LEZIONI

DI

CALCOLO SUBLIME

DI

ANTONIO BORDONI

PROFESSORE NELL' I. R. UNIVERSITA' DI PAVIA,
UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETA' ITALIANA,
ecc. ecc.

TOMO I.

MILANO
PER P. E. GIUSTI FONDITORE-TIPOGRAFO
1831.

AVVERTIMENTO

Quest'opera contiene quasi tutte quelle parti delle mie lezioni di puro calcolo sublime, che sono le più interessanti pei giovani che aspirano al grado di ingegnere architetto. Esse vi sono esposte in modo atto a facilitare lo studio anco di quelle altre parti del calcolo medesimo che sembrano riserbate a chi si propone l'acquisto di cognizioni teoriche più estese, e delle quali si darà un saggio in una operetta, appendice di questa, ove si avrà cura di comprendere segnatamente la teorica degli integrali definiti e le principali applicazioni che se ne fecero in questi ultimi tempi pei progressi dell'analisi.

Quali siano effettivamente le parti trattate in questi due volumi e con quale estensione, risulta dall' indice: in quelle risguardanti le quantità continue ho usato il metodo delle derivate; non ripeto qui le ragioni di una tale preferenza, ma assicuro che riescirà facile a chi conoscerà questo metodo, non solo la lettura di qualsivoglia altr'opera avente per oggetto le stesse quantità, qualunque sia quello adottato in essa, ma anco lo scoprire la imperizia di chi sparlò di esso. Così, ho preferito generalmente le dimostrazioni meno astratte, perchè riescano meno difficili pei giovani educati nei differenti rami scientifici da diverse persone; ma ho ommesso però, le generalizzazioni di alcune regole, alcuni casi particolari di altre, le spiegazioni di certe singolarità e l'uso dei resti nelle serie, perchè facili sì a concepirsi che a farsi da chiunque conosca le lezioni antecedenti, e le opportune parti della introduzione al calcolo sublime, che si potranno apprendere nelle opere dei signori *Franchini*, *Lotteri*, *Collalto*, *Lacroix*, *Bourdon*, ecc.

Nella compilazione di alcune sue parti mi valsi delle opere di *Paoli*, *Monge*, *Pfaff*, *Poisson*, *Brunacci*, *Ch. Dupin*, *Magistrini*, *Plana*, *Cauchy*, *Piola*, *Franchini* e segnatamente di quelle di *LAGRANGE*; e procurai di combinare le cose loro alle mie in modo di agevolare ai giovani suddetti lo studio di quelle teoriche di calcolo sublime, che sono assolutamente necessarie onde riescire ingegnere architetto almeno in parte conforme allo stato attuale delle scienze; per il che sono poche le quistioni da me trattate, che non abbiano qualche uso interessante per una tale professione.

Fo per ultimo osservare che il Tipografo, fatto da me sussidiare per la revisione della stampa dal sig. ingegnere *Giovanni Veladini*, non risparmiò cure a far sì che l'edizione riescisse di mio aggradimento: che stampata l'opera, incaricai il sig. ingegnere *Cesare Zanoncelli* di leggerla onde notasse gli errori trascorsi ad onta della diligenza anzidetta: e che da lui ebbi quasi tutta l'*errata* di essa.

INDICE

TOMO I.

PARTE PRIMA

TEOREMA DI TAYLOR E DERIVATE DELLE FUNZIONI DI UNA SOLA VARIABILE.

PARTE SECONDA

EQUAZIONI ALLE DERIVATE, DERIVATE PARZIALI, DERIVATE DELLE FUNZIONI IMPLICITE, E TRASFORMAZIONI DELLE DERIVATE.

PARTE TERZA

PRIMITIVE DELLE FUNZIONI.

PARTE QUARTA

SVILUPPI E RELAZIONI TRA UNA FUNZIONE E LA SUA PRIMITIVA, E TRA LE QUANTITA' SVILUPPABILI SECONDO DIMENSIONI POSITIVE E CRESCENTI DELLE STESSE INDETERMINATE.

PARTE QUINTA

DEI MASSIMI E MINIMI VALORI DELLE FUNZIONI,

E VALORI DEL SIMBOLO $\frac{0}{0}$.

PARTE SESTA

CONTATTI, ASINTOTE,

E MISURE DELLE LINEE, SUPERFICIE E DE' CORPI.

PARTE SETTIMA

VALORI APPROSSIMATI DELLE PRIMITIVE, E CRITERJ D'INTEGRABILITA'.

TOMO II.

PARTE OTTAVA

PRIMITIVE DELLE EQUAZIONI TRA DERIVATE PRESE RISPETTO AD UNA SOLA VARIABILE.

PARTE NONA

PRIMITIVE DELLE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI.

PARTE DECIMA

CALCOLO DELLE VARIAZIONI, E MASSIMI E MINIMI VALORI DELLE PRIMITIVE DEFINITE.

PARTE UNDECIMA

CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE.

PARTE DODICESIMA

CALCOLO MISTO DI DIFFERENZE E DERIVATE E DELLE RISPETTIVE LORO PRIMITIVE.

TOMO I.

Pag.	Linee	ERRORI	CORREZIONI ED AGGIUNTE
81	22	$\frac{1}{2}F_2, \frac{1}{2\cdot 3}F_3, ---$	$2F_2, 3F_3, ---$
110	14	dalla	della
117	23	$\frac{cB}{n}\left(\frac{B}{t^c-A}\right)^{\frac{a+1}{n}-1}$ ec.	$\frac{c}{nB}\left(\frac{B}{t^c-A}\right)^{\frac{a+1}{n}+1}$ ec.
118	3	$\frac{cB}{n}\left(\frac{B}{t^c-A}\right)^{\frac{a+1}{n}+\frac{b}{c}-1}$ ec.	$\frac{c}{nB}\left(\frac{B}{t^c-A}\right)^{\frac{a+1}{n}+\frac{b}{c}+1}$ ec.
119	15	degli	degli immediati
122	11	Bsn	Bsm
»	14	x^{m+n-1}	x^{m-n-1}
123	18	$-\frac{1}{m+1}$	$+\frac{m}{m+1}$
»	23	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{3}{4}$
125	13, 14	parte	parti
127	15	è A.	è $-$A.
133	11	$\overline{\cdots 6\cdot 4}$	$\overline{\cdots 4\cdot 2}$
»	12	$\underline{---4\cdot 2}$	$\underline{---5\cdot 3}$
136	18	$\frac{a}{c}$ A.	$\frac{a}{c}$
157	8, 10	ω	u
183	11	$B\omega^{a+m}+C\omega^{a+n}+$ec.	$B\omega^{m}+C\omega^{n}+$ec.
223	16	$+0$	$=0$
226	16	fattori	fattori monomiali
246	9	fattore $q-y$	prodotto $(q-y)\sqrt{(1+y'^2)}$
272	2	seconda	terza
277	17	p, q	q, r

Pag.	*Linee*	ERRORI	CORREZIONI ED AGGIUNTE
289	10	$-\frac{z'''}{\mu}$;	$+\frac{y'''}{\mu}$;
293	9	sviluppante	sviluppata
297	9, 10, 16	s''^2	s''^3
300	18	LEZIONE IV.	LEZIONE VI.
312	3	m	$m-1$
324	2	arbitraria	della arbitraria
»	5	chiamisi	chiamasi
335	10	y'^2	y'
350	11	$\lambda'(x)$	$\lambda(x)$
358	9	nel	sul
370	13	limini	limiti
374	17	x	u
»	29	$f(\psi, \varphi)$	$f(\psi, u)$
375	4	φ	u
377	22	$=($	$=-($
378	10, 12	z	$-z$
379	21	$\xi'(u)\{$	$\xi'(u)=\{$
394	6	$\mu'(0)$	$\alpha'(0)$
402	2, 3, 17	$\frac{\alpha}{2}$	α
» 403	19 11	$\frac{\alpha^7}{2520}$	$-\frac{\alpha^7}{6\cdot 2520}$
404	20	$\frac{\alpha^2}{12}$	$\frac{\alpha^2}{6}$
»	22	$\frac{\alpha^6}{5040}$	$\frac{\alpha^6}{6\cdot 5040}$
417	14, 15	La $\varphi'(y'')'$ usata in queste due linee significa la derivata della $\varphi'(y'')$, presa rispetto alla x, nell'ipotesi di y'' costante.	

TOMO II.

Pag.	Linee	ERRORI	CORREZIONI ED AGGIUNTE
10	17	$\beta =$	$\beta = -$
26	20	una medesima	una
34	8	coordinate	rette coordinate
44	17, 18	*La parte* «che è un caso dell'ultima contemplata nel paragrafo antecedente» *si tolga.*	
59	16, 17	F	P
82	13	$AP_{n,1}$	$AP_{n-2,1}$
86	3	a, H_1	$a^{\frac{1}{n}}$, $H_1^{\frac{1}{n}}$
124	10	che B	che A, B
125	9	$-C'(u)$	$-C'(y)$
141	25, 26	M	m
144	7, 9	$z-p$	$y-p$
165	15	F'	F
168	24	meno uno	meno uno e soddisfacente la data.
172	21	F'	F
187	21	ϕ	Δ
191	3	$-2z$	$-\frac{2z}{x^2}$
201	16	$\left(\frac{u'}{x'}\right.$	$\left(\frac{u}{x'}\right.$
»	17	$\left(\frac{u'}{x'}\right.$	$\left(\frac{u'}{x'^2}\right.$
208	12, 14, 15	$\frac{\nu}{2}$	ν
217	2, 9, 14	y'_0, $1+\left(\frac{dz_0}{dy_0}\right)z'_0$	z'_0, $y'_0+\left(\frac{dz_0}{dy_0}\right)z'_0$
234	16	nella lèzione seguente	nelle lezioni seguenti
278	11	$)z''=0$	$)z_{\prime\prime}=0$

Pag.	Linee	ERRORI	CORREZIONI ED AGGIUNTE
286	19	$f''(y) +$	$f''(y)$,
292	29	k, l	l, k
293	21	$2B\dot{y}\dot{y}'$	$2B\dot{y}\,\dot{z}$
"	24	$2hp$	$2hq$
303	6	$(x+2\omega)$ - - - $(x+m\omega)$	$x(x-\omega)$ - - $(x-m\omega)$
305	10	-1	$-\omega$
320	23	Δs	Δx
327	1	$\alpha_1-\alpha_3$, - - - $\alpha_1-\alpha_m$	$\alpha_2-\alpha_3$, - - - $\alpha_{m-1}-\alpha_m$
"	5, 6	n	n_i i numero intero
"	15,16,17	(2), (3), - - - (m)	(n_2), (n_3), - - - (n_m)
"	19,21,22		
328	2		
345	3, 5	a_0	a
363	6	Σ^n	Σ^m
387	24	q	pq
388	4	$=p, =q$	$=\frac{1}{2}p, =pq$
396	12	$a^2\,C_3)\,x^x$	$x^2\,C_3)\,a^x$
401	12	t^x	t^{x-r}
403	26	$=L$	$=L:\mu_{x+2}$
410	23	$\Delta p, -p$	$-\Delta p, p$
411	15, 16	ossia nel caso presente della $(x+1)^2-y-\Delta y=0$	o meglio di quella dalla cui primitiva si deve desumere la φ,
417	9	$\frac{x}{4}$	$\frac{x}{2}$
433	11	$4(L+\Delta L)$	$2(\Delta L-M)$
"	12, 21	$4(L+L')+M$	$2(L+L')-M$
441	5	Parte IX.	Parte X.
"	19	),	$)+\lambda l_x$
446	10	Una equazione,	Una equazione a tre variabili,

LEZIONI

DI

CALCOLO SUBLIME

PARTE PRIMA

TEOREMA DI TAYLOR,

E DERIVATE DELLE FUNZIONI DI UNA SOLA VARIABILE.

LEZIONE PRIMA

Del teorema di Taylor.

1. Si chiamerà *variabile continua* o semplicemente *variabile* ogni quantità suscettibile di un numero indefinibile od infinito di valori successivamente continui gli uni agli altri; e si chiamerà *costante* ogni quantità, di valore effettivamente individuato, o supposto individuato: così una quantità si dirà costante rispetto ad un'altra, quando non varierà, variando quest'altra.

Una quantità dirassi *funzione* di un'altra o di altre, quando essa varierà, variando queste altre; dimodochè una espressione formata effettivamente con una, o due, o più quantità, si chiamerà funzione di queste medesime quantità, sia essa formata con queste sole od anco con altre.

Le quantità variabili si indicheranno, generalmente, colle lettere x, y, z, ---, e le costanti colle a, b, c, ---.

Per indicare una funzione della x scriveremo $f(x)$; per indicare una funzione della $f(x)$, già funzione della x, scriveremo $F\big(f(x)\big)$ od $F(f)$, sottintendendo essere la f funzione della x. Così, per indicare una funzione delle quantità p, q, r, ---, qualunque esse siano, useremo la scrittura $F(p, q, r, ---)$; anzi, analoghe scritture si useranno per esprimere funzioni qualsivogliono della x o di altre quantità.

Una espressione della forma

$$A + \omega B + \omega^2 C + \omega^3 D + \text{ecc.},$$

nella quale la quantità ω vi sia nel solo modo visibile, e sia essa eguale alla funzione $f(x+\omega)$ qualunque siano i valori delle x, ω, si chiamerà *sviluppo* di questa medesima funzione $f(x+\omega)$.

La quantità A, primo termine dello sviluppo della funzione $f(x+\omega)$, è la stessa funzione $f(x)$, dalla quale si desume $f(x+\omega)$ dando alla x l'aumento ω.

Di fatto, dovendo essere lo sviluppo

$$A + \omega B + \omega^2 C + \omega^3 D + \text{ecc.}$$

e la funzione $f(x+\omega)$ eguali tra loro qualunque siano le x, ω, i loro valori corrispondenti all'$\omega = 0$ saranno anch'essi eguali qualunque sia la x. Ma un tal valore dello sviluppo è A, suo primo termine, e quello della funzione $f(x+\omega)$ è $f(x+0)$ cioè $f(x)$; adunque sarà

$$A = f(x);$$

e ciò avrà luogo, qualunque sia la x, vale a dire, A sarà identicamente la stessa funzione $f(x)$.

E per tanto lo sviluppo della $f(x+\omega)$ si potrà indicare con

$$f(x)+\omega B+\omega^2 C+\omega^3 D+\text{ecc.}$$

ovvero con

$$f(x)+\omega B(x)+\omega^2 C(x)+\omega^3 D(x)+\text{ecc.}$$

essendo le B, C, D, --- in generale funzioni della x.

2. La quantità B, coefficiente della ω nello sviluppo della funzione $f(x+\omega)$, si chiamerà *funzione derivata del primo ordine* o *funzione derivata prima* od anco semplicemente *derivata* della funzione $f(x)$.

Così, se la quantità $B(x+\omega)$, che si ha, cambiando nella $B(x)$ la x in $x+\omega$, avesse per isviluppo

$$B(x)+\omega B_1+\omega^2 C_1+\text{ecc.},$$

la B_1, che è rispetto alla $B(x)$, ciò che la B stessa è rispetto alla $f(x)$, si chiamerà derivata prima della $B(x)$, ovvero *derivata del secondo ordine* o semplicemente *derivata seconda* della $f(x)$.

Similmente, se la $B_1(x+\omega)$, che si ha, cambiando nella $B_1(x)$ la x in $x+\omega$, sarà eguale alla espressione

$$B_1(x)+\omega B_2+\omega^2 C_2+\text{ecc.},$$

qualunque siano x, ω, la B_2 si chiamerà derivata prima della B_1 o derivata seconda della B ovvero *derivata del terzo ordine* o *derivata terza* della $f(x)$.

Pensando alle proprietà, qui enunciate, delle quantità chiamate derivata prima, derivata seconda, derivata terza della funzione $f(x)$, facilmente si comprenderà, quali saranno quelle quantità, che si dovranno chiamare *derivata quarta, quinta, -- ennesima,* non solo della funzione $f(x)$, ma anco di qualunque altra funzione della x.

La B derivata prima della $f(x)$ si indicherà con $f'(x)$ ed anco con f'; la B_1 derivata seconda della $f(x)$ si indicherà con $f''(x)$ o semplicemente con f''; la terza con $f'''(x)$ o semplicemente con f'''; la quarta con $f^{IV}(x)$ o con f^{IV}; in generale, la derivata ennesima della stessa $f(x)$ si indicherà col simbolo $f^{(n)}(x)$ o semplicemente coll'$f^{(n)}$: anzi, analogamente si indidicheranno le derivate di qualunque altra funzione. In tanto allo sviluppo della funzione $f(x+\omega)$ si può dare la forma seguente $f(x)+\omega f'(x)+$ ecc.

3. Dimostrerò che la derivata del prodotto di una costante per una funzione eguaglia il prodotto della stessa costante per la derivata della funzione.

La costante si chiami H e la funzione $\phi(x)$; e si indichi il prodotto $H\phi(x)$ con $f(x)$.

Dalle cose dianzi esposte si ha

$$\phi(x+\omega)=\phi(x)+\omega\,\phi'(x)+\text{ecc.};$$

e moltiplicando per H, risulta

$$H\phi(x+\omega)=H\phi(x)+\omega\,H\phi'(x)+\text{ecc.}$$

Ma

$$H\phi(x+\omega)\text{ è eguale ad } f(x+\omega),$$

ed

$$f(x+\omega)=f(x)+\omega f'(x)+\text{ecc.};$$

adunque sarà

$$H\phi(x)+\omega H\phi'(x)+\text{ecc.}=f(x)+\omega f'(x)+\text{ecc.}$$

qualunque sia ω, e per tanto

$$f'(x)=H\phi'(x);$$

cioè la derivata della $f(x)$ sarà eguale al prodotto della H costante per la $\varphi'(x)$ derivata della $\varphi(x)$: appunto come si è dichiarato.

4. Abbiamo dimostrato, che A, primo termine dello sviluppo della funzione $f(x+\omega)$, è la stessa $f(x)$: ora passeremo a dimostrare che C, D, E, ---, coefficienti delle potenze ω^2, ω^3, ω^4, --- nello sviluppo medesimo, sono ordinatamente le funzioni

$$\frac{1}{2}f''(x),\ \frac{1}{2\cdot 3}f'''(x),\ \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}f^{IV}(x),\ ---,$$

cioè che, il C è una *metà* della derivata seconda della funzione $f(x)$, il D un *sesto* della derivata terza, l'E un *ventiquattresimo* della quarta; e così degli altri.

Nella equazione

$$f(x+\omega)=f(x)+\omega B(x)+\omega^2 C(x)+\omega^3 D(x)+\omega^4 E(x)+\text{ecc.}$$

puramente supposta, la quale deve sussistere qualunque siano le x, ω, pongasi $x+\theta$ in vece della x, e si avrà la

$$f(x+\theta+\omega)=f(x+\theta)+$$
$$\omega B(x+\theta)+\omega^2 C(x+\theta)+\omega^3 D(x+\theta)+\omega^4 E(x+\theta)+\text{ecc.};$$

ed anco vi si ponga $\omega+\theta$ in vece della ω, ed avrassi la

$$f(x+\omega+\theta)=f(x)+$$
$$(\omega+\theta)B+(\omega+\theta)^2 C+(\omega+\theta)^3 D+(\omega+\theta)^4 E+\text{ecc.}$$

Queste due equazioni ottenute sussisteranno, non solo qualunque siano x, ω, ma anco qualunque sia θ, quantità, che si terrà per indeterminata ed indipendente sì dalla x che dalla ω; e siccome le $f(x+\theta+\omega)$, $f(x+\omega+\theta)$ primi membri di esse, sono eguali fra loro, qualunque siano x, ω, θ, eguali similmente ne saranno fra loro i secondi membri. Vale a dire avrà luogo la equazione

$$f(x+\theta)+\omega B(x+\theta)+\omega^2 C(x+\theta)+\omega^3 D(x+\theta)+\omega^4 E(x+\theta)+\text{ecc.}=$$

$$f(x)+(\omega+\theta)B+(\omega+\theta)^2 C+(\omega+\theta)^3 D+(\omega+\theta)^4 E+\text{ecc.}$$

qualunque siano le quantità x, ω, θ.

Ordiniamo sì l'un membro che l'altro di questa equazione secondo le potenze della θ d'esponenti crescenti, ommettendo però quei termini, nei quali la θ ha esponenti maggiori di *uno*, perchè non ci occorreranno; e cominciamo ad ordinare il primo.

Nella equazione $f(x+\omega)=f(x)+\omega f'+\text{ecc.}$, che è quella supposta, si cambi l'ω in θ; e si avrà la

$$f(x+\theta)=f(x)+\theta f'+\text{ecc.}:$$

ed in questa si cambi la funzione espressa colla $f(x)$ successivamente nelle funzioni espresse colle $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, $E(x)$, ---; e si avranno le seguenti

$$\begin{aligned} B(x+\theta)&=B+\theta B'+\text{ecc.},\\ C(x+\theta)&=C+\theta C'+\text{ecc.},\\ D(x+\theta)&=D+\theta D'+\text{ecc.},\\ E(x+\theta)&=E+\theta E'+\text{ecc.}\\ &-------- \end{aligned}$$

dove le B', C', D', E', --- esprimono le $B'(x)$, $C'(x)$, $D'(x)$, $E'(x)$, --- cioè le derivate delle $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, $E(x)$, ---.

Si pongano nel polimonio

$$f(x+\theta)+\omega B(x+\theta)+\omega^2 C(x+\theta)+\omega^3 D(x+\theta)+\omega^4 E(x+\theta)+\text{ecc.}$$

primo membro di cui si parla, in luogo delle funzioni $f(x+\theta)$, $B(x+\theta)$, $C(x+\theta)$, $D(x+\theta)$, $E(x+\theta)$, ---, i rispettivi sviluppi qui esposti, e si troverà esso eguale all'

$$f(x)+\omega B+\omega^2 C+\omega^3 D+\omega^4 E+\text{ecc.}+$$
$$\theta(f'+\omega B'+\omega^2 C'+\omega^3 D'+\text{ecc.})+\text{ecc.}$$

ossia all'

$$f(x+\omega)+\theta(f'+\omega B'+\omega^2 C'+\omega^3 D'+\text{ecc.})+\text{ecc.}$$

Per ordinare il secondo membro della medesima suddetta equazione, pongansi in esso in vece delle potenze indicate di $\omega+\theta$ i rispettivi loro sviluppi, e si eseguiscano le moltiplicazioni, che compajono; ed avrassi

$$f(x)+\omega B+\omega^2 C+\omega^3 D+\omega^4 E+\text{ecc.}+$$
$$\theta(B+\omega\cdot 2C+\omega^2\cdot 3D+\omega^3\cdot 4E+\text{ecc.})+\text{ecc.}$$

ossia

$$f(x+\omega)+\theta(f'+\omega\cdot 2C+\omega^2\cdot 3D+\omega^3\cdot 4E+\text{ecc.})+\text{ecc.}$$

Quindi la equazione superiormente trovata equivarrà alla

$$f(x+\omega)+\theta(f'+\omega B'+\omega^2 C'+\omega^3 D'+\text{ecc.})+\text{ecc.}=$$
$$f(x+\omega)+\theta(f'+\omega\cdot 2C+\omega^2\cdot 3D+\omega^3\cdot 4E+\text{ecc.})+\text{ecc.}$$

che, sussistendo qualunque sia θ, per cui eguali debbono essere i coefficienti della θ medesima, dà la

$$f'+\omega B'+\omega^2 C'+\omega^3 D'+\text{ecc.}=f'+\omega\cdot 2C+\omega^2\cdot 3D+\omega^3\cdot 4E+\text{ecc.},$$

la quale, dovendo sussistere qualunque sia l'ω, somministra le seguenti

$$2C=B',\ 3D=C',\ 4E=D',\ ---,$$

che debbono aver luogo qualunque sia la x; giacchè la medesima equazione sopra trovata deve sussistere qualunque siano x, ω, θ.

Dalla prima di queste ultime equazioni si ha

$$C = \tfrac{1}{2} B', \text{ cioè } C = \tfrac{1}{2} f'';$$

dalla seconda hassi $D = \frac{1}{3} C'$, cioè D eguale ad un *terzo* della derivata di $\frac{1}{2} f''$, che (§ 3) è $\frac{1}{2} f'''$; e però sarà

$$D = \frac{1}{2 \cdot 3} f''':$$

così dalla terza si cava $E = \frac{1}{4} D'$, e per tanto

$$E = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} f^{IV}; \text{ ---}.$$

Si concluda adunque, che i coefficienti C, D, E, --- sono effettivamente le stesse funzioni

$$\frac{1}{2} f''(x), \ \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(x), \ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} f^{IV}(x), \text{ ---}:$$

appunto come si è dichiarato.

Sostituendo questi valori dei C, D, E, --- non che $f'(x)$ in vece del B, nella supposta equazione, si ha la

$$f(x+\omega) = f(x) + \omega f'(x) + \frac{\omega^2}{2} f''(x) + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} f'''(x) + \frac{\omega^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} f^{IV}(x) + \text{ecc.}$$

la quale costituisce il celebre teorema di Taylor.

5. Porrò fine a questa lezione, esponendo una proposizione, mediante la quale se ne possono dimostrare molte altre interessanti con facilità e semplicità; ed essa è, qual dev' essere il significato della ϕ, perchè la funzione $\phi(x+\omega)$ eguagli la somma delle due $\phi(x)$, $\phi(\omega)$, qualunque siano le quantità x, ω.

Pel teorema dimostrato la equazione

$$\phi(x) + \phi(\omega) = \phi(x+\omega),$$

che è quella a soddisfarsi, si cambia nella

$$\varphi(x)+\varphi(\omega)=\varphi(x)+\omega\,\varphi'(x)+\text{ecc.}$$

ossia

$$\varphi(\omega)=\omega\,\varphi'(x)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(x)+\text{ecc.}$$

cioè

$$\varphi(\omega)=\omega\,p(x)+\text{ecc.}$$

posto $\varphi'(x)=p(x)$; ed ommessi i termini nei quali vi sono ω^2, ω^3, ---, perchè non occorrono.

Questa equazione, sussistendo qualunque sia la x, dà, ponendo in essa $x+\theta$ in vece della x, la

$$\varphi(\omega)=\omega\,p(x+\theta)+\text{ecc.}$$

e però avrassi anco la seguente

$$\omega\,p(x)+\text{ecc.}=\omega\,p(x+\theta)+\text{ecc.},$$

la quale, dovendo sussistere qualunque sia la ω, fra le equazioni che somministra vi è la

$$p(x)=p(x+\theta)\text{ ossia }p(x)=p(x)+\theta p'(x)+\frac{\theta^2}{2}p''(x)+\text{ecc.};$$

e per tanto sarà

$$p'(x)=0,\ p''(x)=0,\ ---.$$

Ma la equazione $p(x)=p(x+\theta)$ significa che, la quantità $p(x)$ non cambia cambiando la x; adunque sarà $p(x)=k$, k quantità costante rispetto alla x.

Vale a dire, si hanno le

$$p(x)=k,\ p'(x)=0,\ p''(x)=0,\ ---,$$

ossia

$$\varphi'(x)=k,\ \varphi''(x)=0,\ \varphi'''(x)=0,\ ---.$$

Si pongano i valori delle

$$\varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \varphi'''(x),\ ---,$$

qui trovati, nella equazione

$$\varphi(\omega) = \omega\varphi'(x) + \frac{\omega^2}{2}\varphi''(x) + \text{ecc.}$$

ottenuta sopra, e si avrà

$$\varphi(\omega) = \omega k.$$

Quindi la φ, che esprime quella operazione, la quale eseguita sulla somma di due quantità indeterminate, dà un risultamento eguale alla somma di quelli, che si hanno, eseguendola sulle medesime due quantità separatamente, consiste nel moltiplicare per una costante anco arbitraria la quantità indeterminata sulla quale è eseguita.

Dalle equazioni

$$p(x) = k,\ p'(x) = 0,\ p''(x) = 0,\ ---$$

sopra trovate emerge, che le derivate di una costante, sono *nulle*, come era d'altronde facile a prevedere.

LEZIONE II.

Delle derivate di una potenza della variabile.

6. La variabile sia qui pure indicata colla x, e l'indice od esponente della potenza lo sia colla m costante rispetto alla x, ma del rimanente quantità qualsivoglia.

Si deve trovare la derivata della x^m, cioè si deve trovare il coefficiente della prima potenza d'ω nello sviluppo della potenza $(x+\omega)^m$, che si ottiene, cambiando la x in $x+\omega$ nella x^m. Questa derivata, che dev'essere evidentemente una funzione della x e della m, si chiami $\varphi(m, x)$.

Pel teorema dimostrato nella lezione antecedente si ha

$$(x+\omega)^m = x^m + \omega\,\phi(m,\,x) + \text{ecc.}$$

In questa equazione, in vece della m, si ponga n altra quantità costante qualsivoglia; e si avrà la

$$(x+\omega)^n = x^n + \omega\,\phi(n,\,x) + \text{ecc.}$$

Queste due equazioni danno il prodotto

$$(x+\omega)^m\cdot(x+\omega)^n \text{ eguale all'}$$

$$\big(x^m + \omega\,\phi(m,\,x) + \text{ecc.}\big)\cdot\big(x^n + \omega\,\phi(n,\,x) + \text{ecc.}\big);$$

e però, eseguite le due moltiplicazioni indicate, si avrà l'equazione

$$(x+\omega)^{m+n} = x^{m+n} + \omega\,\big(x^n\phi(m,\,x) + x^m\phi(n,\,x)\big) + \text{ecc.}$$

Ma dalla prima di queste due equazioni, cambiando in essa la m in $m+n$, hassi anco la

$$(x+\omega)^{m+n} = x^{m+n} + \omega\,\phi\,(m+n,\,x) + \text{ecc.};$$

adunque sarà

$$x^{m+n} + \omega\big(x^n\phi(m,x) + x^m\phi(n,x)\big) + \text{ec.} = x^{m+n} + \omega\phi(m+n,x) + \text{ecc.}$$

equazione che, dovendo sussistere qualunque sia l'ω, somministra la seguente

$$x^n\phi(m,x) + x^m\phi(n,x) = \phi(m+n,x),$$

mediante la quale si può determinare la funzione $\phi(m,x)$.

Pongasi $\phi(m,x) = x^m\psi(m)$, cioè eguale al prodotto d'x^m per $\psi(m)$ altra funzione incognita della m, ed anco della x, e però

$$\phi\,(n,x) = x^n\psi\,(n), \text{ e } \phi\,(m+n,x) = x^{m+n}\psi\,(m+n):$$

questi valori delle $\phi(m,\,x)$, $\phi(n,\,x)$, $\phi(m+n,\,x)$ si sostituiscano nell'ultima equazione trovata; ed avrassi la

$$x^n x^m \psi(m) + x^m x^n \psi(n) = x^{m+n} \psi(m+n)$$

ossia

$$\psi(m) + \psi(n) = \psi(m+n),$$

la quale (§ 5) significa, che la $\psi(m)$ deve consistere nel prodotto della m per una quantità indipendente dalla m medesima o non contenente la m.

Chiamisi questa quantità α: sarà

$$\psi(m) = \alpha m, \text{ e però } \varphi(m, x) = x^m \alpha m.$$

Per determinare la α, si osservi, che dal valore qui trovato della

$$\varphi(m, x), \text{ fatto } m = 1, \text{ si ha } \varphi(1, x) = x\alpha;$$

e dalla equazione

$$(x+\omega)^m = x^m + \omega\varphi(m, x) + \text{ecc.},$$

posto anco in essa in vece d'm l'*unità*, risulta la

$$x + \omega = x + \omega\varphi(1, x) + \text{ecc.},$$

la quale dà evidentemente

$$\varphi(1, x) = 1;$$

e però, eguagliando questi due valori della $\varphi(1, x)$, si avrà l'equazione

$$\alpha x = 1, \text{ che somministra } \alpha = \frac{1}{x}.$$

Quindi sarà

$$\varphi(m, x) = x^m \frac{1}{x} m \text{ ossia } \varphi(m, x) = m x^{m-1}.$$

Vale a dire, la derivata di una data potenza di una variabile, è il prodotto dell'esponente della sua potenza per quella potenza della variabile stessa, il cui esponente è minore di una *unità* di quello della data.

7. Essendo mx^{m-1} la derivata della x^m, quella della funzione Ax^m, ove A indica una costante, sarà (§ 3) Amx^{m-1}.

La x^m si chiami $f(x)$. Per essere $f'(x) = mx^{m-1}$ ed $f''(x)$ la derivata prima della $f'(x)$, sarà $f''(x)$ eguale alla derivata di mx^{m-1}; e però eguale al prodotto della costante m per la derivata della x^{m-1}, che è $(m-1)x^{m-2}$; cioè sarà $f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$.

Così, per essere $f'''(x)$ la derivata prima della $f''(x)$, sarà

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3},$$

espressione che è il prodotto d'$m(m-1)$ costante per $(m-2)x^{m-3}$ derivata della x^{m-2}.

Ragionando analogamente per le $f^{IV}(x)$, $f^{V}(x)$, ---, si trovano

$$f^{IV}(x) = m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4},$$
$$f^{V}(x) = m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)x^{m-5},$$
$$- .$$

Anzi, coll'osservare come sono formate le derivate della x^m, qui esposte, facilmente si comprenderà, che sarà

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2) - - - - (m-n+1)x^{m-n}.$$

Se m fosse un numero intero e la n eguale alla m, la derivata *n esima* ossia *m esima* della x^m sarebbe

$$m(m-1)(m-2) - - - - 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

che è costante; e però quando l'm sia intero le derivate della x^m degli ordini $m+1$, $m+2$, $m+3$, --- *esimi* saranno *nulle* (§ 5).

Se $m = 1$, si ha $f'(x) = 1$; vale a dire la derivata della x è l'*unità*.

8. Si sostituiscano nella equazione

$$f(x+\omega)=f(x)+\omega f'(x)+\frac{\omega^2}{2}f''(x)+\text{ecc.}$$

in luogo delle $f(x+\omega)$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, --- i loro valori

$$(x+\omega)^m, x^m, mx^{m-1}, m(m-1)x^{m-2}, ---;$$

ed avrassi la

$$(x+\omega)^m=x^m+mx^{m-1}\omega+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}\omega^2+\text{ecc.};$$

cioè lo sviluppo Neutoniano dimostrato qualunque sia l'esponente della potenza.

LEZIONE III.

Delle derivate del logaritmo della variabile.

9. Nella formola di Taylor si ponga Log.x in vece della $f(x)$, e però Log.$(x+\omega)$ in vece della $f(x+\omega)$; e si avrà

$$\text{Log.}(x+\omega)=\text{Log.}x+\omega f'+\frac{\omega^2}{2}f''+\frac{\omega^3}{2\cdot3}f'''+\text{ecc.},$$

qualunque siano x, ω.

In questa equazione pongasi il prodotto $x\theta$ in vece della ω, ove θ esprime una quantità qualsivoglia; ed avrassi

$$\text{Log.}(x+x\theta) \text{ ossia } \text{Log.}x+\text{Log.}(1+\theta)$$

$$=\text{Log.}x+\theta xf'(x)+\frac{\theta^2}{2}x^2f''(x)+\text{ecc.}$$

cioè

$$\text{Log.}(1+\theta)=\theta\cdot xf'(x)+\frac{\theta^2}{2}\cdot x^2f''(x)+\text{ecc.},$$

ossia

$$\text{Log.}(1+\theta)=\theta p(x)+\text{ecc.},$$

posto $xf'(x)=p(x)$.

Se in quest'ultima equazione cambiasi la x in $x+\omega$, si ha

$$\text{Log.}(1+\theta)=\theta p(x+\omega)+\text{ecc.};$$

e però, eguagliando tra loro queste due espressioni del Log.$(1+\theta)$, si avrà l'equazione

$$\theta p(x)+\text{ecc.}=\theta p(x+\omega)+\text{ecc.},$$

la quale, sussistendo qualunque sia θ, dà la seguente $p(x)=p(x+\omega)$, da cui si desume, che la $p(x)$ cioè $xf'(x)$ dev'essere costante rispetto alla x. Questa costante chiamisi M: sarà $xf'(x)=M$, e però

$$f'(x)=\frac{M}{x},$$

ed anco (§ 7)

$$f''(x)=-\frac{M}{x^2},\ f'''(x)=\frac{2M}{x^3},\ f^{IV}(x)=-\frac{2\cdot 3\cdot M}{x^4},\ ---.$$

Sostituendo i valori delle $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, --- nell'equazione

$$\text{Log.}(1+\theta)=\theta xf'(x)+\frac{\theta^2}{2}x^2f''(x)+\frac{\theta^3}{2\cdot 3}x^3f'''(x)+\text{ecc.},$$

si ottiene la

$$\text{Log.}(1+\theta)=M\left(\theta-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^3}{3}-\text{ecc.}\right),$$

la quale insegna, che il logaritmo di $1+\theta$, numero qualsivoglia, preso secondo qualunque sistema, è eguale alla quantità

$$\theta-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^3}{3}-\text{ecc.},$$

che non cambia cambiando il sistema, *moltiplicata* per la costante M, la quale per conseguenza cambierà da un sistema ad un altro.

Questa costante si chiama *modulo* di quel sistema, secondo il quale si intende preso il logaritmo di $1+\theta$.

Si concluda pertanto, che la derivata del logaritmo della variabile è una frazione avente per numeratore il modulo del sistema del logaritmo e per denominatore la variabile stessa.

10. Vi è un sistema di logaritmi pel quale $M=1$, ed è il così detto sistema Iperbolico o Neperiano: indicheremo i logaritmi presi secondo questo sistema col simbolo *log.*; dimodochè avrassi

$$\log.(1+\theta)=\theta-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^3}{3}-\text{ecc.};$$

e però sarà

$$\text{Log.}(1+\theta)=M\log.(1+\theta).$$

I logaritmi, che si introdurranno in queste lezioni, quando non si faranno dichiarazioni particolari, intenderansi Neperiani; per cui si terrà la derivata del logaritmo della variabile eguale alla *unità* divisa per la variabile stessa.

LEZIONE IV.

Delle derivate delle esponenziali.

11. La esponenziale sia a^x, cioè la potenza x *esima* della costante a: questa costante comunemente si chiama base della esponenziale medesima.

Nella formola di Taylor si pongano a^x, $a^{x+\omega}$ in vece delle $f(x)$, $f(x+\omega)$, ed avrassi

$$a^{x+\omega}=a^x+\omega f'(x)+\frac{\omega^2}{2}f''(x)+\text{ecc.}:$$

si divida ciascun membro di questa equazione per a^x, e risulterà la

$$a^\omega = 1 + \omega \frac{f'(x)}{a^x} + \frac{\omega^2}{2} \frac{f''(x)}{a^x} + \text{ecc.}$$

ossia $a^\omega = 1 + \omega p(x) + \text{ecc.}$ posto $\frac{f'(x)}{a^x} = p(x)$, - - - :
in quest'ultima si ponga $x+\theta$ in vece della x, e si avrà

$$a^\omega = 1 + \omega p(x+\theta) + \text{ecc.},$$

e però sarà

$$1 + \omega p(x) + \text{ecc.} = 1 + \omega p(x+\theta) + \text{ecc.},$$

equazione, che, sussistendo qualunque sia l'ω, dà la

$$p(x) = p(x+\theta),$$

la quale insegna, che $p(x)$ cioè $\frac{f'(x)}{a^x}$ non varia, variando la x, ossia che dev'essere una costante.

Chiamisi questa costante c: sarà $\frac{f'(x)}{a^x} = c$, ossia $f'(x) = c a^x$ od anco $f'(x) = c f(x)$.

L'equazione $f'(x) = c f(x)$ dà $f''(x) = c f'(x) = c^2 f(x)$, e quest'ultima $f'''(x) = c^2 f'(x) = c^3 f(x)$; e similmente $f^{\text{IV}}(x) = c^4 f(x)$, $f^{\text{V}}(x) = c^5 f(x)$. Vale a dire, riposto a^x di nuovo in vece della $f(x)$, si avranno

$$f'(x) = c a^x, f''(x) = c^2 a^x, f'''(x) = c^3 a^x, \text{ - - - };$$

e però la equazione $a^\omega = 1 + \omega \frac{f'(x)}{a^x} + \frac{\omega^2}{2} \frac{f''(x)}{a^x} + \text{ecc.}$ si ridurrà alla seguente

$$a^\omega = 1 + \omega c + \frac{\omega^2 c^2}{2} + \text{ecc.},$$

colla quale si può determinare facilmente la costante c.

Di fatto, si faccia in essa $\omega = \frac{1}{c}$, e però $\omega c = 1$; e si avrà la

$$a^{\frac{1}{c}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \text{ecc. ossia } a^{\frac{1}{c}} = e,$$

ove l'e è posta per semplicità in vece del numero

$$2,718281828 \text{---}$$

somma della serie

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ecc.}$$

La equazione $a^{\frac{1}{c}} = e$ ovvero la $a = e^c$ somministra immediatamente $\text{Log.}\, a = c\,\text{Log.}\, e$.

Dalla $a^{\omega} = 1 + \omega c + \frac{\omega^2 c^2}{2} + \text{ecc.}$ si ha

$$\omega\,\text{Log.}\, a = \text{Log.}\left(1 + \omega c + \frac{\omega^2 c^2}{2} + \text{ecc.}\right)$$

ossia (§ 9)

$$\omega\,\text{Log.}\, a = \omega c M + \text{ecc.};$$

e però sarà

$$\text{Log.}\, a = c M.$$

Eguagliando i due valori qui trovati pel $\text{Log.}\, a$, hassi $M = \text{Log.}\, e$, cioè il modulo di un sistema qualunque di logaritmi è il logaritmo del numero e preso secondo il medesimo sistema.

Pel sistema Neperiano, essendo $M = 1$, avrassi $\log.\, e = 1$, per cui il numero e sarà la sua base; e conseguentemente avrassi

$$c = \log.\, a.$$

Quindi la derivata prima della esponenziale a^x risulta $a^x \log.\, a$, cioè il prodotto di essa pel logaritmo Neperiano della sua base: la derivata seconda sarà

$$a^x (\log.\, a)^2, \text{ la terza } a^x (\log.\, a)^3.$$

12. Dalla equazione

$$a^{\omega} = 1 + \omega c + \frac{\omega^2 c^2}{2} + \frac{\omega^3 c^3}{2 \cdot 3} + \text{ecc.},$$

sopra trovata, sostituendo in vece di c il suo valore log. a, si ha la

$$a^{\omega} = 1 + \omega (\log. a) + \frac{\omega^2}{2} (\log. a)^2 + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} (\log. a)^3 + \text{ecc.},$$

la quale dà il così detto sviluppo ordinario della esponenziale a^{ω}.

LEZIONE V.

Delle derivate del seno e del coseno della variabile,

13. Il teorema di Taylor somministra le equazioni

$$\text{sen.}(x + \omega) = \text{sen.}\, x + \omega \varphi' + \frac{\omega^2}{2} \varphi'' + \text{ecc.},$$

$$\cos.(x + \omega) = \cos.\, x + \omega \psi' + \frac{\omega^2}{2} \psi'' + \text{ecc.}:$$

le φ', φ'', --- sono poste per le derivate di sen. x, e le ψ', ψ'', --- per quelle di cos. x.

Sommando i quadrati dei membri corrispondenti di queste due equazioni, e rammentandosi, che la somma dei quadrati del seno e coseno di un angolo è uguale alla *unità*, si ha la

$$1 = 1 + 2\omega (\varphi' \,\text{sen.}\, x + \psi' \cos.\, x) + \text{ecc.},$$

la quale dà

$$\varphi' \,\text{sen.}\, x + \psi' \cos.\, x = 0.$$

Moltiplicando i membri della prima delle medesime due equazioni per cos. x, e quelli dell'altra per sen. x, e sottraendo la risultante dalla seconda da quella risultante dalla prima, si ottiene la

$$\text{sen.}(x+\omega)\cos.x-\cos.(x+\omega)\text{sen.}x=\omega\,(\varphi'\cos.x-\psi'\,\text{sen.}x)+\frac{\omega^2}{2}(\varphi''\cos.x-\psi''\text{sen.}x)+\text{ecc.}$$

ossia

$$\text{sen.}\omega=\omega(\varphi'\cos.x-\psi'\text{sen.}\,x)+\frac{\omega^2}{2}(\varphi''\cos.x-\psi''\text{sen.}x)+\text{ecc.},$$

che dà evidentemente

$$\varphi'\cos.x-\psi'\,\text{sen.}\,x=a;$$

a esprime una costante rispetto alla x.

Sciogliendo le due equazioni trovate

$$\varphi'\,\text{sen.}x+\psi'\cos.x=0,\quad \varphi'\cos.x-\psi'\,\text{sen.}x=a$$

rispetto alle φ', ψ', ottengonsi le

$$\varphi'=a\cos.x,\quad \psi'=-a\,\text{sen.}\,x;$$

e per tanto si conosceranno le derivate φ', ψ', quando si conoscerà la costante a.

I valori delle φ', ψ' somministrano evidentemente

$$\varphi''=-a^2\text{sen.}x,\quad \varphi'''=-a^3\cos.x,\quad \varphi^{IV}=a^4\text{sen.}x,\ ---$$

$$\psi''=-a^2\cos.x,\quad \psi'''=\ \ a^3\text{sen.}x,\quad \psi^{IV}=a^4\cos.x,\ ---.$$

Sostituendo questi valori delle derivate delle φ, ψ nelle due prime equazioni qui sopra esposte, si ottengono le seguenti

$$\text{sen.}(x+\omega)=\text{sen.}x+\omega a\cos.x-\frac{\omega^2a^2}{2}\text{sen.}x-\text{ecc.}$$

$$\cos.(x+\omega)=\cos.x-\omega a\,\text{sen.}\,x-\frac{\omega^2a^2}{2}\cos.x+\text{ecc.}$$

Moltiplicando la prima di queste ultime equazioni per cos.x e la seconda per sen.x, e sottraendo dai membri della risultante dalla prima i corrispondenti della risultante dalla seconda, si ha

$$\cos. x \,\text{sen}.(x+\omega) - \cos.(x+\omega)\,\text{sen}. x$$

ossia

$$\text{sen}.\,\omega = a\omega - \frac{a^3\omega^3}{2\cdot 3} + \frac{a^5\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{ecc.};$$

e moltiplicando la prima per sen.x e l'altra per cos.x, e sommando i membri corrispondenti delle due risultanti, si ottiene la

$$\cos.\,\omega = 1 - \frac{\omega^2 a^2}{2} + \frac{\omega^4 a^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \text{ecc.}$$

Nella prima di queste due equazioni pongasi $\frac{1}{a}$ in vece dell'ω, e si avrà la seguente

$$\text{sen}.\frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{ecc.},$$

la quale manifesta, che la costante a dev'essere *reale* e *positiva.*

Qualunque possa esser il valore della a, almeno per una serie di piccoli valori della ω, il prodotto $a\omega$ avrà valori più piccioli della unità, per cui i valori corrispondenti delle somme dei termini, *secondo* e *terzo*, *quarto* e *quinto*, *sesto* e *settimo*, --- di

$$a\omega - \frac{a^3\omega^3}{2\cdot 3} + \frac{a^5\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{a^7\omega^7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \text{ecc.}$$

saranno tutti *negativi*; e quelli delle somme del *terzo* e *quarto*, *quinto* e *sesto*, *settimo* ed *ottavo*, --- saranno tutti *positivi*; e conseguentemente per tali valori dell'ω sarà

$$\text{sen}.\,\omega < a\omega, \text{ e sen}.\,\omega > a\omega - \frac{a^3\omega^3}{2\cdot 3}.$$

Ma d'altronde si ha evidentemente, tanto $\omega > \text{sen.}\,\omega$, quanto

$$\omega < \text{tang.}\,\omega \text{ ossia } \omega^2 < \frac{\text{sen.}^2\omega}{1-\text{sen.}^2\omega} \text{ ovvero } \frac{\omega}{\sqrt{(1+\omega^2)}} < \text{sen.}\,\omega$$

e molto più

$$\frac{\omega}{1+\omega^2} < \text{sen.}\,\omega \text{ per essere } 1+\omega^2 > \sqrt{(1+\omega^2)}.$$

Adunque, essendo

$$\frac{\omega}{1+\omega^2} < \text{sen.}\,\omega \text{ e } \text{sen.}\,\omega < a\omega, \text{ si avrà}$$

$$\frac{\omega}{1+\omega^2} < a\omega \text{ ossia } \frac{1}{a} < 1+\omega^2;$$

e per essere $\omega > \text{sen.}\,\omega$ e $\text{sen.}\,\omega > a\omega - \frac{a^3\omega^3}{2\cdot 3}$, avrassi

$$\omega > a\omega - \frac{a^3\omega^3}{2\cdot 3} \text{ ovvero } \frac{1}{a} > 1 - \frac{a^2\omega^2}{6}.$$

Le due relazioni trovate

$$\frac{1}{a} < 1+\omega^2,\ \frac{1}{a} > 1 - \frac{a^2\omega^2}{6},$$

esprimono che $\frac{1}{a}$ non può essere nè maggiore nè minore della *unità*.

Imperciocchè, se $\frac{1}{a}$ fosse maggiore della unità, eguale per esempio ad $1+m$, m quantità positiva, per tutti i valori della ω più piccoli della $\sqrt{m}$ avrebbesi

$$1+m > 1+\omega^2, \text{ cioè } \frac{1}{a} > 1+\omega^2,$$

ciò che è assurdo; giacchè dev'essere $\frac{1}{a} < 1+\omega^2$. Se poi fosse $\frac{1}{a}$ minore della unità, per esempio eguale ad $1-n$,

n quantità positiva, per tutti i valori dell'ω minori di $(1-n)\sqrt{6n}$ avrebbesi

$(1-n)^2 \cdot 6n > \omega^2$, ossia $n > \frac{\omega^2}{6(1-n)^2}$, e però $1-n < 1 - \frac{\omega^2}{6(1-n)^2}$,

cioè avrebbesi

$$\frac{1}{a} < 1 - \frac{a^2\omega^2}{6},$$

il che è pure assurdo; giacchè per la seconda relazione anzi esposta dev'essere

$$\frac{1}{a} > 1 - \frac{a^2\omega^2}{6}.$$

Concludiamo per tanto, che la $\frac{1}{a}$ non può essere nè maggiore, nè minore della *unità*; e conseguentemente sarà $\frac{1}{a} = 1$, cioè a stessa eguale alla *unità*.

Ponendo nelle derivate φ', ψ' in vece della a l'unità, si ha la derivata di sen.x eguale a cos.x, e quella di cos.x eguale a *meno* sen.x. Vale a dire, la derivata del *seno* della variabile è il *coseno* di essa, e quella del *coseno* è *meno* il suo *seno*.

14. Sostituendo il valore della a cioè l'*unità* nelle equazioni

$$\text{sen.}\,\omega = a\omega - \frac{a^3\omega^3}{2\cdot 3} + \frac{a^5\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{ecc.}$$

$$\cos.\,\omega = 1 - \frac{a^2\omega^2}{2} + \frac{a^4\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \text{ecc.}$$

sopra esposte, si hanno le seguenti

$$\text{sen.}\,\omega = \omega - \frac{\omega^3}{2\cdot 3} + \frac{\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{ecc.},$$

$$\text{e}\ \cos.\,\omega = 1 - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \text{ecc.},$$

i cui secondi membri sono i così detti sviluppi ordinari delle funzioni sen. ω, cos. ω.

15. La regola usata per trovare le derivate delle cinque funzioni

$$x^m,\ \text{Log.}\,x,\ a^x,\ \text{sen.}\,x,\ \text{cos.}\,x,$$

la quale consiste nel dare alla variabile un aumento, indi scoprire il coefficiente della prima potenza di questo aumento nello sviluppo della funzione risultante, si potrebbe usare per iscoprire la derivata di qualunque altra funzione; ma siccome il numero delle differenti forme di funzioni è grandissimo, per cui complicatissima riescirebbe la ricerca delle rispettive derivate, così nella lezione seguente si esporranno alcune proprietà, che vi sono tra le derivate di certe classi di funzioni e le funzioni stesse, colle quali si potranno desumere le derivate immediatamente dalle funzioni medesime.

LEZIONE VI.

Delle derivate delle funzioni composte.

16. Una funzione di una variabile si chiamerà *funzione composta,* quando sarà formata effettivamente o si potrà supporre formata con una, o due, o più quantità funzioni della variabile stessa.

Le funzioni, colle quali sarà formata effettivamente o si supporrà formata una funzione composta, si chiameranno funzioni componenti di essa.

Per evitare una stucchevole ripetizione, avverto ora per sempre, che in questa lezione, la funzione composta si indicherà costantemente colla y, e le sue componenti colle p, q, r, ---, e le loro rispettive derivate colle

$$y', y'', ---; p', p'', ---; q', q'', ---; r', r'', ---;$$

e di nuovo avverto il principiante, che in questa lezione si avranno di mira le proprietà dalle quali emergono le regole per desumere immediatamente le derivate dalle funzioni, qualunque esse siano, piu che le effettive derivate stesse, che si troveranno.

17. Primieramente abbiasi $y = p + q + r +$ ecc., cioè la funzione composta sia la somma delle

$$p(x), q(x), r(x), ---.$$

Ponendo nella funzione $p(x) + q(x) + r(x) +$ ecc. in vece della x l'$x + \omega$, si ha la

$$p(x+\omega) + q(x+\omega) + r(x+\omega) + \text{ecc.},$$

il cui sviluppo evidentemente risulta

$$p + \omega p' + \text{ecc.} + q + \omega q' + \text{ecc.} + r + \omega r' + \text{ecc.}$$

e però sarà

$$y' = p' + q' + r' + \text{ecc.}$$

Vale a dire, la derivata della somma di più funzioni è eguale alla somma delle derivate delle medesime funzioni.

Per manifestare questa proprietà si può scrivere

$$p' + q' + r' + \text{ecc.} = (p + q + r + \text{ecc.})':$$

in generale sarà anco

$$p^{(n)} + q^{(n)} + r^{(n)} + \text{ecc.} = (p + q + r + \text{ecc.})^{(n)}$$

ove la scrittura $(p + q + r + \text{ecc.})^{(n)}$ significa la derivata *n esima* della somma delle funzioni p, q, r, ---.

18. Sia y il prodotto di due funzioni $p(x)$, $q(x)$, cioè sia $y = p(x) \cdot q(x)$.

Cambiando in questa funzione la x in $x+\omega$, si ha

$p(x+\omega)\cdot q(x+\omega)$ ossia $(p+\omega p'+\text{ecc.})(q+\omega q'+\text{ecc.})$;

ed eseguita la moltiplicazione indicata, ed ommessi i termini nei quali vi sono ω^2, ω^3, ---, perchè non occorrono, trovasi

$$pq+\omega(pq'+qp')+\text{ecc.}$$

per isviluppo del prodotto $p(x+\omega)\cdot q(x+\omega)$; e per tanto sarà

$$y'=pq'+qp',$$

cioè la derivata del prodotto di due funzioni eguale alla prima di esse moltiplicata per la derivata della seconda, *più* la seconda moltiplicata per la derivata della prima.

19. Abbiasi in terzo luogo $y=\frac{p}{q}$.

Pongasi $x+\omega$ invece della x nella frazione $\frac{p(x)}{q(x)}$, ed avrassi

$$\frac{p(x+\omega)}{q(x+\omega)} \text{ ossia } \frac{p+\omega p'+\text{ecc.}}{q+\omega q'+\text{ecc.}}:$$

eseguiscasi questa divisione indicata, e si ordini il quoto secondo le potenze d'ω di esponenti crescenti; e troverassi

$$\frac{p}{q}+\omega\,\frac{qp'-pq'}{q^2}+\text{ecc.};$$

e conseguentemente sarà

$$y'=\frac{qp'-pq'}{q^2},$$

vale a dire la derivata di una frazione eguale al prodotto del suo denominatore per la derivata del numeratore, *meno* il numeratore moltiplicato per la derivata del denominatore, tutto diviso pel quadrato dello stesso suo denominatore.

Sia $y = \frac{\text{sen.}\, x}{\cos.\, x}$: supposto $p = \text{sen.}\, x$, $q = \cos.\, x$, si ha $p' = \cos.\, x$, $q' = -\text{sen.}\, x$, e però $qp' - pq' = \cos.^2 x + \text{sen.}^2 x = 1$. E conseguentemente la derivata della frazione $\frac{\text{sen.}\, x}{\cos.\, x}$, cioè della funzione *tang.* x sarà $\frac{1}{\cos.^2 x}$.

Così, supposto $p = \cos.\, x$, e $q = \text{sen.}\, x$; si trova la derivata della funzione $\frac{\cos.\, x}{\text{sen.}\, x}$ cioè della *cot.* x, che è

$$- \frac{1}{\text{sen.}^2 x}.$$

20. Sia ora $y = \phi(p)$, ove ϕ esprime una funzione qualunque della p e questa una funzione della x.

Sostituendo nella $\phi\big(p(x)\big)$ in vece della x il solito binomio $x + \omega$, hassi

$$\phi\Big(p(x+\omega)\Big) \text{ ossia } \phi\left(p + \omega p' + \frac{\omega^2}{2} p'' + \text{ecc.}\right).$$

Per trovare lo sviluppo di quest'ultima funzione, ordinato come occorre, si ponga

$$\omega p' + \frac{\omega^2}{2} p'' + \text{ecc.} = \theta;$$

e si avrà $\phi(p+\theta)$: indi nella equazione (§ 4)

$$f(x+\omega) = f(x) + \omega f'(x) + \frac{\omega^2}{2} f''(x) + \text{ecc.}$$

si cambi la x in p, l'ω in θ, ed il simbolo f nel ϕ; ed avrassi la seguente

$$\phi(p+\theta) = \phi(p) + \theta \phi'(p) + \frac{\theta^2}{2} \phi''(p) + \text{ecc.}$$

Le quantità $\phi'(p)$, $\phi''(p)$, ---, che sono rispetto alla $\varphi(p)$, ciò che le $f'(x)$, $f''(x)$, --- sono (§ 2) rispetto alle $f(x)$, si chiameranno derivate *prima, seconda,* --- della $\varphi(p)$ *prese rispetto* alla p, per distinguerle dalle φ', φ'', --- derivate della stessa $\varphi\big(p(x)\big)$ prese rispetto alla x.

Nella equazione trovata, sostituiscasi in vece della θ il suo valore, cioè $\omega p' + \frac{\omega^2}{2} p'' +$ ecc.; e si avrà la

$$\varphi(p+\omega p'+\text{ecc.}) = \varphi(p)+(\omega p'+\text{ecc.})\varphi'(p)+\tfrac{1}{2}(\omega p'+\text{ecc.})^2\varphi''(p)+\text{ecc.}$$

ossia

$$\varphi\big(p(x+\omega)\big) = \varphi(p) + \omega\,\varphi'(p)\,p' + \text{ecc.};$$

e per tanto sarà

$$y' = \varphi'(p)\,p'.$$

Vale a dire, la derivata di una funzione composta di una componente è eguale alla derivata della composta rispetto alla componente, moltiplicata per la derivata della componente stessa.

Sia $y = p^m$, cioè $\varphi(p)$ consista nella potenza *m esima* della funzione $p(x)$.

Essendo p^m formata colla p, come la x^m lo è colla x, la derivata $\varphi'(p)$ sarà formata colla p, come quella della x^m lo è colla x; cioè sarà $\varphi'(p) = m p^{m-1}$. Quindi avrassi

$$y' = m p^{m-1} p'.$$

Se m fosse $\frac{1}{2}$, si avrebbe $y = \sqrt{p}$, ed $y' = \frac{p'}{2\sqrt{p}}$; vale a dire la derivata della radice quadrata di una funzione qualunque è eguale ad una frazione avente per numeratore la derivata della funzione e per denominatore il doppio della medesima radice.

Così, supponendo successivamente

$$y = \log.p,\ \text{tang}.p,\ \text{cot}.p,\ a^p,\ \text{sen}.p,\ \cos.p$$

si trova ordinatamente

$$y' = \frac{p'}{p},\ \frac{p'}{\cos.^2 p},\ -\frac{p'}{\text{sen.}^2 p},\ a^p p' \log.a,\ p'\cos.p,\ -p'\text{sen}.p;$$

cioè, che la derivata del logaritmo Neperiano di una funzione qualunque è eguale ad una frazione avente per numeratore la derivata di essa e per denominatore essa medesima: che la derivata della tangente di una funzione è eguale ad una frazione avente per numeratore la derivata di essa funzione componente e per denominatore il quadrato del suo coseno: altrettanto dicasi per le altre.

Se fosse $y = F\big(\phi(p)\big)$. Posto $\phi(p) = q$, si avrebbe

$$y = F(q) \text{ e però } y' = F'(q)q'.$$

Ma è $q' = \phi'(p)p'$; quindi avrebbesi

$$y' = F'(q)\phi'(p)p' \text{ cioè } y' = F'(\phi)\phi'(p)p'.$$

21. Prima di parlare delle derivate delle funzioni composte di più componenti, troveremo le effettive derivate delle funzioni semplici

$$\text{Ang. tang.}\,x,\ \text{Ang. sen.}\,x,\ \text{Ang. cos.}\,x.$$

Primieramente sia $p(x) = \text{Ang. tang. } x$ ossia $\text{tang.}p(x) = x$; e sarà $\text{tang.}p(x+\omega) = x+\omega$, ovvero (§ 4)

$$\text{tang.}\,p(x) + \omega\big(\text{tang.}\,p(x)\big)' + \text{ecc.} = x + \omega;$$

equazione che dà

$$(\text{tang.}\,p)' = 1.$$

Ma la derivata della $\text{tang.}\,p$ è $\frac{p'}{\cos.^2 p}$, come abbiamo dianzi trovato; adunque sarà

$\frac{p'}{\cos.^2 p} = 1$, e conseguentemente $p' = \cos.^2 p$, ovvero

$p' = \frac{1}{1+x^2}$ per essere, come si sa, $\cos.^2 p = \frac{1}{1+x^2}$. Vale a dire, la derivata dell'angolo avente per tangente la variabile eguaglia il quadrato del coseno dell'angolo stesso; ovvero è eguale ad una frazione avente per numeratore l'*unità* e per denominatore l'*unità più* il quadrato della variabile tangente medesima.

Similmente si trovano le derivate delle funzioni

Ang.sen.x, Ang.cos.x, le quali sono $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$; cioè la derivata dell'angolo avente per seno la variabile è l'unità divisa pel coseno dell'angolo, e quella dell'angolo avente la variabile per coseno è *meno* l'unità divisa pel seno dell'angolo stesso.

Combinando le derivate effettivamente qui esposte alla regola stabilita nel paragrafo antecedente per trovare quella della funzione $\phi(p)$, si comprenderà facilmente, che le derivate delle funzioni

$$\text{Ang. tang.}p(x),\ \text{Ang. sen.}q(x),\ \text{Ang. cos.}r(x)$$

sono

$$\frac{p'}{1+p^2},\quad \frac{q'}{\sqrt{(1-q^2)}},\quad -\frac{r'}{\sqrt{(1-r^2)}};$$

si rifletta, che $\frac{1}{1+p^2}$ è il quadrato del coseno dell'Ang. tang. p, che $\sqrt{(1-q^2)}$ è il coseno dell'Ang.sen. q, ed anco che $\sqrt{(1-r^2)}$ è il seno dell'Ang. cos. r.

Le derivate di due di queste ultime tre funzioni si possono anco desumere immediatamente da quella della terza di esse: farò vedere a desumere quella dell'Ang. sen. x, caso particolare della seconda, da quella dell'Ang. tang. $p(x)$.

L'angolo avente per seno x ha $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ per tangente, e però la derivata dell'Ang. sen. x sarà quella dell'Ang. tang. $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ ossia dell'Ang. tang. p supposto $p=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Ma questo valore di p dà $p'=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, ed $1+p^2=\frac{1}{1-x^2}$, e però $\frac{p'}{1+p^2}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$; adunque la derivata della funzione Ang.sen.x sarà $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, come si è già veduto.

Dalle derivate dell'angolo che ha per tangente, o per seno, o per coseno una funzione della variabile, si possono desumere quelle di un arco la cui tangente, od il cui seno, o coseno siano funzioni della variabile, qualunque sia il suo raggio. Per esempio, se l'arco fosse quello avente per seno x nella circonferenza di raggio c, per essere Arc. sen. $x=c$ Ang. sen. $\frac{x}{c}$, la sua derivata, per la seconda delle qui sopra esposte, risulta

$$c\frac{\frac{1}{c}}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)}} \text{ cioè } \frac{c}{\sqrt{(c^2-x^2)}}.$$

22. Abbiasi $y=F(p, q)$, cioè la y sia una funzione composta delle due $p(x)$, $q(x)$, la quale contenga unicamente la x, che vi è nelle p, q sue componenti.

Secondo la regola generale, per trovare la derivata della funzione $F\big(p(x), q(x)\big)$, bisognerebbe cambiare in essa dovunque, cioè tanto nella $p(x)$ quanto nella

$q(x)$, la x in $x+\omega$, per cui si avrebbe la

$$F\big(p(x+\omega),\, q(x+\omega)\big);$$

indi trovare lo sviluppo di quest'ultima funzione, chè nel coefficiente d'ω avrebbesi la derivata richiesta. Ma per facilitare la determinazione di questo sviluppo, si procederà col metodo seguente.

Nella $F\big(p(x),\, q(x)\big)$ si porrà $x+\omega$ in vece di quella sola x, che entra nella componente $p(x)$; indi nel risultamento porrassi $x+\omega$ in vece di quella sola x, che sarà nella $q(x)$ contenuta in esso; e con ciò avrassi evidentemente lo stesso identico risultamento, che si avrebbe, ponendo nella $F\big(p(x),\, q(x)\big)$ il binomio $x+\omega$ simultaneamente sì in luogo della x contenuta nella $p(x)$ che della contenuta nella $q(x)$.

Nella funzione $F(p,q)$ si ponga $x+\omega$ in vece di quella x, che è nella sua componente $p(x)$; e si avrà la $F\big(p(x+\omega),\, q\big)$, la quale (§ 20) equivale alla

$$F(p,\, q)+\omega F'(p)p'+\text{ecc.}$$

Per un momento, si rappresenti questa quantità con $\psi(q)$, e si osservi, che essa conterrà, generalmente, la q non solo nel primo termine, che è $F(p,\, q)$, ma anco negli altri, essendovi in essi le derivate $F'(p)$, ---.

Nella quantità $\psi(q)$ pongasi $x+\omega$ in vece di quella sola x, che è nella sua componente $q(x)$; ed avrassi la $\psi\big(q(x+\omega)\big)$, che (§ 20) equivale alla

$$\psi(q)+\omega\,\psi'(q)q'+\text{ecc.}$$

Ed in questa sostituiscansi in luogo delle quantità $\psi(q)$, $\psi'(q)$, --- i polinomj

$$F(p,\, q)+\omega F'(p)p'+\text{ecc.},\quad F'(q)+\text{ecc.},$$

che sono i loro valori, ed essa si ridurrà alla seguente

$$F(p,\ q) + \omega F'(p)\,p' + \text{ecc.}$$
$$+ \omega F'(q)\ q' + \text{ecc.},$$

ommessi tutti quei termini nei quali l'ω ha almeno due dimensioni.

Quest'ultima quantità, la quale è lo sviluppo di ciò, che si ottiene, cambiando dovunque nella funzione $F(p,\ q)$ la x in $x+\omega$, insegna, che

$$y' = F'(p)\,p' + F'(q)\,q';$$

cioè, che la derivata di una funzione composta di due componenti è eguale al prodotto della derivata di essa rispetto ad una componente per la derivata di questa componente, *più* il prodotto della derivata di essa medesima rispetto all'altra componente per la derivata di quest'altra componente stessa.

23. Sia $y = F(p, q, r)$, cioè la y sia una funzione composta di tre componenti.

Se in questa funzione si porrà $x+\omega$ in luogo di quella sola x, che è nella componente p, e nella risultante si farà un simil cambiamento per la x contenuta nella q, si avrà una quantità, la quale, pel paragrafo antecedente, sarà equivalente alla

$$F(p, q, r) + \omega F'(p)\,p' + \text{ecc.}$$
$$+ \omega F'(q)\,q' + \text{ecc.}:$$

si denomini questa quantità risultante $\Delta(r)$; ed in essa si ponga il binomio $x+\omega$ in vece della sola x contenuta nella sua componente $r(x)$; e pel § 20 avrassi la

$$\Delta + \omega \Delta'(r)\,r' + \text{ecc.},$$

la quale si riduce alla seguente

$$\begin{aligned} F(p,q,r) &+ \omega p' F'(p) + \text{ecc.} \\ &+ \omega q' F'(q) + \text{ecc.} \\ &+ \omega r' F'(r) + \text{ecc.}, \end{aligned}$$

ponendo per le $\Delta(r), \Delta'(r), ---$ i loro valori.

La ispezione di quest'ultima quantità, che è lo sviluppo di ciò che si ottiene cambiando dovunque nella attuale funzione composta la x in $x+\omega$, manifesta, che

$$y' = F'(p)p' + F'(q)q' + F'(r)r'.$$

24. Osservando, come sono formate le derivate delle $F(p,q), F(p,q,r)$, facilmente si comprenderà, che, la derivata di una funzione composta di un numero qualunque di componenti, sarà la somma di tutte quelle derivate di essa funzione, che si avranno, contemplando separatamente la x contenuta in ogni sua componente.

25. Ora si debbano trovare le derivate delle due funzioni

$$F\big(p, \varphi(p)\big), F\big(p, q, \psi(p,q)\big).$$

Posto $\varphi(p) = q$, la prima si riduce alla $F(p,q)$, la cui derivata è

$$F'(p)p' + F'(q)q'.$$

Ma per essere $q = \varphi(p)$, si ha $q' = \varphi'(p)p'$; adunque, sostituendo nella $F'(p)p' + F'(q)q'$ per q la $\varphi(p)$ e per q' il prodotto $\varphi'(p)p'$, si avrà

$$F'(p)p' + F'(\varphi)\varphi'(p)p', \text{ ossia } \big(F'(p) + F'(\varphi)\varphi'(p)\big)p',$$

per derivata della prima delle due presenti funzioni composte.

Per avere la derivata della seconda, pongasi $\psi(p,q) = r$, ed essa si cangerà nella $F(p,q,r)$, la cui derivata è

$$F'(p)p' + F'(q)q' + F'(r)r'.$$

In questa, si ponga per r la $\psi(p,q)$ e per r' la $\psi'(p)p' + \psi'(q)q'$; e si avrà la seguente

$$\big(F'(p) + F'(\psi)\psi'(p)\big)p' + \big(F'(q) + F'(\psi)\psi'(q)\big)q'$$

per derivata della $F\big(p, q, \psi(p,q)\big)$.

Così, vogliasi la derivata della funzione composta

$$F(x, p, p', p'', ---, q, q', ---, ---),$$

ove le componenti $p', p'', ---$ sono le successive derivate della p, le $q', q'', ---$ della q, $---$.

Pongasi $p' = r, p'' = s, ---, q' = t, ---, ---$; e si avrà la

$$F(x, p, r, s, ---, q, t, ---, ---),$$

la cui derivata (§ 24) è

$$F'(x) + F'(p)p' + F'(r)r' + F'(s)s' + \text{ecc.} + F'(q)q' + F'(t)t' + \text{ecc.} + \text{ecc.}$$

Ma si ha $r' = p'', s' = p''', ---\ t' = q'', ---$; adunque la derivata richiesta sarà

$$F'(x) + F'(p)p' + F'(p')p'' + F'(p'')p''' + \text{ecc.}$$
$$+ F'(q)q' + F'(q')q'' + \text{ecc.} + \text{ecc.}$$

26. In generale, mediante la conoscenza delle effettive derivate delle funzioni

$$x^m, \log. x, a^x, \text{sen}. x, \cos. x, \text{tang}. x, \text{A.tang}. x, ---$$

e le proprietà qui sopra esposte relativamente alle derivate delle funzioni composte, si potrà facilmente trovare la effettiva derivata di una qualunque funzione della x, sempre che le operazioni ad eseguirsi sulla x per formare la medesima funzione siano di quelle, che si debbono eseguire sulla x, per formare le medesime funzioni qui sopra contemplate.

27. Dall'esposto nel § 18 si hanno le equazioni

$$(q\,p^{(n-1)})' = qp^{(n)} + q'p^{(n-1)},\ (q'p^{(n-2)})' = q'p^{(n-1)} + q''p^{(n-2)},$$
$$(q''p^{(n-3)})' = q''p^{(n-2)} + q'''p^{(n-3)},\ ----$$

e però anco le

$$qp^{(n)} = (qp^{(n-1)})' - q'p^{(n-1)},\ q'p^{(n-1)} = (q'p^{(n-2)})' - q''p^{(n-2)},$$
$$q''p^{(n-2)} = (q''p^{(n-3)})' - q'''p^{(n-3)},\ ----.$$

Si sostituisca nella prima di queste equazioni in vece di $q'p^{(n-1)}$ il suo valore dato dalla seconda, nella risultante pongasi quello di $q''p^{(n-2)}$ dato dalla terza, e così continuisi, sino alla sostituzione del valore di $q^{(n-1)}p'$, che è $(q^{(n-1)}p)' - q^{(n)}p$; e si avranno successivamente le

$$qp^{(n)} = (qp^{(n-1)})' - (q'p^{(n-2)})' + q''p^{(n-2)},$$
$$qp^{(n)} = (qp^{(n-1)})' - (q'p^{(n-2)})' + (q''p^{(n-3)})' - q'''p^{(n-3)}$$
$$-------------------------$$
$$qp^{(n)} = (qp^{(n-1)})' - (q'p^{(n-2)})' + (q''p^{(n-3)})' - \ldots \pm (q^{(n-1)}p)' \mp q^{(n)}p$$

cioè

$$qp^{(n)} = (qp^{(n-1)} - q'p^{(n-2)} + q''p^{(n-3)} - \ldots \pm q^{(n-1)}p)' \mp q^{(n)}p,$$

ove i segni degli ultimi termini saranno i superiori, quando n sarà dispari, e gli altri, quando n sarà pari.

Da quest' ultima equazione si hanno le

$$p'q = (qp)' - pq',$$
$$p''q = (qp' - q'p)' + pq''$$
$$p'''q = (qp'' - q'p' + q''p)' - pq'''$$
$$-----------------------;$$

e reciprocamente da queste si può facilmente desumere la medesima ultima trovata.

LEZIONE VII.

Delle derivate degli ordini superiori.

28. Le derivate del secondo ordine, del terzo ordine, e quelle degli ordini successivi si chiamano derivate degli ordini superiori.

Siccome la derivata del second'ordine di una funzione qualsivoglia è la derivata prima della derivata del primo ordine della funzione stessa, e la derivata del terzo ordine è la prima di quella del secondo, ed in generale la derivata di un ordine qualunque è la derivata prima di quella dell'ordine immediatamente inferiore; così si potrà determinare la derivata di qualunque ordine di qualsivoglia funzione, determinando prima quelle degli ordini inferiori, e poscia la prima dell'ultima di esse. Anzi, si potrà desumere la derivata di un ordine qualunque da quella dell'ordine immediatamente inferiore colle stesse regole superiormente esposte e dimostrate per trovare le derivate del primo ordine.

Per esempio, si voglia la derivata del second'ordine della funzione A. cos. $\frac{m-x}{m}$.

Comincio a trovare quella del primo ordine. Pongasi $\frac{m-x}{m}$ ossia $1-\frac{1}{m}x=p$; e si avrà a trovare la derivata della funzione A. cos. p.

Dal paragrafo vigesimo primo si ha, che la derivata prima di A. cos. p è $-\frac{p'}{\sqrt{(1-p^2)}}$; ma per l'attuale valore della p risulta

$$\sqrt{(1-p^2)}=\frac{1}{m}\sqrt{(2mx-x^2)},\ \text{e}\ p'=-\frac{1}{m};$$

adunque la derivata prima della funzione A. cos. $\frac{m-x}{m}$ sarà

$$\frac{1}{m}:\frac{1}{m}\sqrt{(2mx-x^2)}\ \text{ossia}\ \frac{1}{\sqrt{(2mx-x^2)}}.$$

Passo ora a trovare la derivata prima di quest' ultima funzione.

Si ponga $2mx-x^2=q$, ed essa si ridurrà alla

$$\frac{1}{\sqrt{q}}\ \text{ossia alla seguente}\ q^{-\frac{1}{2}},$$

la cui derivata è $-\frac{1}{2}q'q^{-\frac{3}{2}}$ ovvero $-\frac{q'}{2\sqrt{q^3}}$, come risulta dal primo esempio del § 20; e però, siccome dall'essere

$$q=2mx-x^2\ \text{hassi}\ q'=2(m-x);$$

così la derivata richiesta sarà

$$\frac{x-m}{\sqrt{(2mx-x^2)^3}}.$$

29. Sebbene ciò che si è detto nel principio del paragrafo antecedente basti per trovare le derivate di qualunque ordine di qualsivoglia funzione, non ostante stimo bene di esporre qui le effettive derivate *n esime* di alcune di esse.

Nel § 7 abbiamo già trovato

$$(x^m)^{(n)}=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n},$$

cioè la derivata *n esima* di qualunque potenza della variabile. Così nel § 9 si è trovato $(\text{Log}.x)' = \frac{M}{x}$; e però sarà

$$(\text{Log}.x)^{(n)} = M(x^{-1})^{(n-1)}:$$

ma, ponendo -1 in vece d'm, ed $n-1$ in vece dell' n nella derivata n *esima* dell'x^m, si ha

$$(x^{-1})^{(n-1)} = \pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \text{----} (n-1)\, x^{-n};$$

adunque sarà

$$(\text{Log}.x)^{(n)} = \pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \text{----} (n-1) \frac{M}{x^n},$$

ove il segno $+$ vale per n impari, ed il $-$ per n pari.

Similmente, per essere (§ 11)

$$(a^x)' = a^x \log.a,\ (a^x)'' = a^x(\log.a)^2,\ (a^x)''' = a^x(\log.a)^3, \text{---}$$

risulta evidentissimamente $(a^x)^{(n)} = a^x(\log.a)^n$.

Si voglia, in secondo luogo, la derivata n *esima* della funzione sen. x.

Questa funzione chiamisi y. Abbiamo veduto che $y' = \cos.x$; e però sarà anco $y' = \text{sen.}(x+\lambda)$, ove la λ esprime un angolo retto; giacchè dalla trigonometria si ha, come è notissimo, il coseno di un angolo qualunque eguale al seno dell'angolo stesso aumentato di un retto.

Da $y' = \text{sen.}(x+\lambda)$ si ha y'' eguale alla derivata prima della funzione composta sen.$(x+\lambda)$, la quale (§ 20) è il prodotto di cos.$(x+\lambda)$ per la derivata della $x+\lambda$ componente, che è l'*unità*; cioè si ha

$$y'' = \cos.(x+\lambda), \text{ ovvero } y'' = \text{sen.}(x+2\lambda)$$

per la stessa proprietà trigonometrica anzi rammentata.

Così, da $y''=\text{sen.}(x+2\lambda)$ si cava $y'''=\cos.(x+2\lambda)$; e però sarà $y'''=\text{sen.}(x+3\lambda)$.

Similmente si trovano

$$y^{IV}=\text{sen.}(x+4\lambda),\ y^{V}=\text{sen.}(x+5\lambda),\ ---;$$

e quindi per la legge ora manifestissima avrassi

$$y^{(n)}=\text{sen.}(x+n\lambda).$$

Facendo per la funzione $\cos.x$ ragionamenti analoghi a quelli fatti per la $\text{sen.}x$, risulta che la derivata *n esima* di essa è

$$\cos.(x+n\lambda).$$

30. In terzo luogo, si voglia la derivata *n esima* della funzione $\text{A.tang.}x$.

Per semplicità pongasi $\text{A.tang.}x=p$. Pel § 21 si avrà

$p'=\cos.^2 p$, e però anco $p'=\cos.p\ \text{sen.}(p+\lambda)$

per la stessa proprietà trigonometrica usata nel paragrafo antecedente.

Da $p'=\cos.p\ \text{sen.}(p+\lambda)$ si ha (§§ 18, 20)

$$p''=-p'\ \text{sen.}p\ \text{sen.}(p+\lambda)+p'\cos.p\cos.(p+\lambda)$$

ossia

$$p''=p'\cos.(2p+\lambda);$$

e però sarà

$$p''=\cos.^2 p\ \text{sen.}(2p+2\lambda).$$

Così, da quest'ultimo valore di p'' si desume

$$p'''=2p'\big(-\text{sen.}p\cos.p\,\text{sen.}(2p+2\lambda)+\cos.^2 p\cos.(2p+2\lambda)\big),$$

ossia

$$p'''=2p'\cos.p\cos.(3p+2\lambda),$$

e però

$$p'''=2\cos.^3 p\ \text{sen.}(3p+3\lambda).$$

Similmente trovansi

$$p^{IV} = 2 \cdot 3 \cos.^4 p \operatorname{sen.} (4p + 4\lambda),$$

$$p^{V} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos.^5 p \operatorname{sen.} (5p + 5\lambda),$$

$$-----------------.$$

E conseguentemente si avrà

$$p^{(n)} = 2 \cdot 3 \cdot 4 ---- (n - 1) \cos.^n p \operatorname{sen.} n (p + \lambda).$$

31. In ultimo vogliasi la derivata n esima del prodotto $p \cdot q$, ove p, q sono entrambe funzioni della x.

Il prodotto pq chiamisi y. Dal § 18 si ha $y' = p'q + pq'$: la y'', come derivata prima della espressione $p'q + pq'$, sarà la somma delle derivate dei due prodotti $p'q$, pq', le quali sono

$$p''q + p'q', \; p'q' + pq'';$$

e però avrassi

$$y'' = p''q + 2p'q' + pq''.$$

Così, essendo y''' la derivata prima di $p''q + 2p'q' + pq''$, sarà essa la somma delle quantità

$$p'''q + p''q', \; 2p''q' + 2p'q'', \; p'q'' + pq''',$$

che sono rispettivamente le derivate dei prodotti $p''q$, $2p'q'$, pq''; cioè si avrà

$$y''' = p'''q + 3p''q' + 3p'q'' + pq'''.$$

Qui pure, osservando come le y', y'', y''' sono formate colle p, q e colle loro derivate, ed anco l'analogia che ha luogo tra gli sviluppi di queste derivate e quelli delle potenze successive di un binomio, agevolmente si comprenderà che

$$y^{(n)} = p^{(n)}q + np^{(n-1)}q' + \frac{n(n-1)}{2} p^{(n-2)}q'' + \cdots + np'q^{(n-1)} + pq^{(n)}.$$

32. Prima di terminare questa lezione faremo alcune riflessioni, le quali ci occorreranno in molte occasioni.

Pensando, che, le operazioni ad eseguirsi sudi una funzione per desumerne la sua derivata, in ultima analisi sono di quelle, che si debbono eseguire sulle cinque funzioni

$$x^m, \text{ log.}\, x, \ a^x, \text{ sen.}\, x, \text{ tang.}\, x$$

onde formare le rispettive derivate, facilmente si comprenderà, che la funzione derivata di una data funzione, o sarà della medesima natura della data cioè algebraica o trascendente al pari della data, ovvero che la derivata apparterrà ad una classe di funzioni, la cui trascendenza sarà di qualche grado minore di quello della stessa funzione data, come accade per le funzioni

$$\text{Log.}\, x, \text{ A. tang.}\, x,$$

le cui derivate sono

$$\frac{1}{x}, \ \frac{1}{1+x^2}$$

cioè algebraiche, mentre le funzioni sono trascendenti.

33. Così rammentandosi che la derivata di una costante è *zero* e che la derivata della somma di due quantità è la somma delle derivate di esse, comprenderassi, che le derivate delle quantità

$$\varphi(x), \ \varphi(x)+4, \ \varphi(x)-20, \ \varphi(x)+A$$

sono tutte $\varphi'(x)$; cioè che le derivate di tutte quelle funzioni, le quali non differiscono che di una costante, sono identiche fra loro, ed anco che nella derivata di una funzione può mancare una costante anco arbitraria di quelle costituenti la funzione medesima, o ciò che significa lo stesso, che ogni derivazione può far isparire una costante. Anzi, dalle stesse due proprietà discende anco, che le derivate *n esime* di due quantità, che differiscono di una funzione della forma

$$A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \text{- - - -} + A_n x^{n-1},$$

sono identiche, qualunque siano le costanti A_1, A_2, - - - A_n; e che nella derivata *n esima* di una quantità possono mancare n costanti anco arbitrarie di quelle costituenti la stessa quantità.

PARTE SECONDA

EQUAZIONI ALLE DERIVATE, DERIVATE PARZIALI, DERIVATE DELLE FUNZIONI IMPLICITE, E TRASFORMAZIONI DELLE DERIVATE.

LEZIONE PRIMA

Delle equazioni derivate delle equazioni identiche.

34. Se due funzioni di una stessa variabile siano o debbano essere eguali fra loro per qualunque valore della variabile, le loro derivate degli stessi ordini saranno anch'esse eguali fra loro, qualunque valore si attribuisca alla variabile medesima.

Le due funzioni siano $F(x)$, $\varphi(x)$; cioè abbiasi la equazione identica $F(x)=\varphi(x)$.

Essendo $F(x)$ eguale alla $\varphi(x)$ per qualunque valore della x, anco $F(x+\omega)$ sarà eguale a $\varphi(x+\omega)$, non solo qualunque sia la x, ma anco qualunque sia l'ω aumento dato alla x stessa; cioè avrassi l'equazione

$$F(x+\omega)=\varphi(x+\omega),$$

la quale, pel solito teorema, equivale alla seguente

$$F(x)+\omega F'(x)+\frac{\omega^2}{2}F''x+\text{ecc.}=\varphi(x)+\omega\varphi'(x)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(x)+\text{ecc.}$$

Questa equazione, per essere l'ω quantità indeterminata, somministra indipendentemente dalla x le

$$F'(x)=\varphi'(x),\ F''(x)=\varphi''(x),\ ---:$$

appunto come si è dichiarato.

Se in vece della equazione $F(x)=\phi(x)$, si avesse la $f(x)=0$, la quale pure sussistesse qualunque fosse la x, con un ragionamento analogo a quello fatto dianzi, per dimostrare la sussistenza delle ultime equazioni esposte, si troverebbe, che debbono sussistere le equazioni

$$f'(x)=0, f''(x)=0, f'''(x)=0, ---$$

anch'esse indipendentemente dalla x.

Non solo ha luogo la proprietà esposta nel § 33, cioè che sono identiche fra loro le derivate delle funzioni, quando esse non differiscono che di una costante, ma ha altresì luogo la sua reciproca; vale a dire, le funzioni aventi derivate identiche, o sono identiche anch'esse, o non differiscono che di una costante.

Di fatto, le due funzioni $F(x)$, $\phi(x)$ abbiano le $F'(x)$, $\phi'(x)$ derivate loro fra loro identiche: identiche pure saranno per conseguenza le

$$F''(x),\ \phi''(x);\ F'''(x),\ \phi'''(x);\ ---.$$

Pel teorema di Taylor si hanno le due equazioni

$$F(x+\omega)-F(x)=\omega F'(x)+\frac{\omega^2}{2}F''(x)+\frac{\omega^3}{2\cdot3}F'''(x)+\text{ecc.},$$

$$\phi(x+\omega)-\phi(x)=\omega\phi'(x)+\frac{\omega^2}{2}\phi''(x)+\frac{\omega^3}{2\cdot3}\phi'''(x)+\text{ecc.},$$

i cui secondi membri sono fra loro identici, per essere le funzioni $F'(x)$, $F''(x)$, $F'''(x)$, --- ordinatamente identiche alle $\phi'(x)$, $\phi''(x)$, $\phi'''(x)$, ---; adunque identici saranno anco i primi membri di esse, cioè avrassi la equazione identica

$$F(x+\omega)-F(x)=\phi(x+\omega)-\phi(x),$$

ossia

$$F(x+\omega)-\phi(x+\omega)=F(x)-\phi(x).$$

Questa ultima equazione evidentemente significa, che la quantità $F(x)-\phi(x)$ non cambia di valore col cambiare in essa la x in $x+\omega$, ossia che non varia variando la x; e conseguentemente sarà essa costante. Vale a dire, due funzioni aventi le derivate prime identiche, o saranno eguali anzi identiche esse pure, ovvero non differiranno che di una costante; proprietà molto interessante.

Mediante questa proprietà si può molte volte scoprire con facilità, se due funzioni siano fra loro eguali od al più differiscono di una semplice costante; purchè le loro derivate prime siano funzioni della stessa famiglia o almeno paragonabili facilmente.

35. Vediamo, quali debbano essere i significati delle funzioni f, ϕ, ψ, perchè le equazioni

$$f(x)\cdot f(\omega)=f(x+\omega),\quad \phi(x\omega)=\phi(x)+\phi(\omega),$$
$$\psi(x)\cdot\psi(\omega)=\psi(x+\omega)+\psi(x-\omega)$$

sussistano qualunque siano le quantità x, ω.

Dalla prima equazione, per l'esposto nel paragrafo antecedente cioè derivandola, si ottiene la

$$f(\omega)\cdot f'(x)=f'(x+\omega),$$

i cui membri divisi pei corrispondenti della prima stessa danno la

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(x+\omega)}{f(x+\omega)},$$

la quale significa, che dev'essere $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=a$, a costante rispetto alla x.

Questa equazione dà

$$f'(x)=af(x),\, f''(x)=a^2f(x),\, f'''(x)=a^3f(x),\, ---.$$

Ma è $f(x+\omega)=f(x)+\omega f'(x)+\frac{\omega^2}{2}f''(x)+$ecc. e però (§ 12)

$f(x+\omega)=e^{a\omega}f(x)$; adunque sarà $f(x)\cdot f(\omega)=e^{a\omega}f(x)$, e però $f(\omega)=e^{a\omega}$, e conseguentemente $f(x)=e^{ax}$; ove la e esprime al solito la base dei logaritmi iperbolici.

E siccome è $e^{ax}=(e^{a})^{x}$; così avrassi $f(x)=A^{x}$, dove l'A esprime una costante rispetto alla x. Vale a dire, la funzione f deve significare una esponenziale.

Dalla equazione $f(x)\cdot f(\omega)=f(x+\omega)$ data si ha

$$\log.f(x)+\log.f(\omega)=\log.f(x+\omega),$$

e però (§ 5) sarà $\log.f(x)=ax$ cioè $f(x)=A^{x}$, come dianzi.

La $\phi(x\omega)=\phi(x)+\phi(\omega)$, che è la seconda equazione, sussistendo anch'essa, qualunque siano x, ω, somministra

$\omega\phi'(x\omega)=\phi'(x)$ derivandola rispetto alla x, e la
$x\phi'(x\omega)=\phi'(\omega)$ derivandola rispetto alla ω:

da queste due equazioni si elimini la quantità $\phi'(x\omega)$, e si avrà l'equazione

$$x\phi'(x)=\omega\phi'(\omega),$$

che insegna essere $x\phi'(x)=b$, b costante rispetto alla x.

Essendo $\phi'(x)=\frac{b}{x}$, si ha $\phi''(x)=-\frac{b}{x^2}$, $\phi'''(x)=\frac{2b}{x^3}$, ... (§ 7); e però sarà

$$\phi(x+\omega)=\phi(x)+\omega\frac{b}{x}-\frac{\omega^2}{2}\cdot\frac{b}{x^2}+\frac{\omega^3}{3}\cdot\frac{b}{x^3}-\text{ecc.}$$

ovvero (§ 9)

$$\phi(x+\omega)=\phi(x)+\text{Log.}\left(1+\frac{\omega}{x}\right),$$

ove il logaritmo si intenda preso secondo il sistema avente per modulo b, qualsivoglia per conseguenza.

La equazione, qui trovata, si riduce con facilità alla seguente

$$\phi(x+\omega)-\text{Log.}(x+\omega)=\phi(x)-\text{Log.}\,x,$$

che dà (§ 34)

$$\phi(x) - \text{Log.}\,x = c \text{ ovvero } \phi(x) = \text{Log.}\,x + c;$$

ove c esprime una costante, che per altro dev'essere *zero*.

Di fatto, per essere $\phi(x) = \text{Log.}\,x + c$, si ha $\phi(\omega) = \text{Log.}\,\omega + c$, ed anco $\phi(x\omega) = \text{Log.}\,x\omega + c$ ossia $\phi(x\omega) = \text{Log.}\,x + \text{Log.}\,\omega + c$. Questi valori riducono la proposta equazione alla

$$\text{Log.}\,x + \text{Log.}\,\omega + c = \text{Log.}\,x + c + \text{Log.}\,\omega + c,$$

che dà $c = 0$. Quindi sarà $\phi(x) = \text{Log.}\,x$; cioè la funzione ϕ deve significare l'operazione logaritmica.

Per la terza ed ultima equazione proposta, sviluppinsi $\psi(x + \omega)$, $\psi(x - \omega)$, si facciano le riduzioni; e si avrà la

$$\psi(x) \cdot \psi(\omega) = 2\psi(x) + 2\frac{\omega^2}{2}\psi''(x) + 2\frac{\omega^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}\psi^{IV}(x) + \text{ecc.}$$

ossia la

$$\psi(\omega) = 2\left(1 + \frac{\omega^2}{2}\,\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + \frac{\omega^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}\,\frac{\psi^{IV}(x)}{\psi(x)} + \text{ecc.}\right);$$

e però $\dfrac{\psi''(x)}{\psi(x)}$ sarà una costante: chiamisi $-b^2$, ossia pongasi

$$\psi''(x) = -b^2\psi(x),$$

e per conseguenza

$$\psi^{IV}(x) = b^4\psi(x),\ \psi^{VI}(x) = -b^6\psi(x), \ldots$$

ed avrassi

$$\psi(\omega) = 2\left(1 - \frac{\omega^2 b^2}{2} + \frac{\omega^4 b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{ecc.}\right),$$

cioè (§ 14) $\psi(\omega) = 2\cos.\,b\omega$, e conseguentemente anco $\psi(x) = 2\cos.\,bx$. Vale a dire, per soddisfare la terza equazione, la funzione ψ deve significare il doppio del coseno dell'angolo, che è il prodotto di una costante qualsivoglia per la quantità sulla quale si intende eseguita l'operazione indicata colla stessa ψ.

LEZIONE II.

Delle derivate parziali delle funzioni di due o più variabili indipendenti.

36. Due o più variabili si dicono indipendenti l'una dall'altra, quandò una possa variare, senza che varino le altre, ovvero che esse possano ricevere variazioni ed anco valori, i quali non abbiano tra loro nessuna relazione.

La $F(x,y)$ esprima una funzione delle due variabili x,y indipendenti. Le derivate della $F(x,y)$ prese rispetto alla x si indicheranno indifferentemente coi simboli $F'(x)$, $F''(x)$, ---- $F^{(n)}(x)$, che sono quelli già usati, o coi seguenti.

$$\left(\frac{dF}{dx}\right),\ \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right),\ ----\ \left(\frac{d^nF}{dx^n}\right):$$

così quelle rispetto alla y si indicheranno cogli $F'(y)$, $F''(y)$, ---- $F^{(n)}(y)$, ovvero coi

$$\left(\frac{dF}{dy}\right),\ \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right),\ ----\ \left(\frac{d^nF}{dy^n}\right).$$

Per indicare poi la derivata presa rispetto alla y della $F'(x)$, già derivata della $F(x,y)$ rispetto alla x, useremo il simbolo $\left(\frac{dF'(x)}{dy}\right)$ ovvero $\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)$ e per indicare quella rispetto alla x della $F'(y)$ scriveremo $\left(\frac{dF'(y)}{dx}\right)$ ovvero $\left(\frac{d^2F}{dy\,dx}\right)$. In generale, per indicare la derivata m *esima* rispetto alla x della n *esima* rispetto alla y della $F(x,y)$, scriveremo $\left(\frac{d^m F^{(n)}(y)}{dx^m}\right)$ ovvero $\left(\frac{d^{m+n}F}{dy^n dx^m}\right)$. Così la scrittura $\left(\frac{d^{m+n+r}F}{dx^m dy^n dx^r}\right)$ significherà la derivata *r esima* rispetto alla x della *n esima* rispetto alla y di quella funzione già derivata *m esima* rispetto alla x della funzione $F(x,y)$.

La determinazione di queste derivate, quando la $F(x,y)$ sia individuata, non presenta nessuna difficoltà; giacchè nel formare quelle rispetto ad una variabile si considera l'altra variabile come una costante.

Per esempio, sia $F(x,y)=x^4y^3+2x-3y$: si avranno

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)=4x^3y^3+2,\ \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)=12x^2y^3,\ ----$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right)=3x^4y^2-3,\ \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)=\ 6x^4y\ ,\ ----.$$

La $\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)$, che è la derivata prima rispetto alla y della $\left(\frac{dF}{dx}\right)$, sarà $12x^3y^2$; così la $\left(\frac{d^2F}{dy\,dx}\right)$, che è la derivata rispetto alla x della $\left(\frac{dF}{dy}\right)$, sarà $12x^3y^2$. Visibilmente le $\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)$, $\left(\frac{d^2F}{dy\,dx}\right)$, per questo esempio, sono identiche: tale proprietà ha luogo, qualunque funzione delle x,y sia la $F(x,y)$; siccome si vedrà qui sotto.

37. Nella funzione $F(x,y)$ si ponga $x+\omega$ in vece della x, e si sviluppi la risultante, ed avrassi la equazione

$$F(x+\omega,y)=F(x,y)+\omega F'(x)+\frac{\omega^2}{2}F''(x)+\text{ecc.}$$

ossia

$$F(x+\omega,y)=F(x,y)+\omega\varphi(x,y)+\frac{\omega^2}{2}f(x,y)+\text{ecc.},$$

dove le $\phi(x,y)$, $f(x,y)$, - - - esprimono ordinatamente le $F'(x)$; $F''(x)$, - - -.

In questa equazione, si ponga $y+\theta$ in luogo della y, ove θ esprime altra quantità indeterminata; ed otterrassi

$$F(x+\omega,y+\theta)=F(x,y+\theta)+\omega\,\phi(x,y+\theta)+\frac{\omega^2}{2}f(x,y+\theta)+\text{ecc.};$$

e però, siccome (§ 4) si hanno

$$F(x,y+\theta)=F+\theta F'(y)+\frac{\theta^2}{2}F''(y)+\text{ecc.}$$

$$\phi(x,y+\theta)=\phi+\theta\left(\frac{d\phi}{dy}\right)+\text{ecc.}=F'(x)+\theta\left(\frac{dF'(x)}{dy}\right)+\text{ecc.},$$

$$f(x,y+\theta)=f+\theta\left(\frac{df}{dy}\right)+\text{ecc.}=F''(x)+\text{ecc.}$$

- -;

così sarà

$$\begin{aligned}F(x+\omega,y+\theta)=F+\theta\,F'(y)+\frac{\theta^2}{2}F''(y)+\text{ecc.}\\ +\omega\,F'(x)+\omega\,\theta\left(\frac{dF'(x)}{dy}\right)+\text{ecc.}\\ +\frac{\omega^2}{2}F''(x)+\text{ecc.}\end{aligned}$$

Similmente, ponendo $y+\theta$ nella funzione $F(x,y)$ in vece della y, e sviluppando la risultante, hassi la equazione

$$F(x,y+\theta)=F(x,y)+\theta\,F'(y)+\frac{\theta^2}{2}F''(y)+\text{ecc.}$$

ossia

$$F(x,y+\theta)=F(x,y)+\theta\psi(x,y)+\frac{\theta^2}{2}\xi(x,y)+\text{ecc.},$$

dove ψ, ξ, - - - esprimono ordinatamente

$F'(y)$, $F''(y)$, - - -;

e da questa equazione, sostituendo l'$x+\omega$ in vece della x, risulta la

$$F(x+\omega,y+\theta)=F(x+\omega,y)+\theta\psi(x+\omega,y)+\frac{\theta^2}{2}\xi(x+\omega,y)+\text{ecc.},$$

la quale si riduce alla seguente

$$\begin{aligned}F(x+\omega,y+\theta)=F+\omega F'(x)+\frac{\omega^2}{2}F''(x)+\text{ecc.}\\ +\theta F'(y)+\omega\theta\left(\frac{dF'(y)}{dx}\right)+\text{ecc.}\\ +\frac{\theta^2}{2}F''(y)+\text{ecc.}\end{aligned}$$

sostituendo in essa in vece delle quantità

$$F(x+\omega,y),\ \psi(x+\omega,y);\ \xi(x+\omega,y),\ ---$$

i rispettivi loro sviluppi.

Essendo, i primi membri delle due equazioni trovate, visibilmente eguali, qualunque siano le quantità, colle quali sono essi formati, i secondi membri di esse saranno anch'essi tra loro eguali colla stessa estensione; e però i coefficienti delle simili potenze delle ω, θ, che entrano in questi membri, saranno eguali, qualunque siano le quantità, colle quali sono essi formati. Quindi $\left(\frac{dF'(x)}{dy}\right)$ coefficiente dell' $\omega\theta$ nell' uno sarà eguale a $\left(\frac{dF'(y)}{dx}\right)$ coefficiente dell' $\omega\theta$ nell'altro, anzi queste due quantità saranno identiche.

Ecco dimostrato, per qualsivoglia funzione, ciò che si è osservato nell'esempio esposto nel paragrafo antecedente.

38. La equazione identica $\left(\frac{dF'(x)}{dy}\right)=\left(\frac{dF'(y)}{dx}\right)$

ossia la $\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)=\left(\frac{d^2F}{dydx}\right)$ (§ 34) dà le

$$\left(\frac{d^3F}{dxdydx}\right)=\left(\frac{d^3F}{dydx^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2F'(x)}{dydx}\right)=\left(\frac{d^2F'(x)}{dxdy}\right) \text{ ossia } \left(\frac{d^3F}{dxdydx}\right)=\left(\frac{d^3F}{dx^2dy}\right);$$

ed in generale si può concludere, che la derivata *m esima* rispetto alla x della derivata *n esima* rispetto alla y della $F(x,y)$ non solo è identica alla derivata *n esima* rispetto alla y della *m esima* rispetto alla x, ma anco a ciascuno di quei risultamenti, che si hanno, formando della $F(x,y)$ una derivata di cert'ordine rispetto alla x, di questa una derivata di cert' ordine rispetto alla y, della risultante una di certo ordine di nuovo rispetto alla x, ---; purchè alla fine siansi eseguite m derivazioni rispetto alla x ed n rispetto alla y.

Per semplicità le quantità

$$F'(x),\ F''(x),\ F'''(x),\ ---;\ F'(y),\ F''(y),\ F'''(y),\ ---;$$

$$\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) \text{ossia} \left(\frac{d^2F}{dydx}\right), \left(\frac{d^{m+n}F}{dx^m dy^n}\right) \text{ovvero} \left(\frac{d^{m+n}F}{dy^n dx^m}\right), ---$$

che si chiamano derivate *parziali* della $F(x,y)$, le prime prese rispetto alla x, le seconde rispetto alla y, e le altre parte rispetto alla x e parte rispetto alla y, si indicheranno ordinatamente coi simboli

$$F',\ F'',\ F''',\ ---;\ F_{/},\ F_{//},\ F_{///},\ ---;\ F'_{/},\ F^{(m)}_{(n)},$$

sempre che non siavi pericolo di ambiguità con altri simboli usati contemporaneamente; e particolarmente si denomineranno, la $F^{(m)}$ derivata *m esima* parziale rispetto alla x, la $F_{(n)}$ derivata *n esima* parziale rispetto alla y; e la $F^{(m)}_{(n)}$ si denominerà derivata $(m+n)$ *esima* parziale m volte rispetto alla x ed n volte rispetto alla y.

Il secondo membro di una delle due equazioni trovate (§ 37) o quello della seguente affatto equivalente

$$\begin{aligned}F(x+\omega,y+\theta)=F+\omega F'+\frac{\omega^2}{2}F''+\text{ecc.}\\ +\theta F_{,}+\omega\theta F_{,}'+\text{ecc.}\\ +\frac{\theta^2}{2}F_{,,}+\text{ecc.}\end{aligned}$$

si chiamerà sviluppo della quantità $F(x+\omega,y+\theta)$, la quale si ha visibilmente, cambiando nella $F(x,y)$ le x,y nei binomj $x+\omega,y+\theta$.

Questo sviluppo della $F(x+\omega,y+\theta)$ è evidentemente eguale ad

$$\begin{aligned}F(x+\omega,y)+F(x,y+\theta)-F(x,y)\,più\,\omega\theta F_{,}'+\frac{\omega^2\theta}{2}F_{,}''+\text{ecc.}\\ +\frac{\omega\theta^2}{2}F_{,,}'+\text{ecc.};\end{aligned}$$

e però il quadrinomio

$$F(x+\omega,y+\theta)-F(x+\omega,y)-F(x,y+\theta)+F(x,y)$$

sarà eguale ad $\omega\theta F_{,}'+R$, ove la R contiene gli aumenti ω, θ almeno a tre dimensioni.

39. Le proprietà esposte e dimostrate in questi ultimi due paragrafi si possono conseguire con tutta la generalità col metodo seguente.

Lo sviluppo della $F(x+\omega,y+\theta)$ si rappresenti con

$$A+B+C+D+\omega^m\theta^n P,$$

dove A esprima la somma di tutti quei termini nei quali l'ω ha un esponente minore dell'm e la θ minore dell'n, B la somma di quelli nei quali la ω ha esponenti minori dell'm e la θ maggiori dell'n, C la somma di quelli nei quali l'ω ha un esponente maggiore dell'm e la θ minori dell'n, ed in ultimo D la somma di tutti quelli nei quali l'ω ha esponenti maggiori dell'm e la θ maggiori dell'n; e si osservi, che per una funzione qualunque dei binomi $x+\omega$, $y+\theta$ la derivata di essa di qualsivoglia ordine presa rispetto alla x è identica alla derivata dello stesso ordine presa rispetto alla ω, e che una simile proprietà ha luogo tra le derivate prese rispetto alla y e quelle prese rispetto alla θ.

La equazione

$$F(x+\omega, y+\theta)=A+B+C+\omega^m\theta^n P+D,$$

essendo identica, dà (§ 34) le quattro seguenti pure identiche

$$\left(\frac{d^mF(x+\omega,y+\theta)}{dx^m}\right)=\left(\frac{d^mC}{d\omega^m}\right)+m(m-1)---2\cdot1\cdot P\theta^n+\left(\frac{d^mD}{d\omega^m}\right),$$

$$\left(\frac{d^nF(x+\omega,y+\theta)}{dy^n}\right)=\left(\frac{d^nB}{d\theta^n}\right)+n(n-1)---2\cdot1\cdot P\omega^m+\left(\frac{d^nD}{d\theta^n}\right),$$

$$\left(\frac{d^{m+n}F(x+\omega,y+\theta)}{dx^m dy^n}\right)=$$

$$m(m-1)---2\cdot1\cdot n(n-1)---2\cdot1\cdot P+\left(\frac{d^{m+n}D}{d\omega^m d\theta^n}\right),$$

$$\left(\frac{d^{m+n}F(x+\omega,y+\theta)}{dy^n dx^m}\right)=$$

$$n(n-1)---2\cdot1\cdot m(m-1)---2\cdot1\cdot P+\left(\frac{d^{m+n}D}{d\theta^n d\omega^m}\right).$$

In queste ultime due si faccia $\omega=\theta=0$, ed osservisi che i valori delle $\left(\frac{d^{m+n}D}{d\omega^m d\theta^n}\right)$, $\left(\frac{d^{m+n}D}{d\theta^n d\omega^m}\right)$ corrispondenti a questi delle ω, θ sono *nulli*; e si avranno le

$$\left(\frac{d^{m+n}F(x,y)}{dx^m dy^n}\right)=m(m-1)\cdots 2\cdot 1\cdot n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot P,$$

$$\left(\frac{d^{m+n}F(x,y)}{dy^n dx^m}\right)=n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot m(m-1)\cdots 2\cdot 1\cdot P,$$

le quali insegnano, che le due funzioni

$$\left(\frac{d^{m+n}F(x,y)}{dx^m dy^n}\right),\ \left(\frac{d^{m+n}F(x,y)}{dy^n dx^m}\right)$$

sono tra loro *identiche*; ed anco che P, coefficiente di quel termine dello sviluppo della $F(x+\omega, y+\theta)$ nel quale ω ha l'esponente m e θ l'n, è

$$\left(\frac{d^{m+n}F}{dx^m dy^n}\right):m(m-1)\cdots 2\cdot 1\cdot n(n-1)\cdots 2\cdot 1.$$

Se P fosse il coefficiente di uno qualunque di quei termini dello sviluppo nei quali non vi è θ, facendo nella prima delle quattro equazioni trovate $\omega=0$, $n=0$, avrebbesi esso eguale a

$$\left(\frac{d^m F}{dx^m}\right):m(m-1)\cdots 2\cdot 1;$$

e se fosse esso coefficiente di uno di quelli nei quali non vi è l'ω, col fare nella seconda delle medesime equazioni $\theta=0$, $m=0$, si avrebbe

$$\left(\frac{d^n F}{dy^n}\right):n(n-1)\cdots 2\cdot 1.$$

40. Ora, la F sia una funzione delle tre variabili x, y, z anch'esse indipendenti. Qui pure, per indicare la derivata *r esima* rispetto alla z, della derivata *n esima* rispetto alla y, della *m esima* derivata della F presa rispetto alla x, si userà il simbolo

$$\left(\frac{d^{m+n+r}F}{dx^m dy^n dz^r}\right);$$

Per essere identica la equazione

$$\left(\frac{d^{m+n}F}{dx^m\,dy^n}\right)=\left(\frac{d^{m+n}F}{dy^n\,dx^m}\right),$$

sarà pure identica la seguente

$$\left(\frac{d^{m+n+r}F}{dx^m dy^n dz^r}\right)=\left(\frac{d^{m+n+r}F}{dy^n dx^m dz^r}\right);$$

anzi, essendola

$$\left(\frac{d^{m+r}F^{(n)}(y)}{dx^m dz^r}\right)=\left(\frac{d^{m+r}F^{(n)}(y)}{dz^r dx^m}\right),$$

sarà anco identica la

$$\left(\frac{d^{m+n+r}F}{dx^m dy^n dz^r}\right)=\left(\frac{d^{m+n+r}F}{dy^n dz^r dx^m}\right).$$

In generale si può concludere, che i risultamenti di una successiva serie di derivazioni prese rispetto a quante variabili si vogliano saranno identici, qualunque sia l'ordine tenuto; purchè in fine siasi eseguito, per ogni variabile, lo stesso numero di derivazioni.

41. Nella equazione

$$F(x+\omega,y+\theta,z)=F(x,y,z)+\omega\left(\frac{dF}{dx}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)+\text{ecc.}$$
$$+\theta\left(\frac{dF}{dy}\right)+\omega\theta\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)+\text{ecc.}$$
$$+\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)+\text{ecc.}$$

che si ha in un modo analogo a quelle trovate nel § 37, ponendo in vece della z il binomio $z+\alpha$, α quantità analoga alle ω, θ, e sviluppando il secondo membro della risultante, trovasi

$F(x+\omega, y+\theta, z+\alpha)$ eguale ad $F(x, y, z)$,

$$\text{più } \omega\left(\frac{dF}{dx}\right)+\theta\left(\frac{dF}{dy}\right)+\alpha\left(\frac{dF}{dz}\right)$$

$$\textit{più}\ \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)+\omega\theta\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)$$

$$+\omega\alpha\left(\frac{d^2F}{dx\,dz}\right)+\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)+\theta\alpha\left(\frac{d^2F}{dy\,dz}\right)+\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dz^2}\right)$$

più altri termini nei quali gli aumenti ω, θ, α, hanno almeno tre dimensioni. Dimodochè, denominata F_1 la somma dei tre termini $\omega\left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\theta\left(\frac{dF}{dy}\right)$, $\alpha\left(\frac{dF}{dz}\right)$ nei quali gli aumenti ω, θ, α hanno una dimensione, ed F_2 la somma dei sei $\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)$, $\omega\theta\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)$, --- nei quali gli ω, θ, α hanno due dimensioni, ed F_3 la somma di quelli nei quali gli ω, θ, α hanno tre dimensioni: sarà

$$F(x+\omega, y+\theta, z+\alpha)=F+F_1+F_2+F_3+\text{ecc.}$$

Da questi sviluppi si desume facilmente il polinomio

$$F(x+\omega, y+\theta, z+\alpha)-F(x, y+\theta, z+\alpha)-F(x+\omega, y, z+\alpha),$$
$$-F(x+\omega, y+\theta, z)+F(x, y, z+\alpha)+F(x, y+\theta, z)$$
$$+F(x+\omega, y, z)-F(x, y, z)$$

$$\text{eguale ad } \omega\theta\alpha\left(\frac{d^3F}{dx\,dy\,dz}\right)+R,$$

ove R contiene termini in ciascun dei quali gli ω, θ, α, hanno almeno quattro dimensioni.

Non parlo delle derivate parziali delle funzioni a quattro o più variabili indipendenti, nè degli sviluppi relativi a queste funzioni ed analoghi a quegli esposti per le funzioni a due e a tre variabili, perchè non si incontrano difficoltà, se si prescinde dalla lunghezza dei calcoli; e non espongo le regole per trovare le derivate parziali delle funzioni *composte* di funzioni di due o più variabili indipendenti, giacchè esse sono affatto analoghe a quelle esposte e dimostrate per le funzioni composte di funzioni di una sola variabile.

LEZIONE III.

Delle equazioni derivate tra due variabili e delle derivate delle relative funzioni implicite.

42. Si intendano colle x, y due variabili; ed abbiasi tra esse la equazione $F(x, y) = 0$.

Allorchè si ha una equazione tra due variabili, è noto a tutti, che, a valori differenti di una di esse, corrispondono valori per l'altra, generalmente differenti anch'essi l'un dall'altro, o ciò che è lo stesso, l'una varia, variando l'altra, per cui l'una è essenzialmente funzione dell'altra.

Per evitare la confusione, nella equazione anzi ammessa, noi terremo la y per funzione della x; e chiameremo x variabile *principale*.

Nella espressione $F(x, y)$ si supponga sostituito in luogo della y il suo valore cavato dalla equazione $F(x, y) = 0$; e si avrà una funzione della sola x, la quale sarà *zero*, qualunque sia la x medesima, per cui eguagliata a *zero*, somministrerà una equazione effettivamente identica.

Rappresentiamo questa equazione colla $\phi(x) = 0$; e rammentiamci che la funzione $\phi(x)$ è la stessa $F(x, y)$, purchè si intenda in questa colla y la funzione della x data della equazione $F(x, y) = 0$.

Siccome l'equazione $\phi(x) = 0$ sussiste qualunque sia la x; così con essa sussisteranno, pure qualunque sia la x, le seguenti (§ 34)

$$\phi'(x) = 0, \quad \phi''(x) = 0, \quad \phi'''(x) = 0, \; ---.$$

Ma per essere la funzione $\phi(x)$ la stessa $F(x, y)$, purchè si intenda colla y l'anzidetta funzione della x, le derivate $\phi'(x)$, $\phi''(x)$, $\phi'''(x)$, - - - sono le stesse derivate *prima, seconda, terza,* - - - della $F(x, y)$. Quindi le derivate di questa saranno anch'esse nulle, qualunque sia la x, sempre che, lo ripeto, in essa si intenda colla y quella funzione della x, che è data dalla equazione medesima $F(x, y) = o$.

Queste derivate della funzione composta $F(x, y)$ per semplicità si indicheranno coi simboli

$$F(x, y)', \ F(x, y)'', \ F(x, y)''', \ - - -$$

per cui, insieme alla equazione $F(x, y) = o$, sussisteranno le seguenti

$$F(x, y)' = o, \ F(x, y)'' = o, \ F(x, y)''' = o, \ - - -.$$

Essendo $F(x, y)$ una funzione composta rispetto alla x, giacchè vi è la x visibile e la y funzione della x medesima, sarà (§ 22) $F(x, y)'$ eguale al binomio $F'(x) + F'(y)y'$; e però l'equazione $F(x, y)' = o$ in sostanza sarà la seguente

$$F'(x) + y'F'(y) = o.$$

43. Egli è evidente, che le derivate $F'(x)$, $F'(y)$ saranno in generale funzioni delle x, y.

Per essere $F(x,y)''$ la derivata prima della $F(x,y)'$, sarà essa eguale alla derivata del binomio $F'(x)+y'F'(y)$ cioè a quella di $F'(x)$ *più* quella del prodotto $y'F'(y)$. Ma la derivata di $F'(x)$ è

$$\left(\frac{dF'(x)}{dx}\right) + y'\left(\frac{dF'(x)}{dy}\right) \text{ ossia } F'' + y'F_{/}',$$

e quella di $y'F'(y)$ è

$$y'F_{/}' + y'^2F_{//} + y''F_{/};$$

adunque sarà

$$F(x,y)''=F''+2y'F'_{\prime}+y'^2F_{\prime\prime}+y''F_{\prime};$$

e conseguentemente la equazione $F(x,y)''=0$ in sostanza sarà la seguente

$$F''+2y'F'_{\prime}+y'^2F_{\prime\prime}+y''F_{\prime}=0.$$

Similmente si trova che la $F(x,y)'''=0$ è

$$F'''+3y'F''_{\prime}+3y'^2F'_{\prime\prime}+y'^3F_{\prime\prime\prime}+3y''F'_{\prime}+3y'y''F_{\prime\prime}+y'''F_{\prime}=0:$$

altrettanto dicasi delle $F(x,y)^{IV}=0$, $F(x,y)^{V}=0$, ---.

Osservando gli sviluppi, qui trovati, delle $F(x,y)'$, $F(x,y)''$, $F(x,y)'''$, ---, si vede, che essi contengono ordinatamente le y', y'', y''', ---; e che in generale conterranno x, y, y'; x, y, y', y''; x, y, y', y'', y'''; ---; e si comprende che la $F(x,y)^{(n)}$, oltre la $y^{(n)}$, conterrà in generale x, y, y', y'', ---$y^{(n-1)}$.

44. Concludiamo per tanto, che le variabili x, y, quando abbiano la proprietà rappresentata colla equazione $F(x,y)=0$, avranno anco tutte quelle rappresentate colle

$$F(x,y)'=0,\ F(x,y)''=0,\ F(x,y)'''=0,\ ---;$$

o ciò che significa lo stesso, che insieme alla prima di queste equazioni, sussisteranno le altre, ed anco, che ciascuna di queste è equivalente alla prima, e però ad ogni altra di esse; giacchè si desumono tutte dalla stessa prima, senza ammettere altre proprietà: dimodochè, se la prima rappresentasse una proprietà di una linea, le altre tutte rappresenterebbero proprietà della linea stessa. Anzi, facilmente comprenderassi, che insieme alla equazione $F(x,y)=0$, non solo sussisteranno le

$$F(x,y)'=0,\ F(x,y)''=0,\ ---,$$

ma anco tutte quelle, che si potranno ottenere, combinando queste e fra loro e colla $F(x,y)=0$ stessa in qualunque maniera; e che le risultanti rappresenteranno tutte proprietà delle variabili aventi quella espressa colla $F(x,y)=0$.

45. Una equazione contenente una o più derivate di qualche variabile, si chiamerà *equazione alle derivate*; e si dirà ordinatamente del *primo* ordine, del *secondo* ordine, del *terzo* ordine, --- se la derivata del maggior ordine in essa contenuta sarà la prima, la seconda, la terza, ---; e però l'equazione $F(x,y)'=0$ ed anco una qualunque di quelle, che si possouo ottenere, combinando questa colla $F(x,y)=0$, saranno equazioni alle derivate del primo ordine: l'equazione $F(x,y)''=0$, non che le ottenibili combinando questa con una delle $F(x,y)=0$, $F(x,y)'=0$ o con entrambe, sarà una equazione alle derivate del second'ordine: e così di seguito.

E particolarmente le $F(x,y)'=0$, $F(x,y)''=0$ ---, che si desumono dalla $F(x,y)=0$ colla semplice derivazione, si chiameranno equazioni *derivate esatte* del primo ordine, del secondo ordine, --- della stessa equazione $F(x,y)=0$.

46. Da una data equazione tra due variabili ed una costante anco arbitraria si può sempre desumerne una alle derivate del primo ordine, nella quale manchi la costante, e sia equivalente alla data.

L'equazione data sia $F(x,y,a)=0$, ove la a esprime la costante. Con questa equazione sussisterà anco la seguente (§ 42)

$$F(x,y)'=0 \quad \text{ossia} \quad F'(x)+y'F'(y)=0$$

sua derivata prima esatta.

Se nella equazione $F(x, y, a) = 0$ la a vi fosse isolata, evidentemente essa mancherebbe nella $F(x, y)' = 0$, e però la stessa derivata esatta

$$F'(y) + y' F'(y) = 0$$

sarebbe l'equazione richiesta.

Se poi nella equazione $F(x, y, a) = 0$ la costante a vi sarà altrimenti, essa rimarrà anco nella $F(x, y)' = 0$: in questo caso, combineransi le equazioni

$$F(x, y) = 0, \quad F(x, y)' = 0$$

in modo da eliminare la a, e si avrà una equazione alle derivate del primo ordine, equivalente alla data, e mancante per conseguenza della costante medesima.

Così, da una data equazione tra due variabili e due costanti anco arbitrarie, si può desumerne una alle derivate del second'ordine, nella quale non vi siano le costanti medesime, e sia equivalente alla data.

Di fatto, l'equazione data sia $F(x, y, a, b) = 0$, ove a, b esprimono le costanti: con essa sussisteranno (§ 42) le $F(x, y)' = 0$, $F(x, y)'' = 0$ derivate esatte del primo e second'ordine.

Ora egli è facile concepire, che, in qualunque maniera le costanti a, b entrino nella equazione data, essa si potrà sempre combinare colle due $F(x, y)' = 0$, $F(x, y)'' = 0$ in modo da eliminare le costanti medesime, e con ciò avere la richiesta equazione alle derivate del second'ordine: anzi, questa sarebbe la stessa $F(x, y)'' = 0$, se le a, b fossero nella $F(x, y) = 0$ in un sol termine separato, il quale avesse la forma $x\phi(a, b) + \psi(a, b)$ qualunque siano poi i significati delle ϕ, ψ.

In generale, da una data equazione tra due variabili, si potrà sempre desumere una equazione alle derivate n *esime*, equivalente alla data, e nella quale non entrino n costanti, anco arbitrarie, di quelle contenute nella data medesima.

Si debba trovare l'equazione alle derivate del primo ordine, equivalente alla $y-2ax+a^2=0$, e che non contenga la a costante.

Per questo esempio, si ha $F=y-2ax+a^2$, e però $F'(x)=-2a$, $F'(y)=1$; per cui l'equazione derivata prima esatta sarà $-2a+y'=0$, la quale dà $a=\frac{1}{2}y'$, valore, che sostituito nella data medesima, somministra la seguente

$$y-xy'+\tfrac{1}{4}y'^2=0,$$

per equazione richiesta.

Vogliasi anco l'equazione alle derivate del second'ordine, equivalente alla

$$x^2+y^2-2ax-2by=0,$$

e nella quale manchino le a, b costanti.

Essendo $F=x^2+y^2-2ax-2by$, si ha

$$F'(x)=2x-2a,\ F'(y)=2y-2b,$$

e però l'equazione derivata prima esatta sarà

$$2x-2a+2yy'-2by'=0 \text{ ossia } x-a+(y-b)y'=0.$$

Per ottenere la derivata seconda esatta, si osservi, che la x nel polinomio $x-a+(y-b)y'$ vi è in *tre* maniere differenti, cioè nel modo visibile, nella y, ed anco nella y'; per cui la sua derivata (§ 25) sarà eguale ad 1 derivata del polinomio rispetto alla sola x visibile, *più* $y'y'$ ossia y'^2 derivata di esso presa rispetto alla x contenuta nella y, *più* $(y-b)y''$ che è la derivata del medesimo polinomio rispetto alla x contenuta nella y'; e per tanto, l'equazione derivata seconda esatta sarà

$$1+y'^2+(y-b)y''=0.$$

Questa equazione dà $b=y+\frac{1+y'^2}{y''}$: valore, che riduce l'equazione derivata prima esatta alla

$$x-a-\frac{y'}{y''}(1+y'^2)=0,$$

dalla quale si desume

$$a=x-\frac{y'}{y''}(1+y'^2).$$

In fine, questi valori delle a, b sostituiti nella equazione data, riducono essa alla seguente

$$x^2+y^2-2x\left(x-\frac{y'}{y''}(1+y'^2)\right)-2y\left(y+\frac{1+y'^2}{y''}\right)=0$$

ossia

$$x^2+y^2-2\frac{1+y'^2}{y''}(xy'-y)=0,$$

la quale sarà l'equazione richiesta.

47. Ora, si abbiano le due equazioni

$$F(x,y,u)=0,\ f(x,y,u)=0$$

fra le tre variabili x, y, u: due di queste variabili saranno funzioni della terza: supporremo le y, u funzioni dell'altra cioè della x.

Rappresentiamo colle F, f le due funzioni della sola x, che si ottengono, sostituendo nelle espressioni

$$F(x,y,u),\ f(x,y,u)$$

in luogo delle y, u i loro valori cavati dalle stesse equazioni date.

Le funzioni F, f saranno nulle, qualunque sia la x, anzi ciascuna delle due equazioni $F = o$, $f = o$ sarà identica; e però identiche pure saranno (§ 34) le

$$F' = o,\ F'' = o, \text{---}\ f' = o,\ f'' = o, \text{---}.$$

Ma le F, f sono le stesse $F(x, y, u)$, $f(x, y, u)$, purchè si intendano in queste colle y, u quelle funzioni della x, che si hanno per le y, u, sciogliendo le due equazioni date, per cui (§ 23) sarà

$$F(x, y, u)' = F'(x) + F'(y)y' + F'(u)u',$$

$$f(x, y, u)' = f'(x) + f'(y)y' + f'(u)u';$$

adunque le variabili x, y, u aventi le proprietà rappresentate colle due equazioni

$$F(x, y, u) = o,\ f(x, y, u) = o,$$

avranno anco le proprietà rappresentate colle equazioni seguenti

$$F'(x)+F'(y)y'+F'(u)u' = o,\ f'(x)+f'(y)y'+f'(u)u' = o,$$

non che le rappresentate colle equazioni derivate esatte degli ordini superiori; ed anco quelle altre proprietà, che saranno rappresentate colle equazioni, che si potranno avere, combinando queste equazioni tra loro ed anco colle due date in qualunque maniera.

Quello che abbiamo qui detto, per due equazioni fra tre variabili, facilmente si potrà all'occorrenza estendere ad un numero qualunque di equazioni, purchè il numero delle variabili superi di *uno* quello delle equazioni stesse.

48. Sin qui si è supposto, che le equazioni contenessero le variabili in un modo affatto individuato; ora darò un cenno delle derivate di quelle equazioni nelle quali entrano funzioni, che non sono individuate; come suole accadere, quando queste siano funzioni incognite.

Si abbia la equazione

$$F(x, y, P, Q, ---) = 0,$$

ove le P, Q, --- esprimono funzioni qualsivogliono della x.

Se in questa equazione si ponesse in luogo della y il suo valore tratto dalla equazione medesima, il quale sarebbe formato colle x, P, Q, ---, si avrebbe una equazione tutta formata colle x, P, Q, ---, la quale sarebbe identica. Quindi con essa sussisterebbero anco le sue derivate, la prima delle quali è (§ 24)

$$F'(x) + F'(y)\left(y'(x) + y'(P)\,P' + y'(Q)\,Q' + \text{ecc.}\right) + F'(P)\,P' + F'(Q)\,Q' + \text{ecc.} = 0$$

ossia

$$F'(x) + F'(y)y' + F'(P)\,P' + F'(Q)\,Q' + \text{ecc.} = 0$$

ritenuto che y' esprima la $y'(x) + y'(P)P' + y'(Q)Q' + \text{ecc.}$ cioè la derivata della funzione composta y data dalla equazione proposta. Il simbolo $y'(x)$ qui usato esprime la derivata della y parziale rispetto a quella sola x, la quale è visibile nella equazione proposta medesima.

Se fosse $F = y - P^m$, cioè se si avesse la equazione $y - P^m = 0$, la sua derivata prima esatta sarebbe $y' - mP^{m-1}P' = 0$. Questa combinata colla $y - P^m = 0$ in modo da eliminare P^m dà

$$y'P - mP'y = 0,$$

la quale non contiene la funzione composta P^m.

Così, se fosse $F = y - e^P = 0$, e però $y' - e^P p' = 0$ la derivata prima esatta, eliminando la funzione e^P, si avrebbe la

$$y' - yp' = 0.$$

In generale, da una equazione tra due variabili ed una individuata funzione composta di una sola componente, si potrà desumerne una equivalente ed alle derivate, la quale non contenga la funzione composta medesima; ciò che riesce utile in molte occasioni.

Dal qui esposto emerge un'altra regola per trovare la equazione alle derivate del secondo ordine ottenuta nel § 46 coll'eliminare le costanti a, b dalle tre

$$F(x, y, a, b)=0, \quad F(x, y)'=0, \quad F(x, y)''=0.$$

Si combinino le due prime di queste medesime tre equazioni talmente da eliminare una delle due costanti, per esempio da eliminare la a, ed abbiasi la

$$P(x, y, y', b)=0.$$

Per ciò che abbiamo veduto dianzi insieme a questa equazione sussisterà anco la seguente

$$P'(x)+P'(y)\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dy'}\right)\left(\frac{dy'}{dx}\right)\right)+P'(y')\left(\frac{dy'}{dx}\right)=0;$$

dove il binomio $\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dy'}\right)\left(\frac{dy'}{dx}\right)$ esprime la derivata rispetto alla x esistente nel valore della y, dato dalla equazione $P(x, y, y', b)=0$, valore composto evidentemente della x visibile e di quella esistente nella y'.

Ma per essere il valore della y desunto dalla equazione $P(x, y, y', b)=0$ eguale, qualunque sia la x, a quello desunto dalla $F(x, y, a, b)=0$, le derivate $\left(\frac{dy'}{dx}\right)$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dy'}\right)\left(\frac{dy'}{dx}\right)$ sono identiche anzi le stesse y'', y' derivate della y data dalla equazione

$F(x,y,a,b)=0$; adunque la equazione derivata esatta della $P(x,y,y',b)=0$, e dianzi trovata, sarà in sostanza

$$P'(x)+P'(y)y'+P'(y')y''=0.$$

Ora si combini questa equazione alla stessa $P(x,y,y',b)=0$, se occorre, talmente da eliminare la b ed avrassi una equazione alle derivate del second'ordine, la quale sarà nella essenza quella trovata altrimenti al § 46; giacchè i valori della y'' desunti da entrambe debbono essere identici affatto tra loro.

E qui si rifletta anticipatamente, che si ammetterà, siccome ha luogo, che una equazione alle derivate, qualunque essa sia, si possa desumere da una tra le semplici variabili; per cui si riterrà la funzione

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dy'}\right)\left(\frac{dy'}{dx}\right),$$

derivata del valore della y desunto da essa, identica alla y' contenuta nell'equazione medesima.

49. Quando una quantità è funzione di un'altra o pei rispettivi loro significati o per una proprietà ammessa, ma non sia conosciuto in che modo è formata con quest'altra, essa si chiama *funzione implicita* di quest'altra medesima. Moltissime sono le specie differenti delle funzioni implicite: qui parleremo delle derivate di quelle, che si presentano, contemplando una equazione tra due variabili, o due equazioni fra tre variabili, - - -. Allorchè si ha una equazione tra due variabili, l'una è, come si è già detto, necessariamente funzione dell'altra: così, quando hansi due equazioni fra tre variabili, due di esse sono funzioni della terza; ed in generale, se si hanno più equazioni, nelle quali vi siano tante variabili, quante sono le equazioni me-

desime più *uno*, necessariamente di una di queste variabili saranno funzioni tutte le altre; e tutte queste funzioni saranno puramente implicite, a meno chè si sciogliessero le equazioni stesse rispetto alle variabili considerate funzioni dell'altra, per cui diverrebbero esse altrettante funzioni esplicite.

Primieramente determiniamo la derivata della y, supposto data la equazione $F(x, y) = 0$; cioè troviamo quella funzione delle variabili x, y, che rappresenta la derivata prima della funzione implicita y.

Per ciò che abbiamo veduto al § 42, insieme alla equazione data, sussisterà anco la seguente, che è la sua derivata prima esatta,

$$F'(x) + y' F'(y) = 0,$$

la quale somministra immediatamente

$$y' = -\frac{F'(x)}{F'(y)},$$

cioè la funzione delle x, y derivata richiesta.

Per avere la derivata seconda della stessa y, basterebbe trovare l'equazione derivata seconda esatta della medesima equazione data, e porre in essa per y' il suo valore qui esposto, che l'equazione risultante, sciolta rispetto alla y'', darebbe la derivata seconda richiesta.

Similmente, si potrebbe procedere per avere le derivate della y degli ordini più alti: comunemente però, trovata la derivata prima, per avere le derivate degli ordini superiori procedesi col metodo seguente.

La frazione $-\frac{F'(x)}{F'(y)}$, che è funzione delle x, y, si rappresenti colla $f(x, y)$, cioè suppongasi $y' = f(x, y)$.

Da questo valore della y' si ha (§ 22)

$y''=f'(x)+y'f'(y)$; e però sarà $y''=f'(x)+f'(y)f(x,y)$.

Questa funzione delle x, y, valore della y'', si esprima colla $\varphi(x, y)$. Essendo $y''=\varphi(x, y)$, hassi $y'''=\varphi'(x)+y'\varphi'(y)$, ovvero

$$y'''=\varphi'(x)+\varphi'(y)\varphi(x, y).$$

Analogamente potransi avere le funzioni delle x, y derivate della y degli altri ordini superiori.

50. Se la equazione data tra le x, y fosse

$$F(x, y, p, q, ---)=0,$$

ove le $p, q, ---$ esprimono funzioni qualsivogliono della sola x; la equazione derivata prima esatta di essa (§ 48) sarebbe

$$F'(x)+F'(y)y'+F'(p)p'+F'(q)q'+\text{ecc.}=0,$$

la quale dà

$$y'=-\left(F'(x)+F'(p)p'+F'(q)q'+\text{ecc.}\right):F'(y).$$

Non dico, come bisognerebbe regolarsi per trovare le derivate superiori; perchè ciò è facile immaginarsi.

51. In secondo luogo, si vogliano le derivate prese rispetto alla x, delle y, u funzioni implicite, essendo date le due equazioni

$$F(x, y, u)=0,\ f(x, y, u)=0;$$

cioè si vogliano quelle funzioni delle x, y, u, che rappresentano le derivate richieste.

Si hanno le due equazioni (§ 47)

$$F'(x)+y'F'(y)+u'F'(u)=0, f'(x)+y'f'(y)+u'f'(u)=0,$$

le quali, sciolte rispetto alle y', u' danno

$$y'=\frac{F'(x)f'(u)-F'(u)f'(x)}{F'(u)f'(y)-F'(y)f'(u)},\quad u'=-\frac{F'(x)f'(y)-F'(y)f'(x)}{F'(u)f'(y)-F'(y)f'(u)},$$

cioè le funzioni delle x, y, u, che sono le derivate y', u' richieste.

In terzo ed ultimo luogo, si osservi, che, date n equazioni tra $n+1$ variabili, si potranno trovare le derivate di n di esse prese rispetto all'altra, e ciò mediante le n equazioni derivate prime esatte delle n date. Tutto questo, ed anco la ricerca delle derivate degli ordini superiori non presenta nessuna difficoltà, e però se ne tralascia lo sviluppo.

LEZIONE IV.

Delle equazioni derivate parziali, e delle derivate delle relative funzioni implicite ed altre proprietà dipendenti.

52. Si abbia la equazione $F(x, y, u)=0$: una delle variabili x, y, u sarà necessariamente funzione delle altre due: noi terremo la u funzione delle x, y e queste indipendenti l'una dall'altra.

Si intenda colla F la quantità, che si avrebbe, ponendo nella $F(x, y, u)$ in vece della u il suo valore cavato dalla equazione $F(x, y, u)=0$; e sarà F *nulla*, indipendentemente sì dalla x che dalla y; e conseguentemente nulla pure sarà ogni sua derivata parziale presa rispetto alla x, od alla y, od in parte rispetto alla x ed in parte rispetto alla y; cioè insieme alla equazione $F=0$ avranno luogo anco le

$$F'=0,\ F_{\prime}=0;\ F''=0,\ F'_{\prime}=0,\ F_{\prime\prime}=0;\ \ldots.$$

Concludasi per tanto, che insieme alla equazione $F(x, y, u)=0$ sussisteranno le seguenti

$$F'(x) + F'(u)u'=0,\ F'(y)+F'(u)u_{,}=0;$$
$$F''(x) +2\left(\frac{d^2 F}{dxdu}\right)u'+F''(u)u'^2+F'(u)u''=0,$$
$$\left(\frac{d^2 F}{dxdy}\right)+\left(\frac{d^2 F}{dxdu}\right)u_{,}+\left(\frac{d^2 F}{dydu}\right)u'+F''(u)u'u_{,}+F'(u)u'_{,}=0,$$
$$F''(y) +2\left(\frac{d^2 F}{dydu}\right)u_{,}+F''(u)u_{,}^2+F'(u)u_{,,}=0;$$

- ;

purchè in esse si intenda colla u quella funzione delle x, y avente la proprietà espressa colla stessa equazione data: anzi, sussisteranno anco tutte quelle equazioni, che si potranno desumere, combinando queste medesime colla stessa data e tra loro.

Una equazione la quale contenga due, o più derivate parziali, chiamasi *equazione alle derivate parziali*; e si chiama del *primo ordine*, del *second'ordine*, --- secondochè la derivata parziale del maggior ordine in essa esistente sia del primo ordine, del secondo ordine, ---. E particolarmente, le due prime delle equazioni dianzi esposte si chiamano *equazioni derivate prime parziali esatte*: le tre seguenti chiamansi *equazioni derivate seconde parziali esatte*: e così via discorrendo.

53. Le due equazioni derivate prime parziali esatte

$$F'(x)+F'(u)u'=0,\ F'(y)+F'(u)u_{,}=0$$

danno $$u'=-\frac{F'(x)}{F'(u)},\ u_{,}=-\frac{F'(y)}{F'(u)},$$

cioè quelle funzioni delle x, y, u, che sono le derivate prime parziali della u funzione implicita, che entra nella equazione data $F(x,y,u)=0$. Così, sostituendo nelle equazioni derivate seconde parziali esatte in luogo delle u', $u_{\prime}$ i loro valori trovati, si hanno tre equazioni, le quali sciolte rispetto alle u'', $u'_{\prime}$, $u_{\prime\prime}$ danno i valori di queste derivate formati colle sole variabili x,y,u.

Analogamente operando, si potranno avere quelle funzioni delle x,y,u, che esprimono le derivate parziali della u degli ordini più alti.

54. Se nella equazione $F(x,y,u)=0$ vi fossero due costanti, combinando essa colle sue due derivate prime parziali esatte in maniera da eliminare le medesime costanti, avrebbesi una equazione alle derivate parziali del primo ordine, equivalente alla data, nella quale non vi sarebbe traccia visibile delle costanti stesse.

Se nella equazione $F(x,y,u)=0$ vi fossero cinque costanti, si potrebbe combinare colle sue derivate prime e seconde parziali esatte in modo da eliminarle; e però si potrà sempre trovare una equazione alle derivate parziali del second'ordine, equivalente ad una fra tre variabili e cinque costanti arbitrarie, la quale non contenga queste medesime costanti.

In generale, se nella $F(x,y,u)=0$ vi saranno tante costanti, che il loro numero non sia maggiore di $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$, si potrà sempre trovare una equazione ad essa equivalente, la quale non contenga nessuna di queste costanti, e sia alle derivate parziali dell'ordine *n esimo*.

Abbiasi per esempio

$$F(x,y,u)=u-ax-by-f(a,b)=0,$$

dove la $f(a,b)$ esprime una funzione qualunque delle a, b costanti.

Le due equazioni derivate esatte prime parziali saranno

$$u' - a = 0, \quad u_{,} - b = 0.$$

Queste tre equazioni, combinate in modo da eliminare le a, b, danno la

$$u - xu' - yu_{,} - f(u', u_{,}) = 0$$

alle derivate parziali del primo ordine ed equivalente o corrispondente alla data.

55. Nella equazione $F(x, y, u) = 0$, ora vi sia la $\phi(p)$ funzione anco arbitraria della p, la quale p esprima una funzione delle x, y, u.

Onde manifestare queste proprietà, scrivasi l'equazione in quest'altro modo

$$F\Big(x, y, u, \phi\big(p(x, y, u)\big)\Big) = 0:$$

con essa sussisteranno le due

$$F'(x) + F'(u)\, u' + F'(\phi)\, \phi'(p)\, \big(p'(x) + p'(u)\, u'\big) = 0,$$

$$F'(y) + F'(u)\, u_{,} + F'(\phi)\, \phi'(p)\, \big(p'(y) + p'(u)\, u_{,}\big) = 0,$$

che sono le sue derivate prime parziali esatte.

Si combinino queste ultime due talmente da eliminare la $\phi'(p)$, e la risultante si combini colla data in modo da eliminare la $\phi(p)$, qualora essa non sia già sparita, ed avrassi una equazione alle derivate parziali del primo ordine, che non conterrà traccia apparente della $\phi(p)$ funzione della p; e sarà equivalente o corrispondente alla data

$$F\big(x, y, u, \phi(p)\big) = 0.$$

Se nella equazione tra le variabili x, y, u vi fossero

$\phi(p)$, $\psi(q)$ funzioni anco arbitrarie l'una della p e l'altra della q, e le p, q funzioni delle x, y, u fossero differenti l'una dall'altra; volendo una equazione alle derivate equivalente alla data o meglio conseguenza della data medesima e che non contenga le $\phi(p)$, $\psi(q)$ nè le loro derivate, bisognerà ricorrere alle equazioni derivate parziali esatte del primo, secondo, e terzo ordine. Se poi le funzioni p, q fossero identiche, basterà ricorrere a quelle del second'ordine.

Di fatto, la equazione

$$F\big(x, y, u, \phi(p), \psi(p)\big)=0;$$

e le sue derivate parziali prime esatte saranno

$$F'(x)+F'(u)u'+\big(F'(\phi)\phi'(p)+F'(\psi)\psi'(p)\big)\big(p'(x)+p'(u)u'\big)=0,$$

$$F'(y)+F'(u)u_{,}+\big(F'(\phi)\phi'(p)+F'(\psi)\psi'(p)\big)\big(p'(y)+p'(u)u_{,}\big)=0.$$

Combinando queste in modo da eliminare il binomio

$$F'(\phi)\phi'(p)+F'(\psi)\psi'(p),$$

e la risultante alla data talmente da eliminare l'una o l'altra delle $\phi(p)$, $\psi(p)$, si ottiene una equazione tra le $x, y, u, u', u_{,}$ ed una sola delle funzioni arbitrarie; e però, combinando queste alle sue due derivate parziali prime esatte, potrassi sempre eliminare la funzione rimasta ed anco la sua derivata rispetto alla p, ed ottenere una equazione tra le $x, y, u, u', u_{,}, u'', u'_{,}, u_{,,}$ equivalente o conseguenza della data, e che non contenga le funzioni $\phi(p)$, $\psi(p)$ nè derivate di esse.

56. Si abbia la equazione $F(x,y,z,u)=0$ tra le quattro variabili x, y, z, u; una di esse sarà funzione delle altre tre, e queste saranno indipendenti l'una dall'altra: terremo la u come funzione delle x, y, z.

Se nella $F(x, y, z, u)=0$ si ritiene la variabile u come funzione implicita, con essa avranno luogo le tre seguenti

$$F'(x)+F'(u)\left(\frac{du}{dx}\right)=0,\ F'(y)+F'(u)\left(\frac{du}{dy}\right)=0,$$
$$F'(z)+F'(u)\left(\frac{du}{dz}\right)=0,$$

che si chiamano equazioni sue *derivate prime parziali esatte*: avranno luogo anco le derivate parziali esatte di queste prese rispetto alle x, y, z, non che le derivate parziali delle successivamente risultanti; anzi insieme a queste equazioni sussisteranno tutte le risultanti da combinazioni fatte con esse.

Dalle tre equazioni trovate effettivamente, si hanno i valori delle derivate $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$, formati colle x, y, z, u; e dalle equazioni derivate parziali esatte degli ordini superiori potransi desumere gli analoghi valori delle $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)$, - - -.

57. Molte sono le combinazioni, che si possono fare della equazione $F(x, y, z, u)=0$ colle sue derivate parziali esatte; quelle però che occorrono spesse volte consistono nell' eliminare o costanti o funzioni esistenti nella $F(x, y, z, u)=0$, onde avere equazioni alle derivate parziali conseguenze di questa medesima.

Sebbene in queste ricerche non si incontrino difficoltà, non ostante, credo bene di indicare, come si possa trovare una equazione tra le

$$x, y, z, u, \left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{du}{dy}\right), \left(\frac{du}{dz}\right),$$

la quale sia conseguenza della data

$$F\big(x, y, z, u, \varphi(p, q)\big) = 0,$$

e non contenga la funzione $\varphi(p, q)$ nè le $\varphi'(p), \varphi'(q)$ sue derivate prese rispetto alle p, q quantità entrambe funzioni delle x, y, z, u.

Insieme alla equazione $F\big(x, y, z, u, \varphi(p, q)\big) = 0$ sussistono anco le tre

$$F'(x) + F'(u)\left(\frac{du}{dx}\right) + F'(\varphi)\varphi'(p)\left(p'(x) + p'(u)\left(\frac{du}{dx}\right)\right)$$
$$+ F'(\varphi)\varphi'(q)\left(q'(x) + q'(u)\left(\frac{du}{dx}\right)\right) = 0,$$

$$F'(y) + F'(u)\left(\frac{du}{dy}\right) + F'(\varphi)\varphi'(p)\left(p'(y) + p'(u)\left(\frac{du}{dy}\right)\right)$$
$$+ F'(\varphi)\varphi'(q)\left(q'(y) + q'(u)\left(\frac{du}{dy}\right)\right) = 0,$$

$$F'(z) + F'(u)\left(\frac{du}{dz}\right) + F'(\varphi)\varphi'(p)\left(p'(z) + p'(u)\left(\frac{du}{dz}\right)\right)$$
$$+ F'(\varphi)\varphi'(q)\left(q'(z) + q'(u)\left(\frac{du}{dz}\right)\right) = 0;$$

e però combinando queste alla data talmente da eliminare le tre quantità $\varphi(p, q)$, $\varphi'(p)$, $\varphi'(q)$, ciò che è sempre possibile, avrassi una equazione formata colle

$$x, y, z, u, \left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{du}{dy}\right), \left(\frac{du}{dz}\right),$$

la quale, non contenendo le φ, $\varphi'(p)$, $\varphi'(q)$, ed essendo una conseguenza della data, sarà la richiesta.

58. Credo questo il luogo di esporre alcune proprietà relative alle funzioni di più variabili.

Suppongasi $F(x+\omega, y+\theta, ---) = F + F_1 + F_2 +$ ecc., ove le F_1, F_2, --- esprimono ordinatamente le somme di quei termini dello sviluppo della $F(x+\omega, y+\theta, ---)$, nei quali ω, θ, --- hanno *una, due, tre,* --- dimensioni, analogamente al § 41. E nelle stesse quantità F_1, F_2, ---, che sono altrettante funzioni delle x, y, ---, pongansi $x+\omega, y+\theta$, --- rispettivamente in luogo delle x, y, ---; ed abbiansi

$$F_1(x+\omega, y+\theta, ---) = F_1 + F_{1,1} + \text{ecc.},$$
$$F_2(x+\omega, y+\theta, ---) = F_2 + F_{2,1} + \text{ecc.},$$
$$F_3(x+\omega, y+\theta, ---) = F_3 + F_{3,1} + \text{ecc.}$$
- -

dove le $F_{1,1}$, $F_{2,1}$, $F_{3,1}$, --- sono rispetto alle F_1, F_2, F_3, --- ciò che la F_1 è rispetto alla F.

Le quantità F_2, F_3, F_4, --- sono eguali anzi identiche ordinatamente alle seguenti $\frac{1}{2}F_{1,1}$, $\frac{1}{3}F_{2,1}$, $\frac{1}{4}F_{3,1}$, ---.

Sostituendo $x+i\omega$, $y+i\theta$, --- in vece delle x, y, --- esistenti nelle funzioni

$$F(x, y, ---), \; F_1(x, y, ---), \; F_2(x, y, ---), \; ---$$

e sviluppando le risultanti, si hanno evidentemente le equazioni

$$F(x+i\omega, y+i\theta, ---) = F + iF_1 + i^2F_2 + i^3F_3 + \text{ecc.},$$
$$F_1(x+i\omega, y+i\theta, ---) = F_1 + iF_{1,1} + \text{ecc.},$$
$$F_2(x+i\omega, y+i\theta, ---) = F_2 + iF_{2,1} + \text{ecc.},$$
- -;

dalla prima delle quali, cambiando in essa le x, y, --- ordinatamente nei binomj $x+i\omega\alpha$, $y+i\theta\alpha$, ---, si ha

$F(x+i\omega\alpha+i\omega, y+i\theta\alpha+i\theta, ---)$ *eguale* ad

$$F(x+i\alpha\omega, y+i\alpha\theta, ---) + iF_1(x+i\alpha\omega, y+i\alpha\theta, ---)$$
$$+ i^2F_2(x+i\alpha\omega, y+i\alpha\theta, ---) + \text{ecc.}$$

ossia, per le altre equazioni dianzi esposte, *eguale* ad

$$F+i\alpha F_1+i^2\alpha^2F_2+\text{ecc. } più\ i(F_1+i\alpha F_{1,1}+\text{ecc.})$$
$$più\ i^2(F_2+i\alpha F_{2,1}+\text{ecc.})\,più \text{ ecc.}$$

cioè hassi

$$F(x+i(1+\alpha)\omega,\ y+i(1+\alpha)\theta,---)=$$
$$F+iF_1+i^2F_2+\text{ecc.}+\alpha(iF_1+i^2F_{1,1}+i^3F_{2,1}+\text{ecc.})+\text{ecc.}$$

Nella stessa funzione $F(x, y, ---)$ si pongano $x+i(1+\alpha)\omega$, $y+i(1+\alpha)\theta$, $---$ ordinatamente in vece delle $x, y, ---$; e sviluppisi la risultante, ed anco ordinisi lo sviluppo secondo le potenze della α di esponenti crescenti; e si avrà

$$F(x+i(1+\alpha)\omega,\ y+i(1+\alpha)\theta,---)=$$
$$F+iF_1+i^2F_2+\text{ecc.}+\alpha(iF_1+i^2\cdot 2F_2+i^3\cdot 3F_3+\text{ecc.})+\text{ecc.}$$

Eguagliando tra loro i due sviluppi trovati della quantità $F(x+i(1+\alpha)\omega,\ y+i(1+\alpha)\theta,---)$, ed osservando, che sono eguali, qualunque sia l'α, si ha evidentemente l'equazione

$$iF_1+i^2F_{1,1}+i^3F_{2,1}+i^4F_{3,1}+\text{ecc.}=$$
$$iF_1+i^2\cdot 2F_2+i^3\cdot 3F_3+i^4\cdot 4F_4+\text{ecc.}$$

la quale, sussistendo qualunque sia la i, dà le seguenti

$$2F_2=F_{1,1},\ 3F_3=F_{2,1},\ 4F_4=F_{3,1},\ ---;$$

e però le quantità F_2, F_3, F_4, $---$ saranno eguali anzi identiche ordinatamente alle $\frac{1}{2}F_{1,1}$, $\frac{1}{3}F_{2,1}$, $\frac{1}{4}F_{3,1}$, $---$: appunto come si dichiarato.

59. Nella equazione

$$F(x+\omega, y+\theta, ---)=F+F_1+F_2+F_3+\text{ecc.}$$

si pongano i prodotti $s\omega$, $s\theta$, $---$ in luogo degli $\omega, \theta, ---$, ove l's esprime una nuova variabile; e si avrà la

$$F(x+s\omega, y+s\theta, ---) = F+sF_1+s^2F_2+s^3F_3+\text{ecc.}$$

la quale, sussistendo qualunque sia la s, dà le (§ 34)

$$\left(\frac{dF(x+s\omega, y+s\theta, ---)}{ds}\right) = F_1+2sF_2+3s^2F_3+\text{ecc.}$$

$$\left(\frac{d^2F(x+s\omega, y+s\theta, ---)}{ds^2}\right) = 2F_2+2\cdot 3sF_3+\text{ecc.}$$

- -

Queste equazioni, col fare in esse $s=0$, somministrano le quantità F_1, F_2, F_3, --- eguali ordinatamente ai valori, corrispondenti alla $s=0$, delle seguenti

$$\left(\frac{dF(x+s\omega, ---)}{ds}\right), \ \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F(x+s\omega, ---)}{ds^2}\right),$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3F(x+s\omega, ---)}{ds^3}\right), ---;$$

ed in generale la F_n, somma di quei termini dello sviluppo della funzione $F(x+\omega, y+\theta, ---)$ in ciascun dei quali la dimensione degli aumenti ω, θ, --- è n, sarà eguale al valore, corrispondente alla $s=0$, della

$$\frac{1}{2\cdot 3 --- n}\left(\frac{d^nF(x+s\omega, y+s\theta, ---)}{ds^n}\right).$$

A proposito di queste relazioni si può anco osservare, che le derivate prime, prese rispetto alla s, delle funzioni

$$F(x+s\omega, y+s\theta, ---), F_1(x+s\omega, y+s\theta, ---), F_2(x+s\omega, y+s\theta, ---), ---$$

sono ordinatamente i risultamenti, che hansi, ponendo nelle quantità F_1, $\frac{1}{2}F_2$, $\frac{1}{2\cdot 3}F_3$, --- in luogo delle x, y, --- i binomj $x+s\omega$, $y+s\theta$, ---.

60. La $F(x, y, z, ---)$ sia funzione *omogenea* delle $x, y, z, ---$ e della dimensione n: la equazione

$$F(xt, yt, zt, ---) = t^n F(x, y, z, ---)$$

sarà identica; e però (§ 34) tale sarà pure la

$$xF'(xt) + yF'(yt) + zF'(zt) + \text{ecc.} = nt^{n-1}F(x, y, z, ---)$$

sua derivata rispetto alla t.

In questa equazione si faccia $t = 1$, ed osservisi che le $F'(xt)$, $F'(yt)$, $F'(zt)$, $---$ si riducono alle $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$, $---$ derivate della $F(x, y, z, ---)$; e si avrà la equazione identica

$$xF'(x) + yF'(y) + zF'(z) + \text{ecc.} = nF(x, y, z, ---).$$

Ma $xF'(x) + yF'(y) + zF'(z) + \text{ecc.}$ è ciò che si ha cambiando nella $x'F'(x) + y'F'(y) + z'F'(z) + \text{ecc.}$ le $x', y', z', ---$ ordinatamente in $x, y, z, ---$; adunque, se nella derivata della $F(x, y, z, ---)$ presa rispetto ad una variabile contenuta nelle $x, y, z, ---$, si cambiano le derivate delle variabili $x, y, z, ---$ rispettivamente nelle variabili stesse, si ha un risultamento identico al prodotto della funzione medesima $F(x, y, z, ---)$ pel numero indicante la sua dimensione; utile e singolare proprietà.

61. Accade talvolta, che si ha una funzione od una equazione contenente due o più quantità, le quali sono o si debbono considerare funzioni di una medesima variabile, ed occorrono le derivate della funzione prese rispetto a questa variabile stessa contemplata in tutte le anzidette quantità componenti la funzione o l'equazione: tali derivate si chiameranno *derivate totali*.

Così, il trimonio $\varphi'(x)x' + \varphi'(y)y' + \varphi'(z)z'$ è la derivata prima totale della funzione $\phi(x, y, z)$ presa rispetto ad una variabile della quale sono funzioni anco arbitrarie le x, y, z: e la

$$x'F'(x)+y'F'(y)+z'F'(z)=0$$

è l'equazione derivata prima esatta *totale* della $F(x,y,z)=0$ presa rispetto ad una variabile di cui le x, y, z sono funzioni aventi la relazione rappresentata colla medesima $F(x, y, z)=0$.

Non parlo di queste derivate, perchè nessuna difficoltà presentano, siccome si vedrà occorrendo.

LEZIONE V.

Delle trasformazioni delle derivate ordinarie.

62. La u rappresenti una funzione della x, e la x una funzione della t altra variabile; e nella u vi sia solamente quella t, che vi è nella x contenuta nella u stessa.

Se nella u si cambiasse la x in $x+\omega$, e si trovasse lo sviluppo della quantità risultante, nel coefficiente della prima potenza della ω avrebbesi la derivata della u rispetto alla x, nel *doppio* del coefficiente della ω^2 avrebbesi la derivata seconda d'u rispetto alla x medesima, ecc. Se in vece nella u si cambiasse la t in $t+\theta$, e della quantità risultante si trovasse lo sviluppo ordinato secondo le potenze della θ d'esponenti crescenti, nel coefficiente di θ avrebbesi la derivata prima della u presa rispetto alla t, nel *doppio* di quello di θ^2 avrebbesi la derivata seconda della u presa rispetto alla t stessa, ecc. Fra queste derivate della u prese rispetto alla t, e le antecedenti derivate della u stessa prese rispetto alla x, vi sono alcune relazioni sommamente interessanti: la esposizione e le dimostrazioni di queste relazioni formano lo scopo principale della presente lezione.

Egli è evidente, che le derivate della u prese rispetto alla x, essendo altrettante funzioni della x, saranno anco funzioni della t.

Per semplicità, le derivate della u rispetto alla x si indicheranno qui coi simboli $u'(x), u''(x), u'''(x), ---$ e quelle della u e della x stessa prese rispetto alla t coi seguenti

$$u', u'', u''', --- x', x'', x''', ---;$$

anzi, per un momento le $u'(x), u''(x), u'''(x), ---$ si denomineranno ordinatamente $p, q, r, ---$.

Le quantità $u, p, q, r, ---$ essendo tutte funzioni della x, e la x una funzione della t, esse saranno altrettante funzioni composte della t; e però la derivata prima rispetto alla t di ciascuna di esse sarà (§ 20) il prodotto della sua derivata rispetto alla x funzione componente per quella della x rispetto alla t; cioè si avranno le equazioni

$$u'=u'(x)x', p'=p'(x)x', q'=q'(x)x', r'=r'(x)x', --- \text{ ossia}$$
$$u'=px', \quad p'=qx', \quad q'=rx', \quad r'=sx', \quad ---,$$

le quali danno le

$$p=\frac{u'}{x'}, q=\frac{p'}{x'}, r=\frac{q'}{x'}, s=\frac{r'}{x'}, ---,$$

ovvero

$$p=\frac{1}{x'}u', \; q=\frac{1}{x'}\left(\frac{u'}{x'}\right)', \; r=\frac{1}{x'}\left(\frac{1}{x'}\left(\frac{u'}{x'}\right)'\right)',$$

$$s=\frac{1}{x'}\left(\frac{1}{x'}\left(\frac{1}{x'}\left(\frac{u'}{x'}\right)'\right)'\right)', ---:$$

gli apici, qui posti sulle parentesi, significano le derivate rispetto alla t delle quantità scritte fra le parentesi stesse.

Ora si rimettano in luogo delle p, q, r, --- le derivate $u'(x), u''(x), u'''(x)$, --- con esse rappresentate; e si avranno le equazioni

$$u'(x)=\frac{u'}{x'},$$

$$u''(x)=\frac{1}{x'}\left(\frac{u'}{x'}\right)',$$

$$u'''(x)=\frac{1}{x'}\left(\frac{1}{x'}\left(\frac{u'}{x'}\right)'\right)',$$

$$u^{IV}(x)=\frac{1}{x'}\left(\frac{1}{x'}\left(\frac{1}{x'}\left(\frac{u'}{x'}\right)'\right)'\right)',$$

-------------------.

Ecco le relazioni che hanno luogo tra le derivate della u rispetto alla x e le derivate della u stessa rispetto alla t.

63. Dal § 19 si ha $\left(\frac{u'}{x'}\right)'=\frac{x'u''-u'x''}{x'^2}$; e però sarà $u''(x)=\frac{x'u''-u'x''}{x'^3}$. Sostituendo questo valore della $u''(x)$ ossia di $\frac{1}{x'}\left(\frac{u'}{x'}\right)'$ nell'esposto valore della $u'''(x)$, si ha

$$u'''(x)=\frac{1}{x'}\left(\frac{x'u''-u'x''}{x'^3}\right)';$$

e questo pel medesimo paragrafo citato, è eguale ad

$$\frac{1}{x'}\left(\frac{x'^3(x'u''-u'x'')'-(x'u''-u'x'')(x'^3)'}{x'^6}\right).$$

Ma d'altronde hassi

$$(x'u''-u'x'')'=x'u'''-x'''u',$$

e $(u''x'-u'x'')(x'^3)'=(3x'u''x''-3u'x''^2)x'^2$;

adunque, fatte alcune riduzioni, si avrà

$$u'''(x)=\frac{u'''}{x'^3}-3\frac{u''x''}{x'^4}-\left(x'''-3\frac{x''^2}{x'}\right)\frac{u'}{x'^4}.$$

Altrettanto si potrà fare per isviluppare i valori esposti delle $u^{IV}(x)$, - - -.

Se in una data espressione od equazione formata colle

$$x, u, u'(x), u''(x), u'''(x), ---$$

si sostituiranno i qui esposti valori delle

$$u'(x), u''(x), u'''(x), ---,$$

si otterrà una espressione od equazione affatto equivalente alla data, e formata colle

$$x, u, u', x', u'', x'', u''', x''', ---$$

ove le derivate saranno tutte prese per rispetto alla t.

64. Quando la variabile t, rispetto alla quale sono prese le derivate contenute nella espressione od equazione risultante dalle sostituzioni indicate nel paragrafo antecedente, sia qualunque, cioè quando la x e però anco la u siansi puramente supposte o considerate funzioni della t, si dice che nella espressione od equazione risultante le derivate in essa contenute o comparse sono generalizzate.

Si debbano, per esempio, generalizzare le derivate nella equazione

$$s'(x)^2=1+y'(x)^2, \text{ e nella espressione } \frac{s'(x)^3}{y''(x)}.$$

Considerisi la x funzione della t variabile qualunque, e perciò che abbiamo detto sopra rispetto alla u, si avranno

$$y'(x)=\frac{y'}{x'},\; y''(x)=\frac{x'y''-y'x''}{x'^3},\; s'(x)=\frac{s'}{x'}$$

Sostituiscansi questi valori delle $y'(x)$, $y''(x)$, $s'(x)$ nella equazione ed espressione date, ed avransi

$$\frac{s'^2}{x'^2}=1+\frac{y'^2}{x'^2},\quad \frac{s'^3}{x'^3}:\frac{x'y''-y'x''}{x'^3},$$

ovvero le seguenti

$$s'^2=x'^2+y'^2,\quad \frac{s'^3}{x'y''-y'x''}.$$

Molte volte per indicare che, le derivate contenute in una espressione od equazione, sono prese rispetto alla t, si dirà, che saranno prese nella ipotesi di $t'=1$; giacchè la derivata di t rispetto alla t stessa è l'*unità*. Anzi si può riflettere, che dall'essere $t'=1$, si hanno anco le equazioni $t''=0$, $t'''=0$, --- cioè *nulle* le derivate della t degli ordini superiori.

65. Nel § antecedente, ove si dice, che la x è puramente supposta una funzione della t, si deve sottintendere, che le formule là esposte valgono qualunque sia la relazione tra la x e la t: ora vediamo, come si modificano quelle formule, valori delle $u'(x)$, $u''(x)$, ---, quando tra la la x e la t vi sia una individuata e data relazione, cioè vediamo, come si possa in esse formule introdurre la condizione, che la t non sia più una variabile qualunque, ma bensì quella avente colla sola x, o colla sola u, ovvero con entrambe le x, u una relazione espressa con una equazione data.

In primo luogo, la t debba avere colla sola x la relazione espressa colla equazione $f(x,t)=0$ data.

Si sciolga quest' equazione rispetto alla x, ed abbiasi $x=\varphi(t)$; si pongano nelle espressioni delle $u'(x)$, $u''(x)$, $u'''(x)$, --- in vece delle x', x'', x''', --- le derivate prima, seconda, terza, --- della funzione $\varphi(t)$, e si avranno le espressioni delle derivate della u

rispetto alla x formate colla t e colle derivate della u medesima rispetto a quella t, che ha colla x la data relazione $f(x, t) = 0$.

Sia $f(x, t) = x - \frac{1}{2} t^2$, cioè abbiasi la relazione $x - \frac{1}{2} t^2 = 0$; e si avrà $x = \frac{1}{2} t^2$, e però $x' = t, x'' = 1, x''' = 0, ---$, e quindi

$$u'(x) = \frac{u'}{t}, \; u''(x) = \frac{tu'' - u'}{t^3}, ---,$$

che sono le derivate della u prese rispetto alla x, formate colla t ossia $\sqrt{2x}$, e colle derivate della u prese rispetto alla stessa $\sqrt{2x}$.

In secondo luogo, la t debba esser quella nuova variabile, che ha colla u la relazione $f(u, t) = 0$.

L'equazione, qui data, sciolta rispetto alla u somministri $u = \psi(t)$, e sarà $u' = \psi'(t)$, $u'' = \psi''(t), ---$. Questi valori delle $u', u'', ---$ sostituiti nelle stesse espressioni esposte delle $u'(x), u''(x), ---$ le ridurranno formate colla t e colle derivate della u stessa prese rispetto a quella t particolare, che ha colla u la data relazione $f(u, t) = 0$.

In terzo luogo, la t sia quella variabile, che ha colle x, u la relazione rappresentata colla equazione $f(x, u, t) = 0$.

Da questa equazione si abbia $x = \xi(u, t)$: si formino della $\xi(u, t)$ le derivate rispetto alla t, la quale vi è nel modo visibile ed anco nella u, e risulteranno altrettante funzioni delle

$$u, t, u'; \; u, t, u', u''; ---.$$

Si pongano questi valori delle derivate $x', x'', ---$ nelle medesime sopra esposte espressioni delle

$$u'(x), u''(x), ---;$$

e si avranno i valori delle derivate della u prese rispetto alla x formati colle t, u e le derivate della u prese rispetto a quella t, che ha colle x, u la proprietà rappresentata colla equazione qui data.

Se dalla medesima equazione $f(x, u, t) = o$, in vece di cavare la x, si cavasse la u, e si avesse $u = \lambda(x, t)$: sostituendo nelle stesse anzidette espressioni delle $u'(x)$, $u''(x)$, --- in luogo delle u', u'', --- le derivate prima, seconda, --- della $\lambda(x, t)$ rispetto alla t, che vi è nel modo visibile ed anco nella x, si avrebbero le derivate $u'(x), u''(x)$, --- formate colla t e colle derivate della x prese rispetto alla t presente.

66. Sebbene il caso di $\psi(t) = t$, cioè che la variabile t, rispetto alla quale debbono esser prese le nuove derivate, sia la stessa u, è contenuto come caso particolare nel secondo dei già contemplati, non ostante, io credo bene di trattenermi alquanto su di esso, perchè occorre molte volte.

Essendo $u = t$, si ha $u' = 1$, $u'' = o$, $u''' = o$, ---, e conseguentemente

$$u'(x) = \frac{1}{x'},\ u''(x) = \frac{1}{x'}\left(\frac{1}{x'}\right)',\ u'''(x) = \frac{1}{x'}\left(\frac{1}{x'}\left(\frac{1}{x'}\right)'\right)',\ ---$$

e però gli sviluppi dei valori delle derivate $u'(x), u''(x)$, $u'''(x)$, --- formati colle derivate della x rispetto alla u, saranno

$$\frac{1}{x'},\ -\frac{x''}{x'^3},\ \frac{3x''^2}{x'^5} - \frac{x'''}{x'^4},\ ---.$$

Mediante queste ultime espressioni facilmente si possono trovare le derivate di alcune funzioni, quando già si conoscano quelle delle loro reciproche. Per esempio, si possono trovare le derivate delle funzioni

Ang. sen. x, Ang. tang. x, ---

supposto, che si conoscano quelle delle sen. x, tang. x, ---.

Di fatto, sia $y = \text{sen}.\,x$, e però $y'(x) = \cos.\,x$: pongasi in quest'ultima equazione in vece della $y'(x)$ la quantità equivalente $\frac{1}{x'(y)}$, e si avrà

$\frac{1}{x'(y)} = \cos.\,x$, ossia $x'(y) = \frac{1}{\cos.\,x}$, cioè $x'(y) = \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}}$.
Vale a dire, la derivata dell'angolo x rispetto alla y, suo *seno*, eguale alla *unità*, divisa per la radice quadrata della *unità* diminuita del quadrato del seno stesso, come si è trovato al § 21.

Così, posto $y = \text{tang}.\,x$, si sa che $y'(x) = \frac{1}{\cos.^2 x}$; e però sarà $\frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos.^2 x}$ ossia $x'(y) = \cos.^2 x$, come al § 21 medesimo.

67. Siccome nei valori (§ 62) delle derivate $u'(x)$, $u''(x)$, --- non vi sono che le derivate delle u, x prese rispetto alla t; così all'uopo si potranno avere le espressioni equivalenti ad essi, le quali siano formate colle sole derivate della x o della u, prese rispetto alla t, anco che si conosca solamente una equazione tra le *sole* derivate delle u, x, t.

Per esempio, se si avesse la equazione $u'^2 + x'^2 = t'^2$, ove le derivate u', x', t' sono prese rispetto a qualunque variabile, si avrebbe $u'^2 + x'^2 = 1$, supposto le derivate prese rispetto alla t; e però sarebbe

$$x' = \sqrt{(1 - u'^2)},$$

e quindi

$$x'' = -\frac{u'u''}{\sqrt{(1-u'^2)}},\ x''' = -\frac{u''^2 + u'u'''}{\sqrt{(1-u'^2)}} - \frac{u'^2 u''^2}{\sqrt{(1-u'^2)^3}}, \text{---}.$$

Sostituendo questi valori delle x', x'', x''', ---

nelle derivate $u'(x)$, $u''(x)$, --- si avrebbero queste formate colle u', u'', u''', --- derivate della u prese rispetto alla t, la quale ha colle x, u la relazione rappresentata colla semplice equazione $x'^2 + u'^2 = 1$, che è tra le sole derivate delle variabili stesse.

68. In ultimo, vediamo come trovare la espressione od equazione equivalente ad una formata colle x, u e le derivate della u rispetto alla x, la quale debba contenere due altre variabili y, z, essendo date due equazioni tra queste e le stesse x, u.

Sciolte queste due equazioni date rispetto alle x, u, abbiasi

$$x = f(y, z), \text{ ed } u = \phi(y, z).$$

Si considerino le x, y, u, z tutte funzioni della t: si ponga nella data espressione od equazione in luogo delle $u'(x)$, $u''(x)$, --- i loro valori formati colle x', x'', --- u', u'', ---; indi pongansi in queste in luogo delle x', u' le $f'(y)y' + f'(z)z'$, $\phi'(y)y' + \phi'(z)z'$; in luogo delle x'', u'' le derivate seconde delle stesse $f(y, z)$, $\phi(y, z)$, e delle x, u le $f(y, z)$, $\phi(y, z)$ medesime; e si otterrà la espressione o l'equazione formata colle y, z, y', z', y'', z'', ---; come si è richiesto.

LEZIONE VI.

Delle trasformazioni delle derivate parziali.

69. Se le x, y contenute in una funzione, che chiameremo u, fossero entrambe funzioni di ambedue le s, t variabili indipendenti l'una dall'altra, la u stessa sarebbe funzione anco delle s, t; e però essa avrebbe le derivate parziali rispetto alle x, y e quelle rispetto alle

s, t. Queste derivate parziali hanno alcune relazioni, che sono utili in varie occasioni: le principali di esse, sono quelle, che si espongono in questa lezione.

Le derivate della u prese rispetto alle x, y si indicheranno coi simboli

$$\left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{du}{dy}\right), \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right), ---$$

e le analoghe rispetto alle s, t cogli $u', u_{\prime}, u'', u_{\prime}', ---$; così, le derivate delle x, y prese rispetto alla s si indicheranno coi simboli $x', y', x'', y'', ---$ quelle rispetto alla t cogli $x_{\prime}, y_{\prime}, x_{\prime\prime}, y_{\prime\prime}, ---$ e quelle in parte rispetto alla s ed in parte rispetto alla t con gli $x_{\prime}', y_{\prime}', x_{\prime}'', ---$.

Essendo la u funzione delle x, y, e queste delle s, t, si avranno (§ 23) le equazioni

$$u' = \left(\frac{du}{dx}\right)x' + \left(\frac{du}{dy}\right)y',$$

$$u_{\prime} = \left(\frac{du}{dx}\right)x_{\prime} + \left(\frac{du}{dy}\right)y_{\prime},$$

$$u'' = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)x'^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)x'y' + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)y'^2 + \left(\frac{du}{dx}\right)x'' + \left(\frac{du}{dy}\right)y'',$$

$$u_{\prime}' = \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)x'y_{\prime} + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)x'x_{\prime} + \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)y'x_{\prime} + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)y'y_{\prime} + \left(\frac{du}{dx}\right)x_{\prime}' + \left(\frac{du}{dy}\right)y_{\prime}',$$

$$u_{\prime\prime} = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)x_{\prime}^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)x_{\prime}y_{\prime} + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)y_{\prime}^2 + \left(\frac{du}{dx}\right)x_{\prime\prime} + \left(\frac{du}{dy}\right)y_{\prime\prime},$$

-------------------------.

Da queste equazioni si vede, come si potrà trasformare una espressione contenente le x, y, u e le derivate della u prese rispetto alle s, t nella equivalente formata colle stesse x, y, u e le derivate delle x, y, prese rispetto alle s, t e quelle della u parziali rispetto alle x, y; giacchè basterà porre in essa per le $u', u_{,}, u'', u_{,}', u_{,,}$, --- i loro valori, che sono immediatamente dati per le equazioni qui sopra trovate; ed anco, si vede, come si potrà trasformare una espressione contenente le derivate parziali della u prese rispetto alle x, y in un'altra equivalente ove vi siano le derivate prese rispetto alle s, t, bastando per ciò sostituire in luogo delle $\left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{du}{dy}\right)$ i loro valori

$$\frac{u'y_{,}-y'u_{,}}{x'y_{,}-y'x_{,}}, \quad \frac{x'u_{,}-u'x_{,}}{x'y_{,}-y'x_{,}},$$

desunti dalle prime due delle medesime qui esposte equazioni; in luogo delle $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right), \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$ i loro valori cavati delle tre seguenti, dopo aver posto in queste in vece delle $\left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{du}{dy}\right)$ gli stessi loro valori cavati dalle prime due; e così discorrendo.

70. Per dare un esempio. La variabile s debba essere la stessa funzione u, e la t sia la y. In questo caso, evidentemente avransi le equazioni

$$y'=0,\ y''=0,\ ---y_{,}'=0,\ u_{,}=0,\ u_{,,}=0,\ ---u_{,}'=0,$$

$$---u'=1,\ u''=0,\ ---y_{,}=1,\ y_{,,}=0,\ ---$$

per cui le sopra esposte si ridurranno alle seguenti

$$1=\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{du}\right),$$

$$0=\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right);$$

$$0=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{du^2}\right),$$

$$0=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dudy}\right),$$

$$0=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right);$$

- -

le quali danno

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=1:\left(\frac{dx}{du}\right),\ \left(\frac{du}{dy}\right)=-\left(\frac{dx}{dy}\right):\left(\frac{dx}{du}\right),$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=-\left(\frac{d^2x}{du^2}\right):\left(\frac{dx}{du}\right)^3,$$

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)=\left\{\left(\frac{d^2x}{du^2}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)-\left(\frac{d^2x}{dudy}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)^2\right\}:\left(\frac{dx}{du}\right)^4,$$

- ;

cioè le derivate prime e seconde parziali della u prese rispetto alle x, y formate colle derivate parziali della x prese rispetto alle y, u. Dimodochè, una espressione formata colle $x, y, u, \left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{du}{dy}\right), \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)$, --- si trasformerà nella sua equivalente, ove le derivate saranno prese rispetto alle u, y, sostituendo in essa per le derivate $\left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{du}{dy}\right), \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)$, --- i loro valori qui sopra trovati.

PARTE TERZA

PRIMITIVE DELLE FUNZIONI.

LEZIONE PRIMA

Delle proposizioni fondamentali relative alle primitive; e delle primitive delle funzioni più semplici.

71. Una funzione di una sola variabile si chiama *primitiva* od *integrale* di un'altra, quando la sua derivata sia quest'altra medesima.

Risulta dai paragrafi 33, 34 che le primitive di una stessa funzione sono infinite di numero, ed anco, che la differenza tra due di esse è una costante; dimodochè, se ad una primitiva di una data funzione si aggiungerà una costante, la somma sarà un'altra primitiva della stessa funzione data.

Le primitive di una data funzione, che sono formate colle stesse quantità, colle quali è formata la medesima funzione data, si chiamano *primitive particolari* di essa. Aggiungendo una costante arbitraria ad una qualunque primitiva particolare di una funzione, si ha quella sua primitiva, la quale chiamasi *primitiva completa* od *integrale completo* della stessa funzione.

Per indicare una primitiva di una funzione si scriverà innanzi ad essa il segno $\int$; e si distinguerà, se essa sarà una primitiva particolare ovvero la completa con apposita dichiarazione: anzi, quando la primitiva indicata sarà la completa, questa dichiarazione generalmente si ommetterà.

Si può intanto osservare che le due equazioni

$$P(x)=Q'(x),\ \int P(x)=Q(x)$$

significano la stessa relazione delle funzioni $P(x)$, $Q(x)$, sebbene l'una sia in certa guisa reciproca dell'altra, come la $\sqrt{a}=b$ lo è paragonata alla $a=b^2$.

72. Ciò premesso, troviamo la primitiva completa della funzione x^m.

La primitiva richiesta chiamisi $\phi(x)$, cioè pongasi $\int x^m=\phi(x)$; e si avrà

$$\phi'(x)=x^m,\ \phi''(x)=mx^{m-1},\ \phi'''(x)=m(m-1)x^{m-2},\ \ldots.$$

Ma in generale

$$\phi(x+\omega)=\phi(x)+\omega\phi'(x)+\frac{\omega^2}{2}\phi''(x)+\frac{\omega^3}{2\cdot3}\phi'''(x)+\text{ecc.};$$

adunque per la $\phi(x)$ presente sarà

$$\phi(x+\omega)=\phi(x)+\omega x^m+\frac{\omega^2}{2}mx^{m-1}+\frac{\omega^3}{2\cdot3}m(m-1)x^{m-2}+\text{ecc.},$$

ossia

$$\phi(x+\omega)=\phi(x)$$

$$+\frac{1}{m+1}\left((m+1)x^m\omega+\frac{(m+1)m}{2}x^{m-1}\omega^2+\frac{(m+1)m(m-1)}{2\cdot3}x^{m-2}\omega^3+\text{ecc}\right)$$

ovvero, per l'esposto al § 8

$$\phi(x+\omega)=\phi(x)+\frac{1}{m+1}\left((x+\omega)^{m+1}-x^{m+1}\right),\ \text{cioè}$$

$$\phi(x+\omega)-\frac{(x+\omega)^{m+1}}{m+1}=\phi(x)-\frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Quest'ultima equazione insegna, che, la $\phi(x)$ cercata è tale funzione, che la differenza $\phi(x)-\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ non varia, variando la x; e conseguentemente sarà

$$\phi(x)-\frac{x^{m+1}}{m+1}=K,$$

K costante rispetto alla x; cioè avrassi

$$\phi(x) \text{ ossia } \int x^m=\frac{x^{m+1}}{m+1}+K.$$

73. Quando sia $m=-1$, la primitiva completa, qui trovata, si presenta sotto la forma $\frac{1}{0}+K$, cioè difettosa, come si suol dire comunemente: troviamo pertanto altrimenti la primitiva completa $\int x^{-1}$ ossia $\int \frac{1}{x}$.

Ritenuto $\int \frac{1}{x}=\phi(x)$, si hanno

$$\phi'(x)=\frac{1}{x},\ \phi''(x)=-\frac{1}{x^2},\ \phi'''(x)=\frac{2}{x^3},\ ---$$

e però

$$\phi(x+\omega)=\phi(x)+\frac{\omega}{x}-\frac{\omega^2}{2x^2}+\frac{\omega^3}{3x^3}-\text{ecc.}$$

Ma dal § 10 risulta

$$\frac{\omega}{x}-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{\omega^3}{x^3}-\text{ecc.}=\log.\left(1+\frac{\omega}{x}\right)$$

ossia a $\log.(x+\omega)-\log.x$; adunque avrassi

$$\phi(x+\omega)=\phi(x)+\log.(x+\omega)-\log.x, \text{ ovvero}$$

$$\phi(x+\omega)-\log.(x+\omega)=\phi(x)-\log.x;$$

e per conseguenza sarà $\phi(x)-\log.x=K$, cioè $\phi(x)$ ossia $\int\frac{1}{x}=\log.x+K$, ove la K esprime una costante arbitraria.

74. In terzo luogo, vogliasi la primitiva completa $\int\cos.x$.

Posto $\int \cos. x = \varphi(x)$, si hanno

$\varphi'(x) = \cos. x$, $\varphi''(x) = -\operatorname{sen}. x$, $\varphi'''(x) = -\cos. x$, ---;

e però, pel $\varphi(x)$ qui richiesto, si avrà

$$\varphi(x+\omega) = \varphi(x) + \omega \cos. x$$
$$-\frac{\omega^2}{2}\operatorname{sen}. x - \frac{\omega^3}{2\cdot 3}\cos. x + \frac{\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4}\operatorname{sen}. x + \frac{\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cos. x - \text{ecc.}$$

ossia

$$\varphi(x+\omega) = \varphi(x)$$
$$+\left(\omega - \frac{\omega^3}{2\cdot 3} + \frac{\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{ecc.}\right)\cos. x + \left(-\frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \text{ecc.}\right)\operatorname{sen}. x.$$

Ma dal § 14 risultano

$$\omega - \frac{\omega^3}{2\cdot 3} + \frac{\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{ecc.} = \operatorname{sen}. \omega,\quad -\frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \text{ecc.} = \cos. \omega - 1;$$

adunque sarà

$\varphi(x+\omega) = \varphi(x) + \operatorname{sen}. \omega \cos. x + \cos. \omega \operatorname{sen}. x - \operatorname{sen}. x$, ovvero

$\varphi(x+\omega) - \operatorname{sen}. (x+\omega) = \varphi(x) - \operatorname{sen}. x$, e conseguentemente

$\varphi(x) - \operatorname{sen}. x = K$, cioè $\int \cos. x = \operatorname{sen}. x + K$.

Similmente dimostrasi, che le primitive complete $\int a^x$, $\int \operatorname{sen}. x$ sono $\frac{a^x}{\log. a} + K$, $-\cos. x + K$.

Osservando le relazioni, che vi sono tra le primitive delle funzioni x^m, $\frac{1}{x}$, a^x, $\operatorname{sen}. x$, $\cos. x$ rispettivamente colle funzioni medesime, si possono stabilire regole algoritmiche, onde passare dalle funzioni stesse immediatamente alle loro primitive.

75. Prima di trovare le primitive di altre funzioni, premetteremo alcune proprietà di un grande uso in queste ricerche ed in altre.

La primitiva della somma di due o più funzioni è eguale alla somma delle primitive di esse.

Abbiasi $f(x) = p(x) + q(x) +$ ecc.; e sia

$$\int f(x) = F(x),\ \int p(x) = P(x),\ \int q(x) = Q(x),\ ---;$$

dovrà essere $F(x) = P(x) + Q(x) +$ ecc.

Questa proprietà si può dimostrare, mediante una regola analoga a quella usata nel § 72 per ciò, che è là occorso; ma essa si può concepire anco in quest'altra maniera.

Essendo $F' = f$, $P' = p$, $Q' = q$, --- ed $f = p + q +$ecc., si ha

$$F' = P' + Q' + \text{ecc. ossia } F' = (P + Q + \text{ecc.})',$$

cioè le funzioni F, $P + Q +$ ecc. hanno le derivate eguali, e però non possono differire che di una costante. Quindi, trovata la somma di primitive particolari di più funzioni, ed aggiungendo ad essa una costante arbitraria, avrassi la primitiva completa della somma delle funzioni medesime.

La primitiva del prodotto di una costante per una funzione è eguale al prodotto della costante per la primitiva della funzione.

La A esprima una costante qualunque: sarà

$$\int Af(x) = A\int f(x).$$

Di fatto, $\int Af(x)$ ha per derivata $Af(x)$, ed $A\int f(x)$ pel § 5 ha anch'essa per derivata $Af(x)$; adunque le primitive $\int Af(x)$, $A\int f(x)$, se non saranno identiche, non differiranno che di una costante.

76. Se la derivata di una quantità Q presa rispetto ad una variabile t fosse la P, cioè se tra le quantità

P, Q vi fosse la equazione identica

$$Q'(t)=P(t),$$

la Q sarebbe evidentemente primitiva della P, la variabile però essendo la t. Per indicare questa proprietà, cioè che la Q è primitiva della P, quando la variabile sia t anzichè x od altra, scriverassi

$$Q=\int P\,dt;$$

dimodochè, la scrittura $\int P\,dt$ significherà quella funzione, la cui derivata presa rispetto alla t sarà P, e si dirà *primitiva* della P presa rispetto alla t. Una scrittura analoga si userà per rappresentare la primitiva di qualsivoglia altra quantità, qualunque sia la variabile principale cioè quella rispetto alla quale si debba essa prendere.

77. Se nella $F(x)$ funzione qualunque della x si porrà in vece della x il suo valore cavato da una equazione $f(x, t)=0$, ove la t esprime una nuova variabile, e la risultante funzione in t moltiplicherassi per la derivata rispetto alla t del medesimo valore della x; indi si troverà del prodotto la primitiva rispetto alla t, e nella risultante funzione di t porrassi per t il suo valore cavato dalla equazione $f(x, t)=0$, si avrà una funzione della x, che sarà una primitiva della $F(x)$.

Sciolta la equazione $f(x, t)=0$ rispetto alla x dia $x=\phi(t)$; e sciolta rispetto alla t dia $t=\psi(x)$.

Ponendo nella $F(x)$ in luogo della x la $\phi(t)$, si ha $F(\phi(t))$; e moltiplicando questa per $\phi'(t)$, risulta $F(\phi(t))\phi'(t)$: suppongasi

$$\int F\big(\phi(t)\big)\phi'(t)dt=\Delta(t),\ \text{ossia}\ \Delta'(t)=F\big(\phi(t)\big)\phi'(t).$$

Se nella $\Delta(t)$ si pone per t la $\psi(x)$, si ottiene

$\Delta\big(\psi(x)\big)$; e questa funzione della x è una primitiva della $F(x)$.

Imperciocchè, la derivata rispetto alla x della $\Delta\big(\psi(x)\big)$ è $\Delta'(\psi)\psi'(x)$; e la $\Delta'(\psi)$ è formata colla ψ, come la $\Delta'(t)$ ossia $F\big(\phi(t)\big)\phi'(t)$ lo è colla t; per cui la funzione $\Delta'(\psi)\psi'(x)$ è la stessa

$$F\big(\phi(\psi)\big)\phi'(\psi)\psi'(x).$$

Ma per essere le due equazioni $x=\phi(t)$, $t=\psi(x)$ *affatto* equivalenti, la $x=\phi\big(\psi(x)\big)$ è identica, e con essa (§ 34) anco la sua derivata rispetto alla x, che è $1=\phi'(\psi)\psi'(x)$; adunque la derivata della $\Delta\big(\psi(x)\big)$ si ridurrà alla semplice funzione $F(x)$; e conseguentemente la $\Delta\big(\psi(x)\big)$ sarà, come si è dichiarato, una primitiva della $F(x)$.

Da questa proposizione risulta, che la difficoltà di scoprire la primitiva di una qualunque funzione $F(x)$ può ridursi a trovare la primitiva rispetto alla t della $F\big(\phi(t)\big)\phi'(t)$; e per tanto, si terrà per conosciuta la primitiva di una funzione $F(x)$, quando si conoscerà la relazione a stabilirsi tra la x e la t cioè l'equazione $f(x, t)=0$, onde la risultante funzione in t riesca una di quelle, le cui primitive siano già conosciute. E siccome non v'ha norma generale per concepire sì importante relazione per ogni individuata funzione, così avverto, che, occorrendo la primitiva di qualche funzione, gioverà molto l'esercizio fatto sulle già note, ed anco il ricordarsi quelle almeno, mediante le quali si trovano nei paragrafi seguenti le primitive di alcune famiglie di funzioni.

78. Colla stessa proprietà esposta nel paragrafo antecedente si dimostra facilmente, che le funzioni costituenti la prima colonna della seguente tavola, hanno

per primitive le corrispondenti che costituiscono la seconda colonna di essa

$$p^m p' \text{ - - - - - - - - } \frac{1}{m+1}p^{m+1}+K,$$

$$a^p p' \text{ - - - - - - - - } \frac{1}{\log. a}a^p+K,$$

$$\frac{p'}{p} \text{ - - - - - - - - } \log.\pm p+K,$$

$$p'\cos. p \text{ - - - - - - } \text{sen}. p+K,$$

$$p'\text{sen}. p \text{ - - - - - - } -\cos. p+K,$$

$$(a+bp)^m p' \text{ - - - - } \frac{1}{(m+1)b}(a+bp)^{m+1}+K,$$

$$\frac{p'}{a+bp} \text{ - - - - - - - } \frac{1}{b}\log.\pm(a+bp)+K,$$

$$\frac{p'}{\alpha^2+p^2} \text{ - - - - - - - } \frac{1}{\alpha}\text{Ang.tang.}\frac{p}{\alpha}+K,$$

$$\frac{p'}{\sqrt{(\alpha^2-p^2)}} \text{ - - - - - } \text{Ang. sen. }\frac{p}{\alpha}+K,$$

$$-\frac{p'}{\sqrt{(\alpha^2-p^2)}} \text{ - - - } \text{Ang. cos. }\frac{p}{\alpha}+K,$$

$$\frac{p'}{\sqrt{(\alpha^2+p^2)}} \text{ - - - - } \log.\left(p+\sqrt{\alpha^2+p^2}\right)+K,$$

$$\frac{p'}{p\sqrt{(\alpha^2+p^2)}} \text{ - - - } \frac{1}{2\alpha}\log.\frac{\sqrt{(\alpha^2+p^2)}-\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+p^2)}+\alpha}+K,$$

$$\frac{p'}{p\sqrt{(\alpha^2-p^2)}} \text{ - - - } \frac{1}{2\alpha}\log.\frac{\alpha-\sqrt{(\alpha^2-p^2)}}{\alpha+\sqrt{(\alpha^2-p^2)}}+K,$$

ove la p esprime una qualunque funzione, p' la sua derivata, e K la costante arbitraria.

Sarà fatica sostenuta con vantaggio per un principiante, quella di trovare effettivamente le primitive qui esposte, e di formarsi una idea o concetto astratto della relazione, che ha luogo tra ogni funzione costituente la prima colonna e la corrispondente scritta nella seconda delle medesime colonne.

79. Premesse queste proprietà, passerò a trovare le primitive delle funzioni principali di ogni specie; e parlerò, *primo* delle primitive delle funzioni algebraiche razionali, *secondo* di quelle delle funzioni algebraiche irrazionali, ed in *terzo* luogo delle primitive delle funzioni trascendenti cioè logaritmiche, esponenziali, e circolari.

LEZIONE II.

Delle primitive delle funzioni algebraiche razionali.

80. Per trovare la primitiva di una data funzione algebraica razionale, in primo luogo si scopriranno quelle funzioni aventi l'una o l'altra delle forme

$$a x^n, \quad \frac{a}{(cx+b)^n}, \quad \frac{a+bx}{(ex^2+dx+c)^n},$$

e che sommate daranno la funzione data, cioè, come si dice comunemente, si spezzerà la medesima funzione data in funzioni aventi l'una o l'altra di queste forme; dove la n eprime numero intero e positivo, segnatamente per la terza, e le a, b, c, d, e esprimono quantità costanti qualsivogliono: fatto ciò, troverassi la primitiva della somma di queste medesime funzioni componenti, cioè (§ 75) la somma delle primitive di esse; ed avrassi la primitiva richiesta.

Ammessa adunque la indicata decomposizione ossia lo spezzamento della funzione data, che è operazione d'*Introduzione al Calcolo sublime,* si saprà trovare la primitiva di qualsivoglia funzione algebraica razionale, qualora sappiansi trovare le primitive delle tre anzi esposte.

La primitiva della ax^n è $\frac{a}{n+1}x^{n+1}+K$, quella della $\frac{a}{(b+cx)^n}$ è $K-\frac{1}{c(n-1)}\cdot\frac{a}{(b+cx)^{n-1}}$, quando l'$n$ non sia *meno uno*; pel qual caso, quella della prima è $a\log.x+K$, e quella della seconda ossia della $\frac{a}{b+cx}$ è $\frac{a}{c}\log.(b+cx)+K$: rimane adunque a trovarsi la sola primitiva della $\frac{a+bx}{(c+dx+ex^2)^n}$. Cominciamo dal caso di $n=1$, cioè a trovare la primitiva della funzione

$$\frac{a+bx}{c+dx+ex^2}.$$

Essendo $a+bx=\alpha(d+2ex)+\beta$, purchè sia $\alpha=\frac{b}{2e}$, e $\beta=a-\frac{bd}{2e}$, la primitiva, qui richiesta, sarà eguale ad

$$\alpha\int\frac{d+2ex}{c+dx+ex^2}+\int\frac{\beta}{c+dx+ex^2}.$$

Ma per essere $d+2ex$ evidentemente la derivata del trinomio $c+dx+ex^2$, si ha (§ 78)

$$\int\frac{d+2ex}{c+dx+ex^2}=\log.(c+dx+ex^2),$$

ommessane la costante arbitraria, perchè qui non occorre. Adunque si conoscerà la primitiva richiesta, quando si conoscerà quella della funzione

$$\frac{\beta}{c+dx+ex^2}.$$

Stabiliscasi per ciò la equazione $t = d + 2ex$ tra la x e la t nuova variabile. Sostituendo in quest'ultima funzione, in vece della x il suo valore $\frac{1}{2e}t - \frac{d}{2e}$ cavato dalla equazione stabilita, e moltiplicando la funzione risultante in t per $\frac{1}{2e}$ derivata dello stesso valore della x; e posto per semplicità $4ce - d^2 = \lambda^2$, si trova la funzione

$$\frac{2\beta}{\lambda^2 + t^2},$$

una cui primitiva (§ 78) rispetto alla t è $\frac{2\beta}{\lambda}\text{A.tang.}\frac{t}{\lambda}$; e però (§ 77)

$$\frac{2\beta}{\lambda}\text{A.tang.}\frac{d + 2ex}{\lambda}$$

sarà una primitiva della $\frac{\beta}{c + dx + ex^2}$ presa rispetto alla x. Quindi una primitiva della funzione $\frac{a + bx}{c + dx + ex^2}$ sarà

$$\alpha \log.(c + dx + ex^2) + \frac{2\beta}{\lambda}\text{A.tang.}\frac{d + 2ex}{\lambda},$$

e la richiesta

$$\frac{b}{2e}\log.(c + dx + ex^2) + \frac{2ae - bd}{e\sqrt{(4ce - d^2)}}\text{A.tang.}\frac{d + 2ex}{\sqrt{(4ce - d^2)}} + K:$$

ove K esprime la costante arbitraria.

Fo qui osservare, che, io suppongo tacitamente immaginarj i fattori binomiali del trinomio $c + dx + ex^2$, come il saranno effettivamente, quando lo spezzamento della funzione data, farassi secondo le regole ordinarie, per cui $4ce > d^2$, e conseguentemente la quantità $\sqrt{(4ce - d^2)}$ sarà reale.

81. Essendo $c+dx+ex^2=\frac{1}{4e}(2ex+d-g)(2ex+d+g)$, ove $g=\sqrt{(d^2-4ce)}$, trovasi facilmente

$$\frac{\beta}{c+dx+ex^2}=\frac{\beta}{g}\left(\frac{2e}{2ex+d-g}-\frac{2e}{2ex+d+g}\right);$$

e però sarà anco

$$\int\frac{\beta}{c+dx+ex^2}=\frac{\beta}{g}\log.\frac{2ex+d-g}{2ex+d+g}+H,$$

dove la H esprime la costante arbitraria.

Questa primitiva si può desumere facilmente da quella trovata altrimenti nel paragrafo antecedente, rammentandosi che, qualunque sia la ξ, si ha

$$\text{A.tang.}\,\xi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\frac{1+\xi\sqrt{-1}}{1-\xi\sqrt{-1}}.$$

Di fatto, ponendo $\xi=\frac{d+2ex}{\sqrt{(4ce-d^2)}}$, ossia $\xi\sqrt{-1}=\frac{d+2ex}{g}$, ed osservando che $\frac{2ae-bd}{e\sqrt{(4ce-d^2)}}=\frac{2\beta}{g\sqrt{-1}}$, si ha

$$\frac{2ae-bd}{e\sqrt{(4ce-d^2)}}\text{A.tang.}\frac{d+2ex}{\sqrt{(4ce-d^2)}}+K=$$

$$\frac{2\beta}{g\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\frac{g+d+2ex}{g-d-2ex}+K, \text{ ossia a}$$

$$\frac{\beta}{g}\log.\frac{2ex+d-g}{2ex+d+g}-\frac{\beta}{g}\log.(-1)+K,$$

che è la stessa trovata dianzi, posto $K-\frac{\beta}{g}\log.(-1)=H$.

Osservisi in tanto che, la medesima primitiva trovata nel paragrafo antecedente compare reale, quando sia $4ce>d^2$, ed immaginaria, quando sia $4ce<d^2$, tutto il contrario di ciò che ha luogo per la trovata dianzi. Questa specie di immaginarj, che dipendono dal

metodo usato per trovare la primitiva, all'occorrenza si chiameranno *immaginarj apparenti*.

La doppia forma, sotto la quale si può presentare la primitiva di una stessa funzione, dà origine a funzioni equivalenti di differenti famiglie.

82. Se fosse $4ce = d^2$, la frazione $\frac{a+bx}{c+dx+ex^2}$ sarebbe in sostanza $\frac{a+bx}{(\sqrt{c}+x\sqrt{e})^2}$, la quale, colla equazione di relazione $\sqrt{c}+x\sqrt{e}=t$, tra x e la t, si trasforma nella

$$\frac{a\sqrt{e}-b\sqrt{c}+bt}{et^2} \text{ ossia } \frac{a\sqrt{e}-b\sqrt{c}}{e}\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{b}{e}\,\frac{1}{t},$$

una cui primitiva rispetto alla t è

$$\frac{b\sqrt{c}-a\sqrt{e}}{et}+\frac{b}{e}\log.t;$$

e però la primitiva richiesta, per questo caso, sarà

$$\frac{b}{e}\log.(\sqrt{c}+x\sqrt{e})+\frac{b\sqrt{c}-a\sqrt{e}}{e(\sqrt{c}+x\sqrt{e})}+K.$$

83. Passo ora ad esporre la regola per trovare la primitiva della $\frac{a+bx}{(c+dx+ex^2)^n}$: suppongasi

$$\int\frac{a+bx}{(c+dx+ex^2)^n}=\frac{A+Bx}{(c+dx+ex^2)^{n-1}}+\int\frac{C}{(c+dx+ex^2)^{n-1}};$$

e determininsi i valori delle A, B, C costanti, atte a soddisfare questa equazione indipendentemente della x.

Derivando l'equazione stabilita, come identica, e riducendo le frazioni componenti la risultante equazione ad avere tutte per denominatore $(c+dx+ex^2)^n$, ed ommettendolo, si ha l'equazione

$$a+bx=c(B+C)-d(n-1)A+\Big(d(B+C)-(n-1)dB-2(n-1)eA\Big)x$$
$$+e\Big(B+C-2(n-1)B\Big)x^2,$$

la quale, dovendo sussistere indipendentemente della x, somministra le tre seguenti

$$a=c(B+C)-(n-1)dA,\ b=d(B+C)-(n-1)(dB+2eA),$$
$$0=B+C-2(n-1)B,$$

che sciolte rispetto alle A, B, C danno

$$A=\frac{ad-2bc}{(n-1)(4ce-d^2)},\ B=\frac{2ae-bd}{(n-1)(4ce-d^2)},\ C=\frac{(2n-3)(2ae-bd)}{(n-1)(4ce-d^2)},$$

pei valori richiesti; dimodochè avrassi

$$\int\frac{a+bx}{(c+dx+ex^2)^n}=\frac{ad-2bc+(2ae-bd)x}{(n-1)(4ce-d^2)(c+dx+ex^2)^{n-1}}$$
$$+\frac{(2n-3)(2ae-bd)}{(n-1)(4ce-d^2)}\int\frac{1}{(c+dx+ex^2)^{n-1}}.$$

Se in questa equazione si cambiano le n, a, b ordinatamente nelle $n-1$, 1, *zero*, si ottiene la seguente

$$\int\frac{1}{(c+dx+ex^2)^{n-1}}=\frac{d+2ex}{(n-2)(4ce-d^2)(c+dx+ex^2)^{n-2}}$$
$$+\frac{(2n-5)2e}{(n-2)(4ce-d^2)}\int\frac{1}{(c+dx+ex^2)^{n-2}}.$$

Così, se in quest' ultima si ponessero, in vece della n, successivamente $n-1$, $n-2$, $n-3$, $---3$, arriverebbesi finalmente ad una equazione, nel cui secondo membro vi sarebbe la primitiva $\int\frac{1}{c+dx+ex^2}$, la quale pel caso premesso si sa determinare. Quindi colle successive sostituzioni si avrà la primitiva della funzione $\frac{a+bx}{(c+dx+ex^2)^n}$, cioè la richiesta.

84. Prima di parlare delle primitive delle funzioni algebraiche irrazionali, farò vedere, come si possono sciogliere alcune proposizioni, che occorreranno in molte occasioni.

Si voglia quella primitiva di una data funzione $\phi(x)$, che si riduce alla quantità M costante, facendo in essa x eguale ad m.

Suppongasi trovata della $\phi(x)$ la primitiva completa, e sia $F(x)+K$.

Il valore corrispondente alla $x=m$ di qualunque primitiva della $\phi(x)$ sarà $F(m)+K$: per quella che si cerca, un tal valore dev'essere M; adunque per essa avrassi

$$F(m)+K=M \text{ ossia } K=M-F(m).$$

Quindi la primitiva particolare dimandata sarà

$$F(x)+M-F(m).$$

Se la M fosse lo *zero*, la primitiva qui trovata, ridurrebbesi $F(x)-F(m)$. Questa primitiva, che si annulla colla $x=m$, si indicherà, scrivendola

$$\int^m \phi(x);$$

e si dirà primitiva che comincia colla $x=m$.

Se la primitiva $\int^m \phi(x)$ dovesse annullarsi, qualunque fosse la x, la $\phi(x)$ ed anco le $\phi'(x)$, $\phi''(x)$, --- sue derivate sarebber nulle separatamente.

Di fatto, ritenuto $\int^m \phi(x)=F(x)-F(m)$, si ha l'equazione

$$F(x)-F(m)=0,$$

che deve sussistere qualunque sia la x; e però con essa avranno luogo anco le sue derivate (§ 34), che sono

$$F'(x)=0,\ F''(x)=0,\ F'''(x)=0,\ ---,$$

le quali danno appunto le $\phi(x)=0$, $\phi'(x)=0$, $\phi''(x)=0$, --- per essere $F(x)$ una primitiva della $\phi(x)$.

Vogliasi ora il valore corrispondente alla $x=n$ di quella primitiva della $\phi(x)$, la quale si riduce M facendo in essa $x=m$.

Essendo $F(x)+M-F(m)$ quella primitiva della $\phi(x)$, che si riduce M, facendo in essa $x=m$, il suo valore, qui dimandato, sarà

$$F(n)+M-F(m).$$

Se M fosse *zero*, avrebbesi $F(n)-F(m)$: questa differenza si chiama comunemente primitiva della $\phi(x)$ estesa dalla $x=m$ sino alla $x=n$, ovvero dicesi primitiva od integrale della $\phi(x)$ preso tra i limiti della $x=m$ alla $x=n$, ed anco primitiva definita della $\phi(x)$ estesa dalla $x=m$ alla $x=n$; e si indica alle volte col simbolo $\int_n^m \phi(x)$.

85. Mediante quest'ultimo risultamento si può dimostrare facilmente, che, la primitiva definita della $\phi(x)$ estesa dalla $x=a$ alla $x=a+b$, *più* la primitiva definita dalla stessa funzione estesa dalla $x=a+b$ alla $x=a+b+c$, è eguale alla sola primitiva definita della medesima funzione $\phi(x)$, estesa però dalla $x=a$ sino alla $x=a+b+c$.

Di fatto, essendo $F(a+b)-F(a)$, $F(a+b+c)-F(a+b)$ le due prime primitive definite qui nominate, cioè la prima estesa dalla $x=a$ alla $x=a+b$, e la seconda dalla $x=a+b$ alla $x=a+b+c$, la somma delle medesime primitive risulta

$$F(a+b)-F(a)+F(a+b+c)-F(a+b) \text{ ossia } F(a+b+c)-F(a),$$

che è appunto la sola primitiva definita della $\phi(x)$ estesa dalla $x=a$ sino alla $x=a+b+c$; vale a dire ha luogo la equazione

$$\int_{a+b}^{a} \phi(x) + \int_{a+b+c}^{a+b} \phi(x) = \int_{a+b+c}^{a} \phi(x).$$

Questa osservazione sarà utile segnatamente per manifestare, che sussistono alcune regole, le quali si esporranno per le quadrature, rettificazioni, --- anco pei casi, che sianvi nelle curve punti singolari.

Così, per essere, come abbiamo dianzi veduto

$$\int_n^m \phi(x) = F(n) - F(m);$$

e per una analoga ragione avendosi anco

$$\int_m^n \phi(x) = F(m) - F(n);$$

si avrà $\int_n^m \phi(x) = -\int_m^n \phi(x)$, cioè permutando i limiti della primitiva di una funzione la primitiva definita cangia di segno.

86. La primitiva della somma di più funzioni estesa dalla $x=m$ alla $x=n$ è eguale alla somma delle primitive di queste medesime funzioni componenti, estese tutte dalle $x=m$ alla $x=n$.

Abbiasi $f(x)=p(x)+q(x)+$ecc.; e siano $F(x)$, $P(x)$, $Q(x)$, --- rispettivamente primitive delle $f(x)$, $p(x)$, $q(x)$, ---; e sarà (§ 75)

$$F(x) = P(x) + Q(x) + \text{ecc.} + K.$$

La primitiva della $f(x)$ estesa dalla $x=m$ alla $x=n$ è $F(n)-F(m)$, quantità evidentemente eguale alla

$P(n)+Q(n)+\text{ecc.}+K-P(m)-Q(m)-\text{ecc.}-K$ ossia a

$P(n)-P(m)+Q(n)-Q(m)+\text{ecc.}$

che è la somma delle $P(n)-P(m)$, $Q(n)-Q(m)$, --- primitive delle $p(x)$, $q(x)$, --- estese dalla $x=m$ alla $x=n$. Adunque la primitiva della $f(x)$ estesa dalla $x=m$ alla $x=n$, eguaglia la somma delle primitive delle $p(x)$, $q(x)$, ---; estese anch'esse dalla $x=m$ sino alla $x = n$, cioè si ha

$$\int_n^m f(x) = \int_n^m p(x) + \int_n^m q(x) + \text{ecc.},$$

come si è dichiarato.

Per trovare la primitiva della funzione $F(x)$ convenga stabilire tra la x e la t nuova variabile la equazione $f(x, t) = 0$, la quale dia $x = \phi(t)$, e $t = \psi(x)$; e sia

$\int F(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = \Delta(t) + K$; e sarà (§ 77)

$$\int F(x)dx = \Delta(\psi(x)) + K, \text{e però} \int_b^a F(x)dx = \Delta(\psi(b)) - \Delta(\psi(a)).$$

Ma per essere in generale $t = \psi(x)$ si hanno $\psi(a)$, $\psi(b)$ pei valori della t corrispondenti agli a, b della x; per cui risulta

$$\int_{\psi(b)}^{\psi(a)} F(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = \Delta(\psi(b)) - \Delta(\psi(a)).$$

Adunque, ammesso tra le x, t la relazione $f(x, t) = 0$ ossia le $x = \phi(t)$, $t = \psi(x)$ sarà

$$\int_b^a F(x)\,dx = \int_{\psi(b)}^{\psi(a)} F(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt.$$

87. Quando si abbia $\phi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, dove a, b, c, d sono costanti, risulterà

$$\int_n^m \phi(x) = \frac{n-m}{3}\left(\frac{1}{2}(\phi(m) + \phi(n)) + 2\phi\left(\frac{m+n}{2}\right)\right).$$

Evidentemente si hanno le equazioni

$$\frac{1}{2}(\phi(m) + \phi(n)) = a + \frac{b}{2}(m+n) + \frac{c}{2}(m^2 + n^2) + \frac{d}{2}(m^3 + n^3),$$

$$2\phi\left(\frac{m+n}{2}\right) = 2a + b(m+n) + \frac{c}{2}(m+n)^2 + \frac{d}{4}(m+n)^3.$$

Sommando i loro membri corrispondenti, dopo alcune riduzioni, trovasi la

$$\frac{1}{2}\left(\phi(m)+\phi(n)\right)+2\phi\left(\frac{m+n}{2}\right)=3a+\frac{3b}{2}(m+n)$$
$$+c(m^2+mn+n^2)+\frac{3d}{4}(m^3+m^2n+mn^2+n^3);$$

e però il prodotto

$$\frac{n-m}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\phi(m)+\phi(n)\right)+2\phi\left(\frac{m+n}{2}\right)\right)$$

sarà eguale ad

$$a(n-m)+\frac{b}{2}(n^2-m^2)+\frac{c}{3}(n^3-m^3)+\frac{d}{4}(n^4-m^4).$$

Ma la primitiva $\int_n^m(a+bx+cx^2+dx^3)$ è appunto

$$a(n-m)+\frac{b}{2}(n^2-m^2)+\frac{c}{3}(n^3-m^3)+\frac{d}{4}(n^4-m^4);$$

adunque sarà

$$\int_n^m(a+bx+cx^2+dx^3)=\frac{n-m}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\phi(m)+\phi(n)\right)+2\phi\left(\frac{m+n}{2}\right)\right)$$

come si è dichiarato.

88. Reciprocamente, se ha luogo la equazione

$$\int_n^m\phi(x)=\frac{n-m}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\phi(m)+\phi(n)\right)+2\phi\left(\frac{m+n}{2}\right)\right)$$

qualunque siano m, n, la $\phi(x)$ sarà funzione della forma $a+bx+cx^2+dx^3$. Usiamo $m+\omega$ in vece della n; e l'equazione data si ridurrà

$$\int_{m+\omega}^m\phi(x)\,dx=\frac{\omega}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\phi(m)+\phi(m+\omega)\right)+2\phi\left(m+\frac{\omega}{2}\right)\right).$$

Chiamisi $F(x)$ una primitiva della $\phi(x)$: sarà $\int_{m+\omega}^m\phi(x)$ eguale ad $F(m+\omega)-F(m)$ ossia ad

$$\omega F'(m)+\frac{\omega^2}{2}F''(m)+\frac{\omega^3}{2\cdot 3}F'''(m)+\frac{\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4}F^{IV}(m)+\text{ecc.}$$

Ma per essere $F'(x)$ identica alla $\varphi(x)$, le $F'(m)$, $F''(m)$, $F'''(m)$, - - - sono ordinatamente identiche alle $\varphi(m)$, $\varphi'(m)$, $\varphi''(m)$, - - -; adunque sarà

$$\int_{m+\omega}^{m}\varphi(x)=\omega\varphi(m)+\frac{\omega^2}{2}\varphi'(m)+\frac{\omega^3}{2\cdot 3}\varphi''(m)+$$
$$\frac{\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4}\varphi'''(m)+\frac{\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\varphi^{IV}(m)+\text{ecc.}$$

D'altronde si ha

$$\frac{1}{2}\left(\varphi(m)+\varphi(m+\omega)\right)=\varphi(m)+$$
$$\frac{\omega}{2}\varphi'(m)+\frac{\omega^2}{2\cdot 2}\varphi''(m)+\frac{\omega^3}{2\cdot 2\cdot 3}\varphi'''(m)+\frac{\omega^4}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\varphi^{IV}(m)+\text{ecc. e}$$

$$2\varphi\left(m+\frac{\omega}{2}\right)=2\varphi(m)+$$
$$\omega\varphi'(m)+\frac{\omega^2}{2\cdot 2}\varphi''(m)+\frac{\omega^3}{4\cdot 2\cdot 3}\varphi'''(m)+\frac{\omega^4}{8\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\varphi^{IV}(m)+\text{ecc.};$$

per cui risulta

$$\frac{\omega}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\varphi(m)+\varphi(m+\omega)\right)+2\varphi\left(m+\frac{\omega}{2}\right)\right)\ \textit{eguale}\ \text{ad}$$

$$\frac{\omega}{3}\left(3\varphi(m)+3\frac{\omega}{2}\varphi'(m)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(m)+3\frac{\omega^3}{2\cdot 3\cdot 4}\varphi'''(m)+\frac{5\omega^4}{8\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\varphi^{IV}(m)+\text{ecc.}\right)$$

Quindi la equazione ammessa trasformasi nella seguente

$$\omega\varphi(m)+\frac{\omega^2}{2}\varphi'(m)+\frac{\omega^3}{2\cdot 3}\varphi''(m)+\frac{\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4}\varphi'''(m)+\frac{\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\varphi^{IV}(m)+\text{ecc.}=$$
$$\omega\varphi(m)+\frac{\omega^2}{2}\varphi'(m)+\frac{\omega^3}{2\cdot 3}\varphi''(m)+\frac{\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4}\varphi'''(m)+\frac{5\omega^5}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}\varphi^{IV}(m)+\text{ecc.},$$

la quale, sussistendo qualunque sia la ω, dà la

$$\frac{\varphi^{IV}(m)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{5\varphi^{IV}(m)}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}\quad\text{cioè}\quad \varphi^{IV}(m)=0,$$

qualunque sia m.

Questa proprietà della $\varphi^{IV}(m)$, necessaria e sufficiente per soddisfare interamente l'equazione ammessa o data, somministra evidentemente

$$\varphi(m) = a + bm + cm^2 + dm^3$$

ove le a, b, c, d sono costanti. Ma come è formata la $\varphi(m)$ colla m, così dev'esserla $\varphi(x)$ colla x; adunque sarà

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3:$$

appunto come si è dichiarato.

LEZIONE III.

Delle primitive delle funzioni algebraiche irrazionali.

89. Siccome non vi è regola generale, per trovare la primitiva in termini finiti di qualunque funzione algebraica irrazionale, così esporremo quelle regole, colle quali si possono trovare le primitive più interessanti ed in un concepire ciò che di più generale si conosce di questo importantissimo ramo di calcolo; ed avremo di mira più la facilità e semplicità degli usi di esse, che della loro esposizione.

La primitiva di una di queste funzioni, come di ogni altra si terrà, per conosciuta, quando la difficoltà di averla, si sarà ridotta a trovare quella di altre fra le già contemplate: anzi, qui terremo per conosciuta, come lo è difatto (§§ 75, 80), la primitiva di una funzione della forma

$$Ax^m + B(D + Ex)^n + \text{ecc.}$$

qualunque siano non solo le costanti A, B, D, E, ---, ma anco le m, n, ---.

90. Cominciamo a parlare della primitiva della funzione

$$x^{n-1}f\left(x^{an}, \left(\frac{Ax^n+B}{Cx^n+D}\right)^{\frac{b}{c}}, \left(\frac{Ax^n+B}{Cx^n+D}\right)^{\frac{d}{e}}, ---\right),$$

ove f significa una operazione *algebraica* e *razionale*, le a, b, c, --- numeri interi, e le A, B, C, D, ed n costanti qualsivogliono.

Suppongasi $\frac{Ax^n+B}{Cx^n+D}=t^m$;

ove t esprime la nuova variabile, ed m il prodotto ce' --- cioè il prodotto dei denominatori delle frazioni $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, ---; e si avrà

$$x^n=\frac{Dt^m-B}{A-Ct^m},\ x^{n-1}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{m(AD-BC)t^{m-1}}{n(A-Ct^m)^2},$$

$$x^{an}=\left(\frac{Dt^m-B}{A-Ct^m}\right)^a, \left(\frac{Ax^n+B}{Cx^n+D}\right)^{\frac{b}{c}}=t^{be\cdots}, \left(\frac{Ax^n+B}{Cx^n+D}\right)^{\frac{d}{e}}=t^{cd\cdots}, ---;$$

e però la funzione di t, da cui dipenderà la primitiva richiesta (§ 77), sarà

$$\frac{m(AD-BC)t^{m-1}}{n(A-Ct^m)^2}f\left(\left(\frac{Dt^m-B}{A-Ct^m}\right)^a, t^{be\cdots}, t^{cd\cdots}, ---\right),$$

la quale è razionale, e però di quelle già contemplate.

Sia $F(t)$ una primitiva di quest'ultima funzione; e sarà

$$F\left(\sqrt[m]{\frac{Ax^n+B}{Cx^n+D}}\right)+K$$

la primitiva richiesta: K esprime al solito la costante arbitraria.

Se fosse $C=0$, e $D=1$, la funzione data sarebbe

$$x^{n-1}f\left(x^{\alpha n},\ (Ax^n+B)^{\frac{b}{c}},\ (Ax^n+B)^{\frac{d}{e}},\ ---\right),$$

e la sua primitiva dipenderebbe da quella della

$$\frac{m\,t^{m-1}}{n\,A}f\left(\left(\frac{t^m-B}{A}\right)^{\alpha},\ t^{be\cdots},\ t^{cd\cdots},\ ---\right)$$

algebraica e razionale: se poi fosse anco $B=0$, $A=1$, ed $n=1$, la funzione data sarebbe

$$f\left(x^{\alpha},\ x^{\frac{b}{c}},\ x^{\frac{d}{e}},\ ---\right),$$

e la sua primitiva dipenderebbe da quella della seguente

$$m\,t^{m-1}f\left(t^{\alpha m},\ t^{be\cdots},\ t^{cd\cdots},\ ---\right),$$

anch'essa algebraica e razionale.

91. La equazione di relazione, tra le x, t stabilita pel primo dei due casi contemplati nel paragrafo antecedente, la quale è $Ax^n+B=t^c$, ammettendola per la funzione

$$x^{\alpha}\left(Ax^n+B\right)^{\frac{b}{c}}$$

dà per funzione in t, risultante, la seguente

$$\frac{c}{n\,A}\left(\frac{t^c-B}{A}\right)^{\frac{\alpha+1}{n}-1}\cdot\ t^{b+c-1},$$

la quale visibilmente riescirà razionale, quando riescirà $\alpha+1$ divisibile esattamente per n.

Per questa medesima funzione, ammessa in vece la relazione

$$Ax^n+B=x^nt^c,\ \text{e però}\ x^n=\frac{B}{t^c-A},\ \left(Ax^n+B\right)^{\frac{b}{c}}=\left(\frac{B}{t^c-A}\right)^{\frac{b}{c}}t^b,$$

$$x^{\alpha+1}=\left(\frac{B}{t^c-A}\right)^{\frac{\alpha+1}{n}},\ x^{\alpha}\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\frac{c\,B}{n}\left(\frac{B}{t^c-A}\right)^{\frac{\alpha+1}{n}-1}t^{c-1}:$$

la funzione in t, dalla cui primitiva dipenderà la richiesta, sarà

$$-\frac{cB}{n}\left(\frac{B}{t^c - A}\right)^{\frac{\alpha+1}{n}+\frac{b}{c}-1} t^{b+c-1},$$

la quale visibilmente riescirà razionale, oltre essere algebraica, quando risulterà $\frac{\alpha+1}{n}+\frac{b}{c}$ numero intero.

Vale a dire, mediante le due equazioni di relazione tra le x, t, qui stabilite, la primitiva della funzione

$$x^\alpha \left(Ax^n + B\right)^{\frac{b}{c}}$$

dipenderà da quella di una funzione algebraica e razionale, ogniqualvoltachè riesca intero $\frac{\alpha+1}{n}$, ovvero $\frac{\alpha+1}{n}+\frac{b}{c}$; ciò che succede sempre, quando sia $n = \pm 2$, $\frac{b}{c} = \pm\frac{1}{2}$, ed α un numero intero qualunque: come agevolmente può chiunque persuadersi.

92. In secondo luogo vediamo come si possa trovare la primitiva della funzione

$$x^{n-1} f\left(x^n, \sqrt{(Ax^{2n}+Bx^n+C)}\right),$$

quando f significhi anco in questa una operazione *algebraica* e *razionale*.

Suppongasi $\sqrt{(Ax^{2n}+Bx^n+C)} = x^n\sqrt{A}+t$, e si avrà

$$x^n = \frac{C-t^2}{2t\sqrt{A}-B},\ x^n\sqrt{A}+t \text{ ossia}$$

$$\sqrt{(Ax^{2n}+Bx^n+C)} = \frac{t^2\sqrt{A}-Bt+C\sqrt{A}}{2t\sqrt{A}-B}, \text{ ed}$$

$$x^{n-1}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{2}{n}\,\frac{t^2\sqrt{A}-Bt+C\sqrt{A}}{(2t\sqrt{A}-B)^2};$$

e la funzione in t risultante sarà

$$-\frac{2}{n}\frac{t^2\sqrt{A}-Bt+C\sqrt{A}}{(2t\sqrt{A}-B)^2}f\left(\frac{C-t^2}{2t\sqrt{A}-B},\ \frac{t^2\sqrt{A}-Bt+C\sqrt{A}}{2t\sqrt{A}-B}\right),$$

che è razionale ed algebraica.

Una primitiva di questa funzione sia $F(t)$; e la richiesta sarà la seguente

$$F\left(\sqrt{(Ax^{2n}+Bx^n+C)}-x^n\sqrt{A}\right)+K.$$

Vogliasi l'effettiva primitiva della $\dfrac{h}{\sqrt{(Ax^2+Bx+C)}}$.

Per questo esempio è $n=1$, e la risultante funzione in t è

$$-2\frac{t^2\sqrt{A}-Bt+C\sqrt{A}}{(2t\sqrt{A}-B)^2}h\frac{2t\sqrt{A}-B}{t^2\sqrt{A}-Bt+C\sqrt{A}},\ \text{ossia}\ -\frac{2h}{2t\sqrt{A}-B};$$

e però $F(t)$ sarà $-\dfrac{h}{\sqrt{A}}\log.(2t\sqrt{A}-B)$; e la primitiva richiesta risulterà

$$\frac{h}{\sqrt{A}}\log.\left(B+2Ax+2\sqrt{A}\cdot\sqrt{(Ax^2+Bx+C)}\right)+K$$

supposto $-\dfrac{h}{\sqrt{A}}\log.(4AC-B^2)$ compreso in K.

Se il coefficiente A fosse negativo, e si volesse evitare la comparsa degli immaginarj apparenti, quando il C sia positivo, si potrà supporre

$$\sqrt{(Ax^{2n}+Bx^n+C)}=tx^n+\sqrt{C}.$$

Anzi, tutte le equazioni di relazione tra le x, t, che rendano le funzioni x^n, $\sqrt{(Ax^{2n}+Bx^n+C)}$ eguali a funzioni razionali ed algebraiche della t, ridurranno la ricerca della primitiva della funzione

$$x^{n-1}f\left(x^n,\ \sqrt{(Ax^{2n}+Bx^n+C)}\right)$$

a quella di una funzione in t razionale ed algebraica.

93. Troviamo la primitiva della

$$x^{n-1}f\left(x^n,\ \sqrt{(Ax^n+B)},\ \sqrt{(Cx^n+D)}\right),$$

ove la f ha un significato analogo ai due antecedenti.

Supposto $\sqrt{(Ax^n + B)} = t\sqrt{(Cx^n + D)}$, trovasi

$$x^n = \frac{B - Dt^2}{Ct^2 - A},\ \sqrt{(Cx^n + D)} = \sqrt{\frac{BC - AD}{Ct^2 - A}},$$

$$\sqrt{(Ax^n + B)} = t\sqrt{\frac{BC - AD}{Ct^2 - A}}, \text{ ed}$$

$$x^{n-1}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{2(BC - AD)t}{n(Ct^2 - A)^2};$$

e però la funzione risultante in t sarà

$$-2\frac{BC-AD}{(Ct^2-A)^2}tf\left(\frac{B-Dt^2}{Ct^2-A}, t\sqrt{\frac{BC-AD}{Ct^2-A}}, \sqrt{\frac{BC-AD}{Ct^2-A}}\right),$$

la quale è un caso della funzione considerata nell'antecedente paragrafo; e si può ridurre ad una razionale in u, nuova variabile, mediante la relazione seguente

$$\sqrt{(Ct^2 - A)} = t\sqrt{C} + u \text{ tra la } t \text{ e la } u;$$

e con ciò avere la primitiva richiesta; giacchè, supposta $F(u)$ una primitiva rispetto alla u di quest'ultima funzione, sarà

$$F\left(\sqrt{(Ct^2 - A)} - t\sqrt{C}\right)$$

una primitiva rispetto alla t della antecedente, ed

$$F\left(\sqrt{\frac{BC - AD}{Cx^n + D}} - \sqrt{\frac{Ax^n + B}{Cx^n + D}\,C}\right) + K$$

l'effettiva richiesta.

94. La ricerca della primitiva di una funzione della forma

$$x^{\alpha-1}(Ax^n + B)^{\frac{r}{s}}$$

si può ridurre a quella di una sua consimile affatto, in cui i numeri analoghi agli α, n siano tra loro primi.

Sia c il massimo comun divisore degli α, n; e suppongasi $\alpha = c\mu$, $n = cm$: gli m, μ saranno primi tra loro.

Ammessa la relazione $x^c = t$ tra la x e la t nuova variabile, si ha

$x^{c\mu}$ ossia $x^\alpha = t^\mu$, e però $x^{\alpha-1}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\mu}{\alpha} t^{\mu-1}$, ed $x^n = t^m$;

e per tanto, si saprà trovare la primitiva rispetto alla x della

$$x^{\alpha-1}(Ax^n + B)^{\frac{r}{s}},$$

quando saprassi trovare la primitiva rispetto alla t della

$$\frac{1}{c} t^{\mu-1}(At^m + B)^{\frac{r}{s}},$$

nella quale μ, m sono numeri tra loro primi, ed è di una forma analoga alla antecedente cioè a quella in x.

95. Farò qui vedere, come la primitiva della funzione

$$x^{m \pm ni - 1}(Ax^n + B)^{\frac{r}{s} \pm \alpha},$$

ove α ed i esprimono due numeri interi, si possa far dipendere da quella della più semplice $x^{m-1}(Ax^n + B)^{\frac{r}{s}}$.

Evidentemente la quantità

$$mx^{m-1}(Ax^n + B)^{\frac{r}{s}+1} + \frac{r+s}{s} Anx^{m+n-1}(Ax^n + B)^{\frac{r}{s}},$$

(§ 20) derivata della $x^m(Ax^n + B)^{\frac{r}{s}+1}$, si può ordinare nei due modi

$$mBx^{m-1}(Ax^n + B)^{\frac{r}{s}} + \frac{1}{s}(sm + rn + sn)Ax^{m+n-1}(Ax^n + B)^{\frac{r}{s}},$$

$$-\frac{r+s}{s} nBx^{m-1}(Ax^n + B)^{\frac{r}{s}} + \frac{1}{s}(sm + rn + sn)x^{m-1}(Ax^n + B)^{\frac{r}{s}+1};$$

e però avranno luogo le due equazioni seguenti

$$x^m(Ax^n + B)^{\frac{r}{s}+1} = mB\int x^{m-1}(Ax^n + B)^{\frac{r}{s}} +$$

$$\frac{A}{s}(sm + rn + sn)\int x^{m+n-1}(Ax^n + B)^{\frac{r}{s}},$$

$$x^m(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}+1}=-\frac{n}{s}(r+s)B\int x^{m-1}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}+$$
$$\frac{1}{s}(sm+rn+sn)\int x^{m-1}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}+1}.$$

Nella prima di queste equazioni cangisi la m in $m-n$, e nella seconda la r in $r-s$; e si avranno le

$$x^{m-n}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}+1}=(m-n)B\int(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}x^{m-n-1}+$$
$$\frac{A}{s}(ms+nr)\int x^{m-1}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}},$$

$$x^m(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}=-\frac{Brn}{s}\int x^{m-1}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}-1}+$$
$$\frac{sm+rn}{s}\int x^{m-1}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}.$$

Queste quattro equazioni danno ordinatamente

$$\int(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}x^{m+n-1}=\frac{sx^m(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}+1}}{A(sm+sn+rn)}-$$
$$\frac{Bsn}{A(sm+sn+rn)}\int(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}x^{m-1},$$

$$\int(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}+1}x^{m-1}=\frac{sx^m(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}+1}}{sm+sn+nr}+$$
$$\frac{Bn(r+s)}{sm+sn+rn}\int(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}x^{m-1},$$

$$\int(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}x^{m+n-1}=\frac{x^{m-n}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}+1}}{B(m-n)}-$$
$$\frac{A(sm+rn)}{Bs(m-n)}\int(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}x^{m-1},$$

$$\int(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}-1}x^{m-1}=-\frac{sx^m(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}}{Brn}+$$
$$\frac{sm+rn}{Brn}\int(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}x^{m-1}.$$

Colla prima e terza di queste, la primitiva della funzione $x^{m\pm n-1}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}$ ed in generale della $x^{m\pm in-1}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}$ si può far dipendere dalla primitiva della $x^{m-1}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}$; e colla seconda e quarta, la primitiva della funzione $x^{m-1}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}\pm 1}$, ed in generale quella della $x^{m-1}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}\pm\alpha}$ si può far dipendere dalla primitiva della medesima $x^{m-1}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}$; dimodochè, combinando opportunamente queste quattro equazioni, la primitiva della funzione $x^{m\pm in-1}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}\pm\alpha}$ si potrà far dipendere da quella della sola $x^{m-1}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}$, dove li m, n siano numeri tra loro primi.

Per dare un esempio, troviamo la primitiva della funzione $\frac{x^{m+1}}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

Paragonando questa funzione alla $x^{m+n-1}(Ax^n+B)^{\frac{r}{s}}$, si ha $n=2$, $A=-1$, $B=1$, $r=-1$, ed $s=2$: valori, i quali, sostituiti nella prima delle ultime quattro esposte equazioni, danno

$$\int\frac{x^{m+1}}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\frac{x^m\sqrt{(1-x^2)}}{m+1}-\frac{1}{m+1}\int\frac{x^{m-1}}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Pongasi in questa, in vece d'm successivamente $1, 3, 5, 7, ---$ e rammentisi che $\int\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}=\text{A.sen.}x$, e si avranno le seguenti

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\frac{x}{2}\sqrt{(1-x^2)}+\frac{1}{2}\text{A.sen.}x+K$$

$$\int\frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\frac{x^3}{4}\sqrt{(1-x^2)}-\frac{1}{4}\int\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)}},\ \text{ossia}$$

$$\int\frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\left(\frac{x^3}{4}+\frac{3\cdot1}{4\cdot2}x\right)\sqrt{(1-x^2)}+\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\text{A.sen.}x+K,$$

$$\int\frac{x^6}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\left(\frac{x^5}{6}+\frac{5\cdot1}{6\cdot4}x^3+\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}x\right)\sqrt{(1-x^2)}+\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\text{A.sen.}x+K,$$

ed in generale risulta la primitiva $\int\frac{x^{2i}}{\sqrt{(1-x^2)}}$, ove l'$i$ esprima un numero intero, eguale a

$$-\left(\frac{x^{2i-1}}{2i}+\frac{2i-1}{2i(2i-2)}x^{2i-3}+\frac{(2i-1)(2i-3)}{2i(2i-2)(2i-4)}x^{2i-5}+\text{---}\right.$$
$$\left.+\frac{(2i-1)(2i-3)\text{----}5\cdot3\cdot1}{2i(2i-2)(2i-4)\text{----}4\cdot2}x\right)\sqrt{(1-x^2)}$$
$$+\frac{(2i-1)(2i-3)\text{----}5\cdot3\cdot1}{2i(2i-2)(2i-4)\text{----}6\cdot4\cdot2}\text{A.sen.}x+K.$$

Così, ponendo nella medesima equazione in vece dell'm successivamente 2, 4, 6, - - -, e rammentandosi, che $\int\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\sqrt{(1-x^2)}$, si hanno le seguenti

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{3}\right)\sqrt{(1-x^2)}+K,$$

$$\int\frac{x^5}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\left(\frac{x^4}{5}+\frac{4\cdot1}{5\cdot3}x^2+\frac{4\cdot2\cdot1}{5\cdot3\cdot1}\right)\sqrt{(1-x^2)}+K,$$

$$\int\frac{x^7}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\left(\frac{x^6}{7}+\frac{6\cdot1}{7\cdot5}x^4+\frac{6\cdot4\cdot1}{7\cdot5\cdot3}x^2+\frac{6\cdot4\cdot2\cdot1}{7\cdot5\cdot3\cdot1}\right)\sqrt{(1-x^2)}+K$$

- -

$$\int\frac{x^{2i+1}}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\left(\frac{x^{2i}}{2i+1}+\frac{2i\cdot1}{(2i+1)(2i-1)}x^{2i-2}+\frac{2i(2i-2)\cdot1}{(2i+1)(2i-1)(2i-3)}x^{2i-4}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{2i(2i-2)(2i-4)\text{----}4\cdot2}{(2i+1)(2i-1)(2i-3)\text{----}5\cdot3}\right)\sqrt{(1-x^2)}+K.$$

Prima di abbandonare questo esempio, esporrò anco i valori delle primitive $\int\frac{x^{2i}}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\int\frac{x^{2i}}{\sqrt{(1-x^2)}}$ estese dalla $x=0$ sino alla $x=1$.

Evidentemente queste primitive hanno i loro valori corrispondenti alla $x=0$, che sono, quello della prima *zero* e quello della seconda

$$-\frac{2i(2i-2)----4\cdot 2}{(2i+1)(2i+3)----5\cdot 3};$$

e quelli corrispondenti alla $x=1$, che sono, per la prima

$$\frac{(2i-1)(2i-3)----5\cdot 3\cdot 1}{2i(2i-2)(2i-4)----6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

e per la seconda *zero*; adunque si avrà

$$\int_1^0 \frac{x^{2i}}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{(2i-1)(2i-3)----5\cdot 3\cdot 1}{2i(2i-2)(2i-4)----6\cdot 4\cdot 2}\,\frac{\pi}{2}, \text{ e}$$

$$\int_1^0 \frac{x^{2i+1}}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{2i(2i-2)(2i-4)----6\cdot 4\cdot 2}{(2i+1)(2i-1)----7\cdot 5\cdot 3}.$$

LEZIONE IV.

Delle primitive delle funzioni trascendenti.

96. Esporrò qui una regola, sino ad ora da noi non usata, che si chiama regola di *integrare per parte* o di trovare le *primitive a parte*, colla quale si riduce la ricerca della primitiva di una funzione a quella di un'altra, e che si suole usare segnatamente, per trovare le primitive delle funzioni trascendenti.

Intendansi colle p, q due funzioni della x. Dal § 18 si ha

$(pq)'=p'q+pq'$, e però sarà $pq=\int p'q+\int pq'$, ossia

$$\int pq'=pq-\int qp';$$

per cui, posto $q'=r$, e conseguentemente $q=\int r$, si avrà

$$\int pr=p\int r-\int\left(\int r\right)p';$$

vale a dire, la primitiva del prodotto pr eguale al prodotto del fattore p per $\int r$, primitiva anco particolare dell'r, *meno* la primitiva del prodotto della stessa primitiva $\int r$ per la p' derivata del fattore p.

Volendo determinare la primitiva di una data funzione con questa regola, converrà decomporre la medesima funzione in due fattori, tali, che sappiasi trovare la primitiva di uno di essi e quella del prodotto di questa medesima primitiva per la derivata dell' altro, od almeno, che la determinazione di ciascuna di queste due primitive riesca meno difficile di quella della medesima funzione data.

97. Prima di parlare delle primitive delle funzioni trascendenti farò vedere come si possa trovare, colla regola qui esposta, la primitiva della $\frac{x^n}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$, che è funzione algebraica ed irrazionale.

Diasi a questa funzione la forma

$$\frac{x^{n-1}(x+a-a)}{\sqrt{(2ax-x^2)}} \text{ ossia } a\frac{x^{n-1}}{\sqrt{(2ax-x^2)}} - x^{n-1}\cdot\frac{a-x}{\sqrt{(2ax-x^2)}};$$

e si avrà

$$\int\frac{x^n}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = a\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{(2ax-x^2)}} - \int x^{n-1}\cdot\frac{a-x}{\sqrt{(2ax-x^2)}}.$$

Supposto $x^{n-1}=p$, $\frac{a-x}{\sqrt{(2ax-x^2)}}=r$, si ha

$$p'=(n-1)x^{n-2}, \text{ e } \int r=\sqrt{(2ax-x^2)}; \text{ e però sarà}$$

$$\int pr = x^{n-1}\sqrt{(2ax-x^2)}-(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{(2ax-x^2)}, \text{ cioè}$$

$$\int\frac{x^n}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = -x^{n-1}\sqrt{(2ax-x^2)}$$

$$+a\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{(2ax-x^2)}} + (n-1)\int x^{n-2}\sqrt{(2ax-x^2)}.$$

Ma per essere $x^{n-2}\sqrt{(2ax-x^2)}=\frac{2ax-x^2}{\sqrt{(2ax-x^2)}}x^{n-2}$, hassi

$$\int x^{n-2}\sqrt{(2ax-x^2)}=2a\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{(2ax-x^2)}}-\int\frac{x^n}{\sqrt{(2ax-x^2)}};$$

adunque si avrà l'equazione

$$\int\frac{x^n}{\sqrt{(2ax-x^2)}}=-x^{n-1}\sqrt{(2ax-x^2)}+a\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$$
$$+2a(n-1)\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{(2ax-x^2)}}-(n-1)\int\frac{x^n}{\sqrt{(2ax-x^2)}},$$

la quale somministra

$$\int\frac{x^n}{\sqrt{(2ax-x^2)}}=-\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{(2ax-x^2)}+\frac{a(2n-1)}{n}\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{(2ax-x^2)}},$$

cioè la primitiva richiesta espressa per quella della funzione $\frac{x^{n-1}}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$.

In quest' ultima equazione cambiando la n successivamente in $n-1$, $n-2$, - - - 3, 2 si comprenderà facilmente che la primitiva dimandata dipenderà in ultimo da quella della funzione

$$\frac{1}{\sqrt{(2ax-x^2)}} \text{ ossia della } \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{a-x}{a}\right)^2\right)}},$$

che (§ 78) è A. sen. $\frac{a-x}{a}$.

98. Abbiasi in primo luogo la funzione logaritmica $x^n\log.x$.

Supposto $\log.x=p$, $x^n=r$, e però $p'=\frac{1}{x}$, $\int r=\frac{x^{n+1}}{n+1}$; si avrà, dalla esposta regola generale, la

$$\int x^n\log.x=\frac{x^{n+1}}{n+1}\log.x-\frac{1}{n+1}\int x^n, \text{ ossia}$$
$$\int x^n\log.x=\frac{x^{n+1}}{n+1}\log.x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+K.$$

Nel caso di $n=-1$, unico pel quale riesce diffettosa questa primitiva, si ha $\int r=\int\frac{1}{x}=\log.x$; e però sarà $\int\frac{1}{x}\log.x=\log.^2x-\int\frac{1}{x}\log.x$, cioè $\int\frac{1}{x}\log.x=\frac{1}{2}\log.^2x+K$. Facendo $n=0$ nella formula generale della primitiva di $x^n\log.x$, hassi

$$\int\log.x=x\log.x-x+K.$$

In secondo luogo, vogliasi la primitiva della funzione $x^n\log.^m x$, ove l'm esprime un numero intero e positivo.

Supponghasi $r=x^n$, $p=\log.^m x$, e però $\int r=\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $p'=\frac{m}{x}\log.^{m-1}x$; e si avrà

$$\int x^n\log.^m x=\frac{x^{n+1}}{n+1}\log.^m x-\frac{m}{n+1}\int x^n\log.^{m-1}x:$$

con questa trasformazione si vede, che la primitiva della funzione $x^n\log.^m x$ dipende da quella della $x^n\log.^{m-1}x$: in un modo analogo questa primitiva si fa dipendere da quella della $x^n\log.^{m-2}x$, quest'ultima da quella della $x^n\log.^{m-3}x$, e così continuando, la difficoltà di avere la primitiva richiesta si ridurrà evidentemente a trovare quella della $x^n\log.^0 x$ ossia della x^n, che è $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Dimodochè avrassi

$$\int x^n\log.^m x=\frac{x^{n+1}}{n+1}\log.^m x-\frac{m}{(n+1)^2}x^{n+1}\log.^{m-1}x+---$$
$$\pm\frac{m(m-1)---2\cdot 1}{(n+1)^{m+1}}x^{n+1}+K,$$

oppure

$$\int x^n \log.^m x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log.^m x - \frac{m}{n+1}\log.^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{(n+1)^2}\log.^{m-2}x \cdots \right.$$
$$\left. \pm \frac{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)^m}\right) + K.$$

Ecco la primitiva richiesta, qualunque sia l'n, eccettuato il caso d'$n=-1$, pel quale però si ha d'altronde

$$\int \frac{1}{x}\log.^m x = \frac{1}{m+1}\log.^{m+1}x + K.$$

Quest'ultima primitiva sussiste anco qualunque sia l'm, escluso l'unico caso di $m=-1$; pel quale però la funzione riducesi

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log.x} \text{ ossia } \frac{(\log.x)'}{\log.x},$$

la cui primitiva è $\log.\log.x + K$.

Se in vece della funzione $x^n \log.^m x$ si avesse la $f(x)\cdot\log.^m x$: posto

$$\int f(x) = f_1, \int \frac{f_1}{x} = f_2, \int \frac{f_2}{x} = f_3, \cdots$$

si avrebbero le equazioni

$$\int f \log.^m x = f_1 \cdot \log.^m x - m\int \frac{f_1}{x}\log.^{m-1}x,$$

$$\int \frac{f_1}{x}\log.^{m-1}x = f_2 \cdot \log.^{m-1}x - (m-1)\int \frac{f_2}{x}\log.^{m-2}x$$

$$\int \frac{f_2}{x}\log.^{m-2}x = f_3 \log.^{m-2}x - (m-2)\int \frac{f_3}{x}\log.^{m-3}x, \cdots$$

e per tanto risulterebbe

$$\int f(x)\log.^m x = f_1 \cdot \log.^m x - m f_2 \cdot \log.^{m-1}x$$
$$+ (m)(m-1) f_3 \cdot \log.^{m-2}x - \text{ecc.};$$

il termine $(m+1)$ *esimo* di questo polinomio non conterrà la trascendente $\log.x$, almeno quella che entra nella funzione $f(x)\ \log.^m x$.

Così, se in vece della funzione $f(x)\cdot\log.^m x$ si avesse la $\frac{f(x)}{\log.^m x}$; ponendo

$\left(xf(x)\right)'=f_1, \left(xf_1(x)\right)'=f_2, \left(xf_2(x)\right)'=f_3, ---$ avrebbesi

$$\int\frac{f(x)}{\log.^m x}=-\frac{xf}{(m-1)\log.^{m-1}x}+\frac{1}{m-1}\int\frac{f_1}{\log.^{m-1}x},$$

$$\int\frac{f_2}{\log.^{m-1}x}=-\frac{xf_1}{(m-2)\log.^{m-2}x}+\frac{1}{m-2}\int\frac{f_2}{\log.^{m-2}x}, ---$$

e però

$$\int\frac{f(x)}{\log.^m x}=-\frac{xf}{(m-1)\log.^{m-1}x}-\frac{xf_1}{(m-1)(m-2)\log.^{m-2}x}----$$
$$+\frac{1}{(m-1)(m-2)---2\cdot 1}\int\frac{f_{m-1}}{\log.x};$$

cioè la primitiva richiesta dipenderebbe da quella della funzione $\frac{f_{m-1}(x)}{\log.x}$, nella quale l'esponente del $\log.x$ è l'unità.

99. Troviamo in secondo luogo la primitiva della funzione $a^x f(x)$ esponenziale.

Suppongasi $p=f(x)$, $r=a^x$, e però $\int r=\frac{a^x}{\log.a}$; e si avrà

$$\int a^x f(x)=\frac{a^x}{\log.a}f(x)-\frac{1}{\log.a}\int a^x f'(x),$$

$$\int a^x f'(x)=\frac{a^x}{\log.a}f'(x)-\frac{1}{\log.a}\int a^x f''(x),$$

$$\int a^x f''(x)=\frac{a^x}{\log.a}f''(x)-\frac{1}{\log.a}\int a^x f'''(x), ---.$$

Quindi sarà

$$\int a^x f(x)=\frac{a^x}{\log.a}\left(f(x)-\frac{f'(x)}{\log.a}+\frac{f''(x)}{\log.^2 a}-\text{ecc}\right);$$

così chè avrassi evidentemente l'effettiva primitiva, qui richiesta, almeno pei casi che la $f(x)$ sia una funzione algebraica razionale ed intera (§ 75).

Se per trovare la primitiva della funzione $a^x f(x)$, in vece di fare la decomposizione eseguita dianzi, si facesse la seguente $p=a^x$, $r=f(x)$; supposto $\int f(x)=f_1(x)$, $\int f_1(x)=f_2(x)$, - - -; avrebbesi procedendo in un modo analogo al medesimo usato dianzi

$$\int a^x f(x)=a^x f_1(x)-a^x f_2(x)\log.a+a^x f_3(x)(\log.a)^2-\text{ecc.}$$

ossia

$$\int a^x f(x)=a^x\left(f_1(x)-f_2(x)\log.a+f_3(x)(\log.a)^2-\text{ecc.}\right)$$

Converrà per alcune funzioni la prima di queste due decomposizioni, e per altre la seconda, per esempio, pel caso della $f(x)=x^n$, ove l'n sia numero intero, converrà la prima, che dà

$$\int a^x x^n=\frac{a^x}{\log.a}\left(x^n-\frac{n}{\log.a}x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{\log.^2a}x^{n-2}- - - \pm\frac{n(n-1)- - -2\cdot 1}{\log.^n a}\right)+K;$$

in vece pel caso della $f(x)=\frac{1}{x^n}$, n positivo, converrà la seconda, colla quale si trova

$$\int\frac{a^x}{x^n}=-\frac{a^x}{x^n}\left(\frac{x}{n-1}+\frac{x^2\log.a}{(n-1)(n-2)}+- - -+\frac{x^{n-1}(\log.a)^{n-2}}{(n-1)(n-2)- - -3\cdot 2}\right)+\frac{(\log.a)^{n-1}}{(n-1)(n-2)- - -2}\int\frac{a^x}{x};$$

giacchè la ricerca della primitiva $\int\frac{a^x}{x^n}$ riducesi visibilmente a quella della $\int\frac{a^x}{x}$, la quale però presenta essa pure le sue difficoltà.

100. In terzo luogo troviamo le primitive di funzioni trascendenti circolari e cominciamo da quelle delle funzioni tang.x, cot.x, sec.x, cosec.x.

Essendo tang.$x = \frac{\text{sen}.x}{\cos.x} = -\frac{(\cos.x)'}{\cos.x}$, sarà

$$\int \text{tang}.x = -\log.\cos.x + K.$$

Similmente trovasi $\int \cot.x = \log.\text{sen}.x + K$.

Così, per essere sec.$x = \frac{1}{\cos.x} = \frac{\cos.x}{1-\text{sen}.^2x}$, e questa frazione identica alla somma

$$\frac{1}{2}\,\frac{\cos.x}{1+\text{sen}.x} + \frac{1}{2}\,\frac{\cos.x}{1-\text{sen}.x},\ \text{sarà}$$

$\int \sec.x = \frac{1}{2}\log.(1+\text{sen}.x) - \frac{1}{2}\log.(1-\text{sen}.x) + K$, ossia

$\int \sec.x = \log.\sqrt{\frac{1+\text{sen}.x}{1-\text{sen}.x}} + K$, od anco eguale a

$$\log.\text{tang}.\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + K,$$

ove π esprime due angoli retti.

Con un metodo analogo si trova

$$\int \text{cosec}.x = \log.\text{tang}.\frac{x}{2} + K.$$

Finalmente, essendo $\frac{1}{\text{sen}.x\ \cos.x} = \text{tang}.x + \cot.x$, si avrà

$$\int \frac{1}{\text{sen}.x\ \cos.x} = \log.\text{sen}.x - \log.\cos.x + K = \log.\text{tang}.x + K.$$

101. Troviamo ordinatamente le primitive delle funzioni

$$\text{sen}.^n x,\ \cos.^n x,\ \text{sen}.^m x \cos.^n x,\ \frac{\text{sen}.^m x}{\cos.^n x},\ \frac{1}{\text{sen}.^m x \cos.^n x}.$$

Supposto $p = \text{sen.}^{n-1}x$, ed $r = \text{sen.}\,x$, e però $p' = (n-1)\,\text{sen.}^{n-2}x\cos.x$, $\int r = -\cos.x$, si ha l'equazione

$$\int \text{sen.}^n x = -\cos.x\,\text{sen.}^{n-1}x + (n-1)\int \cos.^2 x\,\text{sen.}^{n-2}x,$$

la quale si riduce alla seguente, ponendo per $\cos.^2 x$ il suo valore $1 - \text{sen.}^2 x$,

$$\int \text{sen.}^n x = -\cos.x\,\text{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \text{sen.}^{n-2}x - (n-1)\int \text{sen.}^n x,$$

che dà

$$\int \text{sen.}^n x = -\frac{1}{n}\cos.x\,\text{sen.}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen.}^{n-2}x.$$

Con questa ultima si trova facilmente, per *n pari*

$$\int \text{sen.}^n x = -\frac{1}{n}\left(\text{sen.}^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\text{sen.}^{n-3}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\text{sen.}^{n-5}x + \cdots + \frac{(n-1)(n-3)\cdots 5\cdot 3}{(n-2)(n-4)\cdots 6\cdot 4}\text{sen.}x\right)\cos.x +$$

$$\frac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{n(n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2}\,x + K,$$

e per *n dispari*

$$\int \text{sen.}^n x = -\frac{\cos.x}{n}\left(\text{sen.}^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\text{sen.}^{n-3}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\text{sen.}^{n-5}x \cdots + \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{(n-2)(n-4)\cdots 5\cdot 3}\right) + K.$$

Cambiando, in queste primitive, la x in $\frac{\pi}{2} - x$, e però sen.x in cos.x, e cos.x in sen.x, si hanno le corrispondenti primitive della funzione $\cos.^n x$, che è la seconda richiesta.

Per avere la primitiva della $\text{sen.}^m x\cos.^n x$, si supponga $p = \cos.^{n-1}x$, ed $r = \text{sen.}^m x\cos.x$, e però $p' = -(n-1)\cos.^{n-2}x\,\text{sen.}x$, e $\int r = \frac{1}{m+1}\text{sen.}^{m+1}x$; e si avrà

$$\int \text{sen.}^m x \cos.^n x = \frac{1}{m+1} \text{sen.}^{m+1} x \cos.^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} \int \cos.^{n-2} x \,\text{sen.}^{m+2} x,$$

ossia, posto per $\text{sen.}^{m+2} x$ il suo valore $\text{sen.}^m x - \text{sen.}^m x \cos.^2 x$,

$$\int \text{sen.}^m x \cos.^n x = \frac{1}{m+1} \text{sen.}^{m+1} x \cos.^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} \int \text{sen.}^m x \cos.^{n-2} x - \frac{n-1}{m+1} \int \text{sen.}^m x \cos.^n x,$$

da cui si desume la relazione seguente

$$\int \text{sen.}^m x \cos.^n x = \frac{1}{m+n} \text{sen.}^{m+1} \cos.^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} \int \text{sen.}^m x \cos.^{n-2} x.$$

Con questa equazione, la primitiva richiesta dipende, nel caso d'n dispari da quella di $\text{sen.}^m x \cos. x$, che è $\frac{1}{m+1} \text{sen.}^{m+1} + K$; e nel caso di n pari da quella di $\text{sen.}^m x$, la quale si è trovata sopra.

Se in questa medesima ultima equazione si cambia la n in *meno* n hassi

$$\int \frac{\text{sen.}^m x}{\cos.^n x} = \frac{1}{m-n} \frac{\text{sen.}^{m+1} x}{\cos.^{n+1} x} - \frac{n+1}{m-n} \int \frac{\text{sen.}^m x}{\cos.^{n+2} x}, \text{ ossia}$$

$$\int \frac{\text{sen.}^m x}{\cos.^{n+2} x} = \frac{1}{n+1} \frac{\text{sen.}^{m+1} x}{\cos.^{n+1} x} - \frac{m-n}{n+1} \int \frac{\text{sen.}^m x}{\cos.^n x}, \text{ e però}$$

$$\int \frac{\text{sen.}^m x}{\cos.^n x} = \frac{1}{n-1} \frac{\text{sen.}^{m+1} x}{\cos.^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\text{sen.}^m x}{\cos.^{n-2} x}$$

colla quale, la primitiva della $\frac{\text{sen.}^m x}{\cos.^n x}$ si riduce, nel caso dell'n pari a quella della $\text{sen.}^m x$, già nota, e nel caso dell'n dispari a quella della $\frac{\text{sen.}^m x}{\cos. x}$; e per tanto la presente primitiva si conoscerà, quando conoscerassi quest' ultima: troviamola.

Supposto $p=\frac{\text{sen.}^{m-1}x}{\cos.x}$, e però $r=\text{sen.}x$, $\int r=-\cos.x$, e

$p'=(m-1)\frac{\text{sen.}^{m-2}x}{\cos.^2x}-(m-2)\frac{\text{sen.}^m x}{\cos.^2 x}$, si ha

$\int pr=-\text{sen.}^{m-1}x+(m-1)\int\frac{\text{sen.}^{m-2}x}{\cos.x}-(m-2)\int\frac{\text{sen.}^m x}{\cos.x}$, ossia

$$\int\frac{\text{sen.}^m x}{\cos.x}=-\frac{1}{m-1}\text{sen.}^{m-1}x+\int\frac{\text{sen.}^{m-2}x}{\cos.x},$$

la quale somministra, per m pari,

$$\int\frac{\text{sen.}^m x}{\cos.x}=-\frac{1}{m-1}\text{sen.}^{m-1}x-\frac{1}{m-3}\text{sen.}^{m-3}x-\text{---}$$
$$-\frac{1}{1}\text{sen.}x+\log.\text{tang.}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)+K,$$

e per m dispari

$$\int\frac{\text{sen.}^m x}{\cos.x}=-\frac{\text{sen.}^{m-1}x}{m-1}-\frac{\text{sen.}^{m-3}x}{m-3}-\text{---}-\frac{\text{sen.}^2 x}{2}-\log.\cos.x+K.$$

102. Per facilitare la ricerca della primitiva di una funzione, spesse volte conviene ridurla a quella di una trascendente, se essa è algebraica, e reciprocamente a quella di una algebraica, se essa è trascendente: darò di ciò alcuni esempj.

Se per la funzione $\frac{x^m}{\sqrt{(1-x^2)}}$ si fa $x=\text{sen.}t$, hassi $\left(\frac{dx}{dt}\right)=\cos.t$, e $\sqrt{(1-x^2)}=\cos.t$, per cui essa si riduce alla semplice $\text{sen.}^m t$; dimodochè, se nella primitiva di questa rispetto alla t, si porrà in vece di sen. t la x, avrassi quella della $\frac{x^m}{\sqrt{(1-x^2)}}$ rispetto alla x.

In secondo luogo, abbiasi la funzione $\text{tang.}^m x$: supposto $\text{tang.}x=t$ ossia $x=\text{Ang.tang.}t$, e però

$\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{1}{1+t^2}$; la ricerca della primitiva della funzione tang.$^m x$ riducesi a quella presa rispetto alla t della $\frac{t^m}{1+t^2}$; la quale si ha in un tratto.

In terzo luogo, vogliasi la primitiva della frazione $\frac{a}{d+c\cos.x}$, la quale occorre spesse volte: le a, c, d sono costanti.

Suppongasi tang. $\frac{x}{2}=t$, e si avrà tang. $x=\frac{2t}{1-t^2}$, $\cos.x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, e $\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{2}{1+t^2}$; e la proposta ridurrassi alla seguente, algebraica,

$$\frac{2a}{c+d+(d-c)t^2},$$

la cui primitiva si sa (§ 80) trovare: troviamola effettivamente, evitando la comparsa degli immaginarj apparenti.

Distinguasi per ciò i tre casi di d *eguale*, *maggiore* e *minore* di c.

Se $d=c$, la funzione in t riducesi alla $\frac{2a}{c+d}=\frac{a}{c}$, una cui primitiva è $\frac{a}{c}t$; e però la primitiva richiesta, per questo caso, sarà $\frac{a}{c}$ A. tang. $\frac{x}{2}+K$.

Se $d>c$, alla funzione in t si dia la forma

$$\frac{2a}{d+c}\cdot\frac{1}{1+\frac{d-c}{d+c}t^2} \text{ ossia } 2a\sqrt{\frac{1}{d^2-c^2}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{d-c}{d+c}}}{1+\left(t\sqrt{\frac{d-c}{d+c}}\right)^2},$$

una cui primitiva evidentemente è

$$\frac{2a}{\sqrt{(d^2-c^2)}}\cdot \text{A.tang.}\, t\sqrt{\frac{d-c}{d+c}};$$

e per tanto la richiesta sarà

$$\frac{2a}{\sqrt{(d^2-c^2)}}\text{A.tang.}\left(\sqrt{\frac{d-c}{d+c}}\cdot \text{tang.}\,\frac{x}{2}\right)+K.$$

Pel caso di $d<c$, diasi alla medesima funzione in t la forma

$$\frac{2a}{c-d}\cdot\frac{1}{\alpha^2-t^2},\text{ ove } \alpha \text{ è posta per } \sqrt{\frac{c+d}{c-d}}:$$

questa è evidentemente identica all'

$$\frac{a}{\sqrt{(c^2-d^2)}}\left(\frac{1}{t+\alpha}-\frac{1}{t-\alpha}\right);$$

una cui primitiva è $\dfrac{a}{\sqrt{(c^2-d^2)}}\log.\dfrac{t+\alpha}{t-\alpha}$; quindi pel caso presente la primitiva richiesta sarà

$$\frac{a}{\sqrt{(c^2-d^2)}}\log.\frac{\sqrt{(c-d)}\cdot\text{tang.}\,\frac{x}{2}+\sqrt{(c+d)}}{\sqrt{(c-d)}\cdot\text{tang.}\,\frac{x}{2}-\sqrt{(c+d)}}+K.$$

103. Vediamo anco, come trovare la primitiva della funzione $\dfrac{a\cos.x+b}{(c\cos.x+d)^n}$, ove l'$n$ esprime un numero intero positivo, e le a, b, c, d costanti qualsivogliono.

Si potrebbe ridurre la ricerca di questa primitiva, a quella già contemplata (§ 83); ma stimo bene di fare per essa, ciò che ho fatto per quella.

Suppongasi

$$\int\frac{a\cos.x+b}{(c\cos.x+d)^n}=\frac{A\,\text{sen.}\,x}{(c\cos.x+d)^{n-1}}+\int\frac{B+C\cos.x}{(c\cos.x+d)^{n-1}},$$

dove A, B, C sono costanti a determinarsi, perchè abbia luogo questa equazione indipendentemente dalla x.

Derivando questa equazione, e dalla risultante eliminando i denominatori, e poscia sostituendo $1-\cos.^2 x$ per $\text{sen.}^2 x$, indi eguagliando fra loro i coefficienti delle simili potenze di $\cos. x$, si hanno le tre equazioni

$$(n-1)cA+dB-b=0,\quad Ad+Bc+Cd-a=0,\quad C-(n-2)A=0,$$

che danno

$$A=\frac{ad-bc}{(n-1)(d^2-c^2)},\quad B=\frac{bd-ac}{d^2-c^2},\quad C=\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{ad-bc}{d^2-c^2};$$

e per tanto si avrà l'equazione

$$\int\frac{a\cos.x+b}{(c\cos.x+d)^n}=\frac{(ad-bc)\,\text{sen.}\,x}{(n-1)(d^2-c^2)(c\cos.x+d)^{n-1}}$$
$$+\frac{1}{(n-1)(d^2-c^2)}\int\frac{(n-1)(bd-ac)+(n-2)(ad-bc)\cos.x}{(c\cos.x+d)^{n-1}}$$

pel cui mezzo evidentemente la richiesta primitiva dipenderà finalmente da quella della funzione $\frac{1}{c\cos.x+d}$, che si sa determinare.

Se fosse $n=1$, nella equazione qui trovata, comparirebbe lo *zero* nei denominatori: ma ecco, come si può avere la primitiva in tal caso.

Essendo, come è facile persuadersi

$$\frac{a\cos.x+b}{c\cos.x+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{c\cos.x+d},\ \text{si ha}$$

$$\int\frac{a\cos.x+b}{c\cos.x+d}=\frac{a}{c}x+\frac{bc-ad}{c}\int\frac{1}{c\cos.x+d};$$

e però si terrà per conosciuta anch'essa; giacchè dipende da quella della $\frac{1}{c\cos.x+d}$, già determinata.

104. Occorrono talvolta le primitive di funzioni trascendenti-circolari, nelle quali vi sono gli angoli effet-

tivi in vece dei loro seni, coseni, - - -: dirò qui pure, come si suole procedere nel rintracciare alcune di esse.

Supposto $\int f(x) = f_1(x)$, mediante la solita proprietà (§ 96), si hanno

$$\int f(x) \cdot \text{A.sen.}x = f_1(x) \cdot \text{A.sen.}x - \int \frac{f_1(x)}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

$$\int f(x) \cdot \text{A.tang.}x = f_1(x) \cdot \text{A.tang.}x - \int \frac{f_1(x)}{1+x^2},$$

cioè le primitive delle funzioni $f(x) \cdot \text{A.sen.}\,x$, $f(x)$, A.tang.x dipendenti da quelle delle

$$\frac{f_1(x)}{\sqrt{(1-x^2)}},\quad \frac{f_1(x)}{1+x^2},$$

che saranno algebraiche, se lo sarà $f_1(x)$.

Vogliasi ora la primitiva della $f(x) \cdot (\text{A.sen.}x)^n$, ove l'$n$ esprime un numero intero e positivo.

Supposto $\int f(x) = f_1(x)$, e per semplicità A.sen.$x = \phi(x)$, colla medesima proprietà anzi citata, si ha la equazione

$$\int \phi^n \cdot f = \phi^n \cdot f_1 - n \int \frac{\phi^{n-1} f_1}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

colla quale si può far dipendere la primitiva richiesta da un'altra, in cui manchi la ϕ.

Nel caso della $f(x) = 1$, e però $\int f(x) = x$, hassi

$$\int \phi^n = x\phi^n - n \int \phi^{n-1} \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Ma la stessa equazione dà

$$\int \phi^{n-1} \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\phi^{n-1} \cdot \sqrt{(1-x^2)} + (n-1) \int \phi^{n-2};$$

adunque avrassi la seguente

$$\int \phi^n = x\phi^n + n\phi^{n-1} \cdot \sqrt{(1-x^2)} - (n-1)\, n \int \phi^{n-2}$$

mediante la quale, la richiesta primitiva, dipenderà o da quella della unità, ovvero della ϕ cioè da quella della A.sen.x, note entrambe.

LEZIONE V.

Delle primitive degli ordini superiori delle funzioni di una sola variabile, e delle primitive duplicate, triplicate, - - - ossia parziali.

105. Si chiama primitiva *n esima* o dell'ordine ennesimo della $f(x)$, quella funzione la cui derivata *n esima* è la stessa $f(x)$; e si indica col simbolo

$\int^{(n)} f(x)dx^n$ o semplicemente col $\int^{(n)} f(x)$, quando la variabile sia sottintesa.

Abbiasi $F(x) = \int^{(m+n)} f(x)dx^{m+n}$ ossia $F^{(m+n)}(x) = f(x)$.

Essendo $F^{(m+n)}(x) = \left(F^{(m)}(x)\right)^{(n)}$, sarà

$$\left(F^{(m)}(x)\right)^{(n)} = f(x), \text{ e però}$$

$$F^{(m)}(x) = \int^{(n)} f(x)dx^n \text{ ed anco } F(x) = \int^{(m)} dx^m \int^{(n)} f(x)dx^n.$$

E quindi avrassi

$$\int^{(m+n)} f(x)\, dx^{m+n} = \int^{(m)} dx^m \int^{(n)} f(x)\, dx^n;$$

vale a dire, la primitiva $(m+n)$ *esima* della $f(x)$ eguale alla primitiva *m esima* della primitiva *n esima* della stessa funzione $f(x)$.

Da questa proprietà emerge successivamente

$$\int^{(n)} f = \int^{(n-1)} dx^{n-1} \int f dx = \int^{(n-2)} dx^{n-2} \int dx \int f dx = - - -$$

$$= \int dx \int dx \int dx - - - \int dx \int f dx$$

ove il segno $\int$ in quest'ultima è ripetuto n volte.

E per tanto, la determinazione della primitiva di un ordine qualunque non presenterà difficoltà essenzialmente diverse di quelle, che si incontreranno nelle determinazioni delle primitive del primo ordine.

Sia $f(x)=x^m$, e vogliasi $\int^{(3)} f(x)$.

Essendo $\int x^m\,dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+K$, sarà

$$\int^{(2)} x^m=\frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)}+Kx+B, \text{ e però}$$

$$\int^{(3)} x^m=\frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)}+\frac{1}{2}Kx^2+Bx+C:$$

K, B, C esprimono le costanti volute dalle tre primitive eseguite.

Sarebbe stato questo il luogo opportuno di porre ciò che costituisce il § 88, ma ho creduto bene di porlo immediatamente dopo l'esposto nell'87.

106. Le F, f rappresentino due funzioni di due o più variabili x, y, z, - - - indipendenti, ed abbiasi primieramente

$$\left(\frac{d^{m+n}F}{dx^m\,dy^n}\right)=f.$$

La F avente la derivata parziale $(m+n)$ *esima* eguale alla f si chiama primitiva parziale $(m+n)$ *esima* della f medesima, e presa m volte rispetto alla x, ed n volte rispetto alla y; e si suole indicare col simbolo

$$\int^{(m+n)} f\,dx^m\,dy^n.$$

In secondo luogo abbiasi $\left(\frac{d^{m+n+r}F}{dx^m dy^n dz^r}\right)=f$, la F chiamasi primitiva parziale $(m+n+r)$ *esima* della f, presa m volte rispetto alla x, n volte rispetto alla y, ed r volte rispetto alla z; e si indica col simbolo

$$\int^{(m+n+r)} f\,dx^m\,dy^n\,dz^r.$$

Le $\int^{(m+n)} f dx^m dy^n$, $\int^{(m+n+r)} f dx^m dy^n dz^r$, --- si chiamano anco primitive od integrali duplicati, triplicati, ---.

Essendo $\left(\frac{d^{m+n}F}{dx^m dy^n}\right)=f$, si ha $\left(\frac{d^mF}{dx^m}\right)=\int^{(n)} f dy^n$, e però $F=\int^{(m)} dx^m \int^{(n)} f\,dy^n$. Ma d'altronde hassi $\left(\frac{d^{m+n}F}{dx^m dy^n}\right)=\left(\frac{d^{m+n}F}{dy^n dx^m}\right)$, per cui $\left(\frac{d^{m+n}F}{dy^n dx^m}\right)=f$, ossia $\left(\frac{d^nF}{dy^n}\right)=\int^{(m)} f dx^m$, e però anco $F=\int^{(n)} dy^n \int^{(m)} f\,dx^m$; adunque sarà

$$\int^{(m)} dx^m \int^{(n)} f\,dy^n \text{ eguale alla } \int^{(n)} dy^n \int^{(m)} f\,dx^m.$$

Proprietà analoghe a quella rappresentata con questa eguaglianza hanno evidentemente luogo per le primitive triplicate, ---.

Da queste poche dichiarazioni manifestasi che le determinazioni delle primitive duplicate, triplicate, --- riduconsi in sostanza a quelle di più primitive ordinarie cioè di una sola variabile.

Si abbia $f=x^m y^n$; e vogliasi $F=\int^{(2)} f\,dx\,dy$.

Per essere $\int f\,dy=\frac{x^m y^{n+1}}{n+1}+K$, K costante rispetto alla y, si ha

$$F=\int\left(\frac{x^m y^{n+1}}{n+1}+K\right)dx.$$

Siccome nel trovare la primitiva rispetto alla y si deve considerare la x come una costante, così la K, introdotta per completare questa primitiva, potrà essere una funzione arbitraria della x; onde indicare questa sua proprietà scriveremo $K(x)$, per cui sarà

$$F = \frac{x^{m+1}y^{n+1}}{(m+1)(n+1)} + \int K(x)dx + B(y),$$

la $B(y)$ è per quest' ultima operazione eseguita rispetto alla x ciò, che la $K(x)$ si è supposta per l' operazione eseguita rispetto alla y.

Essendo $K(x)$ una funzione arbitraria della x, la $\int K(x)dx$ sarà anch' essa una funzione arbitraria della x medesima: chiamisi $A(x)$. Quindi la F richiesta risulterà così espressa

$$\frac{x^{m+1}y^{n+1}}{(m+1)(n+1)} + A(x) + B(y).$$

In generale, nello sviluppo della $\int^{m+n} fdx^m dy^n$ vi saranno m funzioni arbitrarie della y ed n funzioni arbitrarie della x; anzi analoghe proprietà hanno luogo per gli sviluppi delle primitive triplicate, quadruplicate, ---.

107. Per le primitive duplicate, triplicate, --- potrei esporre almeno altrettante proposizioni analoghe a quelle trattate dal § 84 al 88; ma per varie ragioni mi limiterò alla esposizione della sola seguente, della quale è un caso particolare quella relativa alle primitive duplicate analoga alla trattata al § 87 per le primitive semplici.

La f funzione delle x, y sia algebraica razionale intera e del grado m rispetto alla x, e dell' n rispetto alla y, e si voglia l' espressione della $\int^0 dy \int^0 f(x,y)dx$, cioè della primitiva rispetto alla y, che comincia colla $y=0$, della quantità già primitiva della $f(x, y)$ presa rispetto alla x e che comincia colla $x=0$, *espressa* per quei valori della $f(x, y)$ medesima i quali corrispondono

$$\text{alla } x=0,\ a_1x,\ a_2x,\ ---,\ x$$

$$\text{ed alla } y=0,\ c_1y,\ c_2y,\ ---,\ y$$

dove sì la $0, a_1, a_2, --- 1$, che la $0, c_1, c_2, --- 1$ sono due serie numeriche entrambe crescenti.

Ammetteremo conosciuti i valori delle

$$A,\ A_1,\ A_2,\ ---\ A_r;\ B,\ B_1,\ B_2,\ ---\ B_s,$$

che rendono le primitive $\int^0 \phi(t)\,dt$, $\int^0 \lambda(t)\,dt$ eguali ai prodotti

$$t\Big(A\phi(0)+A_1\phi(a_1t)+A_2\phi(a_2t)+----+A_r\phi(t)\Big),$$

$$t\Big(B\lambda(0)+B_1\lambda(c_1t)+B_2\lambda(c_2t)+----+B_s\lambda(t)\Big),$$

ove le $\phi(t), \lambda(t)$ esprimono funzioni della t algebraiche razionali intere, la prima del grado m, e la seconda del grado n.

Si ponga

$$Af(0,y)+A_1f(a_1x,y)+A_2f(a_2x,y)+\cdots+A_rf(x,y)=\psi(y);$$

e per lo ammesso diansi avransi

$$\int^0 f\,dx=x\psi(y),\ \text{e} \int^0 dy\int^0 f\,dx \ \text{ossia}\ x\int^0 \psi(y)\,dy$$

eguale ad

$$xy\Big(B\psi(0)+B_1\psi(c_1y)+B_2\psi(c_2y)+----+B_s\psi(y)\Big).$$

Sostituendo in questa espressione della primitiva

$\int^{0}\!dy\int^{0}\!fdx$ in luogo delle quantità $\psi(0), \psi(c_1y), \psi(c_2y), \cdots \psi(y)$ i loro rispettivi valori, si ha evidentemente la stessa $\int^{0}\!dy\int^{0}\!fdx$ eguale al prodotto di xy per la somma di tutti i valori di $A_\alpha B_\mu f(a_\alpha x,\, c_\mu y)$ corrispondenti all'

$\alpha = 0,\ 1,\ 2, --- r$, ed alla $\mu = 0,\ 1,\ 2, --- s$.

Per dare un esempio sia $m = n = 3$; e sarà (§ 87) $r = s = 2$, $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = c_2 = 1$, e le altre a e c *nulle*, ed $A = B = \frac{1}{6}$, $A_1 = B_1 = \frac{2}{3}$, ed $A_2 = B_2 = \frac{1}{6}$; e però avrassi la $\int^{0}\!dy\int^{0}\!fdx$ per questo caso eguale al prodotto di xy per la somma di tutti i valori di $A_\alpha B_\mu f(a_\alpha x,\, c_\mu y)$ corrispondenti all' $\alpha = \beta = 0,\ 1,\ 2$, somma che è la seguente

$$\big(f(0,0) + f(x,0) + f(0,y) + f(x,y)\big) : 36$$

$$\textit{più}\ \left(f\left(0, \frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}, 0\right) + f\left(\frac{x}{2}, y\right) + f\left(x, \frac{y}{2}\right)\right) : 9$$

$$\textit{più}\ \frac{4}{9} f\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

Evidentemente quest' ultimo risultamento è per le primitive duplicate ciò che lo esposto nel paragrafo 87 è per le primitive semplici.

108. La F si ritenga una funzione delle x, y; e suppongasi $\int^{(m)} F dx^m = P$, P sarà anch' essa funzione delle x, y medesime.

Da questa equazione si ha la

$$F=\left(\frac{d^m P}{dx^m}\right), \text{ ed anco } \left(\frac{d^n F}{dy^n}\right)=\left(\frac{d^{m+n} P}{dx^m dy^n}\right) \text{ ovvero}$$

$$\left(\frac{d^n F}{dy^n}\right)=\left(\frac{d^m P^{(n)}(y)}{dx^m}\right); \text{ e però sarà}$$

$$\int^{(m)}\left(\frac{d^n F}{dy^n}\right)dx^m=\left(\frac{d^n P}{dy^n}\right)+p, \text{ ossia}$$

$$\int^{(m)}\left(\frac{d^n F}{dy^n}\right)dx^m=\left(\frac{d^n \int^{(m)} F\, dx^m}{dy^n}\right)+p,$$

ove p esprime una funzione della sola y ed algebraica, razionale, intera e del grado $m-1$. Vale a dire, la primitiva *m esima* rispetto alla x della derivata *n esima* rispetto alla y di una quantità qualsivoglia e la derivata *n esima* rispetto alla y della primitiva *m esima* rispetto alla x della medesima quantità differiranno al più di una funzione algebraica, razionale, intera della y del grado $(m-1)$. Anzi analoga proprietà ha luogo anco per le funzioni di quante variabili si vogliano.

109. Così, se la funzione $F(x,y,---)$ avrà le derivate parziali dell'ordine *n esimo* eguali ordinatamente alle derivate parziali analoghe dell'ordine *n esimo* della $f(x,y,---)$; le due funzioni differiranno al più di una funzione delle $x,y,---$ *algebraica razionale intera del grado* $(n-1)$.

Limiterò la dimostrazione al caso di due sole variabili, e che le derivate tra loro eguali siano quelle del *terzo ordine*: si concepirà però, come essa si potrà estendere ad ogni altro caso.

Chiamisi Δ la differenza $F-f$.

Essendo per ipotesi

$$F'''=f''', \quad F_{/}''=f_{/}'', \quad F'_{//}=f'_{//}, \quad F_{///}=f_{///}$$

si avranno le equazioni identiche

$$\Delta'''=0, \quad \Delta_{/}''=0, \quad \Delta'_{//}=0, \quad \Delta_{///}=0.$$

Dalla $\Delta'''=o$ si ha $\Delta''=\phi(y)$, la quale dà $\Delta''_{/}=\phi'(y)$; e però, per la seconda $\Delta''_{/}=o$ sarà $\phi'(y)=o$ ossia $\phi=A$ costante; cioè avrassi

$$\Delta''=A.$$

Questa dà $\Delta'=Ax+\psi(y)$, la quale somministra $\Delta'_{//}=\psi''(y)$, per cui stante la $\Delta'_{//}=o$ sarà $\psi''(y)=o$ ossia $\psi=By+C$, ove B, C esprimono due costanti; e per tanto sarà

$$\Delta'=A\,x+B\,y+C.$$

Da quest'ultima si desume $\Delta=\frac{1}{2}Ax^2+Bxy+Cx+\xi(y)$, che dà $\Delta_{///}=\xi'''(y)$, per cui, essendo $\Delta_{///}=o$ sarà $\xi'''(y)=o$ ossia $\xi=\frac{1}{2}Dy^2+Ey+G$, ove le D, E, G esprimono altre costanti. Quindi sarà Δ ossia

$$F-f=\tfrac{1}{2}A\,x^2+B\,x\,y+\tfrac{1}{2}D\,y^2+C\,x+E\,y+G:$$

appunto come si è dichiarato.

Se le derivate eguali fra loro fossero le sole prime, le due funzioni differirebbero al più di una quantità costante.

Sopra si è veduto che la Δ, avendo le proprietà $\Delta'''=o$, $\Delta''_{/}=o$, $\Delta'_{//}=o$, $\Delta_{///}=o$, è necessariamente della forma $\frac{1}{2}A\,x^2+B\,x\,y+\frac{1}{2}D\,y^2+C\,x+E\,y+G$. In generale, se le derivate parziali *n esime* di una funzione di un numero qualunque di variabili saranno *nulle* separatamente, essa consisterà in una funzione delle variabili stesse, la quale sarà algebraica razionale intera ed al più del grado $(n-1)$.

PARTE QUARTA

SVILUPPI, E RELAZIONI TRA UNA FUNZIONE E LA SUA PRIMITIVA, E TRA LE QUANTITÀ SVILUPPABILI SECONDO DIMENSIONI POSITIVE E CRESCENTI DELLE STESSE INDETERMINATE.

LEZIONE PRIMA

Degli sviluppi ordinarj di una funzione qualunque.

110. Comincerò a dimostrare, che la quantità d'aggiungersi alla $\varphi(x)$ per costituire quella che eguaglia la $\varphi(x+\omega)$, ritenuta la x variabile e l'ω indeterminata, dev' essere della forma

$$p\,\omega + q\,\omega^2 + r\,\omega^3 + \text{ecc.},$$

come si è supposto tacitamente nella prima lezione; e ciò farò, ammettendo l'unico principio, che, se una funzione di una variabile si annulla, quando la variabile sia *zero*, essa funzione consiste nel prodotto di una potenza della variabile con esponente positivo per un'altra quantità, che nè si annulla nè diviene infinita coll'annullarsi della variabile stessa.

Suppongasi

$$\varphi(x+\omega) = \varphi(x) + A(x, \omega),$$

e ciò debba aver luogo per la x variabile ed ω indeterminata, non escluso il caso della $\omega = 0$. La $A(x, \omega)$ non sarà nulla, perchè $\varphi(x)$ è una funzione della x; ma il suo valore corrispondente alla $\omega = 0$ cioè $A(x, 0)$ dovrà essere nullo.

Essendo $A(x, \omega)$ tal funzione dell'ω, che si annulla colla $\omega = 0$, si può essa rappresentare col prodotto $\omega^m B$, ove l'esponente m sia tale, che il valore della $B(x, \omega)$ corrispondente all'$\omega = 0$ non sia nè *zero* nè infinito; e però avrassi

$$\phi(x + \omega) = \phi(x) + \omega^m B(x, \omega).$$

In questa equazione si ponga $x + \omega$ in vece della x, e si avrà la

$$\phi(x + 2\omega) = \phi(x + \omega) + \omega^m B(x + \omega, \omega) \text{ ossia}$$

$$\phi(x + 2\omega) = \phi(x) + \omega^m \Big(B(x, \omega) + B(x + \omega, \omega)\Big):$$

nella stessa prima equazione cambiasi l'ω in 2ω, ed avrassi la

$$\phi(x + 2\omega) = \phi(x) + \omega^m \cdot 2^m B(x, 2\omega).$$

Le due equazioni, qui ottenute, somministrano la seguente

$$\phi(x) + \omega^m \cdot 2^m B(x, 2\omega) = \phi(x) + \omega^m \Big(B(x, \omega) + B(x + \omega, \omega)\Big);$$

e però sarà

$$2^m \cdot B(x, 2\omega) = B(x, \omega) + B(x + \omega, \omega)$$

ove le x, ω sono tuttora come al principio indeterminate affatto.

Facciasi in quest'ultima $\omega = 0$; e si avrà la

$$2^m B(x, 0) = B(x, 0) + B(x, 0) \text{ ossia } 2^m = 2;$$

giacchè $B(x, 0)$ non è *zero*.

La equazione $2^m = 2$ dà $m = 1$. Quindi sarà

$$\phi(x + \omega) = \phi(x) + \omega B(x, \omega).$$

Non essendo $B(x, 0)$ nè nulla nè infinita, si può supporre $B(x, \omega)$ eguale alla $B(x, o) + C(x, \omega)$, ove $C(x, \omega)$ esprima tal quantità, che si annulli colla $\omega = o$, ossia abbia la forma $\omega^n D(x, \omega)$, ove $D(x, o)$ non sia nè nulla nè infinita; e però sarà

$$\phi(x+\omega) = \phi(x) + \omega p + \omega^{n+1} D(x, \omega):$$

la p è scritta per semplicità in vece della $B(x, o)$.

Facendo per questa equazione ciò, che si è fatto sopra per la

$$\phi(x+\omega) = \phi(x) + \omega^m B(x, \omega),$$

si trova, che deve aver luogo la seguente

$$\omega(\omega q + \text{ecc.}) + \omega^{n+1}\Big(D(x,\omega) + D(x+\omega, \omega)\Big) = \omega^{n+1} \cdot 2^{n+1} D(x, 2\omega),$$

dove q esprime rispetto alla p, ciò che la stessa p è rispetto alla ϕ, e non può essere nulla, perchè p è funzione della x, altrimenti $D(x, o)$ sarebbe nulla, ciò che è assurdo, a meno chè abbiasi $\phi(x+\omega) = \phi(x) + \omega p$, il che limiterebbe $\phi(x)$ alla forma $a + bx$, ove a, b sono costanti.

Ora, se la n fosse minore della *unità*, dall' ultima equazione esposta, divisa per ω^{n+1}, si avrebbe la

$$D(x, \omega) + D(x+\omega, \omega) + q\,\omega^{1-n} + \text{ecc.} = 2^{n+1} \cdot D(x, 2\omega),$$

la quale per $\omega = o$ darebbe $2D(x, o) = 2^{n+1} \cdot D(x, o)$, cioè l'$n$ *zero*, il che è assurdo. Se poi l'n fosse maggiore della unità, la stessa equazione, divisa per ω^2, darebbe quest' altra

$$q + \text{ecc.} + \omega^{n-1}\Big(D(x,\omega) + D(x+\omega,\omega)\Big) = 2^{n+1} \cdot \omega^{n-1} \cdot D(x, 2\omega),$$

che per $\omega = o$ somministrerebbe $q = o$, pure assurdo. Quindi sarà $n = 1$, e conseguentemente avrassi

$$\phi(x+\omega) = \phi(x) + \omega p + \omega^2 D(x, \omega).$$

Trattando la $D(x,\omega)$ ed ogni quantità analoga successiva, come si è dianzi trattata la $B(x,\omega)$, risulta $\varphi(x+\omega)$ eguale ad un polinomio della forma

$$\varphi(x)+\omega p+\omega^2 q+\omega^3 r+\text{ecc.},$$

ove l'ω vi è nel solo modo visibile: appunto come si è supposto tacitamente nella prima lezione.

111. Quei valori delle $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ---, che corrispondono alla $x=a$ valore particolare della x, si rappresenteranno, tanto in questa lezione quanto altrove, coi simboli $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, --- ovvero coi seguenti φ_a, φ'_a, φ''_a, ---.

Nella equazione

$$\varphi(x+\omega)=\varphi(x)+\omega\varphi'(x)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(x)+\frac{\omega^3}{2\cdot 3}\varphi'''(x)+\text{ecc.}$$

si faccia $x=a$, e si avrà

$$\varphi(a+\omega)=\varphi(a)+\omega\varphi'(a)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(a)+\frac{\omega^3}{2\cdot 3}\varphi'''(a)+\text{ecc.},$$

cioè il valore della $\varphi(x)$ corrispondente alla $x=a+\omega$ espresso con un polinomio, ordinato secondo le potenze ordinarie dell'ω, e formato coi valori della $\varphi(x)$ e delle sue derivate, tutti corrispondenti all'$x=a$.

Se i valori delle $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ---$\varphi^{(n-1)}(x)$ corrispondenti all'$x=a$ fossero nulli, avrebbesi

$$\varphi(a+\omega)=\frac{\omega^n}{2\cdot 3\cdots n}\varphi^{(n)}(a)+\frac{\omega^{n+1}}{2\cdot 3\cdots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(a)+\text{ecc.}:$$

in questa equazione cambiata l'ω in $x-a$, si ha la seguente

$$\varphi(x)=(x-a)^n\left(\frac{\varphi^{(n)}(a)}{2\cdot 3\cdots n}+\frac{\varphi^{(n+1)}(a)}{2\cdot 3\cdots(n+1)}(x-a)+\text{ecc.}\right);$$

e però il quoto della $\varphi(x)$ divisa per $(x-a)^n$ sarà

$$\frac{\varphi^{(n)}(a)}{2\cdot 3\cdots n}+\frac{\varphi^{(n+1)}(a)}{2\cdot 3\cdots(n+1)}(x-a)+\frac{\varphi^{(n+2)}(a)}{2\cdot 3\cdots(n+2)}(x-a)^2+\text{ecc.}$$

Se a fosse *zero*, avrebbesi

$$\phi(\omega)=\phi(0)+\omega\,\phi'(0)+\frac{\omega^2}{2}\,\phi''(0)+\frac{\omega^3}{2\cdot 3}\,\phi'''(0)+\text{ecc.},$$

ossia cambiata la ω in x

$$\phi(x)=\phi(0)+x\,\phi'(0)+\frac{x^2}{2}\,\phi''(0)+\frac{x^3}{2\cdot 3}\,\phi'''(0)+\text{ecc.};$$

vale a dire, una regola pressochè generale, per trovare lo sviluppo di una funzione della x ordinato secondo le potenze della stessa variabile x di esponenti crescenti ed interi.

Così, da quest' ultima equazione, se fosse $\phi(b)=0$, si avrebbe, cambiando in essa la x in b, la

$$0=\phi(0)+b\,\phi'(0)+\frac{b^2}{2}\,\phi''(0)+\frac{b^3}{2\cdot 3}\,\phi'''(0)+\text{ecc.};$$

e però, sottraendo i membri di questa dai corrispondenti della medesima antecedente, avrebbesi la seguente

$$\phi(x)=(x-b)\phi'(0)+\frac{1}{2}(x^2-b^2)\phi''(0)+\frac{1}{2\cdot 3}(x^3-b^3)\phi'''(0)+\text{ecc. ossia}$$

$$\phi(x)=(x-b)\left(\phi'(0)+\frac{1}{2}(x+b)\phi''(0)+\frac{1}{2\cdot 3}(x^2+bx+b^2)\phi'''(0)+\text{ecc.}\right),$$

che dà un' altra regola, onde avere il quoto della $\phi(x)$ divisa pel binomio $x-b$.

Vogliasi lo sviluppo della funzione

$$\phi\left(t+xf+\frac{x^2}{2}(f^2)'+\frac{x^3}{2\cdot 3}(f^3)''+\text{ecc.}\right),$$

ove la f esprime una funzione della t, e le derivate $(f^2)'$, $(f^3)''$, - - - sono prese rispetto alla t stessa.

Per semplicità pongasi

$$t+xf+\frac{x^2}{2}(f^2)'+\frac{x^3}{2\cdot 3}(f^3)''+\text{ecc.}=p\ ;$$

trovinsi le $p'(x)$, $p''(x)$, $p'''(x)$, - - - e facciasi in esse

$x=0$; ed avransi

$$p'(0)=f,\ p''(0)=(f^2)',\ p'''(0)=(f^3)'', ---.$$

Così per essere evidentemente (§ 20)

$$\varphi'(x)=\varphi'(p)p'(x),$$
$$\varphi''(x)=\varphi''(p)p'(x)^2+\varphi'(p)p''(x),$$
$$\varphi'''(x)=\varphi'''(p)p'(x)^3+3\varphi''(p)p'(x)p''(x)+\varphi'(p)p'''(x),$$
$$- -$$

sarà

$$\varphi'(0)=f\varphi'(t),$$
$$\varphi''(0)=\varphi''(t)f^2+\varphi'(t)(f^2)'=(\varphi'(t)f^2)',$$
$$\varphi'''(0)=\varphi'''(t)f^3+3\varphi''(t)(f^2)'f+\varphi'(t)(f^3)''=(\varphi'(t)f^3)'',$$
$$- -;$$

e però, siccome è

$$\varphi(x)=\varphi(0)+x\varphi'(0)+\frac{x^2}{2}\varphi''(0)+\frac{x^3}{2\cdot3}\varphi'''(0)+\text{ecc.},$$

così avrassi

$$\varphi=\varphi(t)+x\varphi'(t)f+\frac{x^2}{2}(\varphi'(t)f^2)'+\frac{x^3}{2\cdot3}(\varphi'(t)f^3)''+\text{ecc.},$$

cioè lo sviluppo richiesto.

112. Se la funzione a svilupparsi fosse la y, che entra in una equazione data tra essa e la x, trovate le equazioni derivate esatte della data, fatta $x=0$ in tutte, e sciolte le equazioni risultanti per rispetto alle y_0, y'_0, y''_0, y'''_0, ---, si avrebbero quei valori di queste quantità, che sostituiti nel polinomio

$$y_0+xy'_0+\frac{x^2}{2}y''_0+\frac{x^3}{2\cdot3}y'''_0+\text{ecc.},$$

lo ridurrebbero lo sviluppo richiesto della y.

Vogliasi lo sviluppo della y, funzione della x, che entra nella equazione data

$$y - t - xf(y) = 0,$$

dove t esprime una costante arbitraria, ovvero una variabile indipendente dalla x, e la $f(y)$ una funzione della stessa y.

Le successive equazioni derivate esatte di questa equazione sono

$$0 = y' - f(y) - xf'(y)y',$$
$$0 = y'' - 2y'f'(y) - x\left(f''(y)y'^2 + y''f'(y)\right),$$
$$0 = y''' - 3y'^2f''(y) - 3y''f'(y)$$
$$- x\left(3y'y''f'(y) + y'''f'(y) + y'^3f'''(y)\right),$$

- .

Facendo nella data equazione ed in queste $x = 0$, si hanno le

$$y_0 - t = 0,$$
$$y'_0 - f(y_0) = 0,$$
$$y''_0 - 2y'_0f'(y_0) = 0,$$
$$y'''_0 - 3y'_0f''(y_0) - 3y''_0f'(y_0) = 0,$$

- - - - - - - - - - - - - - - - ,

che danno

$y_0 = t, y'_0 = f(t), y''_0 = 2f(t)f'(t)$ ossia $\left(f(t)^2\right)'$,

$y'''_0 = 3f(t)^2f''(t) + 3\left(f(t)^2\right)' + f'(t)$ ovvero $\left(f(t)^3\right)''$, - - -

ove le derivate sono prese rispetto alla t; e però per la formula od equazione generale

$$y_x = y_0 + xy'_0 + \frac{x^2}{2}y''_0 + \frac{x^3}{2\cdot 3}y'''_0 + \text{ecc. avrassi}$$

$$y = t + xf(t) + \frac{x^2}{2}\left(f(t)^2\right)' + \frac{x^3}{2\cdot 3}\left(f(t)^3\right)'' + \text{ecc.}$$

Combinando questa serie a quella esposta nell'esempio del paragrafo antecedente si facilita assaissimo il regresso delle serie.

113. La $\phi(x)$ può essere tale funzione della x, ed a quello od uno di quei pochi valori della x, per cui riesca infinita la $\phi(a)$, ovvero la $\phi'(a)$, o la $\phi''(a)$---.

Per questi casi, lo sviluppo (§ 110) della $\phi(a+\omega)$ riesce illusorio; giacchè fra i suoi termini compare l'infinito. È questo un indizio, che lo sviluppo della $\phi(a+\omega)$ non può essere della forma

$$\phi(a)+\omega\,\phi'(a)+\frac{\omega^2}{2}\phi''(a)+\text{ecc.}$$

per cui, volendo lo sviluppo della $\phi(a+\omega)$, bisogna ricorrere ad altri metodi; si parlerà di questi sviluppi nei paragrafi 121, 122, 124.

LEZIONE II.

Proprietà che ha luogo tra alcune funzioni e le loro primitive definite.

114. Se i valori della funzione $\phi(x)$ corrispondenti all'$x=a$ e ad ogni altro successivo sino all'$x=b>a$ saranno finiti e *tutti positivi* o *tutti negativi*, la primitiva $\int\phi(x)$ estesa dalla $x=a$ sino alla $x=b$, cioè la $\int_b^a\phi(x)$, sarà anch'essa rispettivamente positiva o negativa, e finita.

Chiamisi $F(x)$ una primitiva della $\phi(x)$; e sarà $F(b)-F(a)$ la primitiva definita $\int_b^a\phi(x)$. Così, rappresenti t una variabile suscettibile di tutti i valori della x

dall'$x = a$, sino all'$x = b$. E si chiami A quel valore della $\phi(t)$, che è lontano dallo *zero* più di ogni altro, cioè il maggiore valore della $\phi(x)$, prescindendo, se occorre, dal segno, e tra quelli corrispondenti all'$x = a$ e ad ogni altro successivo sino all'$x = b$. L'A sarà positivo, se positivi saranno questi ultimi valori della $\phi(x)$, e negativo se tali saranno questi della $\phi(x)$ medesima.

Essendo i valori della $\phi(t)$ ossia della $F'(t)$ finiti, si avrà almeno (§ 109)

$$F(t+\omega) = F(t) + \omega\left(F'(t) + f(t,\omega)\right), \text{ ossia}$$
$$F(t+\omega) = F(t) + \omega\left(\phi(t) + f(t,\omega)\right),$$

dove la $f(t,\omega)$ sarà tal funzione della ω, che annullerassi colla $\omega = 0$. Per questa proprietà della funzione $f(t,\omega)$, cioè di annullarsi colla $\omega = 0$, i valori di essa, corrispondenti a quelli della ω nascenti e crescenti insensibilmente dopo lo *zero*, si scosteranno anch'essi insensibilmente e per continuità dallo *zero*, e ciò accadrà almeno sino ad un certo valore dell'ω; dimodochè, almeno per infiniti piccioli valori dell'ω, i corrispondenti della $f(t,\omega)$ saranno prossimi allo *zero* più di quello della $\phi(t)$, qualunque sia il valore di cui è suscettibile la t.

Chiamisi u uno degli anzidetti valori dell'ω tra quelli che sono parti aliquote o commensurabili colla differenza $b-a$; e sia $b-a$ eguale ad n volte l'u. E per semplicità, si rappresentino gli $a+u, a+2u, \text{---} a+(n-1)u, b$, che sono altrettanti valori della t coi simboli

$$t_1, t_2, t_3, \text{---} t_{n-1}, t_n.$$

Essendo $f(t,u)$, prossimo allo *zero* più di $\phi(t)$, i segni dei valori di $\phi(t) + f(t,u)$ saranno simili a quelli della stessa $\varphi(t)$, e nessuno di essi, cioè qualunque sia la t sarà nè zero nè lontano dallo *zero* quanto $\varphi(t)+\varphi(t)$ ossia $2\varphi(t)$; e però ogni valore di $\varphi(t)+f(t,u)$ sarà compreso tra *zero* ed il corrispondente di $2\varphi(t)$, ed a maggior ragione tra *zero* e $2A$, essendo A quel valore di $\varphi(t)$ lontano dallo *zero* più di ogni altro.

Per essere i valori di $\varphi(t)+f(t,u)$ compresi tra *zero* e $2A$, e però quelli di $u\big(\varphi(t)+f(t,\omega)\big)$ compresi tra *zero* e $2uA$; e d'altronde

$$u\big(\varphi(t)+f(t,\omega)\big)=F(t+u)-F(t),$$

i valori di ciascuna delle n differenze

$$F(a+u)-F(a),\ F(t_1+u)-F(t_1),\ F(t_2+u)-F(t_2),\ -----$$

$$-------\ F\big(t_{n-1}+u\big)-F\big(t_{n-1}\big)\ \text{ossia}\ F\big(b\big)-F\big(t_{n-1}\big),$$

saranno tutti indistintamente compresi tra *zero* e $2uA$; e per conseguenza la somma di esse, che è $F(b)-F(a)$, sarà compresa tra *zero* ed n *volte* $2uA$, cioè tra *zero* e $2nuA$. Quindi $F(b)-F(a)$ avrà il segno simile a quello di $2nuA$ ossia di $2(b-a)A$; vale a dire $F(b)-F(a)$ sarà positiva, se positivo sarà A, e negativa se tale sarà A; ed in entrambi i casi $F(b)-F(a)$ sarà finita per essere compresa tra *zero* e $2(b-a)A$ quantità finita.

Egli è evidente che, la primitiva della $\varphi(x)$ estesa dalla $x=a$ alla $x=b$, è identica o è la stessa di quella della $\varphi(a+s)$ presa rispetto alla s ed estesa dalla $s=0$ alla $s=b-a$: anzi una analoga proprietà ha luogo qualunque sia quest'ultimo valore della s; purchè i valori della $\varphi(a+s)$ dall'$s=0$ a quest'ultimo medesimo siano finiti ed indistintamente positivi ovvero negativi tutti.

LEZIONE III.

Delle quantità che comprendono e di quelle che eguagliano uno sviluppo ad una sola indeterminata da un termine qualunque di esso in avanti.

115. Si abbia la funzione $\phi'(x+s)$, la quale è la derivata della $\phi(x+s)$ presa tanto rispetto alla x quanto alla s: si consideri in essa la x come individuata, e la s variabile; ed i suoi valori dalla $s=0$ alla $s=\omega$ siano tutti finiti. P esprima una quantità non maggiore del più picciolo di questi valori della $\phi'(x+s)$, e G una non minore del più grande di questi valori della $\phi'(x+s)$.

Evidentemente i valori delle due differenze

$$\phi'(x+s)-P,\ G-\phi'(x+s)$$

dalla $s=0$ alla $s=\omega$ saranno tutti *finiti* e non *negativi*; e però, per l'esposto nel § antecedente, le primitive di esse prese rispetto alla s ed estese dalla $s=0$ alla $s=\omega$ saranno positive e finite. Queste primitive (§ 84) sono

$$\phi(x+\omega)-\phi(x)-\omega P,\ \omega G+\phi(x)-\phi(x+\omega);$$

e conseguentemente avranno luogo le due relazioni

$$\phi(x+\omega)-\phi(x)-\omega P>0,\ \omega G+\phi(x)-\phi(x+\omega)>0,$$

ossia le seguenti

$$\phi(x+\omega)>\phi(x)+\omega P,\ \phi(x+\omega)<\phi(x)+\omega G.$$

In secondo luogo, abbiasi la funzione $\phi''(x+s)$, che esprime la derivata seconda della $\phi(x+s)$ presa rispetto alla x ovvero rispetto alla s. Considerisi in questa pure la x data, e la s variabile; ed i suoi valori dalla $s=0$ alla $s=\omega$ siano finiti.

Le P, G siano due quantità, la prima non maggiore del più piccolo valore degli anzidetti della $\varphi''(x+s)$, e la seconda cioè G non minore del più grande di questi medesimi valori; e quelli delle due differenze

$$\varphi''(x+s)-P,\quad G-\varphi''(x+s)$$

dalla $s=0$ alla $s=\omega$ saranno tutti finiti e non negativi; e però, pel paragrafo antecedente, i valori delle loro primitive estese dalla $s=0$ a qualunque altro valore della s non maggiore dell' ω, cioè delle

$$\varphi'(x+s)-sP-\varphi'(x),\quad sG+\varphi'(x)-\varphi'(x+s)$$

saranno tutti indistintamente finiti e positivi; e pertanto anco le primitive di queste ultime funzioni della s, prese anch' esse rispetto alla s, ed estese dalla $s=0$ alla $s=\omega$, che sono

$$\varphi(x+\omega)-\frac{\omega^2}{2}P-\omega\varphi'(x)-\varphi(x),\ \frac{\omega^2}{2}G+\omega\varphi'(x)+\varphi(x)-\varphi(x+\omega)$$

saranno esse pure positive. Quindi avransi le due relazioni seguenti

$$\varphi(x+\omega)>\varphi(x)+\omega\varphi'(x)+\frac{\omega^2}{2}P,\ \varphi(x+\omega)<\varphi(x)+\omega\varphi'(x)+\frac{\omega^2}{2}G.$$

Ragionando similmente per la funzione $\varphi'''(x+s)$, si trova

$$\varphi(x+\omega)>\varphi(x)+\omega\varphi'(x)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(x)+\frac{\omega^3}{2\cdot 3}P,$$

$$\varphi(x+\omega)<\varphi(x)+\omega\varphi'(x)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(x)+\frac{\omega^2}{2\cdot 3}G,$$

ove le P, G sono rispetto alla $\varphi'''(x+s)$ quantità analoghe a quelle usate sopra per le altre funzioni $\varphi''(x+s)$, $\varphi'(x+s)$.

In generale, se i valori della $\varphi^{(n)}(x+s)$, derivata

n *esima* della $\varphi(x+s)$ presa o rispetto alla x ovvero alla s, dalla s *zero* sino all'ω siano finiti; si trova facilmente, che $\varphi(x+\omega)$ è maggiore di

$$\varphi(x)+\omega\varphi'(x)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(x)+\cdots+\frac{\omega^{n-1}}{2\cdot3\cdots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(x)+\frac{\omega^n}{2\cdot3\cdots n}P,$$

e minore di

$$\varphi(x)+\omega\varphi'(x)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(x)+\cdots+\frac{\omega^{n-1}}{2\cdot3\cdots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(x)+\frac{\omega^n}{2\cdot3\cdots n}G,$$

ove P esprime una quantità non maggiore del minor valore della $\varphi^{(n)}(x+s)$ tra quelli corrispondenti alla s dallo *zero* all'ω, e G una quantità non minore del maggior dei medesimi valori della $\varphi^{(n)}(x+s)$.

Similmente si dimostra che $\varphi(x-\omega)$ è, *minore* di ciò che hassi, cambiando l'ω in *meno* ω nella prima di queste ultime due quantità, e *maggiore* di quella che si ha, facendo un tal cambiamento d'ω nella seconda. Dimodochè, qualunque sia il segno dell'ω, la $\varphi(x+\omega)$ sarà compresa fra le medesime ultime due quantità esposte.

E qui fo riflettere, sebbene sia manifesto, che le funzioni

$$\varphi'(x+s),\ \varphi''(x+s),\ \varphi'''(x+s), --- \varphi^{(n)}(x+s)$$

si possono considerare i risultamenti, che si hanno, ponendo $x+s$ in luogo della x esistente nelle

$$\varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \varphi'''(x), --- \varphi^{(n)}(x)$$

derivate della $\varphi(x)$ prese rispetto alla x. E che di due quantità negative, più grande si chiama quella, la quale è la più prossima allo *zero*, ed anco che le quantità si suppongono reali, giacchè le grandezze relative delle immaginarie sono inconcepibili od anch'esse immaginarie: in ultimo che si terrà, sì in questa lezione che nelle altre, la ω *positiva*, semprechè non si dichiari altrimenti.

116. Si chiami h quel valore della s, che corrisponde al minor degli anzidetti valori della $\phi^{(n)}(x+s)$, e k quello che corrisponde al maggiore dei valori medesimi della $\phi^{(n)}(x+s)$. E tengasi

$$P=\phi^{(n)}(x+h),\text{ e } G=\phi^{(n)}(x+k);$$

più chiamisi S_n la somma dei primi n termini dello sviluppo della $\phi(x+\omega)$; ed avrassi

$$\text{tanto } \phi(x+\omega)>S_n+\frac{\omega^n}{2\cdot3\cdots n}\phi^{(n)}(x+h),$$

$$\text{quanto } \phi(x+\omega)<S_n+\frac{\omega^n}{2\cdot3\cdots n}\phi^{(n)}(x+k);$$

e però, siccome tra i valori successivi della $\phi^{(n)}(x+s)$ dall'$s=0$ all'$s=\omega$ vi è continuità, così vi sarà quello, che renderà S_n *più* il prodotto di esso per $\frac{\omega^n}{2\cdot3\cdots n}$ eguale alla $\phi(x+\omega)$: rappresentisi questo valore della derivata $\phi^{(n)}(x+s)$ colla stessa $\phi^{(n)}(x+s)$, ove la s si intenda opportunamente individuata; ed avrassi

$$\phi(x+\omega)=S_n+\frac{\omega^n}{2\cdot3\cdots n}\phi^{(n)}(x+s),\text{ cioè}$$

$$\phi(x+\omega)=\phi(x)+\omega\phi'(x)+\frac{\omega^2}{2}\phi''(x)+\text{----}$$
$$+\frac{\omega^{n-1}}{2\cdot3\cdots(n-1)}\phi^{(n-1)}(x)+\frac{\omega^n}{2\cdot3\cdots n}\phi^{(n)}(x+s).$$

Colle relazioni esposte in questo paragrafo e nell'antecedente si può determinare facilmente quel valore dell'ω, che rende un termine qualunque individuato dello sviluppo di $\phi(x+\omega)$ *meno* prossimo allo *zero* della somma di tutti i suoi seguenti, e che verifica una analoga proprietà anco per ogni altro valore dell'ω più prossimo allo *zero*.

117. I ragionamenti fatti superiormente per $\varphi(x+\omega)$ avendo luogo, qualunque sia la x, purchè sussistano le altre proprietà ammesse, avranno luogo anco pel caso particolarissimo dell'$x=0$. In questo caso hansi.

$$\varphi(\omega)>S_n^0+\frac{\omega^n}{2\cdot3\cdots n}P,\quad \varphi(\omega)<S_n^0+\frac{\omega^n}{2\cdot3\cdots n}G;$$

ove la P esprime una quantità non maggiore del più picciolo valore della $\varphi^{(n)}(s)$ dalla $s=0$ alla $s=\omega$, e la G una quantità non minore del più grande dei medesimi valori della $\varphi^{(n)}(s)$; e la S_n^0 il valore della S_n corrispondente alla $x=0$.

Similmente avrassi anco $\varphi(\omega)=S_n^0+\frac{\omega^n}{2\cdot3\cdots n}\varphi^{(n)}(s)$;

ove l's sia quella particolare, di cui si è parlato nel paragrafo antecedente.

Se in queste tre ultime equazioni si cambia la ω in x, si hanno le

$$\varphi(x)>\varphi(0)+x\varphi'(0)+\frac{x^2}{2}\varphi''(0)+\cdots+\frac{x^n}{2\cdot3\cdots n}P,$$

$$\varphi(x)<\varphi(0)+x\varphi'(0)+\frac{x^2}{2}\varphi''(0)+\cdots+\frac{x^n}{2\cdot3\cdots n}G,$$

$$\varphi(x)=\varphi(0)+x\varphi'(0)+\frac{x^2}{2}\varphi''(0)+\cdots\frac{x^{n-1}}{2\cdot3\cdots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0)$$
$$+\frac{x^n}{2\cdot3\cdots n}\varphi^{(n)}(s);$$

dove le $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, --- al solito esprimono ordinatamente i valori delle $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, --- corrispondenti alla $x=0$.

LEZIONE IV.

Delle quantità comprendenti e di quelle che eguagliano uno sviluppo a due o più indeterminate ommessi alcuni suoi primi termini.

118. Abbiasi la quantità $\omega\phi'(x+t,y+u)+\theta\phi_{\prime}(x+t,y+u)$, che si ottiene, ponendo $x+t, y+u$ nella $\omega\phi'(x)+\theta\phi'(y)$, in luogo delle x, y contenute nelle $\phi'(x), \phi'(y)$ derivate parziali della $\phi(x,y)$; e siano G, P il minore ed il maggiore valore di essa quantità, tra gli infiniti, che hansi, variando le t, u dalla $t=u=o$ alla $t=\omega$ ed $u=\theta$.

Per tutti questi valori delle t, u, i valori delle due differenze

$$\omega\phi'(x+t, y+u)+\theta\phi_{\prime}(x+t, y+u)-P,$$
$$G-\omega\phi'(x+t, y+u)-\theta\phi_{\prime}(x+t, y+u)$$

saranno evidentemente positivi.

In queste due differenze pongasi $s\omega$ in vece della t, ed $s\theta$ in vece della u; e si avranno le

$$\omega\phi'(x+s\omega, y+s\theta)+\theta\phi_{\prime}(x+s\omega, y+s\theta)-P,$$
$$G-\omega\phi'(x+s\omega, y+s\theta)-\theta\phi_{\prime}(x+s\omega, y+s\theta)$$

i cui valori dalla $s=o$ alla $s=1$ saranno anch'essi positivi; giacchè sono i medesimi delle due antecedenti, che corrispondono ai suddetti delle t, u; e per tanto, le loro primitive prese rispetto alla s ed estese dalla $s=o$ alla $s=1$ saranno positive (§ 114). Ma per essere

$$\omega\phi'(x+s\omega, y+s\theta)+\theta\phi_{\prime}(x+s\omega, y+s\theta)$$

(§ 59) visibilmente la derivata della $\phi(x+s\omega, y+s\theta)$

presa rispetto alla s, queste ultime due differenze hanno per primitive complete rispetto alla s le

$$\phi(x+s\omega, y+s\theta)-Ps+H, \quad Gs-\phi(x+s\omega, y+s\theta)+K$$

ove H, K esprimono due costanti; per cui le loro primitive estese dalla $s=0$ alla $s=1$ sono

$$\phi(x+\omega, y+\theta)-P-\phi(x,y), \quad G+\phi(x,y)-\phi(x+\omega, y+\theta);$$

adunque sarà

$$\phi(x+\omega, y+\theta)>\phi(x,y)+P, \text{ e } \phi(x+\omega, y+\theta)<\phi(x,y)+G.$$

In secondo luogo, abbiasi la quantità

$$\omega^2\phi''(x+t, y+u)+2\omega\theta\phi'_{/}(x+t, y+u)+\theta^2\phi_{//}(x+t, y+u);$$

e sia P il suo più piccolo valore e G il suo più grande valore dalla $t=u=0$ alla $t=\omega$, ed $u=\theta$. E le due differenze

$$\omega^2\phi''(x+s\omega, y+s\theta)+2\omega\theta\phi'_{/}(x+s\omega, y+s\theta)+\theta^2\phi_{//}(x+s\omega, y+s\theta)-P,$$

$$G-\omega^2\phi''(x+s\omega, y+s\theta)-2\omega\theta\phi'_{/}(x+s\omega, y+s\theta)-\theta^2\phi_{//}(x+s\omega, y+s\theta)$$

avranno i loro valori dalla $s=0$ alla $s=1$ tutti positivi.

Per essere

$$\omega^2\phi''(x+s\omega, y+s\theta)+2\omega\theta\phi'_{/}(x+s\omega, y+s\theta)+\theta^2\phi_{//}(x+s\omega, y+s\theta)$$

la derivata prima presa rispetto alla s della

$$\omega\phi'(x+s\omega, y+s\theta)+\theta\phi_{/}(x+s\omega, y+s\theta)$$

le due differenze, qui esposte, avranno per primitive complete rispetto alla s le

$$\omega\phi'(x+s\omega, y+s\theta)+\theta\phi_{/}(x+s\omega, y+s\theta)-sP+A,$$

$$sG-\omega\phi'(x+s\omega, y+s\theta)-\theta\phi_{/}(x+s\omega, y+s\theta)+B.$$

Le A, B costanti introdotte dalle operazioni eseguite, determinate mediante la condizione, che le primitive debbano essere nulle, quando sia $s=0$, risultano

$$A=-\omega\phi'(x)-\theta\phi'(y),\text{ e } B=\omega\phi'(x)+\theta\phi'(y);$$

valori che riducono le due primitive trovate alle

$$\omega\phi'(x+s\omega,y+s\theta)+\theta\phi_{/}(x+s\omega,y+s\theta)-sP-\omega\phi'(x)-\theta\phi'(y),$$

$$sG+\omega\phi'(x)+\theta\phi'(y)-\omega\phi'(x+s\omega,y+s\theta)-\theta\phi_{/}(x+s\omega,y+s\theta);$$

i cui valori dalla $s=0$ sino all' $s=1$ debbono essere positivi e finiti.

Si trovino le primitive anch'esse rispetto alla s di queste medesime ultime primitive, e si estendano dalla $s=0$ alla $s=1$; e si avranno

$$\phi(x+\omega,y+\theta)-\tfrac{1}{2}P-\omega\phi'(x)-\theta\phi'(y)-\phi(x,y),$$

$$\tfrac{1}{2}G+\omega\phi'(x)+\theta\phi'(y)+\phi(x,y)-\phi(x+\omega,y+\theta),$$

le quali, dovendo essere positive, danno

$$\phi(x+\omega,y+\theta)>\phi(x,y)+\omega\phi'(x)+\theta\phi'(y)+\tfrac{1}{2}P,$$

$$\phi(x+\omega,y+\theta)<\phi(x,y)+\omega\phi'(x)+\theta\phi'(y)+\tfrac{1}{2}G.$$

Così, se P rappresenti il minor valore di

$$\omega^3\phi'''(x+t,y+u)+3\omega^2\theta\,\phi''_{/}(x+t,y+u)$$

$$+3\omega\theta^2\phi'_{//}(x+t,y+u)+\theta^3\phi_{///}(x+t,y+u)$$

tra quelli, che hansi, variando le t, u dallo *zero* a $t=\omega$ ed $u=\theta$; e G rappresenti il più grande dei medesimi valori, e siano entrambi finiti, mediante ragionamenti analoghi a quelli fatti già due volte, si troverà

$$\varphi(x+\omega,\, y+\theta) > \varphi(x;\, y) + \omega\varphi'(x) + \theta\varphi'(y)$$
$$+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(x) + \omega\,\theta\varphi'_{\prime} + \frac{\theta^2}{2}\varphi''(y) + \frac{1}{2\cdot 3}P, \text{ e}$$

$$\varphi(x+\omega,\, y+\theta) < \varphi(x,\, y) + \omega\varphi'(x) + \theta\varphi'(y)$$
$$+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(x) + \omega\,\theta\varphi'_{\prime} + \frac{\theta^2}{2}\varphi''(y) + \frac{1}{2\cdot 3}G.$$

In generale, chiamata S_n la somma dei primi termini dello sviluppo di $\varphi(x+\omega, y+\theta)$ sino a quelli nei quali gli ω, θ hanno $n-1$ dimensioni, e $\Delta_n(x,y)$ la somma di quelli nei quali gli aumenti stessi ω, θ hanno n dimensioni; e P, G il maggiore e minore valore di $\Delta_n(x+t, y+u)$, tra quelli che si hanno, variando le t, u dalla $s=u=0$, sino alla $t=\omega$ ed $u=\theta$; risulta

$$\varphi(x+\omega, y+\theta) > S_n + P, \text{ e } \varphi(x+\omega, y+\theta) < S_n + G.$$

Siccome dal valore P della $\Delta_n(x+t, y+u,)$ si passa al G senza interruzione, cioè vi si passa per via di continuità, così fra gli infiniti valori della $\Delta_n(x+t, y+u)$ vi sarà quello, che sommato colla S_n; darà la somma esattamente eguale a $\varphi(x+\omega, y+\theta)$. Questo valore corrisponda a $t=h$, ed $u=k$; e si avrà

$$\varphi(x+\omega, y+\theta) = S_n + \Delta_n(x+h, y+k).$$

Da questa equazione si hanno le particolari seguenti

$$\varphi(x+\omega, y+\theta) = \varphi(x, y) + \Delta_1(x+h, y+k),$$
$$\varphi(x+\omega, y+\theta) = \varphi(x, y) + \omega\varphi'(x) + \theta\varphi'(y) + \Delta_2(x+h, y+k),$$

- -

ove le h, k in generale cambiano dall' una all' altra.

119. Le ω, θ si possono approssimare talmente allo *zero* da rendere il termine $\Delta_{n-1}(x, y)$ prossimo allo *zero*

meno della somma di tutti i suoi successivi componenti lo sviluppo di $\phi(x+\omega, y+\theta)$, e che una analoga proprietà abbia luogo, in generale, pei valori delle ω, θ più prossimi allo *zero*.

Non mi trattengo a dimostrare questa proprietà, come non mi sono trattenuto a dimostrare la sua analoga enunciata alla fine del paragrafo 116, perchè esse sono comprese in quelle, che si tratterranno nei paragrafi 131, 136, e non occorrono prima di questi due paragrafi.

120. I ragionamenti occorsi per dimostrare le relazioni

$$\phi(x+\omega, y+\theta) > S_n + P, \quad \phi(x+\omega, y+\theta) < S_n + G,$$

e l'esistenza di tali numeri h, k da rendere

$$\phi(x+\omega, y+\theta) = S_n + \Delta_n(x+h, y+k)$$

avendo luogo, qualunque siano x, y, purchè non riesca infinito nè P, nè G, sussisteranno anco pel caso di $x=y=0$; e però avrassi

$$\phi(\omega,\theta) > S^0_n + P, \phi(\omega,\theta) < S^0_n + G, \text{e } \phi(\omega,\theta) = S^0_n + \Delta_n(h,k),$$

ove la S^0_n significa il valore della S_n corrispondente alle $x=y=0$.

Quest'ultima equazione dà come corollari, cambiando la ω, θ nelle x, y, le seguenti

$$\phi(x,y) = \phi(0,0) + \Delta_1(h,k),$$

$$\phi(x,y) = \phi(0,0) + x\phi'_0(x) + y\phi'_0(y) + \Delta_2(h,k)$$

- ;

le h, k saranno in generale differenti dall'una all'altra di queste equazioni; ma sarà per tutte la h compresa tra *zero* ed x, e la k tra *zero* ed y.

LEZIONE V.

Degli sviluppi non ordinarj.

121. Ora vediamo, come si possa trovare lo sviluppo della $\varphi(a+\omega)$, quando riesca $\varphi(a)$, o $\varphi'(a)$, ovvero $\varphi''(a)$, - - - infinito, per cui non è buona la regola generale esposta nei paragrafi 111, 112.

Si rifletta, che per isviluppo della $\varphi(a+\omega)$, si intende qui un polinomio eguale a $\varphi(a+\omega)$ e contenente in ciascun termine una funzione semplice della ω; anzi per essere la a^{ω}, sen. ω, cos. ω sviluppabili secondo le potenze intere della ω mediante l'esposto nei §§ 12 e 14; così per isviluppo della $\varphi(a+\omega)$ qui intenderemo un polinomio, in ciascun termine del quale vi sia od ω^m, o log. ω, ovvero log.$^n\omega$, od al più il prodotto di due di queste funzioni d'ω.

Nella funzione $\varphi(x)$ si ponga immediatamente $a+\omega$ in vece della x, per cui si ha $\varphi(a+\omega)$, si facciano le riduzioni, che per combinazione si presentano; indi, approfittando della forma della funzione risultante della ω, si sviluppi: non vi è regola generale per ottenere questo sviluppo, ma dai seguenti esempj si apprenderà, come regolarsi in ogni altro.

Vogliasi in primo luogo lo sviluppo di $x^2+\frac{1}{x-a}$ corrispondente alla $x=a+\omega$. Posto $a+\omega$ in vece della x, si ha $(a+\omega)^2+\frac{1}{\omega}$; e però lo sviluppo sarà

$$\frac{1}{\omega}+a^2+2a\omega+\omega^2.$$

In secondo luogo, vogliasi quello di $x^2+b(x-a)^{\frac{3}{2}}$ pure corrispondente alla $x=a+\omega$: fatto $x=a+\omega$ hassi $(a+\omega)^2+b\omega^{\frac{3}{2}}$; e lo sviluppo sarà $a^2+2a\omega+b\omega^{\frac{3}{2}}+\omega^2$.

In terzo luogo, abbiasi $\phi(x)=x+x\log.(x-a)$: postavi $x=a+\omega$, si ha $a+\omega+(a+\omega)\log.\omega$; e però lo sviluppo sarà

$$a+a\log.\omega+\omega+\omega\log.\omega.$$

In quarto ed ultimo luogo abbiasi $\phi(x)=(x-a)^x$: ponendo $a+\omega$ in vece della x, si ottiene $\omega^{a+\omega}$ ossia $\omega^a\cdot\omega^\omega$; e però lo sviluppo (§ 12) sarà

$$\omega^a+\omega^{a+1}\log.\omega+\frac{\omega^{a+2}}{2}\log.^2\omega+\text{ecc.}$$

122. Quando lo sviluppo della $\phi(a+\omega)$ possa essere ordinato secondo potenze della ω, alle volte esso si scopre col metodo seguente.

Ridotta che sia la quantità $\phi(a+\omega)-\phi(a)$, compaja ad essa fattor comune ω^a, dimodochè abbiasi

$$\phi(a+\omega)-\phi(a)=\omega^a P,$$

ove P esprime quantità, che nè si annulla nè diviene infinita, facendo in essa $\omega=0$.

Sia p il valore di P corrispondente all' $\omega=0$: riducasi la differenza $P-p$, e compaja fattor comune di essa ω^b, cosichè risulti

$$P-p=\omega^b Q,$$

ove Q abbia proprietà analoghe alle anzidette della P.

Sia q il valore della Q corrispondente all' $\omega=0$; e ridotta la differenza $Q-q$, risulti essa eguale ad $\omega^c R$, ove l'R abbia proprietà analoghe alle medesime anzidette della P: e così continuisi.

Essendo $\varphi(a+\omega)=\varphi(a)+\omega^a P,\ P=p+\omega^b Q,\ Q=q+\omega^c R,---$

si ha $\varphi(a+\omega)=\varphi(a)+\omega^a p+\omega^{a+b} Q$, ovvero

$$\varphi(a+\omega)=\varphi(a)+\omega^a p+\omega^{a+b} q+\omega^{a+b+c} R,\ ---.$$

Con quest' ultimo metodo rimangono contemplati anco i valori delle parti seguenti degli sviluppi, siccome si vede.

123. Se φ sarà la funzione implicita, che entra in una data equazione tra essa e la x, per avere lo sviluppo della $\varphi(a+\omega)$ converrà porre in questa equazione $a+\omega$ in vece della x, e dalla risultante, già ridotta, desumere il valore ossia sviluppo della $\varphi(a+\omega)$. Dirò, come si possa determinare $\varphi(a+\omega)$, quando quest'ultima equazione riesca algebraica, e tale possa essere anco lo sviluppo richiesto della $\varphi(a+\omega)$.

Premetto la ricerca seguente, che occorre.

Abbiasi la serie

$$m+n\alpha,\ m'+n'\alpha,\ m''+n''\alpha,\ m'''+n'''\alpha,\ ---$$

ove le $m,\ n,\ m',\ n',\ m'',\ ---$ esprimono numeri dati, e l'α quantità indeterminata; ed è

$$n<n'<n''<---;$$

e vogliansi quei valori della α, che rendano due o più termini della serie eguali tra loro, e minori ovvero maggiori dei corrispondenti valori di ogni altro termine di essa.

Comincerò coll'indicare, come determinare quei valori dell'α, che riducono due o più termini tra loro eguali, e *minori* del corrispondente valore di ciascun altro.

Si eguagli il termine $m+n\alpha$ ad ogni altro, sciolgansi le equazioni risultanti rispetto all'α; ed avransi per essa ordinatamente i valori

$$\frac{m-m'}{n'-n},\ \frac{m-m''}{n''-n},\ \frac{m-m'''}{n'''-n},\ ---$$

i quali per semplicità chiaminsi α', α'', α''', - - -; e si avranno le equazioni

$$m-m'=(n'-n)\alpha',\ m-m''=(n''-n)\alpha'',\ m-m'''=(n'''-n)\alpha''',\cdots;$$

e però sarà

$$m'=m-(n'-n)\alpha',\ m''=m-(n''-n)\alpha'',\ m'''=m-(n'''-n)\alpha''',\cdots.$$

Questi valori delle m', m'', m''', - - -, si sostituiscano nella serie proposta, ed essa si ridurrà alla

$$p,\ p+(n'-n)(\alpha-\alpha'),\ p+(n''-n)(\alpha-\alpha''),\ p+(n'''-n)(\alpha-\alpha'''),\ \cdots$$

ove p è posto per semplicità in vece di $m+n\alpha$ suo primo termine.

I numeri α', α'', α''', - - - valori della α siano differenti l'un dall'altro, ed α'', per esempio, sia il maggiore di esssi.

Ridotta la proposta serie a quest' ultima forma, essendo $n<n'<n''<n'''<$ - - -, si comprende facilmente, che posta la α eguale al più grande dei numeri α', α'', α''', - - - cioè eguale all'α'', il terzo suo termine, quello cioè nel quale vi è l'α'' stesso sarà eguale al primo e minore di ogni altro.

Se fra gli α', α'', α''', - - - due o più fossero tra loro eguali e maggiori di ciascun altro, posto l'α eguale ad uno di essi, si avrebbero altrettanti termini della serie risultante eguali al primo e ciascuno minore di ogni altro termine della medesima.

I termini della proposta serie possono essere tali, che altri valori dell' α oltre l'α'' ed i suoi eguali, rendano eguali tra loro due o più termini di essa, e ciascuno riesca minore del corrispondente valore di ogni altro termine di essa medesima: vediamo per tanto, come si possono individuare anco questi altri valori dell' α.

Questi valori dell'α non potranno essere maggiori del più grande degli $\alpha', \alpha'', \alpha''', ---$; perchè tutti i valori corrispondenti delle differenze $\alpha-\alpha'$, $\alpha-\alpha''$, $\alpha-\alpha'''$,--- riescirebbero positivi, come il sono li $n'-n, n''-n$, $n'''-n$, - - -; e però, se vi sono questi altri valori per la α, essi saranno minori d' α''. Ma i valori dell' α minori di α'' rendono $p+(n''-n)(\alpha-\alpha'')$ ed ogni altro suo eguale minore dei termini loro antecedenti; adunque per rintracciare questi altri valori dell'α, se pur esistono, basterà fare per quella parte della serie avente per primo termine l'ultimo dei già trovati eguali al p, ciò che abbiamo fatto per essa medesima, cioè eguagliare l'ultimo dei detti termini a ciascuno dei seguenti e sciogliere le equazioni risultanti rispetto all'α, e porre la α eguale al maggiore di così trovati valori; e nel resto procedere come superiormente.

Per trovare i valori d' α, che riducono due o più termini della proposta serie eguali tra loro e *maggiori* dei corrispondenti valori di ogni altro suo termine, bisognerà regolarsi in un modo affatto analogo all' esposto, colla avvertenza però, che in questo caso si dovrà scegliere per primo valore dell'α il più piccolo degli $\alpha', \alpha'', \alpha'''$, - - - ed altrettanto fare nel contemplare le serie successive per avere gli altri valori dell' α, se pur ne possa avere.

124. Ciò premesso, passiamo alla quistione proposta.

Fatte sparire le frazioni ed i radicali complessi dalla equazione tra la ω e la $\phi(a+\omega)$, abbiasi la seguente

$$Ax^m y^n + Bx^{m'} y^{n'} + Cx^{m''} y^{n''} + Dx^{m'''} y^{n'''} + \text{ècc.} = 0,$$

dove la x si è posta in vece della ω, e la y della $\phi(a+\omega)$, e le A, B, C, D, - - - m, n, m', n', m'', n'', - - - sono quantità conosciute, qualsivogliono.

La serie richiesta per valore della y può essere ordinata secondo potenze della x aventi gli esponenti crescenti ovvero decrescenti: qui pure, per evitare la confusione avremo di mira il primo di questi due casi, ma dalla sua esposizione si comprenderà facilmente come bisognerà regolarsi pel secondo, che per ciò ommetteremo.

Suppongasi $y = ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma +$ ecc., ove a, b, c, --- α, β, γ, --- esprimono costanti a determinarsi, e dev'essere $\alpha < \beta < \gamma <$ ---.

Per semplicità rappresentisi $bx^\beta + cx^\gamma +$ ecc. con y_1, e sarà $y = ax^\alpha + y_1$.

Sostituendo questo supposto valore della y nell'ultima equazione, si ha la

$$Aa^n x^{m+n\alpha} + Ba^{n'} x^{m'+n'\alpha} + Ca^{n''} x^{m''+\alpha n''} + Da^{n'''} x^{m'''+\alpha n'''} + \text{ècc.} +$$

$$\left(Aa^{n-1} n x^{m+(n-1)\alpha} + \text{ècc.}\right) y_1 + \text{ecc.} = 0.$$

Questa equazione deve ridursi identica mediante opportuna determinazione delle quantità a, α, b, β, ---: se fossero note le α, β, - - -; eguagliando a *zero* separatamente le somme dei coefficenti delle simili potenze della x, si avrebbero le equazioni per determinare le a, b, c, - - -: facilmente si comprende che, la a sarebbe data da quella tra queste ultime equazioni, ottenuta eguagliando a *zero* la somma dei coefficienti di quelle potenze della x aventi esponenti eguali tra loro e minori di ogni altro: vediamo pertanto, come si possa ottenere questa medesima equazione indipendentemente dalle altre.

Essendo gli esponenti delle potenze della x contenute in y, maggiori dell' α, i termini, della equazione a ridursi identica, nei quali la x ha i minori esponenti, saranno tra gli

$$Aa^n x^{m+\alpha n} + Ba^{n'} x^{m'+\alpha n'} + Ca^{n''} x^{m''+\alpha n''} + Da^{n'''} x^{m'''+\alpha n'''} + \text{ecc.};$$

e però la difficoltà di ottenere la equazione, dalla quale desumere la a, è ridotta a trovare quel valore dell' α, che rende due o più degli esponenti

$$m+n\alpha,\ m'+\alpha n',\ m''+\alpha n'',\ m'''+\alpha n''',\ ---$$

eguali tra loro e minori di ogni altro; ciò si farà colla proposizione premessa.

Da quella proposizione medesima risulta anco, che, i valori dell' α saranno tanti, quanti saranno quelli, che ridurranno due o più termini della serie ultima qui esposta eguali tra loro e minori di ogni altro; ed a questi valori dell' α corrisponderanno altrettante equazioni, che daranno almeno altrettanti valori dell' a: dico almeno, perchè allo stesso valore dell' α potrebbero corrispondere più valori delle altre incognite.

Determinate così la α e la corrispondente a, si ponga nella proposta equazione in vece della y il binomio $ax^\alpha + y_1$, ed avrassi una equazione tra le x, y_1, analoga alla proposta medesima: pongasi, nel primo membro di questa risultante, by^β in vece dell' y_1; e si determinino β, b analogamente alle α, a, ommettendo però quei valori della β ed anco i corrispondenti della b, che riesciranno non maggiori di quelli trovati per la α: determinate β, b, nella equazione tra le x, y_1 pongasi $b\,x^\beta + y_2$ in vece della y_1, e si avrà una equazione tra le x, y_2: facciasi nel suo primo membro $y_2 = c\,x^\gamma$, e determininsi le γ, c colla avvertenza di ommettere quei valori della γ, non che i corrispondenti della c, che riesciranno minori di quelli ritenuti per la β; e così continuisi.

Siano α_1, a_1, β_1, b_1, γ_1, c_1, - - - valori trovati per le α, a, β, b, γ, c, - - - e tra loro corrispondenti, ed

$$a_1 x^{\alpha_1} + b_1 x^{\beta_1} + c_1 x^{\gamma_1} + \text{ecc.}$$

sarà uno sviluppo della y.

125. Porrò qui le due proprietà seguenti, che sono utili in varie occasioni.

Se $\phi(a)$ valore della funzione $\phi(x)$ corrispondente alla $x = a$ fosse infinito, tale sarebbe *generalmente* anco $\phi'(a)$.

Essendo $\phi(a) = \frac{1}{0}$, si ha $\frac{1}{\phi(a)} = 0$, cioè a uno di quei valori della x, che annullano $\frac{1}{\phi(x)}$; e però sarà

$$\frac{1}{\phi(x)} = \frac{(x-a)^m}{\Delta(x)},$$

ove l'm esprime un numero positivo e $\Delta(x)$ tale funzione, che nè si annulla nè diviene infinita per $x = a$.

Dalla eguaglianza, qui stabilita, si ha la $\phi(x) = \frac{\Delta(x)}{(x-a)^m}$; e però sarà $\phi(a+\omega) = \frac{\Delta(a+\omega)}{\omega^m}$, ossia $\phi(a+\omega) = \frac{\Delta(a)+\delta}{\omega^m}$, ove δ si annulla per $\omega = 0$. Quest'ultima equazione somministra

$$\left(\frac{d\phi(a+\omega)}{d\omega}\right)=\frac{\omega\delta'(\omega)-m\Delta(a)-m\delta}{\omega^{m+1}},$$

la quale dà il valore della $\left(\frac{d\phi(a+\omega)}{d\omega}\right)$ corrispondente alla $\omega=0$, cioè $\phi'(a)$ eguale ad $\frac{0\cdot\delta'(0)-m\Delta(a)}{0^{m+1}}$; dimodochè, quando $\delta'(0)$ non sia infinita, la $\phi'(a)$ sarà sicuramente infinita.

Concludiamo per tanto, che, se $x=a$ rende infinita una delle quantità $\phi(x)$, $\phi'(x)$, $\phi''(x)$, - - - esso valore della x renderà in generale infinite anco le seguenti derivate di essa.

Se lo sviluppo della $\phi(a+\omega)$ sarà ordinario, cioè ordinato secondo potenze della ω di esponenti tutti *positivi* ed *interi*, le quantità

$$\phi(a),\ \phi'(a),\ \phi''(a),\ \phi'''(a),\ ---$$

saranno tutte finite, cioè nessuna di esse sarà infinita.

Lo sviluppo della $\phi(a+\omega)$ si chiami $S(\omega)$.

Essendo $S(\omega)$ un polinomio ordinato secondo potenze della ω aventi esponenti positivi ed interi, anco le quantità

$$S'(\omega),\ S''(\omega),\ S'''(\omega),\ ---$$

saranno altrettanti polinomj ordinati secondo potenze della ω di esponenti tutti interi e positivi (§ 7); e però le

$$S'(0),\ S''(0),\ S'''(0),\ ---$$

saranno quantità finite o nulle.

Così, per essere $\left(\frac{d^n\phi(x+\omega)}{dx^n}\right)$ identica alla $\left(\frac{d^n\phi(x+\omega)}{d\omega^n}\right)$, il valore della prima corrispondente alla $x=a$ ed $\omega=0$, che è $\varphi^{(n)}(a)$, sarà lo stesso dell'analogo valore della seconda, il quale evidentemente è quello corrispondente alla $\omega = 0$ della $\left(\frac{d^n \varphi(a+\omega)}{d\omega^n}\right)$.

Ma dalla equazione $\varphi(a+\omega) = S(\omega)$, che ha luogo qualunque sia la ω, hassi anco la $\left(\frac{d^n\varphi(a+\omega)}{d\omega^n}\right) = S^{(n)}(\omega)$, la quale insegna, che il valore della $\left(\frac{d^n\varphi(a+\omega)}{d\omega^n}\right)$ corrispondente alla $\omega = 0$ eguaglia anzi è $S^{(n)}(0)$; adunque la $\varphi^{(n)}(a)$ sarà $S^{(n)}(0)$. Vale a dire, le quantità

$$\varphi(a),\ \varphi'(a),\ \varphi''(a),\ \varphi'''(a),\ ---$$

eguagliano ordinatamente le

$$S(0),\ S'(0),\ S''(0),\ S'''(0),\ ---,$$

e conseguentemente saranno anch'esse finite ovvero nulle.

LEZIONE VI.

Delle proposizioni generali cioè delle relazioni tra i valori di quantità sviluppabili secondo potenze d'esponenti crescenti di una stessa indeterminata.

126. In questa lezione si espongono alcune proposizioni, che occorrono molte volte sì nella matematica pura che nelle sue applicazioni; e si chiamano proposizioni generali, perchè hanno luogo per ogni specie di quantità, ed anco per distinguerle dalle altre.

Le $P(\omega)$, $Q(\omega)$, $R(\omega)$ funzioni della stessa indeterminata ω abbiano i loro valori corrispondenti alla $\omega = 0$ *nulli*; ed i valori della Q, almeno quelli che corrispondono ai valori della ω prossimi a *zero*, siano *compresi* fra i corrispondenti delle P, R; ed in oltre le $P'(0)$, $R'(0)$, valori delle $P'(\omega)$, $R'(\omega)$ corrispondenti alla $\omega = 0$, siano tra loro eguali: sarà $Q'(0)$, valore della $Q'(\omega)$ corrispondente alla $\omega = 0$, eguale a $P'(0)$.

Dal paragrafo 117 si ha

$$P = \omega P'(0) + \frac{\omega^2}{2} P''(\alpha),$$

$$Q = \omega Q'(0) + \frac{\omega^2}{2} Q''(\beta), \text{ ed}$$

$$R = \omega R'(0) + \frac{\omega^2}{2} R''(\gamma),$$

dove le α, β, γ sono numeri compresi tra *zero* e l'ω, tali da rendere queste equazioni esatte.

Essendo i suddetti valori della Q, compresi tra i corrispondenti delle P, R, gli analoghi valori della differenza

$$P - Q = \omega\left(P'(0) - Q'(0) + \left(P''(\alpha) - Q''(\beta)\right)\frac{\omega}{2}\right)$$

saranno prossimi allo *zero* più dei corrispondenti della

$$P - R = \tfrac{1}{2}\left(P''(\alpha) - R''(\gamma)\right)\omega^2;$$

e però anco i valori analoghi della quantità

$$P'(0) - Q'(0) + \tfrac{1}{2}\left(P''(\alpha) - Q''(\beta)\right)\omega$$

saranno prossimi allo *zero* più dei corrispondenti della

$$\tfrac{1}{2}\left(P''(\alpha) - R''(\gamma)\right)\omega;$$

e conseguentemente quello della semplice $P'(0) - Q'(0)$ sarà prossimo allo *zero* più di quelli della seguente

$$\tfrac{1}{2}\left(P''(\alpha) - R''(\gamma)\right)\omega - \tfrac{1}{2}\left(P''(\alpha) - Q''(\beta)\right)\omega$$

ossia della

$$\tfrac{1}{2}\left(Q''(\beta) - R''(\gamma)\right)\omega$$

corrispondenti ai medesimi anzidetti della ω. Ma questa proprietà non può aver luogo, se non si ha $P'(o)-Q'(o)=o$; giacchè i valori della $\frac{1}{2}\left(Q''(\beta)-R''(\gamma)\right)\omega$ corrispondenti a quelli della ω avvicinantesi allo *zero*, costituiscono una serie di termini, avvicinantesi anch' essi allo *zero* quanto si vuole; adunque $P'(o)-Q'(o)$ sarà effettivamente *zero* ossia sarà $Q'(o)$ eguale a $P'(o)$: come si è enunciato.

127. Per dare un esempio, abbiasi

$$P(\omega)=\omega F\left(p(x),\, q(x),\, r(x),\, ---\right),$$

$$Q(\omega)=\phi(x+\omega)-\phi(x), \text{ ed}$$

$$R(\omega)=\omega F\left(p(x+\omega),\, q(x),\, r(x+\omega),\, ---\right);$$

dove la R visibilmente è ciò che si ottiene, cambiando nella P, dovunque o solamente in alcuni luoghi, la x in $x+\omega$.

Evidentemente si ha $P(o)=o$, $Q(o)=o$, $R(o)=o$

$$P'(\omega)=F(p,\, q,\, r,\, ---),$$

$$Q'(\omega)=\left(\frac{d\phi(x+\omega)}{d\omega}\right) \text{ ossia a } \left(\frac{d\phi(x+\omega)}{dx}\right), \text{ ed}$$

$$R'(\omega)=F\left(p(x+\omega),\, q,\, r(x+\omega),\, ---\right)$$

$$+\omega\left\{\left(\frac{dF}{dp(x+\omega)}\right)\left(\frac{dp(x+\omega)}{d\omega}\right)+\left(\frac{dF}{dr(x+\omega)}\right)\left(\frac{dr(x+\omega)}{d\omega}\right)+\text{ecc.}\right\}$$

e però sarà

$$P'(o)=F(p,q,r,---),\; Q'(\omega)=\phi'(x), \text{ ed } R'(o)=F(p,q,r,---).$$

Quindi avrassi $\phi'(x)=F(p,q,r,---)$.

In molte occasioni occorre di scoprire la semplice derivata $\phi'(x)$; per tali ricerche non sarà necessario di trovare gli effettivi valori di ambedue le quantità P, R, basterà trovare quello dell'una o dell'altra, e concepire che abbiano luogo tra esse e la terza Q, le proprietà sopra ammesse; giacchè nel coefficiente dell'ω nello sviluppo della P o della R trovata, avrassi il richiesto valore del $\varphi'(x)$.

Valendosi di questa osservazione, si rendono le soluzioni di molte proposizioni ordinarie di calcolo sublime tanto semplici e facili da sorprendere chiunque giudichi imparzialmente.

128. Gli sviluppi delle funzioni $P(\omega)$, $Q(\omega)$, $R(\omega)$ (§ 111), siano ordinarj; ed i primi m termini dello sviluppo della Q siano ordinatamente eguali ai primi m termini di quello della P, cioè sia

$$Q(0)=P(0),\ Q'(0)=P'(0),\ Q''(0)=P''(0),\ \text{---}\ \text{e}$$
$$Q^{(m-1)}(0)=P^{(m-1)}(0);$$

ed i primi n dello sviluppo della R siano eguali ordinatamente anch'essi ai primi n di quello della stessa P, cioè sia

$$R(0)=P(0),\ R'(0)=P'(0),\text{---}\ \text{ed}\ R^{(n-1)}(0)=P^{(n-1)}(0):$$

se sarà m maggiore d'n, i valori della Q, almeno quelli che corrisponderanno ad una serie di valori della ω prossimi allo *zero*, saranno prossimi ai corrispondenti della P più di quelli della R.

Mediante l'esposto nel § 117 facilmente si ha

$$P-Q=\frac{P^{(m)}(\alpha)-Q^{(m)}(\beta)}{2\cdot3\cdots m}\omega^m,\ \text{e}$$

$$P-R=\frac{\omega^n}{2\cdot3\cdots n}\left(P^{(n)}(0)-R^{(n)}(0)+\frac{\omega}{n+1}\left(P^{(n+1)}(\gamma)-R^{(n+1)}(\delta)\right)\right):$$

la β è il valore della s, che rende $\dfrac{\omega^m}{2\cdot3\text{---}m}Q^{(m)}(s)$ eguale alla somma di quei termini dello sviluppo della

$Q(\omega)$, che seguono il termine *m esimo*: la δ quello dell's che rende $\frac{\omega^{n+1}}{2\cdot 3 --- (n+1)} R^{(n+1)}(s)$ eguale alla somma dei termini dello sviluppo della $R(\omega)$ dopo l'$(n+1)$*esimo*. Così α, γ sono i valori della s, che posti nelle espressioni

$$\frac{\omega^m}{2\cdot 3 --- m} P^{(m)}(s), \quad \frac{\omega^{n+1}}{2\cdot 3 --- (n+1)} P^{(n+1)}(s)$$

le rendono rispettivamente eguali alle somme di quei termini dello sviluppo della $P(\omega)$, che seguono l'*m esimo* e l'$(n+1)$*esimo*.

I valori della quantità

$$\frac{\omega^{m-n}}{(n+1)(n+2)\cdots m}\left(P^{(m)}(\alpha)-Q^{(m)}(\beta)\right)-\frac{1}{n+1}\left(P^{(n+1)}(\gamma)-R^{(n+1)}(\delta)\right)\omega$$

almeno i corrispondenti a quelli della ω, che sono prossimi allo *zero*, sono prossimi evidentemente allo *zero* più di quello della

$$P^{(n)}(0) - R^{(n)}(0);$$

e però una analoga proprietà avrà luogo tra i valori delle due

$$\frac{\omega^{m-n}}{(n+1)(n+2)---m}\left(P^{(m)}(\alpha)-Q^{(m)}(\beta)\right),$$

$$P^{(n)}(0)-R^{(n)}(0)+\frac{1}{n+1}\left(P^{(n+1)}(\gamma)-R^{(n+1)}(\delta)\right)\omega,$$

ed anco tra quelli delle due seguenti

$$\frac{\omega^m}{2\cdot 3---m}\left(P^{(m)}(\alpha)-Q^{(m)}(\beta)\right),$$

$$\frac{\omega^n}{2\cdot 3\cdots n}\left(P^{(n)}(0)-R^{(n)}(0)+\frac{1}{n+1}\left(P^{(n+1)}(\gamma)-R^{(n+1)}(\delta)\right)\omega\right),$$

le quali sono le stesse differenze $P-Q$, $P-R$; cioè, i valori delle $P-Q$, lo ripeto, almeno quelli che corrispondono ad una serie di valori della ω prossimi allo *zero*, saranno prossimi allo *zero* più dei corrispondenti della $P - R$, o ciò che significa lo stesso, i valori della Q, almeno gli anzidetti, si approssimeranno ai corrispondenti della P più di quelli della R: come si è enunciato.

129. Se fosse $P(\omega)=f(x+\omega)$, $Q(\omega)=\varphi(x+\omega)$, ed $R(\omega)=\psi(x+\omega)$, si avrebbe

$$P(0)=f(x),\ P'(0)=f'(x),\ P''(0)=f''(x), ---,$$
$$Q(0)=\varphi(x),\ Q'(0)=\varphi'(x),\ Q''(0)=\varphi''(x), ---, \text{ ed}$$
$$R(0)=\psi(x),\ R'(0)=\psi'(x),\ R''(0)=\psi''(x), ---;$$

e però, se sarà

$$\varphi(x)=f(x), \varphi'(x)=f'(x), \varphi''(x)=f''(x), --- \varphi^{(m-1)}(x)=f^{(m-1)}(x), \text{ e}$$
$$\psi(x)=f(x), \psi'(x)=f'(x), --- \psi^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(x),$$

i valori, che si possono avere per la $\varphi(x+\omega)$ variando la ω, almeno quelli corrispondenti ai valori della ω prossimi allo *zero*, si approssimeranno ai corrispondenti della $f(x+\omega)$ più degli analoghi e corrispondenti della $\psi(x+\omega)$.

Per indicare, che i valori delle funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ corrispondenti ad un particolare della x sono eguali, ed eguali pure sono i valori delle rispettive derivate sino a quelle dell'ordine $(n-1)$ *esimo*, qualche volta per semplicità dirassi, che le $f(x)$, $\varphi(x)$ avranno corrispondentemente a tal valore della x un *avvicinamento dell'ordine* $(n-1)$ *esimo*.

130. Sebbene le proprietà esposte nei paragrafi antecedenti, si possono facilmente estendere ai casi rarissimi, che gli sviluppi, per esempio quelli delle P, Q, R, non siano ordinabili secondo le potenze di esponenti

interi e positivi della indeterminata, non ostante credo bene di esporre tali proprietà anco per questi casi.

131. Pel polinomio $A\omega^a + B\omega^{a+m} + C\omega^{a+n} +$ ecc., nel quale la ω vi è nel solo modo visibile e gli esponenti $a, a+m, a+n, ---$ sono crescenti e tutti positivi, i valori di $A\omega^a$ suo primo termine, almeno quelli che corrispondono ai *piccioli* valori della ω, sono maggiori, prescindendo dai segni, dei corrispondenti di

$$B\omega^{a+m} + C\omega^{a+n} + \text{ecc.}$$

rimanente parte del polinomio stesso.

Nel polinomio $B\omega^{a+m} + C\omega^{a+n} +$ ecc. si immaginino sostituiti in luogo della ω tutti i numeri costituenti la serie continua crescente, che ha per principio lo *zero*; ed i valori risultanti pel polinomio medesimo costituiranno anch'essi una serie *continua*, avente per principio lo *zero*, e nel resto sarà positiva o negativa.

Qualunque legge segua la serie dei valori del polinomio

$$B\omega^m + C\omega^n + \text{ecc.},$$

siccome è continua, cioè tale che dall'un termine di essa si passa al seguente mercè insensibile variazione, così, almeno i suoi termini, che sono prossimi allo *zero*, saranno prossimi allo *zero* più di A, e però anco i valori del prodotto

$(B\omega^m + C\omega^n + \text{ecc.})\,\omega^a$ ossia di $B\omega^{a+m} + C\omega^{a+n} +$ ecc.

almeno i corrispondenti ai piccioli della ω, saranno prossimi allo *zero* più dei corrispondenti della $A\omega^a$ primo termine del polinomio. Vale a dire, i valori di $A\omega^a$, almeno quelli che corrispondono a valori della ω piccioli, saranno più grandi, prescindendo dai segni, dei corrispondenti di

$$B\omega^{a+m} + C\omega^{a+n} + \text{ecc.}$$

come si è enunciato.

Dal qui esposto emerge anco, che i valori del polinomio

$$A\omega^{a} + B\omega^{a+m} + C\omega^{a+n} + \text{ecc.},$$

almeno i corrispondenti ai suddetti della ω, avranno segni simili a quelli dell'$A\omega^a$ primo termine di esso; giacchè il segno della somma algebraica di due quantità è simile a quello della più grande di esse, prescindendo dai segni rispettivi; e reciprocamente i segni degli anzidetti valori di $A\omega^a$ saranno simili a quelli dei corrispondenti del polinomio. Da ciò risulta come corollario che, essendo $\varphi(x) < \varphi(x+\omega)$, sarà $\varphi'(x)$ positiva o almeno non negativa; e se fosse $\varphi(x) > \varphi(x+\omega)$ sarebbe $\varphi'(x)$ negativa o non positiva; giacchè dovrebbe essere $\omega\varphi'(x) + \frac{\omega^2}{2}\varphi''(x) + \text{ecc.}$ positivo pel primo caso e negativo pel secondo.

132. Si abbiano i due polinomj

$$A\omega^{a} + B\omega^{a+m} + C\omega^{a+n} + \text{ecc.},\quad F\omega^{a+c} + G\omega^{a+e} + \text{ecc.}$$

ordinati secondo potenze della ω aventi esponenti crescenti e positivi; e sia a minore di $a+c$, cioè il più piccolo esponente della ω nel primo polimonio sia minore del più piccolo esponente, che essa ha nel secondo: i valori del secondo di questi polinomj, almeno quelli che corrispondono ad una serie di piccioli valori della ω, saranno prossimi allo *zero* piu dei corrispondenti del primo dei medesimi polinomj.

Egli è facile, mediante considerazioni analoghe ad alcune fatte nel paragrafo antecedente, il concepire, che sì i valori di

$$B\omega^m + C\omega^n + \text{ecc. che di } F\omega^c + G\omega^e + \text{ecc.},$$

almeno i corrispondenti a piccioli valori della ω, saranno tutti prossimi allo *zero* non meno di $\frac{1}{2}A$; e però anco gli analoghi valori dei prodotti

$$(B\omega^m + C\omega^n + \text{ecc.})\,\omega^a,\ (F\omega^e + G\omega^e + \text{ecc.})\,\omega^a$$

cioè dei polinomj

$$B\omega^{a+m} + C\omega^{a+n} + \text{ecc.},\ F\omega^{a+c} + G\omega^{a+e} + \text{ecc.}$$

saranno prossimi allo *zero* più dei corrispondenti di $\frac{1}{2}A\,\omega^a$.

Essendo i valori di $B\,\omega^{a+m} + C\,\omega^{a+n} + \text{ecc.}$ prossimi a *zero* più dei corrispondenti di $\frac{1}{2}A\,\omega^a$, gli analoghi del polinomio

$$\tfrac{1}{2}A\,\omega^a + B\,\omega^{a+m} + C\omega^{a+n} + \text{ecc.}$$

avranno segni simili ai corrispondenti di $\frac{1}{2}A\,\omega^a$; e però i valori analoghi della somma

$$\tfrac{1}{2}A\,\omega^a \textit{ più } \tfrac{1}{2}A\omega^a + B\,\omega^{a+m} + C\omega^{a+n} + \text{ecc.}$$

che costituisce il primo polinomio cioè

$$A\,\omega^a + B\,\omega^{a+m} + C\omega^{a+n} + \text{ecc.}$$

si *scosteranno* dallo *zero* più dei corrispondenti di $\frac{1}{2}A\,\omega^a$.

Ma abbiamo dianzi osservato, che, i valori analoghi del polinomio

$$F\omega^{a+c} + G\,\omega^{a+e} + \text{ecc.}$$

si accostano in vece allo *zero* più dei corrispondenti medesimi di $\frac{1}{2}A\omega^a$; adunque tali valori di questo polinomio si approssimeranno allo *zero* più di quelli

$$\text{dell'}A\omega^a + B\omega^{a+m} + C\omega^{a+n} + \text{ecc.},$$

che è il primo polinomio: come abbiamo enunciato.

Dal qui esposto risulta, che, se due polinomj saranno ordinati secondo potenze d'esponenti positivi di una stessa indeterminata, e sia il minore esponente di essa nell'uno maggiore del minor esponente, che essa ha nell'altro, i valori del primo, almeno quelli corrispondenti ad una serie continua di piccioli valori della indeterminata, saranno ordinatamente prossimi allo *zero* più dei corrispondenti del secondo.

Dimodochè, se condizioni, emergenti dalla origine di due polinomj, aventi le forme dei due qui contemplati, richiederanno che i valori del primo, almeno quelli che corrisponderanno a piccioli valori della ω, debbano essere prossimi allo *zero* più dei corrispondenti del secondo, sarà assolutamente $A = 0$.

Così, se α in grandezza sia minore di A, i valori del polinomio $\alpha\omega^m + \beta\omega^{m+n} +$ ecc., dove $m, n, ---$ sono positivi, almeno i corrispondenti a valori della ω prossimi allo *zero* saranno prossimi allo *zero* più dei corrispondenti del polinomio $A\omega^m + B\omega^{m+n} +$ ecc. qualunque siano $\beta, B, ---$.

Sia $A = \alpha + p$: per alcune considerazioni fatte, i valori di entrambi i polinomj $\beta\omega^n +$ecc., $B\omega^n +$ecc. almeno gli anzidetti saranno prossimi allo *zero* più di $\frac{1}{2}p$, e però gli analoghi dell'$\alpha + \beta\omega^n +$ ecc. saranno prossimi ad α più di $\frac{1}{2}p$, e quelli dell'$\alpha + p + B\omega^n +$ecc. cioè dell'$A + B\omega^n +$ecc. si scosteranno dall'α stesso più di $\frac{1}{2}p$. Quindi i valori di $\omega^m(\alpha + \beta\omega^n + \text{ecc.}) = \alpha\omega^m + \beta\omega^{m+n} + \text{ecc.}$

saranno più piccioli, non curando i segni, di quelli dell'$\omega^m(A + B\omega^n + \text{ecc}) = A\omega^m + B\omega^{m+n} + \text{ecc.}$ come si è dichiarato.

La prima proprietà dichiarata in questo paragrafo ne somministra altre, fra le quali meritano particolare attenzione le esposte nei seguenti, che sono analoghe a quelle esposte nei §§ 126, 128.

135. I tre polinomj $A\omega^a + B\omega^b + C\omega^c + \text{ecc.}$,

$$E\omega^e + G\omega^g + H\omega^h + \text{ecc.},$$

$$R\omega^r + S\omega^s + T\omega^t + \text{ecc.}$$

siano ordinati secondo potenze della stessa indeterminata ω aventi tutte esponenti positivi ed anco crescenti.

Se i primi m termini del secondo di questi polinomj saranno identici ordinatamente ai primi m del primo, ed i primi n del terzo siano ordinatamente identici ai primi n del primo stesso; e sia l'm maggiore dell'n, i valori del secondo, almeno quelli che corrisponderanno ai piccioli valori della ω, saranno prossimi ai corrispondenti del primo *più* dei corrispondenti del terzo.

Di fatto, la differenza tra il primo ed il secondo è un polinomio nel quale il minore esponente della ω, per le proprietà ammesse, è maggiore del minor esponente che ha la ω stessa nella differenza tra il primo e terzo; per cui i valori della prima di queste differenze, almeno i corrispondenti ai valori piccoli della ω, saranno prossimi allo *zero* più dei corrispondenti del secondo; o ciò che significa lo stesso, i valori del secondo polinomio corrispondenti agli anzidetti della ω saranno prossimi ai corrispondenti del primo più di quelli del terzo.

134. Se in tre polinomj ordinati secondo le potenze d'esponenti positivi e crescenti di una stessa indeterminata, gli esponenti, che ha la indeterminata medesima nei loro primi termini siano eguali, ed i primi termini del primo e terzo siano identici, inoltre i valori del secondo polinomio, almeno quelli che corrispondono ad una serie continua di piccioli valori della indeterminata, siano compresi tra i corrispondenti valori degli altri due, il coefficiente del primo termine del secondo sarà eguale al coefficiente dei primi termini degli altri due, ossia questi tre coefficienti saranno eguali tra loro.

I tre polinomj siano i seguenti

$$A\omega^a + B\omega^b + C\omega^c + \text{ecc.},$$

$$E\omega^a + G\omega^g + H\omega^h + \text{ecc.},$$

$$A\omega^a + S\omega^s + T\omega^t + \text{ecc.}$$

La differenza tra il primo e secondo di questi polinomj è visibilmente un polinomio, nel quale vi è l'ω coll'esponente a; la differenza tra il primo ed il terzo è pure un polinomio, nel quale il minor esponente della ω è b ovvero s numeri entrambi maggiori dell'a; e però, se il coefficiente E non fosse eguale all'A, i valori della prima di queste due differenze, almeno i corrispondenti ai piccioli valori della ω, sarebbero meno prossimi allo *zero* dei corrispondenti della seconda; ossia i valori del secondo polinomio distarebbero dai corrispondenti del primo più dei corrispondenti del terzo, il che non può sussistere, essendo i valori del secondo compresi tra i corrispondenti degli altri due. Quindi sarà effettivamente E eguale ad A, ossia A ed E saranno eguali tra loro.

Se fosse anco $b = g = s$, ed $S = B$, avrebbesi $G = B$ oltre $E = A$; così, se fosse $h = c = t$, e $T = C$, sarebbe anco H eguale a C, ecc.

LEZIONE VII.

Di altre proposizioni generali, cioè di alcune relazioni tra i valori di quantità sviluppabili secondo dimensioni crescenti e positive di due o più indeterminate.

135. Le proprietà esposte nella lezione antecedente si riferiscono a quantità i cui sviluppi sono ordinati secondo una sola indeterminata, in questa esporremo analoghe proprietà fra le quantità i cui sviluppi riescono ordinati secondo due o più indeterminate, le quali denomineremo ω, θ, - - -; e cominceremo colla esposizione di quelle proprietà, che sono analoghe alle ultime dichiarate.

Per semplicità, col simbolo A_m indicheremo la somma di tutti quei termini di un polinomio, ordinato secondo le dimensioni crescenti delle indeterminate ω, θ, - - - nei quali le indeterminate medesime hanno la dimensione m positiva.

I valori del polinomio

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \text{ecc.},$$

almeno i corrispondenti a quelli delle ω, θ, - - - prossimi a *zero*, avranno tutti segni simili a quelli di A_0.

Pongasi $\omega = a\xi$, $\theta = b\xi$, - - - ove ξ, a, b, - - - esprimono altrettante quantità indeterminate; ed il polinomio ridurrassi

$$A_0 + \xi A_{(1)} + \xi^2 A_{(2)} + \xi^3 A_{(3)} + \text{ecc.}$$

I simboli $A_{(1)}$, $A_{(2)}$, $A_{(3)}$, - - -, che moltiplicati ordinatamente per ξ, ξ^2, ξ^3, - - - danno i risultamenti ottenuti, sostituendo $a\xi$, $b\xi$, - - - in vece delle ω, θ, - - - contenute nelle somme A_1, A_2, A_3, - - -, non contengono la ξ, per essere queste somme funzioni delle ω, θ, - - - omogenee.

Ora pel polinomio

$$A_0 + \xi A_{(1)} + \xi^2 A_{(2)} + \xi^3 A_{(3)} + \text{ecc.},$$

valendosi della indeterminata ξ, come si vale della ω contenuta nel polinomio considerato nel § 131 si manifesterà facilmente la verità della dichiarazione fatta.

136. Una analoga proprietà ha luogo anco pel polinomio

$$A_m + A_{m+n} + A_{m+r} + \text{ecc.}$$

nel quale la minor dimensione delle ω, θ, - - - è la m.

Si ponga qui pure $\omega = a\xi$, $\theta = b\xi$, - - -; e si avrà

$$\xi^m A_{(m)} + \xi^{m+n} A_{(m+n)} + \xi^{m+r} A_{(m+r)} + \text{ecc.}$$

Facendo per questo polinomio ciò che si è fatto al paragrafo 131 pel polinomio là contemplato, si conclude facilmente, che i valori dell'

$$A_m + A_{m+n} + A_{m+r} + \text{ecc.}$$

almeno quelli che corrispondono ai valori piccoli delle ω, θ, - - -, hanno segni simili ai corrispondenti di A_m suo primo termine.

Questa proprietà però non ha luogo per quei valori di questo polinomio, che corrispondono a quelli delle a, b, - - -, che annullano $A_{(m)}$ ossia a quelli delle ω, θ, - - -, che annullano A_m.

137. Si abbiano ora i due polinomj

$$A_a + A_{a+m} + A_{a+n} + \text{ecc.}, \quad B_{a+c} + B_{a+e} + B_{a+i} + \text{ecc.}$$

ordinati ambedue secondo le dimensioni crescenti delle stesse indeterminate ω, θ, - - - : gli a, m, c, n, e, i, - - - esprimono numeri tutti positivi; ed i simboli B_{a+c}, B_{a+e}, - - - hanno significati analoghi a quelli degli A_{a+c}, A_{a+n}, - - -.

Essendo la minor dimensione delle ω, θ, - - - contenute nel secondo polinomio maggiore della minor dimensione delle stesse indeterminate contenute nel primo, i valori del secondo, almeno quelli che corrispondono ai piccoli delle ω, θ, - - -, saranno prossimi allo *zero* più dei corrispondenti del primo.

Alle ω, θ, - - -, contenute nei due polinomj, sostituiscansi i prodotti $a\xi$, $b\xi$, - - -; e si avranno i

$$\xi^a A_{(a)} + \xi^{a+m} A_{(a+m)} + \xi^{a+n} A_{(a+n)} + \text{ecc.},$$

$$\xi^{a+c} B_{(a+c)} + \xi^{a+e} B_{(a+e)} + \xi^{a+i} B_{(a+i)} + \text{ecc.}$$

Valendosi della indeterminata ξ contenuta in questi due polinomj, come si vale della ω contenuta nei due contemplati nel paragrafo 132, si concluderà facilmente, se $A_{(a)}$ non sia nullo, la verità della proposizione enunciata.

Questa verità ha sempre luogo, quando le a, b, - - - non annullino $A_{(a)}$ ossia quando le ω, θ, - - - non annullino A_a.

Cosichè, se dai significati di due polinomj, analoghi ai qui considerati, emergesse, che dovessero essere i valori del primo, almeno i soliti, prossimi allo *zero* più dei corrispondenti dell'altro, avrebbesi $A_a = 0$; anzi dalla stessa proprietà esposta in questo paragrafo ne discendono altre, fra le quali importanti assai sono le due, che si sviluppano compendiosamente nei due paragrafi seguenti.

138. I tre polinomj $A_a + A_b + A_c +$ ecc.,

$$B_e + B_g + B_h + \text{ecc.},$$

$$C_r + C_s + C_t + \text{ecc.}$$

ordinati secondo dimensioni tutte positive e crescenti delle stesse indeterminate ω, θ, - - -, abbiano le proprietà seguenti; i primi m termini del secondo siano ordinatamente identici ai primi m termini del primo cioè quelli dell'uno a quelli dell'altro, ed i primi n del terzo siano identici ai primi n del primo stesso: se l'm sarà maggiore dell'n, i valori del secondo polinomio, almeno quelli che corrispondono a valori piccoli delle ω, θ, - - -, saranno prossimi ai corrispondenti del primo più dei corrispondenti del terzo.

Per le stesse proprietà, qui ammesse, la differenza tra il primo polinomio ed il secondo, e quella tra il primo ed il terzo, saranno due polinomj, nel primo dei quali la minor dimensione delle indeterminate ω, θ, - - - sarà maggiore della minor dimensione, che esse avranno nella seconda; e però, pel paragrafo antecedente, i valori della prima di queste due differenze, almeno quelli che corrispondono ai valori piccoli delle ω, θ, - - - saranno prossimi allo *zero* più dei corrispondenti della seconda; e conseguentemente i suddetti valori del secondo dei tre polinomj ammessi saranno prossimi ai corrispondenti del primo più dei corrispondenti del terzo: siccome si è enunciato.

139. I tre polinomj $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \text{ecc.}$,

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \text{ecc.},$$

$$B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + \text{ecc.}$$

siano ordinati secondo le dimensioni positive delle stesse indeterminate ω, θ, - - -.

Se i valori del secondo, almeno quelli che corrispondono ai valori delle ω, θ, - - - prossimi allo *zero*, saránno compresi tra i corrispondenti degli altri due; e sia B_0 eguale ad A_0, sarà anco $p_0 = A_0$.

Essendo i valori del secondo compresi tra i corrispondenti degli altri due, i valori di uno di questi saranno maggiori dei corrispondenti degli altri due: abbiano questa proprietà i valori del primo; e quelli del polinomio

$$A_0 - p_0 + A_1 - p_1 + A_2 - p_2 + A_3 - p_3 + \text{ecc.}$$

differenza tra il primo ed il secondo saranno minori di quelli dell'

$$A_0 - B_0 + A_1 - B_1 + A_2 - B_2 + A_3 - B_3 + \text{ecc.}$$

differenza tra il primo ed il terzo.

Ma questa proprietà non può aver luogo, per l'esposto nel paragrafo antecedente, se non sia $A_0 - p_0 = 0$; adunque sarà $p_0 = A_0$, come si è enunciato.

Se fosse anco $B_1 = A_1$, avrebbesi $p_0 = A_0$ ed anco $p_1 = A_1$; se fosse $B_2 = A_2$ avrebbesi in oltre $p_2 = A_2$; in generale le equazioni

$$p_0 = A_0,\ p_1 = A_1,\ p_2 = A_2,\ p_3 = A_3,\ - - -$$

saranno tante quanto saranno le

$$B_0 = A_0,\ B_1 = A_1,\ B_2 = A_2,\ B_3 = A_3,\ - - -.$$

E qui si rifletta, che ciascuna delle equazioni

$$.p_1 = A_1,\ p_2 = A_2,\ p_3 = A_3,\ ---$$

si decomporrà molte volte in più equazioni; giacchè esse debbono sussistere per infiniti valori delle $\omega, \theta, ---$.

140. Se i tre polinomj fossero

$$A_a + A_{a+m} + \text{ecc.},\ p_a + p_{a+c} + \text{ecc.},\ A_a + B_{a+r} + \text{ecc.};$$

e che i valori del secondo, almeno quelli che corrispondono ai piccoli delle ω, θ, --- fossero compresi tra i corrispondenti degli altri due; le p_a, A_a, sarebbero eguali, cioè avrebbesi la equazione $p_a = A_a$.

141. Ora, si abbiano le tre quantità P, Q, R funzioni delle stesse indeterminate ω, θ, --- ed aventi i loro sviluppi, almeno sino ai termini contenenti le dimensioni $n+1$ delle ω, θ, ---, affatto ordinarj: i valori corrispondenti ad $\omega = \theta = --- = 0$ sì di esse che delle loro derivate parziali prese rispetto alle stesse ω, θ, --- sino a quelle dell'ordine $(n-1)$ *esimo*, siano *nulli*; i valori delle P_n, R_n siano tra loro eguali, qualunque siano le ω, θ, ---: in ultimo i valori della Q, almeno quelli che corrispondono ai valori delle ω, θ, --- prossimi allo *zero*, siano compresi tra i corrispondenti delle P, R: e sarà Q_n anch'essa eguale alla P_n.

Per semplicità si rappresentino coi simboli P^1_{n+1}, Q^1_{n+1}, R^1_{n+1} quelle quantità, determinabili coll' esposto nel paragrafo 120, le quali rendono esatte le tre equazioni seguenti

$$P = P_n + P^1_{n+1},\ Q = Q_n + Q^1_{n+1},\ R = R_n + R^1_{n+1}.$$

Essendo i suddetti valori della Q compresi tra i corrispondenti delle P, R, i valori della differenza

$$P - Q \text{ ossia di } P_n - Q_n + P^1_{n+1} - Q^1_{n+1}$$

saranno prossimi allo *zero* più dei corrispondenti della

$$P - R = P^{\mathrm{I}}_{n+1} - R^{\mathrm{I}}_{n+1}$$

e però quelli della $P_n - Q_n$ dovranno essere prossimi allo *zero* più di quelli delle quantità

$$P^{\mathrm{I}}_{n+1} - R^{\mathrm{I}}_{n+1} - \left(P^{\mathrm{I}}_{n+1} - Q^{\mathrm{I}}_{n+1}\right) \text{ ossia della } Q^{\mathrm{I}}_{n+1} - R^{\mathrm{I}}_{n+1}.$$

Nelle due espressioni

$$P_n - Q_n, \quad Q^{\mathrm{I}}_{n+1} - R^{\mathrm{I}}_{n+1}$$

si pongano $a\xi$, $b\xi$, --- in vece delle ω, θ, ---; ed esse si ridurranno alle

$$\left(P_{(n)} - Q_{(n)}\right)\xi^n, \quad \left(Q^{\mathrm{I}}_{n+1} - R^{\mathrm{I}}_{n+1}\right)\xi^{n+1};$$

e per tanto i valori della $P_{(n)} - Q_{(n)}$ dovranno approssimarsi allo *zero* più dei corrispondenti della

$$\left(Q^{\mathrm{I}}_{(n+1)} - R^{\mathrm{I}}_{(n+1)}\right)\xi.$$

Ma evidentemente questa proprietà non si può verificare, se non sia nulla la quantità $P_{(n)} - Q_{(n)}$; giacchè i valori della

$$\left(Q^{\mathrm{I}}_{(n+1)} - R^{\mathrm{I}}_{(n+1)}\right)\xi,$$

coll'avvicinare la ξ allo *zero*, si possono avvicinare anch'essi allo *zero* quanto si voglia. Adunque sarà

$$P_{(n)} - Q_{(n)} = 0 \text{ ossia } P_{(n)} = Q_{(n)}:$$

come si è enunciato.

Quest'ultima equazione si decomporrà in tante, quanti saranno i termini dissimili rispetto alle $\omega, \theta,$--- contenuti in essa.

142. Per esempio sia

$P = \omega\theta F\big(p(x,y),\ q(x,y),\ ---\big)$,

$Q = \phi(x+\omega, y+\theta) - \phi(x, y+\theta) - \phi(x+\omega, y) + \phi(x,y)$, ed

$R = \omega\theta F\big(p(x+\omega, y),\ q(x+\omega, y+\theta),\ ---\big)$:

la R è qui visibilmente, ciò che hassi, cambiando alcune delle x, y contenute nella P nei binomj $x+\omega, y+\theta$.

Per questo caso si ha evidentemente

$$n=2,\ P_0=0,\ P_1=0,\ P_2=\omega\theta F(p, q, ---)$$

$$Q_0=0,\ Q_1=0,\ Q_2=\omega\theta\left(\frac{d^2\phi}{dxdy}\right),\ \text{ed}$$

$$R_0=0,\ R_1=0,\ R_2=\omega\theta F(p, q, ---);$$

e però la equazione $P_n = Q_n$ sarà

$$\omega\theta F(p, q, ---) - \omega\theta\left(\frac{d^2\phi}{dxdy}\right) = 0,\ \text{la quale dà}$$

$$\left(\frac{d^2\phi}{dxdy}\right) = F(p, q, ---).$$

E qui pure ha luogo una osservazione importantissima affatto analoga a quella fatta al fine del § 127.

Non mi trattengo ad esporre per le funzioni di più indeterminate la proprietà analoga a quella trattata nel paragrafo 128 per quelle di una sola, perchè una combinazione, facilissima a farsi, di ciò che si è detto in quel medesimo paragrafo, con qualche passo del paragrafo 137, riduce la sua trattazione una ripetizione di quella.

PARTE QUINTA

MASSIMI E MINIMI VALORI DELLE FUNZIONI E VALORI DELLO $\frac{0}{0}$.

LEZIONE PRIMA

Dei massimi e minimi valori delle funzioni di una sola variabile.

143. Si chiamerà massimo valore di una funzione, quello, il quale sarà maggiore almeno di quei valori di essa, che corrisponderanno ai valori della variabile prossimi a quel medesimo, al quale corrisponderà lo stesso della funzione. Così, si chiamerà minimo valore di una funzione, quello, il quale sarà minore almeno di quei valori di essa, che corrisponderanno ai valori della variabile prossimi a quello, al quale corrisponderà esso medesimo.

Alcune funzioni hanno un massimo valore altre un minimo, alcune più valori massimi ed altre più valori minimi; ed anco vi sono funzioni aventi un valore massimo ed uno minimo, ed alcune altre che hanno più valori massimi e più valori minimi. Uno qualunque di questi valori si terrà per conosciuto, quando conoscerassi il valore della variabile corrispondente ad esso.

144. Un valore della x, il quale corrisponda ad un massimo ovvero ad un minimo di una funzione $\varphi(x)$,

sarà tra quelli che annulleranno la derivata $\varphi'(x)$, ossia che soddisfaranno la equazione $\varphi'(x)=0$.

Sia α il valore della x corrispondente ad un massimo della funzione $\varphi(x)$; ed intendasi colla ω una quantità *positiva* qualunque; ed i valori della x prossimi all'α saranno quei medesimi dei binomj $\alpha+\omega$, $\alpha-\omega$, che corrisponderanno ai piccioli valori della ω.

Essendo $\varphi(\alpha)$ un massimo valore della $\varphi(x)$, per la definizione avranno luogo le due relazioni

$$\varphi(\alpha)>\varphi(\alpha+\omega),\quad \varphi(\alpha)>\varphi(\alpha-\omega)$$

almeno pei valori piccoli della ω.

Sviluppando i secondi membri di queste relazioni, e riducendo, si hanno le seguenti

$$0>\omega\varphi'(\alpha)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(\alpha)+\text{ecc.},$$

$$0>-\omega\varphi'(\alpha)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(\alpha)-\text{ecc.},$$

le quali significano, che i valori dei due polinomj

$$\omega\varphi'(\alpha)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(\alpha)+\text{ecc.},\quad -\omega\varphi'(\alpha)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(\alpha)-\text{ecc.}$$

se non tutti almeno i corrispondenti ai valori della ω piccoli, debbono essere negativi.

Ora, se $\varphi'(\alpha)$ fosse positivo, positivo pure sarebbe $\omega\varphi'(\alpha)$ primo termine del primo di questi polinomj, e conseguentemente (§ 131) i valori di questo polinomio, almeno quelli corrispondenti ai valori piccoli della ω, sarebbero anch'essi positivi, ciò che è assurdo. Così, se $\varphi'(\alpha)$ fosse negativo, sarebbe positivo $-\omega\varphi'(\alpha)$ primo termine dell'altro dei medesimi due polinomj; e per conseguenza i valori di questo polinomio, almeno i corrispondenti agli anzidetti della ω, sarebbero anch'essi positivi, ciò che è pure assurdo; giacchè debbono essere negativi: vale a dire $\varphi'(\alpha)$ non può essere nè positivo nè negativo, e però sarà *zero*.

Questa conseguenza si può desumere anco dall'esposto al § 126. Di fatto, la relazione

$$o > -\omega\varphi'(\alpha) + \frac{\omega^2}{2}\varphi''(\alpha) - \text{ecc.}$$

equivale alla

$$\omega\varphi'(\alpha) - \frac{\omega^2}{2}\varphi''(\alpha) + \text{ecc.} > o\,;$$

e però si dovranno verificare le due relazioni

$$\omega\varphi'(\alpha) + \frac{\omega^2}{2}\varphi''(\alpha) + \text{ecc.} < o\cdot\omega + o\cdot\omega^2 + \text{ecc.},$$

$$\omega\varphi'(\alpha) - \frac{\omega^2}{2}\varphi''(\alpha) + \text{ecc.} > o\cdot\omega + o\cdot\omega^2 + \text{ecc.},$$

ove si è scritto $o\cdot\omega + o\cdot\omega^2 + \text{ecc.}$ in vece di *zero*. Vale a dire i valori di uno dei polinomj

$$\omega\varphi'(\alpha) + \frac{\omega^2}{2}\varphi''(\alpha) + \text{ecc.},\quad \omega\varphi'(\alpha) - \frac{\omega^2}{2}\varphi''(\alpha) + \text{ecc.}$$

debbono essere maggiori ed i corrispondenti dell'altro minori di $o\cdot\omega + o\cdot\omega^2 + \text{ecc.}$; e conseguentemente pel paragrafo citato sarà $\varphi'(\alpha) = o$.

Ma $\varphi'(\alpha)$ è il valore della $\varphi'(x)$ corrispondente alla $x = \alpha$; adunque il valore della x corrispondente ad un massimo della $\varphi(x)$ annulla $\varphi'(x)$ ossia è esso tra le radici della equazione $\varphi'(x) = o$.

Se α fosse il valore della x corrispondente ad un minimo della funzione $\varphi'(x)$; si avrebbero le due relazioni

$$\varphi(\alpha) < \varphi(\alpha + \omega),\quad \varphi(\alpha) < \varphi(\alpha - \omega),$$

cioè i valori dei due polinomj

$$\omega\varphi'(\alpha) + \frac{\omega^2}{2}\varphi''(\alpha) + \text{ecc.},\quad -\omega\varphi'(\alpha) + \frac{\omega^2}{2}\varphi''(\alpha) - \text{ecc.},$$

almeno quelli corrispondenti a valori della ω piccoli, dovrebbero essere positivi e conseguentemente, per quello che si è detto dianzi rispetto al massimo, si avrà qui pure $\varphi'(\alpha)=0$, cioè il valore della x corrispondente ad un minimo della $\varphi(x)$, soddisfa la equazione $\varphi'(x)=0$.

Concludiamo per tanto, che i valori di una variabile, corrispondenti ai massimi od ai minimi di una funzione di essa, sono tra quelli che soddisfanno la equazione che risulta dall'eguagliare a *zero* la derivata della medesima funzione. Appunto come si è dichiarato.

145. Se fosse $\varphi(x)=ax+b$, si avrebbe $\varphi'(x)=a$, quantità che non si può annullare; e però la funzione $ax+b$ non sarà suscettibile nè di massimo nè di minimo valore: come è d'altronde evidente.

Se poi fosse $\varphi(x)=ax^2+bx+c$, avrebbesi $\varphi'(x)=2ax+b$, quantità che si può annullare, facendo $x=-\frac{b}{2a}$; e però una funzione della forma ax^2+bx+c può avere un valore massimo od un minimo.

Per questa funzione si ha $\varphi''(x)=2a$, cioè il valore della derivata seconda corrispondente a qualunque valore della x, ossia qualunque sia la x, eguale a $2a$.

Per altre forme della $\varphi(x)$ i valori della $\varphi''(x)$ conterranno la x, e però varieranno, variando la x medesima; ma il valore della $\varphi''(x)$ corrispondente ad un dato della x sarà individuato.

Quando il valore della $\varphi''(x)$ corrispondente ad uno di quelli della x, che soddisfanno l'equazione $\varphi'(x)=0$, sia *negativo*, a questo medesimo valore della x corrisponde un massimo della $\varphi(x)$; e quando il valore della $\phi''(x)$ corrispondente ad uno di quelli della x, che soddisfanno l'equazione $\phi'(x)=0$, sia *positivo*, questo medesimo valore della x corrisponde ad un minimo della funzione $\phi(x)$.

Sono tanto analoghi fra loro i ragionamenti, che occorrono, per dimostrare queste due dichiarazioni, che io credo di limitarmi alla dimostrazione di una di esse, a quella della seconda.

La α esprima un valore della x radice della equazione $\phi'(x)=0$, il quale renda anco $\phi''(x)$ positiva, cioè sia

$$\phi'(\alpha)=0,\ \phi''(\alpha)>0.$$

Essendo

$$\phi(\alpha+\omega)=\phi(\alpha)+\omega\phi'(\alpha)+\frac{\omega^2}{2}\phi''(\alpha)+\frac{\omega^3}{2\cdot3}\phi'''(\alpha)+\text{ecc.}$$

$$\phi(\alpha-\omega)=\phi(\alpha)-\omega\phi'(\alpha)+\frac{\omega^2}{2}\phi''(\alpha)-\frac{\omega^3}{2\cdot3}\phi'''(\alpha)+\text{ecc.},$$

e per ipotesi $\phi'(\alpha)=0$, si ha evidentemente

$$\phi(\alpha+\omega)-\phi(\alpha)=\frac{\omega^2}{2}\phi''(\alpha)+\frac{\omega^3}{2\cdot3}\phi'''(\alpha)+\text{ecc.},\ \text{e}$$

$$\phi(\alpha-\omega)-\phi(\alpha)=\frac{\omega^2}{2}\phi''(\alpha)-\frac{\omega^3}{2\cdot3}\phi'''(\alpha)+\text{ecc.}$$

Ma per essere $\phi''(\alpha)$ positivo, positivo risulta anco $\frac{\omega^2}{2}\phi''(\alpha)$; e però i valori dei due polinomj

$$\frac{\omega^2}{2}\phi''(\alpha)+\frac{\omega^3}{2\cdot3}\phi'''(\alpha)+\text{ecc.},\quad \frac{\omega^2}{2}\phi''(\alpha)-\frac{\omega^3}{2\cdot3}\phi'''(\alpha)+\text{ecc.}$$

(§ 131) almeno quelli corrispondenti a valori della ω piccioli, saranno anch'essi positivi; e conseguentemente positivi saranno pure quelli dei binomj

$$\phi(\alpha+\omega)-\phi(\alpha),\ \phi(\alpha-\omega)-\phi(\alpha)$$

eguali ai medesimi polinomj, cioè avranno luogo le due relazioni

$$\varphi(\alpha+\omega)-\varphi(\alpha)>0,\quad \varphi(\alpha-\omega)-\varphi(\alpha)>0,$$

le quali danno le seguenti

$$\varphi(\alpha)<\varphi(\alpha+\omega),\quad \varphi(\alpha)<\varphi(\alpha-\omega):$$

queste relazioni significano appunto, che $\varphi(\alpha)$, valore della $\varphi(x)$ corrispondente alla $x=\alpha$, è minore se non di tutti i valori della $\varphi(x)$, almeno di quelli corrispondenti ai valori della x prossimi allo stesso α; come sono $\alpha+\omega$, $\alpha-\omega$ quando la ω sia piccola.

È adunque dimostrato, che quei valori di una variabile, che annullano la derivata prima di una funzione di essa e rendono o *positiva* ovvero *negativa* la sua derivata seconda, corrispondono rispettivamente ad un minimo ovvero ad un massimo valore della medesima funzione.

146. Un valore della x, che annulli sì la $\varphi'(x)$ che la $\varphi''(x)$, e non annulli la $\varphi'''(x)$, non corrisponde nè ad un massimo nè ad un minimo valore della $\varphi(x)$.

Un tal valore della x si chiami β; cioè abbiasi

$$\varphi'(\beta)=0,\ \varphi''(\beta)=0,\ \text{e}\ \varphi'''(\beta)\ \text{positiva o negativa.}$$

Per essere

$$\varphi(\beta+\omega)=\varphi(\beta)+\omega\varphi'(\beta)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(\beta)+\frac{\omega^3}{2\cdot3}\varphi'''(\beta)+\text{ecc.},$$

$$\varphi(\beta-\omega)=\varphi(\beta)-\omega\varphi'(\beta)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(\beta)-\frac{\omega^3}{2\cdot3}\varphi'''(\beta)+\text{ecc.},$$

e $\varphi'(\beta)=0$, $\varphi''(\beta)=0$, si hanno

$$\varphi(\beta+\omega)-\varphi(\beta)=\frac{\omega^3}{2\cdot3}\varphi'''(\beta)+\text{ecc.},$$

$$\varphi(\beta-\omega)-\varphi(\beta)=-\frac{\omega^3}{2\cdot3}\varphi'''(\beta)+\text{ecc.},$$

e però, se $\varphi'''(\beta) > o$, il secondo membro della prima di queste equazioni sarà positivo, e quello della seconda negativo; e conseguentemente si avrà

$$\varphi(\beta+\omega)-\varphi(\beta)>o,\ \varphi(\beta-\omega)-\varphi(\beta)<o \text{ ossia}$$

$$\varphi(\beta+\omega)>\varphi(\beta)>\varphi(\beta-\omega).$$

Se poi fosse $\varphi'''(\beta)<o$, si avrebbero $\varphi(\beta+\omega)-\varphi(\beta)<o$, $\varphi(\beta-\omega)-\varphi(\beta)>o$, ovvero

$$\varphi(\beta+\omega)<\varphi(\beta)<\varphi(\beta-\omega).$$

Vale a dire, sì nel caso di $\varphi'''(\beta)$ positiva che nel caso di $\varphi'''(\beta)$ negativa, la $\varphi(\beta)$ è nè massimo nè minimo valore della $\varphi(x)$.

147. Se un valore della x annullasse tutte le $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$ e non annullasse la $\varphi^{IV}(x)$, esso corrisponderebbe ad un massimo ovvero ad un minimo valore della $\varphi(x)$, cioè ad un massimo se rendesse la $\varphi^{IV}(x)$ negativa, e ad un minimo se la rendesse positiva.

In generale, se l'ultima delle derivate $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$, $\varphi^{IV}(x)$, - - - annullate dallo stesso valore della x sarà di ordine pari, esso non corrisponderà nè ad un massimo nè ad un minimo della $\varphi(x)$; e se tal derivata sarà di ordine dispari, esso corrisponderà ad un massimo, se la seguente risulterà negativa, e ad un minimo se risulterà positiva.

148. Se la funzione della quale si cerca il massimo od il minimo valore fosse la implicita y, che entra in una data equazione $F(x, y)=o$, si potrebbero scoprire questi suoi valori, collo sciogliere la equazione rispetto ad essa, indi trattare il suo valore ottenuto colle regole sopra esposte: comunemente però conviene, per semplicità, usare quella regola, che emerge dalle considerazioni seguenti.

Dal paragrafo 44 risulta, che, tutte le coppie di valori delle x, y aventi la proprietà di soddisfare la equazione $F(x,y)=0$, soddisfanno anco la $F'(x)+y'F'(y)=0$, ove si intende colla y quella funzione della x, che entra nella equazione data. Ma per ogni valore della x, che corrisponda ad un massimo o ad un minimo della y, si ha $y'=0$; adunque per esso avrassi anco

$$F'(x)=0,$$

purchè in essa si intenda colla y, quando vi sia, quella funzione della x, che è data dalla $F(x,y)=0$.

Vale a dire, tra le moltissime coppie di valori delle x, y soddisfacenti la equazione data, quelle in ciascuna delle quali vi sarà un massimo od un minimo valore della y, soddisfanno anco la equazione

$$F'(x)=0;$$

e conseguentemente, ogni valore massimo o minimo della y ed il corrispondente della x, costituiranno una di quelle coppie dei loro valori, che avransi, sciogliendo le due equazioni seguenti

$$F(x,y)=0,\ F'(x)=0.$$

149. Dal medesimo paragrafo 44 risulta anco, che le x, y aventi la proprietà rappresentata colla equazione $F(x,y)=0$, hanno quella pure rappresentata colla

$$F''(x)+2y'F'_{/}+y'^2F''(y)+y''F'(y)=0;$$

ma pei massimi o minimi valori della y hassi $y'=0$; e però si avrà la

$$F''(x)+y''F'(y)=0,\ \text{che dà}\ y''=-\frac{F''(x)}{F'(y)}.$$

Quindi ogni coppia di valori delle x, y, soddisfacente le suddette due equazioni, e che renda $-\frac{F''(x)}{F'(y)}$ *negativa*, corrisponderà e comprenderà un massimo valore della y, ed ogni coppia, che renda questa medesima funzione *positiva*, comprenderà un minimo valore della y.

Non mi trattengo a parlare del caso, che vi sia una coppia degli anzidetti valori, che renda $-\frac{F''(x)}{F'(y)}$ nulla; perchè rarissime volte accade, e d'altronde lo sviluppamento di esso presenta nessuna difficoltà.

150. In ultimo troviamo quelle coppie di valori delle x, y, che sono tra le infinite soddisfacenti una data equazione $f(x, y) = 0$, e corrispondenti ai massimi o minimi valori di una funzione $\phi(x, y)$ data.

Siccome si ha la equazione $f(x, y) = 0$, così una delle variabili x, y sarà funzione implicita dell'altra; si tenga la y funzione della x, e la $\phi(x, y)$ sarà una funzione composta della sola x; e però e i massimi ed i minimi valori di questa funzione corrisponderanno a valori della x, che sono tra quelli, i quali annullano $\phi'(x) + y'\phi'(y)$ derivata prima rispetto alla x della medesima funzione $\phi(x, y)$, ossia tra quelli soddisfacenti la equazione

$$\phi'(x) + y'\phi'(y) = 0.$$

Ma la $f(x, y) = 0$ dà $y' = -\frac{f'(x)}{f'(y)}$; adunque i valori delle x, y, corrispondenti ai massimi o minimi della $\phi(x, y)$, saranno tra quelli che soddisfanno la equazione $\phi'(x) - \frac{f'(x)}{f'(y)}\phi'(y) = 0$ ossia la $\phi'(x)f'(y) - \phi'(y)f'(x) = 0$.

Concludiamo per tanto, che le coppie di valori delle x, y corrispondenti ai massimi od ai minimi della $\varphi(x, y)$, e che sono tra quelli, che hanno la proprietà $f(x, y) = 0$, soddisfanno questa equazione ed anco la dianzi trovata $\varphi'(x)f'(y) - \varphi'(y)f'(x) = 0$.

Per distinguere, se una coppia di valori delle x, y soddisfacente le equazioni

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi'(x)f'(y) - \varphi'(y)f'(x) = 0,$$

corrisponda ad un massimo ovvero ad un minimo, o nè ad un massimo nè ad un minimo valore della funzione $\varphi(x, y)$, si formerà la derivata seconda di questa funzione cioè la prima della $\varphi'(x) + y'\varphi'(y)$, la quale in generale riescirà formata colle x, y, y', y'', ed in essa porrassi in vece della y' il suo valore $-\dfrac{f'(x)}{f'(y)}$ o l'equivalente $-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi'(y)}$; ed in luogo della y'' si porrà il suo valore desunto dalla equazione $f(x, y) = 0$; e con ciò avrassi la derivata seconda della $\varphi(x, y)$ formata colle sole variabili x, y. Si sostituiranno in questa funzione, così risultante, in vece delle x, y i loro valori costituenti la coppia che si ha di mira; e se il risultamento sarà negativo o positivo, essa corrisponderà rispettivamente ad un massimo o ad un minimo della $\varphi(x, y)$. Se poi il risultamento sarà *zero*, converrà formarsi la derivata terza, sostituire in essa per le x, y i medesimi anzidetti valori; e se non avrassi *zero*, essi non corrisponderanno nè ad un massimo nè ad un minimo valore della $\varphi(x, y)$: se in vece avrassi *zero*, si procederà come al § 146.

151. Molte volte, per le forme o pei significati delle

funzioni di cui si cercano i massimi o minimi valori si concepisce, che sono suscettibili di un solo valore massimo ovvero di un solo minimo; e però, per tali funzioni se la equazione analoga alla $\varphi'(x)=0$ sarà soddisfatta da un solo valore della x, o le analoghe alle $F(x,y)=0$, $F'(x)=0$ oppure alle $f(x,y)=0$, $\varphi'(y)f'(x)-\varphi'(x)f'(y)=0$ da una sola coppia di valori delle x, y, essi saranno i richiesti; e non occorreranno considerazioni ulteriori per iscoprire, se siano corrispondenti ad un massimo ovvero ad un minimo.

Così, se la $\varphi(x)$ fosse una frazione $\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$, risultando

$$\varphi'=\frac{\mu\lambda'-\lambda\mu'}{\mu^2},\quad \varphi''=\frac{\mu\lambda''-\lambda\mu''}{\mu^2}-2\frac{\mu'}{\mu}\varphi',$$

la equazione $\varphi'(x)=0$ darebbe $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\lambda'}{\mu'}$, e la relazione $\varphi''(x)>$ ovvero <0 equivarrebbe alla $\mu\lambda''-\lambda\mu''>$ ovvero <0; e però il massimo o minimo valore della $\frac{\lambda}{\mu}$ eguaglierà il corrispondente della $\frac{\lambda'}{\mu'}$, e sarà esso effettivamente un massimo ovvero un minimo secondo chè risulterà $\mu\lambda''-\lambda\mu''$ negativo o positivo.

152. Se un valore α della x, tra quelli soddisfacenti la equazione $\varphi'(x)=0$, rendesse la $\varphi''(x)$ infinita; per iscoprire, se esso corrisponda ad un massimo o ad un minimo valore della $\varphi(x)$, bisognerà trovare gli sviluppi delle differenze

$$\varphi(\alpha+\omega)-\varphi(\alpha),\ \varphi(\alpha-\omega)-\varphi(\alpha)$$

ordinati secondo potenze d'esponenti crescenti della ω, il che si farà mediante l'esposto al § 121; giacchè risultando i primi termini di questi due sviluppi entrambi positivi, l'α corrisponderà ad un minimo valore della $\varphi(x)$, e risultando entrambi negativi, corrisponderà ad un massimo: se poi risultassero l'uno positivo e l'altro negativo, $\varphi(\alpha)$ non sarebbe nè massimo nè minimo valore della $\varphi(x)$.

153. Così, la dichiarazione fatta, che i valori della x corrispondenti ai massimi o minimi della funzione $\varphi(x)$ sono tra quelli che soddisfanno la equazione $\varphi'(x)=0$ regge, semprechè lo sviluppo della $\varphi(x+\omega)$ corrispondente all'$x=\alpha$ valor richiesto, abbia almeno i primi due termini della forma ordinaria, cioè siano $\varphi(\alpha)+\omega\varphi'(\alpha)+$ecc.; giacchè, se ciò non avesse luogo, $\varphi'(\alpha)$ in vece di esser *zero* sarebbe infinito.

Una funzione, per cui questo accada, è la seguente $\varphi(x)=a+b\sqrt[3]{(x-\alpha)^2}$, la quale dà $\varphi(\alpha+\omega)=a+b\omega^{\frac{2}{3}}$, $\varphi(\alpha-\omega)=a+b\omega^{\frac{2}{3}}$, e $\varphi(\alpha)=a$. Dimodochè l'a è un minimo valore della funzione $a+b\sqrt[3]{(x-\alpha)^2}$; e l'$\alpha$, valore della x al quale esso corrisponde, rende la derivata

$$\varphi'(x)=\frac{2b}{3\sqrt[3]{(x-\alpha)}} \text{ infinita.}$$

Concludiamo per tanto, che vi sono alcune funzioni, i cui massimi o minimi valori sono tra quelli, che rendono infinite le loro derivate prime. Questi valori si distingueranno gli uni dagli altri, mediante l'esposto nel paragrafo antecedente.

Non fo, per le funzioni contemplate nei paragrafi 148, 150, nè farò per quelle che si contempleranno nei seguenti, considerazioni analoghe a queste ultime, perchè occorrono rarissime volte.

LEZIONE II.

Dei massimi e minimi valori delle funzioni di due o più variabili indipendenti.

154. Ora parleremo dei massimi e minimi valori della $\phi(x, y, z, ---)$ funzione delle variabili $x, y, z, ---$ indipendenti.

Si chiama massimo valore di una funzione di un numero qualunque di variabili, quello, il quale è maggiore, se non di ogni altro valore di essa, almeno di quelli che corrispondono ai valori delle variabili prossimi ai medesimi ai quali esso corrisponde; e minimo si chiama quello che è minore, almeno di quelli che corrispondono a valori delle variabili, prossimi agli stessi ai quali corrisponde esso medesimo.

Siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta, ---$ valori delle $x, y, z, u, ---$ corrispondenti ad un massimo valore della $\phi(x, y, z, u, ---)$; e $p, q, r, s, ---$ esprimano quantità positive indeterminate. I valori della ϕ corrispondenti agli

$$x=\alpha+p,\ y=\beta+q,\ z=\gamma+r,\ ---$$

$$x=\alpha-p,\ y=\beta-q,\ z=\gamma-r,\ ---$$ saranno

$$\phi(\alpha+p, \beta+q, \gamma+r, ---),\ \phi(\alpha-p, \beta-q, \gamma-r, ---)$$ ossia

$$\phi+\phi(1)+\phi(2)+\text{ecc.},\ \phi-\phi(1)+\phi(2)-\text{ecc.},$$

ove ϕ, $\phi(1)$, $\phi(2)$, $---$ esprimono ordinatamente i valori delle

$$\varphi(x, y, z, ---),\ p\varphi'(x)+q\varphi'(y)+r\varphi'(z)+\text{ecc.},$$

$$\frac{1}{2}p^2\varphi''(x)+pq\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)+pr\left(\frac{d^2\varphi}{dxdz}\right)+\text{ecc.}+$$

$$\frac{1}{2}q^2\varphi''(y)+qr\left(\frac{d^2\varphi}{dydz}\right)+\text{ecc.}+\frac{1}{2}r^2\varphi''(z)+\text{ecc.}$$

corrispondenti alle $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$, - - -.

E però avrassi

$\varphi>\varphi+\varphi(1)+\varphi(2)+$ecc., ed anco $\varphi>\varphi-\varphi(1)+\varphi(2)-$ecc.

ossia $\varphi(1)+\varphi(2)+\text{ecc.}<0$, $-\varphi(1)+\varphi(2)-\text{ecc.}<0$.

Queste due relazioni non si possono verificare, se non è $\varphi(1)=0$ (§ 136). Di fatto, se $\varphi(1)$ non fosse nullo, sarebbe quantità positiva ovvero negativa: ora se $\varphi(1)$ fosse positivo, i valori del polinomio $\varphi(1)+\varphi(2)+$ecc., almeno quelli corrispondenti a piccioli valori delle p, q, r, - - -, avrebbero segni simili a quelli di $\varphi(1)$, cioè sarebbero positivi, ciò che è assurdo; giacchè per soddisfare la prima delle relazioni qui trovate, tali valori debbono essere negativi: se poi $\varphi(1)$ fosse negativo, i valori del polinomio $-\varphi(1)+\varphi(2)-$ecc., almeno i corrispondenti a piccioli valori delle p, q, r, - - -, sarebbero positivi, ciò che è pure assurdo, stante la seconda delle medesime due relazioni. Quindi sarà $\varphi(1)=0$ ossia

$$p\varphi'(\alpha)+q\varphi'(\beta)+r\varphi'(\gamma)+\text{ecc.}=0.$$

Questa equazione, dovendosi verificare per infiniti valori delle p, q, r, - - -, dà le

$$\varphi'(\alpha)=0,\ \varphi'(\beta)=0,\ \varphi'(\gamma)=0,\ ---,$$

il cui numero eguaglia lo stesso numero delle variabili x, y, z, - - -.

Ma $\varphi'(\alpha)$, $\varphi'(\beta)$, $\varphi'(\gamma)$, - - - sono quei valori delle $\varphi'(x)$, $\varphi'(y)$, $\varphi'(z)$, - - - derivate della $\varphi(x, y, z, ---)$, che corrispondono all'$x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$, - - -; adunque i valori delle variabili x, y, z, - - - corrispondenti ad un massimo valore della funzione $\varphi(x, y, z, ---)$ saranno tra quelli soddisfacenti le equazioni

$$\varphi'(x)=0,\ \varphi'(y)=0,\ \varphi'(z)=0,\ ---.$$

Facendo altrettanto pei valori delle x, y, z, - - - corrispondenti ad un minimo valore di una funzione $\varphi(x, y, z, ---)$ trovasi, che anch'essi sono tra quelli, soddisfacenti queste medesime ultime equazioni. Concludiamo per tanto, che i valori delle x, y, z, - - - corrispondenti ad un massimo o ad un minimo valore della funzione $\varphi(x, y, z, ---)$ saranno di quelli, che soddisfanno le equazioni

$$\varphi'(x)=0,\ \varphi'(y)=0,\ \varphi'(z)=0,\ ---.$$

155. Passo ad esporre i criterj, onde distinguere quelli, tra i valori che soddisfanno queste ultime equazioni, i quali corrispondono ai massimi valori della funzione $\varphi(x, y, z, ---)$ da quelli che corrispondono ai minimi, e questi dagli altri, cioè da quelli che non corrispondono nè a massimi nè a minimi valori della $\varphi(x, y, z, ---)$ stessa.

Le equazioni $\varphi'(x)=0$, $\varphi'(y)=0$, $\varphi'(z)=0$, - - - siano soddisfatte da $x=a$, $y=b$, $z=c$, - - - cioè a, b, c, - - - siano tra i valori delle x, y, z, - - -, che soddisfanno queste equazioni; e si chiamino L, M, N, - - - i valori corrispondenti alle $x=a$, $y=b$, $z=c$, - - - delle quantità

$$p\varphi'(x)+q\varphi'(y)+r\varphi'(z)+\text{ecc.},$$

$$\frac{p^2}{2}\varphi''(x)+pq\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)+pr\left(\frac{d^2\varphi}{dxdz}\right)+\text{ecc.}+$$
$$\frac{1}{2}q^2\varphi''(y)+qr\left(\frac{d^2\varphi}{dydz}\right)+\text{ecc.}+\text{ecc.},$$

$$\frac{p^3}{2\cdot 3}\varphi'''(x)+\frac{1}{2}p^2q\left(\frac{d^3\varphi}{dx^2dy}\right)+\frac{1}{2}pq^2\left(\frac{d^3\varphi}{dxdy^2}\right)+\text{ecc.}+\text{ecc.},$$

- -,

che sono visibilmente le somme di quei termini dello sviluppo di $\varphi(x+p, y+q, z+r, ---)$, nei quali gli aumenti $p, q, r, ---$ hanno *una*, *due*, *tre*, --- dimensioni.

Se i valori dell'M, almeno quelli corrispondenti a valori delle $p, q, r, ---$ prossimi allo *zero*, saranno *negativi*, gli $a, b, c, ---$ valori delle $x, y, z, ---$ corrisponderanno ad un massimo della funzione $\varphi(x, y, z, ---)$; e se questi valori dell'M saranno *positivi*, gli $a, b, c, ---$ corrisponderanno ad un minimo valore della $\varphi(x, y, z, ---)$ stessa.

Essendo gli $a, b, c, ---$ valori delle $x, y, z, ---$, che soddisfanno le equazioni

$$\varphi'(x)=0,\ \varphi'(y)=0,\ \varphi'(z)=0 ---$$

ossia che annullano le derivate $\varphi'(x), \varphi'(y), \varphi'(z), ---$, il valore del polinomio $p\varphi'(x)+q\varphi'(y)+r\varphi'(z)+\text{ecc.}$ corrispondente ai medesimi delle $x, y, z, ---$, che è l'L sarà *zero*; e però avrassi

$$\varphi(a\pm p, b\pm q, c\pm r, ---)-\varphi(a, b, c, ---)=M\pm N+\text{ecc.}$$

Ma i valori del polinomio $M\pm N+\text{ecc.}$, se non tutti almeno quelli corrispondenti a piccioli valori delle

$p, q, r, ---$, hanno (§ 136) segni simili ai corrispondenti dell'M suo primo termine; adunque per tali valori delle $p, q, r, ---$, quando riescano positivi quelli dell'M, si avrà

$\phi(a \pm p, b \pm q, c \pm r ---) - \phi(a, b, c, ---) > 0$, ossia

$$\phi(a + p, b + q, c + r, ---) > \phi(a, b, c, ---), \text{ e}$$

$$\phi(a - p, b - q, c - r, ---) > \phi(a, b, c, ---),$$

cioè $\phi(a, b, c, ---)$ valore della $\phi(x, y, z, ---)$ corrispondente alle $x = a, y = b, z = c, ---$ sarà un minimo; e reciprocamente, se pei medesimi valori delle $p, q, r, ---$, quelli dell'M riesciranno negativi avrassi

$$\phi(a + p, b + q, c + r, ---) < \phi(a, b, c, ---),$$

$$\phi(a - p, b - q, c - r, ---) < \phi(a, b, c, ---),$$

vale a dire $\phi(a, b, c, ---)$ sarà un massimo valore della funzione $\phi(x, y, z, ---)$: tutto come si è dichiarato.

156. Non mi fermo a considerare il caso dell'$M = 0$, nè ad esporre le conseguenze che ne emergono per esso, quando N sia positivo o negativo, ovvero *zero*, nè a fare pel termine ove le $p, q, r, ---$ hanno quattro dimensioni, ciò che si è fatto per l'M; perchè i calcoli riescono oltremodo complicati, e d'altronde rarissime volte occorrono; e passo in vece ad esporre quelle proprietà della $\phi(x, y, z, ---)$ colle quali si può conoscere immediatamente, se i valori dell'M siano positivi o negativi; e comincio dal caso della $\phi(x, y)$ funzione delle sole due variabili x, y, pel quale i valori $x = a, y = b$, sono radici delle due equazioni seguenti

$$\phi'(x) = 0, \quad \phi'(y) = 0.$$

Si chiamino A, B, C quei valori delle derivate

$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\phi}{dx\,dy}\right)$, $\left(\frac{d^2\phi}{dy^2}\right)$, che corrispondono alle $x=a$, $y=b$; e si avrà

$$M=\tfrac{1}{2}Ap^2+Bpq+\tfrac{1}{2}Cq^2, \text{ ossia}$$

$$M=\frac{1}{2}\left(p+\frac{B}{A}q\right)^2\cdot A+\frac{1}{2}q^2\left(C-\frac{B^2}{A}\right).$$

Questa espressione della M insegna, che, essa sarà positiva, quando risulti $A>0$, e $C-\frac{B^2}{A}>$ ovvero eguale a *zero*, cioè quando sia

$$A>0, \text{ e } B^2< \text{ od } =AC;$$

ed anco che essa M sarà negativa, quando risulti $A<0$ e $C-\frac{B^2}{A}<$ od $=0$, ovvero

$$A<0, \text{ e } B^2< \text{ od } =AC.$$

Anzi, siccome sì nell'un caso che nell'altro dev'essere B^2 minore od al più eguale al prodotto AC, così, il segno di C dovrà essere simile a quello di A.

Se sarà B *zero*, avrassi $M=\frac{1}{2}Ap^2+\frac{1}{2}Cq^2$; e però i valori dell'$M$ saranno positivi, quando risultino A, C positivi ovvero uno *zero* ma l'altro positivo; e saranno negativi, quando tali siano A, C ovvero l'uno negativo e l'altro *zero*.

Concludiamo per tanto, che, il valore della $\phi(x,y)$ corrispondente ad $x=a$ ed $y=b$ sarà un massimo o un minimo, se B^2 non sarà maggiore di $A\cdot C$; e che esso sarà un massimo, se nè A nè C saranno positivi; ed un minimo se essi non saranno negativi: risultando $B^2>AC$, non sarà $\phi(a,b)$ nè un massimo nè un minimo valore della funzione $\phi(x;y)$.

157. Ora farò altrettanto, qualunque sia il numero delle variabili.

I valori delle derivate

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2\phi}{dxdy}\right), \left(\frac{d^2\phi}{dxdz}\right), \left(\frac{d^2\phi}{dxdu}\right), ---;$$
$$\left(\frac{d^2\phi}{dy^2}\right), \left(\frac{d^2\phi}{dydz}\right), \left(\frac{d^2\phi}{dydu}\right), ---;$$
$$\left(\frac{d^2\phi}{dz^2}\right), \left(\frac{d^2\phi}{dzdu}\right), ---; \left(\frac{d^2\phi}{du^2}\right), ---; ---$$

corrispondenti alle $x=a, y=b, z=c, u=d, ---$ si rappresentino ordinatamente con

$$A, B, C, D, ---; F, G, H, ---; K, L, ---; P ---; ---;$$

e si avrà

$$2M=Ap^2+2Bpq+2Cpr+2Dps+\text{ecc.}+Fq^2+2Gqr+2Hqs+\text{ecc.}$$
$$+Kr^2+2Lrs+\text{ecc.}+Ps^2+\text{ecc.}+\text{ecc.}, \text{ ossia}$$
$$2M=A\left(p+\frac{1}{A}(Bq+Cr+Ds+\text{ecc.})\right)^2+$$
$$F_1q^2+2G_1qr+2H_1qs+\text{ecc.}K_1r^2+2L_1rs+\text{ecc.}+P_1s^2+\text{ecc.}+\text{ecc.}$$

posto $F-\frac{B^2}{A}=F_1, G-\frac{BC}{A}=G_1, H-\frac{BD}{A}=H_1, ---$

$$K-\frac{C^2}{A}=K_1, L-\frac{CD}{A}=L_1, ---$$
$$P-\frac{D^2}{A}=P_1, ---$$
$$------.$$

Così hassi

$$F_1q^2+2G_1qr+2H_1qs+\text{ecc.}+K_1r^2+2L_1rs+\text{ecc.}+P_1s^2+\text{ecc.}+\text{ecc.}$$

eguale ad

$$F_1\left(q+\frac{1}{F_1}(G_1r+H_1s+\text{ecc.})\right)^2+K_2r^2+2L_2rs+\text{ecc.}+P_2s^2+\text{ecc.}+\text{ecc.}$$

posto

$$K_1 - \frac{G_1^2}{F_1} = K_2,\ L_1 - \frac{G_1 H_1}{F_1} = L_2, \text{---};\ P_1 - \frac{H_1^2}{F_1} = P_2, \text{---};\text{---};$$

come pure

$K_2 r^2 + 2 L_2 rs + \text{ecc.} + P_2 s^2 + \text{ecc.} + \text{ecc.}$ eguale a

$$K_2 \Big(r + \frac{1}{K_2}(L_2 s + \text{ecc.})\Big)^2 + P_3 s^2 + \text{ecc.} + \text{ecc.},$$

$$\text{posto } P_2 - \frac{L_2^2}{K_2} = P_3, \text{---}.$$

E per tanto sarà

$$2M = A\Big(p + \frac{1}{A}(Bq + Cr + \text{ecc.})\Big)^2 + F_1\Big(q + \frac{1}{F_1}(G_1 r + H_1 s + \text{ecc.})\Big)^2$$
$$+ K_2\Big(r + \frac{1}{K_2}(L_2 s + \text{ecc.})\Big)^2 + P_3 s^2 + \text{ecc.}$$

Questa espressione insegna, che i valori d'M saranno positivi, quando risulteranno

$A > 0$, $F_1 > 0$, $K_2 > 0$, $P_3 > 0$, ---, e negativi quando

$A < 0$, $F_1 < 0$, $K_2 < 0$, $P_3 < 0$, ---.

Sostituendo in queste relazioni in luogo delle F_1, K_2, P_3, --- i loro valori formati cogli A, B, C, D, --- si riducono le prime alle

$$A > 0,\ AF > B^2,\ (AK - C^2)(AF - B^2) > (AG - BC)^2, \text{---}$$

e le seconde alle

$$A < 0,\ AF > B^2,\ (AK - C^2)(AF - B^2) > (AG - BC)^2, \text{---};$$

dimodochè eccettuate le due $A > 0$, $A < 0$, che sono le prime di queste due serie di relazioni, le altre sono ordinatamente identiche fra loro. Quindi il valore della $\phi(x, y, z, u, \text{---})$ corrispondente alle $x = a, y = b, z = c, u = d$, --- sarà sempre un massimo od un minimo, quando abbiano luogo le relazioni

$AF > B^2$, $(AK - C^2)(AF - B^2) > (AG - BC)^2$, - - - ;

e sarà esso $\varphi(a, b, c, - - -)$ un minimo se $A > 0$ ed un massimo se $A < 0$.

158. Che le relazioni qui sopra esposte, eccettuate le prime, debbono essere le stesse sì pel massimo che pel minimo, qualunque sia il numero delle variabili, facilmente si concepisce mediante le considerazioni seguenti.

Evidentemente $2M$ è eguale ad

$$\frac{1}{A}(Ap + Bq + Cr + Ds + \text{ecc.})^2 \textit{ più}$$

$$\frac{1}{A}(AF_1q^2 + 2AG_1qr + 2AH_1qs + \text{ecc.} + AK_1r^2 + 2ALrs + \text{ecc.} + \text{ecc.});$$

e però, siccome nel primo di questi due polinomj vi è la p, che manca nell'altro, così i valori dei medesimi due polinomj

$$\frac{1}{A}(Ap + Bq + \text{ecc})^2,$$

$$\frac{1}{A}(AF_1q^2 + 2AG_1qr + \text{ecc} + AK_1r^2 + \text{ecc.} + \text{ecc.})$$

saranno indipendenti; e conseguentemente, affinchè l'M sia positivo dovranno essere A, ed

$$\frac{1}{A}(AF_1q^2 + 2AG_1qr + \text{ecc.} + AK_1r^2 + \text{ecc.} + \text{ecc.})$$

ossia A ed $AF_1q^2 + 2AG_1qr + \text{ecc.} + AK_1r^2 + \text{ecc.} + \text{ecc.}$

positivi; ed affinchè l'M sia negativo, dovranno essere

A ed $\frac{1}{A}(AF_1q^2 + 2AG_1qr + \text{ecc.} + AK_1r^2 + \text{ecc.} + \text{ecc.})$

negativi, ossia A negativo ed

$AF_1q^2 + 2AG_1qr + \text{ecc.} + AK_1r^2 + \text{ecc.} + \text{ecc.}$ positivo.

Vale a dire in entrambi i casi il polinomio

$$AF_1 q^2 + 2AG_1 qr + \text{ecc.} + AK_1 r^2 + \text{ecc.} + \text{ecc.}$$

dovrà essere positivo. Quindi sì pel massimo che pel minimo le condizioni o relazioni di cui si parla debbano essere le stesse.

Se la funzione φ, di cui si dimanda il massimo o minimo valore, in vece di essere affatto conosciuta, fosse la contenuta in una equazione tra essa e le variabili, cioè fosse data la equazione

$$F(x, y, z, --- \varphi) = 0;$$

con un ragionamento analogo a quello fatto al § 148, si troverebbe, che i valori delle $x, y, z, ---$, corrispondenti ai massimi o minimi della φ e questi medesimi della φ, dovrebbero soddisfare oltre la equazione data anco le seguenti

$$F'(x) = 0,\ F'(y) = 0,\ F'(z) = 0,\ ---;$$

e però tra i valori delle $x, y, z, ---$ e φ soddisfacenti la medesima equazione data e queste vi sarebbero i richiesti delle variabili $x, y, z, ---$ e gli stessi massimi o minimi della φ.

Così, per questi valori, risultando

$$\varphi''(x) = -\frac{F''(x)}{F'(\varphi)},\ \left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right) = -\frac{\left(\frac{d^2 F}{dxdy}\right)}{F'(\varphi)},\ \varphi''(y) = -\frac{F''(y)}{F'(\varphi)}, ---$$

mediante l'esposto nel § 157, si potranno distinguere, tra gli anzidetti valori delle $x, y, z, ---$, quelli che corrispondono ai massimi, da quelli, che corrispondono ai minimi valori della φ.

159. Si vogliono in ultimo i massimi o minimi valori della φ funzione delle m variabili $x, y, z, --- u, v,$

le quali però debbano avere le relazioni rappresentate colle n equazioni

$$A=0,\ B=0,\ C=0,\ ---\ P=0:$$

ove le $A, B, C, --- P$ esprimano funzioni date delle medesime m variabili $x, y, z, --- u, v$, ed n esprime un numero minore dell'm.

Si considerino le $x, y, z, --- u, v$ altrettante funzioni di una stessa variabile t, tali da soddisfare le n date equazioni; e la $\varphi(x, y, z, --- u, v)$ risulterà una funzione della t composta di m componenti, delle quali $m-n$ saranno affatto arbitrarie, per cui arbitrarie saranno anco le loro derivate prese rispetto alla t.

Egli è evidente, che ogni valore della t corrispondente a valori delle $x, y, z, --- u, v$, che rendono massima o minima la funzione $\varphi(x, y, z, --- u, v)$ corrisponderà esso medesimo allo stesso massimo o minimo valore della $\varphi(x, y, z, --- u, v)$; e però per esso avrà luogo la equazione

$$\varphi'(t)=0 \text{ cioè la}$$

$$\varphi'(x)x'+\varphi'(y)y'+\varphi'(z)z'+----+\varphi'(u)u'+\varphi'(v)v'=0:$$

dove le $x', y', z', --- u', v'$ derivate delle $x, y, z, ---$ prese rispetto alla t, hanno le relazioni date dalle n equazioni

$$A'(t)=0,\ B'(t)=0,\ C'(t)=0,\ ---\ P'(t)=0,$$

cioè dalle seguenti

$$A'(x)x'+A'(y)y'+A'(z)z'+----+A'(u)u'+A'(v)v'=0,$$
$$B'(x)x'+B'(y)y'+B'(z)z'+----+B'(u)u'+B'(v)v'=0,$$
$$C'(x)x'+C'(y)y'+C'(z)z'+----+C'(u)u'+C'(v)v'=0,$$
$$-------------------$$
$$P'(x)x'+P'(y)y'+P'(z)z'+----+P'(u)u'+P'(v)v'=0.$$

Se con queste ultime n equazioni si determinassero i valori di n delle derivate $x', y', z', --- u', v'$, e si ponessero nella

$$\phi'(x)x'+\phi'(y)y'+\phi'(z)z'+----+\phi'(u)u'+\phi'(v)v'=o,$$

avrebbesi una equazione, la quale dovendo sussistere indipendentemente dalle $m-n$ derivate rimaste in essa, si decomporrebbe in $m-n$ equazioni contenenti le sole variabili $x, y, z, --- u, v$. Quindi i valori delle m variabili corrispondenti tra loro e ad un massimo o minimo valore della funzione $\phi(x, y, z, --- u, v)$ saranno tra quelli, che soddisfanno queste $m-n$ equazioni trovate e le n date $A=o$, $B=o$, $C=o$, $---P=o$.

Le $m-n$ equazioni dianzi trovate, o meglio quelle che combinate colle n date somministrano i valori richiesti delle variabili $x, y, z, --- u, v$ si possono ottenere anco in quest'altra maniera. Evidentemente, le equazioni

$$\phi'(t)=o,\ A'(t)=o,\ B'(t)=o,\ C'(t)=o, ---\ P'(t)=o$$

danno

$$\phi'(t)+\alpha A'(t)+\beta B'(t)+\gamma C'(t)+----+\pi P'(t)=o,$$

cioè la

$$\begin{aligned}o=&\big(\phi'(x)+\alpha A'(x)+\beta B'(x)+\gamma C'(x)+----+\pi P'(x)\big)x'+\\ &\big(\phi'(y)+\alpha A'(y)+\beta B'(y)+\gamma C'(y)+----+\pi P'(y)\big)y'+\\ &\big(\phi'(z)+\alpha A'(z)+\beta B'(z)+\gamma C'(z)+----+\pi P'(z)\big)z'+\\ &-------------------\\ &+\big(\phi'(u)+\alpha A'(u)+\beta B'(u)+\gamma C'(u)+----+\pi P'(u)\big)u'+\\ &\big(\phi'(v)+\alpha A'(v)+\beta B'(v)+\gamma C'(v)+----+\pi P'(v)\big)v'\end{aligned}$$

qualunque siano le quantità indeterminate $\alpha, \beta, \gamma, --- \pi$.

Questa equazione si usi in vece della prima medesima $\phi'(t)=0$; e suppongansi sostituiti in essa i valori delle n ultime derivate $---u', v'$ desunti dalle

$$A'(t)=0, \quad B'(t)=0, \quad C'(t)=0, --- \quad P'(t)=0;$$

e poi si disponga delle n quantità $\alpha, \beta, \gamma, --- \pi$ talmente da annullare gli attuali coefficienti delle ultime n derivate $---u', v'$ contenute nella stessa ultima equazione qui trovata, cioè si determinino in modo da soddisfare le n equazioni seguenti

$$- -$$

$$\phi'(u)+\alpha A'(u)+\beta B'(u)+\gamma C'(u)+ ---- +\pi P'(u)=0,$$

$$\phi'(v)+\alpha A'(v)+\beta B'(v)+\gamma C'(v)+ ---- +\pi P'(v)=0;$$

e la medesima equazione dianzi trovata si ridurrà alla

$$0=\left(\phi'(x)+\alpha A'(x)+\beta B'(x)+\gamma C'(x)+ ---- +\pi P'(x)\right)x'+$$

$$\left(\phi'(y)+\alpha A'(y)+\beta B'(y)+\gamma C'(y)+ ---- +\pi P'(y)\right)y'+$$

$$+\text{ ecc.},$$

nella quale vi rimangono le sole $m-n$ prime derivate $x', y', ---$, ma affatto arbitrarie, per cui essa si decomporrà nelle $m-n$ seguenti

$$\phi'(x)+\alpha A'(x)+\beta B'(x)+\gamma C'(x)+ ---- +\pi P'(x)=0,$$

$$\phi'(y)+\alpha A'(y)+\beta B'(y)+\gamma C'(y)+ ---- +\pi P'(y)=0$$

$$- -$$

dove le $\alpha, \beta, --- \pi$ esprimono i rispettivi valori desunti dalle n equazioni antecedentemente stabilite. Quindi, se in queste ultime $m-n$ equazioni si porranno i valori delle $\alpha, \beta, --- \pi$ cavati dalle n antecedenti, o ciò che è lo stesso, se si combineranno tutte queste m

equazioni talmente da eliminare le n indeterminate $\alpha, \beta, \gamma, --- \pi$, si avranno le $m-n$ equazioni suddette, le quali combinate colle n date, somministreranno valori delle m variabili, fra i quali vi saranno i corrispondenti ad ogni massimo o minimo valore della funzione $\varphi(x, y, z, --- u, v)$.

Osservando i primi membri delle n equazioni, qui sopra esposte, si vede, che essi sono le derivate prime parziali della quantità

$$\varphi + \alpha A + \beta B + \gamma C + ---- + \pi P$$

prese rispetto alle m variabili $x, y, z, --- u, v$, nella ipotesi che le $\alpha, \beta, \gamma, --- \pi$ siano quantità costanti.

Da ciò emerge una regola facile, per trovare quei valori delle $x, y, z, --- u, v$, che corrispondono ai massimi o minimi della $\varphi(x, y, z, --- u, v)$, e sono tra quelli che soddisfanno le n equazioni

$$A = 0, \; B = 0, \; C = 0, \; --- \; P = 0.$$

Costituiscasi la quantità $\varphi + \alpha A + \beta B + \gamma C + ---- + \pi P$; si eguaglino a *zero* le m sue derivate prime parziali prese rispetto alle $x, y, z, --- u, v$; si eliminino le n costanti $\alpha, \beta, \gamma, --- \pi$ da siffatte m equazioni; sciolgansi rispetto alle $x, y, z, --- u, v$ le $m-n$ equazioni risultanti combinate colle n date; ed avransi per le $x, y, z, --- u, v$ i valori richiesti.

Non mi trattengo ad esporre i criterj per distinguere quelli, tra i valori desunti dalle ultime m equazioni, che corrispondono ai massimi da quelli corrispondenti ai minimi valori della φ, ed anco dagli altri, se mai vi fossero; perchè tutto ciò riesce facile e semplice in ogni caso particolare ma complicato assai in generale.

160. Se la φ fosse funzione implicita, che entrasse nelle n equazioni date

$$A=0,\ B=0,\ C=0,\ ---\ P=0,$$

o solamente in alcune di esse, dovendo essere pel suo massimo o minimo valore, $\varphi'(t)$ *nulla*, le n equazioni derivate delle date sarebbero

$$A'(x)x'+A'(y)y'+A'(z)z'+---+A'(u)u'=0,$$
$$B'(x)x'+B'(y)y'+B'(z)z'+---+B'(u)u'=0,$$
$$-----------------$$
$$P'(x)x'+P'(y)y'+P'(z)z'+---+P'(u)u'=0,$$

le quali danno la seguente, qualunque siano le $n-1$ quantità $\alpha, \beta, \gamma, ---\pi$,

$$\big(A'(x)+\alpha B'(x)+\beta C'(x)+---+\pi P'(x)\big)x'+$$
$$\big(A'(y)+\alpha B'(y)+\beta C'(y)+---+\pi P'(y)\big)y'+$$
$$-----------------+$$
$$\big(A'(v)+\alpha B'(v)+\beta C'(v)+---+\pi P'(v)\big)v'+0.$$

Questa equazione si può usare in vece della prima delle n sue antecedenti; ed usandola, e procedendo, come nell'ultimo paragrafo, si avranno le m seguenti

$$A'(x)+\alpha B'(x)+\beta C'(x)+---+\pi P'(x)=0,$$
$$A'(y)+\alpha B'(y)+\beta C'(y)+---+\pi P'(y)=0,$$
$$-----------------$$
$$A'(v)+\alpha B'(v)+\beta C'(v)+---+\pi P'(v)=0,$$

dalle quali eliminando le $n-1$ quantità $\alpha, \beta, ---\pi$, avransi $m-n+1$ equazioni, che combinate colle n

date, risulteranno $m+1$, mediante le quali si potranno avere i valori delle m variabili corrispondenti ai massimi o minimi della ϕ e gli stessi massimi o minimi valori della ϕ.

LEZIONE III.

Di quei valori delle frazioni, che compajono sotto la forma di $\frac{0}{0}$.

161. Accade spesse volte coll'individuare una variabile esistente nei termini di una frazione, che essa frazione si riduce alla forma $\frac{0}{0}$, sebbene il suo valore corrispondente a questo medesimo della variabile sia affatto individuato: farò qui vedere, come si possa determinare un tal valore della frazione, cioè quello del simbolo $\frac{0}{0}$, quando si conosca la frazione dalla quale trae origine, non che il corrispondente valore della variabile.

I valori dei termini della frazione $\frac{F(x)}{\Delta(x)}$, corrispondenti alla $x=a$ siano entrambi nulli, cioè sia $F(a)=0$, $\Delta(a)=0$; e vogliasi quel valore della frazione $\frac{F(x)}{\Delta(x)}$, il quale corrisponde appunto alla $x=a$.

Essendo $$\frac{F(a+\omega)}{\Delta(a+\omega)}=\frac{F(a)+\omega F'(a)+\frac{\omega^2}{2}F''(a)+\text{ecc.}}{\Delta(a)+\omega\Delta'(a)+\frac{\omega^2}{2}\Delta''(a)+\text{ecc.}}$$

ossia $$\frac{F(a+\omega)}{\Delta(a+\omega)}=\frac{F'(a)+\frac{\omega}{2}F''(a)+\text{ecc.}}{\Delta'(a)+\frac{\omega}{2}\Delta''(a)+\text{ecc.}}$$

per essere $F(a)=0$, $\Delta(a)=0$, fatto $\omega=0$ si ha

$$\frac{F(a)}{\Delta(a)}=\frac{F'(a)}{\Delta'(a)};$$

cioè quel valore della frazione $\frac{F(x)}{\Delta(x)}$, il quale corrisponde alla $x=a$ risulta eguale al valore della $\frac{F'(x)}{\Delta'(x)}$ corrispondente allo stesso $x=a$.

Dimodochè, per avere il valore richiesto della $\frac{F(x)}{\Delta(x)}$ basterà formarsi la $\frac{F'(x)}{\Delta'(x)}$, e sostituire in essa a in vece della x.

Se le $F(x)$, $\Delta(x)$ fossero tali, che risultassero nulle anco le $F'(a)$, $\Delta'(a)$, avrebbesi evidentemente

$$\frac{F(a+\omega)}{\Delta(a+\omega)}=\frac{\frac{1}{2}F''(a)+\frac{\omega}{2\cdot 3}F'''(a)+\text{ecc.}}{\frac{1}{2}\Delta''(a)+\frac{\omega}{2\cdot 3}\Delta'''(a)+\text{ecc.}};$$

e però fatto $\omega=0$, risulterebbe

$$\frac{F(a)}{\Delta(a)}=\frac{F''(a)}{\Delta''(a)},$$

cioè il valore richiesto della $\frac{F(x)}{\Delta(x)}$, sarebbe eguale a quello della $\frac{F''(x)}{\Delta''(x)}$ corrispondente al medesimo $x=a$.

In generale, se $x=a$ annullasse le $F(x)$, $\Delta(x)$ e le loro derivate successivamente sino a quelle dell'ordine *n esimo*, e non annullasse le derivate $(n+1)$ *esime* cioè le $F^{(n+1)}(x)$, $\Delta^{(n+1)}(x)$, il valore della $\frac{F(x)}{\Delta(x)}$ corrispondente alla $x=a$, sarebbe eguale a quello della $\frac{F^{(n+1)}(x)}{\Delta^{(n+1)}(x)}$ corrispondente allo stesso a della x.

162. E qui osservisi, che $x=a$ non può annullare tutte le derivate delle funzioni $F(x)$, $\Delta(x)$ con esse; giacchè, se annullasse per esempio la $F(x)$ e tutte le sue derivate, essendo

$$F(a+\omega)=F(a)+\omega F'(a)+\frac{\omega^2}{2}F''(a)+\text{ecc.},$$

si avrebbe $F(a+\omega)=0$ per qualunque valore della ω, cioè sarebbe $F(x)$ *zero*, per qualsivoglia valore della x, il che è assurdo.

163. Se $x=a$ rendesse le funzioni $F(x)$, $\Delta(x)$ infinite o nulle, ma rendesse infinite le $F'(x)$, $\Delta'(x)$, ovvero annullasse queste anco, ma rendesse infinite le $F''(x)$, $\Delta''(x)$; e così di seguito: per trovare il valore della frazione $\frac{F(x)}{\Delta(x)}$, corrispondente allo stesso $x=a$, converrebbe sviluppare $F(a+\omega)$, $\Delta(a+\omega)$ col metodo esposto nel § 121, eliminare le frazioni dai termini della frazione risultante, e spogliarli dei fattori comuni; indi porre nel risultamento $\omega=0$; ed avrebbesi il richiesto valore della frazione $\frac{F(x)}{\Delta(x)}$.

164. Succede talvolta, che il valore della y' desunto da una data equazione

$$F(x,y)=0,$$

cioè quello della frazione $-\frac{F'(x)}{F'(y)}$, corrispondente ad uno individuato della x, per esempio alla $x=a$ e però a quello della y cavato dalla equazione

$$F(a,y)=0,$$

di comparire sotto la forma $\frac{0}{0}$; in questi casi, per avere un tal valore della y', bisognerà passare alla equazione derivata seconda esatta della $F(x,y)=o$, che è

$$y''F'(y)+y'^2F''(y)+2y'F'_{,}+F''(x)=o,$$

la quale pei detti valori delle x, y si riduce alla

$$F''(y)\cdot y'^2+2F'_{,}\cdot y'+F''(x)=o,$$

che dà per la y' due valori. Così, se questi valori comparissero anch'essi sotto la forma $\frac{o}{o}$, converrebbe passare alla derivata terza della $F(x,y)=o$; ed in essa fare $x=a$, e porre per y il valore che ne somministra la $F(a,y)=o$, chè sciogliendo la risultante rispetto alla y' se ne avrebbono tre valori; così dicasi per gli altri casi.

PARTE SESTA

CONTATTI, ASINTOTE, E MISURE DELLE LINEE, DELLE SUPERFICIE E DE' CORPI.

LEZIONE PRIMA

De' contatti delle linee piane.

165. La teorica dei contatti delle linee piane è una delle più utili fra le costituenti le matematiche; e per questo sarà essa esposta con estensione maggiore di molte altre.

Si immaginino due linee riferite ai medesimi due assi ortogonali: si chiaminino, x l'ascissa ed y l'ordinata di un punto qualunque di una di esse, e p, q l'ascissa e l'ordinata dell'altra. E le equazioni delle medesime linee siano

$$y=f(x),\ q=\varphi(p).$$

Quando non si dichiarerà rispetto a qual variabile saranno prese le derivate della ordinata di una linea, si intenderanno prese rispetto alla ascissa corrispondente alla stessa sua ordinata.

Se per uno stesso valore delle ascisse x, p risultino i valori delle funzioni

$$f(x), f'(x), f''(x), \text{---} f^{(n)}(x)$$

eguali tutti ordinatamente a quelli delle

$$\varphi(p), \varphi'(p), \varphi''(p), \text{---} \varphi^{(n)}(p),$$

si dice, che le due linee hanno *un contatto dell'ordine n esimo.*

Date che siano le funzioni $\phi(p), f(x)$, con facilità si può scoprire, se le due linee rappresentate colle equazioni

$$q = \phi(p), \; y = f(x),$$

abbiano punti comuni, ed anco se in questi punti abbiano un contatto di prim'ordine, o di second'ordine, ecc.

Si costituisca la equazione

$$\phi(t) = f(t),$$

e sciolgasi rispetto alla t: le due linee avranno tanti punti comuni, quanti saranno i valori reali della t soddisfacenti questa equazione.

Uno di questi valori reali chiamisi *x particolare.*

Se i valori delle derivate $\phi'(p)$, $f'(x)$, corrispondenti alle p ed x eguali entrambe alla x particolare, saranno eguali fra loro, le due linee avranno un contatto del primo ordine nel punto corrispondente alla ascissa x particolare: se saranno anco eguali i valori delle $\phi''(p), f''(x)$ corrispondenti alla stessa x particolare, in questo medesimo punto le due linee avranno un contatto di secondo ordine: e così via discorrendo. Anzi, se nella funzione $\phi(p)$ vi sarà una costante arbitraria, essa si potrà generalmente determinare in modo, che una linea rappresentata colla equazione $q = \phi(p)$, abbia coll'altra comune un punto individuato: se nella $\phi(p)$ stessa saranvi due costanti arbitrarie, si potranno generalmente determinare in modo, che una delle linee rappresentate colla equazione $q = \phi(p)$, abbia un contatto di prim'ordine in un punto individuato dell'altra: in generale, se nella funzione $\phi(p)$ vi saranno $(n+1)$

costanti arbitrarie, si potranno, generalmente parlando, determinare in modo, che una delle linee rappresentate colla equazione $q = \phi(p)$, abbia in un punto dell'altra un contatto dell'ordine *n esimo*; o ciò che significa lo stesso, in generale si potrà trovare una linea, la quale abbia un contatto dell'ordine *n esimo* con una data, purchè essa appartenga ad una famiglia, nella cui equazione vi siano almeno $(n+1)$ costanti, arbitrarie, o disponibili.

Di fatto, debbasi trovare quella linea appartenente alla famiglia rappresentata colla equazione

$$q = \phi(p, a, b, c, ---)$$

contenente almeno le $(n+1)$ costanti arbitrarie $a, b, c, ---$, la quale abbia colla rappresentata colla $y = f(x)$, nel punto corrispondente alla ascissa x particolare un contatto dell'ordine *n esimo*.

Si formino le derivate prime, seconde, --- *n esime* delle ordinate y, q ossia delle funzioni $f(x)$, $\phi(p, a, b, c, ---)$; si ponga, tanto in queste funzioni, quanto nelle loro derivate, in luogo sì della x che della p la x particolare; indi si uguaglino ordinatamente fra loro i risultanti valori delle due funzioni, delle derivate prime, delle seconde, e finalmente quelli delle derivate *n esime*; e si avranno $n+1$ equazioni, nelle quali vi saranno le $(n+1)$ costanti a, b, c, $---$: si sciolgano queste equazioni per rispetto a queste medesime costanti, ed avransi quei loro valori, i quali sostituiti nella equazione

$$q = \phi(p, a, b, c, ---),$$

la ridurranno a quella, che rappresenterà la linea richiesta.

Da quest' ultima dichiarazione risulta evidentemente, che si potrà sempre trovare una retta, la quale abbia un contatto di prim' ordine con una curva qualunque: una circonferenza, che abbia un contatto di second'ordine: una parabola conica, che abbia un contatto del terzo ordine: una ellisse, che ne abbia uno di quarto: ecc.; giacchè nelle equazioni delle famiglie, alle quali appartengono queste linee, vi sono ordinatamente *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, - - - costanti arbitrarie, che sono i così detti parametri, dai quali dipendono le posizioni e grandezze loro rispettive.

Anzi, si osservi che, se dalle $n+1$ equazioni suddette, si eliminasse la x, si avrebbero n equazioni tra le sole costanti a, b, c, - - -, le quali rappresenterebbero le proprietà comuni a quei valori delle costanti medesime, che riducono la equazione $q=\phi(p, a, b, c, ---)$ a quella o quelle, le quali rappresentano la linea o le linee aventi colla espressa dalla $y=f(x)$ un contatto dell' ordine n *esimo*.

166. Esempio primo. Trovare l' equazione di quella retta, che ha con una curva in un punto qualunque di essa un contatto di primo ordine?

Ritenuta l' equazione

$$q=ap+b$$

per rappresentare la famiglia delle rette, si avrà

$$\phi(p)=ap+b, \text{ e } \phi'(p)=a;$$

e però dovranno essere soddisfatte le due equazioni seguenti

$$f(x)=ax+b, \text{ e } f'(x)=a$$

nelle quali la x esprime la particolare.

Queste ultime due equazioni danno

$$a = f', \quad b = f - xf';$$

e conseguentemente l'equazione della retta avente il contatto di prim'ordine sarà

$$q = pf'(x) + f(x) - xf'(x), \quad \text{o} \quad q - f = (p - x)f'(x),$$

la quale per essere individuata, insegna, che una sola è la retta, che possa avere con una curva in un punto qualunque, ma individuato di essa, un contatto di primo ordine.

Eliminando la x dalle due equazioni $f(x) = ax + b$, $f'(x) = a$, si ha una equazione tra le a, b, la quale rappresenta una proprietà comune a tutti quei valori di queste costanti, che corrispondono ad una qualunque di quelle rette, le quali hanno un contatto di prim' ordine colla curva rappresentata colla $y = f(x)$.

167. Esempio secondo. Trovare l'equazione, che rappresenta quelle circonferenze, aventi con una curva qualunque in un punto individuato di essa, un contatto di primo ordine?

Denominisi p, q le coordinate rettangole di un punto qualunque della circonferenza; a, b le coordinate analoghe del suo centro, e c il raggio: l'equazione di essa sarà

$$(p-a)^2 + (q-b)^2 - c^2 = 0, \text{ che dà } q = b + \sqrt{\left(c^2 - (p-a)^2\right)}.$$

Essendo $\phi(p) = b + \sqrt{\left(c^2 - (p-a)^2\right)}$, si ha

$$\phi'(p) = -\frac{p-a}{\sqrt{\left(c^2 - (p-a)^2\right)}};$$

e però le equazioni a soddisfarsi colle costanti, le quali sono a, b, c, saranno le seguenti

$$f(x)=b+\sqrt{\left(c^2-(x-a)^2\right)},\ f'(x)=-\frac{x-a}{\sqrt{\left(c^2-(x-a)^2\right)}}.$$

Queste due equazioni si possono soddisfare mediante opportuna determinazione di due qualsivogliono delle tre costanti; le soddisferemo colle due a, b.

La seconda o la sua equivalente

$$\left(c^2-(x-a)^2\right)f'^2=(x-a)^2 \text{ dà}$$

$$(x-a)^2=\frac{c^2f'^2}{1+f'^2},\ \text{ossia } a=x\pm\frac{cf'}{\sqrt{(1+f'^2)}}.$$

Il valore di $(x-a)^2$ sostituito nella prima equazione, riduce questa alla seguente

$$f=b+\sqrt{\frac{c^2}{1+f'^2}},\ \text{che somministra } b=f\mp\frac{c}{\sqrt{(1+f'^2)}}.$$

Sostituendo nella equazione

$$(p-a)^2+(q-b)^2-c^2=0$$

in luogo delle a, b i loro valori trovati, si ha l'equazione richiesta, la quale, contenendo la c ancora arbitraria, significa, che le circonferenze aventi un contatto di prim'ordine in un punto di una linea qualunque, sono moltissime.

168. Esempio terzo. Trovare l'equazione di quella circonferenza, che ha con una curva qualunque in un punto individuato, ma qualsivoglia di essa, un contatto di second'ordine?

Ritenute le denominazioni già usate nell'esempio antecedente, si avrà

$$\varphi(p)=b+\sqrt{\left(c^2-(p-a)^2\right)},\ \varphi'(p)=-\frac{p-a}{\sqrt{\left(c^2-(p-a)^2\right)}},$$

$$\text{e }\ \varphi''(p)=\frac{-c^2}{\sqrt{\left(c^2-(p-a)^2\right)^3}};$$

e per tanto le equazioni, alle quali dovranno soddisfare le costanti a, b, c, saranno le seguenti

$$f(x)=b+\sqrt{\left(c^2-(x-a)^2\right)},$$

$$f'=-\frac{x-a}{\sqrt{\left(c^2-(x-a)^2\right)}},\ f''=\frac{-c^2}{\sqrt{\left(c^2-(x-a)^2\right)^3}}$$

Abbiamo veduto nel medesimo esempio antecedente, che dalle prime due si ha

$$a=x\pm\frac{cf'}{\sqrt{(1+f'^2)}},\ \text{e}\ b=f\mp\frac{c}{\sqrt{(1+f'^2)}}:$$

sostituendo questo valore dell' a nella terza o nella equivalente

$$\sqrt{\left(c^2-(x-a)^2\right)^3}\cdot f''=-c^2$$

si trova, fatte alcune riduzioni

$$c=\mp\frac{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}{f''}$$

valore che sostituito nei sopra trovati delle a, b dà

$$a=x-\frac{(1+f'^2)f'}{f''},\ \text{e}\ b=f+\frac{1+f'^2}{f''}.$$

Ecco i valori delle a, b, c, che posti nella equazione $(p-a)^2+(q-b)^2-c^2=0$, la riducono alla richiesta, la quale riescendo affatto individuata, insegna, che una sola è la circonferenza, che possa avere con una curva qualunque in un punto di essa un contatto di second'ordine.

Se dalle tre equazioni qui sopra sciolte per avere le a, b, c, si eliminasse la x, avrebbensi due equazioni tra le stesse a, b, c, le quali rappresenterebbero proprietà comuni a queste costanti cioè ai parametri delle circonferenze aventi un contatto del second'ordine colla curva rappresentata dalla $y=f(x)$.

169. Prima di esporre altri esempj, ed anco alcune osservazioni relative alle linee nelle quali vi sono i centri delle circonferenze considerate negli ultimi due, tratterò la proposizione seguente, mediante la quale facilmente si potrà concepire una proprietà geometrica corrispondente ad ogni proprietà de' contatti, cioè concepire una idea corrispondente ad ogni nozione dei contatti.

Tre linee abbiano un punto comune, anzi la seconda abbia colla prima in questo punto un contatto di un certo ordine, e la terza abbia colla prima stessa, od il solo punto comune od un contatto d'ordine minore di quello della seconda: le parti della seconda, almeno le prossime al punto in comune, si accosteranno alle corrispondenti della prima più delle analoghe della terza.

Questa è la proposizione, che rende proficua ed anco amena la teorica dei contatti delle linee piane.

Le equazioni delle tre linee siano ordinatamente

$$y=f(x),\ q=\phi(p),\ u=\psi(s),$$

ove s, u sono le coordinate della terza analoghe alle x, y della prima o alle p, q della seconda; ed x particolare esprima l'ascissa corrispondente al loro punto comune.

Le ordinate corrispondenti alla ascissa x particolare *più* ω quantità indeterminata sono

$$f(x+\omega),\ \phi(x+\omega),\ \psi(x+\omega),\ \text{ossia}$$

$$f+\omega f'+\frac{\omega^2}{2}f''+\frac{\omega^3}{2\cdot 3}f'''+\text{ecc.},$$

$$\phi+\omega\phi'+\frac{\omega^2}{2}\phi''+\frac{\omega^3}{2\cdot 3}\phi'''+\text{ecc.},$$

$$\psi+\omega\psi'+\frac{\omega^2}{2}\psi''+\frac{\omega^3}{2\cdot 3}\psi'''+\text{ecc.};$$

e però, siccome l'ordine del contatto tra la seconda linea e la prima è maggiore di quello tra la terza e la prima stessa, ossia (§ 165) il numero delle prime fra le quantità

$$\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''', ---$$

eguali ordinatamente alle corrispondenti delle

$$f, f', f'', f''', ---$$

è maggiore del numero delle prime delle

$$\psi, \psi', \psi'', \psi''', ---,$$

che eguagliano ordinatamente le stesse $f, f', f'', f''', ---$; così (§ 128) i valori della $\varphi(x+\omega)$, se non tutti almeno quelli che corrispondono a valori della ω prossimi allo *zero*, si approssimeranno ai corrispondenti della $f(x+\omega)$ più dei corrispondenti della $\psi(x+\omega)$. Quindi la seconda linea avrà almeno le parti contigue al punto comune, che si accosteranno alle corrispondenti della prima più delle analoghe parti della terza: come si è dichiarato.

170. Ciò premesso, passo ad alcune considerazioni relative alle linee aventi fra loro qualche contatto.

Abbiamo veduto nel paragrafo 166, che vi è una retta, fra le moltissime, che passano per un medesimo punto di una curva, la quale ha colla curva stessa un contatto di primo ordine; e però, per la proposizione dianzi dimostrata, questa retta avrà colla curva, oltre il punto comune, almeno le sue parti contigue al punto stesso, che si accosteranno alle corrispondenti della curva più delle analoghe parti di un altra qualunque di quelle che passano pel punto medesimo.

Questa retta, stante tali sue proprietà, è quella, che si chiama comunemente *tangente* o *toccante* la curva nel punto stesso di contatto. Anzi, qui fo osservare per sempre, che, una linea, la quale abbia con un altra un contatto di primo ordine, si dirà anch'essa tangente l'altra nello stesso punto comune.

Si può in tanto concludere che, l'equazione della retta toccante la curva rappresentata colla equazione $y=f(x)$, è la seguente

$$q=(p-x)f'(x)+f(x) \text{ ossia } q-y=(p-x)y',$$

ove le y, y' sono poste, per semplicità, in vece delle $f(x)$, $f'(x)$.

Quando le coordinate siano rettangole, la equazione qui esposta insegna, che l'angolo fatto dalla toccante la curva, nel punto corrispondente alla x, col prolungamento dell'asse delle ascisse, ha per tangente la stessa y' derivata della ordinata rispettiva; e per conseguenza avrà per

$$\textit{seno } \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}, \text{ e per } \textit{coseno } \frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)}}.$$

171. Le due tracce Oy, Ox (fig. 1) fra loro perpendicolari rappresentino le rette *assi* delle coordinate y, x e delle q, p: la AMB esprima la curva rappresentata colla equazione $y=f(x)$, e la TMV la toccante la curva stessa nel punto M corrispondente alla $OP=x$ particolare, cioè quella retta, che ha per equazione

$$q=(p-x)y'+y.$$

Così, la DMN rappresenti la retta perpendicolare in M la TMV.

La retta DMN, passando pel punto M corrispondente alle coordinate x, y, ed essendo perpendicolare alla toccante, avrà per equazione

$$Q=-\frac{1}{y'}(P-x)+y \text{ ossia } P-x+(Q-y)y'=0,$$

ove P esprime l'ascissa e Q l'ordinata di un suo punto qualunque.

Questa retta, la quale ha un punto comune colla curva, ed è perpendicolare alla toccante la curva in questo medesimo punto, si chiama comunemente *retta normale* la curva in questo punto stesso.

172. Considerando i due triangoli TPM, PMN, facilmente si trova

$$TP=\frac{y}{y'},\ TM=\frac{y}{y'}\sqrt{(1+y'^2)},$$
$$PN=yy',\text{ ed } MN=y\sqrt{(1+y'^2)},$$

cioè le espressioni delle rette terminate TP, TM, PN, MN, le quali si chiamano *sotto-tangente, tangente, sotto-normale*, e *normale* l'ultima.

173. Così dall'esempio esposto pei contatti (§ 167) risulta, che fra le circonferenze eguali, di raggio c, quella avente colla linea espressa colla equazione $y=f(x)$ un contatto di primo ordine, ossia che è tangente di questa linea, ha il suo centro nel punto, al quale corrispondono le coordinate

$$x+\frac{cy'}{\sqrt{(1+y'^2)}},\ y-\frac{c}{\sqrt{(1+y'^2)}}.$$

Sostituendo questi valori delle a, b in luogo delle P, Q contenute nella equazione

$$(Q-y)y'+P-x=0, \text{ si ha}$$
$$-\frac{cy'}{\sqrt{(1+y'^2)}}+\frac{cy'}{\sqrt{(1+y'^2)}}=0,$$

la quale è soddisfatta qualunque sia la c, e però i centri delle circonferenze tangenti nel medesimo punto ad una linea qualsivoglia, sono tutti nella retta normale la linea nello stesso punto di contatto.

174. Similmente, dalle cose superiormente esposte (§ 168), risulta che, una conferenza può avere con una curva in un punto di essa non più di un contatto di secondo ordine; ed anco, che una sola è quella, la quale abbia questa proprietà, sebbene siano moltissime quelle che possono passare pel punto stesso della curva, e tra esse ven siano anche molte, che abbiano in questo medesimo punto un contatto di primo ordine; anzi dal medesimo paragrafo citato risulta, che la circonferenza, avente il contatto di second' ordine, ha il raggio

$$c = \mp \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''};$$

ed il centro nel punto al quale corrispondono

l'ascissa $a = x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2)$, e l'ordinata $b = y + \frac{1}{y''}(1+y'^2)$.

Questa circonferenza, per la proposizione dianzi dimostrata nel § 169, avrà adunque le sue parti, almeno le contigue al punto in comune colla curva; che si accosteranno alle corrispondenti della curva stessa più delle analoghe parti di una qualunque altra circonferenza; e conseguentemente essa avrà una inflessione od incurvatura, la quale differirà meno di quella di qualunque altra circonferenza dalla inflessione o curvatura, che ha la curva nel punto di contatto. È per questa sua proprietà, ed anco per la facilità, che ognuno ha di immaginarsi la uniforme incurvatura di una circonferenza, quando si conosca il suo raggio, che si ritiene conosciuta o data la inflessione di una curva in un punto di essa, quando si conosca il raggio della circonferenza avente in questo punto colla curva stessa un contatto di second'ordine, sebbene si potrebbe ciò argomentare con maggiore approssimazione da quella di altre curve, che avessero colla medesima contatti di ordini superiori al secondo.

La *circonferenza*, qui contemplata, si chiama *osculatrice*, il circolo del quale essa è contorno *circolo osculatore*, ed il raggio suo chiamasi *raggio di curvatura* della curva.

175. Sostituendo nelle espressioni

$$x-\frac{y'}{y''}(1+y'^2),\, y+\frac{1}{y''}(1+y'^2)$$

delle a, b coordinate del centro del circolo osculatore della curva rappresentata colla equazione $y=f(x)$, in vece delle y, y', y'' le effettive funzioni $f(x), f'(x), f''(x)$, esse si ridurranno a funzioni individuate della sola x: abbiasi

$$a=\Delta(x), \text{ e } b=\xi(x).$$

Variando il punto della curva, ove il circolo è ad essa osculatore, cioè variando la x, varieranno in generale anco i valori delle funzioni $\Delta(x)$; $\xi(x)$ ossia delle a, b; ed eliminando la x dalle due equazioni

$$a=\Delta(x),\ b=\xi(x),$$

se ne avrà una tra le a, b, che rappresenterà la linea, nella quale vi saranno i centri di tutti i circoli osculatori della linea espressa dalla equazione $y=f(x)$.

Qualunque sia la linea espressa da quest'ultima equazione, l'altra delle anzi nominate, cioè il luogo geometrico dei centri dei suoi circoli osculatori, ha alcune proprietà singolari ed utili: esse si dimostreranno nella lezione prossima alla seguente.

176. Si debba ora trovare quella, fra le infinite linee paraboliche rappresentate colla equazione

$$q = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \text{- - -} + Lp^n,$$

ove A, B, C, - - - L sono costanti arbitrarie, che ha colla curva espressa colla $y = f(x)$ un contatto dell'ordine *n esimo.*

Usando la regola generale, per trovare gli opportuni valori delle costanti A, B, C, - - - L occorrono calcoli assai complicati; e per evitarli procederemo alla ricerca della parabola richiesta col metodo seguente.

Dovendo essere il valore della $\phi(p)$ corrispondente a $p = x$ lo stesso $y = f(x)$, sarà

$$\phi(p) = y + (p - x)F,$$

ove l'F esprime una funzione della x e della p.

L'equazione $\phi(p) = y + (p - x)F$ dà

$$\phi'(p) = F + (p - x)F'(p);$$

e però il valore della F corrispondente alla $p = x$ sarà $\phi'(x)$, ossia y'; e conseguentemente dovrà essere

$$F = y' + (p - x)F_1,$$

ove l'F_1 esprime un'altra funzione della x e della p; e quindi sarà

$$\phi(p) = y + (p - x)y' + (p - x)^2 F_1.$$

Quest'ultimo valore della $\phi(p)$ dà l'equazione

$$\phi''(p) = 2F_1 + 2(p - x)F_1'(p) + (p - x)^2 F_1''(p),$$

la quale insegna, che il valore di $2F_1$ corrispondente alla $p = x$ è $\phi''(x)$ ossia y''; e però sarà anco

$2F_1 = y'' + (p - x) F_2$ ossia

$$F_1 = \tfrac{1}{2} y'' + \tfrac{1}{2}(p - x) F_2$$

ove l'F_2 sarà formata colle x, p.

Posto questo valore della F_1 nell'ultimo della $\phi(p)$, hassi

$$\phi(p) = y + (p - x)y' + \tfrac{1}{2}(p - x)^2 y'' + \tfrac{1}{2}(p - x)^3 F_2.$$

Così, formata di questa equazione la derivata terza rispetto alla p, e poscia fatta $p = x$, si troverà $F_2 = \tfrac{1}{3} y''' + \tfrac{1}{3}(p - x)F_3$, e però

$$\phi(p) = y + (p-x)y' + \frac{1}{2}(p-x)^2 y'' + \frac{1}{2 \cdot 3}(p-x)^3 y''' + \frac{(p-x)^4}{2 \cdot 3} \cdot F_3,$$

ove l'F_3 esprime essa pure una funzione della x e della p.

Dai ragionamenti qui occorsi emerge evidentemente, che il termine $(n + 1)$ *esimo* del valore della $\phi(p)$ sarà

$$\frac{(p - x)^n}{2 \cdot 3 \cdots n} y^{(n)},$$

ed anco, che i successivi saranno *nulli*. Quindi la parabola richiesta, sarà quella rappresentata dalla equazione seguente

$$q = y + (p-x)y' + (p-x)^2 \frac{y''}{2} + (p-x)^3 \frac{y'''}{2 \cdot 3} + \cdots (p-x)^n \frac{y^{(n)}}{2 \cdot 3 \cdots n};$$

il cui secondo membro, quando occorresse, si potrebbe ordinare facilmente secondo le potenze od esponenti crescenti della p, e con ciò avrebbonsi le $A, B, C \cdots L$.

Con un metodo analogo a quello qui usato per trovare l'equazione della parabola richiesta, si dimostra che una linea, affinchè abbia un contatto dell'ordine n *esimo* colla curva rappresentata colla equazione $y = f(x)$ nel punto corrispondente alla ascissa x particolare dev'essere rappresentabile colla equazione seguente

$$q=y+(p-x)y'+\frac{1}{2}(p-x)^2y''+---+\frac{(p-x)^n y^{(n)}}{2\cdot3---n}+K\frac{(p-x)^{n+1}}{2\cdot3---n},$$

ove K esprime una ordinaria funzione della p cioè che nè essa nè le sue derivate $K'(p)$, $---K^{(n)}(p)$ riducansi infinite col porvi x particolare in vece della p.

177. Vi sono alcune curve, per le quali la y ossia la $f(x)$ è così formata colla x, che i valori delle derivate $f'(x), f''(x), ---$ corrispondenti ad ascisse particolari riescono infiniti; per tali curve ed in questi casi, lo sviluppo della $f(x+\omega)$, ove la x esprima una di queste ascisse particolari, non può essere ordinato secondo le potenze ordinarie della ω, per cui colle regole superiormente esposte, non si possono scoprire i differenti gradi di ravvicinamento della curva avente per equazione $y=f(x)$ con altre passanti pel suo punto corrispondente a tali ascisse particolari. Credo per tanto di esporre le considerazioni seguenti.

Si trovino gli sviluppi delle funzioni $f(x+\omega)$, $\phi(x+\omega)$ ordinate delle linee rappresentate colle equazioni $y=f(x)$, $q=\phi(p)$ e corrispondenti alla ascissa x particolare *più* ω quantità indeterminata; ed abbiansi

$$f(x+\omega)=f(x)+A\,\omega^m+B\,\omega^{m+n}+\text{ecc.},$$

$$\phi(x+\omega)=\phi(x)+a\,\omega^r+b\,\omega^{r+s}+\text{ecc.}$$

Se un valore reale della x soddisferà l'equazione $f(x)=\phi(x)$, le due linee avranno un punto comune; se in oltre sarà $r=m$ ed $a=A$, si dirà che le due linee avranno un contatto di primo ordine: se sarà anco $s=n$ e $b=B$ dirassi, che avranno un contatto del second'ordine; e così via discorrendo.

Se una terza linea passasse pel punto comune alle due, qui considerate, ed avesse colla prima, o il solo punto comune, ovvero un contatto, ma di un ordine minore di quello che ha la seconda, questa cioè la seconda avrebbe almeno *una* delle parti contigue al punto comune, che si accosterebbe alla corrispondente della prima più della analoga della terza: è ciò una immediata conseguenza dell'esposto al § 138.

Le equazioni $f(x) = \phi(x)$, $a = A$, $b = B$, ---, che sono tra quelle necessarie, perchè la linea rappresentata colla equazione $q = \phi(p)$ abbia colla prima un contatto, si potranno soddisfare, come si soddisfanno le analoghe pei contatti ordinarj, cioè con opportune determinazioni di costanti contenute nella equazione $q = \phi(p)$: le altre poi, vale a dire le $r = m$, $s = n$, --- generalmente saranno per sè stesse soddisfatte; alla occorrenza però si potranno anch'esse soddisfare come le antecedenti, purchè gli esponenti m, n, --- contengano costanti a ciò sufficienti.

LEZIONE II.

Delle linee asintote e dei punti singolari delle linee piane.

178. Una linea si chiamerà asintota di un'altra, quando i successivi suoi punti avranno distanze dai punti corrispondenti di quest'altra, le quali diminuiranno successivamente a segno di riescire finalmente minori di qualunque distanza data, senza però annullarsi; o ciò che significa lo stesso, una linea chiamerassi asintota di un'altra, quando essa andrà accostandosi

indefinitamente a quest' altra, senza raggiugnerla cioè nè toccarla nè segarla.

Il conoscere se una linea sia asintota di un' altra, ed il determinare quella di una famiglia, la quale è asintota di una data, sono cognizioni, che riescono utili in varie occasioni, e per questo io credo bene di esporle.

Si chiamino p, q le coordinate di una linea, ed x, y le analoghe di un' altra, riportate ai medesimi due assi rettangolari; e siano $q = f(p)$, $y = \phi(x)$ le loro equazioni.

La distanza di quel punto della prima, al quale corrispondono le coordinate p, q, dall'altra linea sarà

$$(q - y)\sqrt{(1 + y'^2)},$$

purchè la x soddisfaccia la equazione

$$p - x + (q - y)y' = 0;$$

ovvero sarà

$$(p - x)\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)},$$

purchè la y si desuma dalla equazione

$$(p - x)\left(\frac{dx}{dy}\right) + q - y = 0:$$

tutto ciò risulta dal § 150.

Useremo la prima di queste due espressioni, quando la y' sarà minore della unità o di poco maggiore; e negli altri casi useremo la seconda cioè

$$(p - x)\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)}.$$

Dimodochè i loro fattori

$$\sqrt{(1 + y'^2)},\ \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2.\right)}$$

saranno sempre finiti, anzi o minori di $\sqrt{2}$ o di poco maggiori.

Per questa proprietà di $\sqrt{1+y'}$ l'impiccolimento indefinito della

$$(q-y)\sqrt{1+y'^2}$$

dipenderà dall'impiccolimento analogo del fattore $q-y$.

Essendo $\phi(p)$ quell'ordinata della seconda linea, che corrisponde all'ascissa p del punto dianzi considerato, la differenza $f(p)-\phi(p)$ sarà la distanza del punto medesimo della prima linea ad un punto della seconda; e però essa sarà maggiore del fattore $q-y$ anzidetto. Quindi, in vece di considerare la serie dei valori della

$$(q-y)\sqrt{1+y'^2},$$

potremo considerare quelli della differenza $f(p)-\phi(p)$; giacchè, se i valori di questa differenza, coll'aumentare indefinitivamente la p, diminuiranno indefinitivamente, a maggior ragione tale proprietà avrà luogo per la distanza

$$(q-y)\sqrt{1+y'^2}.$$

Così, nel caso che l'y' sia molto maggiore della unità, in vece di considerare i valori della

$$(p-x)\sqrt{\left(1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)},$$

si potranno considerare quelli della differenza $\Delta(q)-\xi(q)$: le $\Delta(q)$, $\xi(q)$ sono i valori delle p, x cavati dalle due equazioni $q=f(p)$, $q=\phi(x)$.

Noi contempleremo solamente la prima di queste differenze, altrettanto però si potrà dire per la seconda.

Pongasi nella $f(p)$ in vece della p la frazione $\frac{1}{t}$, e trovisi lo sviluppo della $f\left(\frac{1}{t}\right)$ ordinato secondo le potenze d'esponenti crescenti della t; ed abbiasi

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = At^a + Bt^b + Ct^c + \text{ecc.}$$

ove $a < b < c < ---$.

Così, posto $p = \frac{1}{t}$ nella $\phi(p)$ ossia $x = \frac{1}{t}$ nella $\phi(x)$; e sviluppata $\phi\left(\frac{1}{t}\right)$ anch'essa in serie ordinata secondo le potenze d'esponenti crescenti della t, ottengasi

$$\phi\left(\frac{1}{t}\right) = Ht^h + It^i + Kt^k + \text{ecc.}$$

dove $h < i < k < ---$.

La differenza $f(p) - \phi(p)$ risulterà eguale ad

$$At^a + Bt^b + Ct^c + \text{ecc.} - Ht^h - It^i - Kt^k - \text{ecc.};$$

e però i valori di essa corrispondenti a valori successivamente decrescenti della t ossia a valori crescenti della p, dopo un tale di questi, riesciranno successivamente approssimantisi allo *zero*, senza mai poterlo eguagliare, quando gli esponenti $a, b, c, --- h, i, k$ siano tutti positivi, ovvero alcuni positivi e gli altri negativi, purchè quei termini dei due sviluppi

$$At^a + Bt^b + Ct^c + \text{ecc.},\ Ht^h + It^i + Kt^k + \text{ecc.}$$

nei quali la t ha esponenti negativi o nulli, siano fra loro identici. Così, se a fosse negativo e b fosse *zero*, dovrebbe essere anco negativo h ed eguale all'a, e l'$i = 0$, più $A = H$ e $B = I$.

Le proprietà qui osservate, le quali sono necessarie, perchè la linea avente per equazione $q = f(p)$ sia asintota dell'altra, dipendono, quelle relative agli esponenti, dalla natura delle funzioni $f(p)$, $\phi(x)$, le altre poi cioè le relative ai coefficienti dipendono anco dai parametri, che entrano in queste medesime funzioni; dimodochè, se per la natura delle funzioni $f(p)$, $\phi(x)$ saranno già soddisfatte quelle relative agli esponenti, anco nel caso che siano negativi o nulli, converrà disporre dei parametri contenuti nella $f(p)$, onde conseguire quelle relative ai coefficienti; e quando ciò riesca, quella, fra le linee della famiglia rappresentata dalla equazione $q = f(p)$, alla quale corrisponderanno questi valori dei parametri, sarà l'asintota dell'altra.

Quando poi gli esponenti $a, b, c, \text{---} h, i, k \text{---}$ siano tutti positivi, più gli $a, b, c, \text{---}$ od almeno alcuni fra i primi siano eguali ordinatamente agli $h, i, k, \text{---}$, se si disporrà dei parametri in modo di rendere

$$A = H,\ B = I, \text{---}$$

si individuerà quella fra le linee appartenenti alla famiglia delle asintote rappresentata colla $q = f(p)$, la quale, terminerà coll'accostarsi all'altra linea più di qualunque di quelle rappresentata colla medesima equazione, $q = f(p)$.

Esempio. Abbiasi $y = \frac{m}{n}\sqrt{(x^2 - 2nx)}$, e $q = \alpha x + \beta$:

sarà $f\left(\frac{1}{t}\right) = \alpha t^{-1} + \beta$, e $\phi\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{2n}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$ ossia

$$\phi\left(\frac{1}{t}\right) = \pm\frac{m}{n}t^{-1} \mp m \mp \frac{mn}{2}t \mp \frac{mn^2}{2}t^2 \mp \text{ecc.}:$$

visibilmente sono qui soddisfatte le proprietà relative agli esponenti, ma avvene uno *negativo* e l'altro *zero*; e però i parametri α, β dovranno rendere i coefficienti delle t^{-1}, t^0 nei due sviluppi eguali tra loro, cioè dovrà essere $\alpha = \frac{m}{n}$, e $\beta = \mp m$.

Quindi le rette asintote della iperbola saranno le sole aventi per equazioni $q=\frac{m}{n}p-m$, $q=\frac{m}{n}p+m$: appunto come si sa d'altronde.

179. Un punto di una curva pel quale abbia luogo una proprietà esclusiva ad esso od almeno non competente al maggior numero degli altri punti della curva medesima si chiama *punto singolare*. Una curva riferita a due assi ortogonali abbia per equazione $F(x, y)=0$, dove le x, y esprimono le coordinate di un suo punto qualunque.

Non parlerò di quei punti, ai quali corrispondono massime o minime ordinate ovvero ascisse, circoli osculatori, normali, - - -; perchè la loro determinazione emerge immediatamente dalla teorica dei massimi e minimi.

Il punto M (fig. 2) della curva AB nel quale termina la parte AM, che volge la concavità da una banda, e comincia la MB, che volge la sua concavità dalla banda opposta, si chiama punto di *flesso contrario* della curva.

Una lieve riflessione farà concepire, che, l'angolo fatto coll'asse delle ascisse dalla TV toccante la curva AB in M, comunque sia essa posta rispetto a quest'asse, è maggiore ovvero minore almeno di tutti gli angoli fatti collo stesso asse dalle toccanti la curva stessa in punti prossimi all'M medesimo; e però l'ascissa corrispondente al flesso di una curva sarà di quei valori della x, che corrispondono ai massimi o minimi della y' cioè tra quelli, che soddisfanno l'una o l'altra delle due equazioni $y''=0$, $\frac{1}{y''}=0$.

Un punto, pel quale passino due o più rami di una curva, chiamasi *punto multiplice* di essa.

La curva rappresentata colla equazione razionale ed algebraica $F(x,y)=o$, abbia un punto multiplice; e chiaminsi α l'ascissa e β l'ordinata ad esso corrispondenti.

Evidentemente la equazione $F(\alpha,y)=o$ sarà soddisfatta da più valori della y ed eguali al β, e la $F(x,\beta)=o$ in *generale* da altrettanti valori della x eguali all'α; e però sarà

$$F(\alpha,y)=(y-\beta)^m\psi, \text{ ed } F(x,\beta)=(x-\alpha)^n\Delta:$$

ove gli m, n esprimano numeri interi, e le ψ, Δ due quantità che nè esse nè le loro derivate $\psi'(y)$, $\Delta'(x)$ diventano infinite, facendo in esse per la prima $y=\beta$ e per la seconda $x=\alpha$. Queste equazioni od eguaglianze danno le

$$\left(\frac{dF(\alpha,y)}{dy}\right)=m(y-\beta)^{m-1}\psi+(y-\beta)^m\psi'(y),$$

$$\left(\frac{dF(x,\beta)}{dx}\right)=n(x-\alpha)^{n-1}\Delta+(x-\alpha)^n\Delta'(x),$$

le quali insegnano, che le α, β soddisfanno le due equazioni $F'(y)=o$, $F'(x)=o$. Quindi le coordinate dei punti multiplici saranno tra quelle, che soddisfanno le tre equazioni

$$F(x,y)=o,\ F'(x)=o,\ F'(y)=o:$$

il grado poi di multiplicità di ciascuno di questi punti si desumerà dal numero dei valori reali della y' ad esso punto corrispondenti, quando questi riescano disuguali, altrimenti dal numero di quelli della y'', o della y''',---.

Se il punto multiplo della curva sarà analogo all'M delle AB, CD (fig. 3, 4), esso si chiamerà punto di regresso; e per esso sarà y'' *zero* od *infinito*, cioè avrà una proprietà analoga a quella osservata pel flesso.

Per distinguere, se il regresso sia analogo a quello indicato colla figura terza, ovvero a quello indicato colla quarta, si considereranno le coordinate dei punti della curva prossimi al punto stesso.

Terminerò questo paragrafo, coll'esporre la regola per iscoprire da qual banda è voltata la convessità di una curva mediante la sua equazione. Chiaminsi p, q le coordinate della retta toccante la curva nel punto cui corrispondono le coordinate x, y: la sua equazione dà

$$q = y + (p - x) y';$$

e però quell'ordinata della toccante, che corrisponde alla ascissa $p = x + \omega$ sarà $y + \omega y'$; mentre la corrispondente per la curva è $y + \omega y' + \frac{\omega^2}{2} y'' + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} y''' +$ ecc.

La curva sia situata dalla banda delle ordinate positive, e volti la concavità all'asse delle ascisse; ed evidentemente sarà

$$y \pm \omega y' > y \pm \omega y' + \frac{\omega^2}{2} y'' \pm \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} y''' + \text{ecc. ossia}$$

$$\tfrac{1}{2} \omega^2 y'' \pm \tfrac{1}{6} \omega^3 y''' + \text{ecc. negativo},$$

almeno pei valori d'ω piccoli; e però (§ 131) avrassi $y'' < 0$.

Se la curva voltasse all'asse delle x la convessità avrebbesi $y'' > 0$. La curva sia situata dalla banda delle ordinate negative, e risulterà $y'' > 0$, quando volterà all'asse delle x la concavità, ed $y'' < 0$, quando vi volterà la convessità.

Vale a dire la concavità della curva sarà voltata all'asse delle x, quando i segni delle y, y'' saranno dissimili, e sarà voltata dalla banda opposta, quando i segni delle medesime y, y'' saranno simili.

LEZIONE III.

Delle misure delle superficie e delle linee piane, e di quelle sì delle superficie che dei corpi di rotazione.

180. Le Ox, Oy (fig. 5) rappresentino i due assi delle coordinate: la AB una linea qualunque, la retta AC una sua ordinata particolare, e la MP una ordinata qualsivoglia. Chiamisi x la OP, $y = f(x)$ la PM, e $\phi(x)$ l'area del quadrilatero $AMPC$.

Comincieremo a trovare la funzione $\phi(x)$, quella funzione cioè della ascissa x, che esprime l'area del quadrilatero racchiuso dalla retta AC ordinata corrispondente al punto A particolare, dalla MP ordinata qualunque, e dalle parti CP, AM dell'asse delle ascisse e della curva, che sono intercette tra le medesime due ordinate AC, PM; supposto conosciuta la $f(x)$.

Facciasi $PQ = \omega$ quantità indeterminata, conducasi l'ordinata QN; e compiscansi i rettangoli $MKQP$, $HNQP$.

Essendo $\phi(x)$ l'area di $AMPC$, sarà $\phi(x + \omega)$ quella di $ANQC$; e però

$$\phi(x + \omega) - \phi(x)$$

sarà l'area del quadrilatero $MNQP$. Così, per essere

$$PQ = \omega, \; MP = f(x), \; NQ = f(x + \omega),$$

le aree dei rettangoli $MKQP$, $HNQP$ saranno

$$\omega f(x), \; \omega f(x + \omega),$$

la seconda delle quali si può avere, cambiando nella prima la x in $x + \omega$.

L'area del quadrilatero $M\,N\,Q\,P$ dev'essere compresa, almeno per ω piccola, tra quelle dei due rettangoli; adunque i valori di $\phi(x+\omega)-\phi(x)$, quelli almeno che corrispondono a piccoli valori della ω, debbono essere compresi fra i corrispondenti delle quantità

$$\omega f(x),\ \omega f(x+\omega);$$

e per conseguenza per l'esposto al § 127 si avrà

$$\phi'(x)=f(x);\ \text{quindi sarà}\ \phi(x)=\int f(x)\,dx;$$

cioè la richiesta area sarà una primitiva della $f(x)$ ossia della y, e propriamente sarà quella, che si annullerà, quando la x sia eguale ad $O\,C$.

Essendo (§ 62) $\phi'(x)=\dfrac{\phi'}{x'}$, sarà $\phi'=f(x)x'$, ed anco $\phi=\int f(x)\,x'$, primitiva che si annulla col valore della variabile principale corrispondente alla $x=O\,C$.

Per semplicità, e segnatamente per evitare una stucchevole ripetizione, in tutte le figure occorrenti, le linee, che saranno denominate Ox, Oy, ---AB---, AM, AC, OP, PM, avranno significati analoghi a quelli, che si sono alle medesime attribuiti nella presente proposizione; e si terranno le x, y per esprimere le OP, PM, e l'equazione $y=f(x)$ per quella della linea ---$A\,B$---.

181. La figura $A\,M\,P\,C$ faccia una intera rotazione intorno la retta $O\,x$; essa genererà un corpo di rotazione, il cui volume sarà evidentemente una funzione della x: si chiami esso $V(x)$.

Insieme alla figura $AMPC$ rotino anco le $MNQP$, $MKQP$, $HNQP$: queste ultime due genereranno due cilindri retti, aventi entrambi per altezza $P\,Q=\omega$, e per basi l'uno il circolo di raggio $M\,P=f(x)$, e l'altro il circolo di raggio $N\,Q=f(x+\omega)$.

Il volume del primo di questi cilindri sarà $\omega\cdot\pi f(x)^2$, e quello dell'altro $\omega\cdot\pi f(x+\omega)^2$. Ma il volume del corpo generato dal quadrilatero $MNQP$ è evidentemente

$$V(x+\omega)-V(x),$$

e dev'essere compreso tra quelli dei due cilindri, almeno per valori d'ω piccoli; adunque per lo stesso paragrafo 127 avrassi

$$V'(x)=\pi f(x)^2:$$

equazione la quale insegna, che la $V(x)$ è una funzione avente per derivata la $\pi f(x)^2$; e però, siccome il valore di $V(x)$ corrispondente alla $x=OC$ è *zero*, così la $V(x)$ sarà propriamente quella primitiva particolare di $\pi f(x)^2$ la quale si annullerà, quando sia $x=OC$.

La stessa $V'(x)=\pi f(x)^2$ dà anco $V'=\pi f(x)^2 x'$ ossia $V=\pi\int f(x)^2 x'$ estesa convenientemente.

182. Ora troviamo la funzione della x, la quale rappresenta la lunghezza dell'arco AM (fig. 6). Chiamisi essa $s(x)$.

Si faccia $Qp=QP$, tirisi pt parallela alla QNT, la MT toccante la curva in M e la Nt in N; indi, si tiri la Mr parallela alla Nt, e la ME alla PQ: e le mT, muN, mr, mE siano i luoghi, ove cadono rispettivamente le MT, MvN, Mr, ME col fare insieme una mezza rotazione intorno la TE.

Essendo $MT+Tm>MvN+Num>Mr+rm$ ossia

$$2MT>2MvN>2Mr, \text{ sarà}$$

$$MT>MvN>Mr;$$

cioè l'arco MvN, almeno per valori di PQ piccoli, sarà compreso tra le lunghezze delle rette MT, Mr.

Troviamo le espressioni delle lunghezze delle MT, Mr, MvN formate colla ω.

Per essere tang. $TME = f'(x)$, si ha $TE = \omega f'(x)$; e però sarà

$$\overline{MT}^2 = \omega^2 + \omega^2 f'(x)^2, \text{ ossia } MT = \omega \phi(x), \text{ posto}$$

$$\sqrt{\left(1 + f'(x)^2\right)} = \phi(x).$$

Così, per essere la Mr eguale alla Nt, come parallele comprese fra parallele equidistanti, e la Nt rispetto al punto N od alla ascissa $x+\omega$ ciò, che la MT è pel punto M ossia per l'ascissa x, si avrà $Mr = \omega \phi(x + \omega)$.

Ma la lunghezza dell'arco $M\nu N$ è eguale evidentemente ad

$$s(x + \omega) - s(x);$$

adunque per la relazione $MT > M\nu N > Mr$, dovrà essere soddisfatta la seguente

$$\omega \phi(x) > s(x + \omega) - s(x) > \omega \phi(x + \omega)$$

o la sua reciproca; e per tanto (§ 127) avrassi

$$s'(x) = \phi(x) \text{ ossia } s'(x) = \sqrt{\left(1 + f'(x)^2\right)};$$

cioè la derivata dell'arco s eguale alla radice quadrata di un binomio, avente per primo termine l'unità e per secondo termine il quadrato della derivata della ordinata corrispondente al termine variabile dell'arco stesso. Quindi la lunghezza dell'arco AM sarà quella particolare primitiva della funzione $\sqrt{1 + f'(x)^2}$, che si annullerà colla $x = OC$.

Dalla medesima eguaglianza $s'(x) = \sqrt{\left(1 + f'(x)^2\right)}$ si ha anco la (§ 62)

$$\frac{s'}{x'} = \sqrt{\left(1 + \frac{f'^2}{x'}\right)} \text{ ossia la } s' = \sqrt{\left(x'^2 + y'^2\right)},$$

qualunque sia la variabile principale.

183. La curva AM faccia una intera rotazione intorno

l'asse Ox; essa genererà una superficie di rotazione, la cui area sarà una funzione della x: si denomini essa $S(x)$.

Unitamente alla curva AM rotino anco le linee $M\nu N$, Num; MT, Tm; Mr, rm. Le $M\nu N$, MT, Mr genereranno tre superficie eguali rispettivamente a quelle generate dalle Num, Tm, rm; e però le aree delle superficie generate dalle linee spezzate composte, l'una dalle MT, Tm, l'altra dalle $M\nu N$, Num, e la terza dalle Mr, rm, saranno doppie rispettivamente di quelle generate dalle

$$MT,\ M\nu N,\ Mr.$$

Ma per un'assioma, la superficie generata dalla spezzata $M\nu Num$, è compresa fra quelle generate dalle MTm, Mrm; adunque anco le generate dalle loro metà avranno analoga relazione; cioè l'area della superficie generata dalla $M\nu N$, sarà compresa almeno per piccoli valori dell'ω, tra le aree di quelle generate dalle MT, Mr.

Passo a trovare le espressioni di queste aree formate colla ω.

La superficie generata dalla retta MT, è la convessa del tronco di cono retto avente per lato MT e per basi i circoli, chè hanno per raggi PM, QT; per cui ha l'area eguale al prodotto

$$MT\cdot\pi(MP+QT)=MT\cdot\pi(2\,MP+ET),$$

e conseguentemente ad

$$\omega\cdot\phi(x)\cdot 2\pi y+\pi\cdot\omega\phi(x)\cdot\omega f'(x),$$

per essere $MT=\omega\phi(x)$, ed $ET=\omega f'(x)$, come si è veduto nel paragrafo antecedente.

Così, la superficie generata dalla Mr, essendo anch'essa la convessa del tronco di cono retto avente per lato Mr, e per basi i circoli i cui raggi sono MP, $Qr = MP + Er$, avrà l'area eguale ad

$$Mr \cdot \pi(2MP + Er);$$

e però, per essere $Mr = \omega\phi(x+\omega)$, $MP = y$, ed $Er = \omega f'(x+\omega)$, sarà eguale ad

$$\omega \cdot 2\pi y \cdot \phi(x+\omega) + \omega^2 \cdot 2\pi\phi(x+\omega)f'(x+\omega).$$

Similmente, per essere $S(x)$ l'area della superficie generata dall'arco AM, sarà $S(x+\omega)$ quella della generata dall'AMN; e però

$$S(x+\omega) - S(x)$$

sarà l'area di quella generata dal solo arco $M\nu N$.

Quindi dovendo essere la quantità $S(x+\omega) - S(x)$ compresa, almeno pei piccoli valori della ω, fra i corrispondenti delle due

$$\omega \cdot 2\pi y\phi(x) + \omega^2 \cdot \pi\phi(x)f'(x),$$

$$\omega \cdot 2\pi y\phi(x+\omega) + \omega^2 \cdot \pi\phi(x+\omega)f'(x+\omega),$$

per lo stesso § 127 si avrà

$$S'(x) = 2\pi y\phi(x) \text{ cioè } S(x) = 2\pi\int y\sqrt{(1+y'^2)}\,dx,$$

ove la primitiva dev'essere la particolare, che si annulla colla $x = OC$.

Se l'arco $M\nu N$ voltasse alla retta ---QN--- la convessità, facendo pei punti e per le linee, che corrispondono alle ascisse $x - \omega$, $x - 2\omega$, ciò che si è fatto pei punti e per le linee corrispondenti alle $x+\omega$, $x+2\omega$, si otterrebbero i medesimi risultamenti esposti; e però con essi si potrà trovare la lunghezza di una parte qualunque di una linea qualsivoglia, e l'area della superficie di rotazione ordinaria generata da essa: però, quando la linea abbia punti singolari, onde evitare gli equivoci, sarà bene trovare queste due quantità separatamente per ogni sua parte aventi i termini in due prossimi di questi punti, fra i quali per la seconda converrà ritenervi anco i comuni alla linea ed all'asse delle x.

Qui pure, per essere $S'(x) = 2\pi y \phi(x)$ ossia $S'(x) = 2\pi y s'(x)$, e d'altronde $S'(x) = \frac{S'}{x'}$, $s'(x) = \frac{s'}{x'}$; si avrà

$$S' = 2\pi y s' \text{ ovvero } S = 2\pi \int y s'.$$

184. Col soccorso delle regole dimostrate nelle quattro proposizioni qui trattate, se ne possono con facilità dimostrare molte altre analoghe, senza ricorrere o rimontare alle proposizioni generali: dimostreremo le seguenti, che occorrono in molte occasioni.

Primieramente troveremo la derivata dell'area del settore OAM (fig. 7).

Essendo AOM eguale ad $AMPC$ *più* AOC *meno* MOP, ed AOC costante rispetto alla x, la derivata di AOM sarà eguale a quella di $AMPC$ *meno* quella di MPO, cioè sarà

$$(AOM)' = y - (\tfrac{1}{2} xy)' \text{ ossia } (AOM)' = \tfrac{1}{2}(y - xy').$$

Se poi la variabile principale, in vece di essere la x, fosse un'altra qualunque, avrebbesi per derivata dello stesso settore il binomio

$$\tfrac{1}{2}(yx' - y'x)$$

ove le derivate si riportano alla variabile qualunque.

185. In secondo luogo, troveremo l'area del quadrilatero $AMma$ (fig. 8), avente per lati le AM, am, porzioni delle linee AB, ab qualsivogliono, e le rette Aa, Mm;

supposto date le funzioni della x, che rappresentano le rette PM, Mm, e quella che esprime l'angolo mMR fatto dalla Mm colla MR parallela all'asse Ox.

Si chiamino t, u le coordinate Op, pm; z la retta Mm, α l'angolo mMR, e ϕ l'area del quadrilatero $AMma$, cioè la funzione richiesta. Per essere $Op = OP - pP$, $pm = pR + Rm$, sarà $t = x - z\cos.\alpha$, ed $u = y + z\,\text{sen}.\alpha$.

La semplice ispezione della figura dà

$$AMma = Dpma + mMPp - AMPC - aACD;$$

e però, siccome quest'equazione ha luogo, qualunque sia la x, così (§ 34) con essa sussisterà anco la seguente

$$\phi' = (Dpma)' + (mMPp)' - (AMPC)':$$

si è ommesso il termine $(aACD)'$, perchè è *zero*, essendo $aACD$ costante rispetto alla x.

Dal paragrafo 180 si ha

$$(AMPC)' = y,\ (Dpma)' = ut',$$

e d'altronde

$$mMPp = \tfrac{1}{2}(u + y)(x - t);$$

e però sarà

$$\phi' = ut' + \tfrac{1}{2}\big((u + y)(x - t)\big)' - y.$$

Si pongano in questa equazione i valori delle t, u, ed avrassi la

$$\phi' = (y + z\,\text{sen}.\alpha)(x - z\cos.\alpha)' + \tfrac{1}{2}\big((2y + z\,\text{sen}.\alpha)z\cos.\alpha\big)' - y$$

ossia la

$$\phi' = (y + z\,\text{sen}.\alpha)(1 - z'\cos.\alpha + z\alpha'\,\text{sen}.\alpha) + \left(y + \frac{z}{2}\text{sen}.\alpha\right)(z'\cos.\alpha - z\alpha'\,\text{sen}.\alpha)$$
$$+ (y' + \tfrac{1}{2}z'\,\text{sen}.\alpha + \tfrac{1}{2}z\alpha'\cos.\alpha)z\cos.\alpha - y,$$

la quale, fatte che siano le moltiplicazioni e le riduzioni, dà la seguente semplicissima

$$\phi' = z(\text{sen.}\,\alpha + y'\cos.\,\alpha) + \frac{z^2}{2}\alpha'.$$

Quest'ultima espressione della derivata $\phi'(x)$, insegna, che la ϕ area richiesta, è quella primitiva particolare della funzione

$$z(\text{sen.}\,\alpha + y'\cos.\,\alpha) + \tfrac{1}{2}z^2\alpha',$$

che si annulla colla x eguale alla OC.

186. Onde si comprenda almeno in parte la fecondità della presente proposizione, farò di essa i casi seguenti.

La retta Mm sia normale della linea AB la cui parte AM chiameremo s; e si avrà $\text{sen.}\,\alpha = \frac{1}{s'}$, $\cos.\,\alpha = \frac{y'}{s'}$, e però $\phi' = z\frac{1+y'^2}{s'} + \frac{1}{2}z^2\alpha'$, ossia

$$\phi' = zs' + \frac{z^2}{2}\alpha'.$$

Se in oltre fosse z costante, e però le curve AB, ab parallele, avrebbesi immediatamente $\phi = zs + \frac{1}{2}z^2\alpha$.

La Mm cada nel prolungamento della PM, ed avrassi α retto ed $\alpha' = 0$, e per tanto

$$\phi' = z \text{ ossia } \phi = \int z\,dx.$$

La Mm cada nella toccante la curva AB in M, e si avrà α eguale all'angolo fatto dalla stessa toccante coll' asse delle x preso negativamente, ossia $\text{sen.}\,\alpha = -\frac{y'}{s'}$, e $\cos.\,\alpha = \frac{1}{s'}$, ed $\alpha' = -\frac{y''}{s'^2}$; e per conseguenza sarà

$$\phi' = z\frac{y'-y'}{s'} - \frac{z^2}{2}\,\frac{y''}{s'^2}, \text{ cioè } \phi' = -\frac{1}{2}z^2\frac{y''}{1+y'^2}.$$

187. In terzo luogo, troviamo il volume di quel corpo, che è generato dal quadrilatero *AMma*, facendo una intera rotazione intorno dell'asse Ox. Questo volume si chiami $V(x)$.

Evidentemente V è eguale alla somma dei volumi dei corpi generati dalle figure *ampD*, *mMPp*, *meno* la somma dei volumi dei corpi generati dalle *AMPC*, *aACD*; e però, essendo l'ultimo di questi corpi costante rispetto alla x, la derivata di V sarà eguale a (§ 181)

$$\pi u^2 t' \text{ più } \frac{\pi}{3}\big((x-t)(u^2+uy+y^2)\big)' \text{ meno } \pi y^2,$$

che sono le derivate dei volumi dei corpi generati ordinatamente dalle figure *ampD*, *MapP*, *AMPC*.

Sostituendo nella equazione

$$V' = \pi u^2 t' + \tfrac{1}{3}\pi\big((x-t)(y^2+uy+u^2)\big)' - \pi y^2$$

in luogo delle t, u i loro valori esposti nel paragrafo antecedente, ed eseguite le derivate indicate, indi le moltiplicazioni tutte e le riduzioni, si ottiene

$$V' = \pi(2y+z\,\text{sen}.\alpha)z\,\text{sen}.\alpha + \pi(2y+z\,\text{sen}.\alpha)zy'\cos.\alpha + \pi\left(y+\frac{2z}{3}\text{sen}.\alpha\right)z^2\alpha',$$

e conseguentemente sarà V eguale a quella primitiva di

$$\pi(2y+z\,\text{sen}.\alpha)(\text{sen}.\alpha+y'\cos.\alpha)z + \pi z^2\left(y+\tfrac{2}{3}z\,\text{sen}.\alpha\right)\alpha',$$

che si annulla colla x eguale alla OC.

Alla espressione, valore della V', ossia alla equivalente

$$\pi z\left(2y(\text{sen}.\alpha+y'\cos.\alpha+\tfrac{1}{2}z\alpha')+z(\text{sen}.\alpha+y'\cos.\alpha+\tfrac{2}{3}z\alpha')\text{sen}.\alpha\right),$$

si può dare la forma seguente

$$\pi\left(z(\text{sen}.\alpha+y'\cos.\alpha)+\frac{z^2}{2}\alpha'\right)\left(2y+z\frac{\text{sen}.\alpha+y'\cos.\alpha+\frac{2}{3}z\alpha'}{\text{sen}.\alpha+y'\cos.\alpha+\frac{1}{2}z\alpha'}\cdot\text{sen}.\alpha\right).$$

Pel primo dei casi contemplati nella proposizione antecedente si ha sen.$\alpha = \frac{1}{s'}$, e cos.$\alpha = \frac{y'}{s'}$; e però, per esso, sarà

$$V' = \pi\left(zs' + \frac{1}{2}z^2\alpha'\right)\left(2y + \frac{z}{s'}\cdot\frac{s' + \frac{2}{3}z\alpha'}{s' + \frac{1}{2}z\alpha'}\right), \text{ ossia}$$

$$V' = \pi\left(z^2 + 2rz\right)\left(y + \frac{1}{3}\,\frac{z}{s'}\,\frac{3r + 2z}{2r + z}\right)\alpha',$$

ove l'r esprime il raggio del circolo osculatore della curva AB nel punto M.

188. Le equazioni ed espressioni sì di quantità ordinarie che di derivate, trovate sino ad ora, sono formate con ordinate rettangole od almeno rettilinee ordinarie e derivate di esse; ora dirò, come si possono trovare le equazioni ed espressioni equivalenti, ma formate con altre coordinate qualunque esse siano, il che riescirà una applicazione dell'esposto ai paragrafi 62, 66.

Si trovino i valori delle x, y, coordinate già usate, formati colle nuove coordinate, che chiameremo t, u; ed abbiasi

$$x = \phi(t, u), \text{ ed } y = \psi(t, u):$$

si generalizzino le derivate nelle equazioni od espressioni trovate, indi si pongano nelle risultanti in luogo delle x, y e loro derivate x', y', x'', - - - i rispettivi loro valori formati colle t, u, t', u', t'', - - -; e si avranno le equazioni od espressioni richieste.

Le t, u nuove coordinate siano le polari, cioè u esprima OM (fig. 7) raggio vettore e t l'angolo MOy: evidentemente sarà

$$\phi(t, u) \text{ ossia } x = u\,\text{sen.}\,t, \text{ e } \psi(t, u) \text{ ossia } y = u\cos.t;$$

e però avransi

$$x' = u' \text{ sen.} t + u t' \cos. t, \quad y' = u' \cos. t - u t' \text{sen.} t,$$

$$x'' = u'' \text{sen.} t + 2 u' t' \cos. t - u t'^2 \text{sen.} t + u t'' \cos. t,$$

$$y'' = u'' \cos. t - 2 u' t' \text{sen.} t - u t'^2 \cos. t - u t'' \text{sen.} t,$$

- -.

Sostituendo i valori delle x', y', qui trovati, nel binomio $x'^2 + y'^2$, si ottiene $u'^2 + u^2 t'^2$; e però (§182) sarà $s' = \sqrt{(u'^2 + u^2 t'^2)}$, e conseguentemente

$$s'(u) = \sqrt{\left(1 + u^2 t'(u)^2\right)}, \quad s'(t) = \sqrt{\left(u'(t)^2 + u^2\right)}.$$

Così, sostituendo i valori delle x, y, x', y' nel binomio $x'y - xy'$ si ha, dopo alcune facili riduzioni, il monomio $u^2 t'$; e per tanto la derivata del settore AOM (§ 184) sarà

$$\tfrac{1}{2} u^2 t';$$

ed $\frac{1}{2} u^2$, se la variabile principale sarà t.

Similmente, per essere la tangente dell'angolo compreso dal raggio vettore u e dalla toccante eguale ad $\dfrac{x'y - xy'}{xx' + yy'}$, essa formata colle coordinate polari sarà $\dfrac{u^2 t'}{u u'}$ ossia $u \dfrac{t'}{u'}$.

In ultimo, sostituiscansi nella espressione $\dfrac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}$ (§§ 64, 174) i valori delle x', y', x'', y''; e si otterrà, fatte le riduzioni, la seguente

$$\frac{(u'^2 + u^2 t'^2)^{\frac{3}{2}}}{u(t' u'' - u' t'') - (u^2 t'^2 + 2 u'^2) t'},$$

la quale rappresenta la grandezza del raggio di curvatura corrispondente alle coordinate polari t, u.

Nei casi di $t'=1$, o di $u'=1$, quest'ultima espressione riducesi alle seguenti

$$\frac{\left(u'(t)^2+u^2\right)^{\frac{3}{2}}}{u u''(t)-u^2-2u'(t)^2},\quad -\frac{\left(1+u^2t'(u)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{u t''(u)+\left(2+u^2t'(u)^2\right)t'(u)}.$$

Così, denominata μ la perpendicolare condotta dalla origine delle coordinate alla toccante, si ha evidentemente $\mu=\left(\frac{y}{y'}-x\right)\frac{y'}{s'}$, ossia $\mu=\frac{y-xy'}{s'}$;

e però sarà $\mu'(x)=-\frac{y''}{s'^3}(x+yy')$. D'altronde hassi $x+yy'=\frac{1}{2}(u^2)'$; quindi sarà

$$\frac{(u^2)'}{2\mu'}=-\frac{(x+yy')s'^3}{(x+yy')y''}\ \text{ ossia }\ \frac{(u^2)'}{2\mu'}=-\frac{s'^3}{y''};$$

e per tanto, siccome $\mp\frac{s'^3}{y''}$ esprime il raggio di curvatura cioè c, così avrassi

$$c=\pm u\left(\frac{du}{d\mu}\right).$$

LEZIONE IV.

Delle sviluppate ordinarie delle linee piane.

189. Comincerò a dimostrare, che le rette tangenti la linea luogo geometrico dei centri dei circoli osculatori di una curva piana qualunque sono normali di questa medesima curva.

Esprimano P, Q le coordinate della retta tangente la curva luogo dei centri nel punto corrispondente alle coordinate a, b usate nel paragrafo 174; e l'equazione della retta medesima sarà

$$Q-b=(P-a)\left(\frac{db}{da}\right) \text{ ossia } Q-b=(P-a)\frac{b'}{a'},$$

ove le b', a' indicano le derivate rispetto alla x.

Essendo (§ 174) $a=x-\frac{y'}{y''}(1+y'^2)$, $b=y+\frac{1}{y''}(1+y'^2)$,

si ha $a'=-\left(3y'-\frac{y'''}{y''^2}(1+y'^2)\right)y'$, e

$$b'=3y'-\frac{y'''}{y''^2}(1+y'^2);$$

e però sarà $a'=-y'b'$, ed anco $\frac{b'}{a'}=-\frac{1}{y'}$.

Sostituiscansi nella equazione della toccante, ultima esposta, i valori delle a, b, $\frac{b'}{a'}$ qui trovati; e si avrà la seguente

$$Q-y-\frac{1}{y''}(1+y'^2)=-\frac{1}{y'}\left(P-x+\frac{y'}{y''}(1+y'^2)\right),$$

la quale facilmente si riduce alla

$$(Q-y)y'+P-x=0,$$

che rappresenta anco, come si vede, la normale della curva espressa colla equazione $y=f(x)$ nel punto ove ad essa è osculatore il circolo, al cui centro corrispondono le stesse coordinate a, b.

190. Passo a dimostrare che, la derivata di

$$c=-\frac{1}{y''}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

cioè del raggio di curvatura della curva espressa dalla equazione $y=f(x)$, è identica alla derivata della lunghezza del corrispondente arco della curva luogo dei centri: questo arco per semplicità chiamisi ξ.

Dal § 182 si ha $\xi'=\sqrt{(a'^2+b'^2)}$, e dall'antecedente $a'=-y'b'$; e però sarà $\xi'=-b'\cdot\sqrt{(1+y'^2)}$ (§ 131):

Ma per essere

$c=-\frac{1}{y''}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$ hassi $c'=-\left(3y'-\frac{y'''}{y''^2}(1+y'^2)\right)\sqrt{(1+y'^2)}$,

cioè $c'=-b'\sqrt{(1+y'^2)}$; adunque sarà $c'=\xi'$: appunto come si è detto.

Essendo $c'=\xi'$, si ha $c=\xi+cost.$; e però, se C fosse il valore di c corrispondente a $\xi=0$, cioè al principio dell'arco ξ, avrebbesi $cost.=C$, e conseguentemente $c=\xi+C$.

La traccia AB (fig. 9) esprima la curva della equazione $y=f(x)$, e la ak il luogo dei centri dei suoi circoli osculatori. Così le rette Mm, Aa esprimano i raggi di curvatura della - - - AB - - - corrispondenti ai punti A, M. Per la prima delle due proprietà dianzi dimostrate, le rette - - - Mm - - -, - - - Aa - - - saranno toccanti la curva - - - ak - - - nei punti a, m; e per la seconda, ammesso a il primo termine dell'arco ξ, sarà Mm eguale ad am più aA.

Da queste ultime due proprietà risulta, che, se alla curva - - - am - - - si avvolgesse un filo $kmaA$, il quale avesse la parte kma adagiata alla curva - - - am - - -, e l'altra, aA, tesa e perciò rettilinea e tangente in a la stessa curva - - - am - - -, facendone scorrere l'estremità A verso M, in maniera che il filo si conservasse sempre teso, questa medesima estremità mobile A, descriverebbe la linea - - - AM - - -: proprietà interessante per la stereotomia segnatamente, ed anco per altri rami sì della pratica che della teorica.

Ogni curva, che abbia rispetto ad un'altra, quest' ultima proprietà esposta per la - - - *amk* - - -, si chiama *sviluppata* od *evoluta* dell'altra, e quest' altra chiamasi *sviluppante* od *evolvente* della prima. E particolarmente quella sviluppata di una curva piana, che è il luogo geometrico dei centri dei suoi circoli osculatori, dicesi sviluppata ordinaria.

Furono considerate le sviluppate delle curve già sviluppate esse medesime, ma io credo di non occuparmene.

LEZIONE V.

Dei contatti di linee qualsivogliano, delle misure ed inflessioni di esse, e di altre relative indagini.

191. Le x, y, z rappresentino le coordinate di un punto qualunque di una linea, la quale sia data dalle due equazioni $y = f(x)$, $z = \phi(x)$.

Così, le p, q, r siano le analoghe coordinate di un' altra linea riportata agli stessi tre assi, ai quali è riportata la prima, e

$$q = \psi(p), \quad r = F(p)$$

siano le sue equazioni.

Se i valori delle funzioni

$$f(x),\ \phi(x), f'(x),\ \phi'(x), f''(x),\ \phi''(x), --- f^{(n)}(x),\ \phi^{(n)}(x),$$

corrispondenti alla stessa ordinata x particolare, saranno eguali ordinatamente ai valori delle

$$\psi(p),\ F(p),\ \psi'(p), F'(p),\ \psi''(p), F''(p), --- \psi^{(n)}(p),\ F^{(n)}(p)$$

corrispondenti a p eguale alla stessa x particolare, si dirà, che le due linee avranno un *contatto dell' ordine nesimo* nel punto corrispondente alla stessa ordinata x particolare.

Da questa definizione risulta, che, se le due linee rappresentate colle equazioni $y = f(x)$, $q = \psi(p)$, e quelle rappresentate colle $z = \phi(x)$, $r = F(p)$ avranno nei punti corrispondenti alla stessa ordinata x particolare un contatto dell'ordine *n esimo*, anco le due linee esistenti nello spazio e le cui projezioni sono rappresentate colle

$$y = f(x),\ z = \phi(x);\ q = \psi(p),\ r = F(p)$$

avranno nel punto corrispondente alla stessa ordinata x particolare un contatto dell'ordine *n esimo*. Dimodochè, si potrà sempre trovare una linea, che abbia con una data in un punto qualunque di essa un contatto dell'ordine *n esimo*, quando essa appartenga ad una famiglia, nelle cui equazioni vi siano $2n + 2$ costanti determinabili in modo, di soddisfare le $2(n+1)$ equazioni, necessarie, affinchè le loro projezioni abbiano colle corrispondenti della data contatti dell'ordine *n esimo*.

Di fatto, la linea data sia quella rappresentata colle equazioni $y = f(x)$, $z = \phi(x)$; e la famiglia di quella, che deve avere colla data un contatto dell'ordine *n esimo*, sia rappresentata colle equazioni

$$q = \psi(p, a, b, c, \text{---}),\ r = F(p, a, b, c, \text{---})$$

ove le $a, b, c,$ --- esprimono le $2(n+1)$ costanti arbitrarie.

Si formino le equazioni

$$f(x) = \psi(x, a, b, c, \text{---}),\ \phi(x) = F(x, a, b, c, \text{---});$$

$$f'(x) = \psi'(x), \phi'(x) = F'(x); f''(x) = \psi''(x),\ \phi''(x) = F''(x); \text{---}$$

$$\text{-------------};\ f^{(n)}(x) = \psi^{(n)}(x),\ \phi^{(n)}(x) = F^{(n)}(x);$$

si cavino da esse i valori delle $2(n+1)$ costanti $a, b, c, ---$ contenute in esse medesime; pongansi questi valori nelle equazioni

$$q = \psi(p, a, b, c, ---), \ r = F(p, a, b, c, ---),$$

ed otterransi quelle della linea, che avrà colla data, nel punto corrispondente alla ordinata x, un contatto dell'ordine *n esimo*, cioè la richiesta.

192. Qui sopra si è supposto, che le equazioni di quella famiglia di linee alla quale deve appartenere la richiesta, fossero quelle delle due sue projezioni in due piani coordinati, e sciolte anco rispetto alle q, r; ora vediamo, come si potrà soddisfare la stessa ricerca, quando le equazioni della famiglia, alla quale deve appartenere la linea richiesta, siano della forma seguente

$$\psi(p, q, r, a, b, c, ---) = 0, \ F(p, q, r, a, b, c, ---) = 0,$$

senza scioglierle preventivamente rispetto alle q, r.

Si formino di queste due equazioni le derivate esatte rispetto alla p degli ordini *primo, secondo, --- n esimo*, avendo di mira, che le q, r sono due funzioni della p; e si pongano tanto in esse due, quanto in tutte queste loro derivate, in vece delle p, q, r, $q'(p)$, $r'(p)$, $q''(p)$, --- $q^{(n)}(p)$, $r^{(n)}(p)$ ordinatamente le x, y, z, y', z', y'', --- $y^{(n)}$, $z^{(n)}$ corrispondenti al punto di contatto ossia alla x particolare; e si avranno $2(n+1)$ equazioni tra le stesse x, y, z, y', z', y'', --- $y^{(n)}$, $z^{(n)}$ e le $2(n+1)$ costanti. Queste equazioni, che debbono essere soddisfatte, perchè le x, y, z, y', z', y'', --- $y^{(n)}$, $z^{(n)}$ sono i valori delle p, q, r, $q'(p)$, $r'(p)$, $q''(p)$, --- $q^{(n)}(p)$, $r^{(n)}(p)$, sciolte rispetto alle $2(n+1)$ costanti, daranno quei loro valori, che sostituiti nelle due equazioni

$$\psi(p, q, r, a, b, c, ---) = 0, \; F(p, q, r, a, b, c, ---) = 0$$

somministreranno le particolari di quella linea, che avrà un contatto dell'ordine *n esimo* colla data.

Le ultime equazioni, le quali danno i valori richiesti delle costanti, si potranno anco avere col metodo seguente, il quale pel maggior numero dei casi riesce molto più semplice dell'esposto.

Nelle due equazioni

$$\psi(p, q, r, a, b, ---) = 0, \; F(p, q, r, a, b, ---) = 0$$

si cangino le p, q, r immediatamente nelle x, y, z; si formino delle risultanti

$$\psi(x, y, z, a, b, ---) = 0, \; F(x, y, z, a, b, ---) = 0$$

le derivate esatte rispetto alla x degli ordini *primo, secondo, --- n esimo,* trattando le y, z come funzioni della x; indi si intenda tanto in queste equazioni alle derivate quanto nelle due $\psi(x, y, z, a, b, ---) = 0$, $F(x, y, z, a, b, ---) = 0$, che le $x, y, z, y', z', y'', --- y^{(n)}, z^{(n)}$ siano le particolari e corrispondenti al punto di contatto; ed avransi le $2(n+1)$ equazioni richieste, quelle cioè dalle quali si dovranno desumere gli occorrenti valori delle costanti.

Dall'esposto risulta, che si potrà trovare una retta, che abbia con una curva qualunque in un punto qualsivoglia di essa un contatto di *prim' ordine*, una circonferenza che abbia un contatto del *second' ordine, ---*, essendovi nelle equazioni delle rette quattro costanti, in quelle delle circonferenze sei costanti, --- determinabili, perchè sieno soddisfatte le condizioni necessarie per questi contatti.

193. Prima di fare qualche esempio, dimostrerò la seguente proposizione, la quale rende la teorica dei contatti sommamente interessante.

Se di tre linee aventi un punto comune, la seconda avrà colla prima in questo punto medesimo un contatto di un certo ordine, e la terza avrà colla prima medesima o il solo punto comune ovvero un contatto di un ordine minore di quello della seconda, le parti di questa, almeno le prossime al punto comune, si accosteranno alle corrispondenti della prima più delle analoghe della terza.

Le equazioni delle tre linee siano

$$y=f(x), z=\phi(x); \; q=\psi(p), r=F(p); \; t=\xi(s), u=\lambda(s):$$

le x, p, s, le y, q, t, e le z, r, u esprimono coordinate fra loro parallele e rettangole.

L'ordinata parallela alle x, p, s e corrispondente al punto comune, chiamisi x particolare; e così m esprima l'ordine del contatto tra la seconda linea e la prima, ed n quello tra la terza e la prima stessa.

Le ordinate parallele alle y, z di quei punti delle tre linee ai quali, pel verso della x, corrisponde l'x particolare *più* ω quantità indeterminata, saranno

$$f(x+\omega), \phi(x+\omega); \; \psi(x+\omega), F(x+\omega); \; \xi(x+\omega), \lambda(x+\omega);$$

e però il quadrato della distanza fra il punto della prima linea e quello della seconda corrispondenti entrambi alla ordinata $x+\omega$ sarà

$$\left(F(x+\omega)-\phi(x+\omega)\right)^2+\left(\psi(x+\omega)-f(x+\omega)\right)^2 \text{ ossia}$$

$$\left(\psi-f+(\psi'-f')\omega+(\psi''-f'')\frac{\omega^2}{2}+(\psi'''-f''')\frac{\omega^3}{2\cdot 3}+\text{ecc.}\right)^2+$$

$$\left(F-\phi+(F'-\phi')\omega+(F''-\phi'')\frac{\omega^2}{2}+(F'''-\phi''')\frac{\omega^3}{2\cdot 3}+\text{ecc.}\right)^2,$$

ed il quadrato della distanza tra il medesimo punto della prima linea e l'analogo della seconda sarà

$$\left(\xi(x+\omega)-f(x+\omega)\right)^2+\left(\lambda(x+\omega)-\phi(x+\omega)\right)^2 \text{ ovvero}$$

$$\left(\xi-f+(\xi'-f')\omega+(\xi''-f'')\frac{\omega^2}{2}+(\xi'''-f''')\frac{\omega^3}{2\cdot 3}+\text{ecc.}\right)^2+$$

$$\left(\lambda-\phi+(\lambda'-\phi')\omega+(\lambda''-\phi'')\frac{\omega^2}{2}+(\lambda'''-\phi''')\frac{\omega^3}{2\cdot 3}+\text{ecc.}\right)^2.$$

Sviluppando le potenze indicate nelle espressioni qui esposte delle due distanze di cui si parla, ed osservando, che si hanno le equazioni

$$\psi=f,\ F=\phi,\ \psi'=f',\ F'=\phi',\ \psi''=f'',\ ---\ \psi^{(m)}=f^{(m)},\ F^{(m)}=\phi^{(m)}$$

$$\xi=f,\ \lambda=\phi,\ \xi'=f',\ \lambda'=\phi',\ \xi''=f'',\ ---\ \xi^{(n)}=f^{(n)},\ \lambda^{(n)}=\phi^{(n)},$$

facilmente trovasi la prima eguale ad un polinomio della forma

$$A\omega^{2m+2}+B\omega^{2m+3}+C\omega^{2m+4}+\text{ecc.},$$

e la seconda eguale ad uno della forma

$$H\omega^{2n+2}+I\omega^{2n+3}+K\omega^{2n+4}+\text{ecc.}:$$

in questi polinomj le $A, B, C, ---H, I, K, ---$ non contengono la ω. Ma per ipotesi è $m > n$; adunque i valori del primo di questi due polinomj, se non tutti, almeno quelli corrispondenti a valori dell'ω prossimi allo *zero*, saranno (§ 132) minori dei corrispondenti del secondo; o ciò che significa lo stesso, le parti della seconda linea, se non tutte, almeno quelle contigue al punto comune, si accosteranno alle corrispondenti della prima più delle analoghe della terza: appunto come si è dichiarato.

194. Passo ad esporre alcuni esempj; e comincio a trovare quella retta, che ha colla curva espressa colle equazioni $y=f(x)$, $z=\phi(x)$ un punto di contatto, ove corrisponde l'ordinata x particolare.

Per questo esempio, si hà

$$\psi(p,q,r,a,b,---)=q-ap-b=0,$$

ed $F(p,q,r,a,b,---)=r-cp-d=0$.

Cambiando le p,q,r nei simboli x,y,z, si hanno le due equazioni

$$y-ax-b=0,\ z-cx-d=0,$$

le cui derivate prime esatte sono $y'-a=0$, $z'-c=0$; e però, ritenuto che le x,y,z,y',z' siano ora quelle della curva data, cioè della espressa colle equazioni $y=f(x)$, $z=\phi(x)$, e corrispondenti al punto della ordinata x particolare, i parametri richiesti, saranno quelli, che soddisferanno le quattro equazioni seguenti

$$y-ax-b=0,\ z-cx-d=0,\ y'-a=0,\ z'-c=0,$$

le quali visibilmente danno

$$a=y',\ b=y-xy',\ c=z',\ d=z-xz',$$

dove le y',z' esprimono le $f'(x)$, $\phi'(x)$.

Quindi la retta richiesta sarà quella rappresentata colle equazioni

$$q=y'p+y-xy',\ r=z'p+z-xz'$$

ossia dalle

$$q-f(x)=(p-x)f'(x),\ r-\phi(x)=(p-x)\phi'(x).$$

Questa è la retta, fra le moltissime passanti per lo stesso punto della curva, che ha le sue parti contigue al punto comune (§ 193), le quali si accostano alle corrispondenti della curva più delle analoghe parti di ogni altra di esse. Ed è per questa sua proprietà, che si chiama *toccante* o *tangente* della curva nel punto in comune con essa.

Se le derivate fossero prese per rispetto ad una variabile qualsivoglia t; le equazioni della toccante sarebbero

$$(q-y)\,x'=(p-x)\,y',\ (r-z)\,x'=(p-x)\,z',$$

per essere $f'(x)=\frac{y'}{x'}$, e $\phi'(x)=\frac{z'}{x'}$.

195. Troviamo l'equazione del piano normale la curva nel punto corrispondente alla x particolare; cioè troviamo l' equazione di quel piano, che passa per questo punto, ed è perpendicolare alla retta tangente la curva in questo punto medesimo.

Il piano sia rappresentato dalla equazione

$$P+A\,Q+B\,R+C=0,$$

ove A, B, C esprimono i suoi parametri, e le P, Q, R le sue coordinate rettangole e rispettivamente parallele alle x, y, z della curva.

Dovendo questo piano essere perpendicolare alla tangente, le cui equazioni sono

$$q-y=(p-x)\,y',\ r-z=(p-x)\,z',$$

i suoi parametri dovranno soddisfare le due equazioni

$$-\frac{1}{A}\,y'+1=0,\ -\frac{1}{B}\,z'+1=0,$$

le quali danno $A=y'$, $B=z'$; e dovendo esso passare pel punto, al quale corrispondono le coordinate x, y, z, i medesimi parametri dovranno soddisfare anco la equazione

$x+Ay+Bz+C=0$, la quale dà $C=-x-yy'-zz'$.

Quindi l'equazione del piano normale sarà

$$P+Q\,y'+R\,z'-x-y\,y'-z\,z'=0,\ \text{ossia}$$

$$P-x+(Q-y)\,y'+(R-z)\,z'=0.$$

196. Una curva situata nello spazio, abbia per projezione ortogonale nel piano yOx la traccia AMB (fig. 10): sia A la projezione di un suo punto individuato, ed M quella di un suo punto qualunque; e si chiamino x, y, z le coordinate rettangole di questo punto.

Chiamisi s la lunghezza dell'arco AM, ϕ quella dell'arco della curva, che ha lo stesso AM per projezione; ϕ ed s saranno evidentemente funzioni della $OP = x$.

Troviamo quella funzione della x, che è la derivata della $\phi(x)$, supposto conosciute quelle, che sono i valori delle y, z ossia le equazioni della linea situata nello spazio.

Si immagini il quadrilatero mistilineo avente per lati ϕ, z, $MA = s$, e quella ordinata parallela all' asse delle z, che corrisponde al punto A; e suppongasi esso spiegato in un piano passante per una retta Am - - - e perpendicolare all' yOx, senza cambiare posto al suo ultimo lato; indi gli si faccia fare un quarto di rotazione intorno alla Am - - -, e cada nell' $anmA$.

Evidentemente sarà $Am = AM = s$, $mn = z$, ed $an = \phi$; e però, riferita la curva anb alle rette Aa - - -, Am - - - scelte per assi delle coordinate $Am = s$, $mn = z$, si avrà

$$\phi'(x) = \sqrt{\left(s'(x)^2 + z'(x)^2\right)} \ (\S\ 182).$$

Ma essendo $s = Am = AM$, pel paragrafo stesso, si ha $s'(x) = \sqrt{\left(1 + y'(x)^2\right)}$; adunque sarà

$$\phi'(x) = \sqrt{\left(1 + y'(x)^2 + z'(x)^2\right)}.$$

Sostituendo in quest'ultima equazione in luogo delle derivate $\phi'(x)$, $y'(x)$, $z'(x)$ i loro valori $\frac{\phi'}{x'}$, $\frac{y'}{x'}$, $\frac{z'}{x'}$, hassi

$$\phi' = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)},$$

la quale mostra, che la derivata dell' arco ϕ eguaglia la radice quadrata della somma dei quadrati delle derivate delle coordinate corrispondenti al termine variabile dell' arco stesso.

Siccome il quadrilatero mistilineo e gobbo, che ha fra suoi lati le s, z, ϕ, è equivalente all'$anmA$; così la derivata rispetto alla x dell' area del medesimo sarà (§ 180) il prodotto della mn per la derivata rispetto alla x della Am, cioè $zs'(x)$, ovvero sarà $z\sqrt{(1+y'(x)^2)}$.

Possiamo per tanto concludere, che l' arco ϕ, e l' area del quadrilatero anzidetto, saranno quelle fra le primitive

$$\int\sqrt{(1+y'(x)^2+z'(x)^2)}\,dx,\quad \int z\sqrt{(1+y'(x)^2)}\,dx,$$

le quali si annulleranno colla $x = OC$.

197. Essendo $\phi'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, si ha

$$2\phi'^2 = (x'^2+y'^2) + (x'^2+z'^2) + (y'^2+z'^2);$$

e però, stante chè le $x'^2+y'^2$, $x'^2+z'^2$, $y'^2+z'^2$ sono i quadrati delle derivate degli archi, projezioni del ϕ sui piani coordinati; così, la somma dei quadrati delle derivate delle tre projezioni dell' arco di una linea situata comunque nello spazio, eguaglia il doppio del quadrato della derivata dell' arco medesimo.

198. Troviamo gli angoli che la retta toccante di una curva qualunque fa coi tre assi delle coordinate rettangole.

Siccome la toccante è quella retta, che è rappresentata dalle due equazioni

$$q = y'p + y - xy',\quad r = z'p + z - xz';$$

così i coseni degli angoli fatti da essa cogli assi ortogonali delle coordinate x, y, z saranno rispettivamente

$$\frac{1}{\sqrt{(1+y'(x)^2+z'(x)^2)}}, \frac{y'(x)}{\sqrt{(1+y'(x)^2+z'(x)^2)}}, \frac{z'(x)}{\sqrt{(1+y'(x)^2+z'(x)^2)}}$$

ovvero $\frac{1}{\phi'(x)}, \frac{y'(x)}{\phi'(x)}, \frac{z'(x)}{\phi'(x)}$, od anco $\frac{x'}{\phi'}, \frac{y'}{\phi'}, \frac{z'}{\phi'}$,

supposto le derivate prese per rispetto a qualunque variabile.

199. Per secondo esempio, troverò le circonferenze, che hanno con una linea qualsivoglia ma data un contatto di primo ordine, e quella che ha un contatto di second'ordine; e comincerò dalle prime.

Le coordinate rettangole di un punto qualunque di una circonferenza siano espresse colle p, q, r; e suppongasi essa rappresentata dalla sussistenza delle due equazioni

$$(p-a)^2+(q-b)^2+(r-c)^2-d^2=0,\ p-a+m(q-b)+n(r-c)=0;$$

ove le a, b, c esprimano le coordinate del suo centro, d il raggio, ed m, n le tangenti degli angoli fatti cogli assi delle p, q da quelle tracce del suo piano, che sono nei piani coordinati delle p, q; p, r.

Cambiando le p, q, r nelle x, y, z, si hanno le

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-d^2=0,\ x-a+m(y-b)+n(z-c)=0$$

le cui derivate esatte del prim'ordine sono

$$x-a+(y-b)y'+(z-c)z'=0,\ 1+my'+nz'=0:$$

e supposto, che la x sia la particolare e le y, z, y', z' i corrispondenti valori delle $f(x)$, $\phi(x)$, $f'(x)$, $\phi'(x)$, la circonferenza avrà colla curva un contatto di primo ordine, purchè i parametri a, b, c, d, m, n soddisfaccino le quattro equazioni qui esposte.

Per tanto, determinando quattro di questi parametri, fra i quali vi dovrà essere o l'm ovvero l'n onde soddisfare la quarta equazione, e sostituendo i valori così determinati, nelle due equazioni supposte tra le p, q, r, avransi le rappresentanti le circonferenze aventi colla curva data un contatto di primo ordine.

I valori dei quattro parametri determinati saranno formati colle x, y, z, y', z' e cogli altri due parametri, i quali rimangono affatto arbitrarj, per cui moltissime sono le circonferenze, che possono avere un contatto di prim'ordine colla data linea.

Se si individuassero i due parametri rimasti arbitrarj, i valori corrispondenti degli altri quattro, sarebbero quelli competenti alla circonferenza, fra le moltissime aventi i medesimi due parametri individuati, la quale avrebbe le sue parti contigue al punto in comune colla linea qualunque, che si accosterebbero alle corrispondenti di questa linea più delle analoghe parti di un'altra qualsivoglia di esse circonferenze: è per questa proprietà, che la circonferenza, così determinata, come ogni altra che abbia un contatto di prim'ordine colla linea data, si chiama *tangente* o *toccante* la stessa linea data.

200. Qualunque sia la circonferenza tangente di una linea in un punto, al suo centro corrispondono coordinate a, b, c, che soddisfanno l'equazione

$$x-a+(y-b)y'+(z-c)z'=0,$$

la quale si può ottenere visibilmente, cambiando in a, b, c le P, Q, R contenute nella equazione (§ 195) del piano normale la stessa linea data; e per tanto, i centri di tutte le circonferenze, che sono tangenti in un medesimo punto ad una linea qualunque, sono nel piano normale la linea stessa nel punto di contatto.

Anzi, siccome i valori delle q, r, desunti dalle equazioni della retta tangente la curva nel punto, ove è tangente la presente circonferenza, sono

$$y+(p-x)y',\ z+(p-x)z',$$

i quali sostituiti nella

$$p-a+(q-b)m+n(r-c)=0$$

la riducono alla seguente

$$x-a+m(y-b)+n(z-c)+(1+my'+nz')(p-x)=0,$$

che per la seconda e quarta delle quattro sopra esposte è soddisfatta, qualunque sia la p; così il piano di ogni circonferenza tangente di una curva passa per la retta toccante la curva medesima nello stesso punto.

Questa proprietà è significata anco dalla sola equazione quarta anzi citata; giacchè essa esprime evidentemente, che il piano rappresentato dalla equazione

$$p-x+m(q-y)+n(r-z)=0$$

è perpendicolare a quello rappresentato dalla

$$P-x+(Q-y)y'+(R-z)z'=0,$$

che è il normale la curva stessa nel punto di contatto delle circonferenze.

201. Passo ora a parlare di quella circonferenza, che ha colla curva data nel punto corrispondente all'ordinata x particolare un contatto di second'ordine. Per questa circonferenza i parametri a, b, c, d, m, n debbono soddisfare oltre le quattro equazioni usate nel para-

grafo antecedente, anco le due seguenti

$$1+y'^2+z'^2+(y-b)y''+(z-c)z''=0,\ my''+nz''=0,$$

che sono le derivate seconde esatte delle due prime, fatto il cambiamento delle $x, y, z, y', z', y'', z''$ qualsivogliono nelle particolari corrispondenti al punto di contatto. Vale a dire, per la circonferenza, che deve avere un contatto di second'ordine, i parametri debbono soddisfare le sei equazioni seguenti

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-d^2=0,\quad x-a+m(y-b)+n(z-c)=0,$$
$$x-a+(y-b)y'+(z-c)z'=0,\qquad 1+my'+nz'=0,$$
$$1+y'^2+z'^2+(y-b)y''+(z-c)z''=0,\qquad my''+nz''=0.$$

La quarta e la sesta combinate danno

$$m=\frac{z''}{z'y''-y'z''},\quad n=-\frac{y''}{z'y''-y'z''};$$

la seconda, terza e quinta danno

$$a=x-\frac{(ny'-mz')(1+y'^2+z'^2)}{(n-z')y''-(m-y')z''},$$
$$b=y+\frac{(n-z')(1+y'^2+z'^2)}{(n-z')y''-(m-y')z''},$$
$$c=z-\frac{(m-y')(1+y'^2+z'^2)}{(n-z')y''-(m-y')z''};$$

e posti per m, n i loro valori, e fatte alcune riduzioni, si ha

$$a=x-\frac{(1+y'^2+z'^2)(y'y''+z'z'')}{y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2},$$
$$b=y+\frac{(1+y'^2+z'^2)\big(y''+(z'y''-y'z'')z'\big)}{y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2},$$
$$c=z+\frac{(1+y'^2+z'^2)\big(z''-(z'y''-y'z'')y'\big)}{y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2}.$$

In ultimo sostituiti questi valori delle a, b, c nella prima delle medesime sei equazioni, dopo alcune riduzioni, si trova

$$d = -\frac{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2)}}.$$

Osservando, che $1+y'^2+z'^2=s'^2$, e però $y'y''+z'z''=s's''$, ai valori delle a, b, c, d si possono dare le forme seguenti

$$a=x-\frac{s's''}{y''^2+z''^2-s''^2}s',\quad b=y+\frac{s'y''-y's''}{y''^2+z''^2-s''^2}s',$$

$$c=z+\frac{s'z''-z's''}{y''^2+z''^2-s''^2}s',\quad d=-\frac{s'^2}{\sqrt{(y''^2+z''^2-s''^2)}}:$$

la s esprime qui l'arco della curva qualunque, cioè la stessa ϕ usata nel § 196. Dalle cose esposte risulta, che, fra le moltissime circonferenze, passanti per un medesimo punto di una data curva, ve ne sono molte, che hanno un contatto di prim'ordine; ma una sola, la quale abbia un contatto di second'ordine, questa, che è l'ultima determinata, avrà le sue parti, almeno le contigue al punto comune (§ 193), che si accosteranno alle corrispondenti della curva data più delle analoghe parti di ogni altra; e per tanto è dessa quella circonferenza, la cui uniforme inflessione od incurvatura differisce dalla incurvatura della curva nel punto di contatto meno di quella di qualunque altra circonferenza; ed è per questo, e per la facilità d'immaginarsi la uniforme incurvatura di essa, che si ritiene conosciuta la inflessione od incurvatura di una data curva in un suo punto, allorchè siasi determinato il raggio della circonferenza avente in questo punto colla curva stessa un contatto di second'ordine, quantunque tale incurvatura potrebbesi argomentare, e con maggiore approssimazione, da quella di altra curva, che avesse in tal punto colla data stessa un contatto d'ordine superiore al secondo.

Questa circonferenza chiamasi *osculatrice*, il circolo del quale essa è contorno *osculatore*, ed il raggio suo si chiama raggio di *curvatura* della curva.

La circonferenza osculatrice, essendo una delle molte, che sono tangenti la curva, sarà in un piano passante per la retta tangente la curva nel medesimo punto di contatto di essa, ed avrà il centro nel piano normale nel medesimo punto di osculazione.

202. Sostituendo nelle due equazioni

$$(p-a)^2+(q-b)^2+(r-c)^2-d^2=0,$$
$$p-a+m(q-b)+n(r-c)=0$$

in luogo delle a, b, c, d, m, n i rispettivi loro valori trovati, si avrebbero le particolari equazioni della circonferenza osculatrice. Fatte effettivamente queste sostituzioni nella seconda di tali equazioni si ottiene la

$$p-x+\frac{z''}{z'y''-y'z''}(q-y)-\frac{y''}{z'y''-y'z''}(r-z)=0,$$

la quale rappresenta una proprietà delle p, q, r coordinate di un punto qualunque della circonferenza osculatrice; e però, siccome è un solo il piano, che possa passare per una circonferenza, così la equazione del piano del circolo osculatore, cioè di quel piano nel quale esso circolo esiste, sarà

$$P-x+\frac{z''}{z'y''-y'z''}(Q-y)-\frac{y''}{z'y''-y'z''}(R-z)=0,$$

ovvero

$$(z'y''-y'z'')(P-x)+z''(Q-y)-y''(R-z)=0,$$

ove le P, Q, R esprimono qui le coordinate di un punto qualunque del piano del circolo osculatore, e sono analoghe alle p, q, r.

203. La retta che passa pel centro del circolo osculatore e pel punto di osculazione, la quale chiamasi normale ordinaria della curva, cioè la retta che passa pei punti corrispondenti alle coordinate $a, b, c; x, y, z$ riesce tangente la linea luogo dei centri dei circoli osculatori unicamente, quando la curva data sia piana.

Siccome questa retta passa per quel punto della curva luogo dei centri, al quale corrispondono le coordinate a, b, c (§ 201); così essa cadrà nella tangente della curva in questo punto medesimo, se le sue projezioni ordinarie faranno cogli assi delle coordinate angoli eguali a quelli fatti cogli stessi assi da questa medesima tangente.

Le coordinate di un punto qualunque della retta di cui si parla, cioè di quella che passa pei punti corrispondenti alle coordinate $x, y, z; a, b, c$ anzidette, si chiamino α, β, γ; e si ritengano le a, b, c per indicare quelle della curva dei centri.

Il parallelismo delle anzidette projezioni avrà luogo, se le

$$\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right), \left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right) \text{ saranno eguali alle } \left(\frac{db}{da}\right), \left(\frac{dc}{da}\right),$$

ossia se avranno luogo le due equazioni

$$\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)=\frac{b'}{a'}, \left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)=\frac{c'}{a'},$$

ove le a', b', c' esprimono le derivate prese rispetto alla x.

La medesima retta, esistendo nel piano normale della curva ed in quello del circolo osculatore, si può rappresentare colle equazioni

$$\alpha - x + y'(\beta - y) + (\gamma - z)z' = 0,\ \alpha - x + m(\beta - y) + n(\gamma - z) = 0,$$

ove m, n esprimono $\frac{z''}{z'y'' - y'z''}, -\frac{y''}{z'y'' - y'z''}$ valori trovati nel § 201, e la x una quantità costante rispetto alle coordinate α, β, γ.

La seconda di queste due equazioni dà la

$$1 + m\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right) + n\left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right) = 0,$$

che rappresenta una proprietà delle $\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right), \left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)$.

Siccome i valori delle a, b, c (§ 201) si sono desunti dalle equazioni seconda, terza, e quinta; così la curva, luogo geometrico dei centri dei circoli osculatori, si potrà ritenere rappresentata con queste medesime tre equazioni, che sono

$$x - a + (y - b)y' + (z - c)z' = 0,\ x - a + m(y - b) + n(z - c) = 0,$$
$$s'^2 + (y - b)y'' + (z - c)z'' = 0;$$

ritenuta la x quantità da eliminarsi: per semplicità supporremo le a, b, c coordinate della curva stessa funzioni della x.

La seconda di queste tre equazioni dà la

$$1 - a' + (y - b)m' + m(y' - b') + (z - c)n' + n(z' - c') = 0$$

sua derivata esatta, la quale per la quarta delle sei sopra trovate (§ 201), si riduce alla

$$-a' - mb' - nc' + (y - b)m' + (z - c)n' = 0 \text{ ossia}$$
$$-a'\left(1 + m\frac{b'}{a'} + n\frac{c'}{a'}\right) + (y - b)m' + (z - c)n' = 0.$$

Ma, affinchè la retta sia tangente la curva, debbono sussistere le equazioni

$$\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)=\frac{b'}{a'},\left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)=\frac{c'}{a'},$$

le quali riducono la $1+m\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)+n\left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)=0$ alla

$$1+m\frac{b'}{a'}+n\frac{c'}{a'}=0,$$

e questa riduce l'ultima esposta alla seguente

$$(y-b)m'+(z-c)n'=0.$$

Adunque fra le proprietà, che deve avere una curva, perchè la retta passante pel centro del circolo osculatore e pel punto di osculazione riesca tangente la linea luogo geometrico dei centri dei circoli osculatori di essa, vi è quella rappresentata dalla equazione

$$(y-b)m'+(z-c)n'=0,$$

la quale, per la sostituzione dei valori delle m', n', e di quelli delle b, c, si riduce alla seguente

$$\frac{(z'''y''-y'''z'')s'^2}{(y''^2+z''^2-s''^2)(y''z'-z''y')}=0,$$

che per essere soddisfatta richiede $z'''y''-y'''z''=0$.

Questa equazione equivale alla $\frac{z'''}{z''}=\frac{y'''}{y''}$ ossia $(\log.z'')'=(\log.y'')'$ la quale dà (§ 34) $\log.z''=\log.y''+\log.g$, g costante; e però sarà $z''=gy''$ ossia $(z')'=(gy')'$, e per conseguenza $z'=gy'+h$ ovvero $z'=(gy+hx)'$ cioè $z=gy+hx+l$: le h, l esprimono anch'esse due costanti.

L'equazione $z=gy+hx+l$ insegna, che la curva, le cui coordinate sono x, y, z, dovrà essere piana: come si è dichiarato.

Possiamo, per tanto concludere che, il luogo geometrico dei centri dei circoli osculatori di una curva a doppia curvatura, non sarà giammai una sua sviluppata.

204. Se dalle equazioni

$$q-y=(p-x)y', \quad r-z=(p-x)z',$$

dopo avervi sostituiti i valori delle y, z, y', z' formati colla x, si eliminasse la x medesima, avrebbesi una equazione tra le sole variabili p, q, r, la quale rappresenterebbe la superficie luogo geometrico di tutte le rette tangenti la curva: questa superficie è sviluppabile, cioè è distendibile in un piano senza rotture nè piegature.

Si immagini per la origine delle coordinate la retta parallela alla tangente della curva in un punto individuato, ed essa si mova senza cessare di passare per l'origine e di mantenersi parallela alle successive tangenti della curva; e continui, finchè cada nella rappresentata colle due equazioni

$$q=py', \quad r=pz',$$

che è la parallela alla tangente, di cui si è parlato qui sopra.

Egli è evidente, che le successive deviazioni di questa retta sono le stesse deviazioni delle successive tangenti della curva, e che essa ha generata una porzione di quella superficie conica, la cui equazione sarebbe la risultante della eliminazione della x dalle due $q=py'$, $r=pz'$. Suppongasi questa porzione di superficie conica distesa in un piano, e chiamisi ϕ l'angolo compreso dai suoi estremi: troviamo la derivata $\phi'(x)$, la quale occorre in varie ricerche.

Essendo ϕ l'arco circolare, che ha per raggio l'*unità* ed è compreso fra gli estremi dello sviluppo piano della anzidetta porzione di superficie conica, sarà esso eguale alla linea comune a questa medesima porzione di superficie conica ed alla sferica avente il centro nella origine delle coordinate e per raggio l'unità; per cui ammesso, che p, q, r esprimano le coordinate rettangole del termine variabile od indeterminato di questa linea, si avranno le equazioni

$$q = py', \; r = pz', \; p^2 + q^2 + r^2 - 1 = 0,$$

ed anco (§ 196)

$$\phi'(x) = \sqrt{\left(p'(x)^2 + q'(x)^2 + r'(x)^2\right)}.$$

Le prime tre di queste equazioni danno

$$p = \frac{1}{s'}, \; q = \frac{y'}{s'}, \; r = \frac{z'}{s'},$$

ove la s' esprime $\sqrt{(1 + y'^2 + z'^2)}$; e però sarà

$$p'(x) = -\frac{s''}{s'^2}, \; q'(x) = \frac{s'y'' - y's''}{s'^2}, \; r'(x) = \frac{s'z'' - z's''}{s'^2},$$

e quindi

$$\phi'(x) = \frac{1}{s'^2}\sqrt{\left(s''^2 + (y''s' - y's'')^2 + (z''s' - z's'')^2\right)},$$

ossia riducendo

$$\phi'(x) = \frac{1}{s'}\sqrt{(y''^2 + z''^2 - s''^2)}: \text{ derivata richiesta.}$$

In questo risultamento sostituendo in luogo di $\sqrt{(y''^2 + z''^2 - s''^2)}$ il suo valore $\frac{s'^2}{d}$ (§ 201), si ha $\phi'(x) = \frac{s'}{d}$ ovvero $d \cdot \phi'(x) = s'$. Così, generalizzando le derivate, che entrano in entrambi questi risultamenti, si ottiene

$$\phi' = \frac{1}{s'}\sqrt{(x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2)}, \text{ e } \phi' d = s'.$$

Similmente, essendo

$$\sqrt{(x''^2+y''^2+z''^2-s''^2)}=\frac{1}{s'}\sqrt{\left((x''^2+y''^2+z''^2)(x'^2+y'^2+z'^2)\right.}$$
$$\left.-(x'x''+y'y''+z'z'')^2\right),$$

posto $x'^2+y'^2+z'^2=2\alpha$, $x''^2+y''^2+z''^2=2\beta$, avrassi

$$\varphi'=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\left(\alpha\beta-\frac{1}{4}\alpha'^2\right)}.$$

205. Per l'origine delle coordinate sia condotta la retta perpendicolare al piano del circolo osculatore la curva in un punto individuato, ed essa roti intorno alla origine, mantenendosi perpendicolare ai piani dei successivi circoli osculatori della curva, e riesca finalmente perpendicolare a quello rappresentato dalla equazione (§ 202)

$$P-x+\frac{z''}{z'y''-y'z''}(Q-y)-\frac{y''}{z'y''-y'z''}(R-z)=0:$$

in questa posizione le sue equazioni saranno

$$P=\frac{z''y'-y''z'}{y''}R,\ Q=-\frac{z''}{y''}R,$$

ove le P, Q, R esprimono le coordinate rettangole di un punto qualunque di essa.

Egli è facile il concepire, che le successive deviazioni di questa retta sono eguali alle successive inclinazioni o deviazioni *diedre* dei piani dei circoli osculatori della curva; e che, sviluppando in un piano la porzione di superficie conica generata da essa, i lati estremi comprenderanno un angolo, il quale sarà funzione della x. Chiamiamo quest'angolo $\psi(x)$; e passiamo a trovarne la derivata, che occorre in alcune occasioni.

Per essere la ψ la lunghezza di quella linea, che è comune alla anzidetta porzione di superficie conica ed alla sferica avente il centro nella origine delle coordinate ed il raggio eguale alla *unità*, denominate p, q, r le coordinate rettangole di questa linea, sarà

$$\psi'(x) = \sqrt{\left(p'(x)^2 + q'(x)^2 + r'(x)^2\right)} \text{ ed anco}$$

$$q = -\frac{z''}{y''} r,\ p = \frac{z''y' - y''z'}{y''} r,\ p^2 + q^2 + r^2 - 1 = 0, \text{ ossia}$$

$$p = \frac{y'z'' - y''z'}{\mu},\ q = -\frac{z''}{\mu},\ r = \frac{y''}{\mu}$$

ove $\mu = \sqrt{\left(y''^2 + z''^2 + (y'z'' - y''z')^2\right)}$.

Dai valori delle p, q, r si hanno

$$p'(x) = \frac{1}{\mu}(y'z''' - y'''z') - \frac{1}{\mu^2}(y'z'' - y''z')\mu',$$

$$q'(x) = \frac{z''}{\mu^2}\mu' - \frac{z'''}{\mu},\ r'(x) = -\frac{y''}{\mu^2}\mu' - \frac{z'''}{\mu};$$

e però avrassi

$$\psi'(x)^2 = \frac{1}{\mu''}\Big\{\mu^2\left(y'''^2 + z'''^2 + (y'z''' - z'y''')^2\right) + \left(y''^2 + z''^2 + (y'z'' - y''z')^2\right)\mu'^2$$
$$- 2\mu'\mu\left(y''y''' + z''z''' + (y'z'' - y''z')(y'z''' - y'''z')\right)\Big\}.$$

In questa espressione sostituendo in luogo delle μ^2, μ'^2 i rispettivi valori, che sono

$$y''^2 + z''^2 + (y'z'' - y''z')^2,$$
$$\left(y''y''' + z''z''' + (y'z'' - y''z')(y'z''' - y'''z')\right)^2 : \left(y''^2 + z''^2 + (y'z'' - y''z')^2\right)$$

e facendo alcune riduzioni, si ha

$$\psi'(x)^2 = (1 + y'^2 + z'^2)(y''^2z'''^2 - 2y''y'''z''z''' + z''^2y'''^2) : \left(y''^2 + z''^2 + (y'z'' - y''z')^2\right);$$

e conseguentemente sarà

$$\psi'(x) = \frac{(y''z''' - y'''z'')s'}{y''^2 + z''^2 + (y'z'' - y''z')^2},$$

derivata che si voleva.

Generalizzando le derivate contenute in quest' ultima equazione (§ 63), hassi

$$\psi' = \frac{x'y''z''' + x'''y'z'' + x''y'''z' - x'z''y''' - x'''z'y'' - x''z'''y'}{(x'y'' - x''y')^2 + (x'z'' - x''z')^2 + (y'z'' - y''z')^2}\, s'.$$

Se nella prima espressione, qui esposta, per $\psi'(x)^2$ si pongano in vece delle quantità

$$y'''^2 + z'''^2 + (y'z''' - y'''z')^2,\ y''^2 + z''^2 + (y'z'' - y''z')^2,$$
$$y''y''' + z''z''' + (y'z'' - z'y'')(y'z''' - y'''z')$$

le loro equivalenti

$$(y'''^2 + z'''^2)(1 + y'^2 + z'^2) - (y'y''' + z'z''')^2,$$
$$(y''^2 + z''^2)(1 + y'^2 + z'^2) - (y'y'' + z'z'')^2,$$
$$(y''y''' + z''z''')(1 + y'^2 + z'^2) - (y'y'' + z'z'')(y'y''' + z'z'''),$$

si ha

$$\psi'(x)^2 = \frac{1}{\mu^4}\Big\{\mu^2\big((1 + y'^2 + z'^2)(y'''^2 + z'''^2) - (y'y''' + z'z''')^2\big) + \mu^2\mu'^2 - 2\mu^2\mu'^2$$

ossia

$$\psi'(x) = \frac{1}{\mu}\sqrt{\Big\{(1 + y'^2 + z'^2)(y'''^2 + z'''^2) - (y'y''' + z'z''')^2 - \mu'^2\Big\}}:$$

e generalizzando le derivate, avrassi

$$\psi' = \frac{1}{\mu}\sqrt{\Big\{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x'''^2 + y'''^2 + z'''^2) - (x'x''' + y'y''' + z'z''')^2 - \mu'^2\Big\}}$$

ove la μ qui esprime

$$\big((x'y'' - y'x'')^2 + (x'z'' - x''z')^2 + (y'z'' - z'y'')^2\big)^{\frac{1}{2}} \text{ ossia}$$
$$\big((x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Supposto

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2\alpha,\ x''^2 + y''^2 + z''^2 = 2\beta,\ x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = 2\gamma,$$

l'ultima espressione della ψ' si può scrivere in quest'altra maniera

$$\sqrt{\frac{4\alpha\gamma-(\alpha''-2\beta)^2-\left(\sqrt{(4\alpha\beta-\alpha'^2)}\gamma'\right)^2}{4\alpha\beta-\alpha'^2}};$$

giacchè, dall'essere $x'^2+y'^2+z'^2=2\alpha$, hassi

$$x'x''+y'y''+z'z''=\alpha', \text{ e però}$$

$$x''^2+y''^2+z''^2+x'x'''+y'y'''+z'z'''=\alpha'' \text{ ossia}$$

$$x'x'''+y'y'''+z'z'''=\alpha''-2\beta.$$

206. Se due curve sono tra loro parallele, cioè se le rette normali dell'una lo sono anco dell'altra, e le loro tangenti corrispondenti ai punti comuni di una stessa loro normale siano parallele, le medesime rette normali comuni saranno tutte tangenti la stessa curva.

Chiaminsi x, y, z le coordinate rettangole di una delle curve, e p, q, r le analoghe coordinate della sua normale, e t, u, v le coordinate di quel punto dell'altra curva, che è anco in questa medesima normale: così, si chiami n la distanza delle due curve.

Pel parallelismo delle due curve si hanno le equazioni

$$(t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2-n^2=0,\ u'=y't',\ v'=z't',$$

ove le derivate sono prese rispetto alla x; e per la retta normale avransi le due

$$(t-x)(q-y)-(u-y)(p-x)=0, (t-x)(r-z)-(v-z)(p-x)=0.$$

Si formino le derivate di queste ultime equazioni rispetto alla x, la quale vi è nei modi visibili ed anco nelle y, z, s, t, v; e sostituiscansi $y't', z't'$ in vece delle

u', v'; ed avransi le due seguenti

$$(t'-1)\left(q-y-(p-x)y'\right)+u-y-(t-x)y'=0,$$

$$(t'-1)\left(r-z-(p-x)z'\right)+v-z-(t-x)z'=0.$$

Combinando la prima di queste equazioni alla stessa prima della normale si hanno

$$p=x-\frac{t-x}{t'-1},\ q=y-\frac{u-y}{t'-1};$$

e combinando la seconda di queste alla seconda della medesima normale, si ha

$$p=x-\frac{t-x}{t'-1},\ \text{ed}\ r=z-\frac{v-z}{t'-1}.$$

La curva, le cui coordinate corrispondenti sono le p, q, r, qui trovate, è quella alla quale sono tangenti le normali comuni alle due parallele.

Di fatto, da questi valori si desumono

$$p'=\frac{t-x}{(t'-1)^2}t'',\ q'=\frac{u-y}{(t'-1)^2}t'',\ r'=\frac{v-z}{(t'-1)^2}t'';$$

$$\text{e però}\ \frac{q'}{p'}=\frac{u-y}{t-x},\ \frac{r'}{p'}=\frac{v-z}{t-x}.$$

Ma dalle equazioni della normale si hanno

$$\frac{u-y}{t-x}=\frac{q-y}{p-x},\ \frac{v-z}{t-x}=\frac{r-z}{p-x};\ \text{adunque sarà}$$

$$\frac{q'}{p'}\ \text{ossia}\ \left(\frac{dq}{dp}\right)=\frac{q-y}{p-x},\ \text{ed}\ \frac{r'}{p'}\ \text{ovvero}\ \left(\frac{dr}{dp}\right)=\frac{r-z}{p-x},$$

le quali rappresentano appunto la proprietà enunciata.

I medesimi valori delle p', q', r' danno anco

$$\sqrt{(p'^2+q'^2+r'^2)}=\frac{t''}{(t'-1)^2}\sqrt{\left((t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2\right)}$$

$$\text{ossia ad}\ \frac{nt''}{(t'-1)^2};$$

d'altronde pei valori delle p, q, r hassi

$$\sqrt{(p-x)^2+(q-y)^2+(r-z)^2}=\frac{n}{t'-1},$$

quantità la cui derivata è

$$\frac{n\,t''}{(t'-1)^2};$$

e però, la curva, alla quale sono tangenti le normali comuni alle due curve parallele, è anco una sviluppata di ciascuna di esse.

Ora, chiaminsi x, y, z le coordinate della comune sviluppante di due curve parallele, e p, q, r quelle di una di queste, ed S l'arco di essa, e λ la lunghezza della retta avēnte i termini nei punti corrispondenti a queste medesime coordinate; così si chiami T l'arco dell'altra parallela, il qual corrisponda all'S della prima: evidentemente si hanno

$$p=x-\frac{\lambda}{\lambda'},\ q=y-\frac{\lambda y'}{\lambda'},\ \text{ed}\ r=z-\frac{\lambda z'}{\lambda'};$$

giacchè per l'esposto dianzi è $\lambda'=\sqrt{1+y'^2+z'^2}$; e però sarà

$$p'=\lambda\frac{\lambda''}{\lambda'^2},\ q'=-\lambda\frac{\lambda'y''-y'\lambda''}{\lambda'^2},\ r'=-\lambda\frac{\lambda'z''-z'\lambda''}{\lambda'^2},$$

valori che danno

$$\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}$$

ossia la derivata

$$S'(x)=\frac{\lambda}{\lambda'}\sqrt{y''^2+z''^2-\lambda''^2}.$$

Ma pel § 204 $\frac{1}{\lambda'}\sqrt{y''^2+z''^2-\lambda''^2}$ è eguale alla $\phi'(x)$ là determinata; adunque avrassi $S'(x)=\lambda\phi'(x)$, ed in generale $S'=\lambda\,\phi'$.

Similmente trovasi $T'=(\lambda+n)\phi'$ ossia $T'=S'+n\phi'$, ovvero

$$T'=S'+n\frac{S'}{\lambda};\text{ e per tanto sarà }\left(\frac{dT}{dS}\right)=1+\frac{n}{\lambda}:$$

ove si può riflettere anticipatamente, che la λ è ciò, che dicesi raggio di curvatura *sferica* della curva di cui S esprime l'arco.

207. Si immagini una curva qualunque e fissata la estremità di un filo ad un suo punto qualsivoglia, ed una parte di esso adagiata alla curva e la rimanente solamente tesa: questa parte sarà nella retta tangente la curva, nel punto ove si stacca dalla curva stessa. Facendo movere l'altra estremità di questo filo, colla precauzione che la sua parte staccata rimanga tesa, e la rimanente adagiata alla curva medesima, essa descrive una nuova curva, che è sviluppante od evolvente della prima.

Egli è evidente, che sono infinite le sviluppanti di una stessa curva: quelle rette, che sono tangenti a questa medesima curva, sono anco normali delle sue sviluppanti generate similmente, cioè generate dai differenti punti del filo suddetto; anzi queste sviluppanti sono tra loro parallele.

Chiaminsi x, y, z le coordinate rettangole di quel punto della curva immaginata nel quale il filo si stacca dalla curva medesima, a la lunghezza intera del filo, ed s la porzione dello stesso avvolta alla curva; e sarà $a-s$ quella parte distesa in linea retta. Così, si chiamino p, q, r le coordinate del punto della sviluppante corrispondenti alle x, y, z della curva immaginata.

Una leggera riflessione dà

$$p=x+\frac{a-s}{s'},\quad q=y+(a-s)\frac{y'}{s'},\quad r=z+(a-s)\frac{z'}{s'};$$

e però sarà

$$p' = -(a-s)\frac{s''}{s'^2},\ q' = (a-s)\frac{s'y''-y's''}{s'^2},\ r' = (a-s)\frac{z''s'-s''z'}{s'^2}.$$

Questi valori delle p', q', r' sostituiti nel trinomio $1+y'\left(\frac{dq}{dp}\right)+z'\left(\frac{dr}{dp}\right)$, che equivale all' $1+y'\frac{q'}{p'}+z'\frac{r'}{p'}$, la riducono

$$\frac{1}{s''}\left(s'^2 s'' - s''(1+y'^2+z'^2)\right),$$

che è *zero*; e però la tangente della curva avente per coordinate x, y, z sarà perpendicolare a quella dell'altra; giacchè tale proprietà richiede unicamente soddisfatta la equazione

$$1+y'\left(\frac{dq}{dp}\right)+z'\left(\frac{dr}{dp}\right)=0.$$

Questa proprietà avendo luogo e qualunque sia a, e qualunque sia il punto della prima curva, ove si è supposto fissata l'una estremità del filo, risulta, che ha luogo la prima delle due proprietà sopra enunciate.

I medesimi valori delle p', q', r' esposti danno anco

$$\frac{q'}{p'}\ \text{ossia}\ \left(\frac{dq}{dp}\right) = \frac{y's''-y''s'}{s''},$$

$$\text{ed}\ \frac{r'}{p'}\ \text{ovvero}\ \left(\frac{dr}{dp}\right) = \frac{z's''-z''s'}{s''};$$

e però le tangenti delle sviluppanti saranno anco tra loro parallele: proprietà che è la seconda delle medesime due sopra enunciate.

Concludiamo per tanto che, le infinite sviluppanti di una stessa curva, sono tra loro parallele.

Sia ora data la curva, le cui coordinate sono le p, q, r; e sia propriamente quella rappresentata colle equazioni

$$q = \varphi(p),\ r = \psi(p).$$

Le coordinate x, y, z di una sua sviluppata od evoluta soddisferanno le due equazioni seguenti

$$y+(a-s)\frac{y'}{s'}-\phi\left(x+(a-s)\frac{1}{s'}\right)=0,$$

$$z+(a-s)\frac{z'}{s'}-\psi\left(x+(a-s)\frac{1}{s'}\right)=0.$$

Infinite sono le funzioni della x valori delle y, z soddisfacenti queste equazioni alle derivate; e però infinite saranno le sviluppate di una curva: esse sono tutte in una stessa superficie sviluppabile cioè in una superficie distendibile in un piano senza piegature nè rotture.

Si chiamino t, u, v le coordinate rettangole del piano normale della curva rappresentata colle equazioni $q=\phi(p)$, $r=\psi(p)$; e la sua equazione sarà

$$p-t+(q-u)\left(\frac{dq}{dp}\right)+(r-v)\left(\frac{dr}{dp}\right)=0.$$

Si costituisca la equazione

$$1+\left(\frac{dq}{dp}\right)^2+\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+(q-u)\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)+(r-v)\left(\frac{d^2r}{dp^2}\right)=0$$

il cui primo membro è la derivata presa rispetto alla p del primo membro di quella del piano anzidetto.

Supposto che, le t, u, v contenute in queste due equazioni, siano le stesse, e che la p sia quantità da eliminarsi, esse rappresentano la superficie sviluppabile, di cui si è parlato sopra.

Di fatto, le due equazioni

$$y+(a-s)\frac{y'}{s'}-\phi\left(x+\frac{a-s}{s'}\right)=0,$$

$$z+(a-s)\frac{z'}{s'}-\psi\left(x+\frac{a-s}{s'}\right)=0,$$

ossia le

$$q-\phi(p)=0,\ r-\psi(p)=0$$

ammesso che le p, q, r esprimano

$$x+\frac{a-s}{s'},\ y+(a-s)\frac{y'}{s'},\ z+(a-s)\frac{z'}{s'},$$

danno le due

$$(a-s)\frac{y''s'-y's''}{s'^2}+(a-s)\varphi'(p)\frac{s''}{s'^2}=0,$$

$$(a-s)\frac{z''s'-z's''}{s'^2}+(a-s)\psi'(p)\frac{s''}{s'^2}=0,$$

e però $\varphi'(p)$ ossia $\left(\frac{dq}{dp}\right)=\frac{1}{s''}(y's''-y''s')$, e

$\psi'(p)$ ovvero $\left(\frac{dr}{dp}\right)=\frac{1}{s''}(s''z'-z''s')$;

e queste similmente danno

$$\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)=\frac{s'^3}{s''^2}(s''y'''-s'''y''):(a-s),\ \text{e}$$

$$\left(\frac{d^2r}{dp^2}\right)=\frac{s'^3}{s''^2}(s''z'''-s'''z''):(a-s).$$

Sostituendo nelle due equazioni rappresentanti la superficie sviluppabile anzidetta in luogo delle

$$p-t,\ q-u,\ r-v,\ \left(\frac{dq}{dp}\right),\ \left(\frac{dr}{dp}\right),\ \left(\frac{d^2q}{dp^2}\right),\ \left(\frac{d^2r}{dp^2}\right)$$

ordinatamente

$$p-x=(a-s)\frac{1}{s'},\ q-y=(a-s)\frac{y'}{s'},\ r-z=(a-s)\frac{z'}{s'},$$

$$\frac{s''y'-y''s'}{s''},\ \frac{1}{s''}(z's''-z''s'),\ \frac{s'^3(s''y'''-s'''y''}{(a-s)s''^2},\ \frac{(s''z'''-s'''z'')s'^3}{(a-s)s''^2}$$

rimangono esse soddisfatte. Concludasi qui pure che ha luogo ciò che si è dichiarato; cioè che le sviluppate di una curva qualunque sono tutte in una stessa superficie sviluppabile e propriamente in quella, alla quale sono tangenti i piani normali della curva medesima.

Se dal punto corrispondente alle coordinate p, q, r si tirassero due fili tangenti la superficie sviluppabile anzidetta, e si avvolgessero a questa superficie semplicemente col tenderli, si disporrebbero secondo due sviluppate della curva rappresentata colle equazioni $q=\phi(p)$, $r=\psi(p)$; per cui fissando le altre estremità loro in due punti della medesima superficie, e poscia movendo insieme unite in un sol punto le prime due, questo descriverebbe o percorrerebbe la medesima curva rappresentata dalle equazioni $q=\phi(p)$, $r=\psi(p)$: queste proprietà si dimostrano con facilità mediante le cose esposte, e segnatamente col combinarle con alcune considerazioni meccaniche.

208. Si chiamino x, y, z le coordinate di qualunque specie di una linea qualsivoglia, e p, q, r le analoghe di un'altra; e siano $y=y(x)$, $z=z(x)$, $q=q(p)$, $r=r(p)$ le equazioni di esse. Così siano X, Y, Z e P, Q, R altre coordinate qualsivogliono delle medesime due linee; ed

$$Y=Y(X),\ Z=Z(X) \text{ e } Q=Q(P),\ R=R(P)$$

le equazioni loro tra questo altro sistema di coordinate.

Se i valori delle quantità $y(x)$, $z(x)$, $y'(x)$, $z'(x)$, $y''(x)$, - - - corrispondenti ad un particolar valore della x saranno ordinatamente eguali a quelle delle $q(p)$, $r(p)$, $q'(p)$, $r'(p)$, $q''(p)$, - - - corrispondenti alla p eguale allo stesso valore particolare della x; anco i valori delle

$$Y(X), Z(X), Y'(X), Z'(X), Y''(X), ---$$

e quelli delle

$$Q(P), R(P), Q'(P), R'(P), Q''(P), ---$$

per le X, P corrispondenti al medesimo della x, cioè corrispondenti allo stesso punto cui corrisponde questa, saranno ordinatamente eguali fra loro.

Essendo le coordinate p, q, r affatto analoghe alle x, y, z, e le P, Q, R alle X, Y, Z, supposto

$$X = \phi(x, y, z),\ Y = \psi(x, y, z),\ Z = \Delta(x, y, z),$$

si avrà anco

$$P = \phi(p, q, r), Q = \psi(p, q, r), \text{ed } R = \Delta(p, q, r)$$

cioè le P, Q, R funzioni delle p, q, r simili alle funzioni delle x, y, z valori delle X, Y, Z; e però le derivate

$$X'(x), Y'(x), Z'(x), X''(x), Y''(x), ---$$

saranno formate colle $x, y, z, y'(x), z'(x), y''(x), ---$ come le

$$P'(p), Q'(p), R'(p), P''(p), Q''(p), ---$$

lo saranno colle $p, q, r, q'(p), r'(p), q''(p); ---$.

Quindi i valori delle

$$X, Y, Z, X'(x), Y'(x), Z'(x), X''(x), Y''(x), ---$$

e quelli delle

$$P, Q, R, P'(p), Q'(p), R'(p), P''(p), Q''(p), ---$$

corrispondenti al medesimo delle x, p saranno ordinatamente tra loro eguali.

209. Essendo le

$$X, Y, Z, X'(x), Y'(x), Z'(x), X''(x), Y''(x), ---$$

rispettivamente eguali alle

$$P, Q, R, P'(p), Q'(p), R'(p), P''(p), Q''(p), ---$$

oltre di essere

$$p = x, y(x) = q(x), z(x) = r(x),$$

ove la x è la particolare suddetta, pel § 63 sarà anco

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)=\left(\frac{dQ}{dP}\right),\left(\frac{dZ}{dX}\right)=\left(\frac{dR}{dP}\right),\left(\frac{d^2Y}{dX^2}\right)=\left(\frac{d^2Q}{dP^2}\right),---;$$

vale a dire, se saranno eguali tra loro i valori dei termini corrispondenti delle due serie

$$x, y, z, y'(x), z'(x). y''(x), z''(x), ---$$

$$p, q, r, q'(p), r'(p), q''(p), r''(p), ---$$

tali pure saranno i termini corrispondenti delle due seguenti

$$X, Y, Z, Y'(X), Z'(X), Y''(X), Z''(X), ---$$

$$P, Q, R, Q'(P), R'(P), Q''(P), R''(P), ---.$$

Dimodochè, se tali eguaglianze avranno luogo per coordinate rettangole, esse avranno luogo altresì per un sistema qualsivoglia di coordinate; e reciprocamente, se esse avranno luogo per un dato sistema di coordinate, qualunque esso sia, vi saranno anco per coordinate rettangole: proprietà entrambe sommamente interessanti, e che sussistono anco per le superficie; siccome è facile il persuadèrsi.

LEZIONE IV.

De' contatti delle superficie con una linea.

210. In questa lezione parleremo dei differenti gradi di avvicinamento tra le superficie ed una linea data.

La linea sia la rappresentata colle equazioni $y=f(x)$, $z=\phi(x)$, e la superficie quella rappresentata dalla $r=F(p,q)$: esprima Δ la minima distanza tra un punto qualunque della linea e la superficie; e sarà essa la retta, che ha un termine nel punto corrispondente alle coordinate

$x, f(x), \phi(x)$ e l'altro in quel punto della superficie, al quale corrispondono le coordinate p, q, r date dalle tre equazioni (§ 159)

$$r = F(p,q),\ p - x + (F - \phi)F'(p) = 0,\ q - y + (F - \phi)F'(q) = 0,$$

anzi avrassi

$$\Delta = (F - \phi)\sqrt{1 + F'(p)^2 + F'(q)^2}.$$

I valori delle p, q cavati dalle ultime equazioni, i quali sono funzioni della x qualunque, si suppongano sostituiti tanto nella espressione

$F(p, q) - \phi$, quanto nel radicale $\sqrt{1 + F'(p)^2 + F'(q)^2}$;

e siano P, Q le due risultanti funzioni della x qualunque; e sarà $\Delta = P \cdot Q$.

Nella Δ si cambi la x qualunque nella x particolare *più* l'indeterminata ω, e sviluppisi la quantità risultante; ed avrassi

$$\Delta(x + \omega) = \Delta(x) + \omega\Delta'(x) + \frac{\omega^2}{2}\Delta''(x) + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3}\Delta'''(x) + \text{ecc.}$$

Se sarà $\Delta(x) = 0$, si avrà

$$\Delta(x + \omega) = \omega\Delta'(x) + \frac{\omega^2}{2}\Delta''(x) + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3}\Delta'''(x) + \text{ecc.};$$

e la superficie avrà comune colla linea il punto corrispondente a quella ordinata della linea stessa, che è la x particolare: se sarà $\Delta(x) = 0$ ed anco $\Delta'(x) = 0$, avrassi

$$\Delta(x + \omega) = \frac{\omega^2}{2}\Delta''(x) + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3}\Delta'''(x) + \text{ecc.};$$

e si dirà, che la superficie avrà colla linea un *contatto* di primo ordine: se oltre di essere $\Delta(x) = 0$, $\Delta'(x) = 0$, sarà anco $\Delta''(x) = 0$, per cui

$$\Delta(x + \omega) = \frac{\omega^2}{2 \cdot 3}\Delta'''(x) + \text{ecc.},$$

si dirà, che la superficie avrà un *contatto* del second'ordine: in generale, se la superficie sarà tale, che abbiansi tutte le equazioni

$$\Delta(x)=0,\ \Delta'(x)=0,\ \Delta''(x)=0,\ ---\ \Delta^{(m)}(x)=0, \text{ e però}$$

$$\Delta(x+\omega)=\frac{\omega^{m+1}}{2\cdot3---(m+1)}\Delta^{(m+1)}(x)+\frac{\omega^{m+2}}{2\cdot3---(m+2)}\Delta^{(m+2)}(x)+\text{ecc.},$$

si dirà, che la superficie avrà un contatto dell'ordine *m esimo* colla linea, nel punto a cui corrisponde l'ordinata x particolare.

Dal qui esposto evidentemente risulta, che, se due superficie passeranno per lo stesso punto di una linea, e la prima abbia colla linea un contatto di un certo ordine, e la seconda abbia il solo punto comune od un contatto di un ordine minore del contatto della prima, la linea avrà almeno le sue parti circostanti al punto in comune colle superficie prossime più alla prima (§ 128) che alla seconda.

211. Passiamo a considerare le equazioni

$$\Delta(x)=0,\ \Delta'(x)=0,\ \Delta''(x)=0,\ ---\ \Delta^{(m)}(x)=0,$$

onde disporre le medesime da potersene valere con facilità nelle applicazioni.

Essendo $\Delta=P\cdot Q$, si hanno le

$$\begin{aligned}
\Delta' &= P'\cdot Q+P\cdot Q',\\
\Delta'' &= P''\cdot Q+2P'Q'+PQ'',\\
\Delta''' &= P'''\cdot Q+3P''Q'+3P'Q''+PQ''',\\
&-------------------;
\end{aligned}$$

e però la equazione $\Delta(x)=0$ equivarrà alla $P(x)=0$, perchè $Q(x)$ non può annullarsi: le due $\Delta(x)=0$, $\Delta'(x)=0$ equivarranno alle due $P(x)=0$, $P'(x)=0$: le tre

$\Delta(x)=0$, $\Delta'(x)=0$, $\Delta''(x)=0$ alle tre $P(x)=0$, $P'(x)=0$, $P''(x)=0$: e così delle altre.

Reciprocamente le equazioni $P(x)=0$; $P(x)=0$, $P'(x)=0$; $P(x)=0$, $P'(x)=0$, $P''(x)=0$; - - - sono equivalenti ordinatamente alle $\Delta(x)=0$; $\Delta(x)=0$, $\Delta'(x)=0$; $\Delta(x)=0$, $\Delta'(x)=0$, $\Delta''(x)=0$, - - -.

Siccome $P(x)$ è il valore della $F(p,q)-\phi(x)$ corrispondente alla x particolare ossia al punto in comune tra la superficie e la linea, pel quale si ha $p=x$ particolare e $q=f(x)$; così si avrà $P(x)=F\big(x,f(x)\big)-\phi(x)$; e però la equazione $P(x)=0$ sarà

$$F\big(x,f(x)\big)-\phi(x)=0.$$

Essendo $P=F(p,q)-\phi(x)$, ove le p, q siano desunte dalle equazioni

$$p-x+\big(F(p,q)-\phi\big)F'(p)=0,$$
$$q-y+\big(F(p,q)-\phi\big)F'(q)=0,$$ ossia dalle
$$p-x+P\cdot F'(p)=0,\ q-y+F'(q)\cdot P=0,$$

la P' sarà $\big(F(p,q)-\phi\big)'$ ovvero $F'(p)p'+F'(q)q'-\phi'$, purchè le p, q siano desunte dalle due anzi esposte equazioni, e le p', q' dalle loro derivate, le quali sono

$$p'-1+P'\cdot F'(p)+P\cdot\big(F'(p)\big)'=0,$$
$$q'-y'+P'\cdot F'(q)+\big(F'(q)\big)'\cdot P'=0;$$

ma per la x particolare si ha $P(x)=0$, $P'(x)=0$, per cui le quattro equazioni qui esposte danno, per la stessa x particolare,

$$p=x,\ q=y=f(x),\ p'(x)=1,\ q'(x)=y'=f'(x);$$

adunque $P'(x)$ sarà eguale a ciò che avrassi, ponendo nella $\big(F(p,\ q) - \phi\big)'$ in vece delle p, q, p', q' ordinatamente le x, $f(x)$, 1, $f'(x)$, cioè ad $F'(x) + F'(f)f'(x) - \phi'(x)$, che è il valore dello sviluppo della derivata $\big(F\big(x, f(x)\big) - \phi(x)\big)'$ corrispondente alla stessa x particolare; e per tanto le due equazioni

$$P(x) = 0,\ P'(x) = 0,$$

saranno in sostanza le due seguenti

$$F\big(x, f(x)\big) - \phi(x) = 0,\ \Big(F\big(x, f(x)\big) - \phi(x)\Big)' = 0.$$

Similmente, se hanno luogo le tre equazioni $P(x)=0$, $P'(x)=0$, $P''(x)=0$, cioè se oltre le prime due si avesse anco la $P''(x)=0$, avrebbesi oltre le $p=x$, $q=f(x)$, $p'(x)=1$, $q'=f'(x)$ anco le $p''(x)=0$, $q''(x)=f''(x)$.

Di fatto, le derivate seconde esatte delle

$$p - x + PF'(p) = 0,\ q - y + PF'(q) = 0,$$

che sono

$$p'' + P''\cdot F'(p) + 2P'\cdot\big(F'(p)\big)' + P\big(F'(p)\big)'' = 0,$$

$$q'' - y'' + P''F'(q) + 2P'\cdot\big(F'(q)\big)' + P\big(F'(q)\big)'' = 0,$$

per la x particolare danno le $p''=0$, $q''=f''(x)$. E per tanto, $P''(x)$ sarà eguale a ciò che si avrà, cambiando nella $\big(F(p,q) - \phi\big)''$ le p, q, p', q', p'', q'' ordinatamente nelle $x, f(x), 1, f'(x), 0, f''(x)$, risultamento che si può ritenere il valore della $\Big(F\big(x, f(x)\big) - \phi(x)\Big)''$ corrispondente alla x particolare; e conseguentemente le tre equazioni $P(x)=0$, $P'(x)=0$, $P''(x)=0$, saranno in sostanza le tre seguenti

$$F\big(x, f(x)\big) - \phi(x) = 0,$$

$$\Big(F\big(x, f(x)\big) - \phi(x)\Big)' = 0,\ \Big(F\big(x, f(x)\big) - \phi(x)\Big)'' = 0.$$

Dal qui esposto emergono le conseguenze: affinchè la superficie abbia il punto comune colla linea, dev'essere il valore dell'r corrispondente al punto stesso cioè l'$F\big(x, f(x)\big)$ eguale a quello della z, che è $\phi(x)$: affinchè abbia un contatto del primo ordine, dev'essere anco il valore della $\Big(F\big(x, f(x)\big)\Big)'$ corrispondente al punto stesso eguale a quello della z' cioè a $\phi'(x)$: affinchè abbia un contatto del second'ordine è d'uopo in oltre, che sia quel valore della $\Big(F\big(x, f(x)\big)\Big)''$, che corrisponde al medesimo punto comune, eguale a quello della z'', che è $\phi''(x)$: altrettanto dicasi pei contatti degli ordini superiori.

E conseguentemente, se la superficie rappresentata colla equazione $F(p, q, r) = 0$ avesse colla linea rappresentata colle $y = f(x)$, $z = \phi(x)$ un punto comune, dovrebb'essere soddisfatta la equazione

$$F(x, y, z) = 0,$$

ove le x, y, z coordinate della linea, siano le corrispondenti al punto comune: se essa avesse un contatto di prim'ordine, dovrebbero essere soddisfatte le due equazioni

$$F(x, y, z) = 0, \quad \big(F(x, y, z)\big)' = 0,$$

dove le x, y, z contenute in esse, siano le $f(x)$, $\phi(x)$, e dopo la derivazione la x sia la particolare corrispondente al punto comune: ed in generale, se la superficie avesse colla linea un contatto dell'ordine *m esimo*, dovrebbero essere soddisfatte tutte le equazioni seguenti

$$F(x, y, z) = 0,\ F(x, y, z)' = 0,\ F(x, y, z)'' = 0, \cdots F(x, y, z)^{(m)} = 0,$$

ove le y, z esprimono le $f(x)$, $\phi(x)$, e la x, a derivazioni eseguite, sia limitata alla particolare corrispondente al punto comune.

Quindi una superficie in generale, potrà avere con una linea qualunque in qualsivoglia suo punto un contatto degli ordini, *primo, secondo, terzo,* ---, quando essa appartenga ad una famiglia, nella equazione della quale vi siano almeno *due, tre, quattro* --- costanti disponibili; giacchè si potranno, generalmente, determinare in modo da soddisfare le anzidette equazioni necessarie per tali contatti. Dimodochè, vi sarà una superficie piana, che avrà un contatto di secondo ordine, una sfera che avrà un contatto di terzo ordine, ---.

Il metodo, qui sopra usato, per istabilire le proprietà dei differenti contatti tra le superficie ed una linea si può usare anco per istabilire proprietà analoghe pei contatti tra le linee, e tra le superficie.

212. Troviamo l'equazione di quel piano, che ha con una curva qualunque un contatto di second'ordine.

Essendo $r+Ap+Bq+C=0$ la equazione della famiglia delle superficie alla quale appartiene la qui richiesta, i parametri A, B, C dovranno essere quelli, che soddisfanno le tre equazioni seguenti

$$z+Ax+By+C=0,\ z'+A+By'=0,\ z''+By''=0,$$

le quali danno

$$B=-\frac{z''}{y''},\ A=\frac{z''y'-z'y''}{y''},\ \text{e}\ C=x\frac{z'y''-z''y'}{y''}+y\frac{z''}{y''}-z;$$

e però l'equazione del piano avente il contatto di second'ordine sarà

$$r-z+\frac{y'z''-y''z'}{y''}(p-x)-\frac{z''}{y''}(q-y)=0.$$

Questo piano, che, fra i moltissimi passanti per lo stesso punto della curva, è quello al quale le parti della curva, almeno le prossime al punto comune, si accostano più che a qualunque altro, si chiama *piano osculatore* della curva stessa; ed è visibilmente quello, nel quale esiste il circolo osculatore (§ 202) la curva nel punto medesimo di sua osculazione.

213. Per secondo esempio, troviamo la equazione di quella sfera, che ha colla curva un contatto di terzo ordine.

Ritengasi per equazione della famiglia delle sfere la

$$(p-A)^2+(q-B)^2+(r-C)^2-D^2=0,$$

ove i tre parametri A, B, C esprimono le coordinate rettangole del centro, e D il raggio.

Per la teorica esposta, dovranno essere soddisfatte le quattro equazioni seguenti

$$(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2-D^2=0,$$
$$x-A+(y-B)y'+(z-C)z'=0,$$
$$s'^2+(y-B)y''+(z-C)z''=0,$$
$$3s's''+(y-B)y'''+(z-C)z'''=0,$$

dove l's esprime quell'arco della curva, il quale corrisponde alla x particolare.

Le ultime due di queste quattro equazioni danno

$$C=z+s'(s'y'''-3s''y''):(z''y'''-z'''y''),$$
$$B=y+s'(s'z'''-3s''z''):(y''z'''-y'''z''),$$

e la seconda

$$A=x+s'\big((z'y'''-z'''y')s'+3(y'z''-y''z')s''\big):(y''z'''-y'''z''),$$

e la prima

$$D^2=s'^2\big((1+z'^2)(s'y'''-3s''y'')^2+(1+y'^2)(s'z'''-3s''z'')^2$$
$$-2(s'y'''-3s''y'')(s'z'''-3s''z'')z'y'\big):(y''z'''-y'''z'')^2,$$

mediante i quali valori delle A, B, C, D rimane individuata la equazione

$$(p-A)^2+(q-B)^2+(r-C)^2-D^2=0,$$

e conseguentemente la sfera con essa rappresentata.

La sfera, qui determinata, chiamerassi *sfera osculatrice* della curva, ed essa è, fra le moltissime che passano per uno stesso punto della curva, quella alla quale la curva medesima ha almeno le sue parti prossime al punto comune, che vi si accostano più che a qualunque altra di esse sfere.

La equazione

$$x-A+(y-B)y'+(z-C)z'=0,$$

che è la seconda delle quattro dianzi soddisfatte, insegna, che i centri delle sfere aventi un contatto di primo ordine colla curva, sono nel piano normale della curva stessa nel punto di contatto: essa poi combinata colla

$$s'^2+(y-B)y''+(z-C)z''=0$$

manifesta, che i centri di quelle sfere, che hanno un contatto di second'ordine, sono nella retta rappresentata colle due equazioni

$$x-A+(y-B)y'+(z-C)z'=0,$$
$$s'^2+(y-B)y''+(z-C)z''=0,$$

dove A, B, C esprimono le coordinate di essa retta.

Queste medesime due equazioni ovvero le loro equivalenti

$$By''+Cz''=s'^2+yy''+zz'',$$
$$Ay''+(z'y''-z''y')C=xy''+z(z'y''-y'z'')-y's'^2$$

significano evidentemente, che la stessa retta passa pel centro del circolo osculatore la curva nel punto di contatto delle sfere, e che è perpendicolare al piano di questo circolo medesimo; per cui il raggio di curvatura della linea sarà quello della minima sfera fra le molte aventi un contatto di second'ordine; e la sua periferia ossia la circonferenza osculatrice di una curva sarà comune a tutte le sfere aventi un contatto di second'ordine colla curva medesima, ove la circonferenza è osculatrice.

In ultimo fo osservare, che la retta, nella quale vi sono i centri delle sfere aventi un contatto di secondo ordine nello stesso punto di una curva data, è tangente quell'altra curva, nella quale vi sono i centri delle sfere osculatrici della data, come si può dimostrare facilmente mediante la quarta delle suddette equazioni soddisfatte; e che si può trasformare facilmente la espressione trovata per D^2 nella equivalente formata colle quantità α, β, γ, e che tra D^2 e le d, $\psi'(x)$ usate nei §§ 201, 205, ha luogo la equazione

$$D^2 = d^2 + \frac{d'(x)^2}{\psi'(x)^2}.$$

LEZIONE VII.

Dei contatti tra le superficie;
e delle loro linee di curvatura.

214. Si immaginino due superficie riferite ai medesimi tre assi: si chiamino x, y, z le coordinate di un punto qualunque dell'una, e p, q, r quelle di un punto qualunque dell'altra; e siano $z = \phi(x, y)$, $r = f(p, q)$ le loro equazioni.

Queste due superficie abbiano un punto comune; e chiaminsi $x, y, z = \phi(x, y)$ particolari le coordinate di esso.

Se le due superficie saranno tali, che i valori delle derivate $\left(\frac{df}{dp}\right)$, $\left(\frac{df}{dq}\right)$ corrispondenti al punto comune siano eguali a quelli delle $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\phi}{dy}\right)$ corrispondenti allo stesso punto in comune, si dirà, che esse superficie avranno un *contatto di primo ordine*: se poi anco i valori delle $\left(\frac{d^2f}{dp^2}\right)$, $\left(\frac{d^2f}{dpdq}\right)$, $\left(\frac{d^2f}{dq^2}\right)$ corrispondenti al medesimo punto in comune, risulteranno eguali ordinatamente a quelli delle $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\phi}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{\phi d^2}{dy^2}\right)$ corrispondenti alle x, y particolari ossia allo stesso punto comune, dirassi, che le due superficie avranno in tal punto un *contatto del second' ordine*: in generale, se le due superficie saranno tali che pel punto in comune, i valori delle derivate parziali di $f(p,q)$ prese rispetto alle p, q siano eguali ordinatamente ai valori delle derivate analoghe di $\phi(x,y)$ prese per rispetto alle x,y, e che ciò abbia luogo sino a tutte le derivate parziali dell' ordine *m esimo* inclusive, si dirà, che esse superficie avranno nel punto in comune un *contatto dell' ordine m esimo.*

Se l' equazione della seconda superficie, in vece di avere la forma $r=f(p,q)$, avesse la $F(p,q,r)=0$, le proprietà o condizioni per cui si dice, che essa ha coll' altra il punto comune, un contatto di prim' ordine, un contatto di second' ordine, --- si potranno esprimere in quest' altra maniera; come si farà effettivamente. Pel punto comune dovrà essere identica l' equazione $F(x,y,z)=0$, che si ha, cambiando nella $F(p,q,r)=0$ le p, q, r nelle x, y, z particolari: per un contatto di primo ordine dovranno di più essere identiche le due

$$F'(x)+F'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0,\ F'(y)+F'(z)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

che si ottengono, cambiando nelle equazioni

$$F'(p)+F'(r)\left(\frac{dr}{dp}\right)=0,\ F'(q)+F'(r)\left(\frac{dr}{dq}\right)=0$$

le $p, q, r, \left(\frac{dr}{dp}\right)$ ossia $f'(p), \left(\frac{dr}{dq}\right)$ ossia $f'(q)$ ordinatamente nelle $x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right)=\phi'(x), \left(\frac{dz}{dy}\right)=\phi'(y)$ corrispondenti allo stesso punto comune: in generale, se la superficie rappresentata colla equazione

$$F(p, q, r)=0,$$

avrà colla prima un contatto dell'ordine *m esimo*, saranno identiche la $F(x, y, z)=0$ e tutte le sue equazioni derivate parziali sino a quelle dell'ordine *m esimo*; purchè si intendano in esse colle x, y, z e colle derivate parziali della z quelle corrispondenti al punto comune ossia alle $x, y, z=\phi(x, y)$ particolari.

Da ciò risulta una regola per conoscere, se una data superficie abbia con un'altra un contatto e di qual ordine esso sia; ed anco, che vi sarà una superficie, appartenente ad una individuata famiglia, la quale potrà avere con una data un contatto di un certo ordine, purchè nella equazione della famiglia vi siano almeno tanti parametri disponibili, quante sono le equazioni, che debbono essere identiche pel contatto medesimo. Dimodochè, una superficie appartenente alla famiglia rappresentata colla equazione $F(p, q, r)=0$ potrà avere con una data un contatto di prim'ordine, se in questa equazione vi saranno almeno *tre* parametri arbitrari, un contatto di second'ordine se ve ne saranno *sei*; in generale potrà avere un contatto dell'ordine m *esimo*, se nella equazione $F(p,q,r)=0$ della famiglia cui appartiene, vi saranno $\frac{1}{2}m(m+1)$ parametri arbitrari; giacchè le condizioni od equazioni a soddisfarsi per un tal contatto, sono appunto $\frac{1}{2}m(m+1)$.

Si può qui pure osservare, come si fece alla fine del § 165, che, se dalle equazioni a sciogliersi per avere le costanti o parametri, si eliminassero le x,y, avrebbonsi equazioni, le quali rappresenterebbero le relazioni tra le costanti medesime, perchè la superficie corrispondente ed appartenente alla famiglia rappresentata colla equazione $F(p,q,r)=0$ avesse un contatto di quell'ordine, che è indicato dalla sussistenza delle medesime equazioni combinate.

215. Prima di fare esempj dei contatti, dimostrerò la proprietà geometrica o meglio di reciproca posizione, che ha luogo tra due superficie, qualora esse abbiano un contatto cioè abbiano le proprietà algebraiche qui sopra enunciate.

Se di tre superficie aventi un punto in comune, la seconda abbia un contatto di un certo ordine colla prima, e la terza abbia con questa medesima il solo punto comune, ovvero un contatto di un ordine minore di quello della seconda, quest'ultima cioè la seconda avrà almeno la sua porzione circostante al punto comune, che si accosterà alla corrispondente della prima più della analoga della terza: proprietà la quale rende interessantissima la teorica dei contatti delle superficie.

La prima e seconda superficie abbiano per equazioni

$$z=\phi(x,y),\ r=f(p,q),$$

usate già superiormente; e la terza abbia la $u = \psi(s,t)$, ove le s, t, u siano le coordinate di un punto qualunque di essa ed analoghe alle x, y, z.

L'ordine del contatto tra la seconda e la prima sia l'*m esimo*, e quello tra la terza e la prima stessa sia l'*n esimo*; e le coordinate del punto in comune si ritengano le $x, y, z = \phi(x, y)$ particolari.

Nelle $\phi(x,y), f(p,q), \psi(s,t)$ si pongano in luogo delle x, p, s la x particolare *più* ω ed in luogo delle y, q, t la y particolare *più* θ, ove ω, θ esprimono due quantità indeterminate; e si avranno le

$$\phi(x+\omega, y+\theta),\ f(x+\omega, y+\theta),\ \psi(x+\omega, y+\theta)$$

pei valori delle ordinate z, r, u corrispondenti alle stesse $x+\omega, y+\theta$.

Si chiami D la differenza di questi due valori delle z, r, e Δ quella dei valori delle z, u; e si avranno, prescindendo dai segni,

$$D = f(x+\omega, y+\theta) - \phi(x+\omega, y+\theta),$$

$$\Delta = \psi(x+\omega, y+\theta) - \phi(x+\omega, y+\theta):$$

evidentemente D è la distanza di quei due punti, l'uno della seconda superficie e l'altro della prima, ad entrambi dei quali corrispondono le ordinate $x+\omega, y+\theta$; e Δ è la distanza, che ha da quest'ultimo punto della prima, quel punto della terza, al quale corrispondono queste medesime ordinate $x+\omega, y+\theta$.

Sviluppando i termini dei valori delle D, Δ (§ 41), ed ommettendo quelli, che si distruggono pei contatti ammessi tra le superficie, si hanno due polinomj ordinati secondo le dimensioni delle ω, θ, nel primo dei quali la minore dimensione delle stesse ω, θ è $m+1$, e nel secondo, cioè in quello che è il valore della Δ, è $n+1$; quindi, siccome $m>n$, i valori della D, se non tutti almeno quelli corrispondenti a valori piccioli delle ω, θ, saranno (§ 137) prossimi allo *zero* più dei corrispondenti di quelli della Δ; o ciò che significa lo stesso, i punti della seconda superficie, almeno i circostanti al punto comune, saranno vicini ai corrispondenti punti della prima superficie più dei corrispondenti della terza; che è appunto ciò che si è enunciato.

216. Ciò premesso, passo ad esporre alcuni esempj; e comincio a trovare il piano ossia l'equazione del piano, che ha colla superficie rappresentata colla data $z=\phi(x,y)$ un contatto di primo ordine nel punto di essa, al quale corrispondono le ordinate x, y particolari.

L'equazione della famiglia delle superficie piane sappiamo essere

$$r+Ap+Bq+C=0.$$

Siccome il piano chiesto deve avere un contatto di prim'ordine, così i suoi parametri, che sono A, B, C, dovranno rendere identiche le *tre* equazioni

$$\phi(x,y)+Ax+By+C=0,\ \phi'(x)+A=0,\ \phi'(y)+B=0.$$

Ma i valori degli A, B, C, che rendono identiche queste equazioni, sono quelli, i quali si hanno, sciogliendo esse medesime rispetto agli stessi A, B, C, cioè sono

$$A=-\phi'(x),\ B=-\phi'(y),\ C=x\phi'(x)+y\phi'(y)-z;$$

adunque l'equazione richiesta sarà la seguente

$$r-p\phi'(x)-q\phi'(y)+x\phi'(x)+y\phi'(y)-z=0$$

$$\text{ossia } r-z=(p-x)z'+(q-y)z_{,},$$

la quale per essere affatto individuata insegna, che uno solo è il piano, che possa avere con una superficie in un punto di essa un contatto di primo ordine, sebbene pel punto medesimo ne possono passare moltissimi. E per tanto, il piano rappresentato colla equazione trovata, è fra i moltissimi, che passano pel medesimo punto della superficie, quello i cui punti, almeno i circostanti al punto comune, si accostano tutti ai corrispondenti della superficie medesima più degli analoghi punti di ogni altro.

Il piano qui determinato si chiama *piano tangente* o *piano toccante* della superficie nel punto comune con essa.

Per fare un esempio particolare, troviamo la equazione del piano tangente di quella superficie sviluppabile, nella quale vi sono le rette toccanti di una curva data.

Siano $t = \phi(s)$, $u = f(s)$ le equazioni della curva, dove s, t, u sono le sue coordinate analoghe alle x, y, z; e la equazione della superficie sarà la risultante della eliminazione della s dalle due

$$y - \phi(s) = (x - s)\,\phi'(s),\quad z - f(s) = (x - s)\,f'(s).$$

Quando si potesse eliminare effettivamente la s, avrebbesi una equazione tra le sole x, y, z, la quale darebbe le funzioni delle x, y valori delle $z, z', z_{,}$, che sostituiti nella

$$r - z = (p - x)\,z' + (q - y)\,z_{,}$$

la ridurrebbero alla richiesta: ma nella impossibilità di eseguire questa eliminazione, senza individuare le funzioni $\phi(s), f(s)$, vediamo come si possa avere questa medesima equazione formata colle coordinate stesse della curva data, spigolo di regresso della superficie.

La superficie si rappresenti colla equazione

$$z-f(s)-(x-s)f'(s)=0,$$

ove la s esprima la funzione delle ordinate x,y data dalla

$$y-\phi(s)-(x-s)\phi'(s)=0.$$

Le equazioni derivate prime parziali di quella della superficie e prese rispetto alle x,y sono

$$z'-f'(s)-(x-s)f''(s)s'(x)=0,\ z_{,}-(x-s)f''(s)s'(y)=0,$$

e quelle della $y-\phi(s)-(x-s)\phi'(s)=0$

$$\phi'(s)+(x-s)\phi''(s)s'(x)=0,\ 1-(x-s)\phi''(s)s'(y)=0,$$

le quali danno

$$(x-s)s'(x)=-\phi'(s):\phi''(s),\ (x-s)s'(y)=1:\phi''(s),$$

per cui le due prime riduconsi

$$z'-f'(s)+f''(s)\phi'(s):\phi''(s)=0,\ z_{,}-f''(s):\phi''(s)=0,$$

che somministrano

$$z'=\left(f'(s)\phi''(s)-f''(s)\phi'(s)\right):\phi''(s),\ z_{,}=f''(s):\phi''(s).$$

Sostituendo tanto questi valori delle z', $z_{,}$, quanto quelli delle z,y, che sono $f(s)+(x-s)f'(s)$, $\phi(s)+(x-s)\phi'(s)$, nella equazione

$$r-z=(p-x)z'+(q-y)z_{,},$$

hassi per richiesta la

$$\left(r-f(s)\right)\phi''(s)+(p-s)\left(f''(s)\phi'(s)-f'(s)\phi''(s)\right)-(q-t)f''(s)=0.$$

Questa equazione insegna, che un piano tangente di una superficie sviluppabile è toccante la medesima per tutta la estensione di una retta, ed anco osculatore (§ 212) dello spigolo di regresso di essa.

217. La retta, che ha un punto comune con una

superficie, ed è perpendicolare al piano tangente a questa nel punto medesimo, si dice *retta normale* della superficie nel punto stesso.

Troviamo le equazioni della retta normale alla superficie rappresentata colla equazione $z = \phi(x, y)$ nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z, che supporremo qui *rettangole*.

Denomininsi P, Q, R le coordinate rettangole della normale ed analoghe alle x, y, z; ed essa si rappresenti colle equazioni

$$R = AP + B,\ R = CQ + D.$$

Siccome la retta deve passare pel punto corrispondente alle coordinate x, y, z ed anco essere perpendicolare al piano tangente alla superficie, così gli A, B, C, D parametri di essa dovranno soddisfare le quattro equazioni seguenti

$$z = Ax + B,\ y = Cx + D,$$

$$0 = Az' + 1,\ 0 = Cz_{,} + 1,$$

le quali danno

$$A = -\frac{1}{z'},\ C = -\frac{1}{z_{,}},\ B = z + \frac{x}{z'},\ D = z + \frac{y}{z_{,}};$$

e però le equazioni della retta normale alla superficie saranno

$$(R - z)z' + (P - x) = 0,\ (R - z)z_{,} + Q - y = 0.$$

Mediante queste equazioni facilmente si trova, che i coseni degli angoli, fatti dalla retta normale cogli assi delle x, y, z, sono ordinatamente

$$\frac{z'}{\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}},\ \frac{z_{,}}{\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}},\ \frac{1}{\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}}.$$

Queste medesime espressioni saranno anco i seni degli angoli fatti dal piano tangente alla superficie cogli assi anzidetti delle x, y, z, ed i coseni degli angoli *diedri* fatti dallo stesso piano tangente coi piani coordinati delle y, z; x, z; x, y.

218. Per secondo esempio, troviamo quelle superficie sferiche, che hanno con una superficie qualunque un contatto di primo ordine.

L'equazione della famiglia delle superficie sferiche, si sa che è la

$$(p-a)^2+(q-b)^2+(r-c)^2-d^2=0\,;$$

dove p, q, r sono le coordinate rettangole di un punto qualunque di essa, ed a, b, c le analoghe del suo centro, e d il suo raggio.

Supposto che le x, y, $z=\phi(x,y)$ coordinate della superficie qualunque siano anch'esse rettangole, i quattro parametri a, b, c, d per le sfere aventi un contatto di primo ordine saranno quelli soddisfacenti le tre equazioni

$$\begin{aligned}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-d^2&=0,\\ x-a+(z-c)z'&=0,\\ y-b+(z-c)z_{\prime}&=0,\end{aligned}$$

per cui uno di essi rimarrà arbitrario, ossia moltissime saranno le sfere aventi un contatto di primo ordine con una superficie nello stesso punto di essa.

Dalle tre equazioni esposte cavasi facilmente

$$\begin{aligned}a&=x+dz' : \sqrt{(1+z'^2+z_{\prime}^2)},\\ b&=y+dz_{\prime} : \sqrt{(1+z'^2+z_{\prime}^2)},\\ \text{e}\quad c&=z-\ d\ : \sqrt{(1+z'^2+z_{\prime}^2)},\end{aligned}$$

con che si hanno i valori delle coordinate del centro di quella sfera, fra le moltissime di raggio d, e passanti per lo stesso punto della superficie, che ha con questa medesima superficie un contatto di primo ordine.

Dimodochè, fra le moltissime superficie sferiche di raggio d od eguali tra loro, e che passano per lo stesso punto della superficie qualsivoglia, quella al cui centro corrispondono le coordinate a, b, c, qui determinate, avrà almeno i suoi punti circostanti al comune colla superficie qualsivoglia, che si accosteranno a quelli di questa superficie medesima più degli analoghi punti di un' altra qualunque di esse superficie sferiche. E per questa proprietà, che la sfera determinata, chiamasi *tangente* la superficie qualsivoglia nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z particolari.

219. Siccome i valori delle a, b, c, trovati nel paragrafo antecedente sostituiti nelle equazioni (§ 217)

$$P-x+(R-z)z'=0, \quad Q-y+(R-z)z_{\prime}=0$$

in luogo delle P, Q, R, ne danno due, che sono soddisfatte, qualunque sia la d; così il punto, al quale corrispondono le coordinate a, b, c, sarà nella retta rappresentata con queste medesime due equazioni; cioè i centri delle sfere tangenti una superficie in uno stesso punto saranno tutti nella retta normale alla superficie nel punto medesimo.

Quest' ultima proprietà emerge anco dalle ultime due delle tre equazioni sciolte per avere i valori delle stesse a, b, c.

220. Non potendosi determinare una sfera, che abbia un contatto di secondo ordine con una superficie qualsivoglia in un punto qualunque di essa, occorrendo per questo almeno *sei* parametri, mentre nella equa-

zione della famiglia delle sfere ve ne sono al più quattro; per conoscere la curvatura in un punto qualunque di una superficie definibile qualsivoglia, converrà talvolta procacciarsi una superficie di forma affatto individuata, fra quelle meno difficili a costruirsi esattamente, e di variata curvatura; indi col metodo seguente scoprire le porzioni o plaghe di essa, che saranno rispettivamente suscettibili, quando essa sia opportunamente situata, di un contatto del second'ordine nei diversi punti della prima.

Si chiamino s, t, u le coordinate di un punto qualunque della superficie individuata riportata a tre assi ortogonali fissi invariabilmente ad essa medesima, e p, q, r le coordinate del punto stesso riportato ai medesimi assi delle x, y, z coordinate della superficie qualsivoglia.

Dalla teorica delle trasformazioni delle coordinate risulta

$$s = a + bp + cq + dr,$$
$$t = e + fp + gq + hr,$$
$$u = k + lp + mq + nr,$$

dove le dodici quantità a, e, k, b, f, l, c, g, m, d, h, n sono costanti, e le ultime nove hanno fra loro le relazioni rappresentate colle notissime *sei* equazioni, per cui tre sole di esse sono arbitrarie.

La equazione della superficie di forma individuata, riferita ai tre assi fissi ad essa, sia

$$F(s,\ t,\ u) = 0;$$

e quella di essa medesima, quando sia riportata agli assi delle x, y, z, sarà

$$F(a+bp+cq+dr,\ e+fp+gq+hr,\ k+lp+mq+nr) = 0.$$

Per la esposta teorica dei contatti, affinchè la superficie di forma individuata abbia un contatto di second'ordine colla qualunque nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z, le dodici costanti $a, b, --- n$ dovranno soddisfare le sei equazioni seguenti

$$F(a+bx+cy+dz, e+fx+gy+hz, k+lx+my+nz)=o,$$

$$F'=o, \quad F_{\prime}=o, \quad F''=o, \quad F'_{\prime}=o, \quad F_{\prime\prime}=o$$

dove le F', $F_{\prime}$, F'', $F'_{\prime}$, $F_{\prime\prime}$ esprimono al solito le derivate parziali prese rispetto alle x, y della quantità $F(a+bx+cy+dz, e+fx+gy+hz, k+lx+my+nz)$, che contiene le x, y nel modo visibile ed anco nella z.

Combinando queste sei equazioni alle sei notissime suddette, si avranno quei valori delle dodici costanti $a, b, --- m, n$, che sostituiti nei quattrinomi $a+bx+cy+dz$, $e+fx+gy+hz$, $k+lx+my+nz$, daranno quelli delle coordinate s, t, u corrispondenti a quel punto della superficie individuata, circostante al quale vi sarà quella porzione o plaga di essa conformata più di ogni altra sua parte come quella della superficie qualsivoglia nel luogo circostante al punto cui corrispondono le coordinate x, y, z; dimodochè, si potrà argomentare la curvatura di questa in questo suo luogo mediante quella della plaga determinata dell'altra; ed anco asserire che la superficie qualsivoglia avrà, almeno una picciola porzione circostante al suo punto cui corrispondono le coordinate x, y, z particolari conforme o somigliante a quella analoga porzione della superficie individuata, che è circostante al punto delle coordinate s, t, u, più che a qualsivoglia altra parte di questa medesima superficie.

La proposizione qui esposta si potrà sciogliere anco con ciò che si dirà nel § 226.

Farò qui una osservazione analoga ad una fatta per le linee piane (§ 176), cioè che la superficie rappresentata colla equazione

$$r = z + (p - x) z' + \frac{1}{2}(p - x)^2 z'' + \frac{(p - x)^3}{2 \cdot 3} z''' + \text{ecc.}$$

$$+ (q-y)z_{,} + (p-x)(q-y)z'_{,} + \frac{(p-x)^2(q-y)}{2 \cdot 1} z''_{,} + \text{ecc.}$$

$$+ \frac{1}{2}(q - y)^2 z_{,,} + \frac{(p - x)(q - y)^2}{1 \cdot 2} z'_{,,} + \text{ecc.}$$

$$+ \frac{(q - y)^3}{2 \cdot 3} z_{,,,} + \text{ecc.}$$

ove il secondo membro sia, così continuato sino a quei termini, nei quali vi sono le derivate *nesime* parziali della z e nei successivi, se pur vi sono, le $p-x$, $p-y$ abbiano dimensioni non maggiori di n, ha colla superficie qualsivoglia un contatto dell'ordine *nesimo* nel punto corrispondente alle coordinate x, y; e che ciò si dimostra in un modo analogo a quello usato nel medesimo paragrafo citato.

221. La equazione $F(x, y, z, a) = 0$, ove la a esprime una costante arbitraria, rappresenti una famiglia di superficie: la $F'(a) = 0$ ne rappresenterà un'altra, come la sussistenza simultanea delle due

$$F(x, y, z, a) = 0, \quad F'(a) = 0$$

rappresenterà una famiglia di linee, il luogo delle quali sarà evidentemente la superficie avente per equazione la risultante della eliminazione della a dalle stesse due $F = 0$, $F'(a) = 0$.

Sciolta la equazione $F'(a) = 0$ rispetto alla a abbiasi $a = \psi(x, y, z)$; e l'equazione di quest'ultima superficie cioè di quella nella quale vi sono le linee anzidette, sarà $F\big(x, y, z, \psi(x, y, z)\big) = 0$.

Per facilità si userà la equazione $a = \psi(x, y, z)$ in vece della $F'(a) = 0$.

Ogni punto della linea rappresentata colle equazioni

$$F(x,y,z,m)=0,\ \psi(x,y,z)-m=0,$$

ove la m esprime un valore particolare dato alla a, è un punto di contatto di primo ordine tra le due superficie rappresentate colle

$$F(x,y,z,m)=0,\ F\big(x,y,z,\psi(x,y,z)\big)=0.$$

Di fatto, dalla equazione

$$F\big(x,y,z,\psi(x,y,z)\big)=0$$

hansi per sue derivate parziali, avuto riguardo che $F'(\psi)$ è *nulla*, le due

$$\left(\frac{dF(x,y,z,\psi)}{dx}\right)+\left(\frac{dF(x,y,z,\psi)}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0,$$

$$\left(\frac{dF(x,y,z,\psi)}{dy}\right)+\left(\frac{dF(x,y,z,\psi)}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0;$$

ma pei punti della linea anzidetta si ha $\psi=m$; adunque, per questi punti della superficie rappresentata colla equazione $F\big(x,y,z,\psi(x,y,z)\big)=0$, avranno luogo le tre seguenti

$$F(x,y,z,m)=0,$$

$$\left(\frac{dF(x,y,z,m)}{dx}\right)+\left(\frac{dF(x,y,z,m)}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0,$$

$$\left(\frac{dF(x,y,z,m)}{dy}\right)+\left(\frac{dF(x,y,z,m)}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

le quali significano, che per ogni punto della stessa linea le derivate $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ relative a questa superficie sono eguali alle analoghe per la rappresentata colla equazione $F(x,y,z,m)=0$.

La superficie rappresentata colla equazione risultante dalla eliminazione arbitraria a dalle due $F=0$, $F'(a)=0$ si chiama *superficie abbracciante* od *inviluppante*; ogni linea della famiglia rappresentata con queste due equazioni chiamisi *caratteristica* della stessa superficie inviluppante; ed ogni superficie della famiglia avente per equazione la $F=0$ si chiama superficie *abbracciata* od inviluppata.

Così, la linea esistente nella superficie abbracciante e rappresentata dalle tre equazioni

$$F=0,\ F'(a)=0,\ F''(a)=0$$

ove la a è quantità da eliminarsi, si chiama *spigolo di regresso* della medesima superficie abbracciante.

Ogni punto dello spigolo di regresso della superficie abbracciante è un punto di contatto di primo ordine tra essa ed una sua caratteristica; giacchè le derivate x', y', z' relative a questa linea sono date dalle equazioni derivate esatte delle due $F=0$, $F'(a)=0$ prese nelle ipotesi, che a soddisfaccia la equazione $F''(a)=0$, e però le stesse di quelle relative alla caratteristica rappresentata colle equazioni

$$F=0,\ F'(a)=0$$

per cui la a è costante.

222. La superficie rappresentata colla equazione $r-f(p, q, a, b, c)=0$ abbia con quella rappresentata colla $z-\phi(x, y)=0$ un contatto di primo ordine, cioè i parametri a, b, c siano quelle funzioni delle x, y date dalle equazioni (§ 214)

$$\phi(x, y)-f(x, y, a, b)=0,\ \phi'(x)-f'(x)=0,\ \phi'(y)-f'(y)=0.$$

Colla equazione $r-f(p,q,a,b,c)=o$, variando le x,y contenute nelle a,b,c, avransi le equazioni di altrettante superficie tangenti tutte alla rappresentata colla $z-\phi(x,y)=o$; e se i valori delle x,y si limiteranno a quelli soddisfacenti la equazione $y-\psi(x)=o$, le superficie rappresentate colle equazioni risultanti dalla

$$r-f(p,q,a,b,c)=o$$

toccheranno evidentemente quella rappresentata colla $z-\phi(x,y)=o$ lungo la linea, la cui projezione nel piano coordinato delle x,y è rappresentata colla stessa $y-\psi(x)=o$.

Si indichi con $f'(x)$ o semplicemente con f' la derivata totale della $f(p,q,a,b,c)$ presa rispetto alla x contenuta nelle a,b,c, e nella ipotesi della y eguale alla $\psi(x)$.

Se dalle due equazioni

$$r-f(p,q,a,b,c)=o,\ f'=o$$

si eliminasse la x, se ne avrebbe una tra le p,q,r, la quale rappresenterebbe la superficie inviluppante, mentre la inviluppata è rappresentata colla prima di esse, ove la x esprime una arbitraria analoga alla a usata nel paragrafo antecedente; queste due superficie sono tangenti l'una dell'altra per tutta l'estensione della linea, la cui projezione nel piano coordinato delle p,q è rappresentata colla equazione $f'=o$; per cui nella inviluppante vi sono due linee, a seconda di una delle quali essa è tangente la superficie rappresentata colla equazione $z-\phi(x,y)=o$, ed a seconda dell'altra lo è a quella rappresentata colla $r-f(p,q,a,b,c)=o$.

Le projezioni di queste due linee nel piano coordinato delle x,y ossia delle p,q, le equazioni delle quali sono $y-\psi(x)=o$, $f'(x)=o$ hanno una proprietà interessante tra le tangenti degli angoli fatti coll'asse delle x o p dalle rette loro toccanti al punto in comune.

Di fatto, la equazione $f'=o$ dà per sua derivata rispetto alla p, nella ipotesi della q funzione della p, la $\left(\frac{df'}{dp}\right)+\left(\frac{df'}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dp}\right)=o$ ovvero $f'(p)'+f'(q)'\left(\frac{dq}{dp}\right)=o$, ove $f'(p)'$, $f'(q)'$ esprimono le derivate delle $f'(p)$, $f'(q)$ prese rispetto alla x comunque esistente in esse. Ma pel punto comune anzidetto le quantità p, q, $f'(p)$, $f'(q)$ sono ordinatamente eguali alle x, y, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, come risulta dalle equazioni, che danno le a, b, c; adunque sarà

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)'+\left(\frac{dz}{dy}\right)'\lambda'(x)=o,$$

ove $\lambda'(x)$ esprime il valore della $\left(\frac{dq}{dp}\right)$ corrispondente anch'essa alla $p=x$; cioè tra le tangenti trigonometriche $\psi'(x)$, $\lambda'(x)$, che sono le suddette, avrà luogo la relazione seguente

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\psi'(x)+\left(\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\psi'(x)\right)\lambda'(x)=o,$$

che equivale evidentemente alla

$$z''+(\psi'+\lambda')z'_{\prime}+z_{\prime\prime}\psi'\lambda'=o,$$

la quale insegna, che la relazione delle tangenti trigonometriche ψ', λ' relative al punto comune delle suddette due linee dipende unicamente dalle derivate seconde parziali della $z=\phi(x,y)$, ed anco la singolarità che, ammettendo $y=\lambda(x)$ ossia $y'=\lambda'(x)$, avrebbesi $\psi'(x)$ pel valore della $\left(\frac{dq}{dp}\right)$ corrispondente alla $p = x$; cioè che le quantità $\psi'(x)$, $\lambda'(x)$, e però anco le linee alle quali si riferiscono, sono in certa guisa reciproche l'una dall'altra.

L'equazione qui trovata comprende la fondamentale della teorica di quelle tangenti la superficie rappresentata colla $z - \phi(x, y) = 0$, che sono chiamate conjugate dal sig. ch. Dupin, dal quale fu dimostrata pel caso che la superficie rappresentata colla equazione $r - f(p, q, a, b, c) = 0$ sia piana.

223. Fra le infinite linee esistenti nella superficie rappresentata colla equazione $z - \phi(x, y) = 0$, e che passano pel punto di contatto di essa con un suo piano tangente, le due date dalla equazione

$$z'' + 2z'_{/}y' + z_{//}y'^2 = 0,$$

ove la y' si riferisce alle loro projezioni nel piano coordinato delle x, y, hanno almeno le parti prossime al punto comune, che sono prossime al piano tangente più delle parti analoghe delle altre.

Siano $x, y(x), \phi\big(x, y(x)\big)$ le coordinate di una qualunque di queste linee, e saranno $x + \omega$, $y(x + \omega)$,

$$\phi\big(x + \omega, y(x + \omega)\big) \text{ ossia } x + \omega, y + \omega y' + \frac{\omega^2}{2} y'' + \text{ecc.},$$

$$\phi + \omega(\phi' + y'\phi_{/}) + \frac{\omega^2}{2}(\phi'' + 2y'\phi'_{/} + \phi_{//}y'^2) + \text{ecc.}$$

quelle di un altro punto qualsivoglia di essa; e però la distanza di questo punto dal piano tangente sarà

$$\phi - x\phi' - y\phi_{/} + (x + \omega)\phi' + y(x + \omega)\phi_{/} - \phi\big(x + \omega, y(x + \omega)\big)$$

$$\text{diviso per } \sqrt{(1 + \phi'^2 + \phi_{/}^2)}$$

$$\text{cioè } -\frac{\omega^2}{\sqrt{(1 + \phi'^2 + \phi_{/}^2)}}(\phi'' + 2y'\phi'_{/} + y'^2\phi_{//}) + \text{ecc.},$$

ove i termini ommessi contengono almeno ω^3. Ma per le due linee suddette il coefficiente della ω^2 è *nullo* visibilmente; adunque (§ 132) i punti di queste due linee, almeno quelli circostanti al comune, saranno prossimi al piano tangente la superficie più degli analoghi delle altre.

224. Volendo scoprire se avvi superficie di una data famiglia, la quale abbia un contatto di primo ordine con una individuata per tutta l'estensione di una linea; ecco come si potrà procedere.

La $z-\phi(x,y)=0$ rappresenti la superficie individuata, e la $r-f(p,q,a,b,c)=0$ quella della famiglia alla quale deve appartenere la richiesta: perchè una di queste abbia un contatto di primo ordine colla prima, le costanti a, b, c debbono soddisfare le tre equazioni

$$\phi(x,y)-f(x,y,a,b,c)=0,\ \phi'(x)-f'(x)=0,\ \phi'(y)-f'(y)=0;$$

ed affinchè il contatto abbia luogo per tutta la estensione di una linea, le a, b, c dovranno evidentemente soddisfare anco le equazioni

$$\begin{aligned}\phi'(x)+\phi'(y)y'-f'(x)-f'(y)y'&=0,\\ \phi''+y'\phi'_{\prime}-f''-y'f'_{\prime}&=0,\\ \phi'_{\prime}+y'\phi_{\prime\prime}-f'_{\prime}-y'f_{\prime\prime}&=0\end{aligned}$$

che sono le derivate delle tre antecedenti, e dove l'y' si riferisce alla projezione, nel piano coordinato delle x, y, della linea di contatto.

La prima di queste ultime tre equazioni è evidentemente contenuta nelle $\phi'(x)-f'(x)=0, \phi'(y)-f'(y)=0$ antecedenti; e però le a, b, c dovranno soddisfare, oltre le prime tre, le sole due seguenti

$$\phi''-f''+(\phi'_{\prime}-f'_{\prime})y'=0,\ \phi'_{\prime}-f'_{\prime}+(\phi_{\prime\prime}-f_{\prime\prime})y'=0,$$

ovvero una di queste e la risultante della eliminazione della y' da esse, che è

$$(\phi''-f'')(\phi_{\prime\prime}-f_{\prime\prime})-(\phi'_{\prime}-f'_{\prime})^2=0,$$

la quale dovrà riescire identica ovvero dare per y tal valore, dopo avervi costituiti quelli delle a, b, c cavati dalle $\phi-f=0$, $\phi'-f'=0$, $\phi_{\prime}-f_{\prime}=0$, da soddisfare una delle due antecedenti. Questo valore della y o quello che avrassi con una di queste medesime antecedenti farà conoscere la linea a secondo della quale la superficie appartenente alla famiglia suddetta toccherà la individuata. Analogamente si procederà, quando il contatto debba essere di secondo, di terzo,--- ordine, cioè d'un ordine superiore.

Talvolta, la famiglia delle superficie, alla quale deve appartenere la richiesta, non è rappresentata con una sola equazione fra le sue coordinate, ma bensì con due o più, nelle quali vi sono oltre le coordinate altre quantità da eliminarsi. Darò di questo un esempio relativo alle superficie sviluppabili, ritenendo, che una qualunque di esse sia il luogo di tutte le rette tangenti di una medesima curva.

Si chiamino s, t, u le coordinate della curva, p, q, r quelle della superficie sviluppabile; e si ritengano le $x, y, z=\phi(x, y)$ per le coordinate della superficie qualunque.

La superficie sviluppabile si terrà espressa colla equazione

$$r=(p-s)u'+u,$$

ove la s vi è nel modo visibile, nella $u(s)$ non che nella u' ossia $u'(s)$, ed esprime quella funzione delle p, q data dalla

$$q=(p-s)t'+t;$$

vale a dire, si rappresenterà colle due equazioni

$$r = (p - s)\,u' + u,\quad q = (p - s)\,t' + t,$$

ritenuto che la s è quantità da eliminarsi.

Affinchè la superficie sviluppabile sia tangente la qualsivoglia nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z, debbano essere soddisfatte le due equazioni

$$z = (x - s)\,u' + u,\quad y = (x - s)\,t' + t,$$

ed anco le loro derivate prime parziali rispetto l'una alla x e l'altra alla y, che sono

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = u' + (x - s)\,u''\left(\frac{ds}{dx}\right),\quad 0 = t' + (x - s)\,t''\left(\frac{ds}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = (x - s)\,u''\left(\frac{ds}{dy}\right),\qquad 1 = (x - s)\,t''\left(\frac{ds}{dy}\right),$$

le quali danno, eliminando le $\left(\frac{ds}{dx}\right)$, $\left(\frac{ds}{dy}\right)$, le seguenti

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = u' - t'\,\frac{u''}{t''},\quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{u''}{t''},\ \text{cioè le}$$

$$\pi(x, y) + t'\lambda(x, y) - u' = 0,\quad \lambda(x, y)\,t'' - u'' = 0$$

ove le funzioni π, λ sono poste in vece delle derivate $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$. Vale a dire, per la superficie sviluppabile tangente in un punto alla qualunque saranno identiche le quattro equazioni seguenti

$$\phi(x, y) - (x - s)\,u' - u = 0,\quad y - (x - s)\,t' - t = 0,$$

$$\pi(x, y) + \lambda(x, y)\,t' - u' = 0,\qquad \lambda(x, y)\,t'' - u'' = 0.$$

Sia $y = \psi(x)$ l'equazione di una projezione di quella curva lungo la quale la superficie sviluppabile dev' essere tangente alla qualsivoglia: l'altra equazione della medesima curva evidentemente sarà $z = \phi\big(x, \psi(x)\big)$.

Per questa superficie sviluppabile le equazioni, dianzi esposte, si riducono

$$\varphi(x,\psi(x))-(x-s)u'-u=0,\ \psi(x)-(x-s)t'-t=0,$$
$$\pi(x,\psi(x))+\lambda(x,\psi(x))t'-u'=0,\ \lambda(x,\psi(x))t''-u''=0,$$

le quali dovranno sussistere, qualunque sia la x; e però con esse sussisteranno anco le loro derivate prese rispetto alla medesima x. Ommetto le equazioni derivate delle prime due, perchè sono contenute nelle ultime due di esse, ed espongo le derivate di queste, che risultano

$$\pi'(x)+\pi'(\psi)\psi'(x)+\left(\lambda'(x)+\lambda'(\psi)\psi'(x)\right)t'+(\lambda t''-u'')s'(x)=0,$$
$$\left(\lambda'(x)+\lambda'(\psi)\psi'(x)\right)t''+(\lambda t'''-u''')s'(x)=0,$$

dove il simbolo $s'(x)$ esprime la derivata totale della s cioè il binomio $\left(\frac{ds}{dx}\right)+\left(\frac{ds}{dy}\right)\psi'(x)$.

Per essere

$$\pi'(x)=\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),$$
$$\pi'(\psi)=\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=\lambda'(x),\ \lambda'(\psi)=\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right),\ \lambda=\frac{u''}{t''},$$

queste ultime equazioni equivalgono alle

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\left(\psi'(x)+t'(s)\right)+\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\psi'(x)t'(s)=0,$$
$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\psi'(x)-\left(\frac{u''}{t''}\right)'s'(x)=0.$$

Dimodochè, per la superficie sviluppabile di cui si parla, dovranno essere soddisfatte le quattro equazioni dianzi esposte ed anco le due seguenti

$$z'_{\prime}+z_{\prime\prime}\psi'(x)-\left(\frac{u''}{t''}\right)'s'(x)=0,$$
$$z''+\left(\psi'(x)+t'(s)\right)z'_{\prime}+\psi'(x)t'(s)z_{\prime\prime}=0.$$

Queste sei equazioni rappresentano le proprietà, che debbono avere le quantità $t'(s), u'(s), t''(s), u''(s), t'''(s), u'''(s)$ relative allo spigolo di regresso della superficie sviluppabile e la $\psi'(x)$ relativa alla linea di contatto di essa colla qualsivoglia: visibilmente l'ultima di esse è analoga, anzi un caso particolare di quella già esposta nel § 122.

225. Siccome non si può determinare una sfera (§ 220), che di tanto si adagi ad una superficie qualunque, che dalla uniforme curvatura di essa si possa argomentare quella della superficie medesima; ed è difficile non solo la scelta ma anco l'effettiva costruzione della superficie di forma individuata contemplata nel paragrafo qui citato, non che il formarsi una idea della curvatura di una di altre superficie particolari, che si possono approssimare in ogni punto ad una qualsivoglia, che dalle curvature di esse si possa argomentare quella della qualsivoglia medesima; così per menomare tale mancanza, passeremo a trovare quella, fra le molte sfere tangenti una superficie in uno stesso punto, alla quale si accosta una curva esistente nella superficie medesima più che a qualunque altra di esse sfere.

La linea esistente nella superficie rappresentata colla equazione $z-\phi(x,y)=0$ sia quella, che ha per projezione nel piano coordinato delle x, y la espressa colla equazione $y=f(x)$.

Essendo $z=\phi\big(x,\ f(x)\big),\ y=f(x)$

le equazioni della linea esistente nella superficie, la equazione tra le P, Q, R coordinate rettangole del piano normale ad essa (§ 195) sarà

$$P-x+\big(Q-f(x)\big)f'(x)+(R-\phi)\big(\phi'(x)+\phi'(f)f'(x)\big)=0,$$

ossia $P-x+(R-z)\phi'(x)+\big(Q-y+(R-z)\phi'(y)\big)f'(x)=0$

la quale insegna, che la normale della superficie giace nel piano normale della linea, qualunque sia la $f(x)$.

Da ciò discende, che le sfere tangenti la superficie sono di quelle, le quali hanno un contatto di primo ordine colla linea esistente in essa (§ 213); e però, la sfera richiesta, sarà quella tra le tangenti la superficie, la quale avrà un contatto di second' ordine colla linea medesima.

L' equazione della famiglia delle sfere tangenti la superficie si ritenga

$$(p-a)^2+(q-b)^2+(r-c)^2-d^2=0;$$

e si avranno tra i parametri a, b, c, d le tre equazioni

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-d^2=0,$$

$$x-a+(z-c)z'=0,\quad y-b+(z-c)z'=0.$$

La sfera richiesta dovendo avere colla linea rappresentata colle equazioni $z=\phi(x,y)$, $y=f(x)$ un contatto di second' ordine, i suoi parametri a, b, c, d dovranno soddisfare le tre

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-d^2=0,$$

$$x-a+(y-b)y'+(z-c)(z'+y'z_{\prime})=0,$$

$$1+y'^2+(z'+y'z_{\prime})^2+(y-b)y''+(z-c)(z''+2z'_{\prime}y'+z_{\prime\prime}y'^2+z_{\prime}y'')=0,$$

ove le z', $z_{\prime}$, z'', $z'_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$ esprimono ordinatamente $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ derivate parziali; e però, siccome le prime due di queste equazioni sono soddisfatte per le tre sopra esposte, così la sfera richiesta, sarà quella i cui parametri soddisfanno le quattro equazioni seguenti

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(c-z)^2-d^2=0,$$

$$x-a+(z-c)z'=0,\ y-b+(c-z)z_{/}=0,$$

$$1+y'^2+(z'+y'z_{/})^2+(z-c)(z''+2z'_{/}y'+z_{//}y'^2)=0,$$

l'ultima delle quali è la terza delle tre ultime trovate, ommessa la sua parte $(y-b)y''+(z-c)z_{/}y''$, perchè *nulla*.

Queste quattro equazioni danno evidentemente

$$a=x+\left(1+y'^2+(z'+y'z_{/})^2\right)z' : (z''+2z'_{/}y'+z_{//}y'^2),$$

$$b=y+\left(1+y'^2+(z'+y'z_{/})^2\right)z_{/} : (z''+2z'_{/}y'+z_{//}y'^2),$$

$$c=z-\left(1+y'^2+(z'+y'z_{/})^2\right) \quad : (z''+2z'_{/}y'+z_{//}y'^2),$$

$$d=\left(1+y'^2+(z'+z_{/}y')^2\right)\sqrt{(1+z'^2+z_{/}^2)} : (z''+2z'_{/}y'+z_{//}y'^2).$$

Se la $y=f(x)$ rappresentasse la projezione, nel piano coordinato delle x, y, di una linea piana esistente nella superficie ed il cui piano passasse per la retta normale della superficie medesima, nel valore del d, avrebbesi il raggio di curvatura della linea stessa; come è facile a dimostrarsi ed anco a concepirsi senza dimostrazione dopo le cose esposte.

226. Il valore del d raggio della sfera avente un contatto di second'ordine colla linea, che ha per projezione quella rappresentata colla equazione $y=f(x)$, cambierà al cambiare la $f'(x)=y'$, ossia cambiando la linea stessa: troviamo quella o quelle tra queste linee cioè la y' loro corrispondente, alle quali corrispondono i massimi o minimi valori di d.

Il metodo diretto per trovare i richiesti valori dell'y' sarebbe quello di desumerli dalla equazione, che si avrebbe, eguagliando a *zero* la derivata presa rispetto all'y' del sopra esposto valore del d; ma per semplicità usaremo il metodo seguente.

Per essere

$$d = (z - c)\sqrt{(1 + z'^2 + z_{/}^2)},$$

i valori massimi o minimi del d corrispondono ai minimi o massimi della c; e però i valori della y' corrispondenti a questi della c saranno i richiesti.

Essendovi tra c e la y' la equazione

$$1 + y'^2 + (z' + y'z_{/})^2 + (z'' + 2z'_{/}y'^2 + z_{//}y'^2)(z - c) = 0,$$

l'altra equazione, che combinata a questa darà i valori richiesti della y' ed i corrispondenti della c, sarà (§ 148)

$$y' + (z' + y'z_{/})z_{/} + (z'_{/} + z_{//}y'^2)(z - c) = 0:$$

anzi, essendo evidentemente la prima equivalente alla

$$1 + z'^2 + z_{/}z'y' + (z'' + z'_{/}y')(z - c) +$$
$$+ \left\{y' + (z' + z_{/}y')z_{/} + (z'_{/} + z_{//}y')(z - c)\right\}y' = 0$$

essa si riduce

$$1 + z'^2 + z_{/}z'y' + (z'' + z'_{/}y')(z - c) = 0;$$

e però le equazioni, colle quali si potranno avere i valori delle c, y', saranno

$$(z - c)\,z'_{/} + z'\,z_{/} + \left(1 + z_{/}^2 + (z - c)\,z_{//}\right)y' = 0,$$
$$(z - c)\,z'' + 1 + z'^2 + \left(z'\,z_{/} + (z - c)\,z'_{/}\right)y' = 0,$$

che sono visibilmente le derivate delle due

$$y - b + (z - c)\,z_{/} = 0,\quad x - a + (z - c)\,z' = 0$$

e però facilmente richiamabili.

Eliminando la c ossia $z - c$ dalle due equazioni, qui trovate, trovasi la

$$Ay'^2 - By' - C = 0,$$

dove $A = (1+z_{,}^2)z'_{,} - z'z_{,}z_{,,}$,

$$B = (1+z'^2)z_{,,} - (1+z_{,}^2)z'',$$

$$C = (1+z'^2)z'_{,} - z'z_{,}z'',$$

la quale somministra

$$y' = \left(B \pm \sqrt{(B^2+4AC)}\right) : 2A.$$

Questo valore della y' dà

$$\left(1+y'^2+(z'+z_{,}y')^2\right) : (z''+2z'_{,}y'+z_{,,}y'^2)$$

eguale ad

$$\left(E \pm \sqrt{(B^2+4AC)}\right) : 2(z''z_{,,} - z'^2_{,}),\ \text{ove}$$

$$E = 2z'z_{,}z'_{,} - (1+z'^2)z_{,,} - (1+z_{,}^2)z'';$$

e per tanto sarà

$$d = \left(E \pm \sqrt{(B^2+4AC)}\right)\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)} : 2(z''z_{,,} - z'^2_{,}),$$

ed anco $a = x + \left(E \pm \sqrt{(B^2+4AC)}\right)z' : 2(z''z_{,,} - z'^2_{,})$,

$$b = y + \left(E \pm \sqrt{(B^2+4AC)}\right)z_{,} : 2(z''z_{,,} - z'^2_{,}),$$

e $c = z - \left(E \pm \sqrt{(B^2+4AC)}\right) : 2(z''z_{,,} - z'^2_{,})$.

Concludiamo adunque, che, le linee le cui projezioni nel piano coordinato delle x, y, sono rappresentate colle equazioni

$$y' = \frac{1}{2A}\left(B+\sqrt{(B^2+4AC)}\right),\ y' = \frac{1}{2A}\left(B-\sqrt{(B^2+4AC)}\right),$$

o meglio colla sola

$$Ay'^2 - By' - C = 0,$$

sono fra le moltissime esistenti nella superficie, quelle della massima o minima curvatura sferica.

Queste linee si chiamano *linee di curvatura*, ed i corrispondeuti valori di *d raggi di curvatura*, della superficie rappresentata colla equazione $z = \phi(x, y)$.

Nei valori degli a, b, c ovvero nelle tre equazioni

$$x-a+(z-c)z'=0,\ y-b+(z-c)z_{,}=0,$$

$$(z''z_{,,}-z_{,}'^{2})(z-c)^{2}-E(z-c)+1+z'^{2}+z_{,}^{2}=0$$

sostituendo $\phi(x, y)$ in luogo della z, ed eliminando le x, y dalle tre risultanti, si avrà una sola equazione tra le a, b, c, la quale rappresenterà il luogo dei centri delle sfere massime o minime di cui si parla.

Le linee di curvatura di una superficie sono molto interessanti sì per la teorica che per la pratica, e però credo bene di esporre alcune loro proprietà.

227. Si chiamino α, β i valori della y' corrispondenti ad esse, cioè le radici della equazione

$$Ay'^{2}-By'-C=0:\ \text{sarà}\ \alpha+\beta=\frac{B}{A},\ \text{ed}\ \alpha\beta=-\frac{C}{A}.$$

Egli è evidente, che le equazioni della retta tangente a quella di queste linee, per la quale si ha $y'=\alpha$, sono

$$q-y=(p-x)\alpha,\ r-z=(p-x)(z'+\alpha z_{,});$$

e quelle della tangente l'altra, per la quale hassi $y'=\beta$, sono

$$q-y=(p-x)\beta,\ r-z=(p-x)(z'+\beta z_{,});$$

e però il coseno dell'angolo compreso da queste tangenti sarà una frazione avente il denominatore in generale finito ed il numeratore eguale ad

$$1+\alpha\beta+(z'+\beta z_{,})(z'+\alpha z_{,})\ \text{cioè ad}$$

$$1+z'^{2}+(\alpha+\beta)z'z_{,}+(z_{,}^{2}+1)\alpha\beta$$

e conseguentemente ad

$$\frac{1}{A}\left(Bz'z_{,}-(1+z_{,}^{2})C+(1+z'^{2})A\right).$$

Ma pei valori delle A, B, C quest'ultima quantità è evidentemente nulla; adunque l'angolo compreso dalle due tangenti anzidette, che è lo stesso compreso dalle linee di curvatura della superficie, sarà *retto*, o ciò che significa lo stesso, l'una linea di curvatura sarà perpendicolare all'altra.

Sostituendo nella equazione

$$z'' + (\varphi' + \psi')z'_{,} + z_{,,}\varphi'\psi' = 0,$$

che è la proprietà delle tangenti conjugate (§ 222), in luogo delle φ', ψ' i valori delle α, β, si ha

$$z'' + z'_{,}\frac{B}{A} - \frac{C}{A}z_{,,} = 0, \text{ ossia } Az'' + Bz'_{,} - Cz_{,,} = 0$$

la quale pei valori delle A, B, C è identica; e però le linee di curvatura di una superficie saranno di quelle, che hanno le tangenti conjugate.

228. I luoghi dei centri delle sfere tangenti di una superficie ed aventi un contatto di second' ordine con una linea della sua massima curvatura, ovvero con una della minima curvatura, sono rispettive loro sviluppate.

Le coordinate a, b, c di questi luoghi ed il raggio d corrispondente hanno le proprietà di soddisfare le cinque equazioni

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - d^2 = 0,$$

$$a - x + (c - z)z' = 0, \quad y - b + (z - c)z_{,} = 0,$$

$$y' + (z' + z_{,}y')z_{,} + (z'_{,} + z_{,,}y')(z - c) = 0,$$

$$1 + (z' + y'z_{,})z' + (z'' + y'z'_{,})(z - c) = 0;$$

vale a dire, le a, b, c sono, per ogni linea di curvatura di una superficie qualsivoglia, tali funzioni della x, che soddisfanno queste medesime cinque equazioni.

La seconda e la terza derivate danno le due

$$a'-1+(c'-z'-y'z_{/})z'+(c-z)(z''+y'z'_{/})=0,$$
$$b'-y'+(c'-z'-y'z_{/})z_{/}+(c-z)(z'_{/}+y'z_{//})=0,\ \text{ossia}$$
$$a'+c'z'-\Big(1+(z'+y'z_{/})z'+(z-c)(z''+y'z'_{/})\Big)=0,$$
$$b'+c'z_{/}-\Big(y'+(z'+y'z_{/})z_{/}+(z-c)(z'_{/}+y'z_{//})\Big)=0,$$

le quali per le ultime due delle cinque anzi esposte si riducono alle semplici

$$a'+c'z'=0,\quad b'+c'z_{/}=0,$$

che combinate colla seconda e terza somministrano le

$$\left(\frac{da}{dc}\right)=\frac{a-x}{c-z},\quad \left(\frac{db}{dc}\right)=\frac{b-y}{c-z},$$

le quali significano, che la retta, della quale è parte d, è tangente le curve le cui coordinate sono a, b, c, e propriamente nel punto corrispondente a queste medesime coordinate.

Così, la prima delle cinque equazioni suddette dà

$$dd'=(a-x)(a'-1)+(b-y)(b'-y')+(c-z)(c'-z'-y'z_{/})$$

ossia

$$dd'=(a-x)a'+(b-y)b'+(c-z)c',$$

per essere $a-x+(c-z)z'+\big(b-y+(c-z)z_{/}\big)y'$ *nulla*, stante la seconda e terza già usate. Ma dalle due equazioni

$$a-x+(c-z)z'=0,\ a'+c'z'=0,\ \text{si ha}\ x-a=\frac{z-c}{c'}a';$$

e dalle

$$b-y+(c-z)z_{/}=0,\ b'+c'z_{/}=0,\ \text{hassi}\ y-b=\frac{z-c}{c'}b':$$

valori, che, sostituiti nelle equazioni

$$d^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$
$$dd' = (a-x)a' + (b-y)b' + (c-z)c'$$

somministrano

$$d = \frac{z-c}{c'} \sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)},\ dd' = \frac{z-c}{c'}(a'^2 + b'^2 + c'^2);$$

adunque sarà

$$d' = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)}.$$

Vale a dire, ciascuna delle curve aventi per coordinate a, b, c ha colla corrispondente della massima o minima curvatura due proprietà analoghe a quelle dimostrate nei paragrafi 189, 190 per le linee piane, o ciò che significa lo stesso, le prime di queste curve sono rispettivamente sviluppate delle seconde; e conseguentemente si potranno queste descrivere con facilità, quando si conosceranno le prime.

229. Dalla prima proprietà esposta nell' antecedente paragrafo emerge che, le rette normali della superficie data, nei punti di una sua linea di massima curvatura, sono toccanti di una medesima curva; e però saranno tutte in quella superficie sviluppabile, che ha questa curva per ispigolo di regresso ed è perpendicolare alla stessa superficie data. Così, le normali della medesima superficie data in quei punti, che sono in una sua linea di minima curvatura saranno anch' esse tutte in una superficie sviluppabile perpendicolare alla data ed avente per ispigolo di regresso la curva, alla quale sono tangenti esse medesime.

Gli spigoli di regresso delle superficie sviluppabili, analoghe alla prima qui nominata, sono in una superficie, che è il luogo dei centri delle massime curvature della data: così gli spigoli di regresso delle superficie sviluppabili analoghe alla seconda delle medesime qui nominate sono anch' essi in una superficie, che sarà il luogo dei centri delle minime curvature della superficie data.

Le due superficie, nelle quali esistono i centri delle curvature della data, sono distinte l'una dall'altra, ma generalmente, sono esse foglie di una medesima superficie, per cui sono rappresentate colla stessa equazione di cui si è parlato alla fine del paragrafo 227.

Troviamo l'equazione del piano tangente di questa superficie nel punto corrispondente alle coordinate a, b, c. Terremo l'equazione di questa superficie rappresentata colle quattro seguenti

$$a-x+(c-z)p=0,\quad b-y+(c-z)q=0,$$
$$(c-z)r-1-p^2+\big((c-z)s-pq\big)y'=0,$$
$$(c-z)s-pq+\big((c-z)t-1-q^2\big)y'=0,$$

dove le x, y, y' sono quantità da eliminarsi, dopo aver posto in esse le funzioni delle x, y valori delle z,

$$p=\left(\frac{dz}{dx}\right),\ q=\left(\frac{dz}{dy}\right),\ r=\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),\ s=\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right),\ t=\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right);$$

e denomineremo P, Q, R le coordinate del piano tangente.

Considerando le a, b, c funzioni delle x, y variabili indipendenti, l'equazione del piano, che è

$$R-c=(P-a)\left(\frac{dc}{da}\right)+(Q-b)\left(\frac{dc}{db}\right),$$

si ridurrà (§ 69)

$$R-c=(P-a)\frac{c'b_{,}-c_{,}b'}{a'b_{,}-a_{,}b'}+(Q-b)\frac{a'c_{,}-a_{,}c'}{a'b_{,}-a_{,}b'},$$

ove a', $a_{,}$, b', - - - esprimono $\left(\frac{da}{dx}\right)$, $\left(\frac{da}{dy}\right)$, $\left(\frac{db}{dx}\right)$, - - -.

Le due prime equazioni, delle quattro colle quali si è rappresentata la superficie dei centri di curvatura, danno, per le loro derivate rispetto alle x, y le quattro seguenti

$$a'+pc'+(c-z)r-1-p^2=0,\quad b'+qc'+(c-z)s-pq=0,$$

$$a_{,}+pc_{,}+(c-z)s-pq=0,\quad b_{,}+qc_{,}+(c-z)t-1-q^2=0;$$

ed aggiungendo alla prima e terza di queste ordinatamente la seconda e quarta di esse, moltiplicate per y', hansi le

$$a'+b'y'+(p+qy')c'+(c-z)r-1-p^2+\big((c-z)s-pq\big)y'=0,$$

$$a_{,}+b_{,}y'+(p+qy')c_{,}+(c-z)s-pq+\big((c-z)t-1-q^2\big)y'=0,$$

le quali per le ultime delle quattro rappresentanti la superficie riduconsi

$$a'+b'y'+c'(p+qy')=0,\quad a_{,}+b_{,}y'+c_{,}(p+qy')=0$$

$$\text{ossia}\quad a'+b'y'+c'z'=0,\quad a_{,}+b_{,}y'+c_{,}z'=0,$$

per essere $p+qy'=z'$.

Queste due equazioni evidentemente somministrano

$$(a'b_{,}-a_{,}b')y'+(a'c_{,}-a_{,}c')z'=0,\quad a'b_{,}-a_{,}b'+(c'b_{,}-c_{,}b')z'=0$$

$$\text{cioè}\quad \frac{c'b_{,}-b'c_{,}}{a'b_{,}-b'a_{,}}=-\frac{1}{z'},\quad \frac{a'c_{,}-c'a_{,}}{a'b_{,}-b'a_{,}}=-\frac{y'}{z'}.$$

Quindi l'equazione del piano tangente richiesta, si ridurrà alla

$$R-c=-(P-a)\frac{1}{z'}-(Q-b)\frac{y'}{z'}\quad\text{ossia}$$

$$P-a+(Q-b)y'+(R-c)z'=0,$$

la quale per essere $a=x-cp+zp$, $b=y-cq+zq$, equivale alla seguente

$$P-x+(Q-y)y'+(R-z)z'=0,$$

che è visibilmente quella del piano normale alla linea a cui si riferiscono le x, y, z, y', z'.

Ora si rifletta che, il punto corrispondente alle coordinate a, b, c è nella foglia luogo dei centri delle minime curvature della superficie data, quando le x, y, z, z', y' appartengano ad una linea della sua minima curvatura, ed è nell'altra foglia cioè nel luogo dei centri delle massime curvature, quando le x, y, z, y', z' si riferiscano ad una linea della massima curvatura della stessa superficie data; e si comprenderà che, il piano normale nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z, alla linea della minima curvatura della superficie data ossia il piano determinato dalla normale di questa superficie e dalla retta toccante la sua linea della massima curvatura, è lo stesso di quello tangente nel punto corrispondente alle coordinate a, b, c della superficie luogo dei centri delle medesime curvature; e reciprocamente, che il piano determinato dalla retta normale della superficie nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z e dalla toccante della sua linea della minima curvatura è toccante nel punto corrispondente alle a, b, c della superficie luogo dei centri delle massime curvature della medesima superficie data; ed anco, che tali piani tangenti l'una ad una e l'altro all'altra foglia della superficie luogo dei centri delle curvature della data sono perpendicolari l'uno all'altro, ed hanno i punti di contatto colla superficie dei centri nella stessa retta normale della data.

Da ciò risulta, che i due piani contemplati nel principio di questo paragrafo sono tangenti, per tutta la estensione della retta normale alla data e comune ad essi, alle due superficie sviluppabili, che passano per le linee corrispondenti della massima o minima curvatura della data; e però quelle, tra queste superficie sviluppabili, che passano per le linee delle massime curvature di una superficie qualunque saranno ortogonali a quelle, le quali passano per le linee delle minime curvature di essa: proprietà molto interessante.

Così, ciascuno di questi piani, come toccante di una superficie sviluppabile, è osculatore dello spigolo di regresso di essa (§ 216); ed è perpendicolare al piano tangente la superficie dei centri nel punto stesso, ove è osculatore; e conseguentemente lo spigolo di regresso di una qualunque superficie sviluppabile analoga alle suddette sarà una linea *geodetica* esistente nella superficie luogo dei centri di curvatura della data; ed anco, le superficie sviluppabili, che passano per le linee delle massime o minime curvature della data saranno tangenti la superficie luogo dei centri delle *minime* o massime curvature di essa lungo linee, le quali saranno conjugate (§ 222) cogli spigoli di regresso di quelle superficie sviluppabili, che passano rispettivamente per le linee delle minime o massime curvature della stessa data.

230. Siano ϕ', ψ' due valori per la y', che entra nell'ultima equazione esposta nel paragrafo 225, e d, d_1 i corrispondenti del d; e si avranno le due equazioni

$$d=\left(1+z'^2+2z'z_{/}\phi'+(1+z_{/}^2)\phi'^2\right)\alpha:(z''+2z'_{/}\phi'+z_{//}\phi'^2),$$

$$d_1=\left(1+z'^2+2z'z_{/}\psi'+(1+z_{/}^2)\psi'^2\right)\alpha:(z''+2z'_{/}\psi'+z_{//}\psi'^2)$$

ove l'α è posta in vece di $\sqrt{(1+z'^2+z_{/}^2)}$.

Con queste due equazioni si possono dimostrare le relazioni di alcune delle quantità d, d_1, ϕ', ψ' corrispondenti a relazioni o proprietà date per le altre di esse. Per esempio, se le due linee corrispondenti alle φ', ψ' avessero le tangenti conjugate, avrebbesi la equazione

$$z'' + z'_{/}(\varphi' + \psi') + z_{//}\varphi'\psi' = 0,$$

che combinata colle due esposte in modo da eliminare φ', e ψ' dà la

$$(z'' z_{//} - z'^{2}_{/})(d + d_{1}) + \alpha E = 0$$

la quale esprime, che per due qualsivogliono linee a tangenti conjugate la somma $d + d_{1}$ è costante. Così, se dovesse essere $d = d_{1}$, eguagliando tra loro i valori dei d, d_{1} esposti si ha una equazione, la quale facilmente riducesi alla seguente

$$2A\varphi'\psi' - B(\varphi' + \psi') - 2C = 0.$$

Queste relazioni dei valori del raggio d e delle tangenti degli angoli relativi alle linee, alle quali essi corrispondono, si possono desumere anco e immediatamente da quelle dei diametri delle linee del secondo ordine.

Si supponga il piano degli assi delle x, y, parallelo a quello tangente la superficie, e si avranno

$$p = 0,\ q = 0,\ \alpha = 1,\ A = z'_{/},\ B = z_{//} - z'',\ C = z'_{/};$$

per cui la equazione, che dà i valori del d, ridurrassi

$$d = (1 + y'^{2}) : (z'' + 2z'_{/}y' + z_{//}y'^{2}),$$

e quella, che dà i valori della y' corrispondenti alle linee di curvatura, ridurrassi alla

$$z'_{/}y'^{2} - (z_{//} - z'')y' - z'_{/} = 0.$$

Nella equazione $z''x^{2} + 2z'_{/}xy + z_{//}y^{2} - 1 = 0$, tra le x, y coordinate rettangole di una linea del second'ordine riportata al suo centro, si pongano $\delta : \sqrt{(1+\beta^2)}$, $\delta\beta : \sqrt{(1+\beta^2)}$ in vece delle x, y, dove δ esprime evidentemente il raggio vettore e β la tangente dell'angolo compreso da esso e dall'asse delle x; e si avrà

$$\delta^2 = (1+\beta^2) : (z'' + 2z'_{\prime}\beta + z_{\prime\prime}\beta^2).$$

I valori della β corrispondenti ai due *assi* della linea soddisferanno, siccome è noto, la equazione $z'_{\prime}\beta^2 - (z_{\prime\prime} - z'')\beta - z'_{\prime} = 0$, e quelli che corrispondono a due diametri *conjugati* di essa, che denomineremo β_1, β_2 soddisfanno la seguente $z'' + (\beta_1 + \beta_2)z'_{\prime} + z_{\prime\prime}\beta_1\beta_2 = 0$.

Ora, siccome le tre equazioni

$$d = (1+y'^2) : (z'' + 2z'_{\prime}y' + z_{\prime\prime}y'^2),$$

$$z'_{\prime}y'^2 - (z_{\prime\prime} - z'')y' - z'_{\prime} = 0,\quad z'' + (\varphi' + \psi')z'_{\prime} + z_{\prime\prime}\varphi'\psi' = 0,$$

di cui le prime due sono visibilmente le esposte dianzi e la terza è quella relativa alle linee aventi tangenti conjugate (§ 222), contengono le quantità d, y', φ', ψ', come le tre relative alle linee del second'ordine

$$\delta^2 = (1+\beta^2) : (z'' + 2z'_{\prime}\beta + z_{\prime\prime}\beta^2),$$

$$z'_{\prime}\beta^2 - (z_{\prime\prime} - z'')\beta - z'_{\prime} = 0,\quad z'' + (\beta_1 + \beta_2)z'_{\prime} + z_{\prime\prime}\beta_1\beta_2 = 0$$

contengono le δ^2, β, β_1, β_2; così le quantità d, y', φ', ψ' relative ad una superficie qualunque avranno relazioni o proprietà tra loro analoghe a quelle delle medesime δ^2, β, β_1, β_2.

LEZIONE VIII.

Dei contatti delle linee con una superficie, e delle linee corrispondenti nelle superficie parallele.

231. Si dovrebbe ora parlare dei contatti tra le linee ed una superficie, ma siccome una linea ha un contatto di un certo ordine con una superficie, quando la superficie lo abbia colla linea medesima, per cui le regole stabilite per trovare le superficie aventi contatti con una linea sono valevoli anco per rinvenire le linee, che hanno contatti dello stesso ordine con una data superficie; e d'altronde poche sono le proposizioni, nelle quali occorra la ricerca di una linea appartenente ad una data famiglia, e che abbia con una superficie individuata un contatto; così, credo di limitarmi al solo caso seguente, facile ed implicito in ciò che si è detto al § 211; cioè, a trovare quella o quelle rette, che hanno con una data superficie in un punto qualunque di essa un contatto di primo ordine.

Le equazioni della famiglia delle linee rette siano

$$q = ap + b,\ r = cp + d;$$

e quella della superficie data sia $z = F(x, y)$.

Affinchè la retta abbia colla superficie un contatto di primo ordine, gli a, b, c, d suoi parametri dovranno soddisfare le due equazioni

$$y = ax + b,\ z = cx + d$$

ed anco la $F'(x) + F'(y)y' = z'$ ossia $\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)y' = z'$, cioè la $\left(\frac{dz}{dx}\right)+a\left(\frac{dz}{dy}\right)=c$, per essere $y'=a$, e $z'=c$ stante le equazioni della retta.

Le tre equazioni, qui esposte, somministrano visibilmente tre dei parametri a, b, c, d: determiniamo gli ultimi, i quali risultano

$$c=\left(\frac{dz}{dx}\right)+a\left(\frac{dz}{dy}\right),\ b=y-ax, \text{ e } d=z-x\left(\frac{dz}{dx}\right)-ax\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Quindi le equazioni delle rette richieste, cioè di quelle aventi colla superficie un contatto di prim' ordine, saranno

$$q=ap+y-ax,\ r=\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)+a\left(\frac{dz}{dy}\right)\right)p+z-x\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)+a\left(\frac{dz}{dy}\right)\right),$$

le quali riduconsi alle seguenti

$$q-y=a(p-x),\ r-z=\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)+a\left(\frac{dz}{dy}\right)\right)(p-x).$$

232. Queste ultime equazioni, contenendo la a tutt'ora arbitraria, insegnano che infinite sono le rette, le quali possono avere in uno stesso punto di una superficie colla superficie medesima un contatto di primo ordine.

Essendo $\sqrt{(1+a^2)}:\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)+a\left(\frac{dz}{dy}\right)\right)$ la cotangente della inclinazione di una qualunque di queste rette col piano coordinato delle x, y, il valore della a, per la più inclinata a questo piano, soddisferà l'equazione $\dfrac{\sqrt{(1+a^2)}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)+a\left(\frac{dz}{dy}\right)}=\dfrac{a}{\sqrt{(1+a^2)}\left(\frac{dz}{dy}\right)}$ cioè

la $a\left(\frac{dz}{dx}\right)-\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$; e però, per le linee esistenti nella superficie qualsivoglia ed inclinate al piano coordinato delle x, y più di qualunque altra avrassi l'equazione $\left(\frac{dz}{dx}\right)y' - \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$. Così per le linee conjugate a questa si avrà (§ 222)

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) +$$
$$\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right)\psi'(x) = 0,$$

ove la $\psi'(x)$ è per questa ciò, che la y' è per le prime.

Eliminando la a stessa dalle due equazioni trovate, si ha la sola

$$r - z = (p - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (q - y)\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

la quale, non contenendo più la a, rappresenta una proprietà comune alle coordinate p, q, r di tutte le rette aventi colla superficie nello stesso punto un contatto di primo ordine; e siccome questa equazione è identica a quella del piano tangente (§ 216) della superficie nel punto di contatto tra essa e le rette; così le rette, aventi un medesimo punto di contatto di primo ordine con una superficie, saranno tutte nel piano tangente la superficie nel punto stesso.

233. Si dimostra facilissimamente che, se le rette rappresentate colle equazioni

$$q = ap + b, \quad r = cp + d$$

sono tangenti di una curva, i loro parametri a, b, c, d considerati funzioni di una di quelle ordinate della curva, che corrispondono al punto di contatto, soddisfanno la equazione

$$a'd' - b'c' = 0,$$

ove le derivate sono prese rispetto alla medesima ordinata od a qualunque altra variabile; e però la serie delle rette tangenti di una superficie lungo una linea per la quale sia $y=\psi(x)$ e rappresentate colle equazioni

$$q=p\lambda(x)+y-x\lambda(x),\ r=(z'+\lambda z_{,})p+z-x(z'+\lambda z_{,}),$$

dove l'$\lambda(x)$ esprime una funzione della x valore della a, saranno tangenti anco di una curva fuori della superficie medesima, purchè sia identica la equazione seguente

$$\big(z-x(z'+\lambda z_{,})\big)'\lambda'-(\psi-x\lambda)'(z'+\lambda z')'=\mathrm{o},\ \text{cioè la}$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\left(\lambda'(x)+\frac{\psi'}{x'}\right)+\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\lambda'(x)\frac{\psi'}{x'}=\mathrm{o},$$

la quale insegna che, la tangente la curva fuori della superficie e quella della esistente nella superficie medesima e per quale hassi $y=\psi_{,}(x)$, sono conjugate l'una dell' altra.

Se le rette rappresentate colle equazioni

$$q=ap+b,\ r=cp+d$$

incontrassero la superficie rappresentata colla $z=F(x,y)$ in quei punti pei quali $y=\psi(x)$, per cui $b=\psi-ax$, e $d=F(x,\psi)-cx$, e però

$$q=ap+\psi-ax,\ \text{ed}\ r=cp+F(x,\psi)-cx,$$

e gli a, c altri loro parametri fossero funzioni delle x, $y=\psi(x)$, la condizione necessaria, perchè siano esse tangenti di una medesima curva, sarebbe

$$(a'+a_{,}\psi')(z'+z_{,}\psi'-xc'-xc_{,}\psi'-c)-(c'+c_{,}\psi')(\psi'-xa'-xa_{,}\psi'-a)=\mathrm{o}$$

ossia $(a'z_{,}-c_{,})\psi'^2+(ac_{,}-ca_{,}+a_{,}z'+a'z_{,}-c')\psi'+ac'-ca'+a'z'=\mathrm{o}$, dove z', $z_{,}$, a', - - - sono poste in vece di

$$\left(\frac{dF}{dx}\right), \left(\frac{dF}{d\psi}\right), \left(\frac{da}{dx}\right), - - -.$$

Vale a dire, le sole incontranti la superficie al lungo dell'una o dell'altra delle due linee corrispondenti ai $\psi(x)$, ossiano $\psi'(x)$ dati da questa equazione sarebbero tangenti le une ad una e le altre ad un' altra curva esistenti fuori della superficie medesima.

Per esempio, se fosse $a = \frac{z_{,}}{z'}$, $c = -\frac{1}{z'}$, cioè se le rette fossero normali della superficie, avrebbonsi

$$a' = \frac{1}{z'^2}(z'_{,}z' - z_{,}z''),\ a_{,} = \frac{1}{z'^2}(z_{,,}z' - z_{,}z'_{,});\ c' = \frac{z''}{z'^2},\ c_{,} = \frac{z'_{,}}{z'^2}$$

$$\text{e però } a_{,}z_{,} - c_{,} = \left(z'z_{,}z_{,,} - (1 + z_{,}^2)z'_{,}\right) : z'^2,$$

$$ac_{,} - ca_{,} + a_{,}z' + a'z_{,} - c' = \left((1 + z'^2)z_{,,} - (1 + z_{,}^2)z''\right) : z'^2,$$

$$ac' - a'c + a'z' = \left((1 + z'^2)z'_{,} - z'z_{,}z''\right) : z'^2;$$

e conseguentemente l'equazione in ψ' sarebbe la stessa $Ay'^2 - By' - C = 0$, esposta al paragrafo 226. Vale a dire fra le rette normali di una superficie, le sole, che incontrano l'una o l'altra linea di curvatura di essa, sono anco tangenti di una curva fuori della superficie medesima, come si è già osservato (§ 229).

234. I punti di due superficie parallele, i quali sono in una stessa loro normale comune, si dicono tra loro corrispondenti; così le linee esistenti in due superficie parallele diconsi tra loro corrispondenti, quando ogni punto dell'una sia il corrispondente di un punto dell'altra. Vediamo quali sono le linee corrispondenti tra loro parallele.

Si immaginino due superficie parallele ed in esse due linee corrispondenti, e si chiamino x, y, z, ed s, t, u

le coordinate di due punti corrispondenti di esse linee, ed n la distanza che hanno l'una dall'altra sì le linee che le superficie.

Siccome le porzioni delle normali comuni alle due linee corrispondenti ed intercette tra esse sono tutte eguali alla n; così le medesime linee corrispondenti saranno tra loro parallele, se tali saranno le rette loro toccanti nei punti corrispondenti.

Le rette toccanti delle due linee nei punti di coordinate x, y, z, ed s, t, u essendo nei piani rispettivamente toccanti le superficie in questi medesimi punti, saranno tra loro parallele, se parallele saranno le loro projezioni nel piano delle x, y; cioè se sarà $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\left(\frac{dt}{ds}\right)$, ossia se avrà luogo la equazione

$$t'(x)-y'(x)\,s'(x)=0.$$

Dal parallelismo delle due superficie si ha

$$s=x-\frac{nz'}{\sqrt{(1+z'^2+z_{\prime}^2)}},\ \text{e}\ t=y-\frac{nz_{\prime}}{\sqrt{(1+z'^2+z_{\prime}^2)}}\ \text{ossia}$$

$$s=x-n\frac{z'}{\alpha},\ \text{e}\ t=y-n\frac{z_{\prime}}{\alpha},\ \text{posto}\ \sqrt{(1+z'^2+z_{\prime}^2)}=\alpha;$$

e però sarà

$$s'(x)=1-n\frac{z''}{\alpha}+\frac{z'z''+z_{\prime}z'_{\prime}}{\alpha^3}nz'+\left(\frac{z_{\prime}z_{\prime\prime}+z'z'_{\prime}}{\alpha^3}nz'-n\frac{z'_{\prime}}{\alpha}\right)y'(x),$$

$$t'(x)=\left(1-n\frac{z_{\prime\prime}}{\alpha}+\frac{z_{\prime}z_{\prime\prime}+z'z'_{\prime}}{\alpha^3}nz_{\prime}\right)y'(x)-n\frac{z'_{\prime}}{\alpha}+\frac{z'z''+z_{\prime}z'_{\prime}}{\alpha^3}nz_{\prime}.$$

Sostituendo questi valori delle $s'(x)$, $t'(x)$ nella equazione $t'(x)-y'(x)s'(x)=0$ e facendo alcune riduzioni, si ottiene la

$$\left((1+z_{\prime}^2)z'_{\prime}-z'z_{\prime}z_{\prime\prime}\right)y'(x)^2-$$

$$\left((1+z'^2)z_{\prime\prime}-(1+z_{\prime}^2)z''\right)y'(x)-(1+z'^2)z'_{\prime}+z'z_{\prime}z''=0,$$

che è visibilmente la stessa equazione (§ 226) delle linee di curvatura della prima superficie. E per tanto, le linee corrispondenti parallele tra loro saranno le sole linee di curvatura delle due superficie: proprietà interessante, segnatamente per la stereotomia.

235. Porrò fine alla teorica dei contatti col determinare quella linea, fra le moltissime esistenti in una superficie e tangenti tutte una retta ove questa è toccante la superficie medesima, la cui incurvatura od inflessione in questo punto è la minima rispetto a quella di qualunque altra di esse.

Denominate x, y, $z = \phi(x, y)$ le coordinate rettangole di una linea, il raggio di curvatura di essa sappiamo (§ 201) essere eguale a

$$-(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}} : \sqrt{\left(y''^2+z''^2+(y''z'-y'z'')^2\right)};$$

si dovrà per tanto determinare quella linea, esistente nella superficie rappresentata colla equazione $z = \phi(x, y)$ e tangente la retta nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z, per la quale il raggio di curvatura, ossia la espressione qui esposta, sia la massima.

Le linee essendo tutte nella superficie, per ognuna di esse sarà

$$z' = \phi'(x) + \phi'(y)y', \quad z'' = \phi'' + 2y'z'_{/} + y'^2 z_{//} + \phi_{/} \cdot y'';$$

e passando tutte pel medesimo punto della superficie, le derivate ϕ', $\phi_{/}$, ϕ'', $\phi'_{/}$, $\phi_{//}$ saranno costanti. Così, per essere le medesime linee tangenti anco la stessa retta in questo medesimo punto, saranno costanti pure le y', z'; e però il raggio di curvatura della linea richiesta, sarà il massimo valore di

$$-(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}} : \sqrt{\left(y''^2+z''^2+(y''z'-y'z'')^2\right)}$$

dipendentemente dalla sola sua componente y'', giacchè la z'' dipende dalla y''. Quindi la linea richiesta sarà quella, alla quale corrisponderà il valore della y'', che rende $y''^2 + z''^2 + (y''z' - z''y')^2$ minimo, ossia, che annulla la derivata rispetto alla y'' di questa quantità, la quale derivata è evidentemente il doppio di

$$y'' + z''\left(\frac{dz''}{dy''}\right) + (y''z' - z''y')\left(z' - y'\left(\frac{dz''}{dy''}\right)\right)$$

ovvero di

$$y'' - (y'z'' - z'y'')z' + \left(z'' - (y''z' - z''y')y'\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

per essere $\left(\frac{dz''}{dy''}\right) = \phi'(y) = \left(\frac{dz}{dy}\right)$; e per tanto le coordinate della linea soddisferanno, oltre la equazione della superficie, anco la seguente

$$y'' - (y'z'' - y''z')z' + \left(z'' - (y''z' - z''y')y'\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

alla quale visibilmente si può dare la forma

$$\left(\frac{y'}{s'}\right)' + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{z'}{s'}\right)' = 0,$$

ove la s esprima l'arco della stessa curva richiesta.

Se l'equazione della superficie fosse $F(x, y, z) = 0$, avrebbesi $\left(\frac{dz}{dy}\right) = -F'(y) : F'(z)$; e conseguentemente la linea, meno incurvata ed esistente nella superficie rappresentata colla equazione $F = 0$ fra quelle tangenti la stessa retta, sarebbe quella soddisfacente anco la equazione $F'(z)\left(\frac{y'}{s'}\right)' - F'(y)\left(\frac{z'}{s'}\right)' = 0$.

Questa linea ha molte altre interessanti proprietà, fra le quali i suoi raggi di curvatura sono perpendicolari alla superficie, cioè essa è geodetica.

Di fatto, le equazioni della retta normale alla superficie sono

$$p-x+(r-z)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0,\ q-y+(r-z)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0;$$

e le analoghe della retta di cui è parte il raggio di curvatura della linea, cioè quelle della normale principale di questa linea, sono

$$p-x+(r-z)(y'y''+z'z''):\left(z''-(z'y''-z''y')y'\right)=0,$$

$$q-y-(r-z)\left(y''+(z'y''-z''y')z'\right):\left(z''-(z'y''-z''y')y'\right)=0;$$

e però queste due rette coincideranno, se saranno soddisfatte le equazioni seguenti

$$y'y''+z'z''-\left(z''-(z'y''-z''y')y'\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0,$$

$$y''+(z'y''-z''y')z'+\left(z''-(z'y''-z''y')y'\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

la prima delle quali si riduce alla seconda, ponendo in essa per $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ il suo valore $z'-y'\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right)$; dimodochè i raggi di curvatura di una linea esistente in una superficie saranno perpendicolari alla superficie medesima, quando sia soddisfatta unicamente la equazione seconda delle qui esposte, la quale visibilmente è quella trovata superiormente per la linea della minima incurvatura fra le tangenti tra loro.

Sostituendo in quest' ultima equazione in luogo delle z'', z' i loro valori, e sciolta la risultante rispetto alla y'', si ha

$$y''=(r+2uy'+ty'^2)(py'-q):(1+p^2+q^2),$$

dove p, q, r, u, t sono poste in vece delle $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$. Questo valore della y''

ed il corrispondente della z'' sostituiti nella espressione

$$-s'^3 : \sqrt{\left(y''^2+z''^2+(y''z'-y'z'')^2\right)}$$

danno $-s'^2\sqrt{(1+p^2+q^2)} : (r+2uy'+ty'^2)$; e però il raggio di curvatura della linea trovata e quello della sfera avente un contatto di second'ordine con essa e tangente la superficie (§ 225) saranno tra loro eguali, cioè il circolo osculatore sarà un circolo massimo di tale sfera.

236. Ora dimostrerò direttamente, che, gli spigoli di regresso delle superficie sviluppabili contemplate nel paragrafo 229, sono linee geodetiche, cioè che i loro piani osculatori sono perpendicolari alla superficie nella quale esistono.

Si ritengano per le a, b, c, d, x, - - - i medesimi significati attribuitele nel paragrafo citato, e per le p, q, r, s, t gli usati dianzi. Essendo a, b, c le coordinate della linea e d l'arco di essa, basterà, che sia soddisfatta la equazione

$$\left(\frac{b'}{d'}\right)'+\left(\frac{dc}{db}\right)\left(\frac{c'}{d'}\right)'=0,$$

ove le derivate indicate cogli apici sono prese rispetto alla x una delle ordinate della curva rappresentata colla equazione

$$Ay'^2-By'-C=0;$$

giacchè la quantità $\left(\frac{b'}{d'}\right)' : \left(\frac{c'}{d'}\right)'$, e l'analoga, dove le derivate si intendano tutte prese rispetto alla a, sono tra loro eguali.

Dal paragrafo 229 si ha $\left(\frac{dc}{db}\right)=-y' : (p+qy')$, e dal paragrafo 218 hansi

$\frac{b'}{d'} = q : \sqrt{(1+p^2+q^2)}$, $\frac{c'}{d'} = -1 : \sqrt{(1+p^2+q^2)}$, e però

$$\left(\frac{b'}{d'}\right)' = \left((1+p^2)q' - pqp'\right) : (1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\left(\frac{c'}{d'}\right)' = (pp' + qq') : (1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}, \text{ ossia}$$

$$\left(\frac{b'}{d'}\right)' = \left((1+p^2)s - pqr + \left((1+p^2)t - pqs\right)y'\right) : (1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}, \text{ e}$$

$$\left(\frac{c'}{d'}\right)' = \left(pr + qs + (ps + qt)y'\right) : (1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}$$

per essere $p' = r + sy'$, e $q' = s + ty'$.

Sostituendo questi valori delle $\left(\frac{dc}{db}\right)$, $\left(\frac{b'}{d'}\right)'$, $\left(\frac{c'}{d'}\right)'$ nella equazione a soddisfarsi, e fatte alcune facili riduzioni, risulta la

$$\left((1+q^2)s - pqt\right)y'^2 - \left((1+p^2)t - (1+q^2)r\right)y' - \left((1+p^2)s - pqr\right) = 0,$$

che è appunto soddisfatta, per essere la stessa $Ay'^2 - By' - C = 0$.

LEZIONE IX.

Delle misure dei corpi e delle superficie qualsivogliono.

237. Sul quadrilatero $AMPC$ (fig. 5) suppongasi alzato un prismoide o cilindroide, che abbia per altezza A; e sui rettangoli $MKQP$, $HNQP$ due prismi ordinari che abbiano la stessa altezza A e gli spigoli paralleli a quelli del prismoide: e chiamisi $V(x)$ il volume del prismoide, $\phi(x)$ l'area del quadrilatero $AMPC$, $f(x)$ l'ordinata MP, ed ω la PQ aumento ndeterminato della ascissa $OP = x$.

Il volume del prismoide eretto sul quadrilatero $MNQP$ ed analogo a quello avente $V(x)$ per volume sarà $V(x+\omega)-V(x)$, e quelli dei prismi ordinarj alzati sui rettangoli $MKQP, HNQP$, saranno

$$\omega f(x) A,\quad \omega f(x+\omega) A;$$

e però siccome tra questi dev' essere compreso il $V(x+\omega)-V(x)$; così (§ 127) sarà

$$V'(x)=Af(x) \text{ ovvero } V=A\phi.$$

Vale a dire, il volume del prismoide eretto nel quadrilatero $AMPC$ sarà eguale al prodotto dell'area della sua base per la sua altezza. In generale, da questa medesima proposizione desumesi, che il volume di un prismoide o cilindroide, qualunque sia la figura della base di esso, è eguale al prodotto della sua altezza per l'area della medesima sua base; ed analogamente, si dimostra anco, che il volume di un corpo piramidale o conoidale qualunque eguaglia il prodotto di un terzo della sua altezza per l'area della sua base.

238. Ora, si immagini un corpo qualsivoglia, ed al medesimo fatte tre sezioni piane e fra loro parallele, l'una individuata, un'altra avente da un punto dato la distanza x e la terza dalla stessa banda di questa ed avente la distanza $x+\omega$ dal medesimo punto dato, ove l'ω esprime quantità indeterminata; e chiamisi $\phi(x)$ l'area della seconda sezione e $V(x)$ il volume di quella porzione di corpo, la quale è compresa tra questa sezione e la individuata; sarà $\phi(x+\omega)$ l'area della terza sezione, e $V(x+\omega)-V(x)$ il volume di quella porzione di corpo, che è compresa tra quest'ultima sezione e l'antecedente.

Così, si immaginino due prismoidi *retti*, una base di uno dei quali sia quella effettiva sezione del corpo, che ha per area $\phi(x)$, e l'altra sia nel piano della terza sezione; ed il secondo abbia per una base l'effettiva sezione di area $\phi(x+\omega)$ e l'altra nel piano della medesima seconda sezione: questi due prismoidi, le cui basi hanno per aree $\phi(x), \phi(x+\omega)$, avendo entrambi l'altezza ω, avranno per volumi

$$\omega\,\phi(x),\ \omega\,\phi(x+\omega).$$

Evidentemente uno di questi prismoidi, almeno per i piccioli valori d'ω, è minore e l'altro è maggiore della porzione del corpo qualunque intercetta fra le ultime due sue sezioni; così la quantità $V(x+\omega)-V(x)$ dovrà essere compresa tra le $\omega\,\phi(x), \omega\,\phi(x+\omega)$; e conseguentemente (§ 127) sarà

$$V'(x)=\phi(x),\ \text{ossia}\ V=\int\phi(x).$$

Vale a dire, la funzione della x, che rappresenta il volume del corpo compreso tra le sezioni individuata e quella avente la distanza x dal punto dato, ha per derivata l'area di quest'ultima sezione; o ciò che significa lo stesso, il volume della anzidetta porzione del corpo qualunque sarà quella primitiva della $\phi(x)$ presa rispetto alla x, che si annullerà, quando sia x eguale alla distanza della sezione individuata dal punto dato.

Se il corpo fosse uno di quelli pei quali $\phi(x)=a+bx+cx^2+dx^3$, cioè l'area di una sua sezione qualunque fosse funzione algebraica, razionale, intera e di terzo grado della x, si avrebbe

$$\int_n^m \phi(x)=\frac{n-m}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\phi(m)+\phi(n)\right)+2\phi\left(\frac{m+n}{2}\right)\right)$$

(§ 87) qualunque siano m, n. Vale a dire, il volume della parte compresa fra due sezioni sarebbe eguale ad un *terzo* della loro distanza, moltiplicata per la *semisomma* delle aree di esse insieme al *doppio* di quella da essse medesime equidistante: ciò che costituisce il così detto teorema di Torricelli relativo alle cubature. Anzi dal paragrafo 88 risulta anco, che siffatto teorema, ha luogo solamente pei corpi le cui sezioni hanno le aree funzioni algebraiche, razionali ed intere di terzo grado delle loro distanze da un medesimo punto.

239. Se il corpo fosse quello eretto perpendicolarmente sul quadrilatero $AMPC$ (fig. 5), e che ha per faccia superiore ossia opposta alla $AMPC$ la parte corrispondente della superficie data dalla equazione $z = F(x, y)$: supposto $OP = x$, $PM = y$, risulterebbe (§ 180) l'area della sezione eretta sulla linea PM, eguale alla primitiva della $z = F(x, y)$ presa rispetto alla y ed estesa dalla $y = 0$ alla $y = PM = f(x)$, cioè $\varphi = \int_f^0 F dy$; e però il volume di siffato corpo sarebbe eguale alla primitiva rispetto alla x, che comincia colla $x = OC$, di quella funzione della x già primitiva della $z = F$ presa rispetto alla y ed estesa da $y = 0$ sino all'$y = PM = f(x)$. Vale a dire sarebbe, posto $OC = m$,

$$V = \int^m \left(\int_f^0 F dy \right) dx \text{ od anco } V = \int\int F dx\, dy,$$

purchè nel trovare le primitive parziali abbiansi i riguardi emergenti dalle origini di esse; cioè, lo ripeto, trovisi la primitiva della $F(x, y)$ rispetto alla y, e si estenda dall'$y = 0$ all'$y = f(x)$, indi si trovi della quantità risultante quella primitiva rispetto alla x, che si annulla coll'$x = m$.

Anzi si osservi, che, per essere F la primitiva di 1 presa rispetto alla z estesa dalla $z=0$ alla $z=F$ ordinata della superficie, avrassi

$$V=\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz;$$

purchè si prendano le tre primitive parziali estese convenientemente.

240. Si immagini quel settore solido, che ha il vertice nella origine delle coordinate e per base quella porzione della superficie qualunque, la quale ha per projezione nel piano delle x, y il rettangolo, i cui lati sono le stesse ordinate x, y; e chiamisi U il suo volume. Una leggera riflessione combinata colle proprietà esposte nei tre paragrafi antecedenti farà comprendere la equazione

$$U=\int\!\!\int z\,dx\,dy-\frac{x}{3}\int z\,dy-\frac{y}{3}\int z\,dx,$$

e che ha luogo qualunque siano le x, y; e però con essa avrà luogo anco la sua derivata seconda parziale presa una volta rispetto alla x e l'altra alla y, la quale risulta

$$U'_{\prime}=\frac{1}{3}\left(z-xz'-yz_{\prime}\right);$$

e conseguentemente avrassi pure la seguente

$$U=\frac{1}{3}\int\!\!\int\left(z-xz'-yz_{\prime}\right)dx\,dy.$$

Anzi, questa equazione avrà luogo, qualunque sia la porzione della superficie qualsivoglia base del settore, come risulterà dai due paragrafi che seguono.

241. Passo a trovare l'area di una superficie curva, supposto conosciuta la sua equazione e quelle dei suoi contorni.

La superficie sia riportata ai tre piani xOz, zOy,

yOx (fig. 11) tra loro perpendicolari; M indichi un punto qualunque di essa, x, y, z le coordinate OP, PQ, QM di questo punto; e sia $z = F(x, y)$ la equazione data della medesima superficie.

Comincerò a trovare l'area di quella porzione di superficie, che ha per projezione nel piano yOx il rettangolo $OPQT$, i cui lati sono x, y; cioè troverò l'area del quadrilatero curvo $AMBC$.

L'area di questo quadrilatero, evidentemente cambia, cambiando il rettangolo $OPQT$ ossia col variare le x, y, e per conseguenza sarà una funzione delle stesse x, y: chiamisi essa $Q(x, y)$. Così, si chiami ω la Pp aumento indeterminato della $OP = x$, e θ il Qq aumento della $PQ = y$ pure indeterminato; e si compiscano i due rettangoli $QSpP$, $qspP$.

Essendo $Q(x, y)$ l'area di quella porzione di superficie, che corrisponde al rettangolo $OPQT$, i cui lati sono x, y, le aree di quelle porzioni della medesima superficie, le quali corrispondono analogamente ai rettangoli

$$OpST,\ PpSQ,\ Ppsq,\ QSsq$$

saranno ordinatamente

$$Q(x+\omega, y),\ Q(x+\omega, y) - Q(x, y),\ Q(x+\omega, y+\theta) - Q(x, y+\theta),$$

$$Q(x+\omega, y+\theta) - Q(x, y+\theta) - Q(x+\omega, y) + Q(x, y).$$

Quest'ultima quantità (§ 37) è eguale ad

$$\omega\,\theta\left(\frac{d^2 Q}{dx\,dy}\right) \text{ più}$$

altri termini nei quali gli aumenti ω, θ hanno almeno tre dimensioni.

La porzione di superficie, la cui area è l'ultima qui determinata, cioè quella che nel piano yOx ha per projezione il rettangolo $QSsq$, sia il quadrilatero curvilineo $MmNnLlKk$: si conducano le rette MN, NL, LK, KM e la LM, e costruiscasi il parallelogrammo $MVHI$ porzione del piano tangente in M la superficie ed avente i vertici degli angoli l'uno in M e gli altri tre nei prolungamenti delle rette SN, qK, sL, che sono ordinate della superficie corrispondenti ai punti S, q, s.

Le tre superficie *composte* l'una dei due triangoli rettilinei MLN, MLK; l'altra del quadrilatero $MmNnLlKk$ e dei segmenti $MmNM$, $NnLN$, $LlKL$, $KkMK$; e la terza dal parallelogrammo $MVHI$ insieme ai triangoli rettilinei MVN, MIK, ed ai trapezj pure rettilinei $NVHL$, $HIKL$, hanno tutte e tre l'*estremo* formato colle rette MN, NL, LK, KM, *volgono* le convessità dalla stessa banda, e la seconda abbraccia la prima ed è abbracciata dalla terza; e però, per un notissimo assioma, l'area della seconda sarà maggiore di quella della prima e minore di quella della terza, cioè la somma delle aree delle figure

$$MmNnLlKk,\ MmNM,\ NnLN,\ KkMK$$

sarà compresa tra la somma delle aree delle MLN, MLK; e quella delle

$$MVHI,\ MVN,\ NVHL,\ HIKL,\ MIK.$$

Per essere $TQ=x$, $QM=z=F(x,y)$ e $QS=\omega$, l'area del segmento $MmNM$ sarà

$$\omega F+\frac{\omega^2}{2}F'+\frac{\omega^3}{2\cdot 3}F''+\text{ecc.}-\frac{\omega}{2}\left(F(x+\omega,y)+F(x,y)\right),$$

che riducesi

$$-\frac{\omega^3}{12}F''-\text{ecc. cioè }-\frac{\omega^3}{12}z''-\text{ecc.}$$

Per una analoga ragione l'area del segmento $KkMK$ sarà $-\frac{\theta^3}{12}z_{,,}-$ ecc. Ma il segmento $NnLN$ è rispetto all'$x+\omega$, ciò che il $KkMK$ è rispetto alla x, ed il $KLlK$ è rispetto alla $y+\theta$, ciò che l'$MmNM$ è rispetto alla y; per cui le aree dei due $NnLN$, $KLlK$ sono le quantità, che si hanno, cambiando nelle espressioni

$$-\frac{\theta^3}{12}z_{,,}-\text{ecc.},\ -\frac{\omega^3}{12}z''-\text{ecc.}$$

la x in $x+\omega$ nella prima, e la y in $y+\theta$ nella seconda; quantità, i cui sviluppi ordinati secondo le potenze degli ω, θ, hanno per primi termini le stesse

$$-\frac{\theta^3}{12}z_{,,}-\text{ecc.},\ -\frac{\omega^3}{12}z''-\text{ecc.};$$

adunque la somma delle aree delle figure $MmNnLlKk$, $MmNM$, $NnLN$, $LlKL$, $KkMK$, che è la prima delle tre somme suddette, sarà

$$\omega\theta Q'_{,}+A,$$

ove la A contiene gli aumenti ω, θ almeno a tre dimensioni.

Passo a trovare la somma delle aree dei due triangoli rettilinei MLN, MLK; e comincio con quella del primo.

Questo triangolo ha per projezioni *ortogonali* sui tre piani coordinati delle x, y; x, z; y, z triangoli, le cui aree evidentemente sono

$\frac{1}{2} QS \cdot Ss$, $\frac{1}{2} QS(Ls - NS)$, $\frac{1}{2}(NS - MQ)Ss$,

ossia $\frac{1}{2}\omega\theta$, $\frac{1}{2}\omega\big(F(x+\omega, y+\theta) - F(x+\omega, \theta)\big)$,

$$\tfrac{1}{2}\theta\big(F(x+\omega, y) - F(x, y)\big),$$

cioè $\frac{\omega\theta}{2}$, $\frac{\omega\theta}{2}(z_{,} + \text{ecc.})$, $\frac{\omega\theta}{2}(z' + \text{ecc.})$;

e però l'area di esso sarà

$$\sqrt{\left(\frac{\omega^2\theta^2}{4} + \frac{\omega^2\theta^2}{4}(z_{,} + \text{ecc.})^2 + \frac{\omega^2\theta^2}{4}(z' + \text{ecc.})^2\right)},$$

che riducesi ad

$$\tfrac{1}{2}\omega\theta\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)} + \text{ecc.}$$

Similmente trovasi l'area del triangolo MLK eguale ad

$$\tfrac{1}{2}\omega\theta\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)} + \text{ecc.}:$$

i termini ommessi sì in questa che nella antecedente espressione contengono gli ω, θ almeno a tre dimensioni.

Quindi la seconda delle medesime suddette somme, cioè la somma delle aree dei due triangoli MLN, MLK, sarà

$$\omega\theta\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)} + B,$$

ove B contiene gli aumenti ω, θ almeno a tre dimensioni.

Essendo $r - z = (p - x)z' + (q - y)z_{,}$ (§ 216)

l'equazione del piano tangente in M la superficie, e le rette SV, sH i valori della ordinata r corrispondenti alle $p = x + \omega$, e $q = y$; e $p = x + \omega$, $q = y + \theta$, saranno esse rette eguali alle quantità $z + \omega z'$, $z + \omega z' + \theta z_{,}$; e però, per essere $VN = VS - NS$, ed $HL = Hs - Ls$, sarà $VN = z + \omega z' - F(x + \omega, y) = -\frac{\omega^2}{2}z'' - \text{ecc.}$, ed

$$HL = -\frac{\omega^2}{2}z'' - \omega\theta z'_{,} - \frac{\theta^2}{2}z_{,,} - \text{ecc.};$$

e conseguentemente l'area del triangolo MVN, che è il prodotto $\frac{1}{2}\omega \cdot VN$, risulterà

$$-\frac{\omega^3}{4}z'' - \text{ecc.},$$

e quella del trapezio $NVHL$, che è $\frac{1}{2}\theta(NV+LH)$, sarà

$$-\frac{\omega^2\theta}{2}z'' - \frac{\omega\theta^2}{2}z'_{,} - \frac{\theta^3}{4}z_{,,} - \text{ecc.}$$

espressioni nelle quali gli aumenti ω, θ hanno almeno tre dimensioni: una analoga proprietà ha luogo per le aree del triangolo MIK e del trapezio $HIKL$.

Per essere $QSsq$ projezione ortogonale del parallelogrammo $MVHI$, ed $\frac{1}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}}$ il coseno dell'angolo diedro fatto da questo collo stesso $QSsq$, il prodotto dell'area di $MVHI$ per $1:\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}$ eguaglierà l'area di $QSsq$, la quale è $\omega\theta$; e però l'area del parallelogrammo $MVHI$ risulterà

$$\omega\theta\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}.$$

Adunque la somma delle aree delle figure $MVHI$, MVN, $NVHL$, $HIKL$, MIK sarà

$$\omega\theta\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}+C:$$

nei termini, la cui somma è qui indicata colla C, gli aumenti ω, θ hanno almeno tre dimensioni.

Riunendo le cose qui esposte, e rammentandosi la proprietà emergente dall'assioma citato, dovranno verificarsi le relazioni seguenti

$$\omega\theta\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}+B<\omega\theta Q'_{,}+A<\omega\theta\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}+C$$

almeno pei valori delli ω, θ piccioli; e quindi (§ 142) avrassi

$$Q'_{,}=\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}.$$

Per rinvenire quella particolare funzione delle x, y, che rappresenta l' area del quadrilatero $AMBC$, si proceda nel modo seguente.

Sì trovi una primitiva rispetto alla y della funzione $\sqrt{(1 + z'^2 + z_{\prime}^2)}$, e sia $q(x, y)$; e si avrà $Q' = q(x, y) + \psi(x)$, ove la $\psi(x)$ esprime l'arbitraria voluta della operazione eseguita. Ma pel significato attuale della $Q(x, y)$ hassi $Q(x, 0) = 0$, qualunque sia la x, e però (§ 34) anco $Q'(x, 0) = 0$, per cui la eguaglianza

$$Q'(x, y) = q(x, y) + \psi(x) \text{ dà la}$$

$$0 = q(x, 0) + \psi(x) \text{ ossia } \psi(x) = -q(x, 0);$$

adunque sarà

$$Q' = q(x, y) - q(x, 0).$$

La funzione $q(x, y) - q(x, 0)$, che è quella primitiva, rispetto alla y, della $\sqrt{(1 + z'^2 + z_{\prime}^2)}$ che si annulla colla y medesima cioè $\int^{0} \sqrt{(1 + z'^2 + z_{\prime}^2)}\,dy$, per semplicità si indicherà colla $f(x, y)$, per cui si terrà $Q' = f(x, y)$.

Si trovi della $f(x, y)$ quella primitiva rispetto alla x, che annullasi colla x; e risulti $S(x, y)$, cioè sia $\int^{0} f(x, y)\,dx = S(x, y)$; e si avrà $Q = S(x, y)$, vale a dire l'area richiesta.

242. Ciò premesso, passerò a trovare l'area di quella porzione della superficie rappresentata colla equazione $z = F(x, y)$, la quale ha nel piano yOx (fig. 12) la figura $AMPO$ per projezione ortogonale, supposto data anco la equazione $MP = \phi(x)$ della linea AM - - -.

L'area qui richiesta sarà funzione della $OP = x$; si denomini $T(x)$; e sarà $T(x+\omega) - T(x)$ la porzione corrispondente al quadrilatero $MNpP$.

L'area di quel quadrilatero, porzione della superficie qualsivoglia, che ha nel piano delle y, x per projezione il rettangolo $QSpP$, sarà (§ 241)

$Q(x+\omega) - Q(x)$ od $\omega Q' + \frac{\omega^2}{2} Q'' +$ ecc. ossia

$\omega f(x, y) + \frac{\omega^2}{2} f'(x) +$ ecc.; e però le

$$\omega f\big(x, \phi(x)\big) + \text{ecc.}, \quad \omega f\big(x, \phi(x+\omega)\big) + \text{ecc.}$$

saranno quelle dei quadrilateri corrispondenti ai due rettangoli $MKpP$, $HNpP$. Ma l'area di quella porzione di superficie, che ha per projezione il trapezio $MNpP$, è minore dell'area di quella avente per projezione il rettangolo $NHpP$, e maggiore di quella, che ha per projezione l'$MKpP$; adunque dovranno verificarsi, almeno pei valori d'ω piccioli, le relazioni

$$\omega f\big(x, \phi(x)\big) + \text{ecc.} < T(x+\omega) - T(x) < \omega f\big(x, \phi(x+\omega)\big) + \text{ecc.},$$

le quali (§ 127) somministrano immediatamente

$$T'(x) = f\big(x, \phi(x)\big).$$

E per tanto sarà T quella primitiva della $f\big(x, \phi(x)\big)$ presa rispetto alla x comunque contenuta in essa, che si annullerà colla x medesima. Vale a dire, trovata di $\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}$ quella primitiva rispetto ad y, che si annulla o comincia colla $y=0$, e nella quantità risultante cambiata dovunque la y in $\phi(x)$; indi trovata della funzione della x; così ottenuta, la primitiva rispetto alla x, che comincia colla $x=0$, otterrassi l'area del quadrilatero insistente sulla figura $AMPO$.

243. Se le rette parallele all'asse Oz, e passanti per la linea avente la projezione AMB; fossero tangenti la superficie qualsivoglia, non vi sarebbe la porzione di questa superficie corrispondente al triangolo MmN: in questo caso, ecco come si potrà procedere nella dimostrazione della regola anzi esposta.

Nella superficie, si immagini una linea, la quale abbia nel piano yOx la ars per projezione: chiamisi P l'area di quella porzione di superficie, che corrisponde alla figura $arPO$, ed R l'area di quella corrispondente alla $AMra$: più suppongasi $Pr = \xi(x)$.

Dalla medesima dimostrazione esposta si ha

$$P = \int dx \int \sqrt{(1 + z'^2 + z_{/}^2)}\, dy, \text{ ed}$$

$$R = \int dx \int \sqrt{\left(1 + y'(x)^2 + y'(z)^2\right)} dz,$$

purchè la primitiva $\int (1 + z'^2 + z_{/}^2) dy$ estendasi dall'$y = 0$ all'$y = \xi(x)$, e la $\int \sqrt{\left(1 + y'(x)^2 + y'(z)^2\right)} dz$ si estenda dalla $z = F\left(x, \xi(x)\right)$ alla $z = 0$; e le due rimanenti, che sono entrambe rispetto alla x, comincino colla $x = 0$; e però sarà

$$T = \int^{0} \left(\int \sqrt{(1 + z'^2 + z_{/}^2)}\, dy + \int \sqrt{\left(1 + y'(x)^2 + y'(z)^2\right)} dz \right) dx.$$

Ma d'altronde hassi la primitiva $\int \sqrt{\left(1 + y'(x)^2 + y'(z)^2\right)} dz$ estesa dalla $z = F\left(x, \xi(x)\right)$ alla $z = 0$ *eguale* alla $\int z'(y) \sqrt{\left(1 + y'(x)^2 + y'(z)^2\right)} dy$ (§ 86) estesa dalla $y = \xi(x)$ ad $y = \phi(x)$, e però eguale anco alla primitiva egualmente estesa $\int \sqrt{(1 + z'^2 + z_{/}^2)}\, dy$, giacchè (§ 70)

$$z'(y) \sqrt{\left(1 + y'(x)^2 + y'(z)^2\right)} = \sqrt{(1 + z'^2 + z_{/}^2)};$$

adunque la quantità

$$\int \sqrt{(1 + z'^2 + z_{/}^2)}\, dy + \int \sqrt{\left(1 + y'(x)^2 + y'(z)^2\right)} dy$$

che entra nel valore della T, è la primitiva $\int \sqrt{(1 + z'^2 + z_{/}^2)}\, dy$

estesa da $y = 0$ ad $y = \xi(x)$, *più* la primitiva stessa $\int \sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}\, dy$, ma estesa da $y = \xi(x)$ sino all' $y = f(x)$; vale a dire è essa (§ 85) in sostanza la primitiva

$$\int \sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}\, dy$$

estesa dalla $y = 0$ alla $y = f(x)$. Quindi anco pel caso presente, l'unico che sfugge alla dimostrazione esposta nel paragrafo antecedente, sarà l'area T eguale alla $\int dx \int dy \sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}$ ossia alla $\iint \sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}\, dx dy$, purchè le primitive si estendano tra i limiti superiormente indicati.

LEZIONE X.

Delle trasformazioni delle primitive duplicate, triplicate, - - - aventi limini dati; e delle misure di alcuni corpi.

244. Abbiamo già veduto (§ 77), che la ricerca della primitiva $\int F(x)\, dx$ si può ridurre a quella della $\int F\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\, dt$, ove $\phi(t)$ esprime il valore della x cavato dalla equazione $f(x, t) = 0$ stabilita tra la x e la t nuova variabile; giacchè rappresentata colla $\Delta(t)$ quest' ultima primitiva, la prima risulta $\Delta\big(\psi(x)\big)$, ove $\psi(x)$ indica il valore della t tratto dalla medesima equazione $f(x, t) = 0$.

Se si volesse la $\int F(x)\, dx$ estesa dalla $x = a$ sino alla $x = b$, cioè si volesse il valore della $\int_b^a F(x)\, dx$, esso risulterebbe $\Delta\big(\psi(b)\big) - \Delta\big(\psi(a)\big)$, il quale è in sostanza la primitiva $\int F\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\, dt$, cioè $\Delta(t) + K$ estesa dalla $t = \psi(a)$ sino alla $t = \psi(b)$, valori della t corrispondenti il primo alla $x = a$ ed il secondo alla $x = b$ (§ 86).

In questa lezione faremo analoghe considerazioni per le primitive duplicate e triplicate, quando si debbano estendere tra limiti dati; e

Cominceremo dalle considerazioni seguenti, per dichiarare i significati di alcune frasi o modi di dire, che occorreranno.

Sul quadrilatero $ABCD$ (fig. 13) birettangolo si immagini eretto il corpo avente la faccia opposta alla stessa $ABCD$ nella superficie, di cui l'ordinata perpendicolare al piano delle y, x e corrispondente al punto M pel quale $OP=x$, $PM=y$, sia $z=F(x,y)$. Chiamisi V il volume di questo corpo e $\phi(x)$ la PN, ed a, b le rette OD, OC: sarà

$$V=\int\int F(x,y)\,dx\,dy;$$

purchè si estenda la primitiva $\int F(x,y)\,dy$ dalla $y=0$ sino alla y eguale alla $\phi(x)$, e la primitiva presa rispetto alla x della risultante estendasi dalla $x=a$ sino alla $x=b$. Tutto questo risulta dall'esposto nel § 239.

Ora vediamo, come bisognerebbe regolarsi, per avere lo stesso V, seguendo l'ordine indicato dalla scrittura $\int dy\int F(x,y)\,dx$.

Si conducano le AE, $pNmn$ parallele alla Ox: e cominciamo a trovare il volume del corpo insistente sul rettangolo $AECD$.

Trovisi la primitiva $\int F(x,y)dx$, e si estenda dalla $x=a$ alla $x=b$; e del risultamento si trovi la primitiva rispetto alla y, e si estenda dalla $y=0$ sino alla $y=AD$; e si avrà il volume richiesto, come risulta dallo stesso paragrafo dianzi citato.

Per avere il volume di quella porzione del V, la quale insiste sul triangolo ABE, si consideri la $F(x,y)$

come l'ordinata corrispondente al punto m, di cui le due altre sono x, y; si trovi la primitiva duplicata di essa $F(x, y)$, la prima rispetto alla x come dianzi, ma estendasi dalla $x = pN$ sino alla $x = pn$, cioè si estenda dalla x eguale al valore, che hassi collo sciogliere la equazione $y = \phi(x)$ sino alla $x = b$; e del risultato determinisi la primitiva rispetto alla y estesa dalla $y = AD$ sino alla $y = BC$; ed avrassi la attuale porzione del volume V. Nella somma dei due risultamenti qui trovati si avrà lo stesso V.

Osservando, come si è qui trovato il volume V, ed anco come si è ottenuto nel § 239, si comprende, che ottenuta la primitiva della $F(x, y)$ rispetto alla x estesa dall'estremo $DANB$ all'estremo opposto CB, e di essa la primitiva rispetto alla y estesa dalla $y = 0$ ossia dall'estremo CD, sino alla y eguale alla BC, si otterrà lo stesso volume V. Per indicare tutto questo processo, per semplicità, si dirà di estendere la primitiva duplicata $\int\int F(x, y)\,dx\,dy$ sino agli estremi della figura $ABCD$; dimodochè, in generale, le due primitive

$$\int dx \int F(x, y)\,dy\,,\ \int dy \int F(x, y)\,dx$$

significheranno la stessa identica quantità, purchè i limiti loro siano i medesimi.

245. Ciò premesso, vogliasi la $\int\int F(x, y)\,dx\,dy$, supposto, che la primitiva parziale rispetto alla y debbasi estendere dalla $y = \lambda(x)$ sino alla $y = \xi(x)$, e l'altra cioè quella rispetto alla x dalla $x = a$ alla $x = b$.

Si scriva la primitiva duplicata coll' ordine $\int dx \int F(x, y)\,dy$; e per trovare la $\int F(x, y)\,dy$, o per facilitare la determinazione di questa primitiva, debbasi supporre $y = \phi(x, u)$, ove la u esprime una nuova variabile, e propriamente quella che si vuole surrogare alla y.

La primitiva della $F(x, y)$ presa rispetto alla y ed estesa dalla $y = \lambda(x)$ alla $y = \xi(x)$ sarà come si è detto dianzi identica a quella della

$$F\big(x, \phi(x, u)\big)\phi'(u)$$

presa rispetto alla u ed estesa dal valore della u dato dalla equazione $\phi(x, u) = \lambda(x)$ a quello dato dalla $\phi(x, u) = \xi(x)$; e però $\int dx \int F(x, y)\, dy$ sarà eguale alla

$$\int dx \int F\big(x, \phi(x, u)\big)\phi'(u)\, du,$$

purchè si intenda la primitiva rispetto alla u presa tra i limiti anzidetti, e poscia quella rispetto alla x tra i medesimi limiti superiormente dichiarati; vale a dire la $\int\int F(x, y)\, dx\, dy$ primitiva richiesta sarà eguale alla

$$\int\int F\big(x, \phi(x, u)\big)\phi'(u)\, dx\, du,$$

purchè si estenda ai medesimi limiti prescritti per la richiesta medesima.

Scrivasi quest'ultima primitiva coll'ordine

$$\int du \int F\big(x, \phi(x, u)\big)\phi'(u)\, dx;$$

e per trovare la primitiva rispetto alla x della funzione $F\big(x, \phi(x, u)\big)\phi'(u)$, che per semplicità rappresenteremo colla $f(x, u)$, si voglia o convenga supporre $x = \psi(t, u)$, ove la t esprime una nuova variabile, quella cioè, che si vuole surrogare alla x medesima; e la primitiva occorrente rispetto alla x, sarà eguale alla

$$\int f\big(\psi(t, u), u\big)\psi'(t)\, dt;$$

purchè abbiansi i convenevoli riguardi pei limiti, come dianzi si è detto per quella rispetto alla u.

Quindi la primitiva $\int du \int F\big(x, \phi(x, u)\big)\phi'(u)\, dx$

ossia la $\int\int F(x, y)\,dx\,dy$ sarà eguale alla

$$\int\int f\big(\psi(t, u), u\big)\psi'(t)\,dt\,du,$$

semprechè i limiti si desumano da quelli prescritti per la $\int\int F(x, y)\,dx\,dy$, avuto riguardo che è $y = \phi(x, u)$, ed $x = \psi(t, u)$.

Si chiami $\beta(u, t)$ il risultamento, che si ha, col porre nella $\phi(x, u)$ in vece della x il suo valore $\psi(t, u)$: la equazione.

$$\phi(x, u) = \beta(t, u)$$

sarà identica, purchè si ritenga anco la seguente $x = \psi(t, u)$; e però identiche pure saranno le sue due derivate, l'una rispetto alla u e l'altra rispetto alla t, che sono

$$\phi'(u) + \phi'(x)\left(\frac{dx}{du}\right) = \beta'(u),\quad \phi'(x)\left(\frac{dx}{dt}\right) = \beta'(t) \text{ ossia}$$

$$\phi'(u) + \phi'(x)\psi'(u) = \beta'(u),\quad \phi'(x)\psi'(t) = \beta'(t).$$

Eliminisi da queste equazioni la $\phi'(x)$, e si ha la

$$\phi'(u)\psi'(t) = \psi'(t)\beta'(u) - \psi'(u)\beta'(t),$$

ove è bene riflettere, che la $\phi'(x)$ esprime ciò che hassi, ponendo nella derivata della $\phi(u, x)$ presa unicamente rispetto alla sola u visibile, in vece della x la funzione $\psi(t, u)$.

Mediante quest' ultima equazione identica si può semplificare la trasformazione della primitiva duplicata di cui si parla, trasformazione che è lo scopo principale di questo paragrafo.

La funzione $f(x, u)$ esprimendo il prodotto $F\big(x, \phi(x, u)\big)\phi'(u)$, la $f\big(\psi(t, u), u\big)$ sarà il prodotto della $F\Big(\psi(t,u), \phi\big(u, \psi(t,u)\big)\Big)$ ossia della $F\big(\psi(t, u), \beta(t, u)\big)$ per il valore anzidetto della $\phi'(u)$, e però la funzione $f(\psi, \phi)\psi'(t)$ sarà identica alla $F(\psi, \phi)\phi'(u)\psi'(t)$. Ma per l'anzi esposta equazione identica, le due espressioni

$$\varphi'(u)\psi'(t),\ \beta'(u)\psi'(t)-\beta'(t)\psi'(u)$$

significano la stessa funzione delle t, u; adunque la funzione $f(\psi, \varphi)\psi'(t)$ sarà identica alla

$$F(\psi, \beta)\big(\beta'(u)\psi'(t)-\beta'(t)\psi'(u)\big),$$

e conseguentemente la primitiva $\int\int f(\psi, u)\psi'(t)\,dt\,du$ alla seguente

$$\int\int\big(\beta'(u)\psi'(t)-\beta'(t)\psi'(u)\big)F(\psi, \beta)\,dt\,du.$$

Dimodochè quest'ultima primitiva duplicata e la proposta $\int\int F(x,y)\,dx\,dy$ esprimeranno la stessa quantità, purchè i loro limiti siano gli stessi. Vale a dire, considerando le due variabili x, y funzioni delle t, u altre due variabili indipendenti, avrassi

$$\int\int F(x, y)\,dx\,dy = \pm\int\int(x'y_{,}-y'x_{,})F(x,y)\,dt\,du,$$

ove, nel secondo membro, le x, y indicano i loro valori funzioni delle t, u, e le x', y', $x_{,}$, $y_{,}$ indicano ordinatamente $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dx}{du}\right)$, $\left(\frac{dy}{du}\right)$ derivate parziali di questi medesimi valori.

Al secondo membro dell'ultima eguaglianza ho posto il doppio segno, perchè se nelle operazioni esposte si permutassero le x, y ovvero le t, u avrebbesi

$$\int\int F(x, y)\,dx\,dy = \int\int(y'x_{,}-x'y_{,})F(x,y)\,dt\,du$$

in vece della esposta. In ogni caso particolare poi si preferirà quel segno della primitiva ottenuta, che sarà il conveniente pel significato di essa.

Se la quantità F, supposta qui sopra una funzione esplicita delle x, y, contenesse derivate parziali prese rispetto alle stesse x, y; si potrebbe avere il suo valore, che entra nella primitiva duplicata presa rispetto alle t, u, col sostituire in esso, in vece delle sue componenti derivate parziali gli effettivi loro valori formati colle x, y, indi procedere come sopra si è detto; ovvero col sostituire in luogo delle medesime derivate parziali prese rispetto alle x, y i loro valori (§ 69) formati colle derivate delle stesse quantità e delle x, y prese tutte rispetto alle variabili t, u; e poscia in luogo di queste nuove derivate parziali i loro valori formati colle t, u o funzioni di queste medesime due nuove variabili.

246. Nel paragrafo 239 abbiamo veduto, che $V = \int\int F(x, y)\,dx\,dy$; e però sarà anco

$$V = \int\int (y' x_{,} - x' y_{,}) F(x, y)\, dt\, du,$$

ove si intendano colle x, y, x', y', $x_{,}$, $y_{,}$ funzioni effettive delle t, u nuove variabili, e le primitive rispetto alle t, u estese tra i medesimi limiti delle due antecedenti prese rispetto alle x, y.

Così, nel paragrafo 243 si è trovato

$$T = \int\int \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}\, dx\, dy:$$

in questo caso la F usata nel paragrafo antecedente, che è qui $\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$, contiene appunto le $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ derivate parziali prese rispetto alle x, y della quantità z.

Essendo per la superficie $z = \phi(x, y)$, i valori delle $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ formati effettivamente colle x, y saranno $\phi'(x)$, $\phi'(y)$; e però l'attuale primitiva duplicata sarà equivalente alla

$$\int\int (y'x_{,}-x'y_{,})\sqrt{\left(1+\phi'(x)^2+\phi'(y)^2\right)}\,dt\,du\,,$$

ove si intendano colle x, y, x', y', $x_{,}$, $y_{,}$ i rispettivi loro valori funzioni delle t, u.

Dal paragrafo 69 risultano le $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ eguali alle frazioni

$$(y'z_{,}-z'y_{,}):(y'x_{,}-x'y_{,}),\ (z'x_{,}-x'z_{,}):(y'x_{,}-x'y_{,});$$

e però il radicale $\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$ eguaglierà la frazione

$$\sqrt{\left((y'x_{,}-x'y_{,})^2+(z'x_{,}-x'z_{,})^2+(y'z_{,}-z'y_{,})^2\right)}:(y'x_{,}-x'y_{,});$$

e conseguentemente la primitiva

$$\int\int\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}\,dx\,dy$$

sarà equivalente alla

$$\int\int\sqrt{\left((y'x_{,}-x'y_{,})^2+(z'x_{,}-x'z_{,})^2+(y'z_{,}-z'y_{,})^2\right)}\,dt\,du\,,$$

ritenuti però i medesimi limiti della antecedente.

Se fosse $z=\phi\cos.t$, $y=\phi\,\text{sen}.t\,\text{sen}.u$, $x=\phi\,\text{sen}.t\cos.u$, ove ϕ esprime la retta aventi i termini l'uno nella origine delle coordinate e l'altro nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z, e t l'angolo fatto da questa retta coll' asse delle z, ed u quello fatto dalla sua projezione nel piano delle x, y coll'asse delle x, avrebbonsi

$$y'x_{,}-x'y_{,}=(\phi'\,\text{sen}.t+\phi\cos.t)\phi\,\text{sen}.t\,,$$

$$y'z_{,}-z'y_{,}=(\phi\,\text{sen}.t-\phi'\cos t)\phi\,\text{sen}.t\cos.u+\phi\phi_{,}\,\text{sen}.u\,,$$

$$z'x_{,}-x'z_{,}=(\phi\,\text{sen}.t-\phi'\cos.t)\phi\,\text{sen}.t\,\text{sen}.u-\phi\phi_{,}\cos.u\,,$$

e però sarà

$$(y'x_{,}-x'y_{,})^2+(y'z_{,}-y_{,}z')^2+(z'x_{,}-x'z_{,})^2$$
$$=\varphi^2\left(\varphi_{,}^2+(\varphi^2+\varphi'^2)\,\text{sen.}^2 t\right),$$

e per conseguenza

$$S=\int\!\!\int\varphi\sqrt{\left(\varphi_{,}^2+(\varphi^2+\varphi'^2)\,\text{sen.}^2 t\right)}\,dt\,du.$$

Similmente, essendo il settore di cui si è parlato (§ 240) eguale ad

$\frac{1}{3}\int\!\!\int\left(z-x\left(\frac{dz}{dx}\right)-y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right)dxdy$, e però ad

$\frac{1}{3}\int\!\!\int(y'x_{,}-x'y_{,})\left(z-x\left(\frac{dz}{dx}\right)-y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right)dtdu$, cioè eguale ad

$\frac{1}{3}\int\!\!\int\left(z(y'x_{,}-x'y_{,})+x(y'z_{,}-z'y_{,})+y(z'x_{,}-z_{,}x')\right)dtdu$;

e pei valori delle x, y, z, qui sopra esposti; risultando

$z(y'x_{,}-x'y_{,})+x(y'z_{,}-z'y_{,})+y(z'x_{,}-x'z_{,})=\varphi^3\,\text{sen.}\,t$,

il medesimo settore sarà anco eguale ad un *terzo* della primitiva duplicata

$$\int\!\!\int\varphi^3\,\text{sen.}\,t\,dt\,du$$

estesa ai medesimi limiti della antecedente.

247. In secondo luogo abbiasi

$$Q=\int\!\!\int\!\!\int F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

ove la primitiva triplicata si debba prendere tra limiti dati.

Essendo $Q=\int dz\int\!\!\int F\,dx\,dy$,

supposto $x=\varphi(s, t, z)$, $y=\psi(s, t, z)$ ove le s, t esprimono due nuove variabili, pel § 245 sarà

$$Q=\int dz\int\!\!\int\left(\varphi'(s)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi'(s)\right)F(\varphi,\psi,z)\,dsdt,$$

ossia $Q=\int\!\!\int dt\,ds\int f(s, t, z)\,dz$,

f è posta in vece di $\big(\varphi'(s)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi'(s)\big) F(\varphi, \psi, z)$; e però, supposto $z = \xi(s, t, u)$, u nuova variabile, avrassi anco

$$Q = \int\int ds\, dt \int f\big(s, t, \xi(s, t, u)\big)\, \xi'(u)\, du \text{ ossia}$$

$$Q = \int\int\int f\big(s, t, \xi(s, t, u)\big)\, \xi'(u)\, ds\, dt\, du.$$

Si intendano colle $\beta(s, t, u)$, $\lambda(s, t, u)$ i valori delle $\varphi(s, t, z)$, $\psi(s, t, z)$ corrispondenti alla $z = \xi(s, t, u)$: evidentemente $f\big(s, t, \xi(s, t, u)\big)\, \xi'(u)$ sarà il prodotto di $F(\beta, \lambda, \xi)\, \xi'(u)$ pel valore del binomio $\varphi'(s)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi'(s)$ corrispondente alla $z = \xi(s, t, u)$. Ma dalle due equazioni identiche

$$\varphi(s, t, \xi) = \beta(s, t, u), \quad \psi(s, t, \xi) = \lambda(s, t, u)$$

si hanno

$$\varphi'(s) + \varphi'(\xi)\xi'(s) = \beta'(s),\ \varphi'(t) + \varphi'(\xi)\xi'(t) = \beta'(t),\ \varphi'(\xi)\xi'(u) = \beta'(u)$$

$$\psi'(s) + \psi'(\xi)\xi'(s) = \lambda'(s),\ \psi'(t) + \psi'(\xi)\xi'(t) = \lambda'(t),\ \psi'(\xi)\xi'(u) = \lambda'(u)$$

dalle quali, eliminando le $\varphi'(\xi)$, $\psi'(\xi)$, risultano le due

$$\varphi'(s)\xi'(u) = \beta'(s)\xi'(u) - \beta'(u)\xi'(s),\ \varphi'(t)\xi'(u) = \beta'(t)\xi'(u) - \beta'(u)\xi'(t)$$

$$\psi'(t)\xi'(u) = \lambda'(t)\xi'(u) - \lambda'(u)\xi'(t),\ \psi'(s)\xi'(u) = \lambda'(s)\xi'(u) - \lambda'(u)\xi'(s);$$

e però sarà

$$\big(\varphi'(s)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi'(s)\big)\xi'(u) \left\{ \begin{array}{l} \big(\beta'(s)\lambda'(t) - \beta'(t)\lambda'(s)\big)\xi'(u) + \\ \big(\beta'(t)\lambda'(u) - \beta'(u)\lambda'(t)\big)\xi'(s) + \\ \big(\beta'(u)\lambda'(s) - \beta'(s)\lambda'(u)\big)\xi'(t) \end{array} \right\}.$$

E qui pure, come nel paragrafo antecedente, è bene riflettere, che i simboli $\varphi'(s)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(s)$, $\psi'(t)$ usati esprimono i risultamenti, che si hanno, sostituendo $\xi(s, t, u)$, in vece della z, contenuta nelle

$$\left(\frac{d\varphi(s, t, z)}{ds}\right), \left(\frac{d\varphi(s, t, z)}{dt}\right), \left(\frac{d\psi(s, t, z)}{ds}\right), \left(\frac{d\psi(s, t, z)}{dt}\right)$$

derivate parziali prese unicamente rispetto alle s, t *visibili.*

Concludiamo per tanto, che la primitiva $\int\int\int F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ estesa tra i limiti prescritti, sarà eguale a *più* o *meno* (§ 245) la primitiva, estesa tra i medesimi limiti,

$$\int\int\int\left\{\begin{matrix}\big(\beta'(s)\lambda'(t)-\beta'(t)\lambda'(s)\big)\xi'(u)+\\ \big(\beta'(t)\lambda'(u)-\beta'(u)\lambda'(t)\big)\xi'(s)+\\ \big(\beta'(u)\lambda'(s)-\beta'(s)\lambda'(u)\big)\xi'(t)\end{matrix}\right\}F(\beta, \lambda, \xi)\,ds\,dt\,du.$$

I valori delle s, t, u corrispondenti ai limiti delle primitive a prendersi per rispetto a queste medesime variabili si determineranno, combinando i dati delle x, y, z con i valori di queste medesime formati colle s, t, u, i quali sono $\beta(s,t,u)$, $\lambda(s,t,u)$, $\xi(s,t,u)$, in un modo analogo a quello usato al fine del paragrafo 86, onde scoprire i limiti della primitiva $\int F\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$ eguale alla $\int_b^a F(x)\,dx$.

Non mi occupo delle trasformazioni delle primitive quadruplicate, --- perchè in esse non si incontrano nuove difficoltà, eccettuata la lunghezza dei calcoli; e passo in vece a far osservare, che talvolta dallo avere la equazione $Q=\int\int\int F\,dx\,dy\,dz$ si scrive in sua vece la $\left(\dfrac{d^3Q}{dx\,dy\,dz}\right)=F$; sottintendendo non ostante essere Q la primitiva triplicata della F ed estesa nei modi espressi o sottintesi. Così altre volte dall'avere $\left(\dfrac{d^3Q}{dx\,dy\,dz}\right)=F$, e dall'essere le x, y, z funzioni di altre tre variabili s, t, u anch'esse indipendenti, dicesi $\left(\dfrac{d^3Q}{ds\,dt\,du}\right)$ eguale al prodotto del sestinomio

$$\left(\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)-\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)\left(\frac{dz}{du}\right)+$$
$$\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)-\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)\right)\left(\frac{dz}{ds}\right)+$$
$$\left(\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)-\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

per ciò che hassi, sostituendo nella $F(x,y,z)$ in vece delle x,y,z i rispettivi loro valori formati colle s, t, u; ed in sostanza si intende Q eguale alla primitiva triplicata di questo prodotto presa rispetto alle s,t,u ed estesa ai medesimi limiti, tra i quali converrebbe estendere quella della $F(x,y,z)$, quando le primitive fossero prese rispetto alle x,y,z.

248. Quantunque colle regole esposte nella lezione antecedente si possa trovare il volume di un corpo qualunque, purchè si conoscano le superficie faccie di esso, non ostante, credo bene esporre la regola particolare, che conviene usare in varie occasioni, per rinvenire il volume di un corpo, il quale abbia due faccie opposte superficie qualsivogliono, e la rimanente sua superficie ortogonale ad una di queste faccie cioè generabile da una retta, la quale nel moversi, si conserva perpendicolare ad una di esse.

Comincerò dal caso, che le due faccie chiamate opposte siano tra loro parallele, cioè che le rette normali di una siano anco normali dell'altra; anzi troverò primieramente l'area di una di queste faccie parallele, ammesso che si conosca la equazione dell'altra e la loro distanza.

Le x,y,z esprimano le coordinate rettangole di un punto qualunque di quella superficie, di cui è data la equazione; ed s,t,u siano le coordinate analoghe dell' altra faccia e propriamente di quel suo punto, ove essa è incontrata da quella retta normale della data, che passa pel punto corrispondente alle x, y, z; e si chiami n la distanza delle due superficie, e Q l' area di quella le di cui coordinate sono s, t, u.

Dal § 243 si ha $\left(\frac{d^2 Q}{ds dt}\right) = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{du}{dt}\right)^2\right)}$

$$\text{ossia} \left(\frac{d^2 Q}{ds dt}\right) = \sqrt{(1 + z'^2 + z_{\prime}^2)},$$

essendo pel parallelismo delle superficie

$$\left(\frac{du}{ds}\right) = z', \left(\frac{du}{dt}\right) = z_{\prime};$$

e però (§ 246)

$$\left(\frac{d^2 Q}{dx dy}\right) = (s' t_{\prime} - s_{\prime} t') \sqrt{(1 + z'^2 + z_{\prime}^2)}.$$

Ma si ha $s = x - \frac{n z'}{\alpha}$, e $t = y - \frac{n z_{\prime}}{\alpha}$, dove $\alpha = \sqrt{(1 + z'^2 + z_{\prime}^2)}$, da cui

$$s' = 1 - \frac{nz''}{\alpha} + \frac{nz'}{\alpha^3}(z'z'' + z_{\prime}z_{\prime}'),\ t' = \frac{nz_{\prime}}{\alpha^3}(z'z'' + z_{\prime}z_{\prime}') - \frac{nz_{\prime}'}{\alpha},$$

$$t_{\prime} = 1 - \frac{nz_{\prime\prime}}{\alpha} + \frac{nz_{\prime}}{\alpha^3}(z_{\prime}z_{\prime\prime} + z'z_{\prime}'),\ s_{\prime} = \frac{nz'}{\alpha^3}(z_{\prime}z_{\prime\prime} + z'z_{\prime}') - \frac{nz_{\prime}'}{\alpha};$$

adunque sarà

$$\left(\frac{d^2 Q}{dx dy}\right) = \alpha - \frac{n}{\alpha^2}\left((1+z_{\prime}^2)z'' - 2z'z_{\prime}z_{\prime}' + (1+z'^2)z_{\prime\prime}\right) + \frac{n^2}{\alpha^3}(z''z_{\prime\prime} - z_{\prime}'^2).$$

Quindi, sostituendo in questo valore della $\left(\frac{d^2 Q}{dx dy}\right)$ in luogo delle derivate z', $z_{\prime}$, z'', $z_{\prime}'$, $z_{\prime\prime}$ i loro valori cavati dalla equazione della superficie data, si avrà una funzione delle sole x, y, nella cui primitiva duplicata presa rispetto alle x, y ed estesa ai medesimi limiti, ai quali converrà estendere quella della $\sqrt{(1 + z'^2 + z_{\prime}^2)}$

per avere l'area di quest'altra superficie, otterassi la richiesta.

249. Si chiamino R, r i raggi della massima e minima curvatura della superficie data; ed alla equazione (§ 226)

$$d = \alpha\left(E \pm \sqrt{(B^2 + 4BC)}\right) : 2(z'' z_{\prime\prime} - z_{\prime}'^2)$$

ossia alla equivalente $(z_{\prime}'^2 - z'' z_{\prime\prime}) d^2 + \alpha E d - \alpha^4 = 0$, si dia la forma

$$\frac{1}{d^2} - \frac{E}{\alpha^3} \cdot \frac{1}{d} + \frac{z'' z_{\prime\prime} - z_{\prime}'^2}{\alpha^4} = 0,$$

e si comprenderà che

$$\frac{1}{\alpha^4}(z'' z_{\prime\prime} - z_{\prime}'^2) = \frac{1}{rR}, \; \frac{1}{\alpha^3}\left((1 + z_{\prime}^2) z'' - 2 z' z_{\prime} z_{\prime}' + (1 + z'^2) z_{\prime\prime}\right)$$

ossia $\dfrac{E}{\alpha^3} = -\alpha\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r}\right)$; e però si avrà

$$\left(\frac{d^2 Q}{dx\,dy}\right) = \alpha\left(1 + \frac{n}{r} + \frac{n}{R} + \frac{n^2}{rR}\right) \text{ ovvero}$$

$$\left(\frac{d^2 Q}{dx\,dy}\right) = \left(1 + \frac{n}{r}\right)\left(1 + \frac{n}{R}\right)\sqrt{\left(1 + z'^2 + z_{\prime}^2\right)}.$$

250. Passo a trovare il volume del corpo compreso tra la superficie data e quella di area Q: rappresentisi la Q con $Q(x,y,n)$, ed il volume cercato con $V(x,y,n)$.

Essendo $Q(x,y,n)$ l'area della superficie corrispondente alla data e distante da questa di n, saranno

$$Q(x+\omega, y+\theta, n) - Q(x, y+\theta, n) - Q(x+\omega, y, n) + Q(x, y, n),$$

$$Q(x+\omega, y+\theta, n+\xi) - Q(x, y+\theta, n+\xi) - Q(x+\omega, y, n+\xi) + Q(x, y, n+\xi)$$

ovvero (§ 37) $\omega\theta\left(\dfrac{d^2 Q}{dxdy}\right) + A$, $\omega\theta\left(\dfrac{d^2 Q}{dxdy}\right) + B$

le aree delle due superficie, che corrispondono a quella porzione della data, avente per projezione nel piano delle x,y, il rettangolo, i cui lati sono gli effettivi aumenti ω, θ, e che sono distanti dalla data medesima, la prima di n e l'altra di $n+\xi$, ξ quantità analoga alle ω, θ: nelle A, B gli aumenti ω, θ, ξ hanno almeno tre dimensioni.

Similmente, pel significato della $V(x, y, n)$, il volume del corpo analogo a quello del quale si parla ed avente le due faccie parallele, le cui aree sono le dianzi trovate, è eguale a

$$V(x+\omega, y+\theta, n+\xi)-V(x, y+\theta, n+\xi)-V(x+\omega, y, n+\xi)+V(x, y, n+$$
$$-V(x+\omega, y+\theta, n)+V(x, y+\theta, n)+V(x+\omega, y, n)-V(x, y, n)$$

ossia ad $\omega\theta\xi\left(\frac{d^3 V}{dx\,dy\,dn}\right)+$ ecc. (§ 41). Ma evidentemente, questo volume dev'essere compreso tra i due prodotti

$$\left(\omega\theta\left(\frac{d^2 Q}{dx\,dy}\right)+A\right)\xi,\quad \left(\omega\theta\left(\frac{d^2 Q}{dx\,dy}\right)+B\right)\xi;$$

adunque (§ 142) sarà $\left(\frac{d^3 V}{dx\,dy\,dn}\right)=\left(\frac{d^2 Q}{dx\,dy}\right)$. Quindi avrassi

$$\left(\frac{d^3 V}{dxdydn}\right)=\left(1+\frac{n}{r}+\frac{n}{R}+\frac{n^2}{rR}\right)\sqrt{\left(1+z'^2+z_{\prime}^2\right)},$$

ovvero

$$\left(\frac{d^2 V}{dxdy}\right)=\left(n+\frac{n^2}{2r}+\frac{n^2}{2R}+\frac{n^3}{3rR}\right)\sqrt{\left(1+z'^2+z_{\prime}^2\right)};$$

giacchè $V(x, y, n)$ devesi annullare colla n, qualunque siano x, y; e le quantità r, R, $\sqrt{(1+z'^2+z_{\prime}^2)}$ sono costanti rispetto alla n medesima.

251. Ora passerò a trovare il vero volume richiesto al § 248.

Si ritengano le x, y, z per coordinate rettangole di un punto qualunque di una delle due faccie dette opposte, e propriamente della data; e si immagini la retta normale a questa superficie nel suo punto corrispondente alle x, y, z; e si chiami $\nu(x, y)$ o semplicemente ν la porzione di questa normale interna al corpo; ed i suoi valori corrispondenti alle coordinate $x+\omega, y$; $x, y+\theta$; $x+\omega, y+\theta$ saranno ordinatamente

$$\nu(x+\omega, y),\ \nu(x, y+\theta),\ \nu(x+\omega, y+\theta).$$

Così, si chiami $F(x,y)$ il volume di quella porzione del corpo stesso, che corrisponde alle x, y; e sarà evidentemente

$$\omega\,\theta\left(\frac{d^2 F}{dx\,dy}\right) + \text{ecc.}$$

il volume di quella sua parte, che corrisponde a quella porzione della superficie data, la quale ha per projezione nel piano coordinato delle x, y il rettangolo avente per lati gli effettivi aumenti ω, θ.

Si immaginino i quattro corpi aventi tutti per faccia la porzione anzidetta della superficie data, e per faccie opposte a questa le porzioni corrispondenti delle superficie parallele alla data medesima e distanti rispettivamente da questa di

$$\nu(x, y),\ \nu(x+\omega, y),\ \nu(x, y+\theta),\ \nu(x+\omega, y+\theta).$$

I volumi di questi quattro corpi saranno i risultamenti, che si avranno, ponendo nella espressione (§ 250)

$$\omega\,\theta\left(\frac{d^2 V}{dx\,dy}\right) + \text{ecc.}$$

in vece della n ordinatamente

$\nu(x, y)$, $\nu(x+\omega, y)$, $\nu(x, y+\theta)$, $\nu(x+\omega, y+\theta)$ ossia

ν, $\nu+\omega\nu'+$ ecc., $\nu+\theta\nu_{,}+$ ecc., $\nu+\omega\nu'+\theta\nu_{,}+$ ecc., che sviluppati danno polinomi, il primo termine di ciascuno dei quali è lo stesso $\omega\theta\left(\frac{d^2 V(x,y,v)}{dx\,dy}\right)$. Ma il volume

$$\omega\theta\left(\frac{d^2 F(x,y)}{dx\,dy}\right)+\text{ecc.}$$

è compreso fra il più grande ed il più piccolo dei quattro qui trovati; adunque (§ 142) sarà

$$\left(\frac{d^2 F}{dx\,dy}\right)=\left(\frac{d^2 V(x,y,v)}{dx\,dy}\right),\ \text{cioè}$$

$$\left(\frac{d^2 F}{dx\,dy}\right)=\left(v+\frac{v^2}{2r}+\frac{v^2}{2R}+\frac{v^3}{3rR}\right)\sqrt{\left(1+z'^2+z_I^2\right)}$$

e conseguentemente avrassi

$$F=\iint\left(v+\frac{v^2}{2r}+\frac{v^2}{2R}+\frac{v^3}{3rR}\right)\sqrt{\left(1+z'^2+z_I^2\right)}\,dx\,dy,$$

cioè l'F eguale alla primitiva duplicata della quantità

$$\left(v+\frac{v^2}{2r}+\frac{v^2}{2R}+\frac{v^3}{3rR}\right)\sqrt{\left(1+z'^2+z_I^2\right)}\ \text{o della}$$

$$v\sqrt{(1+z'^2+z_I^2)}-\frac{(1+z_I^2)z''-2z'z_Iz'_I+(1+z'^2)z_{II}}{2(1+z'^2+z_I^2)}v^2+\frac{z''z_{II}-z_I'^2}{\sqrt{(1+z'^2+z_I^2)^3}}$$

presa rispetto alle x, y ed estese ai limiti medesimi della superficie data.

252. Farò qui vedere, come trovare le espressioni dell'area Q e dei volumi V, F usate in alcune interessanti ricerche.

Le c, C rappresentino le lunghezze degli archi delle linee della massima e minima curvatura della superficie data, aventi un termine comune nel punto a cui corrispondono le coordinate x, y, z e gli altri in due linee individuate nella stessa superficie; così t, T

esprimano le linee corrispondenti alle c, C ed esistenti nella superficie parallela alla data alla distanza n; e la Δ esprima l'area di quella porzione della superficie data, che corrisponde alle x, y: in ultimo i simboli x', $x_{,}$, y', - - - indichino le derivate parziali $\left(\frac{dx}{dc}\right)$, $\left(\frac{dx}{dC}\right)$, $\left(\frac{dy}{dc}\right)$, - - -.

Nella relazione $\left(\frac{d^2\Delta}{dx\,dy}\right) = \sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}$ si considerino le x, y, z, Δ funzioni delle c, C; e pel § 246 si avrà

$$\left(\frac{d^2\Delta}{dcdC}\right) = \sqrt{\left((x'y_{,} - y'x_{,})^2 + (x'z_{,} - z'x_{,})^2 + (y'z_{,} - z'y_{,})^2\right)},\text{ ossia}$$

$$\left(\frac{d^2\Delta}{dcdC}\right) = \sqrt{\left((x'^2 + y'^2 + z'^2)(x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2) - (x'x_{,} + y'y_{,} + z'z_{,})^2\right)}.$$

Ma sappiamo (§ 196) che

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \left(\frac{dc}{dc}\right) = 1,\quad x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2 = \left(\frac{dC}{dC}\right) = 1,$$

e d'altronde hassi $x'x_{,} + y'y_{,} + z'z_{,} = 0$; adunque sarà

$$\left(\frac{d^2\Delta}{dcdC}\right) = 1,\text{ ossia } \Delta = \int\!\!\int dc\,dC.$$

Ragionando similmente per le Q, t, T, avrassi $\left(\frac{d^2 Q}{dtdT}\right) = 1$, ossia

$$\left(\frac{d^2 Q}{dcdC}\right) = t'T_{,} - T't_{,},\ \text{ cioè } \left(\frac{d^2 Q}{dcdC}\right) = t'T_{,},$$

per essere $t_{,}$, T' *nulle*. Ma (§ 206) hassi

$$t' = 1 + \frac{n}{r},\ T_{,} = 1 + \frac{n}{R};\ \text{adunque sarà}$$

$$\left(\frac{d^2 Q}{dcdC}\right) = \left(1 + \frac{n}{r}\right)\left(1 + \frac{n}{R}\right)\ \text{oppure}$$

$$Q'_{,} = 1 + \frac{n}{r} + \frac{n}{R} + \frac{n^2}{rR}.$$

Vale a dire, la Q sarà eguale alla primitiva seconda parziale rispetto alle c, C della quantità

$$1 + \frac{n}{r} + \frac{n}{R} + \frac{n^2}{rR}$$

estesa tra i medesimi limiti, tra i quali converrà estendere la $\int\int dc\,dC$ per avere la Q.

Combinando questo risultamento agli esposti superiormente pei volumi V, F, trovasi facilmente

$$\left(\frac{d^2V}{dc\,dC}\right) = n + \frac{n^2}{2r} + \frac{n^2}{2R} + \frac{n^3}{3rR}, \text{ e}$$

$$\left(\frac{d^2F}{dc\,dC}\right) = \nu + \frac{\nu^2}{2r} + \frac{\nu^2}{2R} + \frac{\nu^3}{3rR}:$$

quest'ultima espressione della $\left(\frac{d^2F}{dc\,dC}\right)$ è quella da me usata, senza dimostrazione, nella memoria vertente sull'equilibrio astratto delle volte.

253. Terminerò questa lezione, esponendo due proposizioni dei massimi e minimi, che divisai trattare in questo luogo anzichè nelle lezioni prima e seconda della parte quinta, affinchè riescissero meno astratte.

Le x, y, $z(x, y)$ esprimano le coordinate rettangole di un punto qualunque di una superficie qualsivoglia; e la $F(x, y)$ rappresenti una quantità relativa e dipendente dalla posizione di questo medesimo punto della stessa superficie, e la $F(x + \omega, y + \theta)$ rappresenterà l'analoga quantità pel punto di coordinate $x + \omega$, $y + \theta$, $z(x + \omega, y + \theta)$; dove le ω, θ esprimono due indeterminate.

Fra i valori delle ω, θ, che rendono le $x + \omega$, $y + \theta$, $z(x + \omega, y + \theta)$ coordinate di quei punti della superficie, che hanno la stessa distanza h da quello le cui coordinate sono x, y, z, troviamo quelli, che rendono massimo o minimo

$$F(x+\omega, y+\theta)-F(x, y)$$

aumento o decremento od in generale variazione sofferta dalla quantità $F(x, y)$ dall'uno all'altro dei due punti corrispondenti alle coordinate x, y; $x+\omega, y+\theta$.

Per semplicità, scriveremo p, q, ϕ, ψ in vece delle $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $z(x+\omega, y+\theta)$, $F(x+\omega, y+\theta)$, ed anco le derivate $\phi'(x)$, $\phi'(y)$, $\psi'(x)$, $\psi'(y)$ in vece delle loro eguali $\phi'(\omega)$, $\phi'(\theta)$, $\psi'(\omega)$, $\psi'(\theta)$.

Dev'essere soddisfatta la equazione $\omega^2+\theta^2+(\phi-z)^2-h^2=0$, e massima o minima la quantità $\psi-F$; e però (§ 159) la equazione a combinarsi con questa data, onde avere i richiesti valori delle ω, θ, sarà

$$\big(\omega+(\phi-z)\phi'(x)\big)\psi'(y)-\big(\theta+(\phi-z)\phi'(y)\big)\psi'(x)=0$$

ossia $\omega\psi'(y)-\theta\psi'(x)+(\phi-z)M=0$, dove

$$M=\phi'(x)\psi'(y)-\phi'(y)\psi'(x).$$

La equazione qui trovata, non contenendo la h, esprime una proprietà comune a tutti i punti di quella linea per ciascun dei quali la quantità

$$F(x+\omega, y+\theta)-F(x, y)$$

è la massima o la minima fra le analoghe, relative ai punti della superficie, ed equidistanti dal corrispondente alle coordinate x, y. Evidentemente, questa linea, riportata ai due assi passanti per quest'ultimo punto e paralleli a quelli delle x, y, avrà per projezione nel piano coordinato delle stesse x, y, la rappresentata colla equazione

$$\omega\psi'(y)-\theta\psi'(x)+(\phi-z)M=0,$$

ove le coordinate sono ω, θ.

L'equazione derivata esatta di questa e presa rispetto alla ω è visibilmente

$$\psi'(y) - \theta'(\omega)\psi'(x) + \left(\phi'(x) + \phi'(y)\,\theta'(\omega)\right) M$$
$$+ \omega\psi'(y)' - \theta\psi'(x)' + (\phi - z)M' = 0,$$

dove $\psi'(y)'$, $\psi'(x)'$, M' esprimono le derivate totali rispetto alla ω delle $\psi'(y)$, $\psi'(x)$, M, la quale vi è e come aumento della x, ed anco, perchè θ è funzione di essa.

Facendo in questa equazione derivata $\omega = 0$ e però $\theta = 0$, $\phi'(x) = p$, $\phi'(y) = q$, $\psi'(x) = F'(x)$, $\psi'(y) = F'(y)$, ed $M = pF'(y) - qF'(x)$, $\phi - z = 0$, si ha la

$$F'(y) - F'(x)\,\theta'(0) + \left(p + q\theta'(0)\right)\left(pF'(y) - qF'(x)\right) = 0;$$

per cui si avrà

$$(1+p^2)F'(y) - pqF'(x) - \left((1+q^2)F'(x) - pqF'(y)\right)\theta'(0) = 0,$$

ossia

$$\theta'(0) = \left\{(1+p^2)F'(y) - pqF'(x)\right\} : \left((1+q^2)F'(x) - pqF'(y)\right),$$

per espressione della tangente trigonometrica dell' angolo fatto coll' asse delle x da quella retta, che è la projezione della toccante la curva suddetta nel piano corrispondente alle x, y.

Ma per la linea esistente nella superficie qualsivoglia, e che passa pel punto di coordinate x, y, e per ogni punto della quale la quantità $F(x, y)$ è *costante*, si ha

$$F'(x) + F'(y)\,y' = 0 \quad \text{cioè} \quad F'(x) = -F'(y)\,y',$$

valore che sostituito nell' ultima equazione trovata, dà la seguente

$$1 + p^2 + pq\left(\theta'(0) + y'\right) + (1 + q^2)\,\theta'(0)\,y' = 0;$$

adunque i punti della superficie qualsivoglia ai quali corrispondono i più rapidi aumenti o decrementi ossia le più rapide variazioni della quantità $F(x, y)$, qualunque essa sia, sono in linee ortogonali a quelle, per ciascuna delle quali la $F(x, y)$ è costante: interessantissima proprietà.

254. Le x, y, z variabili indipendenti esprimano le coordinate rettangole di un punto qualunque di un corpo; e la $F(x, y, z)$ esprima una quantità relativa a questo medesimo punto e dipendente dalla posizione di esso: troviamo i valori delle indeterminate ω, θ, α, i quali rendano massimo o minimo l' incremento o decremento

$$F(x+\omega, y+\theta, z+\alpha)-F(x, y, z);$$

e che soddisfanno la equazione

$$\omega^2+\theta^2+\alpha^2-h^2=0,$$

ove la h esprime una costante.

La $F(x+\omega, y+\theta, z+\alpha)$ si denomi ψ, ed osservisi, che le derivate $\psi'(x)$, $\psi'(y)$, $\psi'(z)$ si useranno in vece delle loro eguali $\psi'(\omega)$, $\psi'(\theta)$, $\psi'(\alpha)$.

Dal § 159 risulta, che i valori richiesti delle ω, θ, α soddisfanno oltre l'equazione data anco le

$$\omega\psi'(z)-\alpha\psi'(x)=0, \quad \theta\psi'(z)-\alpha\psi'(y)=0.$$

Le funzioni della h valori delle ω, θ, α desunti da queste tre equazioni saranno i richiesti; e se in essi si varierà la h, avransi le coordinate di quella linea, per ogni punto della quale l'aumento o decremento

$$F(x+\omega, y+\theta, z+\alpha)-F(x, y, z)$$

sarà il massimo, fra i corrispondenti ai punti equidistanti da quello le cui coordinate sono le x, y, z.

Ammesso l'origine delle coordinate nel punto corrispondente alle coordinate medesime x, y, z, le ω, θ, α saranno le coordinate della linea, qui nominata; ed essa sarà rappresentata colle due equazioni trovate, cioè colle

$$\omega\psi'(z) - \alpha\psi'(x) = 0, \quad \theta\psi'(z) - \alpha\psi'(y) = 0.$$

Considerando le θ, α funzioni della ω, le due equazioni derivate esatte di queste ultime evidentemente sono

$$\psi'(z) - \psi'(x)\,\alpha'(\omega) + \omega\,\psi'(z)' - \alpha\psi'(x)' = 0,$$
$$\psi'(z)\,\theta'(\omega) - \psi'(y)\,\alpha'(\omega) + \theta\psi'(z)' - \alpha\psi'(y)' = 0,$$

dove le $\psi'(x)'$, $\psi'(y)'$, $\psi'(z)'$ significano le derivate totali delle $\psi'(x)$, $\psi'(y)$, $\psi'(z)$ prese tutte rispetto alla ω, che in queste ultime quantità vi è, e come aumento della x, e perchè le θ, α ne sono funzioni.

In queste equazioni derivate suppongasi

$$\omega = 0 \text{ e però } \theta = 0,\ \alpha = 0,$$
$$\psi'(x) = F'(x),\quad \psi'(y) = F'(y),\quad \psi'(z) = F'(z);$$

e si avranno le due

$$F'(z) - F'(x)\alpha'(0) = 0,\ F'(z)\theta'(0) - F'(y)\alpha'(0) = 0,$$

le quali fanno conoscere la retta toccante la linea di cui si parla nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z; e conseguentemente anco la direzione di questa medesima linea in generale curva.

Ma per la superficie, nella quale vi sono quei punti del corpo per ognuno dei quali la quantità $F(x, y, z)$ è costante, si hanno le due equazioni

$$F'(x) + F'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0,\quad F'(y) + F'(z)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

che danno

$$F'(x) = -F'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right),\quad F'(y) = -F'(z)\left(\frac{dz}{dy}\right);$$

valori che sostituiti nelle due ultime equazioni esposte, somministrano le

$$1+\left(\frac{dz}{dx}\right)\alpha'(0)=0,\quad \theta'(0)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\alpha'(0)=0,$$

le quali significano, che la retta toccante la curva è normale di quest'ultima superficie. Quindi le linee attraversanti il corpo, ed a seconda d'ognuna delle quali la quantità $F(x, y, z)$ riceve o soffre le più rapide variazioni, sono ortogonali alle superficie luogo dei punti, pei quali la stessa quantità $F(x, y, z)$ è costante: altra proprietà interessante sì per la teorica che per la pratica.

255. Credo bene di esporre anco le due proprietà seguenti. Chiamisi $f(x)$ quel valore della y, che dà $f'(x)$ eguale alla $\theta'(0)$ trovata nel § 253, cioè sia

$$(1+p^2+pqf')F'(y)-\left(pq+(1+q^2)f'\right)F'(x)=0:$$

così, per un'altra linea esistente anch'essa nella superficie, abbiasi $y=\lambda(x)$; ed s, t rappresentino le parti di queste due linee, che corrispondono alla x ordinata comune di esse.

Combinando l'equazione qui esposta alle due seguenti, per sè stesse evidenti,

$$F\left(x, f(x)\right)'=F'(x)+F'(y)f',\quad F\left(x, \lambda(x)\right)'=F'(x)+F'(y)\lambda'$$

talmente da eliminare le derivate parziali $F'(x)$, $F'(y)$, risulta la

$$F(x, \lambda)'s'(x)^2=\left(1+f'\lambda'+(p+qf')(p+q\lambda')\right)F(x, f)',$$

dove $s'(x)^2$ è posta in vece di $1+f'^2+(p+qf')^2$. Ma si hanno

$$F(x, f)'=F'(s)s'(x),\quad F(x, \lambda)'=F'(t)\,t'(x);$$

adunque sarà

$$F'(t)=F'(s)\left(1+f'\lambda'+(p+qf')(p+q\lambda')\right):s'(x)\,t'(x).$$

Vale a dire, la derivata presa rispetto alla t della quantità $F(x, \lambda)$ sarà eguale al prodotto della $F'(s)$ derivata rispetto alla s della $F(x, f)$, moltiplicata pel coseno dell'angolo compreso dalle rette toccanti le due linee suddette nel loro punto comune.

Similmente, si chiamino $f'(x)$, $\varphi'(x)$ le $\theta'(o)$, $\mu'(o)$ trovate nell'ultimo paragrafo, cioè abbiansi le due equazioni

$$F'(y) - F'(x)f' = o\,,\quad F'(z) - F'(x)\varphi' = o\,;$$

e siano $\lambda'(x)$, $\pi'(x)$ quantità analoghe alle $f'(x)$, $\varphi'(x)$ per un'altra linea qualunque, e le s, t esprimano quelle parti di queste due linee, che corrispondono alla x ordinata comune di esse.

Combininsi queste due equazioni alle seguenti, per sè stesse evidenti,

$$F\big(x, f(x), \varphi(x)\big)' = F'(x) + F'(y)f' + F'(z)\varphi',$$

$$F\big(x, \lambda(x), \pi(x)\big)' = F'(x) + F'(y)\lambda' + F'(z)\pi'$$

in modo da eliminare le derivate $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$; e si avrà la

$$s'^2(x)F(x, \lambda, \pi)' = (1 + \lambda' f' + \pi'\varphi')F(x, f, \varphi)', \text{ ossia}$$

$$F'(t) = F'(s)(1 + \lambda' f' + \pi'\varphi') : s'(x)\,t'(x), \text{ per essere}$$

$$F(x, f, \varphi)' = F'(s)\,s'(x), \text{ ed } F(x, \lambda, \pi)' = F'(t)\,t'(x).$$

Vale a dire, la derivata $F'(t)$ sarà qui pure eguale al prodotto della $F'(s)$, pel coseno dell'angolo compreso dalle due rette toccanti le due linee, di cui si parla, nel loro punto comune.

PARTE SETTIMA

VALORI APPROSSIMATI DELLE PRIMITIVE E CRITERI D'INTEGRABILITÀ.

LEZIONE PRIMA

Dei valori approssimati delle primitive.

256. In questa lezione si espongono in compendio alcune regole per trovare i valori approssimati delle primitive, le quali riescono utili segnatamente per quelle i cui valori non si sanno trovare in termini finiti.

Si chiami $f(x)$ la funzione della quale si voglia la primitiva, e $\varphi(x)$ la primitiva stessa.

Dalla equazione

$$\varphi(x-\omega)=\varphi(x)-\omega\varphi'(x)+\frac{\omega^2}{2}\varphi''(x)-\frac{\omega^3}{2\cdot 3}\varphi'''(x)+\text{ecc.},$$

ponendovi x in vece dell'ω, ed $f(x), f'(x), f''(x)$,--- ordinatamente in vece delle derivate $\varphi'(x), \varphi''(x), \varphi'''(x)$,---, si ha la

$$\varphi(0)=\varphi(x)-xf(x)+\frac{x^2}{2}f'(x)-\frac{x^3}{2\cdot 3}f''(x)+\text{ecc.},$$

la quale dà

$$\varphi(x)=K+xf(x)-\frac{x^2}{2}f'(x)+\frac{x^3}{2\cdot 3}f''(x)-\text{ecc.},$$

cioè la primitiva richiesta: la K posta in vece di $\varphi(0)$ esprime la costante arbitraria.

Così, per essere

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\text{ecc.}$$

evidentemente hassi $\int f(x)\,dx$ ossia

$$\phi(x)=K+xf(0)+\frac{x^2}{2}f'(0)+\frac{x^3}{2\cdot 3}f''(0)+\text{ecc.};$$

K costante arbitraria.

In generale, se risultasse

$$f(x)=ax^m+bx^n+cx^r+\text{ecc.}$$

qualunque siano i numeri $m, n, r, \text{---} a, b, c, \text{---}$, si avrebbe

$$\phi(x)=a\frac{x^{m+1}}{m+1}+b\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\frac{x^{r+1}}{r+1}+\text{ecc.}+K:$$

però, se tra gli esponenti della x uno fosse *meno* l'*unità*, per esempio l'n, avrebbesi $b\log.x$ in vece del termine $b\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

257. Si incontrano funzioni composte, che consistono nel prodotto di due o più funzioni, e per avere le loro primitive conviene e basta sviluppare in serie uno o due di questi loro fattori: darò un esempio di una funzione prodotto di due.

Abbiasi $f(x)=\dfrac{b}{\sqrt{(2ax-x^2)}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(1-2mx)}}$: sviluppando $\dfrac{1}{\sqrt{(1-2mx)}}$, si ha

$$1+mx+\frac{3}{2}m^2x^2+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 3}m^3x^3+\text{ecc.};$$

e però sarà

$$f(x)=b\left(\frac{1}{\sqrt{(2ax-x^2)}}+m\frac{x}{\sqrt{(2ax-x^2)}}+\frac{3m^2}{2}\frac{x^2}{\sqrt{(2ax-x^2)}}+\text{ecc.}\right)$$

Quindi la primitiva $\int f(x)$ sarà eguale alla somma

$$b\int\frac{1}{\sqrt{(2ax-x^2)}}+bm\int\frac{x}{\sqrt{(2ax-x^2)}}+\frac{3\cdot m^2}{2}b\int\frac{x^2}{\sqrt{(2ax-x^2)}}+\text{ecc.}:$$

le primitive, qui indicate, evidentemente sono tutte casi particolari di quella contemplata nel principio del paragrafo 97.

Per manifestare un pregio di questo metodo, troviamo effettivamente la primitiva della $f(x)$ attuale estesa dalla $x=0$ alla $x=2a$.

Essendo

$$\int\frac{x^n}{\sqrt{(2ax-x^2)}}=-\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{(2ax-x^2)}+a\,\frac{2n-1}{n}\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{(2ax-x^2)}},$$

si ha evidentemente

$$\int_{2a}^{0}\frac{x^n}{\sqrt{(2ax-x^2)}}=a\,\frac{2n-1}{n}\int_{2a}^{0}\frac{x^{n-1}}{\sqrt{(2ax-x^2)}},\ \text{ossia}$$

$$P_n=a\,\frac{2n-1}{n}\,P_{n-1}\,,\ \text{posto}\int_{2a}^{0}\frac{x^n}{\sqrt{(2ax-x^2)}}=P_n.$$

La relazione qui trovata tra le P_n, P_{n-1} dà le

$$P_{n-1}=a\frac{2n-3}{n-1}\,P_{n-2},\ P_{n-2}=a\,\frac{2n-5}{n-2}\,P_{n-3},\ \text{---}\ P_2=a\frac{3}{2}\,P_1,$$

$$\text{e}\ P_1=a\,P_0=a\pi$$

per essere P_0 ossia $\int_{2a}^{0}\frac{1}{\sqrt{(2ax-x^2)}}=\pi$; e però sarà

$$P_n=\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ \text{---}\ 7\cdot5\cdot3}{n(n-1)(n-2)\ \text{---}\ 4\cdot3\cdot2}\,\pi a^n.$$

Ma $\int_{2a}^{0}f(x)=b\left(P_0+mP_1+\frac{3m^2}{2}P_2+\frac{3\cdot5}{2\cdot3}m^3P_3+\text{ecc.}\right)$;

adunque avrassi

$$\int_{2a}^{0}f(x)\,dx=b\left(1+am+\left(\frac{3}{2}\right)^2a^2m^2+\left(\frac{3\cdot5}{2\cdot3}\right)^2a^3m^3+\left(\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot3\cdot4}\right)^2a^4m^4+\text{ecc.}\right)\pi.$$

258. Talvolta si semplifica la ricerca della primitiva di una quantità della forma

$$Ar + Brq + Crq^2 + Drq^3 + \text{ecc.},$$

dove A, B, C, D, - - - sono costanti, e le q, r funzioni della x, col processo seguente.

Si assuma la serie $r + \alpha q r + \alpha^2 q^2 r + \text{ecc.}$, la cui somma evidentemente è $\dfrac{r}{1-\alpha q}$, dove l'α esprima una costante arbitraria: si trovi la primitiva di questa frazione con uno qualunque dei metodi esposti, e sviluppata in serie somministri

$$p + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \text{ecc.};$$

le p, p_1, p_2, - - - sono funzioni della x. Essendo $\int \dfrac{r}{1-\alpha q}$ ossia

$$\int r + \alpha \int rq + \alpha^2 \int rq^2 + \text{ecc.} = p + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \text{ecc.},$$

qualunque sia l'α, si hanno le

$$\int r = p, \int rq = p_1, \int rq^2 = p_2, - - -;$$

e per tanto, la primitiva richiesta cioè quella della quantità $Ar + Brq + Crq^2 + \text{ecc.}$ sarà

$$Ap + Bp_1 + Cp_2 + \text{ecc.}$$

Così, alle volte si desidera e si può avere la primitiva di una funzione in serie ordinata secondo una legge prescritta: darò di ciò un esempio facilissimo, col trovare i coefficienti e gli esponenti della serie

$$A + Bx^a + Cx^b + Dx^c + \text{ecc.},$$

atti a renderla la primitiva della funzione $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, che è fra le contemplate nel paragrafo 78.

La equazione

$$\int\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = A + Bx^a + Cx^b + Dx^c + \text{ecc.},$$

dovendo sussistere qualunque sia la x, dà la

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = aBx^{a-1} + bCx^{b-1} + cDx^{c-1} + \text{ecc.}$$

sua derivata. Ma d'altronde hassi

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \text{ecc.},$$

adunque, qualunque sia la x, dovrà essere

$$1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\text{ecc.} = aBx^{a-1}+bCx^{b-1}+cDx^{c-1}+\text{ecc.};$$

e conseguentemente avransi le equazioni seguenti

$$a-1=0,\ aB=1,\ b-1=2,$$
$$bC=\frac{1}{2},\ c-1=4,\ cD=\frac{3}{8},\ ---,$$

le quali somministrano

$$a=1,\ B=1,\ b=3,\ C=\frac{1}{2\cdot 3},\ c=5,\ D=\frac{3}{5\cdot 8},\ ---.$$

Quindi sarà

$$\int\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = A + x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{3x^5}{8\cdot 5} + \text{ecc.},$$

dove A rimasta arbitraria significa la costante, che rende la primitiva completa.

259. Si può trovare per approssimazione la primitiva definita di una data funzione, senza sviluppare preventivamente la funzione medesima in serie. Vogliasi la $\int_a^0 f(x)\,dx$: suppongasi $x = a + t$, ove a esprime una

costante, e t una nuova variabile; e si avrà (§ 86)

$$\int_a^0 f(x)\,dx = \int_{a-\alpha}^{-\alpha} f(\alpha+t)\,dt.$$

Sia $\alpha = \frac{a}{2n}$ cioè la parte aliquota $2n$ *esima* di a; e sarà $\int_a^0 f(x)\,dx = \int_{(2n-1)\alpha}^{-\alpha} f(\alpha+t)\,dt$, e però eguale alla somma delle n primitive seguenti (§ 85)

$$\int f(\alpha+t)\,dt,\ \int f(3\alpha+t)\,dt,\ \int f(5\alpha+t)\,dt,\ ---\ \int f(2n\alpha-\alpha+t)\,dt$$

estese tutte dalla $t=-\alpha$ alla $t=\alpha$, come saranno e si sottintenderanno le occorrenti in questo medesimo paragrafo.

La difficoltà di conseguire la primitiva richiesta è così ridotta a quella di trovare la somma di queste ultime.

Comincio a trovare $\int_\alpha^{-\alpha} f(\beta+t)\,dt$, ove β esprime una costante qualunque.

Essendo

$$f(\beta+t) = f(\beta) + tf'(\beta) + \frac{t^2}{2}f''(\beta) + \frac{t^3}{2\cdot3}f'''(\beta) + \frac{t^4}{2\cdot3\cdot4}f^{IV}(\beta) + \text{ecc.},$$

posto $\phi(t)$ eguale successivamente ad

$$f(\beta) + tf'(\beta),$$

$$f(\beta) + tf'(\beta) + \frac{t^2}{2}f''(\beta),$$

$$f(\beta) + tf'(\beta) + \frac{t^2}{2}f''(\beta) + \frac{t^3}{2\cdot3}f'''(\beta) + \frac{t^4}{2\cdot3\cdot4}f^{IV}(\beta),$$

-----------------------,

ed ordinatamente $\psi(t)$ eguale a

$$\frac{t^2}{2}f''(\beta)+\frac{t^3}{2\cdot 3}f'''(\beta)+\text{ecc.},$$

$$\frac{t^3}{2\cdot 3}f'''(\beta)+\frac{t^4}{2\cdot 3\cdot 4}f^{IV}(\beta)+\text{ecc.},$$

$$\frac{t^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}f^{V}(\beta)+\frac{t^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}f^{VI}(\beta)+\text{ecc.},$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - ,

si ha $f(\beta+t)=\phi(t)+\psi(t)$ ed anco

$$\int f(\beta+t)\,dt=\int\phi(t)\,dt+\int\psi(t)\,dt.$$

Per i valori della $\phi(t)$ hansi ordinatamente

$$\int\phi(t)\,dt=2\alpha\phi(0),$$

$$\int\phi(t)\,dt=\frac{\alpha}{3}\left(\phi(-\alpha)+4\phi(0)+\phi(\alpha)\right),$$

$$\int\phi(t)\,dt=\frac{\alpha}{45}\left(7\phi(-\alpha)+32\phi\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+12\phi(0)+32\phi\left(\frac{\alpha}{2}\right)+7\phi(\alpha)\right),$$

- :

la seconda di queste equazioni è visibilmente una immediata conseguenza della esposta nel § 87, e le altre si dimostrano affatto analogamente a quella medesima.

Sostituendo in queste equazioni per le $\phi(0)$; $\phi(-\alpha)$, $\phi(0)$, $\phi(\alpha)$; $\phi(-\alpha)$, $\phi\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$, $\phi(0)$, $\phi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $\phi(\alpha)$; - - -

i loro valori desunti ordinatamente dai seguenti

$$\phi(t)=f(\beta+t)-\frac{t^2}{2}f''(\beta)-\frac{t^3}{2\cdot 3}f'''(\beta)-\text{ecc.},$$

$$\phi(t)=f(\beta+t)-\frac{t^3}{2\cdot 3}f'''(\beta)-\frac{t^4}{2\cdot 3\cdot 4}f^{IV}(\beta)-\text{ecc.},$$

$$\phi(t)=f(\beta+t)-\frac{t^5}{120}f^{V}(\beta)-\frac{t^6}{720}f^{VI}(\beta)-\text{ecc.},$$

- ,

si hanno

$$\int\varphi(t)dt = 2\alpha f(\beta),$$

$$\int\varphi(t)dt = \frac{\alpha}{3}\left(f(\beta-\alpha)+4f(\beta)+f\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\right)-\frac{\alpha^5}{36}f^{IV}(\beta)-\frac{\alpha^7}{1080}f^{VI}(\beta)-$$

$$\int\varphi(t)dt = \frac{\alpha}{45}\left(7f(\beta-\alpha)+32f\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)+12f(\beta)+32f\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)+7f\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right.\right.$$

$$-\frac{\alpha^7}{2160}f^{VI}(\beta) - \text{ecc.},$$

\- -

Così, pei valori della $\psi(t)$ sopra esposti si hanno

$$\int\psi(t)dt = \frac{\alpha^3}{3}f''(\beta)+\frac{\alpha^5}{60}f^{IV}(\beta)+\text{ecc.},$$

$$\int\psi(t)dt = \frac{\alpha^5}{60}f^{IV}(\beta)+\frac{\alpha^7}{2520}f^{VI}(\beta)+\text{ecc.},$$

$$\int\psi(t)dt = \frac{\alpha^7}{2520}f^{VI}(\beta)+\text{ecc.},$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Nella equazione

$$\int f(\beta+t)dt = \int\varphi(t)dt + \int\psi(t)\,dt$$

si pongano successivamente quei valori, dianzi trovati, delle primitive $\int\varphi(t)dt$, $\int\psi(t)dt$, che sono tra loro corrispondenti; e si otterranno le seguenti

$$\int f(\beta+t)\,dt = 2\alpha f(\beta)+\frac{\alpha^3}{3}f''(\beta)+\text{ecc.},$$

$$\int f(\beta+t)\,dt = \frac{\alpha}{3}\left(f(\beta-\alpha)+4f(\beta)+f\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\right)-\frac{\alpha^5}{90}f^{IV}(\beta)-\text{ecc.},$$

$$\int f(\beta+t)\,dt = \frac{\alpha}{45}\left(7f(\beta-\alpha)+32f\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)+12f(\beta)+32f\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)+7f(\beta\right.$$

$$+\frac{\alpha^7}{2520}f^{VI}(\beta)+\text{ecc.},$$

\- -

Ciò premesso, passo a trovare la somma delle primitive definite

$$\int f(\alpha+t)dt,\ \int f(3\alpha+t)dt,\ \int f(5\alpha+t)dt,\ ---\ f(2n\alpha-\alpha+t)dt.$$

Sostituiscansi le quantità α, 3α, 5α, ---, $(2n-1)\alpha$ alla β contenuta nelle ultime equazioni esposte; e si sommino i membri corrispondenti delle n risultanti dalla prima, ed altrettanto facciasi per le n risultanti da ogni altra; e si otterranno

$$f(x)\,dx = 2A\alpha + \frac{\alpha^3}{3}\Big(f''(\alpha)+f''(3\alpha)+f''(5\alpha)+---+f''\big((2n-1)\alpha\big)\Big)+\text{ecc.},$$

$$f(x)\,dx = B\frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^5}{90}\Big(f^{IV}(\alpha)+f^{IV}(3\alpha)+f^{IV}(5\alpha)+---+f^{IV}\big((2n-1)\alpha\big)\Big)-\text{ecc.},$$

$$f(x)\,dx = C\frac{\alpha}{45} + \frac{\alpha^7}{2520}\Big(f^{VI}(\alpha)+f^{VI}(3\alpha)+f^{VI}(5\alpha)+---+f^{VI}\big((2n-1)\alpha\big)\Big)+\text{ecc.},$$

- ,

cioè più valori approssimati della richiesta $\int_\alpha^0 f(x)dx$: dove

$$= f(\alpha)+f(3\alpha)+f(5\alpha)+---+f\big((2n-1)\alpha\big),$$

$$= f(0)+4f(\alpha)+2f(2\alpha)+4f(3\alpha)+2f(4\alpha)+---+2f\big((2n-2)\alpha\big)+ \\ + 4f\big((2n-1)\alpha\big)+f(2n\alpha),$$

$$= 7f(0)+32f\left(\frac{\alpha}{2}\right)+12f(\alpha)+32f\left(\frac{3\alpha}{2}\right)+14f(2\alpha)+32f\left(\frac{5\alpha}{2}\right)+ \\ +12f(3\alpha)+32f\left(\frac{7\alpha}{2}\right)+14f(4\alpha)+---+14f\big((2n-2)\alpha\big)+ \\ +32f\left(\left(2n-\frac{3}{2}\right)\alpha\right)+12f\big((2n-1)\alpha\big)+32f\left(\left(2n-\frac{1}{2}\right)\alpha\right)+7f(2n\alpha),$$

- .

Nella equazione seguente, per sè stessa evidente,

$$f^{(r)}(x+\theta)-f^{(r)}(x) = \theta f^{(r+1)}(x)+\frac{\theta^2}{2}f^{(r+2)}(x)+\text{ecc.},$$

pongansi in vece della x successivamente c, $c+\theta$, $c+2\theta$, - - -, $c+(n-1)\theta$; e somminsi i membri corrispondenti delle n risultanti, ed avrassi la

$$f^{(r)}(c+n\theta)-f^{(r)}(c)=\theta P_{r+1}+\frac{\theta^2}{2}P_{r+2}+\text{ecc.},$$

ove P_{r+1}, P_{r+2}, - - - esprimono le somme di quei valori delle derivate $f^{(r+1)}(x)$, $f^{(r+2)}(x)$, - - -, che corrispondono alla $x=c$, $c+\theta$, $c+2\theta$, - - -, $c+(n-1)\theta$.

Quest' ultima equazione e quelle, che si hanno, cambiando in essa la r in $r+1$, $r+2$, - - - danno

$$P_{r+1}=\frac{1}{\theta}\left(f^{(r)}(c+n\theta)-f^{(r)}(c)\right)-\frac{\theta}{2}P_{r+2}-\text{ecc.},$$

$$P_{r+2}=\frac{1}{\theta}\left(f^{(r+1)}(c+n\theta)-f^{(r+1)}(c)\right)-\frac{\theta}{2}P_{r+3}-\text{ecc.},$$

- -;

e però sarà

$$P_{r+1}=\frac{1}{\theta}\left(f^{(r)}(c+n\theta)-f^{(r)}(c)\right)-\frac{1}{2}\left(f^{(r+1)}(c+n\theta)-f^{(r+1)}(c)\right)$$

più altri termini nei quali vi sono ordinatamente θ, θ^2, θ^3, - - -.

Con questa espressione della quantità P_{r+1}, i valori della primitiva $\int_a^0 f(x)\,dx$, sopra trovati, si riducono

$$2A\alpha+\frac{\alpha^2}{12}\left(f'\big((2n+1)\alpha\big)-f'(\alpha)\right)+\text{ecc.},$$

$$B\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha^4}{180}\left(f'''\big((2n+1)\alpha\big)-f'''(\alpha)\right)-\text{ecc.},$$

$$C\frac{\alpha}{45}+\frac{\alpha^6}{5040}\left(f^{V}\big((2n+1)\alpha\big)-f^{V}(\alpha)\right)+\text{ecc.},$$

- -.

Dimodochè, se la α sarà scelta tanto piccola da rendere trascurabili quei termini nei quali vi è α^2, ovvero α^4, oppure α^6, - - - si potrà ritenere ordinatamente $\int_a^0 f(x)\,dx$ espressa con $2A\alpha$, ovvero con $B\frac{\alpha}{3}$, oppure con $C\frac{\alpha}{45}$, - - -; e la difficoltà di avere questi valori della $\int_a^0 f(x)\,dx$ sarà ridotta a trovare correlativamente gli $n+1$, $2n+1$, $4n+1$, - - - valori della $f(x)$, che entrano a comporre le quantità A, B, C, - - -.

260. Non parlo dei metodi per trovare approssimatamente le primitive semplici degli ordini superiori, nè delle duplicate, triplicate, - - -, perchè non presentano nessuna difficoltà, avuto riguardo a ciò che si è esposto qui sopra per le semplici del primo ordine, e nel paragrafo 107 per le duplicate; e pongo fine a questa lezione col ridurre la ricerca della primitiva $\int f(x)\,dx$ a quella della primitiva di un' altra quantità positiva, qualunque sia il valore della variabile, e con alcune riflessioni costituenti il paragrafo seguente.

Chiamisi t una nuova variabile, e stabiliscasi la equazione di relazione seguente $x - f(x)\,\text{tang.}\,t = 0$ tra essa e la x. Scelta t per variabile principale, la primitiva $\int f(x)\,dx$ equivale alla $\int f(x)\,x'\,dt$. Ma la equazione di relazione stabilita dà

$$x' - f' \cdot \text{tang.}\,t - f \cdot \frac{1}{\cos.^2 t} = 0, \text{ ossia}$$

$$2x'f - (xf)' - x^2 - f^2 = 0$$

per essere $\text{tang.}\,t = \frac{x}{f(x)}$; adunque sarà

$$x'f = \frac{1}{2}(xf)' + \frac{1}{2}(x^2 + f^2), \text{ ossia}$$

$$\int f x' dt = \frac{1}{2} x f(x) + \frac{1}{2}\int \left(x^2 + f(x)^2\right) dt.$$

Vale a dire la primitiva $\int f(x)\,dx$ dipenderà da quella presa rispetto alla t della quantità $x^2 + f(x)^2$ positiva per qualunque valore della variabile.

261. Dal § 180 risulta l'area del trapezio $AMPC$ (fig. 5) eguale alla primitiva della ordinata PM estesa dalla $x = OC$ sino alla $x = OP$; e però, supposto l'ordinata PM la stessa funzione $f(x)$, della quale si voglia la primitiva estesa per esempio dalla $x = a$ alla $x = a + c$ cioè la $\int_{a+c}^{a} f(x)\,dx$, basterà trovare l'area del trapezio analogo all'$AMPC$ i cui lati paralleli corrispondono alle ascisse a, $a + c$. Così, la primitiva duplicata $\int_{b+e}^{b} dy \int_{a+c}^{a} F(x, y)\,dx$ sarà eguale al volume di un corpo analogo a quello considerato nel § 239 ed ai cui estremi corrispondono $x = a$, $x = a + c$, ed $y = b$, $y = b + e$.

Questa osservazione, mediante la quale si riduce la ricerca della primitiva di una data funzione, di una o di due variabili, a trovare l'area di un trapezio analogo a quello contemplato nel § 180 ovvero a trovare il volume di un corpo analogo a quello considerato nel § 239 può riescire utile in varie occasioni come è facile l'immaginarsi.

LEZIONE II.

Dei criteri d'integrabilità
delle funzioni di una sola variabile principale.

262. Tutte le funzioni di una sola variabile hanno primitive, cioè sono derivate di altre funzioni, le quali si possono ottenere almeno in serie; ma ciò non ha luogo per tutte le funzioni composte di due o più variabili e delle derivate loro; anzi il maggior numero di queste non ha assolutamente primitive.

L'esposizione di alcune proprietà di quelle tra queste ultime funzioni, che hanno primitive ossia che sono derivate di altre funzioni mancanti di primitive ineseguibili, per cui si chiamano *derivate esatte*, forma lo scopo principale di questa lezione; ed esse sono quelle proprietà, le quali si dicono criteri d'integrabilità.

263. Comincerò ad esporre una trasformazione del polinomio

$$A\omega + B\omega' + C\omega'' + D\omega''' + E\omega^{IV} + \text{ecc.},$$

ove l'ω esprime una funzione qualunque della x, e le A, B, C, D, - - - altrettante funzioni semplici o composte della x medesima.

Pel § 27 si hanno

$$B\omega' = (B\omega)' - \omega B',$$
$$C\omega'' = (C\omega' - C'\omega)' + \omega C'',$$
$$D\omega''' = (D\omega'' - D'\omega' + D''\omega)' - \omega D''',$$
$$E\omega^{IV} = (E\omega''' - E'\omega'' + E''\omega' - E'''\omega)' + \omega E^{IV},$$
- ;

e però il polinomio $A\omega + B\omega' +$ ecc. sarà equivalente all'

$$\omega(A - B' + C'' - D''' + E^{IV} - \text{ecc.})$$
$$+ [\omega(B - C' + D'' - E''' + \text{ecc.}) + \omega'(C - D' + E'' - \text{ecc.}) +$$
$$\omega''(D - E' + \text{ecc.}) + \omega'''(E - \text{ecc.}) + - - - - - - -]'$$

ossia all'

$$\omega P + (\omega A_1 + \omega' B_1 + \omega'' C_1 + \omega''' D_1 + \text{ecc.})'$$

posto

$$P = A - B' + C'' - D''' + E^{IV} - \text{ecc.}$$
$$A_1 = B - C' + D'' - E''' + \text{ecc.}$$
$$B_1 = C - D' + E'' - \text{ecc.}$$
$$C_1 = D - E' + \text{ecc.}$$
$$D_1 = E - \text{ecc.}$$
$$- .$$

Trattando il polinomio

$$\omega A_1 + \omega' B_1 + \omega'' C_1 + \omega''' D_1 + \text{ecc.},$$

come si è trattato sopra l' $A\omega + B\omega' + C\omega'' + \text{ecc.}$, trovasi esso equivalente all'

$$\omega P_1 + (\omega A_2 + \omega' B_2 + \omega'' C_2 + \text{ecc.})'$$

dove

$$P_1 = A_1 - B_1' + C_1'' - D_1''' + \text{ecc.},\ A_2 = B_1 - C_1' + D_1'' - \text{ecc.}$$
$$B_2 = C_1 - D_1' + \text{ecc.},\ C_2 = D_1 - \text{ecc.},\ - - - - - - - - - -$$

ossia

$$P_1 = B - 2C' + 3D'' - 4E''' + \text{ecc.},\ A_2 = C - 2D' + 3E'' - \text{ecc.}$$
$$B_2 = D - 2E' + \text{ecc.},\ C_2 = E - \text{ecc.},\ - - - - - - - - - - .$$

Così, trattando l' $\omega A_2 + \omega' B_2 + \omega'' C_2 +$ ecc. similmente dei due antecedenti, trovasi esso equivalente all'

$$\omega P_2 + (\omega A_3 + \omega' B_3 + \text{ecc.})'$$

dove

$P_2 = C - 3D' + 6E'' -$ ecc., $A_3 = D - 3E' +$ ecc.,

$B_3 = E -$ecc., - .

Quindi si avrà

$$A\omega + B\omega' + C\omega'' + D\omega''' + E\omega^{IV} + - - - + L\omega^{(n)}$$

eguale ad

$$\omega P + (\omega A_1 + \omega' B_1 + \omega'' C_1 + \omega''' D_1 + \text{ecc.})',$$

ossia ad

$$\omega P + (\omega P_1)' + (\omega A_2 + \omega' B_2 + \omega'' C_2 + \text{ecc.})'',$$

ovvero ad

$$\omega P + (\omega P_1)' + (\omega P_2)'' + (\omega A_3 + \omega' B_3 + \text{ecc.})''',$$

- -

e finalmente ad

$$\omega P + (\omega P_1)' + (\omega P_2)'' + (\omega P_3)''' + - - - - + (\omega P_n)^{(n)}$$

dove le P, P_1, P_2, - - - esprimono le quantità

$A - B' + C'' -$ ecc., $B - 2C' + 3D'' -$ ecc., $C - 3D' + 6E'' -$ ecc., - - -

e finalmente P_n è lo stesso L coefficiente dell' ultimo termine del polinomio.

264. Ciò premesso, suppongasi il polinomio $A\omega + B\omega' + C\omega'' +$ ecc. una derivata esatta; e derivata esatta sarà pure il suo equivalente

$$\omega P + (\omega A_1 + \omega' B_1 + \omega'' C_1 + \text{ecc.})';$$

ma questo ha la seconda parte, che è per sè stessa una derivata esatta; adunque l'altra sua parte, che è ωP, dovrà essere anch'essa una derivata esatta, ovvero sparire cioè esser *nulla*. Non può essere derivata esatta; giacchè se fosse tale, la funzione sua primitiva conterrebbe l'ω ed avrebbe per derivata una quantità, che, dovendo essere ωP, non conterrebbe la ω', ciò che è assurdo. Quindi sarà $\omega P = 0$, che dà P ossia

$$A - B' + C'' - D''' + E^{IV} - \text{ecc.} = 0,$$

essendo l'ω arbitraria.

Vale a dire, se il polinomio $A\omega + B\omega' + C\omega'' + \text{ecc.}$ sarà una derivata esatta, le quantità A, B, C, - - - renderanno identica la equazione seguente

$$A - B' + C'' - D''' + E^{IV} - \text{ecc.} = 0.$$

Così, se $A\omega + B\omega' + C\omega'' + \text{ecc.}$ fosse una derivata esatta del secondo ordine, tale sarebbe anco

$$\text{l'}\,\omega P + (\omega P_1)' + (\omega A_2 + \omega' B_2 + \omega'' C_2 + \text{ecc.})'';$$

e però avrebbesi non solo $P = 0$ ma anco $P_1 = 0$; cioè sarebbero identiche le due equazioni

$$A - B' + C'' - D''' + E^{IV} - \text{ecc.} = 0,$$

$$B - 2C' + 3D'' - 4E''' + \text{ecc.} = 0.$$

In generale, se il polinomio, di cui si parla, fosse una derivata esatta dell'ordine *m esimo*, tale sarebbe anco il suo equivalente

$$\omega P + (\omega P_1)' + (\omega P_2)'' + \text{- - -} + (\omega P_{m-1})^{(m-1)} + (\omega A_m + \text{ecc.})^{(m)};$$

e però risulterebbero identiche tutte le m equazioni seguenti

$$P = 0,\ P_1 = 0,\ P_2 = 0,\ \text{- - -},\ P_{m-1} = 0.$$

265. Reciprocamente, se le equazioni

$$P=0,\ P_1=0,\ P_2=0,\ ---,\ P_{m-1}=0$$

saranno identiche, il polinomio $A\omega+B\omega'+C\omega''+$ecc. sarà una derivata esatta dell' ordine *m esimo*; giacchè per tale proprietà il suo equivalente

$$\omega P+(\omega P_1)'+(\omega P_2)''+----+(\omega P_{m-1})^{(m-1)}+(\omega A_m+\text{ecc.})^{(m)}$$

si riduce alla sola sua parte $(\omega A_m+\text{ecc.})^{(m)}$.

266. Ora, si abbia la funzione

$$f(x,y,y',y'',y''',---y^{(n)}),$$

la quale sia derivata esatta *m esima*, qualunque funzione della x sia quella espressa colla y; cioè esista una funzione

$$F(x,y,y',y'',---y^{(n-m)})$$

primitiva dell' ordine *m esimo* della f: la equazione

$$f(x,y,y',y'',y''',---y^{(n)})=F(x,y,y',y'',---y^{(n-m)})^{(m)}$$

sarà identica.

In questa equazione pongasi $y+i\omega$ in vece della y, e però $y'+i\omega'$, $y''+i\omega''$, --- ordinatamente in vece delle y', y'', ---; dove la i esprime una costante arbitraria e l' ω una funzione qualsivoglia della x: si sviluppino entrambi i membri della risultante, ed avrassi la seguente

$$f+if_1+i^2f_2+\text{ecc.}=F^{(m)}+iF_1^{(m)}+i^2F_2^{(m)}+\text{ecc.}$$

I simboli f_1, F_1, f_2, F_2, --- hanno qui significati analoghi a quelli attribuiti ai medesimi nel § 58.

L' equazione trovata dà evidentemente le

$$f_1=F_1^{(m)},\ f_2=F_2^{(m)},\ ---:$$

noi contempleremo la prima, la quale significa, che il polinomio f_1 cioè

$$\omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'') + \text{ecc.}$$

dev' essere una derivata esatta dell' ordine *m esimo*, qualunque funzione della x sia quella indicata dalla ω.

Questo polinomio, contenendo le ω, ω', ω'', - - - nel solo modo *visibile*, ed essendo derivata esatta dell' ordine *m esimo*, ridurrà identiche le m equazioni seguenti

$$\begin{aligned} f'(y) - f'(y')' + f'(y'')'' - f'(y''')''' + \text{ecc.} &= 0, \\ f'(y') - 2f'(y'')' + 3f'(y''')'' - \text{ecc.} &= 0, \\ f'(y'') - 3f'(y''')' + \text{ecc.} &= 0, \\ \text{-----------} &: \end{aligned}$$

tutto ciò risulta dall' esposto nel § 264 rispetto al polinomio $A\omega + B\omega' + \text{ecc.}$

267. Se nella f vi fossero, oltre le x, y, y', y'', y''', - - - $y^{(n)}$, anco le z, z', z'', - - -, u, u', u'', u''', - - -, - - -; e fosse *m esima* derivata esatta, ragionando come nel § antecedente, troverebbesi, che dev' essere derivata esatta del medesimo ordine *m esimo* anco il polinomio

$$\begin{aligned} &\omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'') + \omega''' f'(y''') + \text{ecc.} + \\ &\theta f'(z) + \theta' f'(z') + \theta'' f'(z'') + \theta''' f'(z''') + \text{ecc.} + \\ &\alpha f'(u) + \alpha' f'(u') + \alpha'' f'(u'') + \alpha''' f'(u''') + \text{ecc.} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

indipendentemente non solo dalle funzioni y, z, u, - - - ma anco dalle ω, θ, α, - - -: le θ, α, - - - esprimono per rispetto alle z, u, - - - ciò che l'ω è rispetto alla y. E per tanto, siccome le parti di questo polinomio contenenti le θ, θ', θ'', - - -; α, α', α'', - - -; - - - sono separatamente trasformabili come la prima parte di esso; così possiamo concludere che, essendo l'attuale funzione f derivata esatta del primo ordine, saranno identiche le equazioni

$$f'(y)-f'(y')'+f'(y'')''-f'(y''')'''+\text{ecc.}=0,$$
$$f'(z)-f'(z')'+f'(z'')''-f'(z''')'''+\text{ecc.}=0,$$
$$f'(u)-f'(u')'+f'(u'')''-f'(u''')'''+\text{ecc.}=0,$$
$$-\,-;$$

e se sarà derivata dell' ordine m *esimo*, saranno identiche m equazioni analoghe alle m ultime esposte nel paragrafo antecedente, più altre m formate colla z, altre m colla u, - - -, come le medesime del paragrafo antecedente lo sono colla y.

268. La f sia derivata esatta del primo ordine, e contenga le sole x, y, y': l'equazione identica sarà

$$f'(y)-f'(y')'=0 \text{ ossia } A-B'=0,$$
$$\text{posto } f'(y)=A, \text{ ed } f'(y')=B.$$

Essendo $B'=B'(x)+B'(y)y'+B'(y')y''$, la equazione $A-B'=0$ riducesi alla

$$A-B'(x)-B'(y)y'-B'(y')y''=0,$$

la quale, contenendo la y'' nel solo modo visibile, si decompone nelle due

$$A-B'(x)-B'(y)y'=0,\quad B'(y')=0.$$

L'equazione $B'(y')=0$ insegna, che la B non deve contenere la y', o che dev'essere $B=\phi(x,y)$ funzione delle sole x, y; e però sarà $f'(y')=\phi(x,y)$ ossia $f=\psi(x,y)+y'\phi(x,y)$, ove la ψ esprime un'altra funzione delle sole x, y.

Questo valore della f dà $f'(y)$ cioè $A=\psi'(y)+y'\varphi'(y)$; per cui la prima delle medesime ultime due equazioni si ridurrà alla seguente

$$\psi'(y)+y'\varphi'(y)-\varphi'(x)-y'\varphi'(y)=0, \text{ ossia } \psi'(y)-\varphi'(x)=0.$$

Vale a dire, se la $f(x, y, y')$ sarà una derivata esatta, essa avrà la forma $\psi(x, y)+y'\varphi(x, y)$, ed inoltre renderà o sarà identica la equazione $\psi'(y)-\varphi'(x)=0$.

269. Nella f derivata esatta del primo ordine vi siano solamente x, y, y', y'': dovrà essere identica la equazione $f'(y)-f'(y')'+f'(y'')''=0$.

Questa equazione somministra immediatamente f della forma $\psi(x, y, y')+y''\varphi(x, y, y')$, valore che riduce la medesima equazione identica alla

$$\psi'(y)+y''\varphi'(y)-\left(\psi'(y')+y''\varphi'(y')\right)'+\left(\varphi(x, y, y')\right)''=0,$$

$$\text{ovvero } \psi'(y)+y''\varphi'(y)-\left(\psi'(y')+y''\varphi'(y')-\varphi'\right)'=0.$$

Pongasi $\psi'(y')+y''\varphi'(y')-\varphi'$ ovvero

$$\psi'(y')-\varphi'(x)-y'\varphi'(y)=\mu(x, y, y'):$$

$$\text{sarà } \psi'(y)+y''\varphi'(y)-\mu'=0 \text{ ossia}$$

$$\psi'(y)-\mu'(x)-y'\mu'(y)+y''\varphi'(y)-y''\mu'(y')=0;$$

equazione che, dovendo essere identica, si decompone nelle due seguenti

$$\psi'(y)-\mu'(x)-y'\mu'(y)=0, \quad \varphi'(y)-\mu'(y')=0,$$

le quali saranno identiche entrambe, semprechè $f(x, y, y', y'')$ sia derivata esatta.

270. In generale, se la funzione $f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})$ è una derivata esatta, la equazione

$$f'(y)-f'(y')'+f'(y'')''-\ldots\pm f'(y^{(n)})^{(n)}=0, \text{ ossia}$$

$$f'(y^{(n)})^{(n)}-f'(y^{(n-1)})^{(n-1)}+f'(y^{(n-2)})^{(n-2)}-\ldots\pm f'(y)=0$$

sarà identica, e si decomporrà in n equazioni anch'esse tutte identiche.

Nello sviluppo della *n esima* derivata di $f'(y^{(n)})$ compare il termine $f''(y^{(n)})y^{(2n)}$, ed è il solo in tutta la equazione, qui esposta, nel quale vi sia la derivata $y^{(2n)}$; e però sarà $f''(y^{(n)})=0$ cioè $f=\psi+y^{(n)}\phi$, dove ψ, ϕ esprimono due funzioni delle sole $x, y, y', y'', --- y^{(n-1)}$. Questo valore della f riduce la medesima equazione esposta alla

$$\phi^{(n)}-\left[\psi'(y^{(n-1)})+y^{(n)}\phi'(y^{(n-1)})\right]^{(n-1)}+\left[\psi'(y^{(n-2)})+y^{(n)}\phi'(y^{(n-2)})\right]^{(n-2)}$$

$$-\left[\psi'(y^{(n-3)})+y^{(n)}\phi'(y^{(n-3)})\right]^{(n-3)}+-------------$$

$$\mp\left[\psi'(y')+y^{(n)}\phi'(y')\right]'\pm\left(\psi'(y)+y^{(n)}\phi'(y)\right)=0.$$

Si ponga $\psi'(y^{(n-1)})-\phi(x, y, y', --- y^{(n-2)})'=p_1$,

$$\psi'(y^{(n-2)})-p_1(x, y, y', --- y^{(n-2)})'=p_2,$$

$$\psi'(y^{(n-3)})-p_2(x, y, y', --- y^{(n-2)})'=p_3,$$

$$-----------------------$$

$$\psi'(y')-p_{n-2}(x, y, y', --- y^{(n-2)})'=p_{n-1},$$

$$\psi'(y)-p'_{n-1}(x, y, y', --- y^{(n-2)})'=p_n;$$

ed osservisi che

$$\phi' = \phi(x, y, y', --- y^{(n-2)})'+y^{(n)}\ \phi'(y^{(n-1)}),$$

$$p'_1 = p_1(x, y, y', --- y^{(n-2)})'+y^{(n)}\ p'_1(y^{(n-1)}),$$

$$p'_2 = p_2(x, y, y', --- y^{(n-2)})'+y^{(n)}\ p'_2(y^{(n-1)}),$$

$$-----------------------$$

$$p'_{n-1}=p_{n-1}(x, y, y', --- y^{(n-2)})'+y^{(n)}p'_{n-1}(y^{(n-1)}),$$

e la equazione, trovata dianzi, si ridurrà alla

$$\Big[\big(\phi'(y^{(n-2)})-p'_1(y^{(n-1)})\big)y^{(n)}\Big]^{(n-2)}-\Big[\big(\phi'(y^{(n-3)})-p'_2(y^{(n-1)})\big)y^{(n)}\Big]^{(n-3)}$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - \mp\Big[\big(\phi'(y')-p'_{n-2}(y^{(n-1)})\big)y^{(n)}\Big]'$$

$$\pm\big(\phi'(y)-p'_{n-1}(y^{(n-1)})\big)y^{(n)}\pm p_n=0,$$

la quale, dovendo essere identica, si decompone nelle n seguenti

$$\phi'(y^{(n-2)})-p'_1(y^{(n-1)})=0,\quad \phi'(y^{(n-3)})-p'_2(y^{(n-1)})=0,$$

$$- - - - - - - - - - - - -,\quad \phi'(y')-p'_{n-2}(y^{(n-1)})=0,$$

$$\phi'(y)-p'_{n-1}(y^{(n-1)})=0,\quad p_n=0,$$

ciascuna delle quali sarà per sè stessa identica.

Si rifletta, che, essendoci qui sopra occorso di indicare quella parte della derivata di una funzione composta $F(p, q, r, s)$, la quale è presa rispetto alla sola x contenuta in alcune delle componenti $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$, si è usato il simbolo $F(- - -)'$, scrivendo tra le due parentesi quelle sole componenti, nelle quali vi è la x a contemplarsi; e che tal simbolo userassi anco in altre circostanze analoghe: dimodochè, per indicare le derivate della funzione composta $F(p, q, r, s)$ prese rispetto alla sola x contenuta nelle componenti p, q; p, r, s; - - - scriverassi ordinatamente

$$F(p, q)',\quad F(p, r, s)',\quad - - -.$$

Si badi però, che le scritture ossiano i simboli $F'(p)'$, $F'(s)'$, - - - significheranno sempre le derivate totali rispetto alla x contenuta in tutte le componenti delle $F'(p)$, $F'(s)$, - - -.

271. Le n equazioni identiche nelle quali si decompone la

$$f'(y)-f'(y')'+f'(y'')''- - - - \pm f'(y^{(n)})^{(n)}=0,$$

quando l'n sia eguale almeno a *tre* cioè la f contenga almeno la y''', non sono essenzialmente differenti l'una dall' altra.

Di fatto, supposto che nella f vi siano x, y, y', y'', y''', e però

$f = \psi(x, y, y', y'') + y''' \phi(x, y, y', y'')$, la equazione

$$f'(y) - f'(y')' + f'(y'')'' - f'(y''')''' = 0$$

si trova equivalente alle tre seguenti

$\phi'(y') - p_1'(y'') = 0$, $\phi'(y) - p_2'(y'') = 0$, $p_3 = 0$, dove

$$p_1 = \psi'(y'') - \phi(x, y, y')', \quad p_2 = \psi'(y') - p_1(x, y, y')',$$
$$p_3 = \psi'(y) - p_2(x, y, y')'.$$

Ma, sostituendo in esse questi valori delle p_1, p_2, p_3, si riducono alle tre

$$\psi''(y'') - 2\phi'(y') - \phi'(y'')' = 0,$$
$$[\psi''(y'') - 2\phi'(y') - \phi'(y'')]' = 0,$$
$$\psi'(y) - \psi'(y')' - \psi'(y'')'' - \phi'' = 0;$$

adunque la seconda è contenuta nella prima di esse. Vale a dire, la equazione

$$f'(y) - f'(y')' + f'(y'')'' - f'(y''')''' = 0$$

in sostanza si decompone in *due* e non in *tre*.

272. La $f(x, y, z, y', z')$ sia derivata esatta: saranno identiche (§ 269) le due equazioni

$f'(y) - f'(y')' = 0$, $f'(z) - f'(z') = 0$ cioè le seguenti

$$f'(y) - \phi'(x) - y'\phi'(y) - z'\phi'(z) - y''\phi'(y') - z''\phi'(z') = 0,$$
$$f'(z) - \psi'(x) - y'\psi'(y) - z'\psi'(z) - y''\psi'(y') - z''\psi'(z') = 0:$$

le ϕ, ψ sono qui poste in vece delle $f'(y')$, $f'(z')$.

Queste due equazioni, dovendo essere identiche, danno le sei

$$\phi'(y')=0,\quad \phi'(z')=0,\quad \psi'(z')=0,\quad \psi'(y')=0,$$
$$f'(y)-\phi'(x)-y'\phi'(y)-z'\phi'(z)=0,$$
$$f'(z)-\psi'(x)-y'\psi'(y)-z'\psi'(z)=0.$$

Essendo

$$\phi'(y')=\left(\frac{d^2f}{dy'^2}\right),\ \phi'(z')=\left(\frac{d^2f}{dy'dz'}\right)=\psi'(y'),\ \psi'(z')=\left(\frac{d^2f}{dz'^2}\right)$$

le prime quattro di queste medesime sei equazioni equivalgono alle tre

$$\left(\frac{d^2f}{dy'^2}\right)=0,\ \left(\frac{d^2f}{dy'dz'}\right)=0,\ \left(\frac{d^2f}{dz'^2}\right)=0,$$

le quali insegnano (§ 109), che la f ha la forma

$$A+By'+Cz'$$

dove le A, B, C sono funzioni delle sole x, y, z; e però sarà $f'(y')$ ossia $\phi=B$, $f'(z')$ ovvero $\psi=C$. Questi valori delle f, ϕ, ψ riducono le altre due delle sei anzidette equazioni alle

$$A'(y)+z'C'(y)-B'(x)-z'B'(z)=0,$$
$$A'(z)+y'B'(z)-C'(x)-y'C'(y)=0,$$

le quali danno $A'(y)=B'(x)$, $A'(z)=C'(x)$, $B'(z)=C'(y)$. Quindi, se la $f(x, y, z, y', z')$ sarà derivata esatta, avrà la forma seguente

$$A+By'+Cz',$$

ed inoltre le A, B, C renderanno identiche le tre equazioni

$$A'(y)=B'(x),\ A'(z)=C'(x),\ B'(z)=C'(y).$$

In generale, una funzione tra un numero qualunque di variabili $x, y, z, u, ---$ e le $y', z', u', ---$ derivate delle $y, z, u, ---$ prese rispetto alla x, se sarà derivata esatta, avrà la forma $A+By'+Cz'+Du'+$ecc. ove le $A, B, C, D, ---$ non contengono le $y', z', u', ---$, e ridurrà identiche tutte le equazioni seguenti

$$A'(y)=B'(x),\ A'(z)=C'(x),\ A'(u)=D'(x),\ ---,$$

$$B'(z)=C'(y),\ B'(u)=D'(y), ---,\ C'(u)=B'(z), ---.$$

273. Le proprietà della funzione f, sin qui esposte, sono necessarie, affinchè la f sia una derivata esatta; dimodochè, se una funzione di due o più variabili e delle derivate loro non avrà proprietà analoghe a quelle esposte per la f, essa non sarà assolutamente derivata esatta: ora passeremo ad esaminare, se tali proprietà siano sufficienti o bastanti, perchè la funzione sia una derivata esatta: e cominceremo dalla $f(x, y, y')$.

Affinchè questa funzione sia derivata esatta, deve soddisfare almeno la equazione $f'(y)-f'(y')'=0$; e però, per quello che abbiamo esposto, dovrà avere la forma $\psi+y'\phi$, ed essere in oltre identica la equazione $\psi'(y)=\phi'(x)$. Questa proprietà è sufficiente, perchè la $f(x, y, y')$ sia derivata esatta.

Di fatto, sia $F(x, y)$ la primitiva rispetto alla y della $\phi(x, y)$, cioè abbiasi $\phi=F'(y)$; e si avrà $\phi'(x)=\left(\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\right)$ e però $\psi'(y)=\left(\dfrac{dF'(x)}{dy}\right)$ ossia ψ eguale ad $F'(x)+\xi'(x)$, ove $\xi'(x)$ esprime una funzione anco arbitraria della sola x.

Sostituendo i valori trovati delle ϕ, ψ nella

$\psi + y'\varphi$, essa si riduce

$$F'(x) + F'(y)y' + \xi'(x),$$

che è derivata esatta; e la cui primitiva visibilmente è $F(x, y) + \xi(x)$.

In vece di trovare la primitiva rispetto alla y della φ, si può trovare quella della ψ rispetto alla x, indi fare per la y ciò, che si è fatto per la x.

274. Abbiasi la funzione $f(x, y, z, y', z')$: affinchè sia essa derivata esatta, abbiamo veduto, che dev' essere della forma

$$A + By' + Cz',$$

ove le A, B, C funzioni delle x, y, z debbono rendere identiche le tre equazioni

$$A'(y) = B'(x),\ A'(z) = C'(x),\ B'(z) = C'(y):$$

queste sono anch' esse sufficienti, perchè l' attuale funzione sia derivata esatta.

Rappresenti $F(x, y, z)$ la primitiva della $A(x, y, z)$ presa rispetto alla x visibile, cioè sia $A = F'(x)$. Questa eguaglianza dà le due

$$A'(y) = \left(\frac{dF'(x)}{dy}\right),\ A'(z) = \left(\frac{dF'(x)}{dz}\right),$$

per cui si hanno le

$$B'(x) = \left(\frac{dF'(y)}{dx}\right),\ C'(x) = \left(\frac{dF'(z)}{dx}\right);$$

le quali somministrano $B = F'(y) + \xi(y, z)$, $C = F'(z) + \lambda(y, z)$; e però, essendo anco $B'(z) = C'(y)$, le funzioni ξ, λ avranno la proprietà seguente $\xi'(z) = \lambda'(y)$.

Sostituendo nella $A + By' + Cz'$ i valori delle A, B, C trovati, essa si riduce

$F'(x)+y'F'(y)+z'F'(z)+y'\xi(y,z)+z'\lambda(y,z)$ ossia

$F(x,y,z)'+y'\xi(y,z)+z'\lambda(y,z)$

derivata esatta, per essere identica la equazione $\xi'(z)=\lambda'(y)$.

In generale possiamo concludere, che, una funzione tra più variabili e le derivate loro del primo ordine, la quale abbia le proprietà esposte alla fine del § 272, sarà una derivata esatta; cioè, che tali sue proprietà sono, non solo essenziali ma anco sufficienti, perchè essa sia derivata esatta ovvero abbia primitiva.

275. Quando sia identica la equazione

$$f'(y^{(n)})^{(n)}-f'(y^{(n-1)})^{(n-1)}+f'(y^{(n-2)})^{(n-2)}- - - - \mp f'(y')'\pm f'(y)=0,$$

la funzione $f(x, y, y', y'', - - - y^{(n)})$ sarà derivata esatta: dimostrerò questa proprietà e troverò anco la stessa funzione primitiva della $f(x, y, y', y'', - - - y^{(n)})$.

Per l'equazione ammessa identica si ha (§ 270) $f=\psi+y^{(n)}\phi$: si trovi una primitiva della $\phi(x,y,y',- - - y^{(n-1)})$ rispetto alla $y^{(n-1)}$, e risulti $\alpha(x, y, y', - - - y^{(n-1)})$; cioè sia $\alpha'(y^{(n-1)})=\phi$ ossia $\alpha=\int\phi\, dy^{(n-1)}$: sarà

$$f-\alpha'=\psi-\alpha'(x)-\alpha'(y)y'-\alpha'(y')y''- - - - - \alpha'(y^{(n-4)})y^{(n-3)}-$$
$$-\alpha'(y^{(n-3)})y^{(n-2)}-\alpha'(y^{(n-2)})y^{(n-1)}.$$

Quest' ultima quantità cioè la

$$\psi-\alpha(x, y, y', - - - y^{(n-2)})'$$

è della forma $\psi_1+y^{(n-1)}\phi_1$, dove ψ_1, ϕ_1 sono funzioni delle sole $x, y, y', - - - y^{(n-2)}$.

Di fatto, posto $\psi-\alpha(x, y, y', - - - y^{(n-2)})'=P$, si ha

$$P'(y^{(n-1)}) = \psi'(y^{(n-1)}) - \alpha'(y^{(n-2)}) - \alpha'(y^{(n-1)})' + y^{(n)}\phi'(y^{(n-1)})$$ cioè

$$P'(y^{(n-1)}) = \psi'(y^{(n-1)}) - \alpha'(y^{(n-2)}) - \phi' + y^{(n)}\phi'(y^{(n-1)}),$$ e

$$P'(y^{(n-2)}) = \psi'(y^{(n-2)}) - \alpha'(y^{(n-3)}) - \alpha'(y^{(n-2)})' + y^{(n)}\phi'(y^{(n-2)}),$$

$$P'(y^{(n-3)}) = \psi'(y^{(n-3)}) - \alpha'(y^{(n-4)}) - \alpha'(y^{(n-3)})' + y^{(n)}\phi'(y^{(n-3)}),$$

$$- -$$

$$P'(y'') = \psi'(y'') - \alpha'(y') - \alpha'(y'')' + y^{(n)}\phi'(y''),$$

$$P'(y') = \psi'(y') - \alpha'(y) - \alpha'(y')' + y^{(n)}\phi'(y'),$$

$$P'(y) = \psi'(y) - \alpha'(y)' + y^{(n)}\phi'(y);$$

e però il polinomio

$$-P'(y^{(n-1)})^{(n-1)} + P'(y^{(n-2)})^{(n-2)} - P'(y^{(n-3)})^{(n-3)} + - - - -$$
$$- - - - - - - \pm P'(y'')'' \mp P'(y')' \pm P'(y)$$

sarà identico al seguente

$$\phi^{(n)} - \left[\psi'(y^{(n-1)}) + y^{(n)}\phi'(y^{(n-1)})\right]^{(n-1)} + \left[\psi'(y^{(n-2)}) + y^{(n)}\phi'(y^{(n-2)})\right]^{(n-2)} - -$$
$$- - - - - - \mp \left[\psi'(y') + y^{(n)}\phi'(y')\right]' \pm \left(\psi'(y) + y^{(n)}\phi'(y)\right);$$

ma questo è identicamente *nullo*, adunque la equazione

$$P'(y^{(n-1)})^{(n-1)} - P'(y^{(n-2)})^{(n-2)} + P'(y^{(n-3)})^{(n-3)} - - - - -$$
$$- - - - - - - \pm P'(y')' \mp P'(y) = 0$$

sarà identica; e conseguentemente P avrà la forma $\psi_1 + y^{(n-1)}\phi_1$, come si è dichiarato.

Sia $\int \phi_1\, dy^{(n-2)} = \alpha_1(x, y, y', - - - y^{(n-2)})$ ossia $\alpha'_1(y^{(n-2)}) = \phi_1$.

Per essere $f - \alpha' = \psi_1 + y^{(n-1)}\phi_1$, sarà

$$f - \alpha' - \alpha'_1 = \psi_1 - \alpha_1(x, y, y', - - - y^{(n-3)})'.$$

Facendo per la quantità $\psi_1 - \alpha_1(x, y, y', - - - y^{(n-3)})'$

ciò, che si è fatto per la

$$\psi - \alpha(x, y, y', --- y^{(n-2)})',$$

si trova essa eguale alla $\psi_2 + y^{(n-2)}\phi_2$ cioè di questa forma, dove ϕ_2, ψ_2 contengono solamente le $x, y, y', --- y^{(n-3)}$; e però, posto

$$\int\phi_2 dy^{(n-3)} = \alpha_2(x, y, y', --- y^{(n-3)})$$

ovvero $\alpha'_2(y^{(n-3)}) = \phi_2$, si avrà

$$f - \alpha' - \alpha'_1 - \alpha'_2 = \psi_2 - \alpha_2(x, y, y', --- y^{(n-4)})'.$$

Continuando similmente, possiamo evidentemente concludere, che si otterrà

$$f - \alpha' - \alpha'_1 - \alpha'_2 - \alpha'_3 - ---- \alpha'_{n-3} - \alpha'_{n-2} - \alpha'_{n-1} = \psi_n, \text{ dove}$$

$$\alpha = \int\phi\, dy^{(n-1)},\quad \psi - \alpha(x, y, y', --- y^{(n-2)})' = \psi_1 + y^{(n-1)}\phi_1,$$

$$\alpha_1 = \int\phi_1 dy^{(n-2)},\quad \psi_1 - \alpha_1(x, y, y', --- y^{(n-3)})' = \psi_2 + y^{(n-2)}\phi_2,$$

$$\alpha_2 = \int\phi_2 dy^{(n-3)},\quad \psi_2 - \alpha_2(x, y, y', --- y^{(n-4)})' = \psi_3 + y^{(n-3)}\phi_3,$$

$$\alpha_{n-3} = \int\phi_{n-3} dy'',\quad \psi_{n-3} - \alpha_{n-3}(x, y, y')' = \psi_{n-2} + y''\phi_{n-2},$$

$$\alpha_{n-2} = \int\phi_{n-2} dy',\quad \psi_{n-2} - \alpha_{n-2}(x, y)' = \psi_{n-1} + y'\phi_{n-1},$$

$$\alpha_{n-1} = \int\phi_{n-1} dy,\quad \psi_{n-1} - \alpha'_{n-1}(x) = \psi_n;$$

la ψ_n contiene la sola variabile x esplicita; e però sarà

$$f = (\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ---- + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1})' + \psi_n,$$

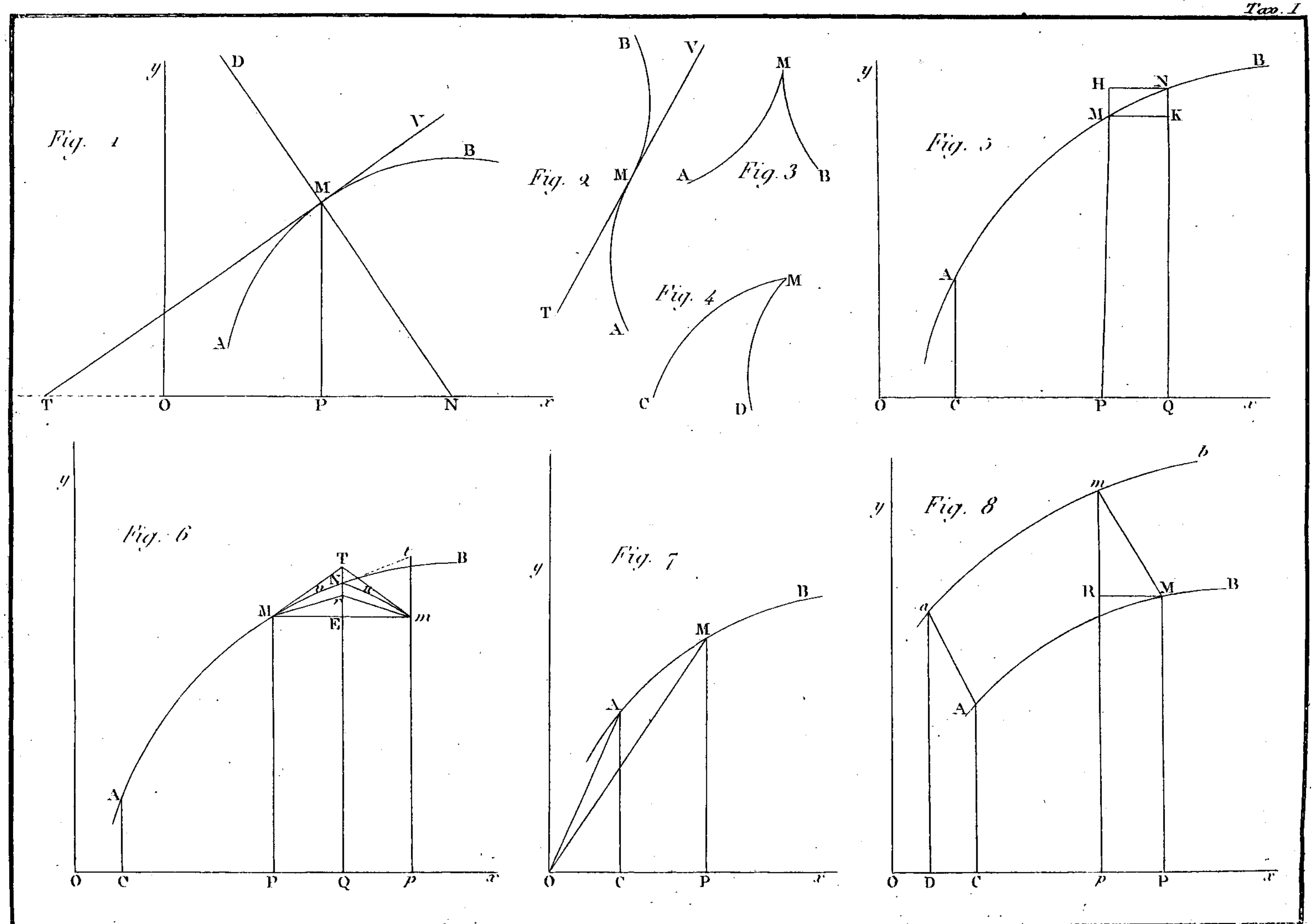
cioè la funzione f derivata esatta, e la sua primitiva risulterà

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ---- + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \int\psi_n dx.$$

276. Non mi trattengo a sviluppare le proprietà necessarie e sufficienti, perchè la f sia derivata esatta, quando in essa vi siano più variabili analoghe alle $y, y', y'', --- y^{(n)}$, nè quelle proprietà, che si debbono verificare, affinchè essa sia derivata esatta d'ordine superiore, persuaso che dalle poche esposte e sviluppate si possa argomentare, come d'uopo sia regolarsi per qualunque caso.

FINE DEL TOMO PRIMO

Tav. I



Tav. II