Se le x, y fossero le coordinate rettangole di una curva, la z (§ 182) sarebbe o potrebb'essere il suo arco corrispondente; e però le coordinate rettangole di una curva e l'arco di essa saranno esprimibili con una stessa indeterminata, u, nei modi espressi dalle tre ultime equazioni esposte.

Se si individuasse la funzione $\phi(u)$, e si eliminasse la u sì dalle due prime equazioni qui esposte, che da una di esse combinate colla terza, si avrebbero due equazioni, la prima delle quali sarebbe quella della curva, e la seconda darebbe l'arco di essa formato con una sua ordinata. È con queste medesime tre equazioni che si possono trovare le curve rettificabili cioè aventi l'arco eguale ad una funzione finita di una sua ordinata.

Così, se fosse data l'equazione tra le coordinate rettangole di una curva, o una equazione tra le coordinate e l'arco corrispondente, e si volesse il valore corrispondente per la funzione $\phi(u)$, converrebbe porre nella data equazione in luogo delle coordinate e dell'arco i loro valori determinati colle medesime tre esposte equazioni, e se ne avrebbe una tra le

$$u, \phi(u), \phi'(u), \phi''(u)$$

fra le cui primitive vi sarebbe quella, che darebbe il richiesto valore della $\phi(u)$. Questa è una primitiva finita della primitiva singolare del primo ordine, della risultante in $u, \phi(u), \phi'(u), \phi''(u)$, come fece osservare il Poisson, e come può persuadersi chiunque, mediante l'esposto nei §§ 324, 325, osservando che la primitiva finita darebbe l'arco della curva costante, ciò che non può essere.

PARTE NONA

PRIMITIVE DELLE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI.

LEZIONE PRIMA

Delle primitive delle equazioni fra tre variabili e le derivate prime di una prese rispetto alle altre due.

346. Una equazione fra tre variabili si chiama primitiva di una equazione fra le variabili stesse e le derivate prime parziali di una prese rispetto alle altre due, quando sia questa la risultante da una combinazione delle derivate prime parziali esatte della prima, e della prima stessa, se occorre; o ciò che significa lo stesso, quando il valore della variabile, considerata funzione delle altre due, cavato dalla prima, e sostituito insieme alle sue effettive derivate parziali nell'altra, riduca questa ad una equazione identica ossia per sè stessa soddisfatta.

Una qualunque di queste equazioni alle derivate parziali ha una primitiva, nella quale vi è una funzione arbitraria di una funzione individuata delle variabili, ed essa si chiama *primitiva generale*; ed ha infinite primitive, in ciascuna delle quali vi sono due costanti arbitrarie, non esistenti nella medesima equazione alle derivate, ed una qualunque di queste chiamasi *primitiva completa*. Le equazioni, che si hanno, o individuando affatto la funzione arbitraria contenuta nella primitiva generale, ovvero dando valori aritmetici ad una od anco ad ambedue le costanti esistenti nelle primitive complete, chiamansi *primitive particolari*. Vi sono poi alcune equazioni alle derivate parziali, le quali hanno anco una primitiva affatto individuata, che si chiama *primitiva singolare*.

347. Noi avremo di mira la primitiva generale, e perchè è dessa generalmente la più interessante, ed anco perchè da essa si può desumere ogni altra primitiva; e cominceremo a trovare quella della

$$p + Mq - N = o,$$

ove le M, N esprimono funzioni date delle sole variabili, che sono x, y, z; e le p, q significano le derivate parziali $\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)$.

Si considerino le x, y funzioni delle α, β variabili indipendenti l'una dall'altra. Essendo z funzione delle x, y e queste entrambe funzioni delle α, β, sarà (§ 69)

$$z' = px' + qy', \text{ ossia } p = \frac{z'y_{,} - y'z_{,}}{x'y_{,} - y'x_{,}},$$

$$z_{,} = px_{,} + qy_{,}, \qquad q = \frac{x'z_{,} - z'x_{,}}{x'y_{,} - y'x_{,}}:$$

le x', y', z' esprimono le derivate delle x, y, z prese rispetto alla α, e le $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ quelle prese rispetto alla β.

Si sostituiscano nella equazione data in vece delle p, q i loro valori qui trovati; e si avrà la

$$z'y_{,} - y'z_{,} + (x'z_{,} - z'x_{,})M - (x'y_{,} - y'x_{,})N = o \text{ ossia}$$
$$(Ny' - Mz')x_{,} + (z' - Nx')y_{,} + (Mx' - y')z_{,} = o.$$

Trovate quelle funzioni delle α, β, che sono i valori delle x, y, z soddisfacenti quest'ultima equazione, o più

generalmente trovate quelle equazioni tra le α, β, x, y, z, che somministrerebbero tali valori delle x, y, z, eliminando da esse le due variabili α, β, avrassi una equazione tra le sole x, y, z, la quale soddisfarà la proposta evidentemente.

Si disponga delle x, y, z funzioni delle α, β talmente, che annullino il coefficiente di una delle loro derivate $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, per esempio quello della $z_{,}$; e si avranno le due equazioni

$$y' - Mx' = o, \ (Ny' - Mz')x_{,} + (z' - Nx')y_{,} = o,$$

la seconda delle quali, col sostituirvi Mx' in vece della y', si riduce alla

$$(z' - Nx')(y_{,} - Mx_{,}) = o,$$

la quale terremo soddisfatta colla $z' - Nx' = o$; per cui si avranno le due equazioni

$$y' - Mx' = o, \ z' - Nx' = o.$$

Vale a dire, affinchè le x, y, z funzioni delle α, β soddisfacciano la equazione

$$(Ny' - Mz')x_{,} + (z' - Nx')y_{,} + (Mx' - y')z_{,} = o$$

basta che esse siano quelle aventi le proprietà rappresentate colle due ultime esposte ovvero colle loro primitive complete (§ 332), che rappresenteremo colle

$$P(x, y, z) = a, \ Q(x, y, z) = b,$$

ove le a, b esprimono due costanti arbitrarie rispetto alla α; e siccome queste due costanti possono essere funzioni arbitrarie della β, così in generale avransi

$$P(x, y, z) = a(\beta), \ Q(x, y, z) = b(\beta).$$

In queste due equazioni la α non vi è che implicitamente, e però eliminando la β contenuta nelle $a(\beta)$, $b(\beta)$, rimarranno le α, β entrambe eliminate.

Per conseguire questa eliminazione, si supponga desunta la β dalla prima, e si avrà essa eguale ad una funzione arbitraria della $P(x,y,z)$; suppongasi questo suo valore posto nella seconda, e si otterrà $Q(x,y,z)$ eguale ad una funzione arbitraria della $P(x,y,z)$. Chiamata questa funzione arbitraria $\phi(P)$, sarà

$$Q(x,y,z)=\phi\big(P(x,y,z)\big);$$

equazione soddisfacente la data $p+Mq-N=0$, e sua primitiva generale manifestamente.

Non voglio ommettere, pel principiante, di far vedere, come si possa dalla equazione $Q=\phi(P)$ desumere la $p+Mq-N=0$.

Primieramente osservisi, che le due equazioni $P=a$, $Q=b$ primitive delle $y'-M=0$, $z'-N=0$ danno per loro derivate esatte le

$$P'(x)+P'(y)y'+P'(z)z'=0,\ Q'(x)+Q'(y)y'+Q'(z)z'=0,$$

per cui si hanno le due

$$P'(x)+P'(y)M+P'(z)N=0,\ Q'(x)+Q'(y)M+Q'(z)N=0$$

per essere $y'=M$, e $z'=N$.

Queste ultime due equazioni trovate ossia le due ad esse equivalenti

$$B-AM=0,\ C+AN=0,\ \text{dove}$$
$$A=P'(y)\,Q'(z)-P'(z)\,Q'(y),$$
$$B=P'(z)\,Q'(x)-P'(x)\,Q'(z),$$
$$C=P'(x)\,Q'(y)-P'(y)\,Q'(x)$$

saranno identiche, perchè non contengono le a, b.

La equazione $Q=\phi(P)$ ha per sue derivate prime parziali evidentemente le

$$Q'(x)+Q'(z)\,p=\phi'(P)\big(P'(x)+P'(z)\,p\big),$$
$$Q'(y)+Q'(z)\,q=\phi'(P)\big(P'(y)+P'(z)\,q\big),$$

dalle quali eliminando la $\phi'(P)$ risulta la seguente

$$Ap+Bq+C=0.$$

Ma dianzi abbiamo veduto, che B, C sono funzioni identiche alle $AM, -AN$; adunque l'equazione $Ap+Bq+C=0$ equivarrà alla seguente $A(p+Mp-N)=0$, che dà appunto la proposta $p+Mq-N=0$.

Per trovare la primitiva generale della equazione

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)+M\left(\frac{dz}{dy}\right)-N=0$$

si costituiranno adunque le due equazioni alle derivate ordinarie

$$y'-M=0,\ z'-N=0$$

od altre due a queste equivalenti; troveransi le loro primitive complete, e da queste si caveranno i valori delle due costanti arbitrarie, si eguaglierà l'uno di questi valori ad una funzione arbitraria dell'altro, e nella equazione rappresentante questa proprietà, avrassi la richiesta primitiva generale.

348. Se le M, N fossero costanti, le primitive complete anzidette sarebbero evidentemente $y-Mx=a$, $z-Nx=b$; e però la primitiva generale della

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)+M\left(\frac{dz}{dy}\right)-N=0$$

sarà $z-Nx=\phi(y-Mx)$, ovvero $y-Mx=\psi(z-Nx)$, ove le ϕ, ψ significano funzioni arbitrarie.

Vogliasi la primitiva generale della equazione

$$z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right) - \sqrt{(x^2+y^2+z^2)} = 0.$$

Questa equazione, ridotta alla forma della proposta, dà $M = \frac{y}{x}$, ed $N = \frac{z}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$; e però le due equazioni alle derivate ordinarie saranno

$$y' - \frac{y}{x}x' = 0,\ z' - \left(\frac{z}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}\right)x' = 0.$$

La prima dà $y = ax$; valore che riduce la seconda alla $xz' - z + \sqrt{((1+a^2)x^2+z^2)} = 0$, ove la derivata z' si intende presa rispetto alla x: quest' ultima visibilmente omogenea somministra (§ 280)

$$b - z = \sqrt{((1+a^2)x^2+z^2)}.$$

Sciogliendo per rispetto alle a, b le due primitive complete, qui trovate, si ha

$$a = \frac{y}{x},\ \text{e}\ b = z + \sqrt{(x^2+y^2+z^2)},$$

e conseguentemente la primitiva generale richiesta sarà

$$z + \sqrt{(x^2+y^2+z^2)} = \phi\left(\frac{y}{x}\right),\ \text{ovvero}$$

$$\frac{y}{x} = \psi\left(z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$$

349. Passiamo a trovare la primitiva generale della equazione

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

ove la $f(x, y, z, p, q)$ significa una data funzione, ma qualunque, delle tre variabili x, y, z, e delle p, q derivate prime parziali della z.

Questa equazione ha per derivata prima parziale

rispetto alla x la

$$f'(x) + pf'(z) + f'(p)\,p'(x) + f'(q)\,q'(x) = 0,$$

la quale, per essere $q'(x) = p'(y)$, si riduce alla seguente

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) + M\left(\frac{dp}{dy}\right) - N = 0,$$

supposto $f'(q) : f'(p) = M,\ -\left(f'(x) + pf'(z)\right) : f'(p) = N.$

Se nelle M, N si porrà in vece della q il suo valore cavato dalla equazione data, la

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) + M\left(\frac{dp}{dy}\right) - N = 0$$

conterrà le sole x, y, z, p oltre le due visibili derivate della p.

Per trovare la p, che soddisfa quest' ultima equazione, si considerino, come al § 347, le x, y funzioni di due nuove variabili α, β; e si troverà, che le x, y, p debbono essere tali funzioni, da soddisfare le due equazioni

$$y' - Mx' = 0,\ p' - Nx' = 0.$$

In queste equazioni, oltre le x, y, p, vi è anco la z, la quale ha colle altre la proprietà $z' - px' - qy' = 0$, qualunque sia la variabile, rispetto alla quale siano prese le derivate indicate in essa; e però, limitando queste derivate ad essere prese rispetto alla α, avransi le tre equazioni

$$y' - Mx' = 0,\ p' - Nx' = 0,\ z' - px' - qy' = 0.$$

Si trovino le primitive complete di queste tre equazioni, e siano

$$a = P(x, y, z, p),\ b = Q(x, y, z, p),\ c = R(x, y, z, p):$$

ove le a, b, c costanti rispetto alla α saranno altrettante funzioni della β. Queste funzioni della β non sono affatto arbitrarie, giacchè, dovendo la equazione $z'-px'-qy'=0$ sussistere qualunque sia la variabile, rispetto alla quale sono prese le derivate z', x', y', se questa è la β, si ha la equazione

$$z_{,}-px_{,}-qy_{,}=0,$$

la quale dovrà soddisfarsi.

Cavati i valori di tre delle x, y, z, p dalle dianzi esposte tre primitive complete, per esempio delle x, y, z, abbiansi

$$x=\lambda(p,a,b,c),\quad y=\pi(p,a,b,c),\quad z=\mu(p,a,b,c);$$

sostituiscansi essi nella equazione ancora a soddisfarsi, ed avrassi

$$\begin{aligned}&p_{,}\mu'(p)+\mu'(a)a_{,}+\mu'(b)b_{,}+\mu'(c)c_{,}\\ &-p\big(\lambda'(p)p_{,}+\lambda'(a)a_{,}+\lambda'(b)b_{,}+\lambda'(c)c_{,}\big)\\ &-q\big(\pi'(p)p_{,}+\pi'(a)a_{,}+\pi'(b)b_{,}+\pi'(c)c_{,}\big)=0\end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned}&\big(\mu'(a)-p\lambda'(a)-q\pi'(a)\big)a_{,}+\big(\mu'(b)-p\lambda'(b)-q\pi'(b)\big)b_{,}\\ &+\big(\mu'(c)-p\lambda'(c)-q\pi'(c)\big)c_{,}=0\end{aligned}$$

essendo $\mu'(p)-p\lambda'(p)-q\pi'(p)$ zero.

La equazione ultima, qui trovata, non deve contenere la p, e però, od essa non la conterrà effettivamente, ovvero sarà divisibile per un fattore contenente la p stessa, tolto il quale, si ridurrà a contenere le sole a, b, c e le loro derivate visibili: questa proprietà emerge dall'essere le a, b, c costanti rispetto alla α, la quale vi sarebbe nella equazione, se in essa vi rimanesse la p, che ne è funzione.

Rappresentiamo la equazione ottenuta tra le $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, spogliata del fattore contenente la p, colla seguente $Aa_{,}+Bb_{,}+Cc_{,}=0$.

La equazione $\left(\dfrac{dp}{dx}\right)+M\left(\dfrac{dp}{dy}\right)-N=0$ sarà soddisfatta dalle

$$a=P(x,y,z,p),\quad b=Q(x,y,z,p),\quad c=R(x,y,z,p);$$

purchè le a, b, c abbiano la relazione espressa dalla $Aa_{,}+Bb_{,}+Cc_{,}=0$, dianzi trovata.

Essendo le a, b, c funzioni della stessa β, due saranno funzioni della terza: suppongansi b, c funzioni della a, cioè sia $b=\phi(a)$, e $c=\psi(a)$; e saranno

$$Q(x,y,z,p)=\phi\big(P(x,y,z,p)\big),\quad R(x,y,z,p)=\psi\big(P(x,y,z,p)\big)$$

le equazioni, che avransi, eliminando le α, β dalle tre $a=P$, $b=Q$, $c=R$; dove bisogna riflettere, che le funzioni $\phi(P)$, $\psi(P)$ non sono affatto indipendenti l'una dall'altra, giacchè debbono soddisfare la equazione

$$\begin{aligned}&A\big(P,\phi(P),\psi(P)\big)+B\big(P,\phi(P),\psi(P)\big)\phi'(P)\\ &\qquad+C\big(P,\phi(P),\psi(P)\big)\psi'(P)=0;\end{aligned}$$

dimodochè la primitiva generale della proposta sarà rappresentata dalla sussistenza simultanea delle tre equazioni seguenti

$$Q=\phi(P),\quad R=\psi(P),\quad A+B\phi'(P)+C\psi'(P)=0,$$

ove la p è quantità da eliminarsi.

A questa primitiva si può dare una forma più conveniente. Chiamisi M quella funzione delle a, b, c, che rende i prodotti MA, MB le derivate parziali, la prima rispetto alla a e la seconda rispetto alla b, di una stessa funzione, e questa funzione sia $F(a, b, c)$; e le due equazioni

$$F(a, b, c)+\xi(c)=0,\ F'(c)+\xi'(c)-mC=0\ (\S\ 342)$$

equivarranno alla $Aa_{,}+Bb_{,}+Cc_{,}=0$, ove la $\xi(c)$ esprime una funzione arbitraria della c. Quindi, se nelle

$$F(a, b, c)+\xi(c)=0,\ F'(c)-mC+\xi'(c)=0$$

si porranno P, Q, R in vece delle a, b, c, avransi due equazioni, le quali rappresenteranno la primitiva generale richiesta; purchè si intenda la p, contenuta in esse, quantità da eliminarsi.

Riunendo tutto ciò, che si è qui esposto, risulta la regola seguente per trovare la primitiva generale della equazione $f(x, y, z, p, q)=0$.

Trovinsi le primitive complete delle tre equazioni derivate ordinarie

$$y'-Mx'=0,\ p'-Nx'=0,\ z'-px'-qy'=0$$

combinate colla stessa data, onde eliminare la q, ossia si trovino le primitive complete di queste medesime quattro equazioni; si cavino da esse i valori di quattro delle x, y, z, p, q, e risulteranno formati colla quarta e le tre a, b, c arbitrarie: si pongano questi valori nella equazione

$$z_{,}-px_{,}-qy_{,}=0,$$

ed avrassi una equazione riducibile alla forma $Aa_{,}+Bb_{,}+Cc_{,}=0$, la quale conterrà le sole a, b, c, oltre le loro visibili derivate: trovisi di quest' ultima equazione la primitiva, mediante l'esposto nel § 331, ed in questa, che consisterà in due equazioni, si pongano in luogo delle a, b, c i rispettivi valori cavati

dalle anzidette primitive complete e formati colle sole x, y, z e la p ovvero la q; e si avranno due equazioni la cui contemporanea sussistenza, ove la q ovvero la p rimasta si intenda quantità da eliminarsi, rappresenterà la primitiva generale richiesta.

350. Esempio. Abbiasi $f=z-pq=0$: sarà $f'(x)=0$, $f'(z)=1$, $f'(p)=-q$, $f'(q)=-p$, e però $M=\frac{p}{q}$, ed $N=p$; e conseguentemente le tre equazioni alle derivate ordinarie saranno

$$qy'-px'=0,\ qp'-px'=0,\ z'-px'-qy'=0.$$

La equazione proposta dà $q=\frac{z}{p}$, per cui le tre equazioni, qui trovate, equivarranno alle seguenti

$$zy'-p^2x'=0,\ zp'-p^2x'=0,\ pz'-p^2x'-zy'=0.$$

La prima e la seconda combinate danno $y'=p'$ ossia $y=p+a$. Pongasi nella terza p' in vece della y', e zp' in luogo di p^2x' cavato dalla seconda: ed avrassi

$$pz'-2zp'=0,\ \text{ovvero}\ z=bp^2.$$

Questo valore della z riduce la seconda alla $bp'-x'=0$, la quale somministra $x=bp+c$. Le a, b, c esprimono evidentemente le arbitrarie.

Sostituendo nella equazione

$$z_{,}-px_{,}-qy_{,}=0$$

in luogo delle $z_{,}$, $x_{,}$, $y_{,}$ rispettivamente i loro valori cavati dalle equazioni

$z=bp^2$, $x=bp+c$, $y=p+a$, i quali sono

$2pbp_{,}'+p^2b_{,}$, $pb_{,}+bp_{,}+c_{,}$, $p_{,}+a_{,}$, si ha la

$$2bpp_{,}+p^2b_{,}-p(pb_{,}+bp_{,}+c_{,})-bp(p_{,}+a_{,})=0$$

ossia $p(ba_{,}+c_{,})=0$,

che, divisa pel fattore p, riducesi alla

$$ba_{,}+c_{,}=0.$$

Le medesime tre equazioni dianzi esposte somministrano

$$a=y-p\,,\ \ b=\frac{z}{p^2},\ \ c=x-\frac{z}{p};$$

e però, posto $b=\phi(a)$, $c=\psi(a)$, la primitiva richiesta sarà espressa dalle tre equazioni

$$\frac{z}{p^2}=\phi(z-p)\,,\ \ x-\frac{z}{p}=\psi(z-p)\,,\ \ \phi(a)+\psi'(a)=0;$$

oppure dalle sole due

$$x-\frac{z}{p}=\psi'(z-p)\,,\ \ \frac{z}{p^2}=-\psi'(y-p)\,,$$

ove p è quantità da eliminarsi.

Per questo esempio, nella equazione tra le a, b, c vi sono le derivate di due sole di queste medesime quantità: è questa una proprietà, che si può conseguire in tutti i casi, giacchè essa dipende dall' ordine, che si segue nel trovare le primitive complete delle tre equazioni fra le derivate ordinarie, ed anco dalla forma che piaccia dare alle costanti arbitrarie completanti tali primitive.

Di fatto, supposto $F(a, b, c)=h$, la h esprima un' arbitraria analoga alle a, b, c, si ha

$$F'(a)a_{,}+F'(b)\,b_{,}+F'(c)c_{,}-h_{,}=0,$$

per cui la equazione $Aa_{,}+Bb_{,}+Cc_{,}=0$ si riduce alla seguente

$$\big(mC-F'(c)\big)\,c_{,}+h_{,}=0,$$

la quale si può ridurre a contenere le sole h, c ed una delle a, b, ponendo in vece della a o della b il suo valore cavato dalla equazione ammessa $F'(a, b, c)=h$.

Ma se nelle primitive complete anzidette si porrà per la a ovvero per b il rispettivo valore cavato da quest' ultima equazione, e nella $z_{,}-px_{,}-qy_{,}=0$ si porranno i valori delle y, z, p cavati dalle tre primitive complete risultanti, avrassi evidentemente la stessa equazione, che risulta, ponendo in vece della a o della b il suo valore cavato dalla $F(a, b, c)=h$, nella

$$\big(mC-F'(c)\big)\,c_{,}-h_{,}=0\,,$$

la quale conterrà per tanto o le sole b, c, h ovvero le a, c, h colle derivate delle due c, h solamente.

351. Per dare un altro esempio. Abbiasi

$$f=q-(z+px)^2=0.$$

Risultando

$$f'(x)=-2p(z+px),\ \ f'(z)=-2(z+px),$$
$$f'(p)=-2x(z+px)\,,\ \ f'(q)=1\,,$$

le tre equazioni fra le derivate ordinarie saranno

$$2x(z+px)y'+x'=0,\ xp'+2px'=0,\ z'-px'-qy'=0.$$

La seconda dà $px^2=a$; si ponga nella terza il valore della q cavato dalla data, e quello della y' cavato dalla prima, e si avrà la

$$z'-px'+\frac{x'}{2x}(z+px)=0\,;$$

ed in questa pongasi $\frac{a}{x^2}$ in luogo della p, ed avrassi la

$$z'-\frac{a-xz}{2x^2}\,x'=0,\ \text{ossia}\ z'+\frac{1}{2x}z-\frac{a}{2x^2}=0 \text{ ove l'} x'=1.$$

Quest'ultima (§ 278) somministra $z=\frac{b}{\sqrt{x}}-\frac{a}{x}$.

In ultimo, si pongano i valori delle z, p nella prima, ed essa si ridurrà alla $2b\sqrt{x}\cdot y' + x' = 0$, la quale dà immediatamente $by + \sqrt{x} = c$.

Le tre primitive $px^2 = a$, $z = \frac{b}{\sqrt{x}} - \frac{a}{x}$, $by + \sqrt{x} = c$ danno $p = \frac{a}{x^2}$, $z = \frac{b}{\sqrt{x}} - \frac{a}{x}$, $y = \frac{c}{b} - \frac{\sqrt{x}}{b}$, cioè i valori delle p, z, y formati colla x e colle tre arbitrarie a, b, c.

I valori delle p, z riducono $(z + px)^2$, che è il valore della q, cavato dalla equazione data, alla semplice frazione $\frac{b^2}{x}$.

Sostituendo i valori delle z, p, q, y nella equazione $z_{,} - px_{,} - qy_{,} = 0$ si ha la

$$-\frac{1}{x}(a_{,} + bc_{,} - cb_{,}) = 0 \text{ ossia } a_{,} + bc_{,} - cb_{,} = 0,$$

od anco $a - bc + \xi(c) = 0$, $2b - \xi'(c) = 0$.

Ma le stesse tre primitive complete danno

$$a = x^2 p,\ b = (z + px^2)\sqrt{x},\ c = \left(1 + y(z + px^2)\right)\sqrt{x};$$

adunque la primitiva generale potrà rappresentarsi colle

$$x^2 p - x(z + px^2)\left(1 + y(z + px^2)\right) + \xi\left((1 + yz + pyx^2)\sqrt{x}\right) = 0,$$

$$2(z + px^2)\sqrt{x} - \xi'\left((1 + yz + pyx^2)\sqrt{x}\right) = 0,$$

ove p è quantità da eliminarsi.

352. Quando si conosca la primitiva generale di una equazione alle derivate parziali, si possono avere facilmente le sue primitive complete; giacchè basta individuare talmente la funzione, che in essa rimangano due costanti arbitrarie.

Per esempio. Essendo $z - Nx = \phi(y - Mx)$ la primitiva generale della equazione

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) + M\left(\frac{dz}{dy}\right) - N = 0,$$

ove le M, N sono costanti; supposto

$$\phi(y - Mx) = g(y - Mx) + h,$$

la equazione risultante, che è la

$z - Nx = g(y - Mx) + h$ ossia $z - gy + (gM - N)x - h = 0$

sarà una primitiva completa, ritenute le g, h costanti arbitrarie.

Così, per essere

$$x - \frac{z}{p} = \phi(y - p),\ \frac{z}{p^2} + \phi'(y - p) = 0,$$

la primitiva generale della equazione

$$z - \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

ove si intenda p quantità da eliminarsi; supposto

$\phi(y - p) = h - g^2(y - p)$, per cui $\phi'(y - p) = -g^2$,

le due equazioni si riducono alle seguenti

$$x - \frac{z}{p} - g^2(y - p) - h = 0,\ \frac{z}{p^2} - g^2 = 0,$$

dalle quali eliminata effettivamente la p, si ha la

$$x - 2g\sqrt{z} + g^2 y - h = 0$$

primitiva completa, le costanti arbitrarie essendo le g, h.

353. Reciprocamente da ogni primitiva completa di una equazione alle derivate parziali si può desumere la sua primitiva generale.

Sia $F(x, y, z, a, b) = 0$, ove le a, b esprimono due costanti arbitrarie, una primitiva completa della equazione alle derivate parziali $f(x,y,z,p,q)=o$. Questa si può considerare la risultante della eliminazione delle a, b dalle tre

$$F(x,y,z,a,b)=o,\ F'(x)+p\,F'(z)=o,\ F'(y)+q\,F'(z)=o.$$

Nella $F(x,y,z,a,b)=o$ suppongasi $b=\phi(a)$ funzione arbitraria della a, e la a quella funzione delle x, y, z, che soddisfa la equazione

$$F'(a)+F'(\phi)\,\phi'(a)=o;$$

e la sussistenza simultanea delle due equazioni

$$F\big(x,y,z,a,\phi(a)\big)=o,\ F'(a)+F'(\phi)\,\phi'(a)=o$$

rappresenterà una primitiva della proposta.

Si formino della prima le due derivate prime parziali esatte, e saranno le

$$F'(x)+p\,F'(z)+\big(F'(a)+F'(\phi)\,\phi'(a)\big)\,a'(x)=o,$$
$$F'(y)+q\,F'(z)+\big(F'(a)+F'(\phi)\,\phi'(a)\big)\,a'(y)=o,$$

le quali per la seconda delle medesime, dianzi esposte, si riducono alle

$$F'(x)+pF'(z)=o,\ F'(y)+qF'(z)=o \text{ cioè}$$

$$\left(\frac{dF\big(x,y,z,a,\phi(a)\big)}{dx}\right)+p\left(\frac{dF\big(x,y,z,a,\phi(a)\big)}{dz}\right)=o,$$
$$\left(\frac{dF\big(x,y,z,a,\phi(a)\big)}{dy}\right)+q\left(\frac{dF\big(x,y,z,a,\phi(a)\big)}{dz}\right)=o.$$

E siccome queste due equazioni e la $F\big(x,y,z,a,\phi(a)\big)=o$ contengono le quantità $a, \phi(a)$, come le tre

$$\left(\frac{dF(x,y,z,a,b)}{dx}\right)+p\left(\frac{dF(x,y,z,a,b)}{dz}\right)=o,$$
$$\left(\frac{dF(x,y,z,a,b)}{dy}\right)+q\left(\frac{dF(x,y,z,a,b)}{dz}\right)=o,$$
$$F(x,y,z,a,b)=o,$$

sopra contemplate, contengono le a, b; così eliminando dalle prime tre le $a, \phi(a)$, si avrà la stessa risultante, che si ha, eliminando le a, b da queste ultime, cioè avrassi la $f(x,y,z,p,q)=o$; adunque la prima di queste risultanti sarà la stessa equazione alle derivate parziali $f(x,y,z,p,q)=o$; e conseguentemente la equazione $F\big(x,y,z,a,\phi(a)\big)=o$, qualunque sia la funzione ϕ, purchè la a soddisfaccia la $F'(a)+F'(\phi)\phi'(a)=o$, sarà primitiva della $f(x,y,z,p,q)=o$, e generale perchè in essa vi è una funzione arbitraria: come si è dichiarato. Vale a dire, la primitiva generale di quella equazione alle derivate parziali, di cui la $F(x,y,z,a,b)=o$ è una primitiva completa, sarà rappresentata dalla

$$F\big(x,y,z,a,\phi(a)\big)=o,$$

purchè si intenda la a quantità da eliminarsi mediante la

$$F'(a)+F'(\phi)\,\phi'(a)=o.$$

Anco da questa primitiva generale si possono desumere le primitive complete: si individui la funzione $\phi(a)$ talmente, che in essa vi siano due costanti arbitrarie; si elimini la a dalle due equazioni rappresentanti la generale, ed avrassi una equazione tra le x, y, z e le due nuove costanti arbitrarie, la quale sarà una primitiva completa della proposta.

Esempio. Abbiasi $F=z-ax-by=o$ per primitiva completa, e sarà $z-xp-yq=o$ l'equazione alle derivate, la cui primitiva generale sarà rappresentata colle

$$z-ax-y\,\phi(a)=o,\ x+y\,\phi'(a)=o,$$

ove a è la quantità da eliminarsi.

Supponghasi $\phi(a) = A - B a^2$, ove A, B esprimono due costanti arbitrarie, e le due equazioni si ridurranno

$$z - a x - y A + y B a^2 = 0, \quad x - 2 y B a = 0.$$

La seconda dà $a = \frac{x}{2yB}$, valore che messo nella prima la riduce

$$z - \frac{x^2}{2yB} - Ay + \frac{x^2}{4yB} = 0, \text{ ossia } z - Ay - \frac{x^2}{4By} = 0$$

altra primitiva completa della $z - xp - yq = 0$.

354. Farò ora vedere, come si può determinare la funzione arbitraria, che entra nella primitiva generale di una data equazione alle derivate parziali, onde avere quella sua primitiva, che ha proprietà speciali, quando si conoscano proprietà a ciò sufficienti. Queste proprietà consistono generalmente in due date equazioni fra tre variabili, i cui valori corrispondenti per ciascuna di queste equazioni debbono soddisfare la primitiva richiesta ossia essere tutti valori corrispondenti per le variabili di essa.

Rappresenterò queste equazioni colle $A(x,y,z) = 0$, $B(x,y,z) = 0$, supporrò cioè di voler determinare talmente la funzione contenuta nella primitiva generale, che la primitiva risultante sia soddisfatta tanto dai valori delle x, y, z, che soddisfanno la $A(x,y,z) = 0$, quanto da quelli che soddisfanno la $B(x,y,z) = 0$; e comincerò dal caso, che la primitiva generale sia espressa da una sola equazione, e che in essa non vi siano derivate della medesima funzione arbitraria.

La primitiva generale sia

$$F\big(x, y, z, \phi(\lambda(x, y, z))\big) = 0,$$

dove $\lambda(x,y,z)$ esprime una funzione data delle x, y, z, ϕ una funzione arbitraria della λ, ed F una funzione pure data delle x, y, z, ϕ.

Si combinino fra loro le quattro equazioni

$$F\big(x,y,z,\phi(\alpha)\big) = 0, \quad \lambda(x,y,z) = \alpha, \quad A(x,y,z) = 0, \quad B(x,y,z) = 0$$

talmente da eliminare le x, y, z, ed avrassi una equazione $D\big(\alpha, \phi(\alpha)\big) = 0$ tra le α, $\phi(\alpha)$ oltre le altre quantità contenute in esse.

Sciolta questa equazione rispetto alla $\phi(\alpha)$, risulti $\phi = E(\alpha)$: il significato richiesto dalla $\phi(\alpha)$ sarà $E(\alpha)$; e però la primitiva dimandata risulterà

$$F\big(x, y, z, E(\alpha)\big) = 0 \text{ ove } \alpha = \lambda(x,y,z);$$

cioè sarà essa la seguente

$$F\Big(x, y, z, E\big(\lambda(x,y,z)\big)\Big) = 0.$$

Col porre nella $F\big(x,y,z,\phi(\alpha)\big) = 0$ in vece della $\phi(\alpha)$ il suo valore cavato dalla equazione $D\big(\alpha, \phi(\alpha)\big) = 0$ e λ nella risultante in vece della α, in sostanza si eliminano le α, $\phi(\alpha)$ dalle tre equazioni

$$F\big(x,y,z,\phi(\alpha)\big) = 0, \quad \alpha = \lambda(x,y,z), \quad D\big(\alpha, \phi(\alpha)\big) = 0.$$

Così trovata quest'ultima equazione, basterà combinarla colle due prime in modo da eliminare le due quantità α, $\phi(\alpha)$, che la risultante sarà la primitiva richiesta.

355. In secondo luogo, la primitiva generale sia espressa colla sussistenza simultanea delle due equazioni

$$F\big(x,y,z,a,\phi(a)\big) = 0, \quad F'(a) + F'(\phi)\phi'(a) = 0,$$

ove la a esprime una quantità da eliminarsi.

Combinate queste equazioni colle due date $A=0$, $B=0$, in modo da eliminare le x, y, z, abbiasi la

$$D\left(a, \phi(a), \phi'(a)\right)=0,$$

equazione alle derivate del primo ordine rispetto alla ϕ funzione richiesta.

Trovisi di questa la primitiva completa, e sciolta rispetto alla $\phi(a)$ somministri $\phi(a)=E(a,m)$, ove m esprime la costante arbitraria. Nelle

$$F\left(x,y,z,a,\phi(a)\right)=0,\ F'(a)+F'(\phi)\phi'(a)=0$$

si ponga $E(a,m)$ in vece della $\phi(a)$, e però $E'(a)$ in vece della $\phi'(a)$; e dalle risultanti si elimini la a, ed avrassi una equazione tra le variabili x, y, z e la costante arbitraria m, che sarà evidentemente la primitiva richiesta.

Mediante opportuna determinazione della costante m, si potrà scoprire quella primitiva particolare, la quale sia soddisfatta da valori individuati delle tre variabili.

Se la equazione $D\left(a, \phi(a), \phi'(a)\right)=0$ avesse primitiva singolare, da essa avrebbesi un altro valore per la ϕ, non compreso nei sopra contemplati, il quale darebbe per la proposta un'altra primitiva, che sarebbe affatto particolare ossia individuata.

356. Occorre talvolta di scoprire il significato della $\phi(a)$, che entra nella primitiva generale rappresentata colle equazioni,

$$F\left(x,y,z,a,\phi(a)\right)=0,\ F'(a)+F'(\phi)\phi'(a)=0,$$

perchè la primitiva risultante sia una data $f(x,y,z)=0$. Tale ricerca ha molta analogia colla eseguita dianzi, e però credo questo il luogo di esporla.

Si combinino le equazioni

$$F\left(x,y,z,a,\phi(a)\right)=0,\ F'(a)+F'(\phi)\phi'(a)=0,\ f(x,y,z)=0$$

in maniera da eliminare due delle x, y, z; e si avrà un'equazione, nella quale vi sarà in generale la terza di esse oltre le $a, \phi(a), \phi'(a)$: si soddisfaccia questa equazione indipendentemente dalla variabile rimasta, e si avranno una o due o più equazioni fra le $a, \phi(a), \phi'(a)$: si trovi la primitiva singolare della o delle equazioni così risultanti tra le $a, \phi(a), \phi'(a)$ almeno primitiva singolare di una e primitiva particolare di ogni altra; ed il valore della $\phi(a)$, cavato da essa, sarà il richiesto.

Sia per esempio

$$f=z-Ay-\frac{Bx^2}{y}=0,\ \text{ed}\ F=z-ax-y\phi(a)=0:$$

combinando queste due equazioni alla

$$F'(a)+F'(\phi)\phi'(a)=-x-y\phi'(a)=0,$$

onde eliminare le x, z, si ottiene la

$$\left(B\phi'(a)^2+a\phi'(a)+A-\phi(a)\right)y=0.$$

Questa equazione si soddisfa indipendentemente dalla y, variabile rimasta, collo stabilire la equazione

$$B\phi'(a)^2+a\phi'(a)+A-\phi(a)=0,$$

la cui primitiva singolare dà $\phi(a)=A-\dfrac{a^2}{4B}$. E di fatto, sostituendo questo valore della $\phi(a)$ nelle equazioni

$$z-ax-y\phi(a)=0,\ x+y\phi'(a)=0,$$

e dalle risultanti eliminando la a, si ottiene appunto la data equazione

$$z-Ay-\frac{Bx^2}{y}=0,$$

che è una primitiva completa, perchè in essa vi sono A, B costanti arbitrarie, non esistenti nella equazione alle derivate parziali, che è

$$z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dy}{dz}\right) = 0.$$

Vogliasi anco il significato della $\phi(a)$, per cui la equazione risultante dalla eliminazione della a dalle due

$$z - (y-a)\big(x - \phi(a)\big) = 0,\ x - \phi(a) + (y-a)\phi'(a) = 0,$$

che insieme danno la primitiva generale della

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) - z = 0,$$

sia la primitiva particolare $4z + (x-y)^2 = 0$.

Eliminando le x, z dalle tre equazioni qui scritte, trovasi la

$$(\phi'-1)^2 y^2 - 2(a\phi'^2 + \phi\phi' - 3a\phi' + \phi)y + (\phi + a\phi')^2 - 4a^2\phi' = 0,$$

la quale per essere soddisfatta indipendentemente dalla y variabile rimasta, richiede visibilmente la sussistenza delle tre equazioni seguenti

$$(\phi + a\phi')^2 - 4a^2\phi' = 0,$$
$$a\phi'^2 + (\phi - 3a)\phi' + \phi = 0,$$
$$(\phi' - 1)^2 = 0.$$

Le prime due di queste equazioni hanno per primitive complete rispettivamente $a\phi - 2ma + m^2 = 0$, $\phi^3 - n(\phi^2 + 18a\phi - 27a^2) + 16n^2a^2 = 0$, ove le m, n esprimono le costanti arbitrarie; ed hanno entrambe la stessa $\phi - a = 0$ per loro primitiva singolare, la quale soddisfa anco la terza $(\phi' - 1)^2 = 0$, come una sua primitiva particolare. Quindi la funzione $\phi(a)$ richiesta sarà la semplice a; e di fatto, sostituendo a in vece

della $\phi(a)$, ed 1 in vece della $\phi'(a)$ nelle due equazioni rappresentanti la primitiva generale, si hanno le

$$z - (y-a)(x-a) = 0,\ x + y - 2a = 0,$$

dalle quali, eliminando la a, hassi appunto la equazione $4z + (x-y)^2 = 0$.

La equazione risultante dalla eliminazione di due delle variabili x, y, z, per esempio delle y, z dalle tre equazioni

$$F\big(x, y, z, a, \phi(a)\big) = 0,\ F'(a) + F'(\phi)\phi'(a) = 0,\ \lambda(x, y, z) = 0,$$

supponghiamola rappresentata colla stessa ultima di esse, intendendo però colle y, z esistenti in essa medesima, i loro valori formati colle x, a, ϕ, ϕ' dati dalle due altre; dimodochè la $\lambda(x, y, z) = 0$ sarà una equazione alle derivate ordinarie del primo ordine rispetto alla ϕ.

Questa equazione tra le $a, \phi(a), \phi'(a)$ è della famiglia di quelle contemplate nel § 324; giacchè essa contiene le sole $a, \phi(a), \phi'(a)$, che entrano nelle y, z; e queste sono tali funzioni delle medesime $a, \phi, \phi'(a)$, che il rapporto delle $y'(a)$, $z'(a)$, loro derivate prese rispetto alla a, non contiene la $\phi''(a)$.

Di fatto, si formi la derivata della equazione $F\big(x, y, z, a, \phi(a)\big) = 0$, e si avrà

$$F'(y)y'(a) + F'(z)z'(a) + F'(a) + F'(\phi)\phi'(a) = 0$$

la quale, per la seconda delle equazioni esposte, si riduce alla seguente

$$F'(y)y'(a) + F'(z)z'(a) = 0,\ \text{ossia}\ \frac{y'(a)}{z'(a)} = -\frac{F'(z)}{F'(y)};$$

cioè il rapporto $\frac{y'(a)}{z'(a)}$ è formato colle sole quantità, che entrano nelle due equazioni

$$F\big(x,y,z,a,\phi(a)\big)=0,\ F'(a)+F'(\phi)\phi'(a)=0,$$

per cui non contiene la $\phi''(a)$.

Per trovare la primitiva della $\lambda(x,y,z)=0$, onde determinare la $\phi(a)$, che occorre, formisi la sua derivata, ed avrassi

$$\lambda'(y)y'(a)+\lambda'(z)z'(a)=0:$$

pongasi in questa in vece della $y'(a)$ il suo valore $-\frac{F'(z)}{F'(y)}z'(a)$ dianzi trovato; e si avrà la

$$\frac{1}{F'(y)}\big(\lambda'(y)F'(z)-\lambda'(z)F'(y)\big)z'(a)=0$$

la quale si decompone nelle due seguenti

$$z'(a)=0,\ \lambda'(y)F'(z)-\lambda'(z)F'(y)=0,$$

la prima delle quali è estranea evidentemente pel richiesto valore della $\phi(a)$. Quindi il valore medesimo sarà quello, tra i soddisfacenti $\lambda(x,y,z)=0$, che soddisfarà anco la

$$\lambda'(y)F'(z)-\lambda'(z)F'(y)=0,$$

cioè sarà quello dato dalla primitiva singolare della stessa equazione $\lambda(x,y,z)=0$: appunto come si è dichiarato.

Concludiamo per tanto, che il valore della $\phi(a)$, il quale posto nelle due equazioni

$$F\big(x,y,z,a,\phi(a)\big)=0,\ F'(a)+F'(\phi)\phi'(a)=0$$

in luogo della $\phi(a)$ stessa, dà due equazioni dalle quali, eliminata la a risulta la equazione $\lambda(x,y,z)=0$, sarà dato dalla primitiva singolare della equazione, che avrassi, soddisfacendo indipendentemente dalla variabile rimasta nella equazione risultante dalla eliminazione di due delle x,y,z dalle tre equazioni

$$F\big(x,y,z,a,\phi(a)\big)=0,\ F'(a)+F'(\phi)\phi'(a)=0,\ \lambda(x,y,z)=0.$$

Questo risultamento avverte, che non regge la regola usata da alcuni per dimostrare, che non si può determinare la funzione $\phi(a)$, che entra nelle due equazioni

$$F\big(x,y,z,a,\phi(a)\big)=0,\ F'(a)+F'(\phi)\phi'(a)=0$$

talmente, che la equazione risultante dalla eliminazione della a contenuta in essa sia della forma $F(x,y,z,A,B)=0$, o ciò che significa lo stesso, che la primitiva generale non contiene quella primitiva completa, dalla quale essa medesima ha origine.

357. Tutto ciò, che si è qui detto rispetto alla determinazione della funzione arbitraria, pel caso che la primitiva generale sia rappresentata dalla sussistenza simultanea delle due equazioni

$$F\big(x,y,z,a,\phi(a)\big)=0,\ F'(a)+F'(\phi)\phi'(a)=0,$$

si può estendere, e vale, quando la primitiva generale consista nella simultanea sussistenza della

$$F(P,Q,R)+\phi(R)=0,\ \overset{2}{F}(P,Q,R)+\phi'(R)=0:$$

la $\overset{2}{F}(P,Q,R)$ è posta in vece di $F'(R)-\mu C$.

Di fatto, suppongasi $R=\alpha$, cavisi da questa equazione la p, e sostituiscasi in entrambe le equazioni rappresentanti insieme la primitiva generale, e la risultante dalla seconda sarà la derivata presa rispetto alla α della risultante dalla prima; dimodochè rappresentata la risultante della prima colla $\Delta(x,y,z,\alpha)+\phi(\alpha)=0$, quella risultante dalla seconda sarà $\Delta'(\alpha)+\phi'(\alpha)=0$.

E conseguentemente varrà per la determinazione della presente ϕ ciò, che abbiamo detto per la $\phi(a)$ superiormente. Vale a dire, volendo determinare la ϕ, perchè la equazione risultante dalla eliminazione della p dalle due

$$F + \phi(R) = 0, \quad \overset{2}{F} + \phi'(R) = 0$$

sia soddisfatta dai valori delle x, y, z, soddisfacenti le $A = 0, B = 0$, bisognerà combinare queste quattro equazioni colla $R = \alpha$ talmente da eliminare le p, x, y, z, per cui avrassi una equazione della forma $D(\alpha, \phi, \phi'(\alpha)) = 0$, ed ogni valore della $\phi(\alpha)$ soddisfacente quest'ultima potrà ritenersi il richiesto. Volendo poi il significato della $\phi(R)$, perchè la risultante dalla eliminazione della p dalle due equazioni

$$F(P, Q, R) + \phi(R) = 0, \quad F'(R) - \mu C + \phi'(R) = 0,$$

sia una data $\lambda(x, y, z) = 0$, si combineranno queste tre equazioni colla $R = \alpha$ in modo da eliminare la p e due delle variabili x, y, z; soddisferassi la risultante equazione, indipendentemente dalla variabile rimasta in essa, ed avrassi una, o due, o più equazioni tra le α, $\phi(\alpha)$, $\phi'(\alpha)$; troverassi una equazione primitiva comune a queste risultanti, la quale sia però primitiva singolare almeno di una di esse; e sciolta questa primitiva rispetto alla ϕ, si avrà il richiesto suo valore.

Esempio. Trovare la $\phi(p)$, perchè la equazione risultante dalla eliminazione della quantità p dalle due

$$z - 2xp + \phi'(p) = 0, \quad pz - xp^2 - y + \phi(p) = 0,$$

che insieme rappresentano la primitiva generale della

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) - 1 = 0,$$

sia la primitiva particolare $z^2 - 4y(x - 1) = 0$.

Eliminando da queste tre equazioni combinate colla $p = \alpha$, le y, z, p, si ha la

$$4\left(\alpha^2 - \phi(\alpha)\right)x + \phi'(\alpha)^2 + 4\left(\phi - \alpha\phi'(\alpha)\right) = 0,$$

la quale si soddisfa indipendentemente dalla x variabile rimasta collo stabilire le equazioni

$$\phi - \alpha^2 = 0, \quad \phi'^2 + 4(\phi - \alpha\phi') = 0.$$

La seconda ha per primitiva completa $\phi = 2m\alpha - m^2$, ove l'm esprime la costante arbitraria; ed ha evidentemente per primitiva singolare $\phi = \alpha^2$, valore, che soddisfa visibilmente anco la equazione $\phi - \alpha^2 = 0$. Quindi il valore o significato della $\phi(p)$ sarà p^2.

Di fatto, ponendo nelle equazioni rappresentanti la primitiva generale p^2 in vece di $\phi(p)$, ed eliminando la p dalle due risultanti, che sono le

$$pz - px^2 - y + p^2 = 0, \quad z - 2xp + 2p = 0$$

si ha la $z^2 - 4y(x - 1) = 0$.

358. In ultimo, parlerò delle primitive singolari. Ritengasi la $F(x, y, z, a, b) = 0$ per una primitiva completa della $f(x, y, z, p, q) = 0$.

Sciolte le equazioni $F'(a) = 0$, $F'(b) = 0$, che si hanno, eguagliando a *zero* le derivate della espressione $F(x, y, z, a, b)$ prese l'una rispetto alla a e l'altra alla b, abbiansi

$$a = \mu(x, y, z), \quad b = \lambda(x, y, z).$$

Si pongano nella primitiva completa in vece delle a, b questi loro valori; e si avrà la equazione

$$(1) \; - - - \; F(x, y, z, \mu, \lambda) = 0:$$

questa equazione è una primitiva della $f(x, y, z, p, q) = 0$.

Di fatto, le sue derivate prime parziali sono

$$\left(\frac{dF(x,y,z,\mu,\lambda)}{dx}\right)+p\left(\frac{dF(x,y,z,\mu,\lambda)}{dz}\right)+\mu' F'(\mu)+\lambda' F'(\lambda)=0,$$

$$\left(\frac{dF(x,y,z,\mu,\lambda)}{dy}\right)+q\left(\frac{dF(x,y,z,\mu,\lambda)}{dz}\right)+\mu_{,} F'(\mu)+\lambda_{,} F'(\lambda)=0$$

le quali si riducono alle

$$(2)\text{---}\left(\frac{dF(x,\ y,\ z,\ \mu,\ \lambda)}{dx}\right)+p\left(\frac{dF(x,\ y,\ z,\ \mu,\ \lambda)}{dz}\right)=0,$$

$$(3)\text{---}\left(\frac{dF(x,\ y,\ z,\ \mu,\ \lambda)}{dy}\right)+q\left(\frac{dF(x,\ y,\ z,\ \mu,\ \lambda)}{dz}\right)=0,$$

perchè le $F'(\mu)$, $F'(\lambda)$ sono identicamente *nulle*, essendo μ, λ i valori delle a, b desunti dalle equazioni $F'(a)=0$, $F'(b)=0$.

Si combinino le tre equazioni (1), (2), (3) talmente da eliminare le μ, λ; e si avrà la stessa risultante, che hassi, eliminando le a, b dalle tre

$$F(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0,$$

$$\left(\frac{dF(x,\ y,\ z,\ a,\ b)}{dx}\right)+p\left(\frac{dF(x,\ y,\ z,\ a,\ b)}{dz}\right)=0,$$

$$\left(\frac{dF(x,\ y,\ z,\ a,\ b)}{dy}\right)+q\left(\frac{dF(x,\ y,\ z,\ a,\ b)}{dz}\right)=0.$$

Ma la risultante dalla eliminazione delle a, b da queste è la $f(x,y,z,p,q)=0$; adunque anco la risultante dalla eliminazione delle μ,λ dalle (1), (2), (3) sarà la medesima $f(x,y,z,p,q)=0$. Quindi la (1) cioè $F(x,y,z,\mu,\lambda)=0$ sarà una primitiva di questa, giacchè si può combinare colle sue derivate in modo di avere questa medesima $f(x,y,z,p,q)=0$.

Questa primitiva, quando non si possa desumere dalle primitive complete col dare alle costanti valori individuati, si chiama primitiva singolare.

359. Sia $\Delta(x,y,z,m,n)=0$ un'altra primitiva completa della $f(x,y,z,p,q)=0$, le m,n esprimono le costanti arbitrarie. Ponendo nella $\Delta(x,y,z,m,n)=0$ in luogo delle m, n i loro valori cavati dalle equazioni $\Delta'(m)=0$, $\Delta'(n)=0$, ossia eliminando le m,n dalle tre equazioni

$$\Delta(x,y,z,m,n)=0,\ \Delta'(m)=0,\ \Delta'(n)=0,$$

si ha la stessa (1), desunta dall' altra primitiva

$$F(x,y,z,a,b)=0.$$

Vi sarà un significato per la funzione $\phi(a)$ contenuta nella primitiva generale rappresentata dalla sussistenza simultanea delle equazioni

$$F\big(x,y,z,a,\phi(a)\big)=0,\ F'(a)+F'(\phi)\,\phi'(a)=0,$$

che ridurrà queste a due individuate equazioni, dalle quali eliminando la a, avrassi la $\Delta(x,y,z,m,n)=0$: questo valore della $\phi(a)$ chiamisi $\beta(a,m,n)$.

Si ritenga la $\Delta(x,y,z,m,n)=0$ rappresentata colla

$$F\big(x,\ y,\ z,\ a,\ \beta(a,m,n)\big)=0,$$

ove la a è data dalla $F'(a)+F'(\beta)\beta'(a)=0$: sarà

$$\Delta'(m)=F'(\beta)\beta'(m)+\big(F'(a)+F'(\beta)\beta'(a)\big)a'(m),$$

$$\Delta'(n)=F'(\beta)\beta'(n)+\big(F'(a)+F'(\beta)\beta'(a)\big)a'(n),\ \text{ossia}$$

$\Delta'(m)=F'(\beta)\beta'(m)$, $\Delta'(n)=F'(\beta)\beta'(n)$ per essere *zero*

$$F'(a)+F'(\beta)\beta'(a);$$

e però le equazioni

$$\Delta'(m)=0,\ \Delta'(n)=0 \text{ daranno } F'(\beta)=0.$$

Ma già si ha $F'(a)+F'(\beta)\beta'(a)=0$; adunque avransi le due

$$F'(a)=o,\quad F'(\beta)=o,\ \text{cioè}$$

$$\left(\frac{dF(x,y,z,a,\beta)}{da}\right)=o,\quad\left(\frac{dF(x,y,z,a,\beta)}{d\beta}\right)=o.$$

Dimodochè eliminando le m, n dalle tre equazioni $\Delta=o$, $\Delta'(m)=o$, $\Delta'(n)=o$ ed eliminandole colle due ultime qui trovate, dalla $F(x,y,z,a,\beta)=o$, ove la a è data dalla $F'(a)+F'(\beta)\beta'(a)=o$, avrassi la stessa risultante.

Per eliminare le m, n dalle tre equazioni

$$F(x,y,z,a,\beta)=o,$$

$$\left(\frac{dF(x,y,z,a,\beta)}{da}\right)=o,\quad\left(\frac{dF(x,y,z,a,\beta)}{d\beta}\right)=o$$

basta eliminare le quantità a,β nelle quali unicamente esse sono contenute; e coll' eliminare queste due quantità hassi evidentemente la stessa equazione (1); adunque la primitiva singolare, che ha origine dalla primitiva completa $\Delta(x,y,z,m,n)=o$, è la medesima primitiva singolare, che ha origine dalla $F(x,y,z,a,b)=o$.

Vale a dire, le equazioni, che si possono desumere come primitive singolari dalle differenti primitive complete di una stessa equazione alle derivate parziali, sono in sostanza la stessa.

360. Dalla equazione $F(x,y,z,a,b)=o$ si ha $F'(x)+F'(a)\left(\frac{da}{dx}\right)=o$, ossia $\left(\frac{da}{dx}\right)=-\frac{F'(x)}{F'(a)}$; e però la primitiva singolare renderà infinita la derivata del valore della a presa rispetto alla x: altrettanto accade per le $\left(\frac{da}{dy}\right)$, $\left(\frac{da}{dz}\right)$, ed anco per le $\left(\frac{db}{dx}\right)$, $\left(\frac{db}{dy}\right)$, $\left(\frac{db}{dz}\right)$.

Queste ultime proprietà riesciranno utili per trovare la stessa primitiva singolare, quando nella primitiva completa una delle costanti arbitrarie vi sarà alla sola prima potenza.

361. Fra la primitiva singolare ed ogni primitiva completa di una stessa equazione alle derivate parziali vi sono proprietà analoghe a quelle osservate e dimostrate per le primitive delle equazioni alle derivate ordinarie; ma siccome tra le dimostrazioni di esse e quelle fatte per queste ultime vi è grandissima analogia, così rispetto ad esse mi limiterò a quello che dirò nel § 363; e passerò in vece ad esporre la regola per trovare la primitiva singolare di una data equazione alle derivate parziali, senza bisogno di primitiva completa di essa.

Siano $\vartheta(x,y,z,p,q)$, $\psi(x,y,z,p,q)$ i valori delle a, b cavati dalle equazioni

$$F'(x)+pF'(z)=o,\quad F'(y)+qF'(z)=o;$$

derivate prime parziali esatte della $F(x,y,z,a,b)=o$; e la equazione $F(x,y,z,\vartheta,\psi)=o$ sarà identica od almeno equivalente alla $f(x,y,z,p,q)=o$; e però sarà $f=M\cdot F$, ove l'M può essere una funzione delle x, y, z, p, q.

Essendo in generale $a=\vartheta$, $b=\psi$, e per la primitiva singolare $a=\mu$, $b=\lambda$; per questa le ϕ, ψ saranno eguali alle μ, λ; per cui le quantità, che si avranno, sostituendo nelle $F'(a)$, $F'(b)$ in luogo delle a, b le ϑ, ψ, saranno *nulle*.

La eguaglianza $f=M\cdot F$ dà le due

$$f'(p)=M'(p)\frac{f}{M}+\big(F'(\vartheta)\vartheta'(p)+F'(\psi)\psi'(p)\big)M,$$

$$f'(q)=M'(q)\frac{f}{M}+\big(F'(\vartheta)\vartheta'(q)+F'(\psi)\psi'(q)\big)M;$$

e però per la primitiva singolare sarà

$$f'(p)=M'(p)\frac{f}{M},\ f'(q)=M'(q)\frac{f}{M},\ \text{ossia}$$

$$(1)\ \text{---}\ f'(p)=0,\ f'(q)=0$$

per essere le $F'(\delta)$, $F'(\psi)$ *nulle*, e la $f(x,y,z,p,q)=0$ soddisfatta da essa primitiva, come lo è da ogni altra.

Ma insieme alla equazione $f(x,y,z,p,q)=0$ sussistono in generale anco le due

$$f'(x)+pf'(z)+f'(p)p'(x)+f'(q)q'(x)=0,$$

$$f'(y)+qf'(z)+f'(p)p'(y)+f'(q)q'(y)=0;$$

adunque per la primitiva singolare avranno luogo non solo le

$$f(x,y,z,p,q)=0,\ f'(p)=0,\ f'(q)=0,$$

ma anco le

$$(2)\ \text{---}\ f'(x)+pf'(z)=0,\ f'(y)+qf'(z)=0.$$

Si combinino le cinque equazioni (1), (2), $f=0$ talmente da eliminare le p, q, e si avranno tre equazioni tra le sole x, y, z: se queste ultime tre equazioni, così risultanti, saranno riducibili ad una sola, od avranno esse un fattor comune, quella equazione, o questo fattore eguagliato a *zero*, sarà la primitiva singolare della proposta cioè della $f=0$, qualora ne abbia.

362. Se nella $f(x,y,z,p,q)=0$ si intenda colla p il suo valore cavato da questa medesima equazione, la risultante, che conterrà le x, y, z, q sarà identica rispetto ad ognuna di queste quantità, per cui avranno luogo le equazioni

$$f'(x)+f'(p)p'(x)=0,\ f'(y)+f'(p)p'(y)=0,$$

$$f'(z)+f'(p)p'(z)=0,$$

le quali danno

$$p'(x)=-\frac{f'(x)}{f'(p)},\ p'(y)=-\frac{f'(y)}{f'(p)},\ p'(z)=-\frac{f'(z)}{f'(p)};$$

e però, per la primitiva singolare, i valori delle derivate $p'(x)$, $p'(y)$, $p'(z)$ saranno infiniti: altrettanto dicasi per le analoghe derivate della q.

363. Le variabili, che sono nella equazione $f(x,y,z,p,q)=0$, siano rette coordinate, ed essa esprimerà una proprietà comune a tutte le superficie rappresentate dalle equazioni primitive di essa.

La superficie rappresentata dalla primitiva singolare ha ogni suo punto, che è un punto di contatto di prim'ordine con una rappresentata da una primitiva particolare.

Si rappresentino le $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$ derivate della $F'(x,y,z,a,b)$ con $\alpha(x,y,z,a,b)$, $\beta(x,y,z,a,b)$, $\gamma(x,y,z,a,b)$ o semplicemente con α, β, γ; e le derivate prime parziali della equazione $F(x,y,z,a,b)=0$ essendo $\alpha+\left(\frac{dz}{dx}\right)\gamma=0$, $\beta+\left(\frac{dz}{dy}\right)\gamma=0$, quelle della $F(x,y,z,\mu,\lambda)=0$ saranno

$$\alpha(x,y,z,\mu,\lambda)+\left(\frac{dz}{dx}\right)\gamma(x,y,z,\mu,\lambda)=0,$$

$$\beta(x,y,z,\mu,\lambda)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\gamma(x,y,z,\mu,\lambda)=0,$$

stantechè le μ, λ, come valori delle a, b cavati dalle equazioni $F'(a)=0$, $F'(b)=0$ annullano le derivate $F'(\mu)$, $F'(\lambda)$.

Siano g, h, l le coordinate di un punto della superficie rappresentata dalla primitiva singolare, cioè per questa superficie ad $x=g$, $y=h$ corrisponda $z=l$; e la equazione

$$F\big(g,h,l,\mu(g,h,l),\lambda(g,h,l)\big)=0$$

sarà identica; ed i valori delle $\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)$ corrispondenti alle $x=g$, $y=h$ e però $z=l$ saranno quelli dati dalle due equazioni

$$\alpha\left(g, h, l, \mu(g, h, l), \lambda(g, h, l)\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\gamma\left(g, h, l, \mu(g, h, l), \lambda(g, h, l)\right) = 0,$$

$$\beta\left(g, h, l, \mu(g, h, l), \lambda(g, h, l)\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\gamma\left(g, h, l, \mu(g, h, l), \lambda(g, h, l)\right) = 0.$$

Si pongano nella primitiva completa in vece delle a, b i numeri $\mu(g, h, l)$, $\lambda(g, h, l)$; e si avrà la primitiva particolare

$$F\left(x, y, z, \mu(g, h, l), \lambda(g, h, l)\right) = 0$$

le cui derivate prime parziali sono evidentemente

$$\alpha\left(x, y, z, \mu(g, h, l), \lambda(g, h, l)\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\gamma\left(x, y, z, \mu(g, h, l), \lambda(g, h, l)\right) = 0,$$

$$\beta\left(x, y, z, \mu(g, h, l), \lambda(g, h, l)\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\gamma\left(x, y, z, \mu(g, h, l), \lambda(g, h, l)\right) = 0.$$

Sostituendo in queste ultime tre equazioni in vece delle x, y, z ordinatamente g, h, l, si hanno le stesse ottenute dianzi per la primitiva singolare; e però la prima di queste tre ultime risultanti sarà identica, ossia il punto corrispondente alle $x=g$, $y=h$, $z=l$ sarà un punto anco della superficie rappresentata colla primitiva particolare

$$F\left(x, y, z, \mu(g, h, l), \lambda(g, h, l)\right) = 0;$$

e le altre due somministreranno per le $\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)$ corrispondenti a questo punto gli stessi valori che hansi per la primitiva singolare. Quindi la superficie rappresentata colla primitiva singolare avrà nel punto corrispondente alle coordinate g, h, l un contatto di primo ordine con quella superficie, che è rappresentata dalla primitiva particolare qui sopra esposta.

È ben osservare, che la proprietà qui dimostrata, tra la superficie rappresentata colla primitiva singolare e quella rappresentata dalla primitiva completa $F(x, y, z, a, b) = 0$, ha luogo anco tra essa ed ogni altra rappresentata da una primitiva completa qualsivoglia; anzi, che ogni suo punto è un punto di contatto tra essa ed infinite superficie rappresentate da primitive particolari provenienti dalle infinite primitive complete; ed anco che, vi sono equazioni alle derivate parziali, le cui primitive singolari rappresentano superficie, le quali non sono toccate da tutte quelle rappresentate dalle loro primitive particolari, ciò che si dimostra, come (§ 295) per le linee.

364. Nelle due equazioni

$$F\left(x, y, z, a, \phi(a)\right) = 0,$$

$$F'(a) + F'(\phi)\,\phi'(a) = 0$$

la cui sussistenza simultanea rappresenta la primitiva generale, suppongasi ϕ funzione individuata della a; e sciolta rispetto alla a la risultante dalla seconda, abbiasi $a = \xi(x, y, z)$; e la primitiva corrispondente a questo valore della $\phi(a)$ sarà

$$F\left(x, y, z, \xi(x, y, z), \phi\left(\xi(x, y, z)\right)\right) = 0.$$

Ogni superficie appartenente alla famiglia rappresentata dalla primitiva $F(x, y, z, a, \phi(a))=0$, ove la a esprima una costante qualsivoglia, sarà evidentemente tangente a quella rappresentata colla primitiva $F(x, y, z, \xi, \phi(\xi))=0$ per tutta la estensione di una linea, le cui equazioni sono

$$F(x, y, z, a, \phi(a))=0,\ F'(a)+F'(\phi)\phi'(a)=0$$

ove l'a esprime in entrambe una costante.

LEZIONE II.

Delle primitive delle equazioni tra un numero qualunque di variabili e le derivate prime di una rispetto alle altre.

365. Comincerò a trovare la primitiva generale della equazione

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + \cdots + A_n p_n - A_{n+1} = 0$$

ove le $A_1, A_2, A_3, \cdots A_{n+1}$ esprimono funzioni date delle $(n+1)$ variabili $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n, z$, e le $p_1, p_2, p_3, \cdots p_n$ le derivate prime parziali della z prese ordinatamente per rispetto alle altre cioè $\left(\frac{dz}{dx_1}\right), \left(\frac{dz}{dx_2}\right), \left(\frac{dz}{dx_3}\right), \cdots \left(\frac{dz}{dx_n}\right)$; vale a dire comincerò a trovare una equazione tra le variabili, e nella quale vi sia una funzione arbitraria di tante funzioni determinate delle variabili stesse, quante sono le variabili indipendenti $x_1, x_2, \cdots x_n$ meno *uno*.

Si considerino le $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ altrettante funzioni delle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_n$ altre n variabili indipendenti; e la z sarà per conseguenza una funzione

composta rispetto alle α, essendo essa funzione delle x; e però avransi le n equazioni seguenti

$$\left(\frac{dz}{d\alpha_1}\right)=p_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_1}\right)+p_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_1}\right)+p_3\left(\frac{dx_3}{d\alpha_1}\right)+\cdots+p_n\left(\frac{dx_n}{d\alpha_1}\right),$$

$$\left(\frac{dz}{d\alpha_2}\right)=p_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_2}\right)+p_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_2}\right)+p_3\left(\frac{dx_3}{d\alpha_2}\right)+\cdots+p_n\left(\frac{dx_n}{d\alpha_2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{dz}{d\alpha_n}\right)=p_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_n}\right)+p_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_n}\right)+p_3\left(\frac{dx_3}{d\alpha_n}\right)+\cdots+p_n\left(\frac{dx_n}{d\alpha_n}\right).$$

Sciogliendo queste n equazioni rispetto alle $p_1, p_2, p_3, \cdots p_n$, risulterebbero i valori di queste quantità formati colle derivate delle x e della z parziali prese rispetto alle α; e sostituendo questi valori nella proposta, si otterrebbe una equazione fra le $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, z$ funzioni delle α, e le loro derivate prese rispetto alle α stesse.

Trovate le funzioni delle n variabili α, le quali come valori delle $x, x_2, \cdots x_n, z$ soddisfanno quest' ultima equazione, ossia trovate le $n+1$ equazioni, che sciolte rispetto alle $x_1, x_2, \cdots x_n, z$ darebbero tali loro valori; eliminando da esse le n variabili α, avrebbesi una equazione tra le sole $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n, z$, la quale evidentemente soddisfarebbe la proposta, ossia sarebbe una primitiva della proposta medesima.

Si ammettano le $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n, z$ tali funzioni delle α da soddisfare le n equazioni seguenti

$$A_1\left(\frac{dx_2}{d\alpha_1}\right)-A_2\left(\frac{dx_1}{d\alpha_1}\right)=0,\ A_1\left(\frac{dx_3}{d\alpha_1}\right)-A_3\left(\frac{dx_1}{d\alpha_1}\right)=0,\ \cdots$$

$$\cdots A_1\left(\frac{dx_n}{d\alpha_1}\right)-A_n\left(\frac{dx_1}{d\alpha_1}\right)=0,\ A_1\left(\frac{dz}{d\alpha_1}\right)-A_{n+1}\left(\frac{dx_1}{d\alpha_1}\right)=0;$$

ed esse soddisfaranno la anzidetta equazione risultante col porre i valori delle $p_1, p_2, p_3, --- p_n$ nella proposta. Di fatto, moltiplichisi per A_1 la prima delle n equazioni superiormente esposte o la sua equivalente

$$o = -\left(\frac{dz}{d\alpha_1}\right) + p_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_1}\right) + p_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_1}\right) + p_3\left(\frac{dx_3}{d\alpha_1}\right) + ---- + p_n\left(\frac{dx_n}{d\alpha_1}\right),$$

e nella risultante pongasi in vece delle

$$A_1\left(\frac{dx_2}{d\alpha_1}\right),\ A_1\left(\frac{dx_3}{d\alpha_1}\right) --- A_1\left(\frac{dx_n}{d\alpha_1}\right),\ A_1\left(\frac{dz}{d\alpha_1}\right)$$

i loro valori cavati dalle n equazioni dianzi ammesse, ed avrassi la

$$o = \left(\frac{dx_1}{d\alpha_1}\right)(A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + --- + A_n p_n - A_{n+1}) \text{ ossia}$$

$$o = A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + --- + A_n p_n - A_{n+1}$$

vale a dire la stessa equazione proposta.

Trovinsi le primitive complete delle n equazioni stabilite ossia delle loro equivalenti

$$A_1 x'_2 - A_2 x'_1 = o,\ A_1 x'_3 - A_3 x'_1 = o,$$

$$--- A_1 x'_n - A_n x'_1 = o;\ A_1 z' - A_{n+1} x'_1 = o;$$

e sciolte rispetto alle n arbitrarie, che si introducono, risultino

$$c_1 = P_1,\ c_2 = P_2,\ c_3 = P_3, --- c_n = P_n:$$

le $c_1, c_2, c_3, --- c_n$ esprimono le arbitrarie, e le P i loro valori, i quali saranno altrettante funzioni delle variabili $x_1, x_2, x_3, --- x_n, z$.

Le c che esprimono costanti rispetto alla α_1, saranno altrettante funzioni arbitrarie delle $\alpha_2, \alpha_3, --- \alpha_n$. Si suppongano desunti i valori di queste $\alpha_2, \alpha_3, --- \alpha_n$ dalle prime $n - 1$ primitive complete dianzi esposte, e sostituiti nella

$$c_n(\alpha_2, \alpha_3, --- \alpha_n) = P_n;$$

ed avrassi

$$P_n = \phi(P_1, P_2, P_3, --- P_{n-1});$$

cioè una equazione fra le sole variabili, che entrano nella proposta, e la $\phi(P_1, P_2, P_3, --- P_{n-1})$ funzione arbitraria di $n - 1$ funzioni determinate delle variabili stesse: questa equazione manifestamente sarà la primitiva generale richiesta.

Fra i metodi immaginati per trovare la primitiva generale della equazione

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + ---- + A_n p_n - A_{n+1} = o$$

vi è quello dato dal Lagrange nelle sue lezioni sul calcolo delle funzioni, ed è il seguente.

La $F(x_1, x_2, x_3, --- x_n, z) = o$

sia una primitiva della equazione proposta; dalle sue derivate prime parziali si hanno i valori delle $p_1, p_2, p_3, ---$ che sono ordinatamente

$$-\frac{F'(x_1)}{F'(z)},\ -\frac{F'(x_2)}{F'(z)},\ -\frac{F'(x_3)}{F'(z)},\ ---,$$

i quali sostituiti nella proposta medesima somministrano la

$$A_1 F'(x_1) = -A_2 F'(x_2) - A_3 F'(x_3) - ---- A_n F'(x_n) - A_{n+1} F'(z),$$

la quale sarà identica ovvero equivalente affatto alla $F(x_1, x_2, --- z) = o$.

Si considerino le $x_1, x_2, --- x_n, z$ tutte funzioni di una nuova variabile t, tali però che abbiano tra loro la relazione rappresentata dalla equazione $F = o$.

Essendo

$$F' = F'(x_1)x'_1 + F'(x_2)x'_2 + F'(x_3)x'_3 + ---- + F'(x_n)x'_n + F'(z)z', \text{ ossia}$$

$$A_1 F' = A_1 F'(x_1)x'_1 + A_1 F'(x_2)x'_2 + A_1 F'(x_3)x'_3 + ---- + A_1 F'(z)z',$$

pel valore della $A_1 F'(x_1)$ dianzi trovato si avrà

$$A_1 F' = (A_1 x_2' - A_2 x_1') F'(x_2) + (A_1 x_3' - A_3 x_1') F'(x_3) + \text{---} \\ \text{---} + (A_1 x_n' - A_n x_1') F'(x_n) + (A_1 z' - A_{n+1} x_1') F'(z),$$

ove le derivate indicate col semplice apice, sono tutte prese rispetto alla t.

Dalla espressione qui trovata per la $A_1 F'$ risulta, che la derivata rispetto alla t di quel valore della $F'(x_1, x_2, x_3, \text{---} x_n, z)$ che corrisponde a quelli delle $x_1, x_2, x_3, \text{---} x_n$, z soddisfacenti le n equazioni

$$A_1 x_2' - A_2 x_1' = 0,\ A_1 x_3' - A_3 x_1' = 0, \text{---} A_1 z' - A_{n+1} x_1' = 0,$$

è *nulla*. Ma i valori delle $x_1, x_2, \text{---}$ soddisfacenti queste n equazioni sono i medesimi di quelli dati dalle $P_1 = c_1$, $P_2 = c_2$, --- $P_n = c_n$ loro primitive; adunque una funzione delle $x_1, x_2, \text{---} x_n, z$, la quale eguagliata a *zero* dà una primitiva della proposta equazione, ridurrassi indipendente affatto dalla t ossia costante, quando si pongano in essa i valori di n delle $x_1, x_2, x_3, \text{---} x_n, z$ cavati dalle equazioni

$$P_1 = c_1,\ P_2 = c_2, \text{---} P_n = c_n;$$

e conseguentemente sarà essa necessariamente una funzione composta delle $P_1, P_2, \text{---} P_n$ stesse. Vale a dire, la primitiva richiesta della equazione

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + \text{----} + A_n p_n - A_{n+1} = 0$$

si otterrà eguagliando una delle anzidette funzioni P ad una funzione qualsivoglia od arbitraria delle altre $n-1$: appunto come qui sopra si è trovato altrimenti.

366. Esempio. Vogliasi la primitiva generale della

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \text{----} + x_n p_n - z n = 0.$$

Le n equazioni alle derivate ordinarie saranno

$$x_1 x_2' - x_2 x_1' = 0,\ x_1 x_3' - x_3 x_1' = 0, \\ \text{---},\ x_1 x_n' - x_n x_1' = 0,\ x_1 z' - n z x_1' = 0,$$

le cui primitive complete risultano le seguenti

$$c_1 = \frac{x_2}{x_1},\ c_2 = \frac{x_3}{x_1},\ c_3 = \frac{x_4}{x_1}, \text{---} c_{n-1} = \frac{x_n}{x_1},\ c_n = \frac{x_1^n}{z};$$

e però la primitiva generale qui richiesta sarà

$$\frac{z}{x_1^n} = \phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1}, \text{---} \frac{x_n}{x_1}\right) \text{ ossia}$$

$$z = x_1^n \phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1}, \text{---} \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Ecco dimostrata la proposizione reciproca di quella trattata nel paragrafo 60.

367. Passo a trovare la primitiva generale della equazione

$$f(x_1, x_2, x_3, \text{---} x_n, z, p_1, p_2, p_3, \text{---} p_n) = 0$$

qualsivoglia tra le $n+1$ variabili $x_1, x_2, x_3, \text{---} x_n, z$ e le $p_1, p_2, p_3, \text{---} p_n$ derivate prime parziali della z prese ordinatamente per rispetto alle $x_1, x_2, x_3, \text{---} x_n$.

Si formino della $f=0$ le $(n-1)$ equazioni derivate sue parziali prime prese ordinatamente rispetto alle $x_1, x_2, x_3, \text{---} x_n$; e si pongano nella prima in vece delle derivate $\left(\frac{dp_2}{dx_1}\right), \left(\frac{dp_3}{dx_1}\right), \text{---} \left(\frac{dp_n}{dx_1}\right)$ ordinatamente $\left(\frac{dp_1}{dx_2}\right), \left(\frac{dp_1}{dx_3}\right), \text{---} \left(\frac{dp_1}{dx_n}\right)$; nella seconda in vece delle $\left(\frac{dp_1}{dx_2}\right), \left(\frac{dp_3}{dx_2}\right), \text{---} \left(\frac{dp_n}{dx_n}\right)$ le $\left(\frac{dp_2}{dx_1}\right), \left(\frac{dp_2}{dx_3}\right), \text{---} \left(\frac{dp_2}{dx_n}\right)$, ecc.; e si avranno le seguenti

$$f'(x_1)+p_1 f'(z)+f'(p_1)\left(\frac{dp_1}{dx_1}\right)+f'(p_2)\left(\frac{dp_1}{dx_2}\right)+---+f'(p_n)\left(\frac{dp_1}{dx_n}\right)=0,$$

$$f'(x_2)+f'(z)p_2+f'(p_1)\left(\frac{dp_2}{dx_1}\right)+f'(p_2)\left(\frac{dp_2}{dx_2}\right)+---+f'(p_n)\left(\frac{dp_2}{dx_n}\right)=0,$$

- -

$$f'(x_{n-1})+f'(z)p_{n-1}+f'(p_1)\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_1}\right)+f'(p_2)\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_2}\right)+---+f'(p_n)\left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\right)=0.$$

In queste equazioni intendasi colla p_n il suo valore cavato dalla proposta, il quale sarà formato colle $x_1, x_2, --- x_n, z, p_1, p_2, --- p_{n-1}$ e le funzioni $p_1, p_2, --- p_{n-1}$, che le soddisfanno, saranno le stesse di quelle, che entrano nella proposta medesima.

Si considerino le $x_1, x_2, x_3, --- x_n$ funzioni di tutte le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, --- \alpha_n$ altre n variabili indipendenti, e le $p_1, p_2, p_3, --- p_n$ saranno altrettante funzioni composte di queste ultime medesime variabili; e per la prima delle $n-1$ equazioni derivate parziali dianzi trovate avransi le n seguenti

$$x'_2 f'(p_1) - x'_1 f'(p_2) = 0,$$

$$x'_3 f'(p_1) - f'(p_3) x'_1 = 0 --- x'_n f'(p_1) - f'(p_n) x'_1 = 0,$$

$$f'(p_1) p'_1 + \big(f'(x_1) + f'(z) p_1\big) x'_1 = 0,$$

ove le derivate indicate cogli apici si intendono tutte prese rispetto alla α_1: e per ogni altra delle medesime $n-1$ equazioni si avranno n equazioni di cui le prime $n-1$ saranno le stesse prime $n-1$ qui esposte, e le n *esime* ossia le ultime saranno ordinatamente le $n-2$ seguenti

$$f'(p_1) p'_2 + \big(f'(x_2) + f'(z) p_2\big) x'_1 = 0,$$

$$f'(p_1) p'_3 + \big(f'(x_3) + f'(z) p_3\big) x'_1 = 0,$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$f'(p_1) p'_{n-1} + \big(f'(x_{n-1}) + f'(z) p_{n-1}\big) x'_1 = 0.$$

In queste $2n-2$ equazioni vi sono esplicitamente le n variabili x, le n variabili p, e la z, ed implicitamente le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, --- \alpha_n$; esse però debbono soddisfare anco la proposta equazione

$$f(x_1, x_2, x_3, --- x_n, z, p_1, p_2, p_3, --- p_n) = 0,$$

e le n prime esposte nel paragrafo 365.

Per soddisfare queste $3n-1$ equazioni, comincisi a trovare le primitive delle $2n-2$ ultime esposte combinate colla proposta e colla prima delle anzidette n, che è

$$\left(\frac{dz}{dx_1}\right) - p_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_1}\right) - p_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_1}\right) - p_3\left(\frac{dx_3}{d\alpha_1}\right) - --- - p_n\left(\frac{dx_n}{d\alpha_1}\right) = 0,$$

nelle quali vi sono esplicitamente le $2n+1$ variabili

$$x_1, x_2, x_3, --- x_n, z, p_1, p_2, p_3, --- p_n$$

e le derivate loro prese rispetto alla sola α_1, eccetto che nella proposta vi sono le semplici variabili; e si avranno $2n$ equazioni, fra le variabili stesse e $2n$ arbitrarie $c_1, c_2, c_3, --- c_{2n}$ costanti rispetto alla α_1, che possono essere funzioni delle $\alpha_2, \alpha_3, --- \alpha_n$.

Queste primitive si suppongano sciolte rispetto alle $x_2, x_3, --- x_n, z, p_1, p_2, p_3, --- p_n$; ed abbiasi

$$x_2 = V_1,\ x_3 = V_2,\ --- x_n = V_{n-1},$$

$$z = V_n,\ p_1 = V_{n+1},\ p_2 = V_{n+2},\ --- p_n = V_{2n},$$

le V significano funzioni della x_1 e delle $2n-1$ arbitrarie; e sciolte rispetto a queste arbitrarie somministrino

$$c_1 = P_1,\ c_2 = P_2,\ c_3 = P_3,\ --- c_{2n-1} = P_{2n-1},$$

le P significano funzioni delle $2n+1$ variabili $x_1, x_2, --- x_n, z, p_1, p_2, p_3, --- p_n$.

Ora, siccome debbono essere soddisfatte anco le altre $n-1$ equazioni esposte al paragrafo 365, che si hanno visibilmente, riportando le derivate indicate nella sola

$$z' - p_1 x_1' - p_2 x_2' - p_3 x_3' - \cdots - p_n x_n' = 0$$

successivamente alle $\alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_n$; così le $c_1, c_2, \cdots c_{2n-1}$ dovranno avere le relazioni a ciò necessarie: basta però che ne soddisfaccino una, giacchè rimarranno soddisfatte anco le altre $n-2$; stantechè le $\alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_n$ vi sono in esse solo implicitamente.

Si sostituiscano i valori sopra esposti delle $x_2, x_3, \cdots p_n$ cioè li $V_1, V_2, \cdots V_{2n-1}$ nella equazione

$$z' - x_1' p_1 - x_2' p_2 - x_3' p_3 - \cdots - x_n' p_n = 0$$

ed in luogo delle $z', x_2', x_3', \cdots x_n'$ le loro derivate prese rispetto ad una qualunque delle $\alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_n$, delle quali sono altrettante funzioni le c; e si avrà una equazione, la quale divisa opportunamente, se occorre, si ridurrà alla forma seguente

$$A_1 c_1' + A_2 c_2' + A_3 c_3' + \cdots + A_{2n-1} c_{2n-1}' = 0$$

ove le A conterranno le sole c. Trovisi di questa la primitiva, consistente in n equazioni tra le $c_1, c_2, c_3, \cdots c_{2n-1}$ (§ 344) ed una funzione arbitraria di $n-1$ di queste medesime c, non che le derivate di essa prese rispetto alle $(n-1)\, c$, che entrano in essa funzione arbitraria; si pongano in queste equazioni i valori sopra esposti delle c, cioè le funzioni $P_1, P_2, \cdots P_{2n-1}$, e si avranno n equazioni tra le $2n+1$ variabili

$$x_1, x_2, x_3, \cdots x_n, z, p_1, p_2, p_3, \cdots p_n,$$

ed una funzione arbitraria di $n-1$ funzioni individuate di queste medesime variabili.

La sussistenza simultanea di queste equazioni, ove si intenda posto per una delle p derivate parziali della z il suo valore cavato dalla proposta, e che le altre $n-1$ siano quantità da eliminarsi, rappresenterà la primitiva generale della proposta medesima.

Trovata la primitiva generale, facilmente si possono avere le primitive complete, cioè quelle primitive che contengono n costanti arbitrarie, non che l'ordinaria primitiva singolare ed ogni altra primitiva della proposta: non dichiaro in che modo, nè espongo le relazioni che hanno tra loro queste differenti primitive, perchè ciò non presenta nessuna difficoltà.

LEZIONE III.

Delle primitive delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.

368. La ricerca delle primitive delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine e degli ordini prossimi superiori è una delle più interessanti sì per la teorica che per la pratica, ma è anco una delle più estese; mi limiterò presentemente alla ricerca delle primitive del primo ordine delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine aventi la forma

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + A\left(\frac{d^2 z}{dxdy}\right) + B\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) + C = 0,$$

dove le A, B, C esprimono funzioni date delle cinque quantità

$$x, y, z, p = \left(\frac{dz}{dx}\right), q = \left(\frac{dz}{dy}\right);$$

vale a dire troverò le equazioni tra le $x, y, z, p, q,$

che soddisfanno la

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)+A\left(\frac{d^2 z}{dxdy}\right)+B\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)+C=0.$$

Una primitiva richiesta rappresentisi colla equazione

$$f(x,y,z,p,q)=0:$$

insieme ad essa sussisteranno le sue derivate parziali, di cui le prime due, per essere

$$p'(x)=\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),\ p'(y)=q'(x)=\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right),\ q'(y)=\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right),$$

sono $f'(p)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+f'(q)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+f'(x)+pf'(z)=0,$

$$f'(p)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+f'(q)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+f'(y)+qf'(z)=0,$$

le quali danno

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)=-\frac{f'(q)}{f'(p)}\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)-\frac{1}{f'(p)}\big(f'(x)+pf'(z)\big),$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)=-\frac{f'(p)}{f'(q)}\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)-\frac{1}{f'(q)}\big(f'(y)+qf'(z)\big).$$

Questi valori delle derivate $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, sostituiti nella data equazione alle derivate parziali del secondo ordine, somministrano la

$$\left(A-\frac{f'(q)}{f'(p)}-B\frac{f'(p)}{f'(q)}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)-\frac{1}{f'(p)}\big(f'(x)+pf'(z)\big)$$
$$-\frac{B}{f'(q)}\big(f'(y)+qf'(z)\big)+C=0,$$

nella quale la derivata $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$ vi è nel solo modo visibile.

Ora, se in questa equazione si ponesse il valore di una delle quantità x, y, z, p, q desunto dalla

$$f(x, y, z, p, q)=0,$$

supposta primitiva della proposta, la risultante equazione sarebbe identica; e però, siccome la derivata $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$ vi è nel solo modo anzidetto cioè nel solo modo visibile, così una tale sostituzione dovrà annullare separatamente le due quantità

$$A-\frac{f'(q)}{f'(p)}-B\frac{f'(p)}{f'(q)},$$

$$\frac{1}{f'(p)}\big(f'(x)+pf'(z)\big)+\frac{B}{f'(q)}\big(f'(y)+qf'(z)\big)-C;$$

vale a dire, la funzione $f(x, y, z, p, q)$ dovrà essere tale, da soddisfare entrambe le equazioni seguenti

$$A-\frac{f'(q)}{f'(p)}-B\frac{f'(p)}{f'(q)}=0,$$

(1)--- $\frac{1}{f'(p)}\big(f'(x)+pf'(z)\big)+\frac{B}{f'(q)}\big(f'(y)+qf'(z)\big)-C=0.$

369. La prima di queste due equazioni, o la sua equivalente

$$\left(\frac{f'(q)}{f'(p)}\right)^2-A\left(\frac{f'(q)}{f'(p)}\right)+B=0,$$

dà $\frac{f'(q)}{f'(p)}=\frac{1}{2}A\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2-B\right)}$, cioè equivale essa alle due

$$f'(q)-Mf'(p)=0,\ f'(q)-Nf'(p)=0,$$

dove $M=\frac{1}{2}A+\sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2-B\right)}$, ed $N=\frac{1}{2}A-\sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2-B\right)}$.

E per tanto la funzione f, che rende la equazione $f(x, y, z, p, q)=0$ primitiva della proposta, dovrà soddisfare l'una o l'altra delle due seguenti coppie d'equazioni

$$f'(q)-Mf'(p)=0,$$

$$\frac{1}{f'(p)}\big(f'(x)+pf'(z)\big)+\frac{B}{f'(q)}\big(f'(y)+qf'(z)\big)-C=0;$$

$$f'(q)-Nf'(p)=0,$$

$$\frac{1}{f'(p)}\big(f'(x)+pf'(z)\big)+\frac{B}{f'(q)}\big(f'(y)+qf'(z)\big)-C=0.$$

370. Comincerò a determinare la $f(x,y,z,p,q)$, che soddisfa la prima coppia delle ultime equazioni qui esposte. La

$$f'(q)-Mf'(p)=0$$

è una equazione, nella quale le variabili sono p,q, ed f; ed è alle derivate parziali $f'(q)$, $f'(p)$ del primo ordine; e però la sua primitiva generale avrassi colla regola esposta nel § 347.

Si costituiscano per tanto le due equazioni

$$p'+Mq'=0,\ f'=0$$

alle derivate ordinarie, ove le variabili sono p,q,f, e la f vi è nel solo modo visibile: trovisi la primitiva completa della prima, e sia $F(p,q)=a$; a esprime la costante arbitraria, e la $F(p,q)$ una funzione conosciuta delle sue componenti, fra le quali vi sono p,q; e la primitiva generale della

$$f'(q)-Mf'(p)=0$$

sarà $f=\psi(F)$ evidentemente; giacchè la primitiva completa della $f'=0$ è f *eguale* ad una costante arbitraria: dove $\psi(F)$ ossia $\psi\big(F(p,q)\big)$ significa una funzione arbitraria della $F(p,q)$. Quindi la $f(x,y,z,p,q)=0$,

supposta primitiva della proposta, dovrà essere

$$\psi\big(F(p,q)\big)=0.$$

Questa equazione sciolta rispetto alla F darà $F(p,q)$ eguale ad una funzione arbitraria delle altre quantità esistenti in essa, fra le quali vi sono od almeno vi possono essere le x,y,z; e per tanto, chiamata questa funzione $\phi(x,y,z)$ la equazione

$f(x,y,z,p,q)=0$ ridurrassi $F(p,q)-\phi(x,y,z)=0$.

371. Rimane a determinarsi la funzione $\phi(x,y,z)$, perchè sia soddisfatta la equazione (1) (§ 368) cioè la

$$\frac{1}{f'(p)}\big(f'(x)+pf'(z)\big)+\frac{B}{f'(q)}\big(f'(y)+qf'(z)\big)-C=0.$$

In questa si pongano in vece delle $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(z)$, $f'(p)$, $f'(q)$ i loro valori

$$F'(x)-\phi'(x),\ F'(y)-\phi'(y),\ F'(z)-\phi'(z),\ F'(p),\ F'(q),$$

che si hanno per essere $f=F(p,q)-\phi(x,y,z)$; e si avrà una equazione tra le x,y,z,p,q; e nella risultante sostituiscasi il valore della p ovvero quello della q cavato dalla

$$F(p,q)-\phi=0;$$

risulterà, nel primo caso una equazione tra le sole quantità

$$x,y,z,q,\phi,\phi'(x),\phi'(y),\phi'(z),$$

e nel secondo tra le

$$x,y,z,p,\phi'(x),\phi'(y),\phi'(z),\phi.$$

Si determini la ϕ, ossia si disponga di questa funzione, perchè, o la prima di queste ultime due equazioni ottenute rimanga soddisfatta indipendentemente dalla q sua componente, ovvero perchè rimanga soddisfatta la seconda di esse indipendentemente dalla p. Ogni valore della ϕ, funzione delle sole x, y, z, che abbia l'una o l'altra di queste ultime proprietà, le quali sono affatto equivalenti, ridurrà la equazione

$$F(p,q)-\phi(x,y,z)=0$$

ad essere una primitiva della

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+A\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+B\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+C=0.$$

Facendo per l'altra coppia di equazioni cioè per le

$$f'(q)-Nf'(p)=0,$$
$$\frac{1}{f'(p)}(f'(x)+f'(z))+\frac{B}{f'(q)}(f'(y)+qf'(z))-C=0$$

ciò che si è fatto per la coppia già contemplata, si avrà o si avranno, generalmente parlando, altre primitive della equazione proposta. Dico generalmente parlando, perchè la proposta equazione può essere così formata, che esista significato per la funzione $\phi(x,y,z)$ onde soddisfare una delle dette coppie di equazioni, e non esista significato per soddisfare l'altra; anzi talvolta la proposta equazione è tale, che non vi è significato per la $\phi(x,y,z)$, onde soddisfare nè l'una nè l'altra delle medesime anzidette coppie di equazioni, per cui la proposta in tali casi non ammette o non ha primitive del primo ordine.

372. Credo bene di esporre i seguenti esempj.

Esempio primo. Vogliasi la primitiva della equazione

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+A\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+B\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+C=0,$$

nella ipotesi che le A, B, C siano costanti.

Essendo

$$M=\frac{1}{2}A+\sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2-B\right)},\ \text{ed}\ N=\frac{1}{2}A-\sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2-B\right)}$$

le M, N saranno anch'esse due costanti; e però la

$$f(x,y,z,p,q)$$

soddisfacente la equazione

$$f'(q)-Mf'(p)=0$$

sarà $p+Mq-\phi(x,y,z)$, la quale dà

$$f'(x)=-\phi'(x),\ f'(y)=-\phi'(y),\ f'(z)=-\phi'(z),$$
$$f'(p)=1,\ f'(q)=M.$$

Questi valori delle derivate della f, sostituiti nella equazione (1), danno la

$$\phi'(x)+p\phi'(z)+\frac{B}{M}(\phi'(y)+q\phi'(z))+C=0,$$

la quale, per essere $B=MN$, e $p=\phi-Mq$, si riduce

$$\phi'(x)+N\phi'(y)+\phi\cdot\phi'(z)+C+q(N-M)\phi'(z)=0.$$

Per soddisfare questa equazione con un valore della ϕ indipendente dalla q si richiede la sussistenza delle due

$$\phi'(z)=0,\ \phi'(x)+N\phi'(y)+\phi\cdot\phi'(z)+C=0$$

la prima delle quali dà $\phi=\pi(x,y)$ funzione delle sole x, y; e riduce la seconda alla

$$\pi'(x)+N\pi'(y)+C=0,$$

la cui primitiva generale (§ 347) somministra

$$\pi=-Cx+\psi(y-Nx),$$

ove $\psi(y-Nx)$ esprime una funzione arbitraria del binomio $y-Nx$. Quindi una primitiva della attuale proposta sarà

$$p+Mq+Cx-\psi(y-Nx)=0.$$

Facendo per l'altra coppia d'equazioni delle due a contemplarsi ciò, che abbiamo fatto per la prima di esse, trovasi, che la proposta ha anco per primitiva la

$$p+Nq+Cx-\xi(y-Mx)=0,$$

dove $\xi(y-Mx)$ esprime una funzione arbitraria del binomio $y-Mx$.

Esempio secondo. La equazione proposta sia la

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)-2\frac{p}{q}\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)+\frac{p^2}{q^2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=0.$$

Per questa si ha $A=-2\frac{p}{q}$, $B=\frac{p^2}{q^2}$, e $C=0$; e però

$$M=N=-\frac{p}{q};$$

dimodochè la funzione f, che rende la equazione

$$f(x,y,z,p,q)=0$$

primitiva della attuale proposta deve soddisfare la

$$f'(q)+\frac{p}{q}f'(p)=0.$$

oltre la (1).

La prima di queste equazioni ha evidentemente per primitiva generale $p-q\phi(x,y,z)=0$; cioè dev'essere $f=p-q\phi$, e però

$$f'(x)=-q\phi'(x),\ f'(y)=-q\phi'(y),$$
$$f'(z)=-q\phi'(z),\ f'(p)=1,\ f'(q)=-\phi;$$

per cui l'equazione (1) riducesi

$$q\phi'(x)+pq\phi'(z)-\frac{p^2}{q^2\phi}\left(q\phi'(y)+q^2\phi'(z)\right)=0,$$

la quale per la sostituzione di $q\phi$ in vece di p dà la

$$q\left(\phi'(x)-\phi\cdot\phi'(y)\right)=0.$$

Questa equazione si soddisfa indipendentemente dalla q, determinando la funzione $\phi(x,y,z)$ colla seguente

$$\phi'(x)-\phi\cdot\phi'(y)=0.$$

Essendo la ϕ tuttora funzione delle tre variabili x, y, z, per trovare la primitiva generale di quest'ultima equazione, stabiliscansi le tre (§ 365)

$$y'+\phi x'=0,\ z'=0,\ \phi'=0$$

alle derivate ordinarie x', y', z', ϕ'; si trovino le loro primitive complete, e si avranno le

$$y+cx=a,\ z=b,\ \phi=c$$

dove a, b, c esprimono le costanti arbitrarie; e la primitiva generale della

$$\phi'(x)-\phi\cdot\phi'(y)=0,$$

pel paragrafo dianzi citato, sarà

$$\phi=\psi(z,y+x\phi),$$

dove $\psi(z,y+x\phi)$ esprime una funzione arbitraria delle quantità z, $y+x\phi$.

Quindi la primitiva della attuale proposta equazione sarà la risultante dalla eliminazione della ϕ dalle due

$$p-q\phi=0,\ \phi-\psi(z,y+x\phi)=0$$

cioè la seguente

$$p-q\psi\left(z,y+x\frac{p}{q}\right)=0;$$

ove la ψ significa una funzione affatto arbitraria delle z, $y+x\dfrac{p}{q}$.

Di questa primitiva sono casi particolari le

$$p-q\psi(z)=0,\ x\frac{p}{q}+y-\psi(z)=0,$$

che dà il metodo di Monge.

Esempio terzo. La proposta sia

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+\frac{4}{x+y}p=\text{o}.$$

Sarà $A=\text{o}$, $B=-\text{1}$, e $C=\frac{4}{x+y}p$, e però $M=\text{1}$, ed $N=-\text{1}$.

Questi valori delle M, N riducono le due equazioni

$$f'(q)-Mf'(p)=\text{o},\ f'(q)-Nf'(p)=\text{o} \text{ alle}$$
$$f'(q)-f'(p)=\text{o},\ f'(q)+f'(p)=\text{o},$$

le cui primitive generali sono evidentemente

$$p+q-\phi(x,y,z)=\text{o},\ p-q-\Delta(x,y,z)=\text{o};$$

cioè, affinchè la equazione $f(x,y,z,p,q)=\text{o}$ sia primitiva della proposta, dev'essere

$$f=p+q-\phi, \text{ ovvero } f=p-q-\Delta,$$

dove ϕ, Δ esprimono, sino ad ora, due funzioni arbitrarie delle x, y, z.

Il primo di questi valori della f, sostituito nella (1), dà una equazione, che si riduce alla seguente col porvi $\phi-p$ in vece di q

$$\phi'(x)-\phi'(y)-\phi\phi'(z)+p\left(2\phi'(z)+\frac{4}{x+y}\right)=\text{o},$$

la quale per essere soddisfatta richiede la sussistenza delle due

$$\phi'(z)+\frac{2}{x+y}=\text{o},\ \phi'(x)-\phi'(y)-\phi\phi'(z)=\text{o}.$$

Dalla prima di queste equazioni si ha

$$\phi=-\frac{2z}{x+y}+\lambda(x,y),$$

dove λ esprime una funzione delle sole x, y o non contenente la z; per cui la seconda si riduce alla

$$\lambda'(x)-\lambda'(y)+\frac{2}{x+y}\lambda-\frac{4z}{x+y}=\text{o},$$

che non si può soddisfare con un valore della λ funzione delle sole x, y, come si richiederebbe.

E per tanto la f non può avere la forma $p+q-\phi(x,y,z)$.

Sostituendo nella equazione (1) il secondo valore sopra esposto della f cioè il $p-q-\Delta$ e nella risultante ponendo $p-\Delta$ in vece di q, trovasi la

$$\Delta'(x)+\Delta'(y)-\Delta'(z)\cdot\Delta+p\left(2\Delta'(z)+\frac{4}{x+y}\right)=\text{o};$$

per cui dovrà essere

$$\Delta'(z)+\frac{2}{x+y}=\text{o}, \text{ ed anco } \Delta'(x)+\Delta'(y)-\Delta'(z)\cdot\Delta=\text{o}.$$

La prima di queste equazioni dà

$$\Delta=-\frac{2z}{x+y}+\xi(x,y),$$

valore che riduce la seconda alla

$$\xi'(x)+\xi'(y)+\frac{2}{x+y}\xi=\text{o},$$

la cui primitiva generale somministra

$$\xi=\frac{1}{x+y}\vartheta(y-x)$$

ove $\vartheta(y-x)$ esprime una funzione arbitraria del binomio $y-x$: e per tanto avrassi

$$\phi=-\frac{2z}{x+y}+\frac{1}{x+y}\vartheta(y-x).$$

Quindi la equazione

$$p-q+\frac{2z}{x+y}-\frac{1}{x+y}\vartheta(y-x)=\text{o}$$

sarà una primitiva della proposta attuale.

Esempio quarto. Abbiasi la equazione

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+A\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+B\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+a\left(\frac{dz}{dx}\right)+b\left(\frac{dz}{dy}\right)+cz=0,$$

dove le A, B, a, b, c siano costanti.

Paragonata questa equazione alla generale, si ha visibilmente

$C=ap+bq+cz$, e sì l'M che l'N costanti.

Per le equazioni

$$f'(q)-Mf'(p)=0,\ f'(q)-Nf'(p)=0$$

dev'essere

$f=p+Mq-\phi(x,y,z)$, ed $f=p+Nq-\Delta(x,y,z)$, ove le ϕ, Δ esprimono al solito due funzioni delle x,y,z.

Il primo di questi valori della f riduce la equazione (1), a soddisfarsi, alla

$$\phi'(x)+N\phi'(y)+\phi\cdot\phi'(z)+a\phi+cz$$
$$+q\big(N\phi'(z)+b-M\phi'(z)-aM\big)=0;$$

e però la ϕ dovrà soddisfare le due seguenti

$$(N-M)\phi'(z)-aM+b=0,$$
$$\phi'(x)+N\phi'(y)+\phi\phi'(z)+a\phi+cz=0.$$

Dalla prima di queste equazioni hassi

$$\phi(x,y,z)=hz+\xi(x,y),$$

dove h è posta per semplicità in vece di $\frac{aM-b}{N-M}$, e la ξ è una funzione arbitraria: questo valore della ϕ posto nella seconda delle medesime ultime equazioni, dà la

$$\xi'(x)+N\xi'(y)+(a+h)\xi+(h^2+ah+c)z=0,$$

la quale per essere soddisfatta da un valore della ξ indipendente dalla z, siccome si richiede, è necessario che si annulli h^2+ah+c ossia

$$(b^2+a^2B-abA+cA^2-4Bc):(M-N)^2,$$

per essere $M+N=A$, $MN=B$, $M^2+N^2=A^2-2B$; cioè è d'uopo che sia identica la equazione

$$b^2+a^2B-abA+cA^2-4cB=0.$$

Ammessa quest'ultima relazione, trovasi

$$\xi=(a+h)x+\pi(y-Nx);$$

e però la primitiva richiesta sarebbe

$$q+Mq-hz-ax-hx-\pi(y-Nx)=0$$

dove $\pi(y-Nx)$ esprime una funzione arbitraria del binomio $y-Nx$.

La relazione necessaria tra le A, B, a, b, c dianzi trovata, significa, che la equazione

$$\alpha^2+A\alpha\beta+B\beta^2+a\alpha+b\beta+c=0$$

è decomponibile in due fattori di primo grado, qualunque siano α, β.

Conseguenze analoghe alle qui esposte si trovano contemplando l'altro valore della funzione f, cioè il $p+Nq-\Delta(x,y,z)$.

In ultimo applichiamo la medesima regola sopra esposta alla ricerca delle primitive della equazione

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)-\frac{2}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)=0.$$

Essa, paragonata alla generale, dà $A=0$, $B=-1$, e $C=-\frac{2}{x}p$; e però sarà $M=1$, ed $N=-1$; e le due equazioni

$$f'(q)-Mf'(p)=0,\ f'(q)-Nf'(p)=0$$

si riducono alle

$$f'(q)-f'(p)=0,\ f'(q)+f'(p)=0.$$

Comincerò a considerare la prima: essa richiede $f=q+p-\phi(x,y,z)$; e questo valore della f riduce la equazione (1) alla

$$\phi'(x)-\phi'(y)-\phi\phi'(z)+p\left(2\phi'(z)-\frac{2}{x}\right)=0;$$

e però la funzione $\phi(x,y,z)$ dovrebbe soddisfare le due equazioni

$$\phi'(z)-\frac{1}{x}=0,\ \phi'(x)-\phi'(y)-\phi\cdot\phi'(z)=0.$$

La prima delle quali dà $\phi=\frac{z}{x}+\lambda(x,y)$, valore che riduce la seconda alla

$$\lambda'(x)-\lambda'(y)-\frac{\lambda}{x}-\frac{2z}{x}=0,$$

la quale non si può soddisfare colla λ indipendente dalla z.

Passo a considerare la $f'(q)+f'(p)=0$: questa somministra $p-q+\Delta(x,y,z)$ per valore della $f(x,y,z,p,q)$, il quale riduce la equazione (1) alla

$$\Delta'(x)+\Delta'(y)-\Delta\cdot\Delta'(z)+p\left(2\Delta'(z)-\frac{2}{x}\right)=0,$$

che si decompone nelle due

$$\Delta'(z)-\frac{1}{x}=0,\ \Delta'(x)+\Delta'(y)-\Delta\cdot\Delta'(z)=0.$$

La prima dà $\Delta=\frac{z}{x}+\vartheta(x,y)$, per cui la seconda si ridurrebbe alla

$$\vartheta'(x)+\vartheta'(y)-\frac{\vartheta}{x}-2z=0,$$

la quale pure non si può soddisfare, col determinare la ϑ semplice funzione delle x,y.

Concludiamo per tanto, che non vi è equazione della forma $f(x,y,z,p,q)=0$ ossia alle derivate prime parziali, la quale soddisfaccia la proposta attuale alle derivate seconde parziali.

Col metodo esposto per trovare le primitive del primo ordine della equazione

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+A\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)+B\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+C=0$$

si possono trovare le analoghe primitive del primo ordine di qualsivoglia equazione alle derivate del second' ordine, ed anco di quelle degli ordini superiori: ciò si vedrà in altra occasione.

PARTE DECIMA

CALCOLO DELLE VARIAZIONI, E MASSIMI E MINIMI VALORI DELLE PRIMITIVE DEFINITE.

LEZIONE PRIMA

Delle variazioni delle funzioni di una sola variabile.

373. La $\psi(x,\nu)$ esprima una funzione delle variabili indipendenti x, ν, il cui valore $\psi(x,\text{o})$ cioè il corrispondente alla $\nu=\text{o}$, risulti $\phi(x)$ funzione della x; e lo sviluppo ordinato secondo le potenze della ν riesca

$$\phi(x)+\nu\psi'(\text{o})+\frac{\nu^2}{2}\psi''(\text{o})+\text{ecc.}$$

Le quantità $\psi'(\text{o})$, $\psi''(\text{o})$, - - -, che sono quei valori delle derivate parziali

$$\left(\frac{d\psi(x,\nu)}{d\nu}\right),\ \left(\frac{d^2\psi(x,\nu)}{d\nu^2}\right),\ ---,$$

i quali corrispondono alla $\nu=\text{o}$, si indicheranno coi simboli $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$, - - - e si chiameranno *variazioni* della funzione $\phi(x)$ e ordinatamente variazione *prima*, *seconda*, - - -. Così, la

$$\psi(x,\nu)\ \text{ossia}\ \phi(x)+\nu\,\dot{\phi}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{\phi}+\text{ecc.}$$

chiamerassi *la variata* della stessa $\phi(x)$; e la variabile ν, per evitare la confusione, chiamerassi talvolta *quantità indeterminata* o semplicemente *indeterminata*.

374. La variazione prima della $\phi(x)$ può essere, ed in generale sarà, una funzione arbitraria della x. Di fatto, $\xi(x)$ esprima una funzione qualsivoglia della x ed indipendente dalla $\phi(x)$.

Si ponga la variata della $\phi(x)$ cioè $\psi(x,\nu)$ eguale a

$$\phi(x)+\nu\,\xi(x)+\lambda(x,\nu),$$

ove $\lambda(x,\nu)$ sia tal funzione che, il valore di essa e quello della sua derivata $\left(\frac{d\lambda(x,\nu)}{d\nu}\right)$ corrispondenti alla $\nu=\text{o}$, siano entrambi *nulli*.

Questa variata della $\phi(x)$ dà evidentemente

$$\left(\frac{d\psi(x,\nu)}{d\nu}\right)=\xi(x)+\left(\frac{d\lambda(x,\nu)}{d\nu}\right);$$

e però, essendo *zero* il valore di $\left(\frac{d\lambda(x,\nu)}{d\nu}\right)$ corrispondente alla $\nu=\text{o}$, sarà $\psi'(\text{o})$ ossia $\dot{\phi}=\xi(x)$ cioè la variazione della $\phi(x)$ eguale alla $\xi(x)$ funzione qualsivoglia della x. Altrettanto ha luogo per le variazioni degli ordini superiori; anzi tutto ciò si può ritenere per evidente, giacchè infinite possono essere le variate della $\phi(x)$.

Ammetteremo, come succede generalmente, che le variate delle derivate $\phi'(x)$, $\phi''(x)$, - - - siano

$$\left(\frac{d\psi(x,\nu)}{dx}\right),\ \left(\frac{d^2\psi(x,\nu)}{dx^2}\right),\ ---,$$

cioè che siano le derivate, prese rispetto anch'esse alla x, della $\psi(x,\nu)$ variata della $\phi(x)$.

375. Essendo le variazioni delle derivate $\phi'(x)$, $\phi''(x)$, - - -, i valori delle quantità

$$\left(\frac{d^2\psi(x,\nu)}{dx\,d\nu}\right),\ \left(\frac{d^3\psi(x,\nu)}{dx^2 d\nu}\right),\ ---$$

corrispondenti alla $\nu = 0$, e queste identiche alle $\left(\frac{d\dot{\psi}'(\nu)}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2\dot{\psi}'(\nu)}{dx^2}\right)$, --- i cui valori corrispondenti alla $\nu = 0$ sono

$$\left(\frac{d\,\dot{\phi}}{dx}\right),\ \left(\frac{d^2\,\dot{\phi}}{dx^2}\right),\ ---$$

risulta, che, le variazioni delle derivate $\phi'(x), \phi''(x)$,--- sono identiche alle analoghe derivate della variazione $\dot{\phi}$. Ed in generale, si può ritenere, che, la variazione *n esima* della derivata *m esima* di qualunque funzione della x, è identica alla derivata *m esima* della variazione *n esima* della stessa funzione.

Le variazioni delle derivate e le derivate delle variazioni della $\phi(x)$ si indicheranno coi simboli

$$\dot{\phi}',\ \dot{\phi}'',\ ---\ \ddot{\phi}',\ \ddot{\phi}'',\ ---.$$

376. Se il valore della variata $\phi(x, \nu)$ corrispondente alla $x = a$ dovesse eguagliare $\phi(a)$ avrebbesi $\phi_a + \nu\,\dot{\phi}_a + \frac{\nu^2}{2}\ddot{\phi}_a + \text{ecc.} = \phi_a$ qualunque sia l'indeterminata ν; e però sarebbero $\dot{\phi}_a = 0$, $\ddot{\phi}_a = 0$, --- cioè sarebbero *nulli* i valori delle variazioni $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$, --- corrispondenti alla $x = a$.

Così, se il valore della $\left(\frac{d^n\phi(x,\nu)}{dx^n}\right)$ corrispondente alla $x = a$ dovesse eguagliare $\phi_a^{(n)}$, avrebbonsi $\dot{\phi}_a^{(n)} = 0$, $\ddot{\phi}_a^{(n)} = 0$, ---; vale a dire i valori delle variazioni della $\phi^{(n)}(x)$ corrispondenti alla $x = a$ sarebbero *nulli*.

Similmente, si osservi che i valori di alcune o di tutte le

$$\phi(x,\nu),\ \left(\frac{d\phi(x,\nu)}{dx}\right),\ \left(\frac{d^2\phi(x,\nu)}{dx^2}\right),\ ---\left(\frac{d^n\phi(x,\nu)}{dx^n}\right)$$

corrispondenti ad uno, o a due, --- valori individuati della x possono essere eguali ordinatamente a quelli delle

$$\phi(x),\ \phi'(x),\ \phi''(x),\ ---\ \phi^{(n)}(x)$$

corrispondenti rispettivamente agli stessi della x, come abbiamo supposto dianzi, e non ostante rimanere affatto arbitrarj i valori delle variazioni $\dot{\phi}, \dot{\phi}', \dot{\phi}''$, --- $\dot{\phi}^{(n)}$; $\ddot{\phi}, \ddot{\phi}', \ddot{\phi}''$, --- $\ddot{\phi}^{(n)}$; --- corrispondenti agli altri infiniti valori della x. Ciò si rende manifestissimo intendendo colle $x, \phi(x)$ le coordinate di una linea; giacchè infinite sono le linee, che possono passare per due o più punti corrispondenti a coordinate date.

377. Se in una espressione formata con una, o due, o più quantità, le quali siano altrettante variabili, od anco alcune siano le derivate delle altre di esse, si cambieranno queste medesime quantità nelle rispettive variate, la espressione risultante, si chiamerà la *variata* della prima; e se tal variata si svilupperà in serie ordinata secondo le potenze della indeterminata, che entra nelle variate delle sue componenti, il coefficiente della prima potenza di questa indeterminata esistente nello sviluppo si chiamerà variazione prima della medesima espressione, il coefficiente della metà del quadrato della stessa indeterminata si chiamerà variazione seconda della stessa espressione; e così di seguito.

Queste variazioni si indicheranno con simboli analoghi a quelli già usati per indicare le variazioni della $\phi(x)$; per esempio, se la espressione sarà indicata colla Q, le sue variazioni si indicheranno coi simboli $\dot{Q}$, $\ddot{Q}$, - - -; dimodochè la variata della Q sarà

$$Q + \nu\dot{Q} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{Q} + \text{ecc.},$$

ritenuta ν la indeterminata.

378. Ciò premesso, passiamo a trovare le variazioni, che occorrono in molte occasioni; e cominciamo a trovare quella della funzione $f(x, y, y', y'', ---)$, supposto che, esse variazioni, traggano origine dalla variata della y.

Nella funzione $f(x, y, y', y'', ---)$ si ponga in vece della y la $y + \nu\dot{y} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{y} + \text{ecc.}$ sua variata, ed in vece delle $y', y'', ---$ si pongano ordinatamente

$$y' + \nu\dot{y}' + \frac{\nu^2}{2}\ddot{y}' + \text{ecc.},\ y'' + \nu\dot{y}'' + \frac{\nu^2}{2}\ddot{y}'' + \text{ecc.},\ ---,$$

che sono le derivate, prima, seconda, - - - della stessa variata della y; e si avrà

$$f\Big(x, y + \nu\dot{y} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{y} + \text{ecc.},\ y' + \nu\dot{y}' + \frac{\nu^2}{2}\ddot{y}' + \text{ecc.},$$
$$y'' + \nu\dot{y}'' + \frac{\nu^2}{2}\ddot{y}'' + \text{ecc.},\ ---\Big).$$

Quest' ultima quantità suppongasi eguale alla

$$f + \nu\dot{f} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{f} + \text{ecc.}$$

e le $\dot{f}, \ddot{f}$, - - - saranno le variazioni della f.

Sviluppando effettivamente la variata della

$$f(x, y, y', y'', ---)$$

colla regola esposta al § 41, ed eguagliando questo sviluppo a quello supposto dianzi, si ottengono

$$\dot{f} = f'(y)\,\dot{y} + f'(y')\,\dot{y}' + f'(y'')\,\dot{y}'' + \text{ecc.},$$

$$\ddot{f} = f''(y)\,\dot{y}^2 + f''(y')\,\dot{y}'^2 + f''(y'')\,\dot{y}''^2 + \text{ecc.} +$$

$$2\dot{y}\dot{y}'\left(\frac{d^2f}{dy\,dy'}\right) + 2\left(\frac{d^2f}{dy\,dy''}\right)\dot{y}\dot{y}'' + 2\left(\frac{d^2f}{dy'\,dy''}\right)\dot{y}'\dot{y}'' + \text{ecc.} +$$

$$f'(y)\,\ddot{y} + f'(y')\,\ddot{y}' + f'(y'')\,\ddot{y}'' + \text{ecc.}$$

$$+ \text{ecc.} + \text{ecc.}$$

cioè gli sviluppi delle variazioni $\dot{f}, \ddot{f}$, - - -, ossia le variazioni richieste.

379. Vogliansi in secondo luogo le variazioni della funzione

$$f(x, y, z, ---\ x', y', z', ---\ x'', y'', z'', ---);$$

ove le derivate x', y', z', x'', - - - sono tutte prese rispetto ad una medesima qualsivoglia variabile, e le variate delle x, y, z, - - - siano

$$x + \nu\dot{x} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{x} + \text{ecc.},\quad y + \nu\dot{y} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{y} + \text{ecc.},$$

$$z + \nu\dot{z} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{z} + \text{ecc.},\ ---.$$

Sostituendo nella f attuale in vece delle x, y, z, - - - le loro variate, ed in luogo delle x', y', z', - - - x'', y'', z'', - - -, - - - le derivate delle stesse variate delle x, y, z, - - -, e sviluppando la quantità risultante cioè la variata della f, ed eguagliando lo sviluppo effettivo all' $f + \nu\dot{f} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{f} + \text{ecc.}$ si hanno le variazioni richieste cioè

$$\dot{f}=f'(x)\dot{x}+f'(x')\dot{x}'+f'(x'')\dot{x}''+\text{ecc.}$$
$$+f'(y)\dot{y}+f'(y')\dot{y}'+f'(y'')\dot{y}''+\text{ecc.}$$
$$+f'(z)\dot{z}+f'(z')\dot{z}'+f'(z'')\dot{z}''+\text{ecc.}+\text{ecc.},$$

$$\ddot{f}=f'(x)\ddot{x}+f'(x')\ddot{x}'+\text{ecc.}+f'(y)\ddot{y}+f'(y')\ddot{y}'+\text{ecc.}$$
$$+f'(z)\ddot{z}+f'(z')\ddot{z}'+\text{ecc.}$$
$$+f''(x)\dot{x}^2+f''(x')\dot{x}'^2+\text{ecc.}+f''(y)\dot{y}^2+f''(y')\dot{y}'^2+\text{ecc.}$$
$$+f''(z)\dot{z}^2+f''(z')\dot{z}'^2+\text{ecc.}$$
$$+2\dot{x}\dot{x}'\left(\frac{d^2f}{dxdx'}\right)+\text{ecc.}+2\dot{x}\dot{y}\left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)+\text{ecc.}+\text{ecc.}$$
$$+\text{ecc.}$$

Osservando, come sono formati gli sviluppi delle variazioni $\dot{f}$, $\ddot{f}$, - - - e l'analogia che ha luogo tra essi e quelli delle derivate della f, agevolmente comprenderassi, come desumerli immediatamente dalla stessa funzione f.

Per quello che abbiamo esposto nel paragrafo 253, la variazione *prima* della f è riducibile alla forma

$$\dot{x}X+\dot{y}Y+\dot{z}Z+\text{ecc.}+T',$$

posto
$$X=f'(x)-f'(x')'+f'(x'')''-\text{ecc.}$$
$$Y=f'(y)-f'(y')'+f'(y'')''-\text{ecc.}$$
$$Z=f'(z)-f'(z')'+f'(z'')''-\text{ecc.}$$
ecc. - - -

e
$$T=\dot{x}\overset{1}{X}+\dot{x}'\overset{2}{X}+\text{ecc.}+\dot{y}\overset{1}{Y}+\dot{y}'\overset{2}{Y}+\text{ecc.}$$
$$+\dot{z}\overset{1}{Z}+\dot{z}'\overset{2}{Z}+\text{ecc.}+\text{ecc.},$$

dove
$$\overset{1}{X}=f'(x')-f'(x'')'+\text{ecc.},\quad \overset{2}{X}=f'(x'')-\text{ecc.},\ ---$$
$$\overset{1}{Y}=f'(y')-f'(y'')'+\text{ecc.},\quad \overset{2}{Y}=f'(y'')-\text{ecc.},\ ---$$
$$\overset{1}{Z}=f'(z')-f'(z'')'+\text{ecc.},\quad \overset{2}{Z}=f'(z'')-\text{ecc.},\ ---$$
- -.

Se la variabile principale sarà la x, cioè se $x'=1$, $x''=0$, $x'''=0$, - - -; e che la variata della $f(x, y, z, --- y', z', ---)$ sia ciò, che si ha, cambiando le y, z, - - - e le loro derivate nelle rispettive variate, proposizione di cui è un caso particolare quella contemplata nel paragrafo antecedente, le corrispondenti $\dot{f}$, $\ddot{f}$, - - - si potranno desumere evidentemente dalle qui esposte, ommettendo, in queste, tutti i termini contenenti le $\dot{x}$, $\dot{x}'$, $\dot{x}''$, - - -, facendo negli altri $x'=1$, $x''=0$, - - -, e riportando le derivate, già prese rispetto alla variabile qualunque, alla x medesima.

380. Le derivate parziali $f'(x), f'(x'), --- f'(y), f'(y'), ---$ siano ordinatamente denominate $A, B, --- E, F, ---$; e si avrà

$$\dot{f}=A\dot{x}+B\dot{x}'+\text{ecc.}+E\dot{y}+F\dot{y}'+\text{ecc.}+\text{ecc.},$$

e d'altronde (§ 25)

$$f'=Ax'+Bx''+\text{ecc.}+Ey'+Fy''+\text{ecc.}$$

Si formi la variazione di questo valore della derivata f'; ed avrassi

$$A\dot{x}'+x'\big(A'(x)\dot{x}+A'(x')\dot{x}'+\text{ecc.}+A'(y)\dot{y}+A'(y')\dot{y}'+\text{ecc.}+\text{ecc.}\big)+$$
$$B\dot{x}''+x''\big(B'(x)\dot{x}+B'(x')\dot{x}'+\text{ecc.}+B'(y)\dot{y}+B'(y')\dot{y}'+\text{ecc.}+\text{ecc.}\big)+\text{ecc.}+$$
$$E\dot{y}'+y'\big(E'(x)\dot{x}+E'(x')\dot{x}'+\text{ecc.}+E'(y)\dot{y}+E'(y')\dot{y}'+\text{ecc.}+\text{ecc.}\big)+$$
$$F\dot{y}''+y''\big(F'(x)\dot{x}+F'(x')\dot{x}'+\text{ecc.}+F'(y)\dot{y}+F'(y')\dot{y}'+\text{ecc.}+\text{ecc.}\big)+\text{ecc.}+\text{ecc.}$$

ossia
$$\dot{x}\big(A'(x)x'+B'(x)x''+\text{ecc.}+E'(x)y'+F'(x)y''+\text{ecc.}+\text{ecc.}\big)+$$
$$\dot{x}'\big(A+A'(x')x'+B'(x')x''+\text{ecc.}+E'(x')y'+F'(x')y''+\text{ecc.}+\text{ecc.}\big)+\text{ecc.}+$$
$$\dot{y}\big(A'(y)x'+B'(y)x''+\text{ecc.}+E'(y)y'+F'(y)y''+\text{ecc.}+\text{ecc.}\big)+$$
$$\dot{y}'\big(E+A'(y')x'+B'(y')x''+\text{ecc.}+E'(y')y'+F'(y')y''+\text{ecc.}+\text{ecc.}\big)+$$
$$\dot{x}''B+\dot{y}''F+\text{ecc.}$$

cioè
$$\dot{x}A'+\dot{x}'(A+B')+\text{ecc.}+\dot{y}E'+\dot{y}'(E+F')+\text{ecc.}$$

Ma quest'ultima quantità è evidentemente la derivata della

$$\dot{x}A + \dot{x}'B + \text{ecc.} + \dot{y}E + \dot{y}'F + \text{ecc.}$$

valore della variazione $\dot{f}$; adunque la derivata della $\dot{f}$ e la variazione della f' sono identiche, qualunque sia la funzione composta f.

581. La $f(x, x', x'', --- y, y', y'', ---)$ sia il prodotto $x'\phi(x, y, p, q, r, ---)$ dove

$$p = \frac{y'}{x'},\ q = \frac{p'}{x'},\ r = \frac{q'}{x'},\ ---\ \text{ossia}$$

$$p x' = y',\ q x' = p',\ r x' = q',\ ---;$$

cioè la f sia il prodotto della x' pel risultamento, che si ottiene, generalizzando le derivate nella funzione

$$\phi\big(x, y, y'(x), y''(x), ---\big).$$

Essendo $f = x'\phi$, si ha

$$\dot{f} = \dot{x}'\phi + x'\dot{\phi} = (\dot{x}\phi)' + x'\dot{\phi} - \dot{x}\phi':$$

d'altronde risulta evidentemente

$$\dot{\phi} = \phi'(x)\dot{x} + \phi'(y)\dot{y} + \phi'(p)\dot{p} + \phi'(q)\dot{q} + \phi'(r)\dot{r} + \text{ecc.},\ \text{e}$$

$$\phi' = \phi'(x)x' + \phi'(y)y' + \phi'(p)p' + \phi'(q)q' + \phi'(r)r' + \text{ecc.}$$

per cui si ha

$$x'\dot{\phi} - \dot{x}\phi' = (x'\dot{y} - \dot{x}y')\phi'(y) + (x'\dot{p} - \dot{x}p')\phi'(p)$$
$$+ (x'\dot{q} - \dot{x}q')\phi'(q) + (x'\dot{r} - \dot{x}r')\phi'(r) + \text{ecc.};$$

e però sarà

$$\dot{f} = (\dot{x}\phi)' + (x'\dot{y} - \dot{x}y')\phi'(y) + (x'\dot{p} - \dot{x}p')\phi'(p)$$
$$+ (x'\dot{q} - \dot{x}q')\phi'(q) + (x'\dot{r} - \dot{x}r')\phi'(r) + \text{ecc.}$$

Dalla eguaglianza $px' = y'$ si desume $x'\dot{p} + \dot{x}'p = \dot{y}'$ ossia $x'\dot{p} - p'\dot{x} = \dot{y}' - \dot{x}'p - p'\dot{x}$, cioè $x'\dot{p} - \dot{x}p' = (\dot{y} - \dot{x}p)'$, e però $\dot{p} - q\dot{x} = \frac{1}{x'}(\dot{y} - p\dot{x})'$. Così dalle eguaglianze $qx' = p'$, $rx' = q'$, $---$ si hanno le $\dot{q} - r\dot{x} = \frac{1}{x'}(\dot{p} - q\dot{x})'$, $\dot{r} - s\dot{x} = \frac{1}{x'}(\dot{q} - r\dot{x})'$, $---$.

E per tanto, posto $\dot{y} - p\dot{x} = u$, avransi

$$\dot{p} - q\dot{x} = \frac{u'}{x'},\ \dot{q} - r\dot{x} = \frac{1}{x'}\left(\frac{u'}{x'}\right)',$$

$$\dot{r} - s\dot{x} = \frac{1}{x'}\left(\frac{1}{x'}\left(\frac{u'}{x'}\right)'\right)',\ ---.$$

Sostituendo questi valori dei binomj $\dot{y} - p\dot{x}$, $\dot{p} - q\dot{x}$, $\dot{q} - r\dot{x}$, $---$ nel valore della $\dot{f}$ o nell'equivalente

$$(\dot{x}\phi)' + x'\left\{(\dot{y} - p\dot{x})\phi'(y) + (\dot{p} - q\dot{x})\phi'(p) + (\dot{q} - r\dot{x})\phi'(q) + (\dot{r} - s\dot{x})\phi'(r) + \text{ecc.}\right\},$$

questo si riduce

$$(\dot{x}\phi)' + x'\left\{\phi'(y)\,u + \phi'(p)\frac{u'}{x'} + \phi'(q)\frac{1}{x'}\left(\frac{u'}{x'}\right)' + \phi'(r)\frac{1}{x'}\left(\frac{1}{x'}\left(\frac{u'}{x'}\right)'\right)' + \text{ecc.}\right\}.$$

Ma per l'esposto al § 27 si ha

$$\phi'(p)\frac{u'}{x'} = \left(\frac{u'}{x'}\phi'(p)\right)' - u\left(\frac{1}{x'}\phi'(p)\right)',$$

$$\phi'(q)\frac{1}{x'}\left(\frac{u'}{x'}\right)' = \left(\frac{u'}{x'}\phi'(q)\right)' - \left(\frac{u}{x'}\left(\frac{\phi'(q)}{x'}\right)'\right)' + u\left(\frac{1}{x'}\left(\frac{\phi'(q)}{x'}\right)'\right)',$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -.$$

Adunque sarà

$$\dot{f} = x'u\left\{\phi'(y) - \left(\frac{\phi'(p)}{x'}\right)' + \left(\frac{1}{x'}\left(\frac{\phi'(q)}{x'}\right)'\right)' - \text{ecc.}\right\} + P',$$

ove P' esprime la somma di tutti quei termini componenti la $\dot{f}$, che sono derivate esatte.

Chiamisi V il moltiplicatore della $u\,x'$ visibile nella espressione qui trovata per la $\dot{f}$, e pongasi per u il suo valore $\dot{y} - p\,\dot{x}$; e si avrà

$$\dot{f} = x'(\dot{y} - \dot{x}p)V + P', \text{ ossia } \dot{f} = \dot{y}x'V - \dot{x}y'V + P'.$$

Eguagliando questo valore della $\dot{f}$ a quello esposto alla fine del paragrafo 379, si ha l'equazione

$$Vx'\dot{y} - Vy'\dot{x} + P' = X\dot{x} + Y\dot{y} + T,$$

la quale, dovendo essere identica, dà le due seguenti pure identiche $Vx' = Y$, $-Vy' = X$; e però sarà identica anco la equazione

$$Xx' + Yy' = 0.$$

Se la f contenesse in oltre $z, z', z'', ---$; e fosse eguale ad

$$x'\phi\,(x,\ y,\ p,\ q,\ r,\ ---\ z,\ p_1,\ q_1,\ r_1,\ ---),$$

ove le $p_1, q_1, r_1, ---$ sono rispetto alla z, ciò che le $p, q, r, ---$ sono rispetto alla y, si troverebbe, che dev' essere identica la equazione seguente

$$Xx' + Yy' + Zz' + Uu' = 0:$$

altrettanto ha luogo qualunque sia il numero delle variabili analoghe alle y, z.

382. Se la equazione che si ha, cambiando nella

$$F(x,\ x',\ x'',\ ---\ y,\ y',\ y'',\ ---\ z,\ z',\ z'',\ ---) = 0$$

le $x, y, z, ---$ nelle rispettive variate, sussiste, sussisteranno anco le $\dot{F} = 0$, $\ddot{F} = 0$, --- sue variazioni.

Di fatto, essendo la variata della F *zero*, cioè $F + v\,\dot{F} + \frac{v^2}{2}\ddot{F} + \text{ecc.} = 0$ qualunque sia la v, si hanno $\dot{F} = 0$, $\ddot{F} = 0$, ---. Anzi la $\ddot{F} = 0$ e le sue seguenti saranno conseguenze della $\dot{F} = 0$, per essere le variazioni prime delle $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, ---$ le seconde delle $x, y, z, ---$ e le variazioni prime delle $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, ---$ le seconde delle $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, ---$, ecc.

383. Vogliasi ora, la variazione prima della $f(x, x', x'', ---\ y, y', y'', ---\ z, z', z'', ---)$ ammesso, che le $x, x', ---\ y, y', ---\ z, z', ---$ abbiano la relazione espressa colla equazione

$$F(x,\ x',\ ---\ y,\ y',\ ---\ z,\ z',\ ---) = 0.$$

La variazione $\dot{f}$ sarà

$$f'(x)\dot{x} + f'(x')\dot{x}' + f'(x'')\dot{x}'' + \text{ecc.} + f'(y)\dot{y} + f'(y')\dot{y}' + f'(y'')\dot{y}'' + \text{ecc.} + f'(z)\dot{z} + \text{ecc.}$$

purchè le

$$\dot{x},\ \dot{x}',\ \dot{x}'',\ ---\ \dot{y},\ \dot{y}',\ \dot{y}'',\ ---\ \dot{z},\ \dot{z}',\ \dot{z}'',\ ---$$

abbiano la proprietà o relazione rappresentata dalla equazione

$$F'(x)\,\dot{x} + F'(x')\,\dot{x}' + \text{ecc.} + F'(y)\dot{y} + F'(y')\dot{y}' + \text{ecc.} + F'(z)\dot{z} + F'(z')\,\dot{z}' + \text{ecc.} = 0.$$

Dimodochè cavata dalla primitiva di questa equazione il valore di una delle variazioni $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ formata colle altre e le loro derivate, se occorrono, e sostituito questo valore nell'esposto sviluppo della $\dot{f}$, avrassi la variazione richiesta. Analogamente si procederà per avere la variazione della f, quando le equazioni analoghe alla $F=0$ siano due o più, purchè il numero loro sia minore almeno di *due* delle variabili inclusivamente a quella rispetto alla quale sono prese le derivate delle $x, y, z, ---$.

Così se si volesse la variazione della f, funzione delle $x, y, y', y'', ---$ implicita nella data equazione

$$F(x, y, x', y', x'', y'', --- f, f', ---) = 0$$

la quale contiene anco le $f', f'', ---$ derivate di esse funzioni; ecco come si potrebbe ottenerla.

Questa equazione dà la $\dot{F}=0$ cioè

$$F'(x)\dot{x}+F'(y)\dot{y}+F'(x')\dot{x}'+F'(y')\dot{y}'+F'(x'')\dot{x}''+\text{ecc.}$$
$$+F'(f)\dot{f}+F'(f')\dot{f}'+\text{ecc.}=0;$$

e però la difficoltà si riduce a trovare il valore della $\dot{f}$ avente quest'ultima proprietà. Limitiamci al caso, che la F contenga solamente la f e la f' sua derivata *prima*.

Pongasi per semplicità

$$\frac{1}{F'(f')}\left(F'(x)\dot{x}+F'(y)\dot{y}+F'(x')\dot{x}'+F'(y')\dot{y}'+\text{ecc.}\right)=A,$$

$$\frac{F'(f)}{F'(f')}=B;$$

e si avrà a trovare la $\dot{f}$ avente la proprietà

$$\dot{f}'+B\dot{f}+A=0.$$

Si potrebbe desumere da questa equazione la $\dot{f}$ colla regola esposta al paragrafo 278, ma stimo bene di desumerla col metodo seguente, che è quello usato comunemente.

Moltiplichisi questa equazione per λ funzione della x, ed osservisi, che $\lambda\dot{f}'=(\lambda\dot{f})'-\lambda'\dot{f}$, ed avrassi la

$$\lambda A+(\lambda\dot{f})'+(B\lambda-\lambda')\dot{f}=0.$$

Determinisi la λ talmente da soddisfare la equazione $\lambda'-B\lambda=0$, e sarà

$$A\lambda+(\lambda\dot{f})'=0 \text{ ossia } \lambda\dot{f}+\int A\lambda=0,$$

equazione che dà $\dot{f}=-\frac{1}{\lambda}\int A\lambda$; e però si conoscerà la variazione $\dot{f}$, quando si conoscerà la funzione λ.

La equazione $\lambda'-B\lambda=0$ somministra $\lambda=e^{\int B}$. Quindi sarà

$$\dot{f}=-e^{-\int B}\int A e^{\int B} \text{ cioè}$$

$$\dot{f}=-e^{-\int B}\int e^{\int B}\left(F'(x)\dot{x}+F'(y)\dot{y}+F'(x')\dot{x}'+F'(y')\dot{y}'\right.$$
$$\left.+F'(x'')\dot{x}''+\text{ecc.}\right)\frac{1}{F'(f')}:$$

ove la $\int B$ può essere primitiva particolare, purchè sia generale la primitiva della

$$e^{\int B}\left(F'(x)\dot{x}+F'(y)\dot{y}+F'(x')\dot{x}'+\text{ecc.}\right)\frac{1}{F'(f')}.$$

A questa espressione della f si suol dare un'altra forma, che è la seguente. Posto

$$\frac{F'(x)}{F'(f')}e^{\int B}=a,\ \frac{F'(y)}{F'(f')}e^{\int B}=b,\ \frac{F'(x')}{F'(f')}e^{\int B}=c,\ ---: \text{sarà}$$

$$\dot{f}=-e^{-\int B}\int(a\dot{x}+b\dot{y}+c\dot{x}'+d\dot{y}'+g\dot{x}''+h\dot{y}''+\text{ecc.}), \text{ cioè}$$

$$\dot{f}=-e^{-\int B}\int\left(\dot{x}(a-c'+g''-\text{ecc.})+\dot{y}(b-d'+h''-\text{ecc.})+\right.$$
$$\left.[\dot{x}(c-g'+\text{ecc.})+\dot{x}'(g-\text{ecc.})+\text{ecc.}+\dot{y}(d-h'+\text{ecc.})+\dot{y}'(h-\text{ecc.})+\text{ecc.}]'\right)$$

ossia

$$\dot{f}=-e^{-\int B}\int\left(\dot{x}(a-c'+g''-\text{ecc.})+\dot{y}(b-d'+h''-\text{ecc.})\right)$$

$$-e^{-\int B}\left(\dot{x}(c-g'+\text{ecc})+\dot{x}'(g-\text{ecc.})+\text{ecc.}+\dot{y}(d-h'+\text{ecc.})+\dot{y}'(h-\text{ecc.})+\text{ecc.}\right.$$

384. Molte volte accade che la variata della $\phi(x)$ in vece di essere $\psi(x,\nu)$, come abbiamo sino ad ora supposto, è $\psi(t,\nu)$ ove la t esprime la variata della x cioè $x+\nu\dot{x}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{x}+$ ecc.; in questi casi, ammesso

$$\psi(t,\nu)=\phi(x)+\nu\dot{\phi}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{\phi}+\text{ecc.},$$

le quantità $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$, - - - si chiamano anch'esse variazioni della $\phi(x)$, ma diconsi prese nella ipotesi, che la x abbia la sua variata; e sono esse differenti delle variazioni sopra considerate. Quando occorrerà di usare queste nuove variazioni, e contemporaneamente le già contemplate sopra, indicheremo quelle già contemplate coi simboli $(\dot{\phi})$, $(\ddot{\phi})$, - - -.

Essendo $\psi(t,\nu)$ ossia

$$\psi\left(x+\nu\dot{x}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{x}+\text{ecc.},\nu\right)=\phi+\nu\dot{\phi}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{\phi}+\text{ecc.},$$

la $\dot{\phi}$ sarà il valore, corrispondente alla $\nu=0$, del binomio

$$\psi'(t)\,t'(\nu)+\psi'(\nu).$$

Ma per essere

$$t=x+\nu\dot{x}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{x}+\text{ecc., si ha } t'(\nu)=\dot{x}+\frac{\nu}{2}\ddot{x}+\text{ecc.},$$

per cui i valori delle $\psi'(t)$, $t'(\nu)$, $\psi'(\nu)$, corrispondenti alla $\nu=0$, sono rispettivamente $\phi'(x)$, $\dot{x}$, $(\dot{\phi})$; adunque sarà

$$\dot{\phi}=(\dot{\phi})+\dot{x}\,\phi'(x).$$

Vale a dire, la variazione attuale della $\phi(x)$ è eguale a quella di essa sopra contemplata, *più* il prodotto della variazione della x per la derivata della $\phi(x)$ presa rispetto alla x medesima.

Passo ad esporre l'analoga relazione tra le due differenti variazioni della $\phi^{(n)}(x)$ derivata *n esima* della $\phi(x)$, ammesso che la variata di questa derivata sia $\left(\frac{d^n\psi(t,\nu)}{dt^n}\right)$ cioè la derivata *n esima* presa rispetto alla t della variata della stessa $\phi(x)$.

Pongasi $\left(\frac{d^n\psi}{dt^n}\right)=\xi(t,\nu)$; e per lo ammesso sarà

$$\xi(t,\nu)=\phi^{(n)}(x)+\nu\dot{\phi}^{(n)}(x)+\frac{\nu^2}{2}\ddot{\phi}^{(n)}(x)+\text{ecc.};$$

e però la $\dot{\phi}^{(n)}$ cioè la variazione della derivata *n esima* della $\phi(x)$ sarà il valore, corrispondente alla $\nu=0$, della derivata totale presa rispetto alla ν della $\xi(t,\nu)$, la quale risulta

$$\xi'(t)\,t'(\nu)+\xi'(\nu)\ \text{ ossia }\ \psi^{(n+1)}(t)\,t'(\nu)+\left(\frac{d^n\psi'(\nu)}{dt^n}\right).$$

Ma i valori delle $\psi^{(n+1)}(t)$, $t'(\nu)$, $\left(\frac{d^n\psi'(\nu)}{dt^n}\right)$, corrispondenti alla $\nu=0$, sono $\phi^{(n+1)}(x)$, $\dot{x}$, $\left(\dot{\phi}(x)\right)^{(n)}$; adunque avrassi

$$\dot{\phi}^{(n)}(x)=\left(\dot{\phi}(x)\right)^{(n)}+\dot{x}\,\phi^{(n+1)}(x);$$

cioè la variazione, di una qualsivoglia derivata della $\phi(x)$, presa nella ipotesi che la x abbia la variata, sarà eguale alla derivata del medesimo ordine, della variazione della $\phi(x)$ presa nell'altra ipotesi, *più* il prodotto della variazione della x per la derivata dell'ordine immediatamente superiore alla stessa della $\phi(x)$.

385. Troviamo la variazione della funzione composta $f(x, y, y', y'', ---)$ nel caso, che la sua variata sia

$$f\left(t, \psi(t,v), \psi'(t), \psi''(t), ---\right).$$

Questa variata si indicherà con

$$f(t, \psi, \psi', \psi'', ---).$$

La variazione richiesta sarà il valore, corrispondente alla $v=0$ della

$$f'(t)t'(v)+f'(\psi)\psi'(v)+f'(\psi')\left(\frac{d\psi'}{dv}\right)+f'(\psi'')\left(\frac{d\psi''}{dv}\right)+\text{ecc.}$$

derivata totale presa rispetto alla v della variata qui esposta. Ma per essere

$$t=x+v\dot{x}+\frac{v^2}{2}\ddot{x}+\text{ecc.},\ \psi=y+v\dot{y}+\frac{v^2}{2}\ddot{y}+\text{ecc.},$$

$$\psi'=y'+v\dot{y}'+\frac{v^2}{2}\ddot{y}+\text{ecc.},\ \psi''=y''+v\dot{y}''+\frac{v^2}{2}\ddot{y}''+\text{ecc.}$$

- -

si hanno

$$t'(v)=\dot{x}+\frac{v}{2}\ddot{x}+\text{ecc.},\ \psi'(v)=\dot{y}+\frac{v}{2}\ddot{y}+\text{ ecc.},$$

$$\left(\frac{d\psi'}{dv}\right)=\dot{y}'+\frac{v}{2}\ddot{y}'+\text{ecc.},\ \left(\frac{d\psi''}{dv}\right)=\dot{y}''+\frac{v}{2}\ddot{y}''+\text{ecc.}, ---,$$

per cui i valori delle t, ψ, ψ', ψ'', $---$ $t'(v)$, $\psi'(v)$, $\left(\frac{d\psi'}{dv}\right)$, $\left(\frac{d\psi''}{dv}\right)$, $---$, corrispondenti alla $v=0$, sono ordinatamente

$$x,\ y,\ y',\ y'',\ ---\ \dot{x}, \dot{y},\ \dot{y}',\ \dot{y}'',\ ---,$$

e quelli delle $f'(t)$, $f'(\psi)$, $f'(\psi')$, $f'(\psi'')$, $---$ sono $f'(x), f'(y), f'(y'), f'(y'')$, $---$. Adunque la variazione richiesta cioè la $\dot{f}$ sarà

$$f'(x)\dot{x}+f'(y)\dot{y}+f'(y')\dot{y}'+f'(y'')\dot{y}''+\text{ecc.},$$

la quale ha visibilmente molta analogia colla derivata totale della $f(x, y, y', y'', ---)$ presa rispetto alla x.

In questa variazione della f sostituendo per le $\dot{y}, \dot{y}', \dot{y}''$, $---$ i loro valori $(\dot{y})+\dot{x}y'$, $(\dot{y})'+\dot{x}y''$, $(\dot{y})''+\dot{x}y'''$, $---$, trovati nel paragrafo antecedente, si ha

$$\dot{f}=\left(f'(x)+f'(y)y'+f'(y')y''+f'(y'')y'''+\text{ecc.}\right)\dot{x}+$$
$$f'(y)(\dot{y})+f'(y')(\dot{y})'+f'(y'')(\dot{y})''+\text{ecc.},$$

cioè

$$\dot{f}=\dot{x}f'+(\dot{f}):$$

equazione la quale insegna, che tra le due differenti variazioni della f, cioè tra la $\dot{f}$ e la $(\dot{f})$ ha luogo una relazione analoga a quella trovata tra le due analoghe variazioni della y.

Quest' ultima medesima equazione insegna anco, che, dalla variazione $(\dot{f})$ superiormente trovata potrassi desumere la $\dot{f}$, cambiando nella $(\dot{f})$ le $\dot{y}, \dot{y}', \dot{y}''$, $---$ là usate, cioè le $(\dot{y})$, $(\dot{y})'$, $(\dot{y})''$, $---$ nei binomj $\dot{y}-\dot{x}y'$, $\dot{y}'-\dot{x}y''$, $\dot{y}''-\dot{x}y'''$, $---$, ed aggiungendo alla risultante il prodotto $\dot{x}f'$ ossia

$$\dot{x}\left(f'(x)+f'(y)y'+f'(y')y''+f'(y'')y'''+\text{ecc.}\right).$$

Nei binomj $\dot{y}-\dot{x}y'$, $\dot{y}'-\dot{x}y''$, $\dot{y}''-\dot{x}y'''$, $---$ i simboli $\dot{y}'$, $\dot{y}''$, $---$ significano le variazioni delle derivate y', y'', $---$; se si volessero le quantità equivalenti, ove vi fossero le derivate delle variazioni, converrebbe sostituire in vece delle $(\dot{y})$, $(\dot{y})'$, $(\dot{y})''$, $---$ le espressioni $\dot{y}-\dot{x}y'$, $(\dot{y}-\dot{x}y')'$, $(\dot{y}-\dot{x}y')''$, $---$.

386. Ora troviamo le variazioni delle primitive di funzioni date; e cominciamo con quella della primitiva della $f(x, y, z, y', z', y'', ---)$ presa rispetto alla x ed estesa tra due limiti dati.

Le variazioni di una primitiva si indicheranno, scrivendo *uno*, *due*, - - - punti superiori al segno indicante la stessa primitiva; per esempio $\dot{\int} f$ significherà la qui richiesta.

Così i valori delle $x, y, z, y', ---$ corrispondenti al principio o primo limite della primitiva, di cui si dimanda la variazione, si indicheranno con

$$x_0, y_0, z_0, y'_0, ---;$$

e quelli corrispondenti all' altro limite con

$$x_1, y_1, z_1, y'_1, ---.$$

Anzi si rifletta ora per sempre che all' occorrenza per indicare i valori di qualsivoglia quantità corrispondenti ai limiti di una primitiva si useranno anco per essa simboli analoghi a questi.

Avuto riguardo a ciò che si disse (§ 84) la primitiva di cui cercasi la variazione sarebbe indicata colla scrittura

$$\int_{x_1}^{x_0} f(x, y, z, y', z', y'', ---)\, dx:$$

ma per semplicità s' indicherà colla

$\int f(x, y, z, y', z', y'' ---)\, dx$ ed anco colla $\int f dx$ sottintendendo la prima: analoghe semplificazioni si adotteranno anco per indicare altre consimili primitive.

La variazione dimandata sarà il coefficiente della ν nello sviluppo della primitiva

$$\int f\Big(x, y+\nu\dot{y}+\text{ecc.}, z+\nu\dot{z}+\text{ecc.}, y'+\nu\dot{y}'+\text{ecc.},$$
$$z'+\nu\dot{z}'+\text{ecc.}, y''+\nu\dot{y}''+\text{ecc.}, ---\Big)\, dx$$

ossia della $\int\left(f+\nu\dot{f}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{f}+\text{ecc.}\right)dx$; e siccome questa equivale alla

$$\int f dx+\nu\int\dot{f} dx+\frac{\nu^2}{2}\int\ddot{f} dx+\text{ecc.};$$

così $\dot{\int} f$, variazione richiesta, sarà $\int\dot{f} dx$ primitiva della $\dot{f}$, presa rispetto alla x anch'essa ed estesa dalla $x=x_0$ alla $x=x_1$.

Denomininsi T_0, T_1 i valori della T (§ 379) corrispondenti alla $x=x_0$, $x=x_1$; e la variazione richiesta si ridurrà

$$\int_{x_1}^{x_0}(\dot{y}Y+\dot{z}Z)\, dx+T_1-T_0.$$

Se i valori delle variate delle $y, z, y', z', y'', ---$ corrispondenti alla $x=x_0$ dovessero essere costanti ossia eguali ordinatamente a quelli delle stesse $y, z, y', z', y'', ---$ corrispondenti al medesimo della x, ed analoghe proprietà avessero luogo pei valori di queste quantità corrispondenti alla $x=x_1$, le variazioni

$$\dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{y}'_0, \dot{z}'_0, \dot{y}''_0, ---; \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{y}'_1, \dot{z}'_1, \dot{y}''_1, ---$$

(§ 376) sarebbero *nulle*; e però la richiesta

$$\dot{\int} f(x, y, z, y', z', y'', ---)\, dx$$

si ridurrebbe alla sola prima sua parte

$$\int(Y\dot{y}+Z\dot{z})\, dx.$$

Così se le

$$y_0, z_0, y'_0, z'_0, y''_0, ---; y_1, z_1, y'_1, z'_1, y''_1, ---$$

dovessero avere relazioni rappresentate con date equazioni

$$A\left(x_0, y_0, z_0, y'_0, --- x_1, y_1, ---\right)=0,$$

$$B\left(x_0, y_1, z_1, ----- x_1, y_0, ---\right)=0$$

$$-----------------,$$

le quali dovessero sussistere anco per le variate delle medesime $y_0, z_0, y_1, ---$ lo sviluppo della variazione $\int f\left(x, y, z, y', z', y'', ---\right)$ sarebbe ancora

$$\int\left(Y\dot{y}+Z\dot{z}\right)dx+T_1-T_0,$$

ma le variazioni $\dot{y}_0, \dot{y}_1, \dot{z}_0, \dot{z}_1, \dot{y}'_0, ---$ contenute nella sua parte T_1-T_0 avrebbero tra loro le relazioni seguenti

$$A'(y_0)\dot{y}_0+A'(z_0)\dot{z}_0+\text{ecc.}=0,$$

$$B'(y_1)\dot{y}_1+B'(z_1)\dot{z}_1+\text{ecc.}=0, ---,$$

mediante le quali si potrebbero eliminare dalla medesima variazione tante delle $\dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{y}_1, ---$, quante sono queste ultime medesime equazioni.

Sebbene le variate delle $y, z, y', ---$ debbano essere tra quelle soddisfacenti le condizioni ammesse qui sopra ai limiti, nulladimeno le variazioni $\dot{y}, \dot{z}$ contenute nella $\int\left(Y\dot{y}+Z\dot{z}\right)dx$ rimarranno arbitrarie (§ 376).

387. Vogliasi in secondo luogo la variazione della $\int f(x, y, z, y', z', y'', z'', ---)\,dx$ nella ipotesi, che i limiti della primitiva della variata

$$f\left(x, y+\nu\dot{y}+\text{ecc.}, z+\nu\dot{z}+\text{ecc.}, y'+\nu\dot{y}'+\text{ecc.},\right.$$
$$\left. z'+\nu\dot{z}'+\text{ecc.}, y''+\nu\dot{y}''+\text{ecc.}, ---\right)$$

debbano corrispondere alla

$$x=x_0+\nu\dot{x}_0+\text{ecc., ed } x=x_1+\nu\dot{x}_1+\text{ecc.}$$

Chiamisi $F(\mu)$ una funzione della μ formata colla μ, come la variata della f cioè $f+\nu\dot{f}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{f}+$ ecc. è formata colla x; e la primitiva ultima sarà $\int F(\mu)\,d\mu$ estesa dalla

$$\mu=x_0+\nu\dot{x}_0+\text{ecc. alla } \mu=x_1+\nu\dot{x}_1+\text{ecc.}$$

Ma pel § 86 quest'ultima primitiva è eguale alla $\int F(x+\nu\dot{x}+\text{ecc.})\left(\frac{du}{dx}\right)dx$ estesa dalla $x=x_0$ alla $x=x_1$; e d'altronde hassi

$$F(x+\nu\dot{x}+\text{ecc.})=F+\nu\dot{x}F'(x)+\text{ecc., e } \left(\frac{du}{dx}\right)=1+\nu\dot{x}'+\text{ecc.},$$

per cui $F'(x+\nu\dot{x}+\text{ecc.})\left(\frac{du}{dx}\right)$ risulta

$$F+\nu(\dot{x}F'+\dot{x}'F)+\text{ecc. ossia } F+\nu(\dot{x}F)'+\text{ecc.},$$

dove la F è evidentemente la stessa $f+\nu\dot{f}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{f}+$ecc.; adunque la primitiva di cui si parla, sarà eguale a quella della quantità

$$f+\nu\dot{f}+\text{ecc.}+\nu(\dot{x}f+\nu\dot{x}\dot{f}+\text{ecc.})'+\text{ecc. cioè sarà}$$

$$\int f dx+\nu\int\left(\dot{f}+(\dot{x}f)'\right)dx+\text{ecc.},$$

ove le indicate primitive si debbono tutte estendere dalla $x=x_0$ alla $x=x_1$. Quindi $\dot{\int} f$ variazione, qui richiesta, sarà

$$\int\left(\dot{f}+(\dot{x}f)'\right)dx \text{ ossia } \int\dot{f}dx+(\dot{x}f)_1-(\dot{x}f)_0,$$

intendendo coi simboli $(\dot{x}f)_0$, $(\dot{x}f)_1$ i valori del prodotto $\dot{x}f$, corrispondenti alla $x=x_0$, $x=x_1$.

Sostituendo in questa variazione in luogo della $\dot{f}$, che significa la $(\dot{f})$ sopra usata, il suo valore $\dot{f}-\dot{x}f'$

essa si riduce alla forma seguente

$$(\dot{x}f)_1-(\dot{x}f)_0+\int(\dot{f}-\dot{x}f')\,dx,$$

in cui la parte $\dot{f}-\dot{x}f'$ si può trasformare, come si è fatto al § 379, ritenuta la $x'=1$.

E qui fo riflettere, che la $\dot{\int}f$ si ritiene comunemente sotto la forma

$$\int\left(x'\dot{f}-\dot{x}f'+(\dot{x}f)'\right) \text{ ovvero } \dot{x}f+\int(x'\dot{f}-\dot{x}f').$$

388. In terzo luogo, vogliasi la variazione della

$$\int f(x, y, z, x', y', z', x'', y'', ---),$$

ove le derivate si suppongono prese rispetto alla r variabile qualunque, e la primitiva debba esser presa rispetto alla r medesima, ed estesa tra due limiti dati.

Le variate delle $x, y, z, x', y', z', x'', y'', ---$ siano le funzioni

$$x(r,\nu),\, y(r,\nu),\, z(r,\nu),\, \left(\frac{dx(r,\nu)}{dr}\right),\, \left(\frac{dy(r,\nu)}{dr}\right), --- \text{ ossia}$$

$$x+\nu\dot{x}+\text{ecc}\,,\; y+\nu\dot{y}+\text{ecc.},\; z+\nu\dot{z}+\text{ecc.},$$

$$x'+\nu\dot{x}'+\text{ecc.},\; y'+\nu\dot{y}'+\text{ecc.},\; ---;$$

cosicchè i valori di queste variate corrispondenti agli estremi della primitiva siano

$$x_0+\nu\dot{x}_0+\text{ecc.},\; y_0+\nu\dot{y}_0+\text{ecc.},\; z_0+\nu\dot{z}_0+\text{ecc.},$$

$$x'_0+\nu\dot{x}'_0+\text{ecc.},\; y'_0+\nu\dot{y}'_0+\text{ecc.},\; ---;$$

$$x_1+\nu\dot{x}_1+\text{ecc.},\; y_1+\nu\dot{y}'_1+\text{ecc.},\; z_1+\nu\dot{z}_1+\text{ecc.},$$

$$x'_1+\nu\dot{x}'_1+\text{ecc.},\; y'_1+\nu\dot{y}'_1+\text{ecc.},\; ---.$$

La variata della primitiva sarà la primitiva della

$$f+\nu\dot{f}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{f}+\text{ecc.},$$

ove $\dot{f}$ esprime la variazione della f esposta nel § 385. E per tanto la variazione dimandata sarà $\int\dot{f}dr$ ossia

$$\int(X\dot{x}+Y\dot{y}+Z\dot{z})\,dr+T_1-T_0 \;(\S\ 379)$$

ove la primitiva deve essere estesa tra i medesimi limiti della $\int fdr$, e le T_1, T_0 esprimono al solito i valori della T introdotta ed usata nello stesso paragrafo citato.

Quando la funzione $f(x,y,z,x',y',z',x'',y'',---)$ sia riducibile alla forma

$$x'\phi\left(x, y, z, \frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}, \frac{1}{x'}\left(\frac{y'}{x'}\right), ---\right),$$

siccome accade quasi sempre, si ha $\dot{f}=(\dot{f})+(\dot{x}f)'$; e però sarà

$$\dot{\int}f=\int\left((\dot{f})+(\dot{x}f)'\right),$$

che è la stessa di quella trovata nel paragrafo antecedente.

389. Se le $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x'_0, y'_0, ---$ che corrispondono ai limiti della primitiva $\int fdr$ contemplata nel paragrafo antecedente, avessero una o più relazioni

$$A\,(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x'_0, y'_0, ---)=0,$$

$$B\,(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x'_0, y'_0, ---)=0, ---$$

le quali dovessero sussistere anco per le $x_0+\nu\dot{x}_0+$ecc., $y_0+\nu\dot{y}_0+$ecc., --- variate di esse, la variazione della medesima primitiva $\int fdr$ sarebbe tuttavia

$$\int(X\dot{x}+Y\dot{y}+Z\dot{z})\,dr+T_1-T_0;$$

ma le variazioni $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}'_0, ---$ contenute nella sua parte T_1-T_0 avrebbero le relazioni seguenti

$$A'(x_0)\,\dot{x}_0 + A'(x_1)\,\dot{x}_1 + A'(y_0)\dot{y}_0 + \text{ecc.} = 0,$$

$$B'(x_0)\,\dot{x}_0 + B'(x_1)\dot{x}_1 + B'(y_0)\,\dot{y}_0 + \text{ecc.} = 0,$$

- -

colle quali si potrebbero eliminare tante delle medesime variazioni $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, - - - quante sono queste stesse equazioni.

Per dare un esempio, troviamo la variazione della $s = \int\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}\,dr$ ammesse tra i limiti le equazioni $A(x_0, y_0, z_0) = 0$, $B(x_1, y_1) = 0$, $C(x_1, z_1) = 0$; cioè troviamo la variazione della s lunghezza di una linea avente il primo termine nella superficie rappresentata colla equazione $A = 0$ ed il secondo nella linea rappresentata colle $B = 0$, $C = 0$.

In questo caso si hanno $f'(x) = f'(y) = f'(z) = 0$, $f'(x') = \frac{x'}{s'}$, $f'(y') = \frac{y'}{s'}$, $f'(z') = \frac{z'}{s'}$, però sarà

$$X\dot{x}+Y\dot{y}+Z\dot{z} = -\left(\frac{x'}{s'}\right)'\dot{x} - \left(\frac{y'}{s'}\right)'\dot{y} - \left(\frac{z'}{s'}\right)'\dot{z}, \text{ e } T = \frac{1}{s'}(\dot{x}+y'\dot{y}+z'\dot{z})$$

supposto le derivate indicate nella T prese rispetto alla x; e conseguentemente sarà anco

$$T_1 = \frac{1}{s'_1}(\dot{x}_1 + y'_1\dot{y}_1 + z'_1\dot{z}_1), \text{ e } T_0 = \frac{1}{s'_0}(\dot{x}_0 + y'_0\dot{y}_0 + z'_0\dot{z}_0).$$

Ma dalla equazione $A = 0$ si ha

$$A'(x_0)\,\dot{x}_0 + A'(y_0)\,\dot{y}_0 + A'(z_0)\,\dot{z}_0 = 0$$

ovvero $\dot{z}_0 = \left(\frac{dz_0}{dx_0}\right)\dot{x}_0 + \left(\frac{dz_0}{dy_0}\right)\dot{y}_0$ per essere

$$A'(x_0) + A'(z_0)\left(\frac{dz_0}{dx_0}\right) = 0,\ A'(y_0) + \left(\frac{dz_0}{dy_0}\right)A'(z_0) = 0;$$

e dalle due $B = 0$, $C = 0$ hansi similmente

$$\dot{y}_1 = (y'_1)\,\dot{x}_1,\ \dot{z}_1 = (z'_1)\,\dot{x}_1,$$

per cui risulta

$$T_0 = \left(1 + \left(\frac{dz_0}{dx_0}\right)y'_0\right)\frac{\dot{x}_0}{s'_0} + \left(1 + \left(\frac{dz_0}{dy_0}\right)z'_0\right)\frac{\dot{y}_0}{s'_0}, \text{ e}$$

$$T_1 = \left(1 + (y'_1)\,y'_1 + (z'_1)\,z'_1\right)\frac{\dot{x}_1}{s'_1},$$

dove le (y'_1), (z'_1) cioè le y'_1, z'_1 poste tra due parentesi significano le derivate delle y_1, z_1 date dalle due equazioni $B(x_1, y_1) = 0$, $C(x_1, z_1) = 0$. Quindi la variazione richiesta sarà

$$-\int\left(\left(\frac{x'}{s'}\right)'\dot{x} + \left(\frac{y'}{s'}\right)'\dot{y} + \left(\frac{z'}{s'}\right)'\dot{z}\right)dr + \left(1 + (y'_1)y'_1 + (z'_1)z'_1\right)\frac{\dot{x}_1}{s'_1}$$
$$-\left(1 + \left(\frac{dz_0}{dx_0}\right)y'_0\right)\frac{\dot{x}_0}{s'_0} - \left(1 + \left(\frac{dz_0}{dy_0}\right)z'_0\right)\frac{\dot{y}_0}{s'_0}.$$

Si osservi che $\left(1 + (y'_1)y'_1 + (z'_1)z'_1\right)\frac{\dot{x}_1}{s'_1}$ è il prodotto di $\dot{x}_1\sqrt{\left(1 + (y'_1)^2 + (z'_1)^2\right)}$ pel coseno dell'angolo compreso dalla linea di lunghezza s con quella rappresentata colle equazioni $B = 0$, $C = 0$; ed anco che le quantità

$$\left(1 + \left(\frac{dz_0}{dx_0}\right)y'_0\right)\frac{\dot{x}_0}{s'_0},\ \left(1 + \left(\frac{dz_0}{dy_0}\right)z'_0\right)\frac{\dot{y}_0}{s'_0}$$

sono i prodotti delle

$$\dot{x}_0\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz_0}{dx_0}\right)^2\right)},\ \dot{y}_0\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz_0}{dy_0}\right)^2\right)}$$

rispettivamente pei coseni degli analoghi compresi dalla retta toccante la medesima linea di lunghezza s nel punto corrispondente alla ordinata x_0 e dalle tracce esistenti nei piani coordinati delle $x, z; y, z$ di quello che è tangente la superficie rappresentata colla equazione $A(x_0, y_0, z_0) = 0$ nel punto in comune colla linea dell'arco stesso s.

390. Se le x, y, z, x', y', - - - avessero la relazione $F(x, y, z, x', y', z', x''$, - - -$) = 0$, la variazione $\int f dr$

sarebbe ancora

$$\int (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z})\,dr + T_1 - T_0,$$

ma le $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ avrebbero la relazione seguente

$$F'(x)\,\dot{x} + F'(y)\,\dot{y} + F'(z)\,\dot{z} + F'(x')\,\dot{x}' + \text{ecc.} = 0;$$

cioè la variazione della primitiva $\int f dr$ sarebbe ciò, che avrebbesi, sostituendo nella medesima dianzi esposta in vece di una delle $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ il suo valore desunto da quest' ultima equazione.

Per esempio, se fosse $f = s' = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}$ e la F contenesse le sole variabili x, y, z per cui avrebbesi $F'(x)\dot{x} + F'(y)\dot{y} + F'(z)\dot{z} = 0$ ossia $\dot{z} = \left(\frac{dz}{dx}\right)\dot{x} + \left(\frac{dz}{dy}\right)\dot{y}$ per essere $F'(x) + F'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$, $F'(y) + F'(z)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$, la variazione $\dot{\int} f dr$ risulterebbe

$$-\int\left\{\left(\left(\frac{x'}{s'}\right)' + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)\dot{x} + \left(\left(\frac{y'}{s'}\right)' + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)\dot{y}\right\}dr + T_1 - T_0.$$

Quando la equazione $F = 0$ contenga anco le derivate $x', y', z', - - -$ si suole presentare la variazione della primitiva in quest'altra maniera. Avendo luogo la equazione

$$F'(x)\dot{x} + F'(y)\dot{y} + F'(z)\,\dot{z} + F'(x')\,\dot{x}' + \text{ecc.} = 0,$$

la variazione $\dot{\int} f$ ossia $\int \dot{f}(x, y, z, x', - - -)$ è eguale a

$$\int\Big(\dot{x}f'(x) + \dot{y}f'(y) + \dot{z}f'(z) + \dot{x}'f'(x') + \text{ecc.}$$
$$+ \lambda\left(\dot{x}F'(x) + \dot{y}F'(y) + \dot{z}F'(z) + \dot{x}'F'(x')\right)\Big)dr$$

qualunque sia la quantità indicata dalla λ.

Ma (§ 579)

$$\dot{x}f'(x) + \dot{y}f'(y) + \dot{z}f'(z) + \dot{x}'f'(x') + \text{ecc.} = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} + T';$$

e con un processo analogo all'esposto nel medesimo paragrafo citato trovasi

$$\lambda F'(x)\,\dot{x} + \lambda F'(y)\dot{y} + \lambda F'(z)\,\dot{z} + \lambda F'(x')\,\dot{x}' + \text{ecc.}$$
$$= (X)\,\dot{x} + (Y)\,\dot{y} + (Z)\,\dot{z} + (T)', \text{ dove}$$

$(X) = \lambda F'(x) - \left(\lambda F'(x')\right)' + \text{ecc.},$

$(Y) = \lambda F'(y) - \left(\lambda F'(y')\right)' + \text{ecc.},$

$(Z) = \lambda F'(z) - \left(\lambda F'(z')\right)' + \text{ecc.}$, e

$(T) = (\overset{1}{\dot{X}})\,\dot{x} + (\overset{1}{\dot{Y}})\,\dot{y} + (\overset{1}{\dot{Z}})\,\dot{z} + (\overset{2}{\dot{X}})\,\dot{x}' + (\overset{2}{\dot{Y}})\,\dot{y}' + (\overset{2}{\dot{Z}})\,\dot{z}' + \text{ecc.}$ ove

$(\overset{1}{\dot{X}}) = \lambda F'(x') - \left(\lambda F'(x'')\right)' + \text{ecc.},$

$(\overset{1}{\dot{Y}}) = \lambda F'(y') - \left(\lambda F'(y'')\right)' + \text{ecc.},$

$(\overset{1}{\dot{Z}}) = \lambda F'(z') - \left(\lambda F'(z'')\right)' + \text{ecc.},$

$(\overset{2}{\dot{X}}) = \lambda F'(x'') - \text{ecc.},$

$(\overset{2}{\dot{Y}}) = \lambda F'(y'') - \text{ecc.},$

$(\overset{2}{\dot{Z}}) = \lambda F'(z'') - \text{ecc.}, - - - - - -;$

adunque la variazione esposta si ridurrà anco alla seguente

$$\int\left\{\left(X + (X)\right)\dot{x} + \left(Y + (Y)\right)\dot{y} + \left(Z + (Z)\right)\dot{z}\right\}dr + T_1 + (T_1) - T_0 - (T_0);$$

e conseguentemente, se si disporrà della quantità λ talmente di annullare il coefficiente di una delle variazioni $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, la richiesta ridurrassi a ciò che rimarrà: per esempio, determinando la λ col soddisfare la equazione

$$Z+(Z)=0 \text{ cioè}$$

$$f'(z)-f'(z')'+f'(z'')''-\text{ecc.}$$
$$+\lambda F'(z)-\big(\lambda F'(z')\big)'+\big(\lambda F'(z'')\big)''-\text{ecc.}=0$$

la richiesta variazione risulterà

$$\int\Big\{\big(X+(X)\big)\dot{x}+\big(Y+(Y)\big)\dot{y}\Big\}dr+T_1+(T_1)-T_0-(T_0).$$

391. Se la primitiva della variata $f+\nu\dot{f}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{f}+$ecc. dovrà essere eguale alla primitiva della f, cioè se la $\int f$ non varierà variando le sue componenti, si avranno le equazioni

$$\int\dot{f}\,ds=0,\ \int\ddot{f}\,ds=0,\ \int\dddot{f}\,ds=0,\ ---:$$

e se ciò dovrà aver luogo, qualunque siano i limiti comuni di tali primitive, insieme a queste equazioni sussisteranno le loro derivate, che sono

$$\dot{f}=0,\ \ddot{f}=0,\ \dddot{f}=0,\ ---;$$

anzi le $\ddot{f}=0$, $\dddot{f}=0$, --- saranno altrettante conseguenze della $\dot{f}=0$; perchè le variazioni prime delle $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ sono le seconde delle x, y, z, e le prime delle $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ le seconde delle $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, e così delle altre. Dimodochè la invariabilità della primitiva

$$\int f(x, y, z, x', y', z', x'', y'', ---)\,ds,$$

qualora gli estremi siano qualsivogliono, sarà rappresentata colla sola equazione $\dot{f}=0$ cioè colla

$$f'(x)\dot{x}+f'(y)\dot{y}+f'(z)\dot{z}+f'(x')\dot{x}'+f'(y')\dot{y}'+f'(z')\dot{z}'$$
$$+f'(x'')\dot{x}''+f'(y'')\dot{y}''+\text{ecc.}=0.$$

392. Troviamo la variazione $\dot{\int} f$, ove la f esprima una funzione delle $x, p, q, r, ---$ e della f_1 altra primitiva di una funzione $\phi(x, y, p, q, r, ---)$: le $p, q, r, ---$ hanno lo stesso significato supposto per esse nel § 381.

Per semplicità, suppongasi $f'=\alpha'+\beta f'_1$, e però $\dot{f}=\dot{\alpha}+\beta\dot{f}_1$, ove

$$\alpha'=f'(x)+f'(y)y'+f'(p)p'+f'(q)q'+f'(r)r'+\text{ecc.}$$
$$\dot{\alpha}=f'(x)\dot{x}+f'(y)\dot{y}+f'(p)\dot{p}+f'(q)\dot{q}+f'(r)\dot{r}+\text{ecc.}$$
$$\text{e } \beta=\left(\frac{df}{df_1}\right) \text{ ossia } f'(f_1).$$

Dal § 387 si ha $\dot{\int} f=\dot{x}f+\int(\dot{f}-\dot{x}f')dx$, e però sarà

$$\dot{\int} f dx=\dot{x}f+\int(\dot{\alpha}+\beta\dot{f}_1-\dot{x}\alpha'-\beta\dot{x}f'_1)dx \text{ ossia}$$
$$\dot{\int} f dx=\dot{x}f+\int(\dot{\alpha}-\dot{x}\alpha')dx+\int\beta(\dot{f}_1-\dot{x}f'_1)dx.$$

Ma dallo stesso paragrafo citato hassi anco

$$\dot{f}_1=\dot{x}\phi+\int(\dot{\phi}-\dot{x}\phi')dx, \text{ e d'altronde } f'_1=\phi,$$

per cui $\dot{f}_1-\dot{x}f'_1$ risulta eguale ad $\dot{x}\phi+\int(\dot{\phi}-\dot{x}\phi')dx-x\phi$ ossia a $\int(\dot{\phi}-\dot{x}\phi')dx$; adunque sarà

$$\dot{\int} f dx=\dot{x}f+\int(\dot{\alpha}-\dot{x}\alpha')dx+\int\beta\Big(\int(\dot{\phi}-\dot{x}\phi')dx\Big)dx \text{ ovvero}$$
$$\dot{\int} f dx=\dot{x}f+\int(\dot{\alpha}-\dot{x}\alpha')dx+\gamma\int(\dot{\phi}-\dot{x}\phi')dx-\int\gamma(\dot{\phi}-\dot{x}\phi')dx,$$

supposto $\int\beta\,dx=\gamma$.

Se in quest'ultima espressione della $\dot{\int} f dx$ si ponessero in luogo delle $\dot{\alpha}$, α' i loro valori sopra esposti, ed in luogo delle ϕ', $\dot{\phi}$ gli analoghi, che sono

$$\phi'(x)+\phi'(y)y'+\phi'(p)p'+\phi'(q)q'+\text{ecc.},$$
$$\phi'(x)\dot{x}+\phi'(y)\dot{y}+\phi'(p)\dot{p}+\phi'(q)\dot{q}+\text{ecc.},$$

facilmente si potrebbero far subire alle

$$\dot{\alpha}-\dot{x}\alpha',\ \dot{\phi}-\dot{x}\phi',\ \gamma(\dot{\phi}-\dot{x}\phi')$$

trasformazioni analoghe a quella fatta per la f considerata nel paragrafo 381.

Non espongo queste trasformazioni, nè estendo la quistione qui trattata al caso che la f contenga due o più quantità analoghe alla f_1, ed anco più variabili funzioni della x, perchè ciò non presenta nessuna difficoltà, eccettuata la prolissità dei calcoli.

393. Talvolta occorre la variazione della primitiva di una funzione, nella quale vi sono, oltre le x, y, x', y', x'', - - -, anco quei valori di queste medesime quantità, che corrispondono agli estremi della primitiva: dirò come bisogna procedere in tali casi, onde avere tali variazioni.

Vogliasi la variazione

$$\int f(x, y, x', y', x'', \text{- - -} x_0, x_1, y_0, y_1, x'_0, \text{- - -})\,dx.$$

Cambiando le x, y nelle rispettive variate $x+v\dot{x}+$ecc., $y+v\dot{y}+$ecc., bisogna cambiare le x_0, x_1, y_0, y_1, x'_0, - - - nelle

$$x_0+v\dot{x}_0+\text{ecc.},\ x_1+v\dot{x}_1+\text{ecc.},\ y_0+v\dot{y}_0+\text{ecc.},$$
$$y_1+v\dot{y}_1+\text{ecc.},\ x'_0+v\dot{x}'_0+\text{ecc.},\ \text{- - -}$$

loro variate corrispondenti; e conseguentemente bisogna aggiungere alla espressione $\int\left(\dot{f}+(\dot{x}f)'\right)$, già trovata sopra, la quantità

$$\int \dot{x}_0 f'(x_0)\,dx+\int \dot{x}_1 f'(x_1)\,dx+\int \dot{y}_0 f'(y_0)\,dx$$
$$+\int \dot{y}_1 f'(y_1)\,dx+\int \dot{x}'_0 f'(x'_0)\,dx+\text{ecc.}$$

ossia

$$\dot{x}_0\int f'(x_0)\,dx+\dot{x}_1\int f'(x_1)\,dx+\dot{y}_0\int f'(y_0)\,dx$$
$$+\dot{y}_1\int f'(y_1)\,dx+\dot{x}'_0\int f'(x'_0)\,dx+\text{ecc.}$$

ove le primitive debbonsi estendere tutte come la proposta; e la somma risultante sarà la variazione qui richiesta.

Così succede alcune volte, che la quantità di cui bisogna trovare la variazione, è la somma di una primitiva analoga a quelle qui sopra contemplate e di una quantità non soggetta a primitiva, ma formata coi valori delle x, y, x', y', x'', - - - corrispondenti ai limiti; tali variazioni consisteranno nella somma delle variazioni di queste due parti, di cui la prima si troverà colle regole esposte ultimamente e l'altra con quelle esposte al principio di questa lezione.

LEZIONE II.

Delle variazioni delle funzioni a due o più variabili indipendenti.

394. Passo a parlare delle variazioni delle funzioni di due o più variabili indipendenti; limitandomi a quelle, che occorrono spesse volte.

Abbiasi $z=\phi(x,y)$, e le x, y siano variabili indipendenti l'una dall'altra; e sia $\psi(x,y,v)$ la variata della z cioè

$$\psi(x,y,v)=z+v\dot{z}+\frac{v^2}{2}\ddot{z}+\text{ecc.};$$

e vogliasi la variazione della funzione

$$f(x, y, z, z', z_{/}, z'', z'_{/}, z_{//}, \text{- - -})$$

ove le $z', z_{/}, z''$, - - - esprimono al solito le derivate parziali della z.

Sviluppando la variata della f, che è

$$f\left(x, y, z + \nu\dot{z} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{z} + \text{ecc.},\ z' + \nu\dot{z}' + \frac{\nu^2}{2}\ddot{z}' + \text{ecc.},\right.$$
$$\left. z_{,} + \nu\dot{z}_{,} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{z}_{,} + \text{ecc.}, \text{---}\right)$$

secondo le potenze ordinarie della ν indeterminata, ed eguagliando lo sviluppo alla $f + \nu\dot{f} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{f} + \text{ecc.}$, si hanno

$$\dot{f} = f'(z)\dot{z} + f'(z')\dot{z}' + f'(z_{,})\dot{z}_{,} + f'(z'')\dot{z}'' + f'(z'_{,})\dot{z}'_{,} + f'(z_{,,})\dot{z}_{,,} + \text{ecc.}$$

$$\ddot{f} = f'(z)\ddot{z} + f'(z')\ddot{z}' + f'(z_{,})\ddot{z}_{,} + f'(z'')\ddot{z}'' + f'(z'_{,})\ddot{z}'_{,} + f'(z_{,,})\ddot{z}_{,,} + \text{ecc.} +$$
$$\dot{z}^2 f''(z) + \dot{z}'^2 f''(z') + \dot{z}_{,}^2 f''(z_{,}) + \dot{z}''^2 f''(z'') + \dot{z}'^2_{,} f''(z'_{,}) + \dot{z}^2_{,,} f''(z_{,,}) + \text{ecc.} +$$
$$2\,\dot{z}\,\dot{z}'\left(\frac{d^2 f}{dz\,dz'}\right) + 2\,\dot{z}\,\dot{z}_{,}\left(\frac{d^2 f}{dz\,dz_{,}}\right) + \text{ecc.}$$

- .

Essendo

$$\dot{z}'f'(z') = \left(\dot{z}f'(z')\right)' - \dot{z}f'(z')',\quad \dot{z}_{,}f'(z_{,}) = \left(\dot{z}f'(z_{,})\right)_{,} - \dot{z}f'(z_{,})_{,},$$
$$\dot{z}''f'(z'') = \left(\dot{z}'f'(z'') - \dot{z}f'(z'')'\right)' + \dot{z}f'(z'')'',$$
$$\dot{z}'_{,}f'(z'_{,}) = \left(\dot{z}_{,}f'(z'_{,})\right)' - \left(\dot{z}f'(z'_{,})\right)_{,} + \dot{z}f'(z'_{,})'_{,},$$
$$\dot{z}_{,,}f'(z'') = \left(\dot{z}_{,}f'(z_{,,}) - \dot{z}f'(z_{,,})_{,}\right)_{,} + \dot{z}f'(z_{,,})_{,,},$$

- ,

la variazione $\dot{f}$ equivale a $\dot{z}Z + P' + Q_{,}$, supposto

$$Z = f'(z) - f'(z')' - f'(z_{,})_{,} + f'(z'')'' + f'(z'_{,})'_{,} + f'(z_{,,})_{,,} - \text{ecc.},$$
$$P = \dot{z}\left(f'(z') - f'(z'')' + \text{ecc.}\right) + \dot{z}'\left(f'(z'') - \text{ecc.}\right) + \text{ecc.}, \text{ e}$$
$$Q = \dot{z}\left(f'(z_{,}) - f'(z_{,,})_{,} - f'(z'_{,})' + \text{ecc.}\right) + \dot{z}_{,}\left(f'(z_{,,}) - \text{ecc.}\right) + \text{ecc.}$$

395. La variata della $z = \varphi(x, y)$ sia $\psi(t, u, \nu)$ ove t, u esprimano

$$x + \nu\dot{x} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{x} + \text{ecc.},\quad y + \nu\dot{y} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{y} + \text{ecc.}$$

cioè le variate delle x, y.

Supposto $\psi(t, u, \nu) = z + \nu\dot{z} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{z} + \text{ecc.}$, le $\dot{z}$, $\ddot{z}$, --- variazioni della z saranno differenti di quelle contemplate nel paragrafo antecedente. Troviamo la relazione tra $\dot{z}$ variazione attuale della z e la sua variazione anzidetta, la quale indicheremo col simbolo $(\dot{z})$, quando occorrerà di usarla contemporaneamente all' attuale.

Per essere

$$\psi(t, u, \nu) = z + \nu\dot{z} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{z} + \text{ecc.},$$

la $\dot{z}$ sarà il valore, corrispondente alla $\nu = 0$, della derivata prima della $\psi(t, u, \nu)$ presa rispetto alla ν comunque contenuta in essa, cioè sarà il valore corrispondente alla $\nu = 0$ del trinomio

$$\psi'(t)\,t'(\nu) + \psi'(u)\,u'(\nu) + \psi'(\nu).$$

Ma i valori delle parti $t'(\nu)$, $u'(\nu)$, $\psi'(\nu)$, $\psi'(t)$, $\psi'(u)$ corrispondenti alla $\nu = 0$ sono $\dot{x}$, $\dot{y}$, $(\dot{z})$, z', $z_{,}$; adunque avrassi $\dot{z} = (\dot{z}) + \dot{x}z' + \dot{y}z_{,}$.

Supposto che le variate delle z', $z_{,}$, z'', $z'_{,}$, --- siano le stesse derivate

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right), \left(\frac{d\psi}{du}\right), \left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right), \left(\frac{d^2\psi}{dt\,du}\right), \text{---},$$

tra le variazioni $\dot{z}'$, $(\dot{z}')$; $\dot{z}_{,}$, $(\dot{z}_{,})$; $\dot{z}''$, $(\dot{z}'')$; $\dot{z}'_{,}$, $(\dot{z}'_{,})$; --- vi sono relazioni analoghe a quella trovata tra le $\dot{z}$, $(\dot{z})$.

La $\dot{z}^{(m)}_{(n)}$ variazione della $z^{(m)}_{(n)}$ cioè di $\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right)$ sarà il valore, corrispondente alla $\nu = 0$, della derivata della $\left(\frac{d^{m+n}\psi(t, u, \nu)}{dt^m du^n}\right)$ presa rispetto alla ν, la quale risulta

$$\left(\frac{d^{m+n+1}\psi}{dt^{m+1}du^n}\right)t'(\nu) + \left(\frac{d^{m+n+1}\psi}{dt^m du^{n+1}}\right)u'(\nu) + \left(\frac{d^{m+n+1}\psi}{d\nu\,dt^m du^n}\right).$$

Ma i valori corrispondenti alla $v=0$ delle parti

$$t'(v),\ u'(v),\left(\frac{d^{m+n+1}\psi}{dv\,dt^m\,du^n}\right),\ \left(\frac{d^{m+n+1}\psi}{dt^{m+1}\,du^n}\right),\ \left(\frac{d^{m+n+1}\psi}{dt^m\,du^{n+1}}\right),$$

sono ordinatamente

$$\dot{x},\ \dot{y},\ (\dot{z})^{(m)}_{(n)},\ z^{(m+1)}_{(n)},\ z^{(m)}_{(n+1)};$$

adunque avrassi

$$\dot{z}^{(m)}_{(n)}=(\dot{z})^{(m)}_{(n)}+\dot{x}\,z^{(m+1)}_{(n)}+\dot{y}\,z^{(m)}_{(n+1)};$$

e conseguentemente sarà

$$\dot{z}'=(\dot{z})'+\dot{x}z''+\dot{y}z'_{,},\quad \dot{z}_{,}=(\dot{z})_{,}+\dot{x}z'_{,}+\dot{y}z_{,,},$$
$$\dot{z}''=(\dot{z})''+\dot{x}z'''+\dot{y}z''_{,},\quad \dot{z}'_{,}=(\dot{z})'_{,}+\dot{x}z''_{,}+\dot{y}z'_{,,},$$
$$\dot{z}_{,,}=(\dot{z})_{,,}+\dot{x}z'_{,,}+\dot{y}z_{,,,},\ ---.$$

396. Se nella

$$f'(x)\dot{x}+f'(y)\dot{y}+f'(z)\dot{z}+f'(z')\dot{z}'+f'(z_{,})\dot{z}_{,}$$
$$+f'(z'')\dot{z}''+f'(z'_{,})\dot{z}'_{,}+\text{ecc.},$$

che è visibilmente la variazione prima della funzione

$$f(x,y,z,z',z_{,},z'',z'_{,},---)$$

cioè la $\dot{f}$, quando le x, y abbiano variate, si pongano in vece delle $\dot{z}, \dot{z}', \dot{z}_{,}, \dot{z}'', \dot{z}'_{,}, ---$ i rispettivi loro valori trovati nel paragrafo antecedente, si ottiene

$$f=\{f'(x)+f'(z)z'+f'(z')z''+f'(z_{,})z'_{,}+f'(z'')z'''$$
$$+f'(z'_{,})z''_{,}+f'(z_{,,})z'_{,,}+\text{ecc.}\}\dot{x}+$$
$$\{f'(y)+f'(z)z_{,}+f'(z')z'_{,}+f'(z_{,})z_{,,}+f'(z'')z''_{,}$$
$$+f'(z'_{,})z'_{,,}+f'(z_{,,})z_{,,,}+\text{ecc.}\}\dot{y}+$$
$$(\dot{z})f'(z)+(\dot{z}')f'(z')+(\dot{z}_{,})f'(z_{,})+(\dot{z}'')f'(z'')+(\dot{z}'_{,})f'(z'_{,})$$
$$+(\dot{z}_{,,})f'(z_{,,})+\text{ecc.}$$

ossia $\dot{f}=(\dot{f})+\dot{x}f'+\dot{y}f_{,}$.

Questo risultamento insegna, che, tra le due differenti variazioni della funzione f havvi una relazione affatto analoga a quella trovata superiormente tra le variazioni analoghe della z.

397. Si potrebbero qui esporre, per le attuali funzioni composte, altre proprietà analoghe a quelle esposte al principio della lezione antecedente pel caso, che le derivate sono prese rispetto ad una stessa variabile; ma siccome tale esposizione non presenta che la difficoltà della lunghezza dei calcoli, così la ommetto; e passo a parlare delle variazioni delle primitive duplicate; ed in primo luogo trovo la variazione della

$$\int\int f(x,y,z,z',z_{,},z'',z'_{,},---)\,dx\,dy$$

estesa tra limiti dati sì per la x che per la y.

Sostituendo nella funzione f in vece della z la sua variata, e delle derivate parziali della medesima z le derivate analoghe della stessa variata, si ha

$$f+v\dot{f}+\frac{v^2}{2}\ddot{f}+\text{ecc.},$$

e però la variata della primitiva duplicata $\int\int f dx dy$ sarà

$$\int\int f\,dx\,dy+v\int\int\dot{f}\,dx\,dy+\frac{v^2}{2}\int\int\ddot{f}\,dx\,dy+\text{ecc.},$$

ove le primitive siano tutte estese tra i medesimi limiti della prima; e conseguentemente la variazione richiesta risulterà $\int\int\dot{f}\,dx\,dy$ ossia

$$\int\int(Z\dot{z}+P'+Q_{,})\,dx\,dy$$

ove le Z, P, Q significano ciò che si è dichiarato nel paragrafo 394. A questa ultima espressione della variazione $\int\int\dot{f}dx\,dy$ si può dare anco la forma seguente

$$\int\int Z\dot{z}\,dx\,dy+\int(P_1-P_0)\,dy+\int(Q_1-Q_0)\,dx$$

ove P_1, P_0 sono i valori della P corrispondenti ai limiti della primitiva rispetto alla x, e Q_1, Q_0 i valori della Q corrispondenti ai limiti di quella rispetto alla y.

398. Vogliasi in secondo luogo la variazione della primitiva duplicata $\iint f\,dx\,dy$ estesa, rispetto alla x dalla x_0 alla x_1, e rispetto alla y dalla y_0 alla y_1, ammesso però, che la primitiva analoga della variata della f debba essere estesa per rispetto alla x dalla $x_0+\nu\dot{x}_0+\frac{\nu^2}{2}\ddot{x}_0+$ecc., alla $x_1+\nu\dot{x}_1+\frac{\nu^2}{2}\ddot{x}_1+$ecc., e per rispetto alla y dall'

$$y_0+\nu\dot{y}_0+\frac{\nu^2}{2}\ddot{y}_0+\text{ecc., all' } y_1+\nu\dot{y}_1+\frac{\nu^2}{2}\ddot{y}_1+\text{ecc.}$$

La $F(t,u)$ rappresenti una funzione formata colle variabili t, u, come la $f+\nu\dot{f}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{f}+$ ecc. variata sopra esposta della f è formata colle x, y; e la primitiva della variata della $\iint f\,dx\,dy$ sarà $\iint F(t,u)\,dt\,du$ estesa da $t=x_0+\nu\dot{x}_0+\frac{\nu^2}{2}\ddot{x}_0+$ecc. a $t=x_1+\nu\dot{x}_1+\frac{\nu^2}{2}\ddot{x}_1+$ecc., e da $u=y_0+\nu\dot{y}_0+\frac{\nu^2}{2}\ddot{y}_0+$ecc. ad $u=y_1+\nu\dot{y}_1+\frac{\nu^2}{2}\ddot{y}_1+$ecc.

Trasformisi la primitiva $\iint F(t,u)\,dt\,du$ in un'altra, nella quale le variabili siano x, y aventi colle t, u le relazioni seguenti

$$t=x+\nu\dot{x}+\text{ecc.},\quad u=y+\nu\dot{y}+\text{ecc.},$$

ove le $\dot{x}, \dot{y}$--- possono essere funzioni qualsivogliono di entrambe le variabili x, y; e pel paragrafo 245 avrassi la

$$\iint\big(t'(x)u'(y)-t'(y)u'(x)\big)F(x+\nu\dot{x}+\text{ecc.},\ y+\nu\dot{y}+\text{ecc.})\,dx\,dy,$$

la quale si dovrà estendere dalla $x=x_0$ alla $x=x_1$, e dalla $y=y_0$ alla $y=y_1$, come la proposta $\iint f\,dx\,dy$.

Sostituendo nel binomio $t'(x)u'(y)-t'(y)u'(x)$ i valori delle derivate $t'(x)$, $u'(y)$, $t'(y)$, $u'(x)$, che sono

$$1+\nu\dot{x}'+\text{ecc.},\ 1+\nu\dot{y}_{,}+\text{ecc.},\ \nu\dot{x}_{,}+\text{ecc.},\ \nu\dot{y}'+\text{ecc.}$$

esso si riduce ad $1+\nu(\dot{x}'+\dot{y}_{,})+$ecc.; e sviluppando la $F(x+\nu\dot{x}+\text{ecc.}, y+\nu\dot{y}+\text{ecc.})$, hassi $F(x,y)+\nu(\dot{x}F'+\dot{y}F_{,})+$ecc.; e per tanto la primitiva della variata della f sarà quella della $\big(1+\nu(\dot{x}'+\dot{y}_{,})+\text{ecc.}\big)\big(F+\nu(\dot{x}F'+\dot{y}F_{,})+\text{ecc.}\big)$ o della equivalente

$$F(x,y)+\nu\big((\dot{x}'+\dot{y}_{,})F+\dot{x}F'+\dot{y}F_{,}\big)+\text{ecc.},$$

cioè la variata della primitiva proposta sarà

$$\iint F(x,y)\,dx\,dy+\nu\iint\big((\dot{x}F)'+(\dot{y}F)_{,}\big)\,dx\,dy+\text{ecc.}$$

In questa, pongasi in luogo della funzione F il suo valore, che è evidentemente $f+\nu(\dot{f})+$ ecc. si ordini la quantità risultante rispetto alle potenze solite della ν; e si avrà

$$\iint f\,dx\,dy+\nu\iint\big((\dot{f})+(\dot{x}f)'+(\dot{y}f)_{,}\big)\,dx\,dy+\text{ecc.}$$

ove le primitive debbonsi estendere tutte, quelle rispetto alla x dalla $x=x_0$, alla $x=x_1$, e le altre dalla $y=y_0$ alla $y=y_1$. Quindi la variazione richiesta sarà

$$\iint\big((\dot{f})+(\dot{x}f)'+(\dot{y}f)_{,}\,dx\,dy,\ \text{ossia}$$
$$\iint\big(Z\dot{z}+(\dot{x}f+P)'+(\dot{y}f+Q)_{,}\big)\,dx\,dy,$$

dove la primitiva duplicata sia stesa tra i limiti anzidetti.

399. Vogliasi in terzo luogo la variazione della primitiva

$$\iint f(x, y, z, x', x_{,}, y', y_{,}, z', z_{,}, x'', x'_{,}, x_{,,}, ---),$$

ove le derivate delle x, y, z si intendono prese rispetto a due variabili indipendenti qualsivogliono, e le primitive prese rispetto a queste medesime due variabili, ed estese tra limiti dati di queste variabili stesse.

Ponendo nella $\iint f$ in vece delle x, y, z le loro variate

$$x+\nu\dot{x}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{x}+\text{ecc.},\ y+\nu\dot{y}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{y}+\text{ecc.},\ z+\nu\dot{z}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{z}+\text{ecc.}$$

ed in luogo delle $x', x_{,}, y', y_{,}, z'$, - - - le derivate analoghe di queste medesime variate, e sviluppando la risultante variata della f, avrassi

$$\iint\left(f+\nu\dot{f}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{f}+\text{ecc.}\right) \text{ ossia } \iint f+\nu\iint\dot{f}+\frac{\nu^2}{2}\iint\ddot{f}+\text{ecc.}$$

dove
$$\dot{f}=f'(x)\dot{x}+f'(y)\dot{y}+f'(z)\dot{z}+f'(x')\dot{x}'+f'(x_{,})\dot{x}_{,}$$
$$+f'(y')\dot{y}'+f'(y_{,})\dot{y}_{,}+f'(z')\dot{z}'+f'(z_{,})\dot{z}_{,}$$
$$+f'(x'')\dot{x}''+f'(x'_{,})\dot{x}'_{,}+\text{ecc.}$$

- .

Quindi la variazione richiesta, sarà la primitiva duplicata di questo valore della $\dot{f}$ estesa tra i medesimi limiti della $\iint f$.

400. Se la primitiva duplicata della variata della funzione f dovesse essere eguale a quella della f medesima, avrebbonsi evidentemente le equazioni

$$\iint\dot{f}=0,\ \iint\ddot{f}=0,\ - - -;$$

e se questa proprietà si dovesse verificare, qualunque fossero i limiti delle primitive, con queste equazioni sussisterebbero anco le seguenti

$$\dot{f}=0,\ \ddot{f}=0,\ - - -,$$

loro derivate parziali del second' ordine; anzi la $\dot{f}=0$ non che le successive sarebbero altrettante conseguenze della $f=0$. Dimodochè la invariabilità della primitiva duplicata della variata $f+\nu\dot{f}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{f}+$ ecc. sarebbe rappresentata colla sola equazione $\dot{f}=0$.

401. Per ultimo troviamo la variazione della primitiva triplicata

$$\iiint f(x, y, z, u, u', u_{,}, {}'u, u'', u'_{,}, {}'u', - - -)\,dx\,dy\,dz,$$

ove i simboli $u', u_{,}, {}'u, u'', u'_{,}, {}'u'$, - - - significano le quantità

$$\left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{du}{dy}\right), \left(\frac{du}{dz}\right), \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right), \left(\frac{d^2u}{dxdz}\right), - - -$$

derivate parziali della u prese rispetto alle x, y, z variabili indipendenti.

Se le x, y, z non hanno variate, ed i limiti della primitiva triplicata della variata della f siano gli stessi di quelli della $\iiint f dxdydz$ la variazione $\iiint f dxdydz$ evidentemente sarà la primitiva $\iiint \dot{f}\,dx\,dy\,dz$, dove

$$\dot{f}=f'(u)\dot{u}+f'(u')\dot{u}'+f'(u_{,})\dot{u}_{,}+f'({}'u){}'\dot{u}+f'(u'')\dot{u}''$$
$$+f'(u'_{,})\dot{u}'_{,}+f'({}'u'){}'\dot{u}'+\text{ecc.}$$

Non trovo la variazione della $\iiint f\,dx\,dy\,dz$, pel caso che la primitiva della variata debbasi estendere dalle

$$x=x_0+\nu\dot{x}_0+\text{ecc.},\ y=y_0+\nu\dot{y}_0+\text{ecc.},\ z=z_0+\nu\dot{z}_0+\text{ecc.}$$

alle

$$x=x_1+\nu\dot{x}_1+\text{ecc.},\ y=y_1+\nu\dot{y}_1+\text{ecc.},\ z=z_1+\nu\dot{z}_1+\text{ecc.}$$

mentre la $\iiint f\,dx\,dy\,dz$ debbasi estendere dalle x, y, z eguali alle x_0, y_0, z_0 alle x, y, z eguali alle x_1, y_1, z_1; perchè essa è facile ad ottenersi, e d'altronde si può essa desumere da ciò che segue.

402. Vogliasi la variazione della

$$\iiint f(x, y, z, u', u_{,}, {}'u, u'', u'_{,}, {}'u', {}'u_{,}, {}''u, - - -)\,dx\,dy\,dz,$$

nella ipotesi, che la variata debba essere la primitiva

$$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int f\left(p, q, r, s, s'(p), s'(q), s'(r), s''(p), \left(\frac{d^2 s}{dp\,dq}\right),\right.$$
$$\left.\left(\frac{d^2 s}{dp\,dr}\right), s''(q), ---\right) dp\,dq\,ds$$

ove le p, q, r, s esprimono le variate delle x, y, z, u cioè le quantità

$$x+\nu\dot{x}+\text{ecc.},\ y+\nu\dot{y}+\text{ecc.},\ z+\nu\dot{z}+\text{ecc.},\ u+\nu\dot{u}+\text{ecc.}$$

La primitiva della qui esposta variata sarà (§ 247) eguale alla primitiva del prodotto di

$$f\left(x+\nu\dot{x}+\text{ecc.},\ y+\nu\dot{y}+\text{ecc.},\ z+\nu\dot{z}+\text{ecc.},\right.$$
$$\left.u+\nu\dot{u}+\text{ecc.},\ u'+\nu\dot{u}'+\text{ecc.}, ---\right)$$

pel sestinomio

$$p'(x)\,q'(y)\,r'(z)+p'(z)\,q'(x)\,r'(y)+p'(y)\,q'(z)\,r'(x)$$
$$-\,p'(x)\,q'(z)\,r'(y)-p'(y)\,q'(x)\,r'(z)-p'(z)\,q'(y)\,r'(x)$$

presa rispetto alle x, y, z ed estesa tra i medesimi limiti della

$$\int\!\!\int\!\!\int f(x, y, z, u, u', u_{,}, {}'u, u'', u'_{,}, {}'u', ---)\,dx\,dy\,dz.$$

Ma dai valori delle p, q, r si desumono

$$p'(x)=1+\nu\dot{x}'+\text{ecc.},\ p'(y)=\nu\dot{x}_{,}+\text{ecc.},\ p'(z)=\nu\,{}'\dot{x}+\text{ecc.},$$
$$q'(y)=1+\nu\dot{y}_{,}+\text{ecc.},\ q'(x)=\nu\dot{y}'+\text{ecc.},\ q'(z)=\nu\,{}'\dot{y}+\text{ecc.},$$
$$r'(z)=1+\nu\,{}'\dot{z}+\text{ecc.},\ r'(x)=\nu\dot{z}'+\text{ecc.},\ r'(y)=\nu\dot{z}_{,}+\text{ecc.},$$

i quali riducono, il sestinomio secondo fattore dell' anzidetto prodotto, ad

$$1+\nu\,(\dot{x}'+\dot{y}_{,}+{}'\dot{z})+\text{ecc.};$$

e d'altronde lo sviluppo del primo fattore dello stesso prodotto, è

$$f+\nu\left(f'(x)\,\dot{x}+f'(y)\,\dot{y}+f'(z)\,\dot{z}+f'(u)\,\dot{u}+f'(u')\,\dot{u}'\right.$$
$$\left.+f'(u_{,})\,\dot{u}_{,}+f'({}'u)\,{}'\dot{u}+\text{ecc.}\right)+\text{ecc.}$$

ossia $f+\nu\dot{f}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{f}+\text{ecc.}$, per cui il prodotto medesimo risulta

$$(f+\nu\dot{f}+\text{ecc.})\left(1+\nu\,(\dot{x}'+\dot{y}_{,}+{}'\dot{z})+\text{ecc.}\right) \text{ ossia}$$
$$f+\nu\left(\dot{f}+(\dot{x}'+\dot{y}_{,}+{}'\dot{z})f\right)+\text{ecc.};$$

adunque la variata della primitiva di cui si parla risulterà

$$\int\!\!\int\!\!\int f\,dx\,dy\,dz+\nu\int\!\!\int\!\!\int\left(\dot{f}+(\dot{x}'+\dot{y}_{,}+{}'\dot{z})f\right)dx\,dy\,dz+\text{ecc.};$$

e conseguentemente la variazione richiesta sarà

$$\int\!\!\int\!\!\int\left(\dot{f}+(\dot{x}'+\dot{y}_{,}+{}'\dot{z})f\right)dx\,dy\,dz.$$

Sostituendo in questa variazione in luogo della $\dot{f}$ il suo valore $(\dot{f})+\dot{x}f'+\dot{y}f_{,}+\dot{z}\,{}'f$, essa si riduce alla seguente

$$\int\!\!\int\!\!\int\left((\dot{f})+(\dot{x}f)'+(\dot{y}f)_{,}+{}'(\dot{z}f)\right)dx\,dy\,dz \text{ ossia}$$
$$\int\!\!\int\!\!\int(\dot{f})\,dx\,dy\,dz+\int\!\!\int\dot{x}f\,dy\,dz+\int\!\!\int\dot{y}f\,dx\,dz+\int\!\!\int\dot{z}f\,dx\,dy.$$

Alla medesima variazione dianzi trovata, evidentemente si può dare anco la forma

$$\int\!\!\int\!\!\int\left(\dot{f}+(\dot{x}f)'+(\dot{y}f)_{,}+{}'(\dot{z}f)-\dot{y}f_{,}-\dot{x}f'-\dot{z}\,{}'f\right)dx\,dy\,dz$$

ovvero la

$$\int\!\!\int\!\!\int(\dot{f}-\dot{x}f'-\dot{y}f_{,}-\dot{z}\,{}'f)\,dx\,dy\,dz$$
$$+\int\!\!\int\dot{x}f\,dy\,dz+\int\!\!\int\dot{y}f\,dx\,dz+\int\!\!\int\dot{z}f\,dx\,dy,$$

la quale si desume pure immediatamente dall' ultima forma datale, sostituendo in questa per $(\dot{f})$ il suo valore $\dot{f}-\dot{x}f'-\dot{y}f_{,}-\dot{z}\,{}'f$.

Se la primitiva $\int\!\!\int\!\!\int f\,dx\,dy\,dz$ e la sua variata dovessero essere eguali tra loro, avrebbesi evidentemente

$$\int\int\int\left(\dot f + (\dot x' + \dot y_{,} + {}'\dot z)f\right) dx\,dy\,dz = 0;$$

e se ciò dovesse verificarsi qualunque fossero i limiti delle tre primitive parziali, si avrebbe la equazione

$$\dot f + (\dot x' + \dot y_{,} + {}'\dot z)f = 0 \text{ ossia } \frac{\dot f}{f} + \dot x' + \dot y_{,} + {}'\dot z = 0,$$

la quale è anco sufficiente per rappresentare una tale proprietà tra la primitiva triplicata di cui si parla e quella della sua variata.

403. Non espongo per le primitive duplicate e per le triplicate gli altri casi analoghi a quelli contemplati rispetto alle primitive semplici, perchè riescono facili a chi abbia concepito ciò che ho detto di queste.

Due sono le applicazioni principali che si fanno delle variazioni l'una alla meccanica e l'altra ai massimi e minimi valori delle primitive definite; noi faremo quest'ultima nella lezione seguente.

LEZIONE III.

Dei massimi e minimi valori delle primitive semplici.

404. Si intenda colla $f(x, y, y', y'', --- y^{(n)})$ o semplicemente colla f una data funzione delle $x, y, y', y'', --- y^{(n)}$, dove la y esprime una funzione indeterminata della x; e coi simboli x_0, x_1 ove sia $x_1 > x_0$ intendansi due valori individuati della x.

Se nella f si ponessero in vece della y differenti funzioni della x, si otterrebbero altrettante funzioni della x medesima, le cui primitive prese rispetto alla x ed estese tutte dalla $x = x_0$ alla $x = x_1$ in generale dif-

ferirebbero l'una dall'altra. Cerchiamo quella funzione della x, valore della y, che corrisponda alla massima o alla minima di queste primitive definite.

Per semplicità avremo segnatamente di mira, sì in questo passo che negli altri suoi analoghi, la massima di tali primitive; e col segno $\int$ continueremo ad intendere la primitiva stessa, estesa dalla $x = x_0$ alla $x = x_1$, di quella quantità, che sarà da esso preceduta; e chiameremo $\phi(x)$ il valore richiesto della y.

405. Si ponga nella f in vece della y la $y + \nu\dot y + \frac{\nu^2}{2}\ddot y +$ ecc. sua variata; e si avrà $f + \nu\dot f + \frac{\nu^2}{2}\ddot f +$ ecc. Pel valore richiesto dovrà essere

$$\int\left(f + \nu\dot f + \frac{\nu^2}{2}\ddot f + \text{ecc.}\right)dx < \int f dx$$

almeno pei valori della variata dell'y prossimi al richiesto, tra i quali vi sono i corrispondenti alla ν prossimi allo *zero*, qualunque sia la variata della y.

La relazione qui esposta equivale alla

$$\nu\int\dot f dx + \frac{\nu^2}{2}\int\ddot f dx + \text{ecc.} < 0,$$

la quale significa (§ 131), che dev'essere $\int\dot f dx = 0$ e $\int\ddot f dx < 0$.

Se in vece del massimo valore della $\int f dx$ si fosse considerato il minimo, si sarebbe trovato $\int\dot f dx = 0$, e $\int\ddot f dx > 0$.

406. Cominceremo a sviluppare la equazione $\int\dot f dx = 0$, che ha luogo sì pel massimo che pel minimo valore della $\int f dx$.

Dal § 379 si ha $\dot f = \dot y Y + T'$, dove

$$Y = f'(y) - f'(y')' + f'(y'')'' - f'(y''')''' + \cdots \pm f'(y^{(n)})^{(n)}, \text{ e}$$

$$T = \dot{y}\overset{1}{Y} + \dot{y}'\overset{2}{Y} + \dot{y}''\overset{3}{Y} + \cdots + \dot{y}^{(n-1)}\overset{n}{Y}, \text{ ed}$$

$$\overset{1}{Y} = f'(y') - f'(y'')' + \cdots \mp f'(y^{(n)})^{(n-1)},$$

$$\overset{2}{Y} = f'(y'') - f'(y''')' + \cdots \pm f'(y^{(n)})^{(n-2)},$$

- -

$$\overset{n}{Y} = f'(y^{(n)});$$

e però la suddetta equazione equivarrà alla

$$\int (\dot{y}Y + T')\,dx = 0,$$

la quale equivale alla seguente $\int \dot{y}Y\,dx + T_1 - T_0 = 0$.

Col simbolo T_1 intendesi il valore della T corrispondente alla $x = x_1$, e col T_0 quello corrispondente alla $x = x_0$. E qui credo di avvertire, che simboli analoghi a questi due si useranno anco per indicare i valori di altre quantità corrispondenti agli x_1, x_0 della x, come si è già fatto nella lezione antecedente.

Per essere

$$T_1 - T_0 = y_1\overset{1}{Y}_1 + \dot{y}_1'\overset{2}{Y}_1 + \dot{y}_1''\overset{3}{Y}_1 + \cdots + \dot{y}_1^{(n-1)}\overset{n}{Y}_1$$
$$- y_0\overset{1}{Y}_0 - \dot{y}_0'\overset{2}{Y}_0 - \dot{y}_0''\overset{3}{Y}_0 - \cdots - \dot{y}_0^{(n-1)}\overset{n}{Y}_0,$$

la $T_1 - T_0$ parte della equazione dianzi trovata, varierà unicamente, col variare i valori delle

$$\dot{y}_0, \dot{y}_1, \dot{y}_0', \dot{y}_1', \dot{y}_0'', \dot{y}_1'', \cdots \dot{y}_0^{(n-1)}, \dot{y}_1^{(n-1)},$$

mentre $\int \dot{y}Y\,dx$, altra parte della equazione medesima, in generale varia anco, variando la serie di quei valori della $\dot{y}$, che corrispondono a quelli della x compresi tra x_0, x_1; vale a dire, le due quantità

$$\int \dot{y}Y\,dx,\ T_1 - T_0$$

sono indipendenti l'una dall'altra, e conseguentemente, per la stessa equazione, sarà separatamente

$$\int \dot{y}Y\,dx = 0, \text{ e } T_1 - T_0 = 0.$$

La prima di queste ultime equazioni, per essere la variazione $\dot{y}$ arbitraria, non può sussistere, se non sia $Y = 0$; giacchè, se ciò non fosse, posto $\dot{y} = \frac{\Delta}{Y}$, avrebbesi $\int \dot{y}Y\,dx = \int \Delta\,dx = 0$ per tutte le infinite funzioni, che si possono rappresentare colla Δ, il che sarebbe manifestamente assurdo. Concludiamo adunque, che, pei valori della y corrispondenti alle massime o minime primitive della funzione $f(x, y, y', y'', \cdots y^{(n)})$ debbono sussistere le due equazioni seguenti

$$Y = 0,\ T_1 - T_0 = 0, \text{ cioè le}$$

$$f'(y) - f'(y')' + f'(y'')'' - \cdots \pm f'(y^{(n)})^{(n)} = 0,$$

$$\dot{y}_1\overset{1}{Y} + \dot{y}_1'\overset{2}{Y}_1 + \dot{y}_1''\overset{3}{Y}_1 + \cdots + \dot{y}_1^{(n-1)}\overset{n}{Y} - \dot{y}_0\overset{1}{Y}_0 - \dot{y}_0'\overset{2}{Y}_0 - \dot{y}_0''\overset{3}{Y} - \cdots - \dot{y}_0^{(n-1)}\overset{n}{Y} = 0.$$

La prima di queste equazioni visibilmente è alle derivate dell' ordine $2\,n$ *esimo*, ed insegna che la $y = \phi(x)$, dovrà essere una sua primitiva; dimodochè, nel valore della y cavato dalla sua primitiva completa, avrassi la forma di una famiglia di funzioni della x, alla quale apparterrà, come caso particolare, la stessa $\phi(x)$ richiesta.

407. Vediamo, come in ogni caso si potrà determinare l'effettiva $\phi(x)$, individuata funzione richiesta, cioè come si potranno determinare le costanti contenute nella primitiva completa della equazione

$$Y = 0,$$

onde conseguire la sua primitiva particolare $y=\varphi(x)$; e per ora limitiamci al caso, che la f contenga le sole x, y, y', che occorre frequentemente.

Per questo caso, le due equazioni a considerarsi sono

$$f'(y)-f'(y')'=0,\ \dot{y}_1 \overset{\mathrm{I}}{Y}_1-\dot{y}_0 \overset{\mathrm{I}}{Y}_0=0, \text{ ove } \overset{\mathrm{I}}{Y}=f'(y').$$

Suppongasi trovata la primitiva completa della prima di queste equazioni; e sciolta rispetto alla y, somministri

$$y=\varphi(x, a, b);$$

dove le a, b esprimono le due costanti arbitrarie.

Se la funzione della x, valore richiesto della y, deve *unicamente* corrispondere ad un massimo ovvero ad un minimo valore della primitiva $\int f(x,y,y')\,dx$, le variazioni $\dot{y}_1, \dot{y}_0$ saranno arbitrarie ed indipendenti affatto l'una dall'altra, per cui la seconda delle esposte equazioni si decomporrà nelle due

$$\overset{\mathrm{I}}{Y}_1=0,\ \overset{\mathrm{I}}{Y}_0=0,$$

le quali significano, che pel valore richiesto della y, i valori della $f'(y')$ corrispondenti l'uno alla $x=x_0$ e l'altro alla $x=x_1$ debbono annullarsi. Quindi, trovata la $f'(y')$, che è la derivata presa rispetto alla y' della funzione $f(x,y,y')$ data, e sostituito in essa per y la $\varphi(x, a, b)$ e per la y' la derivata $\left(\dfrac{d\varphi(x,a,b)}{dx}\right)$; ed eguagliati a *zero* separatamente i valori della risultante funzione in x, a, b corrispondenti l'uno alla $x=x_0$ e l'altro alla $x=x_1$, avransi due equazioni tra le a, b e quantità conosciute, le quali sciolte rispetto alle a, b, daranno per queste costanti, quei valori, che sostituiti nella $\varphi(x, a, b)$ la ridurranno alla $\varphi(x)$ richiesta.

Se la funzione, valore richiesto della y, dovesse corrispondere ad un massimo o minimo valore della primitiva $\int f(x,y,y')\,dx$, ed in oltre essere tra quelli aventi le proprietà rappresentate colle equazioni

$$y_0=g,\ y_1=h,$$

ove g, h esprimono costanti date; in tal caso, i valori della $\dot{y}$ corrispondenti alle x_0, x_1, cioè le $\dot{y}_0$, $\dot{y}_1$ sarebbero nulle; e però la equazione

$$\dot{y}_1 \overset{\mathrm{I}}{Y}_1-\dot{y}_0 \overset{\mathrm{I}}{Y}_0=0$$

sarebbe per sè stessa soddisfatta: si avrebbero però le due seguenti

$$\varphi(x_0,\ a,\ b)=g,\ \varphi(x_1,\ a,\ b)=h,$$

le quali somministrerebbero quei valori per le a, b, che posti nella stessa $\varphi(x, a, b)$, la ridurrebbero alla richiesta $\varphi(x)$.

Se poi dovesse esser soltanto $y_0=g$, cioè fosse data la y_0, e non la y_1, avrebbesi solamente $\dot{y}_0=0$; e la seconda delle suddette equazioni ridurrebbesi alla

$$\dot{y}_1 \overset{\mathrm{I}}{Y}_1=0, \text{ che dà } \overset{\mathrm{I}}{Y}_1 \text{ ossia } f'(y')_1=0;$$

e però le due costanti si dovrebbero determinare collo sciogliere la equazione $\varphi(x_0,\ a,\ b)=g$ combinata con quella, che hassi, eguagliando a *zero* il valore della $f'(y')$ corrispondente alla $y=\varphi(x_1, a, b)$. Altrettanto si dica pel caso, che abbiasi solamente $y_1=h$.

In ultimo, se le y_0, y_1 dovessero soddisfare la equazione data $\xi(y_0, y_1)=0$: formata la equazione sua variazione prima, che risulta $\dot{y}_0\,\xi'(y_0)+\dot{y}_1\,\xi'(y_1)=0$, e con questa eliminata dalla $\dot{y}_1 \overset{\mathrm{I}}{Y}_1-\dot{y}_0 \overset{\mathrm{I}}{Y}_0=0$ o la $\dot{y}_1$, ovvero la y_0, o meglio il loro rapporto, si avrebbe la equazione

$$\overset{\mathrm{I}}{Y}_1\xi'(y_0)-\overset{\mathrm{I}}{Y}_0\xi'(y_1)=0,\ \text{cioè}\ f'(y')_1\xi'(y_0)-f'(y')_0\xi'(y_1)=0:$$

si porrebbero in questa ed anco nella $\xi(y_0, y_1)=0$ per le y_0, y_1, y'_0, y'_1, i valori delle $\phi(x,a,b), \left(\dfrac{d\phi(x,a,b)}{dx}\right)$ corrispondenti alla x eguale ad x_0, x_1; e con ciò avrebbonsi due equazioni per determinare le a, b, e conseguentemente per individuare la $\phi(x,a,b)$, onde ridurla alla richiesta $\phi(x)$.

408. In generale, trovata la primitiva completa della equazione

$$f'(y)-f'(y')'+f'(y'')''----\pm f'(y^{(m)})^{(m)}=0,$$

si individuerà la funzione della x, valore richiesto per la y, determinando le $2n$ costanti arbitrarie in modo di soddisfare la equazione

$$\dot{y}_1\overset{\mathrm{I}}{Y}_1+\dot{y}'_1\overset{\mathrm{I}}{Y}_1+\text{ecc.}-\dot{y}_0\overset{\mathrm{I}}{Y}_0-\dot{y}'_0\overset{\mathrm{I}}{Y}_0-\text{ecc.}=0$$

o questa combinata colle già date tra le $y_0, y_1, y'_0, y'_1, ---$ o colle desumibili da esse.

Le equazioni date tra le $y_0, y_1, y'_0, y'_1, y''_0, ---$ siano

$$A(y_0, y_1, y'_0, ---)=0, B(y_0, y_1, y'_0, y'_1, ---)=0, ---.$$

Si combinino le equazioni $\dot{A}=0$, $\dot{B}=0$, --- cioè le

$$A'(y_0)\dot{y}_0+A'(y_1)\dot{y}_1+A'(y'_0)\dot{y}'_0+\text{ecc.}=0,$$

$$B'(y_0)\dot{y}_0+B'(y_1)\dot{y}_1+B'(y'_0)\dot{y}'_0+\text{ecc.}=0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

alla $T_1-T_0=0$ in modo da eliminare altrettante variazioni contenute in esse; si soddisfaccia la risultante indipendentemente dalle variazioni rimaste; e si avranno tante equazioni, quante sono le variazioni $\dot{y}_0, \dot{y}_1, \dot{y}'_0, \dot{y}'_1, ---$ meno il numero delle date equazioni $A=0$, $B=0$ ---: si pongano sì in queste che nelle risultanti i valori delle $y_0, y_1, y'_0, y'_1, ---$; e si avranno $2n$ equazioni tra le anzidette $2n$ costanti, che sciolte rispetto a queste medesime costanti, somministreranno i valori richiesti di esse.

Per soddisfare quest' ultima ricerca si potrà anco procedere nel modo seguente. Costituiscasi la equazione

$$T_1-T_0+\alpha\dot{A}+\beta\dot{B}+\text{ecc.}=0,$$

ove le α, β, --- sono costanti, si eguaglino a *zero* separatamente i coefficienti delle $2n$ variazioni $\dot{y}_0, \dot{y}_1, \dot{y}'_0, \dot{y}'_1, ---$; e dalle $2n$ equazioni risultanti si elimininsi le costanti $\alpha, \beta, ---$; e si avranno (§ 159) le stesse equazioni ottenute colla eliminazione, dianzi indicata; indi, si continui, come abbiamo detto qui sopra.

Se poi non vi fosse condizione particolare tra le $y_0, y_1, y'_0, y'_1, ---$, le variazioni $\dot{y}_0, \dot{y}_1, \dot{y}'_0, \dot{y}'_1 ---$ sarebbero tutte arbitrarie; e però le $2n$ costanti si dovrebbero determinare mediante le $2n$ equazioni seguenti

$$\overset{1}{Y}_0=0, \overset{2}{Y}_0=0, --- \overset{n}{Y}_0=0, \overset{1}{Y}_1=0, \overset{2}{Y}_1=0, --- \overset{n}{Y}_1=0.$$

409. Se nella funzione f vi fossero, oltre le x, y, y' y'' --- anco le $y_0, y_1, y'_0, y'_1, y''_0$, --- cioè i valori delle y, y', y'', --- corrispondenti ai limiti della primitiva $\int f$, si avrebbe (§ 393)

$$\int\dot{f}dx=\int\dot{y}Ydx+T_1-T_0+\dot{y}_0\int f'(y_0)dx$$
$$+\dot{y}_1\int f'(y_1)dx+\dot{y}'_0\int f'(y'_0)dx+\text{ecc.},$$

e la equazione $\int \dot{f} = 0$ si decomporrebbe nelle due seguenti

$$Y = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{y}_1\left(\overset{1}{Y}_1 + \int f'(y_1)\,dx\right) + \dot{y}'_1\left(\overset{2}{Y}_1 + \int f'(y'_1)\,dx\right) + \text{ecc.} \\ -\dot{y}_0\left(\overset{1}{Y}_0 + \int f'(y_0)\,dx\right) - \dot{y}'_0\left(\overset{2}{Y}_0 + \int f'(y'_0)\,dx\right) - \text{ecc.} \end{array}\right\} = 0$$

e però, trovata la primitiva completa della $Y = 0$, e sostituito il valore della y cavato da essa nelle funzioni $f'(y_0)$, $f'(y_1)$, $f'(y'_0)$, $f'(y'_1)$, $---$; e trovate le primitive definite delle funzioni della x risultanti da tale sostituzione, si procederà alla determinazione delle costanti arbitrarie, contenute nel valore della y per avere la $\phi(x)$, precisamente come si è fatto sopra, cioè col soddisfare l'ultima equazione qui esposta, come si è soddisfatta superiormente la

$$\dot{y}_1\overset{1}{Y} - \dot{y}_0\overset{1}{Y}_0 + \dot{y}'_1\overset{2}{Y}_1 - \dot{y}'_0\overset{2}{Y}_0 + \text{ecc.} = 0.$$

Così, se la quantità, di cui si volesse il massimo o minimo valore, fosse $\int f dx + P + Q + \text{ecc.}$ ove $P, Q, ---$ esprimono funzioni delle $x_0, x_1, y_0, y_1, y'_0, ---$ e la f una qualunque delle già contemplate, la y dovrebbe soddisfare la equazione $\int \dot{f} dx + \dot{P} + \dot{Q} + \text{ecc.} = 0$ cioè le due nelle quali questa si decompone, che sono

$$Y = 0,\ V_1 - V_0 + \dot{P} + \dot{Q} + \text{ecc.} = 0,$$

supposto $\int Y\dot{y}dx + V_1 - V_0$ lo sviluppo della $\int \dot{f} dx$; vale a dire, il valore della y richiesto sarebbe dato da quella primitiva particolare della equazione $Y = 0$, che soddisfacesse anco la $V_1 - V_0 + \dot{P} + \dot{Q} + \text{ecc.} = 0$.

Se la f contenesse solamente le x, y, le $\dot{f}$, $\ddot{f}$ sarebbero

$$\dot{y}f'(y),\ \dot{y}^2 f''(y) + \ddot{y}f'(y);$$

e però la equazione $Y = 0$, per questo caso, risulterebbe $f'(y) = 0$, la quale sciolta rispetto alla y dà immediatamente il valore $\phi(x)$ individuato; dimodochè il valore della y corrispondente al massimo o minimo della primitiva $\int f(x,y)\,dx$ sarebbe quello od almeno uno di quelli dati dalla equazione $f'(y) = 0$.

410. Ora abbiasi, come sopra, la funzione

$$f(x, y, y', y'', --- y^{(m)}),$$

e si abbiano anco le equazioni

$$\xi(x_0, y_0) = 0,\ \lambda(x_1, y_1) = 0,$$

le quali esprimono relazioni, che debbano avere i valori delle x, y, corrispondenti ai limiti della primitiva della f.

In questo caso, assai frequente nelle applicazioni, la primitiva della funzione $f\left(x, \phi(x), \phi'(x), ---\right)$ si deve estendere dalla x eguale alla x_0 cavato dalla equazione $\xi\left(x_0, \phi(x_0)\right) = 0$ alla $x = x_1$ dato dalla equazione $\lambda\left(x_1, \phi(x_1)\right) = 0$; mentre la primitiva della sua variata

$$f(x, \phi + \nu\dot{\phi} + \text{ecc.}, \phi' + \nu\dot{\phi}' + \text{ecc.}, ---)$$

devesi estendere, dal valore della x desunto dalla equazione $\xi\left(x, \phi(x) + \nu\dot{\phi} + \text{ecc.}\right) = 0$, a quello cavato dalla $\lambda\left(x, \phi(x) + \nu\dot{\phi} + \text{ecc.}\right) = 0$, i quali limiti sono in generale differenti dei due antecedenti.

Questi ultimi valori della x, i quali evidentemente si riducono ai primi due, quando in essi si faccia $\nu = 0$, siano

$$x_0 + \nu\dot{x}_0 + \text{ecc.},\ x_1 + \nu\dot{x}_1 + \text{ecc.},$$

cioè siano le variate dei medesimi due x_0, x_1.

Pongasi nella funzione $f(x, y, y', y'', ---)$ in luogo della y la sua variata; e si avrà come superiormente $f + \nu \dot{f} +$ ecc.; e per un momento intendasi colla $F(t)$ una funzione formata colla variabile t, come la $f + \nu \dot{f} +$ ecc. è formata colla x: dovrà essere la primitiva della $F(t)$ presa rispetto alla t ed estesa dalla

$$t = x_0 + \nu \dot{x}_0 + \text{ecc. alla } t = x_1 + \nu \dot{x}_1 + \text{ecc.}$$

minore pel caso del massimo e maggiore pel caso del minimo della primitiva della $f\big(x, \phi(x), \phi'(x), ---\big)$ estesa dalla $x = x_0$ alla $x = x_1$.

Trasformisi la $\int F(t)\,dt$ in un'altra, ove la nuova variabile sia la x, avente colla t la relazione (§ 77) $t = x + \nu \dot{x} +$ ecc., che somministra

$$t_0 = x_0 + \nu \dot{x}_0 + \text{ecc.}, \; t_1 = x_1 + \nu \dot{x}_1 + \text{ecc.};$$

e si avrà $\int F(t)\left(\frac{dt}{dx}\right)dx$ ossia

$$\int (1 + \nu \dot{x}' + \text{ecc.})\, F(x + \nu \dot{x} + \text{ecc.})\, dx;$$

e la anzidetta primitiva presa rispetto alla t ed estesa dalla $t = t_0$ alla $t = t_1$ sarà (§ 86) eguale alla primitiva della

$$(1 + \nu \dot{x}' + \text{ecc.})\, F(x + \nu \dot{x} + \text{ecc.}) \text{ ossia della}$$

$$(1 + \nu \dot{x}' + \text{ecc.})\, \big(F + \nu \dot{x} F'(x) + \text{ecc.}\big)$$

presa rispetto alla x, ed estesa dalla x data dalla equazione $t_0 = x + \nu \dot{x} +$ ecc. a quella data dalla $t_1 = x + \nu \dot{x} +$ ecc. Ma per essere

$$t_0 = x_0 + \nu \dot{x}_0 + \text{ecc., e } t_1 = x_1 + \nu \dot{x}_1 + \text{ecc.},$$

questi ultimi valori della x sono gli stessi x_0, x_1; adunque la $\int F(t)\,dt$ estesa dalla $t = t_0$ alla $t = t_1$ sarà eguale

alla primitiva della quantità

$(1 + \nu \dot{x}' + \text{ecc.})(F + \nu F' \cdot \dot{x} + \text{ecc})$ ossia della $F + \nu(\dot{x} F)' +$ ecc.

estesa dalla $x = x_0$ alla $x = x_1$ cioè tra i medesimi limiti della

$$\int f\big(x, \phi(x), \phi'(x), ---\big)\, dx.$$

Se nell'ultima funzione trovata, si pone per F il suo valore, cioè $f + \nu \dot{f} +$ ecc., essa si riduce alla seguente $f + \nu\big(\dot{f} + (\dot{x} f)'\big) +$ ecc.; e per tanto dovrà essere pel massimo

$$\int f dx + \nu \int \big(\dot{f} + (\dot{x} f)'\big)\, dx + \text{ecc.} < \int f dx,$$

e pel minimo

$$\int f dx + \nu \int \big(\dot{f} + (\dot{x} f)'\big)\, dx + \text{ecc.} > \int f dx;$$

e conseguentemente sì pel massimo che pel minimo sarà (§ 131)

$$\int \big(\dot{f} + (\dot{x} f)'\big)\, dx = 0.$$

Questa equazione pel § 379 equivale alla

$$\int \big(\dot{y} Y + T' + (\dot{x} f)'\big)\, dx = 0,$$

la quale si decompone (§ 406) nelle due seguenti

$$Y = 0, \; T_1 + \dot{x}_1 f_1 - T_0 - \dot{x}_0 f_0 = 0, \text{ cioè}$$

$$f'(y) - f'(y')' + f'(y'')'' - --- \pm f'(y^{(n)})^{(n)} = 0,$$

$$\dot{x}_1 f_1 + \dot{y}_1 \overset{1}{\dot{Y}} + \dot{y}'_1 \overset{2}{\dot{Y}} + \text{ecc.} - \dot{x}_0 f_0 - \dot{y}_0 \overset{1}{\dot{Y}} - \dot{y}'_0 \overset{3}{\dot{Y}} - \text{ecc.} = 0.$$

Le $\dot{y}_1, \dot{y}_0, \dot{y}'_1, \dot{y}'_0, ---$ esistenti in quest' ultima equazione, sono le variazioni delle $y_1, y_0, y'_1, y'_0, ---$ prese nella ipotesi, che la x non abbia variata, per cui sono (§ 384) esse eguali ordinatamente ad

$$\dot{y}_1-\dot{x}_1 y'_1,\ \dot{y}_0-\dot{x}_0 y'_0,\ (\dot{y}_1-\dot{x}_1 y'_1)',\ (\dot{y}_0-\dot{x}_0 y'_0)',\ ---;$$

e per tanto la medesima equazione equivarrà alla seguente

$$\dot{x}_1 f_1-\dot{x}_0 f_0+(\dot{y}_1-\dot{x}_1 y'_1)\overset{1}{Y}_1-(\dot{y}_0-\dot{x}_0 y'_0)\overset{1}{Y}_0$$
$$+(\dot{y}_1-\dot{x}_1 y'_1)'\overset{2}{Y}_1-(\dot{y}_0-\dot{x}_0 y'_0)'\overset{2}{Y}_0+\text{ecc.}=0$$

nella quale le variazioni sono tutte correlative tra loro.

Concludiamo per tanto, che anco pel caso presente, la $y=\phi(x)$ dovrà essere una primitiva della stessa equazione

$$f'(y)-f'(y')'+f'(y'')''-\text{ecc.}=0,$$

e propriamente quella primitiva particolare, che soddisfarà l'ultima equazione esposta ed anco le altre particolari ai limiti, che possano essere date, come sono appunto le due $\xi(x_0, y_0)=0$, $\lambda(x_1, y_1)=0$: analogamente a quello, che si è osservato al § 407.

411. Per manifestare maggiormente, come bisogna regolarsi nell'usare le regole qui esposte, farò vedere, come determinare quella primitiva della $f(x, y, y')$, che è la massima o minima, tra le corrispondenti ai valori della y aventi le proprietà di soddisfare le due date equazioni

$$\xi(x_0, y_0)=0,\ \lambda(x_1, y_1)=0;$$

cioè farò vedere, come individuare il valore della y corrispondente ad essa.

In questo caso si hanno

$$Y=f'(y)-f'(y')',\ \overset{1}{Y}=f'(y'),\ T=\dot{x}f+(\dot{y}-\dot{x}y')\overset{1}{Y};$$

e però le due equazioni saranno

$$f'(y)-f'(y')'=0,$$
$$\dot{x}f_1+(\dot{y}_1-\dot{x}_1 y'_1)\overset{1}{Y}_1-\dot{x}_0 f_0-(\dot{y}_0-\dot{x}_0 y'_0)\overset{1}{Y}_0=0.$$

Siccome la $\xi(x_0, y_0)=0$ non contiene le x_1, y_1, e reciprocamente la $\lambda(x_1, y_1)=0$ non contiene le x_0, y_0; così le variazioni $\dot{x}_0, \dot{y}_0$ saranno indipendenti dalle $\dot{x}_1, \dot{y}_1$; e però la seconda delle due equazioni dianzi esposte si decomporrà nelle seguenti

$$\dot{x}_0 f_0+(\dot{y}_0-\dot{x}_0 y'_0)\overset{1}{Y}_0=0,\ \dot{x}_1 f_1+(\dot{y}_1-\dot{x}_1 y'_1)\overset{1}{Y}_1=0.$$

Ma dalla $\xi(x_0, y_0)=0$ data si ha la equazione $\dot{x}_0\xi'(x_0)+\dot{y}_0\xi'(y_0)=0$ ed anco $\xi'(x_0)+\xi'(y_0)(y'_0)=0$, che danno $\dot{y}_0=(y'_0)\dot{x}_0$; adunque la prima di queste ultime equivarrà alla

$$\dot{x}_0 f_0+\left(\dot{x}_0(y'_0)-\dot{x}_0 y'_0\right)\overset{1}{Y}_0=0,\ \text{ossia}\ f_0+\left((y'_0)-y'_0\right)\overset{1}{Y}_0=0,$$

la quale è tutta formata colle x_0, y_0, y'_0.

Ragionando similmente per l'altro termine della primitiva, si ha la equazione

$$f_1+\left((y'_1)-y'_1\right)\overset{1}{Y}_1=0,$$

tutta formata colle x_1, y_1, y'_1.

Trovata la primitiva completa della

$$f'(y)-f'(y')'=0,$$

e sciolta rispetto alla y, si abbia $y=\psi(x, a, b)$; dove a, b indicano le due costanti arbitrarie a determinarsi per avere il valore richiesto della y.

Sostituendo nelle quattro equazioni

$$\xi(x_0, y_0)=0,\ f_0+\left((y'_0)-y'_0\right)\overset{1}{Y}_0=0,$$
$$\lambda(x_1, y_1)=0,\ f_1+\left((y'_1)-y'_1\right)\overset{1}{Y}_1=0,$$

in luogo delle $y_0, y'_0, y_1, \dot{y}'_1$ ordinatamente le $\psi(x_0, a, b)$, $\psi'(x_0)$, $\psi(x_1, a, b)$, $\psi'(x_1)$, ed eliminando la x_0 dalle due prime risultanti e la x_1 dalle altre due, avransi, due equazioni tra quantità cognite e le costanti a, b, le quali sciolte per rispetto a queste medesime costanti, somministreranno quei valori di esse, che sostituiti nella $\psi(x, a, b)$, la ridurranno alla funzione $\phi(x)$ valore richiesto della y.

Se nella $f(x, y, y')$ porrassi in vece della y il valore trovato cioè $\phi(x)$, ed in luogo della y' la $\phi'(x)$; e si troverà la primitiva della funzione risultante estesa dalla x data dalla equazione $\xi\big(x, \phi(x)\big)=0$ alla x data dalla $\lambda\big(x, \phi(x)\big)=0$, avrassi il massimo o minimo valore di cui si parla.

412. Cerchiamo le funzioni della x, che sono i valori delle y, z, --- corrispondenti alla massima o minima primitiva della data funzione

$$f(x, y, y', y'', \text{---} \, y^{(m)}, z, z', z'', \text{---} \, z^{(n)}, \text{---})$$

tra le infinite sue primitive estese tutte dalla $x=x_0$ alla $x=x_1$.

Si pongano nella funzione f in vece delle y, z, --- richieste rispettivamente $y+\nu\dot{y}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{y}+\text{ecc.}$, $z+\nu\dot{z}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{z}+\text{ecc.}$, --- loro variate; e si avrà $f+\nu\dot{f}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{f}+\text{ecc.}$: dovrà essere per la massima primitiva

$$\int f\,dx+\nu\int\dot{f}\,dx+\frac{\nu^2}{2}\int\ddot{f}\,dx+\text{ecc.}<\int f\,dx,$$

e per la minima

$$\int f\,dx+\nu\int\dot{f}\,dx+\frac{\nu^2}{2}\int\ddot{f}\,dx+\text{ecc.}>\int f\,dx;$$

e però (§ 131), per entrambi i casi, $\int\dot{f}\,dx=0$, e distintamente pel caso della massima primitiva dovrà essere $\int\ddot{f}\,dx<0$ e per quello della minima in vece $\int\ddot{f}\,dx>0$.

Qui pure, come al § 406, contempleremo per ora la $\int\dot{f}\,dx=0$.

Dal § 379 si ha $\dot{f}=\dot{y}Y+\dot{z}Z+\text{ecc.}+T'$, per cui $\int\dot{f}\,dx=\int(\dot{y}Y+\dot{z}Z+\text{ecc.}+T')\,dx$; adunque sarà

$$\int(\dot{y}Y+\dot{z}Z+\text{ecc.}+T')\,dx=0.$$

Ragionando per quest' ultima equazione, come si è ragionato al § 406 avrassi

$$Y\dot{y}+Z\dot{z}+\text{ecc.}=0, \text{ e } T_1-T_0=0;$$

vale a dire, i valori richiesti delle y, z, --- avranno le proprietà di soddisfare queste due equazioni.

Ora se le y, z, --- non avranno nessuna relazione, le $\dot{y}$, $\dot{z}$, --- loro variazioni saranno indipendenti l'una dall'altra; e però la prima delle due equazioni trovate, si decomporrà nelle $Y=0$, $Z=0$, --- cioè nelle seguenti

$$f'(y)-f'(y')'+f'(y'')''-\text{---}\pm f'(y^{(m)})^{(m)}=0,$$
$$f'(z)-f'(z')'+f'(z'')''-\text{---}\pm f'(z^{(n)})^{(n)}=0,$$

- -

le quali sono tante, quante sono le stesse variabili y, z, ---.

I valori delle y, z, ---, desunti dalle primitive complete di queste equazioni, conterranno un numero di costanti doppio dell'$m+n+$ecc. (§ 333), e rappresenteranno famiglie di funzioni, alle quali apparterranno i richiesti valori delle y, z, - - -, la individuata conoscenza dei quali dipenderà unicamente dai corrispondenti valori delle anzidette $2(m+n+$ecc.$)$ costanti. Così, non essendovi relazione tra le

$$y_0, y_1, y'_0, y'_1, y''_0, \text{- - -}\ z_0, z_1, z'_0, z'_1, z''_0, \text{- - -}$$

le variazioni

$$\dot{y}_0, \dot{y}_1, \dot{y}'_0, \dot{y}'_1, \dot{y}''_0, \text{- - -}\ \dot{z}_0, \dot{z}_1, \dot{z}'_0, \dot{z}'_1, \dot{z}''_0, \text{- - -}$$

saranno anch'esse indipendenti l'una dall'altra; e però la equazione $T_1 - T_0 = 0$ altra delle due sopra trovate, si decomporrà nelle $2(m+n+$ecc.$)$ seguenti

$$\overset{1}{Y}_0 = 0,\ \overset{2}{Y}_0 = 0, \text{- - -}\ \overset{m}{Y}_0 = 0,\ \overset{1}{Y}_1 = 0,\ \overset{2}{Y}_1 = 0, \text{- - -}\ \overset{m}{Y}_1 = 0,$$

$$\overset{1}{Z}_0 = 0,\ \overset{2}{Z}_0 = 0, \text{- - -}\ \overset{n}{Z}_0 = 0,\ \overset{1}{Z}_1 = 0,\ \overset{2}{Z}_1 = 0, \text{- - -}\ \overset{n}{Z}_1 = 0,$$

\- -

dimodochè gli occorrenti valori delle $2(m+n+$ecc.$)$ costanti, saranno quelli, che soddisfaranno queste ultime equazioni. E però, ponendo nelle

$$\overset{1}{Y}, \overset{2}{Y}, \text{- - -}\ \overset{m}{Y}, \overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}, \text{- - -}\ \overset{n}{Z}, \text{- - -}$$

in luogo delle y, z, - - - i rispettivi loro valori desunti dalle suddette primitive complete, e nelle $m+n+$ecc. risultanti funzioni della x e delle $2(m+n+$ecc.$)$ costanti, facendovi $x = x_0$, ed $x = x_1$, ed eguagliando a *zero* separatamente le $2(m+n+$ecc.$)$ quantità risultanti, si avranno $2(m+n+$ecc.$)$ equazioni, le quali sciolte rispetto alle costanti, daranno quei valori di esse, che posti nei medesimi anzidetti valori delle y, z, - - - somministreranno le individuate funzioni della x, valori richiesti delle y, z, - - -.

Se le funzioni della x valori delle y, z, - - -, che debbono rendere massima o minima la $\int f dx$, dovessero essere tra quelle, i cui valori corrispondenti agli estremi della primitiva stessa, avessero relazioni date, le costanti suddette si determinerebbero col metodo seguente.

Siano

$$A(y_0, y_1, y'_0, \text{- - -}) = 0,\ B(y_0, y_1, y'_0, \text{- - -}) = 0, \text{- - -}$$

le equazioni esprimenti le relazioni date tra le y_0, y_1, y'_0, - - - z_0, z_1, z'_0, - - -.

Si combinino le equazioni $\dot{A} = 0$, $\dot{B} = 0$, - - - alla $T_1 - T_0 = 0$ talmente da eliminare tante delle variazioni $\dot{y}_0$, $\dot{y}_1$, $\dot{y}'_0$, - - - $\dot{z}_0$, $\dot{z}_1$, $\dot{z}'_0$, - - -, quante sono le stesse prime equazioni; indi eguaglinsi a *zero* i coefficienti delle variazioni rimaste nella risultante, ed avransi $2(m+n+$ecc.$)$ equazioni *meno* il numero delle $A = 0$, $B = 0$, - - -; e però tra le une e le altre avransi ancora $2(m+n+$ecc.$)$ equazioni.

Sostituiscansi in tutte queste $2(m+n+$ecc.$)$ equazioni, in luogo delle y_0, y_1, y'_0, - - - z_0, z_1, z'_0, - - - i loro valori cavati dalle primitive complete delle $Y = 0$, $Z = 0$, - - -; e si otterranno $2(m+n+$ecc.$)$ equazioni, sufficienti per determinare le costanti, e conseguentemente le funzioni individuate della x, valori richiesti delle y, z, - - -.

415\. Ora si vogliano i valori delle y, z, u, - - - corrispondenti alla massima o minima primitiva della funzione

$$f(x, y, y', y'', \text{- - -}\ z, z', z'', \text{- - -}, u, u', \text{- - -})$$

tra quelli però, che hanno la proprietà rappresentata colla data equazione

$$F(x, y, y', \text{- - -}\ z, z', \text{- - -}, u, u', \text{- - -}) = 0.$$

Ammesso, che le variate delle y, z, - - - siano tra quelle volute dalla equazione $F=0$, rimanendo esse ancora in gran parte arbitrarie, coi medesimi ragionamenti fatti superiormente avrassi, pei valori richiesti, la equazione $\int \dot{f} dx = 0$, ove però le variazioni $\dot{y}, \dot{y}', \dot{y}''$, - - - $\dot{z}, \dot{z}', \dot{z}''$, - - -, che entrano in essa, avranno (§ 382) la relazione espressa dalla equazione $\dot{F}=0$; cosicchè, pei valori richiesti delle y, z, - - -, avranno luogo insieme le due equazioni

$$\int \dot{f} dx = 0, \quad \dot{F} = 0.$$

Queste due equazioni insegnano, che, pei detti valori delle y, z, - - - sussisterà anco la seguente

$$\int (\dot{f} + \lambda \dot{F})\, dx = 0,$$

qualunque quantità esprima la λ; purchè le $\dot{y}, \dot{y}', \dot{y}''$, - - - $\dot{z}, \dot{z}'$, - - - $\dot{u}, \dot{u}'$, - - - soddisfacciano la $\dot{F}=0$, cioè la

$$\dot{y} F'(y) + \dot{y}' F'(y') + \text{ecc.} + \dot{z} F'(z) + \dot{z}' F'(z') + \text{ecc.}$$
$$+ \dot{u} F'(u) + \dot{u}' F'(u') + \text{ecc.} = 0.$$

Essendo (§ 390)

$$\dot{f} + \lambda \dot{F} = \big(Y + (Y)\big)\dot{y} + \big(Z + (Z)\big)\dot{z} + \text{ecc.} + T' + (T');$$

la equazione $\int (\dot{f} + \lambda \dot{F})\, dx = 0$ si ridurrà alla

$$\int \big\{ \big(Y + (Y)\big)\dot{y} + \big(Z + (Z)\big)\dot{z} + \text{ecc.} \big\} dx + T_1 + (T_1) - T_0 - (T_0) = 0:$$

lo ripeto i valori richiesti delle y, z, - - - avranno questa proprietà, purchè le $\dot{y}, \dot{y}', \dot{y}''$, - - - $\dot{z}, \dot{z}'$, - - - soddisfacciano la equazione $\dot{F}=0$.

Qualunque sia la relazione delle $\dot{y}, \dot{y}', \dot{y}''$, - - - $\dot{z}, \dot{z}'$, - - - $\dot{u}, \dot{u}'$, - - - emergente da quest'ultima equazione,

la quantità $T_1 + (T_1) - T_0 - (T_0)$ varia unicamente col variare quei valori delle sue componenti, che corrispondono ai limiti della primitiva $\int \dot{f} dx$, mentre la

$$\int \big\{ \big(Y + (Y)\big)\dot{y} + \big(Z + (Z)\big)\dot{z} + \text{ecc.} \big\} dx$$

può variare col variare delle sue componenti per tutta la estensione della primitiva stessa; e però l'una di queste quantità sarà indipendente dall'altra. Quindi la equazione ultima trovata equivarrà alle due seguenti

$$\int \big\{ \big(Y + (Y)\big)\dot{y} + \big(Z + (Z)\big)\dot{z} + \text{ecc.} \big\} dx = 0,$$
$$T_1 + (T_1) - T_0 - (T_0) = 0$$

ove la λ è tuttora arbitraria.

Disponendo di questa funzione arbitraria in modo di soddisfare la equazione $Y + (Y) = 0$, la prima delle due qui trovate si riduce alla

$$\int \big\{ \big(Z + (Z)\big)\dot{z} + \big(U + (U)\big)\dot{u} + \text{ecc.} \big\} dx = 0.$$

Ma dalla equazione $\dot{F}=0$ risulta che una delle variazioni $\dot{y}, \dot{z}, \dot{u}$, - - - è dipendente dalle altre e queste fra loro indipendenti; adunque, tenuta la $\dot{y}$ funzione delle $\dot{z}, \dot{u}$, - - -, queste saranno indipendenti l'una dall'altra; e conseguentemente la equazione ultima esposta si decomporrà nelle

$$Z + (Z) = 0, \quad U + (U) = 0, \; - - - .$$

Vale a dire, i valori richiesti delle y, z, u, - - - avranno le proprietà di soddisfare, oltre la equazione data

$$F(x, y, y', - - - z, z', - - - u, u', - - -) = 0$$

anco le seguenti

$$Y + (Y) = 0, \; Z + (Z) = 0, \; U + (U) = 0, - - -,$$

ove la λ è quantità da eliminarsi; e propriamente saranno essi quelli, che si avranno, sciogliendo quelle primitive particolari di queste equazioni desunte dalle complete, dando alle costanti contenute in esse quei valori, che soddisfaranno la equazione

$$T_1 + (T_1) - T_0 - (T_0) = 0.$$

414. Per vedere, come il numero delle costanti contenute nelle primitive complete delle suddette equazioni eguaglia quello delle condizioni a soddisfarsi per verificare la equazione

$$T_1 + (T_1) - T_0 - (T_0) = 0,$$

e nel medesimo tempo, come bisogna regolarsi, per determinarle, supponghiamo, che nella f vi siano solamente le

$$x, y, z, y', z', --- y^{(m)}, z^{(m)},$$

e nella F le

$$x, y, z, y', z', --- y^{(n)}, z^{(n)};$$

e distinguiamo il caso di $m > n$ da quello di $m <$ od $= n$.

Nel primo di questi casi, eliminando le z, λ e le loro derivate dalle tre equazioni

$$Y + (Y) = 0, \ Z + (Z) = 0, \ F = 0,$$

si avrà una equazione tra le $x, y', y'', --- y^{(2m+2n)}$ (§ 335), per cui le primitive complete di esse conterranno $2m + 2n$ costanti arbitrarie.

Nel secondo caso, la equazione risultante della eliminazione delle λ, z essendo dell'ordine $4n$, le primitive complete conterranno $4n$ costanti arbitrarie.

In questo medesimo ultimo caso, la equazione $T_1 + (T_1) - T_0 - (T_0) = 0$ conterrà le $4n$ variazioni

$$\dot{y}_0, \dot{y}'_0, --- \dot{y}_0^{(n-1)}, \dot{y}_1, \dot{y}'_1, --- \dot{y}_1^{(n-1)},$$

$$\dot{z}_0, \dot{z}'_0, --- \dot{z}_0^{(n-1)}, \dot{z}_1, \dot{z}'_1, --- \dot{z}_1^{(n-1)};$$

e però, eguagliando a *zero* separatamente i loro coefficienti, si avranno $4n$ equazioni tra i valori delle $y, y', --- z, z', ---$ corrispondenti agli estremi della primitiva, cioè si avranno tante equazioni, quante sono le costanti a determinarsi.

Nel primo caso, la medesima equazione

$$T_1 + (T_1) - T_0 - (T_0) = 0$$

contiene le variazioni

$$\dot{y}_0, \dot{y}'_0, --- \dot{y}_0^{(m-1)}, \dot{y}_1, \dot{y}'_1, --- \dot{y}_1^{(m-1)},$$

$$\dot{z}_0, \dot{z}'_0, --- \dot{z}_0^{(m-1)}, \dot{z}_1, \dot{z}'_1, --- \dot{z}_1^{(m-1)}.$$

Ma dalla $F = 0$ si hanno le $\dot{z}^{(n)}, \dot{z}^{(n+1)}, --- \dot{z}^{(m)}$, formate colle $\dot{z}, \dot{z}', --- \dot{z}^{(n-1)}, \dot{y}, \dot{y}', --- \dot{y}^{(m)}$; e però le $\dot{z}_0^{(n)}, \dot{z}_0^{(n+1)}, --- \dot{z}_0^{(m-1)}$, colle $\dot{z}_0, \dot{z}'_0, --- \dot{z}_0^{(n-1)}, \dot{y}_0, \dot{y}'_0, --- \dot{y}_0^{(m-1)}$, e le $\dot{z}_1^{(n)}, \dot{z}_1^{(n+1)}, --- \dot{z}_1^{(m-1)}$, colle $\dot{z}_1, \dot{z}'_1, --- \dot{z}_1^{(n-1)}, \dot{y}_1, \dot{y}'_1, --- \dot{y}_1^{(m-1)}$; adunque sostituendo nella equazione

$$T_1 + (T_1) - T_0 - (T_0) = 0$$

questi valori delle $\dot{z}_0^{(n)}, \dot{z}_0^{(n+1)}, \dot{z}_0^{(n+2)}, --- \dot{z}_0^{(m-1)}, \dot{z}_1^{(n)}, \dot{z}_1^{(n+1)}, \dot{z}_1^{(n+2)}, --- \dot{z}_1^{(m-1)}$, essa si ridurrà a contenere le sole $2m + 2n$ variazioni

$$\dot{y}_0, \dot{y}_1, \dot{y}'_0, \dot{y}'_1, --- \dot{y}_0^{(m-1)}, \dot{y}_1^{(m-1)},$$

$$\dot{z}_0, \dot{z}_1, \dot{z}'_0, \dot{z}'_1, --- \dot{z}_0^{(n-1)}, \dot{z}_1^{(n-1)}.$$

Quindi eguagliando a *zero* separatamente i coefficienti di esse, avransi tante equazioni tra le $y_0, y_1, y'_0, y'_1, --- z_0, z_1, z'_0, z'_1, ---$, quante sono le costanti contenute nelle primitive complete suddette.

Sostituendo nelle equazioni ottenute, collo eguagliare a *zero* i coefficienti delle variazioni $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$, $\dot{y}_0$, - - -, i valori delle y, z desunti dalle primitive complete delle

$$Y+(Y)=0,\ Z'+(Z)=0,\ F=0,$$

avransi sempre tante equazioni, quante saranno le costanti a determinarsi.

Queste $2(m+n)$ equazioni, e le $4n$ pel caso antecedente, sono quelle, che si dovranno soddisfare mediante opportuna determinazione delle costanti, onde ottenere quei valori di esse, che corrispondono ai valori richiesti delle y, z.

415. Se i limiti della $\int f dx$ fossero variabili, i valori delle y, z, - - - richiesti apparterrebbero ancora alle famiglie delle funzioni date dalle primitive complete di cui si è parlato qui sopra; ma la equazione a soddisfarsi per determinare le costanti subirebbe un cambiamento.

Di fatto, in questo caso in vece della equazione $\int(\dot{f}+\lambda\dot{F})dx=0$ si avrebbe (§ 410) la seguente

$$\int\left(\dot{f}+\lambda\dot{F}+(\dot{x}f)'+\lambda(\dot{x}F)'\right)dx=0,$$

la quale sviluppata, come si è fatto per l'analoga dell'altro caso, ed osservando, che $F=0$, somministra le

$$Y+(Y)=0,\ Z+(Z)=0,\ U+(U)=0, - - -$$

$$\dot{x}_1 f_1+T_1+(T_1)-\dot{x}_0 f_0-T_0-(T_0)=0;$$

ove le $T, (T)$, qui esprimono i risultamenti, che si hanno, cambiando nei sopra usati, le $\dot{y}, \dot{y}'$, - - - $\dot{z}, \dot{z}'$, - - - ordinatamente nei binomj

$$\dot{y}-\dot{x}y',\ (\dot{y}-\dot{x}y')', - - - \dot{z}-\dot{x}z',\ (\dot{z}-\dot{x}z')', - - -.$$

Da questi cenni si vede anco, che la $F=0$ non porta nessun cambiamento su ciò, che si è già detto superiormente pel caso dei limiti invariabili; dimodochè la sua influenza è la stessa, qualunque siano i limiti della primitiva.

Esempio. Sia

$$f=s'=\sqrt{(1+y'^2+z'^2)},\ \text{ed}\ F(x,y,z)=0:\ \text{sarà}$$

$$Y=-\left(\frac{y'}{s'}\right)',\ Z=-\left(\frac{z'}{s'}\right)',\ \overset{1}{Y}=\frac{y'}{s'},\ \overset{1}{Z}=\frac{z'}{s'},$$

$$(Y)=\lambda F'(y),\ (Z)=\lambda F'(z);\ \text{e però}$$

$$Y+(Y)=\lambda F'(y)-\left(\frac{y'}{s'}\right)',\ Z+(Z)=\lambda F'(z)-\left(\frac{z'}{s'}\right)',\ \text{e}$$

$$T+\dot{x}f=(\dot{y}-\dot{x}y')\frac{y'}{s'}+(\dot{z}-\dot{x}z')\frac{z'}{s'}+\dot{x}s'\ \text{ossia}$$

$$T+\dot{x}f=\frac{1}{s'}(\dot{x}+\dot{y}y'+\dot{z}z');$$

cioè i valori delle y, z, che renderanno l'attuale $\int f dx$ ossia s_1-s_0 minima, soddisfaranno le tre equazioni

$$\lambda F'(y)-\left(\frac{y'}{s'}\right)'=0,\ \lambda F'(z)-\left(\frac{z'}{s'}\right)'=0,$$

$$\frac{1}{s'_1}(\dot{x}_1+\dot{y}_1 y'_1+\dot{z}_1 z'_1)-\frac{1}{s'_0}(\dot{x}_0+\dot{y}_0 y'_0+\dot{z}_0 z'_0)=0.$$

Eliminando la λ dalle prime due si ha la

$$\left(\frac{y'}{s'}\right)F'(z)-\left(\frac{z'}{s'}\right)'F'(y)=0\ \text{ossia}\ \left(\frac{y'}{s'}\right)'+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{z'}{s'}\right)'=0.$$

per essere $\left(\frac{dz}{dx}\right)=-F'(y):F'(z)$, la quale insegna, che, la linea esistente in una superficie ed avente ogni sua parte minore di ogni altra linea che abbia i termini comuni con questa parte stessa, è la medesima contemplata nel § 235. Se i luoghi dei due termini della linea

$s_1 - s_0$ saranno indipendenti l'un dall'altro, la terza equazione trovata si decomporrà nelle due

$$\dot x_1 + \dot y_1 y_1' + \dot z_1 z_1' = 0, \quad \dot x_0 + \dot y_0 y_0' + \dot z_0 z_0' = 0;$$

e se essi saranno due linee, avransi le equazioni (§ 389)

$$1 + (y_1') y_1' + (z_1') z_1' = 0, \quad 1 + (y_0') y_0' + (z_0') z_0' = 0,$$

cioè la linea minima sarà perpendicolare a quelle dei limiti di essa.

Ammesso $F = z^2 + y^2 - \xi(x)^2 = 0$ e però $\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{y}{z}$, la equazione risultante dalla eliminazione della λ riesce

$$z\left(\frac{y'}{s'}\right)' - y\left(\frac{z'}{s'}\right)' = 0 \text{ ossia } \left(\frac{zy' - yz'}{s'}\right)' = 0, \text{ che dà}$$

$$\frac{zy' - yz'}{s'} = a,$$

essendo a costante; e però sarà anco

$$\frac{z}{\xi}\cdot\frac{y'}{s'} - \frac{y}{\xi}\cdot\frac{z'}{s'} = \frac{a}{\xi}.$$

Vale a dire il coseno dell'angolo compreso dalla minima linea, esistente in una superficie di rotazione, e dal parallelo di raggio ξ è eguale ad $\frac{a}{\xi}$; e conseguentemente la linea geodetica per una superficie di rotazione fa coi paralleli di essa angoli, i quali hanno i coseni reciprocamente proporzionali ai raggi dei medesimi paralleli.

416. Bisognerebbe ora trattenersi sui diversi casi, che possono succedere rispetto ai limiti delle primitive contemplate nei due paragrafi precedenti, ma siccome facilmente si possono essi sviluppare dopo l'esposto

(§ 412); così passerò in vece a trovare i massimi o minimi valori della somma delle quantità

$$R, \int f(x, y, z, x', y', ---)\,dr, \int \Delta(p, q, u, p', q', ---)\,d\xi$$

ove le derivate delle $x, y, ---$ sono prese rispetto alla variabile r come la $\int f dr$, e quelle delle $p, q, ---$ rispetto alla ξ come la $\int \Delta\, d\xi$; e le primitive medesime $\int f dr$, $\int \Delta\, d\xi$ debbonsi estendere a limiti differenti: e la quantità R esprime una funzione dei valori sì delle $x, y, z, x', ---$ che delle $p, q, u, p', ---$ corrispondenti i primi ai limiti della $\int f dr$ ed i secondi a quelli della $\int \Delta\, d\xi$, ed anco di altre quantità suscettibili di variazioni.

Ragionando analogamente al § 405, facilmente concludesi che, sì pel massimo che pel minimo valore della somma

$$R + \int f dr + \int \Delta\, d\xi$$

dev'essere $\dot R + \int \dot f dr + \int \dot\Delta\, d\xi = 0$; e che pel massimo deve risultare negativa e pel minimo positiva la $\ddot R + \int \ddot f dr + \int \ddot\Delta\, d\xi$.

Svilupperemo la sola equazione $\dot R + \int \dot f dr + \int \dot\Delta d\xi = 0$. Essendo

$$\dot f = X\dot x + Y\dot y + Z\dot z + T'$$

(§ 406), ed anco

$$\dot\Delta = P\dot p + Q\dot q + U\dot u + V'$$

ove le P, Q, U, V sono rispetto alle Δ p, q, u ciò che le X, Y, Z, T sono per le f, x, y, z, si avrà

$$\int (X\dot x + Y\dot y + Z\dot z)dr + \int (P\dot p + Q\dot q + U\dot u)d\xi$$
$$+ T(r_1) - T(r_0) + V(\xi_1) - V(\xi_0) + \dot R = 0.$$

E siccome la quantità non affetta da primitiva dipende unicamente dai suddetti valori delle x, y, z, z',

$---p, q, u, p', ---$, che corrispondono agli r_1, r_0, ξ_1, ξ_0; la primitiva $\int(\dot{x}X+\dot{y}Y+\dot{z}Z)dr$ dipende dai valori delle $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{x}', ---$ corrispondenti agli infiniti della r compresi tra gli r_0, r_1, e la $\int(P\dot{p}+Q\dot{q}+U\dot{u})d\xi$, dagli analoghi delle $\dot{p}, \dot{q}, \dot{u}$ corrispondenti a quelli della ξ compresi tra i due ξ_0, ξ_1; così la equazione trovata decomporrassi nelle tre

$$\int(X\dot{x}+Y\dot{y}+Z\dot{z})dr=0\,,\quad \int(P\dot{p}+Q\dot{q}+U\dot{u})d\xi=0,$$

$$T(r_1)-T(r_0)+V(\xi_1)-V(\xi_0)+\dot{R}=0:$$

anzi, se le x, y, z ed anco le p, q, u saranno indipendenti le une dalle altre si avranno tanto le equazioni

$$X=0\,,\ Y=0\,,\ Z=0$$

quanto le

$$P=0\,,\ Q=0\,,\ U=0\,,\ ---.$$

Colle prime di queste equazioni avransi le classi o famiglie delle funzioni della r a cui apparterranno le $x, y, z, ---$, e colle altre le funzioni della ξ alle quali apparterranno le $p, q, u, ---$. Mediante poi la equazione

$$T(r_1)-T(r_0)+V(\xi_1)-V(\xi_0)+\dot{R}=0$$

si potranno individuare sì i valori delle $x, y, z ---$ che i valori delle $p, q, r, ---$.

Se le $x, y, z, x', ---$ o le $p, q, u, p' ---$ ovvero le une e le altre non che i loro valori corrispondenti ai limiti delle primitive $\int f dr$, $\int \Delta d\xi$ avessero qualche relazione analoga a quella ammessa nei §§ 412, 413 converrebbe procedere sì per la primitiva $\int f dr$ che per la $\int \Delta d\xi$, in un modo analogo a quello dei paragrafi medesimi.

417. Se la somma

$$R+\int f dr+\int \Delta d\xi$$

dovesse essere costante, avrebbesi tuttavia la equazione

$$\dot{R}+\int \dot{f} dr+\int \dot{\Delta} d\xi=0;$$

e però, se pei significati delle x, y, z, p, q, u riescissero nulle le X, Y, Z, P, Q, U od almeno le $X\dot{x}+Y\dot{y}+Z\dot{z}$, $P\dot{p}+Q\dot{q}+U\dot{u}$ avrebbesi qui pure la equazione

$$\dot{R}+T(r_1)-T(r_0)+V(\xi_1)-V(\xi_0)=0\,,$$

la quale rappresenterà proprietà relative ai limiti delle due primitive $\int f dr$, $\int \Delta d\xi$ ed alle altre quantità, che possono essere nella R.

Di questa specie di ricerche darò due interessanti esempj.

Si immagini una superficie e due punti fuori di essa dalla banda della sua convessità, ed un filo inestendibile, il quale abbia le estremità fissate nei due punti e sia teso talmente da adattarsi in parte alla superficie e da costituire una linea spezzata composta di quattro parti distinte, delle quali la seconda e la terza siano appoggiate interamente alla superficie medesima immaginata.

Le parti estreme di questo filo saranno rettilinee e le due intermedie saranno disposte in linee geodetiche (§ 415) o di minime lunghezze fra le esistenti nella superficie: cambiando posto al filo, cambierà luogo anco il punto comune alle due parti intermedie anzidette, e descriverà una linea nella superficie pressochè come si descrive comunemente la ellisse conica.

Le rette tangenti le due parti intermedie del filo nel loro punto comune fanno angoli eguali colla tangente nello stesso punto alla linea anzidetta, cioè questa linea descrivibile in un modo analogo alla ellisse ha anco una proprietà affatto simile ad una notissima e caratteristica per la ellisse medesima.

Esprimano H, L, M, N le lunghezze delle successive parti del filo; a, b, c le coordinate rettangole della prima sua estremità; g, h, l le coordinate analoghe dell'altra; x, y, z quelle di un punto qualunque della seconda parte; p, q, u le analoghe della terza; ed s, π esprimano le parti delle L, M corrispondenti alle ordinate x, p; in ultimo siano, μ l'arco della curva descritta, ed α, β gli angoli compresi dalla tangente di essa colle due L, M nel punto in comune.

Sarà

$$R = H+N = \sqrt{\left((x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2\right)}+\sqrt{\left((g-p_1)^2+(h-q_1)^2+(l-u_1)^2\right)};$$

ed $f = s' = \sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}$, $\Delta = \pi' = \sqrt{(p'^2+q'^2+z'^2)}$,

e però

$$X\dot{x}+Y\dot{y}+Z\dot{z} = -\left(\frac{x'}{s'}\right)'\dot{x}-\left(\frac{y'}{s'}\right)'\dot{y}-\left(\frac{z'}{s'}\right)'\dot{z} \text{ ossia}$$

$$= -\left(\left(\frac{x'}{s'}\right)'+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)\dot{x}-\left(\left(\frac{y'}{s'}\right)'+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)\dot{y}, \text{ e}$$

$$P\dot{p}+Q\dot{q}+U\dot{u} = -\left(\left(\frac{p'}{\pi'}\right)'+\left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{u'}{\pi'}\right)'\right)\dot{p}-\left(\left(\frac{q'}{\pi'}\right)'+\left(\frac{du}{dq}\right)\left(\frac{u'}{\pi'}\right)'\right)\dot{q},$$

cioè i trinomj $X\dot{x}+Y\dot{y}+Z\dot{z}$, $P\dot{p}+Q\dot{q}+U\dot{u}$ entrambi nulli.

I medesimi valori delle f, Δ danno

$$T = \frac{x'}{s'}\dot{x}+\frac{y'}{s'}\dot{y}+\frac{z'}{s'}\dot{z}, \text{ e } V = \frac{p'}{\pi'}\dot{p}+\frac{q'}{\pi'}\dot{q}+\frac{u'}{\pi'}\dot{u}.$$

Ma $\dot{H} = \dfrac{x_0-a}{H}\dot{x}_0+\dfrac{y_0-b}{H}\dot{y}_0+\dfrac{z_0-c}{H}\dot{z}_0$ ossia

$$\dot{H} = \frac{x'_0}{s'_0}\dot{x}_0+\frac{y'_0}{s'_0}\dot{y}_0+\frac{z'_0}{s'_0}\dot{z}_0$$

per essere la prima parte del filo tangente la seconda; così hassi

$$\dot{N} = -\frac{p'_1}{\pi'_1}\dot{p}_1-\frac{q'_1}{\pi'_1}\dot{q}_1-\frac{u'_1}{\pi'_1}\dot{u}_1$$

per essere la quarta tangente la terza. Adunque sarà

$$\dot{R}-T(r_0)+V(\xi_1) = 0.$$

D'altronde (§ 415) risulta

$$T_1 = \dot{x}_1\mu'\cos.\alpha, \text{ e } V(\xi_0) = -\dot{x}_1\mu'\cos.\beta;$$

e per tanto la equazione $\dot{H}+\dot{L}+\dot{M}+\dot{N}=0$ somministrata dalla inestendibilità del filo si ridurrà alla $(\cos.\alpha-\cos.\beta)\mu'\dot{x}_1=0$, la quale dà $\alpha=\beta$, come si è dichiarato.

Per secondo esempio serva la quistione seguente: una estremità di un filo inestendibile sia fissata ad un punto di una curva esistente in una superficie, e sia teso talmente, che esso costituisca una linea spezzata composta di tre parti distinte, la prima adagiata alla curva, la seconda alla superficie, e la terza nello spazio libera: evidentemente la seconda parte sarà disposta in linea geodetica e la terza in linea retta.

Qualunque posizione abbia il filo, purchè sia teso e composto delle tre parti anzidette, la sua terza parte riescirà normale la superficie luogo di tutte le posizioni della estremità mobile di esso: ecco un'altra proprietà interessante sì per la teorica che per la pratica.

Si chiamano s, t, u le coordinate del punto di contatto tra le prime due parti del filo; x, y z quelle di un punto qualunque della seconda parte; ed x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1 i valori di esse corrispondenti ai termini di questa medesima parte; p, q, r le coordinate analoghe della estremità mobile del filo; in ultimo π, μ, λ esprimano le lunghezze delle stesse tre parti di esso.

Il filo essendo inestendibile, la variazione della sua intera lunghezza sarà *nulla*, e però avrassi la equazione $\dot{\pi}+\dot{\mu}+\dot{\lambda}=0$.

Evidentemente si ha

$$\pi=\int\sqrt{(s'^2+t'^2+u'^2)},\quad \mu=\int\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)},$$

$$\text{e}\quad \lambda=\sqrt{\left((p-x_1)^2+(q-y_1)^2+(r-z_1)^2\right)},$$

ove la prima primitiva si estenda dalla prima estremità del filo al punto corrispondente alle coordinate x_0, y_0, z_0, e la seconda da questo medesimo punto a quello cui corrispondono le coordinate x_1, y_1, z_1.

Essendo π arco di una curva data, la variazione $\dot{\pi}$ sarà la stessa derivata π', cioè sarà

$$\dot{\pi}=\dot{\pi}'=\sqrt{(s'^2+t'^2+u'^2)}.$$

La variazione $\dot{\mu}$ cioè della primitiva $\int\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}$ estesa, come si è detto, avuto riguardo che

$$z'=\left(\frac{dz}{dx}\right)x'+\left(\frac{dz}{dy}\right)y' \text{ risulta}$$

$$-\int\left\{\left(\left(\frac{x'}{\mu'}\right)'+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{z'}{\mu'}\right)'\right)\dot{x}+\left(\left(\frac{y'}{\mu'}\right)'+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{z'}{\mu'}\right)'\right)\dot{y}\right\}$$

$$+\frac{x'_1}{\mu'_1}\dot{x}_1+\frac{y'_1}{\mu'_1}\dot{y}_1+\frac{z'_1}{\mu'_1}\dot{z}_1-\frac{x'_0}{\mu'_0}\dot{x}_0-\frac{y'_0}{\mu'_0}\dot{y}_0-\frac{z'_0}{\mu'_0}\dot{z}_0;$$

ma per essere la linea μ geodetica, le quantità

$$\left(\frac{x'}{\mu'}\right)'+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{z'}{\mu'}\right)',\quad \left(\frac{y'}{\mu'}\right)'+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{z'}{\mu'}\right)'$$

sono *nulle*; e per essere μ toccante della prima parte del filo hansi le equazioni

$$\frac{x'_0}{\mu'_0}=\frac{s'}{\pi'},\ \dot{x}_0=s',\ \frac{y'_0}{\mu'_0}=\frac{t'}{\pi'},\ \dot{y}_0=t',\ \frac{z'_0}{\mu'_0}=\frac{u'}{\pi'},\ \dot{z}_0=u'$$

e però

$$\frac{x'_0}{\mu'_0}\dot{x}_0+\frac{y'_0}{\mu'_0}\dot{y}_0+\frac{z'_0}{\mu'_0}\dot{z}_0=\frac{1}{\pi'}(s'^2+t'^2+u'^2)=\pi';$$

adunque sarà

$$\dot{\mu}=\frac{x'_1}{\mu'_1}\dot{x}_1+\frac{y'_1}{\mu'_1}\dot{y}_1+\frac{z'_1}{\mu'_1}\dot{z}_1-\pi'.$$

Così, per essere

$$\dot{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\left((p-x_1)(\dot{p}-\dot{x}_1)+(q-y_1)(\dot{q}-\dot{y}_1)+(r-z_1)(\dot{r}-\dot{z}_1)\right),$$

ed anco $\dfrac{p-x_1}{\lambda}=\dfrac{x'_1}{\mu'_1}$, $\dfrac{q-y_1}{\lambda}=\dfrac{y'_1}{\mu'_1}$, $\dfrac{r-z_1}{\lambda}=\dfrac{z'_1}{\mu'_1}$ hassi.

$$\dot{\lambda}=-\frac{x'_1}{\mu'_1}\dot{x}_1-\frac{y'_1}{\mu'_1}\dot{y}_1-\frac{z'_1}{\mu'_1}\dot{z}_1+\frac{x'_1}{\mu'_1}\dot{p}+\frac{y'_1}{\mu'_1}\dot{q}+\frac{z'_1}{\mu'_1}\dot{r}.$$

Quindi $\dot{\pi}+\dot{\mu}+\dot{\lambda}$ sarà eguale a

$$\pi' \textit{ più } \frac{x'_1}{\mu'_1}\dot{x}_1+\frac{y'_1}{\mu'_1}\dot{y}_1+\frac{z'_1}{\mu'_1}\dot{z}_1-\pi'$$

$$\textit{più } \frac{x'_1}{\mu'_1}\dot{p}+\frac{y'_1}{\mu'_1}\dot{q}+\frac{z'_1}{\mu'_1}\dot{r}-\frac{x'_1}{\mu'_1}\dot{x}_1-\frac{y'_1}{\mu'_1}\dot{y}_1-\frac{z'_1}{\mu'_1}\dot{z}_1$$

cioè ad $\dfrac{x'_1}{\mu'_1}\dot{p}+\dfrac{y'_1}{\mu'_1}\dot{q}+\dfrac{z'_1}{\mu'_1}\dot{r}$; e per tanto si avrà la equazione $x'_1\dot{p}+y'_1\dot{q}+z'_1\dot{r}=0$ ossia la

$$\left(1+\frac{z'_1}{x'_1}\left(\frac{dr}{dp}\right)\right)\dot{p}+\left(\frac{y'_1}{x'_1}+\frac{z'_1}{x'_1}\left(\frac{dr}{dq}\right)\right)\dot{q}=0$$

per essere $\dot{r}=\left(\dfrac{dr}{dp}\right)\dot{p}+\left(\dfrac{dr}{dq}\right)\dot{q}$. Vale a dire avranno luogo le due seguenti

$$1+\frac{z'_1}{x'_1}\left(\frac{dr}{dp}\right)=0,\quad 1+\frac{z'_1}{y'_1}\left(\frac{dr}{dq}\right)=0,$$

le quali significano appunto che la terza parte del filo è normale la superficie luogo della estremità mobile di esso.

418. Dall'esposto nei §§ 415, 416 si possono desumere le regole per trattare proposizioni in apparenza differenti le une dalle altre: tale è la presente e quelle che si esporranno nei due paragrafi seguenti.

Vogliansi i valori delle y, z, ---, che oltre al soddisfare la equazione $F=0$ (§ 415), rendono massima o minima la quantità

$$R(x_0, x_1, y_0, y_1, y'_0, y'_1, --- z_0, z_1, z'_0, z'_1, ---),$$

e soddisfanno anco le equazioni $A=0$, $B=0$, --- ove le A, B, --- sono formate colle stesse quantità x_0, x_1, y_0, --- colle quali è formata la R.

Per quello che si è detto nei due paragrafi citati dovrà essere

$$\dot{R}+\int\left(\lambda\dot{F}+\lambda(\dot{x}F)'\right)dx=0,$$

cioè pel massimo o minimo avransi le equazioni indefinite

$$(Y)=0,\ (Z)=0,\ ---$$

e la $\dot{R}+(T_1)-(T_0)=0$ particolare per le x_0, x_1, y_0, y_1, y'_0, ---: queste equazioni si desumono immediatamente da quelle esposte nei medesimi paragrafi citati, osservando che le $Y, \overset{1}{Y}, \overset{2}{Y}, --- Z, \overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}, ---$ sono qui *nulle*.

Le primitive complete delle equazioni $(Y)=0$, $(Z)=0$, --- somministreranno le classi delle funzioni della x alle quali apparterranno i richiesti valori delle y, z, ---, i quali si individueranno col soddisfare mediante le costanti contenute in esse le equazioni

$$\dot{R}+(T_1)-(T_0)=0,\ \dot{A}=0,\ \dot{B}=0,\ ---$$

in un modo analogo a quello dichiarato nei §§ 408, 412.

Di questa proposizione è frequente il caso di $R=\int z'$ cioè di $f=z'$, ossia di $R=z_1-z_0$ e che la z_0 sia data.

419. Si voglia in secondo luogo il valore della y, che corrisponde al massimo o minimo della primitiva della funzione $f(x, y, y', y'', --- u)$, ove la u esprime anch'essa la primitiva $\int\psi(x, y, y', ---)dx$.

Essendo $u=\int\psi dx$, si ha l'equazione

$$u'-\psi(x, y, y', y'', ---)=0;$$

e però dovransi trovare i valori delle y, u corrispondenti alla massima o minima $\int f(x, y, y', y'', --- u)dx$, essendovi però tra le y, u la relazione espressa dalla equazione $u'-\psi(x, y, y', y'', ---)=0$: proposizione, che è così ridotta ad essere un caso particolare di quella trattata nel § 415 per cui stimo superfluo l'ulteriore suo sviluppo.

Se nella f vi fossero due o più quantità analoghe alla u, si procederebbe alla determinazione del valore della y corrispondente alla massima o minima $\int f$ come si è indicata pel caso della sola u.

420. In terzo luogo cerchiamo quei valori delle y, z, ---, che corrispondono alla massima o minima primitiva definita della funzione

$$f(x, y, y', y'', --- z, z', z'', ---, ---)$$

e che sono tra quelli, pei quali le analoghe primitive della variata della funzione

$$F(x, y, y', y'', --- z, z', z'', ---, ---)$$

sono tutte eguali tra loro per esempio eguali ad M quantità costante.

Dovendo essere sì la $\int V dx$ che le sue variate eguali ad M costante si ha $\int \dot{V} dx = 0$ (§ 391).

Si chiami s la primitiva indefinita od indeterminata della V; e si avrà $V - s' = 0$ ed anco $\int \dot{V} dx = \dot{s}_1 - \dot{s}_0$: con ciò la ricerca presente è ridotta a trovare i valori delle y, z, --- s corrispondenti alla massima o minima primitiva della funzione f e che soddisfanno la equazione $V - s' = 0$ ed anco la $\dot{s}_1 - \dot{s}_0 = 0$ relativa ai soli limiti della primitiva stessa.

Per l'esposto nel § 413 i valori richiesti delle y, z, - - - s avranno la proprietà di soddisfare la equazione

$$\int \left(\dot{f} + \lambda (\dot{V} - \dot{s}')\right) dx = 0,$$

la quale equivale alla

$$\int \left((Y + (Y))\dot{y} + (Z + (Z))\dot{z} + \text{ecc.} + \lambda' \dot{s} \right) dx$$
$$+ T_1 + (T_1) - \lambda_1 \dot{s}_1 - T_0 - (T_0) + \lambda_0 \dot{s}_0 = 0,$$

che pel § 413 si decompone nelle seguenti indefinite

$$Y + (Y) = 0, \; Z + (Z) = 0, \; ---, \; \lambda' = 0$$

oltre la

$$T_1 + (T_1) - T_0 - (T_0) - \lambda_1 \dot{s}_1 + \lambda_0 \dot{s}_0 = 0.$$

Ma la equazione $\lambda' = 0$ dà $\lambda = a$ *costante*, per cui $-\lambda_1 \dot{s}_1 + \lambda_0 \dot{s}_0$ parte dell'ultima è eguale ad $a(\dot{s}_0 - \dot{s}_1)$ quantità *nulla* per la equazione $\dot{s}_1 - \dot{s}_0 = 0$; adunque i valori richiesti delle y, z, --- saranno tra quelli, che soddisfaranno le equazioni indefinite.

$Y + (Y) = 0$, $Z + (Z) = 0$, ---, e la $T_1 + (T_1) - T_0 - (T_0) = 0$ particolare ai limiti, ove ritengasi $\lambda = a$ costante. Vale

a dire, i valori richiesti delle y, z, --- sono quelli, che corrispondono alla massima o minima primitiva della funzione $f + aV$. Quindi, desunti i valori delle y, z, --- dalle primitive complete delle anzidette equazioni indefinite, e determinate le costanti contenute in esse non che la a esistente già nelle stesse equazioni indefinite in modo da soddisfare la

$$T_1 + (T_1) - T_0 - (T_0) = 0, \text{ ed anco la } \int V dx = M,$$

si otterranno quei valori delle medesime costanti, che sostituiti nei valori anzidetti delle y, z, ---, li ridurranno a funzioni individuate, che saranno i richiesti valori delle medesime y, z, ---.

421. Per esaurire tutti i casi che si possono incontrare de' massimi e minimi di cui si parla, bisognerebbe contemplare quello pel quale la funzione f, la cui primitiva definita dev'essere un massimo od un minimo, contiene anco le y_0, y_1, y'_0, y'_1, --- z_0, z_1, z'_0, z'_1, ---, --- cioè i valori delle variabili corrispondenti ai limiti della primitiva, e quello pel quale sono date equazioni tra le variazioni delle stesse y_0, y_1, y'_1, ---; ma siccome non presentano nessuna difficoltà, stante i casi trattati, e ciò che si è detto nella lezione antecedente, così gli ommetto; e passo in vece ad esporre la regola generalissima, che abbraccia compendiosamente tutti i casi che si possono incontrare.

La $\int f$ esprima una primitiva definita della f, funzione delle variabili x, y, z, ---, delle loro derivate prese rispetto alla variabile per rispetto alla quale si intende presa la primitiva $\int f$ stessa, e di quei valori di esse, che corrispondono ai limiti della primitiva: le F, $\overset{1}{F}$, --- V, $\overset{1}{V}$, --- esprimano funzioni analoghe alla f; e debbano sussistere le equazioni $F=0$, $\overset{\mathrm{I}}{F}=0$, - - -, essere costanti e date le $\int V$, $\int \overset{\mathrm{I}}{V}$, estese come la $\int f$. Così le $\int f_1$, $F_1=0$, $\overset{\mathrm{I}}{F}_1=0$, - - - $\int V_1$, $\int \overset{\mathrm{I}}{V}_1$, - - -; e le $\int f_2$, $F_2=0$, $\overset{\mathrm{I}}{F}_2=0$, - - - $\int V_2$, $\int \overset{\mathrm{I}}{V}_2$, - - -; - - - siano rispetto ad altre variabili ciò che sono le $\int f$, $F=0$, $\overset{\mathrm{I}}{F}=0$, - - - $\int V$, $\int \overset{\mathrm{I}}{V}$, - - - rispetto alle x, y, z. Le $A=0$, $B=0$, - - - siano relazioni tra i valori corrispondenti ai limiti delle primitive di tutte le variabili o solamente di alcune; e la R sia una quantità formata con questi medesimi valori delle variabili; e le equazioni $\dot{L}=0$, $\dot{M}=0$, - - - esprimano relazioni date tra le variazioni di questi ultimi valori delle variabili stesse.

Ciò posto vogliansi quei valori delle variabili in funzione delle principali di esse, che rendano massima o minima la quantità

$$R+\int f+\int f_1+\int f_2+\text{ecc.}$$

tra quelli che rendono costanti le primitive

$$\int V,\ \int \overset{\mathrm{I}}{V},\ \text{- - -}\ \int V_1,\ \int \overset{\mathrm{I}}{V}_1,\ \text{- - -}\ \int V_2,\ \int \overset{\mathrm{I}}{V}_2,\ \text{- - -}$$

e soddisfanno tutte le equazioni

$$F=0,\ \overset{\mathrm{I}}{F}=0,\ \text{- - -}\ F_1=0,\ \overset{\mathrm{I}}{F}_1=0,$$

$$A=0,\ B=0,\ \text{- - -}\ \dot{L}=0,\ \dot{M}=0,\ \text{- - -}.$$

Si costituisca la equazione

$$\dot{R}+\mathrm{S}\Big(\int\!\!\int \dot{f}+\int\lambda\dot{F}+\int\mu\overset{\mathrm{I}}{\dot{F}}+\text{ecc.}+\alpha\int\dot{V}+\partial\int\overset{\mathrm{I}}{\dot{V}}+\text{ecc.}\Big)+\mathrm{S}\,a\dot{A}+\mathrm{S}\,l\dot{L}=0$$

dove il segno S significa la somma di tutte le quantità analoghe a quelle scritte immediatamente di seguito ad esso; le λ, μ, - - - indicano funzioni delle rispettive variabili principali, e le α, β - - - a, l altrettante costanti. Trasformisi la quantità

$$\mathrm{S}\Big(\int\!\!\int \dot{f}+\int\lambda\dot{F}+\int\mu\overset{\mathrm{I}}{\dot{F}}+\text{ecc.}+\alpha\int\dot{V}+\beta\int\overset{\mathrm{I}}{\dot{V}}+\text{ecc.}\Big)\ (\S\ 413)$$

e si avrà essa equivalente alla

$$\mathrm{S}(P\dot{y}+Q\dot{y}+\text{ecc.})+\mathrm{S}\,T,$$

ove le P, Q, - - - hanno significati analoghi a quelli delle Y, Z, - - - T usate nel § 413 citato; e la equazione dianzi costituita si ridurrà alla

$$\mathrm{S}(P\dot{y}+Q\dot{z}+\text{ecc.})+\mathrm{S}\,T_1-\mathrm{S}\,T_0+\dot{R}+\mathrm{S}\,a\dot{A}+\mathrm{S}\,l\dot{L}=0$$

la quale si decompone sempre nelle due

$$\mathrm{S}(P\dot{y}+Q\dot{z}+\text{ecc.})=0,\ \mathrm{S}\,T_1-\mathrm{S}\,T_0+\dot{R}+\mathrm{S}\,a\dot{A}+\mathrm{S}\,l\dot{L}=0.$$

La prima di queste ultime due equazioni si decomporrà in tante $P=0$, $Q=0$, - - - quante saranno le suddette variabili a determinarsi; e la seconda in tante quante saranno le variazioni $\dot{y}_0$, $\dot{y}_1$, $\dot{y}'_0$, - - $\dot{z}_0$, $\dot{z}_1$, $\dot{z}'_0$, - - - contenute in essa.

Trovinsi le primitive complete delle equazioni $P=0$, $Q=0$, - - - $F=0$, $\overset{\mathrm{I}}{F}=0$, - - - $F_1=0$, - - -; e si avranno i valori delle y, z, - - - λ, μ, - - - formati colle rispettive variabili principali, colle costanti α, β, - - - e con quelle completanti le medesime primitive trovate. In ultimo si determinino tutte queste costanti ed anco le a, b, - - - l, m, - - - col soddisfare e le equazioni nelle quali si è decomposta la $\mathrm{S}\,T_1-\mathrm{S}\,T_0+\dot{R}+\mathrm{S}\,a\dot{A}+\mathrm{S}\,l\dot{L}=0$ e quelle che risultano eguagliando le primitive $\int V, \int \overset{1}{V}, --- \int V_1, \int \overset{1}{V}_1, ---$ ai rispettivi loro valori; e si otterranno i valori richiesti delle y, z, ---.

Prima di sviluppare le relazioni $\int\ddot{f}dx > 0$, $\int\ddot{f}dx < 0$ (§ 405) farò almeno in parte per le primitive duplicate ciò che ho fatto per le primitive semplici od ordinarie.

LEZIONE IV.

Dei massimi e minimi valori delle primitive duplicate.

422. La $f(x, y, z, z', z_{/}, z'', z'_{/}, z_{//}, ---)$ esprima una funzione data delle x, y, z, e delle z', $z_{/}$, z'', $z'_{/}$, $z_{//}$, --- derivate parziali della z prese rispetto alle x, y variabili indipendenti: in questa funzione cambiando la funzione delle x, y rappresentata colla z, si avranno differenti funzioni delle x, y, le cui primitive duplicate, prese rispetto alle x, y ed estese tra i medesimi limiti, saranno anch'esse differenti le une dalle altre: interessa in varie circostanze di conoscere la funzione delle x, y valore della z al quale corrisponde la massima o minima delle primitive anzidette: vediamo, come si possa determinare.

Si pongano nella funzione f in vece delle z, z', $z_{/}$, z'', --- le loro variate, cioè

$$z + \nu\dot{z} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{z} + \text{ecc.},\ z_{/} + \nu\dot{z}_{/} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{z}_{/} + \text{ecc.},$$

$$z' + \nu\dot{z}' + \frac{\nu^2}{2}\ddot{z}' + \text{ecc.},\ z'' + \nu\dot{z}'' + \frac{\nu^2}{2}\ddot{z}'' + \text{ecc.},$$

$$- ;$$

e si avrà $f + \nu\dot{f} + \frac{\nu^2}{2}\ddot{f} + \text{ecc.}$; e però, pel valore richiesto della z, dovrà essere

$$\iint f dx dy + \nu\iint\dot{f} dx dy + \frac{\nu^2}{2}\iint\ddot{f} dx dy + \text{ecc.} > \iint f dx dy$$

pel minimo e $< \iint f\,dx\,dy$ pel massimo; e conseguentemente sì pel massimo che pel minimo avrassi

$$\iint\dot{f}\,dx\,dy = 0,$$

e separatamente

$\iint\ddot{f}\,dx\,dy < 0$ pel massimo e $\iint\ddot{f}\,dx\,dy > 0$ pel minimo.

Sviluppiamo la equazione

$$\iint\dot{f}\,dx\,dy = 0.$$

Dal § 394 si ha

$$\dot{f} = Z\dot{z} + P' + Q_{/},$$

ove le Z, P, Q hanno gli stessi significati che nel paragrafo citato; e però sarà

$$\iint(Z\dot{z} + P' + Q_{/})\,dx\,dy = 0, \text{ ossia}$$

$$\iint Z\dot{z}dxdy + \int\big(P(x_1) - P(x_0)\big)dy + \int\big(Q(y_1) - Q(y_0)\big)dx = 0,$$

dove $P(x_1)$, $P(x_0)$ esprimono i valori della P corrispondenti alla x eguale ad x_1, x_0, e le $Q(y_1)$, $Q(y_0)$ quelli della Q corrispondenti alla y eguale ad y_1, y_0; e conseguentemente come al § 406 dovranno aver luogo le due equazioni seguenti

$$\iint\dot{z}Z\,dx\,dy = 0,$$

$$\int\big(P(x_1) - P(x_0)\big)\,dy + \int\big(Q(y_1) - Q(y_0)\big)\,dx = 0.$$

La prima di queste equazioni, per essere la $\dot{z}$ arbitraria funzione delle x, y, somministra $Z = 0$, cioè la equazione

$$f'(z) - f'(z')' - f'(z_{/})_{/} + f'(z'')'' + f'(z'_{/})'_{/} + f'(z_{//})_{//} - \text{ecc.} = 0.$$

Quindi la funzione delle x, y valore della z, corrispondente alla massima o minima $\iint f\,dx\,dy$, sarà tra quelle, le quali soddisfanno quest' ultima equazione; e propriamente sarà quella, che soddisfarà anco la

$$\int\big(P(x_1)-P(x_0)\big)\,dy+\int\big(Q(y_1)-Q(y_0)\big)\,dx=0.$$

423. Supponghiamo ora, che i limiti delle differenti primitive suddette della f debbano cambiare col variare la z; e denominiamo x_0, x_1, y_0, y_1 i valori delle x, y corrispondenti agli estremi della $\iint f\,dx\,dy$, quando la z abbia il valore richiesto, ed ordinatamente

$$x_0+\nu\dot{x}_0+\frac{\nu^2}{2}\ddot{x}_0+\text{ecc.},\quad x_1+\nu\dot{x}_1+\frac{\nu^2}{2}\ddot{x}_1+\text{ecc.},$$

$$y_0+\nu\dot{y}_0+\frac{\nu^2}{2}\ddot{y}_0+\text{ecc.},\quad y_1+\nu\dot{y}_1+\frac{\nu^2}{2}\ddot{y}_1+\text{ecc.}$$

i limiti per la primitiva corrispondente alla variata della z.

In questo caso, dovrà essere la primitiva duplicata della $f+\nu\dot{f}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{f}+$ecc. estesa, quella rispetto alla x dalla

$$x=x_0+\nu\dot{x}_0+\frac{\nu^2}{2}\ddot{x}_0+\text{ecc. alla } x=x_1+\nu\dot{x}_1+\frac{\nu^2}{2}\ddot{x}_1+\text{ecc.}$$

e quella rispetto alla y dalla

$$y=y_0+\nu\dot{y}_0+\frac{\nu^2}{2}\ddot{y}_0+\text{ecc. alla } y=y_1+\nu\dot{y}_1+\frac{\nu^2}{2}\ddot{y}_1+\text{ecc.}$$

maggiore pel caso del minimo e minore pel caso del massimo della $\iint f\,dx\,dy$ estesa l'una dalla $x=x_0$ alla $x=x_1$, e l'altra dalla $y=y_0$ alla $y=y_1$. Ma la primitiva definita anzidetta della $f+\nu\dot{f}+\frac{\nu^2}{2}\ddot{f}+$ ecc. è eguale (§ 384) alla primitiva della

$$f+\nu\big(\dot{f}+(\dot{x}f)'+(\dot{y}f)_{,}\big)+\text{ecc.}$$

estesa dalla $x=x_0$ alla $x=x_1$ quella rispetto alla x, e dalla $y=y_0$ alla $y=y_1$ quella rispetto alla y; adunque dovrà essere

$$\iint f\,dx\,dy+\nu\iint\big((\dot{f})+(\dot{x}f)'+(\dot{y}f)_{,}\big)\,dx\,dy+\text{ecc.}$$

minore pel massimo e maggiore pel minimo della $\iint f\,dx\,dy$; e però in entrambi i casi sarà

$$\iint\big((\dot{f})+(\dot{x}f)'+(\dot{y}f)_{,}\big)\,dx\,dy=0.$$

Sostituendo in questa equazione in luogo della $(\dot{f})$ il suo valore (§ 380)

$$Z\dot{z}+P'+Q_{,}$$

essa si riduce

$$\iint Z\dot{z}\,dx\,dy+\iint(P+\dot{x}f)'\,dx\,dy+\iint(Q+\dot{y}f)_{,}\,dx\,dy=0$$

ossia

$$\iint Z\dot{z}\,dx\,dy+\int\big(P(x_1)+\dot{x}_1f_1-P(x_0)-\dot{x}_0f_0\big)\,dy$$
$$+\int\big(Q(y_1)+\dot{y}_1f_1-Q(y_0)-\dot{y}_0f_0\big)\,dx=0,$$

la quale si decompone evidentemente nelle due

$$\iint Z\dot{z}\,dx\,dy=0 \text{ ossia } Z=0, \text{ e}$$

$$\int\big(P(x_1)+\dot{x}_1f_1-P(x_0)-\dot{x}_0f_0\big)\,dy$$
$$+\int\big(Q(y_1)+\dot{y}_1f_1-Q(y_0)-\dot{y}_0f_0\big)\,dx=0.$$

Quindi il valore della z sarà qui pure uno di quelli, che soddisfanno la equazione $Z=0$ cioè la

$$f'(z)-f'(z')'-f'(z_{,})_{,}+f'(z'')''+f'(z'_{,})'_{,}+f'(z_{,,})_{,,}-\text{ecc.}=0,$$

come pel caso dei limiti invariabili, e propriamente sarà quello, che soddisfarà anco l'altra equazione qui trovata.

Se in quest'ultima equazione a soddisfarsi, si vorranno ridurre le variazioni della z ad essere quelle, che hanno luogo, quando le x, y hanno variate, converrà cambiare le $\dot{z}$, $\dot{z}'$, $\dot{z}_{,}$, --- ordinatamente nelle (§ 381)

$$\dot{z}-\dot{x}z'-\dot{y}z_{,},\ (\dot{z}-\dot{x}z'-\dot{y}z_{,})',\ (\dot{z}-\dot{x}z'-\dot{y}z_{,})_{,},\ ---.$$

424. Per indicare come talvolta si potrà svolgere la equazione

$$\int\Big(P(x_1)+\dot{x}_1 f(x_1)-P(x_0)-\dot{x}_0 f(x_0)\Big)\,dy$$
$$+\int\Big(Q(y_1)+\dot{y}_1 f(y_1)-Q(y_0)-\dot{y}_0 f(y_0)\Big)\,dx=0$$

onde desumere da essa proprietà relative ai limiti del massimo o minimo valore della $\int\int f\,dx\,dy$, si immagini una superficie rientrante, come sono le iperboloidi ad una foglia, ed una superficie qualsivoglia segante la medesima lungo una linea rientrante, come sono le ellissi per le iperboloidi; e la primitiva $\int\int f\,dx\,dy$ rappresenti una proprietà di quella porzione di questa superficie qualunque, che ha per estremo la medesima linea rientrante, la quale avrà per coordinate x_0, y_0, z_0 od x_1, y_1, z_1.

Le quantità $P+\dot{x}f$, $Q+\dot{y}f$ siano limitate a quella di queste medesime linee, che è il limite del massimo o minimo valore della primitiva $\int\int f dxdy$; ed s sia l'arco di essa linea: evidentemente le

$$\int(P+\dot{x}f)\,y'(s)\,ds,\ \int(Q+\dot{y}f)\,x'(s)\,ds$$

estese a tutta la linea di cui s è parte indeterminata saranno rispettivamente eguali alle

$$\int\Big(P(x_1)+\dot{x}_1 f(x_1)-P(x_0)-\dot{x}_0 f(x_0)\Big)\,dy,$$
$$\int\Big(Q(y_1)+\dot{y}_1 f(y_1)-Q(y_0)-\dot{y}_0 f(y_0)\Big)\,dx;$$

e però la equazione a svolgersi si ridurrà alla

$$\int\Big(Py'(s)+Qx'(s)+\dot{x}fy'(s)+\dot{y}fx'(s)\Big)\,ds=0.$$

La f contenga le sole x, y, z, z', $z_{,}$, e sarà $P=\dot{z}f'(z')$, $Q=\dot{z}f'(z_{,})$ ossia

$$P=(\dot{z}-\dot{x}z'-\dot{y}z_{,})f'(z'),\ \text{e}\ Q=(\dot{z}-\dot{x}z'-\dot{y}z_{,})f'(z_{,})$$

(§ 395); e la trovata equazione ridurrassi

$$\int(\dot{x}D+\dot{y}E+\dot{z}G)\,ds=0,$$

dove $D=fy'-z'f'(z')y'-z'f'(z_{,})x'$,

$E=fx'-z_{,}f'(z')y'-z_{,}f'(z_{,})x'$,

e $G=f'(z')y'+f'(z_{,})x'$;

le y', x' esprimono $y'(s)$, $x'(s)$.

Dalla superficie nella quale dev' essere il contorno suddetto abbiasi $\dot{z}=p\dot{x}+q\dot{y}$; e si avrà la equazione

$$\int\Big((D+Gp)\dot{x}+(E+Gq)\dot{y}\Big)\,ds=0$$

la quale si decompone nelle due

$$D+pG=0,\ E+qG=0$$

cioè nelle $\Big((p-z')f'(z')+f\Big)y'+(p-z')f'(z_{,})x'=0$,

$$\Big((q-z_{,})f'(z_{,})+f\Big)x'+(q-z_{,})f'(z')y'=0.$$

Eliminando la y' o meglio il rapporto $\frac{y'}{x'}$ da queste ultime due equazioni, si trova la

$$f+(p-z')f'(z')+(q-z_{,})f'(z_{,})=0,$$

la quale dipende unicamente dalla superficie immaginata e da quella per la quale la primitiva duplicata

$\iint f\,dx\,dy$ è massima o minima; dimodochè, dovrà essere soddisfatta dal valore della z desunto dalla $Z=0$ cioè dalla $f'(z)-f'(z')'-f'(z_{,})_{,}=0$.

Esempio. La f sia la $\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}$, cioè si voglia la superficie, la quale ha la porzione intercetta tra la immaginata minima.

Questo particolare valore della f dà $f'(z)=0$, $f'(z')=\frac{z'}{f}$, $f'(z_{,})=\frac{z_{,}}{f}$ pei quali la equazione $Z=0$ si riduce alla

$$\left(\frac{z'}{f}\right)'+\left(\frac{z_{,}}{f}\right)_{,}=0$$

ossia $(1+z_{,}^2)z''-2z'z_{,}z'_{,}+(1+z'^2)z''=0$,

e l'ultima esposta relativa ai limiti diventa $1+pz'+qz_{,}=0$; e però la minima superficie sarà tra quelle, le cui equazioni soddisfanno la

$$(1+z_{,})z''-2z'z_{,}z'_{,}+(1+z'^2)z_{,,}=0,$$

e sono perpendicolari a quella immaginata cioè a quella nella quale vi dev' essere il contorno di essa medesima.

425. Tra le funzioni delle x, y valori delle z, u, che soddisfanno la equazione $F(x,y,z,u,z',u',z_{,},u_{,},---)=0$, vogliansi quelle, che corrispondono alla massima o minima primitiva

$$\iint f(x,y,z,u,z',u',z_{,},u_{,},---)dx\,dy,$$

ove le f, F esprimono due funzioni date delle x,y,z,u e delle derivate z', u', $z_{,}$, $u_{,}$, --- poste per semplicità in vece delle $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$, ---.

Ragionando per questo caso, come al § 413, si trova che i valori delle u, z richiesti sono tra quelli soddisfacenti le equazioni

$$Z+(Z)=0,\quad U+(U)=0$$

dove $Z=f'(z)-f'(z')'-f'(z_{,})_{,}+\text{ecc.}$,

$$(Z)=\lambda F'(z)-\big(\lambda F'(z')\big)'-\big(\lambda F'(z_{,})\big)_{,}+\text{ecc.},$$

$$U=f'(u)-f'(u')'-f'(u_{,})_{,}+\text{ecc.},$$

$$(U)=\lambda F'(u)-\big(\lambda F'(u')\big)'-\big(\lambda F'(u_{,})\big)_{,}+\text{ecc.},$$

e la λ esprime qui una funzione delle x, y da eliminarsi; dimodochè i valori delle z, u saranno quelli, che soddisfanno la $F=0$ e la risultante dalla eliminazione della λ dalle due $Z+(Z)=0$, $U+(U)=0$; e propriamente saranno quelli, che annulleranno anco l'altra parte della equazione, alla quale si riduce colla solita trasformazione la

$$\iint(\dot f+\lambda\dot F)dx\,dy=0.$$

426. In ultimo, si voglia quella funzione delle x, y valore della z, che corrisponde al massimo o minimo valore della

$$\iint f(x,y,z,z',z_{,},z'',---)dx\,dy,$$

e rende la $\iint V(x,y,z,z',z_{,},z'',---)dx\,dy$ eguale ad *M costante* data, le primitive essendo estese ambe due tra i medesimi limiti dati.

Si potrebbe soddisfare questa ricerca mediante la proposizione antecedente, come si desume quella trattata nel § 404 da quella esposta nel § 401; ma stimo bene di procedere col metodo seguente.

Trovisi il valore della z, che corrisponde alla assoluta massima o minima primitiva $\iint(f+\alpha V)\,dx\,dy$, ove la α esprime una costante arbitraria; indi determinisi l'α talmente da rendere $\iint V\,dx\,dy$ eguale ad M; ed il valore corrispondente della z sarà il richiesto; giacchè un tal valore della z, corrispondendo alla assoluta massima o minima primitiva $\iint(f+\alpha V)\,dx\,dy$, corrisponderà anco alla massima o minima primitiva $\iint f\,dx\,dy$ *più* αM, e però corrisponderà alla massima o minima primitiva $\iint f\,dx\,dy$, e renderà la primitiva $\iint V\,dx\,dy$ eguale ad M.

Se la z, che deve rendere $\iint f\,dx\,dy$ massima o minima, dovesse rendere due o più primitive $\iint V\,dx\,dy$, $\iint \overset{1}{V}\,dx\,dy$, - - - costanti e date, bisognerebbe fare per la quantità $f+\alpha V+\beta \overset{1}{V}+$ecc., ove α, β, - - - sono costanti arbitrarie, ciò che si è fatto dianzi per $f+\alpha V$, e poscia determinare le α, β, - - - od altre arbitrarie talmente da rendere i valori delle primitive $\iint V\,dx\,dy$, $\iint \overset{1}{V}\,dx\,dy$, - - - gli stessi dati.

427. Osservando la analogia, che ha luogo, tra i risultamenti ottenuti per le primitive semplici, e per le duplicate, relativi a quistioni analoghe, facilmente si comprenderà, come conseguire quelli, che possono occorrere per le quistioni analoghe e relativi alle primitive triplicate, quadruplicate, - - -; anzi questa osservazione si può in parte estendere anco a ciò che esporremo nella lezione seguente.

LEZIONE V.

Dei criterj per distinguere i massimi dai minimi valori delle primitive.

428. Ora passeremo a sviluppare le relazioni

$$\int \ddot{f} < 0, \int \ddot{f} > 0;$$

e propriamente ad esporre le proprietà ossia i criterj, mediante i quali si conosce, se abbia luogo la prima ovvero la seconda di queste due relazioni, se cioè la equazione $\int \dot{f} = 0$ corrisponda ad un massimo ovvero ad un minimo valore della $\int f$.

Per semplicità supporremo, che, ai limiti delle primitive, i valori delle variabili e quelli delle rispettive derivate siano *interamente dati*; e perchè ciò ha luogo effettivamente per quasi tutte le ricerche più interessanti, ed anco perchè la decisione per gli altri casi si può facilmente ridurre alla analoga di questo: ed esporremo tali criterj ordinatamente pei casi, che la f contenga le x, y; x, y, y'; x, y, y', y''; - - - e così continueremo, contemplando le differenti funzioni considerate separatamente nello sviluppare la equazione $\int \dot{f} = 0$.

429. Osservando (§ 378) lo sviluppo della $\ddot{f}$, si vede, che in alcuni termini vi sono le sole prime potenze delle variazioni *seconde* delle variabili, e negli altri vi sono le sole variazioni del *primo* ordine delle variabili stesse, aventi però in ciascun termine due dimensioni: la somma dei primi di questi termini si indicherà col simbolo $\ddot{f}(2)$, e la somma degli altri coll' $\ddot{f}(1)$; anzi

analoghi simboli si useranno per indicare altre analoghe quantità a queste. In tanto avremo $\int\ddot f=\int\ddot f(2)+\int\ddot f(1)$, anzi sarà $\int\ddot f=\int\ddot f(1)$, perchè la equazione $\int\dot f=0$ trae seco la $\int\ddot f(2)=0$.

Di fatto, la f sia $f(x,y,z,---y',z',---y'',z'',---)$; e sarà

$$\ddot f(2)=f'(y)\ddot y+f'(y')\ddot y'+f'(y'')\ddot y''+\text{ecc.}$$
$$+f'(z)\ddot z+f'(z')\ddot z'+f'(z'')\ddot z''+\text{ecc.}+\text{ecc.}$$

Trattando questa espressione valore della $\ddot f(2)$, come si è trattato quella della $\dot f$ nel § 379, si ha

$$\ddot f(2)=Y\ddot y+Z\ddot z+\text{ecc.}+\left(\overset{1}{Y}\ddot y+\overset{2}{Y}\ddot y'+\text{ecc.}+\overset{1}{Z}\ddot z+\overset{2}{Z}\ddot z'+\text{ecc.}+\text{ecc.}\right)';$$

e siccome dalla equazione $\int\dot f=0$ si hanno le $Y=0$, $Z=0$, $---$, così sarà

$$\int\ddot f(2)=\overset{1}{Y}_1\,\ddot y_1+\overset{2}{Y}_1\,\ddot y'_1+\text{ecc.}+\overset{1}{Z}_1\,\ddot z_1+\overset{2}{Z}_1\,\ddot z'_1+\text{ecc.}+\text{ecc.}$$
$$-\overset{1}{Y}_0\,\ddot y_0-\overset{2}{Y}_0\,\ddot y'_0-\text{ecc.}-\overset{1}{Z}_0\,\ddot z_0-\overset{2}{Z}_0\,\ddot z'_0-\text{ecc.}-\text{ecc.}$$

Ma, se i valori delle y, y', $---z$, z', $---$ ai limiti della primitiva sono dati, le $\ddot y_0$, $\ddot y_1$, $\ddot y'_0$, $\ddot y'_1$, $---\ddot z_0$, $\ddot z_1$, $\ddot z'_0$, $\ddot z'_1$, $---$ sono *nulle*; adunque sarà $\int\ddot f(2)=0$. Vale a dire, la equazione $\int\dot f=0$ annulla la $\int\ddot f(2)$; e per tanto sarà $\int\ddot f=\int\ddot f(1)$; per cui in vece di sviluppare le due relazioni $\int\ddot f<0$, $\int\ddot f>0$, potremo e basterà sviluppare le $\int\ddot f(1)<0$, $\int\ddot f(1)>0$; come faremo effettivamente.

430. Siccome occorrerà spesse volte di dichiarare, che i valori di una o più funzioni della x, corrispondenti a quelli della x dall'x_0 sino all'x_1 siano tutti *positivi* od alcuni *nulli* e gli altri *positivi* cioè nessuno *negativo*, ovvero siano tutti *negativi* od alcuni *nulli* e gli altri *negativi*, così per evitare una stucchevole ripetizione avverto ora per sempre, che ciò si esprimerà generalmente, col dire che le funzioni medesime saranno positive, ovvero negative senz'altra dichiarazione.

Ciò premesso passo a sviluppare le relazioni $\int\ddot f(1)<0$, $\int\ddot f(1)>0$, seguendo l'ordine già enunciato (§ 428).

431. La f contenga le sole variabili x, y; e sarà $\ddot f(1)=\dot y^2 f''(y)$. Chiamisi A la funzione della x, che si ottiene, sostituendo nella $f''(y)$ in vece della y il suo valore trovato col soddisfare la equazione $\int\dot f=0$; e sarà $\int A\dot y^2$ il corrispondente valore della $\int\dot y^2\ddot f(1)$: e però (§ 114) questa primitiva sarà positiva, se positiva risulterà la A, e sarà negativa, se negativa risulterà l'A stessa. Vale a dire, la y soddisfacente la equazione $\int\dot f=0$ corrisponderà ad un massimo ovvero ad un minimo della $\int f(x,y)$, secondochè risulterà la A *negativa* ovvero *positiva*.

432. La f contenga le x, y, y'; e sarà $\int\ddot f(1)$ eguale alla primitiva di

$$f''(y)\dot y^2+2\left(\frac{d^2f}{dydy'}\right)\dot y\,\dot y'+f''(y')\dot y'^2;$$

e però il valore della y soddisfacente la equazione $\int\dot f=0$ e trovato nel § 406 corrisponderà ad un massimo ovvero ad un minimo della $\int f$, secondochè riescirà negativa o positiva la primitiva del trinomio

$$A\dot y^2+2B\dot y\,\dot y'+C\dot y'^2,$$

ove le A, B, C esprimano qui i valori delle quantità $f''(y)$, $\left(\frac{d^2f}{dydy'}\right)$, $f''(y')$ corrispondenti a quello della y soddisfacente l'anzidetta equazione $\int\dot f=0$.

Se il binomio $AC-B^2$ fosse positivo, ovvero nullo, il segno del trinomio $A\dot{y}^2+2B\dot{y}\,\dot{y}'+C\dot{y}'^2$, e però anco quello della sua primitiva, sarebbe simile a quello del C (§ 156); dimodochè l'y soddisfacente la equazione $\int\dot{f}=0$ corrisponderà ad un massimo della primitiva $\int f$, se C sarà *negativo*, e ad un minimo se C sarà *positivo*.

Non verificandosi queste proprietà relative alle quantità $AC-B^2$, C, si osservi, che il trinomio $A\dot{y}^2+2B\dot{y}\,\dot{y}'+C\dot{y}'^2$ è identico all'

$$(A-\alpha')\dot{y}^2+2(B-\alpha)\dot{y}\,\dot{y}'+C\dot{y}'^2+(\alpha\dot{y}^2)',$$

ove l'α esprime una funzione qualsivoglia della x; per cui la primitiva $\int\ddot{f}(1)$ è eguale a quella di

$$(A-\alpha')\dot{y}^2+2(B-\alpha)\dot{y}\,\dot{y}'+C\dot{y}'^2$$

più quella di $(\alpha\dot{y}^2)'$, che è $\alpha_1\dot{y}_1^2-\alpha_0\dot{y}_0^2$. Quest'ultima è nulla, e però la primitiva $\int\ddot{f}(1)$ sarà eguale alla sola di

$$(A-\alpha')\dot{y}^2+2(B-\alpha)\dot{y}\,\dot{y}'+C\dot{y}'^2.$$

Se esisterà un valore della α, che renda

$$(A-\alpha')C-(B-\alpha)^2$$

positivo o nullo e che non annulli C, il segno della primitiva $\int\ddot{f}(1)$ sarà simile a quello del C (§ 156). Quindi, se C sarà *negativo*, il valore della y soddisfacente la equazione $\int\dot{f}=0$, non potrà corrispondere che ad un massimo della primitiva $\int f$; e se risulterà C *positivo*, il valore della y non potrà corrispondere che ad un minimo di questa medesima primitiva; ed effettivamente corrisponderà ad un massimo o ad un minimo, se vi sarà un valore dell'α, che renda positivi

ovvero nulli tutti i valori di

$$(A-\alpha')C-(B-\alpha)^2$$

dalla $x=x_0$ sino all' $x=x_1$.

Sia $f=\sqrt{\left(1+y'^2+(p+qy')^2\right)}$ ove p, q esprimano le frazioni $-F'(x):F'(z)$, $-F'(y):F'(z)$, cioè la $\int f dx$ sia quella considerata alla fine del paragrafo 415. Questo valore della f dà $f''(y')$ ossia $C=(1+p^2+q^2):f^3$ e però positivo. Quindi la lunghezza di qualunque parte della linea contemplata nel luogo citato non potrà essere che minima; per cui sarà essa quella a seconda della quale si disporrebbe un filo quando fosse *teso* sulla superficie rappresentata colla equazione $F(x, y, z)=0$, come si è già detto ed ammesso.

433. Un valore della α, che rende $(A-\alpha')C>(B-\alpha)^2$, si potrà determinare col processo seguente: mi limiterò al caso che siano positivi i valori della C dall'x_0 all'x_1.

Pongasi $\alpha=B-\mu$, μ nuova funzione della x: dovrà essere $(A-B'+\mu')C>\mu^2$.

Sia c il minore degli anzidetti valori della C, ed a l'analogo della $A-B'$: si stabilisca la equazione

$$(a+\mu')c=\mu^2,$$

la cui primitiva dà

$$\mu=\sqrt{ac}\cdot\left(1+ke^{2x\sqrt{\frac{a}{c}}}\right):\left(1-ke^{2x\sqrt{\frac{a}{c}}}\right);$$

e però sarà

$$\alpha=B-\sqrt{ac}\cdot\left(1+ke^{2x\sqrt{\frac{a}{c}}}\right):\sqrt{\left(1-ke^{2x\sqrt{\frac{a}{c}}}\right)},$$

la k esprime una costante arbitraria. Questo valore dell'α soddisfa la relazione di cui si parla; giacchè per essere

$$a+\mu' < A-B'+\mu',\ \text{e}\ c < C,\ \text{si ha}\ (a+\mu')c < (A-B'+\mu')C;$$

e però $(A-B+\mu')C > \mu^2$ ossia $(A-\alpha')C > (B-\alpha)^2$.

434. Avverto ora per sempre; che i valori delle A, B, C, α e delle analoghe quantità corrispondenti a quelli della x dall'x_0 all'x_1 non debbono essere infiniti; giacchè, se ciò accadesse, cesserebbe la proprietà esposta al § 115, alla quale si sono appoggiate le dimostrazioni qui esposte, e si appoggeranno le analoghe nel seguito.

435. La f contenga le x, y, y', y''; e la primitiva che dovrà essere positiva, o negativa, perchè il valore della y soddisfacente la equazione $\int \dot{f} = 0$ corrisponda ad un minimo ovvero ad un massimo della $\int f$, sarà quella del sestinomio seguente

$$A\dot{y}^2 + 2B\dot{y}\,\dot{y}' + 2C\dot{y}\,\dot{y}'' + D\dot{y}'^2 + 2E\dot{y}'\dot{y}'' + G\dot{y}''^2,$$

dove A, B, C, - - - esprimono i valori delle

$$f''(y) + \left(\frac{d^2 f}{dy\,dy'}\right),\ \left(\frac{d^2 f}{dy\,dy''}\right),\ ---$$

corrispondenti allo stesso valore della y, che soddisfa la equazione $\int \dot{f} = 0$.

Se i valori delle A, B, C, - - - renderanno i valori del sestinomio

$$A\dot{y}^2 + 2B\dot{y}\,\dot{y}' + \text{ecc.}$$

corrispondenti a quelli della x dall'x_0 all'x_1 tutti positivi, ovvero alcuni nulli e gli altri positivi, la primitiva $\int \ddot{f}(1)$ sarà (§ 114) positiva; e però la y soddisfacente la equazione $\int \dot{f} = 0$ corrisponderà ad un minimo della $\int f$; e reciprocamente, se pei valori delle A, B, C, - - - riesciranno quelli del sestinomio tutti negativi od alcuni nulli e gli altri negativi, la y trovata col soddisfare la equazione $\int \dot{f} = 0$, corrisponderà ad un massimo valore della primitiva $\int f$.

Non verificandosi nè l'uno nè l'altro di questi due casi, osservisi che il sestinomio esposto è identico al polinomio

$$(A-\alpha')\dot{y}^2 + 2(B-\alpha-\beta')\dot{y}\,\dot{y}' + 2(C-\beta)\dot{y}\,\dot{y}'' + (D-2\beta-\gamma')\dot{y}'^2$$
$$+ 2(E-\gamma)\dot{y}'\dot{y}'' + G\dot{y}''^2 + (\alpha\dot{y}^2 + 2\beta\dot{y}\,\dot{y}' + \gamma\dot{y}'^2)'$$

ossia al

$$G\dot{y}''^2 + 2h\dot{y}''\dot{y}' + 2k\dot{y}''\dot{y} + l\dot{y}'^2 + 2m\dot{y}'\dot{y} + n\dot{y}^2 + (\alpha\dot{y}^2 + 2\beta\dot{y}\dot{y}' + \gamma\dot{y}'^2)'$$

dove

$$h = E-\gamma,\ k = C-\beta,\ l = D-2\beta-\gamma',\ m = B-\alpha-\beta',\ n = A-\alpha'$$

e le α, β, γ esprimono funzioni qualsivogliono della x; e però dovrà essere positivo pel minimo e negativo pel massimo la primitiva del sestinomio

$$G\dot{y}''^2 + 2h\dot{y}''\dot{y}' + 2k\dot{y}''\dot{y} + l\dot{y}'^2 + 2m\dot{y}'\dot{y} + n\dot{y}^2;$$

giacchè la primitiva della parte $(\alpha\dot{y}^2 + 2\beta\dot{y}\,\dot{y}' + \gamma\dot{y}'^2)'$ è *nulla*.

E per tanto, se le G, h, k, - - - saranno tali, che si possano determinare le α, β, γ in modo di rendere (§ 157)

$$Gl-h^2 > 0,\ \text{ed}\ (nG-k^2)(lG-h^2)-(mG-hk)^2 > \text{ovvero} = 0,$$

la primitiva del sestimonio avrà un segno simile a quello del G. Quindi l'y soddisfacente la equazione $\int \dot{f} = 0$ corrisponderà ad un massimo, se G ossia $f''(y'')$ sarà *negativo*, e ad un minimo se questa quantità sarà *posi-*

tiva, semprecchè si possano soddisfare le due relazioni antecedenti.

Essendo il sestimonio dianzi esposto identico al prodotto di $\frac{1}{G}$ per

$$(G\dot{y}''+h\dot{y}'+k\dot{y})^2+(Gl-h^2)\dot{y}'^2+2(mG-hk)\dot{y}'\dot{y}+(nG-k^2)\dot{y}^2,$$

si potrà anco tentare la determinazione delle α, β, γ talmente da soddisfare le tre relazioni seguenti

$$Gl-h^2>\text{ovvero}=0,\ Gm-hk=0,\ nG-k^2>\text{od}=0;$$

giacchè soddisfatte queste relazioni, il segno della primitiva $\int\ddot{f}$ riescirà simile a quello di G come sopra.

436. In generale possiamo concludere, che, il valore della y soddisfacente la equazione $\int\dot{f}=0$ *non* potrà corrispondere ad un *minimo* valore della primitiva

$$\int f(x, y, y', y'', --- y^{(n)}),$$

se quelli della $f''(y^{(n)})$ dalla $x=x_0$ alla $x=x_1$ risulteranno tutti *negativi*; e che esso *non* potrà corrispondere ad un *massimo* della medesima primitiva se questi valori della $f''(y^{(n)})$ riesciranno indistintamente *positivi*.

437. La f contenga le x, y, z, y', z': i valori delle y, z, che soddisfaranno la equazione $\int\dot{f}=0$, e che renderanno $\int\ddot{f}(1)$ positiva corrisponderanno ad un minimo valore della $\int f$; e quelli che renderanno la $\int\ddot{f}(1)$ negativa corrisponderanno ad un massimo valore della stessa primitiva $\int f$.

Pel caso presente si ha

$$\ddot{f}(1)=A\dot{y}^2+2B\dot{y}\dot{z}+2C\dot{y}\dot{y}'+2D\dot{y}\dot{z}'+E\dot{z}^2$$
$$+2G\dot{z}\dot{y}'+2H\dot{z}\dot{z}'+K\dot{y}'^2+2I\dot{y}'\dot{z}'+L\dot{z}'^2,$$

dove $A, B, C, ---$ esprimono i valori delle quantità

$f''(y), \left(\frac{d^2 f}{dydz}\right), \left(\frac{d^2 f}{dydy'}\right), ---$ corrispondenti a quelli delle y, z, che soddisfanno la equazione $\int\dot{f}=0$.

Se pei valori delle $A, B, C, ---$ risulteranno i corrispondenti del polinomio $A\dot{y}^2+2B\dot{y}\dot{z}+$ecc. tutti positivi od alcuni nulli e gli altri positivi, gli anzidetti valori delle y, z corrisponderanno ad un minimo della primitiva $\int f$; e se pei valori delle $A, B, C, ---$ gli anzidetti del polinomio riesciranno tutti negativi od alcuni nulli e gli altri negativi, sempre qualunque siano le $\dot{y}, \dot{z}, \dot{y}', \dot{z}'$, i valori delle y, z corrisponderanno ad un massimo della $\int f$.

Quando le $A, B, C, ---$ non abbiano le proprietà qui enunciate, osservisi, che il polinomio $A\dot{y}^2+2B\dot{y}\dot{z}+$ecc. è identico all'

$$(A-\alpha')\dot{y}^2+2(B-\beta')\dot{y}\dot{z}+2(C-\alpha)\dot{y}\dot{y}'+2(D-\beta)\dot{y}\dot{z}'+(E-\gamma')\dot{z}^2+$$
$$2(G-\beta)\dot{y}'\dot{z}+2(H-\gamma)\dot{z}\dot{z}'+I\dot{y}'^2+2K\dot{y}'\dot{z}'+L\dot{z}'^2+(\alpha\dot{y}^2+2\beta\dot{y}\dot{z}+\gamma\dot{z}^2)',$$

qualunque funzione della x siano le α, β, γ, e che la primitiva della parte $(\alpha\dot{y}^2+2\beta\dot{y}\dot{z}+\gamma\dot{z}^2)'$ è *nulla*, per cui la primitiva dello stesso polinomio sarà positiva ovvero negativa (§ 114), se lo sarà quella della quantità

$$a\dot{y}^2+2b\dot{y}\dot{z}+2c\dot{y}\dot{y}'+2d\dot{y}\dot{z}'+e\dot{z}^2+2g\dot{z}\dot{y}'+2h\dot{z}\dot{z}'+I\dot{y}'^2+2K\dot{y}'\dot{z}'+L\dot{z}'^2$$

dove $a=A-\alpha'$, $b=B-\beta'$, $c=C-\alpha$, $d=D-\beta$,
$e=E-\gamma'$, $g=G-\beta$, ed $h=H-\gamma$;

e però, se vi saranno valori delle α, β, γ, pei quali risultino (§ 157)

$mp-n^2>0$, $(mp-n^2)(mr-h^2)-(mq-nh)^2>$ od $=0$,
dove $m=IL-K^2$, $n=gL-hK$, $k=cL-dK$,
$p=eL-h^2$, $q=bL-dh$, ed $r=aL-d^2$,

e che rendano inoltre $L, IL-K^2$ entrambe *positive*, od entrambe *negative*, la primitiva $\int\dot{f}$ sarà nel primo caso positiva e nel secondo negativa, e conseguentemente le y, z corrisponderanno nel primo caso ad un minimo della $\int f$ e nel secondo ad un massimo.

Qui pure, per essere il polinomio $L\dot{z}'^2+2K\dot{z}'\dot{y}'+$ecc. eguale evidentemente al prodotto di $\frac{1}{L}$ per

$$(L\dot{z}'+K\dot{y}'+h\dot{z}+d\dot{y})^2+\frac{1}{m}(m\dot{y}'+n\dot{z}+k\dot{y})^2$$

$$+(mp-n^2)\dot{z}^2+2(mq-nk)\dot{y}\dot{z}+(mr-k^2)\dot{y}^2,$$

se si potranno determinare le α, β, γ in modo di rendere $mp-n^2>$ od $=0$, $mq-kn=0$, $mr-k^2>$ od $=0$, e che risultino (§§ 113, 116)

$L>0, Ih-K^2>0$, ovvero $L<0, Ih-K^2<0$;

i valori delle y, z corrisponderanno, nel primo caso ad un minimo e nel secondo ad un massimo valore della primitiva $\int f$.

438. Lo estendere le considerazioni sopra esposte a funzioni contenenti tre o più variabili analoghe alle y, z non presenta difficoltà, eccetto la lunghezza dei calcoli; e però non mi trattengo su di esse, anzi non mi tratterrò neppure a sviluppare analoghe proprietà pel caso che, le $y, z, ---$ corrispondenti al massimo o minimo della $\int f$, debbano essere tra quelli per cui le primitive $\int\Delta, \int\psi, ---$, ove le Δ, ψ esprimono funzioni analoghe alla f, sono date; giacchè si conseguiscono, cambiando nelle esposte la f in $f+a\Delta+b\psi+$ecc., dove le $a, b, ---$ sono nuove costanti determinate col rendere le $\int\Delta, \int\psi, ---$ eguali ai rispettivi loro valori

dati. E passo in vece a trovare quali sono le proprietà, che distinguono i valori delle y, z, corrispondenti al massimo da quelli corrispondenti al minimo valore della primitiva $\int f(x, y, z, y', z')$, essendo data tra le x, y, z, la equazione $F(x, y, z)=0$.

I valori delle y, z, che corrispondono al massimo o minimo della primitiva $\int f$ soddisfanno (§ 413) la equazione $\int(\dot{f}+\lambda\dot{F})=0$: quelli che corrispondono ad un massimo rendono $\int\ddot{f}<0$, ed in vece quelli che corrispondono ad un minimo rendono $\int\ddot{f}>0$; e però, siccome hassi $\ddot{F}=0$; così i valori medesimi renderanno anco il corrispondente valore della $\int(\ddot{f}+\lambda\ddot{F})$ correlativamente positivo o negativo.

Essendo la λ funzione della sola x, si ha $\ddot{f}+\lambda\ddot{F}=\ddot{f}(1)+\lambda\ddot{F}(1)$; e però il segno della primitiva $\int\ddot{f}$ (§ 113) sarà simile a quello della primitiva del polinomio

$$a\dot{y}^2+2b\dot{y}\dot{z}+2c\dot{y}\dot{y}'+2d\dot{y}\dot{z}'+e\dot{z}^2+2g\dot{z}\dot{y}'+2h\dot{z}\dot{z}'+l\dot{y}'^2+2k\dot{y}'\dot{z}'+m\dot{z}'^2,$$

dove le $a, b, c, ---$ esprimono i valori dei binomj

$$\left(\frac{d^2(f+\lambda F)}{dy^2}\right), \left(\frac{d^2(f+\lambda F)}{dydz}\right), \left(\frac{d^2(f+\lambda F)}{dydy'}\right), ---$$

corrispondenti a quelli delle y, z, che soddisfanno le equazioni

$$F(x, y, z)=0, \int(\dot{f}+\lambda\dot{F})=0.$$

Se i valori delle $a, b, c, ---$ rendessero quelli del polinomio $a\dot{y}^2+2b\dot{y}\dot{z}+$ecc. tutti *positivi* ovvero alcuni *nulli* e gli altri *positivi*, la primitiva $\int\ddot{f}(1)$ sarebbe positiva, e però avrebbe luogo un minimo per la $\int f$; e se le $a, b, c, ---$ rendessero quelli del polinomio tutti *negativi* od alcuni *nulli* e gli altri *negativi*, la $\int f$ corrispondente sarebbe un massimo. Non avverrandosi queste proprietà, osservisi, che dalla equazione $F'(y)\dot{y}+F'(z)\dot{z}=0$ si ha $\dot{z}=-\frac{F'(y)}{F'(z)}\dot{y}$ ossia

$$\dot{z}=p\dot{y},\ \text{posto}\ -\frac{F'(y)}{F'(z)}=p;$$

e che, sostituendo nel polinomio stesso in vece delle $\dot{z}, \dot{z}'$ i loro valori $p\dot{y}$, $p'\dot{y}+p\dot{y}'$, si ha $A\dot{y}^2+2B\dot{y}\dot{y}'+C\dot{y}'^2$, supposto

$a+2bp+2dp'+ep^2+2hpp'+mp'^2=A$,

$c+dp+gp+hp^2+kp'+mpp'=B$, $l+2kp+mp^2=C$;

e però, se risulterà (§ 156) $AC-B^2>$ od $=0$ avrà luogo un massimo, qualora sia $C<0$ ed un minimo se $C>0$.

Non incontrandosi neppure queste ultime proprietà, si osservi, se vi è valore per la α funzione della x, che renda

$$(A-\alpha')C-(B-\alpha)^2>\ \text{od}\ =0;$$

chè verificandosi, la primitiva sarà un massimo od un minimo, secondo che sarà C *negativo o positivo*.

439. Passo al caso, che sì la f che la equazione $F=0$ contengano le x, y, z, y', z'.

I valori delle y, z corrispondenti al massimo o minimo della $\int f$ annullano la $\int(\dot{f}+\lambda\dot{F})$; e quelli corrispondenti al massimo, debbono rendere $\int\ddot{f}$ negativa, come quelli corrispondenti al minimo, debbono renderla positiva; e però, per essere $\ddot{F}=0$, questi valori renderanno negativa o positiva correlativamente anco la primitiva della $\ddot{f}+\lambda\ddot{F}$ ossia della $\dot{f}(1)+\lambda\dot{F}(1)$ cioè del polinomio

$a\dot{y}^2+2b\dot{y}\dot{z}+2c\dot{y}\dot{y}'+2d\dot{y}\dot{z}'+e\dot{z}^2+2g\dot{z}\dot{y}'+2h\dot{z}\dot{z}'+k\dot{y}'^2+2l\dot{y}'\dot{z}'+m\dot{z}'^2$,

dove le $a, b, --- m$ significano quei valori delle derivate

$$\left(\frac{d^2(f+\lambda F)}{dy^2}\right), \left(\frac{d^2(f+\lambda F)}{dydz}\right), --- \left(\frac{d^2(f+\lambda F)}{dz'^2}\right),$$

che corrispondono a quelli delle y, z soddisfacenti le equazioni

$$F(x, y, z, y', z')=0,\ \int(\dot{f}+\lambda\dot{F})=0.$$

Qui pure, se le $a, b, c, ---$ rendessero i valori di quest' ultimo polinomio positivi od alcuni nulli e gli altri positivi, ovvero li rendessero negativi od alcuni nulli e gli altri negativi, qualunque fossero $\dot{y}, \dot{z}, \dot{y}', \dot{z}'$, avrebbe luogo ordinatamente un minimo od un massimo per la $\int f$.

Non verificandosi queste ultime proprietà, osservisi, che ha luogo tra le variazioni $\dot{y}, \dot{z}, \dot{y}', \dot{z}'$ la equazione

$$F'(y)\dot{y}+F'(z)\dot{z}+F'(y')\dot{y}'+F'(z')\dot{z}'=0,$$

la quale dà

$$\dot{z}'=p\dot{y}+q\dot{z}+r\dot{y},$$

ove le p, q, r esprimano $-\frac{F'(y)}{F'(z')}, -\frac{F'(z)}{F'(z')}, -\frac{F'(y')}{F'(z')}$ cioè le derivate parziali $\left(\frac{dz'}{dy}\right), \left(\frac{dz'}{dz}\right), \left(\frac{dz'}{dy'}\right)$ desunte dalla equazione data $F=0$; e pongasi questo valore della $\dot{z}'$ nel polinomio $a\dot{y}^2+2b\dot{y}\dot{y}'+$ ecc., e si avrà

$A\dot{y}^2+2B\dot{y}\dot{y}'+2C\dot{y}\dot{y}'+D\dot{z}^2+2E\dot{z}\dot{y}'+G\dot{y}'^2$,

dove

$A=a+2dp+mp^2$, $B=b+dq+mpq$, $C=c+dr+kp+mpr$,

$D=e+2hp+mq^2$, $E=g+hr+kq+mqr$, e $G=l+2kr+mr^2$.

Si provi, se le $A, B, ---$ siano tali da rendere i valori di questo polinomio tutti positivi od alcuni nulli e gli altri positivi, ovvero se li rendono tutti negativi od alcuni nulli e gli altri negativi, indipendentemente dalle variazioni contenute in esso, che accadendo ciò, avrà luogo rispettivamente un minimo ovvero un massimo della primitiva $\int f$. Altrimenti procedasi come al § 437, cioè al polinomio trovato sostituiscasi l'identico

$$(A-\alpha'-2\beta p)\dot{y}^2+2(B-\beta'-p\gamma-q\beta)\dot{y}'\dot{z}+2(C-\alpha-r\beta)\dot{y}\dot{y}'+$$
$$(D-\gamma'-q\gamma)\dot{z}^2+2(E-\beta-r\gamma)\dot{z}\dot{y}'+G\dot{y}'^2+(\alpha\dot{y}^2+2\beta\dot{y}\dot{z}+\gamma\dot{z}^2)',$$

dove le α, β, γ sono funzioni qualsivogliono della x; e la cui primitiva è la stessa di quella della sua prima parte cioè della

$$G\dot{y}'^2+2(1)\dot{y}'\dot{z}+2(2)\dot{y}'\dot{y}+(3)\dot{z}^2+2(4)\dot{z}\dot{y}'+(5)\dot{y}^2:$$

i simboli (1), (2), (3), (4), (5) esprimono ordinatamente

$$E-\beta-r\gamma,\ C-\alpha-r\beta,\ D-\gamma'-q\gamma,\ B-\beta'-p\gamma-q\beta,\ A-\alpha'-2p\beta;$$

e però (§ 157), se vi saranno valori per le α, β, γ, che soddisfacciano le due relazioni

$$(3)G-(1)^2>0,\ \big((3)G-(1)^2\big)\big((5)G-(2)^2\big)-\big((4)G-(1)(2)\big)^2> \text{ od } =0,$$

la $\int f$ sarà massima o minima, secondo che risulterà G negativa o positiva.

E qui pure, per essere il polinomio $G\dot{y}'^2+2(1)\dot{y}'\dot{z}+$ecc. identico al prodotto di $\frac{1}{G}$ per

$$\big(G\dot{y}'+(1)\dot{z}+(2)\dot{y}\big)^2+\big((3)G-(1)^2\big)\dot{z}^2+2\big((4)G-(1)(2)\big)\dot{y}\dot{z}+\big((5)G-(2)^2\big)^2$$

risulta, che avrà luogo un massimo ovvero un minimo, secondo che risulterà $G<$ ovvero >0; purchè le α, β, γ soddisfaccino le tre relazioni seguenti

$$(3)G-(1)^2> \text{ od } =0,\ (4)G-(1)(2)=0,\ (5)G-(2)^2> \text{ od } =0$$

cioè le $(D-\gamma'-q\gamma)G-(E-\beta-r\gamma)^2> \text{ od } =0$,

$$(B-\beta'-p\gamma-q\beta)G-(E-\beta-r\gamma)(C-\alpha-r\beta)=0,$$
$$(A-\alpha'-2p\beta)G-(C-\alpha-r\beta)^2> \text{ od } =0.$$

Possiamo intanto concludere, che se la G, valore del trinomio

$$\left(\frac{d^2(f+\lambda F)}{dy'^2}\right)-2\frac{F'(y')}{F'(z')}\left(\frac{d^2(f+\lambda F)}{dy'dz'}\right)+\frac{F'(y')^2}{F'(z')^2}\left(\frac{d^2(f+\lambda F)}{dz'^2}\right)$$

corrispondente a quelli delle y, z, che soddisfanno le equazioni $F=0$, $\int(\dot{f}+\lambda\dot{F})=0$ risulterà positivo, il corrispondente valore della $\int f$, non potrà essere che un minimo; e se il valore di tal trinomio risulterà negativo, quello della $\int f$ non potrà essere che un minimo: se poi G fosse nullo, ognun vede quali proprietà si debbono verificare, perchè vi sia un massimo ovvero un minimo.

440. Se la f contenesse le sole x, y, z, y', e la F fosse $z'-\phi(x, y, z, y')$, avrebbesi evidentemente G eguale all'anzidetto valore pel binomio $f''(y')-\lambda\phi''(y')$ e però, se questo sarà positivo, non potrà aver luogo che un minimo, e se sarà negativo non potrà aver luogo che un massimo valore della $\int f(x, y, z, y')$: risultamento trovato altrimenti la prima volta dal cav. Brunacci.

441. Pel caso di $f=z'$, che è molto interessante, le derivate seconde della f medesima sono tutte *nulle*; e però le $a, b, c,$ - - - risultano

$$\lambda F''(y),\ y\left(\frac{d^2F}{dy'dz'}\right),\ ---\ \lambda F''(z');$$

per cui si ha G eguale al valore di

$$\lambda\left(F''(y)+2r\left(\frac{d^2F}{dy'dz'}\right)+r^2F''(z')\right) \text{ ossia di}$$
$$-\lambda F'(z')\left(\frac{d^2z'}{dy'^2}\right), \text{ essendo}$$

$$F''(y')+2r\left(\frac{d^2F}{dy'dz'}\right)+r^2F''(z')+F'(z')\left(\frac{d^2z'}{dy'^2}\right)=0;$$

dimodochè, il valore della z corrispondente a quello della y, che soddisfa insieme a quello della y medesima la equazione $\int(\dot{f}+\lambda\dot{F})=0$, sarà un massimo od un minimo secondo che risulterà negativo o positivo il prodotto

$$-\lambda F'(z')\left(\frac{d^2z'}{dy'^2}\right).$$

E qui si rifletta, che anco per questo caso, si suppongono dati tanto i valori delle y, y' quanto quelli delle z, z', come si è ammesso per ogni altro caso.

442. Unicamente per indicare come regolarsi, onde stabilire i criteri atti a distinguere i massimi dai minimi valori delle primitive duplicate, tratterò il caso della

$$\iint f(x, y, z, z', z_{,})\,dx\,dy,$$

ammettendo come si è fatto per le primitive ordinarie, che le $\dot{z}, \dot{z}', \dot{z}_{,}$ agli estremi di entrambe le primitive parziali siano date.

Facilmente si trova

$$\ddot{f}=f'(z)\ddot{z}+f'(z')\ddot{z}'+f'(z_{,})\ddot{z}_{,}+\dot{z}^2f''(z)+2\dot{z}\dot{z}'\left(\frac{d^2f}{dzdz'}\right)+2\dot{z}\dot{z}_{,}\left(\frac{d^2f}{dzdz_{,}}\right)+$$
$$\dot{z}'^2f''(z')+2\dot{z}'\dot{z}_{,}\left(\frac{d^2f}{dz'dz_{,}}\right)+\dot{z}_{,}^2f''(z_{,}),$$

ed anco che la equazione

$$\iint\left(\dot{z}f'(z)+\dot{z}'f'(z')+\dot{z}_{,}f'(z_{,})\right)dx\,dy=0 \text{ dà la}$$
$$\iint\left(f'(z)\ddot{z}+f'(z')\ddot{z}'+f'(z_{,})\ddot{z}_{,}\right)dx\,dy=0;$$

e però la primitiva $\iint\ddot{f}\,dx\,dy$ sarà la stessa cosa della primitiva duplicata del solo sestinomio

$$f''(z)\dot{z}^2+2\left(\frac{d^2f}{dzdz'}\right)\dot{z}\dot{z}'+2\left(\frac{d^2f}{dzdz_{,}}\right)\dot{z}\dot{z}_{,}+f''(z')\dot{z}'^2+2\left(\frac{d^2f}{dz'dz_{,}}\right)\dot{z}'\dot{z}_{,}+f''(z_{,})\dot{z}_{,}^2.$$

Quindi, pel massimo valore della $\iint f\,dx\,dy$ dovrà essere negativa la

$$\iint(A\dot{z}^2+2B\dot{z}\dot{z}'+2C\dot{z}\dot{z}_{,}+D\dot{z}'^2+2E\dot{z}'\dot{z}_{,}+G\dot{z}_{,}^2)dx\,dy,$$

e pel minimo dovrà essere questa primitiva positiva: le $A, B, C, ---$ esprimono i valori delle $f''(z), \left(\frac{d^2f}{dzdz'}\right), \left(\frac{d^2f}{dzdz_{,}}\right), ---$ corrispondenti a quello della z, che soddisfa la equazione $\iint\dot{f}\,dx\,dy=0$.

Ora, se le $A, B, C, ---$ avranno i loro valori, corrispondenti a qualsivogliono valori delle x, y di quelli, che sono tra i limiti delle primitive, tali da rendere i corrispondenti valori del sestinomio $A\dot{z}^2+2B\dot{z}\dot{z}'+$ ecc. tutti positivi od alcuni nulli e gli altri positivi, ovvero di renderli tutti negativi od alcuni nulli e gli altri negativi, il valore della z soddisfacente le equazione $\iint\dot{f}\,dx\,dy=0$, corrisponderà (§ 157), nel primo caso ad un minimo e nel secondo ad un massimo valore della primitiva $\iint f\,dx\,dy$.

Non verificandosi queste proprietà pel polinomio $A\dot{z}^2+2B\dot{z}\dot{z}'+$ ecc., ad esso si sostituisca l'identico

$$(A-\alpha'-\beta_{,})\dot{z}^2+2(B-\alpha)\dot{z}\dot{z}'+2(C-\beta)\dot{z}\dot{z}_{,}+$$
$$D\dot{z}'^2+2E\dot{z}'\dot{z}_{,}+G\dot{z}_{,}^2+(\alpha\dot{z}^2)'+(\beta\dot{z}^2)_{,},$$

ove α, β esprimono due funzioni qualsivogliono delle x, y; e la $\iint\ddot{f}\,dx\,dy$ sarà eguale alla sola primitiva analoga del sestinomio

$$a\dot{z}^2+2b\dot{z}\dot{z}'+2c\dot{z}\dot{z}_{,}+D\dot{z}'^2+2E\dot{z}'\dot{z}_{,}+G\dot{z}_{,}^2,$$

dove $a=A-\alpha'-\beta_{,}$, $b=B-\alpha$, $c=C-\beta$; giacchè la primitiva del binomio $(\alpha\dot{z}^2)'+(\beta\dot{z}^2)_{,}$ per essere eguale a $\int(\alpha_1\dot{z}_1^2-\alpha_0\dot{z}_0^2)dy$ *più* $\int(\beta_1\dot{z}_1^2-\beta_0\dot{z}_0)dx$ è *zero*.

Ma il sestinomio è eguale al prodotto di $\frac{1}{G}$ pel quattrinomio

$$(G\dot{z}_{,}+E\dot{z}'+c\dot{z})^2+(DG-E^2)\dot{z}'^2+2(bG-cE)\dot{z}\dot{z}'+(aG-c^2)\dot{z}^2,$$

ossia al prodotto di $\frac{1}{G}$ per

$$\frac{1}{m}\left\{(m\,\dot{z}'+n\,\dot{z})^2+(m\,n-r^2)\,\dot{z}^2\right\},\ \text{ove}$$

$$m=DG-E^2,\ n=bG-cE,\ \text{ed}\ r=aG-c^2;$$

adunque, se risulta m ossia $DG-E^2>0$, e si possono determinare le α, β talmente di rendere $m\,n-r^2$ cioè

$$(DG-E^2)(bG-cE)-(aG-c^2)^2 > \text{od} = 0,$$

la $\iiint d\,x\,dy$ sarà positiva o negativa, se tale riescirà G; vale a dire il valore della z soddisfacente la equazione $\iiint dx\,dy=0$ corrisponderà ad un massimo della $\iint fdxdy$, se $f''(z_{,})$ sarà negativo, e corrisponderà ad un minimo, se sarà $f''(z_{,})$ positivo; semprechè riesca per entrambi i casi $DG-E^2>0$, e che si possa mediante opportuna determinazione delle α, β rendere

$$(DG-E^2)\Big(G(B-\alpha)-(C-\beta)E\Big)-\Big((A-\alpha'-\beta_{,})G-(C-\beta)^2\Big)^2 > \text{od} = 0.$$

Anco per questo caso si vede, che per essere il sestinomio eguale al prodotto di $\frac{1}{G}$ pel quadrinomio

$$(G\dot{z}_{,}+E\dot{z}'+c\dot{z})^2+(DG-E^2)\dot{z}'^2+2(bG-cE)\dot{z}'\dot{z}+(aG-c^2)\dot{z}^2,$$

se risulterà $DG-E^2 > \text{od} = 0$, e si possano determinare le α, β talmente di rendere

$$bG-cE \ \text{ossia}\ (B-\alpha)G-(C-\beta)E=0,\ \text{ed}$$
$$aG-c^2 \ \text{ossia}\ (A-\alpha'-\beta_{,})G-(C-\beta)^2 > \text{od} = 0,$$

il corrispondente valore della $\iint fdxdy$ sarà un massimo o un minimo, secondo che risulterà G ossia $f''(z_{,})$ negativo o positivo.

PARTE UNDECIMA

CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE.

LEZIONE PRIMA

Delle differenze delle funzioni di una sola variabile.

443. La y_x o semplicemente y rappresenti una funzione della x, e la ω una costante rispetto alla x medesima: per indicare i risultamenti che avransi col porre nella y_x in vece della x successivamente

$$x-m\omega,\ ---\ x-2\omega,\ x-\omega,\ x+\omega,\ x+2\omega,\ ---\ x+n\omega$$

si useranno ordinatamente i simboli

$$y_{x-m\omega},\ ---\ y_{x-2\omega},\ y_{x-\omega},\ y_{x+\omega},\ y_{x+2\omega},\ ---\ y_{x+n\omega}$$

ovvero i seguenti $\overset{-m}{y},\ ---\ \overset{-2}{y},\ \overset{-1}{y},\ \overset{1}{y},\ \overset{2}{y},\ ---\ \overset{n}{y}$: anzi similmente si indicheranno tutti i risultamenti analoghi a questi medesimi, qualunque sia la variabile e la funzione di essa dalla quale trarranno essi origine.

Le quantità $y_{x+\omega}$, $y_{x+2\omega}$, $---$ $y_{x+n\omega}$ si chiameranno valori *conseguenti* della y_x, e particolarmente primo, secondo, --- n *esimo*; e le $y_{x-\omega}$, $y_{x-2\omega}$, $---$ $y_{x-m\omega}$ si chiameranno primo, secondo, --- m *esimo* valori *antecedenti* della stessa y_x.

La quantità $y_{x+\omega}-y_x$ si chiamerà *differenza finita del primo ordine* o differenza finita prima, o semplicemente differenza, della funzione y_x; ed essa si in-