n$, sono eguali anch'essi fra loro. È dimostrato adunque, che i valori delle y, y' competenti alla primitiva singolare sono rispettivamente eguali ai valori delle y, y' competenti ad una primitiva particolare, ossia che avvi un'avvicinamento di primo ordine tra ogni valore della y desunto dalla primitiva singolare, e quello desunto da una primitiva particolare.

295. La reciproca di questa interessantissima proprietà non ha sempre luogo a meno che non si vogliano ritenere buoni anco gli avvicinamenti corrispondenti a valori immaginarj delle variabili; giacchè vi sono equazioni alle derivate del primo ordine, le quali hanno alcune primitive particolari, che non hanno colla primitiva singolare avvicinamento del primo ordine. A convincersi di questo basterà l'esempio seguente.

La equazione $y\sqrt{(1+y'^2)} - h\sqrt{(x+yy')} = 0$ ha per primitiva completa la

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - ah = 0,$$

e per primitiva singolare la

$$y^2 - hx - \frac{h^2}{4} = 0:$$

la h esprime una quantità costante data, e la a la costante arbitraria.

Facendo sussistere insieme queste due equazioni, si trova

$$x = a - \frac{h}{2}, \text{ ed } y = \sqrt{h}\left(a - \frac{h}{4}\right).$$

Questo valore della y insegna, che tutte le primitive particolari corrispondenti a valori della arbitraria a minori della $\frac{h}{4}$, non hanno avvicinamento colla y data dalla primitiva singolare, o lo hanno corrispondente a valori della y immaginarj.

296. Si consideri nella $F(x, y, a) = 0$ la x come una costante e la y funzione della a; e si avrà

$$\left(\frac{dy}{da}\right) = -\frac{F'(a)}{F'(y)};$$

e conseguentemente, per la primitiva singolare, sarà

$$\left(\frac{dy}{da}\right) = 0.$$

Questa equazione manifesta, che tra gli infiniti valori della y dati dalle primitive di una stessa equazione alle derivate del prim'ordine e corrispondenti tutti al medesimo della x, il massimo o minimo è quello dato dalla primitiva singolare.

Similmente, considerando la y come costante e la x funzione implicita della a data dalla stessa equazione $F(x, y, a) = 0$ ammesso $F'(a) = 0$, si trova

$$\left(\frac{dx}{da}\right) = 0;$$

e però ogni valore della x somministrato dalla primitiva singolare, sarà anch'esso il massimo o minimo tra gli infiniti corrispondenti al medesimo della y, e dati dalle infinite primitive della stessa equazione alle derivate del primo ordine.

297. Essendo, pel paragrafo 66

$$\left(\frac{da}{dy}\right)=\frac{1}{\left(\frac{dy}{da}\right)},\ \left(\frac{da}{dx}\right)=\frac{1}{\left(\frac{dx}{da}\right)},$$

e per la primitiva singolare

$$\left(\frac{dx}{da}\right)=0,\ \left(\frac{dy}{da}\right)=0,$$

come abbiamo veduto dianzi, per essa le derivate $\left(\frac{da}{dx}\right)$, $\left(\frac{da}{dy}\right)$ saranno infinite. Vale a dire, l'equazione primitiva singolare è tale relazione, che rende infinite entrambe le derivate del valore della costante arbitraria somministrato dalla primitiva completa, e prese l'una rispetto ad una variabile e l'altra all'altra: proprietà utile, segnatamente per iscoprire la primitiva singolare quando l'arbitraria nella primitiva completa vi sia isolata.

In ultimo fo riflettere, che dai paragrafi 285, 292 risulta, che la primitiva singolare di una equazione alle derivate del prim'ordine ha anco la proprietà di rendere infinito quel moltiplicatore che rende una derivata esatta questa medesima equazione, già ridotta alla forma $y'+f(x,y)=0$.

298. Passo ora ad esporre la regola, mediante la quale si può trovare la primitiva singolare di una data equazione alle derivate del primo ordine, senza conoscere la sua primitiva completa.

La $F(x,y,a)=0$ rappresenti la primitiva completa della $f(x,y,y')=0$ data, e la $F(x,y,\phi)=0$ sarà la primitiva singolare; purchè ϕ sia il valore della a cavato dalla equazione $F'(a)=0$.

Sciolta l'equazione $F'(x)+y'F'(y)=0$ rispetto alla a, abbiasi $a=\xi(x,y,y')$; e sarà $F\big(x,y,\xi(x,y,y')\big)=0$ anch'essa equazione alle derivate avente per primitiva completa la $F(x,y,a)=0$ e per primitiva singolare la $F(x,y,\phi)=0$.

Evidentemente il valore della ξ cavato dalla $F(x,y,\xi)=0$ è lo stesso di quello della a desunto dalla $F(x,y,a)=0$; ma per la primitiva singolare, questo valore della a eguaglia ϕ; adunque per la primitiva singolare avrassi $\xi=\phi$; e conseguentemente la quantità $F'(\xi)$ sarà identicamente nulla per esserlo la $F'(\phi)$.

Siccome le equazioni

$$f(x,y,y')=0,\quad F\big(x,y,\xi(x,y,y')\big)=0$$

sono equivalenti e formate colle stesse quantità, così se la funzione $f(x,y,y')$ non sarà identica alla semplice $F(x,y,\xi)$, essa sarà identica al prodotto di questa per un fattore M funzione delle x,y,y'; cioè avrassi l'equazione identica

$f=M\cdot F$, la quale dà $f'(y')=F\cdot M'(y')+M\cdot F'(y')$,

ossia la seguente

$$f'(y')=\frac{M'(y')}{M}f+MF'(\xi)\,\xi'(y'),$$

per essere

$$F=\frac{f}{M},\ \text{ed}\ F'(y')=F'(\xi)\,\xi'(y').$$

Ma la primitiva singolare soddisfa la equazione $F'(\xi)=0$, oltre la $f=0$ soddisfatta da ogni primitiva; adunque per la primitiva singolare si avrà anco

$$f'(y')=0.$$

Vale a dire, per la primitiva singolare, la y è tale funzione della x, che soddisfa entrambe le equazioni

$$f(x, y, y') = o, \quad f'(y') = o,$$

e conseguentemente quella pure, che avrassi, eliminando da esse la y'; e siccome l'equazione risultante da questa eliminazione della y' contiene le sole variabili x, y; così essa medesima od un suo fattore sarà la primitiva singolare richiesta.

Avendo luogo insieme alla equazione data $f(x, y, y') = o$ la

$$f'(x) + y'f'(y) + y''f'(y') = o$$

sua derivata, per la primitiva singolare avrassi anco

$$f'(x) + y'f'(y) = o;$$

per cui la stessa primitiva singolare soddisferà l'equazione risultante dalla eliminazione della y' dalla medesima data, combinata colla $f'(x) + y'f'(y) = o$, cioè sarà essa o questa medesima risultante, od un suo fattore.

Dimodochè, per avere la primitiva singolare della data $f(x, y, y') = o$, formeransi le equazioni $f'(y') = o$, $f'(x) + y'f'(y) = o$; indi si combineranno due di queste tre equazioni talmente da eliminare la y', e la primitiva richiesta sarà o la risultante od un suo fattore.

Se non fosse preventivamente noto, che la $f = o$ avesse primitiva singolare, sarebbe bene eliminare la y', combinando le anzidette tre equazioni nelle tre differenti maniere, giacchè, se le tre risultanti non fossero identiche, od almeno non avessero fattor comune, la $f = o$ non avrebbe assolutamente primitiva singolare: se poi le tre risultanti fossero identiche, ovvero avessero un fattore comune, probabilissimamente la $f = o$ avrebbe primitiva singolare, la quale sarebbe, nel primo caso una delle tre risultanti, e nel secondo caso l'equazione risultante dall'eguagliare a *zero* il loro fattore comune.

299. Considerando le x, y come funzioni della y' date dalla equazione $f = o$, si ha

$$\left(\frac{dx}{dy'}\right) = -\frac{f'(y')}{f'(x)}, \quad \left(\frac{dy}{dy'}\right) = -\frac{f'(y')}{f'(y)};$$

per la primitiva singolare sarà tanto $\left(\frac{dx}{dy'}\right) = o$, quanto $\left(\frac{dy}{dy'}\right) = o$, o ciò che significa lo stesso (§ 66) le derivate $\left(\frac{dy'}{dx}\right)$, $\left(\frac{dy'}{dy}\right)$ saranno infinite.

Così, essendo $f'(x) + y'f'(y) + y''f'(y') = o$, in generale avrassi

$$y'' = -\frac{f'(x) + y'f'(y)}{f'(y')};$$

e per tanto per la primitiva singolare sarà $y'' = \frac{o}{o}$; anzi analoga proprietà avrà anco luogo per le y''', y^{IV}, ---.

Dalla equazione $f(x, y, y') = o$ abbiasi $y' = \psi(x, y)$: in generale si ha

$$\psi(x+\omega, y) = y' + \omega\left(\frac{dy'}{dx}\right) + \text{ecc.}, \quad \psi(x, y+\theta) = y' + \theta\left(\frac{dy'}{dy}\right) + \text{ecc.};$$

e conseguentemente per la primitiva singolare, essendo le derivate $\left(\frac{dy'}{dx}\right)$, $\left(\frac{dy'}{dy}\right)$, ecc. infinite, le quantità $\psi(x + \omega, y)$, $\psi(x, y + \theta)$, quando l'y corrisponda alla primitiva singolare, non avranno sviluppi secondo le potenze d'esponenti interi delle ω, θ (§ 121).

Col soccorso delle proprietà esposte in questo paragrafo e nell' antecedente, non solo si potrà desumere la primitiva singolare dalla equazione alle derivate immediatamente, ma si potrà anco scoprire, se una data primitiva di una equazione alle derivate del primo ordine sia una sua primitiva particolare ovvero la singolare.

300. Se le variabili x, y esprimessero coordinate la equazione $f(x,y,y')=0$ rappresenterebbe infinite linee, una delle quali avrebbe per equazione la primitiva singolare e le altre delle primitive particolari; e però stante le proprietà dimostrate nei paragrafi 294, 295, ogni punto, della linea rappresentata colla primitiva singolare di una equazione alle derivate del primo ordine, sarà un punto di contatto di primo ordine tra essa ed una di quelle rappresentate con una primitiva particolare della medesima equazione alle derivate; ma non sempre, le linee rappresentate colle primitive particolari, saranno tutte toccate da quella rappresentata dalla primitiva singolare della stessa equazione alle derivate.

Dalla prima di queste due proprietà emerge che la linea rappresentata colla equazione che si ha eliminando la a dalle due $F(x,y,a)=0$, $F'(a)=0$ sarà toccata in ogni suo punto da una di quelle rappresentata colla $F(x,y,a)=0$, a essendo parametro arbitrario.

301. Farò qui vedere, come si possa trovare la primitiva completa di una equazione $f(x,y,y')=0$, quando la $f(x,y,y')$ consista in una funzione composta $\psi(p,q)$ delle p, q, entrambe funzioni delle x, y, y' e tali che, il rapporto delle p', q' loro derivate non contenga la y''.

Si costituiscano le due equazioni $p(x,y,y')=a$, $q(x,y,y')=b$, ove le a, b esprimono due costanti, e da esse eliminisi la y', ed abbiasi la equazione $F(x,y,a,b)=0$: ammesso che le a, b abbiano la relazione $\psi(a,b)=0$, la equazione $F(x,y,a,b)=0$ sarà primitiva della $\psi\big(p(x,y,y'), q(x,y,y')\big)=0$ e completa, perchè una delle costanti a, b rimane arbitraria.

Chiamisi α il rapporto tra q' e p', cioè suppongasi $q'=\alpha p'$.

Ammettendo la equazione $q'=0$, si ha anco la $\alpha p'=0$ ossia $p'=0$; vale a dire le due equazioni $p'=0$, $q'=0$, o le loro equivalenti

$$p(x,y,y')=a,\ q(x,y,y')=b$$

sono l'una conseguenza dell'altra; o ciò che significa lo stesso, queste due equazioni sono soddisfatte dal medesimo valore della y, il quale sarà evidentemente una funzione delle x, a, b; giacchè posto nella funzione $p(x,y,y')$ deve dare a, e posto nella $q(x,y,y')$ deve dare b.

Ma il valore della y, che soddisfa entrambe le equazioni $p=a$, $q=b$, deve soddisfare anco la $F(x,y,a,b)=0$ desunta da esse, e questa è soddisfatta unicamente da quel valore della y, che è dato da essa medesima; adunque il valore della y somministrato dalla equazione

$$F(x,y,a,b)=0$$

sarà quello, che ridurrà le funzioni $p(x,y,y')$, $q(x,y,y')$ l'una alla costante a e l'altra alla b. Dimodochè, ponendo nella funzione

$$\psi\big(p(x,y,y'), q(x,y,y')\big)$$

in luogo della y il suo valore cavato dalla equazione $F(x,y,a,b)=0$, si otterrà la $\psi(a,b)$, la quale è *zero*, per la relazione ammessa tra le a, b.

Quindi la equazione

$$\psi\big(p(x,y,y'),\, q(x,y,y')\big)=0$$

sarà soddisfatta dalla $F(x,y,a,b)=0$, purchè le costanti a,b abbiano la relazione $\psi(a,b)=0$; e sarà la sua primitiva completa, perchè contiene una costante arbitraria; come si è dichiarato.

Non parlo della primitiva singolare della attuale equazione $f(x,y,y')=0$, perchè la determinazione di essa non presenta nessuna difficoltà.

Sia la $f=\phi(x+yy')-\Delta\big(y\sqrt{1+y'^2}\big)$, cioè vogliasi per esempio la primitiva della equazione alle derivate del primo ordine

$$\phi(x+yy')-\Delta\big(y\sqrt{1+y'^2}\big)=0,$$

ove le ϕ, Δ significano due funzioni qualsivogliano delle $x+yy'$, $y\sqrt{1+y'^2}$.

Posto $x+yy'=p$, $y\sqrt{1+y'^2}=q$, l'equazione riducesi $\phi(p)-\Delta(q)=0$; e siccome si ha $p'=1+y'^2+yy''$, e $q'=\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}(1+y'^2+yy'')$ ossia $q'=\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}p'$, per cui $\dfrac{q'}{p'}=\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$; cioè il rapporto delle q', p', non contiene la y'', così la primitiva richiesta, potrassi avere colla regola qui sopra esposta.

Stabiliscansi le due equazioni

$$x+yy'=a,\quad y\sqrt{1+y'^2}=b;$$

eliminisi da esse la y', ed avrassi la

$$y^2+(x-a)^2-b^2=0$$

per primitiva completa, ove le a, b abbiano la relazione $\phi(a)-\Delta(b)=0$, che si ottiene, cambiando nella proposta le funzioni p, q nelle costanti a, b.

La equazione primitiva singolare sarà quella, che si avrà, eliminando la a ritenuta come vera costante arbitraria, dalle due

$$y^2+(x-a)^2-b^2=0,\quad x-a+b\,b'(a)=0,$$

dove le b, $b'(a)$ siano date dalle due equazioni $\phi(a)-\Delta(b)=0$, $\phi'(a)-\Delta'(b)b'(a)=0$.

Vale a dire, la primitiva singolare della equazione

$$\phi(x+yy')-\Delta\big(y\sqrt{1+y'^2}\big)=0,$$

sarà quella, che otterrassi, eliminando le a, b dalle tre seguenti

$$y^2+(x-a)^2-b^2=0,\quad x-a+b\frac{\phi'(a)}{\Delta'(a)}=0,\quad \phi(a)-\Delta(b)=0;$$

ovvero eliminando da essa la y' mediante la

$$\phi'(p)-\Delta'(q)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0\ (\S\ 298).$$

302. Se la $f(x,y,y')$ fosse funzione composta della forma $\psi(p,q,r,s,---)$; e le $p,q,r,s,---$ fossero tali funzioni delle x,y,y', che i rapporti $\dfrac{q'}{p'},\dfrac{r'}{p'},\dfrac{s'}{p'},---$ non contenessero la y'', la $f(x,y,y')$ medesima sarebbe in sostanza una funzione composta di due sole delle $p,q,r,s,---$; per cui si potrà avere la primitiva della $f(x,y,y')=0$ colla stessa regola esposta nel paragrafo antecedente.

I rapporti $\dfrac{q'}{p'},\dfrac{r'}{p'},\dfrac{s'}{p'},---$ si chiamino $\alpha,\beta,\gamma,---$; cioè suppongasi $q'=\alpha p'$, $r'=\beta p'$, $s'=\gamma p'$, $---$.

Costituita la equazione $p'=0$, si avranno le $q'=0$, $r'=0$, $s'=0$, - - - cioè ammessa la $p=a$, avransi per conseguenza tutte le $q=b$, $r=c$, $s=d$, - - - ove le a, b, c, d, - - - esprimono altrettante costanti.

Ora, se nelle equazioni $r=c$, $s=d$, - - - si ponessero, in vece delle y, y' i loro valori desunti dalle due $p=a$, $q=b$, le risultanti sarebbero soddisfatte: e conseguentemente le r, s, - - - saranno tali funzioni delle x, y, y', che per la sostituzione dei valori delle y, y' sparirà da esse anco la x. E quindi, chiamate $\xi(x,y,y')$, $\lambda(x,y,y')$ le funzioni denominate p, q o meglio i loro valori effettivi, e sciolte le due equazioni

$$p=\xi(x,y,y'),\ q=\lambda(x,y,y')$$

rispetto alle y, y', avransi i loro valori talmente formati colle p, q, x, che sostituiti nelle $r(x,y,y')$, $s(x,y,y')$, - - - daranno funzioni delle sole p, q. Vale a dire, le r, s, - - - sono funzioni delle p, q; e conseguentemente anco la $\psi(p,q,r,s,---)$ sarà una funzione delle sole p, q, che all'occorrenza determinerassi, sostituendo nelle funzioni r, s, - - -, sue componenti, in luogo delle y, y' i loro valori cavati dalle equazioni

$$p=\xi(x,y,y'),\ q=\lambda(x,y,y').$$

LEZIONE III.

Delle primitive complete delle equazioni alle derivate del secondo ordine.

303. L'equazione alle derivate del second'ordine, che supporremo data, rappresenterassi colla $f(x,y,y',y'')=0$: e si chiamerà *primitiva completa del primo ordine* di essa una equazione alle derivate del primo ordine, che contenga una costante arbitraria, non esistente nella data medesima, e che si possa combinare, se occorre, colla sua derivata prima esatta onde desumere da questa la stessa data. Così, chiamerassi primitiva completa del second'ordine o semplicemente primitiva del second'ordine o *primitiva finita* della stessa equazione data, una equazione nella quale vi siano le sole variabili x, y e due costanti arbitrarie, quando si possa da essa, mediante le sue derivate prima e seconda esatte od altre a queste equivalenti ricavare la medesima data.

Si ammetterà, che, ogni equazione alle derivate del second'ordine, abbia una primitiva completa del second'ordine, e però due primitive complete del primo ordine.

Ogni equazione, che si possa desumere da una primitiva completa collo individuare la costante o le costanti contenute in essa, si chiamerà primitiva particolare. Vi sono anco equazioni chiamate primitive singolari, ma di esse si parlerà a parte nella lezione seguente.

Se nella equazione $f(x,y,y',y'')=0$ si porrà in luogo della y' il suo valore desunto da una primitiva del primo ordine, ed in luogo della y'' la sua derivata, emerge dalle definizioni, qui esposte, che la equazione risultante sarà soddisfatta cioè identica: così, dalle medesime definizioni emerge pure, che, se nella stessa equazione data $f(x,y,y',y'')=0$ porrassi in luogo della y il suo valore cavato dalla primitiva finita o primitiva del second'ordine, ed in luogo delle y', y'' le sue derivate, la risultante equazione sarà pure per sè stessa soddisfatta cioè identica.

Ciò premesso, passo a parlare delle primitive di diverse classi o famiglie di equazioni alle derivate del second'ordine, ed intenderò di parlare delle primitive complete del secondo ordine cioè delle primitive finite.

304. Nella data equazione vi siano le sole x, y''; abbia essa cioè la forma $f(x, y'')=0$. Sciolta rispetto alla y'', dia $y''=\phi(x)$; e sarà

$y'=\int\phi(x)dx+A$, e però si avrà $y=\int^{(2)}\phi(x)dx^2+Ax+B$

per primitiva richiesta: A, B esprimono le due costanti arbitrarie, e $\int^{(2)}\phi(x)dx^2$ una funzione avente $\phi(x)$ per derivata seconda.

Vi siano le sole y, y'', cioè abbia la forma $f(y, y'')=0$; e dia $y''=\phi(y)$: sarà $y'y''=\phi(y)y'$, e però $y'^2=2\int\phi(y)dy+A$, ossia $\dfrac{y'}{\sqrt{2\int\phi(y)dy+A}}=1$, la quale dà la equazione

$$\int\frac{1}{\sqrt{2\int\phi(y)dy+A}}dy=x+B,$$

per primitiva completa richiesta.

Se la data equazione fosse $f(y', y'')=0$, cioè contenesse le sole y', y'': posto $y'=z$, essa si ridurrebbe immediatamente alla $f(z, z')=0$, che è del primo ordine: abbia questa per primitiva completa la $F(x, z, A)=0$.

Evidentemente la primitiva del second'ordine richiesta sarà la primitiva completa della $F(x, y', A)=0$.

Comunemente si suol procedere alla ricerca della primitiva della equazione $f(y', y'')=0$ col metodo seguente. Sciolta la data rispetto alla y'', ottengasi $y''=\phi(y')$, cioè $z'=\phi(z)$; e però $\dfrac{1}{\phi(z)}=\left(\dfrac{dx}{dz}\right)$, e sarà $x=A+\int\dfrac{1}{\phi(z)}dz$. Ma si ha

$$y'\left(\frac{dx}{dz}\right)=z\left(\frac{dx}{dz}\right), \text{ cioè } \left(\frac{dy}{dz}\right)=z\left(\frac{dx}{dz}\right),$$

e però $\left(\dfrac{dy}{dz}\right)=\dfrac{z}{\phi(z)}$ od $y=\int\dfrac{z}{\phi(z)}dz+B$;

adunque la primitiva richiesta sarà rappresentata colla simultanea sussistenza delle due equazioni seguenti

$$x=A+\int\frac{1}{\phi(z)}dz,\quad y=B+\int\frac{z}{\phi(z)}dz,$$

ove la z è quantità da eliminarsi.

305. La ricerca della primitiva della equazione $f=0$, quando in essa non vi sia la y, o la x, facilmente si riduce a trovare quella di una equazione alle derivate del primo ordine. Di fatto, pel primo caso, quando cioè la data consista nella $f(x, y', y'')=0$, posto $y'=z$, essa si riduce alla seguente $f(x, z, z')=0$, che è del primo ordine: abbia questa per primitiva $F(x, z, A)=0$, e la primitiva richiesta sarà la stessa primitiva completa della $F(x, y', A)=0$.

Nell'altro caso, cioè che la data sia della forma $f(y, y'\, y'')=0$: si riducono le derivate ad essere prese rispetto alla y, e si avrà (§ 66) la

$$f\left(y,\ \frac{1}{x'(y)},\ -\frac{x''(y)}{x'(y)^3}\right)=0,$$

la quale è della forma della considerata dianzi.

306. Se coll'attribuire sì alla x che alla y la dimensione *uno*, *nessuna* alla y', e *meno uno* alla y'', la equazione data

$$f(x, y, y', y'')=0$$

risulterà omogenea, si potrà trovare la sua primitiva col metodo seguente. In essa si ponga $y=xu$, ed $y''=\dfrac{v}{x}$, ove le u, v esprimono due nuove variabili, e per la omogeneità ammessa si ridurrà evidentemente ad una, la quale non conterrà la x: questa equazione risultante sciolta rispetto alla v dia $v=\phi(r,u)$; la r è posta in vece della y'.

Essendo $r=(xu)'$ ossia $r=u+xu'$, ed y'' ovvero $r'=\frac{v}{x}$, eliminando la x, si ha

$$(r-u)r'=vu',\ \text{cioè}\ (r-u)r'=u'\phi(r,u):$$

equazione del primo ordine: sia $r=\Delta(u,A)$ la sua primitiva completa.

Sostituendo questo valore della r nella equazione $r=u+xu'$, o nella equivalente

$$\frac{1}{x}=\frac{u'}{r-u},\ \text{hassi la}\ \frac{1}{x}=\frac{u'}{\Delta(u,A)-u},$$

la cui primitiva $\log. x=B+\int\frac{1}{\Delta(u,A)-u}du$ darà la richiesta, quando si ponga in essa per u il suo valore $\frac{y}{x}$.

Così se la equazione $f(x,y,y',y'')=0$ riescirà *omogenea* coll'attribuire a ciascuna delle quantità y, y', y'' la dimensione *uno*, e *nessuna* alla x, la sua primitiva si potrà scoprire col metodo che segue.

Supposto $y'=uy$, $y''=vy$, essa si ridurrà ad una tra le sole x, u, v, ove le u, v esprimono due nuove variabili funzioni della x: questa dia $v=\phi(x,u)$.

Per essere $vy=(uy)'$ ossia $vy=u'y+uy'$ ovvero $vy=yu'+u^2y$, si ha $u'+u^2-v=0$; e però avrassi anco la

$$u'+u^2-\phi(x,u)=0.$$

Trovata la primitiva completa di questa, e sostituito in essa per u la frazione $\frac{y'}{y}$, si otterrà una primitiva completa del primo ordine della data; quindi nella primitiva completa di questa avrassi la richiesta.

307. In questo paragrafo si parla delle primitive di quelle equazioni del second'ordine, che si chiamano lineari, la cui forma generale è la seguente

$$y''+ay'+by=c:$$

le a, b, c o sono costanti ovvero funzioni della sola x.

Primieramente si osservi che, se due funzioni individuate p, q fossero valori della y per la equazione

$$y''+ay'+by=0,$$

anco il binomio $Ap+Bq$, ove le A, B esprimono due costanti qualsivogliono, sarebbe un valore della y per questa equazione; per cui

$$y=Ap+Bq$$

sarebbe la primitiva completa di essa.

Ciò premesso, suppongasi $y=tu$, ove t, u esprimono due nuove variabili funzioni della x, e però

$$y'=u't+ut',\ \text{ed}\ y''=u''t+2u't'+ut'',$$

e la equazione data $y''+ay'+by=c$ si ridurrà alla

$$ut''+(2u'+au)t'+(u''+au'+bu)t=c.$$

Se la u soddisfacesse la equazione $2u'+au=0$, cioè fosse $u=Ae^{-\int\frac{a}{2}dx}$, il valore della t e però quello della y dipenderebbe dalla equazione

$$t'' + \frac{1}{u}(u'' + au' + bu)t = c,$$

ossia, posto per la u il suo valore, dalla

$$t'' - \left(\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} - b\right)t = c,$$

che è analoga alla data medesima, ma manca del secondo termine.

Se poi la u avesse la proprietà di annullare $u'' + au' + bu$, ossia fosse un valore della y per la equazione

$$y'' + ay' + by = 0,$$

il valore della t dipenderebbe dalla $ut'' + (2u' + au)t' = c$, cioè posto $t' = z$, dalla seguente

$$z' + \left(2\frac{u'}{u} + a\right)z = \frac{c}{u},$$

che è del primo ordine, e somministra immediatamente la z ossia t' e conseguentemente la t. Vale a dire, semprechè si conosca un valore particolare della y per la equazione $y'' + ay' + by = 0$, che è un caso dell'ultima contemplata nel paragrafo antecedente, la primitiva completa della

$$y'' + ay' + by = c$$

dipenderà da quella della equazione in z anzi esposta, che è del primo ordine e di quelle contemplate al paragrafo 278.

Così, ammesso $y' - \alpha y - \beta = 0$ ove α, β esprimono due funzioni della x si ha $y'' = (\alpha^2 + \alpha')y + \alpha\beta + \beta'$, per cui la proposta $y'' + ay' + by = c$ si riduce $(\alpha' + \alpha^2 + a\alpha + b)y + a\beta + \beta' + \alpha\beta = c$; e però la primitiva della proposta medesima dipenderà in sostanza da quella della $\alpha' + \alpha^2 + a\alpha + b = 0$ la quale si riduce $u' + u^2 = \frac{a'}{2} + \frac{a^2}{4} - b$ col supporre $\alpha = u - \frac{a}{2}$. Dimodochè, trovata la primitiva della $u' + u^2 = \frac{a'}{2} + \frac{a^2}{4} - b$, che si sa effettivamente trovare almeno in alcuni casi (§ 288), si avrà l'$\alpha = u - \frac{a}{2}$, si troverà la β colla $\beta' + \left(u + \frac{a}{2}\right)\beta = c$, indi la y richiesta colla

$$y' - \left(u - \frac{a}{2}\right)y - \beta = 0.$$

Quando si conoscano due valori particolari della y soddisfacenti la equazione $y'' + ay' + by = 0$, si potrà trovare la primitiva completa della

$$y'' + ay' + by = c,$$

senza bisogno di scoprire primitive di altre equazioni. Di fatto, i valori conosciuti della y siano, l'uno p e l'altro q: suppongasi il richiesto $y = up + tq$, ove u, t esprimano due funzioni della x a determinarsi.

Dal qui supposto valore della y, si ha

$$y' = up' + tq' + u'p + t'q:$$

le u, t abbiano la proprietà $u'p + t'q = 0$; e rimarrà $y' = up' + tq'$; e però sarà

$$y'' = up'' + tq'' + u'p' + t'q'.$$

Sostituendo i valori delle y, y', y'' nella equazione $y'' + ay' + by = c$, hassi

$$u(p'' + ap' + bp) + t(q'' + aq' + bq) + u'p' + t'q' = c,$$

ossia $u'p' + t'q' = c$.

Il valore $up+tq$ soddisferà la data equazione, purchè le u, t soddisfaccino le due $pu'+qt'=0$, $p'u'+q't'=c$.

Si chiamino U, T i valori delle u', t' cavati da queste due equazioni; e si avrà $u=A+\int Udx$, e $t=B+\int Tdx$. Quindi la primitiva richiesta sarà

$$y=p(A+\int Udx)+q(B+\int Tdx).$$

Esempio. Le a, b siano entrambe costanti.

Comincio a trovare due primitive della $y''+ay'+b=0$: pongo per ciò, come si fa comunemente, $y=e^{x\alpha}$, ove l'α esprime una costante, ed e la base del sistema dei logaritmi iperbolici; ed ho $y'=\alpha e^{\alpha x}$, $y''=\alpha^2 e^{\alpha x}$. Questi valori delle y, y' y'' riducono l'equazione data alla

$$(\alpha^2+a\alpha+b)e^{x\alpha}=0,$$

la quale insegna, che $e^{x\alpha}$ sarà valore della y, purchè α esprima una delle radici della equazione $\alpha^2+a\alpha+b=0$. Queste radici siano α_1, α_2; e si avrà $y=e^{x\alpha_1}$, $y=e^{x\alpha_2}$.

Da questi valori particolari della y si desume, per l'esposto al principio di questo paragrafo, che la primitiva della equazione

$$y''=ay'+by=0 \text{ è } y=Ae^{x\alpha_1}+Be^{x\alpha_2}:$$

le A, B sono due costanti arbitrarie.

Ora vediamo, come trovare la primitiva della equazione

$$y''+ay'+by=c,$$

ove a, b siano costanti e la c qualunque cioè costante anch'essa o funzione data della x.

Si ammetta $p=e^{x\alpha_1}$, e $q=e^{x\alpha_2}$; e le due equazioni $pu'+qt'=0$, $p'u'+q't'=c$, si ridurranno alle

$$e^{x\alpha_1}u'+e^{x\alpha_2}t'=0,\quad \alpha_1 e^{x\alpha_1}u'+\alpha_2 e^{x\alpha_2}t'=c,$$

le quali danno

$$u'=\frac{c}{\alpha_1-\alpha_2}e^{-x\alpha_1},\quad t'=-\frac{c}{\alpha_1-\alpha_2}e^{-x\alpha_2};$$

e però sarà

$$u=A+\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\int ce^{-x\alpha_1},\quad t=B-\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\int ce^{-x\alpha_2}.$$

Quindi la primitiva richiesta risulterà

$$y=Ae^{x\alpha_1}+\frac{e^{x\alpha_1}}{\alpha_1-\alpha_2}\int ce^{-x\alpha_1}+Be^{x\alpha_2}-\frac{e^{x\alpha_2}}{\alpha_1-\alpha_2}\int ce^{-x\alpha_2}.$$

Pel caso della c costante, essendo

$$\int ce^{-x\alpha_1}=-\frac{c}{\alpha_1}e^{-x\alpha_1},\quad \int ce^{-x\alpha_2}=-\frac{c}{\alpha_2}e^{-x\alpha_2},\ \text{sarà}$$

$$y=Ae^{x\alpha_1}+Be^{x\alpha_2}+\frac{c}{b}.$$

Se le due radici della equazione $\alpha^2+a\alpha+b=0$ fossero tra loro eguali, si avrebbe solamente $p=e^{x\alpha_1}$. In questo caso, supposto $u=e^{x\alpha_1}$, la t atta a rendere tu valore della y per la equazione

$$y''+ay'+by=0$$

avrebbe la proprietà espressa dalla equazione $ut''+(2u'+au)t'=0$, la quale pel presente valore della u riducesi alla $t''=0$, che dà $t=Ax+B$; e per tanto sarà $y=(Ax+B)e^{x\alpha_1}$ la primitiva della equazione $y''+ay'+by=0$, e completa perchè A, B sono costanti arbitrarie.

Per avere la primitiva della

$$y''+ay'+by=c,$$

nel caso qui contemplato, cioè di $\alpha_1=\alpha_2$, basterebbe supporre nelle equazioni $pu'+qt'=0$, $p'u'+q't'=c$, la $p=e^{x\alpha_1}$, e $q=xe^{x\alpha_2}$, per cui si avrebbero

$$u'+xt'=0,\ \alpha_1 u'+(1+x\alpha_1)t'=c,$$

che danno

$u'=-cx$, e $t'=c$, e però $u=A-\int cx$, e $t=B+\int c$.

Quindi sarà

$$y=(A-\int cx)e^{x\alpha_1}+(B+\int c)x\,e^{x\alpha_1},\ \text{ossia}$$
$$y=(A+Bx)e^{x\alpha_1}+(x\int c-\int cx)\,e^{x\alpha_1}.$$

308. Se la funzione $f(x,y,y',y'')$ renderà nulla la quantità

$$f'(y)-f'(y')'+f'(y'')''$$

indipendentemente dalle sue componenti, cioè se la equazione $f(x,y,y',y'')=0$ sarà (§ 268) una derivata esatta, si potrà trovare una sua primitiva del primo ordine col metodo seguente.

Essendo $f(x,y,y',y'')=0$ una derivata esatta, necessariamente avrà la forma (§ 269) $a+by''=0$, ove le a, b saranno funzioni delle sole x, y, y'.

Supposta $F(x,y,y')=0$ l'equazione primitiva richiesta, sarà $F'(y')=b$, e però

$$F=\Delta(x,y,y')+\phi(x,y):$$

la $\Delta(x,y,y')$ esprime una primitiva della b presa rispetto alla y', e la $\phi(x,y)$ una funzione incognita delle sole x, y.

La primitiva supposta sarà per tanto

$$\Delta(x,y,y')+\phi(x,y)=0,$$

la quale dà $\Delta'(x)+y'\Delta'(y)+y''\Delta'(y')+\phi(x,y)'=0$

ossia $\phi(x,y)'=a-\Delta'(x)-y'\Delta'(y)$.

Per essere la proposta una derivata esatta, il trinomio $a-\Delta'(x)-y'\Delta'(y)$ avrà la forma $P+y'Q$, ove le P, Q saranno funzioni delle sole x,y, e renderanno identica la equazione $P'(y)=Q'(x)$ (§ 268). Sia $\psi(x,y)$ una primitiva della $P+y'Q$; e si avrà $\phi(x,y)'=\psi(x,y)'$, e però

$$\phi(x,y)=\psi(x,y)+A:$$

A costante arbitraria.

Quindi la primitiva richiesta sarà

$$\Delta(x,y,y')+\psi(x,y)+A=0.$$

Se la $f(x,y,y',y'')$ avesse anco la proprietà di annullare la quantità (§ 264)

$$f'(y')-2f'(y'')',$$

cioè, se la equazione $f(x,y,y',y'')=0$ fosse derivata esatta del secondo ordine, la primitiva qui trovata sarebbe essa pure una derivata esatta del primo ordine.

309. Alla equazione $f(x,y,y',y'')=0$ si dia la forma $y''+\phi(x,y,y')=0$: qualunque sia la $f(x,y,y',y'')=0$, esiste una quantità funzione in generale delle x,y,y', la quale moltiplicata per $y''+\phi(x,y,y')$ dà un prodotto, che è una derivata esatta.

Si rappresenti una primitiva del primo ordine della proposta equazione colla $F(x,y,y')=A$ ove A è la costante arbitraria. Da questa si ha

$$F(x,y)'+y''F'(y')=0 \text{ ossia } y''=-\frac{F(x,y)'}{F'(y')};$$

e però sarà $\phi(x,y,y')=\dfrac{F(x,y)'}{F'(y')}$, ed anco

$$y''+\phi(x,y,y')=\frac{1}{F'(y')}\left(y''F'(y')+F(x,y)'\right) \text{ cioè}$$
$$\left(y''+\phi(x,y,y')\right)F'(y')=F(x,y,y')'.$$

Questa equazione insegna appunto, che, il prodotto della quantità $F'(y')$ ossia $\left(\frac{dA}{dy'}\right)$ per $y''+\phi(x,y,y')$, è una derivata esatta.

Se la primitiva del primo ordine della proposta avesse la forma $\Delta(x,y,y',A)=0$ si avrebbe

$$\Delta'(y')+\Delta'(A)\left(\frac{dA}{dy'}\right)=0, \text{ ovvero } \left(\frac{dA}{dy'}\right)=-\frac{\Delta'(y')}{\Delta'(A)};$$

e però il fattore atto a rendere la equazione $y''+\phi(x,y,y')=0$ derivata esatta sarebbe $\frac{\Delta'(y')}{\Delta'(A)}$.

Moltiplicando ambedue i membri della equazione

$$F(x,y,y')'=\left(y''+\phi(x,y,y')\right)F'(y')$$

per $\xi(F)$ funzione qualunque della $F(x,y,y')$, si ha la

$$\xi(F)F'=\left(y''+\phi(x,y,y')\right)\xi(F)F'(y'),$$

il cui primo membro è pure una derivata esatta; e per tanto la proposta $y''+\phi(x,y,y')=0$, moltiplicata per $\xi(F)F'$ ossia per $\xi(A)\left(\frac{dA}{dy'}\right)$, darà un prodotto, che sarà una derivata esatta.

Sia $M(x,y,y')=B$ l'altra primitiva completa del primo ordine della $y''+\phi(x,y,y')=0$, B è la costante arbitraria: ragionando per questa primitiva, come per l'anzi considerata, si troverà

$$\lambda(M)M'=\left(y''+\phi(x,y,y')\right)\lambda(M)\left(\frac{dM}{dy'}\right),$$

la quale insegna, che il fattore

$$\lambda(M)\left(\frac{dM}{dy'}\right) \text{ ossia } \lambda(B)\left(\frac{dB}{dy'}\right)$$

è atto a rendere derivata esatta la proposta, qualunque sia la funzione indicata colla λ.

La $\pi(A,B)$ rappresenti una tal funzione, per cui si abbia

$$\pi'(A)=\xi(A), \text{ ed anco } \pi'(B)=\lambda(B):$$

si sommino i membri corrispondenti delle due equazioni, qui sopra trovate, e si avrà la

$$\xi(A)A'+\lambda(B)B'=\left(y''+\phi(x,y,y')\right)\left(\xi(A)\left(\frac{dA}{dy'}\right)+\lambda(B)\left(\frac{dB}{dy'}\right)\right),$$

$$\text{ossia } \pi(A,B)'=\left(y''+\phi(x,y\,y')\right)\left(\frac{d\pi}{dy'}\right);$$

quindi le infinite quantità aventi la forma $\left(\frac{d\pi}{dy'}\right)$ sono fattori atti a rendere derivate esatte il prodotto di esse per $y''+\phi(x,y,y')$.

Esponghiamo le proprietà del fattore opportuno per rendere il prodotto di esso per $y''+\phi(x,y,y')$ una derivata esatta, senza ricorrere alle primitive della proposta equazione, come si è fatto qui sopra.

Il fattore richiesto sia $\mu(x,y,y')$: dovrà essere una derivata esatta il binomio $\mu y''+\mu\phi$, e però identica la equazione (§ 264)

$$\left(\frac{d(\mu\phi+\mu y'')}{dy}\right)-\left(\frac{d(\mu\phi+\mu y'')}{dy'}\right)'+\mu''=0.$$

Sviluppando le derivate parziali indicate, ed osservando che

$$\mu'=\mu'(x)+\mu'(y)y'+\mu'(y')y'',$$

si ha la equazione

$$y''\mu'(y)+\mu'(y)\phi+\phi'(y)\mu$$
$$-\left(\mu'(y')\phi+\phi'(y')\mu-\mu'(x)-y'\mu'(y)\right)'=0;$$

e sviluppando la derivata tuttora indicata, e posto

$$\phi\mu'(y')+\mu\phi'(y')-\mu'(x)-\mu'(y')y'=\lambda,$$

si trova la

$$y''\mu'(y)+\varphi\mu'(y)+\mu\varphi'(y)-\lambda'(x)-y'\lambda'(y)-y''\lambda'(y')=0,$$

la quale si decompone nelle due

$$\mu'(y)-\lambda'(y')=0,\ \mu\varphi'(y)+\varphi\mu'(y)-\lambda'(x)-y'\lambda'(y)=0.$$

La funzione μ, che soddisfarà queste due equazioni, che sono alle derivate parziali del second' ordine e prese rispetto alle x, y, y', renderà il prodotto $(y''+\varphi(x,y,y'))\mu$ una derivata esatta.

Si potrebbero qui esporre le proprietà, che si dovrebbero verificare, perchè il fattore μ fosse funzione delle sole x, y, ed anco della sola x, ma credo di non trattenermi su tali ricerche, facili a farsi all' uopo, ed altronde poco feconde di conseguenze interessanti: per una analoga ragione, non parlo delle proprietà, che debbono avere le equazioni di certe famiglie, che si riducono derivate esatte, con fattori di forme individuate.

310. Si può trovare una equazione primitiva finita di una alle derivate del second' ordine, la quale sia soddisfatta da due coppie individuate di valori delle variabili.

Di fatto, vogliasi quella primitiva particolare, che dà $y=m$, quando sia $x=n$, ed $y=g$ quando $x=h$, la primitiva completa essendo $F(x,y,a,b)=0$.

Si determinino le costanti a, b, che soddisfanno le due equazioni

$$F(n,m,a,b)=0,\ \ F(h,g,a,b)=0;$$

e si pongano nella primitiva completa, ed avrassi quella primitiva particolare, per la quale saranno rispettivamente m e g i valori della y corrispondenti agli n, h della x. Così, si potrà individuare la costante arbitraria contenuta in una primitiva completa del primo ordine di una equazione alle derivate del secondo, talmente di ottenere quella primitiva particolare del primo ordine, che è soddisfatta da valori dati e corrispondenti delle x, y, y'.

LEZIONE IV.

Delle primitive singolari delle equazioni del secondo ordine e delle complete di una classe speciale di esse.

311. Eliminando la b dalla equazione $F(x,y,a,b)=0$ colla $F(x,y)'=0$ sua derivata prima esatta, abbiasi $P(x,y,y',a)=0$, ed eliminando la a si abbia in vece $Q(x,y,y',b)=0$.

Per quello che abbiamo veduto al § 46, eliminando le a, b dalle tre equazioni

$$F(x,y,a,b)=0,\ \ F(x,y)'=0,\ \ F(x,y)''=0,$$

ovvero eliminando la a dalle due $P(x,y,y',a)=0$, $P(x,y,y')'=0$, o la b dalle $Q(x,y,y',b)=0$, $Q(x,y,y')'=0$ si avrà sempre la stessa equazione alle derivate del secondo ordine, od almeno, se ne avranno tre affatto equivalenti tra loro: sia questa, od una di queste la $f(x,y,y',y'')=0$; cioè $F(x,y,a,b)=0$ esprima la primitiva completa finita o del second' ordine della equazione $f(x,y,y',y'')=0$.

Se nella $P(x,y,y',a)=0$ si porrà per a la funzione $\lambda(x,y,y')$ suo valore desunto dalla equazione $P'(a)=0$, la risultante che è $P(x,y,y',\lambda(x,y,y'))=0$, soddisfarà anch' essa la $f(x,y,y',y'')=0$.

Così, se nella $Q(x,y,y',b)=0$ porrassi in vece della b la funzione $\xi(x,y,y')$ valore della b stessa cavato dalla equazione $Q'(b)=0$, la $Q\big(x,y,y',\xi(x,y,y')\big)=0$ risultante soddisfarà pure la $f(x,y,y',y'')=0$.

Che le due equazioni qui ottenute soddisfacciano entrambe la $f(x,y,y',y'')=0$, si dimostra in un modo analogo a quello usato nel § 292 per quelle del primo ordine. Di fatto, la $P(x,y,y',\lambda)=0$ dà per sua derivata esatta

$$P(x,y,y')'+\lambda' P'=0 \text{ ossia } P(x,y,y')'=0$$

per essere $P'(\lambda)=0$; e però eliminando λ dalla equazione $P(x,y,y',\lambda)=0$ mediante la sua derivata, qui trovata, otterrassi la stessa equazione, che si ottiene, eliminando la a dalla $P(x,y,y',a)=0$ mediante la sua derivata esatta ordinaria; vale a dire otterrassi la $f(x,y,y',y'')=0$.

Similmente si dimostra, che la $f(x,y,y'y'')=0$ stessa è soddisfatta anco dalla $Q(x,y,y',\xi)=0$.

Le due equazioni

$$P(x,y,y',\lambda)=0,\ \ Q(x,y,y',\xi)=0,$$

quando non si possono desumere dalle

$$P(x,y,y',a)=0,\ \ Q(x,y,y',b)=0$$

primitive complete col dare alle a, b valori costanti, si chiamano *primitive singolari* del primo ordine della $f(x,y,y',y'')=0$.

312. Sebbene le due primitive singolari, qui contemplate, abbiano origini diverse, non ostante, esse sono fra loro identiche, cioè esprimono in sostanza la stessa primitiva della $f(x,y,y',y'')=0$.

Per manifestare che nella equazione $F(x,y)'=0$ ossia $F'(x)+y'F'(y)=0$ vi sono in generale le quantità x,y,y',a,b, essa si scriverà

$$\phi(x,y,y',a,b)=0.$$

L'equazione $P(x,y,y',a)=0$, essendo la risultante della eliminazione della quantità b dalle due

$$F(x,y,a,b)=0,\ \ \phi(x,y,y',a,b)=0,$$

si può rappresentare, siccome si farà, con una di queste, supponendo la b contenuta in questa medesima, determinata coll'altra: si rappresenti colla

$$\phi(x,y,y',a,b)=0$$

e la b sarà la funzione delle x,y,a determinata dalla $F(x,y,a,b)=0$.

La equazione $P(x,y,y',\lambda)=0$ primitiva singolare, che si ha, eliminando la a dalle due equazioni

$$P(x,y,y',a)=0,\ \ P'(a)=0,$$

sarà la stessa di quella, che si avrà, eliminando la a dalla $\phi(x,y,y',a,b)=0$ mediante la sua derivata rispetto alla a, che è

$$\phi'(a)+\phi'(b)\,b'(a)=0$$

ove la b esprime l'anzidetta funzione delle x,y,a, e la $b'(a)$ la sua derivata rispetto alla a, ovvero quella data dalla equazione

$$F'(a)+F'(b)\,b'(a)=0.$$

Vale a dire, la primitiva singolare, che ha origine dalla primitiva completa $P(x,y,y',a)=0$, sarà quella equazione, che avrassi, eliminando le a, b, $b'(a)$ dalle quattro equazioni

$$\phi(x,y,y',a,b)=0,\ \ \phi'(a)+\phi'(b)\,b'(a)=0,$$
$$F(x,y,a,b)=0,\ \ F'(a)+F'(b)\,b'(a)=0,$$

ovvero le a, b dalle tre seguenti

$$\phi(x,y,y',a,b)=0,\quad F(x,y,a,b)=0,$$
$$\phi'(a)F'(b)-\phi'(b)F'(a)=0.$$

Similmente, l'equazione $Q(x,y,y',b)=0$, essendo la risultante della eliminazione della a dalle due

$$F(x,y,a,b)=0,\quad \phi(x,y,y',a,b)=0,$$

si potrà anch'essa rappresentare con una di queste, supposto la a, contenuta in questa medesima, data dall'altra: si rappresenti essa pure colla

$$\phi(x,y,y',a,b)=0,$$

e la a sarà quella funzione delle x, y, b, che è determinata dalla $F(x,y,a,b)=0$.

La equazione primitiva singolare $Q(x,y,y',\xi)=0$ sarà la stessa di quella, che avrassi, eliminando la quantità b dalla $\phi(x,y,y',b)=0$ mediante la

$$\phi'(b)+\phi'(a)a'(b)=0$$

sua derivata rispetto alla b, ove la a esprime l'anzidetta funzione delle x, y, b, e la $a'(b)$ la sua derivata rispetto alla b, cioè quella data dalla equazione

$$F'(b)+F'(a)a'(b)=0;$$

vale a dire, quest'ultima primitiva singolare sarà l'equazione risultante dalla eliminazione delle $a, b, a'(b)$ dalle quattro equazioni

$$\phi(x,y,y',a,b)=0,\quad \phi'(b)+\phi'(a)a'(b)=0,$$
$$F(x,y,a,b)=0,\quad F'(b)+F'(a)a'(b)=0,$$

ovvero la risultante della eliminazione delle a, b dalle tre

$$\phi(x,y,y',a,b)=0,\quad F(x,y,a,b)=0,$$
$$\phi'(a)F'(b)-\phi'(b)F'(a)=0.$$

Quindi sarà essa identicamente la stessa dell'altra: come si è dichiarato.

Concludiamo per tanto, che la $f(x,y,y',y'')=0$ ha due equazioni $P(x,y,y',a)=0$, $Q(x,y,y',b)=0$ primitive complete del primo ordine, ed una sola primitiva singolare del primo ordine, la quale è la risultante della eliminazione delle a, b dalle tre equazioni dianzi esposte, ovvero quella che si ha eliminando le $a, b, b'(a)$ dalle quattro

$$F(x,y,a,b)=0,\quad \phi(x,y,y',a,b)=0$$
$$F'(a)+F'(b)b'(a)=0,\quad \phi'(a)+\phi'(b)b'(a)=0.$$

Anzi ha qui luogo una proprietà analoga a quella considerata nel § 293, cioè una equazione alle derivate del second'ordine è soddisfatta *unicamente* da tre differenti equazioni del primo ordine, che sono le due sue primitive complete e la primitiva singolare; dimodochè ogni equazione individuata alle derivate del primo ordine, soddisfacente una equazione alle derivate del second'ordine, sarà o una sua primitiva particolare ovvero la sua primitiva singolare.

Di fatto, essendo l'equazione $f(x,y,y',y'')=0$ equivalente alla $F(x,y,a,b)=0$, i valori delle y, y', y'' desunti da una qualunque sua primitiva debbono essere fra quelli somministrati dalla stessa $F=0$, per cui le sue derivate esatte del primo e second'ordine debbono essere le stesse della $F(x,y,a,b)=0$ nella ipotesi delle a, b costanti.

La nuova primitiva della $f=0$ si rappresenti colla medesima $F(x,y,a,b)=o$ ritenute le a, b funzioni opportune delle x, y.

Ma nella ipotesi delle a, b variabili si ha

$$F(x,y,a,b)'=F(x,y)'+F'(a)a'+F'(b)b',$$

e però dev' essere $F'(a)a'+F'(b)b'=o$; ed ammessa questa proprietà ossia

$$F(x,y,a,b)'=\phi(x,y,y'\,a,b) \text{ si ha}$$

$$F(x,y,a,b)''=\phi(x,y,y')'+\phi'(a)a'+\phi'(b)b'$$

per cui dev' essere anco $\phi'(a)a'+\phi'(b)b'=o$; adunque l' assunta equazione $F(x,y,a,b)=o$ sarà primitiva della $f=o$, purchè le quantità a, b soddisfacciano le due

$$F'(a)a'+F'(b)b'=o,\ \phi'(a)a'+\phi'(b)b'=o \text{ ossia le}$$

$$F'(a)a'+F'(b)b'=o,\ \phi'(a)F'(b)-\phi'(b)F'(a)=o,$$

oppure le seguenti

$$\phi(x,y,y',a,b)=o,\ \phi'(a)F'(b)-\phi'(b)F'(a)=o;$$

giacchè per la stessa $F(x,y,a,b)=o$, la $F'(a)a'+F'(b)b'=o$ è contenuta nella $\phi=o$. Quindi la nuova primitiva sarà l' equazione risultante dalla eliminazione delle a, b dalle tre seguenti

$$F(x,y,a,b)=o, \phi(x,y,y',a,b)=o, \phi'(a)F'(b)-F'(a)\phi'(b)=o,$$

che è la stessa primitiva singolare del primo ordine di cui si è parlato superiormente.

313. Sia trovata la primitiva completa della

$$P(x,y,y',\lambda)=o$$

cioè della anzidetta primitiva singolare; e risulti $\Delta(x,y,h)=o$ ove h è la voluta costante arbitraria.

Essendo $F(x,y,a,b)=o$ primitiva completa di entrambe le equazioni $P(x,y,y',a)=o$, $Q(x,y,y',b)=o$, la $f(x,y,y',y'')=o$ sarà soddisfatta da due sole equazioni tra le sole variabili, una delle quali sarà $F(x,y,a,b)=o$ sua primitiva completa del second' ordine, e l' altra $\Delta(x,y,h)=o$, che è la primitiva completa della primitiva singolare contemplata qui sopra.

Quindi le equazioni contenenti le sole variabili, o finite, come si suol dire comunemente, soddisfacenti la equazione $f(x,y,y',y'')=o$, saranno unicamente le

$$F(x,y,a,b)=o,\ \Delta(x,y,h)=o,$$

o quelle che si potranno desumere da queste medesime, collo individuare le costanti a, b, h.

314. Considerando nella equazione $P(x,y,y',a)=o$ le x, y, y' separatamente funzioni della a, si ha

$$\left(\frac{dx}{da}\right)=-\frac{F'(a)}{F'(x)},\ \left(\frac{dy}{da}\right)=-\frac{F'(a)}{F'(y)}, \text{ ed anco}$$

$$\left(\frac{dy'}{da}\right)=-\frac{F'(a)}{F'(y')},$$

e però, per la primitiva singolare, le derivate $\left(\frac{dx}{da}\right)$, $\left(\frac{dy}{da}\right)$, $\left(\frac{dy'}{da}\right)$ desunte dalla $P(x,y,y',a)=o$, saranno nulle. Altrettanto accade delle $\left(\frac{dx}{db}\right)$, $\left(\frac{dy}{db}\right)$, $\left(\frac{dy'}{db}\right)$ desunte dalla $Q(x,y,y',b)=o$.

Così, essendo le derivate $\left(\frac{dx}{da}\right)$, $\left(\frac{dx}{db}\right)$, $\left(\frac{dy}{da}\right)$, $\left(\frac{dy}{db}\right)$, $\left(\frac{dy'}{da}\right)$, $\left(\frac{dy'}{db}\right)$ qui contemplate, eguali ordinatamente alle frazioni

$$1:\left(\frac{da}{dx}\right),\ 1:\left(\frac{db}{dx}\right),\ 1:\left(\frac{da}{dy}\right),\ 1:\left(\frac{db}{dy}\right),$$

$$1:\left(\frac{da}{dy'}\right),\ 1:\left(\frac{db}{dy'}\right),$$

le $\left(\frac{da}{dx}\right)$, $\left(\frac{db}{dx}\right)$, $\left(\frac{da}{dy}\right)$, - - - saranno rese infinite dalla primitiva singolare.

315. Se nella equazione $\Delta(x,y,h)=0$ (§ 313) si ponesse in vece della h il suo valore cavato dalla $\Delta'(h)=0$, si avrebbe, generalmente parlando, la primitiva singolare della $P(x,y,y',\lambda)=0$, già primitiva singolare della stessa $f(x,y,y',y'')=0$.

Questa equazione risultante dalla eliminazione della h dalle due $\Delta(x,y,h)=0$, $\Delta'(h)=0$, quando non si possa desumere dalla prima di esse col dare alla h valore individuato, si chiama, benchè impropriamente, *primitiva singolare doppia* della stessa $f(x,y,y',y'')=0$, semprechè la $P(x,y,y',\lambda)=0$ sia primitiva singolare della medesima $f(x,y,y',y'')=0$.

Ho detto qui sopra, che l'ultima equazione ottenuta dicesi impropriamente *primitiva* della $f(x,y,y',y'')=0$; giacchè essa non soddisfa generalmente questa, come or ora vedremo.

316. La primitiva singolare doppia della $f(x,y,y',y'')=0$, di cui si è parlato nel paragrafo antecedente, si ha anco, eliminando le a, b dalla equazione $F(x,\ y,\ a,\ b)=0$ mediante le due $F'(a)=0$, $F'(b)=0$.

Di fatto, si rappresenti la equazione $P(x,y,y',\lambda)=0$ colla stessa $F(x,y,a,b)=0$, supposto le a, b desunte dalle due

$$\phi(x,y,y',a,b)=0,\ \phi'(a)F'(b)-\phi'(b)F'(a)=0;$$

e si avrà $F'(y')=F'(a)a'(y')+F'(b)\,b'(y')$ ossia

$$F'(y')\phi'(b)=F'(b)\phi'(a)\,a'(y')+F'(b)\,b'(y')\phi'(b),$$

per essere $\phi'(b)\,F'(a)=\phi'(a)\,F'(b)$; cioè avrassi

$$F'(y')\phi'(b)=\big(\phi'(a)\,a'(y')+\phi'(b)\,b'(y')\big)\,F'(b).$$

Ma dalla $\phi(x,y,y',a,b)=0$ si desume

$\phi'(a)\,a'(y')+\phi'(b)\,b'(y')+\phi'(y')=0$; adunque sarà $\phi'(b)F'(y')=-\phi'(y')F'(b)$, ossia $F'(b)=-\dfrac{\phi'(b)}{\phi'(y')}F'(y')$.

Similmente trovasi $F'(a)=-\dfrac{\phi'(a)}{\phi'(y')}F'(y')$. Quindi per la primitiva singolare doppia sarà tanto $F'(a)=0$ quanto $F'(b)=0$; giacchè per essa si ha $F'(y')=0$ (§ 298).

317. Ora si può dimostrare direttamente con facilità, che la primitiva singolare doppia non soddisfa l'equazione $f(x,y,y',y'')=0$ o la soddisfa in pochi casi particolari.

Si chiamino α,β i valori delle a, b desunti dalle equazioni $F'(a)=0$, $F'(b)=0$; e la primitiva singolare doppia sarà $F(x,y,\alpha,\beta)=0$.

La derivata prima esatta di questa equazione si riduce alla $\phi(x,y,y',\alpha,\beta)=0$ per essere nulle le $F'(\alpha)$, $F'(\beta)$; e la derivata seconda risulta evidentemente

$$\phi'(x)+\phi'(y)y'+\phi'(y')y''+\phi(\alpha)\,\alpha'+\phi'(\beta)\,\beta'=0,$$

dove la parte $\phi'(x)+\phi'(y)y'+\phi'(y')y''$ sarà formata colle x,y,y',y'',α,β precisamente, come la derivata seconda della funzione $F(x,y,a,b)$ ossia la prima della

$\phi(x,y,y',a,b)$ lo sarà colle x,y,y',y'',a,b.

Ma le espressioni delle α, β cavate dalle due equazioni

$$F(x,y,\alpha,\beta)=0,\ \phi(x,y,y',\alpha,\beta)=0,$$

che hanno luogo per la primitiva singolare doppia, sono formate colle x,y,y' come le espressioni delle a,b cavate dalle

$$F(x,y,a,b)=0,\ \ \phi(x,y,y',a,b)=0;$$

adunque, il risultamento, che si avrà, sostituendo queste espressioni delle a, b nella derivata prima della $\phi(x,y,y',a,b)$, sarà identico a quello, che avrassi, sostituendo quelle delle α,β nella parte

$$\phi'(x)+\phi'(y)\,y'+\phi'(y')\,y''$$

della derivata prima della $\phi(x,y,y',\alpha,\beta)$; e siccome il primo di questi due risultamenti è annullato dalla sussistenza della equazione

$$f(x,y,y'\,y'')=0;$$

così analoga proprietà avrebbe luogo anco per l'altro, quando la primitiva singolare doppia soddisfacesse la $f(x,y,y',y'')=0$; e per tanto avrebbesi a parte $\phi'(\alpha)\,\alpha'+\phi'(\beta)\,\beta'=0$.

Vale a dire la equazione, di cui si parla, soddisfarà la data alle derivate del secondo ordine nei soli casi, che sarà soddisfatta l'ultima equazione qui esposta.

518. Tra le varie primitive di una stessa equazione alle derivate del secondo ordine ed anco tra alcune di esse e la sua primitiva singolare doppia vi sono molte altre proprietà; ma stimo bene limitarmi alla esposizione delle seguenti, anzi alla semplice loro enunciazione; giacchè le rispettive dimostrazioni facilmente si potranno comporre, stante le cose già esposte e dimostrate.

La funzione della x valore della y data dalla equazione $\Delta(x,y,h)=0$, qualunque sia la h, ha per ogni valore della x un avvicinamento del second'ordine con una di quelle funzioni, che sono valori della y date dalla equazione $F(x,y,a,b)=0$; e quella data dalla primitiva singolare doppia ha, pure qualunque valore attribuiscasi alla x, un avvicinamento di primo ordine con funzioni della x, valori della y, date dalla stessa equazione $F(x,y,a,b)=0$: anzi fra gli infiniti valori della y corrispondenti al medesimo della x, che si possono ottenere dalla $F(x,y,a,b)=0$, variando le a, b, il massimo ed il minimo è dato dalla stessa primitiva doppia; proprietà interessante.

519. Parleremo ora delle regole, colle quali si possono trovare sì la primitiva singolare del primo ordine, che la primitiva singolare doppia, di una data equazione alle derivate del second'ordine, senza conoscere nè le sue primitive complete del primo ordine nè quella del secondo.

La $P(x,y,y',a)=0$ rappresenti una delle due primitive complete della data equazione alle derivate del second'ordine $f(x,y,y',y'')=0$; e la $P\big(x,y,y',\lambda(x,y,y')\big)=0$ rappresenterà la primitiva singolare del primo ordine, purchè λ sia il valore della a desunto dalla equazione $P'(a)=0$.

Sciolta la equazione $P(x,y,y',a)'=0$ rispetto alla a, abbiasi $a=\pi(x,y,y'\,y'')$: la equazione $P\big(x,y,y',\pi(x,y,y',y'')\big)=0$ avrà anch'essa per primitiva completa la $P(x,y,y',a)=0$ e per primitiva singolare la $P(x,y,y',\lambda)=0$.

Egli è evidente, che, il valore della π cavato dalla equazione $P(x,y,y',\pi)=0$, è lo stesso di quello della

a desunto dalla $P(x,y\,y',a)=0$; e però siccome per la primitiva singolare questo valore della a eguaglia $\lambda(x,y,y')$, così per essa equazione avrassi $\pi=\lambda$; e conseguentemente la quantità $P'(\pi)$ sarà identicamente *nulla*, per esser *nulla* la $P'(\lambda)$.

Essendo le equazioni $f(x, y, y', y'')=0$, $P(x,y,y',\pi)=0$ equivalenti e formate colle stesse quantità, la funzione $f(x,y,y',y'')$ sarà o identicamente la $P(x,y,y',\pi)$ ovvero il prodotto $MP(x,y,y',\pi)$, ove l' M esprimerà una funzione delle x,y,y',y''; cioè avrassi sempre la equazione identica $f=MP$, la quale dà

$$f'(y'')=P\,M'(y'')+MP'(y'') \text{ ossia}$$

$$f'(y'')=\frac{M'(y'')}{M}f+M\,P'(\pi)\,\pi'(y''),$$

per essere $P=\frac{1}{M}f$, e $P'(y'')=P'(\pi)\,\pi'(y'')$.

Ma la primitiva singolare soddisfa la $P'(\pi)=0$, oltre la data $f(x,y,y',y'')=0$ soddisfatta da ogni sua primitiva; adunque per la primitiva singolare, di cui si parla, avrassi $f'(y'')=0$; e conseguentemente essa sarà quella equazione, che si otterrà eliminando l'y'' dalle due $f(x,y,y',y'')=0$, $f'(y'')=0$; ovvero sarà un fattore comune di queste medesime.

Dalla $f(x, y, y', y'')=0$, in generale hassi $f(x,y,y')'+y'''f'(y'')=0$, per cui la primitiva singolare, annullando separatamente $f'(y'')$, soddisfarà anco la equazione $f(x,y,y')'=0$ cioè la $f'(x)+f'(y)y'+f'(y')y''=0$; e conseguentemente sarà essa la risultante della eliminazione della y'' da questa mediante la data.

Concludiamo per tanto che per avere la primitiva singolare della $f(x,y,y',y'')=0$ basterà eliminare la quantità y'' da due delle tre equazioni

$$f(x,y,y',y'')=0\,,\; f'(y'')=0\,,\; f(x,y,y')'=0\,;$$

giacchè essa sarà la risultante, ovvero sarà un suo fattore.

Quando non si saprà, che la $f(x,y,y',y'')=0$ avrà effettivamente primitiva singolare, sarà bene eliminare la y'' da tutte e tre le seguenti coppie di equazioni

$$f(x,y,y',y'')=0,\; f(x,y,y')'=0;$$
$$f(x,y,y',y'')=0,\; f'(y'')=0;$$
$$f(x,y,y')'=0,\; f'(y'')=0;$$

poichè, se le tre risultanti non saranno identiche, od almeno non avranno fattore comune, la $f(x,y,y'\,y'')=0$ non avrà primitiva singolare: se poi queste tre equazioni risultanti saranno identiche, od avranno un fattore comune, la medesima risultante nel primo caso, o nel secondo caso l'equazione, che si avrà, egualgliando a *zero* il fattore comune alle risultanti, sarà probabilissimamente la primitiva singolare richiesta.

320. Dalla equazione data $f=0$, in generale hassi $\left(\frac{dx}{dy''}\right)=-\frac{f'(y'')}{f'(x)}$, $\left(\frac{dy}{dy''}\right)=-\frac{f'(y'')}{f'(y)}$, $\left(\frac{dy'}{dy''}\right)=-\frac{f'(y'')}{f'(y')}$, $y'''=-\frac{f'(x,y,y')'}{f'(y'')}$; e però, per la primitiva singolare, le derivate rispetto alla y'' delle x, y, y' saranno nulle; e le $\left(\frac{dy''}{dx}\right)$, $\left(\frac{dy''}{dy}\right)$, $\left(\frac{dy''}{dy'}\right)$ infinite; e la y''' sarà resa $\frac{0}{0}$: proprietà tutte sufficienti per trovare, in

ogni caso, la primitiva singolare di una data equazione alle derivate del secondo ordine.

321. In ultimo, sia $\psi(x,y,y')$ il valore della y'' cavato dalla data equazione $f(x,y,y',y'')=0$; essendo le derivate $\left(\frac{dy''}{dx}\right)$, $\left(\frac{dy''}{dy}\right)$, $\left(\frac{dy''}{dy'}\right)$ infinite, le quantità $\psi(x+\omega,y,y')$, $\psi(x,y+\theta,y')$, $\psi(x,y,y'+\xi)$ non saranno sviluppabili in serie ordinarie cioè non avranno sviluppi ordinati secondo le potenze di esponenti intere delle indeterminate ω, θ, ξ (§ 121).

322. Farò ora vedere, come si possa desumere dalla stessa $f(x,y,y',y'')=0$ la sua primitiva singolare *doppia*.

La primitiva singolare ordinaria della

$$f(x,y,y',y'')=0,$$

e qui sopra considerata, si intenda rappresentata colla stessa equazione $f(x,y,y'y'')=0$, ove la y'' sia quella funzione delle x,y,y' data dalla $f'(y'')=0$; e la primitiva singolare doppia sarà la risultante della eliminazione della y' dalla medesima $f(x,y,y',y'')=0$ mediante la sua derivata rispetto alla y' contemplata dovunque, la quale sarebbe

$$f'(y')+f'(y'')\left(\frac{dy''}{dy'}\right)=0;$$

ma riducesi $f'(y')=0$ per essere $f'(y'')=0$. E pertanto, la primitiva singolare doppia sarà l'equazione, che si avrà, eliminando le y', y'' dalle tre

$$f(x,y,y',y'')=0,\ f'(y')=0,\ f'(y'')=0;$$

ovvero sarà essa un fattore, eguagliato a *zero*, di questa medesima risultante.

323. Non parlerò delle primitive singolari delle equazioni alle derivate degli ordini superiori al secondo, perchè occorrono pochissime volte, e d'altronde la loro trattazione non riesce difficile per la grande analogia, che ha luogo tra essa e l'esposta per quelle del primo e second'ordine; e terminerò di parlare delle primitive singolari col far osservare che le equazioni che si hanno eguagliando a *zero* funzioni composte dei soli valori delle costanti a, b, c, --- desunti da una equazione $F(x, y, a, b, c, ---)=0$ combinata colle opportune prime sue equazioni derivate esatte hanno tutte primitive singolari.

324. Si incontrano spesse volte equazioni alle derivate del second'ordine, le quali hanno o si possono ridurre ad avere la forma $\psi(p, q)=0$, dove le p, q funzioni delle x, y, y', y'' hanno le derivate prime, il cui rapporto non contiene la y'''. Una primitiva del primo ordine di queste equazioni si può trovare facilmente col metodo seguente.

Si costituiscano le due equazioni

$$p(x, y, y', y'')=a,\ q(x, y, y', y'')=b$$

ove le a, b esprimono due costanti; e si combinino tra loro in modo da eliminare la y'', e la risultante sia $F(x, y, y', a, b)=0$: questa sarà una primitiva del primo ordine della

$$\psi\big(p(x, y, y', y''),\ q(x, y, y', y'')\big)=0$$

data; purchè ritengasi tra le a,b la relazione $\psi(a,b)=0$; e sarà completa, rimanendo arbitraria una delle costanti a, b.

Sia α quella funzione delle sole x, y, y', y'', la quale esprime il rapporto della derivata q' alla p'; cioè abbiasi $q' = \alpha p'$.

Ammessa la equazione $p' = 0$, si ha anco $\alpha p' = 0$ ossia $q' = 0$; e però le due $p = a$, $q = b$ saranno tra loro equivalenti, anzi ciascuna di queste equazioni equivarrà alla $F(x, y, y', a, b) = 0$, desunta da esse nel modo suindicato; cioè la y avente la proprietà $F(x, y, y', a, b) = 0$ ridurrà le funzioni

$$p(x, y, y', y''),\ q(x, y, y', y'')$$

rispettivamente alle costanti a, b; e conseguentemente essa ridurrà l'equazione

$$\psi\big(p(x, y, y', y''), q(x, y, y', y'')\big) = 0 \text{ alla } \psi(a, b) = 0,$$

la quale è identica, per essere la stessa relazione ammessa tra le a, b. Vale a dire, la equazione $F(x, y, y', a, b) = 0$ soddisfarà la proposta alle derivate del second'ordine, purchè le costanti a, b abbiano la relazione $\psi(a, b) = 0$; e la soddisfarà indipendentemente da una delle costanti medesime, per cui sarà una sua primitiva completa del primo ordine: come si è dichiarato.

Esempio. Sia

$$f(x, y, y', y'') = \psi\left(x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2),\ y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2)\right),$$

cioè si debba trovare una primitiva completa del primo ordine della equazione

$$\psi\left(x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2),\ y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2)\right) = 0.$$

Pongasi $x - \dfrac{y'}{y''}(1 + y'^2) = p$, ed $y + \dfrac{1}{y''}(1 + y'^2) = q$; e si avrà (§ 189)

$$p' = -\left(3y' - \frac{y'''}{y''^2}(1 + y'^2)\right)y',\ q' = 3y' - \frac{y'''}{y''^2}(1 + y'^2);$$

e però $\dfrac{q'}{p'} = -\dfrac{1}{y'}$, rapporto, il quale, non contenendo la y''', insegna, che si potrà trovare la primitiva richiesta col metodo dianzi esposto.

Stabiliscansi per tanto le due equazioni

$$x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2) = a,\ y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) = b,$$

dove a, b sono due costanti; e da esse eliminisi la y'', e si avrà la seguente

$$(y - b)y' + x - a = 0,$$

la quale sarà una primitiva completa della data, purchè le a, b abbiano la relazione $\psi(a, b) = 0$.

L'equazione trovata dà immediatamente la

$$(y - b)^2 + (x - a)^2 - c^2 = 0$$

per sua primitiva completa, ove c esprime la nuova costante arbitraria, e conseguentemente questa sarà anco la primitiva completa del secondo ordine o finita della equazione alle derivate del second'ordine, ove le costanti a, b abbiano la anzidetta relazione.

La primitiva singolare della equazione data si potrà avere, eliminando la y'' da essa medesima, mediante la $f'(y'') = 0$ cioè

$$\psi'(p) - \frac{1}{y'}\psi'(q) = 0.$$

ovvero eliminando la a dalla $x - a + (y - b)y' = 0$ col soccorso della $1 - b'(a) \cdot y' = 0$ sua derivata presa rispetto alla a stessa.

Troviamo anco la primitiva completa di quest'ultima già primitiva singolare della proposta equazione.

Si considerino le x, y funzioni della a, ed avransi a scoprire quelle funzioni della a stessa, valori delle x, y, che soddisfanno le due equazioni seguenti

$$(x-a)x'+(y-b)y'=0,\quad x'+b'y'=0,$$

nelle quali le derivate sono tutte prese rispetto alla a.

Si combinino queste due equazioni alle loro derivate prime esatte, che sono

$$(x'-1)x'+(x-a)x''+(y'-b')y'+(y-b)y''=0,$$
$$x''+y''b'+y'b''=0,$$

in modo da eliminare le quantità y, y', y'', ed avrassi la seguente

$$x'+\frac{b'b''}{1+b'^2}x-a\frac{b'b''}{1+b'^2}=0.$$

Quest'ultima (§ 278) somministra per sua primitiva completa

$$x=I\left(k+\int I^{-1}\frac{ab'b''}{1+b'^2}da\right),$$

ove I è posta per semplicità in vece di $e^{-\int\frac{b'b''}{1+b'^2}da}$, e la k indica una costante arbitraria.

Essendo $\int\frac{b'b''}{1+b'^2}da=\log.\sqrt{(1+b'^2)}$, si ha $I=\frac{1}{\sqrt{(1+b'^2)}}$, e però

$$x=\frac{1}{\sqrt{(1+b'^2)}}\left(k+\int\frac{b'b''}{\sqrt{(1+b'^2)}}a\,da\right).$$

Ma d'altronde (§ 96)

$$\int\frac{b'b''}{\sqrt{(1+b'^2)}}a\,da=a\sqrt{(1+b'^2)}-\int\sqrt{(1+b'^2)}\,da;$$

adunque sarà

$$x=a-\frac{1}{\sqrt{(1+b'^2)}}\int\sqrt{(1+b'^2)}\,da,$$

supposto per semplicità la $\int\sqrt{(1+b'^2)}\,da$ primitiva generale o completa della funzione $\sqrt{(1+b'^2)}$.

Questo valore della x, sostituito nella equazione $(x-a)b'+b-y=0$, dà

$$y=b-\frac{b'}{\sqrt{(1+b'^2)}}\int\sqrt{(1+b'^2)}\,da.$$

Concludasi per tanto, che, la data equazione alle derivate del secondo ordine, ha per primitiva completa finita la

$$(x-a)^2+(y-b)^2-c^2=0,$$

dove le a, b hanno la relazione $\psi(a,b)=0$; e per altra primitiva finita, che è la primitiva completa della sua primitiva singolare ordinaria, la risultante che si ha eliminando le a, b dalle tre equazioni seguenti

$$x=a-\frac{1}{\sqrt{(1+b'^2)}}\int\sqrt{(1+b'^2)}\,da,$$
$$y=b-\frac{b'}{\sqrt{(1+b'^2)}}\int\sqrt{(1+b'^2)}\,da,$$
$$\psi(a,b)=0.$$

Se le a, b ed anco le x, y rappresentassero rette coordinate rettangolarmente, quest'ultima primitiva trovata rappresenterebbe evidentemente la linea, sviluppata di quella curva, che è rappresentata colla equazione proposta.

325. In ultimo, la equazione alle derivate del secondo d'ordine sia $\psi(p,q,r)=0$, dove le p, q, r esprimano funzioni tali delle x, y, y', y'', che i rapporti $\frac{q'}{p'}\cdot\frac{r'}{p'}$ sono indipendenti dalla y'''.

Eliminando le y', y'' dalle equazioni $p=a$, $q=b$, $r=c$, ove le a, b, c esprimano tre costanti, abbiasi la

$$F(x, y, a, b, c)=o:$$

questa sarà la primitiva completa del second'ordine della data

$$\psi(p(x, y, y', y''), q(x, y, y', y''), r(x, y, y', y''))=o;$$

purchè le a, b, c abbiano la relazione $\psi(a, b, c)=o$.

Si ponga $\frac{q'}{p'}=\alpha$, $\frac{r'}{p'}=\beta$, ossia $q'=\alpha p'$, $r'=\beta p'$: le α, β non contengono la y'''.

Egli è evidente, che la equazione $p'=o$ annulla i prodotti $\alpha p'$, $\beta p'$ ossia dà le due $q'=o$, $r'=o$; e però le due equazioni $q=b$, $r=c$ saranno conseguenze della $p=a$; e siccome a questa si può sostituire la $F(x, y, a, b, c)=o$; così, se nelle funzioni $p(x, y, y' y'')$, $q(x, y, y', y'')$, $r(x, y, y', y'')$ porransi in vece delle y, y', y'' i rispettivi valori desunti dalla equazione $F(x, y, a, b, c)=o$, i risultamenti saranno ordinatamente le costanti a, b, c. Quindi, facendo queste medesime sostituzioni nella equazione $\psi(p, q, r)=o$, si avrà la $\psi(a, b, c)=o$, la quale è soddisfatta, essendo appunto quella, che stabilisce la relazione ammessa tra le costanti.

Vale a dire, la equazione

$$F(x, y, a, b, c)=o,$$

ammessa tra le costanti a, b, c la relazione $\psi(a, b, c)=o$, è primitiva della

$$\psi(p(x, y, y' y''), q(x, y, y', y''), r(x, y, y', y''))=o,$$

ed è la sua primitiva completa, perchè due delle costanti a, b, c rimangono arbitrarie.

Per fare un esempio anco di questo metodo, debbasi trovare la primitiva della

$$\psi(y'\text{sen.}x+y''\cos.x,\ y'\cos.x-y''\text{sen.}x,\ y+y'')=o.$$

Suppongasi

$$y'\text{sen.}x+y''\cos.x=p,\ y'\cos.x-y''\text{sen.}x=q,\ y+y''=r;$$

e sarà

$$p'=(y'+y''')\cos.x,\ q'=-(y'+y''')\text{sen.}x,\ \text{ed } r'=y'+y'''$$

$$\text{e però } \frac{q'}{p'}=-\text{tang.}x,\ \frac{r'}{p'}=\frac{1}{\cos.x}$$

cioè i rapporti $\frac{q'}{p'}$, $\frac{r'}{p'}$ saranno indipendenti dalla y''', per cui la primitiva richiesta, avrassi, eliminando le y', y'' dalle tre equazioni seguenti

$$y'\text{sen.}x+y''\cos.x=a,\ y'\cos.x-y''\text{sen.}x=b,\ y+y''=c,$$

ammessa fra le costanti a, b, c la relazione $\psi(a, b, c)=o$.

Eseguita effettivamente la eliminazione delle y', y'', trovasi la equazione

$$y+a\cos.x-b\,\text{sen.}x-c=o;$$

e per tanto questa sarà la primitiva richiesta, ammessa la $\psi(a, b, c)=o$ tra le costanti contenute in essa.

LEZIONE V.

Delle primitive delle equazioni lineari dell'ordine ennesimo, e delle primitive espresse colle serie.

326. Una equazione $F(x, y, y', y'', \text{---}\ y^{(n-m)})=o$, si chiamerà primitiva dell' ordine *m esimo* della

$f(x, y, y' y'', --- y^{(n)}) = o$, quando si possa combinare, occorrendo, colle sue derivate esatte $F' = o$, $F'' = o, --- F^{(m)} = o$ talmente d'ottenere la stessa $f = o$; e particolarmente chiamerassi primitiva completa, se conterrà m costanti arbitrarie non contenute nella $f = o$; e primitiva *particolare* sempre dell'ordine *m esimo*, se si potrà desumere dalla completa coll'individuare alcune o tutte le costanti arbitrarie contenute in questa; e chiamerassi primitiva *singolare*, se per desumerla dalla completa sarà necessario assolutamente dare alle costanti valori variabili.

La equazione

$$F(x, y, a, b, ---) = o$$

contenente le n costanti arbitrarie $a, b, ---$ sia la primitiva completa finita dell'ordine *n esimo* della

$$f(x, y, y', y'', --- y^{(n)}) = o.$$

Combinando la equazione

$$F = o \text{ alle } F' = o,\ F'' = o,\ --- F^{(m)} = o,$$

sue m prime derivate esatte, in modo da eliminare m delle costanti $a, b, ---$, otterrassi una equazione alle derivate dell'ordine *m esimo* e contenente $n - m$ costanti arbitrarie, la quale sarà una primitiva dell'ordine $(n - m)$ *esimo* della stessa $f = o$; e siccome sono tante le equazioni, che si possono analogamente desumere dalle $F = o$, $F' = o$, $F'' = o$, $--- F^{(m)} = o$, quante sono le combinazioni, che si possono fare colle n costanti, combinandole ad m ad m; così, la $f = o$ avrà tante primitive complete dell'ordine $(n - m)$ *esimo*, quante sono queste medesime combinazioni cioè

$$\frac{n(n-1)(n-2)---(n-m+1)}{2 \cdot 3 --- m}.$$

Così, affinchè la equazione

$$F(x, y, a, b, ---) = o$$

continui a soddisfare la $f = o$ anco nel caso che le quantità $a, b, ---$ siano variabili, funzioni della x, queste debbono soddisfare le n equazioni seguenti

$$F'(a)\,a' + F'(b)\,b' + \text{ecc.} = o,$$
$$F'(a)'a' + F'(b)'b' + \text{ecc.} = o,$$
$$F'(a)''a' + F'(b)''b' + \text{ecc.} = o,$$
$$-------------$$
$$F'(a)^{(n-1)}a' + F'(b)^{(n-1)}b' + \text{ecc.} = o,$$

ove il simbolo $F'(a)^{(n-1)}$ esprime la derivata parziale rispetto alla a della derivata $(n-1)$ *esima* presa rispetto alla x della $F(x, y, a, b, ---)$ nella ipotesi delle $a, b, ---$ costanti; e simili significati hanno gli altri analoghi simboli qui usati. Dimodochè, eliminando da queste n equazioni le $a', b', ---$, e combinando la risultante alla $F = o$ e sue prime $n - 1$ derivate esatte talmente da eliminare le stesse $a, b, ---$, avrassi una equazione, che sarà alle derivate $(n-1)$ *esime*, la quale soddisfarà anch'essa la $f = o$. Quest'ultima equazione è la primitiva singolare della $f = o$ medesima.

Una equazione alle derivate si chiama di *primo grado* ossia *lineare*, quando in essa la variabile considerata funzione dell'altra e le sue derivate siano in termini differenti ed alla sola prima potenza: la loro forma generale è la seguente

$$y^{(n)} + Ay^{(n-1)} + By^{(n-2)} + ---- + Gy' + Hy = I,$$

ove le $A, B, --- G, H, I$ o sono costanti ovvero funzioni della sola x.

Se le funzioni $\phi(x)$, $\psi(x)$, - - - siano valori della y per la equazione

$$y^{(n)}+Ay^{(n-1)}+By^{(n-2)}+ - - - - + Gy'+Hy=0,$$

evidentemente anco il polinomio $N\phi+N_1\psi+$ ecc. ove le N, N_1, - - - esprimono costanti arbitrarie, sarà un valore della y soddisfacente la stessa equazione alle derivate *n esime*.

Cominceremo a parlare della primitiva della equazione

$$y^{(n)}+Ay^{(n-1)}+By^{(n-2)}+ - - - - + Gy'+Hy=0.$$

nella ipotesi che i coefficienti A, B, - - - G, H siano costanti.

Si supponga $y=e^{\alpha x}$, ove l'α esprime una costante; e la equazione ridurrassi alla

$$(\alpha^n+A\alpha^{n-1}+B\alpha^{n-2}+ - - - - + G\alpha+H)e^{\alpha x}=0,$$

la quale sarà soddisfatta indipendentemente dalla x, purchè l' α esprima una radice della

$$\alpha^n+A\alpha^{n-1}+B\alpha^{n-2}+ - - - - + G\alpha+H=0.$$

Le $a, b,$ - - - $\beta, \lambda,$ - - - h esprimano le n radici di questa equazione, e le funzioni e^{ax}, e^{bx}, - - - e^{hx} saranno altrettanti valori particolari della y per la equazione alle derivate di cui si parla. Quindi pel premesso dianzi, la primitiva completa di questa medesima equazione in generale sarà

$$y=N_1e^{ax}+N_2e^{bx}+ - - - - + N_ne^{hx},$$

ove le N_1, N_2, - - - N_n esprimono n costanti arbitrarie.

Se fra le radici $a, b,$ - - - β, λ - - - h alcune fossero tra loro eguali, per esempio fossero eguali le prime r, che supporremo $a, b,$ - - - β, la primitiva trovata si ridurrebbe alla

$$y=(N_1+N_2+ - - - + N_r)e^{ax}+N_{r+1}e^{\gamma x}+ - - - + N_ne^{xh} \text{ ossia}$$

$$y=Me^{ax}+N_{r+1}e^{\gamma x}+ - - - + N_ne^{xh},$$

la quale non è più completa; giacchè contiene solamente $n-r+1$ costanti arbitrarie $M, N_{r+1},$ - - - N_n.

Per questo caso, ed anco pei suoi analoghi, la primitiva completa si potrà conseguire col metodo seguente. Pongasi nella medesima data equazione in vece della y il prodotto te^{ax}, ove t esprime una nuova funzione della x; e però in vece delle $y', y'',$ - - - $y^{(n)}$ porransi ordinatamente

$$(t'+ta)e^{ax},\ (t''+2at'+a^2t)e^{ax},$$

$$- - - \left(t^{(n)}+nat^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}a^2t^{(n-2)}+ - - - + na^{n-1}t'+a^nt\right)e^{ax};$$

e si avrà

$$(a^n+Aa^{n-1}+ - - - + Ga+H)te^{ax}$$
$$+(na^{n-1}+(n-1)Aa^{n-2}+ - - - + G)t'e^{ax}+ - - - + t^{(n)}e^{ax}=0,$$

ossia, dividendo per e^{ax},

$$t\phi(a)+t'\phi'(a)+t''\phi''(a)+ - - - - + t^{(n)}=0,$$

ove, intendendosi espressa con $\phi(\alpha)$ la quantità $\alpha^n+A\alpha^{n-1}+B\alpha^{n-2}+ - - - - + G\alpha+H$, le $\phi(a), \phi'(a)$, $\phi''(a)$, - - - sono i valori delle $\phi(\alpha)$, $\phi'(\alpha)$, $\phi''(\alpha)$, - - - corrispondenti alla $\alpha=a$.

Ma per essere a una delle r radici eguali della equazione $\phi(\alpha)=0$, hansi $\phi(a)=0$, $\phi'(a)=0$, $\phi''(a)=0$, - - - $\phi^{(r-1)}(a)=0$; adunque dalla equazione, dianzi trovata, spariranno le quantità $t, t', t'',$ - - - $t^{(r-1)}$; dimodochè essa si ridurrà alla forma

$$t^{(n)}+pt^{(n-1)}+ - - - - + kt^{(r)}=0,$$

la quale è visibilmente soddisfatta da $t^{(r)}=0$; e però sarà

$$t=M_1+M_2x+M_3x^2+----+M_rx^{r-1}$$

ove le M esprimono r costanti arbitrarie.

E per tanto, per essere $y=te^{ax}$, la proposta equazione sarà soddisfatta da

$$y=(M_1+M_2x+M_3x^2+----+M_rx^{r-1})e^{ax};$$

e siccome lo è anco da

$y=N_{r+1}e^{\gamma x}+---+N_ne^{xh}$; così avrassi

$y=(M_1+M_2x+---+M_rx^{r-1})e^{ax}+N_{r+1}e^{\beta x}+---+N_ne^{kx}$

primitiva completa, perchè in essa vi sono le n costanti arbitrarie

$$M_1,\ M_2,\ ---\ M_r,\ N_{r+1},\ ---\ N_n.$$

La regola usata per ritrovare la primitiva completa essendovi più radici eguali alla a, si userà anco per ottenerla, quando vi saranno anco altre radici pure eguali tra loro,

327. Ora troviamo la primitiva della equazione

$$y^{(n)}+Ay^{(n-1)}+By^{(n-2)}+----+Gy'+Hy=I,$$

ove le $A, B, ---\ G, H$ sono costanti e la I qualsivoglia funzione della x.

Si assuma la equazione

$$\alpha^{n-1}+A_1\alpha^{n-2}+B_1\alpha^{n-3}+----+G_1=0$$

le cui $(n-1)$ radici siano le stesse $b, c, ---\ h$ della

$\alpha^n+A\alpha^{n-1}+B\alpha^{n-3}+----+G\alpha+H=0$; e sarà

$$A=A_1-a,\ B=B_1-aA_1,\ C=C_1-aB_1,$$
$$---\ G=G_1-aF_1,\ H=-aG_1.$$

Ponendo questi valori delle $A, B, ---$ nella attuale proposta equazione, e moltiplicando la risultante per e^{-ax}, ed anco rammentandosi che $(e^{-ax})'=-ae^{-ax}$, si ha evidentemente la seguente

$$\left((y^{(n-1)}+A_1y^{(n-2)}+B_1y^{(n-3)}+---+F_1y'+G_1y)e^{-ax}\right)'=Ie^{-ax},$$

la quale dà la

$$y^{(n-1)}+A_1y^{(n-2)}+B_1y^{(n-3)}+---+F_1y'+G_1y=e^{ax}\int Ie^{-ax},$$

ove la primitiva $\int Ie^{-ax}$ è generale.

Così, assunta la equazione

$$\alpha^{n-2}+A_2\alpha^{n-3}+B_2\alpha^{n-4}+----+F_2=0$$

avente per radici le $c, d, ---\ h$, ed operando per la b, come dianzi si è fatto per la a, trovasi

$$y^{(n-2)}+A_2y^{(n-3)}+B_2y^{(n-4)}+---+F_2y=e^{bx}\int e^{(a-b)x}\int Ie^{-ax}.$$

E facendo altrettanto per le radici $c, d, ---\ g, h$, avrassi evidentemente

$$y=e^{hx}\int e^{(g-h)x}\int --\int e^{(b-c)x}\int e^{(a-b)x}\int Ie^{-ax}$$

per equazione primitiva richiesta, la quale è completa, perchè le n primitive indicate sono generali.

Se le radici $a,\ b,\ c,\ ---\ g,\ h$ fossero tutte eguali alla a, avrebbesi evidentemente per primitiva

$$y=e^{ax}\int^{(n)} Ie^{-ax}.$$

328. Passerò ora alla esposizione di alcune interessanti proprietà delle equazioni lineari, qualunque siano i loro coefficienti.

Tutte le volte che si conosceranno alcuni valori della y soddisfacenti la equazione

$$y^{(n)}+Ay^{(n-1)}+By^{(n-2)}+ - - - +Gy'+Hy=0,$$

qualunque siano $A, B, - - - G, H$, la ricerca della primitiva completa della

$$y^{(n)}+Ay^{(n-1)}+By^{(n-2)}+ - - - +Gy'+Hy=I$$

dipenderà, o si potrà far dipendere, da quella di un'altra equazione lineare dell'ordine eguale ad n *meno* il numero dei valori conosciuti della y, purchè il rapporto geometrico di questi non sia costante.

I valori conosciuti della y siano r e rappresentati colle $t, u, - - - v$; e le $T, U, - - - V$ siano r funzioni incognite della x.

Per semplicità rappresenterò i polinomj

$$tT+uU+ - - - +vV,\ t'T+u'U+ - - - +v'V,$$
$$tT'+uU'+ - - - +vV', - - -$$
$$t^{(m)}T^{(s)}+u^{(m)}U^{(s)}+ - - - +v^{(m)}V^{(s)}$$

coi simboli $P_{0,0},\ P_{1,0},\ P_{0,1},\ - - - P_{m,s}$.

Si ponga per la proposta equazione $y=P_{0,0}$; e si stabiliscano tra le derivate $T', U', - - - V'$ le $r-1$ equazioni seguenti

$$P_{0,1}=0,\ P_{1,1}=0,\ P_{2,1}=0, - - - P_{r-2,1}=0,$$

le quali sciolte rispetto alle stesse derivate $U', - - - V'$ diano

$$U'=\vartheta\cdot T', - - - V'=\mu T',$$

dove le $(r-1)$ quantità $\vartheta, - - - \mu$ esprimono funzioni individuate delle $t, u, - - - v, t', u', - - - v', t'', u'', - - - v'', - - -$ e però funzioni conosciute della x.

La equazione $y=P_{0,0}$ assunta, avuto riguardo alle $r-1$ dianzi stabilite, dà

$$y'=P_{1,0}, y''=P_{2,0}, - - - y^{(r-1)}=P_{r-1,0}, y^{(r)}=P_{r,0}+P_{r-1,1},$$
$$y^{(r+1)}=P_{r+1,0}+2P_{r,1}+P_{r-1,2}, - - -$$
$$y^{(n)}=P_{n,0}+kP_{n-1,1}+\frac{k(k-1)}{2}P_{n-2,2}+ - - - +kP_{r,k-1}+P_{r-1,k}:$$

k è posta in vece di $n-r+1$.

Si sostituiscano questi valori delle $y, y', y'', - - - y^{(n)}$ nella equazione proposta cioè nella

$$I=Hy+Gy'+ - - - +H_1y^{(r)}+G_1y^{(r+1)}+ - - - +Ay^{(n-1)}+y^{(n)},$$

ed ommettasi il polinomio

$$HP_{0,0}+GP_{1,0}+ - - - +H_1P_{r,0}+G_1P_{r+1,0}+ - - - +AP_{n-1,0}+P_{n,0},$$

perchè *nullo*, stantechè le $t, u, - - - v$ soddisfanno la equazione medesima nel caso di $I=0$; e si avrà

$$I=H_1P_{r-1,1}+2G_1P_{r,1}+G_1P_{r-1,2}+ - - - +P_{r-2,k}:$$

in questa si pongano in vece delle $U', - - - V'$ i loro valori $\vartheta T', - - - \mu T'$; indi suppongasi $T'=z$, z nuova variabile, e si avrà evidentemente una equazione alle derivate in z lineare e dell'ordine $(k-1)$ *esimo*.

Trovata la primitiva *completa* di questa equazione, in un tratto avrassi la richiesta. Di fatto, dalla primitiva di questa abbiasi $z=Z$; e sarà

$$T'=Z,\ U'=\vartheta Z, - - - V'=\mu Z$$

e però $T=\int Z,\ U=\int\vartheta Z, - - - V=\int\mu Z,$

ove le r primitive indicate sono generali. Quindi, per essere $y=P_{0,0}$ cioè

$$y=tT+uU+ - - - +vV, \text{ avrassi}$$
$$y=t\int Z+u\int\vartheta Z+ - - - +v\int\mu Z$$

per equazione primitiva richiesta; giacchè in essa vi sono le $k-1=n-r$ costanti arbitrarie contenute nella Z oltre le r portate dalle primitive indicate.

Concludiamo per tanto, che la ricerca della equazione primitiva della

$$I=Hy+Gy'+---+Ay^{(n-1)}+y^{(n)}$$

dipenderà da quella della primitiva della equazione in z, la quale è dell'ordine $(n-r)$ *esimo*, cioè di un ordine eguale ad *m meno r* numero dei valori particolari della y soddisfacenti la medesima equazione proposta nel caso però di I *zero*.

Se fosse $r=n-1$, la equazione in T sarebbe

$$I=P_{n-2,2}+2P_{n-1,1}+AP_{n,1}$$

e quella in z del primo ordine; e conseguentemente col metodo esposto si potrà trovare l'*effettiva* primitiva della

$$I=Hy+Gy'+---+Ay^{(n-1)}+y^{(n)},$$

quando si conosceranno $n-1$ primitive particolari della

$$0=Hy+Gy'+---+Ay^{(n-1)}+y^{(n)};$$

purchè i valori della y somministrati da queste primitive abbiano rapporti variabili.

Se poi fosse la $r=n$, la equazione in T evidentemente sarebbe

$$I=P_{n-1,1} \text{ cioè } I=t^{(n-1)}T'+u^{(n-1)}U'+---+v^{(n-1)}V',$$

la quale combinata colle $r-1=n-1$ stabilite superiormente tra le T', U', --- V' darà i valori di queste derivate: abbiansi

$$T'=Z_1,\ U'=Z_2,\ ---\ V'=Z_n \text{ e però}$$
$$T=\int Z_1,\ U=\int Z_2,\ ---\ V=\int Z_n;$$

e si avrà immediatamente per equazione richiesta la seguente

$$y=t\int Z_1+u\int Z_2+---+v\int Z_n,$$

ove le n primitive indicate sono generali.

Per dare un esempio, i coefficienti $A, B,$ --- G, H siano costanti, più le radici della equazione

$$a^n+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+---+Ga+H=0,$$

siano tutte eguali ad a; ed ammesso

$$t=e^{ax},\ u=xe^{ax},\ ---\ v=x^{n-1}e^{ax},$$

le equazioni

$$P_{0,1}=0,\ P_{1,1}=0,\ ---\ P_{n-2,1}=0,\ P_{n-1,1}=I$$

risulteranno, dividendo le prime $n-1$ per e^{ax},

$$T'+xU'+---+x^{n-1}V'=0,$$
$$U'+---+(n-1)x^{n-2}V'=0,$$
$$-----------$$
$$(n-1)(n-2)---3\cdot 2e^{ax}V'=I,$$

le quali facilissimamente somministrano i valori delle V, --- U, T, i quali sostituiti nel polinomio $tT+uU+---+vV$ insieme a quelli delle $t, u,$ --- v lo riducono all'

$$e^{ax}\left(x^n\int Ie^{-ax}-(n-1)x^{n-1}\int xIe^{-ax}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}x^{n-2}\int x^2Ie^{-ax}\right.$$
$$\left.----\pm\int x^{n-1}Ie^{-ax}\right):1\cdot 2\cdot 3---(n-1)$$

che equivale ad $e^{ax}\int^{(n)}Ie^{-ax}$; e per tanto sarà

$$y=e^{ax}\int^{(n)}Ie^{-ax},$$

come si è trovato altrimenti nel paragrafo antecedente.

329. Terminerò di parlare delle equazioni alle derivate lineari colla esposizione della seguente loro proprietà.

Nella equazione

$$y^{(n)}(x)+Ay^{(n-1)}(x)+By^{(n-2)}(x)+----+Gy'(x)+Hy=I$$

si sostituiscano in vece delle derivate $y'(x)$, $y''(x)$, $---y^{(n)}(x)$ i loro valori formati colle derivate della x e della stessa y prese tutte rispetto alla t nuova variabile principale, i quali sono ordinatamente

$$\frac{y'}{x'},$$

$$\frac{y''}{x'^2}-\frac{x''}{x'^3},$$

$$------$$

$$\frac{y^{(n-2)}}{x'^{n-2}}----\frac{x^{(n-2)}}{x'^{n-1}}\cdot y',$$

$$\frac{y^{(n-1)}}{x'^{n-1}}-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\frac{x''}{x'^n}y^{(n-2)}+----\frac{x^{(n-1)}}{x'^n}y',$$

$$\frac{y^{(n)}}{x'^n}-\frac{1}{2}n(n-1)\frac{x''}{x'^{n+1}}y^{(n-1)}+\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)\left(\frac{n+1}{4}\frac{x''^2}{x'^{n+2}}-\frac{1}{3}\frac{x'''}{x'^{n+1}}\right)y^{(n-2)}$$

$$+----\frac{x^{(n)}}{x'^{n+1}}y';$$

si moltiplichi ciascun membro della risultante per x'^n, e si ordini essa secondo le nuove derivate della y; ed avrassi la seguente

$$y^{(n)}+\left(Ax'-\frac{n}{2}(n-1)\frac{x''}{x'}\right)y^{(n-1)}+\left(Bx'^2-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)Ax''\right.$$

$$\left.+\frac{n}{2}(n-1)(n-2)\left(\frac{n+1}{4}\frac{x''^2}{x'^2}-\frac{1}{3}\frac{x'''}{x'}\right)\right)y^{(n-2)}+----+Hx'^n=Ix'^n.$$

Se i coefficienti A, B, $---$ G, H avranno le proprietà di soddisfare le equazioni

$$A_1=Ax'-\frac{n}{2}(n-1)\frac{x''}{x'},$$

$$B_1=Bx'^2-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)Ax''+\frac{n}{2}(n-1)(n-2)\left(\frac{n+1}{4}\frac{x''^2}{x'^2}-\frac{x'''}{3x'}\right),$$

$$------------------------$$

$$G_1=Gx'^{n-1}----Bx'x^{(n-2)}-Ax^{(n-1)}-\frac{x^{(n)}}{x'},$$

$$H_1=Hx'^n,$$

ove le quantità A_1, B_1, $---$ G_1, H_1 esprimono altrettante costanti; cioè se gli A, B, $---$ G saranno quelle funzioni della x, che si hanno colle prime $n-1$ di queste equazioni, dopo avervi sostituito per x' il suo valore $\sqrt[n]{\frac{H_1}{H}}$ cavato dall'ultima e per le x'', x''', $---$ le derivate di questo medesimo valore, le quali sono

$$-\frac{H'(x)}{nH}\sqrt[n]{\frac{H_1^2}{H^2}},\ \left(\frac{n+2}{n^2}\frac{H'(x)^2}{H^2}-\frac{H''(x)}{nH}\right)\sqrt[n]{\frac{H_1^3}{H^3}},\ ---,$$

la primitiva della equazione

$$y^{(n)}(x)+Ay^{(n-1)}(x)+By^{(n-2)}(x)+----+Gy'(x)+Hy=I$$

dipenderà da quella della

$$y^{(n)}+A_1y^{(n-1)}+B_1y^{(n-2)}+----+G_1y'+H_1y=IH_1:H$$

già trattata (§ 327), purchè la nuova variabile t abbia colla x la relazione rappresentata dalla equazione

$$Hx'^n=H_1,\ \text{ossia}\ x'\sqrt[n]{H}=\sqrt[n]{H_1}\ \text{od anco dalla}\ \int\sqrt[n]{H}=t\sqrt[n]{H_1},$$

che è la sua primitiva; anzi la primitiva della stessa proposta avrassi col porre $\int H^{\frac{1}{n}}:H_1^{\frac{1}{n}}$ in vece della t contenuta nella primitiva completa della

$$y^{(n)}+A_1y^{(n-1)}+B_1y^{(n-2)}+----+G_1y'+H_1y=H_1IH^{-1}.$$

Per esempio, se fosse $H = \frac{a}{(bx+c)^n}$ ove a, b, c sono costanti, si avrebbero

$$x' = \frac{H_1}{a}(bx+c),\ x'' = \frac{b}{a^2}H_1^2(bx+c),\ x''' = \frac{b^2}{a^3}H_1^3(bx+c), \text{---};$$

e però si potrà conseguire col metodo esposto la primitiva di cui si parla, purchè siano

$$A = \frac{a_1}{(bx+c)},\ B = \frac{b_1}{(bx+c)^2}, \text{---}\ G = \frac{g_1}{(bx+c)^{n-1}}$$

ove le a_1, b_1, --- g_1 esprimono delle quantità costanti qualsivogliono.

330. Si dovrebbe ora parlare delle primitive delle equazioni alle derivate degli ordini superiori al secondo e non lineari, ma siccome poche sono le occasioni nelle quali esse occorrono, e d'altronde le note regole relative ad esse valgono solamente per alcuni casi particolari; così mi limiterò alla esposizione del seguente metodo, per la possibilità del quale si richieggono alcune condizioni, che appunto verificansi in varie applicazioni; e di quello che si esporrà nel § 334.

La equazione alle derivate sia

$$f(x, y, y', \text{---}\, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0.$$

Si formi la sua derivata prima esatta cioè la

$$f(x, y, y', \text{---}\, y^{(n-1)})' + f'(y^{(n)})\, y^{(n+1)} = 0,$$

trovisi il massimo divisore comune delle due quantità

$$f(x, y, y', \text{---}\, y^{(n-1)})',\ f'(y^{(n)}),$$

e risulti $M(x, y, y', \text{---}\, y^{(n)})$; ed i quoti, che si hanno, dividendo per esso le medesime due quantità siano

$$A(x, y, y', \text{---}\, y^{(n)}),\ B(x, y, y', \text{---}\, y^{(n)}),$$

cioè abbiasi

$$f(x, y, y', \text{---}\, y^{(n-1)})' = A \cdot M, \text{ ed } f'(y^{(n)}) = B \cdot M;$$

e la equazione derivata esatta ridurrassi alla

$$(A + B y^{(n+1)})\, M = 0,$$

la quale è soddisfatta tanto dalla $M = 0$ quanto dalla $A + B y^{(n+1)} = 0$.

La primitiva completa del primo ordine di quest'ultima cioè della

$$A + B y^{(n+1)} = 0 \text{ sia } \psi(x, y, y', \text{---}\, y^{(n)}, a) = 0,$$

ove la a esprime la costante arbitraria.

La equazione $f(x, y, y', \text{---}\, y^{(n)}) = 0$, che è la proposta, e la primitiva qui trovata, soddisfacendo ambedue la stessa

$$f(x, y, y', \text{---}\, y^{(n)})' = 0$$

dell'ordine $(n+1)$ *esimo*, saranno equivalenti; e però la risultante dalla eliminazione delle $y^{(n)}$ da esse, la quale conterrà $x, y, y', \text{---}\, y^{(n-1)}$ e la a, soddisfarà la prima di esse medesime cioè la proposta, e sarà una sua primitiva completa, giacchè contiene la a.

Così, eliminando la $y^{(n)}$ dalle due

$$f(x, y, y', \text{---}\, y^{(n)}) = 0,\ M(x, y, y', \text{---}\, y^{(n)}) = 0,$$

si ha una equazione, che è generalmente la primitiva *singolare* del primo ordine della proposta medesima; giacchè, ammesso essere la $y^{(n)}$ quella funzione della arbitraria a data dalla equazione $\psi = 0$, la completa dianzi contemplata è espressa colla $f(x, y, y'\ \text{---}\, y^{(n)}) = 0$; e la singolare annulla $f'(a)$ cioè $f'(y^{(n)})\left(\frac{dy^{(n)}}{da}\right)$, ciò che richiede in generale l'annullamento di $f'(y^{(n)})$ e però la sussistenza della equazione $M(x, y, y', \text{---}\, y^{(n)}) = 0$.

Le condizioni necessarie per la equazione $f=0$, affinchè si possa trovare una sua primitiva completa del primo ordine col metodo qui esposto, evidentemente si verificano, quando la $f=0$ sia una delle equazioni contemplate nei §§ 301, 324.

Così non voglio tacere, che talvolta succede, siccome fece osservare il sig. Don Gabrio Piola, di poter combinare la proposta equazione alla sua derivata prima esatta talmente di otteuerne una dell' ordine $(n+1)$ *esimo*, della quale si sa trovare una primitiva completa del primo ordine: in questi casi, combinando questa primitiva completa alla proposta in modo da eliminare la $y^{(n)}$ ottiensi pure una primitiva completa della proposta medesima.

331. Più volte si incontrano equazioni alle derivate, delle quali non si sanno rinvenire le primitive in termini finiti, per cui volendole è duopo ricorrere alle serie, onde averle almeno per approssimazione. Molti sono i metodi immaginati per questa ricerca; io mi limiterò ad esporre brevemente i più generali di essi.

La equazione alle derivate sia

$$y^{(n)}=f(x,y,y',---,y^{(n-1)}).$$

Si desumano da essa i valori della $y^{(n+1)},y^{(n+2)}---$ formati tutti colle $x,y,y',---y^{(n-1)}$.

Si pongano nella equazione (§ 111)

$$y=y'_0+xy'_0+\frac{x^2}{2}y''_0+----+\frac{x^{n-1}}{2\cdot3---(n-1)}y_0^{(n-1)}$$
$$+\frac{x^n}{2\cdot3---n}y_0^{(n)}+\text{ecc.}$$

i valori delle $y_0^{(n)},y_0^{(n+1)},---$ desunti dagli anzi esposti col fare in essi $x=0$; e si avrà

$$y=y_0+xy'_0+\frac{x^2}{2}y''_0+----+\frac{x^{n-1}}{2\cdot3---(n-1)}y_0^{(n-1)}$$
$$+\frac{x^n}{2\cdot3---n}f(0,y_0,y'_0,---y_0^{(n-1)})+\text{ecc.}$$

per primitiva completa richiesta: le costanti sono qui $y_0,y'_0,---y_0^{(n-1)}$.

Il teorema di Taylor dà

$$y(x+\omega)=y+\omega y'+\frac{\omega^2}{2}y''+\text{ecc.}:$$

facciasi in esso $x=a$ costante, e cambiasi la ω in $x-a$, ed avrassi

$$y=y_a+(x-a)y'_a+----+\frac{(x-a)^{n-1}}{2\cdot3---(n-1)}y_a^{(n-1)}$$
$$+\frac{(x-a)^n}{2\cdot3---n}y_a^{(n)}+\text{ecc.}:$$

in questa equazione si pongano in vece delle $y_a^{(n)},y_a^{(n+1)},---$ i loro valori desunti da quelli delle $y^{(n)},y^{(n+1)},---$ sopra trovati; e si avrà per primitiva completa anco la

$$y=y_a+(x-a)y'_a+----+\frac{(x-a)^{n-1}}{2\cdot3---(n-1)}y_a^{(n-1)}$$
$$+\frac{(x-a)^n}{2\cdot3---n}f(a,y_a,y'_a,---y_a^{(n-1)})+\text{ecc.},$$

ove le n costanti arbitrarie sono $y_a,y'_a,---y_a^{(n-1)}$.

Si supponga

$$y=Ax^a+Bx^b+Cx^c+\text{ecc.}$$

ove le $A,a,B,b,---$ sono costanti; e nella equazione data sostituiscasi in vece della y questo suo valore ed in vece delle $y',y''---$ le derivate di esso: si riduca il secondo membro della equazione risultante ad un polinomio della forma del primo, e si soddisfaccia (§ 124) indipendentemente dalla x mediante l'opportuna determinazione delle A, a, B, - - -; e questi valori delle A, a, B, - - - sostituiti nella equazione supposta

$$y = A\,x^a + B\,x^b + \text{ecc.}$$

somministreranno la primitiva richiesta.

Sia $y = z$ una primitiva particolare della stessa $y^{(n)} = f(x, y, y', \text{---}\, y^{(n-1)})$, la quale contenga solamente $n - m$ costanti arbitrarie: per avere la primitiva completa almeno in serie si supponga

$$\begin{aligned} y = z &+ \alpha\,p + \alpha^2 q + \text{ecc.} \\ &+ \beta\,r + \alpha\,\beta\,s + \text{ecc.} \\ &\text{---} + \beta^2 t + \text{ecc.} \\ &\text{---------} \end{aligned}$$

ove le α, β, - - - sono m nuove costanti arbitrarie, e le p, q, r, - - - altrettante funzioni incognite della x.

Sostituendo questo valore della y nella data equazione, e sviluppando il secondo membro secondo le dimensioni crescenti delle α, β, - - -, indi eguagliando tra loro i coefficienti, che hanno le simili potenze di esse in ambedue i membri, cioè soddisfacendo la equazione risultante indipendentemente dalle arbitrarie α, β, - - -, si hanno equazioni sufficienti per determinare ciascuna delle funzioni p, q, r, - - -: queste equazioni sono lineari e di primo grado, anzi le primitive loro in sostanza dipendono tutte da quella della

$$p^{(n)} = f'(z)p + f'(z')p' + f'(z'')p'' + \text{---} + f'(z^{(n-1)})p^{(n-1)}.$$

I valori anco particolari delle p, q, r, - - - soddisfacenti queste equazioni ridurranno la supposta equazione

$$\begin{aligned} y = z &+ \text{ecc.} \\ &+ \text{ecc.} \end{aligned}$$

alla primitiva completa richiesta.

Mi tratterò a sviluppare questo metodo per una equazione qualunque alle derivate del primo ordine: essa sia $y' = f(x, y)$, e la sua primitiva conosciuta $y = z$.

Suppongasi in generale

$$y = z + p\,\alpha + p\,q\,\alpha^2 + p\,r\,\alpha^3 + p\,s\,\alpha^4 + \text{ecc.}$$

ove l'α esprime la costante arbitraria, e le p, q, r, - - - funzioni a determinarsi opportunamente, perchè $z + p\,\alpha + p\,q\,\alpha^2 + \text{ecc.}$ sia valore della y, qualunque sia la costante α.

Rappresento i coefficienti delle α^2, α^3, - - - con prodotti di due funzioni anzichè con una sola per la semplicità che ne risulta nei calcoli.

Questo valore della y ossia $z + u$, supposto

$$p\,\alpha + p\,q\,\alpha^2 + p\,r\,\alpha^3 + p\,s\,\alpha^4 + \text{ecc.} = u,$$

sostituito nella equazione $y' = f(x, y)$ dà la

$$z' + u' = f(x, z + u) \text{ ovvero}$$

$$u' = u\,f'(z) + \frac{u^2}{2} f''(z) + \frac{u^3}{2\cdot 3} f'''(z) + \frac{u^4}{2\cdot 3\cdot 4} f^{\prime \mathrm{v}}(z) + \text{ecc.},$$

essendo per ipotesi $z' = f(x, z)$.

In quest' ultima equazione, ponendo per le u, u' i loro valori, che sono

$$p\,\alpha + p\,q\,\alpha^2 + p\,r\,\alpha^3 + p\,s\,\alpha^4 + \text{ecc.},$$

$$p'\,\alpha + (p\,q)'\,\alpha^2 + (p\,r)'\,\alpha^3 + (p\,s)'\,\alpha^4 + \text{ecc.},$$

ed eguagliando tra loro i coefficienti delle simili potenze della α, si ottengono le seguenti

$$p' = f'(z)\,p,$$

$$q' = \frac{1}{2} f''(z)\,p,$$

$$r' = f''(z)\,p\,q + \frac{1}{6} f'''(z)\,p^2,$$

$$s' = \frac{1}{2} f''(z)\cdot(q^2 + 2r)p + \frac{1}{2} f'''(z)p^2 q + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} f^{IV}(z)\,p^3,$$

- -

la prima delle quali dà, mediante la sua primitiva, la p; e le altre danno successivamente e con facilità le $p, q, r, s, ---$.

I valori generali delle funzioni $p, q, r, ---$ conterranno tante costanti arbitrarie, quante saranno le funzioni stesse; e però la equazione, che otterrassi, sostituendoli nella supposta

$$y = z + p\,\alpha + p\,q\,\alpha^2 + \text{ecc.}$$

conterrà tante costanti, almeno apparentemente, quante sono le funzioni $p, q, r, s, ---$ oltre della α. Si rifletta però, che tutte queste costanti compajono nella equazione risultante, talmente, che equivalgono ad una sola, per cui non occorrono i valori generali delle $p, q, ---$ cioè bastano alcuni valori particolari di esse tra quelli soddisfacenti le equazioni sopra esposte, ciò che faciliterà la determinazione della primitiva richiesta della $y' = f(x, y)$.

Occorrono alcune volte le primitive di equazioni riducibili alla forma

$$y^{(n)} - f(x, y, y', --- y^{(n-1)}) = \alpha P + \alpha^2 Q + \text{ecc.},$$

dove le $P, Q ---$ sono funzioni delle $x, y, y', --- y^{(n-1)}$, e la α esprime una quantità costante, la quale pel suo

significato è piccola assai: in questi casi, trovata la primitiva completa della

$$y^{(n)} - f(x, y, y', --- y^{(n-1)}) = 0,$$

per avere la richiesta, procedesi generalmente col metodo seguente.

La primitiva trovata sia $y = \phi(x, C_1, C_2, --- C_n)$, le C esprimono le costanti arbitrarie; e la richiesta suppongasi

$$y = \phi(x, C_1, C_2, --- C_n) + \alpha\,p + \alpha^2\,q + \text{ecc.}$$

ove le $p, q, ---$ esprimono funzioni incognite della x.

Si ponga questo valore della y nella equazione data, si ordinino entrambi i membri della risultante secondo le potenze della α, e soddisfacciasi indipendentemente dalla α stessa; e si avranno equazioni tra le $p, q, ---$ e le loro derivate: trovati valori, anco particolari, di queste funzioni soddisfacenti le equazioni tra esse così ottenute, e sostituiti nella $y = \phi + \alpha\,p + \alpha^2\,q + \text{ecc.}$ supposta, avrassi effettivamente la richiesta primitiva.

Talvolta, rinvenuta la primitiva completa della $y^{(n)} - f = 0$, si procede a scoprire quella della $y^{(n)} - f = \alpha P + \alpha^2 Q + \text{ecc.}$ proposta con quest' altro metodo.

Si ammette la richiesta primitiva rappresentata colla

$$y = \phi(x, c_1, c_2, --- c_n),$$

ove le $c_1, c_2, --- c_n$ esprimono n funzioni della x a determinarsi: si dispone delle $c_1, c_2, --- c_n$ in modo, che siano soddisfatte le $(n-1)$ equazioni

$$\phi'(c_1)\; c'_1 + \phi'(c_2)\; c'_2 + - - - - + \phi'(c_n)\; c'_n = 0,$$
$$\phi'(c_1)'\, c'_1 + \phi'(c_2)'\, c'_2 + - - - - + \phi'(c_n)'\, c'_n = 0,$$
$$\phi'(c_1)''\, c'_1 + \phi'(c_2)''\, c'_2 + - - - - + \phi'(c_n)''\, c'_n = 0,$$
$$- -$$
$$\phi'(c_1)^{(n-1)}\, c'_1 + \phi'(c_2)^{(n-1)}\, c'_2 + - - - - + \phi'(c_n)^{(n-1)}\, c'_n = 0;$$

e si avranno

$$y' = \phi'(x),\ y'' = \phi''(x),\ - - - y^{(n-1)} = \phi^{(n-1)}(x), \text{ ed}$$
$$y^{(n)} = \phi^{(n)}(x) + \phi'(c_1)^{(n)} c'_1 + \phi'(c_2)^{(n)} c'_2 + - - - + \phi'(c_n)^{(n)} c'_n;$$

e la equazione risultante dalla proposta, col sostituirvi per $y, y', - - - y^{(n)}$ i loro valori, sarà

$$\phi'(c_1)^{(n)} c'_1 + \phi'(c_2)^{(n)} c'_2 + - - - + \phi'(c_n)^{(n)} c'_n = \alpha P_1 + \alpha^2 Q_2 + \text{ ecc.}$$

per essere $\phi^{(n)}(x) - f\big(x, \phi, \phi'(x), - - - \phi^{(n-1)}(x)\big)$ *zero*: le P_1, Q_1, - - - sono i valori delle P, Q, - - - corrispondenti alle sostituzioni fatte.

Combinando questa equazione alle $n-1$ dianzi ammesse, abbiasi

$$c'_1 = R_1,\ c'_2 = R_1,\ - - - c'_n = R_n$$

ove le R saranno funzioni conosciute delle $x, c_1, c_2, - - - c_r$: fatto ciò, supponghasi

$$c_1 = C_1 + \alpha p_1 + \alpha^2 q_1 + \text{ecc.},$$
$$c_2 = C_2 + \alpha p_2 + \alpha^2 q_2 + \text{ecc.},$$
$$- - - - - - - - - - - - - -$$
$$c_n = C_n + \alpha p_n + \alpha^2 q_n + \text{ecc.}$$

dove le $p_1, q_1, - - - p_2, q_2, - - - p_n, q_n, - - -$ sono altre funzioni della x incognite; e sostituiscansi questi valori delle c e quelli delle loro derivate nelle equazioni

$$c'_1 = R_1,\ c'_2 = R_2,\ - - - c'_n = R_n,$$

e si determinino le funzioni $p_1, q_1, - - - p_2, q_2, - - -$ talmente, che le equazioni risultanti da tutte queste sostituzioni rimangano soddisfatte tutte indipendentemente dalla α; e la primitiva richiesta sarà

$$y = \phi(x, C_1 + \alpha p_1 + \alpha^2 q_1 + \text{ecc.},\ C_2 + \alpha p_2 + \alpha^2 q_2 + \text{ecc.},$$
$$- - - C_n + \alpha p_n + \alpha^2 q_n + \text{ecc.})$$

dove le $p_1, q_1, - - - p_2, q_2, - - - p_n, q_n, - - -$ esprimano i valori di esse medesime qui trovati.

LEZIONE VI.

Delle primitive di più equazioni di simultanea sussistenza, e delle primitive di una equazione tra le derivate di due o più variabili funzioni di una medesima.

332. Siano date le n equazioni

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ - - - F_n = 0$$

nelle quali vi siano $n+1$ variabili e quantità costanti. Evidentemente n delle variabili saranno funzioni dell'altra.

Si possono trovare n equazioni tra le $n+1$ variabili e le derivate prime, seconde, - - - m *esime* di n di esse prese rispetto all'altra, le quali siano equivalenti od almeno conseguenze delle date e non contengono mn quantità costanti, anco arbitrarie, esistenti nelle medesime equazioni date.

Insieme ad ognuna delle date equazioni avranno luogo le sue derivate esatte: si formino le prime m di queste equazioni per ciascuna delle n date, ed il loro numero sarà nm: evidentemente si possono combinare queste mn nuove equazioni alle n date talmente da eliminare mn costanti contenute in esse, e in n maniere diverse; e però si potranno avere n equazioni tra le $n+1$ variabili e le loro derivate prime, seconde, --- *mesime*, le quali siano equivalenti alle n date, e non contengono mn costanti esistenti nelle medesime equazioni date.

333. Si abbiano le due equazioni

$$F(x, y, y', y'', --- y^{(m)}, z, z', --- z^{(n)}) = 0,$$
$$\phi(x, y, y', --- y^{(r)}, z, z', z'', --- z^{(s)}) = 0$$

tra le variabili x, y, z e le derivate delle y, z: la prima di queste equazioni è dell'ordine m *esimo* rispetto alla y e dell'n *esimo* rispetto alla z, e l'altra è dell'ordine r *esimo* rispetto alla y e dell's *esimo* rispetto alla z.

Si trovino le equazioni

$$F' = 0, F'' = 0, --- F^{(r)} = 0,$$
$$\phi' = 0, \phi'' = 0, --- \phi^{(m)} = 0$$

cioè le prime r derivate esatte della $F = 0$ e le prime m analoghe della $\phi = 0$: si combinino queste equazioni, che sono $r+m$, alle due date e talmente da eliminare le quantità $y, y', y'', --- y^{(m+r)}$, e se ne avrà una

$$f(x, z, z', z'', --- z^{(r+n)} \text{ o } z^{(m+s)}) = 0,$$

che sarà dell'ordine $(n+r)$ *esimo* se $n+r > m+s$ e dell'$(m+s)$ *esimo* se $m+s > n+r$: così, combinando tutte le equazioni qui combinate per avere la $f = 0$, *meno una*, in modo da eliminare le $y', y'', --- y^{(m+r)}$, avrassi una equazione, che sciolta rispetto alla y, darà $y = P$, ove la P sarà funzione delle sole x, z, z', z'' --- cioè delle x, z e delle derivate della z.

Sia trovata la primitiva della $f = 0$ e dia $z = Q_1$; e questo valore della z sostituito nella funzione P la riduca alla Q: le due equazioni

$$y = Q, \quad z = Q_1$$

saranno le così dette primitive delle due $F = 0$, $\phi = 0$ proposte; e particolarmente saranno le *complete*, particolari, o singolari, secondochè la $z = Q_1$ sarà primitiva completa, particolare, o singolare della $f = 0$.

Se le equazioni $F = 0$, $\phi = 0$ fossero del primo ordine e lineari, cioè fossero le

$$Ay + Bz + Cy' + Dz' = E, \quad Gy + Hz + Iy' + Lz' = E_1,$$

la risultante dalla eliminazione della y sarebbe

$$z'' + Mz' + Nz = T,$$

ove le M, N, T sono funzioni della x, cioè sarebbe anch'essa lineare: anzi se E, ed E_1 fossero *nulle* e gli altri coefficienti delle due proposte fossero costanti, la risultante sarebbe

$$z'' + Mz' + Nz = 0,$$

dove M, N sarebbero anch'essi costanti; e però ammesso a una radice della equazione

$$a^2 + Ma + N = 0,$$

la funzione ke^{ax}, ove k è una costante qualunque ed e la base solita, sarà un valore della z ed il corrispondente per la y risulterà $ke^{ax}\beta$, dove β esprime una costante individuata.

Da ciò emerge, che, le primitive delle due equazioni

$$Ay + Bz + Cy' + Dz' = 0, \quad Gy + Hz + Iy' + Lz' = 0$$

aventi i coefficienti costanti, potransi avere col supporre $z = ke^{\alpha x}$, $y = ke^{\alpha x}\beta$; giacchè si hanno immediatamente le due equazioni

$$A\beta + B + C\alpha\beta + D\alpha = 0, \quad G\beta + H + I\alpha\beta + L\alpha = 0,$$

che danno due valori sì per la costante α che per la β; e però, denominati a, b i due valori della α, ed h, l i corrispondenti della β ammesso $z = ke^{ax}$ sarà $y = ke^{ax}h$, ed ammesso $z = k_1 e^{bx}$ sarà $y = k_1 e^{bx} l$; per cui, essendo le equazioni proposte entrambe lineari, saranno soddisfatte dalle due equazioni

$$z = k e^{ax} + k_1 e^{bx}, \quad y = k e^{ax} h + k_1 e^{bx} l,$$

le quali saranno le loro primitive complete, contenendo le k, k_1 ambedue costanti arbitrarie.

Se le ultime due equazioni lineari qui contemplate avessero i secondi membri funzioni anco della x, si potrebbero trovare le primitive complete di esse col supporre nelle trovate le k, k_1 funzioni incognite della x, e determinarle con un processo affatto analogo a quello già impiegato nel paragrafo 328. Anzi, anco per le equazioni lineari di ordini qualsivogliono, qualunque sia il numero di esse, purchè sia minore di *uno* del numero delle variabili, hanno luogo considerazioni analoghe a quelle esposte per due del primo ordine.

Ora si abbiano le n equazioni

$$F_1 = 0, \ F_2 = 0, \ F_3 = 0, \ - - - \ F_n = 0$$

fra le $n+1$ variabili $x, y_1, y_2, y_3, - - - y_n$ e le derivate di queste n ultime prese rispetto alla x; anzi nella $F_1 = 0$ vi siano le derivate di tutte le y sino a quelle dell'ordine a *esimo*, nella $F_2 = 0$ sino a quelle del

b *esimo*, e nella $F_n = 0$ sino alle m *esime*; dimodochè gli ordini di esse, rispetto a qualunque variabile y siano ordinatamente l'a *esimo*, il b *esimo*, il c *esimo* - - - l'm *esimo*.

Chiamisi s la somma dei numeri $a, b, c, - - - l, m$; e forminsi delle equazioni date ordinatamente le prime derivate esatte $(s-a)$ *esime*, $(s-b)$ *esime*, $(s-c)$ *esime*, - - - $(s-l)$ *esime*, $(s-m)$ *esime*; ed in tutto avransi $n + (n-1)s$ equazioni, le ultime delle quali saranno dell'ordine s *esimo* per rispetto a qualunque variabile y.

Ma computando $n-1$ variabili y e le loro derivate sino alle s *esime*, si ha un numero di quantità, che è $(s+1)(n-1)$ ossia $(n-1)s + n - 1$, il quale è minore di *uno* del numero delle anzidette equazioni; adunque, avuto riguardo a questa proprietà ed anco alle rispettive costituzioni delle medesime equazioni, si potranno eliminare da esse $n-1$ variabili y insieme alle loro derivate; ed eseguita tale eliminazione otterrassi una equazione fra le derivate s *esime* della y rimasta: questa y sia la y_1; e la equazione risultante avrà la forma

$$f(x, y_1, y_1', y_1'', - - - y_1^{(s)}) = 0,$$

la cui primitiva completa darà y_1 eguale ad una funzione della x e di s costanti arbitrarie.

Con $(n-1)s + n - 1$ equazioni di quelle usate dianzi per ottenere $f = 0$, si trovino $n-1$ equazioni che contengano oltre le componenti della f, ordinatamente l'una la y_2, un'altra la y_3, e l'ultima la y_n; ed in esse si pongano in vece della y_1 non che delle sue derivate i rispettivi valori loro desunti dalla primitiva completa della $f = 0$; ed avransi $n-1$ equazioni, che insieme a questa medesima primitiva della $f=0$ costituiranno le primitive delle n date.

Un altro caso d'eliminazione molto interessante è il seguente: nelle equazioni date

$$F_1=0,\ F_2=0,\ F_3=0,\ ---\ F_n=0$$

i numeri indicanti gli ordini delle più alte derivate delle variabili $y_1, y_2, y_3, ---\ y_{n-1}, y_n$ siano ordinatamente

nella $F_1=0$, $a+a$, $b+a$, $c+a$, $---$, $l+a$, $m+a$;

nella $F_2=0$, $a+b$, $b+b$, $c+b$, $---$, $l+b$, $m+b$;

nella $F_3=0$, $a+c$, $b+c$, $c+c$, $---$, $l+c$, $m+c$;

\- -

e nella $F_n=0$, $a+m$, $b+m$, $c+m$, $---$, $l+m$, $m+m$.

La prima linea di questi numeri evidentemente risulta aggiungendo a a ciascun termine della serie $a, b, c, ---\ l, m$; quelli della seconda aggiungendovi b, quelli della terza aggiungendovi c, e quelli dell'ultima aggiungendo ai medesimi termini l'm, ultimo di essi.

I numeri $a, b, c, ---\ l, m$ siano disposti talmente, che uno qualunque non sia maggiore del suo conseguente; dimodochè, se saranno differenti l'un dall'altro sarà $a<b<c<---<l<m$.

La somma $a+b+c+---+l+m$ chiamisi s: si formino delle n equazioni date rispettivamente le prime $2s-a-m$, $2s-b-m$, $2s-c-m$, $---$, $2s-l-m$, $2s-2m$ *derivate esatte*; e si avranno tante equazioni, computando anco le n date, che il loro numero sarà $2ns-s-nm+n$; e le ultime derivate esatte delle proposte conterranno tutte le variabili $y_1, y_2, y_3, ---\ y_{n-1}, y_n$

e le loro derivate, sino a quelle degli ordini rispettivamente

$$2s-m+a,\ 2s-m+b,\ 2s-m+c,$$
$$---,\ 2s-m+l,\ 2s-m+m;$$

dimodochè nelle $2ns-s-nm+n$ equazioni anzidette, tra le variabili $y_1, y_2, y_3, ---\ y_{n-1}$ e le loro derivate, formeranno un nmero di quantità, che sarà

$$(n-1)2s-(n-1)m+s-m+n-1$$
$$\text{ossia } 2ns-s-nm+n-1;$$

e conseguentemente, avuto riguardo anco alla costituzione delle medesime equazioni, si potranno eliminare da esse tutte le $n-1$ variabili $y_1, y_2, y_3, ---\ y_{n-1}$ e le loro derivate; ed eliminandole si avrà una equazione

$$f(x, y_n, y'_n, y''_n, ---, y_n^{(2s)})=0,$$

la cui primitiva completa darà la y_n formata colla x e con $2s$ costanti arbitrarie.

Per avere le analoghe espressioni per le $y_1, y_2, ---\ y_{n-1}$ combineransi $2ns-s-nm+n-1$ delle medesime equazioni dianzi contemplate, ed in modo da eliminare le medesime quantità già eliminate per avere la $f=0$, eccettuando però successivamente la y_1, la y_2, la y_3, ed in ultimo la y_{n-1}; e si avranno $n-1$ equazioni, che daranno queste ultime y formate colla y_n e le sue derivate, e però colla x e colle $2s$ costanti arbitrarie anzidette.

Queste ultime $n-1$ equazioni insieme alla stessa primitiva della $f=0$ rappresenteranno le primitive complete delle n proposte.

Quando le equazioni date

$$F_1=0,\ F_2=0,\ ---\ F_n=0$$

non saranno costituite colle variabili e loro derivate, come abbiamo supposto nei due casi or ora trattati, a scanso di ogni equivoco, si potrà procedere alla determinazione delle loro primitive nel modo seguente: si combinerà una di esse a ciascuna delle altre $n-1$ in modo da eliminare interamente una delle variabili y, come si è fatto al principio di questo medesimo paragrafo onde eliminare la y dalle due equazioni $F=0$, $\phi=0$; e poi si combinerà una delle $n-1$ equazioni così risultate alle altre $n-2$ di esse, e talmente da eliminare una fra le y rimaste; e così continuerassi $n-1$ volte, ed otterrassi finalmente una sola equazione contenente una sola y e le derivate di essa; e la sua primitiva completa darà questa medesima variabile in funzione della x e delle opportune costanti arbitrarie; indi, con un processo analogo a quelli usati nei due casi suddetti od altrimenti avransi i valori di tutte le altre y senza bisogno, in generale, di trovare primitive di equazioni: fatto ciò, si sostituiranno tutti i valori delle y nelle n equazioni date, e determineransi, occorrendo, le relazioni necessarie fra le costanti contenute nei valori delle medesime y, perchè le equazioni risultanti rimangano soddisfatte indipendentemente dalla x; e le n anzidette equazioni somministranti le $y_1, y_2, y_3, --- y_n$ saranno le primitive richieste, purchè le costanti esistenti in esse abbiano le relazioni qui determinate.

334. La equazione $y=F(x, a, b, ---)$ contenente le $r<n$ costanti arbitrarie $a, b, ---$ sia una primitiva particolare della $f(x, y, y', y'', --- y^{(n)})=0$: col soccorso di questa primitiva della $f=0$ talvolta si può conseguirne la completa col metodo seguente.

Per semplicità le derivate $F'(a)$, $F'(b)$, --- si denominino A, B, ---; e suppongansi le a, b, --- funzioni incognite della x; ed ammettansi tra queste funzioni le $r-1$ equazioni seguenti

$$\begin{gathered} Aa'+Bb'+\text{ecc.}=0, \\ A'a'+B'b'+\text{ecc.}=0, \\ A''a'+B''b'+\text{ecc.}=0, \\ ------------ \\ A^{(r-2)}a'+B^{(r-2)}b'+\text{ecc.}=0 \end{gathered}$$

ove le derivate delle $A, B, ---$ sono tutte prese rispetto alla x esplicita in esse; e si avranno evidentemente

$$\begin{gathered} y'=F'(x), y''=F''(x), --- \\ y^{(r-1)}=F^{(r-1)}(x), y^{(r)}=F^{(r)}(x)+A^{(r-1)}a'+B^{(r-1)}b'+\text{ecc.} --- \\ y^{(n)}=F^{(n)}(x)+A^{(n-1)}a'+B^{(n-1)}b'+\text{ecc.} \\ +A^{(r-1)}a^{(n-r+1)}+B^{(r-1)}b^{(n-r+1)}+\text{ecc.} \end{gathered}$$

Sostituendo il valore della y e questi trovati delle sue derivate nella equazione $f(x. y, y', y'', --- y^{(n)})=0$, se ne avrà evidentemente una tra le

$$x, a, b, --- a', b', --- a'', b'', --- a^{(n-r)}, b^{(n-r)}, ---$$

alle derivate delle a, b, --- dell'ordine $(n-r)$ *esimo*, la quale combinata colle $r-1$ dianzi ammesse, somministrerà i valori delle quantità a, b, --- contenenti n nuove costanti arbitrarie, che sostituiti nella equazione $y=F(x, a, b, ---)$, daranno la primitiva completa della medesima $f(x, y, y', --- y^{(n)})=0$.

Questo metodo per trovare la primitiva completa di una equazione alle derivate si estende anco ad m equazioni fra $m+1$ variabili.

Sebbene sia mia intenzione di non fare applicazioni, nulladimeno credo bene di esporre la seguente.

La equazione $F(x,y,a)=0$ rappresenti una famiglia di linee, e sia $f(x,y,y')=0$ quella, che si ha, eliminando da essa la costante a col mezzo della sua derivata prima esatta.

La equazione di quella famiglia di linee, che segano quelle rappresentate colla $F(x,y,a)=0$, e che hanno con queste la proprietà rappresentata dalla equazione $\phi\left(x,y,y',(y')\right)=0$, sarà la primitiva completa della risultante dalla eliminazione della y' dalle due

$$f(x,y,y')=0,\ \phi\left(x,y,y',(y')\right)=0:$$

la (y') è per le linee della seconda famiglia, ciò che la y' è per quelle della prima.

Per esempio; se le linee della seconda famiglia dovessero segare tutte quelle della prima talmente, che le rette loro toccanti nei punti comuni comprendessero un angolo di tangente $\lambda(x,y)$, sarebbe

$$\phi\left(x,y,y',(y')\right)=\lambda-\frac{y'-(y')}{1+(y')y'} \text{ ossia } y'=\frac{\lambda+(y')}{1-\lambda(y')},$$

per cui la equazione della seconda famiglia sarebbe la primitiva completa della

$$f\left(x,y,\frac{\lambda+(y')}{1-\lambda(y')}\right)=0;$$

e quando le linee dell'una famiglia dovessero essere ortogonali a quelle dell'altra, sarebbe la primitiva della

$$f\left(x,y,-\frac{1}{(y')}\right)=0.$$

Così se le linee richieste e quelle rappresentate colla equazione $f(x,y,y')=0$ dovessero essere le

projezioni ortogonali di altre fra le esistenti in una medesima superficie ed a tangenti fra loro conjugate, sarebbe

$$\phi=\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\left(y'+(y')\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)+(y')y'\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=0$$

ove z esprime la terza ordinata della superficie; e però la primitiva completa della equazione

$$f\left\{x,\ y,\ -\frac{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+(y')\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)}{\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)+(y')\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)}\right\}=0$$

rappresenterebbe, combinata a quella della superficie, le linee conjugate alle date che hanno per equazione $f(x,y,y')=0$.

335. Si abbia la equazione $F=0$, nella quale vi siano le n variabili $x,y,z,---$ ed m costanti: si formino di essa le m prime derivate esatte prese rispetto alla x, nella ipotesi che tutte le $y,z,---$ siano funzioni della x medesima: si combinino queste m equazioni alla proposta talmente da eliminare le m costanti, ed avrassi una sola equazione tra le n variabili e le derivate prime, seconde, --- m *esime* almeno di $n-1$ di esse, la quale sarà conseguenza della data medesima.

La equazione $F=0$ si chiama integrale o primitiva completa finita di quella alle derivate m *esime* qui ottenuta. In generale una equazione tra n variabili ed m costanti arbitrarie, dalla quale si possa desumere come dianzi od altrimenti una equazione alle derivate m *esime* delle stesse n variabili, la quale non contenga le m costanti, si chiamerà primitiva completa finita di questa medesima equazione alle derivate.

536. Non tutte le equazioni tra più di due variabili e le derivate loro o di alcune hanno primitive complete, anzi alcune non hanno neppure primitive particolari, cioè per esse non esistono equazioni tra le sole variabili, dalle quali si possono le medesime desumere. Per manifestare questa dichiarazione e nel medesimo tempo mostrare, come si possono trovare le primitive di cui si parla, quando vi siano, seguirò le tracce del cav. Pietro Paoli; e comincerò dalla equazione

$$z' - A - By' = 0$$

ove le A, B esprimono funzioni date delle x, y, z.

Sciolta rispetto alla z la primitiva di questa equazione dia $z = \phi(x, y)$, e però $z' = \phi'(x) + \phi'(y)y'$ ossia $z' = \left(\frac{dz}{dx}\right) + y'\left(\frac{dz}{dy}\right)$.

Sostituendo nella equazione data in vece delle z, z' i loro valori qui esposti, la risultante sarà identica, qualunque sieno le quantità colle quali rimane formata, fra cui vi è la y'. In vece di sostituire contemporaneamente i valori delle z, z', si cominci a sostituire quello della z', ed avrassi la equazione

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)y' - A - By' = 0, \text{ ossia}$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) - A + \left\{\left(\frac{dz}{dy}\right) - B\right\}y' = 0.$$

Ora, ponendo in questa in luogo della z il suo valore, si otterrebbe la stessa identica equazione che si sarebbe ottenuta dianzi; e però, siccome questa risultante contiene la y' nel solo modo visibile, così il valore della z dovrà annullare tanto $\left(\frac{dz}{dx}\right) - A$ quanto $\left(\frac{dz}{dy}\right) - B$.

Vale a dire, la $z = \phi(x, y)$ primitiva della proposta soddisfarà anco le due equazioni seguenti

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) - A = 0, \left(\frac{dz}{dy}\right) - B = 0,$$

ossia sarà dessa loro primitiva comune.

Reciprocamente, ogni equazione primitiva comune di queste ultime due sarà anco primitiva della proposta. Di fatto, la $z = f(x,y)$ soddisfaccia queste due equazioni, saranno identiche le due

$$f'(x) - A\big(x, y, f(x,y)\big) = 0,$$
$$f'(y) - B\big(x, y, f(x,y)\big) = 0$$

e però anco la seguente

$$f'(x) - A\big(x, y, f(x,y)\big) + \Big(f'(y) - B\big(x, y, f(x,y)\big)\Big)y' = 0$$

$$\text{ossia } f(x,y)' - A\big(x, y, f(x,y)\big) - y'B\big(x, y, f(x,y)\big) = 0,$$

la quale manifesta che $z = f(x,y)$ soddisfa appunto la proposta.

Dimodochè, la proposta equazione avrà primitive, se le due

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) - A = 0, \left(\frac{dz}{dy}\right) - B = 0$$

avranno primitive comuni, e quando vi siano queste, esse saranno le primitive anco della proposta medesima.

Le primitive della $\left(\frac{dz}{dx}\right) - A = 0$ sono la completa e la singolare qualora ne sia suscettibile.

Si trovi la completa, e sia

$$F(x, y, z) = \psi,$$

ove ψ esprime la costante, arbitraria, rispetto alla x:

siccome la y nella equazione $\left(\frac{dz}{dx}\right)-A=0$ è trattata come una costante, così la ψ può essere una funzione arbitraria della y; per manifestare questa proprietà scriveremo la primitiva trovata colla

$$F(x,y,z)=\psi(y).$$

Questa somministra $\left(\frac{dz}{dy}\right)=\left(\psi'(y)-F'(y)\right):F'(z)$; e però, affinchè la primitiva trovata sia anco primitiva dell'altra equazione $\left(\frac{dz}{dy}\right)-B=0$, dovrà essere la

$$B=\frac{1}{F'(z)}\left(\psi'(y)-F'(y)\right) \text{ ossia la } BF'(z)+F'(y)=\psi'(y)$$

equazione identica, quando siasi posto in essa, cioè nel suo primo membro, in luogo della z il suo valore cavato dalla

$$F(x,y,z)=\psi(y);$$

e siccome nel secondo membro cioè in $\psi'(y)$ non vi è la x, così il risultamento, che si ha, ponendo in $BF'(z)+F'(y)$ in vece della z il suo valore cavato dalla equazione $F(x,y,z)=\psi$, non dovrà contenere la x medesima.

Quando abbia luogo questa proprietà, l'equazione risultante, dalla qui indicata sostituzione, sarà della forma

$$\Delta(y,\psi)=\psi'(y),$$

la quale avrà la sua primitiva completa: sia essa

$$\psi=\lambda(y,C),$$

ove C esprime una vera costante arbitraria.

Sostituendo questo valore nella $F(x,y,z)=\psi$ si ha $F(x,y,z)=\lambda(y,C)$; e questa equazione sarà primitiva della proposta, perchè soddisfa entrambe le suddette equazioni, e sarà la completa, giacchè contiene la C costante arbitraria.

337. Abbiamo osservato dianzi, che la quantità $BF'(z)+F'(y)$, ove colla z si intenda la determinata colla equazione $F(x,y,z)=\psi$, non deve contenere la x, o ciò che è lo stesso, la sua derivata rispetto alla x dev'essere nulla; questa derivata visibilmente è

$$F'(z)B'(x)+F'(z)B'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)+B\left(\left(\frac{d^2F}{dzdx}\right)+\left(\frac{d^2F}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right)$$
$$+\left(\frac{d^2F}{dydx}\right)+\left(\frac{d^2F}{dydz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$$

ossia

$$\left(\frac{d^2F}{dydx}\right)+A\left(\frac{d^2F}{dydz}\right)+B\left(\left(\frac{d^2F}{dxdz}\right)+A\left(\frac{d^2F}{dz^2}\right)\right)$$
$$+F'(z)B'(x)+AF'(z)B'(z)=0.$$

Ma per essere $F(x,y,z)=\psi$ primitiva della $\left(\frac{dz}{dx}\right)-A=0$, si ha la equazione identica

$$F'(x)+AF'(z)=0,$$

la quale, derivata rispetto alle y, z, dà le due seguenti, pure identiche,

$$\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)+A\left(\frac{d^2F}{dydz}\right)=-A'(y)F'(z),$$
$$\left(\frac{d^2F}{dxdz}\right)+A\left(\frac{d^2F}{dz^2}\right)=-A'(z)F'(z),$$

che riducono la derivata dianzi esposta alla

$$-A'(y)F'(z)-BA'(z)F'(z)+B'(x)F'(z)+AB'(z)F'(z)=0,$$

ossia $B'(x)-A'(y)+AB'(z)-BA'(z)=0.$

Quindi la proprietà osservata superiormente, equivarrà all'essere identica quest'ultima equazione. Vale a dire, quando la proposta equazione ammetterà primitiva completa, quest'ultima equazione riescirà identica; e viceversa, quando questa riescirà identica, la proposta avrà la primitiva completa.

338. Se la quantità $B'(x)-A'(y)+AB'(z)-BA'(z)$ non riescirà identicamente nulla, non si potrà determinare la $\psi(y)$ contenente una costante, e soddisfacente la equazione

$$BF'(z)+F'(y)=\psi'(y);$$

e però la proposta non avrà primitiva completa.

Vi sono alcuni casi, pei quali la equazione $F'(y)+BF'(z)=\psi'(y)$, ove la z sia la determinata colla $F(x,y,z)=\psi$, riesce soddisfatta da particolari valori della ψ, perchè essi annullano i termini affetti dalla ψ e gli altri separatamente: uno di questi valori della ψ chiamisi $\lambda(y)$; e la equazione risultante col porre la z desunta dalla $F(x,y,z)=\lambda(y)$, nella

$$-\lambda'(y)+F'(y)+BF'(z)=0,$$

sarà soddisfatta indipendentemente dalla x; e però anco la sua derivata rispetto alla x medesima, avrà una analoga proprietà. Ma questa equazione derivata è la stessa, che si ha col porre la z anzidetta nella equazione

$$B'(x)-A'(y)+AB'(z)-BA'(z)=0;$$

adunque la equazione $F(x,y,z)=\lambda(y)$, o sarà quest'ultima medesima, ovvero un suo fattore.

La proposta equazione, sebbene mancante di primitiva completa, può essere soddisfatta da primitive particolari, le quali saranno o la equazione alla quale si ridurrà la medesima ultima qui esposta, ovvero un suo fattore.

339. Se la equazione $\left(\frac{dz}{dx}\right)-A=0$ avrà primitiva singolare, la quale soddisfaccia la $\left(\frac{dz}{dy}\right)-B=0$, essa sarà primitiva della proposta: così se la $\left(\frac{dz}{dy}\right)-B=0$ avesse primitiva singolare, che soddisfacesse la $\left(\frac{dz}{dx}\right)-A=0$ essa pure sarebbe primitiva della proposta medesima.

Sebbene queste primitive renderanno infinita $A'(z)$, ovvero $B'(z)$ (§ 297) od ambedue queste derivate, le quali sono parti componenti la quantità $A'(y)+BA'(z)-B'(x)-AB'(z)$, non ostante questa medesima quantità sarà da esse annullata come lo è da quelle superiormente considerate; giacchè, rendendo esse le funzioni $A(x,y,z)$, $B(x,y,z)$ identiche alle $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ anco la derivata della A presa rispetto alla y, che è $A'(y)+A'(z)\left(\frac{dz}{dy}\right)$ ossia $A'(y)+BA'(z)$ sarà identica alla $B'(x)+AB'(z)$ derivata della B presa rispetto alla x.

Esempio. Abbiasi la equazione

$$z'-2x-2\sqrt{(x^2-y-z)}+y'=0:$$

paragonata alla sopra considerata, si hanno

$$A=2x+2\sqrt{(x^2-y-z)},\ B=-1;$$

e però le primitive di essa soddisfaranno ambedue le

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)-2x-2\sqrt{(x^2-y-z)}=0,\ \left(\frac{dz}{dy}\right)+1=0.$$

La prima di queste ha primitiva singolare, ed è $z+y-x^2=0$, la quale dando $\left(\frac{dz}{dy}\right)=-1$, soddisfa la seconda; e però anco l'attuale proposta sarà soddisfatta dalla equazione $z+y-x^2=0$.

La medesima equazione

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)-2x-2\sqrt{(x^2-y-z)}=0$$

ha per primitiva completa

$\sqrt{(x^2-y-z)}+x=\psi(y)$, ossia $z=2x\psi(y)-\psi(y)^2-y$: questo valore della z, sostituito nella equazione $\left(\frac{dz}{dy}\right)+1=0$ dà la

$$2x\psi'(y)-2\psi(y)\cdot\psi'(y)-1+1=0,\text{ ossia }\big(x-\psi(y)\big)\psi'(y)=0,$$

la quale per essere soddisfatta richiede o

$$\psi'(y)=0\text{ ovvero }\psi(y)-x=0,$$

cioè o $\psi(y)=a$ *costante*, ovvero $\psi(y)=x$.

Il primo di questi due valori riduce la primitiva completa della prima delle due equazioni anzidette alla seguente

$$z=2ax-a^2-y;$$

e questa sarà la primitiva completa della proposta.

Il secondo valore della $\psi(y)$, in generale è assurdo; ma riflettendo, che la ψ può ricevere, come arbitraria contenuta nella primitiva completa della

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)-2x-2\sqrt{(x^2-y-z)}=0$$

quel valore funzione della x corrispondente alla primitiva singolare, esso non si deve trascurare; come si verifica appunto per questo esempio.

Ora, facciamo analoghe considerazioni alle qui esposte, cominciando dalla seconda equazione, cioè dalla

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)+1=0:$$

essa ha per primitiva completa $y+z=\phi(x)$, e non ha primitiva singolare.

Questo valore della z sostituito nella equazione $\left(\frac{dz}{dx}\right)-2x-\sqrt{(x^2-y-z)}=0$, dà

$$\phi'(x)-2x-2\sqrt{\big(x^2-\phi(x)\big)}=0,$$

la cui primitiva completa risulta

$$\phi(x)-2ax+a^2=0,$$

la quale riduce la equazione

$$z+y=\phi(x)\text{ alla }z+y-2ax+a^2=0,$$

che è la stessa equazione primitiva della proposta, trovata sopra altrimenti.

La equazione $\phi'(x)-2x-2\sqrt{\big(x^2-\phi(x)\big)}=0$ è anco soddisfatta dalla $\phi(x)=x^2$, come sua primitiva singolare: e questo valore della $\phi(x)$ riduce la primitiva completa della $\left(\frac{dz}{dy}\right)+1=0$ alla seguente $z+y-x^2=0$, che è primitiva anch'essa della proposta.

In ultimo, si osservi, che la primitiva $z+y-x^2=0$ ottiensi anco col sostituire nella $z+y-2ax+a^2=0$ in luogo della a, il suo valore, cavato dalla equazione $-2x+2a=0$, che è la derivata rispetto alla a stessa della medesima primitiva completa, cioè osservisi che la equazione $z+y-x^2=0$ è una primitiva singolare *ordinaria* della attuale proposta equazione alle derivate.

340. Passiamo ora alla equazione $z'-A-By'-Cu'=0$, ove le A, B, C siano funzioni delle quattro variabili x, y, z, u. Abbia essa una primitiva, e sciolta rispetto alla z somministri $z=F(x,y,u)$, e però

$$z'=F'(x)+F'(y)y'+F'(u)u':$$

sostituiscasi nella proposta in vece della z' questo suo valore ossia

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)y'+\left(\frac{dz}{du}\right)u';$$ e si avrà la

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)-A+\left(\left(\frac{dz}{dy}\right)-B\right)y'+\left(\left(\frac{dz}{du}\right)-C\right)u'=0.$$

Se in questa equazione si ponesse per z il suo valore $F(x,y,u)$, la risultante sarebbe identica; e però questo valore della z annullerà separatamente i tre binomj

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)-A,\ \left(\frac{dz}{dy}\right)-B,\ \left(\frac{dz}{du}\right)-C,$$

ossia una primitiva della proposta equazione sarà primitiva comune alle tre seguenti

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)-A=0,\ \left(\frac{dz}{dy}\right)-B=0,\ \left(\frac{dz}{du}\right)-C=0.$$

Reciprocamente, una equazione tra le x, y, z, u, la quale sia primitiva di tutte tre queste ultime, sarà anco primitiva della proposta, come è facile il dimostrarlo, seguendo un metodo analogo a quello usato nel paragrafo 336 per provare analoga proprietà.

Troviamo le primitive comuni alle tre equazioni, ora date,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)-A=0,\ \left(\frac{dz}{dy}\right)-B=0,\ \left(\frac{dz}{du}\right)-C=0.$$

Sia $F(x,y,u,z)=\phi(y,u)$ la primitiva completa della prima; la $\phi(y,u)$ esprime l'opportuna arbitraria costante rispetto alla x. Questa primitiva dà

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{1}{F'(z)}\left(\phi'(y)-F'(y)\right);$$

e però per la seconda delle tre equazioni date dovrà essere

$$BF'(z)+F'(y)=\phi'(y).$$

Se in questa si ponesse in vece della z il suo valore cavato dalla $F(x,y,u,z)=\phi(y,u)$ la risultante dovrebbe essere identica; e però il risultante valore del binomio $BF'(z)+F'(y)$ non dovrà contenere la x, ossia la sua derivata presa rispetto alla x dovrà essere *zero*. La equazione necessaria e sufficiente, perchè abbia luogo tale proprietà, si trova, come al § 337, che è la seguente

$$B'(x)-A'(y)+AB'(z)-BA'(z)=0.$$

Ammesso identica questa equazione, la anzidetta risultante dalla

$$BF'(z)+F'(y)=\phi'(y)$$

non conterrà la x: sia $f(y,u,\phi)=\psi(u)$ la sua primitiva completa, ove $\psi(u)$ esprime l'arbitraria.

Sostituendo il valore della ϕ, cavato da quest'ultima equazione, nella $F(x,y,u,z)=\phi(y,u)$, se ne avrà una tra le $x, y, u, z, \psi(u)$: sciolta essa rispetto alla $\psi(u)$, risulti

$$P(x,y,u,z)=\psi(u).$$

Questa soddisfarà le prime due delle tre equazioni date: essa poi somministra

$$\left(\frac{dz}{du}\right)=\frac{1}{P'(z)}\left(\psi'(u)-P'(u)\right);$$

e però per la terza delle medesime equazioni date, avrassi la

$$CP'(z)+P'(u)=\psi'(u).$$

Ponendo nel binomio $CP'(z)+P'(u)$, in luogo della z il suo valore cavato dalla equazione $P(x,y,u,z)=\psi(u)$, il risultamento dovrà essere identicamente $\psi'(u)$; per cui non dovrà contenere nè la x nè la y, ossia le sue derivate parziali prese rispetto alla x l'una, e l'altra alla y, dovranno annullarsi anzi essere identicamente *nulle*.

Queste due derivate sono

$$A'(u)-C'(x)+AC'(z)-CA'(z),$$
$$B'(u)-C'(y)+BC'(z)-CB'(z);$$

e però dovranno essere identiche le due equazioni seguenti

$$A'(u)-C'(x)+AC'(z)-CA'(z)=0,$$
$$B'(u)-C'(y)+BC'(z)-CB'(z)=0.$$

Soddisfatte che siano identicamente queste due equazioni, la risultante dalla

$$CP'(z)+P'(u)=\psi'(u)$$

per la indicata sostituzione del valore della z cavato dalla $P(x,y,u,z)=\psi(u)$, conterrà le sole $u,\psi,\psi'(u)$: sia $\psi=\xi(u,a)$ la sua primitiva completa, ove a esprime una vera costante; e si avrà la

$$P(x,y,u,z)=\xi(u,a).$$

Questa equazione soddisfacendo le tre date, e contenendo una costante arbitraria, sarà la primitiva completa della proposta $z'-A-By'-Cu'=0$.

Per la equazione

$$z'-A-By'-Cu'=0$$

hanno luogo considerazioni analoghe alle esposte nei paragrafi 338, 339 per la $z'-A-By'=0$ oltre altre particolari ad essa, ma per brevità credo bene di ommetterle.

341. Farò vedere, come si possono ottenere alcune di quelle equazioni, che sono condizioni necessarie, perchè una equazione tra più variabili e le loro derivate prese rispetto ad una di esse, di qualunque ordine essa sia, abbia primitiva finita.

La equazione sia la

$$f(x,y,z,y',z',y'',z'')=0:$$

ciò che dirò di questa, facilmente si concepirà, come si potrà estendere ad altre più complicate.

La equazione $f(x,y,z,y',z',y'',z'')=0$ abbia una primitiva finita, e sarà z funzione delle x,y, qualunque funzione della x sia la y.

Essendo z funzione delle x,y, si hanno

$$z'=p+qy',\ z''=r+2sy'+ty'^2+qy'':$$

le p,q,r,s,t esprimono ordinatamente le derivate parziali $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$.

Sostituendo nella equazione proposta in vece delle z', z'' i loro valori, qui esposti, si ha la

$$f(x,y,z,y',p+qy',y'',r+2sy'+ty'^2+qy'')=0,$$

la quale dovrà sussistere, qualunque siano le y,y',y''; e però con essa sussisteranno le sue derivate parziali prese rispetto a queste medesime tre quantità, le quali derivate visibilmente sono

$$o=f'(y)+f'(z)q+f'(z')\left(\frac{dz'}{dy}\right)+f'(z'')\left(\frac{dz''}{dy}\right),$$

$$o=f'(y')+f'(z')\left(\frac{dz'}{dy'}\right)+f'(z'')\left(\frac{dz''}{dy'}\right),$$

$$o=f'(y'')+f'(z'')\left(\frac{dz''}{dy''}\right).$$

Ma dai valori trovati delle z', z'' si hanno

$$\left(\frac{dz''}{dy''}\right)=q,\ \left(\frac{dz''}{dy'}\right)=2s+2ty'=2q',$$

$$\left(\frac{dz'}{dy'}\right)=q,\ \left(\frac{dz'}{dy}\right)=p'(y)+y'q'(y)=q',$$

$$\left(\frac{dz''}{dy}\right)=r'(y)+2y's'(y)+y'^2t'(y)+y''q'(y)=q'';$$

adunque le tre equazioni, anzi esposte, si ridurranno alle seguenti

$$f'(y)+qf'(z)+q'f'(z')+q''f'(z'')=o,$$

$$f'(y')+qf'(z')+2q'f'(z'')=o,$$

$$f'(y'')+qf'(z'')=o,$$

dalle quali eliminando la q, si hanno due equazioni, che dovranno essere identiche.

La terza di queste ultime medesime equazioni insegna, che la f deve consistere in una funzione della forma

$$f(x,y,z,y',z',Ay''+Bz'')=o$$

ove le A, B non contengono le y'', z''; per cui sciolta rispetto alla z'', sarà riducibile alla forma seguente

$$z''-y''\phi(x,y,z,y',z')-\psi(x,y,z,y',z')=o.$$

Anzi, una qualunque equazione, che ammetta una primitiva, sarà sempre riducibile a contenere le derivate dell'ordine più alto alle sole prime potenze. E questo è il motivo, per cui nei paragrafi antecedenti ho supposto, che le equazioni alle derivate contemplate contenessero linearmente le derivate.

342. Allorchè una equazione fra tre o più variabili e le derivate loro, non ammetta per primitiva una sola equazione fra le variabili stesse, cioè essa non soddisfaccia i criterj di integrabilità, si chiama sua *primitiva la sussistenza simultanea* od il *complesso di due o più equazioni*, quando si possa essa desumere dalle derivate totali esatte di queste, combinate, se occorre, con esse medesime.

Per trovare queste primitive si assumano arbitrariamente equazioni fra le variabili e talvolta anco tra le loro derivate; si trovino le primitive di queste equazioni combinate colla proposta (§ 333); e queste sono le richieste.

Per le equazioni alle derivate lineari comunemente si procede alla ricerca di tali loro primitive con un metodo particolare, che io farò qui conoscere, trovando quelle delle due equazioni

$$z'-A-By'=o,\ z'-A-By'-Cu'=o.$$

Comincio dalla prima. Sia μ quella funzione delle x,y,z, che rende il prodotto $(z'-A)\mu$ una derivata esatta, supposto y costante; ed $F(x,y,z)$ rappresenti la primitiva di questo prodotto, cioè sia $F'(x)=-\mu A$, $F'(z)=\mu$.

Si assuma la equazione $F(x,y,z)=\phi(y)$, ove la $\phi(y)$ esprime una funzione arbitraria della y: evidentemente, questa è la primitiva completa della $z'-A=0$, alla quale si riduce la $z'-A-By'=0$, ammesso la y costante.

La equazione derivata totale della $F(x,y,z)=\phi(y)$, che è

$$F'(x)+F'(y)y'+F'(z)z'=\phi'(y)y', \text{ dà}$$

$$z'=A+\frac{1}{\mu}\left(\phi'(y)-F'(y)\right)y':$$

si sostituisca questo valore della z' nella proposta, ed avrassi

$$\left(\phi'(y)-F'(y)-\mu B\right)y'=0, \text{ cioè } -\phi'(y)+F'(y)+\mu B=0.$$

La sussistenza simultanea delle due equazioni

$$0=F(x,y,z)-\phi(y),$$
$$0=F'(y)+\mu B-\phi'(y),$$

le quali insieme soddisfanno evidentemente la proposta, si chiama primitiva della proposta medesima.

Se in vece di supporre al principio costante la y, come si è fatto, avessi supposta costante la z, con analoghi ragionamenti avrei trovato la primitiva espressa con due equazioni analoghe alle esposte.

Per avere la primitiva dell' altra equazione cioè della $z'-A-By'-Cu'=0$, si considerino le y,u costanti; e si avrà la $z'-A=0$: sia $\mu(x,y,u,z)$ quella funzione delle x,y,u,z, che rende derivata esatta il prodotto $(z'-A)\mu$, nella ipotesi delle y,u costanti, ed $F(x,y,u,z)$ sia la primitiva di tal prodotto; cioè abbiasi $F'(x)=-A\mu$, ed $F'(z)=\mu$.

Assumasi per una equazione fra le componenti la primitiva della proposta la

$$F(x,y,u,z)=\psi(y,u):$$

la $\psi(y,u)$, costante rispetto alle due variabili x,z contemplate nella primitiva della $\left(\frac{dz}{dx}\right)-A=0$, esprime una funzione arbitraria delle y,u.

Si formi di questa primitiva la derivata totale esatta, e si avrà

$$F'(x)+F'(y)y'+F'(u)u'+F'(z)z'=\psi'(y)y'+\psi'(u)u',$$

ossia

$$z'-A+\frac{1}{\mu}\left(F'(y)-\psi'(y)\right)y'+\frac{1}{\mu}\left(F'(u)-\psi'(u)\right)u'=0:$$

si sostituisca il valore della z' cavato da questa equazione nella proposta, ed avrassi

$$\left(B+\frac{1}{\mu}\left(F'(y)-\psi'(y)\right)\right)y'+\left(C+\frac{1}{\mu}\left(F'(u)-\psi'(u)\right)\right)u'=0.$$

Assumasi per seconda equazione costituente la primitiva richiesta la

$$\mu B+F'(y)-\psi'(y)=0, \text{ e la terza sarà } C\mu+F'(u)-\psi'(u)=0.$$

Vale a dire, la primitiva richiesta sarà rappresentata dalla sussistenza simultanea delle tre equazioni seguenti

$$F(x,y,u,z)-\psi(y,u)=0,$$
$$F'(y)+\mu B-\psi'(y)=0,$$
$$F'(u)+\mu C-\psi'(u)=0$$

ove la ψ esprime, come già si è detto, una funzione qualunque delle y,u.

In vece di supporre al principio costanti le y,u, si potevano supporre costanti una di queste ed una delle altre o queste due, e con un processo analogo all'usato, si sarebbe ottenuta la primitiva richiesta espressa con tre equazioni analoghe alle trovate medesime.

Egli è sì facile lo estendere questo metodo alle equazioni tra cinque o più variabili, che io reputo inutile l'estendermi maggiormente su di esso.

343. Dal metodo qui esposto, per trovare la primitiva di una equazione lineare tra un numero qualunque di variabili e le derivate loro, risulta, che tale primitiva è rappresentata con tante equazioni, quante sono le variabili meno una. È però ora dimostrata, che la primitiva di siffatte equazioni tra un numero *pari* di variabili, si può ridurre ad essere il complesso di tante equazioni, quanto è una metà del numero delle variabili stesse; e quando il numero delle variabili sia *dispari*, si può ridurre la primitiva ad essere costituita con tante equazioni, quanto è la metà del numero delle variabili già aumentato della unità.

Il primo che avvertì questa proprietà, almeno in parte, fu il cav. Pietro Paoli; qui però mostreremo la verità di questa dichiarazione, seguendo il metodo immaginato dal sig. Pfaff; e ci limiteremo alle sole equazioni tra quattro, o cinque variabili; e cominceremo colla $z'-A-By'-Cu'=o$, che è tra le quattro variabili x, y, u, z.

Nella equazione a contemplarsi, si riportino le derivate ad una nuova variabile t, ed essa ridurrassi alla $z'-Ax'-By'-Cu'=o$.

Si considerino le y, u, z funzioni della x e di altre tre variabili a, b, c funzioni anch'esse della t; e suppongasi

$$y'=px'+\alpha a'+\beta b'+\gamma c',$$

$$u'=qx'+\alpha_1 a'+\beta_1 b'+\gamma_1 c',$$

$$z'=rx'+\alpha_2 a'+\beta_2 b'+\gamma_2 c',$$

dove le derivate indicate sono tutte rispetto alla t, e le $p, q, r; \alpha, \alpha_1, \alpha_2; \beta, \beta_1, \beta_2; \gamma, \gamma_1, \gamma_2$ esprimono le derivate parziali delle y, u, z prese ordinatamente rispetto alle x, a, b, c.

I valori, qui supposti, delle y', u' z' sostituiscansi nella equazione proposta; e si avrà la

$$(r-A-Bp-Cq)x'+(\alpha_2-B\alpha-C\alpha_1)a'+$$
$$(\beta_2-B\beta-C\beta_1)b'+(\gamma_2-B\gamma-C\gamma_1)c'=o.$$

Si disponga delle p, q, r talmente da annullare il coefficiente della x', cioè le p, q, r abbiano la proprietà

$$r-A-Bp-Cq=o;$$

e la equazione trovata si ridurrà alla

$$(\alpha_2-B\alpha-C\alpha_1)a'+(\beta_2-B\beta-C\beta_1)b'+(\gamma_2-B\gamma-C\gamma_1)c'=o$$

ossia $a'+\dfrac{\beta_2-B\beta-C\beta_1}{\alpha_2-B\alpha-C\alpha_1}b'+\dfrac{\gamma_2-B\gamma-C\gamma_1}{\alpha_2-B\alpha-C\alpha_1}c'=o.$

Vediamo ora, se è possibile, determinare altre due proprietà delle medesime p, q, r, in modo da rendere i coefficienti delle b', c', in quest' ultima equazione, indipendenti dalla x, cioè da annullare le derivate prese rispetto alla x delle due frazioni $\dfrac{N}{D}$, $\dfrac{P}{D}$, ove è supposto per semplicità

$$\alpha_2-B\alpha-C\alpha_1=D, \beta_2-B\beta-C\beta_1=N, \gamma_2-B\gamma-C\gamma_1=P.$$

Essendo la derivata della $\dfrac{N}{D}$ eguale a $\dfrac{DN'(x)-ND'(x)}{D^2}$,

affinchè $\dfrac{N}{D}$ sia costante rispetto alla x, basterà che sia $DN'(x)-ND'(x)=o$ ovvero

$$\frac{N'(x)}{N}=\frac{D'(x)}{D}.$$

Così, per la $\frac{P}{D}$ dovrà essere $\frac{D'(x)}{D}=\frac{P'(x)}{P}$; vale a dire, la equazione ultima trovata tra le a', b', c' non conterrà la x, se saranno identiche le

$$\frac{D'(x)}{D}=\frac{N'(x)}{N},\quad \frac{D'(x)}{D}=\frac{P'(x)}{P}.$$

Determiniamo le derivate $D'(x)$, $N'(x)$, $P'(x)$ convenientemente, le quali sono totali; e cominciamo da quella della D ossia di $\alpha_2-B\alpha-C\alpha_1$.

Prima di tutto si osservi, che le derivate $\left(\frac{d\alpha_2}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\alpha_1}{dx}\right)$ sono identiche alle $r'(a)$, $p'(a)$, $q'(a)$; in secondo luogo, che B, C sono funzioni delle x, y, u, z e le y, u, z delle x, a, b, c. Ciò premesso, passiamo a trovare la $D'(x)$: sarà

$$D'(x)=\left(\frac{d\alpha_2}{dx}\right)-B\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)-C\left(\frac{d\alpha_1}{dx}\right)-\alpha B'(x)-\alpha_1 C'(x),\ \text{o}$$

$$D'(x)=\left(\frac{dr}{da}\right)-B\left(\frac{dp}{da}\right)-C\left(\frac{dq}{da}\right)-\alpha B'(x)-\alpha_1 C'(x),\ \text{ovvero}$$

$$D'(x)=A'(a)+pB'(a)+qC'(a)-\alpha B'(x)-\alpha_1 C'(x),$$

per essere $A=r-Bp-Cq$, e però

$$A'(a)+pB'(a)+qC'(a)=r'(a)-Bp'(a)-Cq'(a).$$

Ma si ha $A'(a)=A'(y)y'(a)+A'(u)u'(a)+A'(z)z'(a)$ ossia

$$A'(a)=A'(y)\alpha+A'(u)\alpha_1+A'(z)\alpha_2,\ \text{così}$$

$$B'(a)=B'(y)\alpha+B'(u)\alpha_1+B'(z)\alpha_2,\ \text{e}$$

$$C'(a)=C'(y)\alpha+C'(u)\alpha_1+C'(z)\alpha_2;$$

e le derivate totali $B'(x)$, $C'(x)$ sono eguali, la prima a

$B'(x)+pB'(y)+qB'(u)+rB'(z)$, e la seconda a $C'(x)+pC'(y)+qC'(u)+rC'(z)$;

adunque sarà $D'(x)$ derivata totale eguale ad

$$\big(A'(y)-B'(x)+\big(C'(y)-B'(u)\big)q-rB'(z)\big)\alpha+$$
$$\big(A'(u)-C'(x)+\big(B'(u)-C'(y)\big)p-rC'(z)\big)\alpha_1+$$
$$\big(A'(z)+pB'(z)+qC'(z)\big)\alpha_2,\ \text{cioè}$$

$D'(x)=M\alpha+K\alpha_1+L\alpha_2$, posto

$$A'(y)-B'(x)+\big(C'(y)-B'(u)\big)q-rB'(z)=M,$$
$$A'(u)-C'(x)+\big(B'(u)-C'(u)\big)p-rC'(z)=K,$$
$$A'(z)+pB'(z)+qC'(z)=L.$$

Con operazioni affatto analoghe a quelle qui eseguite per ottenere la $D'(x)$ si trova

$N'(x)=M\beta+K\beta_1+L\beta_2$, e $P'(x)=M\gamma+K\gamma_1+L\gamma_2$.

I valori trovati per le derivate $D'(x)$, $N'(x)$, $P'(x)$, riducono le equazioni

$$\frac{D'(x)}{D}=\frac{N'(x)}{N}=\frac{P'(x)}{P}\ \text{alle}$$

$$\frac{M\alpha+K\alpha_1+L\alpha_2}{\alpha_2-B\alpha-C\alpha_1}=\frac{M\beta+K\beta_1+L\beta_2}{\beta_2-B\beta-C\beta_1},$$

$$\frac{M\alpha+K\alpha_1+L\alpha_2}{\alpha_2-B\alpha-C\alpha_1}=\frac{M\gamma+K\gamma_1+L\gamma_2}{\gamma_2-B\gamma-C\gamma_1},$$

ossia alle seguenti

$$\frac{\alpha_2+\frac{M}{L}\alpha+\frac{K}{L}\alpha_1}{\alpha_2-B\alpha-C\alpha_1}=\frac{\beta_2+\frac{M}{L}\beta+\frac{K}{L}\beta_1}{\beta_2-B\beta-C\beta_1},$$

$$\frac{\alpha_2+\frac{M}{L}\alpha+\frac{K}{L}\alpha_1}{\alpha_2-B\alpha-C\alpha_1}=\frac{\gamma_2+\frac{M}{L}\gamma+\frac{K}{L}\gamma_1}{\gamma_2-B\gamma-C\gamma_1},$$

le quali evidentemente saranno identiche, purchè le p, q, r abbiano le proprietà di soddisfare le due equazioni $\frac{M}{L}=-B$, $\frac{K}{L}=-C$, ossia le

$$M+BL=0, \quad K+CL=0.$$

Queste ultime equazioni rendono

$$\frac{D'(x)}{D}=L, \quad \frac{N'(x)}{N}=L, \quad \frac{P'(x)}{P}=L, \text{ che danno}$$

$$D=\phi(a,b,c)\cdot e^{\int L dx}, \quad N=\psi(a,b,c)\cdot e^{\int L dx}, \quad P=\xi(a,b,c)\cdot e^{\int L dx}$$

ove la e esprime al solito la base dei logaritmi Neperiani, e le ϕ, ψ, ξ sono funzioni delle sole a, b, c: i quali valori sostituiti nella equazione $a'+\frac{N}{D}b'+\frac{P}{D}c'=0$, la riducono evidentemente alla seguente

$$a'+\frac{\psi(a,\ b,\ c)}{\phi(a,\ b,\ c)}b'+\frac{\xi(a,\ b,\ c)}{\phi(a,\ b,\ c)}c'=0.$$

Concludesi per tanto, che, se le p, q, r si determineranno colle tre equazioni

$$r-A-Bq-Cr=0, \quad M+BL=0, \quad K+CL=0$$

ossia colle

$$0=r-A-Bq-Cr,$$

$$0=B\big(A'(z)+pB'(z)+qC'(z)\big)+ A'(y)-B'(x)+q\big(C'(y)-B'(u)\big)-rB'(z),$$

$$0=C\big(A'(z)+pB'(z)+qC'(z)\big)+ A'(u)-C'(x)+p\big(B'(u)-C'(u)\big)-rC'(z),$$

i valori delle y, u, z, dati dalle

$$y'=px'+\alpha a'+\beta b'+\gamma c',$$

$$u'=qx'+\alpha_1 a'+\beta_1 b'+\gamma_1 c',$$

$$z'=rx'+\alpha_2 a'+\beta_2 b'+\gamma_2 c'$$

trasformeranno la proposta equazione nella

$$a'+\frac{\psi}{\phi}b'+\frac{\xi}{\phi}c'=0.$$

I valori delle p, q, r determinati collo sciogliere le equazioni dianzi esposte, siano $P(x,y,u,z)$, $Q(x,y,u,z)$, $R(x,y,u,z)$: trovinsi le primitive complete delle tre equazioni alle derivate ordinarie (§ 332)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)-P(x,y,u,z)=0,$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)-Q(x,y,u,z)=0,$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)-R(x,y,u,z)=0;$$

e risultino le

$$y=F(x,a,b,c), \quad u=f(x,a,b,c), \quad z=\Delta(x,a,b,c),$$

ove le a, b, c esprimono le arbitrarie.

Si scelgano queste arbitrarie per le tre nuove variabili sopra denominate a, b, c; e si tengano le y, u, z eguali alle funzioni

$$F(x,\ a,\ b,\ c), \quad f(x,\ a,\ b,\ c), \quad \Delta(x,\ a,\ b,\ c).$$

Questi valori delle y, u, z ridurranno la proposta equazione alla

$$a'+\frac{\beta_2-B\beta-C\beta_1}{\alpha_2-B\alpha-C\alpha_1}b'+\frac{\gamma_2-B\gamma-C\gamma_1}{\alpha_2-B\alpha-C\alpha_1}c'=0$$

nella quale le $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, - - - esprimono le derivate

$$F'(a),\ F'(b),\ F'(c),\ f'(a),\ f'(b),\ ---,$$

per cui essa ridurrassi alla forma seguente

$$a' + K(a, b, c) \cdot b' + H(a, b, c) \cdot c' = 0$$

ove le $K(a, b, c)$, $H(a, b, c)$ esprimono due funzioni date delle sole a, b, c. Si trovi di questa equazione la primitiva, la quale (§ 342) sarà rappresentata colle due equazioni

$$M(a, b, c) - \phi(c) = 0, \ \mu H + \phi'(c) - M'(c) = 0$$

ove μ esprime la funzione delle a, b, c, che rende derivata esatta $a' + Kb'$ nella ipotesi della c costante e la M dà $M'(a) = \mu$, $M'(b) = -\mu K$; e ϕ è una funzione arbitraria della c. Dimodochè la proposta equazione sarà soddisfatta dalle

$$y = F(x, a, b, c), \ u = f(x, a, b, c), \ z = \Delta(x, a, b, c)$$

purchè le a, b, c abbiano le relazioni espresse dalle due dianzi esposte. Quindi essa sarà soddisfatta dalle due equazioni, che si avranno, sostituendo in queste cioè nelle

$$M(a, b, c) - \phi(c) = 0, \ \mu H + \phi'(c) - M'(c) = 0$$

in luogo delle a, b, c i loro valori cavati dalle tre

$$y = F(x, a, b, c), \ u = f(x, a, b, c), \ z = \Delta(x, a, b, c);$$

e ciò avrà luogo, qualunque sia ϕ, rimasta arbitraria funzione della c o del suo valore.

344. Con un metodo analogo a quello usato qui sopra per ridurre la difficoltà di avere la primitiva di una equazione fra quattro variabili a quella di una fra tre variabili sole, si può ridurre la ricerca della primitiva di una equazione fra un numero *pari qualunque* di variabili a quella di una equazione, che ne contenga una di meno: esso però usato per una equazione fra un numero *dispari* di variabili, insegna, che non si può conseguire l'analoga trasformazione, se non sono soddisfatte certe condizioni emergenti da esso. Ecco però un cenno di un metodo, col quale si può conseguire per queste equazioni una primitiva completa rappresentata con tante equazioni, quanto è una metà del numero delle variabili aumentato di *una*.

Si abbia la

$$z' - A - By' - Cu' - Ds' = 0,$$

che è fra le cinque variabili x, y, u, s, z.

Trovisi, col medesimo metodo dianzi esposto, la primitiva della

$$z' - A - By' - Cu' = 0,$$

la quale è la proposta, ommessone l'ultimo termine ossia nella ipotesi della s costante; ed essa sia rappresentata colle due equazioni

$$F(x, y, u, s, z) = \phi\big(\Delta(x, y, u, s, z), s\big),$$

$$F^{1}(x, y, u, s, z) = \phi'(\Delta):$$

la ϕ contiene la Δ valore della c usata superiormente, ed anco contiene la s a parte cioè fuori della Δ medesima.

Si tengano queste due equazioni, come due delle rappresentanti la primitiva richiesta; e facciasi la derivata totale della prima, e si avrà

$$F'(x) + F'(y)y' + F'(u)u' + F'(s)s' + F'(z)z'$$
$$= \phi'(\Delta)\big(\Delta'(x) + \Delta'(y)y' + \Delta'(u)u' + \Delta'(s)s' + \Delta'(z)z'\big) + \phi'(s)s',$$

ovvero ordinando e sostituendo per $\phi'(\Delta)$ il suo valore $F^{1}(x, y, u, s, z)$ o semplicemente F^{1} dato dalla seconda, sarà

$$F'(x) - F^{1}\Delta'(x) + \big(F'(y) - F^{1}\Delta'(y)\big)y' + \big(F'(u) - F^{1}\Delta'(u)\big)u' +$$
$$+ \big(F'(s) - F^{1}\Delta'(s) - \phi'(s)\big)s' + \big(F'(z) - F^{1}\Delta'(z)\big)z' = 0.$$

Eguagliando il valore della z' cavato da questa equazione a quello cavato dalla proposta, ed osservando che le funzioni

$$\big(F'(x) - F^{\mathrm{I}}\Delta'(x)\big):\big(F'(z) - F^{\mathrm{I}}\Delta'(z)\big),$$
$$\big(F'(y) - F^{\mathrm{I}}\Delta'(y)\big):\big(F'(z) - F^{\mathrm{I}}\Delta'(z)\big),$$
$$\big(F'(u) - F^{\mathrm{I}}\Delta'(u)\big):\big(F'(z) - F^{\mathrm{I}}\Delta'(z)\big)$$

sono identiche rispettivamente alle A, B, C, si ha

$$D = \big(F'(s) - F^{\mathrm{I}}\Delta'(s) - \phi'(s)\big):\big(F'(z) - F^{\mathrm{I}}\cdot\Delta'(z)\big)$$

e per tanto la sussistenza simultanea delle *tre* equazioni seguenti

$$F(x, y, u, s, z) = \phi\big(\Delta(x, y, u, s, z), s\big),$$
$$F^{\mathrm{I}}(x, y, u, s, z) = \phi'(\Delta),$$
$$DF'(z) - DF^{\mathrm{I}}\Delta'(z) = F'(s) - F^{\mathrm{I}}\Delta'(s) - \phi'(s)$$

soddisfarà la proposta, ossia ne sarà una sua primitiva.

345. Terminerò questa lezione, trovando una primitiva della equazione

$$z'^2 = x'^2 + y'^2$$

col metodo insegnato dal Lagrange, pel quale occorrono considerazioni, che si possono usare anco per trovare le primitive di altre equazioni analoghe a questa.

Si moltiplichino i membri dell'attuale equazione data pei corrispondenti della $1 = \text{sen.}^2 u + \cos.^2 u$ evidentissima; e si avrà, qualunque sia u

$$z'^2 = (y' \,\text{sen.}\, u + x' \cos.\, u)^2 + (y' \cos.\, u - x' \,\text{sen.}\, u)^2.$$

Si assuma la equazione $y' \,\text{sen.} u + x' \cos. u = 0$, ed avrassi la seguente

$$z' - y' \cos. u + x' \,\text{sen.} u = 0.$$

Queste ultime due equazioni insieme equivalgono alla

proposta, qualunque sia la quantità indicata dalla u, sia essa costante od una funzione della stessa variabile principale.

La primitiva della $y' \,\text{sen.} u + x' \cos. u = 0$ è (§ 342) rappresentata dalle due equazioni

$$y \,\text{sen.}\, u + x \cos.\, u = \psi(u),\ y \cos.\, u - x \,\text{sen.}\, u = \psi'(u),$$

qualunque funzione della u sia quella indicata colla $\psi(u)$: così la primitiva della $z' - y' \cos. u + x' \,\text{sen.} u = 0$, per lo stesso dianzi citato paragrafo è rappresentata dalle due

$$z + x \,\text{sen.}\, u - y \cos.\, u = \phi(u),\ x \cos.\, u + y \,\text{sen.}\, u = \phi'(u)$$

qualunque funzione della u sia la $\phi(u)$; e però la sussistenza simultanea di queste quattro equazioni trovate sarà primitiva della proposta, qualunque siano le funzioni $\psi(u), \phi(u)$.

La prima e la quarta di queste quattro equazioni combinate danno le $\psi(u) = \phi'(u)$, e però questa si potrà usare in vece di una delle due combinate; la useremo in vece della prima; anzi prescinderemo da essa affatto, sostituendo nella seconda in vece di $\psi'(u)$ il suo valore $\phi''(u)$; e con ciò le quattro equazioni equivarranno alle tre seguenti

$$z = y \cos.\, u - x \,\text{sen.}\, u + \phi(u),$$
$$y \,\text{sen.}\, u + x \cos.\, u = \phi'(u),$$
$$y \cos.\, u - x \,\text{sen.}\, u = \phi''(u),$$

le quali danno per primitiva richiesta il complesso delle tre equazioni

$$x = \phi'(u) \cos.\, u - \phi''(u) \,\text{sen.}\, u,$$
$$y = \phi'(u) \,\text{sen.}\, u + \phi''(u) \cos.\, u,$$
$$z = \phi(u) + \phi''(u).$$

Se le x, y fossero le coordinate rettangole di una curva, la z (§ 182) sarebbe o potrebb'essere il suo arco corrispondente; e però le coordinate rettangole di una curva e l'arco di essa saranno esprimibili con una stessa indeterminata, u, nei modi espressi dalle tre ultime equazioni esposte.

Se si individuasse la funzione $\phi(u)$, e si eliminasse la u sì dalle due prime equazioni qui esposte, che da una di esse combinate colla terza, si avrebbero due equazioni, la prima delle quali sarebbe quella della curva, e la seconda darebbe l'arco di essa formato con una sua ordinata. È con queste medesime tre equazioni che si possono trovare le curve rettificabili cioè aventi l'arco eguale ad una funzione finita di una sua ordinata.

Così, se fosse data l'equazione tra le coordinate rettangole di una curva, o una equazione tra le coordinate e l'arco corrispondente, e si volesse il valore corrispondente per la funzione $\phi(u)$, converrebbe porre nella data equazione in luogo delle coordinate e dell'arco i loro valori determinati colle medesime tre esposte equazioni, e se ne avrebbe una tra le

$$u, \phi(u), \phi'(u), \phi''(u)$$

fra le cui primitive vi sarebbe quella, che darebbe il richiesto valore della $\phi(u)$. Questa è una primitiva finita della primitiva singolare del primo ordine, della risultante in $u, \phi(u), \phi'(u), \phi''(u)$, come fece osservare il Poisson, e come può persuadersi chiunque, mediante l'esposto nei §§ 324, 325, osservando che la primitiva finita darebbe l'arco della curva costante, ciò che non può essere.

PARTE NONA

PRIMITIVE DELLE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI.

LEZIONE PRIMA

Delle primitive delle equazioni fra tre variabili e le derivate prime di una prese rispetto alle altre due.

346. Una equazione fra tre variabili si chiama primitiva di una equazione fra le variabili stesse e le derivate prime parziali di una prese rispetto alle altre due, quando sia questa la risultante da una combinazione delle derivate prime parziali esatte della prima, e della prima stessa, se occorre; o ciò che significa lo stesso, quando il valore della variabile, considerata funzione delle altre due, cavato dalla prima, e sostituito insieme alle sue effettive derivate parziali nell'altra, riduca questa ad una equazione identica ossia per sè stessa soddisfatta.

Una qualunque di queste equazioni alle derivate parziali ha una primitiva, nella quale vi è una funzione arbitraria di una funzione individuata delle variabili, ed essa si chiama *primitiva generale*; ed ha infinite primitive, in ciascuna delle quali vi sono due costanti arbitrarie, non esistenti nella medesima equazione alle derivate, ed una qualunque di queste chiamasi *primitiva completa*. Le equazioni, che si hanno, o individuando affatto la funzione arbitraria contenuta nella