LEONIDA TONELLI

SERIE TRIGONOMETRICHE

· LABORAVI · FIDENTER ·

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
MCMXXVIII

Dono di EURO D'AMICO ORSINI
allievo della Classe di Scienze
† 4 maggio 1944.

Bologna - Cooperativa Tipografica Azzoguidi - XI-1928

PREFAZIONE

Nell' anno accademico 1924-25, scelsi come argomento principale del mio Corso di Analisi Superiore, presso l'Università di Bologna, quello delle serie trigonometriche, con l'intendimento di esporre in forma sistematica — coordinandoli e completandoli — insieme coi risultati classici, anche gli studi più recenti su tali serie. Quelle lezioni vennero pubblicate in litografia ed in pochi esemplari, destinati sopra tutto ai miei studenti; ma, in una cerchia assai più larga, destarono un certo interesse e mi procurarono, da varie parti, insistenti richieste di una pubblicazione per la stampa. Mi decisi così a riprendere quella mia fatica; ed ora, dopo aver riveduta tutta la materia, dopo avervi aggiunto interi paragrafi e capitoli, presento questo libro agli studiosi, con la speranza che possa riuscire di qualche utilità.

Mi è sembrato opportuno abbandonare l'ordinamento della materia abitualmente seguito nei trattati che si occupano di serie trigonometriche. Ho cominciato perciò con lo studio delle serie trigonometriche generali, allo scopo di mettere subito in evidenza i fatti che sono comuni a tutte le serie di questo tipo; e sono poi passato a considerare le peculiari proprietà delle serie di Fourier. Alla trattazione, così condotta, giova il fatto che la teoria delle serie trigonometriche generali conserva un carattere pressochè elementare, mentre, invece, quella delle serie di Fourier deve, per i suoi più completi svolgimenti, fare appello a considerazioni di natura più elevata.

Alla fine del libro, ho dedicato un lungo capitolo alle serie doppie di Fourier, nel quale mi lusingo di aver esposto dei risultati non meno semplici e generali di quelli analoghi relativi alle serie di Fourier delle funzioni di una sola variabile.

Il numero elevato delle pagine di questo volume mi ha costretto a rinunciare — ciò che ho fatto molto a malincuore — ad esporre le belle ricerche di A. Denjoy, sul calcolo dei coefficienti di una serie trigonometrica ovunque convergente, e l'importante teoria delle funzioni quasi-periodiche, che H. Bohr ha magistralmente sviluppata in questi ultimi anni. La stessa ragione mi ha fatto stralciare dal libro le applicazioni, delle teorie svolte, alla Geometria ed alla Fisica-Matematica, che conto di raccogliere fra poco, con l'aiuto di un mio giovane allievo, in un volume a parte.

Mi è grato di porgere i più vivi ringraziamenti a mia moglie, dott.[a] Mària Tonelli Rondelli, ed al dott. Antonio Mambriani, per l'aiuto intelligente prestatomi nella correzione delle bozze di stampa. E ringrazio pure, sentitamente, la Casa Editrice Nicola Zanichelli per la cura posta nel dare a questo volume la migliore veste tipografica.

Bologna, settembre 1928.

LEONIDA TONELLI

CENNO STORICO

CHE SONO E A CHE SERVONO LE SERIE TRIGONOMETRICHE.

Si chiama *serie trigonometrica*, in una variabile, una serie della forma

$$(1)\quad \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x) + \dots + \\ + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \dots \\ = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

il cui termine generale $(n+1)^{esimo}$ è dato da un binomio formato da due costanti a_n e b_n moltiplicate rispettivamente per il coseno e per il seno del multiplo dell'argomento x secondo il numero intero positivo n. Il primo termine, nel quale debbono figurare $\cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$, si riduce ad una costante, che, generalmente, si scrive (per maggiore comodità, ciò che risulterà da quanto si dirà in seguito) nella forma $a_0 : 2$.

Supporremo sempre che i coefficienti a_n e b_n siano reali, e supporremo sempre reale anche la variabile x.

Se tutti i coefficienti b_n sono nulli, la (1) si riduce ad una *serie di coseni*; se, invece, sono nulli tutti gli a_n, la (1) si riduce ad una *serie di seni*.

Una serie trigonometrica, se è convergente nell' intervallo $(0, 2\pi)$, rappresenta evidentemente una funzione periodica, di periodo 2π, su tutto l'asse delle x. Ed allora basta considerarla in un qualunque intervallo di ampiezza 2π: per es. in $(0, 2\pi)$, o in $(-\pi, +\pi)$, ecc.

Le serie trigonometriche sono molto utili nella rappresentazione analitica delle funzioni e sono perciò largamente usate, sia nelle matematiche pure che in quelle applicate; sono adoperate frequentemente in fisica-matematica, in astronomia, nelle applicazioni matematiche alla fisiologia, ed in modo speciale ovunque debbano rappresentarsi analiticamente dei fenomeni periodici.

Le serie trigonometriche negli sviluppi dell'Analisi.

Gli sviluppi della teoria delle serie trigonometriche hanno avuto una grande importanza nella storia delle matematiche. Alle discussioni sulle serie trigonometriche del XVIII e del XIX secolo, è intimamente legata l'evoluzione del concetto di funzione; ed al concetto moderno di funzione (la y è funzione della x, in un certo campo C, se ad ogni x di C corrisponde un valore determinato e unico della y) il Dirichlet fu condotto precisamente dagli studi sulle serie di Fourier. Così, anche le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una funzione $f(x)$, limitata, sia integrabile secondo la definizione di Cauchy, furono poste, per la prima volta, da Riemann, nella sua celebre Tesi dedicata alle serie trigonometriche. Ed infine, per non accennare che alle questioni di importanza capitale, la teoria degli insiemi, fondata da G. Cantor, la quale ora costituisce la base di ogni Corso di Analisi, è sorta da questioni riguardanti le serie trigonometriche.

È bene anche osservare che allo studio delle serie trigonometriche si riattacca quello di una serie di potenze sulla sua circonferenza di convergenza. Se, infatti, consideriamo la serie di potenze $\Sigma c_n z^n$ e poniamo $c_n = \alpha_n + i\beta_n$, $z = re^{ix}$, abbiamo:

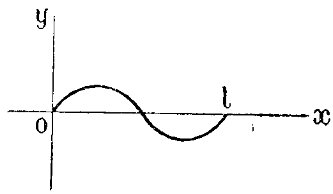
$$\Sigma c_n z^n = \Sigma (\alpha_n \cos nx - \beta_n \operatorname{sen} nx) r^n + i\Sigma (\beta_n \cos nx + \alpha_n \operatorname{sen} nx) r^n.$$

Vediamo dunque che la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di una serie di potenze sono, per $r = \text{cost.}$, due serie trigonometriche. Pertanto, lo studio della serie di potenze, sulla sua circonferenza di convergenza, si riconduce a quello di due serie trigonometriche. Viceversa, risulta senz'altro evidente che una serie trigonometrica qualunque rappresenta sempre la parte reale (o, se si vuole, il coefficiente di quella immaginaria) di una serie di potenze su una circonferenza avente il centro nell'origine; basta, infatti, considerare la serie $\Sigma c_n z^n$ con $c_n = a_n - ib_n$ (o, rispettivamente, $c_n = b_n + ia_n$).

Il problema delle corde vibranti.

Il problema da cui ebbe veramente origine la teoria delle serie trigonometriche è quello detto delle corde vibranti.

Consideriamo, in un piano (x, y), le vibrazioni trasversali di una corda elastica, omogenea, tesa fra i due punti (o, o) ed (l, o) dell'asse delle x. Se immaginiamo che essa sia messa in vibrazione e indichiamo con y lo spostamento che presenta, al tempo t, il suo punto di ascissa x, l'equazione $y = y(x, t)$ dà la forma della corda al tempo t, e si dimostra che la funzione $y(x, t)$ soddisfa all'equazione a derivate parziali del 2° ordine



$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{1}$$

dove α^2 è una costante positiva, dipendente dalla natura della corda e dalla sua tensione.

Nel 1747, D'Alembert [1] diede per primo la soluzione dell'equazione scritta, mostrando che il suo integrale generale è dato da

$$y = f(x + \alpha t) + \varphi(x - \alpha t),$$

dove f e φ sono funzioni arbitrarie; risultato questo a cui noi ora sappiamo giungere facilmente. Il D'Alembert stesso osservò poi che, per il problema fisico considerato, la soluzione trovata deve annullarsi negli estremi della corda e cioè per $x = 0$ e $x = l$, qualunque sia t; deve dunque aversi

$$f(\alpha t) + \varphi(-\alpha t) = 0, \quad f(l + \alpha t) + \varphi(l - \alpha t) = 0.$$

---

[1] Mémoires de l'Académie de Berlin, t. III, 1747, pp. 214-219; 220-249.

La prima di queste uguaglianze dà, per la funzione $\varphi(z)$, la condizione

$$\varphi(z) = -f(-z);$$

la seconda dà poi

$$f(l + \alpha t) - f(\alpha t - l) = 0 \quad \text{ossia} \quad f(z) = f(z + 2l).$$

Dunque, concluse D'Alembert, la soluzione generale del problema delle corde vibranti è data da

$$y = f(\alpha t + x) - f(\alpha t - x),$$

con $f(z)$ funzione arbitraria, ma periodica e di periodo $2l$.

Alcuni anni dopo, nel 1753, Daniele Bernoulli (¹) diede, del problema delle corde vibranti, una soluzione diversa da quella di D'Alembert, prendendo lo spunto da certe soluzioni particolari dell'equazione (1), già indicate da Taylor. Taylor aveva fatto vedere che le funzioni

$$y = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi\alpha t}{l},$$

per ogni intero n, sono soluzioni della (1) annullantisi negli estremi $x = 0$ e $x = l$ della corda (ciò che si verifica subito derivando due volte rispetto a t e due volte rispetto ad x). Queste varie soluzioni sono in accordo col fatto fisico che una corda può dare, oltre al proprio suono fondamentale, anche quelli delle corde di lunghezza $l : n$, per $n = 2, 3, \ldots$. E poichè una corda può dare anche contemporaneamente questi vari suoni, D. Bernoulli ritenne di poter affermare che anche la funzione

$$y = \sum_{1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\alpha\pi t}{l}, \tag{2}$$

dove le a_n sono delle costanti, è soluzione della (1), e che, di più, essa dà la soluzione generale del problema delle corde vibranti.

Conosciuta la soluzione del Bernoulli, Eulero, che già era intervenuto nella discussione sul problema delle corde vibranti,

(¹) Mémoires de l'Académie de Berlin, t. IX, 1753, pp. 147-172.

riuscendo a precisare il risultato di D'Alembert [1], fece notare [2] che, per $t = 0$, la (2), se fosse la soluzione cercata, dovrebbe dare la forma della corda all'inizio del movimento. Ma la (2), per $t = 0$, dà

$$y = \sum_{1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l},$$

che è una serie trigonometrica, e perciò la forma iniziale della corda verrebbe data mediante una serie trigonometrica. E siccome la forma iniziale della corda è del tutto arbitraria, se la soluzione di Bernoulli fosse effettivamente la soluzione generale del problema studiato, se ne avrebbe la conseguenza che ogni curva, incontrata in un sol punto al più da ogni parallela all'asse delle y, può essere rappresentata da una serie trigonometrica. Ciò parve impossibile ad Eulero come anche a D'Alembert; e pertanto entrambi ritennero che la soluzione data da Bernoulli non fosse quella generale.

Il concetto di funzione al tempo di Eulero.

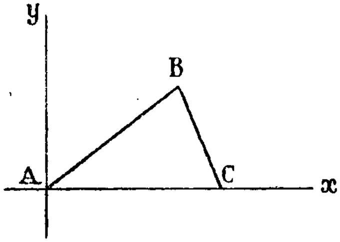
Vediamo di lumeggiare le ragioni per le quali Eulero riteneva impossibile di rappresentare ogni curva con una serie trigonometrica.

Al tempo di Eulero, il concetto di funzione era ben diverso da quello che abbiamo noi ora. Allora, il concetto di funzione, da una parte, era confuso con quello di espressione analitica e, dall'altra, si riattaccava a quello di curva. Erano le curve che davano origine alle funzioni. Però non tutte le curve generavano delle funzioni, ma soltanto quelle definite mediante proprietà geometriche traducibili in una relazione analitica fra le coordinate x e y del loro punto generico. E la funzione era precisamente il legame analitico intercedente tra la x e la y. Le altre curve, quelle che si possono tracciare in modo del tutto arbitrario, non davano origine a funzioni. Per es. la curva composta di due segmenti rettilinei AB e BC non poteva dare origine ad una funzione. Il segmento AB appartiene ad

---

[1] Ibid., t. IV, 1748, pp. 69-85.
[2] Ibid., t. IX, 1753, pp. 196-222.

una retta che ha una determinata equazione e quindi che definisce una determinata funzione per tutti i valori della x; il segmento BC appartiene ad un'altra retta, che ha un'altra equazione e quindi che definisce una seconda funzione, pure per tutti i valori della x, diversa dalla precedente. Dunque, si diceva, la curva ABC non dà una funzione e, pertanto, non può essere rappresentata da una serie trigonometrica, perchè questa serie darebbe essa stessa una funzione.



Oggi, accettata la definizione di funzione di Dirichlet (nella forma già più sopra riportata), i concetti di funzione, di espressione analitica, di curva, sono ben distinti. Una funzione può non ammettere un'espressione analitica e può anche non ammettere una curva effettivamente tracciabile, che la rappresenti; ma ogni curva continua, comunque tracciata a volontà, in modo da essere incontrata in un sol punto al più da ogni parallela all'asse delle y, rappresenta una funzione, e questa funzione, per un teorema di Weierstrass, ammette sempre un'espressione analitica. Al tempo di Eulero, invece, i concetti di funzione, di espressione analitica e di curva *geometrica* (cioè definita con quelle particolari proprietà geometriche cui già si è accennato) erano fusi insieme, e pertanto ogni funzione aveva un'espressione analitica ed una rappresentazione grafica mediante una curva geometrica; ma le curve tracciate a volontà, e pure incontrate in un solo punto da ogni parallela all'asse delle y, non rappresentavano delle funzioni e non potevano quindi ammettere una rappresentazione analitica.

Le nuove vedute di Fourier.

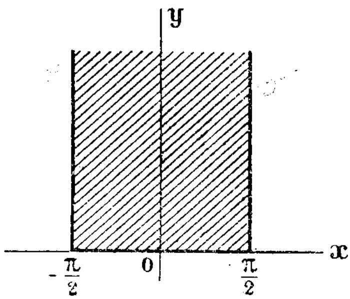
Queste idee vennero scosse fortemente da una Nota, presentata nel 1807, da Fourier, all'Accademia delle Scienze di Parigi [1] e da altri lavori successivi dello stesso Fourier, lavori

[1] Bulletin des Sciences pour la Société philomathique, t. I, 1807, pp. 112-116.

che furono poi riuniti nella celebre « *Théorie de la chaleur* », pubblicata nel 1822.

Esaminiamo, con Fourier, il seguente problema della teoria del calore.

Consideriamo una lastra piana, omogenea, isotropa, indefinita, avente la forma di una mezza striscia. Immaginiamo che i lati paralleli della lastra siano mantenuti alla temperatura 0°, e che i punti della base siano mantenuti a temperature fissate, invariabili col tempo. Supposto raggiunto l'equilibrio termico, vale a dire, supposta raggiunta una distribuzione stazionaria della temperatura, si domanda di determinarla.



Scegliamo un sistema di assi x ed y in modo che la striscia poggi sull'asse delle x, avendo per base il segmento $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ e restando tutta al disopra di tale asse, con i lati paralleli all'asse delle y. Allora, indicando con $T(x, y)$ la temperatura nel punto generico (x, y) della lastra, si dimostra che T deve soddisfare all'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0,$$

e Fourier fa vedere che la soluzione del problema è data da

$$T(x, y) = \sum_1^\infty a_n e^{-(2n-1)y} \cos(2n-1)x. \tag{1}$$

Si verifica subito che il termine generale di questa serie è una funzione armonica, la quale si annulla per $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

Per $y = 0$, si ha

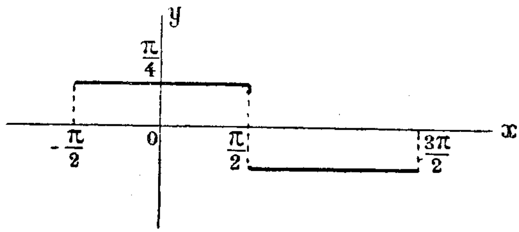
$$T(x, 0) = \sum_1^\infty a_n \cos(2n-1)x, \tag{2}$$

e la soluzione data dalla (1) sarà la soluzione generale se questa nuova serie (2) potrà rappresentare la legge di distribuzione della temperatura lungo la base della lastra. Fourier considera il caso più semplice, cioè quello in cui la temperatura è costante lungo tutta la base, e determina i coefficienti a_n affinchè la (2) possa rappresentare il valore costante dato; facendo poi il calcolo della serie così determinata, trova effettivamente che essa ha per somma quel valore.

La serie, a cui il Fourier è condotto, è, all'infuori di un fattore costante, la seguente:

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \dots, \tag{3}$$

la quale, per x compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, ha per somma $\frac{\pi}{4}$; la stessa serie, per x compreso tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, ha invece per somma $-\frac{\pi}{4}$ (cose tutte che noi vedremo in seguito). Questo fatto è evidentemente in contrasto con le idee che fino a Fourier si avevano



sulle funzioni. Una stessa espressione analitica, cioè una stessa funzione (secondo le idee del tempo di Fourier), rappresenta qui due pezzi staccati di due curve distinte. Non è dunque giusto dire che una curva, composta di vari pezzi di curve geometriche, non dà una funzione: essa curva, invece, dà ugualmente una funzione anche se è composta di pezzi staccati. E pertanto cade la distinzione, per quanto riguarda il concetto di funzione, fra le curve geometriche e le curve arbitrariamente date. Qualsiasi curva, arbitrariamente data, genera una funzione e si hanno così le funzioni che si diranno arbitrariamente date.

Lo studio del problema sopra riportato condusse Fourier, non soltanto alla modificazione indicata del concetto di funzione, ma anche ad un'altra questione importante.

Come già dicemmo, Eulero aveva ritenuto che una curva arbitrariamente data non potesse rappresentarsi con una serie trigonometrica. Ma quanto abbiamo detto sulla serie (3) sta contro tale opinione. Fourier è così condotto a riesaminare tale questione. Esiste, Egli si domanda, per una funzione $f(x)$, arbitrariamente data su $(0, 2\pi)$, uno sviluppo in serie trigonometrica? Vale a dire, si possono determinare i coefficienti a_n e b_n in modo che sia, in $(0, 2\pi)$,

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \Sigma (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) ?$$

Fourier, seguendo un metodo già indicato alcuni anni prima (1777) da Eulero [1], moltiplica per $\cos nx$ ambo i membri dell'uguaglianza scritta e poi integra da 0 a 2π, integrando, nel secondo membro, termine a termine. Ripete la stessa operazione moltiplicando per $\operatorname{sen} nx$, anzichè per $\cos nx$, e ottiene così le formule

$$(4) \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx,$$

le quali determinano perfettamente i coefficienti dello sviluppo della $f(x)$. Dunque, conclude Fourier, ogni funzione, data arbitrariamente su $(0, 2\pi)$, è rappresentabile mediante una serie trigonometrica, i cui coefficienti risultano determinati dalle formole (4).

Questa conclusione di Fourier destò profonda impressione tra i matematici suoi contemporanei ma suscitò subito forti critiche. Si può, infatti, rilevare immediatamente che il procedimento di Fourier ammette *a priori* ciò che vuol dimostrare, vale a dire l'esistenza dello sviluppo in serie trigonometrica della $f(x)$. Questa difficoltà sarebbe superata se, determinati i coefficienti a_n e b_n mediante le (4), si dimostrasse poi che la serie ottenuta converge realmente alla $f(x)$. Ma Fourier non diede la dimostrazione di questa convergenza.

Un'altra obbiezione fu sollevata assai più tardi. Fourier, per integrare la serie trigonometrica, eseguisce l'integrazione termine a termine: ora ciò non è lecito in generale, e quindi,

---

[1] *Nova Acta Akad. Petropolitanae,* t. XI, 1793, pp. 94-113. Questo volume fu stampato nel 1798, ma la Memoria di Eulero porta la data del 26 maggio 1777.

anche ammessa la effettiva possibilità dello sviluppo in serie trigonometrica della $f(x)$, non è dimostrato che i coefficienti a_n e b_n siano proprio dati dalle formole (4). Questa seconda obbiezione può però essere rigettata in seguito ai risultati ottenuti recentemente sulle serie trigonometriche.

Come già dicemmo, Fourier non potè controbattere la prima delle due obbiezioni sopra esposte. Peraltro, in tutti i casi in cui il suo procedimento fu usato da Lui stesso e dai suoi contemporanei, si ottennero sempre serie effettivamente sommabili e riproducenti la funzione sviluppata. Questo fatto e l'importanza e la varietà delle questioni a cui il metodo di Fourier veniva via via applicato, indussero a ritenere il metodo stesso come legittimo; ed esso infatti venne largamente usato. Le serie trigonometriche, coi coefficienti determinati dalle (4), vennero chiamate *serie di Fourier*, nome che fu poi esteso a tutte le serie trigonometriche. Fu soltanto dopo Heine (1870) che si distinsero di nuovo le serie trigonometriche generali da quelle aventi i coefficienti dati dalle (4) (alle quali fu conservato il nome di *serie di Fourier*), perchè con Heine si ammise l'esistenza di serie trigonometriche non di Fourier.

Circa le formole (4), vogliamo aggiungere che esse furono date, per il caso di una serie di coseni, prima ancora di Fourier, da Eulero (1777), il quale le ottenne con lo stesso procedimento seguito poi da Fourier. Peraltro, deve osservarsi che Eulero determinò queste formole per una serie di cui era già nota la convergenza, mentre con Fourier esse acquistarono un valore molto più generale.

Lo sviluppo della teoria delle serie trigonometriche.

Il primo tentativo di dare una dimostrazione generale della effettiva convergenza della serie di Fourier verso la funzione che essa deve rappresentare, fu fatto nel 1826 da Cauchy [1]. I ragionamenti di Cauchy non erano però rigorosi, come mostrò Dirichlet, nel 1829, in una classica Memoria [2] nella quale, con ragionamenti al riparo da ogni critica, si dimostra vera-

---

[1] Mémoires de l'Académie des Sciences, t. VI, 1826, pp. 603-612.

[2] Journal für Mathematik, t. IV, 1829, pp. 157-169.

mente che, sotto determinate condizioni — oggi conosciute con il nome di *condizioni di Dirichlet* —, la serie di Fourier di una funzione $f(x)$ converge effettivamente verso il valore di tale funzione. Il metodo usato dal Dirichlet consiste, non nell'esaminare il modo di comportarsi, per $n \to \infty$, dei coefficienti a_n e b_n dello sviluppo di Fourier, ma nel considerare la somma parziale n^{ma} della serie, nel trasformare tale somma ponendola sotto forma di un unico integrale, e nello studiare la convergenza di tale integrale per $n \to \infty$. Dopo il lavoro di Dirichlet, ne furono pubblicati moltissimi altri. In essi vennero allargate le condizioni di convergenza, e fra le nuove condizioni ci limiteremo a citare quelle di Lipschitz, di Dini e di Jordan; furono studiate le singolarità delle serie di Fourier, vennero stabilite proprietà varie dei coefficienti e degli sviluppi di Fourier, furono studiate le serie di Fourier in più variabili e le serie trigonometriche in generale, ecc. E molti analisti, sopratutto dopo i risultati fondamentali di Poisson, Riemann, Cantor, Du Bois Reymond, Dini, Lebesgue, Fejér, ecc., portarono notevoli contributi alla teoria delle serie trigonometriche.

Terminando questo breve cenno storico, vogliamo rilevare che lo sviluppo della teoria delle serie di Fourier è intimamente legato a quello del concetto di integrale. Così, l'introduzione dell'integrale di Lebesgue ha notevolmente esteso il campo delle funzioni che ammettono una serie di Fourier; e tale campo risulta ancor più allargato con l'introduzione dell'integrale di Denjoy (1).

---

(1) Una ricca bibliografia sulle serie trigonometriche fu pubblicata da MAURICE LECAT: *Bibliographie des séries trigonométriques.* (Louvain, 1921). Un'appendice di tale bibliografia trovasi in « *Bibliographie de la Relativité* ». (Bruxelles, 1924), dello stesso Autore.

Fra i libri che si occupano delle serie trigonometriche, indichiamo al lettore: U. DINI, *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile.* (Pisa, 1880) - Idem, *Sugli sviluppi in serie per la rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale.* (Litografie, Pisa, 1911); H. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques.* (Paris, 1906); CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse Infinitésimale*, t. II (2ième édit., Louvain, 1912) - Idem, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle.* (Paris, 1919); É. PICARD, *Cours d'Analyse*, t. I (3ième édit., Paris, 1922); L. SCHLESINGER, A. PLESSNER, *Lebesguesche Integrale und Fourierschen Reihen.* (Berlin, 1926); E. W. HOB-

SON, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*, vol. II. (Second Edit., Cambridge, 1926).

Indichiamo, inoltre: H. BURKHARDT, *Trigonometrische Reihen und Integrale.* (Enzyklopädie der Mathem. Wissenschaften, II, 1, 2, 1904-1916, Art. II, A. 12); M. FRÉCHET, P. MONTEL, L. ZORETTI, *Recherches contemporaines sur la théorie des fonctions.* (Encyclopédie des Sciences Mathématiques, t. II (vol. 1) 1912, Art. II, 2); E. HILB, M. RIESZ, *Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen.* (Enzyklopädie der Mathem. Wissenschaften, II, 3, 1924, Art. II, C. 10); M. PLANCHEREL, *Le développement de la théorie des séries trigonométriques dans le dernier quart de siècle.* (Enseignement mathématique, t. XXIV, 1925).

CAPITOLO I.

SERIE TRIGONOMETRICHE GENERALI

§ 1. CONDIZIONI NECESSARIE PER LA CONVERGENZA.

1. - Considerazioni preliminari.

Una serie trigonometrica

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \ldots \tag{1}$$

non è, necessariamente, nè convergente nè non convergente. Se abbiamo, ad esempio,

$$\frac{1}{1!}(\cos x + \operatorname{sen} x) + \frac{1}{2!}(\cos 2x + \operatorname{sen} 2x) + \ldots + \frac{1}{n!}(\cos nx + \operatorname{sen} nx) + \ldots, \tag{2}$$

questa serie converge evidentemente per ogni valore di x [1]. Invece, la serie

$$1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + \ldots$$

è, per ogni x, non convergente, come risulta immediatamente dal fatto che la somma $1 + \cos x + \ldots + \cos nx$ è la parte reale di

$$1 + e^{ix} + e^{2ix} + \ldots + e^{nix} \tag{3}$$

---

[1] Considereremo sempre valori di x *reali e finiti.*

e quindi (se x non è congruo a 0 secondo il modulo 2π) di

$$\frac{1 - e^{(n+1)ix}}{1 - e^{ix}}.$$

Se poi consideriamo la serie

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + ... + \operatorname{sen} nx + ... ,$$

la cui somma parziale ennesima rappresenta il coefficiente della parte immaginaria di (3), abbiamo un esempio di una serie trigonometrica convergente per tutti i valori di x congrui a zero secondo il modulo π, e non convergente per tutti gli altri valori.

Vediamo dunque che una serie trigonometrica (1) può essere sempre convergente, oppure sempre non convergente, oppure può essere convergente per alcuni valori di x e non convergente per altri valori. Sorge, pertanto, la questione della ricerca delle condizioni di convergenza di una serie trigonometrica.

È bene osservare subito che la convergenza della serie (1), in un punto x_0, non implica la convergenza delle due serie di coseni e seni

$$\frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... , \tag{4}$$

$$b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + ... , \tag{5}$$

dalle quali, per addizione, deriva la (1). Se queste serie convergono in x_0, esse convergono pure in $-x_0$, e in questo punto converge perciò anche la (1). Viceversa, se la (1) converge tanto in x_0 quanto in $-x_0$, convergono, in x_0, anche la (4) e la (5): ed infatti, la (4) non è altro che la semisomma della (1) e della serie che si ottiene dalla (1) cambiando x in $-x$. Pertanto, in un punto x_0 di convergenza della (1), le (4) e (5) convergono se e soltanto se la (1) converge anche in $-x_0$.

2. - Convergenza semplice: teorema di G. Cantor.

Affinchè la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + ... + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + ... \tag{1}$$

sia convergente in tutti i punti di un intervallo, è necessario che sia

$$(2) \qquad a_n \to 0, \quad b_n \to 0,$$

vale a dire, che i suoi coefficienti a_n e b_n tendano a zero per $n \to \infty$ [1].

Osserviamo, in primo luogo, che, posto

$$\rho_n = + \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

$$a_n = \rho_n \cos n\alpha_n, \quad b_n = \rho_n \operatorname{sen} n\alpha_n,$$

abbiamo

$$a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx = \rho_n (\cos n\alpha_n \cos nx + \operatorname{sen} n\alpha_n \operatorname{sen} nx)$$
$$= \rho_n \cos n(x - \alpha_n),$$

e che, pertanto, la (1) può scriversi nella forma

$$(1') \qquad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos n(x - \alpha_n).$$

Se dunque la (1) è convergente in tutti i punti di un intervallo (c, d), deve aversi, in tutto (c, d), per $n \to \infty$,

$$(3) \qquad \rho_n \cos n(x - \alpha_n) \to 0.$$

Facciamo vedere che da ciò segue $\rho_n \to 0$.

Se, infatti, ρ_n non tendesse allo zero, esisterebbero un numero $\sigma > 0$ ed una successione $n_1, n_2, \dots, n_m, \dots$, di numeri interi positivi crescenti, in modo da aversi

$$(4) \qquad \rho_{n_m} > \sigma, \quad m = 1, 2, \dots,$$

il che, come ora dimostreremo, contradirebbe all' ipotesi della convergenza della (1), e quindi della (1'), in tutto (c, d). Supponiamo, infatti, che la (4) valga per gli infiniti valori n_m. Siccome, in ogni intervallo di ampiezza non inferiore a $\pi : n$, la funzione $|\cos n(x - \alpha_n)|$ assume almeno una volta il valore 1, potremo determinare il più piccolo valore n', di n_m, per il quale $|\cos n'(x - \alpha_{n'})|$ assume in (c, d) almeno una volta il valore 1. Considerata allora la minima radice x' dell' equazione

$$|\cos n'(x - \alpha_{n'})| = 1,$$

---

[1] G. Cantor, *Ueber einen die trigonometrischen Reihen bertreffenden Lehrsatz.* (Journal für r. ang. Mathematik, Bd. LXXII (1870), pp. 130-138).

contenuta in (c, d), indichiamo con δ' il massimo intervallo di (c, d) che contiene x' e in cui è sempre $|\cos n'(x - \alpha_{n'})| \geq 1:2$.

Dopo di ciò, indichiamo con n'' il più piccolo degli n_m che supera n' e per il quale l'equazione $|\cos n''(x - \alpha_{n''})| = 1$ ammette in δ' almeno una radice; e, detta x'' la minore fra queste radici, chiamiamo δ'' il massimo intervallo di δ' che contiene x'' e in cui è sempre $|\cos n''(x - \alpha_{n''})| \geq 1:2$.

Così proseguendo indefinitamente, veniamo a formare una successione $n', n'', \ldots, n^{(r)}, \ldots$ di numeri scelti fra gli n_m, ed una successione $\delta', \delta'', \ldots, \delta^{(r)}, \ldots$ di intervalli tutti contenuti in (c, d) e ciascuno contenuto nel precedente, in modo che, in ogni $\delta^{(r)}$, sia sempre $|\cos n^{(r)}(x - \alpha_{n^{(r)}})| \geq 1:2$. Gli intervalli $\delta^{(r)}$ ammettono almeno un punto comune x_0, e in tale punto si ha, tenendo presente la (4),

$$\rho_{n^{(r)}} |\cos n^{(r)}(x_0 - \alpha_{n^{(r)}})| > \frac{\sigma}{2},$$

per tutti i valori di r, da 1 all'infinito. E ciò contraddice alla (3), e quindi anche alla convergenza della (1) nel punto x_0, che appartiene all'intervallo (c, d).

È dunque dimostrato che, per $n \to \infty$, vale la $\rho_n \to 0$; valgono perciò anche le (2).

Osservazione — La dimostrazione ora esposta prova che la condizione $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, è necessaria affinchè sia, in tutto un intervallo, $(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \to 0$, per $n \to \infty$.

3. - Teorema di Lebesgue.

Il teorema di Cantor, or ora dimostrato, non esclude che una serie trigonometrica, per la quale non sia $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$, possa convergere in qualche punto ed anche in infiniti punti dell'intervallo $(0, 2\pi)$. Ciò avviene effettivamente: ad esempio, per la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n!x \quad (^1),$$

(avente $a_n = 0$, qualunque sia n, infiniti b_n nulli ed infiniti b_n uguali all'unità) non vale la $b_n \to 0$ e pur tuttavia si ha la con-

---

(1) B. Riemann, *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique.* (Œuvres Mathématiques de Riemann, traduites par L. Laugel, (1896), pp. 225-270 e, in particolare, p. 270).

Il teorema di Steinhaus sarà allora dimostrato se noi proveremo la seguente proposizione:

« Se $n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots$ è una qualsiasi successione di numeri interi positivi crescenti, e $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \ldots, \alpha_{n_m}, \ldots$ è un'altra qualsiasi successione di numeri qualunque, è, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$,

$$(1) \qquad \overline{\lim_{m \to \infty}} \,|\cos n_m(x - \alpha_{n_m})| = 1 \text{ ».}$$

Osserviamo, dapprima, che, se è $0 < l < 1$ e indichiamo con ω l'arco del primo quadrante tale che $\cos\omega = l$, e se n è un intero positivo qualsiasi, la lunghezza complessiva dei segmenti in cui è

$$|\cos nx| \leq l$$

e che appartengono ad un qualsiasi intervallo λ, di ampiezza $\lambda \geq \frac{2\pi}{n}$, è minore di $\lambda\left(1 - \frac{\omega}{\pi}\right)$. Ed infatti, detto k il massimo intero tale che sia $k\frac{2\pi}{n} \leq \lambda$, e posto $\lambda = k\frac{2\pi}{n} + d$, si ha $\lambda > 2d$ e la lunghezza complessiva dei segmenti indicati è data da $k\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{4\omega}{n}\right) + d'$, con $d' \leq d$, ossia da

$$\begin{aligned} k\frac{2\pi}{n}\left(1 - \frac{2\omega}{\pi}\right) + d' &= \lambda\left(1 - \frac{2\omega}{\pi}\right) - d\left(1 - \frac{2\omega}{\pi}\right) + d' \\ &= \lambda\left(1 - \frac{\omega}{\pi}\right) - \frac{\omega}{\pi}(\lambda - 2d) - (d - d') \\ &< \lambda\left(1 - \frac{\omega}{\pi}\right). \end{aligned}$$

Ciò posto, scegliamo ad arbitrio un intero positivo r; poi, per un qualsiasi intero $s \geq 2$, indichiamo con $\delta_{s,1}^{(1)}, \delta_{s,1}^{(2)}, \ldots$ gli intervalli (in numero finito) di $(0, 2\pi)$ in cui è (estremi esclusi)

$$|\cos n_s(x - \alpha_{n_s})| < 1 - \frac{1}{s}.$$

La loro somma risulta, per l'osservazione fatta, minore di $2\pi\left(1 - \frac{\omega_s}{\pi}\right)$, dove ω_s è l'arco del primo quadrante tale che vergenza in tutti gli infiniti punti $x = \frac{p}{q}\pi$, dove p e q sono due qualunque numeri interi, perchè, per $n \geq |q|$, è $\operatorname{sen}\left(n!\frac{p}{q}\pi\right) = 0$. Questi punti di convergenza sono infiniti e ovunque densi nell' intervallo $(0, 2\pi)$.

Però, quando non sia $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$, i punti di convergenza della serie trigonometrica, che si trovano nell' intervallo $(0, 2\pi)$, si possono sempre rinchiudere in un *plurintervallo* ([1]) di lunghezza arbitrariamente piccola. Ciò è, in sostanza, quanto afferma il seguente teorema, dovuto a Lebesgue ([2]):

Se, per $n \to \infty$, *i coefficienti* a_n *e* b_n *di una serie trigonometrica non tendono entrambi allo zero, in quasi-tutto l' intervallo* $(0, 2\pi)$ ([3]) *la serie è non convergente.*

Questa proposizione è un corollario immediato di quella che dimostreremo nel n.º seguente.

4. - Teorema di Steinhaus.

In quasi-tutto $(0, 2\pi)$, *è*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad ([4]).$$

Riprendendo le notazioni del n.º 2, possiamo scrivere

$$a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx = \rho_n \cos n(x - \alpha_n)\,;$$

e possiamo anche scegliere una successione di numeri interi positivi crescenti $n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots$ in modo che ρ_{n_m} tenda, per $m \to \infty$, al limite massimo di $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

([1]) Chiamiamo *plurintervallo*, appartenente ad (a, b), l' insieme di uno o più intervalli non sovrapponentisi di (a, b), in numero finito od in una infinità numerabile. La *lunghezza* del plurintervallo è la somma della serie delle lunghezze di tutti gli intervalli che lo compongono.

([2]) *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 110.

([3]) Una certa proprietà è verificata in *quasi-tutto* un intervallo (a, b), se esiste almeno una legge che faccia corrispondere, ad ogni numero intero positivo n, un plurintervallo Δ_n, di (a,b), di lunghezza $< 1 : n$, contenente tutti i punti di (a, b) in cui la proprietà in questione non è verificata.

([4]) H. Steinhaus, *Une généralisation du théorème de G. Cantor sur les séries trigonométriques.* (Wiadomosci Matematycznych, vol. XXIV, (1920), pp. 197-201). La scrittura $\overline{\lim}\, \alpha_n$ indica il limite massimo di α_n.

$\cos \omega_s = 1 - \frac{1}{s}$. Detto s' il minimo intero $> s$ e tale che $\frac{2\pi}{\cancel{n_{s'}}}$ s' risulti minore di ciascun $\delta_{s,1}$, siano $\delta_{s,2}^{(1)}, \delta_{s,2}^{(2)},\ldots.$ gli intervalli (in numero finito) appartenenti ai $\delta_{s,1}$, in cui è (estremi esclusi)

$$|\cos n_{s'}(x - \alpha_{n_{s'}})| < 1 - \frac{1}{s}$$

È $\Sigma \delta_{s,2} < 2\pi\left(1 - \frac{\omega_s}{\pi}\right)^2$, sempre per l'osservazione fatta.

Così proseguendo, giungiamo ad un numero finito di intervalli $\delta_{s,p}^{(1)}, \delta_{s,p}^{(2)},\ldots.,$ di lunghezza complessiva minore di

$$2\pi\left(1 - \frac{\omega_s}{\pi}\right)^p < \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2^s},$$

tutti appartenenti a $(0,2\pi)$ e tali che, per ogni punto x' di $(0, 2\pi)$ in essi intervalli non contenuto, esiste almeno uno degli indici $n_s, n_{s'},\ldots., n_{s^{(p-1)}}$ (che sono tutti $\geq s$) per il quale è

$$|\cos n(x' - \alpha_n)| \geq 1 - \frac{1}{s}. \tag{2}$$

Indichiamo semplicemente con $\delta_s^{(1)}, \delta_s^{(2)},\ldots.$ gli intervalli $\delta_{s,p}^{(1)}$, $\delta_{s,p}^{(2)},\ldots.$; diamo ad s tutti i valori interi ≥ 2, e riuniamo in una successione S_r tutti gli intervalli δ_s così ottenuti, i quali hanno una lunghezza complessiva minore di

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots.\right) < \frac{1}{r}.$$

La successione S_r gode di questa proprietà: scelto ad arbitrio un $\varepsilon > 0$ e minore di 1, ed un $N > 0$, per ogni x' di $(0, 2\pi)$ non appartenente a qualche intervallo di S_r, si può trovare un indice $n_m > N$ tale che sia

$$|\cos n_m(x' - \alpha_{n_m})| > 1 - \varepsilon. \tag{3}$$

Ed infatti, determinato un intero $s > N$ e maggiore di $1 : \varepsilon$, siccome x' non appartiene agli intervalli $\delta_s^{(1)}, \delta_s^{(2)},\ldots.,$ si ha che, per n uguale ad uno degli indici n_s, $n_{s'}$, $n_{s''}$,...., che sono tutti $\geq s > N$, vale la (2) e quindi la

$$|\cos n(x' - \alpha_n)| > 1 - \varepsilon.$$

Dalla (3) segue

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} |\cos n_m(x' - \alpha_{n_m})| \geq 1$$

e quindi

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} |\cos n_m(x' - \alpha_{n_m})| = 1.$$

E poichè la lunghezza complessiva degli intervalli di S_r è minore di $1:r$, ed r è arbitrario, la (1) risulta dimostrata in quasi-tutto $(0, 2\pi)$ (¹). E con questo risulta dimostrato anche il teorema di Steinhaus.

Dal teorema di Steinhaus segue poi che, se non è $a_n^2 + b_n^2 \to 0$, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$ non vale la

$$\lim_{n \to \infty} |a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx| = 0,$$

(¹) Per riportarci alla definizione posta nella nota (³) di pag. 17, facciamo qui uso del seguente lemma:

Data una successione δ_1, δ_2,...., δ_m,...., di intervalli parziali di (a, b), è sempre possibile di costruire un plurintervallo Δ di (a, b), tale che ogni δ_m appartenga interamente ad un intervallo di Δ, e che la lunghezza di Δ non superi la somma delle lunghezze di tutti i δ_m.

Considerato il primo intervallo δ_1 della successione data, determiniamo il massimo intervallo di (a, b) che gode delle due seguenti proprietà: 1°) contiene δ_1; 2°) ha lunghezza non superiore alla somma delle lunghezze di tutti i δ_m in esso completamente contenuti. Se di questi massimi intervalli ve ne fosse più di uno, sceglieremo quello di minima ascissa. Indichiamo con δ_1' l'intervallo così determinato. È evidente che ogni δ_m o è tutto contenuto in δ_1' oppure non ha con esso alcun punto comune.

Consideriamo ora il primo dei δ_m che non ha punti in δ_1', e indichiamolo con $\bar{\delta}_2$. Fra gli intervalli ottenuti da (a, b) sopprimendo i punti interni a δ_1', ve n'è uno che contiene $\bar{\delta}_2$: indichiamolo con (a', b') e costruiamo l'intervallo δ_2', partendo da (a', b') e $\bar{\delta}_2$, come dianzi abbiamo costruito δ_1', partendo da (a, b) e δ_1. E così proseguiamo indefinitamente.

Gli intervalli δ_1', δ_2',...., δ_n',.... sono non sovrapponentisi e costituiscono, pertanto, un plurintervallo Δ. Ogni δ_m appartiene interamente ad un δ_n'; e siccome la lunghezza di δ_n' non supera la somma delle lunghezze di tutti i δ_m completamente contenuti in δ_n', la lunghezza di Δ risulta non superiore alla somma delle lunghezze di tutti i δ_m.

e quindi, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, la serie trigonometrica non converge. Così risulta provato il teorema di Lebesgue del n.° 3.

5. - Convergenza assoluta. Teorema di Fatou.

Dicesi che la serie trigonometrica

$$(1) \qquad \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

è *assolutamente convergente* in un punto x, se in tale punto è convergente la serie

$$\frac{1}{2} | a_0 | + \sum_1^{\infty} | a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx |.$$

È ben facile rendersi conto dell'esistenza di serie trigonometriche ovunque assolutamente convergenti. Così, ad esempio, la serie (2) del n.° 1 è assolutamente convergente per ogni valore della x. Per contro, esistono delle serie trigonometriche ovunque convergenti, esclusi i punti congrui a zero secondo il modulo 2π, ma non mai assolutamente convergenti.

Per esempio, la serie (già considerata da D. Bernoulli)

$$\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + \ldots.$$

è, come vedremo più innanzi, ovunque convergente, eccettuati i punti $2\pi k$, con k intero, ma non converge mai assolutamente (ciò che risulterà da quanto sarà più oltre dimostrato).

Esistono anche serie trigonometriche assolutamente convergenti in alcuni punti e non assolutamente convergenti in altri. Un esempio è dato da

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \ldots. + \operatorname{sen} nx + \ldots.,$$

serie che, come abbiamo veduto nel n.° 1, converge soltanto nei punti congrui a zero secondo il modulo π. In questi punti essa converge anche assolutamente; la convergenza assoluta manca invece in tutti gli altri.

Infine, la serie (già considerata da D. Bernoulli)

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \ldots. + \frac{\operatorname{sen} nx}{n} + \ldots.$$

dà esempio (come vedremo più innanzi) di serie, ovunque convergente, che converge assolutamente soltanto nei punti congrui a zero secondo il modulo π.

Data la varietà dei casi che una serie trigonometrica può presentare, rispetto alla convergenza assoluta, si pone naturalmente il problema di determinare le condizioni a cui devono soddisfare i coefficienti a_n e b_n affinchè la serie sia assolutamente convergente.

È evidente che, se le serie Σa_n e Σb_n sono entrambe assolutamente convergenti, tale è anche la serie trigonometrica (1), perchè è sempre

$$|a_m \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx| \leq |a_n| + |b_n| .$$

Si domanda ora: affinchè la serie (1) converga assolutamente in $(0, 2\pi)$, è necessario che le serie Σa_n e Σb_n convergano entrambe assolutamente? A ciò risponde il seguente teorema, dovuto a Fatou [1]:

Se la serie trigonometrica (1) *è assolutamente convergente in tutto un intervallo* (c, d), *le serie* Σa_n *e* Σb_n *sono assolutamente convergenti.*

Con questo teorema, che è un corollario immediato di quello che dimostreremo nel n.° seguente, la convergenza delle serie $\Sigma |a_n|$ e $\Sigma |b_n|$ risulta condizione necessaria e sufficiente per l'assoluta convergenza della serie (1) in tutto un intervallo (c, d). Ne segue che la (1), se è assolutamente convergente in tutto un intervallo (c, d) (comunque piccolo), è assolutamente convergente ovunque [2]. Segue pure che, se la (1) converge assolutamente in tutto un intervallo, è ovunque convergente anche la serie

$$\frac{1}{2}|a_0| + \sum_{1}^{\infty} \{ |a_n \cos nx| + |b_n \operatorname{sen} nx| \} .$$

---

(1) *Séries trigonométriques et séries de Taylor.* (Acta Mathematica, t. XXX (1906); pp. 335-400).

(2) Non avviene altrettanto per la convergenza semplice. Ed infatti, H. Steinhaus (*Sur un problème de MM. Lusin et Sierpinski.* Bullettin de l'Acad. des Sciences de Cracovie, 1913, pp. 435-450) ha costruito una serie trigonometrica la quale, mentre converge in tutti i punti di un certo intervallo, diverge in tutti quelli di un altro intervallo.

6. - Teorema di Denjoy-Lusin.

Il teorema di Fatou, del n.° precedente, non esclude che, pur non avendosi la convergenza di entrambe le serie $\Sigma |a_n|$ e $\Sigma |b_n|$, la (1) possa convergere assolutamente in qualche punto ed anche in infiniti punti dell'intervallo $(0, 2\pi)$. Ciò può avvenire effettivamente. La serie

$$\sum_1^\infty \operatorname{sen} n!\, x,$$

già considerata nel n.° 3, è, negli infiniti punti $x = \frac{p}{q}\pi$ là indicati, non soltanto semplicemente, ma anche assolutamente convergente; e questi punti sono in numero infinito e ovunque densi in ogni intervallo.

Peraltro, quando $\Sigma |a_n|$ e $\Sigma |b_n|$ non siano entrambe convergenti, i punti di convergenza assoluta della serie trigonometrica, che si trovano nell'intervallo $(0, 2\pi)$, possono sempre rinchiudersi in un plurintervallo di lunghezza arbitrariamente piccola.

Proveremo ciò, dimostrando il seguente teorema, dovuto a Denjoy e a Lusin (1):

Se le serie Σa_n, Σb_n non sono entrambe assolutamente convergenti, la serie

$$\frac{1}{2} |a_0| + \sum_1^\infty |a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx|$$

è divergente in quasi-tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$.

La dimostrazione si fonda sul seguente

Lemma: « Se Δ è un plurintervallo di $(0, 2\pi)$, è, per ogni intero positivo n,

$$\int_\Delta |\cos nx|\, dx > \frac{\Delta^2}{32} \text{ ».}$$

Segniamo su $(0, 2\pi)$ i $2n$ punti $\frac{\pi}{2n}(2k-1)$, $k = 1, 2 \ldots 2n$, in cui si ha $\cos nx = 0$, e circondiamoli con intorni aventi i

(1) A. Denjoy, *Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques.* (Comptes rendus, t. CLV (1912); pp. 135-136). - N. Lusin, *Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques.* (Comptes rendus, t. CLV (1912); pp. 580-582).

punti stessi come centri, e di ampiezza $\frac{\Delta}{2}\frac{1}{2n}$. La lunghezza complessiva di questi intorni è $\Delta:2$, e, in tutti i punti non interni ad essi, abbiamo

$$(1) \qquad |\cos nx| \geq \cos n\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\Delta}{4}\frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta}{8}\right) = \operatorname{sen}\frac{\Delta}{8} > \frac{\Delta}{16}.$$

Dopo di ciò, indichiamo con Δ' la parte di Δ che non è interna agli intorni costruiti. Sarà $\Delta' \geq \Delta - \frac{\Delta}{2} = \frac{\Delta}{2}$, e poichè nei punti di Δ' vale la (1), abbiamo

$$\int_{\Delta} |\cos nx|\, dx \geq \int_{\Delta'} |\cos nx|\, dx > \frac{\Delta}{16}\int_{\Delta'} dx = \frac{\Delta}{16}\Delta' \geq \frac{\Delta^2}{32}.$$

Osserviamo che, essendo $|\cos nx|$ una funzione periodica, la disuguaglianza dimostrata vale anche se, invece di $|\cos nx|$, poniamo $|\cos n(x-\alpha_n)|$.

Servendoci del lemma così stabilito, dimostriamo il teorema di Denjoy-Lusin. Posto, come al solito,

$$a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx = \rho_n \cos n(x-\alpha_n),$$

e supposto che $\Sigma\rho_n$ sia divergente, dobbiamo dimostrare la divergenza della serie

$$\Sigma\rho_n\, |\cos n(x-\alpha_n)|$$

in quasi-tutto $(0, 2\pi)$. Poniamo

$$s_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \rho_n\, |\cos n(x-\alpha_n)|:$$

$s_m(x)$ è una funzione continua, non mai negativa, e, in ogni punto x di $(0, 2\pi)$, è

$$(2) \qquad s_m(x) \leq s_{m+1}(x).$$

Sia r un numero intero positivo e indichiamo con $\Delta_{r,m}$ il plurintervallo costituito da tutti i punti di $(0, 2\pi)$ in cui è

$$s_m(x) < r.$$

Dalla (2) segue che $\Delta_{r,m+1}$ è tutto contenuto in $\Delta_{r,m}$, perchè, se in x è $s_{m+1}(x) < r$, è a più forte ragione $s_m(x) < r$. Ora abbiamo, da una parte,

$$\int_{\Delta_{r,m}} s_m(x)\,dx < r \int_{\Delta_{r,m}} dx = r\,\Delta_{r,m},$$

e, dall'altra,

$$\int_{\Delta_{r,m}} s_m(x)\,dx = \sum_{n=1}^{m} \rho_n \int_{\Delta_{r,m}} |\cos n(x-\alpha_n)|\,dx,$$

ossia, per il lemma dimostrato,

$$\int_{\Delta_{r,m}} s_m(x)\,dx > \sum_{1}^{m} \rho_n \frac{\Delta^2_{r,m}}{32} = \frac{\Delta^2_{r,m}}{32} \sum_{1}^{m} \rho_n .$$

Abbiamo dunque

$$\frac{\Delta^2_{r,m}}{32} \sum_{1}^{m} \rho_n < r\,\Delta_{r,m},$$

$$\Delta_{r,m} < 32 \frac{r}{\sum\limits_{1}^{m} \rho_n};$$

e poichè $\Sigma\rho_n$ è divergente per ipotesi, ne viene, per $m \to \infty$,

$$\Delta_{r,m} \to 0.$$

Sia ora ν un numero intero positivo qualunque e indichiamo con $m_{\nu,r}$ il minimo intero positivo tale che sia

$$\Delta_{r,m_{\nu,r}} < \frac{1}{\nu}\frac{1}{2^r}.$$

Indichiamo poi con Δ_ν il plurintervallo corrispondente [1] all'insieme degli intervalli di tutti i plurintervalli $\Delta_{1,m_{\nu,1}}$, $\Delta_{2,m_{\nu,2}}$,.... È

$$\Delta_\nu < \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) = \frac{1}{\nu}.$$

---

[1] Intendiamo, corrispondente secondo la costruzione indicata nella nota [1] di pag. 20.

Se x' è un punto di convergenza della serie $\Sigma\rho_n |\cos n(x-\alpha_n)|$ e indichiamo con s' la somma di questa serie in x', possiamo sempre trovare un r' tale che sia $r' > s'$. Allora è, per ogni m,

$$s_m(x') \leq s' < r',$$

e x' appartiene così a tutti i $\Delta_{r',m}$ e in particolare a $\Delta_{r',m_{\nu,r'}}$, e quindi a Δ_ν. Dunque, ogni punto di convergenza di $\Sigma\rho_n|\cos n(x-\alpha_n)|$ è contenuto in Δ_ν, e poichè è $\Delta_\nu < 1 : \nu$, ciò prova che la serie ora scritta diverge in quasi-tutto $(0, \pi)$.

Dal teorema di Denjoy-Lusin discende, come corollario, quello di Fatou del n.° 5. Ed infatti, se $\Sigma|a_n|$ e $\Sigma|b_n|$ non sono entrambe convergenti, per il teorema ora dimostrato la serie $\Sigma\rho_n|\cos n(x-\alpha_n)|$ diverge in quasi-tutto (c, d): essa perciò non può convergere in tutto l'intervallo indicato.

7. – Serie non mai assolutamente convergenti.

Vi sono dei tipi di serie trigonometriche per i quali, relativamente alla convergenza assoluta, non possono presentarsi che due casi: o la serie converge assolutamente ovunque, oppure la serie non converge mai assolutamente.

a) Uno di questi tipi è quello della serie di coseni

$$\sum_1^\infty a_n \cos nx,$$

in cui il modulo di a_n non cresce mai col crescere di n. Per queste serie vale la seguente proposizione [1]:

Se $|a_n|$ non cresce mai col crescere di n, condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie $\Sigma a_n \cos nx$ converga assolutamente in un dato punto x_0, è che sia convergente la serie $\Sigma|a_n|$.

La condizione sufficiente è evidente. Occupiamoci dunque della condizione necessaria e dimostriamo che, se $\Sigma|a_n \cos nx_0|$ è convergente, è pure tale $\Sigma|a_n|$.

Per $x_0 = 0$ e $x_0 = \pi$, ciò è evidente. Supponiamo $0 < x_0 < \pi$, e indichiamo con ω un numero positivo tale che sia

$$\omega < \frac{x_0}{2}, \quad \omega < \frac{\pi - x_0}{2}.$$

---

[1] P. Fatou, *Sur la convergence absolue des séries trigonométriques.* (Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XLI (1913), pp. 47-53).

Ciò fatto, dividiamo i numeri della successione x_0, $2x_0$, $3x_0$,.... in due categorie, mettendo nella prima quelli che sono congrui, rispetto al modulo π, a punti dell' intervallo $\left(\frac{\pi}{2} - \omega, \frac{\pi}{2} + \omega\right)$, e nella seconda tutti gli altri. Siccome x_0 è maggiore di 2ω e minore di $\pi - 2\omega$, due numeri consecutivi, nx_0 e $(n+1)x_0$, non possono mai appartenere entrambi alla prima categoria.

Ora abbiamo, indicando con Σ'' la sommatoria estesa soltanto ai termini relativi ai valori nx_0 della seconda categoria,

$$\begin{aligned} \Sigma \,|\, a_n \cos nx_0 \,| &\geq \Sigma'' \,|\, a_n \cos nx_0 \,| \\ &\geq \operatorname{sen} \omega\, \Sigma'' \,|\, a_n \,|, \end{aligned}$$

e quindi $\Sigma''|a_n|$ risulta convergente. E siccome $|a_n|$ non cresce mai col crescere di n, da quanto precede segue, indicando con Σ' la sommatoria estesa soltanto ai termini relativi agli nx_0 della prima categoria, $\Sigma' \,|\, a_n \,| \leq |\, a_1 \,| + \Sigma'' \,|\, a_n \,|$ (perchè $\Sigma' \,|\, a_n \,|$ è minore o uguale alla serie di tutti i moduli degli a_n che sono gli immediati precedenti dei suoi termini, aumentata eventualmente di $|\, a_1 \,|$), e pertanto risulta convergente anche $\Sigma' \,|\, a_n \,|$. Tale è dunque anche $\Sigma \,|\, a_n \,|$, come appunto volevamo dimostrare.

Se, infine, x_0 è fuori dell' intervallo $(0, \pi)$, potremo scrivere $x_0 = x' + k\pi$, con k intero e $0 \leq x' < \pi$, ed avendosi

$$\Sigma \,|\, a_n \cos nx_0 \,| = \Sigma \,|\, a_n \cos nx' \,|,$$

siamo ricondotti al caso precedente.

Per la proposizione ora dimostrata, abbiamo che, quando $|\, a_n \,|$ non cresce mai col crescere di n, la serie $\Sigma\, a_n \cos nx$, se converge assolutamente in un punto, converge assolutamente ovunque.

La serie

$$\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + \ldots,$$

considerata nel n.° 5, ha i suoi coefficienti a modulo decrescente, e siccome $\Sigma \frac{1}{n}$ è divergente, essa non converge mai assolutamente.

b) Dalla proposizione data in *a*), segue immediatamente:

Se k è un numero intero positivo e se $|\, a_{kn} \,|$ non cresce mai col crescere di n, condizione necessaria e sufficiente affinchè la *serie* $\sum\limits_n a_{kn} \cos knx$ *converga assolutamente in un dato punto* x_0, *è che sia convergente la serie* $\sum\limits_n |a_{kn}|$.

Ed infatti, posto $kx = x'$, non vi è che applicare il teorema già dimostrato.

c) La proposizione dimostrata in *a*) ammette anche la seguente generalizzazione:

Se k è un intero positivo dispari, e se $|a_{kn+1}|$ *non cresce mai col crescere di n, condizione necessaria e sufficiente affinchè la* $\sum\limits_n a_{kn+1} \cos (kn+1)x$ *converga assolutamente in un dato punto* x_0, *è che sia convergente la serie* $\sum\limits_n |a_{kn+1}|$.

Anche qui, la proposizione è evidente per $x_0 = 0$ e $x_0 = \pi$. Se è $0 < x_0 < \pi$, si può determinare facilmente un numero positivo ω, sufficientemente piccolo, in modo che, qualunque sia l'intero positivo n, dei punti $(kn+1)x_0$ e $[k(n+1)+1]x_0$ uno solo al più possa risultare congruo, rispetto al modulo π, a un punto dell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2} - \omega, \frac{\pi}{2} + \omega\right)$; ed allora, ragionando come si è fatto in *a*), si giunge senz'altro alla conclusione voluta.

Applicando il teorema ora dimostrato, abbiamo, ad esempio, che la serie

$$\cos x + \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{7}\cos 7x + \frac{1}{10}\cos 10x + \dots$$

non ammette alcun punto di convergenza assoluta.

8. – Serie a punti di convergenza assoluta isolati.

Con ragionamenti analoghi a quelli del n.° precedente, si dimostrano facilmente le proposizioni che seguono:

Se k è un intero positivo pari e se $|a_{kn+1}|$ *non cresce mai col crescere di n, condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie* $\sum\limits_n a_{kn+1} \cos (kn+1)x$ *converga assolutamente in un dato punto* x_0, *non congruo a* $\pi:2$ *secondo il modulo* π, *è che sia convergente* $\sum\limits_n |a_{kn+1}|$.

Nei punti x_0 ora esclusi, la serie trigonometrica considerata è sempre assolutamente convergente.

Se k è un intero positivo qualsiasi e se $|a_{kn+i}|$ *non cresce mai col crescere di n, condizione necessaria e sufficiente affin-*

chè la serie $\sum_n a_{kn} \operatorname{sen} knx$ *converga assolutamente in un dato punto* x_0, *non congruo, secondo il modulo* π, *ad uno dei punti* $0, \frac{\pi}{k}, \ldots, \frac{(k-1)\pi}{k}$, *è che sia convergente* $\sum_n |a_{kn}|$.

Nei punti x_0 ora esclusi, la serie trigonometrica considerata è sempre assolutamente convergente.

Se k *è un intero positivo qualsiasi e se* $|a_{kn+1}|$ *non cresce mai col crescere di* n, *condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie* $\sum_n a_{kn+1}$ *sen*$(kn+1)x$ *converga assolutamente in un dato punto* x_0, *non congruo a* 0 *secondo il modulo* π, *è che sia convergente* $\sum_n |a_{kn+1}|$.

Anche qui, nei punti x_0 esclusi, la serie trigonometrica è sempre assolutamente convergente.

Come conseguenza della prima delle proposizioni qui date, notiamo che la serie considerata da Fourier, e prima di lui da Eulero,

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots.$$

risulta assolutamente convergente soltanto nei punti congrui a $\frac{\pi}{2}$ secondo il modulo π. Dalla seconda proposizione, segue poi che la serie di Bernoulli

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} nx}{n} + \ldots$$

converge assolutamente soltanto nei punti congrui a zero secondo il modulo π.

9. – Influenza dei punti di convergenza assoluta sul comportamento della serie.

I punti di convergenza assoluta di una serie trigonometrica hanno una notevole influenza sul comportamento della serie in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$. Posto, per brevità,

$$A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx,$$

supponiamo che x_0 sia un punto di convergenza assoluta per la serie

$$(1) \qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty A_n(x),$$

e consideriamo due punti di $(0, 2\pi)$ simmetrici rispetto ad x_0, punti che indicheremo con $x_0 - h$ e $x_0 + h$. Sommando i valori di $A_n(x)$ corrispondenti a questi valori della x, abbiamo

$$A_n(x_0 + h) + A_n(x_0 - h) =$$
$$= 2a_n \cos nx_0 \cos nh + 2b_n \operatorname{sen} nx_0 \cos nh = 2A_n(x_0) \cos nh.$$

Avendo supposto convergente la serie $\Sigma |A_n(x_0)|$, la nuova serie trigonometrica $\Sigma A_n(x_0) \cos nh$, dove ora la variabile è h, è assolutamente convergente per ogni h, perchè il suo termine generale ha un modulo sempre $\leq |A_n(x_0)|$. Dalla uguaglianza precedente deduciamo, perciò, che, se in $x_0 + h$ la serie (1) è convergente, o indeterminata, o divergente, o assolutamente convergente, altrettanto avviene in $x_0 - h$; e se in $x_0 + h$ la somma della (1), supposta la serie convergente, è continua o discontinua (di 1ª o di 2ª specie), anche in $x_0 - h$ essa è, rispettivamente, continua o discontinua (rispettivamente, di 1ª o di 2ª specie); e se, in un certo intervallo, la (1) converge uniformemente, nell' intervallo simmetrico rispetto ad x_0 essa converge pure uniformemente. Abbiamo dunque il teorema, dovuto a Fatou [1]:

In punti simmetrici rispetto ad un punto di convergenza assoluta, la serie (1) è contemporaneamente o convergente, o indeterminata, o divergente, o assolutamente convergente, e la sua somma è contemporaneamente o continua, o discontinua; in intervalli simmetrici, rispetto allo stesso punto di convergenza assoluta, la serie è poi uniformemente convergente o no.

Di qui segue, in particolare, che, se una serie trigonometrica converge ovunque su $(0, 2\pi)$, ad eccezione di un numero finito (non nullo) di punti, essa non può avere su $(0, 2\pi)$ che un numero finito di punti di convergenza assoluta; altrettanto dicasi se essa è convergente in tutto o in quasi-tutto $(0, 2\pi)$ e ivi rappresenta una funzione che ha soltanto un numero finito (non nullo) di discontinuità.

Dalla medesima proposizione segue anche che, se si considera l' insieme di tutti i punti di $(-\infty, +\infty)$ in cui una serie trigonometrica converge assolutamente, tale insieme risulta simmetrico di sè stesso rispetto a ciascuno dei suoi punti. E pertanto, se i punti di convergenza assoluta che si trovano in $(0, 2\pi)$

---

[1] Loc. cit. in [1] a pag. 22.

sono in numero finito, essi, rappresentati sulla circonferenza di raggio 1, costituiscono i vertici di un poligono regolare. Se, invece, in $(0, 2\pi)$ vi sono infiniti punti di convergenza assoluta, l'insieme di tali punti è uniformemente denso in tutto l'intervallo considerato, vale a dire, ha infiniti elementi in qualsiasi intervallo parziale di $(0, 2\pi)$. Ciò si vede immediatamente osservando che, se vi sono in $(0, 2\pi)$ infiniti punti di convergenza assoluta, tali infiniti punti hanno almeno un punto di condensazione (o punto limite) e quindi, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, vi sono sempre due di tali punti, x_1 e x_2, distanti fra loro per meno di ε. Ed allora, costruendo il simmetrico $x_2 + (x_2 - x_1)$ di x_1 rispetto a x_2, poi il simmetrico $x_2 + 2(x_2 - x_1)$ di x_2 rispetto a $x_2 + (x_2 - x_1)$, e così via, si ottiene che, in ogni intervallo parziale di $(0, 2\pi)$, di ampiezza ε, vi è almeno un punto di convergenza assoluta. E siccome ε è arbitrario, l'affermazione fatta è provata.

Osserviamo pure che, per poter asserire l'esistenza in $(0, 2\pi)$ di infiniti punti di convergenza assoluta per la (1), basta constatare che di tali punti ne esistono due, x_1 e x_2, tali che $x_2 - x_1$ sia incommensurabile con π. Ed infatti, poichè tutti i punti della forma $x_1 + k(x_2 - x_1)$, con k intero, risultano punti di convergenza assoluta (per il teorema sopra dimostrato), e poichè, per essere $x_2 - x_1$ incommensurabile con π, due qualunque di tali punti non risultano mai fra loro congrui rispetto al modulo π, ne viene che i punti dell'intervallo $(0, 2\pi)$ che sono congrui, rispetto al modulo 2π, ai punti $x_1 + k(x_2 - x_1)$, risultano fra loro distinti. Nell'intervallo $(0, 2\pi)$ si hanno così infiniti punti di convergenza assoluta per la (1).

Vogliamo ora dedurre un'ulteriore conseguenza dal teorema dimostrato nel n.° presente.

Supponiamo che la serie (1) abbia, in $(0, 2\pi)$, un numero infinito di punti di convergenza assoluta, e che, in un intervallo (c, d), essa sia ovunque convergente. Allora, scelti due punti x_1 e x_2 (con $x_1 < x_2$) di convergenza assoluta, tali che sia $x_2 - x_1 < \dfrac{d-c}{2}$, per un certo k, intero, l'intervallo $[x_1 + k(x_2 - x_1), x_1 + (k+1)(x_2 - x_1)]$ risulterà interno a (c, d). E poichè tutti i punti della forma $x_1 + k(x_2 - x_1)$ sono punti di convergenza assoluta, e, come tali, punti di simmetria per l'insieme dei punti di convergenza della (1), ne viene che la (1), essendo convergente nell'intervallo $[x_1 + k(x_2 - x_1), x_1 + (k+1)(x_2 - x_1)]$, risulta pure convergente in tutto $(0, 2\pi)$. Lo stesso dicasi, se, in (c, d), si suppone che la (1) sia sempre non convergente, oppure che la (1) sia convergente o non convergente in quasi-tutto (c, d). Possiamo dunque affermare che:

La serie (1), *se ha, in* $(0, 2\pi)$, *un numero infinito di punti di convergenza assoluta, e se è convergente oppure non convergente in tutto, od in quasi-tutto, un dato intervallo parziale* (c, d), *è pure tale nell' intero intervallo* $(0, 2\pi)$.

Analogamente, e sempre nell' ipotesi dell' esistenza in $(0, 2\pi)$ di un numero infinito di punti di convergenza assoluta, se la (1), in un dato intervallo (c, d), converge uniformemente oppure ha per somma una funzione continua, altrettanto avviene in tutto $(0, 2\pi)$.

Abbiamo, infine: *una serie trigonometrica se ha, in* $(0, 2\pi)$, *infiniti punti di convergenza assoluta, è convergente in quasi-tutto* $(0, 2\pi)$, *oppure, in quasi-tutto* $(0, 2\pi)$, *è non convergente* [1]. Ciò è una conseguenza immediata di quanto si è detto e del seguente fatto: considerato, sull' intervallo $(0, 2\pi)$, un insieme E di punti, indicato con E' l' insieme di tutti i punti di E e di tutti i loro congrui rispetto al modulo 2π, e supposto che E' ammetta in $(0, 2\pi)$ un' infinità di punti di simmetria, allora, o l' insieme E è rinchiudibile in un plurintervallo di lunghezza piccola ad arbitrio, oppure è tale il complementare di E rispetto a $(0, 2\pi)$ [2].

§ 2. Condizioni sufficienti per la convergenza.

10. – Primo criterio immediato di convergenza.

La condizione $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, che, come abbiamo veduto (n.° 2), è necessaria per la convergenza della serie trigonometrica in tutto un intervallo, non è affatto sufficiente per tale convergenza. Si possono, infatti, costruire delle serie trigonometriche, tali che $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$, e ovunque non conver-

---

(1) N. Lusin, loc. cit. in (1) a pag. 23.

(2) N. Lusin, ibidem; E. W. Hobson, *The Theory of function of a real variable*, (2ª edizione, 1926, vol. II, p. 550).

genti [1]. Per assicurare la convergenza occorre dunque una condizione più restrittiva di quella ora indicata.

Un criterio immediato per la convergenza è dato dalla convergenza assoluta delle due serie Σa_n e Σb_n. In tal caso, come già si è osservato, la serie

$$\frac{1}{2} a_0 + \Sigma (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

converge assolutamente, e quindi anche semplicemente, in tutto l' intervallo $(0, 2\pi)$. Di più, essendo sempre

$$|a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx| \leq |a_n| + |b_n|,$$

la serie trigonometrica converge uniformemente in tutto $(0, 2\pi)$ ed ivi rappresenta una funzione continua.

Così, se si ha la serie (già considerata da Eulero)

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1^2} - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^2} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^2} - \frac{\operatorname{sen} 7x}{7^2} + \dots,$$

si può dir subito che essa è convergente ed anche assolutamente e uniformemente convergente in tutto $(0, 2\pi)$, perchè la serie dei moduli dei suoi coefficienti $\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$ è convergente. Si vedrà, più innanzi, che la sua somma è πx in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; $\frac{\pi}{4}(\pi - x)$ in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$; e, infine, $\frac{\pi}{4}(x - 2\pi)$ in $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

11. - Alcune somme fondamentali.

Prima di dare altri criteri di convergenza, stabiliremo delle formole sommatorie che ci saranno molto utili.

Consideriamo, in primo luogo, la somma

$$s_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx.$$

---

(1) La prima di queste serie fu costruita da H. STEINHAUS (*Sur une série trigonométrique divergente*, C. R. Société scientifique de Varsovie, 5ª annata, 1912, pp. 223-227).

Prima dello STEINHAUS, N. LUSIN (*Ueber eine Potenzreihe*, Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. XXXII (1911), pp. 386-390) aveva costruito una serie trigonometrica tale che $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, e non convergente in quasi-tutto $(0, 2\pi)$.

Sulle varie possibilità che, rispetto alla convergenza, può presentare una serie trigonometrica, v. L. NEDER, *Zur Konvergenz der trigonometrischen Reihen* ecc. (Inauguraldissertation, Göttingen, 1919, pp. 1-47).

Moltiplicando per $2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$, abbiamo

$$2 s_n(x) \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos x + \dots + 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos nx,$$

e rammentando che è

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos rx = \operatorname{sen} \left(r + \frac{1}{2}\right) x - \operatorname{sen} \left(r - \frac{1}{2}\right) x,$$

otteniamo, sostituendo,

$$2 s_n(x) \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \left\{ \operatorname{sen} \left(1 + \frac{1}{2}\right) x - \operatorname{sen} \left(1 - \frac{1}{2}\right) x \right\} + \dots +$$
$$+ \left\{ \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2}\right) x - \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{2}\right) x \right\} = \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2}\right) x,$$

e perciò

$$(1) \qquad \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}},$$

formula data da W. Snellius [1].

Cambiando qui x in $\pi - x$, otteniamo

$$(2) \qquad \frac{1}{2} - \cos x + \cos 2x - \cos 3x + \dots +$$
$$+ (-1)^n \cos nx = (-1)^n \frac{\cos \frac{2n+1}{2} x}{2 \cos \frac{x}{2}}.$$

Consideriamo ora l'altra somma

$$\sigma_n(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \dots + \operatorname{sen} nx.$$

Moltiplicando ancora per $2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$, abbiamo

$$2 \sigma_n(x) \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{sen} 2x + \dots + 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{sen} nx,$$

---

[1] *Doctrinae triangulorum canonicae libri quatuor.* (Memoria postuma). Leyde 1627, p. 44.

e rammentando l' uguaglianza

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{sen} rx = \cos\left(r - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(r + \frac{1}{2}\right)x,$$

otteniamo

$$2\, \sigma_n(x) \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \left[\cos\left(1 - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(1 + \frac{1}{2}\right)x\right] + \dots +$$

$$+ \left[\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x,$$

ed infine

$$2\, \sigma_n(x) \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{n+1}{2} x \operatorname{sen} \frac{n}{2} x,$$

ossia

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \dots + \operatorname{sen} nx = \frac{\operatorname{sen} \frac{n}{2} x \operatorname{sen} \frac{n+1}{2} x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}},$$

formula conosciuta già da Archimede.

Cambiando x in $\pi - x$, otteniamo:

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \dots + (-1)^{n+1} \operatorname{sen} nx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-\operatorname{sen} \frac{n}{2} x \cos \frac{n+1}{2} x}{\cos \frac{x}{2}}, & \text{se } n \text{ è pari,} \\[2ex] \dfrac{\cos \frac{n}{2} x \operatorname{sen} \frac{n+1}{2} x}{\cos \frac{x}{2}}, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Se, alla somma considerata in (3), aggiungiamo il termine $-\frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$, otteniamo una somma analoga alla (1):

$$\text{(3')} \qquad -\frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2} + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \dots + \operatorname{sen} nx = -\frac{\cos \frac{2n+1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}.$$

Nello stesso modo, aggiungendo $-\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ad ambo i membri di (4), abbiamo

$$(4') \qquad -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}2x+\ldots.+$$

$$+(-1)^{n+1}\operatorname{sen}nx=(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}x}{2\cos\frac{x}{2}}.$$

Con lo stesso metodo col quale abbiamo ottenuto le formule (1) e (3), otteniamo le seguenti altre formule più generali, dovute ad Eulero [1]:

$$(5) \qquad \sum_{r=0}^{n}\cos(a+rx)=\frac{\cos\frac{2a+nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}},$$

$$(6) \qquad \sum_{r=0}^{n}\operatorname{sen}(a+rx)=\frac{\operatorname{sen}\frac{2a+nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

Esse si dimostrano moltiplicando i loro primi membri per $2\operatorname{sen}(x:2)$, trasformando in differenze tutti i prodotti ottenuti, riducendo e trasformando in prodotto la differenza finale:

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\sum_{r=0}^{n}\cos(a+rx)=\sum_{r=0}^{n}2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos(a+rx)$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\left\{\operatorname{sen}\left(a+\frac{2r+1}{2}x\right)-\operatorname{sen}\left(a+\frac{2r-1}{2}x\right)\right\}$$

$$=\operatorname{sen}\left(a+\frac{2n+1}{2}x\right)-\operatorname{sen}\left(a-\frac{x}{2}\right)=2\cos\frac{2a+nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x,$$

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\sum_{r=0}^{n}\operatorname{sen}(a+rx)=\sum_{r=0}^{n}2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(a+rx)$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\left\{\cos\left(a+\frac{2r-1}{2}x\right)-\cos\left(a+\frac{2r+1}{2}x\right)\right\}$$

$$=\cos\left(a-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{2n+1}{2}x\right)=2\operatorname{sen}\frac{2a+nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x.$$

---

[1] *De inventione integralium si post integrationem variabili quantitati valor tribuatur.* (Misc. Berol. t. VII (1743), pp. 129-171 e più particolarmente p. 133).

Dalla (5) otteniamo, in particolare, ponendo $2x$ in luogo di x, e x in luogo di a,

$$(7)\quad \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos(2n+1)x = \frac{\operatorname{sen} 2(n+1)x}{2\operatorname{sen} x}.$$

Analogamente, otteniamo, in particolare, dalla (6),

$$(8)\quad \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \dots + \operatorname{sen}(2n+1)x = \frac{\operatorname{sen}^2(n+1)x}{\operatorname{sen} x}.$$

Dalla (7), cambiando x in $\frac{\pi}{2} - x$, abbiamo:

$$(9)\quad \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x - \dots + (-1)^n \operatorname{sen}(2n+1)x = (-1)^n \frac{\operatorname{sen} 2(n+1)x}{2\cos x};$$

ed analogamente, otteniamo dalla (8):

$$(10)\quad \cos x - \cos 3x + \cos 5x - \dots + (-1)^n \cos(2n+1)x = \begin{cases} \dfrac{\cos^2(n+1)x}{\cos x}, & \text{se } n \text{ è pari,} \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen}^2(n+1)x}{\cos x}, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

12. - **Criteri generali di convergenza dedotti dalla trasformazione di Brunacci-Abel.**

a) Consideriamo una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n,$$

il cui termine generale sia il prodotto di due fattori a_n e b_n.

Posto

$$s_m = \sum_0^m a_n b_n, \quad \sigma_m = \sum_0^m b_n,$$

operiamo su s_m la *trasformazione di Brunacci* [1], nota comunemente sotto il nome di *trasformazione di Abel*:

$$\begin{aligned} s_m &= a_0\sigma_0 + a_1(\sigma_1 - \sigma_0) + \dots + a_m(\sigma_m - \sigma_{m-1}) \\ &= (a_0 - a_1)\sigma_0 + (a_1 - a_2)\sigma_1 + \dots + (a_{m-1} - a_m)\sigma_{m-1} + a_m\sigma_m. \end{aligned}$$

---

[1] V. Brunacci, *Corso di Matematica sublime*, t. I (Firenze, 1804), p. 33; N. H. Abel, *Untersuchungen über die Reihe...* (Journal für Mathematik, Bd. I (1826), pp. 311-339).

Da qui deduciamo che, *se* $a_n \sigma_n$ *ha un limite finito per* $n \to \infty$, *la convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1})\sigma_n$$

è condizione necessaria e sufficiente per la convergenza della

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n .$$

b) Come criterio di convergenza, abbiamo, in particolare:

Se è $a_n \to 0$; *se, per qualunque* n, σ_n *resta in modulo inferiore ad un numero fisso* M; *se converge la serie* $\Sigma \,|\, a_n - a_{n+1} \,|$; *allora converge anche la serie* $\Sigma a_n b_n$.

Ed infatti, in tali condizioni, è $a_n \sigma_n \to 0$, ed è anche

$$|(a_0 - a_1)\sigma_0| + |(a_1 - a_2)\sigma_1| + \dots +$$
$$+ |(a_{m-1} - a_m)\sigma_{m-1}| < M \sum_{0}^{m-1} |\, a_n - a_{n+1} \,| :$$

la serie $\Sigma\,(a_n - a_{n+1})\sigma_n$ converge perciò assolutamente e quindi anche semplicemente.

c) Un secondo importante criterio di convergenza, che segue anch'esso dalla prima delle due proposizioni date or ora, è il seguente, dovuto, come il precedente, a Dedekind:

Se le serie

$$\sum_{0}^{\infty} |\, a_n - a_{n+1} \,|, \quad \sum_{0}^{\infty} b_n$$

convergono, converge anche la serie $\Sigma a_n b_n$.

Ed infatti, dalla convergenza della serie $\Sigma \,|\, a_n - a_{n+1} \,|$ segue che, preso ad arbitrio $\varepsilon > 0$, si può determinare un certo n' in modo che la somma di un numero qualunque di termini $|\, a_n - a_{n+1} \,|$, di indice maggiore di n', sia $< \varepsilon$. Dunque, per ogni $n > n'$ e per ogni s, si ha

$$|\, a_n - a_{n+s} \,| = |(a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots +$$
$$+ (a_{n+s-1} - a_{n+s})| \leq |\, a_n - a_{n+1} \,| + \dots + |\, a_{n+s-1} - a_{n+s} \,| < \varepsilon ,$$

e ciò dimostra (condizione di Cauchy) che a_n ha un limite finito per $n \to \infty$. Dunque $a_n \sigma_n$ ha limite finito per $n \to \infty$. Siccome poi σ_n, avendo limite finito per $n \to \infty$, resta in modulo inferiore ad un numero fisso, dall'ipotesi che $\Sigma|a_n - a_{n+1}|$ converga, segue, come dianzi, la convergenza di

$$\sum_0^\infty (a_n - a_{n+1})\sigma_n .$$

Pertanto, per la proposizione data in a), si ha la convergenza di $\Sigma a_n b_n$.

13. - Convergenza uniforme.

Quando a_n e b_n, anzichè essere delle costanti, sono delle funzioni della x, date in un certo intervallo (α, β), le proposizioni di convergenza, del n.° precedente, si trasformano in altrettante proposizioni di convergenza uniforme, sotto la condizione che le ipotesi che in esse sono poste siano verificate *uniformemente* in tutto (α, β). Così, per es., nel primo teorema, la convergenza della serie

$$\sum_0^\infty (a_n - a_{n+1})\sigma_n$$

dovrà essere supposta uniforme in tutto (α, β), ed $a_n\sigma_n$ dovrà supporsi convergente uniformemente al suo limite in tutto (α, β).

Per quanto riguarda il criterio di convergenza dato nel n.° 12, c), vogliamo osservare che, per l'uniforme convergenza della $\Sigma a_n b_n$, non occorre la convergenza uniforme di ambedue le serie $\Sigma|a_n - a_{n+1}|$ e Σb_n: basta la convergenza uniforme della Σb_n e l'ipotesi che le somme parziali $\sum_0^m |a_n - a_{n+1}|$ restino tutte inferiori ad un numero fisso M, per tutti gli x di (α, β), purchè $|a_0|$ resti anch'esso inferiore ad un numero fisso A.

Consideriamo, infatti, le somme

$$s_{p,q} = a_{p+1}b_{p+1} + \dots + a_{p+q}b_{p+q},$$
$$\sigma_{p,q} = b_{p+1} + \dots + b_{p+q}.$$

Applicando ad $s_{p,q}$ la trasformazione di Brunacci-Abel, otteniamo

$$s_{p,q} = \sum_{n=1}^{q-1} (a_{p+n} - a_{p+n+1})\sigma_{p,n} + a_{p+q}\sigma_{p,q}.$$

Preso $\varepsilon > 0$, determiniamo p' in modo che, per ogni $p > p'$ e per ogni q, sia $|\sigma_{p,q}| < \varepsilon$, qualunque sia x nel campo considerato. Allora, siccome è $|a_s| \leq |a_0| + \sum_0^{s-1} |a_n - a_{n+1}| < A + M$, ne viene, per ogni $p > p'$ ed ogni q,

$$|s_{p,q}| < \varepsilon M + \varepsilon(A + M) = \varepsilon(A + 2M).$$

E ciò dimostra la convergenza uniforme della $\Sigma a_n b_n$.

Il ragionamento ora fatto serve anche a stabilire la seguente importante proposizione:

Se a_n e b_n sono funzioni di x e di un parametro γ, $a_n = a_n(x, \gamma)$, $b_n = b_n(x, \gamma)$, per x variabile in un certo intervallo (α, β) e γ in un certo campo Γ;

se, per ogni x di (α, β) e per ogni γ di Γ, a_n è funzione monotona di n, e, per tutti gli x e γ indicati e per tutti i possibili n, è sempre

$$|a_n| < M;$$

se, infine, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è uniformemente convergente per x e γ variabili rispettivamente in (α, β) ed in Γ;

allora, per x e γ variabili rispettivamente in (α, β) e in Γ, anche la serie $\sum_0^{\infty} a_n b_n$ converge uniformemente.

Di più, se a_n e b_n, come funzioni di γ, sono continue in Γ, e γ_0 è un particolare valore di γ, è

$$\lim_{\gamma \to \gamma_0} \sum_0^{\infty} a_n(x, \gamma) b_n(x, \gamma) = \sum_0^{\infty} a_n(x, \gamma_0) b_n(x, \gamma_0). \tag{1}$$

In particolare, se è $a_n(x, \gamma_0) = 1$, è

$$\lim_{\gamma \to \gamma_0} \sum_0^{\infty} a_n(x, \gamma) b_n(x, \gamma) = \sum_0^{\infty} b_n(x, \gamma_0). \tag{2}$$

Come applicazione di questo teorema, consideriamo, in (α, β), infinite funzioni $b_n(x)$, che supporremo tutte limitate, e la serie $\sum_0^{\infty} b_n(x)$, che supporremo uniformemente convergente in (α, β). Poniamo poi $a_n(x, \gamma) = \frac{\gamma - n}{\gamma}$ per $\gamma \geq n$, e $a_n(x, \gamma) = 0$ per $\gamma < n$. Considerato, come campo Γ, l'intervallo $(1, +\infty)$, abbiamo che, in tutto tale campo, è sempre

$$0 \leq a_n(x, \gamma) \leq 1;$$

inoltre, per ogni x di (α, β) ed ogni γ di $(1, +\infty)$, $a_n(x, \gamma)$ è funzione non crescente di n. Abbiamo dunque la convergenza uniforme della serie $\sum\limits_0^\infty a_n b_n$, che, nel caso attuale, si riduce alla somma di un numero finito di termini:

$$(3) \quad s_\gamma(x) = b_0(x) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} b_1(x) + \frac{\gamma - 2}{\gamma} b_2(x) + ... + \frac{1}{\gamma} b_{\gamma-1}(x).$$

Possiamo perciò affermare, che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si può determinare un intero m tale che, per ogni intero $n > m$ e per ogni $\gamma > n$, sia

$$\left| \frac{\gamma - n}{\gamma} b_n(x) + \frac{\gamma - n - 1}{\gamma} b_{n+1}(x) + ... + \frac{1}{\gamma} b_{\gamma-1}(x) \right| < \varepsilon.$$

Inoltre, poichè è

$$\lim_{\gamma \to +\infty} a_n(x, \gamma) = 1,$$

risulta, per la (2),

$$(4) \qquad \lim_{\gamma \to +\infty} s_\gamma(x) = \sum_0^\infty b_n(x),$$

e la convergenza di $s_\gamma(x)$ al suo limite è uniforme in tutto (α, β).

14. - Applicazione alle serie trigonometriche dei precedenti criteri di convergenza.

a) Applichiamo quanto abbiamo stabilito nei n.^{i} precedenti, alla serie di coseni

$$(1) \qquad \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... + a_n \cos nx + ...$$

Posto

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx,$$

abbiamo, per la formula (1) del n.° 11,

$$\sigma_n(x) = \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}},$$

e pertanto, in ciascun punto di $(0, 2\pi)$, esclusi gli estremi, al al variare di n, $\sigma_n(x)$ resta, in modulo, inferiore ad un numero fisso. Dunque [n.° 12, a)]:

Se è $a_n \to 0$, in ogni punto di $(0, 2\pi)$, *estremi esclusi, la* (1) *converge se e soltanto se converge la serie*

$$\sum_0^\infty (a_n - a_{n+1})\sigma_n(x).$$

E poichè, in un intervallo di $(0, 2\pi)$ non contenente i punti 0 e 2π, $|\sigma_n(x)|$ resta inferiore ad un numero fisso, indipendente da x e da n, in tale intervallo la (1) converge uniformemente se e soltanto se converge uniformemente $\Sigma(a_n - a_{n+1})\sigma_n(x)$. In particolare, abbiamo che, *se è $a_n \to 0$ e se $\Sigma|a_n - a_{n+1}|$ converge, la* (1) *converge uniformemente in ogni intervallo di* $(0, 2\pi)$ *non contenente i punti* 0 *e* 2π.

Più particolarmente ancora: *se a_n non cresce (oppure non decresce) mai col crescere di n e tende allo zero, la serie* (1) *converge uniformemente in ogni intervallo di* $(0, 2\pi)$ *non contenente i punti* 0 e 2π.

Così, per esempio, la serie

$$\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \dots + \frac{1}{n}\cos nx + \dots$$

converge uniformemente in ogni intervallo completamente *interno* a $(0, 2\pi)$; nei punti $x = 0$ e $x = 2\pi$, invece, diverge.

Scrivendo la (1) nella forma

$$\frac{1}{2}a_0 + (-a_1)(-\cos x) + a_2\cos 2x + (-a_3)(-\cos 3x) + \dots,$$

ed applicando la (2) del n.° 11, abbiamo:

$$\bar{\sigma}_n(x) = \frac{1}{2} - \cos x + \cos 2x - \cos 3x + \dots + \\ + (-1)^n \cos nx = (-1)^n \frac{\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\cos\frac{x}{2}},$$

e pertanto, in ciascun punto di $(0, 2\pi)$, escluso π, $\bar{\sigma}_n(x)$ resta limitata, in modulo, al variare di n. Dunque [n.° 12, a)]:

Se è $a_n \to 0$, *in ogni punto di* $(0, 2\pi)$, *escluso al più* π, *la* (1) *converge se e soltanto se converge la serie*

$$\sum_0^\infty (-1)^n (a_n + a_{n+1}) \bar{\sigma}_n(x) ;$$

e, in ogni intervallo di $(0, 2\pi)$ che escluda il punto π, la convergenza uniforme di questa serie è condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme della (1).

In particolare, *se è* $a_n \to 0$ *e se* $\Sigma |a_n + a_{n+1}|$ *converge, la* (1) *converge uniformemente in ogni intervallo di* $(0, 2\pi)$ *che escluda il punto* π. Più particolarmente ancora: *se gli* a_n *hanno segni alternati ed in modulo non crescono mai e tendono allo zero, la* (1) *converge uniformemente in ogni intervallo di* $(0, 2\pi)$ *che escluda il punto* π.

Per esempio, la serie

$$\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos 4x + \ldots.$$

converge uniformemente in ogni intervallo di $(0, 2\pi)$ che escluda il punto π; per $x = \pi$ essa, invece, è divergente.

b) Proposizioni completamente analoghe alle precedenti valgono per una serie di seni:

$$(2) \qquad b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots. + b_n \operatorname{sen} nx + \ldots. .$$

Qui è da osservare che, nelle condizioni analoghe a quelle delle precedenti proposizioni, la serie (2) è sempre convergente, perchè i punti eccezionali 0 e 2π, oppure π, sono anch'essi punti di convergenza, rendendo nulli tutti i termini della serie. Abbiamo, pertanto, che:

Se è $b_n \to 0$ *e se una delle due serie*

$$(3) \qquad \sum_1^\infty |b_n - b_{n+1}|, \quad \sum_1^\infty |b_n + b_{n+1}|$$

è convergente, la (2) *converge ovunque; questa serie è poi uniformemente convergente in ogni intervallo di* $(0, 2\pi)$ *che escluda i punti* 0 *e* 2π, *oppure il solo punto* π, *a seconda che è convergente la prima o la seconda delle due serie* (3).

In particolare:

Se i coefficienti b_n hanno tutti lo stesso segno, oppure sono a segni alternati; se il modulo di b_n non cresce mai col crescere di n e tende allo zero; la serie (2) è ovunque convergente; essa, inoltre, converge uniformemente in ogni intervallo di $(0, 2\pi)$ che escluda i punti 0 e 2π, oppure il solo punto π, a seconda che i b_n hanno tutti lo stesso segno oppure sono a segni alternati.

In virtù di questo teorema, le serie

$$\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \dots,$$

$$\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \dots,$$

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{\log 2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{\log 3} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{\log 4} + \dots$$

risultano ovunque convergenti; la prima e l'ultima convergono uniformemente in ogni intervallo di $(0, 2\pi)$ che escluda i punti 0 e 2π, la seconda, invece, in ogni intervallo di $(0, 2\pi)$ che escluda il punto π. Vedremo più innanzi che tali serie *non* convergono uniformemente in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$.

c) Ritornando alla serie (1) e supponendo $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$, con $a_n \to 0$, possiamo dire che, in generale, la convergenza della serie non è uniforme in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$; affinchè sia uniforme, è necessario e sufficiente che la (1) sia convergente nel punto $x = 0$, vale a dire, che sia convergente la serie Σa_n (¹). Se è soddisfatta una certa condizione, che ora indicheremo, la somma della (1) risulta sempre ≥ 0. Possiamo, infatti, dimostrare che:

Se, per $n \to \infty$, è $a_n \to 0$; se è $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$ ed anche $a_0 - a_1 \geq a_1 - a_2 \geq \dots$; è, in tutto $(0, 2\pi)$,

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos nx \geq 0. \tag{4}$$

Applicando la trasformazione di Brunacci-Abel, abbiamo

$$s_m(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^m a_n \cos nx = \sum_{n=0}^{m-1} (a_n - a_{n+1})\, \sigma_n(x) + a_m \sigma_m(x),$$

(¹) Se la Σa_n è convergente, avendosi $|a_n \cos nx| \leq a_n$, la serie (1) risulta assolutamente e uniformemente convergente in tutto $(0, 2\pi)$.

e quindi, per $0 < x < 2\pi$, e in virtù della (1) del n.° 11,

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} s_m(x) = \sum_{n=0}^{m-1} (a_n - a_{n+1}) \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x + a_m \operatorname{sen} \frac{2m+1}{2} x.$$

Applicando nuovamente la trasformazione di Brunacci-Abel, e tenendo conto dell' uguaglianza

$$\sum_{r=0}^{n} \operatorname{sen} \frac{2r+1}{2} x = \operatorname{sen}^2 \frac{n+1}{2} x : \operatorname{sen} \frac{x}{2},$$

caso particolare della (6) del n.° 11, otteniamo

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} s_m(x) = \sum_{n=0}^{m-2} (a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}) \operatorname{sen}^2 \frac{n+1}{2} x$$

$$+ (a_{m-1} - a_m) \operatorname{sen}^2 \frac{m}{2} x + a_m \operatorname{sen} \frac{2m+1}{2} x \operatorname{sen} \frac{x}{2}.$$

Ma, per le ipotesi fatte, è $a_m \geq 0$, $a_{m-1} - a_m \geq 0$, $a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0$; è, dunque,

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} s_m(x) \geq a_m \operatorname{sen} \frac{2m+1}{2} x \operatorname{sen} \frac{x}{2},$$

$$s_m(x) \geq - a_m : 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2},$$

donde, per $m \to \infty$, la (4), nell'ipotesi $0 < x < 2\pi$. È poi evidente che la (1) sussiste anche se è $x = 0$ o $x = 2\pi$.

si *d*) Se è $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots$, con $b_n \to 0$, la convergenza uniforme della serie (2) può mancare nell' intero intervallo $(0, 2\pi)$ [1]. Come mostreremo nel n.° 16, oltre al caso in cui è convergente la serie Σb_n, ve ne sono altri per i quali la convergenza uniforme della (2) è certa in tutto $(0, 2\pi)$. Qui vogliamo dimostrare soltanto la seguente proprietà della (2):

Se è $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots$, *in tutto* $(0, \pi)$ *è*

(5) $$s_m(x) = b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots + b_m \operatorname{sen} mx \geq - b_1 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \geq - b_1,$$

---

(1) Vedremo, più innanzi (n.° 44), che, per $0 < x < 2\pi$, è $\Sigma \frac{\operatorname{sen} nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$, e questa uguaglianza dimostra che la serie scritta non converge uniformemente in tutto $(0, 2\pi)$, perchè la funzione $(\pi - x) : 2$ non assume valori uguali per $x = 0$ e $x = 2\pi$.

(il primo segno $=$ valendo soltanto per $x=0$), e perciò anche, dove la serie è convergente,

$$\sum_1^\infty b_n \operatorname{sen} nx \geq -b_1 \operatorname{sen}\frac{x}{2} \geq -b_1 . \tag{6}$$

È, infatti, per la trasformazione di Brunacci-Abel,

$$s_m(x) = \sum_{n=1}^{m-1} (b_n - b_{n+1})\, \tau_n(x) + b_m \tau_m(x),$$

dove è, per $0 < x < \pi$,

$$\tau_n(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \dots +$$
$$+ \operatorname{sen} nx = \left(\operatorname{sen}\frac{n}{2}x \operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\right) : \operatorname{sen}\frac{x}{2}.$$

Qui è sempre $\operatorname{sen}\frac{x}{2} > 0$. Se $\operatorname{sen}\frac{n}{2}x$ e $\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x$ sono dello stesso segno, è $\tau_n(x) > 0$; se sono di segno diverso, è necessariamente

$$\left|\operatorname{sen}\frac{n}{2}x\right| < \operatorname{sen}\frac{x}{2}, \qquad \left|\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\right| < \operatorname{sen}\frac{x}{2},$$

e perciò

$$\tau_n(x) > -\operatorname{sen}\frac{x}{2}.$$

È dunque, per $0 < x \leq \pi$,

$$s_m(x) > -\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left\{\sum_1^{m-1}(b_n - b_{n+1}) + b_m\right\}$$
$$= -b_1 \operatorname{sen}\frac{x}{2},$$

donde la (6). Per $x=0$, le (5) e (6) sono evidenti.

15. - Ulteriori applicazioni dei criteri generali di convergenza.

a) Consideriamo ancora una serie di coseni

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots . \tag{1}$$

La somma

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}$$

non ha limite per $n \to \infty$, e non si può, pertanto, applicare il criterio di convergenza dato nel n.° 12, *c*). Peraltro, tale criterio può essere utilizzato introducendo in ogni termine della (1) un fattore $\frac{\alpha_n}{\alpha_n}$, in modo che la serie $\Sigma \alpha_n \cos nx$ risulti convergente. Abbiamo così:

Se converge la serie

$$\sum \left| \frac{a_n}{\alpha_n} - \frac{a_{n+1}}{\alpha_{n+1}} \right|,$$

e se, in un punto x, è convergente anche la serie $\Sigma \alpha_n \cos nx$, *nel punto x converge pure la* (1); *e la convergenza della* (1) *è uniforme in ogni intervallo* (α, β) *in cui converga uniformemente la serie* $\Sigma \alpha_n \cos nx$.

In particolare, poichè è certa (n.° 14) la convergenza della serie $\sum \frac{\cos nx}{n}$ in tutto $(0, 2\pi)$, esclusi gli estremi, abbiamo: *se la serie* $\Sigma |na_n - (n+1)a_{n+1}|$ *converge, la* (1) *converge in tutto* $(0, 2\pi)$, *esclusi al più gli estremi, e la convergenza è uniforme in ogni intervallo completamente interno a* $(0, 2\pi)$. Di qui segue, che, se è convergente la serie $\Sigma |a_n - a_{n+1}|$, in ogni intervallo completamente *interno* a $(0, 2\pi)$ la serie $\sum \frac{a_n}{n} \cos nx$ converge uniformemente.

Abbiamo pure, sempre come caso particolare della proposizione sopra stabilita, che, essendo la serie $\sum (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n}$ convergente in tutto $(0, 2\pi)$, escluso il punto π (n.° 14), *se converge la serie* $\Sigma |na_n + (n+1)a_n|$, *converge anche la* (1) *in tutto* $(0, 2\pi)$, *escluso al più il punto* π.

Considerazioni del tutto analoghe valgono per la serie di seni.

b) La trasformazione di Brunacci-Abel si può utilizzare anche applicandola ripetutamente ad una stessa serie.

Consideriamo ancora la (1), con l' ipotesi che sia $a_n \to 0$, per $n \to \infty$.

Applicando la trasformazione di Brunacci-Abel, abbiamo ottenuto al n.° 14 che, in $(0, 2\pi)$, estremi esclusi, la (1) converge se e soltanto se converge la serie

$$\sum_0^\infty (a_n - a_{n+1}) \sigma_n(x) = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \sum_0^\infty (a_n - a_{n+1}) \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x,$$

ed anche che, in $(0, 2\pi)$, escluso π, la (1) converge se e soltanto se converge la serie

$$\sum_0^\infty (-1)^n (a_n + a_{n+1}) \bar{\sigma}_n(x) = \frac{1}{2 \cos \frac{x}{2}} \sum_0^\infty (a_n + a_{n+1}) \cos \frac{2n+1}{2} x.$$

Lo studio della convergenza della (1) è così ricondotto a quello di una qualunque delle due serie

$$\sum_0^\infty (a_n - a_{n+1}) \operatorname{sen} (2n+1) \frac{x}{2}, \quad \sum_0^\infty (a_n + a_{n+1}) \cos (2n+1) \frac{x}{2},$$

che sono due nuove serie, di seni la prima, di coseni la seconda.

Ragionando su queste serie come abbiamo fatto sulle (1) e (2) del n.° 14, e tenendo conto delle formule (7), (8), (9) e (10) del n.° 11, otteniamo che (sempre nell' ipotesi $a_n \to 0$) *la convergenza della* (1) *è certa se converge una qualunque delle serie*

$$\sum_0^\infty |a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}|, \quad \sum_0^\infty |a_n - a_{n+2}|, \quad \sum_0^\infty |a_n + 2a_{n+1} + a_{n+2}|;$$

e fanno eccezione, in $(0, 2\pi)$, per la prima, i punti 0, π e 2π, per la seconda, 0 e 2π, e per la terza, $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$. La convergenza della (1) è poi uniforme in ogni intervallo di $(0, 2\pi)$ non contenente i punti eccezionali indicati.

In particolare, ricaviamo il seguente criterio:

Se a_{2n+1} non cresce (o non decresce) mai col crescere di n e tende allo zero, la serie

(2) $\qquad a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + \dots + a_{2n+1} \cos (2n+1)x + \dots$

converge uniformemente in ogni intervallo di $(0, 2\pi)$ *non contenente i punti* $0, \pi, 2\pi$.

Per esempio, la serie

$$\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \dots$$

risulta uniformemente convergente in ogni intervallo della specie ora indicata.

Il criterio ora dato è un caso particolare del seguente, che si dimostra ragionando come si è fatto per la serie (1) del n.° 14 ed utilizzando la formula (5) del n.° 11:

Se a_{hn+k} *non cresce mai (oppure non decresce mai) col crescere di* n, *e tende allo zero, la serie*

$$a_k \cos kx + a_{h+k}\cos(h+k)x + \dots + a_{hn+k}\cos(hn+k)x + \dots$$

converge uniformemente in ogni intervallo di $(0, 2\pi)$ *non contenente i punti* $0, \frac{2\pi}{h}, 2\frac{2\pi}{h}, \dots, 2\pi$ [1].

Analogamente al criterio relativo alla $\Sigma|a_n - a_{n+2}|$, si ha che, *se è* $a_n \to 0$ *e se converge la serie* $\Sigma|a_n + a_{n+2}|$, *la* (1) *converge uniformemente in ogni intervallo di* $(0, 2\pi)$ *che escluda i punti* $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$. Ed infatti, la (1) può porsi sotto forma di somma delle due serie

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty a_{2n}\cos 2nx\,, \qquad \sum_0^\infty a_{2n+1}\cos(2n+1)x\,,$$

e queste risultano (per considerazioni analoghe a quelle del n.° 14) uniformemente convergenti in ciascuno degli intervalli ora indicati, se convergono le serie $\Sigma|a_{2n} + a_{2n+2}|$ e $\Sigma|a_{2n+1} + a_{2n+3}|$. Ora queste due serie sono sicuramente convergenti se lo è la $\Sigma|a_n + a_{n+2}|$, perchè vale l'uguaglianza

$$\Sigma|a_n + a_{n+2}| = \Sigma|a_{2n} + a_{2n+2}| + \Sigma|a_{2n+1} + a_{2n+2}|\,.$$

Abbiamo, in particolare:

Se, al crescere di n, a_{2n+1} *ha segni alternati ed il suo modulo non cresce mai e tende allo zero, la serie* (2) *converge uniforme-*

(1) In questo enunciato h è un numero intero > 0.

mente in ogni intervallo di $(0, 2\pi)$ *non contenente i punti* $\pi:2$ e $3\pi:2$, *ed è poi convergente anche in tali punti.*

Per esempio, la serie, di Eulero e Fourier,

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots.$$

converge ovunque, e la convergenza è uniforme in ogni intervallo della specie sopra indicata.

Considerazioni e risultati del tutto analoghi ai precedenti valgono per la serie di seni. Per questa deve osservarsi che, se si vuole ottenere, applicando la trasformazione di Brunacci-Abel, una nuova serie di seni o di coseni, è necessario aggiungere un termine complementare alla serie, ciò che non altera la convergenza o divergenza della serie medesima. In virtù delle formule (3′) e (4′) del n.° 11, si vede che basta aggiungere il termine $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$, oppure $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, secondo che si vuol giungere alla serie avente per coefficienti le differenze $a_n - a_{n+1}$, oppure le somme $a_n + a_{n+1}$.

16. - Serie ovunque uniformemente convergenti.

Abbiamo già osservato, nel n.° 10, che, se converge la serie $\Sigma\{|a_n| + |b_n|\}$, la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \Sigma(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

converge ovunque uniformemente. Esistono, però, delle intere classi di serie trigonometriche ovunque uniformemente convergenti ma non convergenti assolutamente.

a) Una di tali classi risulta dal seguente teorema, dovuto a T. W. Chaundy e A. E. Jolliffe [1].

Se b_n *è un numero positivo, non mai crescente col crescere di* n, *e tale che sia* $nb_n \to 0$, *la serie*

$$b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + b_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots. \tag{1}$$

converge ovunque uniformemente.

---

[1] *The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series.* (Proceedings of the London Mathematical Society, s. II, vol. XV (1916), pp. 214-216).

Sappiamo già (n.° 14) che, sotto le ipotesi ora poste, la serie (1) converge ovunque e che, di più, essa converge uniformemente in ogni intervallo di $(0, 2\pi)$ che escluda gli estremi 0 e 2π. Occorre provare che questa convergenza uniforme si ha in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$. Per far ciò, dimostriamo il seguente lemma [1]:

Se b_n è un numero positivo non mai crescente col crescere di n, e se, per ogni $n \geq m$, è $nb_n \leq M$, allora, per ogni $n \geq m$, per ogni intero $p \geq n$, e per qualunque x, è

$$(2)\qquad |b_n \operatorname{sen} nx + b_{n+1} \operatorname{sen}(n+1)x + \dots + b_p \operatorname{sen} px| < M(1+\pi).$$

Sia $n \geq m$ e consideriamo un qualunque x tale che $0 < x < \pi$. Applicando la trasformazione di Brunacci-Abel, abbiamo

$$b_n \operatorname{sen} nx + \dots + b_p \operatorname{sen} px = \sum_{r=n}^{p-1} (b_r - b_{r+1})\,\sigma_r(x) + b_p \sigma_p(x),$$

avendo posto

$$\sigma_r(x) = \operatorname{sen} nx + \operatorname{sen}(n+1)x + \dots + \operatorname{sen} rx.$$

E siccome è, in virtù della formula (6) del n.° 11,

$$\sigma_r(x) = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{r+n}{2}x \operatorname{sen}\dfrac{r-n+1}{2}x}{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}$$

ed inoltre, in virtù delle ipotesi fatte, $b_r - b_{r+1} \geq 0$, deduciamo

$$|b_n \operatorname{sen} nx + \dots + b_p \operatorname{sen} px| < b_n \operatorname{cosec}\frac{x}{2}$$

ed anche

$$(3)\qquad |b_n \operatorname{sen} nx + \dots + b_p \operatorname{sen} px| < b_n \frac{\pi}{x},$$

essendo sempre, per $0 < \omega < \pi:2$,

$$1 < \frac{\omega}{\operatorname{sen}\omega} < \frac{\pi}{2}.$$

Se è $n \geq \dfrac{1}{x}$, dalla (3) e dalla $nb_n \leq M$ risulta

$$|b_n \operatorname{sen} nx + \dots + b_p \operatorname{sen} px| < M\pi,$$

e la (2) è verificata.

---

[1] Loc. cit. in [1] a p. 50.

Se è $n < \frac{1}{x}$ ed anche $p \leq \frac{1}{x}$, si ha

$$|b_n \operatorname{sen} nx + \dots + b_p \operatorname{sen} px| < x(nb_n + \dots + pb_p) \leq xMp \leq M,$$

e la (2) è ancora verificata.

Se è, infine, $n < \frac{1}{x}$ e $p > \frac{1}{x}$, indicato con p' il massimo intero contenuto in $1:x$, abbiamo, tenendo conto di quanto precede,

$$|b_n \operatorname{sen} nx + \dots + b_p \operatorname{sen} px| \leq |b_n \operatorname{sen} nx + \dots + b_{p'} \operatorname{sen} p'x| \\ + |b_{p'+1} \operatorname{sen} (p'+1)x + \dots + b_p \operatorname{sen} px| < M + M\pi,$$

e la (2) è così verificata in tutti i casi, per $0 < x < \pi$.

Per $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$, la (2) è poi evidente; per $\pi < x < 2\pi$, posto $x' = 2\pi - x$, abbiamo $0 < x' < \pi$ e $\operatorname{sen} rx = -\operatorname{sen} rx'$, e perciò, per quanto abbiamo già dimostrato,

$$|b_n \operatorname{sen} nx + \dots + b_p \operatorname{sen} px| = |b_n \operatorname{sen} nx' + \dots + \\ + b_p \operatorname{sen} px'| < M(1+\pi).$$

Il lemma enunciato è, pertanto, dimostrato completamente.

In virtù di questo lemma, e poichè, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si può determinare, per l'ipotesi $nb_n \to 0$, un m tale che, per qualunque $n \geq m$, sia $nb_n < \varepsilon$, ne viene

$$|b_n \operatorname{sen} nx + \dots + b_p \operatorname{sen} nx| < \varepsilon(1+\pi),$$

per tutti gli interi $n \geq m$ e $p \geq n$, e per tutti gli x, vale a dire, ne viene la convergenza uniforme della (1) in qualsiasi intervallo.

Osservazione. — Se teniamo conto di quanto è stato stabilito nel n.º 8, deduciamo che ogni serie (1), soddisfacente alle condizioni del teorema ora provato e per la quale, inoltre, Σb_n risulti divergente, converge ovunque uniformemente, ma converge assolutamente soltanto nei punti congrui a zero secondo il modulo π.

Per esempio, la serie

$$\sum_2^\infty \frac{\operatorname{sen} nx}{n \log n}$$

soddisfa alle condizioni del teorema qui dimostrato e, pertanto, converge uniformemente in tutto $(0, 2\pi)$. Essa, peraltro, non converge assolutamente che nei punti congrui a 0 secondo il modulo π, perchè la $\sum \frac{1}{n \log n}$ è divergente.

b) Il ragionamento fatto in *a*) mostra che vale anche la seguente proposizione:

Se la serie $\sum_1^\infty |b_r - b_{r+1}|$ *è convergente, e se è, per* $n \to 0$,

$$nb_n \to 0, \quad n\sum_n^\infty |b_r - b_{r+1}| \to 0,$$

la serie (1) *converge ovunque uniformemente.*

c) Lo stesso ragionamento prova pure che:

Se b_{hn+k} *è un numero positivo, non mai crescente col crescere di* n, *e tale che sia* $(hn+k)b_{hn+k} \to 0$, *per* $n \to \infty$, *la serie*

$$b_k \operatorname{sen} kx + b_{h+k} \operatorname{sen}(h+k)x + \dots + b_{hn+k} \operatorname{sen}(hn+k)x + \dots$$

converge ovunque uniformemente.

d) Abbiamo anche:

Se i numeri $b_1, b_2, b_3, \dots$ *sono a segni alternati, in modulo non mai crescenti, e tali che* $nb_n \to 0$, *la serie* (1) *converge ovunque uniformemente.*

Ed infatti, supposto, come è lecito, b_1 positivo, e posto $x = \pi - x'$, la (1) prende la forma

$$b_1 \operatorname{sen} x' - b_2 \operatorname{sen} 2x' + b_3 \operatorname{sen} 3x' - \dots,$$

ed i coefficienti di questa nuova serie soddisfano a tutte le condizioni del teorema dimostrato in *a*). La serie qui scritta è dunque ovunque uniformemente convergente, e tale risulta pure la (1).

Per esempio, la serie

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{2 \log 2} - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3 \log 3} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4 \log 4} - \dots$$

converge ovunque uniformemente; essa poi (n.° 8) converge assolutamente soltanto nei punti $k\pi$ (k, intero).

e) Dimostriamo, infine, che:

Se i numeri $a_1, a_3, a_5, \dots$ *sono a segni alternati ed in modulo non mai crescenti, e tali che* $(2n+1)a_{2n+1} \to 0$, *per* $n \to \infty$, *la serie*

$$a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x + \dots \tag{4}$$

converge ovunque uniformemente.

Ed infatti, posto $x=\frac{\pi}{2}-x'$, la serie scritta si trasforma nella

$$a_1 \operatorname{sen} x' - a_3 \operatorname{sen} 3x' + a_5 \operatorname{sen} 5x' - \ldots,$$

la quale, per la proposizione *c*), è ovunque convergente uniformemente; tale è dunque anche la (4).

Così, per esempio, la serie

$$\cos x - \frac{\cos 3x}{3\log 3} + \frac{\cos 5x}{5\log 5} - \ldots,$$

la quale converge assolutamente soltanto nei punti congrui a $\frac{\pi}{2}$ secondo il modulo π (n.° 8), è ovunque uniformemente convergente.

17. - Serie ovunque convergenti, ma non ovunque uniformemente convergenti.

a) *Se b_n è un numero positivo, non mai crescente col crescere di n, e tale che non sia $nb_n \to 0$, la serie*

$$b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + b_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots \tag{1}$$

non converge uniformemente in nessuno degli intorni dei punti $2k\pi$ (k, intero).

Per dimostrare questo teorema, dovuto anch' esso a T. W. Chaundy e A. E. Jolliffe [1], proviamo il seguente lemma:

Se b_n è un numero positivo, non mai crescente con n, è per $p \geq 3n$,

$$\left| b_n \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2p} + \ldots + b_p \operatorname{sen} p\frac{\pi}{2p} \right| > \frac{1}{3} p b_p. \tag{2}$$

Ed infatti, se è $x=\frac{\pi}{2p}$, i prodotti $nx, \ldots, px$ sono tutti compresi fra 0 e $\pi : 2$ ed i loro seni sono tutti positivi; perciò, per le ipotesi fatte su b_n, si ha

$$b_n \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2p} + \ldots + b_p \operatorname{sen} p\frac{\pi}{2p} > b_p\left(\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2p} + \ldots + \operatorname{sen} p\frac{\pi}{2p}\right).$$

---

[1] Loc. cit. in [1] a pag. 50.

E siccome il seno di un arco compreso fra 0 e $\pi:2$ è maggiore dell'arco stesso moltiplicato per $2:\pi$, dalla disuguaglianza scritta segue

$$b_n \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2p} + ... + b_p \operatorname{sen} p\frac{\pi}{2p} > \frac{b_p}{2}\frac{p+n}{p}(p-n+1),$$

ed anche, per essere $n \leq \frac{p}{3}$,

$$b_n \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2p} + ... + b_p \operatorname{sen} p\frac{\pi}{2p} > \frac{b_p}{2}\left(\frac{2}{3}p+1\right) > \frac{1}{3}pb_p.$$

Dal lemma, così dimostrato, segue immediatamente che la serie (1) non converge uniformemente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ perchè, se vi fosse in questo intervallo la convergenza uniforme, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, la (2) darebbe, per tutti i p sufficientemente grandi, $pb_p < \varepsilon$ e quindi ne risulterebbe $pb_p \to 0$.

Siccome poi, per ogni δ tale che $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, in $\left(\delta, \frac{\pi}{2}\right)$ la (1) converge uniformemente se è $b_n \to 0$ (n.° 14), abbiamo che, ammessa quest'ultima ipotesi, deve mancare la convergenza uniforme della (1) in $(0, \delta)$. Se poi non è $b_n \to 0$, la (1) non può convergere in tutto $(0, \delta)$, per il teorema di Cantor (n.° 2); dunque, in tutti i casi, nella ipotesi del teorema enunciato la convergenza uniforme della (1) manca in qualunque intervallo $(0, \delta)$. E poichè cambiando segno all'arco il seno cambia soltanto di segno, ne viene anche che la convergenza uniforme della (1) manca in qualunque intervallo $(-\delta, 0)$. Il teorema è dunque provato.

Per esempio, le serie

(3) $$\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + ...,$$

(4) $$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{\log 2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{\log 3} + ...,$$

per le quali b_n è sempre positivo e decrescente, e tale che nb_n ha per limite 1 oppure $+\infty$, non possono convergere uniformemente negli intorni dei punti $2k\pi$.

Osserviamo che la proposizione ora dimostrata, unita a quella del n.° 16, *a*), mostra che, se b_n è positivo e non crescente con n, la condizione $nb_n \to 0$ è necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme della serie (1) in tutto $(0, 2\pi)$. E se non è $nb_n \to 0$, ma soltanto $b_n \to 0$, con b_n non crescente, la (1), pur non essendo uniformemente convergente in $(0, 2\pi)$, è convergente in ogni punto di tale intervallo.

È precisamente quello che avviene per le due serie poco sopra considerate.

b) Il ragionamento fatto in *a*) prova anche la proposizione seguente:

Se b_{hn+k} *è un numero positivo, non mai crescente col crescere di* n, *e tale che non sia* $(hn+k)b_{hn+k} \to 0$, *per* $n \to \infty$, *la serie*

$$b_k \operatorname{sen} kx + b_{h+k} \operatorname{sen}(h+k)x + \dots + b_{hn+k} \operatorname{sen}(hn+k)x + \dots$$

non converge uniformemente in nessuno degli intorni dei punti $\frac{2\pi}{h} m$, *dove* m *è un numero intero qualsiasi* (1).

c) In virtù dell'osservazione sfruttata nel n.° 16, *d*), abbiamo pure:

Se i numeri $b_1, b_2, b_3, \dots$ *sono a segni alternati e, in modulo, non mai crescenti, e se non è* $nb_n \to 0$, *la serie* (1) *non converge uniformemente in nessuno degli intorni dei punti* $(2k+1)\pi$ (*k*, *intero*).

Per esempio, la serie (di Eulero)

$$\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x - \dots$$

non converge uniformemente negli intorni dei punti $(2k+1)\pi$.

d) La proposizione data in *a*) può essere generalizzata anche nel seguente modo:

Se b_n *è un numero positivo o nullo, e se esiste un numero* $\mu > 0$ *tale che, per ogni* p *sufficientemente grande, il numero dei* b_n, *di indice* $n < p$, *e maggiori o uguali ad* b_p, *sia sempre* $> \mu p$; *se, infine, non è* $nb_n \to 0$, *la serie* (1) *non converge uniformemente in nessuno degli intorni dei punti* $2k\pi$ (*k*, *intero*).

---

(1) In questo enunciato, h è un numero intero > 0.

È, infatti,

$$b_n \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2p} + \dots + b_p \operatorname{sen} p \frac{\pi}{2p}$$
$$\geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2p} (nb_n + \dots + pb_p),$$

e la disuguaglianza è verificata a più forte ragione se, nella parentesi del suo secondo membro, sopprimiamo i termini rb_r, tali che $b_r < b_p$. Se p è maggiore di $2n:\mu$ e sufficientemente grande, il numero q dei termini che restano nella parentesi è maggiore di $\mu p:2$, e si ha

$$b_n \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2p} + \dots + b_p \operatorname{sen} p \frac{\pi}{2p} \geq \frac{b_p}{p} [n + \dots + (n + q - 1)]$$
$$\geq \frac{b_p}{p} \frac{q(q-1)}{2}$$
$$\geq \frac{b_p}{4} \mu\left(\frac{\mu}{2} p - 1\right)$$

ed anche, se è $p > \frac{4}{\mu}$,

$$b_n \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2p} + \dots + b_p \operatorname{sen} p \frac{\pi}{2p} \geq pb_p \left(\frac{\mu}{4}\right)^2,$$

da cui segue, come in *a*), il teorema enunciato.

e) Dimostriamo ora che:

Se è

(5) $$\underline{\lim}\, nb_n > 0 \text{ (}^1\text{)},$$

la serie (1) *non converge uniformemente in nessuno degli intorni dei punti* $2k\pi$ (*k*, *intero*).

Abbiamo, invero, per n sufficientemente grande, $b_n > 0$ e quindi

$$b_n \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2p} + \dots + b_p \operatorname{sen} p \frac{\pi}{2p}$$
$$\geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2p} (nb_n + \dots + pb_p);$$

e per la (5), è possibile di determinare due numeri m e σ,

---

(1) La scrittura $\underline{\lim}\, nb_n$ indica il limite minimo di nb_n.

maggiori di zero, in modo che, per ogni $n > m$, sia $nb_n > \sigma$. Se dunque supponiamo precisamente $n > m$, possiamo scrivere

$$b_n \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2p} + \dots + b_p \operatorname{sen} p \frac{\pi}{2p} > \frac{\sigma}{p}(p - n + 1)$$

ed anche, per ogni $p \geq 2n$,

$$b_n \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2p} + \dots + b_p \operatorname{sen} p \frac{\pi}{2p} > \frac{\sigma}{2},$$

e ciò basta a provare la proposizione enunciata.

Per esempio, le serie (3) e (4) soddisfano alla condizione qui posta. Vi soddisfa anche la serie

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{\log 2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{\log 4} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \dots.$$

Osserveremo, inoltre, che, dalle proposizioni date in *d*) ed in *e*), se ne possono dedurre altre due, nello stesso modo che da quella data in *a*) abbiamo dedotto la *c*).

f) Proviamo, infine, che:

Se i numeri $a_1, a_3, a_5, \dots$ *sono a segni alternati ed a modulo non mai crescente, e tali che non sia* $(2n+1)a_{2n+1} \to 0$, *per* $n \to \infty$, *la serie*

$$a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x + \dots$$

non converge uniformemente in nessuno degli intorni dei punti $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, *(k, intero).*

Posto, invero, $x = \frac{\pi}{2} - x'$, la serie scritta si trasforma in una serie di seni a cui si applica il teorema *b*).

Così, per esempio, la serie, di Eulero e Fourier,

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \dots,$$

ovunque convergente, non converge uniformemente in nessuno degli intorni dei punti $\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

18. - Lemma sulle somme trigonometriche.

a) Per poter stabilire dei criteri che assicurino la convergenza di una serie trigonometrica in quasi-tutto l'intervallo

$(0, 2\pi)$, ci occorre un lemma dovuto ad A. Kolmogoroff e G. Seliverstoff [1].

Data la somma trigonometrica

$$s(x) = \sum_{r=2}^{n} (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx), \tag{1}$$

indicata con $k(x)$ una funzione di x la quale assuma soltanto i valori 2, 3,...., n (tutti od in parte) ed abbia soltanto un numero finito di discontinuità, e posto

$$s_{k(x)}(x) = \sum_{r=2}^{k(x)} (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx),$$

vale la disuguaglianza

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{s_{k(x)}(x)}{\sqrt{\log k(x)}} dx \right| < C \sqrt{\sum_{r=2}^{n} (a_r^2 + b_r^2)}, \tag{2}$$

dove C indica una costante indipendente da n, dai coefficienti a_r e b_r, e dalla funzione $k(x)$.

Per la dimostrazione, osserviamo, in primo luogo, che dalla uguaglianza

$$\cos px \cos qx = \frac{1}{2} \{ \cos (p+q)x + \cos (p-q)x \}$$

ricaviamo, integrando fra 0 e 2π, e supponendo p e q interi, positivi o nulli,

$$\int_0^{2\pi} \cos px \cos qx dx = \begin{cases} 0, & \text{se } p \neq q, \\ \pi, & \text{se } p = q > 0, \\ 2\pi, & \text{se } p = q = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Analogamente, abbiamo

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos px \operatorname{sen} qx dx = 0, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} px \operatorname{sen} qx dx = \begin{cases} 0, & \text{se } p \neq q, \\ \pi, & \text{se } p = q > 0, \\ 0, & \text{se } p = q = 0. \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

---

[1] *Sur la convergence des séries de Fourier.* (Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. III (1926), pp. 307-310).

Osserviamo, inoltre, che, moltiplicando ambo i membri della (1) per $\cos qx$ ed integrando poi fra 0 e 2π, otteniamo, in virtù delle (3) e (4),

$$\int_0^{2\pi} s(x) \cos qx dx = \pi a_q,$$

ed analogamente

$$\int_0^{2\pi} s(x) \operatorname{sen} qx dx = \pi b_q.$$

Possiamo dunque scrivere $s_{k(x)}(x)$ nella forma seguente:

$$s_{k(x)}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{r=2}^{k(x)} \left\{ \cos rx \int_0^{2\pi} s(\alpha) \cos r\alpha d\alpha + \operatorname{sen} rx \int_0^{2\pi} s(\alpha) \operatorname{sen} r\alpha d\alpha \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s(\alpha) \sum_{r=2}^{k(x)} \cos r(x-\alpha) d\alpha.$$

Servendoci di questa formula, abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{s_{k(x)}(x)}{\sqrt{\log k(x)}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s(\alpha) d\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\sum_2^{k(x)} \cos r(x-\alpha)}{\sqrt{\log k(x)}} dx,$$

ed anche, applicando la nota disuguaglianza di Schwarz,

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{s_{k(x)}(x)}{\sqrt{\log k(x)}} dx \right| \leq \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\int_0^{2\pi} s^2(\alpha) d\alpha \right) \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\sum_2^{k(x)} \cos r(x-\alpha)}{\sqrt{\log k(x)}} dx \right)^2 d\alpha \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Servendoci delle (3) e (4), otteniamo

$$\int_0^{2\pi} s^2(\alpha) d\alpha = \pi \sum_{r=2}^{n} (a_r^2 + b_r^2)$$

e perciò, per dimostrare la (2), basta provare che l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{\sum_2^{k(x)} \cos r(x-\alpha)}{\sqrt{\log k(x)}} dx \right]^2 d\alpha$$

resta inferiore ad un numero fisso, indipendente da n, dagli a_r e b_r, e dalla $k(x)$.

Possiamo scrivere:

$$I = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[\sum_2^{k(x)} \cos r(x-\alpha)]\,[\sum_2^{k(y)} \cos r(y-\alpha)]}{\sqrt{\log k(x) \log k(y)}}\, dxdy\,,$$

ossia, invertendo le integrazioni, eseguendo l'integrazione rispetto ad α e tenendo presente le (3) e (4),

$$I = \pi \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sum_2^{k(x,y)} \cos r(x-y)}{\sqrt{\log k(x) \log k(y)}}\, dxdy,$$

dove abbiamo indicato con $k(x, y)$ il più piccolo dei due numeri $k(x)$ e $k(y)$.

Il quadrato del piano (x, y), su cui è eseguito l'ultimo integrale scritto, può dividersi in un numero finito di rettangoli a lati paralleli ai lati del quadrato stesso, in ciascuno dei quali (contorno al più escluso) è sempre $k(x, y) = k(x)$ oppure $k(x, y) = k(y)$. Se indichiamo con P l'insieme di quei rettangoli in cui è $k(x, y) = k(x)$, e con Q l'insieme dei rettangoli rimanenti, abbiamo

$$\begin{aligned} I &\leq \pi \left| \iint_P \ldots\, dxdy \right| + \pi \left| \iint_Q \ldots\, dxdy \right| \\ &\leq \pi \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\log k(x)} \int_0^{2\pi} \left| \sum_2^{k(x)} \cos r(x-y) \right| dy \\ &+ \pi \int_0^{2\pi} \frac{dy}{\log k(y)} \int_0^{2\pi} \left| \sum_2^{k(y)} \cos r(x-y) \right| dx \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{dy}{\log k(y)} \int_0^{2\pi} \left| \sum_2^{k(y)} \cos r(x-y) \right| dx\,. \end{aligned}$$

Noi ora dimostreremo che esiste un numero fisso M in modo da avere, per ogni intero positivo $n \geq 2$,

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_2^n \cos rz \right| dz < M \log n, \tag{5}$$

e con ciò risulterà provato il nostro lemma.

Per la (5) del n.° 11, abbiamo

$$\sum_2^n \cos rz = \frac{\cos \frac{n+2}{2} z \operatorname{sen} \frac{n-1}{2} z}{\operatorname{sen} \frac{z}{2}}$$

e quindi

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_2^n \cos rz \right| dz < 2 \int_0^{\pi} \frac{|\operatorname{sen}(n-1)z|}{\operatorname{sen} z} dz$$

$$< 2 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{n-1}} + \int_{(n-2)\frac{\pi}{n-1}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{n-1}}^{(n-2)\frac{\pi}{n-1}} \right\}$$

$$< 2 \left\{ 2 \int_0^{\frac{\pi}{n-1}} \frac{\pi(n-1)z}{2z} dz + \int_{\frac{\pi}{n-1}}^{(n-2)\frac{\pi}{n-1}} \frac{dz}{\operatorname{sen} z} \right\}$$

$$< 2\pi^2 + 4 \int_{\frac{\pi}{n-1}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi dz}{2z}$$

$$< 2\pi^2 + 2\pi \log(n-1),$$

e di qui segue senz' altro la (5).

b) Una conseguenza importante del lemma precedente è la seguente:

Se per una serie trigonometrica

$$\frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \ldots \tag{6}$$

risulta convergente la serie

$$\sum_0^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \tag{7}$$

risulta anche finito, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, *il limite massimo, per* $n \to \infty$, *del modulo di* $s_n(x) : \sqrt{\log n}$, *dove è*

$$s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{r=1}^{n} (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx).$$

Possiamo, evidentemente, supporre nulli i coefficienti a_0, a_1 e b_1; possiamo anche limitarci a dimostrare che risulta $< +\infty$, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, il limite massimo di $\dfrac{s_n(x)}{\sqrt{\log n}}$, perchè, applicando poi tale risultato a $-\dfrac{s_n(x)}{\sqrt{\log n}}$, avremo quanto è affermato nell' enunciato.

Osserviamo che, sotto l'ipotesi qui posta sulla serie (7), il secondo membro della disuguaglianza (2) risulta inferiore ad un numero fisso H, per tutti i valori di n. Allora, siccome i punti di $(0, 2\pi)$ in cui il

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{s_n(x)}{\sqrt{\log n}}$$

è $+\infty$ sono tutti fra i punti in cui tale limite massimo è maggiore di $3mH$, dove m è un numero intero positivo, basterà dimostrare che, per ogni m, i punti in cui è

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{s_n(x)}{\sqrt{\log n}} > 3mH \tag{8}$$

sono contenuti in un plurintervallo Δ_m di lunghezza $\Delta_m < \dfrac{1}{m}$.

Fissato un valore di n, e considerato un x di $(0, 2\pi)$, fra i numeri

$$\frac{s_2(x)}{\sqrt{\log 2}}, \quad \frac{s_3(x)}{\sqrt{\log 3}}, \ldots, \quad \frac{s_n(x)}{\sqrt{\log n}}$$

ve n'è uno (almeno) massimo; sia esso [1]

$$\frac{s_{k(x,n)}(x)}{\sqrt{\log k(x, n)}}.$$

---

[1] Se vi fossero più numeri uguali al massimo, si sceglierebbe il primo di essi.

In questo modo risulta definita, in corrispondenza del numero n fissato, una funzione $k(x, n)$ della x, che assume soltanto i valori 2, 3,...., n (tutti od in parte) e che ha solamente un numero finito di discontinuità. Per ogni x, è sempre

$$k(x, n) \leq k(x, n+1),$$

$$\frac{s_{k(x,n)}(x)}{\sqrt{\log k(x, n)}} \leq \frac{s_{k(x,n+1)}(x)}{\sqrt{\log k(x, n+1)}}.$$

Per ogni n, i punti in cui è

$$\frac{s_{k(x,n)}(x)}{\sqrt{\log k(x, n)}} > 3mH \tag{9}$$

costituiscono un numero finito di intervalli, e gli intervalli relativi all'indice n sono tutti contenuti in quelli relativi all'indice $n+1$. Se aggiungiamo agli intervalli relativi all'indice $n=2$, quelli necessari per formare tutti gli intervalli relativi all'indice $n=3$, poi ancora quelli necessari a formare tutti gli intervalli relativi all'indice $n=4$, e così via, veniamo a costituire un plurintervallo, che indicheremo con Δ_m. Ora, detta ~~con~~ l_n la lunghezza degli intervalli relativi all'indice n, cioè di quelli in cui vale la (9), abbiamo,

$$\int_0^{2\pi} \frac{s_{k(x,n)}(x)}{\sqrt{\log k(x, n)}}\, dx > 3mHl_n - 2\pi \{ |a_2| + |b_2| \} : \sqrt{\log 2}.$$

Applicando perciò la disuguaglianza (2), e supponendo, come è lecito, $H > 2\pi \{ |a_2| + |b_2| \} : \sqrt{\log 2}$, otteniamo

$$l_n < \frac{2}{3m}.$$

È, pertanto, anche $\Delta_m \leq \dfrac{2}{3m} < \dfrac{1}{m}$.

Ma se, in un punto x, vale la (8), deve essere verificata, per infiniti valori di n, la (9), e quindi x deve appartenere a Δ_m. Con ciò è completamente provato quanto abbiamo affermato.

19. - Criteri per la convergenza in quasi-tutto $(0, 2\pi)$.

a) Se è convergente la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \log n, \tag{1}$$

la serie trigonometrica

(2) $$\frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + ... + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + ...$$

converge in quasi-tutto $(0, 2\pi)$.

Questo teorema è dovuto ad A. Kolmogoroff e G. Seliverstoff [1], e ad A. Plessner [2]; la convergenza della (2) in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, sotto la condizione della convergenza della serie $\Sigma\,(a_n^2 + b_n^2)(\log n)^2$, era già stata assicurata da un teorema di G. H. Hardy [3]; la medesima convergenza, nell' ipotesi della convergenza di $\Sigma\,(a_n^2 + b_n^2)(\log n)^{1+\varepsilon}$, con $\varepsilon > 0$, era stata dimostrata dagli stessi Kolmogoroff e Seliverstoff [4].

Essendo, per ipotesi, convergente la serie (1), possiamo (in infiniti modi) costruire una funzione $\omega(x)$, positiva, crescente costantemente e tendente all' infinito, e tale che: 1°) risulti convergente anche la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)(\log n)\,\omega(n)$; 2°) posto

$$\Delta_n = \frac{1}{\sqrt{\omega(n)\log n}} - \frac{1}{\sqrt{\omega(n+1)\log(n+1)}},$$

$$\Delta_n' = \Delta_n - \Delta_{n+1},$$

tutte le Δ_n' risultino positive. Allora, la serie $\sum\limits_{2}^{\infty} n\Delta_n'$ è formata da termini tutti positivi e risulta convergente. È, infatti,

$$\begin{aligned}\sum_2^m n\Delta_n' &= \sum_2^m \Delta_n' + \sum_{r=2}^m \sum_{n=r}^m \Delta_n' \\ &= (\Delta_2 - \Delta_{m+1}) + \sum_{r=2}^m (\Delta_r - \Delta_{m+1}),\end{aligned}$$

ed essendo $\Delta_n' > 0$, è anche $\Delta_r - \Delta_{m+1} > 0$ per $r = 2, 3, ..., m$,

---

(1) Loc. cit. in (1) a pag. 59.

(2) *Ueber Konvergenz von trigonometrischen Reihen.* (Journal für Mathematik, Bd. CLV (1925), pp. 15-25).

(3) *On the summability of Fourier's series.* (Proc. London Math. Soc. (2), vol. XII (1913), pp. 365-372).

(4) *Sur la convergence des séries de Fourier.* (Comptes rendus, t. CLXXVIII (1924), pp. 301-303).

onde risulta

$$\sum_{2}^{m} n\Delta_n' < \Delta_2 + \sum_{r=2}^{m} \Delta_r$$
$$< \Delta_2 + \frac{1}{\sqrt{\omega(2)\log 2}},$$

il che prova la convergenza di $\sum_{2}^{\infty} n\Delta_n'$.

Inoltre, per $n \to \infty$, si ha

$$(3) \qquad n\Delta_n = n\sum_{r=n}^{\infty} \Delta_r' < \sum_{r=n}^{\infty} r\Delta_r' \to 0.$$

Dopo di ciò, poniamo

$$a_n\sqrt{\omega(n)\log n} = A_n, \qquad b_n\sqrt{\omega(n)\log n} = B_n,$$
$$S_n(x) = \sum_{r=2}^{n} (A_r \cos rx + B_r \operatorname{sen} rx),$$
$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{r=2}^{n} S_r(x).$$

Avendosi

$$\sum_{n=2}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) = \sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\,\omega(n)\log n,$$

la convergenza della seconda serie porta la convergenza della prima, e, per la proposizione del n.° 18, *b*), possiamo asserire che, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, il limite massimo di

$$\left|\frac{S_n(x)}{\sqrt{\log n}}\right|$$

è finito. È perciò, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, per $n \to \infty$,

$$(4) \qquad \frac{S_n(x)}{\sqrt{\omega(n)\log n}} \to 0.$$

Per le posizioni fatte, possiamo scrivere

$$\sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega(n)\log n}}(A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx),$$

ed applicando la trasformazione di Brunacci-Abel e tenendo conto della (4), abbiamo (n.° 12) che la convergenza del primo membro della precedente uguaglianza sussiste se e soltanto se converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \Delta_n S_n(x) .$$

Applicando anche a questa nuova serie la trasformazione di Brunacci-Abel, abbiamo che, quando sia, per $n \to \infty$,

(5) $$n\Delta_n \sigma_n(x) \to 0 ,$$

tale serie converge se e soltanto se converge la

(6) $$\sum_{n=2}^{\infty} n\Delta_n' \sigma_n(x) .$$

Ora, da quanto dimostreremo in seguito ([1]), risulterà che, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, $\sigma_n(x)$ tende ad un limite finito, per $n \to \infty$. La (5) è perciò verificata, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, in virtù di quest'ultimo fatto e della (3); di più, per essere sempre $\Delta_n' > 0$ e per essere convergente la $\Sigma n\Delta_n'$, anche la serie (6) risulta convergente in quasi-tutto $(0, 2\pi)$. Concludiamo che, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, è convergente anche la serie (2).

b) Se è, per ogni n,

(7) $$|a_n| < \frac{c}{n^\alpha}, \quad |b_n| < \frac{c}{n^\alpha},$$

dove c ed α *sono due costanti tali che sia* $c > 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$, *la serie trigonometrica* (2) *è convergente in quasi-tutto* $(0, 2\pi)$ ([2]).

In virtù del teorema dato in *a*), basterà provare che la serie (1) è convergente.

([1]) V. n.i 91 e 62.

([2]) Questo teorema fu dimostrato da FATOU (loc. cit. in ([1]) a pag. 22), nell'ipotesi $\alpha > 1$, da F. JEROSCH e G. WEYL (*Ueber die Konvergenz von Reihen die nach periodischen Funktionen fortschreiten.* Math. Annalen, Bd. LXVI (1909), pp. 67-80) per $\alpha > 2:3$, da W. H. YOUNG (*Sur les séries de Fourier convergentes presque partout.* Comptes rendus, t. CLV (1912), pp. 1480-1482) per $\alpha > 1:2$.

Posto $\alpha = \frac{1}{2} + \sigma$, è $\sigma > 0$, e si ha, per le (7),

$$(a_n^2 + b_n^2) \log n < \frac{2c^2}{n^{1+\sigma}} \cdot \frac{\log n}{n^\sigma}.$$

Ma è $\frac{\log n}{n^\sigma} \to 0$, per $n \to \infty$, e quindi, per tutti gli n maggiori di un certo n_1, si ha

$$\frac{\log n}{n^\sigma} < 1.$$

Per ogni $n > n_1$ è dunque

$$(a_n^2 + b_n^2) \log n < \frac{2c^2}{n^{1+\sigma}},$$

e di qui segue, per ogni $m > n_1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{m} (a_n^2 + b_n^2) \log n &< \sum_{n=2}^{n_1} (a_n^2 + b_n^2) \log n + 2c^2 \sum_{n=n_1+1}^{m} \frac{1}{n^{1+\sigma}} \\ &< \sum_{n=2}^{n_1} (a_n^2 + b_n^2) \log n + 2c^2 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}},\end{aligned}$$

perchè la serie $\sum \frac{1}{n^{1+\sigma}}$ è convergente. Ciò prova che la serie $\Sigma\,(a_n^2 + b_n^2) \log n$ è convergente.

Per esempio, la serie

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2^{2/3}} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^{2/3}} + \ldots.$$

risulta convergente in quasi-tutto $(0, 2\pi)$.

c) D. Menchoff [1] ha anche dimostrato che *se, per un* $\varepsilon > 0$ *e minore di* 2, *risulta convergente la serie*

$$\Sigma \{ |a_n|^{2-\varepsilon} + |b_n|^{2-\varepsilon} \},$$

la serie (2) *converge in quasi-tutto* $(0, 2\pi)$.

---

[1] *Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales.* (Comptes rendus, t. CLXXVIII (1924), pp. 298-301); *Sur les séries de fonctions orthogonales.* (Fundamenta Mathematicae, t. X (1927), pp. 374-420).

20. - Metodo di Eulero-Lagrange per sommare le serie trigonometriche.

a) Consideriamo la serie (già sommata da D. Bernoulli)

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \dots, \tag{1}$$

la quale, come si è già detto nel n.° 14, è ovunque convergente, e di più converge uniformemente in ogni intervallo di $(0, 2\pi)$ che non contenga i punti 0 e 2π. Questa serie è il coefficiente della parte immaginaria della serie

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots, \tag{2}$$

per $z = e^{ix}$. Per tale z, la parte reale di (2) è data da

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots, \tag{3}$$

serie che è convergente (n.° 14) in tutto $(0, 2\pi)$, estremi esclusi, e che converge uniformemente in ogni intervallo che escluda 0 e 2π. Dunque la serie (2) converge, per $z = e^{ix}$, in tutto $(0, 2\pi)$, esclusi 0 e 2π. E siccome la (2) ha, per $|z| < 1$, come somma $\log \frac{1}{1-z}$, e precisamente quel ramo di questa funzione che, per $z = 0$, ha il valore 0, ne viene, per un noto teorema di Abel sulle serie di potenze, che (1) e (3) hanno per somma, in tutto $(0, 2\pi)$, estremi esclusi, rispettivamente il coefficiente della parte immaginaria e la parte reale di

$$\log \frac{1}{1 - e^{ix}} = -\log |1 - e^{ix}| - i \arg (1 - e^{ix}),$$

intendendo di prendere l'argomento di $1 - e^{ix}$ in modo che sia

$$\begin{gathered} -2\pi < \arg (1 - e^{ix}) \leq 0, \quad \text{per } 0 < x \leq \pi, \\ 0 \leq \arg (1 - e^{ix}) < 2\pi, \quad \text{per } \pi < x < 2\pi. \end{gathered}$$

Ora è

$$1 - e^{ix} = (1 - \cos x) - i \operatorname{sen} x,$$

e perciò

$$\log |1 - e^{ix}| = \log \sqrt{2(1 - \cos x)} = \log \left(2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right);$$

e poichè la parte reale di $1 - e^{ix}$ è sempre ≥ 0, l'argomento di $1 - e^{ix}$ sarà compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e 0 per x in $(0, \pi)$, e fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ per x in $(\pi, 2\pi)$. Avremo, perciò, nel primo caso,

$$\arg(1 - e^{ix}) = -\left|\arccos\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\right|$$

$$= -\left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\right| = -\frac{\pi - x}{2},$$

e, nel secondo caso,

$$\arg(1 - e^{ix}) = \left|\arccos\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\right| =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \frac{\pi}{2} - \left(\pi - \frac{x}{2}\right) = -\frac{\pi - x}{2}.$$

È dunque, in $(0, 2\pi)$, estremi esclusi,

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \dots = \frac{\pi - x}{2},$$

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots = -\log\left(2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right).$$

Per $x = 0$ e $x = 2\pi$, la serie dei seni è convergente ed ha il valore 0, mentre la serie dei coseni è divergente.

b) Consideriamo ora la serie di Eulero e Fourier

$$\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \tag{4}$$

che, come sappiamo (n.° 15, *b*)), è ovunque convergente. Questa serie è la parte reale di

$$z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots, \tag{5}$$

per $z = e^{ix}$. Per tale z, il coefficiente della parte immaginaria della (5) è

$$\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} - \dots, \tag{6}$$

e questa nuova serie converge (n.° 15, *b*)) in tutto $(0, 2\pi)$, esclusi i punti $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, nei quali diverge. Ne deduciamo che, per $z = e^{ix}$ e per ogni x di $(0, 2\pi)$, eccettuati $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, converge anche la (5). Ora, nell'interno del suo cerchio di convergenza, cioè per $|z| < 1$, la (5) rappresenta la funzione $\operatorname{arctg} z$, e precisamente quel ramo di questa funzione che, per $z = 0$, dà $\operatorname{arctg} 0 = 0$. Per il teorema di Abel, già rammentato, abbiamo dunque che la somma della serie (5), nei punti $z = e^{ix}$, eccettuati $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ ed $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$, è data da $\operatorname{arctg} e^{ix}$. Per calcolare la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria di $\operatorname{arctg} e^{ix}$, rammentiamo la formula

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

ossia

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \left\{ \log \left| \frac{1 + iz}{1 - iz} \right| + i \left(\arg \frac{1 + iz}{1 - iz} + 2k\pi \right) \right\}.$$

E poichè dobbiamo prendere, di questa funzione multiforme, il ramo che si annulla per $z = 0$, sceglieremo per $\arg \frac{1 + iz}{1 - iz}$ l'angolo compreso tra $-\pi$ e π, secondo estremo escluso, e $k = 0$; dunque:

$$\operatorname{arctg} z = -\frac{i}{2} \log \left| \frac{1 + iz}{1 - iz} \right| + \frac{1}{2} \arg \frac{1 + iz}{1 - iz}. \tag{7}$$

Fatto $z = e^{ix}$, la parte reale di $\operatorname{arctg} z$ è perciò

$$\frac{1}{2} \arg \frac{1 + ie^{ix}}{1 - ie^{ix}} = \frac{1}{2} \arg \frac{(1 - \operatorname{sen} x) + i \cos x}{(1 + \operatorname{sen} x) - i \cos x} = \frac{1}{2} \arg \frac{i \cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \pm \frac{\pi}{4},$$

prendendo il segno + se è $\cos x > 0$, il segno − se è $\cos x < 0$. Abbiamo così:

$$\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ opp. se } \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi, \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{se } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Per $x = \pm \frac{\pi}{2}$, la serie ha il valore 0, valore che è la semisomma di $\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4}$.

Possiamo avere anche la somma della serie (6). Essa è data dal coefficiente della parte immaginaria di (7), cioè da

$$-\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+ie^{ix}}{1-ie^{ix}}\right| = -\frac{1}{2}\log\left|\frac{i\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\right|;$$

dunque, per x diverso da $\frac{\pi}{2}$ e da $\frac{3\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} - \dots &= -\frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\right| \\ &= -\frac{1}{4}\log\frac{\cos^2 x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}.\end{aligned}$$

c) Il metodo impiegato in *a*) e *b*) per sommare le serie trigonometriche, il quale, pur senza tutte le dovute precauzioni, fu usato già da Eulero e da Lagrange, consiste dunque: 1°) nel trovare la serie di potenze di cui la serie trigonometrica data è la parte reale od il coefficiente della parte immaginaria, sulla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine; 2°) nel determinare la funzione che rappresenta la somma della serie di potenze trovata, nell'interno di tale circonferenza; 3°) nel provare, quando il raggio di convergenza della serie di potenze è uguale a 1 (come avviene precisamente negli esempi considerati), che la serie di potenze converge nel punto della circonferenza di convergenza in cui si vuole eseguire la somma della data serie trigonometrica (ciò che può risultare dal poter verificare la convergenza simultanea delle due serie trigonometriche che dànno la parte reale e il coefficiente di quella immaginaria della serie di potenze medesima, oppure dall'applicare un noto teorema di Fatou sulle serie di potenze ([1])); 4°) nel calcolare

---

([1]) Il teorema di FATOU, cui abbiamo accennato, è il seguente:

Se la serie di potenze $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ *ha il raggio di convergenza uguale ad* 1, *ed è* $a_n \to 0$, *la serie converge in ogni punto regolare del cerchio di convergenza.* (P. FATOU, loc. cit. in ([1]) a pag. 22). M. RIESZ (*Ueber einen Satz des Herrn Fatou.* Journal für Mathematik. Bd. CXL (1911), pp. 89-99) ha, inoltre, osservato che *la convergenza è uniforme in ogni arco del cerchio di convergenza tutto costituito di punti regolari.*

la parte reale od il coefficiente della parte immaginaria della funzione determinata, nel punto che interessa.

§ 3. Condizione necessaria e sufficiente di convergenza.

21. - Serie trigonometriche uniformemente convergenti. Teorema di Eulero-Fourier.

Riemann determinò la condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie trigonometrica sia convergente in un dato punto, riconducendo la convergenza della serie all'esistenza del limite di un determinato integrale. Per giungere a tale risultato, occorre premettere tre proposizioni, la terza delle quali (che daremo al n.° 23) è pure dovuta a Riemann.

Se la serie

$$(1)\quad \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \dots$$

converge uniformemente in $(0, 2\pi)$, *detta* $S(x)$ *la sua somma, si ha*

$$(2)\qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\operatorname{sen} nx\,dx.$$

Infatti, per la supposta convergenza uniforme della (1) alla $S(x)$, abbiamo

$$\int_0^{2\pi} S(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{2}a_0\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx + \sum_{r=1}^{\infty}\left(a_r\int_0^{2\pi}\cos rx\cos nx\,dx + \right.$$
$$\left. + \; b_r\int_0^{2\pi}\operatorname{sen} rx\cos nx\,dx\right),$$

e questa uguaglianza, in virtù delle formule (3) e (4) del n.° 18, si riduce a

$$\int_0^{2\pi} S(x)\cos nx\,dx = \pi a_n,$$

vale a dire, alla prima delle (2). Nello stesso modo si dimostra la seconda delle (2).

Le formule (2) sono conosciute sotto il nome di *formule di Eulero-Fourier* [1].

Notiamo che, se la (1) è una serie di soli coseni, la $S(x)$ è una funzione pari [soddisfa cioè alla $S(-x) = S(x)$]; e viceversa, perchè, se $S(x)$ è funzione pari, dalle (2), per la periodicità di $S(x)$ e di $\operatorname{sen} nx$, si ha

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \operatorname{sen} nx\, dx = 0.$$

In questo caso, i coefficienti a_n si possono scrivere nella forma

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} S(x) \cos nx\, dx, \tag{3}$$

perchè anche qui si ha

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos nx\, dx.$$

Se la (1) è una serie di soli seni, la $S(x)$ risulta una funzione dispari [$S(-x) = -S(x)$]; e viceversa, perchè, se $S(x)$ è dispari, dalle (2) si ha

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos nx\, dx = 0.$$

In questo secondo caso può scriversi:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} S(x) \operatorname{sen} nx\, dx. \tag{4}$$

22. - Lemma sulle funzioni a variazione limitata.

Rammentiamo che una funzione $f(x)$, data in un intervallo (a, b), dicesi *a variazione limitata* in tale intervallo, se esiste un numero positivo M in modo che, per qualunque gruppo di punti di

---

[1] L. EULERO, loc. cit. in [1] a pag. 9; J. B. J. FOURIER, loc. cit. in [1] a pag. 6, ed anche *Théorie de la chaleur*.

(a, b), in numero finito qualsiasi, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, si abbia sempre

$$\sum_{r=0}^{n-1} | f(x_{r+1}) - f(x_r) | < M.$$

Rammentiamo pure che condizione necessaria e sufficiente affinchè la $f(x)$ sia a variazione limitata in (a, b), è che possa scriversi, in tutto (a, b),

$$f(x) = p(x) - q(x),$$

con $p(x)$ e $q(x)$ funzioni positive o nulle e non mai decrescenti (o non mai crescenti) in tutto (a, b). Si sa, inoltre, che se la funzione $f(x)$ è continua ed ha derivata limitata in (a, b), è, in questo intervallo, a variazione limitata.

Ciò premesso, dimostriamo la proposizione seguente:

Se $f(x)$ è una funzione a variazione limitata, in un dato intervallo (a, b), si può determinare una costante positiva c in modo che sia, per ogni intero positivo n,

$$\left| \int_a^b f(x) \cos nx \, dx \right| < \frac{c}{n}, \tag{1}$$

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \right| < \frac{c}{n} \text{ (1)}. \tag{2}$$

Poichè $f(x)$ è a variazione limitata, potrà scriversi $f(x) = p(x) - q(x)$, con $p(x)$ e $q(x)$ funzioni positive o nulle, non mai decrescenti in tutto (a, b). Ne verrà quindi

$$\left| \int_a^b f(x) \cos nx \, dx \right| \leq \left| \int_a^b p(x) \cos nx \, dx \right| + \left| \int_a^b q(x) \cos nx \, dx \right|,$$

ed applicando il 2° teorema della media,

$$\leq p(b) \left| \int_{a'}^b \cos nx \, dx \right| + q(b) \left| \int_{a''}^b \cos nx \, dx \right|$$

$$= \frac{p(b)}{n} \left| \operatorname{sen} nb - \operatorname{sen} na' \right| + \frac{q(b)}{n} \left| \operatorname{sen} nb - \operatorname{sen} na'' \right| \leq \frac{c}{n},$$

---

(1) H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 45.

dove si è posto

$$c = 2[p(b) + q(b)].$$

Vale una dimostrazione analoga per la (2).

23. - Lemma di Riemann.

a) Consideriamo una serie trigonometrica

$$(1)\qquad \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + ... + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + ... ,$$

che scriveremo anche nella forma

$$(1')\qquad A_0 + A_1 + ... + A_n + ... ,$$

ponendo

$$A_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad A_n = a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx .$$

Supposto che sia $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$, la nuova serie trigonometrica

$$-A_1 - \frac{A_2}{2^2} - \frac{A_3}{3^2} - .... - \frac{A_n}{n^2} - .... =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx}{n^2},$$

il cui termine n^{esimo} ha per derivata seconda A_n, è uniformemente convergente in tutto $(0, 2\pi)$, perchè, essendo

$$|A_n| \leq |a_n| + |b_n|,$$

dalle $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$ segue che $|A_n|$ resta sempre minore di un numero fisso. Tale serie rappresenta dunque una funzione continua, periodica, di periodo 2π,

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^2}.$$

Applicando il teorema del n.° 21, abbiamo

$$(2) \qquad -\frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha\,, \qquad -\frac{b_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\,\mathrm{sen}\, n\alpha\, d\alpha\,,$$

e quindi

$$-\frac{A_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\left[\cos n\alpha \cos nx + \mathrm{sen}\, n\alpha\, \mathrm{sen}\, nx\right] d\alpha$$

ossia

$$A_n = -\frac{n^2}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos n(x-\alpha)\, d\alpha\,.$$

E siccome, per quanto abbiamo già detto, A_n tende a zero, uniformemente in tutto $(0, 2\pi)$, ne viene

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos n(x-\alpha)\, d\alpha = 0,$$

uniformemente per tutti gli x di $(0, 2\pi)$.

Se moltiplichiamo la prima delle (2) per $\mathrm{sen}\, nx$, la seconda per $\cos nx$, e poi sottragghiamo membro a membro, otteniamo anche

$$(3') \qquad \lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{2\pi} F(\alpha)\,\mathrm{sen}\, n(x-\alpha)\, d\alpha = 0,$$

pure uniformemente per tutti gli x di $(0, 2\pi)$.

Il lemma di Riemann, che ora vogliamo dimostrare, generalizza questi risultati, che dipendono unicamente dall' ipotesi $a_n \to 0$, $b_n \to 0$.

b) Supposto $a_n \to 0$, $b_n \to 0$; *supposto che la funzione* $\varphi(x)$ *sia definita in un intervallo qualunque* (c, d) *e sia ivi continua, insieme con la derivata prima* $\varphi'(x)$; *supposto che in tutti i punti di* (c, d), *esclusi al più alcuni di essi in numero finito, esista finita la derivata seconda* $\varphi''(x)$ *ed essa sia a variazione limitata in tutto* (c, d); *e supposto, infine, che sia*

$$(4) \qquad \varphi(c) = \varphi(d) = \varphi'(c) = \varphi'(d) = 0\,;$$

allora è (μ *essendo un numero positivo qualunque*)

$$(5)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\mu\to\infty} \mu^2 \int\limits_c^d F(\alpha)\varphi(\alpha)\cos\mu(x-\alpha)d\alpha = 0\,, \\ \lim\limits_{\mu\to\infty} \mu^2 \int\limits_c^d F(\alpha)\varphi(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\mu(x-\alpha)d\alpha = 0\,. \end{cases}$$

La convergenza è poi uniforme per tutti gli x *di* $(0, 2\pi)$ (¹).

Per dimostrare le (5), basterà dimostrare le uguaglianze

$$(6)\qquad \lim_{\mu\to\infty} \mu^2 \int\limits_c^d F(\alpha)\varphi(\alpha)\cos\mu\alpha\, d\alpha = 0,$$

$$(7)\qquad \lim_{\mu\to\infty} \mu^2 \int\limits_c^d F(\alpha)\varphi(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\mu\alpha\, d\alpha = 0.$$

Daremo la dimostrazione della (6). Quella della (7) è completamente analoga.

Dalla convergenza uniforme della serie che definisce $F(x)$, abbiamo

$$\mu^2 \int\limits_c^d F(\alpha)\varphi(\alpha)\cos\mu\alpha\, d\alpha = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu^2}{n^2} \int\limits_c^d A_n(\alpha)\varphi(\alpha)\cos\mu\alpha\, d\alpha.$$

Ponendo, al posto di $A_n(\alpha)\cos\mu\alpha$, la sua espressione

$$(a_n \cos n\alpha + b_n\,\mathrm{sen}\, n\alpha)\cos\mu\alpha = \frac{1}{2} a_n [\cos(n+\mu)\alpha + \cos(n-\mu)\alpha] + \\ + \frac{1}{2} b_n [\mathrm{sen}\,(n+\mu)\alpha + \mathrm{sen}\,(n-\mu)\alpha]$$

(¹) Loc. cit. in (¹) a pag. 16. Utilizzando un teorema che daremo nel n.° 76, si può facilmente mostrare che le (5) valgono anche se, ferma restando l'ipotesi $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, si suppone soltanto, per la $\varphi(x)$, che essa sia *assolutamente continua* insieme con la sua derivata prima $\varphi'(x)$, e che verifichi le (4). Rammenteremo che una funzione $f(x)$, definita in (a, b), dicesi *assolutamente continua* in tale intervallo, se, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è possibile di determinare un $\delta > 0$ in modo che, per ogni gruppo di intervalli (α_r, β_r) di (a, b), in numero finito, non sovrapponentisi e di lunghezza complessiva $< \delta$, si abbia $|\sum\limits_r \{ f(\beta_r) - f(\alpha_r) \} | < \varepsilon$.

ed integrando per parti due volte, tenendo conto delle (4), si ha:

$$(8) \qquad \mu^2 \int_c^d F(\alpha)\varphi(\alpha) \cos \mu\alpha d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2}{n^2(n+\mu)^2} \int_c^d \varphi''(\alpha)[a_n \cos(n+\mu)\alpha + b_n \operatorname{sen}(n+\mu)\alpha] d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2}{n^2(n-\mu)^2} \int_c^d \varphi''(\alpha)[a_n \cos(n-\mu)\alpha + b_n \operatorname{sen}(n-\mu)\alpha] d\alpha,$$

intendendo che nella seconda serie, per $n = \mu$, si ponga, come termine,

$$(9) \qquad - a_\mu \int_c^d \varphi(\alpha) d\alpha.$$

Applicando il lemma del n.° 22, l'integrale che figura nel termine generale della prima serie di (8) risulta minore, in modulo, di

$$(|a_n| + |b_n|) \frac{C}{n+\mu},$$

dove C indica una costante, dipendente solo da $\varphi''(\alpha)$, e la serie stessa risulta, in modulo, minore di

$$\frac{C}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + |b_n|}{n^2} < \frac{CA}{\mu} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

indicando con A un numero maggiore di $|a_n| + |b_n|$, per tutti gli n (numero che esiste perchè, per ipotesi, è $(|a_n| + |b_n|) \to 0$, per $n \to \infty$).

La prima parte del secondo membro di (8) tende, perciò, a zero, per $\mu \to \infty$.

Consideriamo ora la seconda delle serie che figurano in (8).

Indicando con Σ'.... la serie medesima da cui sia tolto il termine relativo ad $n = \mu$, termine che è dato da (9), il modulo dell' intera serie è, per il lemma del n.° 22, minore di

$$(10) \qquad |a_\mu|\int_c^d |\varphi|\,d\alpha + C\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{\mu^2}{n^2\,|n-\mu|^3}\,(|a_n|+|b_n|)\,.$$

Preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, scegliamo un μ_1 tale che sia $1:\mu_1 < \varepsilon$ e che, per ogni $n > \mu_1$, sia $|a_n|+|b_n| < \varepsilon$. Sia ora $\mu > 2\mu_1$ e scindiamo la serie Σ' in due parti, $\sum\limits_{n=1}^{\mu:2}{}'$ e $\sum\limits_{n>\mu:2}^{\infty}{}'$. Abbiamo:

$$\sum_{n=1}^{\leq\mu:2}{}'\dots < A\sum_{n=1}^{\leq\mu:2}{}'\frac{\mu^2}{n^2\left(\mu-\dfrac{\mu}{2}\right)^3} < \frac{8A}{\mu}\sum_{n=1}^{\leq\mu:2}{}'\frac{1}{n^2} < \frac{8A}{\mu}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < 8A\varepsilon\,,$$

$$\sum_{>\mu:2}^{\infty}{}'\dots < \varepsilon\sum_{>\mu:2}^{\infty}{}'\frac{\mu^2}{\dfrac{\mu^2}{4}\,|n-\mu|^3} < 8\varepsilon\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^3} < 16\varepsilon\,.$$

Dunque l'espressione (10) è minore di $\varepsilon\left\{\int_c^d|\varphi|\,d\alpha + 8A + 16\right\}$, per ogni $\mu > 2\mu_1$, e così anche la seconda parte del 2° membro di (8) tende a zero per $\mu\to\infty$. Con ciò risulta provata la (6). Lo stesso ragionamento prova anche la (7), e ne risultano dimostrate le (5), che si deducono dalle (6) e (7) moltiplicandole rispettivamente per $\cos\mu x$ e $\operatorname{sen}\mu x$ e sommandole, oppure moltiplicandole per $\operatorname{sen}\mu x$ e $\cos\mu x$ e sottraendole. Siccome, poi, i primi membri di (6) e (7) non contengono la x, la convergenza a zero dei primi membri delle (5) è uniforme in tutto $(0, 2\pi)$.

Osservazione. — *Se è* $\mu = m$, *oppure* $\mu = m + \frac{1}{2}$, *con* m *intero, ed è* $d = c + 2\pi$, *il lemma precedente sussiste anche se, in luogo delle* (4), *valgono le* $\varphi(c) = \varphi(d)$, $\varphi'(c) = \varphi'(d)$, *oppure le* $\varphi(c) = -\varphi(d)$, $\varphi'(c) = -\varphi'(d)$, *rispettivamente.* Infatti, vale allora la (8) e quindi resta valido tutto il ragionamento che ne segue.

c) *Supposto* $a_n\to 0$, $b_n\to 0$; *supposto che la funzione* $\varphi(x)$ *sia definita e continua in* (c, d); *supposto che in tutti i punti di* (c, d), *esclusi al più alcuni di essi in numero finito, esista finita la derivata prima* $\varphi'(x)$ *ed essa sia a variazione limitata* *in tutto* (c, d); *supposto, infine, che sia*

(11) $$\varphi(c) = \varphi(d) = 0\,;$$

allora è

(12) $$\left\{\begin{aligned} &\lim_{\mu\to\infty} \mu \int_c^d F(\alpha)\varphi(\alpha)\cos\mu(x-\alpha)d\alpha = 0,\\ &\lim_{\mu\to\infty} \mu \int_c^d F(\alpha)\varphi(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\mu(x-\alpha)d\alpha = 0.\end{aligned}\right.$$

La convergenza è poi uniforme per tutti gli x *di* $(0, 2\pi)$ (1).

Procedendo come in b), si scriva

$$\mu \int_c^d F(\alpha)\varphi(\alpha)\cos\mu\alpha d\alpha = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu}{n^2} \int_c^d A_n(\alpha)\varphi(\alpha)\cos\mu\alpha d\alpha\,,$$

si eseguisca nell' integrale del 2° membro un' integrazione per parti e si ragioni sull' uguaglianza ottenuta come si è fatto in b) sulla (8).

Anche qui va osservato che, se è $\mu = m$ oppure $\mu = m + \frac{1}{2}$, con m intero, ed è $d = c + 2\pi$, alla (11) può sostituirsi la $\varphi(c) = \varphi(d)$, oppure la $\varphi(c) = -\varphi(d)$, rispettivamente.

d) *Se è* $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, *e se la funzione* $\varphi(x)$ *è a variazione limitata in tutto* (c, d), *è*

(13) $$\left\{\begin{aligned} &\lim_{\mu\to\infty} \int_c^d F(\alpha)\varphi(\alpha)\cos\mu(x-\alpha)d\alpha = 0,\\ &\lim_{\mu\to\infty} \int_c^d F(\alpha)\varphi(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\mu(x-\alpha)d\alpha = 0,\end{aligned}\right.$$

la convergenza essendo uniforme per tutti gli x *di* $(0, 2\pi)$ (2).

---

(1) Questa proposizione vale anche se si sopprime l' ipotesi relativa alla $\varphi'(x)$ e si suppone, invece, che la $\varphi(x)$ sia assolutamente continua in tutto (c, d).

(2) Vedremo, nel n.° 76, che questa proposizione vale sotto la sola ipotesi che $\varphi(x)$ sia una funzione integrabile in (a, b).

Scritta la

$$\int_c^d F(\alpha)\varphi(\alpha)\cos\mu\alpha d\alpha = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_c^d A_n(\alpha)\varphi(\alpha)\cos\mu\alpha d\alpha,$$

si ragioni su questa uguaglianza come si è fatto in *b*) sulla (8), e si osservi che è

$$\sum_{n>\mu:2}^{\infty}{}' \dots < \varepsilon \sum_{n>\mu:2}^{\infty}{}' \frac{1}{n^2} < 2\varepsilon.$$

24. - **Condizione necessaria e sufficiente di convergenza: teorema di Riemann.**

a) Consideriamo ancora la serie (1) del n.° precedente, con la condizione $a_n \to 0$, $b_n \to 0$. Dalla formula

$$A_n = -\frac{n^2}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos n(x-\alpha)\,d\alpha$$

segue

$$(1) \qquad A_1 + A_2 + \dots + A_m = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\sum_{n=1}^{m} n^2 \cos n(x-\alpha)\,d\alpha.$$

Ma è

$$\sum_{n=1}^{m} n^2 \cos n(x-\alpha) = -\frac{d^2}{d\alpha^2}\sum_{n=1}^{m}\cos n(x-\alpha),$$

e ricordando l'uguaglianza (n.° 11)

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\cos n(x-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(x-\alpha)}{2\operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2}},$$

otteniamo

$$\sum_{n=1}^{m} n^2 \cos n(x-\alpha) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(x-\alpha)}{\operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2}}\right],$$

e quindi, sostituendo in (1),

$$(2)\quad A_1+A_2+\dots+A_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\alpha)\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(x-\alpha)}{\operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2}}\right]d\alpha.$$

Questo risultato, che dipende soltanto dall'ipotesi $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, viene generalizzato dal seguente teorema di Riemann:

Supposto $a_n \to 0$, $b_n \to 0$; supposto che la funzione $\varphi(x)$ sia definita in un intervallo (c, d), tale che $c < d \leq c + 2\pi$, che ivi ammetta, limitate, le sue derivate dei primi quattro ordini, e che soddisfi alle condizioni

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi(c)=\varphi(d)=\varphi'(c)=\varphi'(d)=0, \\ \varphi(x_0)=1,\ \varphi'(x_0)=\varphi''(x_0)=\varphi'''(x_0)=0, \end{cases}$$

dove è $c < x_0 < d$; allora, nel punto $x = x_0$, la differenza

$$(4)\quad (A_1+A_2+\dots+A_m)-\frac{1}{2\pi}\int_c^{d}F(\alpha)\varphi(\alpha)\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(x-\alpha)}{\operatorname{sen}\frac{(x-\alpha)}{2}}\right]d\alpha$$

tende a zero, per $m \to \infty$ [1].

Servendosi della (2) (nella quale ambo i membri sono funzioni periodiche, di periodo 2π), la differenza (4) si scrive

$$(5)\quad \frac{1}{2\pi}\int_c^{c+2\pi}F(\alpha)\rho(\alpha)\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(x-\alpha)}{\operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2}}\right]d\alpha,$$

dove si è posto $\rho(\alpha)=1-\varphi(\alpha)$ in (c, d) e $\rho(\alpha)=1$ in $(d, c+2\pi)$. Questa funzione $\rho(\alpha)$ risulta continua, con la sua derivata prima in tutto $(c, c+2\pi)$, ed ha anche le derivate 2ª e 3ª continue, e la 4ª limitata, in tutto $(c, c+2\pi)$, eccettuato al più il punto d.

---

[1] Loc. cit. in [1] a pag. 16. La condizione $\varphi'''(x_0)=0$ ed anche quella dell'esistenza della derivata 4ª della $\varphi(x)$, potrebbero essere soppresse in virtù di quanto si è detto nelle note a piè delle pp. 78 e 81.

Inoltre, è $\rho(x_0)=\rho'(x_0)=\rho''(x_0)=\rho'''(x_0)=0$, $\rho(c)=\rho(c+2\pi)=1$, $\rho'(c)=\rho'(c+2\pi)=0$.

Ora abbiamo

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(x-\alpha)}{\operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2}}\right]=-\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(x-\alpha)\operatorname{cosec}\frac{x-\alpha}{2}$$

$$-(2m+1)\cos\frac{2m+1}{2}(x-\alpha)\frac{d}{d\alpha}\operatorname{cosec}\frac{x-\alpha}{2}+$$

$$+\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(x-\alpha)\frac{d^2}{d\alpha^2}\operatorname{cosec}\frac{x-\alpha}{2},$$

e pertanto, ponendo

$$\rho_1(\alpha)=\rho(\alpha)\operatorname{cosec}\frac{x-\alpha}{2},\quad \rho_2(\alpha)=\rho(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\operatorname{cosec}\frac{x-\alpha}{2},$$

$$\rho_3(\alpha)=\rho(\alpha)\frac{d^2}{d\alpha^2}\operatorname{cosec}\frac{x-\alpha}{2},$$

l'espressione (5) diventa, tralasciando il fattore $\frac{1}{2\pi}$,

$$(6)\qquad -\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\int_c^{c+2\pi}F(\alpha)\rho_1(\alpha)\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(x-\alpha)\,d\alpha\,-$$

$$-(2m+1)\int_c^{c+2\pi}F(\alpha)\rho_2(\alpha)\cos\frac{2m+1}{2}(x-\alpha)\,d\alpha\,+$$

$$+\int_c^{c+2\pi}F(\alpha)\rho_3(\alpha)\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2}(x-\alpha)\,d\alpha.$$

Per le ipotesi fatte sulla funzione $\varphi(x)$, le tre funzioni $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$ e $\rho_3(x)$ risultano continue nell'intero intervallo $(c, c+2\pi)$. Di più, risultano continue, in tutto $(c, c+2\pi)$, anche le derivate $\rho_1'(x)$ e $\rho_2'(x)$, ed esistono, in tutto l'intervallo detto, eccettuato al più il punto d, le derivate $\rho_1''(x)$, $\rho_1'''(x)$, $\rho_2''(x)$ e $\rho_3'(x)$, e queste derivate sono sempre, in modulo, inferiori ad un numero fisso. Le $\rho_1''(x)$, $\rho_2'(x)$ e $\rho_3(x)$ risultano, perciò, a variazione limitata in tutto $(c, c+2\pi)$. È poi $\rho_1(c)=-\rho_1(c+2\pi)$,

$\rho_1'(c) = -\rho_1'(c+2\pi)$, $\rho_2(c) = -\rho_2(c+2\pi)$. Possiamo dunque applicare, ai tre integrali dell'espressione (6), i risultati *b*), *c*), e *d*) del n.° 23, e concludere che l'espressione stessa tende a zero per $m \to \infty$.

Il teorema enunciato è, pertanto, dimostrato.

OSSERVAZIONE. — Se la funzione $\varphi(x)$, del precedente teorema, è tale che sia $\varphi(x) = 1$ in tutto un intervallo (c_1, d_1) *interno* a (c, d) $(c < c_1 < d_1 < d)$, allora la differenza (4) tende allo zero, per $n \to \infty$, uniformemente in tutto (c_1, d_1).

b) Come corollario di quanto si è dimostrato in *a*), si ha: *Se* (c, d) *è un intervallo di ampiezza* $\leq 2\pi$, *contenente nel suo interno il punto* x_0; *se* $\varphi(\alpha)$ *è una funzione con le proprietà dette nel teorema precedente; se, inoltre, è* $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, *per* $n \to \infty$, *condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie trigonometrica*

$$(7) \quad \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \dots$$

risulti convergente nel punto x_0, *è che, in tale punto, abbia un limite finito, per* $m \to \infty$, *l'integrale*

$$(8) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_c^d F(\alpha)\varphi(\alpha)\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\dfrac{2m+1}{2}(x-\alpha)}{\operatorname{sen}\dfrac{x-\alpha}{2}}\right]d\alpha\,.$$

Il limite di questo integrale, se esiste, è la somma della serie considerata (¹).

Di qui segue quest'altra proposizione: *Se si hanno due serie trigonometriche e le funzioni* $F(x)$ *ad esse corrispondenti coincidono in un intervallo* (c, d), *in ogni punto interno a* (c, d) *le due serie o sono ambedue convergenti (ed hanno allora la stessa somma), oppure sono ambedue non convergenti.* In altre parole, *per studiare la convergenza di una serie trigonometrica in un*

(¹) Per una generalizzazione di questo teorema e per altri risultati sulla teoria riemanniana delle serie trigonometriche, vedi: A. ZYGMUND, *Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques.* (Math. Zeitschrift, Bd. XXIV (1925), pp. 47-104).

punto, basta esaminare il comportamento della corrispondente funzione $F(x)$ in un intorno (comunque piccolo) di tale punto.

Osservazione. — Se la funzione $\varphi(x)$ dell'integrale (8) è costantemente uguale all'unità in tutto un intervallo (c_1, d_1), tale che $c < c_1 < d_1 < d$, allora la convergenza uniforme di (8) in (c_1, d_1) è condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme in (c_1, d_1) della serie (7).

CAPITOLO II.

RAPPRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI MEDIANTE SERIE TRIGONOMETRICHE

§ 1. CONDIZIONI PER LA RAPPRESENTABILITÀ.

25. - Derivate seconde generalizzate.

a) Considerata, in un intervallo (a, b), una funzione reale $f(x)$, poniamo, in un punto x interno ad (a, b),

$$(1)\qquad \frac{\Delta^2 f}{h^2} = \frac{[f(x+h)-f(x)]-[f(x)-f(x-h)]}{h^2} = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}.$$

Se, nel punto x e in un suo intorno, la $f(x)$ ammette la derivata prima e se, in x, esiste anche la derivata seconda $f''(x)$, il rapporto precedente tende, per $h \to 0$, ad $f''(x)$. Infatti basta notare che, considerando i termini del rapporto come funzioni di h, si ha, per un noto teorema di Cauchy,

$$(2)\qquad \frac{\Delta^2 f}{h^2} = \frac{f'(x+\vartheta h)-f'(x-\vartheta h)}{2\vartheta h} = \frac{1}{2}\left\{\frac{f'(x+\vartheta h)-f'(x)}{\vartheta h} + \frac{f'(x-\vartheta h)-f'(x)}{-\vartheta h}\right\}.$$

Il rapporto (1) può però avere limite, per $h \to 0$, anche quando non esiste la derivata $f''(x)$, ed anche quando non esiste la derivata prima $f'(x)$. Se, per esempio, è, per ogni h sufficientemente piccolo, $f(x-h) = -f(x+h)$, e quindi, se la funzione è continua, $f(x) = 0$, consegue $\frac{\Delta^2 f}{h^2} = 0$, per h sufficientemente piccolo, e perciò il limite di (1) esiste ed è uguale a zero [1].

Il limite di $\frac{\Delta^2 f}{h^2}$, per $h \to 0$, quando esiste, dicesi *derivata seconda generalizzata della $f(x)$, nel punto x.*

b) Quando una funzione $\varphi(\alpha)$, di un parametro α, è considerata per tutti i valori α formanti una successione od un insieme ordinato tendente ad un valore limite α_0, si chiamano *limiti d'indeterminazione* della $\varphi(\alpha)$ il minimo ed il massimo dei valori limiti della $\varphi(\alpha)$, per $\alpha \to \alpha_0$.

Si chiamano *derivate seconde generalizzate estreme* della $f(x)$, in un punto x, i limiti d'indeterminazione, in tal punto, del rapporto $\frac{\Delta^2 f}{h^2}$, per $h \to 0$. Il maggiore di tali limiti si dice *derivata seconda generalizzata superiore,* e il minore si dice *derivata seconda generalizzata inferiore.*

Se c'è, nel punto x, la derivata seconda generalizzata, le due derivate seconde generalizzate estreme coincidono entrambe con essa.

Si chiamano *limiti d'indeterminazione di una serie* i limiti d'indeterminazione della sua somma parziale n^{esima}.

26. - Teorema di Du Bois-Reymond.

Se a_n e b_n sono limitati al variare di n, e se la serie

$$(a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \dots \equiv A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$$

ammette, in un punto x_0, i limiti d'indeterminazione λ_1 e λ_2 ($\lambda_1 \leq \lambda_2$), posto

$$F(x) = -\frac{A_1}{1^2} - \frac{A_2}{2^2} - \dots - \frac{A_n}{n^2} - \dots, \tag{1}$$

$$s = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2), \quad \delta = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1),$$

[1] Pur esistendo, finito, il limite di (1), può mancare anche la continuità della $f(x)$. Per esempio, se consideriamo in $(-1, 1)$ la funzione data da $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, per $x \neq 0$, e da $y = 0$, per $x = 0$, nel punto $x = 0$ la funzione è discontinua, ma il limite di (1) esiste ed è uguale a zero.

le derivate seconde generalizzate estreme della $F(x)$, nel punto x_0, sono comprese tra $s - \mu\delta$ ed $s + \mu\delta$, dove μ è una costante, indipendente da x_0 e dalla serie trigonometrica considerata [1].

Osserviamo, in primo luogo, che, per l'ipotesi fatta su a_n e b_n, la serie (1) è uniformemente convergente in tutto $(0, 2\pi)$ e rappresenta una funzione periodica, di periodo 2π. Ciò premesso, calcoliamo $\Delta^2 F : h^2$ ponendo, per comodità di scrittura, $h = 2\alpha$. Tenendo presenti le uguaglianze

$$\cos n(x+2\alpha) - 2\cos nx + \cos n(x-2\alpha) = -4\cos nx \,\mathrm{sen}^2\, n\alpha\,,$$
$$\mathrm{sen}\, n(x+2\alpha) - 2\,\mathrm{sen}\, nx + \mathrm{sen}\, n(x-2\alpha) = -4\,\mathrm{sen}\, nx\,\mathrm{sen}^2\, n\alpha\,,$$

abbiamo

$$\frac{\Delta^2 F}{4\alpha^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n[\cos n(x+2\alpha) - 2\cos nx + \cos n(x-2\alpha)] + b_n[....]}{4\alpha^2 n^2}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{\mathrm{sen}\, n\alpha}{n\alpha}\right)^2.$$

Operando la trasformazione di Brunacci-Abel, e ponendo $s_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$, otteniamo

$$\frac{\Delta^2 F}{4\alpha^2} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \left[\left(\frac{\mathrm{sen}\, n\alpha}{n\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{sen}\,(n+1)\alpha}{(n+1)\alpha}\right)^2\right],$$

perchè il prodotto $s_n \left(\frac{\mathrm{sen}\, n\alpha}{n\alpha}\right)^2$ tende a zero, per $n \to \infty$, per l'ipotesi che i limiti d'indeterminazione di s_n sono λ_1 e λ_2 (da cui segue che, da un certo punto in poi, è $\lambda_1 - 1 < s_n < \lambda_2 + 1$).

Osservando ora che è

$$\sum_{n=1}^{\infty} s \left[\left(\frac{\mathrm{sen}\, n\alpha}{n\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{sen}\,(n+1)\alpha}{(n+1)\alpha}\right)^2\right] = s\left(\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\alpha}\right)^2,$$

possiamo scrivere

$$\frac{\Delta^2 F}{4\alpha^2} = s\left(\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\alpha}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s)\left[\left(\frac{\mathrm{sen}\, n\alpha}{n\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{sen}\,(n+1)\alpha}{(n+1)\alpha}\right)^2\right].$$

---

(1) P. Du Bois-Reymond, *Beweis dass die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe....* (Abhandlungen der K. bayer. Akademie der Wissenschaften, Bd. XII (1874), pp. 117-166).

Siccome, in x_0, i limiti d'indeterminazione di s_n, per n tendente all' ∞, sono λ_1 e λ_2, quelli di $s_n - s$ sono $-\delta$ e δ, e pertanto, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un n_1 tale che, per ogni $n > n_1$, sia

$$|s_n - s| < \delta + \varepsilon.$$

Allora sarà

$$(2)\quad \left|\frac{\Delta^2 F}{4\alpha^2} - s\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2 - \sum_{n=1}^{n_1}(s_n - s)\left[\left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{sen}(n+1)\alpha}{(n+1)\alpha}\right)^2\right]\right|$$

$$\leq (\delta+\varepsilon)\sum_{n_1+1}^{\infty}\left|\left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{sen}(n+1)\alpha}{(n+1)\alpha}\right)^2\right| < (\delta+\varepsilon)\sum_{0}^{\infty}\left|\int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} d\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2\right|.$$

Per $\alpha \to 0$, i termini che figurano nel primo membro di questa disuguaglianza, escluso $\dfrac{\Delta^2 F}{4\alpha^2}$, tendono complessivamente a $-s$. Possiamo dire perciò che, per $\alpha \to 0$, $\dfrac{\Delta^2 F}{4\alpha^2} - s$ tende a diventare, in modulo, minore dell'ultimo membro della (2). Ora è

$$\sum_{0}^{\infty}\left|\int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} d\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2\right| \leq \int_0^{\infty}\left|D\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2\right| d\alpha = \mu,$$

perchè l'integrale qui scritto ha un valore finito: infatti, è

$$\left|D\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2\right| \leq 2\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3}\right),$$

e perciò esiste finito l' integrale

$$\int_{\pi:2}^{\infty}\left|D\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2\right| d\alpha;$$

inoltre, essendo, per α in $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $D\left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2 < 0$, perchè, nell' intervallo detto, $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$ diminuisce costantemente, ne viene

$$\int_0^{\pi:2}\left|D\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2\right| d\alpha = -\int_0^{\pi:2} D\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2.$$

Dunque, in x_0, la differenza $\dfrac{\Delta^2 F}{4\alpha^2} - s$, per $\alpha \to 0$, tende a diventare minore od uguale, in modulo, a $(\delta + \varepsilon)\mu$ e quindi anche (ε essendo arbitrario) a $\delta\mu$. Ciò prova che i limiti d'indeterminazione di $\Delta^2 F : 4\alpha^2$, per $\alpha \to 0$, sono dati da $s - \delta\mu$ e $s + \mu\delta$.

27. - Teorema di Riemann.

Supponendo, nel teorema precedente, $\lambda_1 = \lambda_2$, e quindi $\delta = 0$, si ha:

Se a_n e b_n sono limitati al variare di n, e se in un punto x_0 la serie

$$\sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{1}$$

è convergente, la derivata seconda generalizzata della corrispondente funzione $F(x)$ esiste in x_0 ed è uguale alla somma della serie (1).

Da ciò segue che il determinare la derivata seconda generalizzata della funzione $F(x)$ è un modo per sommare la serie trigonometrica considerata, là dove questa serie è convergente. Osserviamo però che la derivata seconda generalizzata di $F(x)$ può esistere finita anche quando la serie trigonometrica non è convergente. Il valore della derivata seconda generalizzata di $F(x)$ — quando essa esista finita — lo chiameremo *somma generalizzata di Riemann* della serie trigonometrica considerata. Se la serie trigonometrica ha un primo termine costante $a_0 : 2$, chiameremo *somma generalizzata di Riemann* quella della serie senza tale termine, aumentata del termine stesso: essa sarebbe la derivata seconda generalizzata di

$$\frac{a_0 x^2}{4} + F(x).$$

Se la serie trigonometrica (1) converge uniformemente in tutto un intervallo (a, b), dalla dimostrazione del n.° precedente risulta che anche $\Delta^2 F : h^2$ converge uniformemente, in tutto (a, b), verso la somma della (1). Questo risultato e lo stesso

(1) Loc. cit. in (1) a pag. 16.

teorema di Riemann si possono d'altronde dedurre immediatamente applicando alla serie

$$\frac{\Delta^2 F}{4\alpha^2} = \sum_1^\infty A_n \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n\alpha}\right)^2$$

l'ultima proposizione del n.° 13.

28. - **Condizioni necessarie e sufficienti per la sviluppabilità di una funzione in serie trigonometrica.**

Data una funzione $f(x)$, definita in un certo intervallo, qual'è la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una serie trigonometrica che abbia la $f(x)$ per somma generalizzata di Riemann, in tutto l'intervallo considerato? A tale questione ha risposto Riemann col seguente teorema (¹):

Data, in un intervallo (a, b), una funzione $f(x)$ — la quale, quando sia $b - a \geq 2\pi$, risulti periodica e di periodo 2π — sono condizioni necessarie e sufficienti affinchè esista una serie trigonometrica

$$(1)\qquad \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \ldots. + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \ldots.,$$

soddisfacente alla condizione $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, e tale che abbia, in ogni punto di (a, b), la $f(x)$ come somma generalizzata di Riemann:

1ª) *che esista una funzione $F(x)$, periodica (di periodo 2π) e continua, di cui, in ogni punto di (a, b), la $f(x)$ sia la derivata seconda generalizzata, a meno di una costante additiva;*

2ª) *che sia, per ogni x,*

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos n(x - \alpha) d\alpha = 0 \text{ (²)}.$$

(¹) Loc. cit. in (¹) a p. 16.

(²) In questo integrale al *cos* si può sostituire il *sen*, perchè, se è verificata la (2), è anche

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{2\pi} F(\alpha) \operatorname{sen} n(x - \alpha) d\alpha = 0,$$

e viceversa, in virtù dell'*Osservazione* posta alla fine del n.° 2.

Le condizioni sono necessarie. Infatti, posto $A_n = a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$, $F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^2}$, questa $F(x)$ è periodica (di periodo 2π), continua, ed ha, in ogni punto di (a, b), per derivata seconda generalizzata $f(x) - a_0:2$. Inoltre, per questa $F(x)$, vale la (3) del n.º 23, ossia la (2) attuale.

Le condizioni sono sufficienti. Infatti, posto

$$(3) \qquad a_n = -\frac{n^2}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha, \qquad b_n = -\frac{n^2}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha) \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha,$$

dalla (2) segue, per ogni x,

$$a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx = -\frac{n^2}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos n(x-\alpha) d\alpha \to 0,$$

e quindi (n.º 2, Osservaz.) $a_n \to 0$, $b_n \to 0$. La serie

$$-\sum_1^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx}{n^2}$$

è allora uniformemente convergente in tutto $(0, 2\pi)$ e rappresenta quindi una funzione $\Phi(x)$, continua, periodica, di periodo 2π. Per il teorema del n.º 21, i coefficienti di tale serie sono dati dalle formole di Eulero-Fourier; sono cioè

$$-\frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha, \qquad -\frac{b_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\alpha) \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha.$$

Dal confronto di queste uguaglianze con le (3), segue, per ogni n,

$$\int_0^{2\pi} [F(\alpha) - \Phi(\alpha)] \cos n\alpha \, d\alpha = 0, \qquad \int_0^{2\pi} [F(\alpha) - \Phi(\alpha)] \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha = 0.$$

Queste infinite uguaglianze non possono essere verificate (come risulterà da un teorema che daremo più innanzi, al n.º 41) se non è $F(x) = \Phi(x)$. È pertanto

$$F(x) = -\sum_1^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx}{n^2},$$

e poichè, per la condizione 1ª), la $F(x)$ ha per derivata seconda generalizzata, in ogni punto di (a, b), la $f(x)$, a meno di una costante additiva, ne viene che la serie

$$\sum_{1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

ammette una somma generalizzata di Riemann, in tutto (a, b), e che questa somma è, a meno di una costante additiva, la $f(x)$. Indicata tale costante additiva con $a_0 : 2$, si conclude che la serie

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

ha per somma generalizzata di Riemann la $f(x)$, in tutto (a, b).

29. - **Trasformazione delle condizioni precedenti.**

Seguendo Riemann, nel teorema del n.° preced., alla condizione 2ª), può sostituirsi la seguente:

2′) *che, per qualunque intervallo (c, d) e per ogni funzione $\varphi(x)$, avente in (c, d) derivata prima continua e derivata seconda a variazione limitata, e soddisfacente alle uguaglianze*

$$\varphi(c) = \varphi(d) = \varphi'(c) = \varphi'(d) = 0,$$

sia (μ essendo un numero positivo qualunque)

$$\text{(1)} \qquad \lim_{\mu \to \infty} \mu^2 \int_c^d F(\alpha)\varphi(\alpha) \cos \mu(x - \alpha) d\alpha = 0 \ (^1).$$

Affinchè questa nuova condizione risulti necessaria, basta, nel ragionamento fatto nel n.° preced., sostituire la (3) del n.° 23 con la prima delle (5) dello stesso n.°.

Per vedere poi che la 2′), insieme con la 1ª) del n.° preced., è sufficiente, scegliamo due intervalli (c, d) particolari e precisamente $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$. Nel primo, consideriamo

(1) Anche qui, al *cos* si può sostituire il *sen*. Nella uguaglianza (1) si può anche intendere che μ sia soltanto un numero intero positivo.

una funzione $\varphi_1(x)$ tale che $\varphi_1(0) \neq 0$, $\varphi_1'(0) = \varphi_1''(0) = 0$ e $\varphi_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi_1'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \varphi_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Nel secondo, consideriamo una funzione $\varphi_2(x)$ uguale alla $\varphi_1(x)$ in $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, uguale a $\varphi_1(0)$ in $(0, 2\pi)$, ed uguale a $\varphi_1(x - 2\pi)$ in $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$. Abbiamo allora, per ogni intero positivo n,

$$\int_{-\pi:2}^{5\pi:2} F(\alpha)\varphi_2(\alpha) \cos n\,(x - \alpha)d\alpha - \int_{-\pi:2}^{\pi:2} F(\alpha)\varphi_1(\alpha) \cos n\,(x - \alpha)d\alpha =$$

$$= \varphi_1(0) \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos n\,(x - \alpha)d\alpha.$$

Il primo membro di questa uguaglianza, moltiplicato per n^2, tende a zero, per $n \to \infty$, in virtù della (1); ne viene così

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos n\,(x - \alpha)d\alpha = 0.$$

Dunque risulta soddisfatta la 2ª) del teorema del n.° preced., è ciò dimostra quanto volevamo.

§ 2. Unicità dello sviluppo in serie trigonometrica.

30. - Teorema di Hölder, generalizzato [1].

Se la funzione $f(x)$ è continua in un intervallo $(x_0 - h, x_0 + h)$, il rapporto $\frac{\Delta^2 f}{h^2}$ è, in x_0, compreso tra il limite inferiore ed il limite superiore di una qualunque delle derivate seconde generalizzate estreme della $f(x)$, nell' interno dell' intervallo $(x_0 - h, x_0 + h)$.

---

[1] O. Hölder, *Zur Theorie der trigonometrischen Reihen.* (Math. Annalen, Bd. XXIV (1884), pp. 181-236). Il teorema, nella forma datagli da Hölder, afferma che $\Delta^2 f : h^2$ è compreso fra il limite inferiore della derivata seconda generalizzata inferiore e quello superiore della derivata seconda generalizzata superiore.

Consideriamo il polinomio, di 2° grado, in x,

$$P(x)=\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}(x-x_0)^2+\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}(x-x_0)+f(x_0)$$

e la differenza $\varphi(x)=f(x)-P(x)$. Questa differenza s'annulla nei punti x_0-h, x_0 ed x_0+h, e, pertanto, nell'interno dell'intervallo $(x_0-h,\ x_0+h)$, esistono per $\varphi(x)$ almeno un punto di massimo x_1 ed almeno un punto di minimo x_2 per $\varphi(x)$. In un punto di massimo, il rapporto $\Delta^2\varphi : k^2$ è, per tutti i k sufficientemente piccoli, ≤ 0; in un punto di minimo esso è invece ≥ 0; e poichè si ha

$$\frac{\Delta^2\varphi}{k^2}=\frac{\Delta^2 f}{k^2}-\frac{\Delta^2 P}{k^2}=\frac{\Delta^2 f}{k^2}-\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2},$$

avremo, per tutti i k sufficientemente piccoli,

$$\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}\geq\frac{\Delta^2 f(x_1)}{k^2},$$

$$\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}\leq\frac{\Delta^2 f(x_2)}{k^2}.$$

Facendo tendere k a zero per particolari valori, $\dfrac{\Delta^2 f(x_1)}{k^2}$ tende alla derivata seconda generalizzata superiore, in x_1: è dunque $\dfrac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}\geq$ al limite inferiore di tale derivata nell'interno di $(x_0-h,\ x_0+h)$. Facendo tendere k a zero in modo arbitrario, $\dfrac{\Delta^2 f(x_2)}{k^2}$ tende a diventare $\leq$ alla derivata seconda generalizzata superiore, in x_2: è dunque $\dfrac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}\leq$ al limite superiore di tale derivata nell'interno di $(x_0-h,\ x_0+h)$. Il teorema è così dimostrato per la derivata seconda generalizzata superiore; lo è quindi anche per quella inferiore.

31. - Teorema di Schwarz, generalizzato.

a) Una funzione $f(x)$ continua, la quale abbia, nei punti interni ad un intervallo (a, b), una derivata seconda genera-

lizzata estrema sempre nulla, è una funzione lineare in tale intervallo [1].

Questa proposizione, che sarebbe evidente nel caso in cui la funzione data $f(x)$ avesse derivata seconda ordinaria in ogni punto di (a, b) (la quale sarebbe, pertanto, sempre nulla), nel caso generale è una conseguenza del teorema del n.º preced. Da tale teorema risulta infatti, per l'ipotesi posta, che, per ogni x interno ad (a, b) e per ogni h tale che $x-h$ ed $x+h$ appartengano ad (a, b), è sempre $\Delta^2 f : h^2 = 0$ ossia $\Delta^2 f = 0$, da cui

$$f(x) = \frac{f(x-h) + f(x+h)}{2}.$$

Ciò vuol dire che, sulla retta r congiungente i punti della curva $y = f(x)$ corrispondenti ad $x = a$ ed $x = b$, deve trovarsi anche il punto della detta curva corrispondente al punto medio di (a, b). Sulla retta r debbono allora trovarsi anche i punti della curva $y = f(x)$ corrispondenti a quelli che si ottengono dividendo (a, b) in 4 parti uguali, e poi anche quelli che si ottengono dividendo (a, b) in 8 parti uguali e via di seguito. Essendo, per ipotesi, la $f(x)$ continua, tutta la curva $y = f(x)$ deve trovarsi così sulla retta r e la $f(x)$ è una funzione lineare.

b) Più generalmente, si ha:

Una funzione continua, le cui derivate seconde generalizzate estreme non risultino, in nessun punto interno ad un intervallo (a, b), *entrambe diverse da zero e di uguale segno, è una funzione lineare in* (a, b).

Ed invero, per l'ipotesi fatta, il limite superiore, nell'interno di (a, b), della derivata seconda generalizzata inferiore sarà $l_1 \leq 0$, e quello inferiore della derivata seconda generalizzata superiore sarà $l_2 \geq 0$. Dunque, per il teorema del n.º preced. sarà, in ogni punto interno ad (a, b) e per ogni h tale che $x-h$ ed $x+h$ appartengano ad (a, b),

$$0 \leq l_2 \leq \frac{\Delta^2 f}{h^2} \leq l_1 \leq 0,$$

---

(1) Questa proposizione, nel caso dell'esistenza della derivata seconda generalizzata, è dovuta a K. H. A. Schwarz (Cfr. G. Cantor, *Beweis dass eine für jeden reellen Werth von x....* Journal für Mathematik, Bd. LXXII (1870). pp. 139-142). Nella forma del testo trovasi in Ch. J. de la Vallée Poussin, *Sur l'unicité du développement trigonométrique.* (Bulletin de l'Acad. royale de Bèlgique, 1912, pp. 702-718).

donde $\Delta^2 f : h^2 = 0$. Da ciò segue, come dianzi, che la $f(x)$ è lineare in (a, b).

c) Della proposizione ora dimostrata possiamo dare una generalizzazione importante.

Premettiamo la seguente definizione: diremo che una funzione $f(x)$, data in un intervallo (a, b), soddisfa, in un punto x interno a questo intervallo, alla *condizione* (C), se esistono due successioni di numeri positivi

$$h_1, h_2, \ldots., h_n, \ldots.,$$
$$k_1, k_2, \ldots., k_n, \ldots.,$$

ambedue tendenti a zero e tali che sia, per $n \to \infty$,

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} - \frac{f(x-k_n)-f(x)}{-k_n} \to 0.$$

È evidente che questa *condizione* (C) è certamente verificata da ogni funzione avente in x derivata prima finita oppure derivata seconda generalizzata finita. Si può anche osservare che, se in un punto x_0, interno ad (a, b), la *condizione* (C) non è verificata, in x_0 esiste la derivata seconda generalizzata della $f(x)$, e tale derivata è infinita. Ed infatti, se tale derivata non esistesse o, esistendo, non fosse infinita, si avrebbe, per un certo valore l finito e per una certa successione $h_1, h_2, \ldots., h_n, \ldots.$ di numeri positivi e tendenti a zero,

$$\frac{f(x_0+h_n)-2f(x_0)+f(x_0-h_n)}{h_n^2} \to l$$

e perciò

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} - \frac{f(x_0-h_n)-f(x_0)}{-h_n} \to 0.$$

Ciò posto, abbiamo:

Una funzione $f(x)$, continua in un intervallo (a, b), è una funzione lineare in tale intervallo, se l'insieme E dei punti interni ad (a, b), in cui le sue derivate seconde generalizzate estreme sono entrambe diverse da zero e di ugual segno, non ha la potenza del continuo, e se, di più, nei punti di E è soddisfatta la condizione (C) (1).

---

(1) Cfr. Ch. J. de la Vallée Poussin, loc. cit. in (1) a pag. 97.

Per dimostrare questo teorema, basterà far vedere che la funzione

$$(1) \qquad f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)]$$

è costantemente nulla in tutto (a, b). Supponiamo che, in un punto interno x_0 di (a, b), l'espressione scritta non sia nulla, ma abbia un valore $\mu \neq 0$, e poniamo

$$\varphi(x, c) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)] + c(x-a)^2,$$

dove c indica un numero positivo. Nei punti a, x_0 e b, la funzione $\varphi(x, c)$ ha, rispettivamente, i valori 0, $\mu + c(x_0 - a)^2$ e $c(b-a)^2$; pertanto, indicando con c_0 il minore dei due numeri

$$\frac{|\mu|}{(x_0 - a)^2}, \quad \frac{|\mu|}{(b-a)^2 - (x_0 - a)^2},$$

e supponendo $c < c_0$, abbiamo che $\varphi(x_0, c)$ sarà positivo e maggiore di $\varphi(b, c)$, se $\mu > 0$, ed invece negativo e minore di $\varphi(b, c)$, se $\mu < 0$. Per fissare le idee, supponiamo $\mu > 0$. Allora, essendo $\varphi(a, c) = 0$, esisterà nell'interno di (a, b) un punto di massimo assoluto per $\varphi(x, c)$. Di questi punti ne potranno esistere più d'uno: indicheremo con x_c uno qualunque di essi. Sarà $a < x_c < b$ ed anche, per tutti gli $h > 0$ e sufficientemente piccoli,

$$(2) \qquad \varphi(x_c + h, c) - \varphi(x_c, c) \leq 0, \quad \varphi(x_c - h, c) - \varphi(x_c, c) \leq 0.$$

Pertanto la derivata seconda generalizzata superiore di $\varphi(x, c)$, in x_c, sarà ≤ 0. Ma tale derivata, essendo uguale a quella di $f(x)$ aumentata di $2c$, è, per le ipotesi fatte, positiva se x_c non appartiene ad E. Dunque x_c è un punto di E. Siccome, poi, in x_c deve essere verificata la condizione (C), debbono esistere due successioni di numeri positivi, tendenti a zero, h_1, h_2,.... e k_1, k_2,...,tali che sia

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\varphi(x_c + h_n, c) - \varphi(x_c, c)}{h_n} + \frac{\varphi(x_c - k_n, c) - \varphi(x_c, c)}{k_n} \right) = 0.$$

Ma, per le (2), le due frazioni qui scritte sono ambedue ≤ 0, per tutti gli n sufficientemente grandi: dunque è

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(x_c+h_n,c)-\varphi(x_c,c)}{h_n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(x_c-k_n,c)-\varphi(x_c,c)}{k_n}=0,$$

ed anche, tenendo conto della definizione della $\varphi(x, c)$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_c+h_n)-f(x_c)}{h_n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_c-k_n)-f(x_c)}{-k_n}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-2c(x_c-a).$$

Da questa uguaglianza segue che, a due diversi valori di c, c_1, e c_2 (ambedue $< c_0$), non possono corrispondere due x_c, x_{c_1} e x_{c_2}, uguali, perchè, se fosse $x_{c_1}=x_{c_2}$, sarebbe necessariamente

$$2c_1(x_{c_1}-a)=2c_2(x_{c_2}-a)$$

e quindi $c_1=c_2$ (perchè $x_{c_1}>a$). E poichè i valori che può assumere c, tra 0 e c_0, costituiscono un' infinità avente la potenza del continuo, tale dovrebbe essere la potenza dell'insieme dei punti x_c e quindi quella di E, contro l'ipotesi fatta. La (1) è dunque nulla in ogni punto interno ad (a, b), e perciò in tutto (a, b). Con ciò la funzione $f(x)$ risulta lineare in (a, b) [1].

d) Come risulterà da quanto diremo nel n.° 34, il teorema dato in *c*) non sussiste più, in generale, se si sopprime la condizione che l' insieme E non abbia la potenza del continuo. Esistono, infatti, funzioni continue in tutto $(0, 2\pi)$, *non lineari*, sempre soddisfacenti alla condizione (C), aventi derivata seconda generalizzata nulla in tutti i punti di $(0, 2\pi)$, eccettuati quelli di un insieme perfetto E, rinchiudibile in un plurintervallo di lunghezza arbitrariamente piccola (vale a dire di *misura nulla*).

e) Come corollario importante della proposizione dimostrata in *c*), si ha:

Una funzione continua, in un intervallo (a, b), *è lineare in tale intervallo, se soddisfa ovunque in* (a, b) *alla condizione* (C),

---

[1] È facile mostrare che i valori di x_c corrispondenti ai valori di c di un intervallo chiuso, interno a $(0, c_0)$, costituiscono un insieme chiuso. E siccome ogni insieme chiuso avente la potenza del continuo contiene un insieme perfetto, ne viene che, se la $f(x)$ non è lineare in (a, b), *l'insieme E contiene un insieme perfetto.*

e se l'insieme E dei punti in cui la sua derivata seconda generalizzata non è nulla non ha la potenza del continuo.

f) La dimostrazione fatta in *c*) prova anche la seguente proposizione:

Una funzione continua, in un intervallo (a, b), *è concava verso l'alto in tale intervallo, se la sua derivata seconda generalizzata superiore è* ≥ 0 *in tutto* (a, b), *ad eccezione al più dei punti di un insieme E non avente la potenza del continuo, e se, di più, nei punti di E essa soddisfa alla condizione* (C) [1].

Dicendo che la funzione $f(x)$ è *concava verso l'alto,* intendiamo di dire che ogni arco della curva $y = f(x)$ non ha alcun punto al disopra della sua corda.

32. - **Corollari dei teoremi precedenti.**

a) *Se due funzioni* $f_1(x)$ *e* $f_2(x)$, *continue in* (a, b), *hanno, in ogni punto interno ad* (a, b), *finite ed uguali le derivate seconde generalizzate superiori (od inferiori), esse differiscono fra loro soltanto per una funzione lineare.*

Indichiamo con $\overline{\mathfrak{D}}^2$ la derivata seconda generalizzata superiore e con $\underline{\mathfrak{D}}^2$ quella inferiore. Allora è, per ipotesi,

$$\overline{\mathfrak{D}}^2 f_1 = \overline{\mathfrak{D}}^2 f_2$$

e pertanto, essendo $\underline{\mathfrak{D}}^2(-f_2) = -\overline{\mathfrak{D}}^2 f_2$, è

$$\underline{\mathfrak{D}}^2(f_1 - f_2) \leq \overline{\mathfrak{D}}^2 f_1 + \underline{\mathfrak{D}}^2(-f_2) = \overline{\mathfrak{D}}^2 f_1 - \overline{\mathfrak{D}}^2 f_2 = 0,$$
$$\overline{\mathfrak{D}}^2(f_1 - f_2) \geq \overline{\mathfrak{D}}^2 f_1 + \underline{\mathfrak{D}}^2(-f_2) = \overline{\mathfrak{D}}^2 f_1 - \overline{\mathfrak{D}}^2 f_2 = 0;$$

per il teorema *b*) del n.° 31, $f_1 - f_2$ è una funzione lineare.

b) *Due funzioni* f_1 *ed* f_2, *continue in* (a, b), *differiscono ivi fra loro per una funzione lineare, se l' insieme E dei punti interni ad* (a, b) *in cui le loro derivate seconde generalizzate superiori (o inferiori) non sono ambedue finite oppure sono fra loro diverse, non ha la potenza del continuo ed è tale che in ogni suo punto la differenza* $f_1 - f_2$ *soddisfi alla condizione* (C).

Vale qui la dimostrazione precedente, ricordando il teorema *c*) del n.° 31.

c) In seguito a quanto si è detto nel n.° 31, *d*), si possono costruire due funzioni continue f_1 ed f_2, aventi la stessa derivata

[1] Cfr. Ch. J. de la Vallée Poussin, loc. cit. in [1] a pag. 97.

seconda generalizzata finita in tutti i punti di $(0, 2\pi)$, eccettuati quelli di un insieme perfetto E, di misura nulla, e tali che la differenza $f_1 - f_2$ soddisfi ovunque alla condizione (C), ma non sia una funzione lineare.

33. - Teorema di Riemann.

Se è $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, per $n \to \infty$, la funzione $F(x)$ definita da

$$F(x) = -\sum_1^\infty \frac{A_n}{n^2},$$

dove si è posto $A_n = a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$, *verifica ovunque l'uguaglianza*

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h} = 0 \ (^1).$$

Posto, per comodità di dimostrazione, $h = 2\alpha$, dal calcolo eseguito nel n.° 26, otteniamo che il rapporto di cui si cerca il limite è dato da

$$2\alpha \sum_1^\infty A_n \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n\alpha}\right)^2.$$

Poichè è $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, è pure $A_n \to 0$, onde, preso un $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un n_1 tale che, per ogni $n > n_1$, sia $|A_n| < \varepsilon$. Supposto $\alpha < \dfrac{1}{n_1 + 1}$, dividiamo la serie scritta in tre parti:

$$2\alpha \sum_1^\infty A_n \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n\alpha}\right)^2 = 2\alpha \sum_1^{n_1} \ldots + 2\alpha \sum_{n_1+1}^{\leq 1:\alpha} \ldots + 2\alpha \sum_{n>1:\alpha}^{\infty} \ldots$$

La prima parte del secondo membro, per $\alpha \to 0$, tende a zero, perchè $\sum\limits_1^{n_1} \ldots$ tende a $\sum\limits_1^{n_1} A_n$. La seconda parte è sempre, in valore assoluto, minore di $2\alpha \sum\limits_{n_1+1}^{\leq 1:\alpha} \varepsilon \leq 2\alpha\varepsilon \dfrac{1}{\alpha} = 2\varepsilon$, e la terza è, in modulo, minore di

$$2\alpha\varepsilon \sum_{n>1:\alpha}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n\alpha}\right)^2 < \frac{2\varepsilon}{\alpha} \sum_{n>1:\alpha}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{2\varepsilon}{\alpha} \sum_{n>1:\alpha}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} < \frac{2\varepsilon}{\alpha} \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - 1} < 4\varepsilon;$$

il teorema è dunque provato.

---

(1) Loc. cit in (1) a pag. 16.

COROLLARIO. — *La funzione $F(x)$ soddisfa, per ogni x, alla condizione* (C).

34. - Teorema di Heine-Cantor sulle serie trigonometriche convergenti allo zero.

Se una serie trigonometrica

$$(1)\quad \frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\operatorname{sen}x)+\ldots.+(a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen}nx)+\ldots.$$

converge verso zero in tutto $(0, 2\pi)$, *esclusi al più i punti di un insieme E non avente la potenza del continuo, è, per ogni n,*

$$a_n=0,\quad b_n=0 \text{ (}^1\text{)}.$$

Dall' ipotesi fatta e per il teorema di Lebesgue del n.° 3, si ha, per $n\to\infty$, $a_n\to 0$, $b_n\to 0$. Posto, come al solito,

$$F(x)=-\sum_1^\infty \frac{A_n}{n^2},$$

la funzione $F(x)$ è continua e periodica (di periodo 2π), e, per il teorema di Riemann del n.° 27, ha la derivata seconda generalizzata uguale, in tutti i punti di $(0, 2\pi)$ non appartenenti ad E, alla somma della serie (1) diminuita di $a_0:2$ e cioè uguale a $-a_0:2$. Dunque la funzione $F(x)+\frac{a_0}{4}x^2$ ha, in tutti i punti di $(0, 2\pi)$, esclusi al più quelli di E, la derivata seconda generalizzata nulla. E siccome (per il corollario del n.° precedente) la $F(x)$ soddisfa ovunque alla condizione (C), ed ugualmente la $a_0x^2:4$ per avere le derivate prima, seconda, ecc., così anche la $F(x)+\frac{a_0}{4}x^2$ soddisfa ovunque alla condizione indi-

---

[1] Questo teorema fu dimostrato dapprima, sotto condizioni molto restrittive, da H. E. HEINE (*Ueber trigonometrischen Reihen.* Journal für Mathematik, Bd. 71 (1870), pp. 353-365); poi, nell'ipotesi che l'insieme E sia *riducibile,* da G. CANTOR (*Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x,...,* Journal für Mathematik, Bd. 72 (1870), pp. 139-142; *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen,* Math. Annalen, Bd. 5 (1872), pp. 123-132); infine, nella forma del testo, da F. BERNSTEIN (*Zur theorie der trigonometrischen Reihen,* Leipz. Ber., Bd. 60 (1908), pp. 325-338). Sotto forma equivalente a quella del testo fu anche dimostrato da W. H. YOUNG (*A Note on trigonometrical series,* Messenger of Mathematics, V. 38 (1908-09), pp. 44-48).

cata, e, per il teorema del n.° 31, *e*), è una funzione lineare $px+q$. È dunque

$$F(x) = -\frac{a_0}{4}x^2 + px + q.$$

Qui il primo membro è una funzione periodica, di periodo 2π; altrettanto deve essere perciò il secondo membro. Dunque deve aversi $a_0 = 0$ (perchè altrimenti per $|x| \to \infty$ quest'espressione tenderebbe ad ∞) e poi $p = 0$. Resta dunque $F(x) = q$, ossia

$$\sum_1^\infty \frac{A_n}{n^2} = -q.$$

Ma siccome la serie del primo membro è uniformemente convergente, il teorema del n.° 21 dà:

$$\frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q \cos nx dx = -\frac{q}{\pi}\,0 = 0,$$

$$\frac{b_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q \operatorname{sen} nx dx = -\frac{q}{\pi}\,0 = 0,$$

ossia $a_n = 0$ e $b_n = 0$. Il teorema è così dimostrato.

OSSERVAZIONE I. — Se l'insieme E precedente avesse la potenza del continuo, il teorema non sarebbe più vero, in generale. Ed infatti D. Menchoff (1) ha costruito una serie trigonometrica a coefficienti non nulli (ma tendenti allo zero), convergente verso zero in tutti i punti di $(0, 2\pi)$ ad eccezione di quelli di un insieme perfetto, di *misura* nulla.

OSSERVAZIONE II. — La dimostrazione data del teorema di Heine-Cantor prova pure che, *se la* (1) *ha lo zero per somma generalizzata di Riemann* (*n.° 27*) *in tutto* $(0, 2\pi)$, *esclusi al più*

---

(1) *Sur l'unicité du développement trigonométrique.* (Comptes rendus, t. 163 (1916), pp. 433-436). In connessione con questo lavoro, vedi: A. RAJCHMAN, *Sur l'unicité du développement trigonom.* (Fund. Math., T. III (1922), pp. 286-302); N. BARY, *Sur l'unicité du dévelop. trigonom.* (Fund. Math., T. IX (1927), pp. 62-118); A. ZYGMUND, *Contribution à l'unicité du dévelop. trigonom.* (Math. Zeitschr., Bd. 24 (1925), pp. 40-46).

i punti di un insieme E non avente la potenza del continuo, è, per ogni n, $a_n = 0$, $b_n = 0$.

Come ha fatto vedere A. Rajchman [1], questa proposizione sussiste anche se alla *somma generalizzata di Riemann* si sostituisce la *somma generalizzata di Poisson.*

35. - Unicità dello sviluppo in serie trigonometrica.

Dal teorema precedente segue immediatamente:

Due serie trigonometriche che siano convergenti e con la stessa somma in tutti i punti di $(0, 2\pi)$, *eccettuati quelli di un insieme E, non avente la potenza del continuo, sono identiche* [2].

Con *identiche* intendiamo che le due serie hanno gli stessi coefficienti.

Possiamo anche dire che non possono esistere due serie trigonometriche, distinte, convergenti verso una funzione data $f(x)$ in tutti i punti di $(0, 2\pi)$, eccettuati al più quelli di un insieme E non avente la potenza del continuo.

Osservazione I. — Per quanto ha dimostrato il Menchoff [3], questo teorema di unicità non sarebbe più vero se E avesse la potenza del continuo.

Osservazione II. — L' unicità dello sviluppo di una funzione in serie trigonometrica, stabilita dal teorema ora dimostrato, vale soltanto per lo sviluppo della funzione in tutto l' intervallo $(0, 2\pi)$. Se l' intervallo, in cui si vuol considerare lo sviluppo della funzione, ha ampiezza minore di 2π, l'unicità non sussiste più. Ad esempio, la funzione $f(x) \equiv \pi : 4$, ammette lo sviluppo in serie trigonometrica coi coefficienti $a_0 = \pi : 2$, $a_n = 0$, $b_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots \infty)$, sviluppo che è valido in ogni intervallo. Nell' intervallo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, è anche (n.° 20)

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \ldots .$$

---

(1) Loc. cit. in (1) a pag. 104.

(2) In questo enunciato, la condizione che l' insieme E non abbia la potenza del continuo è equivalente all' altra che *E sia numerabile.* (Ciò in virtù di una proposizione dovuta a P. Alexandroff, *Sur la puissance des ensembles mesurables B*; Comptes rendus, t. 162 (1916), pp. 323-325).

L' osservazione qui fatta vale anche per tutti i teoremi dei n.i 31, 32 e 34.

(3) Loc. cit. in (1) a pag. 104.

Dunque in $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ la funzione considerata ha due sviluppi trigonometrici.

Da quanto diremo in seguito, risulterà pure che l'ampiezza minima dell' intervallo che assicura l' unicità dello sviluppo è 2π. Faremo vedere precisamente che, per ogni intervallo (a, b), di ampiezza $< 2\pi$, esistono infinite funzioni ciascuna delle quali ammette infiniti sviluppi trigonometrici, tutti convergenti ed anche uniformemente convergenti.

36. - Relazione fra la somma di una serie trigonometrica in un punto e la somma nei punti vicini.

a) Prima di chiudere il presente §, vogliamo dedurre, dal teorema di Hölder del n.° 30, la seguente conseguenza.

Se la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{1}$$

è convergente in tutti i punti di un intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, *e se indichiamo con* $\overline{S}(x_0 + 0)$ *e* $\underline{S}(x_0 + 0)$ *il massimo ed il minimo limite della sua somma* $S(x)$, *per* x *tendente a* x_0, *alla destra di* x_0, *e con* $\overline{S}(x_0 - 0)$ *e* $\underline{S}(x_0 - 0)$ *i valori analoghi per* x *tendente a* x_0, *alla sinistra di* x_0, *abbiamo*

$$\frac{1}{2}\left\{\underline{S}(x_0-0)+\underline{S}(x_0+0)\right\} \leq S(x_0) \leq \frac{1}{2}\left\{\overline{S}(x_0-0)+\overline{S}(x_0+0)\right\}. \tag{2}$$

Senza limitazione della generalità del teorema, possiamo supporre $a_0 = 0$.

Per l' ammessa convergenza della serie (1) in tutto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, risulta (n.° 2) $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, e quindi la serie

$$F(x) = -\sum_1^\infty \frac{A_n}{n^2},$$

con $A_n = a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$, è ovunque uniformemente convergente, e si ha (n.° 27)

$$S(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta^2 F(x_0)}{h^2},$$

ossia

$$
(3)\qquad \begin{aligned}
2S(x_0) &= \lim_{h \to 0} \left\{ 4\, \frac{F(x_0+2h) - 2F(x_0) + F(x_0-2h)}{4h^2} - \right. \\
&\qquad \left. - 2\, \frac{F(x_0+h) - 2F(x_0) + F(x_0-h)}{h^2} \right\} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{F(x_0+2h) - 2F(x_0+h) + F(x_0)}{h^2} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{F(x_0) - 2F(x_0-h) + F(x_0-2h)}{h^2} \right\}.
\end{aligned}
$$

Ora, per il teorema di Hölder (n.° 30), se è $x_0 \leq x - h < < x + h \leq x_0 + \varepsilon$, con $\varepsilon < \delta$, il rapporto

$$\frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h^2}$$

resta sempre compreso fra il limite inferiore ed il limite superiore in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ della derivata seconda generalizzata di $F(x)$. Ma la derivata seconda generalizzata di $F(x)$ è (n.° 27) uguale a $S(x)$ in tutto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, e, preso ad arbitrio un $\eta > 0$, possiamo determinare ε in modo che, in tutto $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, primo estremo escluso, sia sempre

$$\underline{S}(x_0+0) - \eta < S(x) < \overline{S}(x_0+0) + \eta.$$

Dunque, se è $x_0 \leq x - h < x + h \leq x_0 + \varepsilon$, risulta

$$\underline{S}(x_0+0) - \eta \leq \frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h^2} \leq \overline{S}(x_0+0) + \eta,$$

e perciò

$$\underline{S}(x_0+0) - \eta \leq \frac{F(x_0+2h) - 2F(x_0+h) + F(x_0)}{h^2} \leq \overline{S}(x_0+0) + \eta,$$

sotto la sola condizione che sia $0 < 2h \leq \varepsilon$. Segue, pertanto,

$$
\begin{aligned}
\underline{S}(x_0+0) - \eta &\leq \underline{\lim}_{h \to +0} \frac{F(x_0+2h) - 2F(x_0+h) + F(x_0)}{h^2} \leq \\
&\leq \overline{\lim}_{h \to +0} \frac{F(x_0+2h) - 2F(x_0+h) + F(x_0)}{h^2} \leq \overline{S}(x_0+0) + \eta.
\end{aligned}
$$

Analogamente, si deduce

$$\underline{S}(x_0 - 0) - \eta \leq \varliminf_{h \to +0} \frac{F(x_0 - 2h) - 2F(x_0 - h) + F(x_0)}{h^2} \leq$$

$$\leq \varlimsup_{h \to +0} \frac{F(x_0 - 2h) - 2F(x_0 - h) + F(x_0)}{h^2} \leq \bar{S}(x_0 - 0) + \eta.$$

Dalla (3) discende dunque la (2).

b) In particolare abbiamo:

Se la serie (1) *è convergente in tutti i punti di* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, *e se la sua somma* $S(x)$ *ha, in* x_0, *una discontinuità di 1ª specie, è*

$$S(x_0) = \frac{1}{2} \{ S(x_0 - 0) + S(x_0 + 0) \} \ (^1).$$

c) Si vede facilmente che il teorema ora dimostrato vale anche se, nei punti di $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, la (1) non è sempre convergente, purchè essa converga in x_0, e purchè, nell'enunciato del teorema, la somma $S(x)$ sia sostituita, nei punti $x \neq x_0$, con i limiti di indeterminazione della serie.

§ 3. Serie di Fourier.

37. - Teorema di P. Du Bois-Reymond-Lebesgue. Serie di Fourier.

Una serie trigonometrica che sia convergente in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, *verso una funzione* $f(x)$ *limitata, e che di più abbia limitati, in tutto* $(0, 2\pi)$, *i suoi limiti di indeterminazione, ha i suoi coefficienti dati dalle formule di Eulero-Fourier del n.° 21* (²).

La funzione $f(x)$, come funzione limite di funzioni continue (le somme parziali della serie trigonometrica) è una funzione

---

(¹) E. W. Hobson, *The theory of functions of a real variable* (Cambridge, 1907, pp. 756-757).

(²) P. du Bois-Reymond, loc. cit. in (¹) a pag. 89; H. Lebesgue, *Sur les séries trigonométriques* (Ann. École Norm. Sup., vol. XX (1903), pp. 453-485) ed anche *Leçons sur les séries trigonom.*, p. 122.

quasi-continua [1]; e poichè è limitata, essa è anche integrabile [2]. Ciò premesso, se

$$(1)\qquad \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \dots \equiv A_0 + A_1 + A_2 + \dots$$

è la serie considerata, la quale per ipotesi converge in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, si ha (n.° 3) $a_n \to 0$, $b_n \to 0$. Riprendiamo ora la solita funzione

$$F(x) = -\sum_1^\infty \frac{A_n}{n^2}$$

e formiamo, come abbiamo già fatto nel n.° 26, l'espressione

$$\frac{\Delta^2 F}{4\alpha^2} = \sum_1^\infty A_n \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n\alpha}\right)^2.$$

La serie del secondo membro è, come quella che dà $F(x)$, uniformemente convergente in tutto $(0, 2\pi)$; e poichè è anch'essa una serie trigonometrica, i suoi coefficienti sono dati (n.° 21) dalle formule di Eulero-Fourier, cioè da

$$(2)\qquad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\Delta^2 F}{4\alpha^2}\, dx, \\[2ex] a_n \left(\dfrac{\operatorname{sen} n\alpha}{n\alpha}\right)^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\Delta^2 F}{4\alpha^2} \cos nx\, dx, \quad b_n \left(\dfrac{\operatorname{sen} n\alpha}{n\alpha}\right)^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\Delta^2 F}{4\alpha^2} \operatorname{sen} nx\, dx. \end{cases}$$

---

[1] Una funzione $f(x)$ dicesi *quasi-continua* in (a, b) (cfr. L. Tonelli, *Sulla nozione di integrale*, Annali di Matematica, T. I (1923), pp. 105-145) se esiste almeno una legge che faccia corrispondere, ad ogni intero positivo n, un plurintervallo Δ_n di (a, b), di lunghezza $< 1:n$, e tale che la $f(x)$ risulti continua quando non si tenga conto dei valori che essa assume nei punti *interni* a Δ_n (vale a dire, *interni* ad un intervallo di Δ_n).

[2] Intendiamo *integrabile* nel senso del Lebesgue. Nel presente libro, intenderemo sempre, salvo esplicito avviso contrario, *l'integrabilità nel senso del Lebesgue.* Rammentiamo che il valore dell'integrale del Lebesgue, su un intervallo (a, b), di una funzione continua, oppure limitata ed avente un numero finito od un'infinità numerabile di discontinuità, coincide con quello dell'integrale classico.

Indichiamo con l ed L i limiti inferiore e superiore, in tutto $(0, 2\pi)$, dei limiti d'indeterminazione della serie trigonometrica data: per ipotesi l ed L sono finiti. In virtù del teorema di Du Bois-Reymond del n.° 26, le derivate seconde generalizzate estreme della $F(x)$ sono, in tutto $(0, 2\pi)$, sempre comprese tra $\left(l - \frac{1}{2}a_0\right) - \lambda$ e $\left(L - \frac{1}{2}a_0\right) + \lambda$, per λ finito e sufficientemente grande; onde, per il teorema di Hölder del n.° 30, $\Delta^2 F : 4\alpha^2$, resta sempre compreso, per ogni $\alpha > 0$ ed ogni x di $(0, 2\pi)$, fra $\left(l - \frac{1}{2}a_0\right) - \lambda$ e $\left(L - \frac{1}{2}a_0\right) + \lambda$. Se dunque nelle formule (2) passiamo al limite per $\alpha \to 0$, possiamo applicare il teorema d'integrazione per serie di Arzelà-Lebesgue ed avere così (tenendo presente che, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, è, per il teorema di Riemann del n.° 27, $\frac{\Delta^2 F}{4\alpha^2} \to f(x) - \frac{1}{2}a_0$):

$$(3) \quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, nx\,dx, \end{cases}$$

che sono appunto le formule di Eulero-Fourier.

La serie (1), *per il solo fatto di avere i coefficienti dati dalle* (3) (*nelle quali l'integrazione si intende nel senso del Lebesgue*), *si dice serie di Fourier della funzione* $f(x)$ (e ciò indipendentemente dalla convergenza della serie verso la $f(x)$). *I numeri* a_n *e* b_n, *definiti dalle* (3), *diconsi coefficienti di Eulero-Fourier della* $f(x)$.

Osservazione. — Supponendo che a_n e b_n siano limitati, al crescere di n all'infinito, nell'enunciato precedente si può sostituire, alla convergenza ordinaria della serie (1), la convergenza secondo Riemann, definita nel n.° 27. Ciò risulta immediatamente dalla stessa dimostrazione data più sopra.

38. - Teorema di De la Vallée Poussin.

a) Il teorema del n.° preced. non è che un caso particolare del seguente:

Se una serie trigonometrica converge, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, *verso una funzione* $f(x)$ *integrabile, e se, di più, i suoi limiti* *d' indeterminazione sono entrambi finiti in tutto* $(0, 2\pi)$, *ad eccezione al più dei punti di un insieme E non avente la potenza del continuo, essa è la serie di Fourier della* $f(x)$ (¹).

Questo teorema rientra a sua volta, come caso particolare, nella seguente proposizione generale, dovuta a De la Vallée Poussin (²):

Data una serie trigonometrica a coefficienti tendenti allo zero, se i suoi limiti d' indeterminazione sono entrambi finiti in tutto $(0, 2\pi)$, *ad eccezione al più dei punti di un insieme non avente la potenza del continuo, e di più sono integrabili in tutto* $(0, 2\pi)$, *essa serie è la serie di Fourier della sua somma generalizzata di Riemann.*

b) Per dimostrare questa proposizione dobbiamo richiamare un risultato, dovuto anch' esso a De la Vallée Poussin (³), relativo alla determinazione di una funzione continua mediante una sua derivata seconda generalizzata estrema:

Se $\Phi(x)$ *è una funzione continua in un intervallo* (a, b); *se esiste una funzione* $\varphi(x)$, *non mai maggiore della derivata seconda generalizzata superiore della* $\Phi(x)$ *e non mai minore di quella inferiore, la quale funzione sia finita in tutto* (a, b), *ad eccezione al più dei punti di un insieme E non avente la potenza del continuo, e sia, di più, integrabile in tutto* (a, b); *si ha, per ogni x di* (a, b),

$$\Phi(x) = \int_a^x dx \int_a^x \varphi(x)\,dx + px + q \tag{1}$$

(*con p e q costanti*), *purchè nei punti di E la* $\Phi(x)$ *verifichi la condizione* (*C*) *del n.° 31.*

Ed infatti, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, indichiamo con $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ due funzioni continue in tutto (a, b) e tali che, in tutto

---

(¹) Ch. J. de la Vallée Poussin, loc. cit. in (¹) a pag. 97.

Per tutte le proposizioni del n.° presente e di quello seguente, può ripetersi l'Osservazione fatta nella nota (²) a piè di p. 105.

(²) Ibidem.

(³) Ibidem; Ch. J. de la Vallée Poussin, *Cours d'Analyse.* (T. I 3ème édit. (1914), p. 290). Per l'estensione del teorema del de la Vallée Poussin alle funzioni integrabili nel senso del Denjoy, vedi: P. Nalli, *Sulle derivate seconde generalizzate ecc.* (Giornale di Matematiche di Battaglini, Vol. LIII (1915), pp. 169-177).

questo intervallo, sia sempre

$$\int_a^x \varphi(x)dx < \psi_1(x) < \int_a^x \varphi(x)dx + \varepsilon,$$

$$\int_a^x \varphi(x)dx - \varepsilon < \psi_2(x) < \int_a^x \varphi(x)dx,$$

e che, inoltre, in ogni punto di (a, b) in cui la $\varphi(x)$ è finita, i quattro numeri derivati di $\psi_1(x)$ siano tutti maggiori di $\varphi(x)$ ed i quattro numeri derivati di $\psi_2(x)$ siano tutti minori di $\varphi(x)$ ([1]). Posto

$$y(x) = \Phi(x) - \int_a^x dx \int_a^x \varphi(x)dx,$$

$$y_1(x) = \Phi(x) - \int_a^x \psi_1(x)dx,$$

$$y_2(x) = \Phi(x) - \int_a^x \psi_2(x)dx,$$

abbiamo, in tutto (a, b),

$$y(x) - \varepsilon \cdot (x - a) \leq y_1(x) \leq y(x),$$
$$y(x) \leq y_2(x) \leq y(x) + \varepsilon \cdot (x - a),$$

ed inoltre $y(a) = y_1(a) = y_2(a)$. Di più, la derivata seconda generalizzata inferiore della $y_1(x)$ è sempre negativa, esclusi al più i punti di E, perchè le due derivate seconde generalizzate di $\int_a^x \psi_1(x)dx$ sono entrambe non minori del più piccolo dei numeri derivati della $\psi_1(x)$ ([2]) e sono quindi maggiori di $\varphi(x)$. Pertanto, per il teorema del n.° 31, f), la $y_1(x)$ è concava verso il basso. Per ragione analoga, la $y_2(x)$ è concava verso l'alto. Perciò, se indi-

---

([1]) L'esistenza di funzioni come la $\psi_1(x)$ e la $\psi_2(x)$ trovasi dimostrata in: Ch. J. de la Vallée Poussin, *Cours d'Analyse*, T. I (3ème édit.) (1914), p. 270.

([2]) Ciò risulta dalla (2) del n.° 25.

chiamo con A e B i punti $[a, y_1(a)]$ e $[b, y_1(b)]$ e con B' il punto $[b, y_2(b)]$, abbiamo, per le ultime disuguaglianze scritte, che la curva d'equazione $y = y(x)$ è tutta compresa fra le corde AB ed AB'. E siccome è $|y_2(b) - y_1(b)| < 2\varepsilon(b - a)$, ed ε è arbitrario, ne viene che la detta curva è un segmento rettilineo. Con ciò la (1) è provata [1].

Dalla (1) segue subito che la funzione $\Phi(x)$ ha ovunque, in (a, b), la derivata prima continua (anzi, assolutamente continua), e che la sua derivata seconda $\Phi''(x)$ esiste finita ed uguale alla $\varphi(x)$, in quasi-tutto (a, b). Perciò (n.° 25) la $\Phi(x)$ ha la derivata seconda generalizzata $\mathfrak{D}^2\Phi(x)$ finita ed uguale alla $\varphi(x)$ in quasi-tutto (a, b), ed è

$$\Phi(x) = \int_a^x dx \int_a^x \mathfrak{D}^2\Phi(x)dx + px + q \quad [2]. \tag{2}$$

c) Ciò premesso, veniamo alla dimostrazione del teorema generale del De la Vallée Poussin ed osserviamo che, indicata con

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{3}$$

la serie data, in tutti i punti di $(0, 2\pi)$ nei quali i limiti d'indeterminazione della (3) sono entrambi finiti, risultano pure finite (n.° 26) le derivate seconde generalizzate estreme della funzione

$$F(x) = -\sum_1^\infty \frac{a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx}{n^2}. \tag{4}$$

E siccome i limiti d'indeterminazione della (3) sono, per ipotesi, integrabili in tutto $(0, 2\pi)$, ne viene (sempre per il n.° 26) che tali sono pure le derivate seconde indicate. Se, perciò, facciamo uguale ad una delle derivate seconde generalizzate estreme della $F(x)$ la funzione $\varphi(x)$ del precedente enunciato, e se teniamo conto del n.° 33, abbiamo, che la $F(x)$ ammette,

---

(1) Per il caso in cui la $\varphi(x)$ sia integrabile soltanto nel senso del Denjoy, vedi: P. Nalli, loc. cit. in (3) a pag. 111.

(2) Nei punti in cui la $\mathfrak{D}^2\Phi$ non esiste finita, si porrà, in sua vece, sotto il segno di integrazione, un valore arbitrario, per esempio lo zero.

finita in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, la derivata seconda generalizzata, che questa $\mathfrak{D}^2F(x)$ è integrabile in tutto $(0, 2\pi)$ e che per essa vale la (2).

La serie del secondo membro di (4) è uniformemente convergente in tutto $(0, 2\pi)$; per il n.° 21, i suoi coefficienti sono dunque dati dalle formule di Eulero-Fourier:

$$-\frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\, dx, \quad -\frac{b_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\,\mathrm{sen}\, nx\, dx,$$

$$(n = 1,\ 2, \dots).$$

Ponendo al posto della $F(x)$ l'espressione ottenuta applicando la (2), ed eseguendo due successive integrazioni per parti, abbiamo dalle formule ora scritte:

$$-\frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{\pi n^2}\int_0^{2\pi} \mathfrak{D}^2F(x)dx - \frac{1}{\pi n^2}\int_0^{2\pi} \mathfrak{D}^2F(x)\cos nx\, dx,$$

$$-\frac{b_n}{n^2} = -\frac{1}{\pi n}\left\{\int_0^{2\pi} dx\int_0^{x} \mathfrak{D}^2F(x)\, dx + 2\pi p\right\} - \frac{1}{\pi n^2}\int_0^{2\pi} \mathfrak{D}^2F(x)\,\mathrm{sen}\, nx\, dx.$$

Ma la $F(x)$ è, per la (4), una funzione periodica, di periodo 2π, ed essa ha, per la (2), ovunque la derivata prima continua ed uguale a

$$\int_0^{x} \mathfrak{D}^2F(x)dx + p.$$

Questa derivata deve essere periodica come la $F(x)$, ed è perciò

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{D}^2F(x)dx = 0. \tag{5}$$

E poichè, per la periodicità della $F(x)$, è

$$\int_0^{2\pi} dx\int_0^{x} \mathfrak{D}^2F(x)dx + 2\pi p = 0,$$

le formule sopra scritte dànno

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{D}^2 F(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \mathfrak{D}^2 F(x) + \frac{1}{2} a_0 \right\} \cos nx \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{D}^2 F(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \mathfrak{D}^2 F(x) + \frac{1}{2} a_0 \right\} \operatorname{sen} nx \, dx,$$

per ogni $n = 1, 2, \ldots$. La (5) dà poi

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \mathfrak{D}^2 F(x) + \frac{1}{2} a_0 \right\} dx,$$

e resta così dimostrato che la (3) è la serie di Fourier della funzione $\mathfrak{D}^2 F(x) + \frac{1}{2} a_0$, ossia (n.° 27) della sua somma generalizzata di Riemann, la quale, per quanto sopra si è detto, esiste finita in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, ed è integrabile in tutto tale intervallo.

Possiamo anche dire che la (3) è la serie di Fourier della derivata seconda della somma della funzione $F(x)$, definita dalla (4), e di $a_0 x^2 : 4$. Ed infatti, da quanto precede risulta che la $F''(x)$ esiste finita ed uguale alla $\mathfrak{D}^2 F(x)$ in quasi-tutto $(0, 2\pi)$ e perciò integrabile in tutto l'intervallo indicato.

Osservazione I. — Si vedrà in seguito (Cap. VI) che la proposizione qui dimostrata può ottenersi anche col ragionamento usato nel n.° 21.

Osservazione II. — La dimostrazione fatta sopra prova anche il seguente teorema [1]:

Data una serie trigonometrica a coefficienti tendenti allo zero, se, sommata col procedimento di Riemann del n.° 27, essa ha dei limiti d'indeterminazione [2] *che risultano infiniti ed uguali al più in un insieme di punti non avente la potenza del continuo, e sono tali che la funzione, uguale a quello di*

---

[1] Loc. cit. in [1] a pag. 97,

[2] Questi limiti d'indeterminazione sono le derivate seconde generalizzate estreme della funzione $\frac{a_0}{4} x^2 + F(x)$, la $F(x)$ essendo definita dalla (4).

questi limiti che ha il minor valore assoluto, sia integrabile in tutto $(0, 2\pi)$; *allora tale serie trigonometrica è la serie di Fourier della sua somma generalizzata di Riemann.*

39. - Generalizzazione del precedente risultato.

a) Per generalizzare quanto abbiamo stabilito nel n.° precedente, dimostriamo, in primo luogo, che:

Se $\Phi(x)$ *è una funzione continua in un intervallo* (a, b); *se, in tutto* (a, b), *eccettuati al più i punti di un insieme* E *non avente la potenza del continuo, è* $\overline{\mathfrak{D}}^2\Phi \geq 0$; *se, nei punti di* E, *la* Φ *soddisfa alla condizione* (*C*) *del n.° 31, c*); *allora esistono, finite ed uguali, in quasi-tutto* (a, b), *la* Φ'' *e la* $\mathfrak{D}^2\Phi$, *ed esse sono integrabili in ogni intervallo* (a', b') *interno ad* (a, b) $(a < a' < b' < b)$ (¹).

Infatti, in virtù del teorema del n.° 31, *f*), la funzione $\Phi(x)$ è concava verso l'alto; perciò, se x è un punto di (a, b) distinto da b, e se è $x < x' < x'' \leq b$, si ha

$$\frac{\Phi(x') - \Phi(x)}{x' - x} \leq \frac{\Phi(x'') - \Phi(x)}{x'' - x},$$

e pertanto, al tendere di x' ad x, per valori maggiori, il primo membro di questa disuguaglianza va continuamente decrescendo od almeno non crescendo. Dunque esiste la derivata destra della $\Phi(x)$ in x. Ma se è $a \leq x_1 < x_2 < x_2' \leq b$, la derivata a destra della $\Phi(x)$ in x_1 è $\leq \frac{\Phi(x_2) - \Phi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{\Phi(x_2') - \Phi(x_2)}{x_2' - x_2}$, per la concavità verso l'alto della $\Phi(x)$. Pertanto, la derivata a destra della $\Phi(x)$ in x_1 è non maggiore di quella in x_2, vale a dire, la derivata a destra della $\Phi(x)$ è una funzione non decrescente in tutto (a, b). Analogamente si vede che esiste sempre la derivata a sinistra (eccettuato il punto a) la quale è anch'essa una funzione non decrescente. E siccome ogni funzione monotona in (a, b) ammette, in quasi-tutto l'intervallo, la derivata prima finita, ed integrabile (nel senso del Lebesgue) in ogni intervallo in cui la funzione monotona è limitata, ne viene che la funzione $\Phi(x)$ ammette finita, in quasi-tutto (a, b), la deri-

---

(¹) Cfr. H. Steinhaus, *Alcune proprietà delle serie trigonometriche e delle serie di Fourier* (in polacco), (Rozprawy Akad. Umiejetnosci, Cracovia, Vol. 56 (1915), pp. 175-225).

vata seconda $F''(x)$ e che questa è integrabile in ogni intervallo (a', b') interno ad (a, b). E poichè, in ogni punto interno ad (a, b) in cui esiste finita la $\Phi''(x)$, esiste anche finita, e ad essa uguale, la derivata seconda generalizzata $\mathfrak{D}^2\Phi$ [1], la proposizione enunciata è dimostrata.

b) Passiamo ora a dimostrare che:

Data una serie trigonometrica a coefficienti tendenti allo zero, se, sommata col procedimento di Riemann del n.° 27, essa ha i limiti d'indeterminazione ambedue infiniti ed uguali al più in un insieme E non avente la potenza del continuo, e se il più grande di questi limiti è sempre maggiore od uguale ad una funzione $\varphi(x)$, *finita in ogni punto non appartenente ad E, ed integrabile in tutto* $(0, 2\pi)$; *allora la serie considerata è la serie di Fourier della sua somma generalizzata di Riemann.*

Sia

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{1}$$

la serie data e poniamo, come al solito,

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx}{n^2}.$$

Indichiamo con $\psi(x)$ una funzione continua ed a variazione limitata in $(0, 2\pi)$ e tale che i suoi numeri derivati siano, in ogni punto non appartenente ad E, tutti minori di $\varphi(x)$ [2]; e poniamo

$$\Psi(x) = \int_0^x \psi(x)dx,$$

$$G(x) = \frac{1}{4}a_0x^2 + F(x) - \Psi(x).$$

---

[1] Ciò risulta dalla (2) del n.° 25, nella quale ora dovranno porsi, in luogo delle $f'(x+\theta h)$ e $f'(x-\theta h)$, dei valori intermedi fra le derivate sinistre e destre.

[2] Si può prendere per $\psi(x)$ la funzione *minorante* dell'integrale $\int_a^x \varphi(x)dx$ costruita dal DE LA VALLÉE POUSSIN alle pp. 270-271 del suo *Cours d'Analyse*, T. I, 3ème édit. Tale funzione è poi a variazione limitata, come risulta da quanto è detto dal DE LA VALLÉE POUSSIN alla pag. 272.

Abbiamo, per la derivata seconda generalizzata superiore $\overline{\mathfrak{D}}^2 G(x)$ della $G(x)$,

$$\overline{\mathfrak{D}}^2 G(x) \geq \frac{1}{2} a_0 + \overline{\mathfrak{D}}^2 F(x) - \overline{\mathfrak{D}}^2 \Psi(x).$$

Ora, siccome il limite superiore d'indeterminazione della (1), quando essa venga sommata col procedimento di Riemann del n.° 27, non è altro che $\frac{1}{2} a_0 + \overline{\mathfrak{D}}^2 F(x)$, per le ipotesi fatte si ha che, in ogni punto di $(0, 2\pi)$ non appartenente ad E, è

$$\frac{1}{2} a_0 + \overline{\mathfrak{D}}^2 F(x) \geq \varphi(x).$$

Siccome poi la funzione $\Psi(x)$ ha ovunque derivata continua, la quale ha in tutto $(0, 2\pi)$, eccettuati al più i punti di E, tutti e quattro i numeri derivati minori di $\varphi(x)$, abbiamo che, ad eccezione dei punti detti, è

$$\overline{\mathfrak{D}}^2 \Psi(x) < \varphi(x) \ (^1).$$

Esclusi dunque i punti di E, è

$$\overline{\mathfrak{D}}^2 G(x) > \varphi(x) - \varphi(x) = 0,$$

e pertanto, per la proposizione dimostrata in $a)$, esistono finite ed uguali, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, le $G''(x)$ e $\mathfrak{D}^2 G(x)$, ed esse sono integrabili in ogni intervallo interno a $(0, 2\pi)$. Ma la $\Psi(x)$, avendo la derivata prima continua ed a variazione limitata, ha, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, le derivate $\Psi''(x)$ e $\mathfrak{D}^2 \Psi(x)$ finite ed uguali, che risultano integrabili in tutto $(0, 2\pi)$.

Perciò la funzione $\frac{1}{4} a_0 x^2 + F(x) = G(x) - \Psi(x)$ ha anch'essa, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, la derivata seconda $\frac{1}{2} a_0 + F''(x)$ e la derivata seconda generalizzata $\frac{1}{2} a_0 + \mathfrak{D}^2 F(x)$, ambedue finite ed uguali, e queste derivate risultano integrabili in ogni intervallo interno a $(0, 2\pi)$.

(¹) Per la (2) del n.° 25, le derivate seconde generalizzate estreme della $\Psi(x)$ sono ambedue comprese fra il minimo ed il massimo dei numeri derivati di $\Psi'(x)$.

Se, invece di ragionare sull'intervallo $(0, 2\pi)$, avessimo ragionato sull'intervallo $(-\pi, \pi)$, avremmo ottenuto l'integrabilità delle due derivate ora considerate in ogni intervallo interno a $(-\pi, \pi)$; concludiamo perciò che $\frac{1}{2}a_0 + F''(x)$ ed $\frac{1}{2}a_0 + \mathfrak{D}^2 F(x)$ sono integrabili in tutto $(0, 2\pi)$, e, applicando il teorema del n.° 38, Osserv. II, che (1) è la serie di Fourier della sua somma generalizzata di Riemann.

c) Come caso particolare della proposizione b), si ha:

Se una serie trigonometrica è ovunque convergente (esclusi al più i punti di un insieme numerabile) e se la sua somma è sempre maggiore od uguale ad una funzione integrabile in $(0, 2\pi)$, *allora la serie considerata è la serie di Fourier della sua somma* [1].

Più particolarmente ancora:

Se una serie trigonometrica è ovunque convergente (esclusi al più i punti di un insieme numerabile) e se la sua somma è sempre maggiore od uguale ad un numero fisso, allora tale serie è la serie di Fourier della sua somma [2].

OSSERVAZIONE I. — Esistono delle serie trigonometriche ovunque convergenti e per le quali i coefficienti non sono dati dalle formule di Eulero-Fourier (2) del n.° 21, pur intendendo di considerare l'integrale nel senso generale del Lebesgue od anche in quello ancora più largo del Denjoy.

Un esempio di tali serie è dato da

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{\log n} \quad [3].$$

Questa serie è ovunque convergente (n.° 14), e, in ogni intervallo *interno* a $(0, 2\pi)$, converge uniformemente; nell'intorno dei punti 0 e 2π essa, invece, *non* converge uniformemente (n.° 17). La funzione $f(x)$, somma della serie considerata, è perciò una funzione continua in ogni punto in-

---

(1) Questo teorema è dovuto al BANACH. Cfr. A. ZYGMUND, *Sur les séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson* (Math. Zeitschrift, Bd. 25 (1926), pp. 274-290, ed in particolare p. 278).

(2) Questo teorema fu dato da H. STEINHAUS (loc. cit. in (1) a pag. 116).

(3) P. FATOU, *Sur le développement en séries trigonométriques des fonctions non intégrables* (Comptes rendus, t. 142 (1906), pp. 765-767).

terno a $(0, 2\pi)$: ed invece è discontinua nei punti 0 e 2π, perchè, come ora mostreremo, essa è illimitata nell'intorno di tali punti. Consideriamo, infatti, l'integrale della $f(x)$ nell'intervallo (ε, π), dove è $0 < \varepsilon < \pi$. Per la convergenza uniforme già notata in (ε, π), abbiamo

$$\int_\varepsilon^\pi f(x)dx = \sum_2^\infty \frac{1}{\log n} \int_\varepsilon^\pi \operatorname{sen} nx\, dx =$$

$$= \sum_2^\infty \frac{\cos n\varepsilon}{n \log n} + \sum_2^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n \log n}.$$

Se facciamo $\varepsilon = \varepsilon_m = \frac{\pi}{8m}$, con m intero positivo, abbiamo

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{\cos n\varepsilon_m}{n \log n} > \sum_2^{12m} \frac{\cos n\varepsilon_m}{n \log n};$$

e poichè è

$$\sum_{m+1}^{7m-1} \frac{\cos n\varepsilon_m}{n \log n} > 0,$$

$$\sum_{7m}^{12m} \cdots > 5 \sum_{7m}^{8m} \cdots > -\frac{5}{7} \sum_2^m \cdots - \frac{10}{8m-1},$$

otteniamo

$$\sum_2^\infty \frac{\cos n\varepsilon_m}{n \log n} > \frac{2}{7} \sum_2^m \frac{\cos n\varepsilon_m}{n \log n} - \frac{10}{8m-1}$$

$$> \frac{\sqrt{2}}{7} \sum_2^m \frac{1}{n \log n} - \frac{10}{8m-1}.$$

Siccome poi la serie $\sum \frac{1}{n \log n}$ è divergente, preso un numero k positivo, comunque grande, per tutti gli m maggiori di un certo m_1, si ha

$$\sum_2^\infty \frac{\cos n\varepsilon_m}{n \log n} > k.$$

È dunque

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\varepsilon_m}^\pi f(x)dx = +\infty.$$

Di qui segue che la $f(x)$ è illimitata nell'intorno del punto $x = 0$ (perchè, se fosse limitata, il limite ora calcolato dovrebbe essere finito), ed inoltre, che in tale intorno essa non è integrabile nel senso del Lebesgue e neppure nel senso del Denjoy. Altrettanto può dirsi per l'intorno di $x = 2\pi$. E poichè la $f(x)$ non è integrabile in $(0, 2\pi)$, i coefficienti della serie considerata non possono essere dati dalle formule (2) del n.° 21 [1]. Vedremo, in seguito, che tali coefficienti non possono essere dati dalle formule indicate neppure se in esse si sostituisce la $f(x)$ con un' altra funzione integrabile.

---

[1] Le formule di Eulero-Fourier dànno, per $n = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

e questa formola richiede l'integrabilità della $f(x)$.

Vogliamo aggiungere qui un'osservazione. Supposto $0 < \varepsilon < \pi$, abbiamo, per m intero ≥ 2,

$$\int_\varepsilon^\pi f(x) \operatorname{sen} mx\, dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \int_\varepsilon^\pi \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \int_\varepsilon^\pi \{ \cos (n-m)x - \cos (n+m)x \}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\pi - \varepsilon}{\log m} - \sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{\operatorname{sen} (n-m)\varepsilon}{(n-m)\log n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} (n+m)\varepsilon}{(n+m)\log n} \right\}$$

dove $\sum\limits_{n=2}^{\infty}{}'$ indica la somma di tutti i termini che si ottengono facendo variare n da 2 all' ∞ ed escludendo $n = m$. Per il teorema del n.° 16, a), le due serie qui scritte convergono uniformemente in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$ e vi rappresentano perciò due funzioni continue di ε. E siccome, nel punto $\varepsilon = 0$, esse hanno ambedue per somma lo zero, ne viene che, per $\varepsilon \to 0$, esiste il limite dell' integrale da cui siamo partiti ed è

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\pi f(x) \operatorname{sen} mx\, dx = \frac{\pi}{2 \log m}.$$

Si ha perciò anche, per $m \geq 2$,

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \int_{\varepsilon_1}^{2\pi - \varepsilon_2} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx = \frac{\pi}{\log m}.$$

Per $m = 1$, si ha, invece,

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \int_{\varepsilon_1}^{2\pi - \varepsilon_2} f(x) \operatorname{sen} x\, dx = 0.$$

Queste formule corrispondono alla terza delle (3) del n.° 37.

Osservazione II. — Data una serie trigonometrica, convergente in tutto $(0, 2\pi)$, se la sua somma $s(x)$ risulta sempre maggiore od uguale ad una funzione integrabile, le formule di Eulero-Fourier dànno il modo di dedurre dalla $s(x)$ tutti i coefficienti della serie. Il problema di dedurre tutti i coefficienti della serie dalla sua somma $s(x)$, supposta ovunque esistente e finita, è stato risoluto in modo generale da A. Denjoy [1].

40. - Considerazioni sull'esistenza dello sviluppo in serie trigonometrica.

I teoremi dei n.i precedenti mostrano che, se una funzione $f(x)$, data in $(0, 2\pi)$ e soddisfacente ad opportune condizioni, è ivi sviluppabile in serie trigonometrica convergente, tale sviluppo è unico ed i suoi coefficienti sono dati dalle formule di Eulero-Fourier, vale a dire lo sviluppo è la serie di Fourier della $f(x)$. Resta però da trattare la seguente questione: sotto quali condizioni la $f(x)$ è effettivamente sviluppabile in serie trigonometrica?

Il teorema di Riemann del n.o 28 non risponde completamente a tale domanda: 1°) perchè in esso si considera la sviluppabilità in serie trigonometrica sommabile, non col metodo ordinario, ma col metodo generalizzato del Riemann stesso; 2°) perchè le condizioni che esso dà non si riferiscono unicamente alla funzione $f(x)$.

La questione ora indicata non è dunque risolta da quanto si è detto in precedenza. Essa verrà studiata in ciò che segue.

41. - Un particolare sistema di infinite equazioni.

Consideriamo il sistema di infinite equazioni

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} y(x) \cos nx \, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} y(x) \operatorname{sen} nx \, dx = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

---

[1] *Sur un calcul de totalisations à deux degrés* (Comptes rendus, t. 172 (1921), pp. 653-655); *Sur la détermination des fonctions présentant certain caractère complexe de résolubilité* (Ibidem, pp. 833-835); *Caractères de certaines fonctions intégrables et opérations correspondantes* (Ibidem, pagine 903-906); *Sur un mode d'intégration progressif et les caractères d'intégrabilité correspondants* (Ibidem, t. 173 (1921), pp. 127-129); *Calcul des coefficients d'une série trigonométrique convergente quelconque dont la somme est donnée* (Ibidem, t. 172, pp. 1218-1221).

e dimostriamo che, ***nel campo delle funzioni $y(x)$ integrabili in $(0, 2\pi)$, questo sistema ammette soltanto soluzioni nulle in quasi-tutto*** $(0, 2\pi)$ (¹).

Ogni funzione nulla in quasi-tutto $(0, 2\pi)$ è manifestamente una soluzione; dimostriamo che non vi possono essere altre soluzioni nel campo indicato.

Cominciamo col mostrare che, se vi è una soluzione $y_1(x)$ integrabile, non nulla in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, vi è anche una soluzione continua $y_2(x)$ non identicamente nulla. Ed infatti, posto

$$y_2(x) = c + \int_0^x y_1(x)dx,$$

con

$$c = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx \int_0^x y_1(x)dx,$$

abbiamo, in primo luogo,

$$\int_0^{2\pi} y_2(x)dx = 0.$$

Abbiamo poi $y_2(0) = c$ e $y_2(2\pi) = c + \int_0^{2\pi} y_1(x)dx = c$, applicando la prima delle (1) (in cui si faccia $n = 0$). Dunque, integrando per parti, otteniamo

$$\int_0^{2\pi} y_1(x)\cos nx\,dx = [y_2(x)\cos nx]_0^{2\pi} + n\int_0^{2\pi} y_2(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx =$$
$$= n\int_0^{2\pi} y_2(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx,$$

$$\int_0^{2\pi} y_1(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx = [y_2(x)\,\mathrm{sen}\,nx]_0^{2\pi} - n\int_0^{2\pi} y_2(x)\cos nx\,dx =$$
$$= -n\int_0^{2\pi} y_2(x)\cos nx\,dx,$$

(¹) Questa proposizione vale anche se gli integrali delle (1) si intendono nel senso più generale del DENJOY.

e ciò prova che la $y_2(x)$ è, come la $y_1(x)$, una soluzione del sistema (1).

La $y_2(x)$, che è continua, non è poi identicamente nulla, perchè se lo fosse, sarebbe identicamente nulla anche la sua derivata, la quale è uguale alla $y_1(x)$ in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, e ciò contraddirebbe all' ipotesi fatta che la $y_1(x)$ non sia nulla in quasi-tutto $(0, 2\pi)$.

Mostriamo ora che non può esistere una soluzione $y(x)$, di (1), continua e non identicamente nulla.

Sia (a, b) un intervallo di $(0, 2\pi)$ in cui la $y(x)$ conserva un segno costante ed è $\neq 0$. Diremo $m > 0$ il suo minimo modulo in (a, b); diremo poi M il suo massimo modulo in tutto $(0, 2\pi)$. Poniamo

$$\varphi(x) = 1 + \cos\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \cos\frac{a-b}{2},$$

e consideriamo, per n intero > 0, l' espressione $\varphi^n(x)$. Si ha $\varphi(x) > 1$ in ogni punto interno ad (a, b), e $|\varphi(x)| \leq 1$ in tutti gli altri punti di $(0, 2\pi)$. Dunque, se (α, β) è un intervallo interno ad (a, b), $(a < \alpha < \beta < b)$, in (α, β) la $\varphi(x)$ resta maggiore di un numero $l > 1$. È pertanto

$$\int_a^b y(x)\varphi^n(x)dx > \int_\alpha^\beta y(x)\varphi^n(x)dx > ml^n(\beta - \alpha),$$

e perciò, per $n \to \infty$,

$$\int_a^b y(x)\varphi^n(x)dx \to +\infty.$$

Fuori di (a, b), è $|\varphi^n(x)| \leq 1$; ne viene quindi

$$\left|\int_0^a y(x)\varphi^n(x)dx\right| + \left|\int_b^{2\pi} y(x)\varphi^n(x)dx\right| \leq 2\pi M.$$

Segue dunque, per $n \to \infty$,

$$\left|\int_0^{2\pi} y(x)\varphi^n(x)dx\right| \to +\infty. \tag{2}$$

Ma se sviluppiamo $\varphi^n(x)$, otteniamo un polinomio in $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, e quindi una funzione lineare di $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$,....,

$\cos nx$, $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} 2x, \dots,$ $\operatorname{sen} nx$:

$$\varphi^n(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \dots + c_n \cos nx +$$
$$+ c_1' \operatorname{sen} x + c_2' \operatorname{sen} 2x + \dots + c_n' \operatorname{sen} nx,$$

onde

$$\int_0^{2\pi} y(x)\varphi^n(x)dx = \sum_0^n c_r \int_0^{2\pi} y(x) \cos rx\, dx + \sum_1^n c_r' \int_0^{2\pi} y(x) \operatorname{sen} rx\, dx,$$

e tutti i termini di queste somme sono nulli, perchè la $y(x)$ è supposta soluzione del sistema (1). Non è dunque possibile che valga la (2) [1].

42. - Esistenza dello sviluppo in serie di Fourier convergente.

a) Se $f(x)$ è una funzione continua e periodica (di periodo 2π) con derivata (che, in un numero finito di punti, può anche mancare) a variazione limitata, il suo sviluppo in serie di Fourier è uniformemente convergente verso di essa, in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$.

I coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier della $f(x)$ sono dati da

$$(1) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

ed anche, per $n > 0$, integrando per parti e tenendo conto della periodicità della $f(x)$, da

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f'(x) \operatorname{sen} nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f'(x) \cos nx\, dx.$$

Ma, per essere $f'(x)$ a variazione limitata, si ha, in virtù del n.° 22,

$$\left|\int_0^{2\pi} f'(x) \operatorname{sen} nx\, dx\right| < \frac{c}{n}, \quad \left|\int_0^{2\pi} f'(x) \cos nx\, dx\right| < \frac{c}{n},$$

[1] Cfr., per la dimostrazione qui data, L. Tonelli, *Sulla chiusura del sistema di funzioni di Fourier* (Bollettino dell'Unione Matem. Italiana, Anno VI (1927), pp. 123-126).

e pertanto

$$|a_n| < \frac{c}{n^2\pi}, \quad |b_n| < \frac{c}{n^2\pi}.$$

La serie

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

è dunque assolutamente convergente in $(0, 2\pi)$, avendosi

$$\frac{1}{2}|a_0| + \sum_1^\infty |a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx| < \frac{1}{2}|a_0| + \frac{2c}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2};$$

essa è perciò anche uniformemente convergente in tutto $(0, 2\pi)$. Se ne indichiamo con $S(x)$ la somma, $S(x)$ sarà una funzione continua e periodica, e, per il teorema del n.° 21, si avrà

$$(2) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x) \operatorname{sen} nx\, dx.$$

Dal confronto delle (1) e (2) si ricava:

$$\int_0^{2\pi}[f(x) - S(x)]\cos nx\, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi}[f(x) - S(x)] \operatorname{sen} nx\, dx = 0,$$

per $n = 0, 1, 2....$, e quindi (n.° preced.) $f(x) \equiv S(x)$.

È dunque

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = f(x),$$

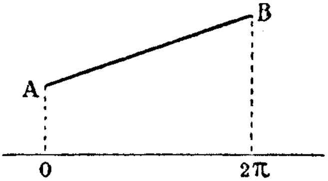
e la convergenza della serie verso $f(x)$ è uniforme in tutto l' intervallo $(0, 2\pi)$ [1].

b) *Se la $f(x)$ è continua (ma non periodica) in tutto $(0, 2\pi)$ ed ha derivata (che, in un numero finito di punti, può anche mancare) a variazione limitata, il suo sviluppo in serie di Fourier converge verso la $f(x)$ in tutto $(0, 2\pi)$ eccettuati i punti 0 e 2π, in cui converge verso il valore $\dfrac{f(+0) + f(2\pi - 0)}{2}$; e la convergenza è uniforme in ogni intervallo completamente interno a $(0, 2\pi)$.*

---

[1] Il metodo qui usato risale a S. D. Poisson (*Théorie mathématique de la chaleur*, p. 185) ed a W. R. Hamilton (*On fluctuating functions.* Trans. Irish. Acad., Vol. XIX (1843), pp. 264-321; in particolare, p. 319).

Per dimostrare questa proposizione, osserviamo dapprima che, se si ha una funzione $\varphi(x)$, definita in $(0, 2\pi)$, che vari linearmente in tutto $(0, 2\pi)$, che cioè rappresenti l'ordinata di un segmento AB in tutto $(0, 2\pi)$, tale funzione ha uno sviluppo in serie di Fourier convergente in tutto $(0, 2\pi)$, il quale sviluppo converge uniformemente verso la $\varphi(x)$ in ogni intervallo completamente *interno* a $(0, 2\pi)$, e nei punti estremi 0 e 2π converge verso $\frac{\varphi(0)+\varphi(2\pi)}{2}$. Infatti è, per $0 \leq x \leq 2\pi$,



$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi} x$$

ed i coefficienti di Eulero-Fourier della $\varphi(x)$ sono:

$$a_0 = \varphi(0) + \varphi(2\pi),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx = \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi^2} \left[\left(x \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \right)_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \, dx \right] = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x) \operatorname{sen} nx \, dx =$$

$$= \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi^2} \left[- \left(x \frac{\cos nx}{n} \right)_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx \right] = \frac{\varphi(0) - \varphi(2\pi)}{n\pi}.$$

La serie di Fourier della $\varphi(x)$ è dunque

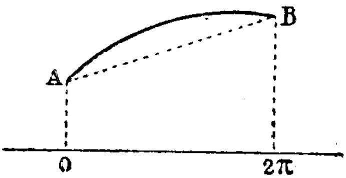
$$\frac{\varphi(0) + \varphi(2\pi)}{2} + \frac{\varphi(0) - \varphi(2\pi)}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} nx}{n}, \tag{3}$$

e questa serie (n.° 20) è uniformemente convergente in ogni intervallo completamente interno a $(0, 2\pi)$ ed ha per somma

$$\varphi(0) + \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi} x = \varphi(x).$$

Nei punti 0 e 2π, la serie di Fourier considerata ha per somma $\frac{\varphi(0)+\varphi(2\pi)}{2}$, come appunto avevamo affermato.

Ciò premesso, chiamando A e B i punti della curva rappresentata da $y=f(x)$, corrispondenti ad $x=0$ e $x=2\pi$, consideriamo la corda AB ed indichiamo con $\varphi(x)$ la funzione che ne rappresenta l'ordinata per ogni x di $(0, 2\pi)$. La differenza $f(x)-\varphi(x)$ è continua in tutto $(0, 2\pi)$ e negli estremi di quest'intervallo assume il valore 0; essa può dunque considerarsi come una parte di una funzione continua, periodica, di periodo 2π. Tale differenza ha, inoltre, derivata (tranne in un numero finito di punti) la quale risulta a variazione limitata. Pertanto, per il teorema dimostrato in *a*), la $f(x)-\varphi(x)$ ammette uno sviluppo di Fourier convergente uniformemente verso di essa in tutto $(0, 2\pi)$. Questa serie di Fourier risulta uguale alla differenza fra la serie di Fourier della $f(x)$ e quella della $\varphi(x)$; e siccome la seconda è convergente uniformemente verso la $\varphi(x)$ in ogni intervallo completamente *interno* a $(0, 2\pi)$, ne viene che, in ciascuno di tali intervalli, la serie di Fourier della $f(x)$ converge uniformemente verso la $f(x)$ stessa. Inoltre, in 0 e 2π, lo sviluppo di Fourier della $\varphi(x)$ converge verso



$$\frac{\varphi(0)+\varphi(2\pi)}{2}=\frac{f(0)+f(2\pi)}{2},$$

e quindi, negli stessi punti, la serie di Fourier della $f(x)$ converge anch'essa verso i medesimi valori (perchè la serie di Fourier di $f-\varphi$, in questi punti, converge a $f(0)-\varphi(0)=$ $=f(2\pi)-\varphi(2\pi)=0$).

43. - Generalizzazione del precedente risultato.

a) Quanto si è detto nell'osservazione fatta in *b*) nel n.° preced., relativamente alla funzione $\varphi(x)$ lineare in $(0, 2\pi)$, si estende ad una funzione $\varphi(x)$ che sia lineare in un intervallo di ampiezza 2π, quale $(\alpha, \alpha+2\pi)$, secondo estremo escluso, e periodica, con periodo 2π. Ed infatti, i coefficienti della serie di Fourier di questa $\varphi(x)$, sono dati da

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \varphi(x) \operatorname{sen} nx \, dx,$$

cioè, essendo, in $(\alpha, \alpha + 2\pi)$,

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha + 0) + \frac{\varphi(\alpha - 0) - \varphi(\alpha + 0)}{2\pi}(x - \alpha),$$

da

$$a_0 = \varphi(\alpha + 0) + \varphi(\alpha - 0),$$

e, per $n > 0$,

$$a_n = \frac{\varphi(\alpha - 0) - \varphi(\alpha + 0)}{2\pi^2}\left[\left(x \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right)_\alpha^{\alpha+2\pi} - \frac{1}{n}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \operatorname{sen} nx \, dx\right] =$$
$$= \frac{\varphi(\alpha - 0) - \varphi(\alpha + 0)}{\pi} \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n},$$

$$b_n = \frac{\varphi(\alpha - 0) - \varphi(\alpha + 0)}{2\pi^2}\left[-\left(x \frac{\cos nx}{n}\right)_\alpha^{\alpha+2\pi} + \frac{1}{n}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \cos nx \, dx\right] =$$
$$= -\frac{\varphi(\alpha - 0) - \varphi(\alpha + 0)}{\pi} \frac{\cos n\alpha}{n}.$$

Perciò la serie di Fourier della $\varphi(x)$ è

$$(1) \qquad \frac{\varphi(\alpha + 0) + \varphi(\alpha - 0)}{2} + \frac{\varphi(\alpha + 0) - \varphi(\alpha - 0)}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} n(x - \alpha)}{n},$$

e la serie di seni che qui figura non è che quella dell'espressione (3) del n.º preced., in cui si sia cambiato x in $x - \alpha$.

Ne segue che, in ogni intervallo di $(0, 2\pi)$ non contenente α, la (1) converge uniformemente verso la $\varphi(x)$, e che, per $x = \alpha$, la (1) converge verso

$$\frac{\varphi(\alpha + 0) + \varphi(\alpha - 0)}{2}.$$

b) Dopo di ciò, possiamo dare la seguente generalizzazione della proposizione *b*) del n.° 42:

Se la funzione $f(x)$, definita nell'intervallo $(0, 2\pi)$, ha derivata in tutti i punti di quest'intervallo, eccettuatine al più un numero finito, e tale derivata è, in tutto $(0, 2\pi)$, a variazione limitata (¹), *allora la serie di Fourier della $f(x)$ converge uniformemente in ogni intervallo che non contenga punti di discontinuità della $f(x)$ e, se non è $f(0) = f(2\pi)$, neppure i punti 0 e 2π. Nei punti x così eccettuati, la serie converge verso*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

intendendo che sia

$$f(-0) = f(2\pi - 0), \quad f(2\pi + 0) = f(+0).$$

Osserviamo, in primo luogo, che, in un punto x' di discontinuità della $f(x)$, esistono sicuramente i limiti $f(x'+0)$ e $f(x'-0)$. Infatti, prendendo $p < x'$ e sufficientemente vicino ad x', in modo da escludere da (p, x') gli altri punti di discontinuità, avremo, se è $p < x < x'$,

$$f(x) = f(p) + \int_p^x f'(x)dx;$$

e siccome la $f'(x)$ è limitata in tutto $(0, 2\pi)$, è

$$f(x'-0) = f(p) + \int_p^{x'} f'(x)dx.$$

Analogamente per $f(x'+0)$.

Siano ora $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ i punti di discontinuità della $f(x)$ in $(0, 2\pi)$, intendendo che sia $x_1 = 0$ se è $f(0) \neq f(2\pi)$. Indichiamo con $\varphi_r(x)$ la funzione periodica, di periodo 2π, e lineare in $(x_r, x_r + 2\pi)$, secondo estremo escluso, che, in questo inter-

(¹) Da ciò segue che la derivata è sempre, in modulo, minore di un numero fisso e che perciò la $f(x)$ risulta limitata.

vallo, rappresenta l'ordinata del segmento rettilineo che unisce i punti $[x_r, f(x_r + 0)]$ e $[x_r + 2\pi, f(x_r - 0)]$ [1], e consideriamo la funzione

$$(2) \qquad \Phi(x) = f(x) - \sum_{r=1}^{m} \varphi_r(x),$$

dove intendiamo che sia $f - \varphi_r$ uguale a 0 in x_r.

Questa funzione assume gli stessi valori nei punti 0 e 2π ed è continua dappertutto in $(0, 2\pi)$. Infatti i suoi punti di discontinuità potranno essere soltanto nei punti x_r. Ma in $x_{r'}$, per es., tutte le φ_r, per $r \neq r'$, sono continue e la $\varphi_{r'}$, per la sua definizione, ha i valori limiti

$$\varphi_{r'}(x_{r'} + 0) = f(x_{r'} + 0), \quad \varphi_{r'}(x_{r'} - 0) = f(x_{r'} - 0).$$

Perciò, nei punti x_r, la Φ è sicuramente continua, e per ragione analoga è anche

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi).$$

Di più, eccettuato un numero finito di punti, la $\Phi(x)$ ha derivata, e questa derivata è a variazione limitata in tutto $(0, 2\pi)$; per il teorema del n.º 42, *a*), lo sviluppo in serie di Fourier della $\Phi(x)$ converge dunque uniformemente verso la $\Phi(x)$ in tutto $(0, 2\pi)$. Ma tale sviluppo è uguale a quello della $f(x)$ diminuito della somma degli sviluppi delle $\varphi_r(x)$. Questi ultimi, per quanto si è detto in *a*), sono tutti convergenti uniformemente verso le rispettive $\varphi_r(x)$, in ogni intervallo di $(0, 2\pi)$ che non contenga i punti x_r, e pertanto anche lo sviluppo della $f(x)$, in ciascuno di tali intervalli, converge uniformemente verso $f(x)$.

In un punto $x_{r'}$, tutti gli sviluppi delle $\varphi_r(x)$ convergono e perciò converge anche quello della $f(x)$. I primi, per $r \neq r'$, convergono ai valori $\varphi_r(x_{r'})$, mentre quello di $\varphi_{r'}(x)$ converge a $\frac{1}{2}[\varphi_{r'}(x_{r'} + 0) + \varphi_{r'}(x_{r'} - 0)] = \frac{1}{2}[f(x_{r'} + 0) + f(x_{r'} - 0)]$. Sempre in $x_{r'}$, lo sviluppo di $\Phi(x)$ converge verso

$$-\{\varphi_1(x_{r'}) + \dots + \varphi_{r'-1}(x_{r'}) + \varphi_{r'+1}(x_{r'}) + \dots + \varphi_m(x_{r'})\};$$

---

[1] Se è $x_1 = 0$, è $f(x_1 - 0) = f(2\pi - 0)$.

perciò in $x_{r'}$ sviluppo della $f(x)$ converge verso $\frac{1}{2}[f(x_{r'}+0)+$ $+f(x_{r'}-0)]$ [1].

Osservazione. — I risultati di questo n.° e di quello precedente permettono di dare sviluppi in serie anche per funzioni $f(x)$ definite su un intervallo (a, b) di ampiezza *non* uguale a 2π. Ed infatti, posto

$$x = a + \frac{b-a}{2\pi} x',$$

si ha

$$f(x) = f\left(a + \frac{b-a}{2\pi} x'\right) \equiv \varphi(x'),$$

e la funzione $\varphi(x')$ risulta definita sull' intervallo $(0, 2\pi)$. Se la $f(x)$ soddisfa in (a, b) alle condizioni indicate in uno qualunque dei teoremi del n.° presente o del n.° precedente, la $\varphi(x')$ soddisferà alle stesse condizioni in $(0, 2\pi)$, e per essa si avrà lo sviluppo in serie di Fourier

$$\varphi(x') = \frac{1}{2} a_0' + \sum_1^\infty (a_n' \cos nx' + b_n' \operatorname{sen} nx').$$

Sarà dunque

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0' + \sum_1^\infty \left\{ a_n' \cos \frac{2n\pi}{b-a}(x-a) + b_n' \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{b-a}(x-a) \right\},$$

con

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x') \cos nx' \, dx',$$

ossia

$$a_n' = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi}{b-a}(x-a) dx,$$

---

[1] Cfr. per quanto si è detto in questo n.° ed in quello precedente, A. Kneser, *Untersuchungen über die Darstellung willkürlichen Funktionen in der mathematischen Physik.* (Math. Annalen, Bd. LVIII (1904), pp. 81-147), e H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, pp. 46-47.

e, analogamente,

$$b_n' = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x) \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{b-a}(x-a)dx.$$

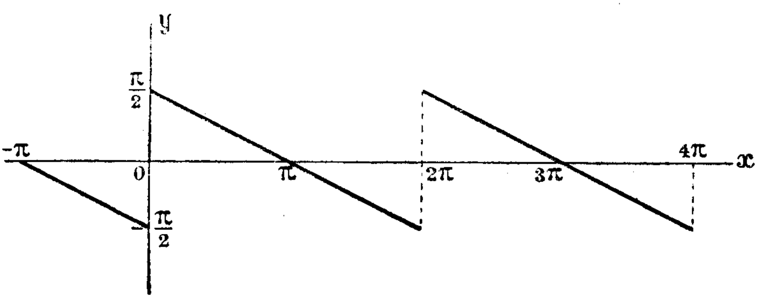
44. - Esempi di sviluppi in serie di Fourier: serie di seni. Lo sviluppo di una funzione dispari in serie di Fourier, si riduce (n.° 21) ad una serie di seni, perchè i coefficienti a_n sono tutti nulli.

I coefficienti b_n possiamo metterli, in questo caso, sotto la forma (n.° 21)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} nx\, dx.$$

Vogliamo osservare che qualunque funzione, data solo in $(0, \pi)$, e che ivi soddisfi alle condizioni di uno dei teoremi dei n.i precedenti, può svilupparsi in serie di seni, perchè essa si può considerare come una parte di una funzione dispari definita in tutto $(0, 2\pi)$ e periodica di periodo 2π (basta prendere in $(\pi, 2\pi)$ una funzione la cui curva rappresentatrice sia simmetrica, rispetto al punto $x = \pi$, $y = 0$, di quella che rappresenta la funzione data).

1°) Sviluppiamo in serie di Fourier la funzione data, in $(0, 2\pi)$, da $y = \frac{1}{2}(\pi - x)$. Questa funzione è continua, ha derivata prima costante e quindi a variazione limitata: perciò [n.° 42, b)] il suo sviluppo di Fourier



converge uniformemente verso di essa, in ogni intervallo interno a $(0, 2\pi)$ nei punti $x = 0$ e $x = 2\pi$, esso converge verso $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

La funzione periodica, di periodo 2π, che per $0 \leq x < 2\pi$ coincide con la funzione data, è una funzione dispari (la sua curva rappresentativa risulta simmetrica rispetto all'origine); pertanto, lo sviluppo in serie di Fourier cercato è uno sviluppo in serie di seni. Avremo perciò

$$a_n = 0,$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\pi - x) \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{1}{n}.$$

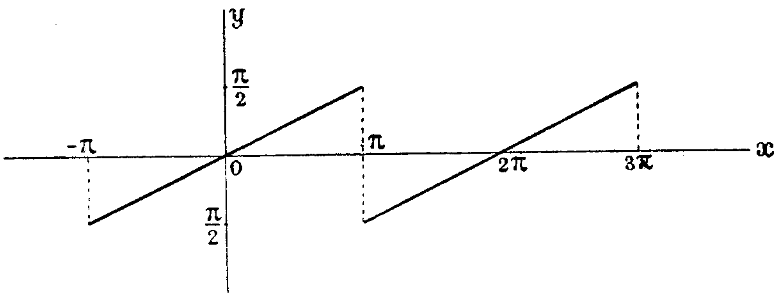
Dunque, in $(0, 2\pi)$, estremi esclusi, è

$$(1) \qquad \frac{1}{2}(\pi - x) = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \ldots\ldots:$$

otteniamo così una serie di seni già considerata e sommata da D. Bernoulli. Da tale sviluppo abbiamo, in particolare, per $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots.$$

2°) Sviluppiamo in serie di Fourier la funzione data, in $(-\pi, \pi)$, da $y = \frac{x}{2}$. Lo sviluppo in serie di Fourier di questa funzione è (n.i 42 e 43) convergente uniformemente verso di essa in ogni intervallo interno a $(-\pi, \pi)$;



nei punti $x = -\pi$ e $x = \pi$ lo sviluppo converge verso $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Siccome la funzione considerata è dispari, lo sviluppo cercato è una serie di seni. Avremo dunque

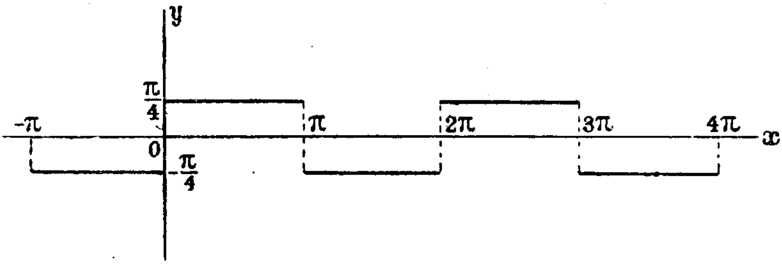
$$a_n = 0,$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2} \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Dunque, in $(-\pi, \pi)$, estremi esclusi, è

$$\frac{x}{2} = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ldots\ldots,$$

serie già considerata e sommata da Eulero.

3°) Sviluppiamo in serie di Fourier la funzione $y=\frac{\pi}{4}$, per $0 \leq x \leq \pi$, e $y=-\frac{\pi}{4}$, per $\pi < x \leq 2\pi$. Lo sviluppo cercato è (n.° 43) uniformemente



convergente in ogni intervallo interno a $(0, \pi)$ od a $(\pi, 2\pi)$; nei punti $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$, converge verso 0. La funzione periodica, di periodo 2π, che deriva dalla funzione data, è dispari e perciò lo sviluppo da determinare è una serie di seni. Abbiamo pertanto

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{1-(-1)^n}{2n}.$$

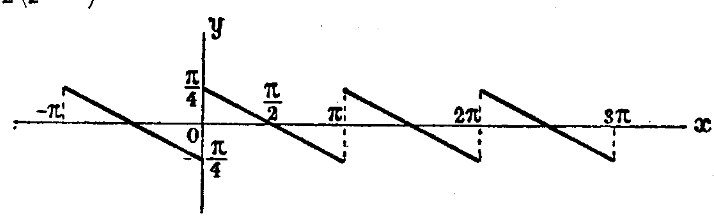
È dunque in $(0, \pi)$, esclusi i punti $x=0$ e $x=\pi$,

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \ldots.,$$

ed in $(\pi, 2\pi)$, esclusi $x=\pi$ e $x=2\pi$,

$$-\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \ldots. .$$

4°) Sviluppiamo in serie di seni la funzione data in $(0, \pi)$ da $y=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. La serie cercata converge uniformemente (n.° 43) verso



questa funzione in ogni intervallo interno a $(0, \pi)$; in $x=0$ e $x=\pi$, converge verso 0. È

$$a_n = 0,$$

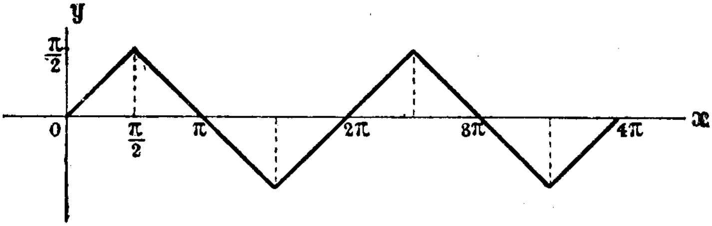
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{1+(-1)^n}{2n},$$

e perciò, per $0 < x < \pi$,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{6} + \ldots,$$

sviluppo che si può ottenere dallo sviluppo (1), cambiandovi x in $2x$.

5°) Sviluppiamo in serie di seni la funzione data da $y = x$, per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, e da $y = \pi - x$, per $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$. La serie cercata converge ovun-



que uniformemente verso la funzione data (n.° 42). È

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi:2} x \operatorname{sen} nx\, dx + \int_{\pi:2}^{\pi} (\pi - x) \operatorname{sen} nx\, dx\right\} = \frac{4}{\pi n^2} \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2},$$

e perciò, per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,

$$x = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^2} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^2} - \ldots\right),$$

e, per $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$,

$$\pi - x = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^2} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^2} - \ldots\right).$$

La serie qui ottenuta fu considerata e sommata da Eulero.

Per $x = \frac{\pi}{2}$ si ha, in particolare,

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots.$$

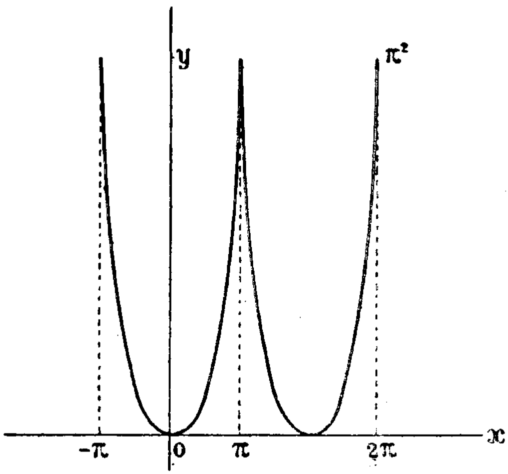
45. - Esempi di sviluppi in serie di Fourier: serie di coseni.

Lo sviluppo di una funzione pari in serie di Fourier è, come già si è notato (n.° 21), una serie di coseni, perchè i coefficienti b_n sono tutti nulli. In questo caso, i coefficienti a_n possono scriversi nella forma

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx.$$

Osserviamo pure che qualunque funzione, data soltanto nell'intervallo $(0, \pi)$, ed ivi soddisfacente alle condizioni di uno dei teoremi dei n.[i] 42 e 43, può svilupparsi in serie di coseni, perchè essa può considerarsi come una parte di una funzione pari, definita in tutto $(0, 2\pi)$ e periodica di periodo 2π.

1°) Sviluppiamo in serie di Fourier la funzione data in $(-\pi, \pi)$



da $y = x^2$. Abbiamo una funzione pari e perciò

$$b_n = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos nx\, dx = \begin{cases} \dfrac{2\pi^2}{3}, & \text{per } n = 0, \\ (-1)^n \dfrac{4}{n^2} & \text{per } n > 0, \end{cases}$$

e quindi

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right),$$

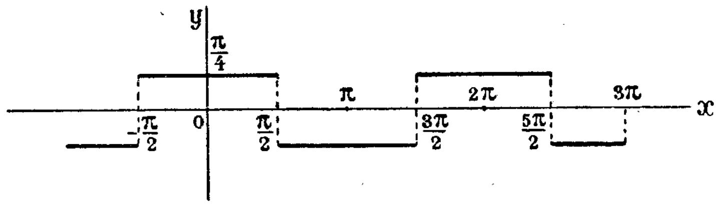
uniformemente in tutto $(-\pi, \pi)$ (n.° 42). Questa serie fu considerata e sommata da Eulero. In particolare abbiamo, per $x = 0$,

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

e, per $x = \pi$,

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

2°) Sviluppiamo in serie di coseni la funzione data da $y=\frac{\pi}{4}$, per



$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, e da $y=-\frac{\pi}{4}$, per $\frac{\pi}{2}<x<\pi$. Abbiamo,

$$b_n=0, \quad a_0=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi:2}\frac{\pi}{4}\cos nx\,dx+\int_{\pi:2}^{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos nx\,dx\right\}=\frac{1}{n}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}, \quad \text{per} \quad n>0;$$

perciò, se $0<x<\frac{\pi}{2}$, è

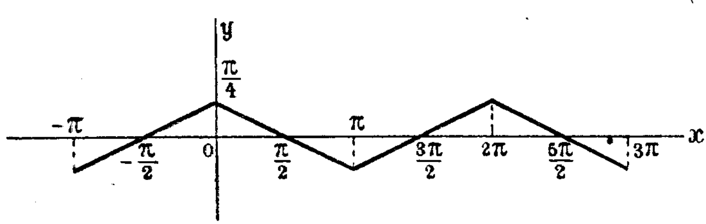
$$\frac{\pi}{4}=\cos x-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\ldots,$$

e, per $\frac{\pi}{2}<x<\pi$,

$$-\frac{\pi}{4}=\cos x-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\ldots$$

e la serie trigonometrica qui ottenuta — che è quella di Eulero-Fourier di cui ci siamo già più volte occupati — converge uniformemente in ogni intervallo interno a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oppure interno a $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (n.° 43).

3°) Sviluppiamo in serie di coseni la funzione data da $y=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$,



in $(0, \pi)$. Abbiamo

$$b_n=0, \quad a_0=0,$$

e, per $n>0$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right),$$

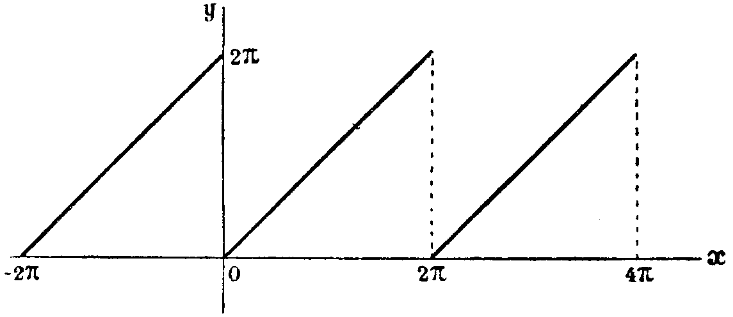
e perciò

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right),$$

e questa serie converge ovunque uniformemente (n.° 42).

46. - Esempi di sviluppi in serie di Fourier: serie completa.

1°) Sviluppiamo in serie di Fourier la funzione data da $y = x$, in



$(0, 2\pi)$. Abbiamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\, dx = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \cos nx\, dx = 0, \qquad \text{per } n > 0,$$

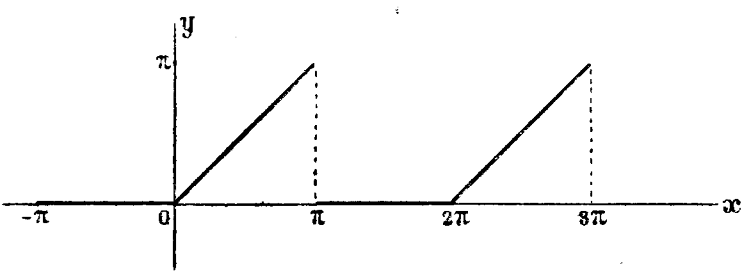
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{2}{n},$$

e perciò, in tutto $(0, 2\pi)$, estremi esclusi,

$$x = \pi - 2\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \dots\right),$$

e la convergenza di tale serie è uniforme in ogni intervallo interno a $(0, 2\pi)$, (n.° 42).

2°) Sviluppiamo, in serie di Fourier la funzione data da $y = 0$, in



$(-\pi, 0)$, e da $y = x$, in $(0, \pi)$. Abbiamo:

$$a_0 = \frac{\pi}{2},$$

e, per $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x \cos nx\, dx = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

e perciò, per $-\pi < x \leq 0$,

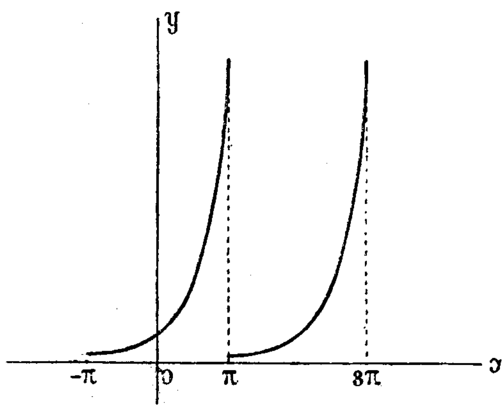
$$0 = \pi + \left(-\frac{2}{\pi}\cos x + \operatorname{sen} x\right) - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \left(-\frac{2}{\pi \cdot 3^2}\cos 3x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3}\right) - \dots,$$

e per $0 \leq x < \pi$,

$$x = \pi + \left(-\frac{2}{\pi}\cos x + \operatorname{sen} x\right) - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \left(-\frac{2}{\pi \cdot 3^2}\cos 3x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{2}\right) - \dots;$$

la convergenza è uniforme in ogni intervallo interno a $(-\pi, \pi)$ (n.° 43).

3°) Sviluppiamo in serie di Fourier la funzione data da $y = e^x$, in



$(-\pi, \pi)$. Abbiamo:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(e^\pi - e^{-\pi}) = \frac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi},$$

e, per $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx = \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cdot \frac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{(-1)^{n-1} n}{1+n^2} \cdot \frac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi},$$

e perciò, per $-\pi < x < \pi$,

$$e^x = \frac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{1+1^2} \cos x + \frac{1}{1+1^2} \operatorname{sen} x \right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{1+2^2} \cos 2x - \frac{2}{1+2^2} \operatorname{sen} 2x \right) + \dots$$

$$\left. \dots + \left(\frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n-1} n}{1+n^2} \operatorname{sen} nx \right) + \dots \right\},$$

e questa serie converge uniformemente in ogni intervallo interno a $(-\pi, \pi)$ (n.° 43).

47. - Molteplicità degli sviluppi in serie trigonometriche di una funzione data in un intervallo minore di 2π.

Abbiamo già avvertito che il teorema di unicità dello sviluppo in serie trigonometrica di una funzione vale quando si intenda di considerare la funzione in tutto l' intervallo $(0, 2\pi)$ (od in un altro intervallo di ampiezza 2π), ma che esso teorema può non valere più se l' intervallo in cui si considera la funzione ha ampiezza minore di 2π. Ora vogliamo precisare la cosa mostrando che l' intervallo minimo che assicura l' unicità è proprio quello di ampiezza 2π.

Consideriamo un qualsiasi numero ε, positivo e minore di $\pi:2$, e la funzione $f_\varepsilon(x)$, definita nel seguente modo: la $f_\varepsilon(x)$ vari linearmente in $(0, \varepsilon)$, fra i valori 1 e 0, e pure linearmente in $(2\pi - \varepsilon, 2\pi)$, fra i valori 0 ed 1; essa poi sia sempre nulla in tutto $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$. Questa funzione soddisfa a tutte le condizioni del teorema del n.°, 42 *a*), e pertanto ammette uno sviluppo in serie di Fourier, uniformemente convergente in tutto $(0, 2\pi)$ verso la $f_\varepsilon(x)$.

In corrispondenza di due valori diversi di ε, ε_1 e ε_2, si hanno due funzioni $f_{\varepsilon_1}(x)$ e $f_{\varepsilon_2}(x)$, le quali sono fra loro distinte in vicinanza dei punti 0 e 2π. Perciò i loro sviluppi in serie di Fourier debbono essere diversi. Allora, considerato un qualunque intervallo (a, b), *interno* a $(0, 2\pi)$, per ogni ε positivo e minore di a e di $2\pi - b$, lo sviluppo in serie di Fourier di $f_\varepsilon(x)$ converge uniformemente allo zero in tutto (a, b).

Abbiamo dunque: *qualunque sia l' intervallo* (a, b), *purchè tale che* $0 < a < b < 2\pi$, *esistono infiniti sviluppi in serie trigonometriche, tutti fra loro distinti e tutti uniformemente convergenti in* (a, b) *verso la stessa funzione* $f(x) \equiv 0$.

Da ciò, segue pure che, *se è* $0 < a < b < 2\pi$, *e se in* (a, b) *una funzione* $f(x)$ *è sviluppabile in serie trigonometrica, convergente in tutto* (a, b) [*od anche soltanto in quasi-tutto* (a, b)], *allora esistono infinite serie trigonometriche, tutte fra loro distinte e tutte convergenti in* (a, b) *verso la* $f(x)$ (*oppure, rispettivamente, tutte convergenti verso la* $f(x)$ *in quasi-tutto* (a, b), *la convergenza avvenendo per tutte negli stessi punti*). Basta, infatti, aggiungere, ad uno sviluppo della $f(x)$, lo sviluppo di una qualunque delle funzioni f_ε, sopra definite, (con ε minore di a e di $2\pi - b$), per ottenere uno sviluppo diverso dal primitivo e convergente verso la $f(x)$ in tutti i punti di (a, b) in cui tale primitivo sviluppo si suppone convergente.

Capitolo III.

RAPPRESENTAZIONE APPROSSIMATA CON POLINOMI TRIGONOMETRICI

§ 1. Interpolazione trigonometrica.

48. – Il problema dell'interpolazione trigonometrica.

Chiameremo *polinomio trigonometrico d'ordine n*, l'espressione

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Se i coefficienti b dei seni sono tutti nulli, diremo che si ha un polinomio trigonometrico di soli coseni; diremo invece che si ha un polinomio trigonometrico di soli seni, se sono nulli tutti gli a.

Ciò posto, il problema dell'interpolazione trigonometrica consiste nel trovare un polinomio trigonometrico che, per determinati valori della variabile indipendente, assuma dati valori. Geometricamente, consiste nel determinare una curva d'equazione $y = P(x)$, dove $P(x)$ è un polinomio trigonometrico, la quale passi per dati punti.

Il problema dell'interpolazione è in stretta relazione con quello dell'approssimazione delle funzioni. Anzi, nelle applicazioni pratiche, esso viene spessissimo considerato come un problema di approssimazione. Lo sperimentatore, che vuol giungere alla conoscenza della legge $y = f(x)$ che regola un determinato fenomeno, in generale cerca di determinare i valori della y in corrispondenza di un certo numero di valori della x;

poi utilizza questi valori per mezzo di una formula d'interpolazione, riguardando infine l'espressione ottenuta come una rappresentazione approssimata della legge studiata.

Il problema dell'interpolazione trigonometrica fu considerato per la prima volta da Clairaut, nel 1757 [1], per polinomi di soli coseni; poi fu considerato, per polinomi di soli seni, da Lagrange, nel 1759 [2]. Il caso generale fu trattato per la prima volta da Bessel nel 1815 [3].

Il problema dell'interpolazione trigonometrica, come sopra è stato formulato, se ammette una soluzione può ammetterne evidentemente infinite altre. Infatti, se $P(x)$ è una soluzione e se $P_1(x)$ è un polinomio trigonometrico che si annulla per i valori dati della x, anche $P(x) + cP_1(x)$, con c costante qualunque, è una soluzione del problema. Per rendere più determinato il problema, si potrà chiedere di trovare il polinomio di minimo ordine soddisfacente alle condizioni poste.

È poi evidente che un polinomio trigonometrico, essendo una funzione periodica, di periodo 2π, basterà considerarlo nell'intervallo $(0, 2\pi)$, secondo estremo escluso, ed i valori della x, corrispondenti ai valori dati della y, si potranno ricondurre, per mezzo dei loro congrui rispetto al mod. 2π, a valori di $(0, 2\pi)$. È anche evidente che, se fossero dati due valori diversi della y per due punti x congrui fra loro rispetto al modulo 2π, non esisterebbe nessuna soluzione per il dato problema di interpolazione trigonometrica.

Se poi si vorrà risolvere il problema d'interpolazione con polinomi di soli seni o di soli coseni, sarà opportuno limitarsi al solo intervallo $(0, \pi)$, essendo tali polinomi delle funzioni dispari o pari, rispettivamente.

Nei problemi d'interpolazione, si distingue il caso in cui le ordinate date sono fra loro equidistanti, vale a dire in cui

---

(1) A. C. Clairaut, *Memoire sur l'orbite apparente du Soleil, etc.*, (Hist. Acad. sc., Paris, 1754, edito nel 1759; Memoria presentata nel 1757; pp. 521-564; vedi in particolare p. 545).

(2) J. L. Lagrange, *Recherches sur la nature et la propagation du son* (Misc. Soc. Taurinenses, Vol. I (1759), p. 42).

(3) F. W. Bessel, *Ueber das Dollond'sche Mittagsfernrohr und den Cary'schen Kreis* (Astr. Beob. Sternw. Königsberg. Bd. I (1815), e Abhandlungen von. F. W. Bessel, Leipzig, 1876, Bd. II, pp. 19-32).

i valori dati della y corrispondono a valori della x in progressione aritmetica, da quello in cui ciò non si verifica. Il primo è il più usato ed il più comodo: noi, nel seguito, considereremo soltanto tale caso.

49. - Interpolazione con polinomi trigonometrici di soli seni.

Studiamo dapprima il caso, risolto da Lagrange, dell'interpolazione con polinomi di soli seni, cioè della forma

$$b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + b_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots + b_n \operatorname{sen} nx. \tag{1}$$

Considerato l'intervallo $(0, \pi)$, dividiamolo in $n+1$ parti uguali, mediante i punti $\frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1}, \ldots, \frac{n\pi}{n+1}$, e supponiamo dati, in questi n punti, i valori di una funzione $f(x)$. Determiniamo il polinomio (1) che nei punti indicati assume i valori dati della $f(x)$. Avremo le n equazioni, lineari nei b,

$$b_1 \operatorname{sen} \frac{r\pi}{n+1} + b_2 \operatorname{sen} \frac{2r\pi}{n+1} + \ldots + b_n \operatorname{sen} \frac{nr\pi}{n+1} = f\left(\frac{r\pi}{n+1}\right),$$
$$(r = 1, 2, \ldots, n).$$

Moltiplichiamo ambo i membri di questa equazione per $\operatorname{sen} \frac{sr\pi}{n+1}$, s essendo uno dei numeri $1, 2, \ldots, n$, e poi sommiamo rispetto all'indice r; otteniamo:

$$b_1 \sum_{r=1}^{n} \operatorname{sen} \frac{r\pi}{n+1} \operatorname{sen} \frac{sr\pi}{n+1} + b_2 \sum_{r=1}^{n} \operatorname{sen} \frac{2r\pi}{n+1} \operatorname{sen} \frac{sr\pi}{n+1} + \ldots$$
$$\ldots + b_n \sum_{r=1}^{n} \operatorname{sen} \frac{nr\pi}{n+1} \operatorname{sen} \frac{sr\pi}{n+1} = \sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r\pi}{n+1}\right) \operatorname{sen} \frac{sr\pi}{n+1}.$$

Ora è, se $\nu \leq n$ ed $s \leq n$,

$$\sum_{r=1}^{n} \operatorname{sen} \frac{\nu r\pi}{n+1} \operatorname{sen} \frac{sr\pi}{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{se } \nu \neq s, \\ \dfrac{n+1}{2}, & \text{se } \nu = s, \end{cases}$$

ciò che si verifica subito, trasformando il prodotto di seni nella differenza di due coseni e poi applicando la (1) del n.° 11. Si ha dunque:

$$b_s = \frac{2}{n+1}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r\pi}{n+1}\right) \operatorname{sen} \frac{sr\pi}{n+1}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

la quale dà tutti i coefficienti del polinomio trigonometrico cercato. Questa formula si deve a Lagrange.

Osserveremo qui che, se la funzione $f(x)$ è limitata ed integrabile, secondo la definizione di integrale data da Cauchy, in $(0, \pi)$ [1], e se il numero n tende all'infinito, abbiamo:

$$\lim_{n\to\infty} b_s = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha) \operatorname{sen} s\alpha \, d\alpha,$$

vale a dire, b_s tende verso il corrispondente coefficiente di Eulero-Fourier della $f(x)$, supposta funzione dispari.

50. - Interpolazione con polinomi trigonometrici di soli coseni.

Consideriamo ora il caso, studiato per la prima volta da Clairaut, dell'interpolazione con polinomi di soli coseni, cioè della forma

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx.$$

Dividiamo l'intervallo $(0, \pi)$, in n parti uguali, e supponiamo dati nei punti di divisione, compresi gli estremi 0 e π, i valori di una funzione $f(x)$. Determiniamo il polinomio (1) che, negli $n+1$ punti indicati, assume i valori dati della $f(x)$. Avremo le $n+1$ equazioni, lineari negli $n+1$ coefficienti a,

$$\text{(2)} \quad \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\frac{r\pi}{n} + a_2 \cos\frac{2r\pi}{n} + \ldots + a_n \cos\frac{nr\pi}{n} = f\left(\frac{r\pi}{n}\right),$$

$$(r = 0, 1, \ldots, n).$$

Moltiplichiamo ambo i membri di questa uguaglianza per

---

[1] Vale a dire, se $f(x)$ è limitata e soddisfa alla condizione d'integrabilità di RIEMANN.

$\cos\frac{sr\pi}{n}$ (s essendo uno dei numeri 0, 1, 2,...., n), e poi sommiamo rispetto all'indice r. Avremo:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}a_0\sum_{r=0}^{n}\cos\frac{sr\pi}{n}+a_1\sum_{r=0}^{n}\cos\frac{r\pi}{n}\cos\frac{sr\pi}{n}+\ldots \\ &\qquad\ldots+a_n\sum_{r=0}^{n}\cos\frac{nr\pi}{n}\cos\frac{sr\pi}{n}=\sum_{r=0}^{n}f\left(\frac{r\pi}{n}\right)\cos\frac{sr\pi}{n}. \end{aligned}\right.$$

Ma è, per $\nu=0, 1, 2,\ldots, n$, ed $s=0, 1, 2,\ldots, n$,

$$\sum_{r=0}^{n}\cos\frac{\nu r\pi}{n}\cos\frac{sr\pi}{n}=\left\{\begin{array}{l} n+1, \text{ se è } \nu=s=0 \text{ oppure } \nu=s=n; \\ \frac{n}{2}+1, \text{ se è } \nu=s\neq 0 \text{ ed inoltre } \neq n; \\ 1, \text{ se } \nu\neq s \text{ e } \nu \text{ ed } s \text{ ambedue pari o dispari}; \\ 0, \text{ se } \nu \text{ ed } s \text{ sono uno pari e l'altro dispari}; \end{array}\right.$$

ciò che si verifica con lo stesso procedimento usato al n.° precedente. Si ha perciò da (3), per $s=0, 1,\ldots.\ n-1$,

$$\frac{n}{2}a_0+\left(\frac{1}{2}a_0+a_2+a_4+a_6+\ldots.\right)=\sum_{r=0}^{n}f\left(\frac{r\pi}{n}\right),$$

$$\frac{n}{2}a_1+(a_1+a_3+a_5+a_7+\ldots.)=\sum_{r=0}^{n}f\left(\frac{r\pi}{n}\right)\cos\frac{r\pi}{n},$$

$$\frac{n}{2}a_2+\left(\frac{1}{2}a_0+a_2+a_4+a_6+\ldots.\right)=\sum_{r=0}^{n}f\left(\frac{r\pi}{n}\right)\cos\frac{2r\pi}{n},$$

. . . .

e, per $s=n$,

$$na_n+(\ldots.+a_{n-4}+a_{n-2}+a_n)=\sum_{r=0}^{n}f\left(\frac{r\pi}{n}\right)\cos r\pi.$$

Ora, la (2) dà, per $r=0$ ed $r=n$,

$$\frac{1}{2}a_0+a_1+a_2+\ldots.+a_n=f(0),$$

$$\frac{1}{2}a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots.=f(\pi);$$

donde, sommando e sottraendo,

$$\frac{1}{2}a_0 + a_2 + a_4 + \dots = \frac{f(0) + f(\pi)}{2},$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots = \frac{f(0) - f(\pi)}{2}.$$

Sostituendo nelle uguaglianze precedenti, si ottiene perciò, dopo semplici riduzioni,

$$\begin{cases} a_s = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{r=1}^{n-1} f\left(\frac{r\pi}{n}\right)\cos\frac{sr\pi}{n} + \frac{f(0) + (-1)^s f(\pi)}{n}, \quad (s = 0, 1, \dots, n-1), \\ a_n = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r f\left(\frac{r\pi}{n}\right) + \frac{f(0) + (-1)^n f(\pi)}{n}\right\}. \end{cases}$$

Queste formule non sono esattamente quelle trovate da Clairaut; nella forma corretta qui data, furono trovate da Ch. J. de la Vallée Poussin (¹). Anche qui, come nel n.° preced., se la funzione $f(x)$ è limitata ed integrabile, nel senso di Cauchy, in $(0, \pi)$, si ha, per $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} a_s = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\alpha)\cos s\alpha\, d\alpha.$$

51. - Interpolazione con polinomi trigonometrici generali. Veniamo al caso dell' interpolazione con polimoni trigonometrici generali, cioè della forma

$$(1) \quad \frac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

studiato, come già si disse, per la prima volta da Bessel.

Consideriamo l' intervallo $(0, 2\pi)$ e dividiamolo in $2n+1$ parti uguali, supponendo dati i valori di una funzione $f(x)$ nei punti $0, \frac{2\pi}{2n+1}, 2\frac{2\pi}{2n+1}, \dots, 2n\frac{2\pi}{2n+1}$. Determiniamo il

(¹) *Sur la convergence des formules d' interpolation entre ordonnées équidistantes* (Bulletins de l'Académie royale de Belgique, 1908, pp. 319-410; in particolare p. 374).

polinomio (1) che, nei punti indicati, assume i valori dati della $f(x)$.

Poniamo le $2n+1$ equazioni, lineari nei $2n+1$ coefficienti incogniti a_s e b_s,

$$\frac{1}{2}a_0 + \left(a_1 \cos\frac{2\pi r}{2n+1} + b_1 \operatorname{sen}\frac{2\pi r}{2n+1}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(a_n \cos n\frac{2\pi r}{2n+1} + b_n \operatorname{sen} n\frac{2\pi r}{2n+1}\right) = f\left(\frac{2\pi r}{2n+1}\right),$$

$$(r = 0,\ 1,\ \dots,\ 2n),$$

e moltiplichiamo ambo i membri di questa equazione generica, una volta per $\cos s\dfrac{2\pi r}{2n+1}$, sommando poi rispetto all'indice r, ed un'altra volta per $\operatorname{sen} s\dfrac{2\pi r}{2n+1}$, sommando poi ancora rispetto all'indice r, ed intendendo di dare ad s i valori 0, 1,...., n. Otteniamo così:

$$\frac{1}{2}a_0\sum_{r=0}^{2n}\cos s\frac{2\pi r}{2n+1} +$$

$$+\left(a_1\sum_{r=0}^{2n}\cos\frac{2\pi r}{2n+1}\cos s\frac{2\pi r}{2n+1} + b_1\sum_{r=0}^{2n}\operatorname{sen}\frac{2\pi r}{2n+1}\cos s\frac{2\pi r}{2n+1}\right) + \dots$$

$$\dots+\left(a_n\sum_{r=0}^{2n}\cos n\frac{2\pi r}{2n+1}\cos s\frac{2\pi r}{2n+1} + b_n\sum_{r=0}^{2n}\operatorname{sen} n\frac{2\pi r}{2n+1}\cos s\frac{2\pi r}{2n+1}\right) =$$

$$=\sum_{r=0}^{2n} f\left(\frac{2\pi r}{2n+1}\right)\cos s\frac{2\pi r}{2n+1},$$

$$\frac{1}{2}a_0\sum_{r=0}^{2n}\operatorname{sen} s\frac{2\pi r}{2n+1} +$$

$$+\left(a_1\sum_{r=0}^{2n}\cos\frac{2\pi r}{2n+1}\operatorname{sen} s\frac{2\pi r}{2n+1} + b_1\sum_{r=0}^{2n}\operatorname{sen}\frac{2\pi r}{2n+1}\operatorname{sen} s\frac{2\pi r}{2n+1}\right) + \dots$$

$$\dots=\sum_{r=0}^{2n} f\left(\frac{2\pi r}{2n+1}\right)\operatorname{sen} s\frac{2\pi r}{2n+1}.$$

Teniamo ora conto delle uguaglianze, valide per tutti i valori di ν e s interi positivi o nulli,

$$
(2)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{r=0}^{2n}\cos\nu\frac{2\pi r}{2n+1}\cos s\frac{2\pi r}{2n+1} \\[4em]
\displaystyle\sum_{r=0}^{2n}\operatorname{sen}\nu\frac{2\pi r}{2n+1}\operatorname{sen} s\frac{2\pi r}{2n+1}
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
=0,\ \text{se non è nè } \nu-s\equiv 0,\ \text{nè}\ \nu+s\equiv 0\ (\text{mod. } 2n+1);\\[0.5em]
=\dfrac{2n+1}{2},\ \text{se } \nu-s\equiv 0\ (\text{mod. } 2n+1)\ \text{e non } \nu+s\equiv 0;\\[0.5em]
=\dfrac{2n+1}{2}\ \text{la prima e } =-\dfrac{2n+1}{2}\ \text{la seconda, se } \nu+s\equiv 0\ (\text{mod. } 2n+1)\ \text{e non } \nu-s\equiv 0;\\[0.5em]
=2n+1\ \text{la prima e } =0\ \text{la seconda, se } \nu-s\equiv 0\ \text{e } \nu+s\equiv 0\ (\text{mod. } 2n+1).
\end{array}\\[2em]
\displaystyle\sum_{r=0}^{2n}\operatorname{sen}\nu\frac{2\pi r}{2n+1}\cos s\frac{2\pi r}{2n+1}=0,
\end{array}\right.
$$

che si verificano tutte trasformando in somme i prodotti che figurano nelle sommatorie, ed applicando poi le (1) e (3) del n.° 11.

Da queste uguaglianze segue che, se è $\nu=0, 1, 2, \ldots, n$, ed $s=0, 1, 2, \ldots, n$, le prime due sommatorie in esse considerate sono entrambe uguali allo zero, per $\nu\neq s$, ed eguali a $\dfrac{2n+1}{2}$, per $\nu=s\neq 0$; per $\nu=s=0$, la prima di tali sommatorie è $=2n+1$ e la seconda è $=0$. Abbiamo così:

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
a_s &= \frac{2}{2n+1}\sum_{r=0}^{2n} f\left(\frac{2\pi r}{2n+1}\right)\cos s\frac{2\pi r}{2n+1},\\
b_s &= \frac{2}{2n+1}\sum_{r=0}^{2n} f\left(\frac{2\pi r}{2n+1}\right)\operatorname{sen} s\frac{2\pi r}{2n+1},
\end{aligned}\right.
\qquad (s=0, 1, 2, \ldots, n).
$$

Come nei casi considerati nei n.[i] 49 e 50, le formule precedenti dànno, passando al limite per $n\to\infty$, e supponendo che la funzione $f(x)$ sia limitata ed integrabile secondo la definizione di Cauchy,

$$\lim_{n \to \infty} a_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos s\alpha \, d\alpha ,$$

$$\lim_{n \to \infty} b_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha) \operatorname{sen} s\alpha \, d\alpha ,$$

vale a dire, i coefficienti a_s e b_s, al crescere indefinito di n, tendono ai coefficienti di Eulero-Fourier della funzione $f(x)$.

52. - Una proprietà delle somme $\sum_{r=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} rx}{r}$.

Prima di venire allo studio della convergenza delle formule d'interpolazione stabilite nei n.[i] precedenti, vogliamo provare la seguente proposizione: *È possibile determinare un numero positivo L, in modo che, per ogni x di* $(0, 2\pi)$ *ed ogni n, sia sempre*

$$\left| \sum_{r=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} rx}{r} \right| < L.$$

Trattandosi di una somma di seni, basta provare la cosa nell'intervallo $(0, \pi)$. Posto

$$s_n(x) = \frac{x}{2} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} rx}{r},$$

basterà poi dimostrare la proprietà enunciata per $s_n(x)$. Indichiamo con M_n il massimo modulo di $s_n(x)$ in tutto $(0, \pi)$, e cerchiamo di determinarlo. Abbiamo:

$$s_n'(x) = \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n} \cos rx = \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}},$$

e perciò le radici dell'equazione $s_n'(x) = 0$, contenute in $(0, \pi)$, sono date da $\frac{2\pi}{2n+1}$, $2\frac{2\pi}{2n+1}$,.... Al passare attraverso uno qualunque di questi punti, la $s_n'(x)$ cambia segno, ed essi sono, pertanto, punti di massimo o minimo relativo per $s_n(x)$, e quindi di massimo o minimo relativo per $|s_n(x)|$. Essi dànno poi tutti i massimi relativi di $|s_n(x)|$, escluso π. Nei due intervalli della x, $\left(0, \frac{2\pi}{2n+1}\right)$ e $\left(\frac{2\pi}{2n+1}, 2\frac{2\pi}{2n+1}\right)$, il numeratore della frazione che dà $s_n'(x)$, assume, in punti simmetrici rispetto a $\frac{2\pi}{2n+1}$, valori uguali in modulo, essendo tutti positivi i valori assunti nel primo intervallo e tutti negativi quelli assunti nel secondo. E siccome il denominatore, in un punto del secondo intervallo, è maggiore di quello relativo al punto corrispondente del primo, ne viene che, in ogni punto del secondo intervallo, $s_n'(x)$ ha valore negativo e, in modulo, minore del valore della $s_n'(x)$ nel punto simmetrico rispetto a $\frac{2\pi}{2n+1}$, ove la detta derivata è positiva. Dunque l'integrale della $s_n'(x)$ in $\left(\frac{2\pi}{2n+1}, 2\frac{2\pi}{2n+1}\right)$ è negativo e minore, in modulo, dell'integrale esteso a $\left(0, \frac{2\pi}{2n+1}\right)$. Pertanto la funzione $s_n(x)$, in $\left(\frac{2\pi}{2n+1}, 2\frac{2\pi}{2n+1}\right)$ è costantemente decrescente, ma non discende al valore che ha in 0 (che è $=0$). Per ragione analoga, in $\left(2\frac{2\pi}{2n+1}, 3\frac{2\pi}{2n+1}\right)$ la $s_n(x)$ è sempre crescente, ma non raggiunge il valore che essa ha in $\frac{2\pi}{2n+1}$. Se ne conclude che la $s_n(x)$ è, in $(0, \pi)$, sempre positiva (nulla solo per $x = 0$), che il massimo dei suoi massimi è dato da $x = \frac{2\pi}{2n+1}$, e che tale massimo è anche il massimo modulo M_n. È, pertanto,

$$M_n = \int_0^{\frac{2\pi}{2n+1}} s_n'(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{2n+1}} \frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}dx.$$

Vediamo ora come varia M_n al variare di n. Abbiamo:

$$\frac{dM_n}{dn} = \int_0^{\frac{2\pi}{2n+1}} \frac{x}{2}\,\frac{\cos\frac{2n+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}dx.$$

Il rapporto $\frac{x}{2} : \operatorname{sen}\frac{x}{2}$ è funzione crescente in $\left(0, \frac{2\pi}{2n+1}\right)$ e, nella prima metà di quest'intervallo, è $\cos\frac{2n+1}{2}x > 0$, mentre nella seconda metà, è $\cos\frac{2n+1}{2}x < 0$; i moduli di questo coseno sono poi uguali in punti simmetrici rispetto a $\frac{\pi}{2n+1}$. Dunque l'integrale precedente è negativo. È, perciò,

$$M_1 > M_2 > M_3 > \ldots,$$

ed il massimo di M_n è così

$$M_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi:3} \frac{\operatorname{sen}\frac{3}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\,dx.$$

Si conclude che, per ogni n e per ogni x di $(0, \pi)$, è

$$|s_n(x)| \leq M_1,$$

e ciò prova la proposizione enunciata [1].

53. - **Convergenza delle formule d'interpolazione.**

Indicato con $P_n(x)$ il polinomio trigonometrico di ordine n:

$$P_n(x) = \frac{1}{2}a_0^{(n)} + \left(a_1^{(n)}\cos x + b_1^{(n)}\operatorname{sen} x\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(a_n^{(n)}\cos nx + b_n^{(n)}\operatorname{sen} nx\right),$$

determinato nel n.° 51, tale cioè che i suoi coefficienti siano dati dalle formole (3) di tale n.°, proponiamoci di mostrare che, sotto opportune ipotesi fatte sulla funzione $f(x)$ da cui $P_n(x)$ discende, $P_n(x)$ converge verso la $f(x)$, in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$, al tendere all'infinito di n.

---

[1] Si può dimostrare (D. Jackson, *Ueber eine trigonometrische Summe.* Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXXII (1911), pp. 257-262) che, per $0 < x < \pi$, si ha $\sum_{r=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} rx}{r} > 0$, qualunque sia n.

E precisamente dimostriamo il seguente teorema:

Se la funzione $f(x)$ è continua nell' intervallo $(0, 2\pi)$ ed ha, in tale intervallo, la derivata prima (che in qualche punto può anche mancare) a variazione limitata, al tendere di n all' ∞ il polinomio trigonometrico d' interpolazione $P_n(x)$ converge uniformemente alla $f(x)$, in ogni intervallo completamente interno a $(0, 2\pi)$; in 0 e 2π, esso converge invece verso $f(0)$.

Se poi $f(x)$ assume lo stesso valore in 0 e 2π, $P_n(x)$ converge uniformemente verso la $f(x)$ in tutto $(0, 2\pi)$ [1].

Posto, per semplicità di scrittura, $\alpha_n = \dfrac{2\pi}{2n+1}$, i coefficienti di $P_n(x)$ vengono dati dalle formule

$$(1)\qquad \begin{cases} a_s^{(n)} = \dfrac{2}{2n+1}\displaystyle\sum_{r=0}^{2n} f(r\alpha_n)\cos sr\alpha_n\,, \\[2ex] b_s^{(n)} = \dfrac{2}{2n+1}\displaystyle\sum_{r=0}^{2n} f(r\alpha_n)\,\mathrm{sen}\, sr\alpha_n\,. \end{cases}$$

Il polinomio $P_n(x)$ potremo scriverlo, perciò, nella forma:

$$P_n(x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{s=1}^{n} \frac{2}{2n+1}\sum_{r=0}^{2n} f(r\alpha_n)\cos s(x - r\alpha_n),$$

ed anche, posto

$$(2)\qquad A_s^{(n)} = \frac{2}{2n+1}\sum_{r=0}^{2n} f(r\alpha_n)\cos s(x - r\alpha_n), \qquad (s = 0, 1, 2, \dots, n)$$

nella forma:

$$(3)\qquad P_n(x) = \frac{A_0^{(n)}}{2} + \sum_{s=1}^{n} A_s^{(n)}.$$

Vediamo di trasformare opportunamente l' espressione di $A_s^{(n)}$, per $0 < s \leq n$. Applicando la trasformazione di Brunacci-

---

[1] Questo teorema, in condizioni più generali [basta supporre la $f(x)$ continua e a variazione limitata in $(0, 2\pi)$], fu dimostrato, per altra via, da Ch. J. de la Vallée Poussin (loc. cit. in [1] a p. 148). Per la dimostrazione elementare del testo, vedi: L. Tonelli, *Sull' interpolazione trigonometrica*. (Memorie della R. Accad. delle Scienze di Bologna, S. VIII, T. III (1925-26), pp. 3-9).

Abel, abbiamo da (2):

$$A_s^{(n)} = \frac{2}{2n+1} \Big\{ f(2\pi) \sum_{r=0}^{2n} \cos s(x - r\alpha_n) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{2n} [\{ f(r\alpha_n) - f[(r+1)\alpha_n \} \sum_{h=0}^{r} \cos s(x - h\alpha_n)] \Big\}.$$

Ma è, applicando la formola (5) del n.° 11,

$$\sum_{r=0}^{2n} \cos s(x - r\alpha_n) = 0,$$

$$\sum_{h=0}^{r} \cos s(x - h\alpha_n) = \cos s\left(x - \frac{r\alpha_n}{2}\right) \frac{\operatorname{sen} \frac{r+1}{2} s\alpha_n}{\operatorname{sen} \frac{s\alpha_n}{2}} =$$

$$= - \frac{\operatorname{sen} s\left(x - \frac{2r+1}{2}\alpha_n\right)}{2 \operatorname{sen} \frac{s\alpha_n}{2}} + \frac{\operatorname{sen} s\left(x + \frac{\alpha_n}{2}\right)}{2 \operatorname{sen} \frac{s\alpha_n}{2}};$$

inoltre, indicando con $\beta_{n,r}$ un punto dell' intervallo $[r\alpha_n, (r+1)\alpha_n]$ in modo che sia

$$f[(r+1)\alpha_n] - f(r\alpha_n) = \alpha_n f'(\beta_{n,r}) \text{ (1)},$$

sostituendo nell' ultima espressione di $A_s^{(n)}$, e ponendo

$$\gamma_{s,n} = \frac{s\alpha_n}{2 \operatorname{sen} \frac{s\alpha_n}{2}},$$

abbiamo

$$A_s^{(n)} = \frac{\gamma_{s,n}}{s} \cdot \frac{2}{2n+1} \Big\{ \sum_{r=0}^{2n} f'(\beta_{n,r}) \operatorname{sen} s\left(x - \frac{2r+1}{2}\alpha_n\right) -$$

$$- \operatorname{sen} s\left(x + \frac{\alpha_n}{2}\right) \sum_{r=0}^{2n} f'(\beta_{n,r}) \Big\}.$$

Indichiamo con $A_{s,1}^{(n)}$ ed $A_{s,2}^{(n)}$ i due termini della differenza ora scritta, moltiplicati per il fattore esterno (onde avremo

---

(1) V. l' osservazione alla fine di questo n.°.

$A_s^{(n)} = A_{s,1}^{(n)} - A_{s,2}^{(n)}$), e cominciamo con lo studiare il comportamento di $A_{s,1}^{(n)}$, per $n \to \infty$. Applicando ancora la trasformazione di Brunacci-Abel, abbiamo

$$A_{s,1}^{(n)} = \frac{\gamma_{s,n}}{s} \cdot \frac{2}{2n+1} \left\{ f'(\beta_{n,2n}) \sum_{r=0}^{2n} \operatorname{sen} s\left(x - \frac{2r+1}{2}\alpha_n\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=0}^{2n-1} \left[\{f'(\beta_{n,r}) - f'(\beta_{n,r+1})\} \sum_{h=0}^{r} \operatorname{sen} s\left(x - \frac{2h+1}{2}\alpha_n\right)\right] \right\}.$$

Ma per la formola (6) del n.° 11, è

$$\sum_{r=0}^{2n} \operatorname{sen} s\left(x - \frac{2r+1}{2}\alpha_n\right) = 0,$$

$$\sum_{h=0} \operatorname{sen} s\left(x - \frac{2h+1}{2}\alpha_n\right) = \frac{\operatorname{sen} s\left(x - \frac{(r+1)\alpha_n}{2}\right) \operatorname{sen} s \frac{r+1}{2}\alpha_n}{\operatorname{sen} \frac{s\alpha_n}{2}};$$

inoltre, avendo supposto la $f'(x)$ a variazione limitata in $(0, 2\pi)$, indicata con V la variazione totale della $f'(x)$, abbiamo

$$\sum_{r=0}^{2n-1} | f'(\beta_{n,r}) - f'(\beta_{n,r+1}) | \leq V.$$

È dunque

$$| A_{s,1}^{(n)} | \leq \frac{2}{\pi s^2} \gamma_{s,n}^2 V,$$

ed anche, osservando che è sempre $1 \leq \gamma_{s,n} < 2$ $\left(\text{perchè, per } s = 0, 1, \ldots, n, \text{ si ha } 0 \leq \frac{s\alpha_n}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$,

$$(4) \qquad | A_{s,1}^{(n)} | \leq \frac{8V}{\pi s^2}.$$

Ne segue che la somma $\sum_{s=1}^{n} A_{s,1}^{(n)}$ converge, per $n \to \infty$, assolutamente ed uniformemente in tutto $(0, 2\pi)$; e poichè è, per la stessa definizione di $A_{s,1}^{(n)}$,

$$A_{s,1}^{(n)} \to \frac{1}{s\pi} \int_0^{2\pi} f'(\alpha) \operatorname{sen} s(x - \alpha) d\alpha,$$

quando $n \to \infty$, segue anche che è assolutamente ed uniformemente convergente, in tutto $(0, 2\pi)$, la serie

$$(5) \qquad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s\pi} \int_0^{2\pi} f'(\alpha) \operatorname{sen} s(x - \alpha) d\alpha,$$

e che questa serie ha per somma il limite di $\sum_{s=1}^{n} A_{s,1}^{(n)}$.

Veniamo ora allo studio di $A_{s,2}^{(n)}$, o meglio di $\sum_{s=1}^{n} A_{s,2}^{(n)}$. È

$$\sum_{s=1}^{n} A_{s,2}^{(n)} = \left[\frac{2}{2n+1} \sum_{r=0}^{2n} f'(\beta_{n,r})\right] \sum_{s=1}^{n} \gamma_{s,n} \frac{1}{s} \operatorname{sen} s\left(x + \frac{\alpha_n}{2}\right),$$

dove il primo fattore racchiuso in parentesi quadra è indipendente da x, e tende, per $n \to \infty$, a

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} [f(2\pi) - f(0)].$$

Per il secondo fattore, osserviamo che $\gamma_{s,n}$ è funzione crescente con s, $(s = 0, 1, 2, \ldots, n)$, ed è sempre compreso fra 1 e 2; inoltre, come funzione di n, per $n \to \infty$ tende ad 1. Se allora ricordiamo che la serie $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} sz}{s}$ è convergente uniformemente verso $\frac{\pi - z}{2}$, per ogni z di un intervallo (a, b) tale che sia $0 < a < b < 2\pi$ (n.º 20, a)), abbiamo, per il n.º 13, che la somma

$$\sum_{s=1}^{n} \gamma_{s,n} \frac{1}{s} \operatorname{sen} s\left(x + \frac{\alpha_n}{2}\right)$$

converge, quando $n \to \infty$, uniformemente per ogni x di (a, b), verso

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} sx}{s} = \frac{\pi - x}{2}.$$

Dunque $\sum_{s=1}^{n} A_{s,2}^{(n)}$ converge uniformemente, in ogni intervallo completamente interno a $(0, 2\pi)$, verso $\frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi} (\pi - x)$.

Per $x=0$ e $x=2\pi$, è poi, tenendo conto dell'espressione di $\gamma_{s,n}$:

$$\sum_{s=1}\gamma_{s,n}\frac{1}{s}\operatorname{sen}s\left(x+\frac{\alpha_n}{2}\right)=\sum_{s=1}^{n}\gamma_{s,n}\frac{1}{s}\operatorname{sen}s\frac{\alpha_n}{2}=\frac{n\alpha_n}{2}=\frac{n\pi}{2n+1},$$

e perciò, per $n\to\infty$,

$$\sum_{s=1}^{n}A_{s,2}^{(n)}\to\frac{f(2\pi)-f(0)}{2}.$$

Concludiamo, pertanto, che il polinomio trigonometrico (3)

$$P_n(x)=\frac{1}{2}A_0^{(n)}+\sum_{s=1}^{n}A_s^{(n)}=\frac{1}{2}A_0^{(n)}+\sum_{s=1}^{n}A_{s,1}^{(n)}-\sum_{s=1}^{n}A_{s,2}^{(n)},$$

converge uniformemente, per $n\to\infty$, in ogni intervallo completamente interno a $(0, 2\pi)$. Esso converge poi anche in $x=0$ e $x=2\pi$.

Resta da mostrare che la convergenza di $P_n(x)$ avviene proprio verso $f(x)$.

Osserviamo, in primo luogo, che, per quanto abbiamo dimostrato nel n.° 52, la somma

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}sz}{s}$$

è, in modulo, inferiore ad un numero fisso L, per tutti gli z di $(0, 2\pi)$ e tutti gli n. Da ciò deduciamo che, potendo scrivere, per la trasformazione di Brunacci-Abel,

$$\sum_{s=1}^{n}\gamma_{s,n}\frac{1}{s}\operatorname{sen}s\left(x+\frac{\alpha_n}{2}\right)=\gamma_{n,n}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\operatorname{sen}s\left(x+\frac{\alpha_n}{2}\right)+$$
$$+\sum_{s=1}^{n-1}\left\{(\gamma_{s,n}-\gamma_{s+1,n})\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{r}\operatorname{sen}r\left(x+\frac{\alpha_n}{2}\right)\right\},$$

è

$$\left|\sum_{s=1}^{n}\gamma_{s,n}\frac{1}{s}\operatorname{sen}s\left(x+\frac{\alpha_n}{2}\right)\right|<2L+L=3L.$$

Se dunque supponiamo che sia $f(0)=f(2\pi)$, è, per $n\to\infty$,

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{r=0}^{2n} f'(\beta_{n,r})\to\frac{f(2\pi)-f(0)}{\pi}=0,$$

e $\sum\limits_{s=1}^{n} A_{s,2}^{(n)}$ converge a zero uniformemente in tutto $(0, 2\pi)$. In tale caso, si ha, perciò, che $P_n(x)$ converge uniformemente in tutto $(0, 2\pi)$. Inoltre, dalla $f(0)=f(2\pi)$ segue, con un'integrazione per parti,

$$\frac{1}{s\pi}\int_0^{2\pi} f'(\alpha)\operatorname{sen} s(x-\alpha)d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos s(x-\alpha)d\alpha\,,$$

e la serie (5) può quindi scriversi

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos s(x-\alpha)d\alpha\,;$$

se dunque è $f(0)=f(2\pi)$, converge assolutamente ed uniformemente, in tutto $(0, 2\pi)$, anche la serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos s(x-\alpha)d\alpha$$

e la sua somma dà il limite di $P_n(x)$. Ma la serie qui scritta non è che la serie di Fourier della $f(x)$, e questa serie, essendo uniformemente convergente in tutto $(0, 2\pi)$, rappresenta una funzione continua che, per il ragionamento fatto al n.° 42, a), non è altro che la $f(x)$ medesima.

Concludiamo che, nel caso in cui sia $f(0)=f(2\pi)$, $P_n(x)$ converge uniformemente verso la $f(x)$ in tutto $(0, 2\pi)$.

Supponiamo ora che la $f(x)$ sia una funzione lineare in $(0, 2\pi)$. In questa ipotesi, la (4) mostra che è $A_{s,1}^{(n)}=0$, per ogni s ed ogni n. Resta, allora,

$$\sum_{s=1}^{n} A_s^{(n)}=-\sum_{s=1}^{n} A_{s,2}^{(n)}=-\frac{f(2\pi)-f(0)}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\gamma_{s,n}\frac{1}{s}\operatorname{sen} s\left(x+\frac{\alpha_n}{2}\right),$$

vale a dire (per quanto abbiamo già detto), $P_n(x)$ converge uniformemente, in ogni intervallo completamente interno a $(0, 2\pi)$, verso

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha - \frac{f(2\pi)-f(0)}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} sx}{s} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha - \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi}(\pi - x) = f(x);$$

e il primo membro di questa uguaglianza è ancora la serie di Fourier della $f(x)$.

In $x = 0$ ed in $x = 2\pi$, $P_n(x)$ converge poi verso $f(0)$.

Veniamo, infine, al caso generale, ed indichiamo con $\varphi(x)$ la funzione lineare coincidente con $f(x)$ in $x = 0$ e $x = 2\pi$. Potremo scrivere

$$f(x) = \{ f(x) - \varphi(x) \} + \varphi(x),$$

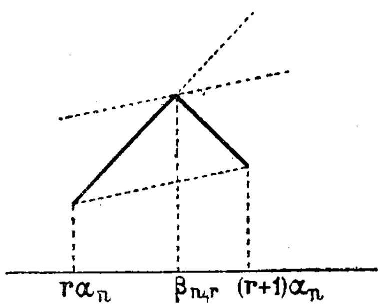
dove la $f(x) - \varphi(x)$, annullandosi in 0 e 2π, in tali punti assume lo stesso valore. Applicando perciò ad $f(x) - \varphi(x)$ e $\varphi(x)$ quanto si è già dimostrato, ed osservando che il polinomio trigonometrico $P_n(x)$ di $f(x)$ risulta uguale alla somma dei corrispondenti polinomi trigonometrici relativi a $f(x) - \varphi(x)$ e $\varphi(x)$, ne viene che $P_n(x)$ converge uniformemente, in ogni intervallo completamente interno a $(0, 2\pi)$, verso la funzione $\{ f(x) - \varphi(x) \} + \varphi(x) = f(x)$. Negli estremi 0 e 2π, $P_n(x)$ converge verso $0 + \varphi(0) = f(0)$.

Risulta inoltre, che, per $n \to \infty$, il polinomio $P_n(x)$ si trasforma nella somma delle serie di Fourier di $f(x) - \varphi(x)$ e di $\varphi(x)$, vale a dire nella serie di Fourier della $f(x)$, di cui risulta così nuovamente dimostrata la convergenza già stabilita al n.° 43.

Osservazione. — Se, come è ammesso nell' enunciato del teorema dimostrato, in alcuni punti (in numero finito) di $(0, 2\pi)$ non esiste la derivata $f'(x)$, in tali punti esisterà certamente la derivata destra e sinistra, perchè la $f'(x)$, essendo a variazione limitata, non può avere che discontinuità di 1ª specie. Allora, se nell' intervallo $[r\alpha_n, (r+1)\alpha_n]$ manca il punto $\beta_{n,r}$, tale che sia

$$f[(r+1)\alpha_n] - f(r\alpha_n) = \alpha_n f'(\beta_{n,r}),$$

vuol dire che, nell' intervallo considerato, vi è un punto in cui manca la $f'(x)$ (e ve ne sarà uno solo, se n è sufficientemente grande). Indicato con $\beta_{n,r}$ tale punto, il coefficiente angolare



$$\frac{f[(r+1)\alpha_n] - f(r\alpha_n)}{\alpha_n}$$

sarà compreso tra le due derivate destra e sinistra della $f(x)$ in $\beta_{n,r}$, e nella dimostrazione precedente si potrà senz' altro mettere, in luogo di $f'(\beta_{n,r})$, il valore del coefficiente angolare scritto.

54. - Relazione tra i coefficienti del polinomio di interpolazione ed i coefficienti di Eulero-Fourier.

Nel n.° 51 abbiamo già rilevato che, quando il numero dei punti fra i quali si eseguisce l' interpolazione cresce all' infinito, i coefficienti del polinomio trigonometrico d' interpolazione $P_n(x)$ tendono ai coefficienti corrispondenti di Eulero-Fourier (supposta la funzione $f(x)$ limitata ed integrabile secondo la definizione di Cauchy). Con ciò viene dato un mezzo per dedurre questi ultimi coefficienti dai primi. Ora vogliamo mostrare come, reciprocamente, i primi possano dedursi da quelli di Eulero-Fourier.

Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia sviluppabile in serie di Fourier convergente verso di essa in tutto l' intervallo $(0, 2\pi)$. (Ciò avviene, in particolare, se (n.° 42) la $f(x)$, oltre ad essere continua in tutto $(0, 2\pi)$ e ad assumere lo stesso valore in 0 e 2π, ha sempre derivata, eccettuati al più dei punti in numero finito, e tale derivata è a variazione limitata in tutto $(0, 2\pi)$). Scritto lo sviluppo indicato nella forma solita

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos sx + b_s \operatorname{sen} sx),$$

con

$$a_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos s\alpha \, d\alpha, \quad b_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha) \operatorname{sen} s\alpha \, d\alpha,$$

sia

$$P_n(x) = \frac{1}{2} a_0^{(n)} + \sum_{s=1}^{n} (a_s^{(n)} \cos sx + b_s^{(n)} \operatorname{sen} sx)$$

il polinomio trigonometrico d'interpolazione d'ordine n, determinato, come al n.° 51, mediante le uguaglianze

$$(2) \quad \begin{cases} a_s^{(n)} = \dfrac{2}{2n+1} \displaystyle\sum_{r=0}^{2n} f\left(\dfrac{2\pi r}{2n+1}\right) \cos s \dfrac{2\pi r}{2n+1}, \\ b_s^{(n)} = \dfrac{2}{2n+1} \displaystyle\sum_{r=0}^{2n} f\left(\dfrac{2\pi r}{2n+1}\right) \operatorname{sen} s \dfrac{2\pi r}{2n+1}, \end{cases} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Operiamo sulla (1), come già abbiamo fatto al n.° 51 sul polinomio trigonometrico di ordine n, tenendo conto delle uguaglianze (2) del n.° indicato.

Poniamo dunque, nella (1), $x = \dfrac{2\pi r}{2n+1}$, $(r = 0, 1, \ldots, 2n)$; moltiplichiamo poi ambo i membri una volta per $\cos s \dfrac{2\pi r}{2n+1}$, $(s = 0, 1, \ldots, n)$ e sommiamo rispetto all' indice r, ed un'altra volta per $\operatorname{sen} s \dfrac{2\pi r}{2n+1}$ e sommiamo ancora rispetto all' indice r. Otteniamo, per $s = 0$,

$$\sum_{r=0}^{2n} f\left(\frac{2\pi r}{2n+1}\right) = (2n+1)\left(\frac{a_0}{2} + a_{2n+1} + a_{2(2n+1)} + a_{3(2n+1)} + \ldots\right)$$

e, per $s = 1, 2, \ldots, n$,

$$\sum_{r=0}^{2n} f\left(\frac{2\pi r}{2n+1}\right) \cos s \frac{2\pi r}{2n+1} = \frac{2n+1}{2} (a_s + a_{s+(2n+1)} + a_{s+2(2n+1)} + \\ + a_{s+3(2n+1)} + \ldots + a_{(2n+1)-s} + a_{2(2n+1)-s} + a_{3(2n+1)-s} + \ldots,$$

$$\sum_{r=0}^{2n} f\left(\frac{2\pi r}{2n+1}\right) \operatorname{sen} s \frac{2\pi r}{2n+1} = \frac{2n+1}{2} (b_s + b_{s+(2n+1)} + b_{s+2(2n+1)} + \\ + b_{s+3(2n+1)} + \ldots - b_{(2n+1)-s} - b_{2(2n+1)-s} - b_{3(2n+1)-s} - \ldots$$

Tenendo conto delle (2), abbiamo così, per $s = 0, 1, 2, \ldots, n$,

$$a_s^{(n)} = a_s + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k(2n+1)+s} + a_{k(2n+1)-s}),$$

$$b_s^{(n)} = b_s + \sum_{k=1}^{\infty} (b_{k(2n+1)+s} - b_{k(2n+1)-s}).$$

La prima di queste formole è dovuta ad Eulero [1], la seconda a Gauss [2].

§ 2. Metodo dei minimi quadrati.

55. – Scostamento quadratico medio. Metodo dei minimi quadrati.

Date due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, su un intervallo (a, b), ed ivi integrabili insieme con i loro quadrati, si chiama *scostamento quadratico medio* delle due funzioni, in (a, b), l'espressione

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b (f-\varphi)^2 dx}.$$

Se è poi data una famiglia Φ di funzioni come la $\varphi(x)$, la rappresentazione approssimata della funzione $f(x)$ mediante quella funzione $\varphi(x)$ di Φ che dà, con la $f(x)$, il minimo scostamento quadratico medio, in (a, b), costituisce il metodo di rappresentazione detto *dei minimi quadrati*. Questo metodo fu fondato da Gauss, ed è molto adoperato nelle scienze sperimentali.

56. – Applicazione del metodo dei minimi quadrati alla rappresentazione con polinomi trigonometrici.

Data una funzione $f(x)$, integrabile, insieme col suo quadrato, in $(0, 2\pi)$, vogliamo determinare il polinomio trigonometrico di ordine n,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{r=1}^{n}(a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx),$$

che dà con la $f(x)$ il minimo scostamento quadratico medio in $(0, 2\pi)$.

Posto

$$I_n(a_0, a_1, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n) = \int_0^{2\pi}(f-\varphi)^2 dx,$$

---

[1] L. Euler, *Methodus facilis inveniendi series per sinus....* (Nova Acta Acad. Petrop., t. 11 (1793), edito 1798, pp. 94-113. Mem. presentata nel 1777).

[2] C. F. Gauss, *Theoria interpolationis methodo nova tractata* (Werke, Bd. 3, 1876, p. 298).

la soluzione del nostro problema è data dal polinomio trigonometrico, d'ordine n, che rende minimo l'integrale I_n.

La funzione I_n è definita in tutto il campo

$$-\infty < a_r < +\infty,$$
$$-\infty < b_r < +\infty,$$

e pertanto, se essa ammette un minimo, tale minimo deve trovarsi annullando le derivate parziali di I_n rispetto alle a_r ed alle b_r. Ora è

$$\frac{\partial I_n}{\partial a_0} = -\int_0^{2\pi} (f - \varphi_n)\,dx,$$

e, per $r = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{\partial I_n}{\partial a_r} = -2\int_0^{2\pi} (f - \varphi_n)\cos rx\,dx,$$

$$\frac{\partial I_n}{\partial b_r} = -2\int_0^{2\pi} (f - \varphi_n)\,\mathrm{sen}\, rx\,dx.$$

Dunque, il minimo, se esiste, si trova risolvendo le equazioni

$$\int_0^{2\pi} (f - \varphi_n)\cos rx\,dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} (f - \varphi_n)\,\mathrm{sen}\, rx\,dx = 0, \quad (r = 0, 1, \ldots, n).$$

Queste equazioni, tenendo conto delle uguaglianze

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos sx \cos rx\,dx \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\, sx\,\mathrm{sen}\, rx\,dx \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 0, \text{ se } s \neq r, \\ \pi, \text{ se } s = r \neq 0, \end{array}\right.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos sx\,\mathrm{sen}\, rx\,dx = 0,$$

si scrivono

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos rx\,dx = \pi a_r, \quad \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, rx\,dx = \pi b_r, \qquad (r = 0, 1, \ldots, n);$$

perciò, se il minimo esiste, esso corrisponde ai seguenti valori di a_r e b_r:

$$(1) \qquad a_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos rx\,dx\,, \quad b_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,rx\,dx.$$

Ora, per vedere che il minimo di I_n esiste effettivamente, basta, sviluppando, scrivere I_n nella forma

$$I_n = \int_0^{2\pi} f^2 dx - 2\int_0^{2\pi} f\varphi_n dx + \int_0^{2\pi} \varphi_n^2\, dx,$$

e quindi

$$I_n = \int_0^{2\pi} f^2 dx - 2\left\{\frac{1}{2}a_0\int_0^{2\pi} f dx + \sum_{r=1}^{n}\left(a_r\int_0^{2\pi} f(x)\cos rx\,dx + b_r\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,rx\,dx\right)\right\} +$$
$$+ \pi\left(\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{r=1}^{n}(a_r^2 + b_r^2)\right).$$

Di qui risulta che I_n è funzione razionale intera di 2° grado nelle sue variabili a_r e b_r, e che la parte omogenea di 2° grado, in essa contenuta, ha soltanto i quadrati delle variabili e con coefficienti tutti positivi. Pertanto, quando l'espressione

$$\sqrt{a_0^2 + \sum_{r=1}^{n}(a_r^2 + b_r^2)}$$

tende all'infinito, I_n tende pure a $+\infty$. Il limite inferiore di I_n è perciò raggiunto in un punto al finito, vale a dire esiste il minimo. Con ciò è provato che il polinomio $\varphi_n(x)$, con i coefficienti dati dalle (1), rende minimo I_n, ossia risolve il nostro problema. Ma le formule (1) sono quelle di Eulero-Fourier, e perciò $\varphi_n(x)$ è la somma parziale della serie di Fourier della $f(x)$. Se ne conclude che *la somma parziale della serie di Fourier della $f(x)$ dà, con questa funzione, il minimo scostamento quadratico medio, in* $(0, 2\pi)$, *fra tutti i polinomi trigonometrici del suo ordine.* Possiamo anche dire che, quando si voglia rappresentare approssimativamente una funzione $f(x)$, a quadrato integrabile, in $(0, 2\pi)$, con un polinomio trigonometrico di ordine n, *il metodo dei minimi quadrati conduce alla somma parziale della serie di Fourier della $f(x)$.*

Pertanto lo studio della convergenza del polinomio trigonometrico, dato dal metodo dei minimi quadrati, si identifica con quello della convergenza della serie di Fourier.

Si vedrà, in seguito (n.[i] 64 e 83), che il minimo valore dell'integrale I_n, necessariamente non crescente al crescere di n, tende allo zero al crescere indefinito di n.

§ 3. Polinomi trigonometrici di Fejér.

57. - Metodo della media aritmetica di Cesàro.

Consideriamo una successione di numeri

$$(1) \qquad s_1,\ s_2, \dots,\ s_n, \dots,$$

e da questa deduciamone un'altra

$$(2) \qquad \sigma_1,\ \sigma_2, \dots,\ \sigma_n, \dots,$$

ponendo

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n};$$

si passa dunque dalla successione (1) alla (2), sostituendo ad ogni termine della (1) la media aritmetica di tutti i termini della successione fino a quello considerato.

Se la (1) converge ad un limite finito l, anche la (2) converge allo stesso limite. Ciò è già stato dimostrato al n.° 13, ma può anche provarsi nel seguente modo. Supposto $s_n \to l$, e preso $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un n_0 tale che, per ogni $n > n_0$, sia $s_n = l + \varepsilon_n$, con $|\varepsilon_n| < \varepsilon$. Allora, per ogni $n > n_0$, abbiamo

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_{n_0}}{n} + \frac{s_{n_0+1} + \dots + s_n}{n}$$

$$= \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_{n_0}}{n} + l\,\frac{n - n_0}{n} + \frac{\varepsilon_{n_0+1} + \dots + \varepsilon_n}{n}.$$

Ma è

$$\left|\frac{\varepsilon_{n_0+1} + \dots + \varepsilon_n}{n}\right| < \varepsilon\left(1 - \frac{n_0}{n}\right) < \varepsilon;$$

e d'altra parte, poichè, per $n \to \infty$, è $\dfrac{s_1 + s_2 + \dots + s_{n_0}}{n} \to 0$ ed anche $\dfrac{n_0}{n} \to 0$, potremo determinare un $n_1 > n_0$, tale che, per ogni $n > n_1$, sia

$$\left|\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_{n_0}}{n}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{l n_0}{n}\right| < \varepsilon.$$

È dunque, per $n > n_1$,

$$|\sigma_n - l| < 3\varepsilon.$$

Con ragionamento analogo a questo si prova pure che, se la (1) è composta di numeri reali ed ha limite infinito, allo stesso limite tende pure la (2).

Non vale però la reciproca di quanto abbiamo ora dimostrato. Ed infatti, se prendiamo per successione (1) la seguente:

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \dots,$$

la corrispondente (2) è:

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{3}{7}, \dots,$$

che ha per limite $\frac{1}{2}$, mentre la prima non ha limite.

Dunque la (2) può avere limite anche quando la (1) non lo ha.

La considerazione della successione delle medie aritmetiche (2), è stata utilmente applicata dal Cesàro [1] allo studio delle serie indeterminate. L' applicazione è fatta prendendo per successione (1) quella delle somme parziali della seria data.

È bene rilevare che dalla dimostrazione data più sopra (come anche da quella del n.° 13), risulta pure che, se s_n è funzione continua in un dato intervallo (a, b), e se, in tutto quest' intervallo, la (1) converge uniformemente, anche la (2) converge uniformemente, in tutto (a, b), verso lo stesso limite.

58. - I polinomi trigonometrici di Fejér.

Il Fejér [2] ha brillantemente applicato il metodo del Cesàro della media aritmetica alla rappresentazione approssimata delle

---

(1) E. Cesàro, *Sur la moltiplication des séries.* (Bulletin des Sciences Mathématiques, S. 2, t. XIV (1890), pp. 114-120).

(2) L. Fejér, *Sur les fonctions bornées et intégrables.* (Comptes rendus, t. 131 (1900), pp. 984-987); *Untersuchungen ueber Fouriersche Reihen* (Math. Annalen, Bd. 58 (1904), pp. 51-69).

funzioni mediante polinomi trigonometrici. Consideriamo una funzione $f(x)$, integrabile, in $(0, 2\pi)$, e sia

$$(1) \qquad s_0(x), \quad s_1(x), \quad s_2(x), \ldots, \quad s_n(x), \ldots$$

la successione dei polinomi trigonometrici, degli ordini rispettivi $0, 1, 2, \ldots n, \ldots$, aventi per coefficienti i coefficienti di Eulero-Fourier relativi alla $f(x)$. La successione scritta è quella delle somme parziali della serie di Fourier della $f(x)$, ed anche la successione dei polinomi ottenuti col metodo dei minimi quadrati del § preced., qualora anche il quadrato della $f(x)$ risultasse integrabile.

Sotto le condizioni dei teoremi del n.° 42, la (1) converge verso la $f(x)$, esclusi al più gli estremi di $(0, 2\pi)$; ma se le condizioni indicate non sono verificate, questa convergenza può mancare, pur anche supponendo la $f(x)$ sempre continua.

Vedremo più oltre esempi di ciò.

Il Fejér sostituisce, alla considerazione della successione (1), quella della successione delle medie aritmetiche

$$(2) \qquad \sigma_1(x), \quad \sigma_2(x), \ldots, \quad \sigma_n(x), \ldots,$$

con

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_{n-1}(x)}{n},$$

e dimostra, fra l'altro, che, se la $f(x)$ è continua in $(0, 2\pi)$, la (2) converge verso la $f(x)$ in tutti i punti di $(0, 2\pi)$, esclusi al più gli estremi 0 e 2π.

Il polinomio $\sigma_n(x)$ lo chiameremo *polinomio trigonometrico di Fejér, d'ordine* $n-1$, *relativo alla* $f(x)$.

È opportuno, per giungere ai risultati di Fejér, porre $\sigma_n(x)$ sotto forma di integrale. A tale scopo, cominciamo col fare la stessa cosa per la somma $s_n(x)$.

È

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{r=1}^{n}(a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx),$$

con

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos r\alpha\, d\alpha, \qquad b_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha) \operatorname{sen} r\alpha\, d\alpha;$$

perciò, sostituendo, si ha

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos r(x-\alpha)d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n} \cos r\,(x-\alpha)\right\} d\alpha,$$

ossia, per la (1) del n.° 11,

(3) $$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\frac{\operatorname{sen}\dfrac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\operatorname{sen}\dfrac{x-\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

Abbiamo dunque

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\frac{\sum\limits_0^{n-1}\operatorname{sen}\dfrac{2r+1}{2}(x-\alpha)}{\operatorname{sen}\dfrac{x-\alpha}{2}}\,d\alpha,$$

e tenendo conto dell' uguaglianza

$$\sum_0^{n-1}\operatorname{sen}\frac{2r+1}{2}(x-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}^2\dfrac{n}{2}(x-\alpha)}{\operatorname{sen}\dfrac{x-\alpha}{2}},$$

che è un caso particolare della (8) del n.° 11, si ottiene

(4) $$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\left(\frac{\operatorname{sen} n\dfrac{x-\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{x-\alpha}{2}}\right)^2 d\alpha.$$

Supponendo di definire la funzione $f(x)$ in tutto $(-\infty, +\infty)$, considerandola come funzione periodica, di periodo 2π, e sostituendo il suo valore in 2π con $f(0)$, possiamo scrivere (poichè l' espressione sotto il segno, nell' integrale precedente, è periodica, di periodo 2π)

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha)\left(\frac{\operatorname{sen} n\dfrac{x-\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{x-\alpha}{2}}\right)^2 d\alpha,$$

ed anche, ponendo $\dfrac{x-\alpha}{2} = -z$,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi:2}^{\pi:2} f(x+2z)\left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz,$$

ossia

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi:2} [f(x+2z)+f(x-2z)]\left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz. \tag{5}$$

Notiamo che, se è $f(x) \equiv 1$, risulta $a_0 = 2$, e, per ogni $r > 0$, $a_r = 0$, $b_r = 0$, onde $s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 = 1$, qualunque sia n, e $\sigma_n(x) = 1$. Perciò la (5) dà, per $f(x) \equiv 1$,

$$1 = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi:2} \left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz. \tag{6}$$

Osservazione. — Dalle (5) e (6) risulta immediatamente che, se è, in tutto $(0, 2\pi)$,

$$l \leq f(x) \leq L, \tag{7}$$

è pure, in tutto $(0, 2\pi)$, e per ogni n (intero, positivo),

$$l \leq \sigma_n(x) \leq L. \tag{8}$$

Infatti, supposta la (7), si ha dalla (5)

$$\frac{2l}{\pi n}\int_0^{\pi:2} \left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz \leq \sigma_n(x) \leq \frac{2L}{\pi n}\int_0^{\pi:2} \left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz,$$

da cui, per la (6), segue la (8).

59. - Teorema di Fejér.

Se la funzione $f(x)$ è integrabile in $(0, 2\pi)$, il suo polinomio trigonometrico di Fejér, d'ordine n, converge verso di essa, per $n \to \infty$, in ogni punto, interno a $(0, 2\pi)$, in cui la funzione stessa è continua; converge invece verso $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ in ogni *punto interno a* $(0, 2\pi)$ *in cui la* $f(x)$ *è discontinua di 1ª specie* (¹). Ciò vale anche per gli estremi 0 e 2π, intendendo però che il valore della $f(x)$ in 2π, sia sostituito con $f(0)$ e che la continuità o discontinuità della funzione sia considerata in relazione alla funzione definita, in tutto $(-\infty, +\infty)$, come periodica e di periodo 2π.

Indichiamo con $\Phi(x)$ una qualsiasi funzione della x, definita in $(0, 2\pi)$. In virtù della (6) del n.º preced., è

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi:2}\Phi(x)\left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz\,;$$

sottraendo poi, membro a membro, dalla (5) del detto n.º, e ponendo

$$\varphi(z) = f(x+2z) + f(x-2z) - 2\Phi(x),$$

otteniamo

$$\sigma_n(x) - \Phi(x) = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi:2}\varphi(z)\left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz. \tag{1}$$

Se δ è un numero positivo minore di $\pi:2$, possiamo scrivere

$$\sigma_n(x) - \Phi(x) = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\delta}\varphi(z)\left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz + \frac{1}{\pi n}\int_\delta^{\pi:2}\varphi(z)\left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz. \tag{2}$$

Ma è

$$\left|\frac{1}{\pi n}\int_\delta^{\pi:2}\varphi(z)\left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz\right| < \frac{1}{\pi n \operatorname{sen}^2\delta}\int_0^{\pi:2}|\varphi(z)|\,dz \tag{3}$$

$$< \frac{1}{\pi n \operatorname{sen}^2\delta}\left\{\int_0^{2\pi}|f(z)|\,dz + \pi\,|\Phi(x)|\right\},$$

dove l'ultima espressione tende a zero, per $n \to \infty$. Inoltre, se, per un valore di x di $(0, 2\pi)$, la funzione $\varphi(z)$ risulta, per $z = 0$, continua e nulla, preso un $\varepsilon > 0$, si può determinare

---

(¹) L. Fejér, loc. cit. in (²) a pag. 167.

Intenderemo sempre, qui e nel seguito, che, in un punto di discontinuità di 1ª specie, i limiti $f(x-0)$ e $f(x+0)$ siano *finiti*.

un $\delta > 0$ e minore di $\pi:2$, in modo che, per $0 \leq z \leq \delta$, sia $|\varphi(z)| < \varepsilon$; ed allora è

$$(4) \qquad \left| \frac{1}{\pi n} \int_0^\delta \varphi(z) \left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz \right| < \frac{\varepsilon}{\pi n} \int_0^{\pi:2} \left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz = \frac{\varepsilon}{2},$$

in virtù della (6) del n.º preced. Per il punto x considerato, si può dunque determinare un n_0 tale che, per ogni $n > n_0$, sia

$$|\sigma_n(x) - \Phi(x)| < \varepsilon,$$

il che prova l'uguaglianza

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(x) = \Phi(x).$$

Si è nel caso ora considerato, se x è un punto di continuità della $f(x)$ e si pone $\Phi(x) = f(x)$; in tale punto abbiamo dunque

$$\sigma_n(x) \to f(x).$$

Si è ancora nel caso considerato, se x è un punto di discontinuità di 1ª specie ed in esso si pone

$$\Phi(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2};$$

in tale punto è allora

$$\sigma_n(x) \to \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Il teorema è così dimostrato.

Osservazione I. — Si è sempre nel caso più sopra considerato se, nel punto x, la somma $f(x+2z) + f(x-2z)$ ha limite finito per $z \to 0$ e si pone $\Phi(x)$ uguale alla metà di tale limite. Dunque, in ogni punto x in cui $f(x+2z) + f(x-2z)$ ha un limite finito l per $z \to 0$ (in particolare, per ogni x_0 tale che la curva rappresentatrice della $f(x)$ sia, in vicinanza della retta $x = x_0$, simmetrica rispetto ad un punto di questa retta) è $\sigma_n(x) \to l:2$. Per esempio, la funzione definita in $(-\pi, +\pi)$ da $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, con $y = k$ per $x = 0$, ha in $x = 0$ una discontinuità di 2ª specie, ma è $f(2z) + f(-2z) = 0$, per ogni z; perciò il polinomio trigonometrico $\sigma_n(x)$, corrispondente a tale funzione, tende, nel punto $x = 0$, allo zero, per $n \to \infty$.

OSSERVAZIONE II. — Se indichiamo con $\overline{f}(x)$ e $\underline{f}(x)$ il massimo ed il minimo limite d'indeterminazione della funzione $f(x)$ nel punto x, e cioè il massimo ed il minimo limite d'indeterminazione di $f(x')$ per $x' \to x$, abbiamo che tra $\overline{f}(x)$ e $\underline{f}(x)$ *sono compresi anche i limiti d'indeterminazione, in x, del polinomio trigonometrico di Fejér $\sigma_n(x)$, della $f(x)$, per $n \to \infty$*. Ed infatti, posto $\Phi(x) \equiv 0$, e supponendo, per fissare le idee, $\overline{f}(x)$ e $\underline{f}(x)$ ambedue finiti, preso un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, possiamo determinare un $\delta > 0$, in modo che, per $0 < z \leq \delta$, la $\varphi(z) = f(x+2z) + f(x-2z)$ sia sempre compresa fra $2\underline{f}(x) - \varepsilon$ e $2\overline{f}(x) + \varepsilon$. Abbiamo allora

$$\frac{2\underline{f}(x) - \varepsilon}{\pi n} \int_0^\delta \left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz \leq \frac{1}{\pi n} \int_0^\delta \varphi(z) \left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz \leq$$

$$\leq \frac{2\overline{f}(x) + \varepsilon}{\pi n} \int_0^\delta \left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz;$$

e poichè è, per $n \to \infty$,

$$\frac{1}{\pi n} \int_\delta^{\pi:2} \left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz < \frac{1}{\pi n \operatorname{sen}^2 \delta} \frac{\pi}{2} \to 0,$$

da quanto abbiamo ora scritto e dalla (6) del n.° 58 segue che i limiti d'indeterminazione di

$$\frac{1}{\pi n} \int_0^\delta \varphi(z) \left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz,$$

per $n \to \infty$, sono compresi fra $\underline{f}(x) - \frac{\varepsilon}{2}$ e $\overline{f}(x) + \frac{\varepsilon}{2}$. Siccome poi, per la (3), è, per $n \to \infty$,

$$\frac{1}{\pi n} \int_\delta^{\pi:2} \varphi(z) \left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz \to 0,$$

ne viene che fra $\underline{f}(x) - \frac{\varepsilon}{2}$ e $\overline{f}(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ sono compresi anche i limiti d'indeterminazione di $\sigma_n(x)$. Essendo ε arbitrario, è provato così quanto avevamo affermato.

60. - Convergenza uniforme.

Se (a, b) è un intervallo interno a $(0, 2\pi)$, e se la $f(x)$ (integrabile in tutto $(0, 2\pi)$) risulta continua in ogni punto di

(a, b), *allora il polinomio trigonometrico* $\sigma_n(x)$ *converge verso la* $f(x)$ *uniformemente in tutto* (a, b).

Prendendo, in (a, b), $\Phi(x) \equiv f(x)$, si può determinare, per la continuità uniforme, un δ per tutti i punti x di (a, b), in modo che sia sempre, se $0 \leq z \leq \delta$, $|\varphi(z)| < \varepsilon$; ed allora, ciò che abbiamo affermato risulta immediatamente dalle (2), (3) e (4) del n.° precedente.

In particolare, *se la funzione* $f(x)$ *è continua in tutto* $(0, 2\pi)$, *ed assume negli estremi* 0 *e* 2π *lo stesso valore,* $\sigma_n(x)$ *converge uniformemente verso la* $f(x)$ *in tutto* $(0, 2\pi)$.

61. - **Lemma.**

Prima di dare il teorema di Lebesgue, generalizzazione di quello di Fejér, occorre dimostrare un lemma, pure dovuto al Lebesgue.

Se $f(x)$ *è una funzione integrabile in* (a, b) *e se* c *è una costante qualunque, l'espressione* $|f(x) - c|$ *è la derivata del suo integrale indefinito in quasi-tutto* (a, b), *indipendentemente dal valore di* c [1].

Consideriamo l'insieme di tutti i valori razionali di c, insieme che sappiamo essere numerabile. Per ciascun valore c' di tale insieme, l'insieme dei punti di (a, b) in cui $|f(x) - c'|$ non è la derivata del suo integrale indefinito, è di misura nulla. Tale è pertanto anche l'insieme E dei punti di tutti gli insiemi ora indicati relativi a tutti i valori razionali c'. Dico che, in ogni punto x_0 di (a, b) non appartenente ad E, $|f(x) - c|$ è la derivata del suo integrale indefinito qualunque sia c, anche non razionale. Ed infatti, considerato un valore c irrazionale e preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, indichiamo con c' un valore razionale, tale che sia $|c - c'| < \varepsilon$. Abbiamo allora

$$\left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} |f(x) - c|\, dx - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} |f(x) - c'|\, dx \right|$$
$$\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{x_0}^{x} \Big|\, |f(x) - c| - |f(x) - c'| \,\Big|\, dx$$
$$< \varepsilon .$$

---

[1] H. Lebesgue, *Recherches sur la convergence des séries de Fourier* (Math. Annalen, Bd. 61 (1905), pp. 251-280); *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 13.

Ma poichè c' è razionale e x_0 non appartiene ad E, si ha per $x \to x_0$,

$$\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} | f(x) - c' | \, dx \to | f(x_0) - c' | ;$$

è dunque, per $\delta > 0$ e sufficientemente piccolo, e per ogni x tale che $| x - x_0 | < \delta$,

$$\left| \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} | f(x) - c | \, dx - | f(x_0) - c' | \right| < 2\varepsilon,$$

ed anche, per la $| c - c' | < \varepsilon$,

$$\left| \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} | f(x) - c | \, dx - | f(x_0) - c | \right| < 3\varepsilon.$$

Siccome ε è arbitrario, ciò dimostra che $| f(x_0) - c |$ è, per $x = x_0$, la derivata dell'integrale indefinito di $| f(x) - c |$.

62. - Teorema di Lebesgue.

Se la funzione $f(x)$ *è integrabile, in* $(0, 2\pi)$, *il suo polinomio trigonometrico di Fejér, di ordine* n, *converge verso di essa, per* $n \to \infty$, *in quasi-tutto* $(0, 2\pi)$ (¹).

Posto, come nel n.° 59,

$$\varphi(z) = f(x + 2z) + f(x - 2z) - 2\Phi(x),$$

abbiamo per il polinomio $\sigma_n(x)$ di Fejér, analogamente alla (1) del n.° 59,

$$\sigma_n(x) - \Phi(x) = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi:2} \varphi(z)\left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz,$$

donde

$$| \sigma_n(x) - \Phi(x) | \leq \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi:2} | \varphi(z) | \left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz$$

$$\leq \frac{\pi n}{4}\int_0^{\pi:2} | \varphi(z) | \left(\frac{\operatorname{sen} nz}{nz}\right)^2 dz,$$

(¹) Vedi loc. cit. in (¹) a pag. 170. Vedi anche: L. Fejér, *Ueber die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Fourierreihe* (Nachr. d. Gesellschaft d. Wissenschaften z. Göttingen, 1925, pp. 13-17).

perchè, per $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$, è sempre $\frac{\operatorname{sen} z}{z} \geq \frac{2}{\pi}$. Ma, per ogni $x \geq 0$, è anche $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| < \frac{2}{1+x}$, e perciò

$$|\sigma_n(x) - \Phi(x)| \leq \pi \int_0^{\pi:2} |\varphi(z)| \frac{n}{(1+nz)^2}\, dz.$$

Se ora poniamo,

$$\psi(z) = \int_0^z |\varphi(z)|\, dz,$$

otteniamo, dalla disuguaglianza precedente, con un' integrazione per parti,

$$|\sigma_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{\pi n}{\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)^2} \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi \int_0^{\pi:2} \psi(z) \frac{n^2}{(1+nz)^3}\, dz.$$

Il primo termine del secondo membro tende a zero per $n \to \infty$. Per il secondo termine, abbiamo

$$\int_0^{\pi:2} \psi(z) \frac{n^2}{(1+nz)^3}\, dz \leq \int_0^{\pi:2} \frac{\psi(z)}{z} \frac{n}{(1+nz)^2}\, dz;$$

e se è, nel punto x che consideriamo,

(1) $$\frac{\psi(z)}{z} \to 0$$

per $z \to +0$, preso $\varepsilon > 0$, ad arbitrio, possiamo determinare un δ positivo e minore di $\pi:2$, in modo che, per $0 < z \leq \delta$, sia $\frac{\psi(z)}{z} < \varepsilon$, e quindi

$$\int_0^{\pi:2} \psi(z) \frac{n^2}{(1+nz)^3}\, dz \leq \varepsilon \int_0^{\delta} \frac{n}{(1+nz)^2}\, dz + \frac{\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\delta} \int_\delta^{\pi:2} \frac{n}{(1+nz)^2}\, dz$$
$$\leq 2\varepsilon$$

per n sufficientemente grande, perchè è sempre

$$\int_0^{\delta} \frac{n}{(1+nz)^2}\, dz < 1,$$

e, per $n \to \infty$,

$$\int_{\delta}^{\pi:2} \frac{n}{(1+nz)^2}\, dz \to 0.$$

Dunque, se vale la (1), è, per tutti gli n maggiori di un certo n_0,

$$|\sigma_n(x) - \Phi(x)| < 3\varepsilon,$$

vale a dire è, nel punto x considerato, per $n \to \infty$,

$$\sigma_n(x) \to \Phi(x).$$

Facciamo ora $\Phi(x) = f(x)$ ed osserviamo che, essendo, con ciò,

$$|\varphi(z)| \leq |f(x+2z) - f(x)| + |f(x-2z) - f(x)|,$$

la condizione (1) è verificata in ogni punto x_0 in cui $|f(x_0+u) - - f(x_0)|$ è, per $u = 0$, la derivata di

$$\int_0^u |f(x_0+u) - f(x_0)|\, du,$$

cioè in ogni punto x_0 in cui $|f(x) - f(x_0)|$ è la derivata del suo integrale indefinito. Ma ciò avviene in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, in virtù del lemma del n.° 61. Dunque, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, è $\sigma_n(x) \to f(x)$.

OSSERVAZIONE I. — In ciò che precede abbiamo dimostrato che, se, in un punto x, vale la (1), ossia la

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} \int_0^z |\varphi(z)|\, dz = 0, \tag{1'}$$

è $\sigma_n(x) \to \Phi(x)$, per $n \to \infty$. Dalla (1') segue

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} \int_0^z \varphi(z) dz = 0, \tag{2}$$

che può anche scriversi

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+z) dz = \Phi(x).$$

Dunque la (1′) non può essere verificata che là dove esiste il limite ora scritto; inoltre, affinchè la (1′) sia soddisfatta, è necessario che $\Phi(x)$ sia uguale a questo limite. È poi evidente che la (2) può valere senza che valga la (1′).

Se la funzione $f(x)$ è, in tutto un intorno del punto x, *limitata*, si può dimostrare che si ha $\sigma_n(x) \to \Phi(x)$ anche se, in luogo della (1′), si suppone verificata la (2). Di più, la (2) è anche condizione necessaria affinchè si abbia $\sigma_n(x) \to \Phi(x)$. Pertanto, *se la $f(x)$ è limitata in tutto un intorno del punto x_0, condizione necessaria e sufficiente affinchè il polinomio trigonometrico di Fejér $\sigma_n(x)$ converga, nel punto x_0, per $n \to \infty$, ad un limite finito, è che esista finito il limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x_0 + z)\,dz\,; \tag{3}$$

e se questo limite esiste finito, esso è anche il limite di $\sigma_n(x_0)$, per $n \to \infty$.

Questo risultato è dovuto a G. H. Hardy e J. E. Littlewood [1]. Se la $f(x)$ non è limitata in un intorno del punto x_0, la (2) non è più sufficiente per assicurare l'esistenza del limite di $\sigma_n(x_0)$, per $n \to \infty$. Ciò è stato dimostrato da H. Hahn [2].

Osservazione II. — Nel caso in cui la $f(x)$ sia a quadrato integrabile in $(0, 2\pi)$, i teoremi di Fejér (n.° 59) e di Lebesgue (di questo n.°) si possono riguardare come corollari della seguente proposizione, dovuta a G. H. Hardy e J. E. Littlewood [3]:

Se la funzione $f(x)$ è integrabile, insieme col suo quadrato $f^2(x)$, in tutto $(0, 2\pi)$, indicato con $s_n(x)$ il polinomio trigonometrico d'ordine n, avente per coefficienti i coefficienti di Eulero-Fourier della $f(x)$, è in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, per $n \to \infty$,

$$\frac{|f(x) - s_0(x)| + |f(x) - s_1(x)| + \dots + |f(x) - s_{n-1}(x)|}{n} \to 0,$$

$$\frac{[f(x) - s_0(x)]^2 + [f(x) - s_1(x)]^2 + \dots + [f(x) - s_{n-1}(x)]^2}{n} \to 0.$$

---

(1) *Solution of the Cesàro summability problem for power-series and Fourier series.* (Math. Zeitschr. Bd. 19 (1923), pp. 67-96).

(2) *Ueber Fejérs Summierung der Fourierschen Reihen.* (Jahresbericht d. Deutsch. Math. Vereinigung, Bd. 25 (1917), pp. 359-366).

(3) *Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable.* (Comptes rendus, t. 156 (1913), pp. 1307-1309).

In particolare, ciò vale in tutti i punti in cui è, per $z \to 0$,

$$\frac{1}{z}\int_0^z |f(x+2z)+f(x-2z)-2f(x)|\,dz \to 0,$$

e, più particolarmente ancora, in tutti i punti in cui la $f(x)$ *è continua od in cui è* $f(x) = \lim_{z \to 0} \frac{f(x+z)+f(x-z)}{z}$.

63. - **Generalizzazioni.**

a) Data una successione di numeri

$$(1) \qquad s_1,\ s_2, \ldots,\ s_n, \ldots,$$

deduciamo da essa, come abbiamo già fatto nel n.° 57, la successione delle medie aritmetiche, che ora indicheremo con

$$(2) \qquad \sigma_1^{(1)},\ \sigma_2^{(1)}, \ldots,\ \sigma_n^{(1)}, \ldots,$$

essendo

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}.$$

Operando sulla (2), come abbiamo operato sulla (1), otteniamo la successione delle nuove medie aritmetiche

$$(3) \qquad \sigma_1^{(2)},\ \sigma_2^{(2)}, \ldots,\ \sigma_n^{(2)}, \ldots,$$

dove è

$$\sigma_n^{(2)} = \frac{\sigma_1^{(1)} + \sigma_2^{(1)} + \ldots + \sigma_n^{(1)}}{n}.$$

Operando ugualmente sulla (3), e così proseguendo ripetutamente, otterremo la successione delle *medie aritmetiche di rango r*, degli elementi della (1),

$$(4) \qquad \sigma_1^{(r)},\ \sigma_2^{(r)}, \ldots,\ \sigma_n^{(r)}, \ldots,$$

con

$$\sigma_n^{(r)} = \frac{\sigma_1^{(r-1)} + \sigma_2^{(r-1)} + \ldots + \sigma_n^{(r-1)}}{n},$$

r essendo un qualunque numero intero positivo.

Le considerazioni del n.° 57 ci permettono di affermare che, se la successione (1) ha limite finito, la successione (4) è, per ogni r, pure convergente allo stesso limite; e che, se la (4) ha limite finito, per un dato r_0, ha lo stesso limite anche per ogni $r > r_0$. Però la (4) può avere limite finito per un r_0 senza che abbia limite la stessa successione per un $r < r_0$.

Prendendo come successione (1) quella delle somme parziali di una data serie

$$(5) \qquad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

ne viene che, se questa serie è convergente, ed ha per somma S, la media aritmetica di rango r (qualunque sia r, intero, positivo) $\sigma_n^{(r)}$ tende, per $n \to \infty$, ad S. Può però avvenire che, per un dato r (e quindi anche per tutti quelli maggiori), la $\sigma_n^{(r)}$ tenda, per $n \to \infty$, ad un limite finito $S^{(r)}$ senza che la (5) sia convergente.

Quando, per un dato r intero, positivo, la $\sigma_n^{(r)}$ tende ad un limite finito $\sigma^{(r)}$, per $n \to \infty$, si dice che *la serie* (5) *è sommabile col metodo delle medie aritmetiche di Hölder, di rango r, e la $\sigma^{(r)}$ si chiama somma generalizzata di Hölder, di rango r, della* (5) [1].

La generalizzazione del metodo della media aritmetica di Cesàro, che abbiamo esposto nel n.° 57, può ottenersi anche in forma diversa da quella indicata in quanto precede. Lo stesso Cesàro diede tale generalizzazione nella forma seguente. Partendo ancora dalla successione (1), poniamo

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &= s_1 + s_2 + \dots + s_n, \\ S_n^{(2)} &= S_1^{(1)} + S_2^{(1)} + \dots + S_n^{(1)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_n^{(r)} &= S_1^{(r-1)} + S_2^{(r-1)} + \dots + S_n^{(r-1)}; \end{aligned}$$

abbiamo allora

$$\begin{aligned} S_n^{(2)} &= ns_1 + (n-1)s_2 + \dots + s_n, \\ S_n^{(3)} &= \binom{n+1}{2}s_1 + \binom{n}{2}s_2 + \dots + \binom{2}{2}s_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$(6) \qquad S_n^{(r)} = \binom{n+r-2}{r-1}s_1 + \binom{n+r-3}{r-1}s_2 + \dots + \binom{r-1}{r-1}s_n.$$

---

[1] Le somme $\sigma_n^{(r)}$, per $r > 1$, furono considerate per la prima volta da O. Hölder in *Grenzwerte von Reihen an der Konvergenzgrenze* (Math. Annalen, Bd. 20 (1882), pp. 535-543).

Poniamo

$$(7) \qquad s_n^{(r)} = \frac{S_n^{(r)}}{\binom{n+r-1}{r}}.$$

Per $r = 1$, abbiamo

$$s_n^{(1)} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n},$$

vale a dire, la $s_n^{(1)}$ è la media aritmetica dei primi n elementi della (1). Per r (intero) maggiore di 1, la $s_n^{(r)}$ rappresenta ancora una media dei primi n elementi della (1), e precisamente una media aritmetica ponderata. Diremo che la $s_n^{(r)}$ è la *media di Cesàro di rango* r, dei primi n elementi della (1) (¹).

Prendendo ancora come successione (1) quella delle somme parziali della serie (5), se, per un intero positivo r, la $s_n^{(r)}$ tende, per $n \to \infty$, ad un limite finito $s^{(r)}$, si dice che *la* (5) *è sommabile col metodo delle medie di Cesàro di rango* r, e la $s^{(r)}$ si chiama *somma generalizzata del Cesàro, di rango* r, *della* (5).

Abbiamo già osservato che è $s_n^{(1)} = \sigma_n^{(1)}$; per $r > 1$, è, invece, $s_n^{(r)} \neq \sigma_n^{(r)}$. Nonostante ciò, *i due metodi di sommazione di Hölder e di Cesàro sono equivalenti*, nel senso che, se $\sigma_n^{(r)}$ ha, per $n \to \infty$, un limite finito $\sigma^{(r)}$, anche $s_n^{(r)}$ ha un limite finito $s^{(r)}$, ed è $\sigma^{(r)} = s^{(r)}$, e viceversa (²).

Il metodo di Cesàro si presta anche ad essere esteso ad un rango r *non intero*. Possiamo, infatti, scrivere la formula (6) nella forma

$$(6') \qquad S_n^{(r)} = \binom{n+r-2}{n-1} s_1 + \binom{n+r-3}{n-2} s_2 + \dots + \binom{r-1}{0} s_n;$$

(¹) Vedi E. CESÀRO, loc. cit. in (¹) a pag. 167.

(²) La prima parte di questa affermazione fu provata da K. KNOPP (*Grenzwerte von Reihen bei der Annaherung an die Convergenzgrenze*, Inaugural Dissertation, Berlin, 1907, pp. 1-50), la seconda da W. SCHNEE (*Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes*, Math. Annalen, Bd. 67 (1909), pp. 110-125). Altre dimostrazioni furono date in seguito da W. B. FORD (Am. Journ. of Math., Vol. 30 (1910), p. 315-326), G. FABER (Sitzungsberichte K. Bayer Akad., 1913, pp. 519-531), I. SCHUR (Math. Annalen, Bd. 74 (1913), pp. 447-458), F. HAUSDORFF (Math. Zeitschr., Bd. 9 (1921), pp. 74-109), H. HAHN (Monatshefte f. Math. u. Physik, Bd. 33 (1923), pp. 135-143), K. KNOPP (Math. Zeitschr., Bd. 19 (1923), pp. 97-113), S. DOBROWOLSKI (Bull. Acad. Polonaise, 1925, pp. 259-264), ecc.

analogamente, la (7) può essere scritta nella forma

$$(7') \qquad s_n^{(r)} = \frac{S_n^{(r)}}{\binom{n+r-1}{n-1}}.$$

E si vede le (6') e (7'), definiscono $S_n^{(r)}$ e $s_n^{(r)}$ non soltanto per ogni intero positivo r, ma *per ogni numero r, intero o no, maggiore di* -1.

Definite dunque le $S_n^{(r)}$ e $s_n^{(r)}$, mediante le (6') e (7'), e prendendo come successione (1) quella delle somme parziali della serie (5), se, per un qualsiasi $r > -1$, la $s_n^{(r)}$ tende, per $n \to \infty$, ad un limite finito $s^{(r)}$, si dice che *la* (5) *è sommabile col metodo delle medie di Cesàro, di rango r*, e la $s^{(r)}$ si chiama *somma generalizzata di Cesàro, di rango r, della* (5). Più brevemente, si dirà che *la* (5) *è sommabile* (C, r) *e che la $s^{(r)}$ è la somma* (C, r) *della* (5) (¹).

Si dimostra che, se è $-1 < r < r'$, e se la serie (5) è sommabile (C, r), essa è pure sommabile (C, r'), ed è $s^{(r)} = s^{(r')}$ (²).

b) Applicando il metodo generale di sommazione di Cesàro alle serie di Fourier, si sono ottenuti vari risultati che generalizzano quelli da noi esposti sui polimoni trigonometrici di Fejér (³).

(¹) Rileviamo che dalla (6) segue immediatamente

$$S_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r} a_1 + \binom{n+r-2}{r} a_2 + \dots + \binom{r}{r} a_n$$
$$= \binom{n+r-1}{n-1} a_1 + \binom{n+r-2}{n-2} a_2 + \dots + \binom{r}{0} a_n,$$

e perciò

$$s_n^{(r)} = a_1 + \left(1 - \frac{r}{n+r-1}\right) a_2 + \left(1 - \frac{r}{n+r-1}\right)\left(1 - \frac{r}{n+r-2}\right) a_3 + \dots$$
$$\dots + \left(1 - \frac{r}{n+r-1}\right)\left(1 - \frac{r}{n+r-2}\right) \dots \left(1 - \frac{r}{r+1}\right) a_n.$$

Di qui si ha, in virtù della proposizione del n.° 13, che, se la (5) converge, ed ha per somma s, la $s^{(r)}$ esiste per ogni $r > 0$, ed è $s^{(r)} = s$.

(²) K. Knopp, Inaugural Dissertation (loc. cit. in (¹) a pag. 177). Sul metodo delle medie di Cesàro, vedi A. F. Andersen, *Studier over Cesàro's Summabilitetmethode.* Copenhagen, 1921, pp. 1-100).

(³) Vedi per questi studi: H. Lebesgue, loc. cit. in (¹) a pag. 174. S. Chapman, *On non integral orders of summability of series and integrals* (London Math. Soc. Proc., Vol. IX (1911), pp. 369-409); *On the general theory of summability ecc.* (Quart. J. Math., Vol. 43 (1912), pp. 1-52). M. Riesz., Fra questi risultati citiamo i seguenti, nei quali supporremo sempre che la $f(x)$ sia integrabile, in tutto $(0, 2\pi)$.

« La serie di Fourier della $f(x)$ è, per $r > 0$, sommabile (C, r), con somma $s^{(r)} = f(x)$ in quasi-tutto $(0, 2\pi)$. Ciò avviene, in particolare, in ogni punto in cui la $f(x)$ è continua, ed anche in ogni punto in cui è

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} \int_0^z | f(x+z) + f(x-z) - 2f(x) | \, dz = 0 \text{ ».}$$

« Nei punti di discontinuità di 1ª specie, la serie di Fourier è ancora sommabile (C, r), $(r > 0)$, e la sua somma $s^{(r)}$ è $\dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ ».

« Se la $f(x)$ è continua in ogni punto di un intervallo (a, b), la convergenza di $s_n^{(r)}$, con $r > 0$, è uniforme in tutto tale intervallo ».

« Se in un punto x esiste finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+z) dz,$$

Sur les séries de Dirichlet et les séries entières (Comptes rendus, t. 149 (1909), pp. 309-312); *Sur la sommation des séries de Fourier* (Acta litterarum, Szeged, t. I (1923), pp. 104-113). W. H. YOUNG, *On the convergence of a Fourier séries ecc.* (London Math. Soc. Proc., Vol. X (1912), pp. 254-272); *Ueber eine Summation methode für die Fourierreihe* (Leipz. Ber., Bd. 63 (1911), pp. 369-387); *On Fourier series and functions of bounded variations* (London Roy. Soc. Proc., Vol. 88 (1913), pp. 561-568). T. H. GRONWALL, *On the summability of Fourier's series* (Bull. Amer. Math. Soc., Vol. XX (1913), pp. 139-146). E. KOGBETLIANTZ, *Analogies entre les séries trigonométriques et les séries sphériques ecc.* (Ann. École Norm. Sup., t. 40 (1923), pp. 259-323). H. HAHN, loc. cit. in (2) a pag. 178. G. H. HARDY, *On the summability of Fourier's series* (London Math. Soc. Proc., Vol. 12 (1913), pp. 365-372). G. H. HARDY e J. E. LITTLEWOOD, loc. cit. in (1) a pag. 178. G. SZEGÖ, *Zur Summation der Fourierschen Reihen* (Acta Litterarum, Szeged, t. III (1927), pp. 17-24). O. SZÀSZ, *Ueber die Cesàroschen Mittel Fourierschen Reihen* (ibidem., pp. 38-48). A, RAJCHMAN e A. ZYGMUND, *Sur la relation du procédé de sommation de Cesàro et celui de Riemann* (Bulletin de l'Acad. Polonaise, 1925, pp. 69-80). A. ZYGMUND, *Sur un théorème de la théorie de la sommabilité* (Math. Zeitschr., Bd. 25 (1926), pp. 291-296); *Sur la sommabilité des séries de Fourier des fonctions vérifiant la condition de Lipschitz* (Bulletin de l'Académie Polonaise, 1925, pp. 1-9).

in tale punto la serie di Fourier è sommabile (C, r), per $r > 1$ (¹) ».

« La sommabilità (C, r) della serie di Fourier della $f(x)$, in un dato punto x, dipende unicamente dal comportamento della $f(x)$ nell' intorno di tale punto, se è $r \geq 0$. Ciò non è più vero, in generale, se è $r < 0$ ».

« La condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie di Fourier della $f(x)$ sia, in un dato punto x, sommabile (C, r) per qualche valore di r, ed abbia per somma $s^{(r)}$ un valore Φ, è che esista un numero intero k tale che, posto

$$\psi(z) = f(x+z) + f(x-z) - 2\Phi,$$

$$\psi_1(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \psi(z)dz, \qquad \psi_2(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \psi_1(z)dz,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \psi_k(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \psi_{k-1}(z)dz,$$

si abbia $\psi_k(z) \to 0$, per $z \to 0$ ».

« Se la $f(x)$ è limitata in un intorno del punto x, la serie di Fourier della $f(x)$, nel punto x, o è sommabile (C, r) per ogni $r > 0$, oppure non è mai sommabile. La condizione necessaria e sufficiente per la sommabilità è, in questo caso, che esista finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+z)dz \quad ».$$

Le ultime due proposizioni sono dovute a G. H. Hardy e J. E. Littlewood.

c) È stata anche studiata l'applicazione del metodo di sommazione di Cesàro alle serie di Fourier *generalizzate*, cioè relative alle funzioni integrabili nel senso di Denjoy (²).

(¹) Questo risultato, dovuto a W. H. Young, per $r > 1$, era già stato stabilito da Lebesgue [*Recherches etc.*, (loc. cit. in (¹) a p. 170), p. 278] per $r = 2$.

(²) P. Nalli, *Sulle serie di Fourier delle funzioni non assolutamente integrabili* (Rend. Circ. Mat., Palermo, t. XL (1915), pp. 33-37). J. Privaloff, *Sur la dérivation des séries de Fourier* (ibidem, t. XLI (1916), pp. 202-206).

64. - Applicazione al metodo dei minimi quadrati.

Supposta la $f(x)$ integrabile insieme col suo quadrato, in tutto $(0, 2\pi)$, nel n.° 56 abbiamo dimostrato che il polinomio trigonometrico, d'ordine n, ottenuto dalla $f(x)$ col metodo dei minimi quadrati (cioè quello che dà con la $f(x)$ il minimo scostamento quadratico medio) è precisamente il polinomio trigonometrico d'ordine n i cui coefficienti sono i coefficienti di Eulero-Fourier della $f(x)$, in altre parole, tale polinomio è la somma parziale $(n+1)^{esima}$, $s_n(x)$, della serie di Fourier della $f(x)$. Abbiamo anche affermato (sempre nel n.° 56) che lo scostamento quadratico medio di $f(x)$ e $s_n(x)$ tende allo zero per $n \to \infty$, ossia che è

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx \to 0. \tag{1}$$

Vogliamo ora dimostrare tale affermazione, nel caso in cui la $f(x)$ sia limitata in tutto $(0, 2\pi)$ (1).

Fatta dunque l'ipotesi supplementare che sia $|f(x)| \leq M$ in tutto $(0, 2\pi)$, consideriamo il polinomio trigonometrico di Fejér, d'ordine n, della $f(x)$, $\sigma_{n+1}(x)$ (n.° 58). Dall'osservazione del n.° 58, abbiamo che, qualunque sia n, è sempre $|\sigma_{n+1}(x)| \leq M$ in tutto $(0, 2\pi)$. E poichè, come abbiamo rammentato, $s_n(x)$ è il polinomio trigonometrico d'ordine n che dà con la $f(x)$ il minimo scostamento quadratico medio, abbiamo senz'altro

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx \leq \int_0^{2\pi} [f(x) - \sigma_{n+1}(x)]^2 dx. \tag{2}$$

Ma, essendo in tutto $(0, 2\pi)$, qualunque sia n,

$$[f(x) - \sigma_{n+1}(x)]^2 \leq 4M^2,$$

ed avendosi, inoltre, (teorema di Lebesgue, n.° 62), $\sigma_{n+1}(x) \to f(x)$, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, dal teorema d'integrazione per serie di Arzelà-Lebesgue segue

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - \sigma_{n+1}(x)]^2 dx \to 0,$$

per $n \to \infty$. Dalla (2) segue perciò la (1).

---

(1) Il caso generale risulterà da quanto diremo nel n.° 83.

§ 4. Metodo d'approssimazione di Tchebychev.

65. - Polinomi trigonometrici d'approssimazione.

Sia la funzione $f(x)$ data nell' intervallo (a, b) ed ivi *continua* (ipotesi che conserveremo in tutto il presente §). Sia poi

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

un polinomio trigonometrico d'ordine n, e si consideri la differenza

$$D_n(x) = f(x) - \varphi_n(x),$$

che risulta continua in tutto (a, b). Indicato con m il massimo valore di $|D_n(x)|$, nell' intervallo considerato, sia μ_n il limite inferiore dei valori di m corrispondenti a tutti i possibili polinomi trigonometrici, d'ordine n, $\varphi_n(x)$. È evidentemente $\mu_n \geq 0$. Poichè m è l'approssimazione che, della $f(x)$, dà la $\varphi_n(x)$, μ_n viene detta la *migliore approssimazione d'ordine* n. Se esiste un polinomio trigonometrico, d'ordine n,

$$T_n(x) = \frac{1}{2} t_0 + (t_1 \cos x + \tau_1 \operatorname{sen} x) + \ldots + (t_n \cos nx + \tau_n \operatorname{sen} nx)$$

tale che sia, in tutto (a, b),

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \mu_n,$$

questo $T_n(x)$ si dice *polinomio trigonometrico d'approssimazione, d'ordine* n, *della* $f(x)$, *in* (a, b).

Non è, naturalmente, escluso che alcuni (ed anche tutti) dei coefficienti di $T_n(x)$ siano nulli, vale a dire, non è escluso che $T_n(x)$ risulti *effettivamente* d'ordine minore di n.

La definizione di polinomio trigonometrico d'approssimazione, di dato ordine, è del tutto analoga alla definizione di polinomio razionale intero d'approssimazione, dovuta a Tchebychev [1].

---

[1] P. L. Tchebychev, *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions.* (Mémoire de l'Acad. des Sciences de S. Petersbourg, t. IX (1859) pp. 201-291). Il metodo di Tchebychev fu esteso ai polinomi trigonometrici (in una o più variabili) da M. Fréchet (*Sur l'approximation des fonctions continues périodiques par*

66. - **Lemmi.**

Per procedere speditamente nello stabilire le più importanti proprietà dei polinomi trigonometrici d'approssimazione, dimostreremo, in questo n.°, due lemmi relativi ai polinomi trigonometrici.

Lemma I. — *Se è*

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{r=1}^{n} (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx)$$

e

$$|\varphi_n(x)| \leq M \tag{1}$$

in tutto (a, b), *esiste una costante* K [*dipendente soltanto da* n *e dall'intervallo* (a, b)] *tale che sia*

$$|a_r| \leq KM, \quad |b_r| \leq KM, \tag{2}$$

per ogni r *da* 0 *ad* n.

Scegliamo, in una parte di (a, b) di lunghezza minore di 2π, $2n+1$ punti (distinti) $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$, e consideriamo il sistema di $2n+1$ equazioni, lineari nelle $2n+1$ incognite $a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$,

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{r=1}^{n} (a_r \cos rx_s + b_r \operatorname{sen} rx_s) = \varphi_n(x_s), \qquad (s = 1, \ldots, 2n+1).$$

Il determinante Δ di questo sistema è diverso da zero ([1]), e perciò la regola di Cramer dà ogni a_r ed ogni b_r nella forma di quoziente di due determinanti d'ordine $2n+1$, dei quali quello a denominatore è Δ. Se indichiamo con Q il massimo modulo dei

---

les sommes trigonométriques limitées. Annales de l'École Norm. Supérieure, t. XXV (1908), pp. 43-56), da J. W. Young (*General theory of approximation by functions involving a given number of arbitrary parameters.* Transactions of the American Math. Soc., Vol. 8 (1907), pp. 331-344) e da L. Tonelli (*I polinomi d'approssimazione di Tchebychev.* Annali di Matematica, s. III, t. XV, (1908), pp. 47-119). Vedi anche: Ch. J. de la Vallée Poussin, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle.* (Paris, 1919, p. 93 e seg.); S. Bernstein, *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle* (Paris, 1926).

([1]) Cfr. F. Sibirani, *Sopra i polinomi trigonometrici ed un determinante relativo.* (Giornale di Matematiche di Battaglini, Vol. XLVII (1909), pp. 125-131).

minori d'ordine $2n$ di Δ, il numeratore della frazione che dà un a_r od un b_r è, per la (1), minore od uguale in modulo a $MQ(2n+1)$. Abbiamo perciò

$$|a_r| \leq \frac{MQ(2n+1)}{|\Delta|}, \quad |b_r| \leq \frac{MQ(2n+1)}{|\Delta|},$$

il che prova la proposizione enunciata ([1]).

Lemma II. — Un polinomio trigonometrico $\varphi_n(x)$, d'ordine n, (non identicamente nullo) non può avere più di $2n$ zeri non congrui fra loro rispetto al modulo 2π.

Ed infatti, se è $0 \leq x_1 < x_2 < .... < x_{2n} < x_{2n+1}$, ed $x_1, ..., x_{2n+1}$ sono degli zeri di $\varphi_n(x)$, il ragionamento fatto precedentemente, applicato all' intervallo $(a, b) \equiv (0, 2\pi)$, porta alle disuguaglianze

$$|a_r| \leq 0, \quad |b_r| \leq 0,$$

vale a dire, $\varphi_n(x)$ è identicamente nullo.

67. - **Esistenza dei polinomi trigonometrici d'approssimazione.**

Dimostriamo la seguente proposizione:

per una funzione continua $f(x)$ e per ogni intero positivo n, esiste almeno un polinomio trigonometrico d'approssimazione, di ordine n, in (a, b).

Consideriamo un polinomio trigonometrico d'ordine n:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{r=1}^{n} (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx).$$

Il massimo modulo m della differenza $f(x) - \varphi_n(x)$, in (a, b), è una funzione $m(a_0, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n)$ dei coefficienti a_r e b_r, e precisamente una funzione continua. Se indichiamo con M il massimo modulo della $f(x)$ in (a, b), è $m(0, 0, ..., 0, 0, ..., 0) = M$; è dunque anche $\mu_n \leq M$. Consideriamo la totalità dei polinomi trigonometrici $\varphi_n(x)$ per i quali è $m \leq 2M$; per questa totalità, il limite inferiore dei valori di m è necessariamente μ_n. Se $\varphi_n(x)$ appartiene a tale totalità, è

$$|\varphi_n(x)| \leq |f(x)| + |\varphi_n(x) - f(x)| \leq 3M,$$

([1]) Nel caso di $b - a = 2\pi$, le (2) seguono immediatamente dalle formule di EULERO-FOURIER, applicate alla $\varphi_n(x)$. Da tali formule si ha, infatti,

$$|a_n| \leq 2M, \quad |b_n| \leq 2M.$$

e perciò (n.° 66, Lemma I)

$$(1) \qquad |a_r| \leq 3KM, \quad |b_r| \leq 3KM,$$

con K costante. Pertanto, l'insieme di tutti i $\varphi_n(x)$, i cui coefficienti soddisfano alle (1), contiene la totalità già indicata, ed il limite inferiore di m per i polinomi trigonometrici di questo insieme è ancora μ_n. Ma $m(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$, essendo una funzione continua del punto $(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$, ammette, nel campo determinato dalle (1) — che è un campo limitato e chiuso — un minimo. Esiste dunque un polinomio trigonometrico per il quale è $m = \mu_n$, vale a dire, esiste un polinomio trigonometrico d'appprossimazione d'ordine n.

Vogliamo inoltre osservare che, *se esistono due polinomi trigonometrici d'approssimazione dello stesso ordine n, T_n e $\overline{T}_n$, ne esistono infiniti.* Ed infatti, detto p un numero qualunque tale che $0 \leq p \leq 1$, il polinomio trigonometrico $pT_n + (1-p)\overline{T}_n$ è anch'esso d'ordine n ed è pure d'approssimazione, perchè si ha

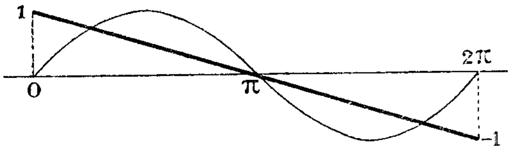
$$\begin{aligned} &| f(x) - \{ pT_n(x) + (1-p)\overline{T}_n(x) \} | \\ &\quad \leq p\, | f(x) - T_n(x) | + (1-p)\, | f(x) - \overline{T}_n x) | \\ &\quad \leq p\mu_n + (1-p)\mu_n = \mu_n . \end{aligned}$$

Ci domandiamo ora: possono effettivamente esistere più polinomi trigonometrici d'approssimazione, dello stesso ordine, per una data funzione continua $f(x)$, in un dato intervallo (a, b)? Risponderemo mostrando che, scelto opportunamente l'intervallo (a, b), si può avere effettivamente una funzione che ammetta, per uno stesso valore di n, più polinomi trigonometrici d'approssimazione d'ordine n.

Consideriamo, ad esempio, nell'intervallo $(0, 2\pi)$, la funzione

$$(2) \qquad f(x) = 1 - \frac{x}{\pi}.$$

Essa assume, in $x = 0$, il valore 1, e, in $x = 2\pi$, il valore -1. Perciò, se $\varphi_n(x)$ è un polinomio trigonometrico d'ordine n, ed è $\varphi(0) > 0$ (oppure, < 0), è anche (per la periodicità) $\varphi(2\pi) > 0$ (oppure, < 0), e pertanto si ha $f(x) - \varphi_n(x) < -1$ (oppure, > 1) in $x = 2\pi$ (oppure in $x = 0$) ed il massimo modulo m di tale differenza, in $(0, 2\pi)$, è maggiore di 1. Ora, poichè al polinomio trigonometrico identicamente nullo corrisponde il valore $m = 1$, risulta che ogni polinomio trigonometrico d'approssimazione $T_n(x)$, di ordine n, della (2), in $(0, 2\pi)$, deve soddisfare alla condizione $T_n(0) = T_n(2\pi) = 0$. Risulta pure che è $\mu_n \geq 1$; ed anzi, siccome esiste un valore di m uguale ad 1, è precisamente $\mu_n = 1$. Segue che il polinomio trigonometrico iden-



ticamente nullo è d'approssimazione d'ordine n, e che è anche tale $c \operatorname{sen} x$, per ogni valore di c compreso fra 0 ed 1, purchè sia $n > 0$.

Dunque, esistono infiniti polinomi trigonometrici che sono d'approssimazione, di qualunque ordine ≥ 1, per la funzione (2), in $(0, 2\pi)$.

Anche se è $b - a \geq 2\pi$ possiamo sempre costruire una funzione continua avente, in (a, b), infiniti polinomi trigonometrici d'approssimazione di dato ordine n. Ed infatti, poichè possiamo sempre ridurci al caso di $a = 0$, supponiamo che sia $(a, b) \equiv (0, b)$, con $b > 2\pi$. Indicato con b' un numero maggiore di 2π e minore di b e di $2\pi + 1$, consideriamo la funzione $f(x)$ definita, in $(0, 2\pi)$, dalla (2), in $(2\pi, b')$, da $f(x) = \dfrac{x - b'}{b' - 2\pi}$, e, in (b', b), da $f(x) = 0$. Poichè la migliore approssimazione d'ordine n della (2) in $(0, 2\pi)$, è uguale ad 1, si ha che la μ_n relativa alla funzione ora definita in $(0, b)$, non può essere < 1. Perciò, anche nel caso attuale, il polinomio trigonometrico identicamente nullo è d'approssimazione di ordine n, e, se è $n \geq 1$, tale è anche $c \operatorname{sen} x$, con $0 \leq c \leq 1$.

Vedremo però, in ciò che segue, che la molteplicità dei polinomi trigonometrici d'approssimazione dello stesso ordine non è un fatto che si presenti sempre, e che si ha anzi l'unicità di tale polinomio se è $b - a < 2\pi$; quando poi la $f(x)$ sia periodica, di periodo 2π, l'unicità si ha anche se è $b - a \geq 2\pi$.

68. - Unicità dei polinomi trigonometrici d'approssimazione.

a) Se è $0 < b - a < 2\pi$, *oppure se è* $b - a = 2\pi$ *ed* $f(a) = f(b)$, *e se* $T_n(x)$ *è un polinomio d'approssimazione d'ordine* n *della funzione continua* $f(x)$, *il numero dei punti di* (a, b), *non congrui fra loro rispetto al modulo* 2π, *in cui* $|f(x) - T_n(x)|$ *raggiunge il suo massimo valore* μ_n *è non minore di* $2n + 2$.

Siano $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ i punti (distinti) di (a, b), non congrui fra loro rispetto al modulo 2π, in cui il valore assoluto di

$$D(x) = f(x) - T_n(x)$$

raggiunge il suo massimo valore μ_n, ed osserviamo subito che, se è $b - a < 2\pi$, in tutti gli altri punti di (a, b) è $|D(x)| < \mu_n$, e che, se è $b - a = 2\pi$, l'uguaglianza $|D(x)| = \mu_n$ può essere verificata soltanto in un altro punto di (a, b), e precisamente in a od in b se uno dei due punti a e b figura fra gli $x_1, \ldots, x_\nu$. Se è $b - a = 2\pi$ e $|D(a)| = |D(b)| = \mu_n$, intenderemo che sia $x_1 = a$.

Supponiamo che sia $\nu \leq 2n + 1$ e mostriamo che è possibile di costruire un polinomio trigonometrico d'ordine n, $\varphi_n(x)$, in modo che sia, in tutto (a, b),

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq m, \tag{1}$$

con $m < \mu_n$ (1), cosa assurda.

Consideriamo, a tale scopo, il sistema delle ν equazioni lineari, non omogenee, nelle $2n + 1$ incognite a_0, $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$,

$$(2) \begin{cases} \frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x_1 + b_1 \operatorname{sen} x_1) + \ldots + (a_n \cos nx_1 + b_n \operatorname{sen} nx_1) = \rho_1 \mu_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x_\nu + b_1 \operatorname{sen} x_\nu) + \ldots + (a_n \cos nx_\nu + b_n \operatorname{sen} nx_\nu) = \rho_\nu \mu_n, \end{cases}$$

dove ρ_r è uguale ad 1 od a -1, a seconda che è $D(x_r) = \mu_n$ o $D(x_r) = -\mu_n$. Siccome il sistema (2) è sempre possibile (2), potremo determinare le a_r e b_r in modo da renderlo soddisfatto. Indichiamo con $\psi_n(x)$ il polinomio trigonometrico, d'ordine n, relativo a questi a_r e b_r, e poniamo

$$\begin{aligned} D_1(x) &= f(x) - T_n(x) - \omega\psi_n(x) \\ &= D(x) - \omega\psi_n(x), \end{aligned}$$

---

(1) Si noti che, se è $\nu \leq 2n + 1$, è necessariamente $\mu_n > 0$, perchè l'uguaglianza $\mu_n = 0$ porterebbe $D(x) \equiv 0$ in tutto (a, b).

(2) Se ν è dispari, il determinante formato coi coefficienti delle prime ν incognite è evidentemente diverso da zero. Se ν è pari, si aggiunga alle equazioni del sistema (2) un'altra equazione, analoga ad esse, e relativa ad un punto $x_{\nu+1}$ distinto dagli altri x_r e non ad essi congruo rispetto al modulo 2π, e con un secondo membro qualsiasi; per questo nuovo sistema, il determinante formato coi coefficienti delle prime $\nu + 1$ incognite è certamente diverso da zero.

dove ω indica un numero positivo. Allora, scelto ad arbitrio un ε positivo e minore di μ_n, e determinato un numero positivo δ in modo che, per ogni coppia x', x'' di punti di (a, b), tali che $|x' - x''| \leq \delta$, si abbia

$$| D(x') - D(x'') | < \varepsilon, \quad | \psi_n(x') - \psi_n(x'') | < \varepsilon,$$

risulta che, in ogni punto di (a, b) distante da x_r per non più di δ, è (supposto, per fissare le idee, $\rho_r = 1$, vale a dire $D(x_r) = \mu_n$)

$$\mu_n - \varepsilon < D(x) \leq \mu_n$$

$$\omega(\mu_n - \varepsilon) < \omega\psi_n(x) < \omega(\mu_n + \varepsilon),$$

perchè, per il sistema (2), si ha $\psi_n(x_r) = \rho_r \mu_n$. Ne segue

$$\mu_n - \varepsilon - \omega(\mu_n + \varepsilon) < D(x) - \omega\psi_n(x) < \mu_n - \omega(\mu_n - \varepsilon),$$

ed anche, supponendo $\omega < \dfrac{\mu_n - \varepsilon}{\mu_n + \varepsilon}$,

$$|D_1(x)| < \mu_n, \tag{3}$$

la quale disuguaglianza vale dunque in ogni punto di (a, b) la cui distanza da almeno uno dei punti $x_1, \ldots, x_\nu$ risulti non superiore a δ. Nel caso in cui sia $b - a = 2\pi$, e $x_1 = a$, e quindi, per l'ipotesi fatta, $|D(b)| = \mu_n$, la (3) vale anche in tutto l'intervallo $(b - \delta, b)$.

Dall'intervallo (a, b) togliamo tutti i punti distanti, da uno qualunque degli x_r, meno di δ, intendendo di togliere anche i punti $x > b - \delta$, nel caso di $b - a = 2\pi$ e $x_1 = a$. Restano così, su (a, b), degli intervalli (in numero finito), nei quali il massimo modulo di $D(x)$ sarà un certo numero $\mu < \mu_n$. Allora, se indichiamo con ψ il massimo modulo di $\psi_n(x)$ in tutto (a, b), e se supponiamo che sia

$$\omega < \frac{\mu_n - \varepsilon}{\mu_n + \varepsilon}, \quad \omega < \frac{\mu_n - \mu}{2\psi},$$

avremo, in tutto (a, b), $|\omega\psi_n(x)| < (\mu_n - \mu):2$, e, in tutti gli intervalli or ora indicati,

$$| D_1(x) | \leq | D(x) | + | \omega\psi_n(x) | < (\mu_n + \mu):2 < \mu_n.$$

Da qui e dalla (3) segue che, se poniamo $\varphi_n(x) = T_n(x) - \omega\psi_n(x)$, la (1) è soddisfatta [1].

b) Con le ipotesi della proposizione dimostrata in *a*), si ha l' *unicità* del polinomio trigonometrico d' approssimazione. Ed infatti, supposto che esistano due di tali polinomi $T_n(x)$ e $\overline{T}_n(x)$, si ha

$$\left| f(x) - \frac{T_n(x) + \overline{T}_n(x)}{2} \right| \leq \frac{|f(x) - T_n(x)| + |f(x) - \overline{T}_n(x)|}{2}$$
$$\leq \mu_n,$$

onde $\frac{1}{2}[T_n(x) + \overline{T}_n(x)]$ risulta pure d' approssimazione d' ordine n. Allora, per la proposizione dimostrata in *a*), il valore assoluto

$$\left| f(x) - \frac{T_n(x) + \overline{T}_n(x)}{2} \right|$$

raggiunge il valore μ_n in almeno $2n + 2$ punti di (a, b), non congrui fra loro rispetto al modulo 2π. Ma, affinchè ciò sia possibile, è necessario che, in ciascuno di questi $2n+2$ punti, le differenze $f - T_n$ ed $f - \overline{T}_n$ abbiano lo stesso valore μ_n oppure $-\mu_n$, ossia è necessario che in tutti i punti indicati sia $T_n = \overline{T}_n$. Ma poichè T_n e $\overline{T}_n$ sono polinomi trigonometrici d'ordine n, la differenza $T_n - \overline{T}_n$ non può avere $2n + 2$ zeri non congrui fra loro rispetto al modulo 2π (n.° 66, Lemma II). Dunque:

Se è $0 < b - a < 2\pi$, *oppure se è* $b - a = 2\pi$ *ed* $f(a) = f(b)$, *esiste un solo polinomio trigonometrico d' approssimazione, di ordine n, in* (a, b), *per la funzione continua* $f(x)$.

Lo stesso vale se è $b - a > 2\pi$, *perchè la* $f(x)$ *sia continua e periodica, di periodo* 2π.

In quest' ultimo caso, infatti, i polinomi trigonometrici d'approssimazione d' ordine n, in (a, b), coincidono con quelli relativi all' intervallo $(a, a + 2\pi)$.

---

[1] Questo ragionamento fu già usato dall' A. per dimostrare (loc. cit. in [1] a p. 186) l' analoga proposizione relativa ai polinomi razionali interi d' approssimazione; fu poi applicato ai polinomi trigonometrici d' approssimazione da F. Sibirani (*Sulla rappresentazione approssimata delle funzioni*. Annali di Matematica, t. XVI (1909), pp. 203-221). Tale ragionamento ha il vantaggio di applicarsi immediatamente anche al campo complesso.

c) Quando sia $b-a=2\pi$ ed $f(a)\neq f(b)$, oppure $b-a>2\pi$ senza che la $f(x)$ risulti periodica, di periodo 2π, sappiamo (n.° 67) che l'unicità del polinomio trigonometrico d'approssimazione, di dato ordine, può mancare effettivamente. Possiamo però, in questi casi, aggiungere un'osservazione utile per potere affermare, in particolari circostanze, l'unicità.

Se $T_n(x)$ è un polinomio trigonometrico d'approssimazione di ordine n, per la funzione continua $f(x)$, in (a, b), e se, in questo intervallo, non esiste alcuna coppia di punti x', x'', tali che sia $x''-x'=2k\pi$, con k intero, e che la differenza $f(x)-T_n(x)$ abbia, in x' e x'', valori in modulo uguali a μ_n, ma di segno contrario, allora $T_n(x)$ è l'unico polinomio trigonometrico d'approssimazione d'ordine n.

Infatti, supposto che $T_n'(x)$ sia un altro polinomio trigonometrico d'approssimazione d'ordine n, tale è anche $T_n''(x)=\frac{1}{2}[T_n(x)+T_n'(x)]$, come abbiamo veduto in *b*); inoltre, neppure per $T_n''(x)$ può esistere una coppia di punti di (a, b) analoga alla x', x'', perchè dove è $f(x)-T_n''(x)=\mu_n$ (oppure, $=-\mu_n$) anche le differenze $f(x)-T_n(x)$ e $f(x)-T_n'(x)$ devono avere lo stesso valore μ_n (oppure, $-\mu_n$). In base a ciò, si può ripetere per $T_n''(x)$ il ragionamento fatto in *a*), ed affermare che il numero dei punti di (a, b), non congrui fra loro rispetto al modulo 2π, in cui $|f(x)-T_n''(x)|$ raggiunge il suo massimo valore μ_n è non minore di $2n+2$. Ma in questi punti [analogamente a quanto abbiamo veduto in *b*)] deve essere $T_n(x)-T_n'(x)=0$, e perciò (n.° 66, Lemma II) è $T_n(x)\equiv T_n'(x)$.

Dalla proposizione ora dimostrata segue che, *se $T_n(x)$ e $T_n'(x)$ sono due polinomi trigonometrici d'approssimazione, di ordine n, per la $f(x)$, in (a, b), deve esistere, in (a, b), almeno una coppia di punti x', x'', tale che sia $x''-x'=2k\pi$ (con k intero) e $T_n(x')=T_n'(x')=f(x')+\mu_n$, $T_n(x'')=T_n'(x'')=f(x'')-\mu_n$.* Ciò perchè, altrimenti, $\frac{1}{2}(T_n+T_n')$ sarebbe l'unico polinomio trigonometrico d'approssimazione d'ordine n.

Abbiamo pure che, se esiste per la $f(x)$, in (a, b), un polinomio trigonometrico d'approssimazione d'ordine n, $T_n(x)$, tale che, per esso sia finito il numero delle coppie di punti x', x'', di (a, b), congrui fra loro rispetto al modulo 2π, e soddisfacenti alla condizione $f(x')-T_n(x')=\mu_n$, $f(x'')-T_n(x'')=-\mu_n$, allora tutti i polinomi trigonometrici d'approssimazione, di ordine n, assumono gli stessi valori nei punti x' e x'' di almeno una di queste coppie. Ed infatti, in caso contrario, detto m il numero delle coppie indicate, si potrebbero scegliere m polinomi d'approssimazione $T_n^{(1)}, \ldots, T_n^{(m)}$ in modo che il polinomio $\frac{1}{m+1}(T_n + T_n^{(1)} + \ldots T_n^{(m)})$, non ammettendo coppie analoghe alla x', x'', risultasse l'unico polinomio d'approssimazione d'ordine n.

69. - Proprietà caratteristica.

a) Se $\varphi_n(x)$ è un polinomio trigonometrico d'ordine n [1], *e se, in $2n+2$ punti di (a, b), $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n+2}$, tali che $x_{2n+2} - x_1 \leq 2\pi$, la differenza $f(x) - \varphi_n(x)$ assume valori di segno alternato e di modulo uguale al massimo modulo m che essa raggiunge in (a, b), allora $\varphi_n(x)$ è un polinomio trigonometrico d'approssimazione, d'ordine n, per la funzione continua $f(x)$, in (a, b).*

Sia, infatti, $T_n(x)$ un polinomio trigonometrico d'approssimazione, d'ordine n, della $f(x)$ in (a, b), e si consideri la differenza

$$T_n - \varphi_n = (f - \varphi_n) - (f - T_n).$$

Se fosse $m > \mu_n$, questa differenza assumerebbe valori di segno alternato nei punti $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+2}$, e perciò si annullerebbe in almeno $2n+1$ punti distinti, tutti contenuti in un intervallo minore di 2π, il che contrasterebbe (n.° 66 Lemma II) col fatto che $T_n - \varphi_n$ è un polinomio trigonometrico d'ordine n, È dunque $m = \mu_n$, e ciò prova quanto abbiamo affermato.

Come applicazione della proposizione precedente, possiamo mostrare che il polinomio trigonometrico d'approssimazione d'ordine n, nell'intervallo $(0, 2\pi)$, della funzione $f(x) = a \cos (n+1)x + b \operatorname{sen} (n+1)x$ è $T_n(x) \equiv 0$. Ed infatti, possiamo scrivere

$$f(x) = a \cos (n+1)x + b \operatorname{sen} (n+1)x = \rho \cos (n+1)(x - \alpha),$$

dove è $a = \rho \cos (n+1)\alpha$ e $b = \rho \operatorname{sen} (n+1)\alpha$. Perciò la differenza $f(x) - 0$ assume i suoi valori massimi e minimi ρ e $-\rho$, alternativamente nei punti α,

---

[1] Si tenga sempre presente che non è escluso che $\varphi_n(x)$ abbia i coefficienti a_n e b_n nulli, vale a dire che sia d'ordine *effettivo* minore di n.

$\alpha+\frac{\pi}{n+1}$, $\alpha+\frac{2\pi}{n+1}$, $\alpha+\frac{3\pi}{n+1}$,...., $\alpha+\frac{2n+1}{n+1}\pi$, e nei loro congrui rispetto al modulo 2π; di tali punti ve ne sono almeno $2n+2$ in $(0, 2\pi)$, dunque il polinomio trigonometrico identicamente nullo è d'approssimazione d'ordine n per la $f(x)$. Esso poi è l'unico $T_n(x)$, in virtù della proposizione del n.° 68, *b*).

Come seconda applicazione, abbiamo che il polinomio trigonometrico d'approssimazione d'ordine n, in $(0, 2\pi)$, della funzione

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{r=1}^{n+1}(a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx)$$

è

$$T_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{r=1}^{n}(a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx).$$

È infatti,

$$f(x)-T_n(x)=a_{n+1}\cos(n+1)x+b_{n+1}\operatorname{sen}(n+1)x$$

e non vi è che ragionare come abbiamo fatto or ora.

Il ragionamento usato nella dimostrazione della proposizione precedente prova pure che, *se $\varphi_n(x)$ è un polinomio trigonometrico d'ordine n, e se, in $2n+2$ punti di (a, b), $x_1<x_2<\ldots$ $\ldots<x_{2n+2}$, tali che $x_{2n+2}-x_1\leq 2\pi$, la differenza $f(x)-\varphi_n(x)$ assume valori di segno alternato e di moduli $\geq \mu$, allora è $\mu_n \geq \mu$* [1].

b) Se è $0<b-a<2\pi$, oppure se è $b-a=2\pi$ e $f(a)=f(b)$, e se $T_n(x)$ è un polinomio trigonometrico d'approssimazione, di ordine n, della funzione continua $f(x)$, in (a, b), esistono in (a, b), $2n+2$ punti $x_1<x_2<\ldots.<x_{2n+2}$ nei quali la differenza $f(x)-T_n(x)$ assume valori di segno alternato e di modulo μ_n.

Indichiamo con A' l'insieme dei punti di (a, b) in cui è $f(x)-T_n(x)=\mu_n$ e con A'' quello in cui è $f(x)-T_n(x)=-\mu_n$. È evidente che ciascuno dei due insiemi A' ed A'' contiene almeno un punto, perchè se, per esempio, non esistessero punti di A', il polinomio trigonometrico $T_n(x)-c$, con c positivo e sufficientemente piccolo, darebbe della $f(x)$ un'approssimazione $m<\mu_n$. Inoltre, poichè la differenza $f-T_n$ è una funzione continua, A' ed A'' sono due insiemi *chiusi*. Risulta perciò *chiuso* anche l'insieme $A'+A''$ costituito da tutti i punti di A' e di A''.

---

(1) Ch. J. de la Vallée Poussin, loc. cit. in (1) a pag. 186 (vedi, precisamente p. 96).

Consideriamo il punto di $A' + A''$ più vicino ad a e supponiamo, per fissare le idee, che esso appartenga ad A'. Indichiamo con α_1 la maggiore fra le radici dell'equazione $f(x) - T_n(x) = 0$ che sono precedute, su (a, b), da punti di A' ma non da punti di A''. Indichiamo poi con α_2 la maggiore fra le radici della stessa equazione che seguono α_1 e che sono precedute, su (α_1, b), da punti di A'' ma non da punti di A'; con α_3 la maggiore fra le radici, sempre della stessa equazione, che superano α_2 e che sono precedute su (α_2, b), da punti di A' ma non da punti di A''; e così via. Le radici $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots.$ sono evidentemente in numero finito: sia m tale numero.

Se fosse $m \geq 2n + 2$ la proposizione enunciata sarebbe già provata. Supponiamo dunque che sia $m \leq 2n + 1$.

Se m è pari, e perciò $m \leq 2n$, consideriamo un polinomio trigonometrico $\psi(x)$, d'ordine $m{:}2$, che si annulli nei punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_m$, e che non sia identicamente nullo [1]. Per il n.º 66 (Lemma II), $\psi(x)$ non si annulla in nessun altro punto *interno* ad (a, b) e cambia di segno quando la x passa per una delle radici α; perciò, se k è una costante di segno opportuno, $k\psi(x)$ avrà segno positivo in tutti i punti interni ad (a, α_1), (α_2, α_3), $(\alpha_4, \alpha_5), \ldots.$ e segno negativo in tutti i punti interni ad (α_1, α_2), $(\alpha_3, \alpha_4), \ldots.$ Prendendo k sufficientemente piccolo in modulo, avremo, pertanto, che la differenza $f(x) - \{ T_n(x) + k\psi(x) \}$ sarà positiva e minore di μ_n in tutti i punti di A', negativa e maggiore di $-\mu_n$ in tutti quelli di A'', e in modulo sempre minore di μ_n in tutto (a, b) [2]. Ma ciò è impossibile, perchè $T_n(x) - k\psi(x)$ è un polinomio trigonometrico d'ordine n.

Se m è dispari e se in (α_m, b) non esistono punti di A'', consideriamo soltanto le radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_{m-1}$, che sono in numero pari, e ragioniamo su di esse come nel caso precedente abbiamo fatto su tutte le $\alpha_1, \ldots., \alpha_m$. Giungiamo anche qui ad un assurdo.

---

(1) Possiamo prendere, per esempio,

$$\psi(x) = \prod_{r=1}^{m} \operatorname{sen} \frac{x - \alpha_r}{2}.$$

(2) Basterà prendere k in modo che $|k\psi(x)|$ risulti sempre $< \mu_n$ e minore anche dei minimi di $f(x) - T_n(x) + \mu_n$ in (a, α_1), (α_2, α_3), $(\alpha_4, \alpha_5), \ldots.$ e di quelli di $\mu_n - [f(x) - T_n(x)]$ in (α_1, α_2), $(\alpha_3, \alpha_4), \ldots.$.

Se m è dispari e minore di $2n+1$, e se in (α_m, b) esistono punti di A'', consideriamo un altro punto α_{m+1}, soddisfacente alla sola condizione $b < \alpha_{m+1} < a + 2\pi$, nel caso di $b - a < 2\pi$, e coincidente con la più piccola radice dell'equazione $f(x) - T_n(x) = 0$ contenuta in (a, b), nel caso di $b - a = 2\pi$ [1]. Ragionando su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ come precedentemente, giungiamo ancora ad un assurdo.

Se è, infine, $m = 2n+1$ ed in (α_m, b) esistono punti di A'', la proposizione è senz'altro provata.

Osservazione. — Se è $0 < b - a < 2\pi$, oppure se è $b - a = 2\pi$ ed $f(a) = f(b)$, la proprietà qui stabilita è [in virtù della proposizione a)] *caratteristica* per i polinomi trigonometrici d'approssimazione.

70. - Continuità della corrispondenza tra $f(x)$ e $T_n(x)$.

a) Se $f(x)$ è continua in (a, b) ed ε è un numero > 0, si può determinare un $\eta_n > 0$ in modo che, per ogni polinomio trigonometrico $\varphi_n(x)$, d'ordine n, soddisfacente, in tutto (a, b), alla disuguaglianza

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \mu_n + \eta_n,$$

si possa sempre trovare un polinomio trigonometrico $T_n(x)$, d'approssimazione, d'ordine n, per la $f(x)$ in (a, b), tale che risulti

$$|T_n(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon,$$

in tutto (a, b).

Supponiamo che la proposizione non sia vera. Allora, in corrispondenza di ogni numero intero positivo m, si potrà sempre trovare un polinomio trigonometrico d'ordine n, $\varphi_n^{(m)}(x)$, soddisfacente, in tutto (a, b), alla condizione

$$(1) \qquad |f(x) - \varphi_n^{(m)}(x)| < \mu_n + \frac{1}{m}$$

e tale che, per nessun $T_n(x)$ di $f(x)$, sia, in tutto (a, b),

$$(2) \qquad |T_n(x) - \varphi_n^{(m)}(x)| < \varepsilon.$$

---

[1] Poichè in (α_m, b) esistono punti di A'', è $f(b) - T_n(b) < 0$, e quindi, per essere $b - a = 2\pi$, ed $f(b) = f(a)$, è anche $f(a) - T_n(a) < 0$. Dunque in (a, α_1), in cui sono contenuti punti di A', vi è almeno una radice di $f(x) - T_n(x) = 0$, minore di α_1; e la più piccola di tali radici, precede tutti i punti di A' contenuti in (a, α_1).

Dalla (1), abbiamo

$$|\varphi_n^{(m)}(x)| < |f(x)| + \mu_n + 1 < M,$$

indicando con M un conveniente numero positivo, e perciò, per il lemma I del n.° 66, tutti i coefficienti di $\varphi_n^{(m)}(x)$ restano, in modulo, inferiori ad un numero fisso N, indipendente da m. Posto

$$\varphi_n^{(m)}(x) = \frac{1}{2}\, a_0^{(m)} + \sum_{r=1}^{n} (a_r^{(m)} \cos rx + b_r^{(m)} \operatorname{sen} rx),$$

dalla successione $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$, $a_0^{(3)}$,.... estragghiamone un' altra $a_0^{(m_1)}$, $a_0^{(m_2)}$, $a_0^{(m_3)}$,.... avente limite, che risulterà in modulo $\leq N$, e che indicheremo con $a_0^{(\infty)}$. Dalla corrispondente successione $a_1^{(m_1)}$, $a_1^{(m_2)}$, $a_1^{(m_3)}$,.... estragghiamone un' altra $a_1^{(m_1')}$, $a_1^{(m_2')}$, $a_1^{(m_3')}$,.... avente pure limite, che risulterà anch' esso in modulo $\leq N$, e che indicheremo con $a_1^{(\infty)}$. Dalla successione $b_1^{(m_1')}$, $b_1^{(m_2')}$, $b_1^{(m_3')}$,.... estragghiamone un' altra avente limite (in modulo $\leq N$), che indicheremo con $b_1^{(\infty)}$; e così via. Giungeremo così a determinare una successione di numeri interi positivi ν_1, ν_2, ν_3,.... (corrispondente all' ultima successione estratta) in modo che sia

$$\lim_{s \to \infty} a_0^{(\nu_s)} = a_0^{(\infty)},$$

ed anche, per ogni $r = 1, 2,\ldots, n$,

$$\lim_{s \to \infty} a_r^{(\nu_s)} = a_r^{(\infty)}, \quad \lim_{s \to \infty} b_r^{(\nu_s)} = b_r^{(\infty)},$$

gli $a_0^{(\infty)}$, $a_r^{(\infty)}$, $b_r^{(\infty)}$ essendo tutti, in modulo, non superiori ad N. Posto

$$\varphi_n^{(\infty)}(x) = \frac{1}{2}\, a_0^{(\infty)} + \sum_{r=1}^{n} (a_r^{(\infty)} \cos rx + b_r^{(\infty)} \operatorname{sen} rx),$$

ne viene allora che la successione $\varphi_n^{(\nu_1)}(x)$, $\varphi_n^{(\nu_2)}(x)$, $\varphi_n^{(\nu_3)}(x)$,.... converge uniformemente, in tutto (a, b), verso $\varphi_n^{(\infty)}(x)$, perchè, preso comunque un $\sigma > 0$, per tutti gli s sufficientemente grandi si ha

$$|\varphi_n^{(\infty)}(x) - \varphi_n^{(\nu_s)}(x)| \leq \frac{1}{2}\,|a_0^{(\infty)} - a_0^{(\nu_s)}| + \sum_{r=1}^{n} \left\{ |a_r^{(\infty)} - a_r^{(\nu_s)}| + |b_r^{(\infty)} - b_r^{(\nu_s)}| \right\}$$

$$\leq \sigma \left\{ \frac{1}{2} + 2n \right\}.$$

Ma, per la (1), è

$$|f(x) - \varphi_n^{(\nu_s)}(x)| < \mu_n + \frac{1}{\nu_s},$$

e perciò, per $s \to \infty$,

$$|f(x) - \varphi_n^{(\infty)}(x)| \leq \mu_n,$$

in tutto (a, b). Dunque $\varphi_n^{(\infty)}(x)$ è un polinomio trigonometrico d' approssimazione, d' ordine n, per la $f(x)$, in (a, b); e siccome, per ogni s maggiore di un certo s_0, è, in tutto (a, b),

$$|\varphi_n^{(\infty)}(x) - \varphi_n^{(\nu_s)}(x)| < \varepsilon,$$

ciò contraddice alla (2).

b) Dalla proposizione ora dimostrata segue facilmente: *Se $f(x)$ è continua in (a, b), preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si può sempre trovare un $\eta_n > 0$ tale che, per ogni polinomio trigonometrico d' approssimazione, d' ordine n, $\tau_n(x)$, di una qualsiasi funzione continua $g(x)$, la quale soddisfi, in tutto (a, b), alla disuguaglianza*

(3) $$|f(x) - g(x)| < \eta_n,$$

esista sempre un polinomio trigonometrico d' approssimazione di ordine n, $T_n(x)$, della $f(x)$, soddisfacente, in tutto (a, b), alla disuguaglianza

(4) $$|T_n(x) - \tau_n(x)| < \varepsilon.$$

Infatti, dalla (3), segue, in tutto (a, b),

$$\begin{aligned}|f(x) - \tau_n(x)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - \tau_n(x)| \\ &\leq \eta_n + \mu_n',\end{aligned}$$

μ_n' essendo la migliore approssimazione, d' ordine n, della $g(x)$. Ma, se $T_n(x)$ è un qualsiasi polinomio trigonometrico d' approssimazione, d' ordine n, della $f(x)$, è, in tutto (a, b),

$$\begin{aligned}|g(x) - T_n(x)| &\leq |g(x) - f(x)| + |f(x) - T_n(x)| \\ &\leq \eta_n + \mu_n.\end{aligned}$$

È dunque

$$\mu_n' \leq \eta_n + \mu_n,$$

e perciò,

$$|f(x) - \tau_n(x)| < 2\eta_n + \mu_n.$$

In virtù della proposizione dimostrata in a), si può, pertanto, determinare η_n in modo che, se $g(x)$ soddisfa alla (3), esista sempre un $T_n(x)$ soddisfacente, in tutto (a, b), alla (4).

Il teorema, così dimostrato, mette in luce la *continuità* della corrispondenza tra la funzione $f(x)$ ed i suoi polinomi trigonometrici d'approssimazione, di dato ordine.

Nel caso in cui sia $0 < b - a < 2\pi$, oppure $b - a = 2\pi$, con $f(a) = f(b)$ e $g(a) = g(b)$, il teorema si può enunciare brevemente dicendo che, *ad ogni* $\varepsilon > 0$, *corrisponde un* $\eta_n > 0$ *tale che, se* $f(x)$ *e* $g(x)$ *differiscono fra loro, in* (a, b), *per meno di* η_n, *i loro polinomi trigonometrici d'approssimazione, d'ordine* n, *differiscano fra loro per meno di* ε.

71. - Determinazione analitica di $T_n(x)$.

a) Vediamo come si possa effettivamente calcolare il polinomio trigonometrico d'approssimazione, di dato ordine, di una funzione continua $f(x)$, in un intervallo (a, b).

Cominciamo a considerare il caso in cui la $f(x)$ è un polinomio trigonometrico. In questo caso la $f(x)$ risulta funzione periodica, di periodo 2π, e potremo sempre supporre $0 < b - a \leq 2\pi$. Per il teorema del n.° 68, b), la $f(x)$ ammette un solo polinomio trigonometrico d'approssimazione, d'ordine n, $T_n(x)$, e per tale polinomio vale la proprietà caratteristica indicata nel n.° 69, b). Siano $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+2}$ dei punti distinti di (a, b) — tutti distinti da b, se è $b = a + 2\pi$ — in numero di $2n + 2$ e tali che sia

$$f(x_r) - T_n(x_r) = (-1)^r \mu_n', \quad (r = 1, 2, \ldots, 2n+2), \tag{1}$$

dove è $|\mu_n'| = \mu_n$. Siccome, nei punti x_r, la differenza $f(x) - T_n(x)$ raggiunge i suoi valori estremi, in tali punti [ad eccezione al più di quello o di quei due non interni ad (a, b)] deve annullarsi la derivata della differenza indicata. Avremo perciò

$$(x_r - a)(x_r - b)[f'(x_r) - T_n'(x_r)] = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, 2n+2). \tag{2}$$

Le equazioni (1) e (2) sono in numero di $4n + 4$, e riguardando in esse come incogniti i numeri $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+2}, \mu_n'$ ed i $2n + 1$ coefficienti di $T_n(x)$, forniscono un sistema di $4n + 4$ equazioni fra $4n + 4$ incognite. I teoremi dei n.i 67 e 69 ci dicono che esiste sempre una soluzione di questo sistema. Potremo, perciò, risolverlo, e tra le sue soluzioni vi sarà certamente quella del nostro problema. Per riconoscere se una soluzione

$$x_1, \ldots, x_{2n+2}, \ \mu_n', \ t_0, \ t_1, \ldots, t_n, \ \tau_1, \ldots, \tau_n,$$

del sistema considerato, è quella che noi cerchiamo, basterà verificare se, in tutto (a, b), è

$$|f(x) - T_n(x)| \leq |\mu_n'|,$$

dove abbiamo posto

$$T_n(x) = \frac{1}{2} t_0 + \sum_{r=1}^{n} (t_r \cos rx + \tau_r \operatorname{sen} rx).$$

Ed infatti, se ciò è, la proposizione del n.° 69, *a*), ci dice, in virtù delle (1), che $T_n(x)$ è certamente il polinomio trigonometrico d'approssimazione, d'ordine n, della $f(x)$.

Il sistema delle equazioni (1) e (2), ponendovi

$$\operatorname{tg} \frac{x_r}{2} = y_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2n + 2), \tag{3}$$

si trasforma in un sistema algebrico. Possiamo dunque affermare che, *se $f(x)$ è un polinomio trigonometrico, la determinazione del suo polinomio trigonometrico d'approssimazione, di ordine n, si ottiene risolvendo, dapprima, un sistema di $4n + 4$ equazioni algebriche fra $4n + 4$ incognite, e risolvendo poi le equazioni* (3) *rispetto alle x_r*.

b) Mostriamo ora che *il metodo precedente permette di calcolare, con quell'approssimazione che si vuole, il polinomio trigonometrico d'approssimazione, d'ordine n, di una qualunque funzione continua $f(x)$, purchè sia $0 < b - a < 2\pi$, oppure $b - a = 2\pi$ con $f(a) = f(b)$, oppure $b - a > 2\pi$ con $f(x)$ periodica di periodo 2π.*

Rammentiamo che, per le ipotesi ora fatte, e in virtù del n.° 60, il polinomio trigonometrico di Fejér, $\sigma_m(x)$, tende, per $m \to \infty$, alla $f(x)$, uniformemente in tutto (a, b) [1]. Dunque,

---

[1] Nell'ipotesi $b - a < 2\pi$, si completerà la definizione della $f(x)$ in $(a, a + 2\pi)$ facendo variare la $f(x)$ linearmente in $(b, a + 2\pi)$, fra i valori $f(b)$ ed $f(a + 2\pi) = f(a)$.

preso comunque un $\eta > 0$, possiamo scegliere m in modo che sia, in tutto (a, b),

$$|f(x) - \sigma_m(x)| < \eta. \tag{4}$$

Ma per il n.° 70, b), preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, possiamo scegliere η così piccolo che, soddisfatta la (4), sia, in tutto (a, b),

$$|T_n(x) - \tau_n(x)| < \varepsilon,$$

dove $T_n(x)$ e $\tau_n(x)$ indicano i polinomi trigonometrici d'approssimazione, d'ordine n, rispettivamente della $f(x)$ e della $\sigma_m(x)$. E poichè la determinazione di $\tau_n(x)$ si ottiene col metodo dato in a), risulta provato quanto avevamo affermato.

c) Il procedimento indicato in b), per calcolare il polinomio trigonometrico d'approssimazione della $f(x)$, di dato ordine, non può servire se è $b - a = 2\pi$ e $f(a) \neq f(b)$, oppure se è $b - a > 2\pi$ senza che la $f(x)$ sia periodica, di periodo 2π. Daremo, perciò, un altro procedimento, che vale in tutti i casi, e che è l'analogo di quello indicato da G. Pólya, per il calcolo dei polinomi razionali interi d'approssimazione ([1]).

Sia, dunque, la funzione continua $f(x)$, data in un intervallo (a, b) qualunque $(a < b)$, ed indichiamo con $\varphi_n^{(2k)}(x)$ il polinomio trigonometrico, d'ordine n, che, fra tutti i polinomi trigonometrici, dello stesso ordine n, rende minimo l'integrale

$$I_{2k}[\varphi_n] \equiv \int_a^b [f(x) - \varphi_n(x)]^{2k} dx,$$

k essendo un numero intero, positivo.

$\varphi_n^{(2k)}(x)$ *esiste ed è unico.* Ciò è evidente se $f(x)$ è un polinomio trigonometrico d'ordine n, perchè in tale caso deve essere $\varphi_n^{(2k)}(x) \equiv f(x)$. In caso contrario, l'integrale $I_{2k}[\varphi_n]$ è sempre maggiore di zero, e tale è anche l'integrale

$$\int_a^b [hf(x) - \varphi_n(x)]^{2k} dx, \tag{5}$$

purchè h non sia nullo insieme con tutti i coefficienti di $\varphi_n(x)$.

([1]) G. Pólya, *Sur une algorithme toujours convergent pour obtenir les polynomes de meilleure approximation de Tchebychev pour une fonction continue quelconque.* (Comptes rendus, t. 137 (1903), pp. 840-843).

Questo nuovo integrale è una funzione razionale intera omogenea (forma algebrica), definita positiva, nelle variabili h, a_0, $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, vale a dire, in h e nei coefficienti di $\varphi_n(x)$; esso risulta perciò, maggiore di $\int_a^b f^{2k}(x)dx$ quando almeno una delle sue variabili è, in modulo, maggiore di un certo numero positivo R (¹). Ne segue che anche $I_{2k}[\varphi_n]$ risulta maggiore di $\int_a^b f^{2k}(x)dx$, quando almeno uno dei coefficienti di $\varphi_n(x)$ è, in modulo, maggiore di R, e che, perciò, il minimo di $I_{2k}[\varphi_n]$ si ha per un $\varphi_n(x)$ avente i coefficienti tutti, in modulo, non superiori ad R. Con ciò è provata l'esistenza di $\varphi_n^{(2k)}(x)$.

Per provare la sua unicità, supponiamo che esistano due polinomi trigonometrici $\varphi_n^{(2k)}(x)$: siano a_r' e b_r' i coefficienti del primo di essi, a_r'' e b_r'' quelli del secondo. Posto $a_r'' - a_r' = \alpha_r$, $b_r'' - b_r' = \beta_r$, consideriamo il polinomio trigonometrico

$$\varphi_n(x, t) \equiv \frac{1}{2}(a_0' + \alpha_0 t) + \sum_1^n \{ (a_r' + \alpha_r t) \cos rx + (b_r' + \beta_r t) \operatorname{sen} rx \}.$$

L'integrale $I_{2k}[\varphi_n(x, t)]$, considerato come funzione di t, ha due minimi in $t = 0$ e $t = 1$, e quindi ha un massimo per un t_0 compreso fra 0 ed 1. Ma è

$$\frac{dI_{2k}[\varphi_n(x, t)]}{dt} =$$

$$-2k \int_a^b [f(x) - \varphi_n(x, t)]^{2k-1} \left[\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_1^n (\alpha_r \cos rx + \beta_r \operatorname{sen} rx)\right] dx,$$

$$\frac{d^2 I_{2k}[\varphi_n(x, t)]}{dt^2} =$$

$$2k(2k-1) \int_a^b [f(x) - \varphi_n(x, t)]^{2k-2} \left[\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_1^n (\alpha_r \cos rx + \beta_r \operatorname{sen} rx)\right]^2 dx,$$

(¹) Ed infatti, detto i (> 0) il minimo dell'integrale (5) sulla ipersfera $h^2 + a_0^2 + \ldots + a_n^2 + b_1^2 + \ldots + b_n^2 = 1$, e posto $\rho = \sqrt{h^2 + \sum_0^n a_n^2 + \sum_1^n b_n^2}$, e dovendo essere questa derivata seconda non superiore a 0, per $t = t_0$, risulta necessariamente $\alpha_0 = 0$, $\alpha_r = 0$, $\beta_r = 0$, vale a dire, $a_0' = a_0''$, $a_r' = a_r''$, $b_r' = b_r''$. L'unicità di $\varphi_n^{(2k)}(x)$ è dunque provata.

Dimostriamo ora che, *preso ad arbitrio un* $\varepsilon > 0$, *possiamo determinare un* k_0 *tale che, per ciascun* $k > k_0$, *esista sempre un polinomio trigonometrico d'approssimazione, d'ordine* n, *della* $f(x)$, *in* (a, b), $T_n(x)$, *soddisfacente, in tutto* (a, b), *alla disuguaglianza*

$$| T_n(x) - \varphi_n^{(2k)}(x) | < \varepsilon.$$

Abbiamo, infatti, da un lato,

$$I_{2k}[\varphi_n^{(2k)}] \leq I_{2k}[T_n] \leq (b-a)\mu_n^{2k}, \tag{6}$$

e, dall' altro,

$$I_{2k}[\varphi_n^{(2k)}] > \lambda_k(\mu_n + 1)^{2k},$$

dove abbiamo indicato con λ_k la lunghezza complessiva di tutti gli intervalli di (a, b) in cui è $| f(x) - \varphi_n^{(2k)}(x) | > \mu_n + 1$. Risulta così

$$\lambda_k < (b-a)\left(\frac{\mu_n}{\mu_n + 1}\right)^{2k},$$

e λ_k tende a zero per $k \to \infty$.

Dopo di ciò, scegliamo in (a, b) un punto b' tale che $0 < b' - a < 2\pi$, e dividiamo l'intervallo (a, b') in $4n+1$ parti uguali. Scegliamo, nelle parti 1ª, 3ª, 5ª, ..., $(4n+1)^a$, rispettivamente i punti $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$, in modo che in essi sia sempre $| f(x) - \varphi_n^{(2k)}(x) | \leq \mu_n + 1$. Ciò è possibile per ogni k maggiore di un k' tale che sia

$$(b-a)\left(\frac{\mu_n}{\mu_n + 1}\right)^{2k'} < \frac{b'-a}{4n+1}.$$

---

il valore di (5) è sempre $\geq \rho^{2k} i$. Se, perciò, il modulo di una delle variabili $h, a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ è maggiore di $\left(\frac{1}{i}\int_a^b f^{2k}(x)dx\right)^{\frac{1}{2k}}$, l'integrale (5) risulta maggiore di $\int_a^b f^{2k}(x)dx$.

Detto Φ il massimo modulo della $f(x)$ in (a, b), nei punti ora scelti è $|\varphi_n^{(2k)}(x)| \leq \Phi + \mu_n + 1$, ed il ragionamento fatto per il lemma I del n.º 66 mostra che i coefficienti di $\varphi_n^{(2k)}(x)$ sono, per tutti i $k > k'$, sempre, in modulo, minori di un numero fisso C. I coefficienti della derivata di $\varphi_n^{(2k)}(x)$ sono allora, per $k > k'$, tutti minori, in modulo, di nC e la derivata stessa resta, in tutto (a, b), minore, in modulo, di $n(2n+1)C$.

Sia ora η un numero positivo, e $\lambda_{k,\eta}$ la lunghezza complessiva di tutti gli intervalli di (a, b) in cui è $|f(x) - \varphi_n^{(2k)}(x)| > \mu_n + \eta$. Abbiamo

$$I_{2k}[\varphi_n^{(2k)}] > \lambda_{k,\eta}(\mu_n + \eta)^{2k}$$

e, per la (6),

$$\lambda_{k,\eta} < (b-a)\left(\frac{\mu_n}{\mu_n + \eta}\right)^{2k}.$$

Detto k_0 un numero intero, maggiore di k' e tale che, per $k = k_0$, il secondo membro di questa disuguaglianza risulti minore di $\eta : \{n(2n+1)C\}$ e sufficientemente piccolo affinchè, in ogni intervallo di (a, b) di ampiezza minore di tale secondo membro, la $f(x)$ oscilli per meno di η, possiamo affermare che, per ogni $k > k_0$, negli intervalli di (a, b) in cui è $|f(x) - \varphi_n^{(2k)}(x)| > \mu_n + \eta$, la differenza $f(x) - \varphi_n^{(2k)}(x)$ non può oscillare per più di $\eta + \eta = 2\eta$, e che è, perciò, in tutto (a, b),

$$|f(x) - \varphi_n^{(2k)}(x)| < \mu_n + 3\eta.$$

La proposizione $a)$ del n.º 70, ci consente, pertanto, di asserire che, se η è sufficientemente piccolo, per ogni $k > k_0$ esiste sempre un polinomio trigonometrico $T_n(x)$ d'approssimazione, d'ordine n, della $f(x)$, soddisfacente, in tutto (a, b), alla

$$|T_n(x) - \varphi_n^{(2k)}(x)| < \varepsilon.$$

Nel caso particolare in cui la $f(x)$ ammetta in (a, b) un solo polinomio trigonometrico d'approssimazione d'ordine n, $T_n(x)$, la proposizione or ora stabilita mostra che $\varphi_n^{(2k)}(x)$ converge uniformemente, in tutto (a, b), verso $T_n(x)$, per $k \to \infty$.

Da quanto precede risulta senz'altro il procedimento che volevamo indicare e che permette, in tutti i casi, di calcolare, con quell'approssimazione che si vuole, un polinomio trigonometrico d'approssimazione, d'ordine n, della $f(x)$, in (a, b).

Tale procedimento consiste nella determinazione di $\varphi_n^{(2k)}(x)$; e purchè k sia sufficientemente grande, questo $\varphi_n^{(2k)}(x)$ rappresenta, con un' approssimazione prefissata ad arbitrio, uno dei $T_n(x)$. La determinazione di $\varphi_n^{(2k)}(x)$ si ottiene poi risolvendo il sistema algebrico

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I_{2k}[\varphi_n]}{\partial a_r} = 0, & (r = 0,\ 1, \ldots, n), \\[2ex] \dfrac{\partial I_{2k}[\varphi_n]}{\partial b_r} = 0, & (r = 1,\ 2, \ldots, n), \end{cases}$$

di $2n+1$ equazioni fra $2n+1$ incognite.

72. - Limite di μ_n.

È evidente che, quando dall' ordine n passiamo all' ordine $n+1$, abbiamo $\mu_{n+1} \leq \mu_n$. Perciò la successione $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ è una successione non crescente ed ha un limite finito $\mu_\infty \geq 0$.

Se è $0 < b - a < 2\pi$, *oppure* $b - a = 2\pi$ *e* $f(a) = f(b)$, *oppure anche* $b - a > 2\pi$ *e* $f(x)$ *periodica, di periodo* 2π, *è* $\mu_\infty = 0$. Ed infatti, con le ipotesi ora fatte, il polinomio trigonometrico di Fejér della $f(x)$, $\sigma_m(x)$ [1], tende, per $m \to \infty$, alla $f(x)$, uniformemente in tutto (a, b). Preso dunque ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, abbiamo, per un m sufficientemente grande,

$$|f(x) - \sigma_m(x)| < \varepsilon,$$

in tutto (a, b); e siccome $m - 1$ è l' ordine di $\sigma_m(x)$, ne viene necessariamente $\mu_{m-1} < \varepsilon$. È perciò anche $\mu_\infty < \varepsilon$, e quindi $\mu_\infty = 0$. Segue che, *con le ipotesi sopra indicate, il polinomio trigonometrico* $T_n(x)$ *d' approssimazione, d' ordine* n, *della funzione continua* $f(x)$, *converge uniformemente, per* $n \to \infty$, *verso la* $f(x)$, *in tutto* (a, b).

Sempre con le stesse ipotesi, la serie

$$T_0(x) + [T_1(x) - T_0(x)] + \ldots + [T_n(x) - T_{n-1}(x)] + \ldots$$

converge uniformemente verso la $f(x)$, in tutto (a, b), e gode di questa proprietà caratteristica: *fra tutte le serie di polinomi trigonometrici degli ordini* $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$, *convergenti unifor-*

---

[1] Se è $b - a < 2\pi$, si completerà la definizione della $f(x)$ come si è detto in [1] a pag. 202.

memente, in tutto (a, b), verso la $f(x)$, essa dà la più rapida convergenza [1].

Nel caso generale di un intervallo (a, b) qualunque, e di una funzione continua $f(x)$ qualunque, non può certo dirsi che è sempre $\mu_\infty = 0$. Possiamo anzi affermare che, *se è $b - a = 2\pi$ ed $f(a) \neq f(b)$, oppure se è $b - a > 2\pi$ e $f(x)$ non è periodica di periodo 2π, è $\mu_\infty > 0$.* Ed infatti, se fosse $\mu_\infty = 0$, scegliendo, per ogni n, un polinomio trigonometrico d'approssimazione $T_n(x)$, questo $T_n(x)$ tenderebbe, per $n \to \infty$, alla $f(x)$, uniformemente in tutto (a, b); ma $T_n(x)$ è funzione periodica, di periodo 2π, e tale perciò dovrebbe risultare, in (a, b), la $f(x)$, contro l'ipotesi fatta.

Se è $b - a = 2\pi$ e $f(a) \neq f(b)$, si ha $\mu_\infty \geq \frac{1}{2} | f(a) - f(b) |$. Infatti, data la periodicità di $T_n(x)$, il maggiore dei due numeri $| f(a) - T_n(a) |$, $| f(b) - T_n(b) | = | f(b) - T_n(a) |$ è maggiore od uguale a $\frac{1}{2} | f(a) - f(b) |$. È perciò $\mu_n \geq \frac{1}{2} | f(a) - f(b) |$ [2]. Analogamente si ha che, se è $b - a > 2\pi$ e la $f(x)$ non è periodica, di periodo 2π, μ_∞ è maggiore o uguale al massimo dei numeri $\frac{1}{2} | f(x') - f(x'') |$, dove x' e x'' è una qualsiasi coppia di punti di (a, b), congrui fra loro rispetto al modulo 2π.

In questi ultimi due casi, può avvenire che uno stesso polinomio trigonometrico sia d'approssimazione di tutti gli ordini, senza che la $f(x)$ sia essa stessa un polinomio trigonometrico [3].

Vogliamo aggiungere un'ultima osservazione.

Se è $b - a = 2\pi$ e $f(a) = f(b)$, oppure $b - a > 2\pi$ con $f(x)$ periodica, di periodo 2π, i coefficienti di $T_n(x)$ tendono, per $n \to \infty$, rispettivamente ed uniformemente verso i coefficienti di Eulero-Fourier della $f(x)$. È infatti, per la proposizione del n. 21,

$$t_r = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} T_n(x) \cos rx \, dx, \quad \tau_r = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} T_n(x) \operatorname{sen} rx \, dx,$$

---

[1] Si intende qui che la convergenza va considerata non in punti particolari, ma globalmente su tutto (a, b).

[2] Se la $f(x)$ è continua ed a variazione limitata in (a, b) con $b - a = 2\pi$, si dimostra che è esattamente $\mu_\infty = \frac{1}{2} | f(a) - f(b) |$.

[3] Un esempio di ciò fu già dato nel n.° 67.

$r = 0, 1, 2, \ldots, n$, essendo t_r e τ_r i coefficienti di $T_n(x)$. E siccome i coefficienti di Eulero-Fourier della $f(x)$ sono dati da

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x) \cos rx \, dx, \quad b_r = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x) \operatorname{sen} rx \, dx,$$

ne viene

$$| t_r - a_r | \leq \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} | T_n(x) - f(x) | \, | \cos rx | \, dx \leq 2\mu_n,$$

$$| \tau_r - b_r | \leq 2\mu_n,$$

da cui segue (per essere, nel caso attuale, $\mu_n \to 0$, per $n \to \infty$) la convergenza uniforme dei t_r e τ_r rispettivamente ai coefficienti a_r e b_r.

CAPITOLO IV.

LE SUCCESSIONI DI FOURIER

§ 1. SUCCESSIONI E SERIE DI FOURIER.

73. - Definizione di successione di Fourier.

Data una funzione $f(x)$ nell' intervallo $(0, 2\pi)$, e supposta ivi *integrabile*, le formule di Eulero-Fourier, del n.° 21,

$$(1) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx,$$

definiscono la successione

$$(2) \qquad \frac{1}{2} a_0, \ a_1, \ b_1, \ a_2, \ b_2, \ldots, \ a_n, \ b_n, \ldots,$$

che chiameremo *successione di Fourier della funzione* $f(x)$. Così la funzione $f(x)$ determina completamente la sua *successione di Fourier.*

Viceversa, la funzione $f(x)$ è determinata, a meno di una funzione nulla in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, dalla sua successione di Fourier. Ed infatti, se, oltre alla $f(x)$, esistesse un' altra funzione $\varphi(x)$, integrabile in $(0, 2\pi)$ e soddisfacente alle (1), si avrebbe, per tutti gli $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - \varphi(x)] \cos nx \, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} [f(x) - \varphi(x)] \operatorname{sen} nx \, dx = 0,$$

e, per il risultato del n.° 41, la differenza $f(x) - \varphi(x)$ dovrebbe essere nulla in quasi-tutto $(0, 2\pi)$.

È poi evidente che la conoscenza della successione di Fourier di una funzione $f(x)$ non può individuare completamente questa funzione, perchè, dalle stesse formole (1), risulta che, cambiando il valore della funzione $f(x)$ in uno o più punti, anche infiniti, le a_n e b_n non cambiano se la nuova funzione così ottenuta è uguale, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, alla $f(x)$. Se però si aggiunge la condizione che la $f(x)$ debba essere continua, allora essa risulta perfettamente determinata dalla sua successione di Fourier. Osserviamo, infine, che, mentre, presa comunque una funzione integrabile in $(0, 2\pi)$, ad essa corrisponde sempre una successione di Fourier, viceversa, presa comunque una successione (2), ad essa non corrisponde sempre una funzione integrabile in $(0, 2\pi)$, vale a dire, essa non è sempre una successione di Fourier. Per esempio, se facciamo $a_n = 1$, $b_n = 1$, per tutti gli n, la successione così ottenuta non è una successione di Fourier, il che risulterà da quanto dimostreremo nel § seguente (n.° 77).

74. – Determinazione della funzione per mezzo della sua successione di Fourier.

Abbiamo veduto, nel n.° preced., che una funzione $f(x)$, integrabile in $(0, 2\pi)$, è determinata a meno di una funzione nulla in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, e che essa è poi determinata completamente se è continua. Ora si presenta la questione della effettiva determinazione della $f(x)$ in base alla sua serie di Fourier.

Tale questione rimane completamente risoluta da quanto abbiamo dimostrato nei n.[i] 59 e 62. Ed infatti, data la successione di Fourier della $f(x)$, formiamo il polinomio trigonometrico di Fejér della $f(x)$, $\sigma_n(x)$, e cerchiamone il limite per $n \to \infty$. In virtù del n.° 62, il limite di $\sigma_n(x)$ esiste in quasi-tutto $(0, 2\pi)$ ed è, in quasi-tutto tale intervallo, uguale al valore della $f(x)$. Perciò, conoscendo la successione di Fourier della $f(x)$, potremo determinare tale funzione in quasi-tutto $(0, 2\pi)$. Se poi la $f(x)$ è continua, il teorema di Fejér del n.° 59 ci dice che $\sigma_n(x)$ converge in tutto $(0, 2\pi)$, eccettuati al più i punti 0 e 2π, verso la $f(x)$: così la $f(x)$ risulta completamente determinata, perchè in 0 e 2π si potranno prendere i valori limiti della $f(x)$, per x interno a $(0, 2\pi)$ e tendente a 0 e 2π, rispettivamente.

75. - Serie di Fourier.

Data una funzione $f(x)$, integrabile in $(0, 2\pi)$, risulta determinata la sua successione di Fourier: con questa successione, possiamo formare la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + ... + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + ...,$$

la quale, *indipendentemente dalla sua convergenza*, è chiamata, come sappiamo, *serie di Fourier della* $f(x)$ (1). Seguendo Hurwitz (2), si scrive

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + ... + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + ...,$$

e la $f(x)$ si dice *funzione generatrice* della serie scritta.

Si ha dunque che ad ogni funzione $f(x)$, integrabile in $(0, 2\pi)$, corrisponde una determinata serie trigonometrica, la sua serie di Fourier. Osserviamo che, se la serie di Fourier di una funzione $f(x)$ converge uniformemente in $(0, 2\pi)$, essa è la serie di Fourier della sua somma (n.° 21) e quindi questa somma coincide con la $f(x)$ in quasi-tutto $(0, 2\pi)$ (n.° 73); se poi la $f(x)$ è continua, tale somma coincide con la $f(x)$ in tutto $(0, 2\pi)$.

Se, in un punto x di continuità della $f(x)$, interno a $(0, 2\pi)$, la serie di Fourier converge, la sua somma è $f(x)$; ciò perchè, in tale caso, converge, e verso lo stesso valore della somma della serie di Fourier, anche il polinomio trigonometrico di Fejér (n.° 58), il quale poi converge verso $f(x)$ per il n.° 59.

Se x è un punto di discontinuità di 1ª specie per la $f(x)$, ed in esso la serie di Fourier converge, la somma della serie è $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, per la stessa ragione or ora esposta.

---

(1) Se la funzione $f(x)$ non è integrabile nel senso di Lebesgue, ma lo è nel senso, per es., di Denjoy, le formule (1) del n.° 73 definiscono una successione $\frac{1}{2} a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ...$, e quindi generano una serie trigonometrica $\frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + ...$ che dicesi *serie di Fourier generalizzata della* $f(x)$.

(2) A. Hurwitz, *Ueber die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen* (Math. Annalen, Bd. 57 (1903), pp. 425-446).

Se la serie di Fourier della $f(x)$ converge nel punto x, interno a $(0, 2\pi)$, la somma della serie, in x, è compresa fra i limiti d'indeterminazione, $\underline{f}(x)$ e $\bar{f}(x)$, della $f(x)$ nel punto considerato. Ciò in virtù dell' Osservazione II del n.° 59.

In un punto x, interno a $(0, 2\pi)$, e di continuità per la $f(x)$, o, più generalmente, interno ad un intervallo in cui la $f(x)$ è limitata, la serie di Fourier non può essere divergente, perchè, se fosse divergente, nel punto considerato dovrebbe tendere all' infinito anche il polinomio trigonometrico di Fejér, $\sigma_n(x)$ (n.° 57), mentre, invece, tale polinomio deve restare, per l'ipotesi fatta, compreso fra due limiti finiti (Osserv. II del n.° 59). Perciò, nell' interno di un intervallo in cui la $f(x)$ è limitata, la sua serie di Fourier è o convergente od indeterminata.

Infine, se la serie di Fourier converge in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, dalla considerazione del polinomio trigonometrico di Fejér e dal teorema del n.° 62, risulta che la serie di Fourier converge, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, verso la $f(x)$.

Esempi. — Abbiamo già dato, nei n.i 44, 45, 46, diversi esempi di sviluppi in serie di Fourier. Tali esempi si riferiscono tutti a funzioni limitate alle quali sono applicabili i teoremi dei n.i 42 e 43. Diamo ora qualche esempio di sviluppi di funzioni illimitate.

1°) Sviluppiamo in serie di Fourier la funzione data in $(0, 2\pi)$, esclusi i punti 0 e 2π, da $-\frac{1}{2}\log\left(4\,\mathrm{sen}^2\frac{x}{2}\right)$. Siccome questa funzione è pari, abbiamo $b_n = 0$, ed

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left\{-\frac{1}{2}\log\left(4\,\mathrm{sen}^2\frac{x}{2}\right)\right\}\cos nx\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \log\left(2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx.$$

Per $n = 0$, abbiamo

$$a_0 = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \log\left(2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= -2\log 2 - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \log\left(\mathrm{sen}\frac{x}{2}\right)dx.$$

Ma è

$$\int_0^\pi \log\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_0^{\pi:2}\log(\operatorname{sen}x)\,dx = \int_0^\pi \log(\operatorname{sen}x)dx$$

$$= \pi\log 2 + \int_0^\pi \log\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)dx + \int_0^\pi \log\left(\cos\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \pi\log 2 + 2\int_0^\pi \log\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)dx,$$

e perciò

$$\int_0^\pi \log\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)dx = -\pi\log 2.$$

È dunque

$$a_0 = -2\log 2 + 2\log 2 = 0.$$

Abbiamo poi, per $n \geq 1$, integrando per parti,

$$a_n = -\frac{1}{\pi n}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}nx\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{\pi n}\left\{\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\,dx + \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\,dx\right\};$$

ma, per la formula (1) del n.° 11, ciascuno degli ultimi due integrali è uguale a $\frac{\pi}{2}$; è dunque

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

La serie di Fourier cercata è perciò

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots\,.$$

Siccome poi questa serie converge uniformemente in ogni intervallo *interno* a $(0, 2\pi)$ (n.° 14), e la funzione data è continua nell'interno di $(0, 2\pi)$, possiamo affermare, in virtù di quanto abbiamo detto in questo n°, che è

$$(1)\qquad \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots = -\frac{1}{2}\log\left(4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)$$

in tutto $(0, 2\pi)$, esclusi i punti 0 e π. Ritroviamo così un risultato del n.° 20.

Osserviamo che, dal risultato ottenuto nel n.° 20, potevamo senz'altro dedurre, in base al teorema del n.° 38, che la serie del primo membro di (1) è la serie di Fourier della funzione qui considerata.

2º) Sviluppiamo in serie di Fourier la funzione data da $\log\left(\cos^2\frac{x}{2}\right)$ in tutto $(0, 2\pi)$, eccettuato il punto π. Questa funzione è pari ed è perciò $b_n = 0$. Per ottenere a_n non vi è che ripetere calcoli analoghi ai precedenti. Ma possiamo giungere più rapidamente al nostro scopo osservando che, posto $x = \pi - y$, abbiamo

$$\log\left(\cos^2\frac{x}{2}\right) = \log\left(\operatorname{sen}^2\frac{y}{2}\right) = -\log 4 + \log\left(4\operatorname{sen}^2\frac{y}{2}\right).$$

Perciò, dalla (1) otteniamo

$$\begin{aligned}\log\left(\cos^2\frac{x}{2}\right) &= -\log 4 - 2\left(\cos y + \frac{\cos 2y}{2} + \frac{\cos 3y}{3} + \dots\right)\\ &= -\log 4 - 2\left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 3x}{3} + \dots\right)\\ &= -\log 4 + 2\cos x - 2\,\frac{\cos 2x}{2} + 2\,\frac{\cos 3x}{3} - \dots,\end{aligned}$$

la quale vale in tutto $(0, 2\pi)$, eccettuato il punto π. Dal teorema del n.º 38 risulta poi che tale serie è la serie di Fourier della funzione considerata.

3º) Sviluppiamo in serie di Fourier la funzione data in $(0, 2\pi)$, esclusi i punti $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, da $-\frac{1}{4}\log\frac{\cos^2 x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}$. Osserviamo che, cambiando x in $-x$, il valore di questa funzione diventa

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\log\frac{\cos^2(-x)}{[1+\operatorname{sen}(-x)]^2} &= -\frac{1}{4}\log\frac{\cos^2 x}{(1-\operatorname{sen} x)^2} =\\ &= -\frac{1}{4}\log\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x} = \frac{1}{4}\log\frac{\cos^2 x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}.\end{aligned}$$

Questa funzione è perciò *dispari* e la sua serie di Fourier è una serie di seni. Si ha dunque:

$$\begin{aligned}a_n &= 0,\\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left\{-\frac{1}{4}\log\frac{\cos^2 x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}\right\}\operatorname{sen} nx\,dx\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \log\frac{|\cos x|}{1+\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} nx\,dx\\ &= -\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi:2}\dots + \int_{\pi:2}^{\pi}\dots\right\}.\end{aligned}$$

Se n è pari, i due integrali dell'ultimo membro sono uguali in valore assoluto e di segno contrario: onde, in tal caso, è $b_n = 0$. Se n è dispari, i due integrali sono uguali in valore assoluto e segno, e possiamo perciò scrivere

$$b_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi:2} \log \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} nx\, dx$$

$$= -\frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \ldots .$$

Con un'integrazione per parti, otteniamo, perciò.

$$b_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi:2} \frac{\cos nx}{\cos x}\, dx.$$

Ma è, per n dispari,

$$\int_0^{\pi:2} \frac{\cos nx}{\cos x}\, dx = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\pi}{2};$$

onde

$$b_n = \frac{1}{n}(-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

e la serie di Fourier cercata è

$$\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} \ldots .$$

Questa serie trigonometrica converge uniformemente in ogni intervallo di $(0, 2\pi)$ che escluda i punti $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ (n.° 15); e siccome la funzione data è continua in tali intervalli, ne viene, per quanto si è detto in questo n.°, che è

$$-\frac{1}{4} \log \frac{\cos^2 x}{(1+\operatorname{sen} x)^2} = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} \ldots$$

in $(0, 2\pi)$, esclusi i punti $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

La serie trigonometrica ora ottenuta fu già sommata nel n.° 20; dal risultato là ottenuto poteva essere dedotto il risultato attuale in virtù del teorema del n.° 38.

Osservazione. — Esistono delle serie trigonometriche, ovunque convergenti, che non sono delle serie di Fourier.

Un esempio di tali serie è dato da

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{\log n},$$

già considerata nel n.° 39. In tale n.°, abbiamo dimostrato che la serie ora scritta non è la serie di Fourier della sua somma. Ora possiamo aggiungere che essa non può essere neppure la serie di Fourier di un'altra funzione $\varphi(x)$. Ed infatti, se fosse effettivamente la serie di Fourier di una funzione $\varphi(x)$, essa dovrebbe, per quanto si è detto nel presente n.°, convergere, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, verso la $\varphi(x)$. Questa funzione risulterebbe, pertanto, uguale alla somma della serie in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, e la serie sarebbe anche la serie di Fourier della sua somma.

§ 2. Condizioni necessarie per le successioni di Fourier.

76. – Limiti di integrali trigonometrici.

Abbiamo già rilevato che, scelta a caso una successione di numeri, questa può non essere una successione di Fourier [1]. Si presenta quindi la questione di fissare le condizioni a cui deve soddisfare una successione per essere di Fourier. Per determinare una prima importante condizione necessaria, è opportuno studiare il limite di due integrali, e precisamente il limite, per $n \to \infty$, di

$$\int_a^b \varphi(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha, \qquad \int_a^b \varphi(\alpha) \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha.$$

Dimostriamo, perciò, il seguente teorema:

Se $\varphi(\alpha)$ è una funzione integrabile nell'intervallo (a, b), è, per $n \to \infty$,

$$(1) \qquad \int_a^b \varphi(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha \to 0, \quad \int_a^b \varphi(\alpha) \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha \to 0 \ [2].$$

Dimostriamo il teorema per il primo integrale; la dimostrazione è la stessa per il secondo.

---

(1) Un esempio di successione, che non è una successione di Fourier, è fornito dall'Osservazione del n.° precedente.

(2) H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, pag. 61. Osserviamo che, in questa proposizione, n può essere un numero reale qualunque, anche non intero.

Supponiamo dapprima che la funzione $\varphi(\alpha)$ sia continua in (a, b) e, preso un ε positivo ad arbitrio, dividiamo (a, b) in parti $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$, su ciascuna delle quali l' oscillazione della $\varphi(\alpha)$ sia minore di ε. Indicati con $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ i valori che la φ assume nei primi estremi dei δ_s, abbiamo

$$\int_a^b \varphi(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = \sum_{s=1}^m \int_{\delta_s} (\varphi_s + \varphi - \varphi_s) \cos n\alpha \, d\alpha =$$

$$= \sum_{s=1}^m \varphi_s \int_{\delta_s} \cos n\alpha \, d\alpha + \sum_{s=1}^m \int_{\delta_s} (\varphi - \varphi_s) \cos n\alpha \, d\alpha,$$

ed essendo, in δ_s, $|\varphi - \varphi_s| < \varepsilon$, otteniamo

$$\left| \sum_{s=1}^m \int_{\delta_s} (\varphi - \varphi_s) \cos n\alpha \, d\alpha \right| < \varepsilon \int_a^b |\cos n\alpha| \, d\alpha < \varepsilon(b-a).$$

È poi

$$\left| \int_{\delta_s} \cos n\alpha \, d\alpha \right| = \left| \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n} \right)_{\delta_s} \right| < \frac{2}{n},$$

e perciò

$$\left| \sum_{s=1}^m \varphi_s \int_{\delta_s} \cos n\alpha \, d\alpha \right| < \frac{2m\Phi}{n},$$

dove Φ indica il massimo modulo di φ in (a, b). È, pertanto,

$$\left| \int_a^b \varphi(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha \right| < \varepsilon(b-a) + \frac{2m\Phi}{n} < \varepsilon(b - a + 1), \tag{2}$$

per ogni $n > n_0 = \dfrac{2m\Phi}{\varepsilon}$. Il teorema è dunque dimostrato, nel caso di $\varphi(\alpha)$ continua.

Veniamo ora al caso generale.

Indichiamo con $\varphi_p(\alpha)$ la funzione $= \varphi(\alpha)$ ove è $-p \leq \varphi(\alpha) \leq p$, $= -p$ ove è $\varphi(\alpha) < -p$, $= p$ ove è $\varphi(\alpha) > p$. Abbiamo

$$\left| \int_a^b \varphi(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha - \int_a^b \varphi_p(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha \right| \leq \int_a^b |\varphi - \varphi_p| \, d\alpha = \int_a^b \{ |\varphi| - |\varphi_p| \} d\alpha,$$

e siccome è, per $p \to \infty$,

$$\int_a^b |\varphi_p|\, d\alpha \to \int_a^b |\varphi|\, d\alpha,$$

è, per ogni p maggiore di un certo p_0,

$$(3) \qquad \left| \int_a^b \varphi(\alpha) \cos n\alpha\, d\alpha - \int_a^b \varphi_p(\alpha) \cos n\alpha\, d\alpha \right| < \varepsilon.$$

Consideriamo ora un plurintervallo Δ_r di (a, b), di lunghezza $< 1 : r$, e tale che la φ risulti continua, quando non si tenga alcun conto dei valori che essa assume nei punti interni di Δ_r. Allora anche la φ_p risulta continua quando non si tenga conto dei suoi valori nei punti interni a Δ_r, e la funzione $\varphi_{p,r}$, coincidente con essa nei punti non interni a Δ_r e che varia linearmente in ciascun intervallo di Δ_r, è continua in tutto (a, b). È poi

$$\left| \int_a^b \varphi_p(\alpha) \cos n\alpha\, d\alpha - \int_a^b \varphi_{p,r}(\alpha) \cos n\alpha\, d\alpha \right| \leq \int_a^b |\varphi_p - \varphi_{p,r}|\, d\alpha,$$

e poichè, per $r \to \infty$, è

$$\int_a^b |\varphi_p - \varphi_{p,r}|\, d\alpha \to 0,$$

abbiamo, di qui e da (3), che, fissato un $p > p_0$, è, per ogni r maggiore di un certo r_0,

$$(4) \qquad \left| \int_a^b \varphi(\alpha) \cos n\alpha\, d\alpha - \int_a^b \varphi_{p,r}(\alpha) \cos n\alpha\, d\alpha \right| < 2\varepsilon,$$

e ciò per tutti gli n. Applicando allora la (2) alla $\varphi_{p,r}$, abbiamo

$$(5) \qquad \left| \int_a^b \varphi(\alpha) \cos n\alpha\, d\alpha \right| < \varepsilon(b - a + 3),$$

per ogni n sufficientemente grande ([1]).

([1]) Se, negli integrali (1), sostituiamo a $\cos n\alpha$ ed a $\operatorname{sen} n\alpha$ i loro moduli, gli integrali hanno ancora limite, ma questo limite non è più (in generale)

OSSERVAZIONE I. — Se la $\varphi(\alpha)$ è integrabile in un intervallo (a_1, b_1) e (a, b) è un qualsiasi intervallo di (a_1, b_1), si può determinare un n_0 tale che, per ogni $n > n_0$, valga la (5), qualunque sia (a, b). Ciò risulta dal fatto che i valori di p_0, r_0, n_0, via via considerati nella dimostrazione precedente, calcolati per l'intervallo (a_1, b_1), valgono anche per qualsiasi intervallo (a, b), contenuto in (a_1, b_1). Dunque, la convergenza allo zero degli integrali (1) è uniforme rispetto a tutti gli intervalli (a, b) contenuti in (a_1, b_1).

OSSERVAZIONE II. — Se $\varphi(\alpha)$ è ancora integrabile in un intervallo (a_1, b_1) contenente (a, b), e, invece degli integrali (1), consideriamo

$$(1') \qquad \int_a^b \varphi(\alpha + kx) \cos n\alpha \, d\alpha, \quad \int_a^b \varphi(\alpha + kx) \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha,$$

supponendo x tale che il punto $\alpha + kx$ sia sempre contenuto in (a_1, b_1), allora avendosi

$$\int_a^b \varphi(\alpha + kx) \cos n\alpha \, d\alpha = \int_a^b \varphi(\alpha + kx) \cos n(\alpha + kx - kx) d(\alpha + kx) =$$

$$= \cos kx \int_{a+kx}^{b+kx} \varphi(\alpha') \cos n\alpha' \, d\alpha' + \operatorname{sen} kx \int_{a+kx}^{b+kx} \varphi(\alpha') \operatorname{sen} n\alpha' \, d\alpha',$$

---

lo zero. Si ha, infatti, per $n \to \infty$,

$$\int_a^b \varphi(\alpha) \,|\cos n\alpha|\, d\alpha \to \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(\alpha) d\alpha, \quad \int_a^b \varphi(\alpha) \,|\operatorname{sen} n\alpha|\, d\alpha \to \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(\alpha) d\alpha.$$

Supponiamo, dapprima, che la $\varphi(\alpha)$ sia continua. Allora, diviso (a, b) in parti δ_s mediante i punti in cui $\cos n\alpha$ si annulla, abbiamo

$$\int_a^b \varphi(\alpha) \,|\cos n\alpha|\, d\alpha = \Sigma \varphi(\alpha_s) \int_{\delta_s} |\cos n\alpha| \, d\alpha,$$

dove α_s è un punto conveniente di δ_s. E siccome — fatta eccezione al più per il primo e l'ultimo dei δ_s — si ha $\int_{\delta_s} |\cos n\alpha| \, d\alpha = \left| \int_{\delta_s} \cos n\alpha \, d\alpha \right| = \frac{2}{n} = \frac{2}{\pi}\delta_s$, ne viene che il limite, per $n \to \infty$, della somma scritta è $\frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(\alpha) d\alpha$.

Dal caso della $\varphi(\alpha)$ continua, si passa poi a quello generale con lo stesso metodo seguito nella dimostrazione delle (1).

abbiamo che gli integrali (1′) convergono entrambi allo zero, per $n \to \infty$, *uniformemente rispetto a tutti gli intervalli* (a, b) *contenuti in* (a_1, b_1) *e rispetto a tutti gli* x *tali che* $(a + kx, b + kx)$ *sia ancora contenuto in* (a_1, b_1).

77. - Teorema di Riemann-Lebesgue.

Dal teorema del n.° preced. segue immediatamente che i coefficienti di Eulero-Fourier tendono a zero, per $n \to \infty$, vale a dire:

Ogni successione di Fourier converge allo zero (1).

Osservazione. — Per una serie di Fourier convergente in un intervallo, per quanto piccolo, la proposizione ora enunciata discende senz'altro dal teorema di Cantor del n.° 2. Così, anche per le serie di Fourier convergenti in quasi-tutto un intervallo, tale proposizione è un caso particolare del teorema di Lebesgue del n.° 3. Ora alla detta proposizione si è giunti indipendentemente dalla convergenza della serie di Fourier.

78. - Ordine di grandezza dei coefficienti di Eulero-Fourier per una funzione a variazione limitata.

a) Nel caso in cui la funzione $f(x)$ sia a variazione limitata, il teorema del n.° 76 (e quindi anche quello del n.° 77) segue senz'altro dalle disuguaglianze del n.° 22. Da esse si ha, in particolare:

Se la funzione $f(x)$ *è a variazione limitata, i suoi coefficienti di Eulero-Fourier soddisfano alle disuguaglianze*

$$(1) \qquad |a_n| < \frac{c}{n}, \quad |b_n| < \frac{c}{n},$$

c *essendo una costante indipendente da* n, *e dipendente soltanto dalla funzione* $f(x)$ (2).

b) *Se la funzione* $f(x)$ *è, in* $(0, 2\pi)$, *continua, soddisfa alla* $f(0) = f(2\pi)$ *ed ammette derivata prima* $f'(x)$ *a variazione limitata, allora i suoi coefficienti di Eulero-Fourier soddisfano alle disuguaglianze*

$$(2) \qquad |a_n| < \frac{c}{n^2}, \quad |b_n| < \frac{c}{n^2}.$$

---

(1) B. Riemann, loc. cit. in (1) a pag. 16; H. Lebesgue, loc. cit. in (2) a pag. 108.

(2) H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 45.

Infatti, integrando per parti e tenendo conto della $f(0) = f(2\pi)$, si ha

$$(3) \qquad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = -\dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(\alpha) \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\alpha) \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha = \dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha, \end{cases}$$

e, applicando alla $f'(x)$ quanto si è dimostrato in a), si ottengono le (2).

La proposizione ora stabilita si generalizza immediatamente al caso in cui la $f(x)$ ammetta derivate d'ordine superiore al secondo.

c) *Se la* $f(x)$ *è assolutamente continua in* $(0, 2\pi)$ *e tale che sia* $f(0) = f(2\pi)$, *si ha, per* $n \to \infty$,

$$(4) \qquad na_n \to 0, \quad nb_n \to 0.$$

Invero, nelle ipotesi attuali valgono ancora le (3), dalle quali, per essere la $f'(x)$ (considerata uguale allo zero là dove non esiste finita) integrabile, discendono le (4) in virtù del teorema di Riemann-Lebesgue (n.° 77).

In particolare, le (4) *valgono se la* $f(x)$ *soddisfa, in tutto* $(0, 2\pi)$, *alla condizione di Lipschitz*

$$|f(x') - f(x'')| \leq k\,|x' - x''|$$

ed inoltre anche alla $f(0) = f(2\pi)$ (¹).

La proposizione data più sopra si generalizza immediatamente al caso in cui la $f(x)$ ammetta derivate assolutamente continue d'ordine superiore al primo.

Osservazione. — Se la $f(x)$ fosse, in $(0, 2\pi)$, soltanto continua ed a variazione limitata, e sempre soddisfacente alla $f(0) = f(2\pi)$, le (4) non varrebbero necessariamente (²). Le (4), invece, varrebbero necessariamente se la $f(x)$, soddisfacendo alla $f(0) = f(2\pi)$, fosse continua in tutto $(0, 2\pi)$, e se, di più,

---

(¹) P. Fatou, loc. cit. in (¹) a pag. 22 (vedi in particolare p. 388).

(²) F. Riesz, *Ueber die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung* (Math. Zeitschr., Bd. 2 (1918), pp. 312-315).

na_n ed nb_n avessero ambedue limiti finiti [1]. Se poi valessero le (4), ed inoltre la $f(x)$ soddisfacesse alla $f(0)=f(2\pi)$ e fosse a variazione limitata in $(0, 2\pi)$ (o più generalmente avesse soltanto discontinuità di 1ª specie), allora la $f(x)$ dovrebbe essere continua oppure dovrebbe coincidere, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, con una funzione continua [2].

79. - Ordine di grandezza dei coefficienti di Eulero-Fourier per una funzione continua.

a) Chiameremo, con De la Vallée Poussin [3], *modulo di continuità* di una funzione continua $f(x)$, in (a, b), una funzione $\omega(\delta)$ la quale, per ogni $\delta > 0$, rappresenti il massimo valore dell'espressione $|f(x_1)-f(x_2)|$ per tutte le possibili coppie x_1, x_2, di punti di (a, b), soddisfacenti alla disuguaglianza $|x_1 - x_2| \leq \delta$ [4].

Il modulo di continuità $\omega(\delta)$ è evidentemente una funzione di δ, continua, non decrescente e tale che $\omega(\delta)\to 0$, per $\delta\to 0$.

Ciò premesso abbiamo:

Se la $f(x)$ *è continua in* $(0, 2\pi)$ *e vi ammette il modulo di continuità* $\omega(\delta)$, *e se è* $f(0)=f(2\pi)$, *i suoi coefficienti di Eulero-Fourier soddisfano alla disuguaglianza*

$$(1)\qquad |a_n| \leq \frac{2}{\pi}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad |b_n| \leq \frac{2}{\pi}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \text{ [5]}.$$

Definiamo, per mezzo della periodicità di modulo 2π, la $f(x)$ su tutto l'asse delle x. Allora potremo scrivere

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)\cos n\alpha\, d\alpha,$$

---

(1) P. Czillag, *Ueber die Fourierkoeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung* (Math. es phys lapok, T. 27 (1918), pp. 301-308). H. Steinhaus, *Bemerkung zu der Arbeit des Herrn L. Neder ecc.* (Math. Zeitschr., Bd. 8 (1920), pp. 320-322). G. Alexits, *Zwei Sätze ueber Fourierkoeffizienten* (Math. Zeitschr., Bd. 27 (1927), pp. 64-67).

(2) L. Neder, *Ueber die Koeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung* (Math. Zeitschr., Bd. 6 (1920), pp. 270-273).

(3) Loc. cit. in (1) a pag. 186.

(4) La funzione $\omega(\delta)$ fu considerata per la prima volta da H. Lebesgue (*Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz*. Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXXVIII (1910), pp. 184-210).

(5) H. Lebesgue, loc. cit. in (4).

e quindi

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(\alpha) - f\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) \right] \cos n\alpha \, d\alpha,$$

$$| a_n | \leq \frac{n}{\pi} \, \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \left| \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \cos n\alpha \, d\alpha \right| = \frac{2}{\pi} \, \omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Nello stesso modo si dimostra la seconda delle (1).

b) Più generalmente, abbiamo:

Se la $f(x)$ *ammette, in* $(0, 2\pi)$, *le prime* r *derivate continue, se è* $f^{(s)}(0) = f^{(s)}(2\pi)$, *per* $s = 0, 1, \ldots, r$, *e se la* $f^{(r)}(x)$ *ammette il modulo di continuità* $\omega_r(\delta)$, è

(2) $$| a_n | \leq \frac{2}{\pi n^r} \, \omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad | b_n | \leq \frac{2}{\pi n^r} \, \omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Abbiamo infatti, integrando per parti, e supponendo, per fissare le idee, che r sia pari,

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} f'(\alpha) \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha = \ldots$$

$$\ldots = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n^r \pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha,$$

onde

$$a_n = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2n^r \pi} \int_0^{2\pi} \left[f^{(r)}(\alpha) - f^{(r)}\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) \right] \cos n\alpha \, d\alpha,$$

da cui la prima delle (2). Analogamente si dimostra la seconda delle (2).

c) *Se la* $f(x)$ *è tale che* $f(0) = f(2\pi)$, *e soddisfa, in tutto* $(0, 2\pi)$, *alla condizione di Lipschitz generalizzata*

(3) $$| f(x') - f(x'') | \leq k \, | x' - x'' |^{\alpha},$$

con $0 < \alpha \leq 1$, è

(4) $$| a_n | \leq \frac{2k}{\pi^{1-\alpha} n^{\alpha}}, \quad | b_n | \leq \frac{2k}{\pi^{1-\alpha} n^{\alpha}} \ (^1).$$

---

(1) H. Lebesgue, loc. cit. in (4) a p. 224.

Ed infatti, dalla (3) segue $\omega(\delta) \leq k\delta^\alpha$, e la prima della (1) dà, perciò,

$$|a_n| \leq \frac{2}{\pi} k \left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha.$$

80. - **Ordine di grandezza dei coefficienti di Eulero-Fourier di una funzione non limitata** [1].

Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia data da

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{|x-c|^\nu},$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione a variazione limitata in $(0, 2\pi)$, c è un punto di questo intervallo, ed è $0 < \nu < 1$. La $f(x)$ risulta allora a variazione limitata (e quindi limitata ed integrabile) in ogni intervallo che non contenga il punto c. Di più, è sempre

$$|f(x)| < \frac{M}{|x-c|^\nu},$$

e perciò la $f(x)$ è integrabile in tutto $(0, 2\pi)$, perchè si è supposto $0 < \nu < 1$.

Per valutare l'ordine di grandezza dei coefficienti a_n e b_n di $f(x)$, decomponiamo l'intervallo $(0, 2\pi)$ in tre parti: $(0, c-\varepsilon)$, $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, $(c+\varepsilon, 2\pi)$. La prima e l'ultima parte dànno all'integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha$$

un contributo che, per il n.° 22, è, in modulo, inferiore a $k:n$, k essendo una costante indipendente da n. Per quanto riguarda la seconda parte, spezziamola in altre due, $(c-\varepsilon, c)$ e $(c, c+\varepsilon)$. Ponendo $c - \alpha = \frac{z}{n}$, avremo

$$\int_{c-\varepsilon}^{c} \frac{\varphi(\alpha)}{(c-\alpha)^\nu} \cos n\alpha \, d\alpha = \frac{1}{n^{1-\nu}} \int_0^{n\varepsilon} \frac{\varphi\left(c - \frac{z}{n}\right)}{z^\nu} \cos(nc - z) \, dz$$

$$= \frac{1}{n^{1-\nu}} \cos nc \int_0^{n\varepsilon} \Phi(z) \frac{\cos z}{z^\nu} dz + \frac{1}{n^{1-\nu}} \operatorname{sen} nc \int_0^{n\varepsilon} \Phi(z) \frac{\operatorname{sen} z}{z^\nu} dz,$$

[1] G. Darboux, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres etc.* (Journal de Mathématiques, 3ième S., T. 4 (1878), pp. 5-56).

dove $\Phi(z)$ risulta, come la $\varphi(x)$, funzione limitata ed a variazione limitata in $(0, n\varepsilon)$. Dunque $\Phi(z)$ è la differenza di due funzioni positive e non crescenti $\Phi_1(z)$ e $\Phi_2(z)$, e si ha, applicando il secondo teorema della media,

$$\int_0^{n\varepsilon} \Phi(z) \frac{\cos z}{z^\nu} dz = \Phi_1(0) \int_0^p \frac{\cos z}{z^\nu} dz - \Phi_2(0) \int_0^q \frac{\cos z}{z^\nu} dz ;$$

e siccome i due integrali

$$\int_0^\infty \frac{\cos z}{z^\nu} dz, \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} z}{z^\nu} dz$$

sono convergenti, ne risulta, qualunque sia n,

$$\left| \int_0^{n\varepsilon} \Phi(z) \frac{\cos z}{z^\nu} dz \right| < H',$$

e, analogamente,

$$\left| \int_0^{n\varepsilon} \Phi(z) \frac{\operatorname{sen} z}{z^\nu} dz \right| < H''.$$

Dunque, per ogni n, è

$$\left| \int_{c-\varepsilon}^{c} \frac{\varphi(\alpha)}{(c-\alpha)^\nu} \cos n\alpha \, d\alpha \right| < \frac{H_1}{n^{1-\nu}},$$

e, analogamente,

$$\left| \int_{c}^{c+\varepsilon} \frac{\varphi(\alpha)}{|c-\alpha|^\nu} \cos n\alpha \, d\alpha \right| < \frac{H_2}{n^{1-\nu}}.$$

Segue da ciò e da quanto precede, che, per ogni n, è

$$|a_n| < \frac{H}{n^{1-\nu}}.$$

La stessa disuguaglianza può dimostrarsi per b_n. Dunque: *Se è*

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{|x-c|^\nu},$$

con $0 < \nu < 1$, $\varphi(x)$ *funzione a variazione limitata in* $(0, 2\pi)$, *e c punto di* $(0, 2\pi)$, *si ha*

$$|a_n| < \frac{K}{n^{1-\nu}}, \qquad |b_n| < \frac{K}{n^{1-\nu}},$$

con K costante indipendente da n.

Nello stesso modo si dimostra che, *se la $f(x)$ è, in* $(0, 2\pi)$, *continua, con* $f(0) = f(2\pi)$, *e con derivata prima data da*

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{|x-c|^{\nu}},$$

essendo $0 < \nu < 1$ *e* $\varphi(x)$ *a variazione limitata in* $(0, 2\pi)$, *si ha*

$$|a_n| < \frac{K}{n^{2-\nu}}, \qquad |b_n| < \frac{K}{n^{2-\nu}}.$$

E questa proposizione si generalizza subito al caso in cui ci siano derivate d'ordine superiore al primo.

81. - Disuguaglianza di Bessel.

Se la $f(x)$ è integrabile, insieme col suo quadrato, in $(0, 2\pi)$, *si ha, per ogni n,*

$$(1) \qquad \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{r=1}^{n} (a_r^2 + b_r^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2 dx,$$

a_r e b_r essendo i coefficienti di Eulero-Fourier della $f(x)$.

Invero, posto

$$s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{r=1}^{n} (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx),$$

si ha

$$\int_0^{2\pi} (f - s_n)^2 dx \geq 0.$$

Sviluppando il primo membro, si ottiene, per un calcolo già fatto al n.° 56,

$$\int_0^{2\pi} (f-s_n)^2 dx = \int_0^{2\pi} f^2 dx - 2 \left\{ \frac{1}{2} a_0 \int_0^{2\pi} f dx + \sum_1^n \left(a_r \int_0^{2\pi} f(x) \cos rx \, dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. + b_r \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} rx \, dx \right) \right\} + \pi \left\{ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_1^n (a_r^2 + b_r^2) \right\},$$

e tenendo conto delle formule di Eulero-Fourier,

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi}(f - s_n)^2 dx = \int_0^{2\pi} f^2 dx - \pi \left\{ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{r=1}^{n} (a_r^2 + b_r^2) \right\},$$

da cui la (1).

La (1) dicesi *disuguaglianza di Bessel* (¹).

Da tale disuguaglianza, discende, che, *se f è integrabile, insieme col suo quadrato, in* $(0, 2\pi)$, *la serie* $\sum_{r=1}^{\infty}(a_r^2 + b_r^2)$ *è convergente, e si ha*

$$(3) \qquad \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{r=1}^{\infty} (a_r^2 + b_r^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2 dx \quad (^2).$$

82. - Condizione d'integrabilità del quadrato di $f(x)$.

Nel n.° preced. abbiamo veduto che, data una funzione $f(x)$, integrabile insieme col suo quadrato, in $(0, 2\pi)$, e formata la corrispondente successione di Fourier, la serie $\sum_{r=1}^{\infty}(a_r^2 + b_r^2)$ è convergente. Vogliamo ora dimostrare la reciproca di questa proposizione.

Se $f(x)$ è integrabile in $(0, 2\pi)$ *e se la serie corrispondente* $\sum_{r=1}^{\infty}(a_r^2 + b_r^2)$ *è convergente, allora è integrabile in* $(0, 2\pi)$ *anche* $f^2(x)$. *Inoltre è*

$$(1) \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2 dx \leq \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{r=1}^{\infty} (a_r^2 + b_r^2).$$

Formiamo, infatti, il polinomio trigonometrico di Fejér, $\sigma_n(x)$, corrispondente alla funzione $f(x)$. È, per la definizione di $\sigma_n(x)$ (n.° 58),

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \left(1 - \frac{r}{n}\right)(a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx).$$

(¹) F. W. Bessel, *Ueber die Bestimmung des Gesetzes einer periodischen Erscheinung* (Astron. Nachr., Vol. 6 (1828), pp. 333-348).

(²) Dalla (3) segue $a_r \to 0$, $b_r \to 0$, per $r \to \infty$; si ha, così, una nuova dimostrazione del teorema di Riemann-Lebesgue del n.° 77, per il caso di una funzione $f(x)$ a quadrato integrabile.

Moltiplichiamo ambo i membri di questa uguaglianza per $\sigma_n(x)$, integriamo poi da 0 a 2π e dividiamo, infine, per π. Tenendo presente che i coefficienti di Eulero-Fourier di $\sigma_n(x)$ sono dati (per il teorema del n.º 21) da

$$a_0,\ \left(1-\frac{1}{n}\right)a_1,\ \left(1-\frac{1}{n}\right)b_1,\ \left(1-\frac{2}{n}\right)a_2,\ \left(1-\frac{2}{n}\right)b_2, \ldots$$

$$\ldots \left(1-\frac{n-1}{n}\right)a_{n-1},\ \left(1-\frac{n-1}{n}\right)b_{n-1},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots,$$

otteniamo

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_n^2 dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{r=1}^{n-1}\left(1-\frac{r}{n}\right)^2(a_r^2+b_r^2).$$

E siccome è $r < n$, onde $\left(1-\frac{r}{n}\right)^2 \leq 1$, abbiamo

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_n^2 dx \leq \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{r=1}^{n-1}(a_r^2+b_r^2),$$

e, per l'ammessa convergenza di $\sum_{r=1}^{\infty}(a_r^2+b_r^2)$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_n^2 dx \leq \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{r=1}^{\infty}(a_r^2+b_r^2). \tag{2}$$

Osserviamo ora, che, per il teorema di Lebesgue del n. 62, è, per $n \to \infty$, $\sigma_n(x) \to f(x)$, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$; perciò, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, è anche $\sigma_n^2(x) \to f^2(x)$. Preso un numero intero positivo qualunque p, indichiamo con f_p^2 la funzione uguale ad f^2 nei punti di $(0, 2\pi)$ ove è $f^2 \leq p$, ed uguale a p ove è $f^2 > p$. Analogo significato abbia $[\sigma_n^2]_p$. Allora è, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, $[\sigma_n^2]_p \to f_p^2$, per $n \to \infty$; e poichè è $[\sigma_n^2]_p \leq p$ in tutto $(0, 2\pi)$, si ha, in virtù del teorema d'integrazione per serie di Arzelà-Lebesgue, per $n \to \infty$,

$$\int_0^{2\pi}[\sigma_n^2]_p dx \to \int_0^{2\pi} f_p^2 dx. \tag{3}$$

Ma per la (2), e per essere sempre $[\sigma_n^2]_p \leq \sigma_n^2$, si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\sigma_n^2]_p\,dx \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_n^2\,dx \leq \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{r=1}^{\infty}(a_r^2+b_r^2),$$

e la (3) mostra perciò che deve essere (passando qui al limite, per $n \to \infty$)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_p^2\,dx \leq \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{r=1}^{\infty}(a_r^2+b_r^2).$$

Dunque l'integrale, su $(0, 2\pi)$, di f_p^2 resta inferiore ad un numero fisso, indipendente da p, e perciò f^2 è integrabile in $(0, 2\pi)$. Inoltre, passando al limite, nella precedente disuguaglianza, per $p \to \infty$, si ottiene la (1).

Da quanto si è dimostrato ora e nel n.° preced., risulta: *Se la $f(x)$ è integrabile in $(0, 2\pi)$, condizione necessaria e sufficiente affinchè sia ivi integrabile anche $f^2(x)$, è che sia convergente la serie* $\sum_{r=1}^{\infty}(a_r^2+b_r^2)$.

83. - **Formula di Parseval.**

Se la funzione $f(x)$ è integrabile in $(0, 2\pi)$, insieme col suo quadrato, si ha

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{r=1}^{\infty}(a_r^2+b_r^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2\,dx, \tag{1}$$

a_r e b_r essendo i coefficienti di Eulero-Fourier della $f(x)$.

Questa formula, detta di Parseval [1], è conseguenza immediata della (3) del n.° 81 e della (1) del n.° preced.

---

[1] La (1) fu data per la prima volta, sotto condizioni molto restrittive, da M. A. PARSEVAL (*Intégration générale et complète de deux équations importantes dans la mécaniques des fluides.* Mémoires présentés à l'Institut des Sciences, T. I (1805), pp. 524-545). Condizioni più larghe per la sua validità furono poi date da HURWITZ, LIAPOUNOFF e DE LA VALLÉE POUSSIN. LEBESGUE (*Leçons sur les séries trigonométriques*) la dimostrò per ogni funzione quasi-continua limitata. Nelle condizioni del testo essa fu dimostrata da P. FATOU (loc. cit. in [1] a p. 22).

Dalla formula di Parseval e dalla (2) del n.° 81 segue che:

Se $f(x)$ è integrabile, insieme col suo quadrato, in $(0, 2\pi)$, si ha, per $n \to \infty$,

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx \to 0, \tag{2}$$

$s_n(x)$ essendo la somma parziale della serie di Fourier della $f(x)$.

Ciò si esprime dicendo che la serie di Fourier di una funzione integrabile, insieme col suo quadrato, in $(0, 2\pi)$, *converge in media* in tale intervallo.

La (2) è un caso particolare della seguente proposizione, dovuta a M. Riesz [1]:

Se p è un numero maggiore di 1, e se $|f(x)|^p$ è integrabile in $(0, 2\pi)$, si ha, per $n \to \infty$,

$$\int_0^{2\pi} | f(x) - s_n(x) |^p dx \to 0.$$

OSSERVAZIONE. — La (2) prova completamente quanto avevamo affermato alla fine del n.° 56, e cioè che lo scostamento quadratico medio di $f(x)$ e $s_n(x)$ tende allo zero, per $n \to \infty$.

84. - Disuguaglianza di Schwarz-Hölder.

a) Per generalizzare le proposizioni precedenti, occorre stabilire la disuguaglianza di Schwarz-Hölder.

Se p è un numero >1, e se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni integrabili, in (a, b), insieme con $|f(x)|^p$ e $|g(x)|^{\frac{p}{p-1}}$, è pure integrabile il prodotto $f(x)g(x)$, ed è

$$\left|\int_a^b fg\,dx\right| \leq \left[\int_a^b |f|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |g|^{\frac{p}{p-1}} dx\right]^{\frac{p-1}{p}} \tag{1}$$ [2].

---

[1] *Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier.* (Comptes rendus, t. 178 (1924), pp. 1464-1467). Cfr. E. W. HOBSON, loc. cit. in [2] a p. 32 (vedi, in particolare p. 612).

[2] Riproduciamo qui sostanzialmente la dimostrazione di F. RIESZ. (*Su alcune disuguaglianze.* Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 1928, pp. 77-79).

Osserviamo che, se α e β sono due numeri maggiori di 0 e tali che $\alpha+\beta=1$, e se A e B sono due numeri ≥ 0, è

$$A^\alpha B^\beta \leq \alpha A + \beta B. \tag{2}$$

Ed infatti, il massimo del prodotto $A^\alpha B^\beta$, per $\alpha A+\beta B$ costante, si ha quando è $A=B$. Ma per $A=B$, è $A^\alpha B^\beta = A$ ed $\alpha A+\beta B=A$, e la (2) è verificata. Essa vale perciò anche se è $A \neq B$.

Se A e B sono due funzioni della x, date nell'intervallo (a, b), sempre ≥ 0, integrabili e tali che

$$\int_a^b A dx = 1, \quad \int_a^b B dx = 1,$$

la (2) mostra che è integrabile anche il prodotto $A^\alpha B^\beta$ e dà, con un'integrazione,

$$\int_a^b A^\alpha B^{1-\alpha} dx \leq 1.$$

Poniamo ora $\alpha = \frac{1}{p}$,

$$A = |f|^p : \int_a^b |f|^p dx,$$

$$B = |g|^{\frac{p}{p-1}} : \int_a^b |g|^{\frac{p}{p-1}} dx;$$

otteniamo che è integrabile il prodotto fg, e che è

$$\int_a^b |fg|\, dx \leq \left[\int_a^b |f|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |g|^{\frac{p}{p-1}} dx\right]^{\frac{p-1}{p}},$$

da cui la (1).

b) Se, nella (2), poniamo

$$A = u_n^{\frac{1}{\alpha}} : \sum_n u_n^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$B = v_n^{\frac{1}{\beta}} : \sum_n v_n^{\frac{1}{\beta}},$$

dove le somme sono estese entrambe da 1 ad m, oppure, nell'ipotesi supplementare della loro convergenza, entrambe da 1 a $+\infty$, otteniamo, sommando e riducendo,

$$(3) \qquad \Sigma u_n v_n \leq \left(\Sigma u_n^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} \left(\Sigma v_n^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta},$$

disuguaglianza dovuta ad Hölder.

c) Se α, β, e γ sono tre numeri >0 e tali che $\alpha+\beta+$ $+\gamma=1$, e se A, B e C sono tre numeri ≥ 0, è

$$(4) \qquad A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma} \leq \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

Ed infatti, supposta fissa la somma $s=\alpha A+\beta B$, il massimo di $A^{\alpha}B^{\beta}$ si ha per $A=B=\dfrac{s}{\alpha+\beta}$. È dunque

$$A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma} \leq \left(\frac{s}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} C^{\gamma},$$

e siccome, per la (2), abbiamo

$$\begin{aligned}\left(\frac{s}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} C^{\gamma} &\leq (\alpha+\beta)\frac{s}{\alpha+\beta} + \gamma C \\ &= \alpha A + \beta B + \gamma C,\end{aligned}$$

la (4) è provata.

Ponendo, nella (4),

$$A = u_n^{\frac{1}{\alpha}} : \sum_n u_n^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$B = v_n^{\frac{1}{\beta}} : \sum_n v_n^{\frac{1}{\beta}},$$

$$C = w_n^{\frac{1}{\gamma}} : \sum_n w_n^{\frac{1}{\gamma}},$$

(le somme essendo tutte estese da 1 ad m, oppure, nell'ipotesi della convergenza, tutte da 1 a $+\infty$), otteniamo, sommando e riducendo,

$$(5) \qquad \Sigma u_n v_n w_n \leq \left(\Sigma u_n^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} \left(\Sigma v_n^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta} \left(\Sigma w_n^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{\gamma}.$$

85. – **Generalizzazione della disuguaglianza di Bessel: 1° Teorema di Young-Hausdorff.**

Se p è un numero ≥ 1, se $f(x)$ è integrabile in $(0, 2\pi)$, insieme con $|f(x)|^{1+\frac{1}{p}}$, e se a_n e b_n sono i coefficienti di Eulero-

Fourier della $f(x)$, la serie

$$(1) \qquad \left|\frac{a_0}{\sqrt{2}}\right|^{1+p} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ |a_n|^{1+p} + |b_n|^{1+p} \}$$

è convergente, e la sua somma è minore od uguale a

$$\left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^{1+\frac{1}{p}} dx \right\}^p \text{ (1).}$$

Per $p = 1$ questa proposizione è già stata dimostrata nel n.° 81; supporremo, dunque, $p > 1$.

Per semplicità di scrittura, poniamo

$$\frac{a_0}{\sqrt{2}} = c_1, \quad a_1 = c_2, \quad b_1 = c_3, \quad a_2 = c_4, \quad b_2 = c_5, \ldots.$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \varphi_1(z), \quad \cos \pi z = \varphi_2(z), \quad \operatorname{sen} \pi z = \varphi_3(z),$$
$$\cos 2\pi z = \varphi_4(z), \quad \operatorname{sen} 2\pi z = \varphi_5(z), \ldots .$$

Avremo allora

$$(2) \qquad \int_0^2 \varphi_r(z)\varphi_s(z)dz = \begin{cases} 0, \text{ se } r \neq s, \\ 1, \text{ se } r = s, \end{cases}$$

ed inoltre, in tutto l'intervallo $(0, 2)$,

$$(3) \qquad |\varphi_n(z)| \leq 1.$$

Posto poi $x = \pi z$, la serie (1), di cui dobbiamo dimostrare la convergenza, prende la forma $\sum_1^{\infty} |c_n|^{1+p}$, e la disuguaglianza

---

(1) Questa proposizione, come anche quella del n.° 86, fu dimostrata, per la prima volta, da W. H. Young [*Sur la généralisation du théorème de Parseval* e *Sur la sommabilité d'une fonction dont la série de Fourier est donnée.* Comptes rendus, t. 155 (1912), pp. 30-33; 472-474. *On the determination of the summability of a function by means of its Fourier constants.* Proc. London Math. Soc., s. 2, Vol. 12 (1912), pp. 71-88], per p intero dispari, e, nel caso generale, da F. Hausdorff (*Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes ueber Fourierreihen.* Math. Zeitschr., Bd. 16 (1923), pp. 163-169). La dimostrazione del testo è dovuta ad F. Riesz (*Ueber eine Verallgemeinerung der Persevalschen Formel.* Math. Zeitschr., Bd 18. (1923), pp. 117-124).

che dobbiamo stabilire diventa

$$(4)\qquad \sum_1^\infty |c_n|^{1+p} \leq \left\{ \int_0^2 |f(\pi z)|^{1+\frac{1}{p}} dz \right\}^p.$$

È evidente che la convergenza della serie ora scritta e la disuguaglianza (4) saranno provate se noi dimostreremo che è, per ogni intero positivo m,

$$(5)\qquad \sum_1^m |c_n|^{1+p} \leq \left\{ \int_0^2 |f(\pi z)|^{1+\frac{1}{p}} dz \right\}^p.$$

Consideriamo la classe $\mathcal{C}_p$ di tutte le funzioni $f(x)$, integrabili in $(0, 2\pi)$, insieme con $|f(x)|^{1+\frac{1}{p}}$, e soddisfacenti alla condizione

$$(6)\qquad \sum_1^m |c_n|^{1+p} = 1.$$

Per ogni funzione $f(x)$ della classe $\mathcal{C}_p$, consideriamo la nuova funzione

$$F(x) = \int_0^x f(x)\, dx,$$

definita in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$, e che risulta, in tale intervallo, assolutamente continua. Inoltre, è sempre $F(0) = 0$. Indichiamo con $\mathcal{C}_p^{(1)}$ la classe di tutte queste funzioni $F(x)$, corrispondenti alle $f(x)$ di $\mathcal{C}_p$. Per ogni $F(x)$, è, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, $F'(x) = f(x)$. Perciò, se poniamo

$$I_p(f) = \int_0^2 |f(\pi z)|^{1+\frac{1}{p}} dz,$$

abbiamo

$$I_p(f) = \int_0^2 |F'(\pi z)|^{1+\frac{1}{p}} dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |F'(x)|^{1+\frac{1}{p}} dx.$$

Ora, l'ultimo integrale scritto, che dipende dalla funzione $F(x)$, ammette nella classe $\mathcal{C}_p^{(1)}$ — per essere p positivo (anzi maggiore di 1) — un minimo [1]. Esiste dunque (almeno) una funzione $\bar{F}(x)$: 1°) assolutamente continua; 2°) nulla per $x = 0$; 3°) tale che la sua derivata $\bar{F}'(x) = \bar{f}(x)$ (che esiste finita in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, e che porremo uguale a zero dove non esiste finita) sia integrabile in $(0, 2\pi)$, insieme con $|\bar{f}(x)|^{1+\frac{1}{p}}$; 4°) soddisfacente alla uguaglianza

$$\sum_1^m |\bar{c}_n|^{1+p} = 1,$$

dove $\bar{c}_n$ si deduce da $\bar{f}(x)$, come c_n da $f(x)$; 5°) tale che sia

$$I_p(\bar{f}) \leq I_p(f),$$

per ogni funzione $f(x)$ della classe $\mathfrak{C}_p$.

Posto $I_p(\bar{f}) = i_p$, dimostriamo che è $i_p \geq 1$.

Osserviamo, a tale scopo, che $I_p(f)$ è funzione omogenea, di grado $1 + \frac{1}{p}$, delle costanti c_n, e che $\sum_1^m |c_n|^{1+p}$ è funzione omogenea, di grado $1 + p$, delle stesse c_n; ne risulta che i_p è anche il valore minimo del rapporto

$$R_p(f) = I_p(f) : \left\{ \sum_{n=1}^m |c_n|^{1+p} \right\}^{\frac{1}{p}},$$

per tutti i possibili valori delle c_n, non più necessariamente legati dalla relazione (6), vale a dire per tutte le funzioni $f(x)$ integrabili in $(0, 2\pi)$, insieme con $|f(x)|^{1+\frac{1}{p}}$. Se, pertanto, consideriamo il rapporto $R_p(f + \lambda\varphi_n)$, per uno qualunque dei valori $n = 1, 2, \ldots$, come funzione di λ, deve annullarsi, per $\lambda = 0$,

---

[1] L. Tonelli, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* (Bologna, 1922 e 1924), Vol. II, p. 311 e p. 286 (Osserv. II). Osserviamo qui che, se è, per esempio, $c_r = a_s$, si ha

$$c_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos sx\, dx = \frac{1}{\pi}\left\{ F(2\pi)\cos 2s\pi + s\int_0^{2\pi} F(x) \operatorname{sen} sx\, dx \right\},$$

e perciò ogni funzione di accumulazione di funzioni di $\mathfrak{C}_p^{(1)}$, che sia assolutamente continua, soddisfa necessariamente alla (6).

la derivata prima di tale rapporto [1]. È dunque

$$\int_0^2 |\bar{f}(\pi z)|^{\frac{1}{p}} [\text{sign } \bar{f}(\pi z)]\, \varphi_n(z)\, dz = \begin{cases} i_p\, |\bar{c}_n|^p [\text{sign } \bar{c}_n], & \text{se è } n \leq m, \\ 0, & \text{se è } n > m, \end{cases}$$

dove sign α rappresenta -1, 0, $+1$, a seconda che α è negativo, nullo, positivo. Ciò significa che, se poniamo

$$\Phi(z) = |\bar{f}(\pi z)|^{\frac{1}{p}} [\text{sign } \bar{f}(\pi z)],$$

ed inoltre

$$C_n = i_p\, |\bar{c}_n|^p [\text{sign } \bar{c}_n], \text{ per } n \leq m,$$
$$C_n = 0, \text{ per } n > m,$$

i coefficienti di Eulero-Fourier della funzione $\Phi\left(\frac{x}{\pi}\right)$ sono dati da $\sqrt{2}\, C_1$ e C_n $(n > 1)$. E siccome la serie di Fourier di $\Phi\left(\frac{x}{\pi}\right)$ è uniformemente convergente in tutto $(0, 2\pi)$, essendo un polinomio trigonometrico, ne viene (n.° 75) che è, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$,

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{m} C_n \varphi_n(z).$$

Applicando, ora, la formula di Parseval (n.° 83), otteniamo

$$\int_0^2 \Phi^2(z)\, dz = \sum_1^m C_n^2,$$

ossia

$$\int_0^2 |\bar{f}(\pi z)|^{\frac{2}{p}} dz = i_p^2 \sum_1^m |\bar{c}_n|^{2p}. \tag{7}$$

Stabilito ciò, poniamo $p_1 = 2p - 1$ (onde $p_1 > 1$) e determiniamo α in modo che sia

$$1 + \frac{1}{p_1} = \alpha\left(1 + \frac{1}{p}\right) + (1 - \alpha)\frac{2}{p}:$$

---

[1] Il rapporto R_p, come funzione di λ, ha sempre la derivata prima finita, perchè così avviene della funzione $|x|^{1+\alpha}$, della x, con $\alpha > 0$.

avremo

$$\alpha = \frac{2(p-1)}{2p-1}$$

e quindi $0 < \alpha < 1$. Allora, applicando la disuguaglianza di Schwarz-Hölder (n.° 84), possiamo scrivere

$$\int_0^2 |\bar{f}(\pi z)|^{1+\frac{1}{p_1}} dz = \int_0^2 |\bar{f}(\pi z)|^{\alpha\left(1+\frac{1}{p}\right)} |\bar{f}(\pi z)|^{(1-\alpha)\frac{2}{p}} dz$$

$$\leq \left[\int_0^2 |\bar{f}(\pi z)|^{1+\frac{1}{p}} dz\right]^{\alpha} \left[\int_0^2 |\bar{f}(\pi z)|^{\frac{2}{p}} dz\right]^{1-\alpha}$$

e quindi, per la (7),

$$i_p \geq \frac{[I_{p_1}(\bar{f})]^{\frac{1}{2-\alpha}}}{\left[\sum_1^m |\bar{c}_n|^{2p}\right]^{\frac{1-\alpha}{2-\alpha}}},$$

ossia

$$i_p \geq \frac{[I_{p_1}(\bar{f})]^{\frac{p_1}{1+p_1}}}{\left[\sum_1^m |\bar{c}_n|^{1+p_1}\right]^{\frac{1}{1+p_1}}}. \tag{8}$$

Se qui indichiamo con i_{p_1} il minimo analogo ad i_p, e cioè il minimo valore dell'integrale $I_{p_1}(f)$ per tutte le funzioni f integrabili, in $(0, 2\pi)$, insieme con $|f|^{1+\frac{1}{p_1}}$ e soddisfacenti alla condizione $\sum_{n=1}^{m} |c_n|^{1+p_1} = 1$, abbiamo, dalla (8) [1],

$$i_p \geq i_{p_1}^{\frac{p_1}{1+p_1}}.$$

Supponiamo ora, se è possibile, che sia $i_p < 1$. Allora la disuguaglianza precedente dà $i_p > i_{p_1}$.

Analogamente, posto $p_2 = 2p_1 - 1, \ldots, p_r = 2p_{r-1} - 1$ (onde $p_r > 1$), risulta

$$i_p > i_{p_1} > i_{p_2} > \ldots > i_{p_r}.$$

---

[1] i_{p_1} risulta anche il minimo di R_{p_1}.

Sia $f^{(r)}(x)$ una funzione tale che

$$I_{p_r}(f^{(r)}) = i_{p_r},$$

$$\sum_{n=1}^{m} | c_n^{(r)} |^{1+p_r} = 1,$$

$\sqrt{2}\, c_1^{(r)}$ e $c_n^{(r)}$ essendo i suoi coefficienti di Eulero-Fourier. Essendo dunque

$$c_n^{(r)} = \int_0^2 f^{(r)}(\pi z)\, \varphi_n(z)\, dz,$$

è, per la (3),

$$| c_n^{(r)} | \leq \int_0^2 | f^{(r)}(\pi z) |\, dz,$$

e, applicando la disuguaglianza di Schwarz-Hölder (n.º 84), (in cui faremo $g(x) \equiv 1$),

$$| c_n^{(r)} | \leq \left[\int_0^2 | f^{(r)}(\pi z) |^{1+\frac{1}{p_r}} dz \right]^{\frac{p_r}{1+p_r}} . \, 2^{\frac{1}{1+p_r}}$$

$$= 2^{\frac{1}{1+p_r}}\, i_{p_r}^{\frac{p_r}{1+p_r}}.$$

È, pertanto,

$$(9) \qquad 1 = \sum_{n=1}^{m} | c_n^{(r)} |^{1+p_r} < 2m\, i_{p_r}^{p_r} < 2m\, i_p^{p_r}.$$

Ma, per le posizioni fatte, si ha

$$p_1 - 1 = (2p - 1) - 1 = 2(p - 1),$$
$$p_2 - 1 = 2(p_1 - 1) = 2^2(p - 1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_r - 1 = 2^r(p - 1),$$

e siccome è $p > 1$, p_r tende all' infinito con r. Avendo supposto $i_p < 1$, segue, per $p \to \infty$, $i_p^{p_r} \to 0$, mentre per la (9) deve essere

$$i_p^{p_r} > \frac{1}{2m}.$$

Resta così dimostrata assurda l'ipotesi $i_p < 1$. È dunque $i_p \geq 1$; e siccome i_p è anche il minimo del rapporto R_p, viene

$$I_p(f) \geq \left\{ \sum_{n=1}^{m} |c_n|^{1+p} \right\}^{\frac{1}{p}},$$

vale a dire la (5), ed il teorema risulta dimostrato.

Corollario. — *Se è* $p \geq 1$, *e se* $f(x)$ *è integrabile, insieme con* $|f(x)|^{1+\frac{1}{p}}$, in $(0, 2\pi)$, *la serie*

$$(10) \qquad |a_0|^{1+p} + \sum_{1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)^{\frac{1+p}{2}}$$

è convergente.

Infatti, dalla disuguaglianza

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^n \leq \frac{u^n + v^n}{2},$$

valida per $u \geq 0$, $v \geq 0$, $n \geq 1$ [1], abbiamo

$$\left(\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}\right)^{\frac{1+p}{2}} \leq \frac{|a_n|^{1+p} + |b_n|^{1+p}}{2}$$

e la convergenza della (10) segue da quella della (1).

86. — **2.º Teorema di Young-Hausdorff.**

Se p *è un numero* ≥ 1, *se* a_n *e* b_n *sono i coefficienti di Eulero-Fourier di una funzione* $f(x)$, *integrabile in* $(0, 2\pi)$, *e se la serie*

$$(1) \qquad \left|\frac{a_0}{\sqrt{2}}\right|^{1+\frac{1}{p}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ |a_n|^{1+\frac{1}{p}} + |b_n|^{1+\frac{1}{p}} \right\}$$

è convergente, anche $|f(x)|^{1+p}$ *risulta integrabile in* $(0, 2\pi)$, *ed è*

$$(2) \quad \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^{1+p} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left|\frac{a_0}{\sqrt{2}}\right|^{1+\frac{1}{p}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ |a_n|^{1+\frac{1}{p}} + |b_n|^{1+\frac{1}{p}} \right\} \text{ [2]}.$$

---

[1] Invero, il minimo di $u^n + v^n$, per $u + v = \text{cost}$, si ha per $u = v = \frac{u+v}{2}$. Esso minimo è dunque $2\left(\frac{u+v}{2}\right)^n$.

[2] Loc. cit. in [1] a pag. 235.

Per $p=1$, questa proposizione è già stata dimostrata nel n.° 82.

Dimostriamo, in primo luogo, la (2) per una funzione $f(x)$ che sia un polinomio trigonometrico. Allora, conservando le notazioni del n.° preced., abbiamo

$$f(x)=\sum_{n=1}^{m} c_n\varphi_n\left(\frac{x}{\pi}\right),$$

e se consideriamo un'altra qualsiasi funzione $g(x)$, integrabile in $(0,\ 2\pi)$, insieme con $|g(x)|^{1+\frac{1}{p}}$, ed indichiamo con γ_n i coefficienti c_n che le corrispondono, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)f(x)dx &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{m} c_n \int_0^{2\pi} g(x)\varphi_n\left(\frac{x}{\pi}\right)dx\\ &=\sum_{n=1}^{m} c_n\gamma_n .\end{aligned}$$

Applicando la disuguaglianza (3) del n.° 84, otteniamo

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)f(x)dx\right| \leq \left[\sum_{n=1}^{m}|c_n|^{\frac{1+p}{p}}\right]^{\frac{p}{1+p}}\left[\sum_{n=1}^{m}|\gamma_n|^{1+p}\right]^{\frac{1}{1+p}},$$

da cui, applicando alla funzione $g(x)$ il teorema del n.° 85, segue

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)f(x)dx\right| \leq \left[\sum_{n=1}^{m}|c_n|^{\frac{1+p}{p}}\right]^{\frac{p}{1+p}}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|g(x)|^{\frac{1+p}{p}}dx\right\}^{\frac{p}{1+p}}.$$

Facendo qui

$$g(x)=|f(x)|^p[\operatorname{sign} f(x)],$$

otteniamo

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^{1+p}dx \leq \left[\sum_{n=1}^{m}|c_n|^{1+\frac{1}{p}}\right]^p, \tag{3}$$

che è la (2), nel caso in cui la $f(x)$ sia un polinomio trigonometrico.

Veniamo ora al caso generale.

Formiamo il polinomio trigonometrico di Fejér, $\sigma_m(x)$ (n.° 58), corrispondente alla $f(x)$. È

$$\sigma_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m-1}\left(1 - \frac{n}{m}\right)(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

ed applicando la (3), facendovi $f(x) = \sigma_m(x)$, e tenendo conto che è $\left|1 - \frac{n}{m}\right| < 1$, risulta

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\,\sigma_m(x)\,|^{1+p} dx \leq \left[\sum_{n=1}^{2m-1} |\,c_n\,|^{1+\frac{1}{p}}\right]^p,$$

ed anche, per la supposta convergenza della (1),

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\,\sigma_m(x)\,|^{1+p} dx \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\,c_n\,|^{1+\frac{1}{p}}\right]^p.$$

Ragionando ora come già abbiamo fatto nel n.° 82, otteniamo di qui l'integrabilità di $|\,f(x)\,|^{1+p}$ e la disuguaglianza (2).

Corollario. — *Se è $p \geq 1$, e se converge la serie*

$$|\,a_0\,|^{\frac{p+1}{p}} + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)^{\frac{p+1}{2p}}, \tag{4}$$

dove a_n e b_n sono i coefficienti di Eulero-Fourier della funzione integrabile $f(x)$, allora è integrabile anche $|\,f(x)\,|^{1+p}$.

Ed infatti, dalla disuguaglianza

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^n \geq \frac{u^n + v^n}{2},$$

valida per $u \geq 0$, $v \geq 0$, $0 < n \leq 1$, abbiamo

$$\left(\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}\right)^{\frac{p+1}{2p}} \geq \frac{|\,a_n\,|^{1+\frac{1}{p}} + |\,b_n\,|^{1+\frac{1}{p}}}{2},$$

e, dalla convergenza della (4), segue quella della (1) e quindi l'integrabilità di $|\,f(x)\,|^{1+p}$.

87. - Condizioni di convergenza per le serie $\sum \frac{a_n}{n}$ e $\sum \frac{b_n}{n}$.

a) Se la funzione $f(x)$ è integrabile in $(0, 2\pi)$, insieme col suo quadrato, le serie $\sum\limits_1^\infty \frac{a_n}{n}$ e $\sum\limits_1^\infty \frac{b_n}{n}$, dove a_n e b_n sono i coefficienti di Eulero-Fourier della $f(x)$, sono assolutamente convergenti.

Infatti, per quanto si è dimostrato nel n.º 81, dall'integrabilità di $f^2(x)$ segue la convergenza della serie $\Sigma\,(a_n^2 + b_n^2)$ e quindi quella delle serie $\Sigma\, a_n^2$ e $\Sigma\, b_n^2$. Ora è

$$\left\{ |a_n| - \frac{1}{n} \right\}^2 \geq 0,$$

e perciò

$$\frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left\{ a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right\};$$

quindi, dalla convergenza delle serie $\sum a_n^2$ e $\sum \frac{1}{n^2}$, segue quella della serie $\sum \frac{|a_n|}{n}$.

Nello stesso modo si dimostra la convergenza assoluta della serie $\sum \frac{b_n}{n}$.

In particolare segue che, *se la $f(x)$ è quasi-continua e limitata in $(0, 2\pi)$, le serie $\sum \frac{a_n}{n}$ e $\sum \frac{b_n}{n}$ sono assolutamente convergenti.* Ciò perchè, nell'ipotesi fatta, la $f(x)$ risulta integrabile insieme col suo quadrato.

Come applicazione, possiamo dedurre che la somma $s(x)$ della serie

$$\sum_2^\infty \frac{\operatorname{sen} nx}{\log n} \tag{1}$$

non è limitata in $(0, 2\pi)$, ciò che abbiamo dimostrato, per altra via, nel n.º 39. Ed infatti, se la $s(x)$ fosse limitata, essa (che è continua in ogni punto interno a $(0, 2\pi)$) avrebbe per serie di Fourier la (1) (n.º 38), e la serie

$$\sum \frac{b_n}{n} = \sum_2^\infty \frac{1}{n \log n}$$

dovrebbe essere convergente, ciò che non è.

b) Se converge la serie $\Sigma\{|a_n|^p + |b_n|^p\}$, *con* $p > 1$, *convergono assolutamente anche le serie* $\sum \frac{a_n}{n}$ *e* $\sum \frac{b_n}{n}$.

Infatti, dalla disuguaglianza (3), di Hölder, del n.° 84, deduciamo

$$\sum_1^m \frac{|a_n|}{n} \leq \left\{\sum_1^m |a_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_1^m \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right\}^{\frac{p-1}{p}}.$$

Per $m \to \infty$, il primo fattore del secondo membro ha limite finito, per l'ipotesi fatta, ed il secondo fattore ha pure limite finito per essere $\frac{p}{p-1} > 1$ e per essere convergente la serie $\sum \frac{1}{n^\sigma}$, con $\sigma > 1$. Perciò la serie $\sum \frac{|a_n|}{n}$ è convergente. Analogamente per $\sum \frac{|b_n|}{n}$.

Segue, come corollario:

Se la funzione $f(x)$ *è integrabile in* $(0, 2\pi)$, *e per un* $\sigma > 0$ *è ivi integrabile anche* $|f(x)|^{1+\sigma}$, *allora le serie* $\sum \frac{a_n}{n}$ *e* $\sum \frac{b_n}{n}$ *sono assolutamente convergenti.*

Infatti, se è $\sigma \geq 1$, dall'integrabilità di $|f(x)|^{1+\sigma}$ segue quella di $f^2(x)$, e la proposizione enunciata si deduce da quella data in *a*). Se poi è $0 < \sigma < 1$, per la proposizione del n.° 85, si ha la convergenza di

$$\sum\left\{|a_n|^{1+\frac{1}{\sigma}} + |b_n|^{1+\frac{1}{\sigma}}\right\},$$

e non resta che applicare il teorema or ora dimostrato.

c) La serie $\sum_1^\infty \frac{b_n}{n}$ *è sempre convergente* [1].

Abbiamo, infatti,

$$\sum_1^n \frac{b_r}{r} = \frac{1}{\pi}\sum_1^n \frac{1}{r}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, rx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left\{\sum_1^n \frac{\mathrm{sen}\, rx}{r}\right\} dx.$$

---

[1] H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 102.

Per quanto abbiamo dimostrato nel n.° 52, esiste un numero L, tale che sia, in tutto $(0, 2\pi)$, e per tutti gli n,

$$\left| \sum_1^n \frac{\operatorname{sen} rx}{r} \right| < L.$$

È dunque, per tutti gli x di $(0, 2\pi)$ e tutti gli n,

$$\left| f(x) \sum_1^n \frac{\operatorname{sen} rx}{r} \right| < L \, | f(x) | ,$$

onde, in virtù di un noto teorema d'integrazione per serie,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \left\{ \sum_1^n \frac{\operatorname{sen} rx}{r} \right\} dx = \int_0^{2\pi} f(x) \left\{ \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} rx}{r} \right\} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x) dx,$$

perchè è (n.° 20)

$$\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} rx}{r} = \frac{1}{2} (\pi - x).$$

La serie $\sum_1^\infty \frac{b_n}{n}$ è dunque convergente, e si ha

$$\sum_1^\infty \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x) dx. \tag{2}$$

Da quanto abbiamo ora dimostrato segue subito che la serie (1), considerata in a), non è una serie di Fourier. La somma della (1) non è integrabile in $(0, 2\pi)$, perchè, se lo fosse, la (1) sarebbe (per il n.° 38, a)) la serie di Fourier della sua somma. Tutto ciò fu già dimostrato, per altra via, nel n.° 39.

d) La serie $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n}$ non è sempre convergente [1]; però la sua convergenza può assicurarsi sotto larghissime ipotesi.

---

[1] W. H. Young, *On the nature of the successions formed by the coefficients of a Fourier series.* (Proc. London Math. Soc., S. 2, Vol. 10 (1911), pp. 344-348).

Se, per un $p > 1$, $|f(x)|^p$ è integrabile in tutto $(0, 2\pi)$, la serie $\sum \frac{a_n}{n}$ è convergente e si ha

$$(3) \qquad \sum_1^\infty \frac{a_n}{n} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \log\left(2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right) dx.$$

La convergenza della serie considerata, risulta, per l'ipotesi fatta, dal corollario dato in *b*); tale convergenza può però provarsi nuovamente, insieme con la (3), col seguente ragionamento. Osserviamo, innanzi tutto, che è

$$(4) \qquad \sum_1^n \frac{a_r}{r} = \frac{1}{\pi}\sum_1^n \frac{1}{r}\int_0^{2\pi} f(x) \cos rx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \left\{ \sum_1^n \frac{\cos rx}{r} \right\} dx.$$

Indichiamo poi con p' un numero maggiore tanto di 1 quanto di $\frac{2}{3}p$, e minore di p, ed applichiamo la disuguaglianza di Schwarz-Hölder (n. 84):

$$\int_0^{2\pi} \left| f(x) \sum_1^n \frac{\cos rx}{r} \right|^{p'} dx \leq \left[\int_0^{2\pi} |f|^p dx \right]^{\frac{p'}{p}} \left[\int_0^{2\pi} \left| \sum_1^n \frac{\cos rx}{r} \right|^{\frac{pp'}{p-p'}} dx \right]^{\frac{p-p'}{p}}.$$

Qui è $\frac{pp'}{p-p'} > \frac{3pp'}{p} > 3$, e, per il teorema del n.° 86,

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_1^n \frac{\cos rx}{r} \right|^{\frac{pp'}{p-p'}} dx \leq \pi \left[\sum_1^\infty \left(\frac{1}{r}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}} \right]^\lambda,$$

dove si è posto $\lambda = \frac{pp'}{p-p'} - 1$. Ponendo

$$\left[\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{p'}{p}} \left[\pi^{\frac{1}{\lambda}} \sum_1^\infty \left(\frac{1}{r}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}} \right]^{\frac{\lambda}{p}(p-p')} = H,$$

si ha dunque, qualunque sia n,

$$\int_0^{2\pi} \left| f(x) \sum_1^n \frac{\cos rx}{r} \right|^{p'} dx \leq H.$$

In virtù di questa disuguaglianza, possiamo applicare un noto teorema d'integrazione per serie ([1]) e scrivere

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\left\{\sum_1^n \frac{\cos rx}{r}\right\}dx = \int_0^{2\pi} f(x)\left\{\sum_1^\infty \frac{\cos rx}{r}\right\}dx$$

$$= -\int_0^{2\pi} f(x)\log\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)dx,$$

perchè è (n.° 20)

$$\sum_1^\infty \frac{\cos rx}{r} = -\log\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right).$$

La serie $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n}$ risulta perciò convergente, e vale la (3).

W. H. Young, a cui è dovuto il teorema ora dimostrato, ha provato ([2]), più generalmente, che la convergenza della serie $\sum \frac{a_n}{n}$ e la validità della (3) sussistono anche se, in luogo dell'integrabilità di $|f(x)|^p$, si suppone quella di $|f(x)|\log|f(x)|$. Hardy e Littlewood ([3]) hanno poi osservato che a quest'ultima ipotesi si può sostituire l'altra che sia integrabile in tutto $(-\pi, \pi)$ la funzione $f(x)\log|x|$ (la $f(x)$ essendo supposta definita, fuori di $(0, 2\pi)$, mediante la periodicità di periodo 2π). Possiamo aggiungere che l'esistenza e la finitezza del limite, per $n\to\infty$, dell'ultimo integrale della (4) dipendono unicamente dal comportamento della $f(x)$ in vicinanza degli estremi dell'intervallo $(0, 2\pi)$, perchè, nell'intervallo $(\delta, 2\pi - \delta)$, comunque piccolo sia il numero positivo δ, la serie $\sum \frac{\cos nx}{n}$ è uniformemente convergente (n.° 14); perciò, tenendo presente la (4), possiamo dire che la convergenza della serie $\sum \frac{a_n}{n}$ dipende soltanto dal comportamento della $f(x)$ in vicinanza dei punti 0 e 2π.

([1]) V. per es.: E. W. Hobson, *Theory of functions of a real variable.* Vol. II (2ª ediz.), p. 301.

([2]) W. H. Young, *On a certain series of Fourier.* (Proc. London Math. Soc., S. 2, Vol. 11 (1912), pp. 357-366).

([3]) Loc. cit. in ([1]) a pag. 178.

Il teorema sopra dimostrato vale dunque anche se la $|f(x)|^p$ (con $p > 1$) si suppone integrabile soltanto negli intervalli $(0, \delta)$ e $(2\pi - \delta, 2\pi)$.

La condizione necessaria e sufficiente per la convergenza della serie $\sum \frac{a_n}{n}$ fu determinata da Hardy e Littlewood [1].

88. - **Condizione sufficiente per la convergenza delle serie Σa_n e Σb_n.**

a) Le serie Σa_n e Σb_n, dove a_n e b_n sono, come al solito, i coefficienti di Eulero-Fourier di una funzione $f(x)$, integrabile in $(0, 2\pi)$, non sono necessariamente convergenti.

Per esempio, se è $f(x) = -\log\left(2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)$, si ha (n.° 20)

$$\sum_1^\infty a_n = \sum_1^\infty \frac{1}{n},$$

serie che è divergente. Se è, invece, $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, si ha (n.° 20)

$$\sum_1^\infty b_n = \sum_1^\infty \frac{1}{n}.$$

b) La serie

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty a_n$$

rappresenta la serie di Fourier della $f(x)$ nel punto $x = 0$; se, perciò, questa serie di Fourier è convergente in $x = 0$, e la $f(x)$ è continua nei punti $x = 0$ e $x = 2\pi$, allora si ha (n.° 75)

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty a_n = \frac{f(0) + f(2\pi)}{2}.$$

c) *Se, per un dato numero C, la funzione* $\frac{f(x) - C}{x}$ *risulta integrabile in* $(-\pi, \pi)$, *la* $f(x)$ *essendo definita fuori di* $(0, 2\pi)$

---

[1] Loc. cit. in [1] a p. 178.

mediante la periodicità di periodo 2π, *allora la serie* Σb_n *è convergente e si ha*

$$(1)\qquad \sum_1^\infty b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{ f(x) - C \} \operatorname{cotg}\frac{x}{2}\, dx.$$

Si ha, infatti,

$$\sum_1^n b_r = \frac{1}{\pi}\sum_1^n \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} rx\, dx = \frac{1}{\pi}\sum_1^n \int_0^{2\pi} \{ f(x) - C \} \operatorname{sen} rx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \{ f(x) - C \} \left\{ \sum_1^n \operatorname{sen} rx \right\} dx$$

e, per la formula (3′) del n.° 11,

$$(2)\qquad \sum_1^n b_r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ f(x) - C \right\} \left\{ \operatorname{cotg}\frac{x}{2} - \frac{\cos\dfrac{2n+1}{2}x}{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}} \right\} dx.$$

Ora, dalla supposta integrabilità di $\dfrac{f(x)-C}{x}$ in $(-\pi, \pi)$, segue anche quella di

$$\frac{f(x)-C}{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}} = \frac{f(x)-C}{x}\left(x : \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)$$

e di

$$\{ f(x) - C \} \operatorname{cotg}\frac{x}{2}.$$

È dunque

$$\sum_1^n b_r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{ f(x) - C \} \operatorname{cotg}\frac{x}{2}\, dx$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(x)-C}{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}} \cos\frac{2n+1}{2}x\, dx.$$

Ma, per la proposizione del n.° 76, l'ultimo integrale qui scritto tende a zero, per $n \to \infty$: il teorema è, perciò, provato [1].

d) Se la $f(x)$ è continua nei punti $x=0$ e $x=2\pi$, affinchè esista un numero C tale che $\frac{f(x)-C}{x}$ risulti integrabile in $(-\pi, \pi)$, è necessario che sia $f(0)=f(2\pi)$; e, in questo caso, deve essere $C=f(0)=f(2\pi)$.

Se la $f(x)$ è continua nei punti $x=0$ e $x=2\pi$, e se $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ e $\frac{f(x)-f(2\pi)}{x-2\pi}$ sono integrabili [2] *in $(0, 2\pi)$, allora è convergente la serie*

$$\sum_1^\infty \left(b_n + \frac{f(2\pi)-f(0)}{\pi n}\right) \tag{3}$$

e la sua somma è data da

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ f(x) - f(0) - \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi}\, x \right\} \operatorname{cotg}\frac{x}{2}\, dx. \tag{4}$$

Poniamo infatti, in $(0, 2\pi)$,

$$\varphi(x) = f(x) - f(0) - \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi}\, x.$$

Questa funzione è integrabile in $(0, 2\pi)$, come la $f(x)$; è, come la $f(x)$, continua nei punti $x=0$ e $x=2\pi$; soddisfa alla condizione $\varphi(0)=\varphi(2\pi)=0$, e rende integrabili, in $(0, 2\pi)$, le espressioni $\frac{\varphi(x)}{x}$ e $\frac{\varphi(x)}{x-2\pi}$. Ad essa si applica, dunque, la proposizione *c*), per $C=0$.

Ora, lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(0) + \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi}\, x$ è dato da [n.° 42, *b*)]

$$\frac{f(0)+f(2\pi)}{2} + \frac{f(0)-f(2\pi)}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} nx}{n},$$

---

[1] Dalla (2) risulta che la convergenza della serie Σb_n ed il suo valore dipendono unicamente dai valori della $f(x)$ nei punti prossimi ad $x=0$ e $x=2\pi$.

[2] Queste condizioni sono verificate se, per es., in $x=0$ e $x=2\pi$, la $f(x)$ ha derivata finita.

e quello della $\varphi(x)$ è, perciò,

$$\frac{1}{2}\{a_0 - f(0) - f(2\pi)\} + \sum_{1}^{\infty}\left\{a_n \cos nx + \left[b_n + \frac{f(2\pi) - f(0)}{\pi n}\right]\operatorname{sen} nx\right\}.$$

La serie (3) è, pertanto, convergente e la sua somma è data dalla (4).

89. - Lemma di S. Bernstein.

Per dimostrare il teorema del n.° seguente, ci occorre un lemma, dovuto a S. Bernstein [1], che ora proveremo.

Se la funzione $f(x)$, continua e periodica, di periodo 2π, soddisfa, per qualsiasi coppia x_1, x_2, alla disuguaglianza

$$(1) \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|^\alpha,$$

con K costante e $0 < \alpha < 1$, esiste una costante H [dipendente soltanto da α, e non da K e da $f(x)$] tale che, essendo $\sigma_n(x)$ il polinomio di Fejér d'ordine $n-1$ della $f(x)$, risulti sempre

$$(2) \qquad |\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{KH}{n^\alpha},$$

per ogni x ed ogni n.

Dalle formole (5) e (6) del n.° 58, deduciamo

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi:2}[f(x+2z) + f(x-2z) - 2f(x)]\left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz$$

e quindi, applicando la (1) alla coppia $x+2z$, x ed alla coppia $x-2z$, x,

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{2^{\alpha+1}K}{n\pi}\int_0^{\pi:2}\left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 z^\alpha dz,$$

ed anche, poichè, per $0 < z < \pi:2$, è $\operatorname{sen} z > 2z:\pi$,

$$(3) \qquad |\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{2^{\alpha-1}K\pi}{n}\int_0^{\pi:2}\frac{\operatorname{sen}^2 nz}{z^{2-\alpha}}dz.$$

---

[1] *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné.* (Mémoires de l'Académie royale de Belgique, 2ème série, t. IV (1912), pp. 1-104; in particolare, p. 88).

Ma, ponendo $nz = t$, abbiamo

$$\int_0^{\pi:2} \frac{\operatorname{sen}^2 nz}{z^{2-\alpha}}\, dz < n^{1-\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^{2-\alpha}}\, dt,$$

onde

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{2^{\alpha-1} K\pi}{n^\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^{2-\alpha}}\, dt,$$

e la (2) è così dimostrata.

90. - **Teorema di Szàsz.**

a) Se la funzione $f(x)$ è continua, periodica, di periodo 2π, sempre soddisfacente alla disuguaglianza

(1) $$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K\, |x_1 - x_2|^\alpha,$$

con K costante e $0 < \alpha \leq 1$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)^p$ risulta convergente per ogni $p > \dfrac{1}{2\alpha + 1}$ (¹).

È evidente che, se è $p \geq 1$, la convergenza della serie $\Sigma\, (a_n^2 + b_n^2)^p$ è una conseguenza di quella di $\Sigma\, (a_r^2 + b_r^2)$, già dimostrata al n.° 81. Supporremo dunque, in ciò che segue‘ $\dfrac{1}{2\alpha + 1} < p < 1$.

Avendosi (cfr. n.° 82)

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \left(1 - \frac{r}{n}\right)(a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx),$$

la serie di Fourier di $f(x) - \sigma_n(x)$ è data da

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{n} (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx) + \sum_{r=n}^{\infty} (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx).$$

(¹) O. Szàsz, *Ueber den Konvergenzexponenten der Fourierschen Reihen gewisser FunktionenKlassen.* (Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss,, Math.-phys. Kl., 1922, pp. 135-150). *Ueber Fouriersche Reihen* (Jahresber. d. Deutschen Mathem. Vereinigung, Bd. XXXII (1923), pp. 194-198).

Percio, per la formola di Parseval (n.° 83), si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)-\sigma_n(x)\}^2dx=\frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n-1}r^2(a_r^2+b_r^2)+\sum_{r=n}^{\infty}(a_r^2+b_r^2).$$

Applicando il lemma del n.° precedente, avremo pertanto, supponendo dapprima $0<\alpha<1$,

$$\sum_{r=n}^{\infty}(a_r^2+b_r^2)<\frac{2K^2H^2}{n^{2\alpha}}, \tag{2}$$

per ogni $n=1, 2,\ldots$. Ora, per la disuguaglianza (3), di Hölder, del n.° 84, ponendovi

$$u_n=(a_n^2+b_n^2)^p,\quad v_n=1,\quad \alpha=p,$$

abbiamo

$$\sum_{n=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}(a_n^2+b_n^2)^p\leq 2^{\nu(1-p)}\left\{\sum_{n=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}(a_n^2+b_n^2)\right\}^p\leq 2^{\nu(1-p)}\left\{\sum_{n=2^\nu+1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right\}^p,$$

ove potremo dare a ν tutti i valori 0, 1, 2,.... Applicando la (2), otteniamo

$$\sum_{n=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}(a_n^2+b_n^2)^p\leq\frac{2^pK^{2p}H^{2p}}{2^{\nu(2\alpha p+p-1)}},$$

e perciò

$$\sum_{n=2}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)^p=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}(a_n^2+b_n^2)^p\leq 2^pK^{2p}H^{2p}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu(2\alpha p+p-1)}};$$

e poichè, essendo $p>\frac{1}{2\alpha+1}$, ossia $2\alpha p+p-1>0$, l' ultima serie qui scritta è la serie geometrica $\sum\limits_0^\infty x^\nu$, per $x=1:2^{2\alpha p+p-1}<1$, ne viene che anche la serie al primo membro è convergente. Dunque, se $0<\alpha<1$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)^p$, con $p>\frac{1}{2\alpha+1}$, è convergente.

Se ora supponiamo $\alpha=1$, vediamo che, preso un β positivo e minore di 1, dalla (1) segue

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq K|x_1-x_2|^\beta,$$

se è $|x_1 - x_2| \leq 1$. Perciò, se indichiamo con K_1 un numero maggiore di K e maggiore anche del massimo di

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\beta},$$

per tutte le coppie x_1, x_2 di $(0, 2\pi)$ tali che $|x_1 - x_2| \geq 1$, abbiamo, per qualsiasi coppia x_1, x_2,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K_1 |x_1 - x_2|^\beta.$$

Allora, per quanto abbiamo già dimostrato, essendo $0 < \beta < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)^p$ è convergente per ogni $p > \frac{1}{2\beta + 1}$. E siccome β può essere preso vicino ad 1 quanto si vuole, ne viene che la serie scritta è convergente per ogni $p > \frac{1}{3}$. Il teorema è così pienamente dimostrato.

Osservazione I. — Szàsz ha anche provato [1] che, per ogni $p < \frac{1}{2\alpha + 1}$, esiste sempre una funzione soddisfacente a tutte le condizioni del teorema ora dimostrato, ma per la quale la serie $\Sigma (a_n^2 + b_n^2)^p$ diverge.

Osservazione II. — Va rilevato il fatto che *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)^p$ *converge per ogni* $p > \frac{1}{3}$, *se la* $f(x)$ *è continua, periodica (di periodo* 2π*) e sempre soddisfacente alla*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < K |x_1 - x_2|,$$

in particolare se, essendo continua e periodica, ha derivata limitata.

b) Corollario di Bernstein. — *Sotto le condizioni del teorema precedente, e nell'ipotesi* $\alpha > \frac{1}{2}$, *le serie* Σa_n *e* Σb_n *convergono assolutamente* [2].

Ed infatti, se è $\alpha > \frac{1}{2}$, si ha $\frac{1}{2\alpha + 1} < \frac{1}{2}$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)^p$

---

[1] Loc. cit. in [1] a pag. 253.

[2] S. Bernstein, *Sur la convergence absolue des séries trigonométriques.* (Comptes rendus, t. 158 (1914), pp. 1661-1664).

converge per $p = 1:2$; e poichè è

$$|a_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad |b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

convergono anche le serie $\Sigma |a_n|$ e $\Sigma |b_n|$.

Per quanto si è detto nell'Osservazione I, se è, invece, $\alpha < \frac{1}{2}$, esiste almeno una funzione soddisfacente alle condizioni del teorema precedente, ma per la quale una almeno delle due serie $\Sigma |a_n|$, $\Sigma |b_n|$ diverge [1]. Ciò perchè, in tale caso, si ha

$$\frac{1}{2\alpha + 1} > \frac{1}{2}.$$

c) Se abbandoniamo l'ipotesi che la $f(x)$ sia periodica, abbiamo la proposizione seguente:

Se la $f(x)$ *è continua in* $(0, 2\pi)$ *e soddisfacente, in tutto tale intervallo, alla disuguaglianza*

$$(3) \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|^\alpha,$$

con K *costante e* $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, *le serie*

$$(4) \qquad \sum_1^\infty a_n, \quad \sum_1^\infty \left(b_n + \frac{f(2\pi) - f(0)}{\pi n}\right)$$

sono assolutamente convergenti.

Poniamo, in $(0, 2\pi)$,

$$\varphi(x) = f(x) - f(0) - \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi} x.$$

Questa nuova funzione risulta, come la $f(x)$, continua e soddisfacente alla (3); inoltre, è $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$. Perciò ad essa è applicabile il corollario di Bernstein, dimostrato in *b*). E siccome la serie di Fourier della funzione $f(0) + \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi} x$ è data da [n.° 42, *b*)]

$$\frac{f(0) + f(2\pi)}{2} + \frac{f(0) - f(2\pi)}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} nx}{n},$$

---

[1] S. Bernstein, loc. cit. in [2] a pag. 255.

ne viene che i coefficienti di $\cos nx$ e di $\operatorname{sen} nx$, nella serie di Fourier della $\varphi(x)$, sono dati, per $n \geq 1$, rispettivamente, da a_n e $b_n + \frac{f(2\pi) - f(0)}{\pi n}$, e che le serie (4) sono assolutamente convergenti.

Questa proposizione vale, in particolare, se la $f(x)$ è continua, in $(0, 2\pi)$, insieme con la sua derivata prima.

§ 3. Condizioni sufficienti per le successioni di Fourier.

91. - Teorema di Riesz-Fischer.

Un' importante condizione sufficiente, affinchè una data successione sia una successione di Fourier, è espressa dal teorema seguente, dovuto a F. Riesz e ad E. Fischer.

Una successione

$$\frac{1}{2}a_0, \; a_1, \; b_1, \; a_2, \; b_2, \ldots, \; a_n, \; b_n, \ldots,$$

tale che sia convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

è una successione di Fourier; inoltre, ogni funzione, avente quella successione come successione di Fourier, è a quadrato integrabile in $(0, 2\pi)$ (¹).

La seconda parte di questo enunciato è, in virtù della proposizione del n.° 82, una conseguenza immediata della prima. Basterà dunque dimostrare la prima parte del teorema.

Poniamo

$$(1) \qquad s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^n (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx),$$

$$(2) \qquad S_n(x) = \int_0^x s_n(x)\, dx.$$

La $S_n(x)$ è una funzione continua in tutto $(0, 2\pi)$; dico che la successione $S_0(x)$, $S_1(x), \ldots, S_n(x), \ldots$ converge uniformemente

(¹) F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions.* (Comptes rendus, t. 144 (1907), pp. 615-619). E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne* (Comptes rendus, t. 144 (1907), pp. 1022-1024).

in tutto $(0, 2\pi)$. È infatti, se m ed n sono due numeri interi qualsiasi,

$$| S_{n+m} - S_n | \leq \int_0^{2\pi} | s_{n+m} - s_n | \, dx,$$

e, per la disuguaglianza di Schwarz,

$$| S_{n+m} - S_n | \leq \sqrt{2\pi \int_0^{2\pi} (s_{n+m} - s_n)^2 dx} = \sqrt{2\pi \sum_{n+1}^{n+m} (a_r^2 + b_r^2)}.$$

Ma, per ipotesi, la serie $\sum_{r=1}^{\infty} (a_r^2 + b_r^2)$ è convergente e, pertanto, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è possibile di determinare un n' tale che, per ogni $n > n'$ e per qualsiasi m (> 0), sia

$$\sum_{n+1}^{n+m} (a_r^2 + b_r^2) < \varepsilon.$$

È dunque, per ogni $n > n'$ e per qualsiasi m,

$$| S_{n+m} - S_n | < \sqrt{2\pi\varepsilon}$$

in tutto $(0, 2\pi)$, e ciò prova che la successione delle $S_n(x)$ converge uniformemente in tutto $(0, 2\pi)$.

Indichiamo con $S(x)$ la funzione limite di $S_n(x)$. Questa $S(x)$ risulta continua in tutto $(0, 2\pi)$, perchè sono continue le $S_n(x)$. Dico che essa è anche assolutamente continua. Ed infatti, se (a_i, b_i), $(i = 1, 2, \ldots, m)$, è un qualsiasi gruppo di intervalli, in numero finito e non sovrapponentisi, di $(0, 2\pi)$, abbiamo

$$\sum_{i=1}^{m} \{ S(b_i) - S(a_i) \} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \{ S_n(b_i) - S_n(a_i) \}.$$

Ma è, applicando la disuguaglianza di Schwarz [1],

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \{ S_n(b_i) - S_n(a_i) \} \right| = \left| \int_{\Sigma(a_i, b_i)} s_n(x) dx \right|$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \cdot \int_{\Sigma(a_i, b_i)} s_n^2 dx} ;$$

---

[1] Nella (1) del n.° 84, si farà $f(x) = s_n(x)$, $g(x) = 1$, nei punti degli intervalli (a_i, b_i), ed invece $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, negli altri punti di $(a, b) \equiv (0, 2\pi)$. Si farà poi $p = 2$.

e siccome si ha

$$\int_{\Sigma(a_i,\, b_i)} s_n^2 dx \leq \int_0^{2\pi} s_n^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{r=1}^{n} (a_r^2 + b_r^2) \leq \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{r=1}^{\infty} (a_r^2 + b_r^2) \equiv L,$$

viene

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \{ S_n(b_i) - S_n(a_i) \} \right| \leq \sqrt{L \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i)},$$

da cui, per $n \to \infty$,

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \{ S(b_i) - S(a_i) \} \right| \leq \sqrt{L \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i)},$$

e ciò prova l'assoluta continuità della $S(x)$ in $(0, 2\pi)$. La $S(x)$ ammette allora derivata finita in quasi-tutto $(0, 2\pi)$. Dalle (1) e (2), segue poi

$$S_n(x) = \frac{1}{2} a_0 x + \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{a_r}{r} \operatorname{sen} rx - \frac{b_r}{r} (\cos rx - 1) \right);$$

e poichè $S_n(x)$ converge uniformemente, in tutto $(0, 2\pi)$, verso $S(x)$, risulta, per $n \to \infty$,

$$S(x) = \frac{1}{2} a_0 x + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{a_r}{r} \operatorname{sen} rx - \frac{b_r}{r} (\cos rx - 1) \right)$$

ossia

$$S(x) - \frac{1}{2} a_0 x = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{a_r}{r} \operatorname{sen} rx - \frac{b_r}{r} (\cos rx - 1) \right),$$

dove la serie del secondo membro è uniformemente convergente.

Osserviamo che la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{b_r}{r}$ è assolutamente convergente, perchè si ha $\left| \frac{b_r}{r} \right| \leq \frac{1}{2} \left(b_r^2 + \frac{1}{r^2} \right)$ e la serie $\Sigma\, b_r^2$ è convergente, essendo convergente per ipotesi $\Sigma (a_r^2 + b_r^2)$. Possiamo dunque scrivere

$$S(x) - \frac{1}{2} a_0 x - \sum_{1}^{\infty} \frac{b_r}{r} = \sum_{1}^{\infty} \left(-\frac{b_r}{r} \cos rx + \frac{a_r}{r} \operatorname{sen} rx \right), \tag{3}$$

dove la serie del secondo membro converge uniformemente in tutto $(0, 2\pi)$. Tale serie è, perciò, la serie di Fourier del primo membro della (3) (n.° 21), e, indicato questo primo membro con $F(x)$ [funzione che risulta assolutamente continua come la $S(x)$] si ha

$$-\frac{b_r}{r}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\alpha)\cos r\alpha\,d\alpha,\qquad \frac{a_r}{r}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\alpha)\operatorname{sen} r\alpha\,d\alpha.$$

Integrando per parti nei secondi membri di queste uguaglianze ed osservando che $F(x)$ è periodica, di periodo 2π, perchè tale è il secondo membro della (3), otteniamo

$$-\frac{b_r}{r}=-\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}F'(\alpha)\operatorname{sen} r\alpha\,d\alpha,\qquad \frac{a_r}{r}=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}F'(\alpha)\cos r\alpha\,d\alpha,$$

ossia

$$a_r=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F'(\alpha)\cos r\alpha\,d\alpha,\qquad b_r=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F'(\alpha)\operatorname{sen} r\alpha\,d\alpha,$$

ed anche

$$a_r=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{F'(\alpha)+\frac{1}{2}a_0\right\}\cos r\alpha\,d\alpha,\quad b_r=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{F'(\alpha)+\frac{1}{2}a_0\right\}\operatorname{sen} r\alpha\,d\alpha.$$

E siccome, essendo $F(x)$ periodica, di periodo 2π, è

$$\int_0^{2\pi}F'(\alpha)d\alpha=F(2\pi)-F(0)=0,$$

è anche

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(F'(\alpha)+\frac{1}{2}a_0\right)d\alpha,$$

ed è così dimostrato che la successione $\frac{1}{2}a_0,\ a_1,\ b_1,\ldots,\ a_n,\ b_n,\ldots$ è la successione di Fourier della funzione

$$F'(x)+\frac{1}{2}a_0=S'(x)\ \text{(1)}.$$

(1) Dal teorema di Riesz-Fischer, ora dimostrato, e da quello di Lebesgue del n.° 62, risulta provato quanto abbiamo affermato a pag. 67. Ed infatti, dalla convergenza della serie $\Sigma(A_n^2+B_n^2)$, considerata a pag. 66, segue che A_r e B_r sono i coefficienti di Eulero-Fourier di una funzione, di cui la somma $\sigma_n(x)$, pure considerata a pag. 66, è il polinomio trigonometrico di Fejér, d'ordine n. A tale funzione la somma $\sigma_n(x)$ converge dunque, in quasi-tutto $(0,\ 2\pi)$,

OSSERVAZIONE. — Tenendo presente il risultato del n.° 81, possiamo dire che la convergenza della serie $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$ è condizione necessaria e sufficiente affinchè $\frac{1}{2}a_0,\ a_1,\ b_1, \dots$ sia la successione di Fourier di una funzione a quadrato integrabile.

92. - Corollari del teorema precedente.

a) Una serie trigonometrica

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \dots,$$

tale che sia sempre, per tutti gli $n > 0$,

$$|a_n| < \frac{C}{n^\alpha}, \quad |b_n| < \frac{C}{n^\alpha},$$

con C *costante positiva, indipendente da* n, *ed* $\alpha > 1:2$, *è una serie di Fourier; più precisamente, è la serie di Fourier di una funzione integrabile insieme col suo quadrato.*

Ed infatti, dalle condizioni poste, segue la convergenza della serie $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$, e non resta perciò che applicare il teorema di Riesz-Fischer.

b) Una successione

$$(1) \qquad \frac{1}{2}a_0,\ a_1,\ b_1, \dots,\ a_n,\ b_n, \dots,$$

tale che, per un $p \geq 1$, *risulti convergente la serie*

$$(2) \qquad \sum_1^\infty \left\{ |a_n|^{1+\frac{1}{p}} + |b_n|^{1+\frac{1}{p}} \right\},$$

è una successione di Fourier.

Invero, dalla convergenza della serie (2) segue, per essere $p \geq 1$, quella della $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$. La successione considerata è dunque, in virtù del teorema di Riesz-Fischer, una successione di Fourier.

Dal teorema di Young-Hausdorff del n.° 86, sappiamo poi che ogni funzione $f(x)$, generatrice della successione (2), è integrabile insieme con $|f(x)|^{1+p}$.

93. – Teorema di Young.

Una successione

$$(1) \qquad \frac{1}{2}a_0,\ a_1,\ 0,\ a_2,\ 0, \ldots,\ a_n,\ 0, \ldots,$$

tale che sia

$$a_n \to 0,$$

$$a_n - a_{n+1} \geq a_{n+1} - a_{n+2},$$

è la successione di Fourier di una funzione non negativa (1).

Ed infatti, la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos nx$$

è [n.° 14, *a*) (2)] convergente uniformemente in tutto l'intervallo $(\delta, 2\pi - \delta)$, purchè sia $0 < \delta < \pi$. La sua somma, per quanto abbiamo dimostrato nel n.° 14, *c*), è non negativa; perciò la serie scritta è la serie di Fourier della sua somma (n.° 39, *c*)).

Se consideriamo, ad esempio, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}$, abbiamo evidentemente $a_n \to 0$, $a_n > a_{n+1}$. Inoltre, poichè la derivata della funzione $\frac{1}{\log x} - \frac{1}{\log(x+1)}$ è negativa, per $x > 1$, risulta verificata anche la condizione $a_n - a_{n+1} > a_{n+1} - a_{n+2}$. La serie considerata è perciò una serie di Fourier (3).

94. – Teorema di Szidon.

a) *Se è $a_n \to 0$ e se la serie $\Sigma \mid a_n - a_{n+1} \mid \log n$ è convergente, la serie*

$$(1) \qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos nx$$

è una serie di Fourier (4).

---

(1) W. H. Young, *On the Fourier series of bounded function.* (Proc. London Math. Soc., S. 2, Vol. 12 (1913), pp. 41-70).

(2) Dalle ipotesi $a_n \to 0$, $a_n - a_{n+1} \geq a_{n+1} - a_{n+2}$ segue anche $a_n \geq a_{n+1}$.

(3) Non sussiste, per le serie di seni, una proposizione analoga al teorema più sopra dimostrato. Infatti, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{\log n}$, nonostante che sia $b_n \to 0$, $b_n > b_{n+1}$, $b_n - b_{n+1} > b_{n+1} - b_{n+2}$, *non* è una serie di Fourier, come abbiamo già detto nella Osservaz. del n.° 75.

(4) S. Szidon, *Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen.* (Math. Zeitschr., Bd. 10 (1921), pp. 121-127).

Osserviamo, in primo luogo, che, dalla convergenza della serie $\Sigma \mid a_n - a_{n+1} \mid \log n$, segue quella della serie $\Sigma \mid a_n - a_{n+1} \mid$; perciò la (1) è [(n.° 14, a)] uniformemente convergente in ogni intervallo interno a $(0, 2\pi)$. Dopo di ciò, poniamo

$$s_m(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^m a_n \cos nx,$$

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{2} + \sum_1^m \cos nx,$$

ed applichiamo la trasformazione di Brunacci-Abel: otteniamo

$$s_m(x) = \sum_{n=0}^{m-1} (a_n - a_{n+1})\sigma_n(x) + a_m \sigma_m(x),$$

donde, prendendo i moduli ed integrando,

$$(2) \quad \int_0^\pi \mid s_m(x) \mid dx \leq \sum_{n=0}^{m-1} \left\{ \mid a_n - a_{n+1} \mid \int_0^\pi \mid \sigma_n(x) \mid dx \right\} + \mid a_m \mid \int_0^\pi \mid \sigma_m(x) \mid dx.$$

Per la formula (1) del n.° 11, abbiamo

$$\sigma_m(x) = \left\{ \operatorname{sen} \frac{2m+1}{2} x \right\} : 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}.$$

Abbiamo, inoltre,

$$(3) \quad \begin{aligned} \int_0^\pi \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{2m+1}{2} x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \right| dx &< \pi \int_0^\pi \frac{\left| \operatorname{sen} \frac{2m+1}{2} x \right|}{x} dx \\ &= \pi \int_0^{(2m+1)\pi:2} \frac{\mid \operatorname{sen} t \mid}{t} dt \\ &< \pi \int_0^1 dt + \pi \int_1^{(2m+1)\pi:2} \frac{dt}{t} \\ &< \pi (1 + \log 2\pi + \log m), \end{aligned}$$

e perciò, per $m \geq 1$,

$$\int_0^\pi \mid \sigma_m(x) \mid dx < A + B \log m,$$

con A e B costanti positive, indipendenti da m. Dalla (2) segue, così,

$$(4) \quad \int_0^\pi | s_m(x) | \, dx < \frac{\pi}{2} | a_0 - a_1 | + \sum_1^\infty \{ | a_n - a_{n+1} | (A + B \log n) \} + | a_m | (A + B \log m).$$

Ora, dalla supposta convergenza di $\Sigma \, | a_n - a_{n+1} | \log n$, e dalla ipotesi $a_n \to 0$, si deduce, essendo

$$a_m = (a_m - a_{m+1}) + (a_{m+1} - a_{m+2}) + \dots + a_{m+s},$$

$$| a_m | \leq \sum_m^\infty | a_n + a_{n+1} |,$$

$$| a_m \log m | \leq \sum_m^\infty | a_n - a_{m+1} | \log n,$$

che il modulo $| a_m \log m |$ resta inferiore ad un numero fisso. Perciò, indicando con C una conveniente costante, in virtù della (4) si può scrivere

$$\int_0^\pi | s_m(x) | \, dx < C.$$

E siccome, per quanto abbiamo già osservato, è

$$\lim_{m \to \infty} \int_\varepsilon^\pi | s_m(x) | \, dx = \int_\varepsilon^\pi \left| \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos nx \right| dx,$$

purchè sia $0 < \varepsilon < \pi$, ne viene

$$\int_\varepsilon^\pi \left| \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos nx \right| dx \leq C.$$

Ciò prova che la somma della serie (1) è integrabile in $(0, 2\pi)$ e che la serie stessa è la serie di Fourier della sua somma (n.° 38, *a*)).

b) Come corollario della precedente proposizione, si ha:

Se è $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$, *e se la serie* $\sum \frac{a_n}{n}$ *è convergente, la* (1) *è una serie di Fourier* (¹).

(¹) S. Szidon, loc. cit. in (⁴) a pag. 262.

Ed infatti, per la trasformazione di Brunacci-Abel, si ha

$$\sum_1^{m+1}\frac{a_n}{n}=\sum_1^{m}\left\{(a_n-a_{n+1})\left(1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{n}\right)\right\}+a_m\left(1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{m}\right)$$

e perciò

$$\sum_1^{m}\left\{(a_n-a_{n+1})\left(1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{m}\right)\right\}<\sum_1^{\infty}\frac{a_n}{n}.$$

È dunque convergente la serie che ha per termine generale $|a_n-a_{n+1}|\left(1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{n}\right)$, e tale è perciò anche la serie

$$\sum_1^{\infty}|a_n-a_{n+1}|\log n.$$

E siccome dalle condizioni sopra poste segue necessariamente $a_n\to 0$, le ipotesi del teorema dimostrato in *a*) sono tutte verificate.

Per esempio, la serie $\sum\limits_1^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$, con $\alpha>0$, risulta, in forza del corollario ora provato, la serie di Fourier della sua somma, la quale è finita e continua in ogni punto interno a $(0, 2\pi)$, in virtù del n.° 14.

c) *Se è* $b_n\to 0$ *e se la serie* $\Sigma|b_n-b_{n+1}|\log n$ *è convergente, la serie*

$$\sum_1^{\infty}b_n \operatorname{sen} nx \tag{5}$$

è una serie di Fourier.

Posto

$$\sigma_m(x)=\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+....+\operatorname{sen} mx,$$

abbiamo (n.° 11)

$$\sigma_m(x)=\frac{\operatorname{sen}\frac{m}{2}x\operatorname{sen}\frac{m+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}},$$

e perciò

$$\int_0^{\pi}|\sigma_m(x)|\,dx<\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{x}\left|\operatorname{sen}\frac{m}{2}x\right|dx$$
$$<A+B\log m,$$

analogamente a quanto abbiamo veduto in *a*).

Osservato ciò, non vi è che da ripetere il ragionamento fatto per dimostrare il teorema di Szidon.

In particolare, abbiamo:

Se è $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots$, *e se la serie* $\sum \frac{b_n}{n}$ *è convergente, la* (5) *è una serie di Fourier* [1].

Questa proposizione si può anche dimostrare col ragionamento usato per il teorema di Young del n.° 93, utilizzando quanto abbiamo dimostrato nel n.° 14, *d*).

Per esempio, la serie $\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} nx}{n^\alpha}$, con $\alpha > 0$, risulta la serie di Fourier della sua somma, che è finita e continua in ogni punto interno a $(0, 2\pi)$ (n.° 14) [2].

---

[1] W. H. Young, loc. cit. in [1] a pag. 262.

[2] È possibile di determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una data successione sia la successione di Fourier di una funzione quasi-continua limitata (C. Carathéodory e L. Fejér, *Ueber den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten* ecc. Rend. Circ. Matem., Palermo, t. XXXII (1911), pp. 218-239), oppure di una funzione soddisfacente alla condizione d'integrabilità di Riemann (C. Carathéodory, *Ueber die Fourierschen Koeffizienten der nach Riemann integrierbaren Funktionen*. Mathem. Zeitschr., Bd. 1 (1918), pp. 309-320), oppure di una funzione monotona (C. Carathéodory, *Ueber die Fourierschen Koeffizienten monotonen Funktionen*. Berl. Ber., 1920, pp. 559-573), oppure di una funzione positiva (O. Toeplitz, *Ueber die Fourier'sche Entwicklung positiven Funktionen*. Rend. Circ. Matem., Palermo, t. XXXII (1911), pp. 191-192. - C. Carathéodory, *Ueber den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen*. Rend. Circ. Matem., Palermo, t. XXXII (1911), pp. 193-217). Sulle successioni di Fourier, vedi anche: G. H. Hardy e J. E. Littlewood, *Some new properties of Fourier constants*. (Mathem. Annalen, Bd. 97 (1926), pp. 159-209).

CAPITOLO V.

CONVERGENZA DELLE SERIE DI FOURIER

§ 1. CONVERGENZA ASSOLUTA.

95. - Condizione necessaria.

Condizione necessaria affinchè la serie di Fourier di una funzione $f(x)$, integrabile in $(0, 2\pi)$, sia ivi assolutamente convergente, è che la $f(x)$ coincida, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, con una funzione ovunque continua in $(0, 2\pi)$ ed assumente gli stessi valori in 0 e 2π.

Ed infatti, se la serie di Fourier converge assolutamente, in tutto $(0, 2\pi)$, sono assolutamente convergenti, per il teorema di Fatou (n.° 5), le serie Σa_n e Σb_n, ed il resto della serie di Fourier è sempre, in modulo, minore od uguale a quello della serie

$$\Sigma(|a_n| + |b_n|).$$

La serie di Fourier è pertanto uniformemente convergente in tutto $(0, 2\pi)$ e la sua somma è una funzione continua e periodica, di periodo 2π, che coincide con la $f(x)$ in quasi-tutto $(0, 2\pi)$ (n.° 75).

La condizione ora indicata è necessaria anche nel caso in cui la serie di Fourier sia assolutamente convergente solo in un intervallo parziale di $(0, 2\pi)$, anche molto piccolo. E se la condizione detta non è verificata, la serie dei moduli dei termini della serie di Fourier è divergente in quasi-tutto $(0, 2\pi)$. Tutto ciò è una conseguenza immediata di quanto si è detto nei n.i 5 e 6.

In particolare, *una funzione continua, che non assuma gli stessi valori nei punti* 0 *e* 2π, *oppure una funzione avente una discontinuità di 1.ª specie, ha una serie di Fourier che non può essere assolutamente convergente nè in tutto* $(0, 2\pi)$ *nè in un intervallo parziale di* $(0, 2\pi)$.

96. - 1.ª Condizione sufficiente: teorema di Bernstein.

Se la funzione $f(x)$ *è continua in tutto* $(0, 2\pi)$, *e soddisfa alla condizione* $f(0) = f(2\pi)$ *ed alla disuguaglianza*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K\,|x_1 - x_2|^{\alpha},$$

con K *costante ed* $\alpha > \frac{1}{2}$, *qualunque siano* x_1 *e* x_2 *di* $(0, 2\pi)$, *allora la serie di Fourier della* $f(x)$ *è ovunque assolutamente convergente* (1).

Se fosse $\alpha > 1$, dalla

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leq K\,|x_1 - x_2|^{\alpha-1},$$

seguirebbero l'esistenza della derivata $f'(x)$ e l'uguaglianza $f'(x) = 0$, in tutto $(0, 2\pi)$. Sarebbe dunque $f(x) =$ cost., e la proposizione sarebbe evidente.

Sia $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. Allora, dal corollario di Bernstein del n.º 90, *b*), segue l'assoluta convergenza delle serie Σa_n e Σb_n, e quindi l'assoluta convergenza della serie di Fourier, in tutto $(0, 2\pi)$.

Osservazione. — Se, sotto le condizioni del teorema enunciato, fosse $\alpha < \frac{1}{2}$, si potrebbe trovare almeno una funzione soddisfacente a quelle condizioni e con serie di Fourier *non* assolutamente convergente in tutto $(0, 2\pi)$.

Corollario. — *Se la funzione* $f(x)$ *è continua con derivata sempre continua* (*od anche soltanto limitata*), *e verifica l'uguaglianza* $f(0) = f(2\pi)$, *la sua serie di Fourier converge assolutamente, ovunque.*

97. - Seconda condizione sufficiente.

a) *Se la funzione* $f(x)$ *è assolutamente continua e tale che sia* $f(0) = f(2\pi)$, *e se, per un* $p > 1$, $|f(x)|^p$ *risulta integrabile in*

---

(1) S. Bernstein, loc. cit. in (2) a pag. 255.

tutto $(0, 2\pi)$ [1], *allora la serie di Fourier della* $f(x)$ *è assolutamente convergente in tutto* $(0, 2\pi)$ [2].

Ed infatti, con un' integrazione per parti, si ha

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha = -\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} f'(\alpha)\,\mathrm{sen}\, n\alpha\, d\alpha,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\mathrm{sen}\, n\alpha\, d\alpha = \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} f'(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha\,;$$

se quindi indichiamo con a_n' e b_n' i coefficienti di Eulero-Fourier della derivata $f'(x)$, abbiamo, per $n = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{cases} a_n' = nb_n, \\ b_n' = -na_n. \end{cases}$$

Ma dall' integrabilità di $|f'(x)|^p$ segue, per il n.° 87, *b*), la convergenza assoluta delle serie

$$\sum \frac{a_n'}{n}, \quad \sum \frac{b_n'}{n}.$$

Sono dunque assolutamente convergenti le serie Σb_n e Σa_n; e da ciò segue l' assoluta convergenza della serie di Fourier della $f(x)$, in tutto $(0, 2\pi)$.

OSSERVAZIONE. — Analogamente a quanto abbiamo detto nel n.° 90, *c*), possiamo osservare che, se, nell' enunciato precedente, abbandoniamo l' ipotesi $f(0) = f(2\pi)$, la serie $\Sigma\,|\,a_n\,|$ risulta ancora convergente, ma, invece della $\Sigma\,|\,b_n\,|$, risulta convergente la serie

$$\sum \left| b_n + \frac{f(2\pi) - f(0)}{\pi n} \right|.$$

b) COROLLARIO. — *Se la funzione* $f(x)$ *è continua, soddisfa alla condizione* $f(0) = f(2\pi)$, *ed ha derivata finita e continua* (*od anche soltanto limitata*) *esclusi gli intorni dei punti* x_1, $x_2, \ldots, x_m$, *ed è sempre* (*esclusi i punti* $x_1, x_2, \ldots, x_m$)

$$|f'(x)| < \frac{M}{|x - x_1|^{\alpha_1}\,|x - x_2|^{\alpha_2} \ldots |x - x_m|^{\alpha_m}},$$

---

[1] Là dove la $f'(x)$ non esiste finita, si porrà $f'(x) = 0$.

[2] L. TONELLI, *Sulla convergenza assoluta delle serie di Fourier.* (Rend. R. Accad. Lincei, Vol. II (1925), pp. 145-149).

con M costante positiva e α_1, α_2,...., α_m, costanti positive e minori di 1; allora la serie di Fourier della $f(x)$ converge assolutamente in tutto $(0, 2\pi)$.

Ed infatti, detto α il maggiore degli α_1, α_2,...., α_m, e scelto p in modo che sia $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, si ha

$$p\alpha_r < 1 \quad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

$$|f'(x)|^p < \frac{M^p}{|x - x_1|^{p\alpha_1} \ldots |x - x_m|^{p\alpha_m}},$$

e la $|f'(x)|^p$ risulta integrabile in $(0, 2\pi)$. Non resta dunque che applicare il teorema sopra dimostrato.

Se è, per esempio, $f(x) = \sqrt{x}$ in $(0, \pi)$ e $f(x) = \sqrt{2\pi - x}$ in $(\pi, 2\pi)$, le condizioni del corollario ora dimostrato sono verificate e la serie di Fourier di questa funzione converge perciò assolutamente in tutto $(0, 2\pi)$.

Altrettanto dicasi se è $f(x) = \sqrt[3]{x}$ iu $(0, \pi)$ e $f(x = \sqrt[3]{2\pi - x}$ in $(\pi, 2\pi)$.

98. - **Teorema di Szidon.**

Se n_m $(m = 1, 2, \ldots)$ è una successione di numeri interi positivi, soddisfacenti alla condizione

$$\frac{n_{m+1}}{n_m} > \lambda > 1, \tag{1}$$

se $f(x)$ è una funzione integrabile in $(0, 2\pi)$ e superiormente (od inferiormente) limitata, e se, nella serie di Fourier della $f(x)$ sono nulli tutti i termini di indice diverso dagli n_m, allora tale serie è ovunque assolutamente convergente (¹).

Supponiamo dunque che la serie di Fourier della funzione $f(x)$ si riduca alla

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_{n_m} \cos n_m x + b_{n_m} \operatorname{sen} n_m x), \tag{2}$$

(¹) S. SZIDON, *Verallgemeinerung eines Satzes ueber die absolute Konvergenz von Fourierreihen mit Lücken.* (Mathem. Annalen, Bd. 97 (1927), pp. 675-676).

Nelle condizioni dell'enunciato del testo e supponendo in più la continuità e la periodicità della $f(x)$, A. KOLMOGOROFF (*Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier.* Fund. Mathematicae, T. V (1924), pp. 96-97) aveva già dimostrato che la serie di Fourier considerata converge ovunque uniformemente (vedi più oltre, n.° 113).

e scegliamo un numero intero positivo h, in modo che sia

$$(3) \qquad 1 + \frac{1}{\lambda^h - 1} < \lambda,$$

$$(4) \qquad 1 - \frac{1}{\lambda^h - 1} > \frac{1}{\lambda}.$$

Poi, indicato con $\varepsilon_m(x)$ il segno del termine $a_{n_m} \cos n_m x + b_{n_m} \operatorname{sen} n_m x$ della (2), consideriamo un x qualunque di $(0, 2\pi)$ ed il prodotto

$$P_{\nu,r}(z) = \prod_{s=0}^{\nu} (1 + \varepsilon_{hs+r}(x) \cos n_{hs+r} z),$$

dove r indica un qualunque numero intero tale che $1 \leq r \leq h$. È evidentemente, per ogni z di $(0, 2\pi)$, $P_{\nu,r}(z) \geq 0$; e perciò, supposto $f(x) \leq L$ in tutto $(0, 2\pi)$, abbiamo

$$(5) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha) P_{\nu,r}(\alpha - x) d\alpha < \frac{L}{\pi}\int_0^{2\pi} P_{\nu,r}(\alpha - x) d\alpha = 2L,$$

perchè, nello sviluppo di $P_{\nu,r}(z)$, tutti i termini, tranne quello costante, che è uguale ad 1, hanno un integrale definito, rispetto a z, nullo sull'intervallo $(0, 2\pi)$.

D'altra parte, sviluppando il prodotto $P_{\nu,r}(z)$, e trasformando i prodotti dei coseni, che via via si formano, in somme di coseni, si ottiene

$$(6) \qquad P_{\nu,r}(z) = 1 + \sum_{s=0}^{\nu} \varepsilon_{hs+r}(x) \cos n_{hs+r} z + \Sigma\, c_\mu \cos |\gamma_\mu| z,$$

dove γ_μ è un numero intero della forma

$$(7) \qquad \gamma_\mu = \sum_{i=1}^{t} \pm n_{hs_i+r},$$

con $t \geq 2$, gli s_i essendo degli interi scelti fra i numeri $0, 1, 2 \ldots \nu$, e tutti fra loro diversi. Supponendo i termini del secondo membro di (7) ordinati in modo che gli s_i vadano crescendo (onde il massimo degli s_i sarà s_t), abbiamo, per la (1),

$$\begin{aligned} n_{hs_t+r} &> \lambda^h n_{h(s_t-1)+r} \geq \lambda^h n_{hs_{t-1}+r} \\ &> \lambda^{2h} n_{hs_{t-2}+r} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &> \lambda^{(t-1)h} n_{hs_1+r} \end{aligned}$$

e perciò

$$(8)\qquad \begin{aligned}\sum_{i=1}^{t-1} n_{hs_i+r} &< n_{hs_t+r}\left(\frac{1}{\lambda^{(t-1)h}}+\frac{1}{\lambda^{(t-2)h}}+\ldots+\frac{1}{\lambda^h}\right)\\ &< n_{hs_t+r}\frac{1}{\lambda^h-1},\end{aligned}$$

dove è, per (1) e (4),

$$0<\frac{1}{\lambda^h-1}<1.$$

Dunque il segno di γ_μ è quello che, nel secondo membro di (7), figura davanti a n_{hs_t+r}, e si ha

$$n_{hs_t+r}\left(1-\frac{1}{\lambda^h-1}\right)<|\gamma_\mu|<n_{hs_t+r}\left(1+\frac{1}{\lambda^h-1}\right),$$

e quindi, per (3) e (4),

$$\frac{1}{\lambda}n_{hs_t+r}<|\gamma_\mu|<\lambda n_{hs_t+r},$$

e, per (1),

$$n_{hs_t+r-1}<|\gamma_\mu|<n_{hs_t+r+1}.$$

E siccome, se fosse $|\gamma_\mu|=n_{hs_t+r}$, dovrebbe essere $\sum_{i=1}^{t-1}\pm n_{hs_t+r}=0$, mentre si ha, analogamente alla (8),

$$\sum_{i=1}^{t-2} n_{hs_i+r}<n_{hs_{t-1}+r}\frac{1}{\lambda^h-1}<n_{hs_{t-1}+r},$$

ne viene che $|\gamma_\mu|$ è un numero intero positivo che non figura fra gli n_m.

Ciò stabilito, eseguiamo il calcolo del primo membro della (5) mediante lo sviluppo (6). Otteniamo, per l'ipotesi fatta sui termini della serie di Fourier della $f(x)$, e per la definizione di $\varepsilon_m(x)$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)P_{\nu,r}(\alpha-x)d\alpha=\sum_{s=0}^{\nu}|a_{n_{hs+r}}\cos n_{hs+r}x+b_{n_{hs+r}}\operatorname{sen} n_{hs+r}x|,$$

donde, in virtù della (5),

$$\sum_{s=0}^{\infty}|a_{n_{hs+r}}\cos n_{hs+r}x+b_{n_{hs+r}}\operatorname{sen} n_{hs+r}x|\leq 2L,$$

e, dando ad r i valori $1, 2, \ldots, h$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} | a_{n_m} \cos n_m x + b_{n_m} \operatorname{sen} n_m x | \leq 2hL.$$

Il teorema è così dimostrato.

OSSERVAZIONE. — Dal teorema di Szidon segue che, se $f(x)$ è una funzione integrabile in $(0, 2\pi)$ e superiormente (od inferiormente) limitata, e tale che la sua serie di Fourier sia della forma (2), con gli indici n_m soddisfacenti alla (1), *la* $f(x)$ *deve coincidere, in quasi-tutto* $(0, 2\pi)$, *con una funzione continua in tutto* $(0, 2\pi)$ *ed assumente gli stessi valori uei punti* 0 *e* 2π.

§ 2. CONVERGENZA SEMPLICE.

99. - Considerazioni generali.

a) Da quanto si è esposto sino ad ora, risultano almeno tre metodi per dimostrare la convergenza (semplice) di una serie di Fourier.

1.° METODO. — Il primo di questi metodi è fondato sui risultati del Cap. I, relativi alle serie trigonometriche generali. Calcolati i coefficienti di Eulero-Fourier, e quindi costruita effettivamente la serie di Fourier della data funzione $f(x)$, si cerca di dimostrare la sua convergenza sfruttando i criteri dati nel Cap. I per la convergenza di una qualunque serie trigonometrica (sia o non sia una serie di Fourier).

Si voglia, per esempio, dimostrare la convergenza della serie di Fourier della funzione data, in $(0, 2\pi)$, da $f(x) = x$. Per i calcoli già fatti nel n.° 46, questa serie è

$$\pi - 2\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \ldots\right);$$

e siccome la serie di seni, qui racchiusa fra parentesi, ha i coefficienti tutti positivi, decrescenti e tendenti a zero, i risultati del n.° 14 ci consentono di affermare che essa è sempre convergente.

2.° METODO. — La convergenza di una serie di Fourier, anzichè essere stabilita mediante la conoscenza effettiva dei suoi coefficienti, può essere dedotta direttamente dalle proprietà della funzione generatrice $f(x)$, utilizzando i teoremi dei n.[i] 42 e 43, oppure quelli dei n.[i] 96 e 97.

Così, ad esempio, per la funzione data, in $(0, 2\pi)$, da $f(x) = x$, possiamo rilevare che essa è continua, che ha derivata continua, anzi costante e quindi a variazione limitata; perciò, per il teorema del n.° 42, *b*), possiamo asserire che la sua serie di Fourier è ovunque convergente (e ciò senza aver avuto bisogno di calcolare effettivamente i coefficienti della serie).

3.° Metodo. — Un terzo metodo (più difficilmente applicabile degli altri due) dà la convergenza della serie di Fourier per via indiretta. Data la funzione $f(x)$, in $(0, 2\pi)$, si cerca una funzione (od il ramo monodromo di una funzione) analitica $\varphi(z)$, regolare nell'interno del cerchio $|z| = 1$ del piano complesso, la quale, posto $z = re^{ix}$, abbia, sulla circonferenza $|z| = 1$, — esclusi al più dei punti in numero finito od in un'infinità numerabile — la $f(x)$ per parte reale (oppure per coefficiente della parte immaginaria). Se la serie di potenze che rappresenta la $\varphi(z)$ nell'interno della circonferenza $|z| = 1$, ha i coefficienti che tendono allo zero al crescere indefinito dell'indice, allora, in virtù di un noto teorema di Fatou (1), la serie di potenze converge in tutti i punti $|z| = 1$ che sono regolari per la $\varphi(z)$, e negli stessi punti convergono, perciò, anche le due serie trigonometriche che rappresentano, per $|z| = 1$, la parte reale ed il coefficiente di quella immaginaria della serie di potenze. Se poi, sulla circonferenza $|z| = 1$, la $\varphi(z)$ ha soltanto un numero finito od un'infinità numerabile di punti singolari, la prima (oppure la seconda) delle due serie trigonometriche indicate è la serie di Fourier della funzione $f(x)$, in forza del teorema del n.° 38, *a*).

Con questo metodo si vengono anche a calcolare, per via indiretta, i coefficienti della serie di Fourier.

Consideriamo ancora la funzione $f(x) = x$, in $(0, 2\pi)$. Il ramo della funzione $\log \frac{1}{1-z}$ che, per $z = 0$, ha il valore 0, ha, sulla circonferenza $|z| = 1$ (escluso il punto $z = 1$), per coefficiente della parte immaginaria $\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ (2). Dunque il ramo della funzione $\pi i - 2 \log \frac{1}{1-z}$ che, per $z = 0$, si riduce a π, ha, sulla circonferenza indicata, la x per coefficiente della parte immagi-

(1) V. la nota (1) a piè di pag. 72.
(2) Cfr. pp. 69 e 70.

naria. Ora, sviluppando in serie di potenze di z, abbiamo

$$\pi i - 2\log\frac{1}{1-z} = \pi i - 2\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots\right), \tag{1}$$

e la serie qui scritta ha il coefficiente di z^n che tende a zero per $n \to \infty$. E siccome la funzione del primo membro è regolare in tutti i punti della circonferenza $|z| = 1$, eccettuato $z = 1$, ne viene che la serie trigonometrica

$$\pi - 2\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \dots\right),$$

che rappresenta il coefficiente della parte immaginaria del secondo membro di (1), per $|z| = 1$, è convergente per tutti i valori di x tali che $0 < x < 2\pi$. Essa è poi convergente, evidentemente, anche per $x = 0$ e $x = 2\pi$; ed è la serie di Fourier della funzione data $f(x) = x$.

Va poi notato che, comunque si sia dimostrata la convergenza della serie di Fourier della $f(x)$, in un punto x, la somma della serie è uguale a $f(x)$, se questa funzione è continua nel punto considerato, ed uguale a $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, se la $f(x)$ ha, in x, una discontinuità di 1.ª specie (n.° 75).

b) Il secondo dei metodi indicati in *a*) è quello più largamente usato. Esso ammette anche un più ampio sviluppo, del quale appunto vogliamo occuparci nel presente §. E precisamente, vogliamo giungere a nuovi teoremi, che permettano di stabilire la convergenza della serie di Fourier in base alle proprietà della funzione generatrice $f(x)$, ed ai quali teoremi si possa far ricorso quando non risultino applicabili quelli dei n.ⁱ 42, 43, 96 e 97.

Fra i teoremi or ora indicati e quelli che dimostreremo, esiste una differenza essenziale, che merita di essere subito rilevata. Nei teoremi dei n.ⁱ 42, 43, 96 e 97, si fa appello alle proprietà della funzione generatrice $f(x)$ in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$, e si stabilisce la convergenza della serie di Fourier simultaneamente in *tutti* i punti di $(0, 2\pi)$ — esclusi al più alcuni punti singolari isolati, in numero finito. I nuovi teoremi, invece, muovono da un fatto notevole, messo in evidenza da Riemann, e cioè che la convergenza della serie di Fourier, in un dato punto x_0, dipende *unicamente* dalle proprietà della funzione generatrice $f(x)$ nell'intorno del punto considerato [1];

(1) V. più oltre n.° 101.

in essi teoremi, pertanto, viene considerato *soltanto* il comportamento della $f(x)$ nell'intorno del punto x_0, e la convergenza della serie viene dimostrata *soltanto* nel punto x_0. Perciò, mentre i primi teoremi forniscono dei criteri di convergenza *globale*, i secondi, dànno dei criteri di convergenza *locale*, o meglio *puntuale*. Dato il carattere diverso di questi criteri, si comprende poi facilmente come diverso debba essere il procedimento per stabilirli. Ed infatti, mentre i teoremi dei n.[i] 42 e 43, ad esempio, vengono dimostrati con un procedimento che, in sostanza, si riduce ad una valutazione asintotica dei coefficienti della serie di Fourier, vale a dire, all'esame del modo di tendere a zero di tali coefficienti, i teoremi dei quali andiamo ad occuparci si ottengono, invece, mediante lo studio diretto della somma parziale n^{esima} della serie di Fourier, nel punto x_0 considerato, studio che vien fatto ponendo tale somma in una forma singolarmente utile allo scopo, e cioè esprimendola mediante l'*integrale di Dirichlet.*

100. - L'integrale di Dirichlet.

Abbiamo già veduto, nel n.° 58, che la somma dei primi $n+1$ termini della serie di Fourier della funzione $f(x)$ [supposta integrabile in $(0, 2\pi)$] è data da

$$(1)\qquad s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\frac{\operatorname{sen}\dfrac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\operatorname{sen}\dfrac{x-\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

L'integrale ora scritto dicesi *integrale di Dirichlet.*

Supponendo, come già abbiamo fatto nel n.° 58, di definire la $f(x)$ in tutto $(-\infty, +\infty)$, considerandola come funzione periodica, di periodo 2π, e sostituendo il suo valore in 2π con $f(0)$, possiamo trasformare l'espressione di $s_n(x)$, analogamente a quanto abbiamo fatto al n.° ricordato per la $\sigma_n(x)$, e scrivere così, con la posizione $\dfrac{x-\alpha}{2} = -z$,

$$(1')\qquad s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi:2} [f(x+2z) + f(x-2z)]\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\,dz.$$

Notiamo che, se è $f(x) \equiv 1$, risulta $a_0 = 2$ e, per ogni $r > 0$, $a_r = 0$, $b_r = 0$, donde $s_n(x) = a_0 : 2 = 1$, per tutti gli n. La formula precedente dà, allora,

$$(2) \qquad 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi:2} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\, dz.$$

Lo scopo a cui è rivolto il presente § è quello di dare dei criteri per potere asserire che, in un determinato punto x di $(0, 2\pi)$, la somma $s_n(x)$ tende, per $n \to \infty$, ad un limite finito, che indicheremo con $\Phi(x)$ e che, per quanto sappiamo (n.° 75), quando esiste, coincide con $f(x)$, nei punti di continuità di questa funzione, interni a $(0, 2\pi)$. E siccome dalla (2) segue

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi:2} \Phi(x) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\, dz,$$

e quindi, per sottrazione dalla (1'),

$$s_n(x) - \Phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi:2} [f(x+2z) + f(x-2z) - 2\Phi(x)] \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\, dz,$$

dobbiamo stabilire delle condizioni sufficienti affinchè esista, nel punto x, un numero $\Phi(x)$ tale che, per $n \to \infty$, l'espressione ora scritta tenda allo zero.

Posto

$$(3) \qquad \varphi(z) = f(x+2z) + f(x-2z) - 2\Phi(x),$$

abbiamo

$$(4) \qquad s_n(x) - \Phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi:2} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\, dz,$$

e possiamo dire che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè, nel punto x, la serie di Fourier della $f(x)$ abbia per somma $\Phi(x)$, è che sia, per $n \to \infty$,

$$(5) \qquad \int_0^{\pi:2} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\, dz \to 0.$$

L' integrale ora scritto è della forma

$$\int_0^a g(z)\,\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\,dz,$$

con $0 < a \leq \frac{\pi}{2}$, ed anch' esso si chiama *integrale di Dirichlet.*

Vogliamo trasformare la condizione espressa dalla (5).

Preso un σ, tale che $0 < \sigma \leq \frac{\pi}{2}$, è, per $n \to \infty$, (applicando il teorema del n.° 76)

$$\int_\sigma^{\pi:2} \varphi(z)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\,dz = \int_\sigma^{\pi:2} \frac{\varphi(z)}{\operatorname{sen} z}\operatorname{sen}(2n+1)z\,dz \to 0,$$

e perciò:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè valga la (5), *è che, preso ad arbitrio un* $\varepsilon > 0$, *si possano sempre determinare un* $\sigma > 0$ *e non maggiore di* $\pi:2$, *ed un* $N > 0$, *in modo che, per ogni* $n > N$, *sia*

$$\left|\int_0^\sigma \varphi(z)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\,dz\right| < \varepsilon. \tag{6}$$

Considerando ora la differenza

$$\int_0^\sigma \varphi(z)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\,dz - \int_0^\sigma \varphi(z)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z}\,dz =$$

$$= \int_0^\sigma \varphi(z)\,\frac{z - \operatorname{sen} z}{z \operatorname{sen} z}\operatorname{sen}(2n+1)z\,dz,$$

ed osservando che la funzione $\frac{z - \operatorname{sen} z}{z \operatorname{sen} z}$ tende a zero per $z \to 0$, e quindi (assegnandole il valore 0 per $z = 0$) che è sempre continua in tutto $(0, \sigma)$, abbiamo, in virtù del teorema del n.° 76, che la differenza sopra scritta tende a zero, per $n \to \infty$. Abbiamo dunque: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè, nel punto* x, *la serie di Fourier della* $f(x)$ *abbia per somma* $\Phi(x)$, *è che, preso ad arbitrio un* $\varepsilon > 0$, *si possano sempre determinare* *un* $\sigma > 0$ *e non maggiore di* $\pi:2$, *ed un* $N > 0$, *in modo che, per ogni* $n > N$, *sia*

$$(7) \qquad \left| \int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z} dz \right| < \varepsilon.$$

Anche ogni integrale della forma

$$\int_0^a g(z) \frac{\operatorname{sen} nz}{z} dz,$$

con $0 < a \leq \frac{\pi}{2}$, dicesi *integrale di Dirichlet* (2.ª forma, perchè nel denominatore della funzione integrale, invece di sen z, figura la z).

101. - **Teorema di Riemann.**

Il comportamento della serie di Fourier, in un punto x, *(vale a dire, la sua convergenza, divergenza od indeterminazione in* x*) dipende esclusivamente dai valori che la funzione* $f(x)$ *assume in prossimità di tale punto* (¹).

In altre parole: preso ad arbitrio un $\delta > 0$, i valori che la funzione $f(x)$ assume nei punti esterni all'intervallo $(x - \delta, x + \delta)$ e non congrui, rispetto a 2π, a punti di questo intervallo, non hanno alcuna influenza sul comportamento delle serie di Fourier della $f(x)$, nel punto x. Ed infatti, preso un $\sigma > 0$ e minore tanto di $\pi:2$ quanto di $\delta:2$, abbiamo, dalla (1′) del n.° preced.,

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\sigma [f(x+2z) + f(x-2z)] \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z} dz + \frac{1}{\pi} \int_\sigma^{\pi:2} \cdots,$$

e poichè l'ultimo integrale scritto tende a zero, per $n \to \infty$, in virtù del teorema del n.° 76, ne viene che il comportamento di $s_n(x)$, per $n \to \infty$, dipende esclusivamente da quello del primo integrale della formula precedente. Ma, in tale integrale, non figurano che i valori della $f(x)$ nell'intervallo $(x - 2\sigma, x + 2\sigma)$, che è contenuto in $(x - \delta, x + \delta)$, e perciò quanto abbiamo asserito è dimostrato.

(¹) B. Riemann, loc. cit. in (¹) a pag. 16.

Da questo teorema segue che, *se si hanno due funzioni integrabili in* $(0, 2\pi)$ *e coincidenti in un intervallo parziale* (a, b), *nei punti interni di questo intervallo le loro serie di Fourier sono, contemporaneamente, convergenti, o divergenti, od indeterminate; e, se convergono, convergono allo stesso valore* (¹).

102. - Criterio di convergenza di Dini (²).

a) Se, posto $\varphi(z) = f(x + 2z) + f(x - 2z) - 2\Phi(x)$, $\varphi(z):z$ *è integrabile in* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, *la serie di Fourier della* $f(x)$ *converge, nel punto* x, *verso* $\Phi(x)$ (³).

Infatti, nell' ipotesi posta, il primo membro della (7) del n.° 100, è, qualunque sia n, minore di

$$\int_0^\sigma \frac{|\varphi(z)|}{z}\, dz,$$

e questo integrale è minore di ε, per ogni σ positivo e sufficientemente piccolo, perchè tende a zero per $\sigma \to 0$.

b) Dall' importante criterio ora dimostrato, segue, in particolare:

Se x è un punto di continuità (o di discontinuità di 1.ª specie) per la $f(x)$, e se le due espressioni

$$\frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}, \quad \frac{f(x-h) - f(x-0)}{-h},$$

sono integrabili, rispetto ad h, in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, allora la serie di Fourier della $f(x)$ converge, in x, verso $f(x)$ $\Big($*oppure, rispettivamente, verso* $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}\Big)$.

(¹) Si vedrà più innanzi, al n.° 128, che quanto ora si è detto è una semplice conseguenza dei risultati (pure dovuti a Riemann) del n.° 24, *b*), relativi alle serie trigonometriche generali.

(²) U. Dini, *Serie di Fourier ecc.*, p. 100 e seg.

(³) Qui, come in tutti i criteri dei n.ⁱ seguenti, intendiamo che la $f(x)$ sia definita, mediante la periodicità, di periodo 2π, in tutto $(-\infty, +\infty)$.

Ed infatti, risultando integrabili rispetto a z, in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, le due espressioni

$$\frac{f(x+2z)-f(x+0)}{z}, \quad \frac{f(x-2z)-f(x-0)}{z},$$

posto

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)],$$

risulta integrabile anche $\varphi(z):z$.

c) Più particolarmente ancora, si ha:

In un punto x di continuità (o di discontinuità di 1^a specie) per la $f(x)$, la serie di Fourier converge verso $f(x)$ $\left(\text{o, rispettivamente, verso } \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)$,

se, per tutti gli h positivi e sufficientemente piccoli, è

$$\text{(1)} \qquad \left.\begin{array}{l} |f(x+h)-f(x+0)| \\ |f(x-h)-f(x-0)| \end{array}\right\} < Kh^{\alpha}$$

con $K > 0$ ed $\alpha > 0$ (condizione di Lipschitz, generalizzata) (¹);

oppure, se il rapporto incrementale $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ha, per tutti gli h (positivi e negativi), un modulo inferiore ad un numero fisso;

oppure, se esistono finite, in x, le derivate destra e sinistra della $f(x)$;

oppure, infine, se esiste finita, in x, la derivata della $f(x)$.

d) Per esempio, la funzione periodica definita, per $-\pi \leq x < \pi$, da $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, con $f(0) = 0$, è ovunque continua; ha derivata finita dappertutto, eccettuati i punti $-\pi$, 0 e π, e loro congrui rispetto al modulo 2π; nei punti $-\pi$ e $+\pi$, e congrui, ha derivata destra e derivata sinistra, entrambe finite; in $x = 0$ e punti congrui, ha il rapporto incrementale sempre, in modulo, ≤ 1. Pertanto la sua serie di Fourier converge ovunque verso la $f(x)$, in virtù di *c*).

(¹) Questo criterio è conosciuto sotto il nome di *criterio di Lipschitz*; peraltro, il Lipschitz diede soltanto un criterio di convergenza uniforme, che riporteremo più oltre (n.° 110).

Analogamente, la funzione periodica, definita, per $-\pi \leq x < \pi$, da $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, con $f(0) = 0$, è continua in tutti i punti distinti da $0, -\pi, \pi$ e punti ad essi congrui rispetto a 2π. In tutti i punti di continuità ha anche derivata finita, ed in essi la sua serie di Fourier converge verso $f(x)$. Nei punti $-\pi$, π e congrui, vi sono discontinuità di 1^{a} specie e valgono le (1), per $\alpha = 1$, ed in essi la serie di Fourier converge verso

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{\pi} + \operatorname{sen}\frac{1}{-\pi}\right) = 0.$$

In $x = 0$ e punti congrui, vi è discontinuità di 2^{a} specie; ma siccome la funzione è dispari si ha $\varphi(z) = -2\Phi(0)$ e, se scegliamo $\Phi(0) = 0$, $\varphi(z):z$ risulta integrabile in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, per $x = 0$; dunque, in $x = 0$ e punti congrui, la serie di Fourier converge verso lo zero, ossia ancora verso il valore della funzione.

Consideriamo, infine, la funzione periodica definita, in $0 \leq x < 2\pi$, da $f(x) = \sqrt{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, con $f(0) = 0$. In tutti i punti non congrui a 0, la funzione è continua ed ha derivata finita, onde, in essi, la sua serie di Fourier converge verso $f(x)$. Nel punto 0 e congrui, la $f(x)$ ha discontinuità di 1^{a} specie; inoltre è, per $h > 0$,

$$|f(-h) - f(-0)| < Kh,$$

onde il rapporto

$$\frac{f(-h) - f(-0)}{-h}$$

è integrabile rispetto ad h in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ed è integrabile anche $\frac{f(h) - f(0)}{h}$, in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, perchè si ha $|f(h) - f(0)| \leq \sqrt{h}$. Dunque, nel punto 0 e congrui, la serie di Fourier della $f(x)$ converge, e precisamente converge verso $\frac{f(+0) + f(-0)}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\frac{1}{2\pi}$.

103. – Criterio di convergenza di Dirichlet-Jordan.

a) La serie di Fourier della $f(x)$ converge in ogni punto che sia interno ad un intervallo in cui la $f(x)$ è a variazione limitata; e la convergenza avviene verso $f(x)$ o verso $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ a seconda che, nel punto considerato, la $f(x)$ è continua o discontinua (1).

(1) C. JORDAN, *Sur la série de Fourier*. (Comptes rendus, t. 92 (1881), pp. 228-230).

Serviamoci, anche qui, della condizione espressa dalla (7) del n.° 100, ed osserviamo che, se in un intorno del punto x la $f(x)$ è a variazione limitata, in tale intorno può scriversi

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

con f_1 e f_2 funzioni non negative e non decrescenti. Scegliendo allora

$$\Phi(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \;(^1),$$

avremo

$$\varphi(z) = f(x+2z) + f(x-2z) - 2\Phi(x) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z),$$

con

$$\varphi_1(z) = \{ f_1(x+2z) - f_2(x-2z) \} - \{ f_1(x+0) - f_2(x-0) \},$$
$$-\varphi_2(z) = \{ f_2(x+2z) - f_1(x-2z) \} - \{ f_2(x+0) - f_1(x-0) \},$$

e le $\varphi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$ risultano funzioni non negative e non decrescenti, per $z>0$, in tutto l'intorno di $z=0$, corrispondente all'intorno di x in cui la $f(x)$ è a variazione limitata. Ora è, applicando il secondo teorema della media, e ponendo $2n+1=m$,

$$\int_0^\sigma \varphi_1(z)\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz = \varphi_1(\sigma)\int_{\sigma'}^{\sigma}\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz,$$

con $0 \leq \sigma' < \sigma$.

Osserviamo qui che, se k è un numero intero positivo, in ogni intervallo $\left[(k-1)\frac{\pi}{m},\ k\frac{\pi}{m}\right]$, $\frac{\operatorname{sen} mz}{z}$ conserva sempre uno stesso segno, segno che cambia quando si passa all'intervallo $\left[k\frac{\pi}{m},\ (k+1)\frac{\pi}{m}\right]$; inoltre è

$$\left|\int_{(k-1)\pi:m}^{k\pi:m}\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz\right| > \left|\int_{k\pi:m}^{(k+1)\pi:m}\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz\right|,$$

perchè, ad ogni punto z del primo intervallo d'integrazione, corrisponde il punto $z+\frac{\pi}{m}$, del secondo, in cui $\left|\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\right|$ ha

---

(1) Rammentiamo che una funzione a variazione limitata non può avere che discontinuità di 1ª specie.

un valore minore. È, dunque,

$$(1) \qquad \left|\int_{\sigma'}^{\sigma} \frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz\right| \leq \int_0^{\pi:m} \frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz < m\int_0^{\pi:m} dz = \pi,$$

e perciò

$$\left|\int_0^{\sigma} \varphi_1(z)\,\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz\right| \leq \pi\varphi_1(\sigma).$$

Analogamente è

$$\left|\int_0^{\sigma} \varphi_2(z)\,\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz\right| \leq \pi\varphi_2(\sigma),$$

e quindi

$$\left|\int_0^{\sigma} \varphi(z)\,\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz\right| \leq \pi\,\{\,\varphi_1(\sigma) + \varphi_2(\sigma)\,\}.$$

Ma, per $z \to 0$, è $\varphi_1(z) \to 0$, $\varphi_2(z) \to 0$; e pertanto, preso σ in modo che sia

$$\varphi_1(\sigma) < \frac{\varepsilon}{2\pi}, \quad \varphi_2(\sigma) < \frac{\varepsilon}{2\pi},$$

risulta

$$\left|\int_0^{\sigma} \varphi(z)\,\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz\right| < \varepsilon,$$

per tutti gli m. Ciò dimostra (n.º 100) che, nel punto x considerato, la serie di Fourier della $f(x)$ converge verso $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ [1].

b) In particolare, si ha che *la serie di Fourier della $f(x)$ converge in tutto* $(0, 2\pi)$, *se, in tutto questo intervallo, la $f(x)$ è a variazione limitata.*

---

[1] Il criterio ora stabilito può essere dedotto dal teorema di Fejèr del n.º 59 e da quello del n.º 78, *a*), applicando la seguente proposizione dovuta ad Hardy (*Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series*. Proc. London Math. Soc., S. 2, Vol. VIII (1910), pp. 301-320): *Se na_n è limitato e se la serie Σa_n è sommabile col metodo della media aritmetica di Cesàro, di rango 1, allora la serie indicata è convergente.*

c) La serie di Fourier della $f(x)$ converge in tutto $(0, 2\pi)$, *se, in tutto questo intervallo, la $f(x)$ soddisfa alle seguenti condizioni (dette condizioni di Dirichlet):*

1°) *la $f(x)$ è limitata e non ha che un numero finito di discontinuità in* $(0, 2\pi)$;

2°) *l'intervallo* $(0, 2\pi)$ *può essere diviso in un numero finito di parti, in ciascuna delle quali la funzione è monotona* (1).

Ed infatti, sotto queste condizioni, la $f(x)$ risulta a variazione limitata in tutto $(0, 2\pi)$.

Se le condizioni di Dirichlet sono verificate soltanto in un intervallo parziale di $(0, 2\pi)$, la convergenza della serie di Fourier è assicurata in ogni punto *interno* a tale intervallo.

104. - Criterio di convergenza di De La Vallée Poussin. *In ogni punto x, per il quale la funzione di h,*

$$G(h) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f(x+\alpha)d\alpha,$$

è a variazione limitata in un intervallo $(0, \delta)$, *la serie di Fourier della $f(x)$ converge verso* $G(+0)$ (2).

Facciamo $\Phi(x) = G(+0)$; allora, essendo

$$G(h) = \frac{1}{2h}\int_0^h \{ f(x+\alpha) + f(x-\alpha) \} \, d\alpha,$$

la funzione

$$\psi(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \varphi(z)dz = \frac{1}{z}\int_0^z \{ f(x+2z) + f(x-2z) \} \, dz - 2G(+0)$$

(1) P. G. Lejeune-Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites donnés* (Journal für Mathematik., Bd. 4 (1829), pp. 157-169). *Die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus-und Cosinusreihen* (Repertorium der Physik, Bd. I (1837), pp. 152-174).

(2) Ch.-J. de la Vallée Poussin, *Un nouveau cas de convergence des séries de Fourier*. (Rend. Circ. Matem. di Palermo. t. XXXI (1911), pp. 296-299).

è anch'essa a variazione limitata in $\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$, e si ha $\psi(+0) = 0$. Potremo scrivere, perciò,

$$\psi(z) = \psi_1(z) - \psi_2(z),$$

con ψ_1 e ψ_2 funzioni non negative e non decrescenti, e tali che

$$\psi_1(+0) = \psi_2(+0) = 0.$$

Volendo ancora servirci della condizione espressa dalla (7) del n.° 100, avremo, supponendo $\sigma < \frac{\delta}{2}$, ed integrando per parti,

$$\int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz = \psi(\sigma) \operatorname{sen} m\sigma - \int_0^\sigma \psi(z) \left\{ m \cos mz - \frac{\operatorname{sen} mz}{z} \right\} dz.$$

Sostituendo, sotto il segno d'integrale, nel secondo membro, la ψ con $\psi_1 - \psi_2$, scindendo l'integrale nella differenza di altri due ed applicando il secondo teorema della media, abbiamo

$$\int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz = \psi_2(\sigma'') \operatorname{sen} m\sigma'' - \psi_1(\sigma') \operatorname{sen} m\sigma' +$$
$$+ \psi_1(\sigma) \int_{\sigma'}^\sigma \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz - \psi_2(\sigma) \int_{\sigma''}^\sigma \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz,$$

con $0 \leq \sigma' < \sigma$, $0 \leq \sigma'' < \sigma$; in virtù della (1) del n.° preced., possiamo dunque scrivere

$$\left| \int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz \right| \leq \psi_2(\sigma'') + \psi_1(\sigma') + \pi\psi_1(\sigma) + \pi\psi_2(\sigma),$$

e quindi, se σ è sufficientemente piccolo,

$$\left| \int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz \right| < \varepsilon,$$

per tutti gli m. E ciò basta per dimostrare il teorema enunciato.

105. - Criterio di convergenza di Lebesgue.

a) Se, per un x e per un determinato valore di $\Phi(x)$, è

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\varphi(z)|\, dz = 0 \quad [1], \tag{1}$$

e $(\delta > 0)$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_\delta^{\pi:2} \frac{\varphi(z+\delta) - \varphi(z)}{z} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta}\, dz = 0, \tag{2}$$

allora la serie di Fourier della $f(x)$ converge, nel punto x, verso $\Phi(x)$ [2].

Per la dimostrazione, rammentiamo che (n.° 100) condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie di Fourier della $f(x)$ converga verso $\Phi(x)$, nel punto x, è che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si possano determinare un numero positivo $\sigma \leq \pi:2$ ed un $N > 0$, in modo che, per ogni $n > N$, sia

$$\left| \int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z}\, dz \right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Posto $\delta = \dfrac{\pi}{2n+1}$, abbiamo

$$\int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z}\, dz = \int_0^\delta \frac{\varphi(z)}{z} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta}\, dz + \int_\delta^\sigma \ldots;$$

e siccome, in virtù della (1), è, per $\delta \to 0$,

$$\left| \int_0^\delta \frac{\varphi(z)}{z} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta}\, dz \right| \leq \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\varphi(z)|\, dz \to 0,$$

per $\delta \to 0$ è pure

$$\left| \int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z}\, dz - \int_\delta^\sigma \frac{\varphi(z)}{z} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta}\, dz \right| \to 0. \tag{4}$$

---

[1] $\varphi(z)$ è la solita funzione $f(x+2z) + f(x-2z) - 2\Phi(x)$.

[2] H. Lebesgue, *loc. cit.* in [1] a pag. 174.

Abbiamo poi

$$\int_{\delta}^{\sigma} \frac{\varphi(z)}{z} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta}\, dz = -\int_{0}^{\sigma-\delta} \frac{\varphi(z+\delta)}{z+\delta} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta}\, dz$$

$$= -\int_{0}^{\delta} \dots - \int_{\delta}^{\sigma} \dots + \int_{\sigma-\delta}^{\sigma} \dots,$$

dove, per $\delta \to 0$, è

$$\left| \int_{0}^{\delta} \frac{\varphi(z+\delta)}{z+\delta} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta}\, dz \right| \leq \frac{1}{\delta} \int_{0}^{\delta} |\varphi(z+\delta)|\, dz$$

$$\leq \frac{1}{\delta} \int_{0}^{2\delta} |\varphi(z)|\, dz \to 0,$$

in virtù della (1), e

$$\left| \int_{\sigma-\delta}^{\sigma} \frac{\varphi(z+\delta)}{z+\delta} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta}\, dz \right| \leq \int_{\sigma}^{\sigma+\delta} \left| \frac{\varphi(z)}{z} \right| dz \to 0,$$

fissato che sia σ.

Possiamo dunque scrivere

$$\int_{\delta}^{\sigma} \frac{\varphi(z)}{z} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta}\, dz = \Delta - \int_{\delta}^{\sigma} \frac{\varphi(z+\delta)}{z+\delta} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta}\, dz, \tag{5}$$

con $\Delta \to 0$, per $\delta \to 0$.

Ora è

$$\int_{\delta}^{\sigma} \frac{\varphi(z+\delta)}{z+\delta} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta}\, dz = \int_{\delta}^{\sigma} \frac{\varphi(z+\delta)}{z} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta}\, dz \tag{6}$$

$$- \delta \int_{\delta}^{\sigma} \frac{\varphi(z+\delta)}{z(z+\delta)} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta}\, dz,$$

con

$$\left| \delta \int_{\delta}^{\sigma} \frac{\varphi(z+\delta)}{z(z+\delta)} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta}\, dz \right| < \delta \int_{\delta}^{\sigma} |\varphi(z+\delta)| \frac{dz}{z^2},$$

ed integrando per parti,

$$< \frac{\delta}{\sigma^2}\int_0^{\sigma+\delta}|\varphi(z)|\,dz + 2\delta\int_\delta^\sigma\left(\int_0^{z+\delta}|\varphi(z)|\,dz\right)\frac{dz}{z^3}$$

$$< \frac{\delta}{\sigma^2}\int_0^{2\sigma}|\varphi(z)|\,dz + 4\delta k(\sigma)\int_\delta^\sigma\frac{dz}{z^2},$$

dove $k(\sigma)$ indica il massimo valore di $\frac{1}{z}\int_0^z|\varphi(z)|\,dz$, per $0 < z \leq 2\sigma$, massimo che, in virtù della (1), tende allo zero con σ. Il primo degli ultimi due integrali scritti tende allo zero con δ (fissato che sia σ), ed il secondo è minore di $4k(\sigma)$. Dalle (5) e (6) segue, perciò,

$$\left|\int_\delta^\sigma\frac{\varphi(z+\delta)+\varphi(z)}{z}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\delta}\,dz\right| < \Delta' + 4k(\sigma), \tag{7}$$

con $\Delta' \to 0$, per $\delta \to 0$. Dalla (2) segue poi

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^\sigma\frac{\varphi(z+\delta)-\varphi(z)}{z}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\delta}\,dz = 0,$$

perchè, in virtù del n.° 76, i due integrali

$$\int_\sigma^{\pi:2}\frac{\varphi(z)}{z}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\delta}\,dz, \qquad \int_\delta^{\pi:2}\frac{\varphi(z+\delta)}{z}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\delta}\,dz$$

tendono a zero, per $\delta \to 0$ (1).

---

(1) Si osservi che è

$$\int_\sigma^{\pi:2}\frac{\varphi(z+\delta)}{z}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\delta}\,dz = \int_\sigma^{\pi:2}\frac{\varphi(z+\delta)}{z+\delta}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\delta}\,dz + \delta\int_\sigma^{\pi:2}\frac{\varphi(z+\delta)}{z(z+\delta)}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\delta}\,dz$$

$$= -\int_{\sigma+\delta}^{(\pi:2)+\delta}\frac{\varphi(z)}{z}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\delta}\,dz + \delta\int_\sigma^{\pi:2}\frac{\varphi(z+\delta)}{z(z+\delta)}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\delta}\,dz,$$

e, per $\delta \to 0$, il primo termine dell'ultimo membro tende a zero in virtù del n.° 76, mentre l'ultimo termine tende a zero per essere, in modulo, minore di $\frac{\delta}{\sigma^2}\int_0^\pi|\varphi(z)|\,dz$.

Dopo di ciò, prendiamo ad arbitrio un $\varepsilon > 0$ e determiniamo un σ positivo e minore di $\pi : 2$, in modo che sia $4k(\sigma) < \varepsilon : 3$; poi determiniamo un $\delta_1 > 0$ in modo che, per ogni numero positivo $\delta < \delta_1$ sia $|\Delta'| < \varepsilon : 3$ e, inoltre,

$$(8) \qquad \left| \int_\delta^\sigma \frac{\varphi(z+\delta) - \varphi(z)}{z} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta} dz \right| < \frac{\varepsilon}{3};$$

allora, dalle (7) e (8), segue

$$\left| \int_\delta^\sigma \frac{\varphi(z)}{z} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta} dz \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ed anche, per la (4), e supponendo δ_1 sufficientemente piccolo,

$$\left| \int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z} dz \right| < \varepsilon,$$

per tutti gli n tali che sia $2n+1 > \pi : \delta_1$.

La (3) è dunque dimostrata, e con essa è dimostrato anche il teorema enunciato.

Osservazione. — In ogni punto in cui la $f(x)$ è continua o discontinua di 1.ª specie, la (1) è senz'altro verificata se in essa si fa

$$\Phi(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

La (2) è poi verificata se è

$$\lim_{\delta \to 0} \int_\delta^{\pi:2} \frac{|\varphi(z+\delta) - \varphi(z)|}{z} dz = 0.$$

b) Dal precedente criterio del Lebesgue segue immediatamente:

La serie di Fourier della $f(x)$ converge verso $f(x_0)$ nel punto x_0, se questo punto è interno ad un intervallo nel quale il prodotto $|f(x+\delta) - f(x)| \log |\delta|$ tenda uniformemente allo zero, per $\delta \to 0$.

Questo nuovo criterio è dovuto a Dini [1]. Per la condizione posta, la $f(x)$ deve essere continua nel punto x_0. La (1) è perciò

---

[1] Loc. cit. in [2] a pag. 280.

verificata, supponendo di prendere $\Phi(x_0) = f(x_0)$. Inoltre, preso σ in modo che i punti $x_0 \pm 4\sigma$ risultino interni all'intervallo indicato nell'enunciato, si ha, per $0 < \delta < \sigma$,

$$\left| \int_\delta^\sigma \frac{\varphi(z+\delta) - \varphi(z)}{z} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\delta} dz \right| <$$

$$\int_\delta^\sigma \frac{|\varphi(z+\delta) - \varphi(z)|}{z} dz < \frac{2k(\delta)}{|\log 2\delta|} \int_\delta^\sigma \frac{dz}{z} < 2k(\delta),$$

dove è $k(\delta) \to 0$ per $\delta \to 0$. La (2) è perciò anch'essa verificata, per un'osservazione già fatta in *a*).

106. - Criterio di convergenza per punti singolari isolati.

a) Conservando alla funzione $\varphi(z)$ il significato già attribuitole nei n.i precedenti, e cioè

$$\varphi(z) = f(x+2z) + f(x-2z) - 2\Phi(x),$$

abbiamo il seguente criterio di convergenza:

Se, in un dato punto x, è $\varphi(z) \to 0$, per $z \to +0$; se esiste un $\delta > 0$ tale che, per $0 < z < \delta$, la $\varphi(z)$ risulti assolutamente continua in tutto l'intervallo (z, δ); se è, per $z \to +0$, $\underline{\lim}\, z\varphi'(z) \geq 0$ (oppure $\overline{\lim}\, z\varphi'(z) \leq 0$), intendendo qui di considerare soltanto quei valori di z per i quali la $\varphi'(z)$ esiste finita; allora la serie di Fourier della $f(x)$ converge, nel punto x considerato, verso $\Phi(x)$ [1].

Consideriamo l'integrale $\int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz$ e, supposto che m verifichi la disuguaglianza $\pi:2m < \sigma$, scriviamo

$$\int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz = \int_0^{\pi:2m} \dots + \int_{\pi:2m}^\sigma \dots . \tag{1}$$

Preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, scegliamo un σ positivo, minore di δ e tale che, per ogni numero positivo $z \leq \sigma$, sia $|\varphi(z)| < \varepsilon:2\pi$,

---

[1] Questa proposizione, come tutte quelle del presente n.°, trovansi in: L. Tonelli, *Sulla convergenza delle serie di Fourier*. (Rend. R. Accad. dei Lincei, Vol. II (1925), pp. 85-91).

e che, in quasi-tutto $(0, \sigma)$, sia $z\varphi'(z) > -\varepsilon:2\pi$. Avremo, con ciò,

$$(2) \qquad \left|\int_0^{\pi:2m} \varphi(z)\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz\right| < \frac{\varepsilon m}{2\pi}\int_0^{\pi:2m}\frac{\operatorname{sen} mz}{mz}\,dz < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Consideriamo ora il secondo integrale del secondo membro della (1). Con un' integrazione per parti, abbiamo

$$\int_{\pi:2m}^{\sigma}\varphi(z)\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz = -\varphi(\sigma)\frac{\cos m\sigma}{m\sigma} + \frac{1}{m}\int_{\pi:2m}^{\sigma}\frac{z\varphi'-\varphi}{z^2}\cos mz\,dz,$$

e quindi

$$(3) \qquad \left|\int_{\pi:2m}^{\sigma}\varphi(z)\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz\right| \leq \frac{|\varphi(\sigma)|}{m\sigma} + \frac{1}{m}\int_{\pi:2m}^{\sigma}\frac{|z\varphi'-\varphi|}{z^2}\,dz.$$

Osserviamo qui che, potendosi scrivere

$$z\varphi' - \varphi = \left(z\varphi' + \frac{\varepsilon}{2\pi}\right) - \frac{\varepsilon}{2\pi} - \varphi,$$

ed essendo, in quasi-tutto $\left(\frac{\pi}{2m}, \sigma\right)$, $z\varphi' + \frac{\varepsilon}{2\pi} > 0$, è, in quasi-tutto l' intervallo detto,

$$|z\varphi' - \varphi| < z\varphi' + \frac{\varepsilon}{2\pi} + \frac{\varepsilon}{2\pi} + |\varphi| = z\varphi' + \frac{\varepsilon}{\pi} + |\varphi|.$$

Abbiamo, pertanto,

$$\int_{\pi:2m}^{\sigma}\frac{|z\varphi'-\varphi|}{z^2}\,dz \leq \int_{\pi:2m}^{\sigma}\frac{\varphi'}{z}\,dz + \frac{1}{\pi}\int_{\pi:2m}^{\sigma}\frac{\varepsilon+\pi|\varphi|}{z^2}\,dz,$$

e, integrando per parti il primo integrale del secondo membro,

$$\int_{\pi:2m}^{\sigma}\frac{|z\varphi'-\varphi|}{z^2}\,dz \leq \left[\frac{\varphi(z)}{z}\right]_{\pi:2m}^{\sigma} + \frac{1}{\pi}\int_{\pi:2m}^{\sigma}\frac{\varepsilon+2\pi|\varphi|}{z^2}\,dz,$$

ed anche, tenendo conto del fatto che, in $(\pi:2m, \sigma)$, è $|\varphi(z)| < \varepsilon:2\pi$,

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi\sigma} + \frac{2\varepsilon}{\pi}\int_{\pi:2m}^{\sigma}\frac{dz}{z^2} \leq \frac{4m\varepsilon}{\pi^2}.$$

Sostituendo in (3) e tenendo ancora conto della $|\varphi(\sigma)| < \varepsilon : 2\pi$, otteniamo, così,

$$\left| \int_{\pi:2m}^{\sigma} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi m \sigma} + \frac{4\varepsilon}{\pi^2},$$

onde, essendo $\pi : 2m < \sigma$,

$$< \frac{\varepsilon}{\pi^2} + \frac{4\varepsilon}{\pi^2} < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Di qui e da (1) e (2), segue

$$\left| \int_0^{\sigma} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} \right| < \varepsilon, \tag{4}$$

per il σ determinato come sopra si è detto e per ogni $m > \pi : 2\sigma$. Il nostro criterio è dunque dimostrato in virtù della (7) del n.° 100.

Osservazione. — Il teorema ora dimostrato resta pienamente valido anche nel caso in cui la condizione $\underline{\lim}\, z\varphi'(z) \geq 0$ (oppure $\overline{\lim}\, z\varphi'(z) \leq 0$) invece di essere verificata quando si considerano, tutti i valori positivi di z in cui esiste finita la $\varphi'(z)$, lo è quando si considerano soltanto *quasi-tutti* questi valori.

b) Nell' enunciato precedente si può sostituire la disuguaglianza $\underline{\lim}\, z\varphi'(z) \geq 0$, con

$$\underline{\lim}\, g(z)\varphi'(z) \geq 0 \qquad (\text{oppure } \overline{\lim}\, g(z)'\varphi'(z) \leq 0),$$

dove $g(z)$ è una funzione data in $(0, \delta)$ e tale che, in questo intervallo, sia sempre $g(z) > cz$, con $c > 0$. Ed infatti, in simile caso, dove è $\varphi'(z) < 0$, sarà $z\varphi'(z) > \frac{1}{c}\, g(z)\varphi'(z)$, e quindi $\underline{\lim}\, z\varphi'(z) \geq 0$.

c) Nello stesso enunciato dato in *a*) alla condizione $\underline{\lim}\, z\varphi'(z) \geq 0$, si può, in particolare, sostituire l' ipotesi che valga la disuguaglianza $\varphi'(z) \geq K : (z \log z)$, in quasi-tutto l' intervallo $(0, \delta)$, con K costante. Più particolarmente ancora, si ha il corollario:

Se la $\varphi(z)$ tende a zero per $z \to +0$, e se, in tutto l'intervallo $(0, \delta)$, primo estremo escluso, essa ammette derivata finita, continua e soddisfacente alla disuguaglianza

$$\varphi'(z) \geq \frac{K}{z \log z},$$

dove K è una costante, la serie di Fourier della $f(x)$ converge, nel punto x considerato, verso $\Phi(x)$.

d) Alla condizione $\underline{\lim}\, z\varphi'(z) \geq 0$, del teorema dato in *a*), si può anche sostituire, in particolare, la disuguaglianza $\varphi'(z) \geq -\frac{\varphi(z)}{z}$ $(\leq)$, supponendola verificata in quasi-tutto $(0, \delta)$. Tale disuguaglianza può scriversi $D\{z\varphi(z)\} \geq 0$ (≤ 0), e siccome in *a*) si è fatta l'ipotesi che la $\varphi(z)$ sia assolutamente continua in ogni intervallo (z, δ), con $0 < z < \delta$, essa disuguaglianza equivale a dire che *il prodotto $z\varphi(z)$ è funzione non decrescente (non crescente) per tutti i valori di z tali che $0 < z < \delta$.*

La disuguaglianza $\varphi'(z) \geq -\frac{\varphi(z)}{z}$ ammette poi una facile interpretazione geometrica.

e) Invece della disuguaglianza $\underline{\lim}\, z\varphi'(z) \geq 0$, possiamo (in particolare) supporre, nel teorema dato in *a*), che valga la $\varphi'(z) \geq \frac{\varphi(z)}{z}$ $(\leq)$, ossia la $D\frac{\varphi(z)}{z} \geq 0$ $(\leq)$, in quasi-tutto l'intervallo $(0, \delta)$. Tale condizione (essendosi supposta la $\varphi(z)$ assolutamente continua in (z, δ), per $0 < z < \delta$) equivale all'altra che *il rapporto $\frac{\varphi(z)}{z}$, per $z > 0$ e $< \delta$, sia funzione sempre non decrescente (non crescente)* (¹).

In questo caso particolare, il criterio dato in *a*) si può dimostrare molto brevemente nel seguente modo. Stabilita la (2) come in *a*), si ha, per il 2° teorema della media,

$$\int_{\pi:2m}^{\sigma} \varphi(z)\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz = \frac{2m}{\pi}\,\varphi\left(\frac{\pi}{2m}\right)\int_{\pi:2m}^{\sigma_1} \operatorname{sen} mz\,dz + \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma}\int_{\sigma_1}^{\sigma} \operatorname{sen} mz\,dz,$$

con $\pi:2m < \sigma_1 < \sigma$. Ciascuno dei due integrali del secondo membro è, in modulo, minore di $2:m$, ed è perciò

$$\left|\int_{\pi:2m}^{\sigma} \varphi(z)\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz\right| \leq \frac{4}{\pi}\left|\varphi\left(\frac{\pi}{2m}\right)\right| + \frac{2}{m\sigma}\left|\varphi(\sigma)\right|.$$

(¹) Cfr., per questa condizione, H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, pag. 71.

E siccome è $\varphi(z) \to 0$, per $z \to +0$, prendendo un m_1 sufficientemente grande, avremo, per tutti gli $m > m_1$,

$$\left| \int_{\pi:2m}^{\sigma} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Di qui segue, per il σ scelto e per ogni $m > m_1$,

$$\left| \int_{0}^{\sigma} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz \right| < \varepsilon.$$

La condizione che il rapporto $\varphi(z):z$ sia funzione non decrescente oppure non crescente, per $0 < z \leq \delta$, è certo soddisfatta *se la curva* $y = \varphi(z)$, *per* $0 < z \leq \delta$, *è rappresentabile in forma polare, prendendo per polo il punto* $(0, 0)$.

f) *Se è, per* $h \to 0$ $(h \gtrless 0)$,

$$\underline{\lim}\, hf'(x+h) \geq 0 \quad (\textit{oppure } \overline{\lim}\, hf'(x+h) \leq 0), \tag{5}$$

la disuguaglianza $\underline{\lim}\, z\varphi'(z) \geq 0$ (*oppure* $\overline{\lim}\, z\varphi'(z) \leq 0$) *risulta verificata.*

Ed infatti, sotto la condizione (5), è

$$\varphi'(z) = 2\, \{ f'(x+2z) - f'(x-2z) \}$$

e, per $z \to +0$,

$$\lim z\varphi'(z) \geq \underline{\lim}\, 2zf'(x+2z) + \underline{\lim}\, \{ -2zf'(x-2z) \} \geq 0.$$

g) Dimostriamo ora che: *Se nel punto x la $f(x)$ è continua oppure ha una discontinuità di 1ª specie; se esiste un numero $\delta > 0$ tale che, per ogni $\varepsilon > 0$ e $< \delta$, la $f(x)$ sia assolutamente continua in $(x-\delta,\ x-\varepsilon)$ e in $(x+\varepsilon,\ x+\delta)$; e se vale una delle due disuguaglianze*

$$\underline{\lim}_{h \to +0}\, hf'(x+h) \geq 0, \quad \overline{\lim}_{h \to +0}\, hf'(x+h) \leq 0, \tag{6}$$

ed anche una delle altre due

$$\underline{\lim}_{h \to +0}\, \{ -hf'(x-h) \} \geq 0, \quad \overline{\lim}_{h \to +0}\, \{ -hf'(x-h) \} \leq 0; \tag{7}$$

allora la serie di Fourier della $f(x)$ converge, nel punto x con-

siderato, verso $f(x)$ *o verso* $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, *a seconda che* x *è punto di continuità o no per la* $f(x)$.

Ed infatti, se, risultano verificate, insieme, le prime delle disuguaglianze (6) e (7), allora vale la (5), ed il criterio dato in *a*), in cui si ponga

$$\Phi(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

dimostra quanto abbiamo affermato. Altrettanto può dirsi se sono verificate insieme le seconde delle (6) e (7). Se fossero verificate la prima delle (6) e la seconda delle (7), ponendo

$$\varphi_1(z)=f(x+2z)-f(x+0),$$
$$\varphi_2(z)=f(x-2z)-f(x-0),$$

[donde $\varphi(z)=\varphi_1(z)+\varphi_2(z)$, per $\Phi(x)=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$] si avrebbe

$$\varliminf_{z\to+0} z\varphi_1'(z)\geq 0,\quad \varlimsup_{z\to+0} z\varphi_2'(z)\leq 0,$$

e la (4) varrebbe per queste $\varphi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$; sarebbe cioè, per un $\sigma>0$ e sufficientemente piccolo, e per ogni m maggiore di un certo m_1,

$$\left|\int_0^\sigma \varphi_1(z)\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\int_0^\sigma \varphi_2(z)\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz\right|<\varepsilon,$$

da cui seguirebbe

$$\left|\int_0^\sigma \varphi(z)\frac{\operatorname{sen} mz}{z}\,dz\right|<2\varepsilon.$$

Analogamente, se fossero verificate la seconda delle (6) e la prima delle (7).

h) Relativamente alle disuguaglianze (6) e (7), si possono ripetere considerazioni analoghe a quelle svolte in *b*), *c*), *d*), *e*), *f*); in particolare, si ha:

Se x_0 è un punto di continuità per la $f(x)$, e se, in un intorno di tal punto, escluso il punto stesso, la $f(x)$ è assolutamente continua [1] *e la curva $y = f(x)$ è rappresentabile in forma polare, prendendo per polo il punto $[x_0, f(x_0)]$, allora la serie di Fourier della $f(x)$ converge, in x_0, verso $f(x_0)$.*

Ed anche:

Se x_0 è un punto di discontinuità di 1^a specie per la $f(x)$, e se, in un intorno di tale punto, escluso il punto stesso, la $f(x)$ è assolutamente continua e di più la parte della curva $y = f(x)$ che è a destra e quella che è a sinistra della retta $x = x_0$ sono rappresentabili in forma polare, prendendo per poli rispettivamente i punti $[x_0, f(x_0 + 0)]$ e $[x_0, f(x_0 - 0)]$, allora la serie di Fourier della $f(x)$ converge, in x_0, verso $\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$.

107. - **Osservazioni sull'applicazione dei criteri di convergenza.**

Le dimostrazioni, esposte nei n.i precedenti, dei vari criteri di convergenza per le serie di Fourier, sono tutte basate sulla condizione espressa dalla disuguaglianza (7) del n.° 100. Da ciò deriva che, se la funzione $f(x)$ può decomporsi nella somma di un numero finito di funzioni integrabili,

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_p(x),$$

in modo che, per un dato x, ciascuna di esse soddisfi alle condizioni di almeno uno dei criteri di convergenza dimostrati — criterio che può variare da funzione a funzione — lo sviluppo di Fourier della $f(x)$ risulta convergente per il valore di x considerato.

Si può anche scindere la funzione $\varphi(z)$ come abbiamo già fatto nel n.° 100, *g*), e cioè nella parte $\varphi_1(z)$ che si riferisce ai valori della $f(x)$ alla destra di x ed in quella $\varphi_2(z)$ che si riferisce ai valori alla sinistra di tale punto. E se, da una parte, $\varphi_1(z)$ soddisfa alle condizioni di uno dei criteri stabiliti, e dall'altra, $\varphi_2(z)$ soddisfa a quelle di un altro qualsiasi di questi criteri, ne risulterà ancora la convergenza, nel punto x considerato, dello sviluppo di Fourier della $f(x)$.

---

[1] Ciò significa che esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $\varepsilon > 0$ e $< \delta$, la $f(x)$ risulta assolutamente continua in ciascuno dei due intervalli $(x_0 - \delta, x_0 - \varepsilon)$, $(x_0 + \varepsilon, x_0 + \delta)$.

§ 3. Convergenza uniforme.

108. - Lemma.

Se $\varphi(\alpha)$ *è una funzione data, integrabile in un intervallo* (a_1, b_1), *contenente un altro intervallo* (a, b), *in cui è data un' altra funzione* $\psi(\alpha)$, *continua e con derivata prima continua, l' integrale*

$$\int_a^b \varphi(\alpha + kx)\psi(\alpha) \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha, \tag{1}$$

per $n \to \infty$, *tende allo zero uniformemente per tutti gli* x *tali che il punto* $\alpha + kx$ *(dove* k *è una costante fissa) non esca da* (a_1, b_1) *quando* α *varia in* (a, b).

Poniamo

$$F(\alpha) = \int_a^\alpha \varphi(\alpha + kx) \operatorname{sen} n\alpha d\alpha$$

ed integriamo per parti nella (1): otteniamo

$$\int_a^b \varphi(\alpha + kx)\psi(\alpha) \operatorname{sen} n\alpha d\alpha = F(b)\psi(b) - \int_a^b F(\alpha)\psi'(\alpha) d\alpha. \tag{2}$$

Ora, per l' Osservaz. II del n.° 76, $F(\alpha)$ tende a zero, per $n \to \infty$, uniformemente rispetto a tutti gli α di (a, b) ed a tutti gli x tali che, al variare di α in (a, b), $\alpha + kx$ non esca da (a_1, b_1). E poichè $\psi'(\alpha)$ resta, in modulo, inferiore ad un numero fisso in tutto (a, b), ne viene che tanto $F(b)$ quanto l' integrale, che figura nel secondo membro della (2), tendono a zero, per $n \to \infty$, uniformemente rispetto a tutti gli x indicati. Il lemma resta così dimostrato.

109. - Condizione generale di convergenza uniforme.

Supponiamo che, in un intervallo (a, b), la $f(x)$ [supposta integrabile in tutto $(0, 2\pi)$] sia continua e poniamo, in tale intervallo, $\Phi(x) = f(x)$. Nel n.° 100, abbiamo veduto che, indicando con $s_n(x)$ la somma parziale della serie di Fourier della $f(x)$, è

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi:2} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z} dz,$$

e che, se è $0 < \sigma \leq \pi:2$, si ha, per $n \to \infty$,

$$\int_{\sigma}^{\pi:2} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z} dz \to 0.$$

Ora, per ogni x di (a, b), la convergenza allo zero di quest'ultimo integrale è uniforme. Ed infatti, scrivendo

$$(1) \quad \begin{aligned} \int_{\sigma}^{\pi:2} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z} dz = \int_{\sigma}^{\pi:2} f(x+2z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z} dz + \\ + \int_{\sigma}^{\pi:2} f(x-2z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z} dz - 2f(x) \int_{\sigma}^{\pi:2} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z} dz, \end{aligned}$$

si ha che i tre integrali del secondo membro tendono uniformemente allo zero, per $n \to \infty$, in virtù del lemma del n.º preced., in cui si farà $\psi(\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$. E siccome la $f(x)$, essendo supposta continua in (a, b), è ivi limitata, ne viene che, in tutto (a, b), tende uniformemente allo zero anche il primo membro dell'uguaglianza scritta. Dunque, la condizione necessaria e sufficiente affinchè, in (a, b), la $s_n(x)$ tenda uniformemente a $f(x)$, è che sia, pure uniformemente,

$$\int_{0}^{\sigma} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z} dz \to 0,$$

per almeno un numero positivo $\sigma \leq \pi:2$.

Sempre nel n.º 100, abbiamo fatto vedere che la differenza fra l'integrale or ora scritto e

$$\int_{0}^{\sigma} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z} dz$$

tende a zero, per $n \to \infty$. Questa differenza tende a zero uniformemente in tutto l'intervallo (a, b), come si vede scrivendola sotto forma di integrale unico, decomponendo poi tale integrale come si è fatto or ora in (1), ed applicando il lemma del n.º precedente, facendovi

$$\psi(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z} - \frac{1}{z}.$$

Possiamo, dunque, concludere:

Se la funzione $f(x)$, integrabile in tutto $(0, 2\pi)$, è continua nell' intervallo (a, b), condizione necessaria e sufficiente affinchè la sua serie di Fourier sia uniformemente convergente in tale intervallo, è che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si possano determinare un numero positivo $\sigma \leq \pi : 2$ ed un $N > 0$, in modo che, per ogni $n > N$ e per tutti gli x di (a, b), sia

$$\left| \int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z} dz \right| < \varepsilon,$$

dove è $\varphi(z) = f(x+2z) + f(x-2z) - 2f(x)$.

110. - Criteri speciali di convergenza uniforme.

Dalla condizione generale di convergenza uniforme, dianzi stabilita, si deducono diversi criteri speciali, in modo analogo a quanto si è già fatto per la convergenza semplice. Si può anzi dire che, da ogni criterio di convergenza semplice si può dedurre un criterio di convergenza uniforme, supponendo che le condizioni in esso poste siano uniformemente verificate in tutto l' intervallo (a, b) che si considera.

Così, per esempio, se in (a, b) la $f(x)$, oltre ad essere continua, soddisfa sempre alla condizione di Lipschitz generalizzata

$$|f(x_1) - f(x_2)| < K |x_1 - x_2|^\alpha,$$

con $K > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$, allora, considerato un intervallo (a_1, b_1) completamente interno ad (a, b), e preso un $\sigma > 0$ e minore di $\frac{a_1 - a}{2}$ e di $\frac{b - b_1}{2}$, è, per ogni x di (a_1, b_1), [posto $\varphi(z) = f(x+2z) + f(x-2z) - 2f(x)$]

$$\int_0^\sigma \frac{|\varphi(z)|}{z} dz \leq \int_0^\sigma \frac{|f(x+2z) - f(x)| + |f(x-2z) - f(x)|}{z} dz$$

$$\leq 2^{1+\alpha} K \int_0^\sigma \frac{dz}{z^{1-\alpha}} = \frac{2^{1+\alpha} K \sigma^\alpha}{\alpha},$$

e perciò, se è anche $\sigma < \left(\frac{\alpha\varepsilon}{2^{1+\alpha}K}\right)^{1:\alpha}$,

$$\left|\int_0^\sigma \varphi(z)\frac{\text{sen}\,(2n+1)z}{z}\,dz\right| < \int_0^\sigma \frac{|\varphi(z)|}{z}\,dz < \varepsilon,$$

per ogni n e per tutti gli x di (a_1, b_1). Con ciò risulta verificata la condizione del n.º preced., e si ha la convergenza uniforme della serie di Fourier in tutto (a_1, b_1).

Analogamente, se, in tutto (a, b), la $f(x)$, oltre ad essere continua, è a variazione limitata, si potrà scrivere, in tutto tale intervallo,

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

con f_1 ed f_2 funzioni continue, non negative e non decrescenti. Ed allora, per ogni x di (a_1, b_1) [intervallo che supporremo ancora completamente interno ad (a, b)] e per ogni $\sigma > 0$ e minore di $\frac{a_1 - a}{2}$ e di $\frac{b - b_1}{2}$, avremo, secondo quanto abbiamo già detto nel n.º 103 (e conservando le notazioni ivi adottate),

$$\left|\int_0^\sigma \varphi(z)\frac{\text{sen}\,(2n+1)z}{z}\,dz\right| \leq \pi[\varphi_1(\sigma) + \varphi_2(\sigma)]$$

$$= \pi\,\{[f_1(x+2\sigma) - f_1(x-2\sigma)] + [(f_2(x+2\sigma) - f_2(x-2\sigma)]\};$$

e siccome, preso un $\varepsilon > 0$, potremo determinare [per l'uniforme continuità delle $f_1(x)$ e $f_2(x)$] un σ minore di $\frac{a_1 - a}{2}$ e di $\frac{b - b_1}{2}$, e tale che, per ogni x di (a_1, b_1), sia

$$|f_1(x+2\sigma) - f_1(x-2\sigma)| < \frac{\varepsilon}{2\pi},$$

$$|f_2(x+2\sigma) - f_2(x-2\sigma)| < \frac{\varepsilon}{2\pi},$$

avremo, per tale σ,

$$\left|\int_0^\sigma \varphi(z)\frac{\text{sen}\,(2n+1)z}{z}\,dz\right| < \varepsilon,$$

per tutti gli x indicati e per tutti gli n. Dal n.° precedente segue dunque la convergenza uniforme in (a_1, b_1) della serie di Fourier della $f(x)$.

Possiamo affermare, pertanto:

Se la funzione $f(x)$, integrabile in $(0, 2\pi)$, soddisfa in tutto un intervallo (a, b) di $(0, 2\pi)$:

— *alla condizione di Lipschitz generalizzata*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|^\alpha,$$

con $K > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$ (¹);

— *oppure, alla condizione di essere a variazione limitata;*

allora la sua serie di Fourier converge uniformemente in ogni intervallo (c, d), interno ad (a, b), purchè in tutti i punti di (c, d), essa funzione sia continua.

Se le condizioni indicate valgono in tutto $(0, 2\pi)$, se è $f(0) = f(2\pi)$, e se la $f(x)$ è sempre continua, allora la convergenza uniforme ha luogo in tutto $(0, 2\pi)$.

In particolare, tenendo presente il ragionamento fatto nel caso della condizione di Lipschitz, si ha:

Se la $f(x)$, integrabile in $(0, 2\pi)$, ammette derivata continua, od almeno limitata, in tutto un intervallo (a, b), la sua serie di Fourier converge uniformemente in tutto (a, b), purchè questo intervallo sia interno a $(0, 2\pi)$, oppure, purchè sia $a = 0$, $b = 2\pi$, e $f(0) = f(2\pi)$.

Altre condizioni di convergenza uniforme si deducono dai criteri più generali di Dini, De La Vallée Poussin e Lebesgue.

§ 4. Convergenza parziale.

111. - Lemma sulle serie di funzioni a termini positivi.

Se i termini $f_r(x)$ di una serie $\sum_{r=1}^{\infty} f_r(x)$ sono funzioni continue, date in un intervallo (a, b), non mai negative e tali che $\sum_{r=1}^{m} f_r(x)$

(¹) Questa condizione è precisamente quella a cui accennammo a p. 281. Vedi R. Lipschitz, *De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum ecc.* (Journal für Mathematik, Bd. 63 (1864)). Di questa Memoria esiste una traduzione francese, fatta da P. Montel, in Acta Math., Bd. 36 (1912-13).

abbia sempre solo un numero finito di massimi relativi, e se la serie dei loro integrali

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^b f_r(x)\,dx \tag{1}$$

è convergente, la serie $\sum_{r=1}^{\infty} f_r(x)$ *converge in quasi-tutto* (a, b) [1].

Sia n un qualsiasi numero intero positivo e, detta S la somma della serie (1), indichiamo con $\Delta_{n,m}$ il plurintervallo dei punti di (a, b) in cui è

$$\sum_{r=1}^{m} f_r(x) > nS.$$

Si ha, da una parte,

$$\sum_1^m \int_a^b f_r(x)dx \leq \sum_1^{\infty}\int_a^b f_r(x)dx = S,$$

e dall' altra

$$\sum_1^m \int_a^b f_r(x)dx = \int_a^b \sum_1^m f_r(x)\,dx > nS\Delta_{n,m},$$

onde

$$\Delta_{n,m} < \frac{1}{n}, \tag{2}$$

qualunque sia m.

Osserviamo ora che, per l' ipotesi che $\sum_{r=1}^{m} f_r(x)$ abbia soltanto un numero finito di massimi, $\Delta_{n,m}$ è composto soltanto di un numero finito d' intervalli. Osserviamo, inoltre, che $\Delta_{n,m}$ è contenuto in $\Delta_{n,m+1}$. Dopo di ciò, aggiungiamo agli intervalli di $\Delta_{n,1}$ quelli necessari a completare $\Delta_{n,2}$, nell' ordine con cui si presentano in (a, b); aggiungiamo, poi, quelli necessari a completare $\Delta_{n,3}$, ecc. Otteniamo, così, un plurintervallo Δ_n la cui

---

[1] La proposizione è vera anche se si suppone soltanto che le $f_r(x)$ siano integrabili, non mai negative e tali che la serie (1) sia convergente. (Cfr. G. Vitali, *Sull' integrazione per serie.* Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. XXIII (1907), pp. 137-155).

lunghezza è, per la (2), $\leq 1 : n$, e tale plurintervallo conterrà tutti i punti di (a, b) in cui è

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{r=1}^{m} f_r > nS,$$

ed in particolare tutti i punti di divergenza della serie $\sum_{r=1}^{\infty} f_r$.

Ciò dimostra che la $\sum_{r=1}^{\infty} f_r$ converge in quasi-tutto (a, b).

112. - I.° Teorema di Kolmogoroff.

Se la funzione $f(x)$ *è integrabile, insieme col suo quadrato, in* $(0, 2\pi)$; *se* $s_n(x)$ *è la somma parziale della serie di Fourier della* $f(x)$; *se* n_m $(m = 1, 2, ...)$ *è una successione di numeri interi positivi soddisfacenti alla condizione*

$$\frac{n_{m+1}}{n_m} > \lambda > 1;$$

allora la successione $s_{n_1}, s_{n_2}, ..., s_{n_m}, ...,$ *converge, in quasi-tutto* $(0, 2\pi)$, *verso la* $f(x)$ (¹).

Indicato con $\sigma_n(x)$ il polinomio trigonometrico di Fejér, di ordine $n - 1$, della $f(x)$,

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0 + s_1 + ... + s_{n-1}}{n},$$

consideriamo la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} (s_{n_m} - \sigma_{n_m})^2 dx, \tag{1}$$

e dimostriamo che è convergente. Abbiamo

$$s_{n_m} - \sigma_{n_m} = \left\{ \frac{1}{2} a_0 + \sum_{r=1}^{n_m} (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx) \right\} -$$

$$- \left\{ \frac{1}{2} a_0 + \sum_{r=1}^{n_m - 1} \left(1 - \frac{r}{n_m}\right) (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx) \right\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n_m} \frac{r}{n_m} (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx),$$

(¹) A. Kolmogoroff, loc. cit. in (¹) a p. 270.

e, per la formula di Parseval,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(s_{n_m}-\sigma_{n_m})^2 dx = \frac{1}{n_m^2}\sum_{r=1}^{n_m} r^2(a_r^2+b_r^2),$$

onde, sommando,

$$\sum_{m=1}^{p}\int_0^{2\pi}(s_{n_m}-\sigma_{n_m})^2 dx = \pi\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{n_m^2}\sum_{r=1}^{n_m} r^2(a_r^2+b_r^2)$$

$$= \pi\sum_{r=1}^{n_p} r^2(a_r^2+b_r^2)\sum_{m=m_r}^{p}\frac{1}{n_m^2},$$

dove m_r è il più piccolo intero tale che $n_{m_r} \geq r$. Ora, dalla $\frac{n_{m+1}}{n_m} > \lambda > 1$, segue $n_{m+s} > \lambda^s n_m$, e perciò

$$\sum_{m=m_r}^{p}\frac{1}{n_m^2} < \frac{1}{n_{m_r}^2}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{2s}} \leq \frac{1}{r^2}\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}.$$

È, pertanto,

$$\sum_{m=1}^{p}\int_0^{2\pi}(s_{n_m}-\sigma_{n_m})^2 dx \leq \frac{\pi\lambda^2}{\lambda^2-1}\sum_{r=1}^{n_p}(a_r^2+b_r^2)$$

$$\leq \frac{\pi\lambda^2}{\lambda^2-1}\sum_{r=1}^{\infty}(a_r^2+b_r^2),$$

perchè, essendo la $f(x)$ a quadrato integrabile in $(0, 2\pi)$, la serie scritta è convergente (n.° 81). E poichè la disuguaglianza a cui siamo giunti vale per qualunque valore di p, ed il suo secondo membro è indipendente da p, la serie (1) risulta convergente.

Dopo di ciò, osserviamo che $(s_{n_m}-\sigma_{n_m})^2$, essendo un polinomio trigonometrico di ordine $2n_m$, è una funzione continua e la somma $\sum_{m=1}^{p}(s_{n_m}-\sigma_{n_m})^2$, che è un polinomio trigonometrico di ordine $2n_p$, ha un numero finito di massimi in $(0, 2\pi)$. Di più, è sempre $(s_{n_m}-\sigma_{n_m})^2 \geq 0$. Dalla convergenza della (1) risulta, pertanto, in virtù del lemma del n.° 111, che la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty}(s_{n_m}-\sigma_{n_m})^2$$

è convergente in quasi-tutto $(0, 2\pi)$. Dunque, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, è, per $m \to \infty$,

$$s_{n_m} - \sigma_{n_m} \to 0.$$

Ma, secondo il teorema di Lebesgue del n.° 62, è, per $m \to \infty$,

$$\sigma_{n_m} \to f(x),$$

in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, e perciò, in quasi-tutto tale intervallo, è $s_{n_m} \to f(x)$.

113. - II.° Teorema di Kolmogoroff.

Se n_m $(m = 1, 2, ...)$ *è una successione di numeri interi positivi, soddisfacenti alla condizione*

$$\frac{n_{m+1}}{n_m} > \lambda > 1, \tag{1}$$

e se, nella serie di Fourier di una funzione $f(x)$, *tutti i termini sono nulli, eccettuati quelli d'indice* n_m, *la serie converge verso la* $f(x)$ *in quasi-tutto* $(0, 2\pi)$ [1].

Questo teorema è un immediato corollario di quello del n.° precedente, quando si supponga la $f(x)$ a quadrato integrabile in $(0, 2\pi)$. Nel caso generale, quando cioè si suppone soltanto che la $f(x)$ sia integrabile in $(0, 2\pi)$, il teorema si dimostra semplicemente nel modo seguente.

Dall'uguaglianza, già scritta nel n.° preced.,

$$s_{n_m} - \sigma_{n_m} = \sum_{r=1}^{n_m} \frac{r}{n_m} (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx),$$

segue, tenendo conto dell'ipotesi fatta sui coefficienti a_r e b_r,

$$| s_{n_m} - \sigma_{n_m} | \leq \sum_{r=1}^{m} \frac{n_r}{n_m} (| a_{n_r} | + | b_{n_r} |).$$

Siccome, per il teorema di Riemann-Lebesgue del n.° 77, è, per $r \to \infty$, $a_{n_r} \to 0$, $b_{n_r} \to 0$, si ha, scegliendo un numero A positivo sufficientemente grande,

$$| a_{n_r} | + | b_{n_r} | < A,$$

[1] A. Kolmogoroff, loc. cit. in [1] a p. 270.

qualunque sia r; inoltre, preso un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può determinare un r_0 tale che, per ogni $r > r_0$, sia $|a_{n_r}| + |b_{n_r}| < \varepsilon$. È dunque, per $m > r_0$,

$$|s_{n_m} - \sigma_{n_m}| < A \sum_{r=1}^{r_0} \frac{n_r}{n_m} + \varepsilon \sum_{r=r_0+1}^{m} \frac{n_r}{n_m}.$$

Si ha poi, in virtù della (1),

$$n_r < \frac{1}{\lambda} n_{r+1} < \frac{1}{\lambda^2} n_{r+2} < \dots < \frac{1}{\lambda^{m-r}} n_m,$$

e quindi

$$|s_{n_m} - \sigma_{n_m}| < \frac{A}{n_m} \sum_{r=1}^{r_0} n_r + \varepsilon \sum_{r=r_0+1}^{m} \frac{1}{\lambda^{m-r}} < \frac{A}{n_m} \sum_{r=1}^{r_0} n_r + \varepsilon \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Al tendere di m all'infinito, il primo termine dell'ultimo membro tende allo zero, e pertanto, per m maggiore di un certo m_1, è

$$|s_{n_m} - \sigma_{n_m}| < \varepsilon \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda - 1}\right).$$

Ciò prova che, per $m \to \infty$, è $s_{n_m} - \sigma_{n_m} \to 0$ in tutto $(0, 2\pi)$. Ma il teorema di Lebesgue del n.° 62 dice che, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, è $\sigma_{n_m} \to f$, per $m \to \infty$. Dunque, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, è $s_{n_m} \to f$.

Osservazione. — Dalla dimostrazione precedente risulta che, nell'ipotesi del teorema enunciato, è $s_{n_m} \to f$ in tutti quei punti di $(0, 2\pi)$ nei quali è $\sigma_{n_m} \to f$ e soltanto in essi. In particolare, si ha $s_{n_m} \to f$ in tutti i punti di continuità della f; e la convergenza della serie di Fourier è uniforme in ogni intervallo (a, b), interno a $(0, 2\pi)$, in ogni punto del quale la $f(x)$ sia continua.

Più particolarmente ancora, *se la $f(x)$ è continua in tutto $(0, 2\pi)$ ed è $f(0) = f(2\pi)$, e se sono soddisfatte le condizioni del teorema precedente, la serie di Fourier della $f(x)$ converge verso questa funzione uniformemente in tutto* $(0, 2\pi)$. Questo risultato è contenuto in quello del n.° 98.

§ 5. Serie coniugate.

114. - Serie coniugata di una data serie trigonometrica.

a) Data una serie trigonometrica

$$(1) \qquad \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

la nuova serie trigonometrica

$$(2) \qquad \frac{1}{2} b_0 + \sum_1^\infty (b_n \cos nx - a_n \operatorname{sen} nx),$$

dove b_0 è una costante arbitraria, si dice *serie coniugata* della (1). Se poniamo $c_0 = (a_0 - ib_0):2$ e, per $n > 0$, $c_n = a_n - ib_n$, e consideriamo la serie di potenze $\sum\limits_0^\infty c_n z^n$ sulla circonferenza $|z| = 1$, abbiamo, posto $z = e^{ix}$,

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty c_n z^n &= \frac{a_0 - ib_0}{2} + \sum_0^\infty (a_n - ib_n) e^{ix} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \\ &\quad - i \left\{ \frac{b_0}{2} + \sum_1^\infty (b_n \cos nx - a_n \operatorname{sen} nx) \right\}.\end{aligned}$$

Vediamo, dunque, che la serie (1) e la sua coniugata (2) sono, rispettivamente, la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria di una serie di potenze, sulla circonferenza $z = e^{ix}$.

È anche evidente che la serie (1), cambiata di segno, è *coniugata* della (2).

b) Se la (1) è una serie di Fourier, può dirsi altrettanto della serie coniugata (2)?

Se la (1) è la serie di Fourier di una funzione $f(x)$ integrabile, insieme col suo quadrato, in $(0, 2\pi)$, allora (n.° 81) la serie $\Sigma (a_n^2 + b_n^2)$ è convergente, e perciò la serie (2) è anch'essa (teorema di Riesz-Fischer del n.° 91) la serie di Fourier di una funzione $g(x)$, integrabile insieme col suo quadrato. Più generalmente, M. Riesz [1] ha dimostrato che, *se la* (1) *è la serie di Fourier di una funzione* $f(x)$, *integrabile, in* $(0, 2\pi)$, *insieme con* $|f(x)|^p$, *per un* $p > 1$, *allora anche la serie coniugata* (2) *è la serie di Fourier di una funzione* $g(x)$, *integrabile, in* $(0, 2\pi)$, *insieme con* $|g(x)|^p$.

Esistono però delle serie di Fourier le cui serie coniugate non sono delle serie di Fourier.

Ad esempio, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}$$

ha per serie coniugata

$$\frac{1}{2} b_0 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{\log n},$$

e, mentre la prima è una serie di Fourier (n.° 93), la seconda non è tale (n.° 75).

115. - Condizioni di convergenza per una serie coniugata di una serie di Fourier.

a) Consideriamo una funzione $f(x)$, integrabile in $(0, 2\pi)$, e la serie

$$(1) \qquad \frac{1}{2} b_0 + \sum_1^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \operatorname{sen} nx),$$

coniugata della sua serie di Fourier. La somma parziale

$$s_n^*(x) = \frac{1}{2} b_0 + (b_1 \cos x - a_1 \operatorname{sen} x) + \dots + (b_n \cos nx - a_n \operatorname{sen} nx)$$

può porsi sotto forma d'integrale, come si è fatto per la somma $s_n(x)$ della serie di Fourier della $f(x)$. Abbiamo, infatti, utilizzando le espressioni di b_n ed a_n, date dalle formule di Eulero-Fourier,

$$s_n^*(x) = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \operatorname{sen} r(\alpha - x)\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2} b_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left\{ \sum_{r=1}^{n} \operatorname{sen} r(\alpha - x) \right\} d\alpha,$$

---

[1] *Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier.* (Comptes rendus, t. 178 (1924), pp. 1464-1466); *Sur les fonctions conjuguées.* (Math. Zeitschr., Bd. 27 (1927), pp. 218-244).

donde, per la (3) del n.° 11,

$$(2) \quad s_n^*(x) = \frac{1}{2} b_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \frac{n}{2}(\alpha - x) \operatorname{sen} \frac{n+1}{2}(\alpha - x)}{\operatorname{sen} \frac{\alpha - x}{2}} d\alpha$$

od anche, supponendo definita la $f(x)$ anche fuori di $(0, 2\pi)$, mediante la periodicità, di periodo 2π,

$$(3) \quad s_n^*(x) = \frac{1}{2} b_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi:2} \Big[f(x+2z) - f(x-2z)\Big] \frac{\operatorname{sen} nz \operatorname{sen}(n+1)z}{\operatorname{sen} z} dz,$$

che può anche scriversi

$$(3') \quad s_n^*(x) = \frac{1}{2} b_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi:2} \Big[f(x+2z) - f(x-2z)\Big] \Big[\operatorname{cotg} z - \frac{\cos(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\Big] dz.$$

La serie coniugata (1) è perciò convergente o no, in un punto x, a seconda che, in tale punto, ha o no limite finito, per $n \to \infty$, l'integrale del secondo membro della (3'). E siccome, se è $0 < \sigma < \pi:2$, si ha, per $n \to \infty$,

$$\int_\sigma^{\pi:2} [f(x+2z) - f(x-2z)] \Big[\operatorname{cotg} z - \frac{\cos(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}\Big] dz \to$$

$$\to \int_\sigma^{\pi:2} [f(x+2z) - f(x-2z)] \operatorname{cotg} z \, dz,$$

in virtù del teorema del n.° 76, ne viene che *la convergenza, in un punto x, della serie coniugata* (1) *della serie di Fourier della $f(x)$, dipende esclusivamente dal comportamento della funzione $f(x)$ nell'intorno del punto considerato.* Deve però osservarsi che, quando la (1) è convergente in un punto x, la sua somma *non* dipende esclusivamente dai valori della $f(x)$ nell'intorno del punto considerato; su tale somma hanno influenza tutti i valori della $f(x)$ in $(0, 2\pi)$ (fatta naturalmente eccezione per quelli corrispondenti ad un insieme di punti di misura nulla).

b) Se, in un dato punto x, esiste finito il limite

$$\lim_{\sigma \to +0} \int_{\sigma}^{\pi:2} [f(x+2z) - f(x-2z)] \operatorname{cotg} z \, dz, \tag{4}$$

allora esiste finito, per la (3′), anche

$$\lim_{\sigma \to +0} \int_{\sigma}^{\pi:2} [f(x+2z) - f(x-2z)] \frac{\cos(2n+1)z}{\operatorname{sen} z} \, dz \tag{5}$$

e la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza della (1), nel punto x, è che esista finito il limite, per $n \to \infty$, dell'espressione (5).

Se esiste finito il limite (4) *e se il limite, per* $n \to \infty$, *di* (5) *esiste ed è nullo, allora la serie* (1) *converge, nel punto* x *considerato, e la sua somma è data da*

$$\frac{1}{2} b_0 + \frac{1}{\pi} \lim_{\sigma \to +0}{}' \int_{\sigma}^{\pi:2} [f(x+2z) - f(x-2z)] \operatorname{cotg} z \, dz. \tag{6}$$

116. - Criterio di convergenza di Pringsheim.

Se, per un dato punto x, *il rapporto* $\dfrac{f(x+z) - f(x-z)}{z}$ *è integrabile, rispetto a* z, *nell'intorno di* $z = 0$ [1], *la serie coniugata della serie di Fourier della* $f(x)$ *converge nel punto* x, *e la sua somma è data da*

$$\frac{1}{2} b_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x+z) - f(x-z)] \operatorname{cotg} \frac{z}{2} \, dz \ [2].$$

Ed infatti, siccome è

$$[f(x+2z) - f(x-2z)] \operatorname{cotg} z = \\ = \frac{f(x+2z) - f(x-2z)}{z} \frac{z}{\operatorname{sen} z} \cos z$$

---

[1] La $f(x)$ si suppone (anche nei n.ⁱ seguenti) definita fuori di $(0, 2\pi)$ mediante la periodicità, di periodo 2π.

[2] A. Pringsheim, *Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise.* (Sitzungsberichte der München Akademie, Bd. XXIX (1900), pp. 37-100).

e, per $0 < z \leq \frac{\pi}{2}$,

$$\left| \frac{z}{\operatorname{sen} z} \cos z \right| < \frac{\pi}{2},$$

dall'ipotesi fatta, segue l'integrabilità di

$$[f(x + 2z) - f(x - 2z)] \operatorname{cotg} z$$

in tutto l'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; e segue anche l'integrabilità di $[f(x + 2z) - f(x - 2z)] : \operatorname{sen} z$. Esistono, perciò, i limiti (4) e (5) del n.° precedente, ed è, per $n \to \infty$,

$$\int_0^{\pi:2} [f(x + 2z) - f(x - 2z)] \frac{\cos (2n + 1)z}{\operatorname{sen} z} dz \to 0,$$

in virtù del teorema del n.° 76. Non resta dunque che applicare la proposizione *b*) del n.° precedente.

Osservazione I. — La condizione del criterio di Pringsheim è verificata se, nel punto x, la $f(x)$ ha derivata finita, oppure se la $f(x)$ soddisfa ad una condizione di Lipschitz generalizzata.

Osservazione II. — Se la $f(x)$, ha derivata limitata in tutto un intervallo (a, b), oppure, se in tutto tale intervallo, è sempre

$$| f(x_1) - f(x_2) | < K | x_1 - x_2 |^{\alpha}$$

con $K > 0$, $\alpha > 0$, allora la convergenza della serie coniugata della serie di Fourier della $f(x)$, è *uniforme* in ogni intervallo interno ad (a, b).

117. - Divergenza della serie coniugata nei punti di discontinuità di I^a specie della $f(x)$.

a) *Se x_0 è un punto di discontinuità di 1^a specie per la $f(x)$, in tale punto la serie coniugata della serie di Fourier della $f(x)$ (supposta integrabile in $(0, 2\pi)$) è divergente* [1].

---

[1] A. Pringsheim, loc. cit. in [2] a pag. 311.
Supponiamo tacitamente che non sia $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, perchè se così fosse, cambiando opportunamente il valore della $f(x)$ nel punto x_0, la discontinuità verrebbe a sparire.

Dalla (3') del n.° 115, ricaviamo, ponendovi $\cos(2n+1)z = \cos 2nz \cos z - \operatorname{sen} 2nz \operatorname{sen} z$,

$$(1) \quad s_n^*(x) = \frac{1}{2} b_0 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi:2} [f(x+2z) - f(x-2z)] \operatorname{cotg} z \,[1 - \cos 2nz]\, dz$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi:2} [f(x+2z) - f(x-2z)] \operatorname{sen} 2nz\, dz.$$

Ma, per il teorema del n.° 76, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi:2} [f(x+2z) - f(x-2z)] \operatorname{sen} 2nz\, dz = 0,$$

e perciò il comportamento di $s_n^*(x)$, per $n \to \infty$, dipende esclusivamente dal comportamento del primo integrale di (1).

Se x_0 è un punto di discontinuità di 1ª specie per la $f(x)$, possiamo supporre, senza limitazione della generalità del risultato $f(x_0+0) - f(x_0-0) = d > 0$. È allora, per $\sigma > 0$ e sufficientemente piccolo, $f(x_0+2z) - f(x_0-2z) > \frac{d}{2}$ per $0 \leq z \leq \sigma$, e perciò

$$\int_0^{\pi:2} [f(x+2z) - f(x-2z)] \operatorname{cotg} z\,[1 - \cos 2nz]\, dz$$

$$> \frac{d}{2}\int_0^{\sigma} \operatorname{cotg} z\,[1 - \cos 2nz]\, dz +$$

$$+ \int_{\sigma}^{\pi:2} [f(x+2z) - f(x-2z)] \operatorname{cotg} z\,[1 - \cos 2nz]\, dz.$$

Per $n \to \infty$, l'ultimo integrale scritto tende ad un limite finito. Il penultimo, invece, è maggiore di

$$\int_{\sigma'}^{\sigma} \operatorname{cotg} z\, dz - \int_{\sigma'}^{\sigma} \operatorname{cotg} z \cos 2nz\, dz \ (^1),$$

(1) Il secondo di questi integrali tende a zero per $n \to \infty$, in virtù del teorema del n.° 76.

con $0 < \sigma' < \sigma$, e quindi, per $n \to \infty$, risultando maggiore od uguale a

$$\int_{\sigma'}^{\sigma} \operatorname{cotg} z \, dz,$$

tende a $+\infty$. Dalla (1) segue, perciò,

$$\lim_{n \to \infty} s_n^*(x_0) = \pm \infty,$$

a seconda che è $d > 0$ oppure $d < 0$.

b) Per i punti di discontinuità di 1.ª specie della $f(x)$, e, più generalmente, per ogni punto x_0 in cui esista, finito, il limite

$$\lim_{z \to 0} [f(x_0 + z) - f(x_0 - z)] = d, \tag{2}$$

possiamo dimostrare la seguente proposizione, dovuta a F. Lukács [1]:

In ogni punto x_0 in cui esista finito il limite (2), *è*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n^*(x_0)}{\log n} = \frac{d}{\pi}. \tag{3}$$

Posto $\psi(z) = f(x_0 + 2z) - f(x_0 - 2z)$, in virtù della (1) l'uguaglianza (3) sarà dimostrata se proveremo che è

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log n} \int_0^{\pi:2} \psi(z) \operatorname{cotg} z \, [1 - \cos 2nz] \, dz = d,$$

od anche

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log n} \int_0^{\pi:2} \psi(z) \frac{1 - \cos 2nz}{z} \, dz = d, \tag{4}$$

perchè è

$$\left| \int_0^{\pi:2} \psi(z) \operatorname{cotg} z \, [1 - \cos 2nz] \, dz - \int_0^{\pi:2} \psi(z) \frac{1 - \cos 2nz}{z} \, dz \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi:2} | \psi(z) | \left| \operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} \right| dz.$$

---

[1] *Ueber die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe.* (Journal für Mathematik, Bd. 150 (1920), pp. 107-112).

Osserviamo che è

$$\int_0^{\pi:2}\frac{1-\cos 2nz}{z}\,dz=\int_0^{n\pi}\frac{1-\cos z}{z}\,dz=\sum_{r=0}^{n-1}\int_{r\pi}^{(r+1)\pi}\frac{1-\cos z}{z}\,dz$$

e quindi, essendo

$$\int_{r\pi}^{(r+1)\pi}(1-\cos z)dz=\pi,$$

si ha, da una parte,

$$\int_0^{\pi:2}\frac{1-\cos 2nz}{z}\,dz<\int_0^{\pi}\frac{1-\cos z}{z}\,dz+1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1},$$

e dall'altra

$$\int_0^{\pi:2}\frac{1-\cos 2nz}{z}\,dz>1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}.$$

E siccome è, per $n\to\infty$,

$$\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right):\log n\to 1,$$

ne viene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\int_0^{\pi:2}\frac{1-\cos 2nz}{z}\,dz=1. \tag{5}$$

In base a ciò, la (4) equivale alla

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\int_0^{\pi:2}\{\psi(z)-d\}\,\frac{1-\cos 2nz}{z}\,dz=0. \tag{6}$$

Ora, preso ad arbitrio un $\varepsilon>0$, scegliamo un $\sigma>0$ in modo che, per $0\leq z\leq\sigma$, sia $|\psi(z)-d|<\varepsilon$. Avremo così

$$\left|\frac{1}{\log n}\int_0^{\pi:2}\{\psi(z)-d\}\,\frac{1-\cos 2nz}{z}\,dz\right|<\frac{\varepsilon}{\log n}\int_0^{\sigma}\frac{1-\cos 2nz}{z}\,dz$$

$$+\frac{2}{\sigma\log n}\int_{\sigma}^{\pi:2}|\psi(z)-d|\,dz,$$

e, per n sufficientemente grande, il primo termine del secondo membro è minore di 2ε, in virtù della (5), ed il secondo termine è piccolo quanto si vuole. Ciò prova la (6), e quindi il teorema enunciato.

118. - Criterio di convergenza di Young.

Se, in un intorno del punto x_0, la funzione integrabile $f(x)$ è a variazione limitata, condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie coniugata della serie di Fourier della $f(x)$ sia convergente in x_0, è che esista finito il limite

$$\lim_{\sigma \to +0} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma}^{\pi} [f(x_0 + z) - f(x_0 - z)] \operatorname{cotg} \frac{z}{2} \, dz; \tag{1}$$

e tale limite, aumentato di $\frac{1}{2} b_0$, dà la somma della serie coniugata [1].

Considerata la somma parziale $s_n^*(x_0)$ della serie coniugata, in x_0, nella forma (1) del n.° 117, abbiamo che condizione necessaria e sufficiente per la convergenza, in x_0, è che esista finito il limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi:2} [f(x_0 + 2z) - f(x_0 - 2z)] \operatorname{cotg} z \, [1 - \cos 2nz) \, dz. \tag{2}$$

Indicato con I_n l' integrale ora scritto, abbiamo

$$I_n = \int_0^{\sigma_1} \dots + \int_{\sigma_1}^{\sigma} \dots + \int_{\sigma}^{\pi:2} \dots \equiv I_n' + I_n'' + I_n''', \tag{3}$$

supponendo $0 < \sigma_1 < \sigma < \pi:2$.

Osserviamo, prima di proseguire, che, avendo supposto la $f(x)$ a variazione limitata in tutto un intorno del punto x_0, in questo punto la funzione o è continua oppure ha una discontinuità di 1ª specie. Se ammettiamo che in x_0 la serie coniugata sia convergente, in x_0 la $f(x)$ deve essere continua, per il teorema del n.° preced.; così pure, se ammettiamo che in x_0 esista

---

[1] W. H. Young, *Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe.* (Sitzungsberichte der München Akademie, 1911, pp. 361-371).

finito il limite (1), in x_0 la $f(x)$ deve ancora essere continua [1]. Dunque, sia per dimostrare che la condizione enunciata è necessaria, sia per dimostrare che essa è sufficiente, dobbiamo ammettere che la $f(x)$ sia continua in x_0.

Osserviamo poi che, essendosi supposta la $f(x)$ a variazione limitata nell'intorno del punto x_0, anche la funzione di z, $f(x_0+2z)-f(x_0-2z)$ risulta a variazione limitata, nell'intorno del punto $z=0$; potremo dunque scrivere, in tutto un intervallo $(0, z_1)$, con $z_1>0$,

$$\begin{aligned}\psi(z) &\equiv f(x_0+2z)-f(x_0-2z)\\ &= P(z)-N(z),\end{aligned}$$

con $P(z)$ e $N(z)$ funzioni non decrescenti, che, per $z=0$, sono nulle (perchè è $\psi(0)=0$) e continue.

Ciò premesso, e fissato un $\varepsilon>0$, determiniamo un σ, positivo e minore tanto di $\pi:2$ quanto di z_1, in modo che, per ogni z di $(0, \sigma)$, sia

$$|\psi(z)|<\varepsilon,$$
$$P(z)<\varepsilon, \quad N(z)<\varepsilon.$$

Allora, avremo, supponendo $n\sigma_1\leq\pi$,

$$\tag{4}\begin{aligned}|I_n'| &< 2\int_0^{\sigma_1}|\psi(z)|\,\frac{1-\cos 2nz}{z}\,dz\\ &< 4\varepsilon\int_0^{\sigma_1}\frac{\operatorname{sen}^2 nz}{z}\,dz<4\pi\varepsilon.\end{aligned}$$

Avremo, poi, applicando il secondo teorema della media, e supponendo $(n+1)\sigma_1\geq\pi$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\sigma_1}^{\sigma}P(z)\operatorname{cotg} z\cos 2nz\,dz\right| &= \left|P(\sigma)\int_{\sigma'}^{\sigma}\operatorname{cotg} z\cos 2nz\,dz\right|\\ &= \left|P(\sigma)\operatorname{cotg}\sigma'\int_{\sigma'}^{\sigma''}\cos 2nz\,dz\right| \ \text{(}^2\text{)}\\ &\leq \frac{\varepsilon}{n}\operatorname{cotg}\sigma_1<\frac{\varepsilon\pi}{2n\sigma_1}\leq\varepsilon;\end{aligned}$$

---

[1] Cfr. il ragionamento fatto nel n.° 117.

[2] È $\sigma_1\leq\sigma'\leq\sigma''\leq\sigma$.

e siccome le medesime disuguaglianze si hanno sostituendo, a $P(z)$, $N(z)$, otterremo

$$\left|\int_{\sigma_1}^{\sigma} \psi(z) \operatorname{cotg} z \cos 2nz \, dz\right| < 2\varepsilon,$$

e perciò

$$\left| I_n'' - \int_{\sigma_1}^{\sigma} \psi(z) \operatorname{cotg} z \, dz \right| < 2\varepsilon, \tag{5}$$

sempre supponendo $\frac{\pi}{n+1} \leq \sigma_1 \leq \frac{\pi}{n}$. Avremo, infine, per ogni n maggiore di un certo n_1,

$$\left| I_n''' - \int_{\sigma}^{\pi:2} \psi(z) \operatorname{cotg} z \, dz \right| < \varepsilon. \tag{6}$$

Da (3), (4), (5) e (6), segue

$$\left| I_n - \int_{\sigma_1}^{\pi:2} \psi(z) \operatorname{cotg} z \, dz \right| < 6\pi\varepsilon, \tag{7}$$

per ogni $n > n_1$ e supponendo $\frac{\pi}{n+1} \leq \sigma_1 \leq \frac{\pi}{n}$.

Ora, se vale la (1), è, per ogni σ_1 minore di un certo σ_0,

$$\left| \lim_{\sigma \to +0} \int_{\sigma}^{\pi:2} \psi(z) \operatorname{cotg} z \, dz - \int_{\sigma_1}^{\pi:2} \psi(z) \operatorname{cotg} z \, dz \right| < \varepsilon,$$

e pertanto, per tutti gli n da un certo valore in poi,

$$\left| I_n - \lim_{\sigma \to +0} \int_{\sigma}^{\pi:2} \psi(z) \operatorname{cotg} z \, dz \right| < 7\pi\varepsilon,$$

la quale disuguaglianza dimostra che il limite (2) esiste finito, ed uguale al limite (1) moltiplicato per π, vale a dire che la serie coniugata converge nel punto x_0 e che la sua somma è data (in virtù della (1) del n.° 117) dal limite (1) aumentato di $b_0 : 2$.

Se supponiamo, invece, che la serie coniugata sia convergente nel punto x_0, allora esiste finito il limite di I_n, per $n \to \infty$, e dalla (7) si trae

$$\left| \lim_{n \to \infty} I_n - \int_\sigma^{\pi:2} \psi(z) \operatorname{cotg} z \, dz \right| < 7\pi\varepsilon,$$

per tutti i σ sufficientemente piccoli; e ciò prova che esiste finito il limite

$$\lim_{\sigma \to +0} \int_\sigma^{\pi:2} \psi(z) \operatorname{cotg} z \, dz,$$

vale a dire, il limite (1).

119. — **Sommabilità col metodo della media aritmetica di Cesàro.**

J. Privaloff ha dimostrato (1) che la serie coniugata della serie di Fourier di una funzione $f(x)$, è sommabile, in quasi-tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$, col metodo della media aritmetica di Cesàro. Questo risultato fu generalizzato da A. Zygmund (2).

§ 6. Grado di approssimazione.

120. - **Limitazione del modulo delle somme parziali di una serie di Fourier.**

a) Se $f(x)$ è una funzione integrabile in $(0, 2\pi)$, e limitata, i moduli delle somme parziali $s_n(x)$ e $s_n^*(x)$, della serie di Fourier della $f(x)$ e della sua coniugata, in cui si ponga $b_0 = 0$, sono minori di

$$M(C_1 \log n + C_2), \tag{1}$$

dove M è il limite superiore del modulo della $f(x)$, e C_1, C_2 sono due costanti, indipendenti dalla $f(x)$ e da n (3).

---

(1) *L'integrale di Cauchy* (in russo), Saratoff, 1918, pp. 1-94.

(2) *Sur la sommation des séries trigonométriques conjuguées aux séries de Fourier.* (Bulletin Acad. Polonaise, 1924, pp, 251-258).

(3) Cfr. H. Lebesgue, loc. cit. in (4) a pag. 224; Ch.-J. de la Vallée Poussin, loc. cit. in (1) a pag. 186 (vedi, in particolare, pag. 21).

Nel teorema enunciato, intendiamo di considerare soltanto i valori di n maggiori di 0.

Dall' espressione della somma $s_n(x)$, data dalla formula (1) del n.° 100, abbiamo

$$|s_n(x)| < \frac{M}{\pi}\int_0^\pi \frac{\left|\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}z\right|}{\operatorname{sen}\frac{z}{2}}\,dz$$

e quindi, per la (3) del n.° 94,

$$|s_n(x)| < M(\log n + 1 + \log 2\pi).$$

Per la $s_n^*(x)$, abbiamo, dalla formula (2) del n.° 115,

$$|s_n^*(x)| < \frac{2M}{\pi}\int_0^\pi \frac{\left|\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}z\right|}{\operatorname{sen}\frac{z}{2}}\,dz,$$

e per la (3) del n.° 94,

$$|s_n^*(x)| < 2M(\log n + 1 + \log 2\pi).$$

ciò che dimostra completamente il teorema (¹).

b) Il valore dell' espressione (1) tende evidentemente all' infinito, per $n \to \infty$; però, se la funzione $f(x)$ è a variazione limitata in $(0, 2\pi)$, si può, per quanto riguarda $s_n(x)$, sostituire a (1) un' espressione che risulti indipendente da n. Dimostreremo, infatti, la seguente proposizione:

Se la $f(x)$, integrabile in $(0, 2\pi)$, è a variazione limitata in un intervallo (a, b) di $(0, 2\pi)$, e se (c, d) è un qualsiasi intervallo interno ad (a, b), esiste un numero finito L tale che sia

$$|s_n(x)| \leq L, \tag{2}$$

per ogni n e per ogni x di (c, d).

(¹) G. H. Hardy (*On the Summability of Fourier's Series.* Proc. Lond. Math. Soc., S. 2, Vol. 12 (1913), pp. 365-372) ha dimostrato che, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, è

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n(x)}{\log n} = 0.$$

Lo stesso può dirsi per $s_n^*(x)$. (W. H. Young, *On the Mode of Oscillation of a Fourier Series and of its Allied Series.* Proc. Lond. Math. Soc., S. 2, Vol. 12 (1913), pp. 433-452; F. Lukàcs, loc. cit. in (¹) a pag. 314).

Sia σ un numero positivo, minore tanto di $(c-a):2$ quanto di $(b-d):2$. Dalla (1') del n.° 100, abbiamo

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi:2}[f(x+2z)+f(x-2z)]\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}dz$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\sigma}\ldots. + \frac{1}{\pi}\int_{\sigma}^{\pi:2}\ldots.,$$

e l'ultimo degli integrali scritti resta, in modulo, inferiore a

$$\frac{1}{\pi \operatorname{sen}\sigma}\int_0^{\pi:2}[|f(x+2z)|+|f(x-2z)|]\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi \operatorname{sen}\sigma}\int_0^{2\pi}|f(z)|\,dz,$$

numero che non dipende nè da x nè da n.

Siccome, per ipotesi, la $f(x)$ è a variazione limitata in (a, b), possiamo scrivere, in (a, b), $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, con f_1 e f_2 funzioni non decrescenti e non negative. Allora, abbiamo

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\sigma} f(x+2z)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{\sigma}\frac{zf_1(x+2z)}{\operatorname{sen} z}\cdot\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z}dz$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\sigma}\frac{zf_2(x+2z)}{\operatorname{sen} z}\cdot\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z}dz$$

$$= \frac{\sigma}{\pi\operatorname{sen}\sigma}\left[f_1(x+2\sigma)\int_{\sigma'}^{\sigma}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z}dz - f_2(x+2\sigma)\int_{\sigma''}^{\sigma}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z}\right]dz$$

e quindi, per la (1) del n.° 103,

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\sigma} f(x+2z)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z}dz\right| < \frac{\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}[f_1(x+2\sigma)+f_2(x+2\sigma)]$$

$$< 2[f_1(b)+f_2(b)].$$

E siccome una disuguaglianza analoga vale se, invece di $f(x+2z)$, poniamo $f(x-2z)$, la (2) risulta dimostrata.

Osserviamo che, se la $f(x)$ è a variazione limitata in tutto $(0, 2\pi)$, la (2) vale pure in tutto $(0, 2\pi)$.

c) Dalla proposizione dimostrata in *a*), segue immediatamente:

Nelle ipotesi della proposizione a), e posto $R_n(x) = f(x) - s_n(x)$, *è, per ogni* x *di* $(0, 2\pi)$ *ed ogni* n,

$$|R_n(x)| < M(C_1 \log n + C_1'), \tag{3}$$

con C_1 *e* C_1' *costanti, indipendenti dalla* $f(x)$ *e da* n, *ed* $M =$ *limite superiore del modulo della* $f(x)$.

È, infatti,

$$|R_n| \leq |f| + |s_n|$$

e l'applicazione della proposizione *a*) dà, senz'altro, la (3).

121. — **Teoremi sul resto di una serie di Fourier.**

a) *Se* $f(x)$ *è una funzione periodica, di periodo* 2π, *avente ovunque le prime* r *derivate; se la sua derivata* r^{esima} *è integrabile in* $(0, 2\pi)$ *e resta in modulo sempre* $\leq M_r$; *allora il resto* $R_n(x)$, *(per* $n > 0$), *della serie di Fourier della* $f(x)$, *verifica ovunque la disuguaglianza*

$$|R_n(x)| < \frac{M_r}{n^r}(P \log n + Q), \tag{1}$$

P *e* Q *essendo due costanti indipendenti dalla* $f(x)$ *e da* n [1].

Osserviamo, in primo luogo, che, per quanto si è dimostrato nel n.° 110, la serie di Fourier della $f(x)$ converge ovunque uniformemente verso la $f(x)$. Scritta questa serie nella forma

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = \sum_0^\infty A_n,$$

avremo

$$R_n = \sum_{n+1}^\infty A_s.$$

---

[1] H. Lebesgue, loc. cit. in [4] a pag. 224; S. Bernstein, loc. cit. in [1] a pag. 252 (vedi, in particolare, pag. 92); Ch.-J. de la Vallée Poussin, loc. cit. in [1] a pag. 186 (vedi, in particolare, pag. 23); D. Jackson, *The approximate representation of an indefinite integral* ecc., (Trans. Amer. Math. Soc., Vol. XIV, (1913), pp. 343-364).

Supposto, come primo caso, r intero pari, e precisamente $r = 2k$, dalla formula

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha,$$

con r successive integrazioni per parti, otteniamo, per $n > 0$,

$$a_n = \frac{(-1)^k}{\pi n^r}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha,$$

e, analogamente,

$$b_n = \frac{(-1)^k}{\pi n^r}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(\alpha) \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha,$$

donde, indicando con $A_n^{(r)}$ il termine generale della serie di Fourier della derivata $f^{(r)}(x)$ [1],

$$R_n = (-1)^k \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{A_s^{(r)}}{s^r}.$$

Posto $\sigma_s = A_1^{(r)} + A_2^{(r)} + \dots + A_s^{(r)}$, la trasformazione di Brunacci-Abel dà

$$(-1)^k R_n = -\frac{\sigma_n}{(n+1)^r} + \sum_{s=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{s^r} - \frac{1}{(s+1)^r}\right)\sigma_r,$$

perchè, applicando il teorema del n.° 120, a), alla $f^{(r)}(x)$, si ha

(2) $$|\sigma_s| < M_r (C_1 \log s + C_2),$$

da cui

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\sigma_s}{s^r} = 0.$$

Dalla (2), segue anche

(3) $$|R_n| < \frac{M_r}{(n+1)^r}\{C_1 \log n + 2C_2\} + M_r C_1 \sum_{s=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{s^r} - \frac{1}{(s+1)^r}\right)\log s.$$

---

[1] Siccome $f^{(r-1)}(x)$ è periodica di periodo 2π, come la $f(x)$, è $A_0^{(r)} = 0$.

Ora è

$$\sum_{s=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{s^r}-\frac{1}{(s+1)^r}\right)\log s=\frac{\log(n+1)}{(n+1)^r}+\sum_{s=n+2}^{\infty}\frac{1}{s^r}\log\left(1+\frac{1}{s-1}\right)$$
$$<\frac{\log(n+1)}{(n+1)^r}+\sum_{s=n+2}^{\infty}\frac{1}{s^r(s-1)}\ (^1)$$
$$<\frac{\log(n+1)}{(n+1)^r}+\sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{1}{s^{r+1}}$$
$$<\frac{2+\log(n+1)}{(n+1)^r}\ (^2),$$

e perciò dalla (3) segue la (1).

Passiamo al caso di r dispari: $r=2k+1$. Procedendo come nel caso di r pari, ed indicando con $\bar{A}_n^{(r)}$ il termine generale della serie coniugata della serie di Fourier della $f^{(r)}(x)$, abbiamo

$$R_n=(-1)^k\sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{\bar{A}_s^{(r)}}{s^r};$$

e lo stesso ragionamento di dianzi, in cui si sostituisca $A_s^{(r)}$ con $\bar{A}_s^{(r)}$, conduce alla conclusione voluta.

b) Se $f(x)$ è una funzione periodica, di periodo 2π, avente un modulo di continuità $\omega(\delta)$ (³)*, posto $R_n(x)=f(x)-s_n(x)$ [$s_n(x)$ essendo la somma parziale della serie di Fourier della $f(x)$],*

(¹) È $\log\left(1+\frac{1}{s-1}\right)<\frac{1}{s-1}$, per $s>2$.

(²) È, infatti,

$$\sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{1}{s^{r+1}}<\frac{1}{(n+1)^{r+1}}\left\{\left[1+\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{r+1}+\dots+\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{r+1}\right]+\left[\left(\frac{n+1}{2(n+1)}\right)^{r+1}+\dots+\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{r+1}\right]+\dots\right\}$$
$$<\frac{1}{(n+1)^r}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{r+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{r+1}+\dots\right\}<\frac{1}{(n+1)^r}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\frac{2}{(n+1)^r}.$$

(³) V. pag. 224.

si ha

$$|R_n(x)| < (P \log n + Q)\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{4}$$

P e Q essendo due costanti indipendenti dalla $f(x)$ *e da* n [1].

Dividiamo l'intervallo $(0, 2\pi)$ in $2n$ parti uguali, ed inscriviamo nella curva $y = f(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$, la poligonale i cui vertici corrispondono ai punti della suddivisione operata, compresi 0, 2π. Sia $y = p(x)$ l'equazione di tale poligonale. Posto $\lambda = \pi : n$, in ogni intervallo $[k\lambda, (k+1)\lambda]$ (che corrisponde ad un lato della poligonale) è, per la definizione di modulo di continuità $\omega(\delta)$,

$$|f[(k+1)\lambda] - f(k\lambda)| \leq \omega(\lambda),$$

e perciò $|p'(x)| \leq \omega(\lambda) : \lambda$. Inoltre, e sempre sull'intervallo indicato, $p(x)$ essendo compreso fra $f(k\lambda)$ e $f[(k+1)\lambda]$, è

$$|f(x) - p(x)| \leq \omega(\lambda).$$

Se ora indichiamo con $R_n(x)$, $R_n'(x)$ e $R_n''(x)$ le differenze fra le tre funzioni $f(x)$, $p(x)$ e $f(x) - p(x)$ e le somme parziali delle rispettive serie di Fourier, abbiamo

$$f = p + (f - p),$$
$$R_n = R_n' + R_n'',$$

e, per il teorema dimostrato in a),

$$|R_n'| < \frac{\omega(\lambda)}{\lambda n}(P \log n + Q),$$

ed, inoltre, per il teorema a) del n.° 120,

$$|R_n''| < \omega(\lambda)(C_1 \log n + C_2);$$

---

[1] Ch.-J. de la Vallée Poussin, loc. cit. in [1] a pag. 186 (vedi, in particolare, pag. 25). H. Lebesgue, *Sur les intégrales singulières* (Ann. Faculté de Toulouse, 3ª s., t. I (1909), pp. 25-117). Vedi anche, per il principio della dimostrazione, D. Jackson, *Ueber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen ecc.* (Inaugural-Dissertation, Göttingen, 1911, pp. 1-98).

abbiamo dunque

$$|R_n| < \omega(\lambda)\left(\frac{1}{\lambda n}+1\right)(P'\log n + Q'),$$

con P' e Q' costanti, ossia

$$|R_n| < \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\frac{1}{\pi}+1\right)(P'\log n + Q'),$$

il che dimostra la (4).

Come corollario della proposizione ora dimostrata, si ha: *Se la $f(x)$ è periodica, di periodo 2π, e soddisfa ovunque alla condizione di Lipschitz generalizzata*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|^{\alpha},$$

con $\alpha > 0$, *è*

$$|R_n(x)| < (P\log n + Q)\frac{K\pi^{\alpha}}{n^{\alpha}} \text{ [1]}.$$

c) Se $f(x)$ è una funzione periodica, di periodo 2π, avente ovunque le prime r derivate, e se la derivata $f^{(r)}(x)$ ammette un modulo di continuità $\omega_r(\delta)$, si ha

$$(5) \qquad |R_n(x)| < \frac{1}{n^r}\,\omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right)(P\log n + Q),$$

P e Q essendo delle costanti indipendenti dalla $f(x)$ e da n [2].

Dividiamo, come in *b*), $(0, 2\pi)$ in $2n$ parti uguali, di lunghezza λ; inscriviamo nella curva $y = f^{(r)}(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$, una poligonale $y = p_r(x)$, i cui vertici abbiano per ascisse i punti $k\lambda$. Abbiamo, come in *b*),

$$|p_r'(x)| \leq \omega_r(\lambda):\lambda,$$
$$|f^{(r)}(x) - p_r(x)| \leq \omega_r(\lambda).$$

La funzione $p_r(x)$ è (n.° 110) sviluppabile in serie di Fourier

$$p_r(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \Sigma\,(\alpha_m \cos mx + \beta_m \operatorname{sen} mx),$$

---

(1) S. Bernstein, loc. cit. in (1) a pag. 252 (vedi, in particolare, pag. 92).

(2) Ch.-J. de la Vallée Poussin, loc. cit. in (1) a pag. 186 (vedi, in particolare, pag. 27); S. Bernstein, loc. cit. in (1) a pag. 252 (vedi, in particolare, pag. 92).

ovunque uniformemente convergente, la quale è, perciò, integrabile termine a termine. Integrando r volte di seguito, la serie $\Sigma(\alpha_m \cos mx + \beta_m \operatorname{sen} mx)$, prendendo sempre nulle le costanti di integrazione, otteniamo una funzione $\psi(x)$, periodica, di periodo 2π, avente le derivate fino all'ordine $r+1$, e tali che $\psi^{(r)}(x) = p_r(x) - \frac{1}{2}\alpha_0$, $\psi^{(r+1)}(x) = p_r'(x)$. È dunque

$$|\psi^{(r+1)}(x)| \leq \omega_r(\lambda):\lambda,$$
$$|[f(x) - \psi(x)]^{(r)}| = |f^{(r)} - p_r + \frac{1}{2}\alpha_0| \leq 2\omega_r(\lambda),$$

perchè è, per la periodicità della $f(x)$ e quindi della $f^{(r-1)}(x)$,

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p_r(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(p_r - f^{(r)})\, dx,$$
$$|\alpha_0| \leq 2\omega_r(\lambda).$$

Ragionando allora sulla $f(x)$ e sulla $\psi(x)$, come in *b*) si è fatto su $f(x)$ e $p(x)$, ed applicando il teorema dato in *a*), invece di quello del n.° 120, si giunge alla conclusione voluta.

122. - Grado d'approssimazione dei polinomi trigonometrici di Fejér.

Quando la funzione $f(x)$ non è derivabile, il grado di approssimazione dei polinomi trigonometrici di Fejér è migliore di quello delle somme parziali della serie di Fourier. Si ha, infatti, la seguente proposizione, dovuta a S. Bernstein [1].

Se la funzione $f(x)$, periodica, di periodo 2π, soddisfa ovunque alla condizione di Lipschitz generalizzata

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|^\alpha,$$

con $0 < \alpha < 1$, allora, indicando con $\sigma_n(x)$ il polinomio trigonometrico di Fejér relativo alla $f(x)$, si ha

$$(1) \qquad |f(x) - \sigma_n(x)| \leq \frac{KH}{n^\alpha};$$

---

[1] Loc. cit. in [1] a pag. 252 (vedi, in particolare, pag. 88).

se è, invece, $\alpha = 1$, si ha

$$(2) \qquad | f(x) - \sigma_n(x) | \leq \frac{K(H \log n + H_1)}{n},$$

H e H_1 essendo sempre delle costanti indipendenti dalla $f(x)$ e da n.

La prima parte di questo teorema è già stata dimostrata nel n.° 89.

Nel caso di $\alpha = 1$, la disuguaglianza (3) del n.° 89, dà

$$| f(x) - \sigma_n(x) | < \frac{K\pi}{n} \int_0^{\pi:2} \frac{\operatorname{sen}^2 nz}{z} dz$$

$$< \frac{K\pi}{n} \left[\int_0^{1:n} n^2 z \, dz + \int_{1:n}^{\pi:2} \frac{dz}{z} \right]$$

$$< \frac{K\pi}{n} \left[\frac{1}{2} + \log \frac{\pi}{2} + \log n \right],$$

il che dimostra la (2).

123. — Grado d'approssimazione dei polinomi trigonometrici d'approssimazione.

a) La migliore approssimazione μ_n, d'ordine n, cioè la migliore approssimazione di una funzione continua $f(x)$, in $(0, 2\pi)$, ottenuta mediante un polinomio trigonometrico d'ordine n, è data dal *polinomio trigonometrico di approssimazione, d'ordine n*, della $f(x)$, in $(0, 2\pi)$, che è stato definito nel n.° 65, e che, se la $f(x)$ è continua e periodica, è *unico* (n.° 68). Relativamente a μ_n si ha la seguente proposizione:

Se $f(x)$ è una funzione periodica, di periodo 2π, avente ovunque le prime r derivate, e se la derivata $f^{(r)}(x)$ ammette un modulo di continuità $\omega_r(\delta)$, si ha

$$\mu_n < \frac{P}{n^r} \omega_r \left(\frac{\pi}{n} \right),$$

con P costante indipendente dalla $f(x)$ e da n.

In particolare, se la $f^{(r)}(x)$ soddisfa alla condizione di Lipschitz generalizzata

$$| f^{(r)}(x_1) - f^{(r)}(x_2) | \leq K | x_1 - x_2 |^\alpha,$$

con $\alpha > 0$, *è*

$$\mu_n < \frac{P'K}{n^{r+\alpha}}$$

con P' *costante indipendente dalla* $f(x)$ *e da* n (¹).

b) È facile assegnare una limitazione inferiore per μ_n. Ed infatti, detta $s_n(x)$ la somma parziale della serie di Fourier della funzione continua $f(x)$, ed indicato con $T_n(x)$ il corrispondente polinomio trigonometrico di approssimazione, d'ordine n, della $f(x)$ in $(0, 2\pi)$, si ha, in virtù di quanto fu stabilito nel n.º 56,

$$\int_0^{2\pi} (f - T_n)^2 dx \geq \int_0^{2\pi} (f - s_n)^2 \, dx,$$

donde, per la formula di Parseval (n.º 83),

$$\int_0^{2\pi} (f - T_n)^2 dx \geq \pi \sum_{n+1}^{\infty} (a_r^2 + b_r^2).$$

Ma è, d'altra parte,

$$\int_0^{2\pi} (f - T_n)^2 dx \leq \mu_n^2 \int_0^{2\pi} dx = 2\pi\mu_n^2,$$

e perciò

$$\mu_n \geq \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n+1}^{\infty} (a_r^2 + b_r^2) \right\}^{1:2} \text{(²)}.$$

c) Un'altra limitazione inferiore di μ_n si può avere mediante l'approssimazione data da $s_n(x)$. Possiamo, infatti, dimostrare con Lebesgue (³) che:

Se φ_n *è l'approssimazione della funzione continua* $f(x)$ *data*

(¹) D. Jackson, loc. cit. in (¹) a pag. 325 e *On approximation by trigonometric sums and polynomials.* (Trans. Am. Math. Soc., Vol. XIII (1912), pp. 491-515); S. Bernstein, loc. cit. in (¹) a pag. 252; Ch.-J. de la Vallée Poussin, loc. cit. in (¹) a pag. 186 (vedi in particolare, pp. 51 e 52).

(²) S. Bernstein, loc. cit. in (¹) a pag. 252.

(³) H. Lebesgue, loc. cit. in (¹) a pag. 325.

dalla somma parziale $s_n(x)$ della sua serie di Fourier, è

$$\mu_n > \varphi_n : (P \log n + Q),$$

P e Q essendo delle costanti, indipendenti dalla $f(x)$ e da n.

Considerato il polinomio trigonometrico d'approssimazione $T_n(x)$, d'ordine n, della $f(x)$ in $(0, 2\pi)$, possiamo scrivere

$$|f - s_n| = |(f - T_n) - (s_n - T_n)|;$$

e siccome $s_n - T_n$ non è altro che la somma parziale, d'ordine n, della serie di Fourier della differenza $f - T_n$, la quale è, in modulo, $\leq \mu_n$, ne viene, per il teorema del n.° 120, a),

$$|f - s_n| < \mu_n(C_1 \log n + C_1'),$$

in tutto $(0, 2\pi)$. Ma, per qualche x di $(0, 2\pi)$, è $|f - s_n| = \varphi_n$; dunque

$$\varphi_n < \mu_n(C_1 \log n + C_1'),$$

che è quanto dovevamo dimostrare.

CAPITOLO VI.

OPERAZIONI SULLE SERIE DI FOURIER

§ 1. ADDIZIONE E MOLTIPLICAZIONE.

124. - L'operazione di addizione.

a) Se $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono funzioni integrabili in* $(0, 2\pi)$, *e se indichiamo con* a_n *e* b_n *i coefficienti di Eulero-Fourier della prima, e con* α_n *e* β_n *quelli della seconda, i coefficienti di Eulero-Fourier della funzione* $c_1 f(x) + c_2 g(x)$, *dove* c_1 *e* c_2 *sono delle costanti, sono dati da*

$$c_1 a_n + c_2 \alpha_n, \quad c_1 b_n + c_2 \beta_n.$$

La proposizione è evidente, perchè i coefficienti di Eulero-Fourier della funzione $c_1 f + c_2 g$ sono dati dalle espressioni

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(c_1 f + c_2 g)\cos n\alpha\, d\alpha, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(c_1 f + c_2 g)\,\mathrm{sen}\, n\alpha\, d\alpha.$$

Aggiungiamo che, se in un punto x le serie di Fourier della f e della g sono entrambe convergenti, in tale punto è convergente anche la serie Fourier della somma $c_1 f + c_2 g$.

b) Se $f_m(x)$ *è una funzione integrabile in* $(0, 2\pi)$ *e se la serie* $\sum_1^\infty f_m(x)$ *è uniformemente convergente in tutto* $(0, 2\pi)$, *i coefficienti di Eulero-Fourier,* a_n *e* b_n, *della somma della serie* $\sum_1^\infty f_m(x)$ *sono dati da*

$$a_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_n^{(m)}, \quad b_n = \sum_{m=1}^{\infty} b_n^{(m)},$$

dove $a_n^{(m)}$ *e* $b_n^{(m)}$ *indicano i coefficienti di Eulero-Fourier della funzione* $f_m(x)$.

Ed infatti, essendo

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_1^\infty f_m(x)\right)\cos nx\,dx,$$

si ha, per la convergenza uniforme della serie scritta,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \int_0^{2\pi} f_m(x)\cos nx\,dx = \sum_{m=1}^\infty a_n^{(m)}\,;$$

ed analogamente per b_n.

OSSERVAZIONE. — Il teorema ora dimostrato vale anche se si sostituisce l'ipotesi che la serie $\Sigma\, f_m(x)$ sia uniformemente convergente, con l'altra che tale serie sia convergente in quasi-tutto $(0, 2\pi)$ e che, per un determinato numero M, sia

$$\left|\sum_1^p f_m(x)\right| < M,$$

qualunque sia p e per tutti gli x di $(0, 2\pi)$, o, più generalmente, che la serie $\Sigma\, f_m(x)$ sia convergente, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, e che soddisfi alle condizioni di uno dei noti teoremi di integrazione per serie che derivano da quello fondamentale del Vitali.

125. – Teorema di Parseval.

a) Per studiare la moltiplicazione delle serie di Fourier, occorre il seguente teorema, che costituisce una generalizzazione della formula di Parseval del n.° 83:

Se $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono due funzioni integrabili, insieme con i loro quadrati, in* $(0, 2\pi)$, *indicati con* a_n *e* b_n *i coefficienti di Eulero-Fourier della prima e con* α_n *e* β_n *quelli della seconda, le serie* $\Sigma\, a_n\alpha_n$ e $\Sigma\, b_n\beta_n$ *sono assolutamente convergenti, ed è*

$$(1)\qquad \frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n\alpha_n + b_n\beta_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \quad (^1).$$

---

(1) V. lavori citati in (1) a pag. 231.

Dall'ammessa integrabilità di f^2 e g^2, segue, per il risultato di Bessel del n.° 81, che le serie Σa_n^2, Σb_n^2, $\Sigma \alpha_n^2$ e $\Sigma \beta_n^2$ sono tutte convergenti. E siccome si ha

$$|a_n\alpha_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + \alpha_n^2), \quad |b_n\beta_n| \leq \frac{1}{2}(b_n^2 + \beta_n^2),$$

segue anche l'assoluta convergenza delle serie $\Sigma a_n\alpha_n$ e $\Sigma b_n\beta_n$.

Applicando ora la formula di Parseval, del n.° 83, alla funzione $f + g$, abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f+g)^2 dx &= \frac{1}{2}(a_0+\alpha_0)^2 + \sum_1^\infty \{(a_n+\alpha_n)^2 + (b_n+\beta_n)^2\} \\ &= \left\{\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2+b_n^2)\right\} + \left\{\frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_1^\infty(\alpha_n^2+\beta_n^2)\right\} \\ &\quad + 2\left\{\frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_1^\infty(a_n\alpha_n + b_n\beta_n)\right\}.\end{aligned}$$

Di qui, sviluppando il quadrato che figura sotto il segno di integrale, applicando la formula di Parseval alle funzioni f e g, e riducendo, si ottiene la (1).

b) *L'uguaglianza* (1) *vale anche nell'ipotesi che, in* $(0, 2\pi)$, *la funzione* $f(x)$ *sia soltanto integrabile e la* $g(x)$ *sia a variazione limitata* (¹).

Ed infatti, indicata con $\bar{s}_n(x)$ la somma parziale d'ordine n della serie di Fourier della $g(x)$,

$$\bar{s}_n(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_1^n(\alpha_r \cos rx + \beta_r \operatorname{sen} rx),$$

in virtù del criterio di convergenza di Dirichlet-Jordan (n.° 103), si ha $\bar{s}_n(x) \to g(x)$, per $n \to \infty$, in tutti i punti di continuità della $g(x)$ (i punti 0 e 2π, al più, esclusi) e quindi in quasi-tutto $(0, 2\pi)$. Inoltre, per la proposizione del n.° 120, *b*), esiste un numero L tale che sia, per ogni x di $(0, 2\pi)$, ed ogni n, $|\bar{s}_n(x)| < L$. È perciò, in tutto $(0, 2\pi)$ e per ogni n,

$$|f(x)\,\bar{s}_n(x)| \leq L\,|f(x)|,$$

(¹) W. H. Young, *On the Integration of Fourier series.* (Proc. Lon. Math. Soc., Vol. 9 (1911), pp. 449-462).

donde, per un noto teorema di integrazione per serie,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} f(x)\, \bar{s}_n(x)\, dx = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx.$$

D' altra parte, è

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, \bar{s}_n(x)\, dx = \frac{1}{2} \alpha_0 \int_0^{2\pi} f(x)\, dx + \sum_1^n \left\{ \alpha_r \int_0^{2\pi} f(x) \cos rx\, dx + \right.$$

$$\left. + \beta_r \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} rx\, dx \right\}$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} a_0 \alpha_0 + \sum_1^n \{ a_r \alpha_r + b_r \beta_r \} \right].$$

La (1) è dunque provata.

c) L' uguaglianza (1) *vale anche nell' ipotesi che, per un numero* $p \geq 1$, *in* $(0, 2\pi)$ *siano integrabili* $|f|^{1+p}$ *e* $|g|^{1+\frac{1}{p}}$ (¹). Questo teorema è dovuto a M. Riesz (²).

d) Se la funzione $f(x)$ *è integrabile in* $(0, 2\pi)$ *e se, in tale intervallo, la* $g(x)$ *è quasi-continua e limitata, la serie del primo membro della* (1) *è sommabile* $(C, 1)$, *cioè col metodo della media aritmetica di Cesàro, e la sua somma generalizzata* $s^{(1)}$ *è uguale al secondo membro della* (1) (³).

Ed infatti, considerato il polinomio trigonometrico di Fejér $\bar{\sigma}_n(x)$, relativo alla $g(x)$, che possiamo scrivere nella forma

$$\bar{\sigma}_n(x) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \left(1 - \frac{r}{n}\right) (\alpha_r \cos rx + \beta_r \operatorname{sen} rx),$$

abbiamo

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi} f(x) \bar{\sigma}_n(x) dx = \pi \left[\frac{1}{2} a_0 \alpha_0 + \sum_1^n \left(1 - \frac{r}{n}\right) \{ a_r \alpha_r + b_r \beta_r \} \right].$$

E siccome, per l' ipotesi che la $g(x)$ sia limitata, si ha, per un

(¹) In questo caso, il prodotto fg risulta integrabile in $(0, 2\pi)$, in forza del n.° 84, *a*).

(²) Loc. cit. in (¹) a pag. 309.

(³) W. H. Young, loc. cit. in (¹) a pag. 333.

certo L, in tutto $(0, 2\pi)$, $|g(x)| \leq L$ e quindi (n.º 58, Osserv.) $|\bar{\sigma}_n(x)| \leq L$, segue, come in *b*), in virtù del n.º 62,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\bar{\sigma}_n(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx. \tag{3}$$

Pertanto, il secondo membro della (2) ha limite finito, per $n\to\infty$, il che significa che il primo membro della (1) è sommabile $(C, 1)$, e che la sua somma generalizzata è data, per (2) e (3), dal secondo membro della (1) stessa.

126. - L'operazione di moltiplicazione.

a) *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni integrabili insieme con i loro quadrati, in $(0, 2\pi)$, indicati con a_n e b_n i coefficienti di Eulero-Fourier della $f(x)$, con α_n e β_n quelli della $g(x)$ e con $\bar{a}_n$ e $\bar{b}_n$ quelli del prodotto $f(x)g(x)$, si ha:*

$$\tag{1}\left\{\begin{aligned} \bar{a}_0 &= \frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_{r=1}^{\infty}(a_r\alpha_r + b_r\beta_r),\\ \bar{a}_n &= \frac{1}{2}a_0\alpha_n + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\{a_r(\alpha_{n+r} + \alpha_{n-r}) + b_r(\beta_{n+r} - \beta_{n-r})\},\\ \bar{b}_n &= \frac{1}{2}a_0\beta_n + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\{a_r(\beta_{n+r} + \beta_{n-r}) - b_r(\alpha_{n+r} - \alpha_{n-r})\},\end{aligned}\right.$$

(dove intendiamo che sia $\alpha_{-k} = \alpha_k$, $\beta_{-k} = -\beta_k$), e le serie qui scritte sono assolutamente convergenti [1].

Poichè è

$$\bar{a}_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} fg\,dx,$$

il teorema *a*) del n.º preced. dimostra la prima delle (1) nonchè l'assoluta convergenza della serie

$$\Sigma(a_r\alpha_r + b_r\beta_r).$$

Per dimostrare la seconda delle (1), osserviamo che i coefficienti di Eulero-Fourier d'indice r del prodotto $g(x)\cos nx$

---

[1] A. Hurwitz, *Ueber die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen.* (Math. Ann., Bd. 57 (1903), pp. 425-446); H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, pag. 98.

sono dati dalle espressioni

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos nx \cos rx\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} g(x)\cos(n+r)x\, dx + \int_0^{2\pi} g(x)\cos(n-r)x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_{n+r} + \alpha_{n-r}),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos nx \operatorname{sen} rx\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} g(x)\operatorname{sen}(n+r)x\, dx - \int_0^{2\pi} g(x)\operatorname{sen}(n-r)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\beta_{n+r} - \beta_{n-r}).$$

Se dunque applichiamo il teorema a) del n.° preced. al prodotto delle funzioni $f(x)$ e $g(x)\cos nx$, otteniamo come espressione di

$$\bar{a}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} fg \cos nx\, dx,$$

il 2° membro della seconda delle (1); e le serie $\Sigma a_r(\alpha_{n+r} + \alpha_{n-r})$ e $\Sigma b_r(\beta_{n+r} - \beta_{n-r})$ risultano assolutamente convergenti.

Infine, osservando che i coefficienti di Eulero-Fourier della funzione $g(x)\operatorname{sen} nx$ sono dati da

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\operatorname{sen} nx \cos rx\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} g(x)\operatorname{sen}(n+r)x\, dx + \int_0^{2\pi} g(x)\operatorname{sen}(n-r)x dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\beta_{n+r} + \beta_{n-r}),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} rx\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} g(x)\cos(n-r)x dx - \int_0^{2\pi} g(x)\cos(n+r)x dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_{n-r} - \alpha_{n+r}),$$

ed applicando il teorema a) del n.° 125 al prodotto di $f(x)$ per $g(x)\operatorname{sen} nx$, si ha la terza delle (1), e le serie $\Sigma a_r(\beta_{n+r} + \beta_{n-r})$ e $\Sigma b_r(\alpha_{n+r} - \alpha_{n-r})$ risultano anch'esse assolutamente convergenti.

b) In virtù di quanto si è detto nel n.° preced., in *b*) e *c*), possiamo affermare che:

Le (1) *valgono anche se, in* $(0, 2\pi)$, *la* $f(x)$ *è soltanto integra-*

bile e la $g(x)$ *è a variazione-limitata, ed anche se per un* $p \geq 1$, *in* $(0, 2\pi)$, *risultano integrabili* $|f|^{1+p}$ *e* $|g|^{1+\frac{1}{p}}$.

Nell'ipotesi che la $f(x)$ sia soltanto iutegrabile e la $g(x)$ quasi-continua e limitata, i secondi membri delle (1) risultano sommabili col metodo della media aritmetica di Cesàro, ed hanno per somme generalizzate i rispettivi primi membri. Ciò è conseguenza di quanto si è provato nel n.° preced. *d*).

127. - Convergenza della serie di Fourier del prodotto di due funzioni.

Se $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono due funzioni integrabili, in* $(0, 2\pi)$, *insieme col loro prodotto* $f(x)g(x)$, *e se, per un dato punto* x_0 *di* $(0, 2\pi)$, *è integrabile anche il prodotto*

$$f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \quad (1)$$ [1],

allora: — se è $g(x_0) \neq 0$, *la serie di Fourier del prodotto* $f(x)g(x)$ *e quella della* $f(x)$ *sono, nel punto* x_0, *ambedue convergenti, o divergenti od indeterminate; — se è, invece,* $g(x_0)=0$, *la serie di Fourier di* $f(x)g(x)$ *converge, in* x_0, *verso lo zero, qualunque sia il comportamento della serie di Fourier della* $f(x)$.

Consideriamo, infatti, la differenza Δ_n fra la somma parziale, di ordine n, della serie di Fourier di $f(x)\,g(x)$, nel punto x_0, e la corrispondente somma parziale della serie di Fourier del prodotto $f(x)g(x_0)$. È, per la (1) del n.° 100,

$$\Delta_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)g(\alpha)\,\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(x_0-\alpha)}{\operatorname{sen}\frac{x_0-\alpha}{2}}\,d\alpha$$

$$-\frac{g(x_0)}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(x_0-\alpha)}{\operatorname{sen}\frac{x_0-\alpha}{2}}\,d\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\frac{g(\alpha)-g(x_0)}{\alpha-x_0}\cdot\frac{\alpha-x_0}{2\operatorname{sen}\frac{x_0-\alpha}{2}}\cdot\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(x_0-\alpha)\,d\alpha.$$

---

[1] Le $f(x)$ e $g(x)$ vanno considerate definite anche fuori di $(0, 2\pi)$, mediante la periodicità, di periodo 2π.

Siccome, per ipotesi, l'espressione (1) è integrabile, possiamo scrivere

$$\Delta_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\alpha) \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(x_0 - \alpha)\,d\alpha,$$

con $\psi(\alpha)$ funzione integrabile, e quindi anche

$$\Delta_n = \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x_0 \int_0^{2\pi} \psi(\alpha) \cos \frac{2n+1}{2} \alpha\, d\alpha$$

$$- \frac{1}{2\pi} \cos \frac{2n+1}{2} x_0 \int_0^{2\pi} \psi(\alpha) \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} \alpha\, d\alpha.$$

Di qui, per $n \to \infty$, segue, in virtù della proposizione del n.° 76, $\Delta_n \to 0$; e perciò i due termini che con la loro differenza definiscono Δ_n hanno insieme limite finito, oppure limite infinito, oppure non hanno limite nè l'uno nè l'altro. E ciò basta a provare la proposizione enunciata.

Osservazione. — Il prodotto (1) risulta sicuramente integrabile se, in un intorno del punto x_0:

— la $f(x)$ è limitata ed il rapporto $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ è integrabile [1];

— oppure, il rapporto $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ è limitato [2].

§ 2. Integrazione.

128. - Integrazione delle serie di Fourier.

Sia $f(x)$ una funzione integrabile in $(0, 2\pi)$. Definiamola in tutto $(-\infty, +\infty)$ mediante la periodicità, di periodo 2π,

---

[1] Questo caso fu considerato da H. Steinhaus (*Sur le développement du produit de deux fonctions en une série de Fourier*. Bulletin de l'Acad. de Cracovie, 1913, pp. 113-116). Un caso più particolare era già stato considerato da Lebesgue (*Leçons sur les séries trigonométriques*, pag. 125).

[2] Sulla moltiplicazione delle serie trigonometriche, cfr.: A. Rajchman, *O Riemannowskiej zasadzie umiejscowienia* (Rendiconti della Soc. Scientif. di Varsavia, Vol. 11 (1918), pp. 115-152); A. Zygmund, loc. cit. in [1] a pag. 85.

e consideriamo la sua serie di Fourier

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Consideriamo poi, per un qualsiasi valore di x, la funzione

$$F(x) = \int_0^x \left\{ f(x) - \frac{1}{2} a_0 \right\} dx.$$

Questa funzione è ovunque continua ed a variazione limitata; inoltre, è periodica e di periodo 2π. Infatti, essendo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

dalla periodicità della funzione $f(x) - \frac{1}{2} a_0$, segue

$$\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \left\{ f(x) - \frac{1}{2} a_0 \right\} dx = \int_0^{2\pi} \left\{ f(x) - \frac{1}{2} a_0 \right\} = 0,$$

e perciò

$$\ldots. F(-2\pi) = 0, \quad F(0) = 0, \quad F(2\pi) = 0, \quad F(4\pi) = 0, \ldots.$$

Dunque, in virtù del criterio di Dirichlet-Jordan (n.[i] 103 e 110), la serie di Fourier della $F(x)$ converge ovunque uniformemente verso la $F(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \operatorname{sen} nx). \tag{1}$$

Ora, integrando per parti, si ottiene, per $n > 0$,

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos nx \, dx = -\frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = -\frac{b_n}{n},$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{a_n}{n}.$$

Per ottenere α_0, poniamo $x=0$ nella (1): abbiamo

$$0=\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_1^\infty \alpha_n,$$

e perciò

$$\alpha_0=2\sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{n} \quad (1). \tag{2}$$

È dunque, sostituendo in (1),

$$F(x)=\sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^\infty\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\operatorname{sen} nx\right),$$

ed anche, ponendo per $F(x)$ il suo valore,

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{n}+\frac{1}{2}a_0x+\sum_{n=1}^\infty\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\operatorname{sen} nx\right), \tag{3}$$

e la seconda serie qui scritta è ovunque uniformemente convergente. Scrivendo l'uguaglianza precedente nella forma

$$\int_0^x f(x)dx=\frac{1}{2}a_0x+\sum_1^\infty\left\{-\frac{b_n}{n}(\cos nx-1)+\frac{a_n}{n}\operatorname{sen} nx\right\}, \tag{4}$$

vediamo che il suo secondo membro non è altro che la serie che si ottiene integrando termine a termine, sull'intervallo $(0, x)$, la serie di Fourier della $f(x)$.

Dalla (4) segue anche, se (c, d) è un qualsiasi intervallo finito,

$$\int_c^d f(x)dx=\frac{1}{2}a_0(d-c)+\sum_1^\infty\left(\frac{a_n}{n}\operatorname{sen} nd-\frac{b_n}{n}\cos nd\right)$$
$$-\sum_1^\infty\left(\frac{a_n}{n}\operatorname{sen} nc-\frac{b_n}{n}\cos nc\right),$$

e possiamo concludere col seguente teorema:

Integrando termine a termine, su un qualunque intervallo,

---

(1) La (2) dimostra nuovamente la convergenza della serie $\Sigma\frac{b_n}{n}$, che abbiamo già stabilita nel n.° 87.

la serie di Fourier

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{5}$$

di una funzione $f(x)$ (*integrabile e periodica, di periodo* 2π), *si ottiene l'integrale della* $f(x)$ *sull'intervallo considerato. Se uno degli estremi dell'intervallo d'integrazione è variabile, la serie ottenuta è ovunque uniformemente convergente; ed è pure ovunque uniformemente convergente la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\operatorname{sen} nx - \frac{b_n}{n}\cos nx\right). \tag{6}$$

Questo teorema, nella forma generale qui data, è dovuto a H. Lebesgue (1).

OSSERVAZIONE I. — Dalla (3) segue che, se la (5) è una serie di Fourier, la (6) converge ovunque verso una funzione assolutamente continua. Viceversa, *se la* (6) *converge ovunque verso una funzione assolutamente continua* $\Phi(x)$, *la* (5) *è una serie di Fourier* (2). Ed infatti, per il teorema di Du Bois Reymond-Lebesgue del n.° 37, dall'ipotesi fatta segue che la (6) è la serie di Fourier della $\Phi(x)$. È dunque, per $n > 0$,

$$\frac{a_n}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\Phi'(x)\cos nx\,dx,$$

$$\frac{b_n}{n} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\Phi'(x)\operatorname{sen} nx\,dx,$$

e

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\Phi'(x) + \frac{1}{2}a_0\right\}dx,$$

e perciò la (5) è la serie di Fourier della somma $\Phi'(x) + (a_0 : 2)$.

---

(1) Loc. cit. in (2) a pag. 17.

Su quanto riguarda il presente n.° ed il n.° seguente, vedi anche U. DINI, *Sugli sviluppi in serie per la rappresentazione analitica delle funzioni ecc.*, 1911.

(2) W. H. YOUNG, *On the conditions that a trigonometrical series should have the Fourier form.* (Proc. London Math. Soc., S. 2, Vol. 9 (1911), pp. 421-433).

OSSERVAZIONE II. — Dal teorema qui dimostrato si deduce che *ogni serie di Fourier è, in quasi-tutto* $(0, 2\pi)$, *sommabile col procedimento di Riemann del n.° 27, ed ha per somma generalizzata la funzione* $f(x)$ *generatrice della serie di Fourier* [1]. Ed infatti, integrando la (3), si ha

$$-\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx}{n^2}=\int_0^x dx\int_0^x f(x)dx + c_1 + c_2 x - \frac{1}{4}a_0 x^2\,;$$

e siccome il secondo membro ha, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, per derivata seconda $f(x)-\frac{1}{2}a_0$, la somma generalizzata di Riemann della (5) esiste finita ed uguale a $f(x)$ in quasi-tutto $(0, 2\pi)$.

Questo risultato può anche dedursi dal teorema di Lebesgue sulla somma di Fejér, del n.° 62, mediante la seguente proposizione, dovuta ad A. Rajchman e A. Zygmund [2]:

Ogni serie sommabile col metodo della media aritmetica di Cesàro [*sommabile* $(C, 1)$] *è anche sommabile col procedimento di Riemann del n.° 27, e le due somme ottenute sono uguali.*

OSSERVAZIONE III. — Come altra conseguenza del teorema d'integrazione dimostrato in questo n.°, abbiamo che il teorema di Riemann, del n.° 101, sul comportamento di una serie di Fourier, in un dato punto, è un semplice corollario di quello, pure dovuto a Riemann, del n.° 24, *b*).

Ed infatti, in un qualunque intorno $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ di un punto x_0, possiamo scrivere, per la (3), integrando,

$$-\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx}{n^2}=\int_{x_0-\delta}^x dx\int_{x_0-\delta}^x f(x)dx + c'_1 + c'_2 x - \frac{1}{4}a_0 x^2,$$

e questa uguaglianza giustifica completamente la nostra asserzione.

---

(1) H. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*, pag. 92.

(2) *Sur la relation du procédé de sommation de Cesàro et celui de Riemann.* (Bulletin de l'Acad. Polonaise des Sciences et des Lettres, 1925. pp. 69-80).

129. - Integrazione di una serie di Fourier moltiplicata per una funzione.

Sia

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{1}$$

la serie di Fourier di una funzione $f(x)$, *integrabile e periodica, di periodo* 2π; *sia poi* $g(x)$ *un' altra funzione, data ed integrabile su un intervallo* (c, d) (¹). *Se una delle due funzioni* $f(x)$ *e* $g(x)$ *è a variazione limitata, oppure se entrambe le* $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono a quadrato integrabile, la prima in* $(0, 2\pi)$ *e la seconda in* (c, d), *allora è, per ogni* x *di* (c, d),

$$\begin{aligned}\int_c^x f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0\int_c^x g(x)dx + \Sigma \Big\{ a_n \int_c^x g(x) \cos nx\,dx \\ + b_n \int_c^x g(x) \operatorname{sen} nx\,dx \Big\},\end{aligned} \tag{2}$$

la serie del secondo membro convergendo uniformemente in tutto (c, d) (²).

Indichiamo con $s_n(x)$ la somma parziale della serie (1). La (2) sarà dimostrata se noi proveremo che l'integrale

$$\int_c^x g(x)s_n(x)\,dx, \tag{3}$$

per $n \to \infty$, converge uniformemente, in (c, d), verso l'integrale

$$\int_c^x g(x)f(x)\,dx. \tag{4}$$

Supponiamo, in primo luogo, che la $f(x)$ sia a variazione limitata in $(0, 2\pi)$. Allora è, n.° 120, b), per ogni n ed ogni x, $|s_n(x)| < L$, e perciò $|g(x)s_n(x)| < L\,|g(x)|$, donde, per un noto teorema d'integrazione per serie, segue la convergenza uniforme di (3) a (4).

(¹) L'intervallo (c, d) *non* è necessariamente contenuto in $(0, 2\pi)$.

(²) Cfr. loc. cit. in (¹) a pag. 333.

Supponiamo ora che, in (c, d), sia a variazione limitata la $g(x)$. In questa ipotesi, possiamo scrivere $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$, con $g_1(x)$ $g_2(x)$ funzioni non negative e non crescenti, in tutto (c, d). Abbiamo, pertanto, applicando il secondo teorema della media,

$$\left| \int_c^x g(x) f(x)\, dx - \int_c^x g(x) s_n(x)\, dx \right|$$

$$< \left| \int_c^x g_1(x) \{ f(x) - s_n(x) \} dx - \int_c^x g_2(x) \{ f(x) - s_n(x) \} dx \right|$$

$$< \left| g_1(c) \int_c^{x'} \{ f(x) - s_n(x) \} dx - g_2(c) \int_c^{x''} \{ f(x) - s_n(x) \} dx \right|,$$

e siccome, per $n \to \infty$, i due ultimi integrali tendono uniformemente a zero, in virtù del teorema d'integrazione delle serie di Fourier del n.° 128, la convergenza uniforme di (3) a (4) è provata.

Veniamo, infine, all'ipotesi che la $f(x)$ e la $g(x)$ siano entrambe a quadrato integrabile. È, allora,

$$\left| \int_c^x g(x) f(x)\, dx - \int_c^x g(x) s_n(x)\, dx \right| < \int_c^x | g(x) | \, | f(x) - s_n(x) | \, dx$$

$$\leq \left\{ \left(\int_c^x g^2\, dx \right) \left(\int_c^x (f - s_n)^2\, dx \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left\{ \left(\int_c^d g^2\, dx \right) \left(\int_c^d (f - s_n)^2\, dx \right) \right\}^{\frac{1}{2}};$$

e siccome, per $n \to \infty$, l'ultimo integrale scritto tende a zero (n.° 83), il teorema enunciato è provato.

Osservazione. — Analogamente alla proposizione del n.° 125, *c*), si ha che il teorema ora dimostrato vale anche se, sulle $f(x)$ e $g(x)$, si fà soltanto l'ipotesi che, per due numeri interi positivi p e q, tali che $(1:p) + (1:q) = 1$, $|f(x)|^p$ e $|g(x)|^q$ siano integrabili, rispettivamente in $(0, 2\pi)$ e (c, d).

130. - Integrazione di una serie di Fourier, su un insieme di punti.

a) Se $f(x)$ *è una funzione integrabile, insieme col suo quadrato, in* $(0, 2\pi)$, *il suo integrale, su un qualsiasi pseudo-*

intervallo (1) *E di* $(0, 2\pi)$, *si ottiene integrando termine a termine, su E, la sua serie di Fourier.*

Questa proposizione è una conseguenza immediata di quella del n.° precedente. Ed infatti, ponendo $g(x)=1$ su E, e $g(x)=0$ fuori di E, si ha una funzione ovunque a quadrato integrabile, e la proposizione del n.° preced. prova senz' altro quanto abbiamo affermato.

Per l' Osservazione posta alla fine del n.° preced., possiamo pure dire che il teorema qui stabilito vale anche se la $f(x)$, invece di essere a quadrato integrabile, è soltanto tale che risulti integrabile $|f(x)|^p$ per un $p > 1$.

b) Se la $f(x)$, *periodica, di periodo* 2π, *è, in* $(0, 2\pi)$, *a quadrato integrabile, oppure a variazione limitata, e se* $g(x)$ *è una funzione data su uno pseudointervallo E, ed ivi, rispettivamente, a quadrato integrabile oppure semplicemente integrabile, è*

$$\int_E f(x)g(x)dx = \frac{1}{2} a_0 \int_E g(x)dx + \sum_1^\infty \left\{ a_n \int_E g(x) \cos nx \, dx + b_n \int_E g(x) \operatorname{sen} nx \, dx \right\},$$

dove a_n *e* b_n *sono i coefficienti di Eulero-Fourier della* $f(x)$.

Anche questa proposizione segue, come corollario, da quella del n.° preced. Basta considerare un intervallo (c, d) contenente E e porre $g(x)=0$ nei punti di (c, d) che non appartengono ad E.

131. - Integrazione di una serie trigonometrica qualunque. Teorema di Lusin.

a) Se la serie trigonometrica (2)

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{1}$$

è convergente, per ogni x di un intervallo (a, b), *con somma* $s(x)$ *integrabile in* (a, b), *l' integrale della* $s(x)$, *su un qualsiasi*

---

(1) Cfr. L. Tonelli, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. I, pag. 122. Dicesi *pseudo-intervallo* un insieme di punti, lineare, E, tale che, per esso, esista almeno una legge la quale faccia corrispondere, ad ogni intero positivo n, un componente chiuso $C^{(n)}$ di E ed una successione $D^{(n)}$ di intervalli, non nulli, non sovrapponentisi e ricoprenti interamente E, in modo che la differenza fra le lunghezze degli intervalli equivalenti a $D^{(n)}$ e $C^{(n)}$ sia minore di $1:n$.

(2) Non necessariamente una serie di Fourier.

intervallo (a', b') *interno ad* (a, b) $(a < a' < b' < b)$, *si ottiene integrando termine a termine la* (1), *su* (a', b').

Questo teorema è dovuto a N. Lusin [1].

Consideriamo la funzione

$$F(x) = -A_1 - \frac{A_2}{2^2} - \dots - \frac{A_n}{n^2} - \dots, \tag{2}$$

con

$$A_n = a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

Siccome, per ipotesi, la (1) converge in tutto (a, b), dal teorema di Cantor del n.º 2, segue $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, per $n \to \infty$. Perciò, la serie (2) è ovunque assolutamente ed uniformemente convergente, e la $F(x)$ è una funzione continua e periodica, di periodo 2π.

Consideriamo, inoltre, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos nx + a_n \operatorname{sen} nx}{n}. \tag{3}$$

Questa nuova serie, avendo i suoi coefficienti d'ordine n minori in modulo di $c:n$, dove c è una costante indipendente da n, è, per il teorema del n.º 19, *b*), e per quello del n.º 92, *a*), convergente in quasi-tutto $(-\infty, +\infty)$ verso una funzione $\varphi(x)$, integrabile insieme col suo quadrato, su ogni intervallo finito, della quale funzione la (3) è la serie di Fourier. Abbiamo dunque, per ogni x di (a, b), in virtù del teorema d'integrazione delle serie di Fourier del n.º 128,

$$\int_a^x \varphi(x)dx = -\sum_1^{\infty} \frac{b_n \operatorname{sen} nx + a_n \cos nx}{n^2} + \sum_1^{\infty} \frac{b_n \operatorname{sen} na + a_n \cos na}{n^2}$$
$$= F(x) + \sum_1^{\infty} \frac{b_n \operatorname{sen} na + a_n \cos na}{n^2},$$

donde, in quasi-tutto (a, b), $\varphi(x) = F'(x)$.

D'altra parte, essendo la (1) convergente, per ogni x di (a, b), verso la $s(x)$, la $s(x) - \frac{1}{2} a_0$ è, in (a, b), la derivata seconda gene-

---

[1] N. Lusin, *Sur la notion de l'intégrale.* (Annali di Matematica, T. XXVI (1916), pp. 77-129).

ralizzata della $F(x)$ (in forza del teorema di Riemann del n.° 27) e pertanto, dal teorema del n.° 38, *b*), segue, in tutto (a, b),

$$F(x) = \int_a^x dx \int_a^x \left\{ s(x) - \frac{1}{2} a_0 \right\} dx + px + q.$$

Questa uguaglianza mostra che la $F(x)$ ha ovunque, in (a, b), derivata continua ed a variazione limitata:

$$F'(x) = \int_a^x \left\{ s(x) - \frac{1}{2} a_0 \right\} dx + p.$$

Dunque, essendo, come si è detto, $\varphi(x) = F'(x)$ in quasi-tutto (a, b), la (3) è la serie di Fourier della funzione uguale a $\varphi(x)$ fuori di (a, b) ed uguale a $F'(x)$ in (a, b), e tale serie, per il criterio di Dirichlet-Jordan del n.° 103, è convergente, in ogni punto interno ad (a, b), verso $F'(x)$. Si ha così

$$\text{(4)} \qquad \int_a^x \left\{ s(x) - \frac{1}{2} a_0 \right\} dx + p = \sum_1^\infty \frac{-b_n \cos nx + a_n \operatorname{sen} nx}{n},$$

in ogni punto x interno ad (a, b). Inoltre, la convergenza della serie ora scritta è uniforme in ogni intervallo (a', b') interno ad (a, b). Facendo, in (4), prima $x = b'$ e poi $x = a'$, e sottraendo membro a membro, si ottiene

$$\int_{a'}^{b'} s(x)\, dx = \frac{a_0}{2}(b' - a') + \sum_1^\infty \int_{a'}^{b'} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)\, dx,$$

che è quanto dovevamo provare.

Osservazione. — Rileviamo che, per quanto si è detto, sotto le condizioni del teorema dimostrato, le serie

$$\text{(5)} \qquad \sum_1^\infty \left(\frac{a_n}{n} \operatorname{sen} nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right),$$

$$\text{(6)} \qquad \sum_1^\infty \int_{a'}^x (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)\, dx$$

convergono uniformemente in tutto (a', b').

b) Dal ragionamento ora fatto segue che il teorema dimostrato sussiste anche se la convergenza della serie (1) viene a mancare in un insieme numerabile di punti di (a, b).

c) Più generalmente, abbiamo:

Se la serie trigonometrica (1) *ha i coefficienti* a_n *e* b_n *tendenti a zero, per* $n \to \infty$;

se essa, sommata col procedimento di Riemann del n.° 27, ha, nell'intervallo (a, b), *dei limiti d'indeterminazione che risultano ambedue infiniti ed uguali soltanto in un insieme di punti E, al più numerabile, e se il maggiore di questi limiti è sempre* $\geq$ *ad una funzione* $\psi(x)$, *finita in ogni punto non appartenente ad E ed integrabile in* (a, b);

allora l'integrale della somma generalizzata di Riemann della (1), *su un qualsiasi intervallo* (a', b'), *interno ad* (a, b), *si ottiene integrando termine a termine la* (1) *su* (a', b').

Ed infatti, da quanto si è provato nel n.° 39, *b*), la somma generalizzata di Riemann della (1) esiste finita in quasi-tutto (a, b), ed essa è integrabile in ogni intervallo (a'', b'') interno ad (a, b). Supposto allora $a < a'' < a'$, $b' < b'' < b$, il ragionamento fatto in *a*) (quando in esso si sostituisca (a, b) con (a'', b''), e la $s(x)$ con la somma generalizzata di Riemann) prova senz'altro la proposizione enunciata.

d) *Se la serie trigonometrica* (1) *è convergente per ogni* x *di un intervallo* (a, b), *con somma* $s(x)$ *integrabile in* (a, b); *se* $g(x)$ *è una funzione assolutamente continua nell'intervallo detto; se* (a', b') *è un intervallo interno ad* (a, b); *allora, per ogni* x *di* (a', b'), *si ha*

$$\int_{a'}^{x} s(x)g(x)dx = \frac{1}{2}a_0\int_{a'}^{x} g(x)dx + \sum_{1}^{\infty}\left(a_n\int_{a'}^{x} g(x)\cos nx\,dx + b_n\int_{a'}^{x} g(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx\right),$$

la convergenza della serie scritta essendo uniforme in tutto (a', b').

È infatti, integrando per parti, per ogni x di (a', b'),

$$\int_{a'}^{x} s(x)g(x)dx = g(x)\int_{a'}^{x} s(x)dx - \int_{a'}^{x} g'(x)\left(\int_{a'}^{x} s(x)dx\right)dx,$$

ed applicando il teorema *a*),

$$\int_{a'}^{x} s(x)g(x)dx = g(x)\left[\frac{1}{2}a_0(x - a') + \sum_1^\infty \int_{a'}^{x} \{a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\} dx\right]$$

$$-\left[\frac{1}{2}a_0 \int_{a'}^{x} (x - a')g'(x)dx + \sum_1^\infty \int_{a'}^{x} g'(x)\left(\int_{a'}^{x} \{a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\} dx\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}a_0 \int_{a'}^{x} g(x)dx + \sum_1^\infty \left\{ a_n \int_{a'}^{x} g(x) \cos nx\, dx + b_n \int_{a'}^{x} g(x) \operatorname{sen} nx\, dx \right\}.$$

Da questa proposizione si possono avere generalizzazioni analoghe a quelle date in *b*) e *c*), per la proposizione *a*).

OSSERVAZIONE. — *I risultati ottenuti nel n.° presente dànno la piena giustificazione dell'integrazione termine a termine eseguita da Fourier per determinare i coefficienti dello sviluppo in serie trigonometrica della funzione $f(x)$ (ammesso che tale sviluppo esista e che la $f(x)$ sia finita ed integrabile).*

§ 3. DERIVAZIONE.

132. - Derivazione della serie di Fourier di una funzione assolutamente continua.

a) *Supposta la funzione $f(x)$ assolutamente continua in* $(0, 2\pi)$, *la condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie ottenuta derivando termine a termine la serie di Fourier della $f(x)$ sia la serie di Fourier della derivata $f'(x)$, è che sia* $f(0) = f(2\pi)$ (¹).

Siccome la $f(x)$ è supposta assolutamente continua in $(0, 2\pi)$, la derivata $f'(x)$ esiste finita in quasi-tutto l'intervallo indicato,

---

(¹) Per questa proposizione ed anche per le altre del presente n.°, vedi: LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*, pp. 103-104. Vedi anche U. DINI, loc. cit. in (¹) a pag. 341.

e tale derivata risulta integrabile. Siano allora

$$(1) \qquad \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

$$(2) \qquad \frac{1}{2} a_0' + \sum_1^\infty (a_n' \cos nx + b_n' \operatorname{sen} nx),$$

le serie di Fourier delle $f(x)$ e $f'(x)$. Applicando alla $f'(x)$ la formula (3) del n.° 128, otteniamo

$$f(x) = f(0) + \sum_1^\infty \frac{b_n'}{n} + \frac{1}{2} a_0' x + \sum_1^\infty \left\{ -\frac{b_n'}{n} \cos nx + \frac{a_n'}{n} \operatorname{sen} nx \right\},$$

e l'ultima serie scritta è ovunque uniformemente convergente. Come abbiamo veduto nel n.° 46, lo sviluppo in serie di Fourier della funzione data dalla x, in $(0, 2\pi)$, è

$$\pi - 2\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \dots\right),$$

e questa serie converge uniformemente verso la x in ogni intervallo interno a $(0, 2\pi)$. Perciò lo sviluppo in serie di Fourier della $f(x)$ è dato da

$$f(x) = \left\{ \frac{\pi}{2} a_0' + f(0) + \sum_1^\infty \frac{b_n'}{n} \right\} + \sum_1^\infty \left\{ -\frac{b_n'}{n} \cos nx + \frac{a_n' - a_0'}{n} \operatorname{sen} nx \right\},$$

e l'uguaglianza è valida per ogni x di $(0, 2\pi)$, esclusi 0 e 2π. È dunque, per $n > 0$,

$$(3) \qquad a_n = -\frac{b_n'}{n}, \quad b_n = \frac{a_n' - a_0'}{n}.$$

Ora, la serie che si ottiene derivando termine a termine la (1) è data da

$$\sum_1^\infty (-n a_n \operatorname{sen} nx + n b_n \cos nx),$$

ossia, per le (3), da

$$(4) \qquad \sum_1^\infty \{ (a_n' - a_0') \cos nx + b_n' \operatorname{sen} nx \},$$

e siccome è

$$(5) \qquad a_0' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\{f(2\pi) - f(0)\},$$

si vede che, se è $f(0) = f(2\pi)$, l'ultima serie scritta coincide con la (2), vale a dire è precisamente la serie di Fourier della $f'(x)$. Viceversa, se la (4) deve coincidere con la (2), deve essere $a_0' = 0$ e perciò $f(0) = f(2\pi)$. E così è dimostrato completamente il teorema enunciato.

b) Se la $f(x)$ *è assolutamente continua in* $(0, 2\pi)$, *con* $f(0) \neq f(2\pi)$, *la serie che si ottiene derivando termine a termine la sua serie di Fourier, non è una serie di Fourier.*

Ed infatti, la serie che si ottiene derivando termine a termine la (1) è la (4), dove, per essere $f(0) \neq f(2\pi)$ ed in virtù della (5), è $a_0' \neq 0$. E siccome la (2) è la serie di Fourier della $f'(x)$, si ha, per il teorema di Riemann-Lebesgue del n.° 77, $a_n' \to 0$, e quindi $a_n' - a_0' \to a_0' \neq 0$. Dunque, sempre per il teorema di Riemann-Lebesgue citato, la (4) non è una serie di Fourier.

Di più, *nelle ipotesi sopra poste, la serie che si ottiene derivando termine a termine la serie di Fourier della* $f(x)$ *è non convergente in quasi-tutto* $(0, 2\pi)$. Ciò in virtù della $a_n' - a_0' \to a_0' \neq 0$ e del teorema di Lebesgue del n.° 3.

c) Se la $f(x)$ *è assolutamente continua, la serie ottenuta derivando termine a termine la sua serie di Fourier, è, in quasi-tutto* $(0, 2\pi)$, *sommabile col metodo della media aritmetica di Cesàro [sommabile* $(C, 1)$*], con somma generalizzata uguale a* $f'(x)$.

Ed infatti, la serie

$$\sum_1^\infty a_0' \cos nx = a_0' \sum_1^\infty \cos nx$$

è sommabile $(C, 1)$, perchè, avendosi (n.° 11)

$$s_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}},$$

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_{n-1}(x)}{n} = \frac{1}{2n\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\sum_0^{n-1}\operatorname{sen}\frac{2r+1}{2}x$$

$$= \left(\operatorname{sen}^2\frac{n}{2}x\right) : \left(2n\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right),$$

è, per $x \neq 0$ e $\neq 2\pi$, $\sigma_n(x) \to 0$, quando $n \to \infty$; perciò la somma generalizzata $(C, 1)$ della serie $\Sigma \cos nx$ è data da $-1:2$, per $x \neq 0$ e $\neq 2\pi$. E siccome la serie (2) è, secondo il teorema di Lebesgue del n.° 62, sommabile $(C, 1)$ ed ha per somma generalizzata $f'(x)$, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, ne viene che anche la (4) è sommabile $(C, 1)$ con somma generalizzata $f'(x)$, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, e precisamente là dove è sommabile $(C, 1)$ la (2), eccettuati, al più, i punti 0 e 2π.

In particolare, se x_0 è un punto in cui la derivata $f'(x)$ esiste finita, e se, in tutto un intorno di x_0, tale derivata è limitata [1], la serie delle derivate dei termini della (1) è, in x_0, sommabile $(C, 1)$, con somma generalizzata uguale a $f'(x_0)$. Ciò segue da quanto si è detto nell'Osserv. I del n.° 62.

Consideriamo, ad esempio, la serie di Fourier della funzione assolutamente continua e periodica, data in $(-\pi, \pi)$ da $f(x) = x^2$: tale serie è (n.° 45)

$$\frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right).$$

Derivando termine a termine, si ha la serie

$$4\left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ldots\right), \tag{6}$$

che è ovunque convergente e che, nell'interno di $(-\pi, \pi)$, ha per somma $2x$ (n.° 44), la quale è precisamente la derivata della funzione $f(x) = x^2$. Inoltre, la (6) è la serie di Fourier di questa derivata.

Consideriamo ora la funzione assolutamente continua, ma non periodica, data in $(0, 2\pi)$ da $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$: la sua serie di Fourier è (n.° 44)

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \ldots,$$

la quale, derivata termine a termine, dà

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots, \tag{7}$$

e questa serie è sempre non convergente (n.° 1), e non è la serie di Fourier della derivata della funzione $\frac{1}{2}(\pi - x)$, che è $-\frac{1}{2}$. Secondo quanto abbiamo dimostrato in *c*), la (7) risulta sommabile $(C, 1)$, e con somma $-\frac{1}{2}$, in ogni punto interno a $(0, 2\pi)$.

---

[1] Se x_0 coincidesse con un estremo di $(0, 2\pi)$, la $f(x)$ si dovrebbe considerare definita anche fuori di tale intervallo, mediante la periodicità, di periodo 2π.

Così, anche la funzione data, nell'interno di $(0, 2\pi)$, da $\log\left(2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right)$ ha la serie di Fourier (n.° 75)

$$-\left(\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots\right),$$

che dà, per derivazione termine a termine,

$$\mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,2x + \mathrm{sen}\,3x + \dots, \tag{8}$$

la quale, in $(0, 2\pi)$, converge soltanto nei punti 0, π e 2π (n.° 1). Anche la (8) non è la serie di Fourier della derivata di $\log\left(2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right)$; essa ha però per somma $(C, 1)$ tale derivata, in tutti i punti interni a $(0, 2\pi)$.

Da quanto ora si è detto, segue che la serie geometrica $\sum_0^\infty z^n$ è sommabile $(C, 1)$ su tutta la circonferenza $|z| = 1$, escluso il punto $z = 1$, e con somma generalizzata $\frac{1}{1-z}$.

133. - Derivazione della serie di Fourier di una funzione integrabile qualsiasi.

a) Abbiamo veduto nel n.° precedente che la serie ottenuta derivando termine a termine una serie di Fourier è, in generale, non convergente. Conviene dunque occuparci, senz'altro, della sommabilità generalizzata.

A questo proposito, dimostriamo il seguente teorema:

La sommabilità $(C, 1)$, *della serie ottenuta derivando termine a termine la serie di Fourier di una funzione* $f(x)$, *è una proprietà locale, vale a dire, dipende unicamente dal comportamento della* $f(x)$ *nell'intorno del punto considerato.*

Ed infatti, se

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n\,\mathrm{sen}\,nx) \tag{1}$$

è la serie di Fourier della $f(x)$, derivando termine a termine otteniamo la serie

$$\sum_1^\infty n(-a_n\,\mathrm{sen}\,nx + b_n \cos nx). \tag{2}$$

Indicato con $\sigma_n(x)$ il polinomio di Fejér, d'ordine $n-1$, relativo alla $f(x)$, la derivata $\sigma_n'(x)$, moltiplicata per il fattore $\frac{n}{n-1}$ (che tende ad 1, per $n \to \infty$), rappresenta la media aritmetica delle prime $n-1$ somme parziali della (2). Ora è (n.° 58)

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\left(\frac{\operatorname{sen} n\frac{x-\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2}}\right)^2 d\alpha$$

e perciò

$$\sigma_n'(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} n\frac{x-\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2}}\left\{\frac{n\cos n\frac{x-\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2}}-\frac{\operatorname{sen} n\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x-\alpha}{2}}\right\}d$$

ossia, posto $\psi(z)=f(x+2z)-f(x-2z)$,

$$\sigma_n'(x)=\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi:2}\psi(z)\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\left\{-\frac{n\cos nz}{\operatorname{sen} z}+\frac{\operatorname{sen} nz\cos z}{\operatorname{sen}^2 z}\right\}dz. \tag{3}$$

E se è $0<\delta<\pi:2$, la parte dell'integrale qui scritto che corrisponde all'intervallo $(\delta, \pi:2)$, vale a dire

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{\pi:2}\frac{\psi(z)}{\operatorname{sen}^2 z}\operatorname{sen} 2nz\,dz+\frac{1}{\pi n}\int_\delta^{\pi:2}\psi(z)\frac{\cos z}{\operatorname{sen}^3 z}\operatorname{sen}^2 nz\,dz, \tag{4}$$

tende a zero per $n\to\infty$ [1]. Dunque la sommabilità $(C, 1)$ della (2) (nonchè la sua somma generalizzata) dipende esclusivamente dal comportamento della $f(x)$ nell'intorno del punto x considerato.

b) Dalla proposizione precedente e da quanto abbiamo dimostrato nel n.° 132, *c*), segue che, se la funzione $f(x)$, integrabile in tutto $(0, 2\pi)$ (e periodica, di periodo 2π), è assolutamente continua in un intorno $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ di un punto x_0, in quasi-tutto tale intorno la serie, ottenuta derivando termine

---

[1] Il primo termine di (4) tende a zero, per il teorema del n.° 76; il secondo pure, perchè il suo integrale resta, in modulo, inferiore a

$$\int_\delta^{\pi:2}\frac{|\psi(z)|}{\operatorname{sen}^3 z}dz.$$

a termine la serie di Fourier della $f(x)$, è sommabile $(C, 1)$, con somma $f'(x)$. Segue pure che, se in x_0 esiste finita la $f'(x_0)$, e se in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ la $f'(x)$ è limitata, in x_0 la serie detta è sommabile $(C, 1)$, con somma $f'(x_0)$ [1].

c) Supponiamo che, nel punto x, esista finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = D. \tag{5}$$

Allora, riprendendo l'uguaglianza (3), possiamo porre

$$\frac{\psi(z)}{\operatorname{sen} z} = 4D + \varepsilon(z),$$

con $\varepsilon(z) \to 0$, per $z \to 0$, e scrivere

$$\begin{aligned} \sigma_n'(x) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi:2} \{ 4D + \varepsilon(z) \} \frac{\operatorname{sen} 2nz}{\operatorname{sen} z}\, dz \\ &\quad + \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi:2} \{ 4D + \varepsilon(z) \} \cos z \left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz \\ &= -I_n^{(1)} + I_n^{(2)}. \end{aligned}$$

L'integrale $I_n^{(2)}$ è del tipo dell'integrale (5) del n.º 58; e siccome, per $z \to 0$, si ha $\{4D + \varepsilon(z)\} \cos z \to 4D$, possiamo asserire, in virtù di quanto abbiamo detto nell'Osservaz. I del n.º 59, che, per $n \to \infty$, è $I_n^{(2)} \to 2D$.

Per quanto riguarda $I_n^{(1)}$, abbiamo:

$$\frac{1}{n}\left\{ I_1^{(1)} + I_2^{(1)} + \dots + I_n^{(1)} \right\} = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\pi:2} \{4D + \varepsilon(z)\} \frac{\sum_1^n \operatorname{sen} 2rz}{\operatorname{sen} z}\, dz,$$

e, per la (3) del n.º 11,

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\pi:2} \{4D + \varepsilon(z)\} \cos z \left(\frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{sen} z}\right)^2 dz + \frac{1}{4\pi n}\int_0^{\pi:2} \{4D + \varepsilon(z)\} \frac{\operatorname{sen} 2nz}{\operatorname{sen} z}\, dz.$$

---

[1] W. H. Young, *Les séries trigonométriques et les moyennes de Cesàro*. (Comptes rendus, t. 163 (1916), pp. 427-430).

Per $n \to \infty$, l'ultimo integrale scritto tende a zero [1]; il penultimo integrale, invece, essendo uguale a $I_n^{(2)}: 2$, tende a D. Abbiamo, perciò,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \{ \sigma_1'(x) + \sigma_2'(x) + ... + \sigma_n'(x) \} = D,$$

vale a dire, la serie (2) è sommabile col metodo della media aritmetica di rango 2 (n.° 63), e quindi è sommabile $(C, 2)$ ed ha per somma generalizzata il limite D. Dunque:

Se nel punto x, esiste finito il limite (5) [*in particolare, se esiste finita la $f'(x)$*], *la serie dedotta, per derivazione termine a termine, dalla serie di Fourier della $f(x)$, è sommabile $(C, 2)$ ed ha per somma generalizzata il limite* (5) [*oppure, rispettivamente, la $f'(x)$*].

Come corollario, abbiamo: *Se in un punto x esiste finita la derivata $f'(x)$, e se in tal punto la serie* (2) *è convergente* [*oppure sommabile $(C, 1)$*] *la sua somma è data dalla $f'(x)$.*

Questi risultati, dovuti a Fejér [2], sono stati generalizzati da T. H. Gronwall [3], il quale ha dimostrato che, *se la derivata $f^{(r)}(x)$ esiste finita nel punto x, la serie* (2) *è sommabile $(C, r+1)$, con somma $f^{(r)}(x)$* [4].

---

(1) È infatti,

$$\frac{1}{4\pi n} \left| \int_0^{\pi:2} 4D \frac{\operatorname{sen} 2nz}{\operatorname{sen} z} dz \right| < \frac{|D|}{\pi n} \int_0^{\pi:2n} \frac{\operatorname{sen} 2nz}{\operatorname{sen} z} dz < \frac{2|D|}{\pi} \int_0^{\pi:2n} \frac{z}{\operatorname{sen} z} dz < \frac{\pi}{2n} |D|;$$

inoltre, preso un $\eta > 0$, ad arbitrio, e determinato $\delta > 0$ in modo che, per $0 < z \leq \delta$, sia $|\varepsilon(z)| < \eta$, si ha

$$\left| \frac{1}{4\pi n} \int_0^{\pi:2} \varepsilon(z) \frac{\operatorname{sen} 2nz}{\operatorname{sen} z} dz \right| < \frac{\eta}{4\pi n} \int_0^{\delta} \left| \frac{\operatorname{sen} 2nz}{\operatorname{sen} z} \right| dz + \frac{1}{4\pi n \operatorname{sen} \delta} \int_\delta^{\pi:2} |\varepsilon(z)| \, dz$$

$$< \frac{\eta\delta}{4} + \frac{1}{4\pi n \operatorname{sen} \delta} \int_0^{\pi:2} |\varepsilon(z)| \, dz.$$

(2) Loc. cit. in (2) a pag. 167.

(3) *Sur quelques méthodes de sommation et leur application à la série de Fourier.* (Comptes rendus, t. 158 (1914), pp. 1664-1665). Il Gronwall ha considerato anche il caso dell'esistenza della *derivata generalizzata* di ordine r.

(4) Sulla sommabilità della serie (2), vedi anche: Ch.-J. de la Vallée Poussin, *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle etc.* (Bulletin de l'Acad. royale de Belgique, 1908, pp. 193-254); W. H. Young,

134. - Derivazione di una serie trigonometrica qualunque. I teoremi dati nel n.° 131, sull'integrazione termine a termine di una qualsiasi serie trigonometrica, dànno altrettanti teoremi di derivazione. Qui ci limiteremo a mettere in evidenza soltanto il seguente caso particolarissimo:

Sia data la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{1}$$

e si supponga che, derivandola termine a termine, la serie dedotta

$$\sum_1^\infty (-na_n \operatorname{sen} nx + nb_n \cos nx) \tag{2}$$

sia uniformemente convergente in un intervallo (a, b). *Allora la serie* (1) *è anch'essa uniformemente convergente in tutto* (a, b) *e la sua somma ha ivi per derivata la somma della serie dedotta.*

Ed infatti, per un noto teorema d'integrazione per serie, si ha, per ogni x di (a, b),

$$\int_a^x \Sigma(-na_n \operatorname{sen} nx + nb_n \cos nx)\,dx = \Sigma\{a_n(\cos nx - \cos na) + b_n(\operatorname{sen} nx - \operatorname{sen} na)\}, \tag{3}$$

e la serie del secondo membro converge uniformemente in tutto (a, b). Ma, se x è interno ad (a, b), da quanto si è detto nell'Osserv. del n.° 131, segue la convergenza di $\Sigma(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$; è dunque convergente anche $\Sigma(a_n \cos na + b_n \operatorname{sen} na)$, e la serie precedente converge uniformemente in tutto (a, b). Può scriversi, perciò,

$$\int_a^x \Sigma(-na_n \operatorname{sen} nx + nb_n \cos nx)\,dx = \Sigma(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) - \Sigma(a_n \cos na + b_n \operatorname{sen} na), \tag{4}$$

donde, derivando, segue che la (2) è la derivata della (1).

On the usual convergence of a class of trigonometrical series. (Proc. London Math. Soc., S. 2, Vol. 13 (1913), pp. 13-28); I. Priwaloff, *Sur la dérivation des séries de Fourier.* (Rend. Circ. Matem., Palermo, t. XLI (1916), pp. 202-206); A. Zygmund, *Sur la dérivation des séries de Fourier.* (Bull. Acad. Polonaise des Sciences et des Lettres, 1924, pp. 243-249).

Si può anche ragionare indipendentemente da quanto si è detto nel n.° 131, osservando che, per il teorema di Cantor del n.° 2, dalla convergenza della (2) in (a, b) segue $na_n \to 0$, $nb_n \to 0$, e perciò (n.° 19, b)) la (1) converge in quasi-tutto (a, b). Scegliendo un punto x in cui la (1) converge, dalla (3) segue la convergenza di $\Sigma(a_n \cos na + b_n \operatorname{sen} na)$. Vale dunque la (4), e la (2) è la derivata della (1).

CAPITOLO VII.

SINGOLARITÀ DELLE SERIE DI FOURIER

§ 1. SINGOLARITÀ DELLE SERIE DI FOURIER DELLE FUNZIONI CONTINUE.

135. - Proprietà di alcuni speciali polinomi trigonometrici. Per dare esempi di alcune singolarità che possono presentare le serie di Fourier delle funzioni continue, ci occorre stabilire alcune proprietà di certi polinomi trigonometrici [1].

a) Premettiamo che, data una serie qualunque (eventualmente la somma di un numero finito di termini), diremo *porzione* di tale serie la somma di un numero finito qualsiasi di termini consecutivi della serie medesima. Detto ciò, dimostriamo la seguente proposizione:

Se ε *è un numero positivo, minore di* π, *si può determinare un numero positivo* $L(\varepsilon)$ *tale che, qualunque siano i numeri interi e positivi* m *ed* n, *tutte le porzioni dei polinomi trigonometrici*

(1) $$\sum_{r=1}^{n} \frac{\cos(m \pm r)x}{r}, \quad \sum_{r=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(m \pm r)x}{r},$$

---

[1] Il metodo che seguiremo in tutto il presente paragrafo è simile a quello dato da L. FEJÉR (*Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe.* Journal f. Math., Bd. 137 (1909), pp. 1-5; *Eine stetige Funktion deren Fourier-sche Reihe divergiert.* Rend. Circ. Matem., Palermo, t. XXVIII (1909), pp. 402-404; *Lebesgue-sche Konstanten und divergente Fourierreihen.* Journal f. Math., Bd. 138 (1910), pp. 22-53; *Sur les singularité de la série de Fourier des fonctions continues.* Ann. École Norm. Sup. T. 28 (1911), pp. 63-103) e fu indicato da DE LA VALLÉE POUSSIN. (*Cours d'Analyse,* T. II, 2ème édit.).

risultino in modulo sempre minori di $L(\varepsilon)$, *in tutto l'intervallo* $(\varepsilon,\ 2\pi - \varepsilon)$.

Moltiplicando, per l'unità immaginaria i, la prima delle (1) ed aggiungendo poi la seconda, otteniamo

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{e^{i(m \pm r)x}}{r} = e^{imx} \sum_{r=1}^{n} \frac{e^{\pm irx}}{r};$$

perciò il modulo di ciascuna porzione di una qualunque delle (1) è minore od uguale al modulo della corrispondente porzione della somma

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{e^{\pm irx}}{r}. \tag{2}$$

Ma, applicando la trasformazione di Brunacci-Abel a questa somma, e ponendo $\sigma_s = \sum_{r=1}^{s} e^{\pm irx}$, abbiamo

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{e^{\pm irx}}{r} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\sigma_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\sigma_2 + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\sigma_{n-1} + \frac{1}{n}\sigma_n;$$

e poichè è

$$\sigma_s = \frac{e^{\pm ix}(e^{\pm isx} - 1)}{e^{\pm ix} - 1} = \frac{e^{\pm ix}(e^{\pm isx} - 1)}{\pm 2ie^{\pm \frac{ix}{2}} \operatorname{sen} \frac{x}{2}} = \pm \frac{e^{\pm \frac{ix}{2}}(e^{\pm isx} - 1)}{2i \operatorname{sen} \frac{x}{2}},$$

donde

$$|\sigma_s| \leq \left| \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \right|,$$

si ha, in tutto l'intervallo $(\varepsilon,\ 2\pi - \varepsilon)$,

$$|\sigma_s| \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2}},$$

e perciò, pure in tutto $(\varepsilon,\ 2\pi - \varepsilon)$,

$$\left| \sum_{r=1}^{n} \frac{e^{\pm irx}}{r} \right| \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2}}.$$

La nostra proposizione è dunque dimostrata prendendo per $L(\varepsilon)$ un qualunque numero maggiore di $1 : \operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{2}$.

b) Per $x = 0$, *la somma* $\sum_{r=1}^{n} \frac{\cos(m \pm r)x}{r}$ *è maggiore di* $\log n$ *(logaritmo naturale).*

Ed infatti, questa somma, per $x = 0$, si riduce a

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} > \sum_{r=1}^{n} \int_{r}^{r+1} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1).$$

c) Se è $n < m$, *per* $x = \frac{\pi}{4m}$ *la somma* $\sum_{r=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(m \pm r)x}{r}$ *è maggiore di* $\frac{1}{2}(\log n - 1)$.

Ed infatti, poichè nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ si ha $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$, la somma scritta diventa per $x = \frac{\pi}{4m}$,

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(m \pm r)\frac{\pi}{4m}}{r} > \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} \frac{m \pm r}{rm} = \frac{1}{2}\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} \pm \frac{n}{m}\right) > \frac{1}{2}(\log n - 1).$$

136. - Singolarità di P. Du Bois-Reymond.

P. Du Bois Reymond ha dimostrato [1] che *esistono delle funzioni continue in tutto l'intervallo* $(-\infty, +\infty)$, *e periodiche, di periodo* 2π, *per le quali le corrispondenti serie di Fourier non sono sempre convergenti.*

Seguendo il De la Vallée Poussin, costruiremo una funzione ovunque continua, e periodica, di periodo 2π, la cui serie di Fourier converge dappertutto, tranne nei punti congrui a zero, rispetto al modulo 2π.

Posto

$$\varphi(x, n) = 2\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \dots + \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right).$$

---

[1] *Untersuchungen ueber die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln.* (Abh. Akad. München, Bd. XII (1876), pp. 1-103).

dal n.° 52 sappiamo che esiste un numero L tale che sia

(1) $$|\varphi(x, n)| < L,$$

per tutti gli interi positivi n e per tutti gli x di $(0, 2\pi)$. Supponendo m intero e maggiore di n, consideriamo la funzione $\varphi(x, n) \operatorname{sen} mx$. Tenendo presente la relazione $2 \operatorname{sen} rx \operatorname{sen} mx = \cos(m - r)x - \cos(m + r)x$, abbiamo

(2) $$\varphi(x, n) \operatorname{sen} mx = \sum_{r=n}^{1} \frac{\cos(m - r)x}{r} - \sum_{r=1}^{n} \frac{\cos(m + r)x}{r}$$

dove l'espressione del secondo membro rappresenta esattamente lo sviluppo in serie di Fourier del primo membro, senza alcuna alterazione nell'ordine dei termini di questa serie.

Consideriamo ora una qualsiasi serie convergente, a termini costanti e positivi, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, e con essa consideriamo anche due successioni di numeri interi, crescenti,

$$\begin{array}{llll} b_1, & b_2, \ldots, & b_n, \ldots, \\ c_1, & c_2, \ldots, & c_n, \ldots, \end{array}$$

tali che sia sempre $b_n < c_n$, e formiamo la funzione

(3) $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(x, b_n) \operatorname{sen}(c_n x).$$

Per la (1), la serie dei moduli dei termini di questa serie è minore di $L \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, e la serie medesima risulta perciò assolutamente ed uniformemente convergente in tutto $(0, 2\pi)$, ed anche in tutto $(-\infty, +\infty)$, essendo i termini della serie delle funzioni continue, periodiche, di periodo 2π. La $f(x)$ è, così, periodica, di periodo 2π, ed ovunque continua. Di più, poichè la serie di Fourier del termine generale del secondo membro di (3) è data dal secondo membro di (2) (ove si ponga $n = b_n$ e $m = c_n$) moltiplicato per la costante a_n, e poichè dalla convergenza uniforme della serie che esprime $f(x)$ segue, per il teorema del n.° 124, b), che i coefficienti di Eulero-Fourier della $f(x)$ sono dati dalle serie dei coefficienti corrispondenti di $a_n \varphi(x, b_n) \operatorname{sen}(c_n x)$, ne viene che, se le costanti c_n sono scelte in modo che gli sviluppi di Fourier di due diversi elementi $a_n\varphi(x, b_n)$ sen $(c_n x)$ non abbiano termini simili, ciascun coefficiente di Eulero-Fourier di $a_n\varphi(x, b_n)$ sen $(c_n x)$ è un coefficiente dello sviluppo di Fourier di $f(x)$, e tutti i coefficienti di questo sviluppo risultano dati in questo modo. Ora, quando siano fissati i b_n, si possono sempre scegliere i c_n come qui si è detto: ed infatti, basta per questo sottoporre c_n alla condizione

$$c_{n+1} - b_{n+1} > c_n + b_n,$$

ossia alla

$$c_{n+1} > c_n + (b_n + b_{n+1}).$$

Con questa scelta dei c_n, i primi $2(c_1 - b_1) + 1$ coefficienti di Eulero-Fourier della $f(x)$ risultano uguali a zero; i successivi $4b_1 + 2$ coefficienti sono dati da quelli dello sviluppo di $a_1\varphi(x, b_1)$ sen $(c_1 x)$ (e qui si noti che tutti i coefficienti dei seni sono nulli, e nullo è pure il coefficiente di $\cos c_1 x$); poi si hanno $2\{(c_2 - b_2) - (c_1 - b_1) - 1\}$ coefficienti nulli, dopo dei quali vengono i $4b_2 + 2$ coefficienti dello sviluppo di $a_2\varphi(x, b_2)$ sen $(c_2 x)$; e così via. Da ciò risulta che ogni porzione dello sviluppo di un termine qualunque della serie (3) è anche una porzione della serie di Fourier della $f(x)$. Per quanto si è detto nel n.º 135, b), la porzione

$$a_n \sum_{r=b_n}^{1} \frac{\cos (c_n - r)x}{r}$$

dello sviluppo di $a_n\varphi(x, b_n)$ sen $(c_n x)$, è, per $x = 0$, maggiore di $a_n \log b_n$; e, se si suppongono i b_n scelti in modo che $a_n \log b_n$ resti maggiore di un numero fisso, positivo, M, nello sviluppo di Fourier della $f(x)$ si trova sempre una porzione tutta composta di termini con indici grandi quanto si vuole, la quale, per $x = 0$, è maggiore di M. Dunque la serie di Fourier della $f(x)$ non può convergere in $x = 0$ e nei punti congrui a 0 rispetto al modulo 2π.

Si può, invece, mostrare facilmente che, in tutti gli altri punti, la serie di Fourier converge, ed anche che, in ogni intervallo $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, con $0 < \varepsilon < \pi$ (e similmente in ogni intervallo congruo a questo rispetto a 2π), la convergenza è uniforme. Ed infatti, considerata la somma parziale $s_p(x)$ della serie di Fourier della $f(x)$, ed indicato con n_0 l'indice massimo dei termini della serie (3) che, in tutto od in parte, intervengono in $s_p(x)$, avremo che $s_p(x)$ si potrà spezzare nella somma

$$\sum_{n=1}^{\bar{n}_0-1} a_n \varphi(x,\ b_n) \operatorname{sen}(c_n x)$$

ed in una porzione dello sviluppo di $a_{n_0}\varphi(x,\ b_{n_0}) \operatorname{sen}(c_{n_0}x)$ (porzione che può coincidere anche con tutto lo sviluppo). La prima di queste due parti tende uniformemente, in tutto $(0,\ 2\pi)$, ad $f(x)$ [per la convergenza uniforme della (3)] quando $p \to \infty$; la seconda, in virtù del teorema del n.° 135, *a*), è, in $(\varepsilon,\ 2\pi - \varepsilon)$, inferiore in modulo a

$$2a_{n_0}L(\varepsilon),$$

e tende perciò uniformemente allo zero, quando $p \to \infty$. Dunque effettivamente $s_p(x)$ converge uniformemente ad $f(x)$, in tutto $(\varepsilon,\ 2\pi - \varepsilon)$.

Abbiamo così una funzione $f(x)$ continua e periodica, di periodo 2π, la cui serie di Fourier non converge nei punti $x = 2k\pi$, con k intero, e converge, invece, uniformemente in ogni intervallo $(2k\pi + \varepsilon,\ 2(k+1)\pi - \varepsilon)$, per ogni $\varepsilon > 0$ e $< \pi$.

I numeri a_n, b_n e c_n soddisfano a tutte le condizioni sopra indicate se, ad esempio, si scelgono nel seguente modo:

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad b_n = 2^{n^2}, \quad c_n = 2^{n^2+1}.$$

137. - Condensazione delle singolarità di Du Bois-Reymond. Nel termine generale della serie del secondo membro della (3) del n.° preced., sostituiamo x con nx, consideriamo cioè la nuova funzione

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(nx,\ b_n) \operatorname{sen}(c_n nx), \tag{1}$$

supponendo che i numeri a_n, b_n e c_n siano sottoposti a tutte le condizioni indicate nel n.° preced. Questa nuova funzione $\Phi(x)$ risulta anch'essa continua e periodica, di periodo 2π, in tutto $(-\infty,\ +\infty)$; e la sua serie di Fourier presenterà, in $x = 0$ e $x = 2k\pi$, la stessa singolarità delle serie di Fourier della funzione $f(x)$ considerata nel n.° preced. Ora, però, questa singolarità verrà a presentarsi anche in ogni punto $x = \dfrac{p}{q}\,2\pi$, con

p e q numeri interi qualunque. Ed infatti, tutti i termini della serie del secondo membro di (1), corrispondenti ai valori $n = qn'$, con n' intero positivo, dànno delle porzioni

$$a_n \sum_{r=1}^{b_n} \frac{\cos (c_n - r) nx}{r}$$

della serie di Fourier di $\Phi(x)$, le quali, per $x = \frac{p}{q} 2\pi$, sono maggiori di $a_n \log b_n$, e cioè maggiori di un numero fisso positivo. La serie di Fourier della funzione continua $\Phi(x)$ è pertanto non convergente in tutti i punti della forma $\frac{p}{q} 2\pi$, i quali sono ovunque densi in $(-\infty, +\infty)$ (¹). Nei punti distinti da quelli della forma $\frac{p}{q} 2\pi$, non si può dire, in generale, se la serie di Fourier della $\Phi(x)$ converga o no.

Si hanno però esempi, dovuti a Steinhaus ed a Neder (²), di funzioni continue le cui serie di Fourier hanno esattamente un' infinità numerabile ed ovunque densa di punti di non convergenza (³).

138. - **Singolarità di Lebesgue.**

H. Lebesgue ha mostrato che *esistono delle funzioni continue in tutto* $(-\infty, +\infty)$ *le cui serie di Fourier sono ovunque convergenti senza essere ovunque uniformemente convergenti* (⁴).

Seguendo ancora il De la Vallée Poussin, possiamo dare un esempio di simili funzioni nel seguente modo.

(¹) Il primo esempio di serie di Fourier di questa specie fu costruito da Du Bois-Reymond (loc. cit. in (¹) a pag. 361).

(²) H. Steinhaus, *Sur les défauts de convergence des séries trigonométriques et potentielles.* (Bull. Acad. Polonaise des Sciences et des Lettres, 1919, pp. 123-141); L. Neder, *Konvergenzdefekte der Potenzreihen stetiger Funktionen auf dem Rande des Konvergenzkreises.* (Math. Zeitschr., Bd. 6 (1920), pp. 262-269).

(³) Sulla non convergenza delle serie di Fourier di funzioni continue, v. anche: G. Alexits, *Sur la divergence des séries de Fourier de fonctions continues.* (Comptes rendus, t. 185 (1927), pp. 751-753).

(⁴) *Sur la divergence et la convergence non uniforme des séries de Fourier.* (Comptes rendus, t. 141 (1905), pp. 875-877); *Leçons sur les séries trigonométriques*, pag. 88.

Consideriamo ancora la funzione $\varphi(x, n)$, definita nel n.° 136, e le costanti a_n, b_n, c_n, sottoposte a tutte le condizioni indicate nello stesso n.°. Tenendo presente la relazione

$$2 \operatorname{sen} rx \cos mx = \operatorname{sen}(m + r)x - \operatorname{sen}(m - r)x,$$

abbiamo

$$\varphi(x, n) \cos mx = -\sum_{r=n}^{1} \frac{\operatorname{sen}(m - r)x}{r} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(m + r)x}{r}.$$

Se dunque formiamo la funzione

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(x, b_n) \cos(c_n x),$$

la serie scritta, per le stesse ragioni già sfruttate nel n.° 136, è ovunque uniformemente convergente, la $\psi(x)$ è funzione ovunque continua e periodica, di periodo 2π, e la sua serie di Fourier è uniformemente convergente in ogni intervallo $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$ con $0 < \varepsilon < \pi$, ed in ogni intervallo a questo congruo, rispetto al modulo 2π; inoltre, tale serie di Fourier è convergente in ogni punto $x = 2k\pi$, con k intero, perchè, essendo una serie di seni, in questi punti tutti i suoi termini sono nulli. Nell' intorno di $x = 0$ (o di $x = 2k\pi$) la serie di Fourier della $\psi(x)$ non è però uniformemente convergente. Infatti, per quanto abbiamo dimostrato nel n.° 135, c), la porzione

$$a_n \sum_{r=1}^{b_n} \frac{\operatorname{sen}(c_n + r)x}{r}$$

dello sviluppo di Fourier di $a_n \varphi(x, b_n) \cos(c_n x)$ e quindi di quello della $\psi(x)$, è, per $x = \frac{\pi}{4c_n}$, maggiore di $\frac{1}{2} a_n \log b_n - \frac{1}{2} a_n$, vale a dire è, per tutti gli n sufficientemente grandi, maggiore di un numero fisso positivo. E siccome, per $n \to \infty$, è $\frac{\pi}{4c_n} \to 0$, ne viene che, in ogni intorno del punto $x = 0$, si trovano sempre dei punti nei quali la serie di Fourier della $\psi(x)$ ha una porzione maggiore di un numero fisso positivo e tutta composta di termini con indici grandi quanto si vuole; e ciò significa che la serie di Fourier della $\psi(x)$ non converge uniformemente nell' intorno di $x = 0$.

Abbiamo, così, una funzione $\psi(x)$ ovunque continua e periodica, di periodo 2π, la cui serie di Fourier converge dappertutto e converge uniformemente in ogni intervallo $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, con $0 < \varepsilon < \pi$, ed in ogni intervallo a questo congruo rispetto a 2π, mentre, invece, non converge uniformemente nell'intorno dei punti $x = 2k\pi$, con k intero.

139. - Singolarità di Steinhaus.

H. Steinhaus ([1]) ha mostrato, con un esempio, che *esistono delle funzioni continue e periodiche, di periodo 2π, le cui serie di Fourier, pur essendo ovunque convergenti, non convergono uniformemente in nessun intervallo.*

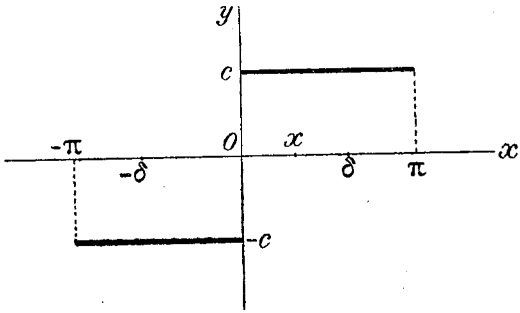
§ 2. Singolarità delle serie di Fourier delle funzioni discontinue.

140. - Singolarità di Kolmogoroff.

A. Kolmogoroff ([2]) ha costruito *una funzione integrabile in $(0, 2\pi)$, la cui serie di Fourier non è mai convergente.*

141. - Il fenomeno di Gibbs per una funzione particolare.

Consideriamo la funzione $f(x)$ uguale alla costante c, per ogni x tale che $0 < x \leq \pi$, uguale a $-c$ per $-\pi < x < 0$, ed



avente, in $x = 0$, un valore qualsiasi. Per fissare le idee, supponiamo $c > 0$. Indicando con $s_n(x)$ la somma parziale della

([1]) *Sur la convergence non uniforme des séries de Fourier.* (Bulletin Acad. des Sciences de Cracovie, 1913, pp. 145-160).

([2]) *Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout.* (Comptes rendus, T. 183 (1926), pp. 1327-1328).

serie di Fourier di questa funzione $f(x)$, abbiamo (n.° 100)

$$(1) \qquad s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi:2} [f(x+2z) + f(x-2z)] \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{\operatorname{sen} z} dz,$$

ed anche,

$$(2) \qquad s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\sigma} [f(x+2z) + f(x-2z)] \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z} dz + R_n(x)$$

dove, quando sia fissato il numero positivo $\sigma \leq \pi:2$, $R_n(x)$ tende uniformemente allo zero, per $n \to \infty$, e per tutti gli x (n.° 109).

Per mezzo della formula (2) vogliamo ora studiare il comportamento della somma $s_n(x)$ in prossimità del punto $x=0$, quando n tende all'infinito.

Fissiamo un numero positivo $\delta < \pi:4$, e supposto $\sigma < \delta$, consideriamo $s_n(x)$ nell'intervallo $(-\delta, +\delta)$. Posto

$$\Phi_n(x) = \int_0^{\sigma} [f(x+2z) + f(x-2z)] \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z} dz,$$

abbiamo, tenendo conto della definizione della $f(x)$, $\Phi_n(0) = 0$, e, per $0 < x \leq \delta$,

$$\Phi_n(x) = 2c\int_0^{x:2} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z} dz.$$

Per avere i massimi e minimi relativi di $\Phi_n(x)$, per $0 < x \leq \delta$, deriviamo:

$$\Phi_n'(x) = 2c\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\dfrac{x}{2}}{x}.$$

I punti in cui è $\Phi_n'(x) = 0$ sono dunque dati da $\operatorname{sen}\dfrac{2n+1}{2}x = 0$, ossia sono i punti della forma $x = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$, con k intero > 0, contenuti in $(0, \delta)$. E poichè $\Phi_n'(x)$, nel passare attraverso questi punti, cambia segno, tali punti dànno effettivamente dei massimi e minimi relativi. In $x=0$ è, come si è detto, $\Phi_n(0) = 0$, e, per $x > 0$ e molto piccolo, è $\Phi_n(x) > 0$; dunque $x = \dfrac{2\pi}{2n+1}$ è un punto di massimo per $\Phi_n(x)$, $x = \dfrac{2\cdot 2\pi}{2n+1}$ è un punto di minimo, ed i punti $x = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$ sono alternativamente punti di massimo e di minimo. Ora è

$$(3) \qquad \Phi_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) = 2c\int_0^{\pi:(2n+1)} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z}\,dz$$

e la funzione sotto il segno d'integrale è sempre ≥ 0; è poi

$$(4) \qquad \Phi_n\left(\frac{2\cdot 2\pi}{2n+1}\right) = 2c\int_0^{\pi:(2n+1)} \dots + 2c\int_{\pi:(2n+1)}^{2\pi:(2n+1)} \dots,$$

e la funzione sotto il segno del secondo integrale è sempre ≤ 0. Inoltre, ad ogni punto x dell'intervallo $\left(0, \dfrac{\pi}{2n+1}\right)$ corrisponde il punto $x + \dfrac{\pi}{2n+1}$ di $\left(\dfrac{\pi}{2n+1}, \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)$ in cui il numeratore di $\dfrac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z}$ ha lo stesso modulo, ma segno contrario, mentre il denominatore è maggiore; dunque, in $x + \dfrac{\pi}{2n+1}$ il valore della funzione integranda è, in modulo, minore del valore che essa ha in x, e di segno contrario. Perciò il secondo degli integrali del 2° membro di (4) è di segno contrario (negativo, precisamente) a quello del primo integrale, e di modulo più piccolo. Ne segue che $\Phi_n\left(\dfrac{2\cdot 2\pi}{2n+1}\right)$ è positivo. Per la stessa ragione, in

$$\Phi_n\left(\frac{2\cdot 3\pi}{2n+1}\right) = 2c\int_0^{\pi:(2n+1)} \dots + 2c\int_{\pi:(2n+1)}^{2\pi:(2n+1)} \dots + 2c\int_{2\pi:(2n+1)}^{3\pi:(2n+1)} \dots,$$

la somma degli ultimi due integrali è negativa, vale a dire, è

$$\Phi_n\left(\frac{2\cdot 3\pi}{2n+1}\right) < \Phi_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right).$$

Se ne conclude che è, per quanto riguarda i massimi,

$$\Phi_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) > \Phi_n\left(\frac{2\cdot 3\pi}{2n+1}\right) > \Phi_n\left(\frac{2\cdot 5\pi}{2n+1}\right) > \ldots,$$

e, per quanto riguarda i minimi,

$$\Phi_n\left(\frac{2\cdot 2\pi}{2n+1}\right) < \Phi_n\left(\frac{2\cdot 4\pi}{2n+1}\right) < \Phi_n\left(\frac{2\cdot 6\pi}{2n+1}\right) < \ldots,$$

e tanto i valori massimi che quelli minimi sono tutti positivi.

Se calcoliamo il massimo dei massimi, abbiamo, facendo $(2n+1)z = \alpha$,

$$\Phi_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) = 2c\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\,d\alpha;$$

il minimo dei minimi è, invece,

$$\Phi_n\left(\frac{2\cdot 2\pi}{2n+1}\right) = 2c\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Dopo di ciò, ritorniamo alla formula (2), che, per la posizione fatta, può scriversi

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\Phi_n(x) + R_n(x).$$

Per $0 < x \leq \delta$, il massimo valore di $\frac{1}{\pi}\Phi_n(x)$ è

$$\frac{2c}{\pi}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \frac{2c}{\pi}\left[\int_0^\infty \ldots - \int_\pi^\infty \ldots\right] = c + \frac{2c}{\pi}\cdot 0{,}2811\ldots, \tag{5}$$

essendo, come è noto,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\,d\alpha = -0{,}2811\ldots.$$

Questo massimo valore, che è indipendente da n, si ha per $x = 2\pi:(2n+1)$, cioè per un valore di x che, per $n \to \infty$, tende a zero. E siccome è

$$\Phi_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) - \Phi_n\left(\frac{6\pi}{2n+1}\right) = -2c\int_\pi^{3\pi} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

e $R_n(x)$ tende uniformemente a zero, per $n \to \infty$, possiamo dire che, *alla destra del punto $x = 0$, il massimo valore di $s_n(x)$ si ha per un x che tende a zero quando $n \to \infty$, e questo massimo valore tende a*

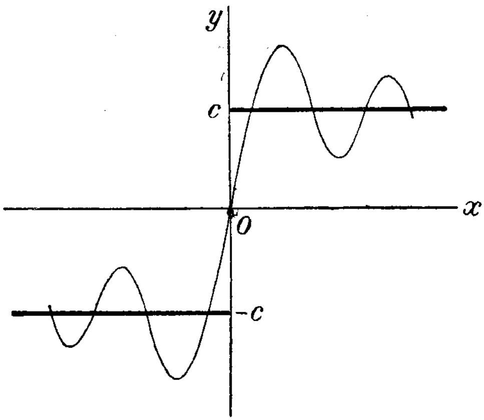
$$c + \frac{2c}{\pi} \cdot 0,2811 \ldots\ldots$$

Sempre alla destra del punto $x = 0$, $s_n(x)$ ha un limite inferiore nullo [1], *e la curva $y = s_n(x)$ compie delle oscillazioni intorno alla retta $y = c$, le quali hanno un' ampiezza* [2] *massima che, per $n \to \infty$, tende al valore*

$$-\frac{2c}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\, d\alpha,$$

e la massima oscillazione si approssima indefinitamente all'asse delle y, per $n \to \infty$.

Il comportamento della curva $y = s_n(x)$, alla sinistra del punto $x = 0$, risulta dall' osservare che tale curva è simmetrica



rispetto all' origine delle coordinate; *pertanto il minimo valore di $s_n(x)$, per $x < 0$, si ha per un x che tende a zero quando $n \to \infty$, ed ha un valore che tende a*

$$-c - \frac{2c}{\pi} \cdot 0,2811 \ldots\ldots$$

---

[1] È infatti, per la (1), $s_n(0) = 0$.

[2] Differenza fra un valore massimo ed un valore minimo relativo.

Il modo di comportarsi della curva $y = s_n(x)$, nell'intorno dell'origine, *costituisce il cosidetto « fenomeno di Gibbs »* (¹).

142. - Il fenomeno di Gibbs nel caso generale.

Sia $f(x)$ una funzione integrabile e periodica, di periodo 2π, e supponiamo che essa abbia, nel punto $x = a$, una discontinuità di 1ª specie e che, in tutto un intorno $(a - \delta,\ a + \delta)$ di tale punto, sia a variazione limitata; di più, in ogni punto di questo intorno, escluso $x = a$, la $f(x)$ sia continua.

Supposto $\delta \leq \pi$, definiamo una funzione $\varphi(x)$, periodica, di periodo 2π, ponendo, in $(a - \pi,\ a)$, estremi inclusi, $\varphi(x) = f(a - 0)$ e, in $(a,\ a + \pi)$, estremi esclusi, $\varphi(x) = f(a + 0)$. Definiamo, poi, un'altra funzione $\psi(x)$ ponendo, per $x = a + 2k\pi$ (k intero), $\psi(x) = 0$, e, per ogni altro x,

$$\psi(x) = f(x) - \varphi(x).$$

Questa funzione $\psi(x)$ risulta integrabile, periodica, di periodo 2π; di più, in $(a - \delta,\ a + \delta)$, essa è continua ed a variazione limitata. Altrettanto può dirsi allora, della funzione

$$\psi_1(x) = \psi(x) + \frac{f(a + 0) + f(a - 0)}{2}.$$

Se poniamo

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \frac{f(a + 0) + f(a - 0)}{2},$$

possiamo scrivere

$$f(x) = \varphi_1(x) + \psi_1(x),$$

la quale uguaglianza vale per tutti gli x, esclusi quelli della forma $x = a + 2k\pi$. Indichiamo con $s_n(x)$, $s_{1,n}(x)$, $s_{2,n}(x)$ le somme

---

(¹) Questo fenomeno fu messo in evidenza, in un caso particolare, da W. Gibbs (*Fourier's Series*, Nature, Vol. 59 (1908), pp. 200, 606) e, prima ancora, da H. Wilbraham (*On a certain periodic function*, Camb. Dublin Math. Journ., Vol. III (1848), pp. 198-200). Il caso generale, che sarà trattato nel n.° 142, fu studiato da M. Bôcher (*Introduction to the theory of Fourier-series*, Annals of Math., Vol. 7 (1906), pp. 81-152; *On Gibb's phenomenon*, Journal für Math., Bd. 144 (1914), pp. 41-47). V. anche T. H. Gronwall (Math. Ann., Bd. 72 (1912), pp. 228-243; Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 13 (1912), pp. 445-468); D. Jackson (Rend. Circ. Matem., Palermo, T. 32 (1911), pp. 257-262); H. S. Carslaw (Amer. Journ. of Math., Vol. 39 (1917), pp. 185-198).

parziali delle serie di Fourier delle funzioni $f(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, rispettivamente. Siccome $\psi_1(x)$ è continua ed a variazione limitata in $(a - \delta,\ a + \delta)$, $s_{2,n}(x)$ converge uniformemente in tutto $\left(a - \frac{\delta}{2}, + a\frac{\delta}{2}\right)$, per $n \to \infty$, verso $\psi_1(x)$ (n.° 110); e questa funzione, per la sua definizione, è in $x = a$ uguale a $\dfrac{f(a+0) + f(a-0)}{2}$.

La funzione $\varphi_1(x)$, in $(a - \pi,\ a)$, è uguale a $\dfrac{f(a-0) - f(a+0)}{2}$, ed in $(a,\ a + \pi)$, estremi esclusi, è uguale a $\dfrac{f(a+0) - f(a-0)}{2}$.
Perciò, il comportamento di $s_{1,n}(x)$, nell'intorno del punto $x = a$, risulta da quanto abbiamo mostrato nel n.° preced.. E siccome è $s_n(x) = s_{1,n}(x) + s_{2,n}(x)$, abbiamo che, *in prossimità del punto $x = a$, e tanto alla sinistra, quanto alla destra di tale punto, la curva $y = s_n(x)$ compie delle oscillazioni, intorno alla curva $y = f(x)$, le quali hanno, da ambo le parti, un' ampiezza massima che tende, per $n \to \infty$, al valore*

$$-\frac{|f(a+0) - f(a-0)|}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

le massime oscillazioni approssimandosi indefinitamente, per $n \to \infty$, alla retta $x = a$. Di più, alla sinistra del punto $x = a$, ed in prossimità di esso, il minimo od il massimo valore di $s_n(x)$, a seconda che $f(a - 0)$ è minore o maggiore di $f(a + 0)$, tende a

$$f(a-0) - \frac{0,2811....}{\pi}\{f(a+0) - f(a-0)\},$$

per $n \to \infty$, e questo minimo o massimo si ha per un valore di x che tende ad a, quando $n \to \infty$; alla destra del punto $x = a$, ed in prossimità di esso, il massimo od il minimo valore di $s_n(x)$, a seconda che è $f(a - 0)$ minore o maggiore di $f(a + 0)$, tende a

$$f(a+0) + \frac{0,2811....}{\pi}\{f(a+0) - f(a-0)\}$$

per $n \to \infty$, e questo massimo o minimo si ha per un valore di x che tende ad a quando $n \to \infty$.

La curva $y = s_n(x)$ presenta anche qui, nell' intorno del punto $x = a$, il fenomeno di Gibbs.

Capitolo VIII.

INTEGRALI CLASSICI

§ 1. L' integrale di Poisson.

143. - Definizione dell' integrale di Poisson.

Sia $f(x)$ una funzione integrabile sull' intervallo $(0, 2\pi)$, e, indicati con a_n e b_n i suoi coefficienti di Eulero-Fourier, consideriamo la serie

$$(1) \qquad \frac{1}{2} a_0 + r(a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \dots + \\ + r^n (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \dots .$$

Per ogni r tale che $0 \leq r < 1$ e per ogni x di $(0, 2\pi)$, questa serie converge assolutamente. Ed infatti, poichè, per il teorema di Riemann-Lebesgue del n.° 77, è $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, quando $n \to \infty$, esiste un numero positivo H tale che sia, per tutti gli n,

$$|a_n| < H, \quad |b_n| < H,$$

e pertanto, qualunque sia x di $(0, 2\pi)$, la serie dei moduli dei termini della (1) è minore di

$$2H(1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \dots).$$

Di qui segue anche che, per ciascun r soddisfacente alla condizione $0 \leq r < 1$, la (1) converge uniformemente, rispetto alla x, in tutto $(0, 2\pi)$; e segue pure che, se è $0 < r_1 < 1$, la (1) converge uniformemente rispetto a tutti gli r tali che $0 \leq r \leq r_1$ ed a tutti gli x di $(0, 2\pi)$. Dunque la (1) rappresenta, per ogni x

di $(0, 2\pi)$ e per ogni r tale che $0 \leq r < 1$, una funzione continua nel complesso delle due variabili x ed r, funzione che indicheremo con $f(x, r)$:

$$(2) \qquad f(x, r) = \frac{1}{2} a_0 + r(a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \dots + \\ + r^n (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \dots .$$

Notiamo subito che, per $r = 1$, la (1) non è altro che la serie di Fourier della $f(x)$; perciò, nei punti x nei quali la serie di Fourier della $f(x)$ converge, è convergente anche la serie (1), per $r = 1$, e la somma di questa serie, sempre per $r = 1$, è data, in virtù di un noto teorema di Abel sulle serie di potenze [1], da $\lim_{r \to 1-0} f(x, r)$. Nei punti x in cui la serie di Fourier della $f(x)$ è convergente ed ha per somma $f(x)$, è poi:

$$f(x) = f(x, 1) = \lim_{r \to 1-0} f(x, r).$$

Per r tale che $0 \leq r < 1$, la somma della serie che figura nella (2) può rappresentarsi, mediante un integrale, in forma particolarmente notevole. Tenendo conto delle formule di Eulero-Fourier, si ha, infatti, supposto $0 \leq r < 1$,

$$f(x, r) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\alpha) d\alpha + r \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos(\alpha - x) d\alpha + \dots + \right. \\ \left. + r^n \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n(\alpha - x) d\alpha + \dots \right\};$$

e poichè la serie

$$\frac{1}{2} f(\alpha) + r f(\alpha) \cos(\alpha - x) + \dots + r^n f(\alpha) \cos n(\alpha - x) + \dots$$

è tale che la serie dei moduli dei suoi termini risulta sempre inferiore a $|f(\alpha)| \left\{ \frac{1}{2} + r + r^2 + \dots + r^n + \dots \right\}$, tale serie è in-

---

[1] Tale teorema è un caso particolare della proposizione data nel n.° 13, e si ottiene precisamente facendo, in tale proposizione, $\gamma = z$, $b_n(x, \gamma) = c_n$, $a_n(x, \gamma) = z^n$, $\gamma_0 = 1$.

tegrabile termine a termine in $(0, 2\pi)$, e si ha

$$f(x, r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha) \left\{ \frac{1}{2} + r\cos(\alpha - x) + \dots + r^n \cos n(\alpha - x) + \dots \right\} d\alpha.$$

Ma l'espressione tra parentesi, sotto il segno di integrale, non è che la parte reale della serie

$$\frac{1}{2} + z + z^2 + \dots + z^n \dots = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1-z},$$

per $z = re^{i(\alpha - x)}$; e poichè è

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - re^{i(\alpha-x)}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - r\cos(\alpha - x) - ir\,\text{sen}\,(\alpha - x)} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1 - r\cos(\alpha - x) + ir\,\text{sen}\,(\alpha - x)}{1 - 2r\cos(\alpha - x) + r^2},$$

potremo scrivere

$$(3) \qquad f(x, r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - x) + r^2}\, d\alpha.$$

L'integrale qui scritto viene chiamato *integrale di Poisson* (1).

144. - Proprietà dell'integrale di Poisson per $r < 1$.

Consideriamo, nel piano (x, y), il cerchio C di centro l'origine delle coordinate e di raggio uguale ad 1. Riferiamo i punti del cerchio, circonferenza compresa, ad un sistema di coordinate polari (ω, r), avente il polo nell'origine $(0, 0)$ e l'asse polare sull'asse delle x e con il medesimo verso. Ciò posto, immaginiamo che sulla circonferenza di C sia data una funzione $f(\omega)$, integrabile; allora l'integrale di Poisson

$$(1) \qquad f(\omega, r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - \omega) + r^2}\, d\alpha$$

---

(1) *Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions par les séries de quantités périodiques.* (Journal de l'École polytechnique, XVIII Cahier, T. XI (1820), pp. 417-489); *Addition au Mémoire précédent et au Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions par des séries de quantités périodiques.* (Ibidem, XIX Cahier, T. XII (1823), pp. 145-162). Per quanto riguarda tutto il presente Cap. vedi, sopra tutto, P. FATOU, loc. cit. in (1) a pag. 22.

determina, *dentro* il cerchio C, una funzione $f(\omega, r) \equiv F(x, y)$, che, per quanto abbiamo già detto nel n.° precedente, è finita e continua in ogni punto *interno* a C.

Vogliamo ora dimostrare *che tale funzione è armonica nell'interno di* C, vale a dire, che, in ogni punto interno a C, oltre ad essere continua soddisfa all'equazione di Laplace

$$\Delta_2 F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

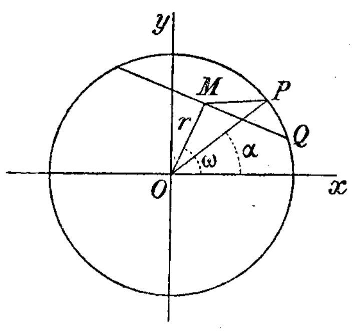
Dalla (2) del n.° preced., ossia da

$$(2) \qquad \begin{aligned} F(x, y) = f(\omega, r) = \frac{a_0}{2} + r(a_1 \cos\omega + b_1 \operatorname{sen}\omega) + \dots \\ + r^n(a_n \cos n\omega + b_n \operatorname{sen} n\omega) + \dots, \end{aligned}$$

risulta che $F(x, y)$ è la parte reale della serie di potenze

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n - ib_n) z^n,$$

dove è $z = re^{i\omega}$, serie di potenze che, per essere il modulo $|a_n - ib_n|$ limitato rispetto a tutti gli n, è convergente nel cerchio di centro 0 e raggio 1. La somma di questa serie di potenze è dunque una funzione di z, analitica e regolare nell'interno del cerchio C, e la sua parte reale (come pure il coefficiente di quella immaginaria) è una funzione armonica nell'interno di C.



Osservazione. — Se indichiamo con M il punto (ω, r) interno a C, con P il punto $(\alpha, 1)$ sulla circonferenza di C, con Q uno dei punti in cui la perpendicolare a MO, condotta per M, incontra la circonferenza di C, abbiamo

$$\overline{MQ}^2 = 1 - r^2,$$
$$\overline{MP}^2 = 1 - 2r\cos(\alpha - \omega) + r^2,$$

e perciò

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - \omega) + r^2} = \left(\frac{MQ}{MP}\right)^2,$$

e

$$(3) \qquad f(\omega, r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\left(\frac{MQ}{MP}\right)^2 d\alpha.$$

145. - Comportamento dell'integrale di Poisson per $r \to 1$. Vogliamo ora studiare il comportamento della funzione $f(\omega, r)$ al tendere del punto M, di coordinate polari ω, r, ed interno a C, ad un punto determinato P_0 della circonferenza di C.

In primo luogo, consideriamo il caso del punto M che tende a P_0 lungo il raggio OP_0, vale a dire, studiamo il comportamento di $f(\omega, r)$ per ω fisso ed $r \to 1-0$.

A questo scopo, premettiamo il seguente teorema, dovuto a F. G. Frobenius ([1]), e che costituisce una generalizzazione della ben nota proposizione di Abel sulle serie di potenze:

Se la serie $\sum\limits_0^\infty a_n$ *è sommabile* $(C, 1)$, *vale a dire, col metodo della media aritmetica di Cesàro, ed ha per somma generalizzata* S, *la serie* $\sum\limits_0^\infty a_n x^n$ *converge per ogni* x *positivo, minore di* 1, *ed è*

$$(1) \qquad \lim_{x \to 1-0} \sum_0^\infty a_n x^n = S.$$

Posto, infatti,

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n,$$

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1},$$

ed applicando due volte la trasformazione di Brunacci-Abel, abbiamo

$$\sum_0^m a_n x^n = (1-x)\sum_0^{m-1} s_n x^n + s_m x^m,$$

$$\sum_0^{m-1} s_n x^n = (1-x)\sum_0^{m-2}(n+1)\,\sigma_n x^n + m\sigma_{m-1}x^{m-1};$$

e siccome è, per ipotesi,

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = S,$$

([1]) *Ueber die Leibnitzsche Reihe.* (Journal für Mathematik, Bd. 89 (1880), pp. 262-264).

la serie $\sum_0^\infty (n+1)\,\sigma_n x^n$ converge per $0 \leq x < 1$, ed è $m\sigma_{m-1}x^{m-1} \to 0$, per $m \to \infty$. Converge dunque, per gli x indicati, anche $\sum_0^\infty s_n x^n$, ed il suo termine generale $s_n x^n$ tende a zero, per $n \to \infty$; converge, perciò, anche $\sum_0^\infty a_n x^n$, ed è

$$\sum_0^\infty a_n x^n = (1-x)^2 \sum_0^\infty (n+1)\sigma_n x^n.$$

Scelto ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, indichiamo con m un intero tale che, per $n \geq m$, sia $|\sigma_n - S| < \varepsilon$. È allora, per tutti gli x tali che $0 \leq x < 1$,

$$\left|(1-x)^2 \sum_m^\infty (n+1)\sigma_n x^n - (1-x)^2 S \sum_m^\infty (n+1)x^n\right| <$$

$$(1-x)^2 \varepsilon \sum_0^\infty (n+1)\,x^n = (1-x)^2 \varepsilon D \sum_0^\infty x^n = \varepsilon,$$

e poichè è

$$\lim_{x \to 1-0} \left\{(1-x)^2 \sum_0^{m-1} (n+1)\sigma_n x^n\right\} = 0,$$

$$\lim_{x \to 1-0} \left\{(1-x)^2 S \sum_m^\infty (n+1)x^n\right\} = S \cdot \lim_{x \to 1-0} \left\{(1-x)^2 \sum_0^\infty (n+1)x^n\right\} = S,$$

ne viene la (1).

Se poi a_n è una funzione limitata di una variabile z, in un certo intervallo (z', z''), e se σ_n tende uniformemente, per ogni z di (z', z''), verso una funzione limitata $S(z)$, allora la convergenza di $\sum_0^\infty a_n x^n$, per $x \to 1-0$, verso $S(z)$, è uniforme in tutto l'intervallo indicato.

Se applichiamo il teorema ora dimostrato alla serie di potenze che figura nel secondo membro della (2) del n.° preced., possiamo concludere immediatamente che, *per ogni valore di* ω *per il quale il polinomio trigonometrico di Fejér, d'ordine* n, *della* $f(\omega)$ *converge verso un valore finito, quando* $n \to \infty$, *anche* $f(\omega, r)$ *tende, per* $r \to 1-0$, *verso lo stesso valore* [1].

---

[1] Viceversa, se, per un insieme E di valori di ω, $f(\omega, r)$ tende ad un limite finito quando $r \to 1-0$, in quasi-tutto E il polinomio trigonometrico di Fejér, di ordine n, della $f(\omega)$, converge verso un limite finito, per

In particolare, si ha, tenendo presenti i teoremi dei n.[i] 59, 60 e 62, che, *per ogni valore di* ω *per il quale* $f(\omega)$ *è funzione continua, è* $f(\omega, r) \to f(\omega)$, *quando* $r \to 1-0$; *per ogni valore di* ω *per il quale* $f(\omega)$ *ha una discontinuità di* 1^a *specie, è* $f(\omega, r) \to \frac{f(\omega+0)+f(\omega-0)}{2}$; *in quasi-tutto* $(0, 2\pi)$, *è* $f(\omega, r) \to f(\omega)$; *in ogni intervallo* (ω_0, ω_1) *tutto costituito di punti in cui la* $f(\omega)$ *è continua,* $f(\omega, r)$ *converge uniformemente verso* $f(\omega)$, *quando* $r \to 1-0$.

Questi risultati, che sono così dedotti dai corrispondenti risultati ottenuti per il polinomio trigonometrico di Fejér, possono anche dimostrarsi direttamente. È ciò che faremo nei n.[i] seguenti, considerando addirittura il caso generale del comportamento di $f(\omega, r)$, quando ω tende ad un determinato valore ω_0 ed r tende ad $1-0$, vale a dire, quando il punto M, interno a C, tende *comunque* ad un punto P_0 della circonferenza di C.

146. - Comportamento dell'integrale di Poisson nei punti di continuità della circonferenza di C.

Supponiamo, dapprima, che, nel punto $P_0 \equiv (\omega = \omega_0, r = 1)$, *la funzione* $f(\omega)$ *sia continua rispetto ad* ω, *e dimostriamo che, quando il punto* $M \equiv (\omega, r)$ *tende a* P_0 *in modo qualsiasi (restando però sempre interno a* C), *si ha:*

$$f(\omega, r) \to f(\omega_0). \tag{1}$$

Premettiamo che, supponendo $f(\omega) \equiv 1$, dalla (2) del n.° 143 si deduce

$$f(\omega, r) = 1,$$

e, dalla (3) dello stesso n.°,

$$f(\omega, r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-\omega)+r^2}\,d\alpha.$$

$n \to \infty$. Cfr. S. KACZMARZ, *Ueber die Konvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen.* (Math. Zeitschr., Bd. 23 (1925), pp. 263-270); v. anche A. ZYGMUND *Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales.* (Fund. Math., T. X (1927), pp. 356-362).

Si ha dunque l' uguaglianza

$$(2) \qquad 1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - \omega) + r^2}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{MQ}{MP}\right)^2 d\alpha.$$

Ciò osservato, abbiamo senz' altro

$$(3) \; f(\omega, r) - f(\omega_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{ f(\alpha) - f(\omega_0) \} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - \omega) + r^2}\, d\alpha.$$

Possiamo decomporre l' integrale ora scritto in altri due, estesi uno all' arco $(\omega_0 - \sigma, \; \omega_0 + \sigma)$ e l' altro all' arco rimanente, intendendo che il σ sia un numero positivo, determinato in corrispondenza di un $\varepsilon > 0$ (scelto ad arbitrio), in modo che per ogni α compreso in $(\omega_0 - \sigma, \; \omega_0 + \sigma)$, sia $|f(\alpha) - f(\omega_0)| < \varepsilon$. La prima parte del secondo membro di (3), così decomposto, è allora, in modulo, inferiore a

$$\varepsilon \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0 - \sigma}^{\omega_0 + \sigma} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - \omega) + r^2}\, d\alpha \right|$$

$$< \varepsilon \left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - \omega) + r^2}\, d\alpha \right| = \varepsilon.$$

La seconda parte (se supponiamo che la distanza di M da P_0 sia minore di un δ sufficientemente piccolo, in modo che risulti sempre $MP > \sigma{:}2$ e $MQ < \sigma^2$) è, in modulo, inferiore a

$$\frac{2\sigma^2}{\pi}\int_0^{2\pi} \{ |f(\alpha)| + |f(\omega_0)| \}\, d\alpha,$$

ed anche minore di

$$\frac{2\varepsilon^2}{\pi}\int_0^{2\pi} \{ |f(\alpha)| + |f(\omega_0)| \}\, d\alpha,$$

se supponiamo, come è ben lecito, $\sigma < \varepsilon$. Dunque, è

$$|f(\omega, r) - f(\omega_0)| < \varepsilon\left(1 + \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \{ |f(\alpha)| + |f(\omega_0)| \}\, d\alpha\right),$$

per tutti i punti M distanti da P_0 meno di δ. E poichè l'espressione che moltiplica ε, nel secondo membro dell'ultima disuguaglianza, è un numero fisso, la (1) risulta dimostrata.

Se tutti gli ω di un intervallo (ω', ω'') sono punti di continuità per la $f(\omega)$, *la convergenza di* $f(\omega, r)$, *verso* $f(\omega)$, *è uniforme per tutti gli* ω *dell'intervallo* (ω', ω''). Ed infatti, nella dimostrazione data or ora, si possono determinare un σ ed un δ validi per tutti gli ω di (ω', ω'').

147. - Comportamento dell'integrale di Poisson nei punti di discontinuità della circonferenza di C.

Veniamo ora a studiare il modo di comportarsi di $f(\omega, r)$ quando il punto M tende ad un punto $P_0 \equiv (\omega_0, 1)$, della circonferenza di C, in cui la funzione $f(\omega)$ presenta una discontinuità di prima specie.

Seguendo Schwarz [1] cominciamo con lo studiare un caso particolare e precisamente supponiamo che la funzione $f(\omega)$ sia definita, in $0 \leq \omega < 2\pi$, dalla uguaglianza $f(\omega) \equiv \omega$. Per questa funzione, il punto $\omega = 0$ presenta, sulla circonferenza di C, una discontinuità di 1ª specie, perchè, per $\omega \to +0$, abbiamo $f(\omega) \to 0$ e, per $\omega \to 2\pi - 0$, $f(\omega) \to 2\pi$. Sia dunque, nel caso che qui consideriamo, P_0 il punto di coordinate polari $\omega_0 = 0$ ed $r = 1$, e studiamo il comportamento dell'integrale di Poisson

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - \omega) + r^2}\, d\alpha \tag{1}$$

quando il punto $M \equiv (\omega, r)$ tende a $P_0 \equiv (0, 1)$, sempre restando interno a C.

I coefficienti di Eulero-Fourier della funzione $f(\omega) = \omega$, considerata in $(0, 2\pi)$, sono dati da

$$a_0 = 2\pi, \quad a_n = 0 \quad (n \geq 1)$$
$$b_n = -\frac{2}{n},$$

e perciò il valore di (1) è dato, per la (2) del n.° 143, da

$$\pi - 2\sum_1^{\infty} \frac{r^n \operatorname{sen} n\omega}{n}.$$

---

[1] *Gesammelte Mathematische Abhandlungen von H. A. Schwarz.* Bd. 2 (Berlin, 1890), pp. 144 e 175.

Per ottenere la somma della serie ora scritta deriviamo rispetto ad r: otteniamo $\sum\limits_1^\infty r^{n-1} \operatorname{sen} n\omega$, la quale serie non è che il coefficiente della parte immaginaria della serie

$$\frac{1}{r}\sum_1^\infty r^n e^{in\omega} = \frac{e^{i\omega}}{1 - re^{i\omega}} =$$

$$= \frac{e^{i\omega}}{1 - r\cos\omega - ir\operatorname{sen}\omega} = \frac{e^{i\omega}(1 - r\cos\omega + ir\operatorname{sen}\omega)}{1 - 2r\cos\omega + r^2};$$

è dunque

$$\sum_1^\infty r^{n-1}\operatorname{sen} n\omega = \frac{\operatorname{sen}\omega}{1 - 2r\cos\omega + r^2}$$

e perciò

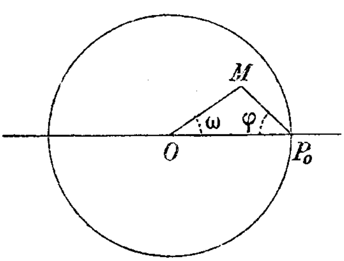
$$\sum_1^\infty \frac{r^n \operatorname{sen} n\omega}{n} = \int_0^r \frac{\operatorname{sen}\omega}{1 - 2r\cos\omega + r^2}\,dr = \operatorname{arctg}\frac{r\operatorname{sen}\omega}{1 - r\cos\omega},$$

intendendo che l'arctg, che qui figura, sia l'arco compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Il valore di (1) è dato, pertanto, da

$$\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{r\operatorname{sen}\omega}{1 - r\cos\omega},$$

ossia da $\pi - 2\varphi$, dove con φ indichiamo l'angolo $\widehat{OP_0M}$, consi-



derato positivo quando M è al disopra dell' asse OP_0, e negativo nel caso opposto.

Da ciò risulta che, *quando M tende a P_0, l'integrale* (1) *non ha un limite unico; ma ha un limite determinato e finito quando M tende a P_0 secondo una determinata direzione; e se tale di-*

rezione fa con OP_0 l'angolo φ, il limite è dato da $\pi - 2\varphi$. Questo valore limite varia, dunque, con continuità, fra 0 $\left(\text{per } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ e $2\pi \left(\text{per } \varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$, che sono i valori limiti di $f(\omega) = \omega$, per $\omega = +0$ ed $\omega = 2\pi - 0$, ed è precisamente una funzione lineare di φ. In particolare, per $\varphi = 0$, cioè quando M tende a P_0 lungo il raggio OP_0, il valore limite è π, che è la semisomma dei valori limiti di $f(\omega) = \omega$ nel punto di discontinuità.

Dal caso particolare ora considerato, possiamo passare facilmente al caso generale.

Sia $f(\omega)$ una funzione integrabile in $(0, 2\pi)$, e supponiamo che essa, per $\omega = \omega_0$, abbia una discontinuità di 1ª specie. Possiamo evidentemente supporre che sia $\omega_0 = 0$. Poniamo $\Delta = f(+0) - f(2\pi - 0)$ e consideriamo la funzione definita, in $(0, 2\pi)$, estremi esclusi, da

$$f_1(\omega) = f(\omega) + \frac{\Delta}{2\pi}\,\omega \tag{2}$$

e da $f_1(0) = f_1(2\pi) = f_1(+0)$. Questa funzione risulta continua nel punto $P_0 \equiv (\omega = 0,\ r = 1)$ della circonferenza di C, e se indichiamo con $f_1(\omega, r)$ il suo integrale di Poisson, al tendere comunque di M a P_0, è $f_1(\omega, r) \to f_1(0) = f(+0)$, in virtù di quanto si è dimostrato nel n.° preced.. L'integrale di Poisson di $\frac{\Delta}{2\pi}\,\omega$ ha, invece, per quanto si è più sopra dimostrato, un limite diverso a seconda della direzione con cui M tende a P_0, e precisamente il limite $\frac{\Delta}{2\pi}(\pi - 2\varphi)$, se la direzione con cui M tende a P_0 è individuata dall'angolo φ. E siccome, per la (2), l'integrale di Poisson della $f(\omega)$ è la differenza di quelli della $f_1(\omega)$ e di $\frac{\Delta}{2\pi}\,\omega$, ne viene che $f(\omega, r)$, al tendere di M a P_0, secondo la direzione individuata dall'angolo φ, tende a

$$f(+0) - \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta}{\pi}\varphi = \frac{1}{2}\{ f(+0) + f(2\pi - 0) \} +$$
$$+ \frac{\varphi}{\pi}\{ f(+0) - f(2\pi - 0) \}.$$

Possiamo, dunque, concludere che, *se la funzione integrabile* $f(\omega)$, *data sulla circonferenza di* C, *ha, in un punto*

$P_0 \equiv (\omega_0, 1)$ *di tale circonferenza, una discontinuità di prima specie, l'integrale di Poisson* $f(\omega, r)$ *non ha un limite unico quando il punto* $M \equiv (\omega, r)$ *tende a* P_0; *ha però un limite determinato quando* M *tende a* P_0 *(restando interno a* C*) secondo una curva avente tangente in* P_0, *e tale limite varia linearmente, in funzione dell'angolo* φ *che tale tangente forma col raggio* OP_0 *(angolo da considerarsi positivo, quando* P_0M *trovasi alla destra di* P_0O, *negativo, nel caso opposto), fra i limiti* $f(\omega_0 - 0)$ ed $f(\omega_0 + 0)$, *ed è dato precisamente da*

$$\frac{1}{2}\{f(\omega_0 + 0) + f(\omega_0 - 0)\} + \frac{\varphi}{\pi}\{f(\omega_0 + 0) - f(\omega_0 - 0)\}.$$

In particolare, per $\varphi = 0$, si ha $f(\omega, r) \to \frac{1}{2}\{f(\omega_0 + 0) + f(\omega_0 - 0)\}$.

148. - Derivata dell'integrale di Poisson rispetto ad ω.

Prima di dimostrare che è $f(\omega, r) \to f(\omega_0)$ su quasi-tutta la circonferenza di C, è opportuno studiare la derivata parziale $\dfrac{\partial f(\omega, r)}{\partial \omega}$. Derivando, rispetto ad ω, l'integrale di Poisson, abbiamo, per $0 \leq r < 1$,

$$\frac{\partial f(\omega, r)}{\partial \omega} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\frac{(1 - r^2)2r \operatorname{sen}(\alpha - \omega)}{[1 - 2r\cos(\alpha - \omega) + r^2]^2}\, d\alpha. \tag{1}$$

Supponiamo, in primo luogo, che la derivata $f'(\omega)$ esista finita per tutti gli ω di un intervallo (ω', ω''), e che, in un punto ω_0 interno ad (ω', ω'') $[\omega' < \omega_0 < \omega'']$, tale derivata sia continua. Dimostriamo, sotto queste condizioni, che quando $M \equiv (\omega, r)$ tende comunque a $P_0 \equiv (\omega_0, 1)$, è

$$\frac{\partial f(\omega, r)}{\partial \omega} \to f'(\omega_0). \tag{2}$$

Decomponiamo, a tal uopo, l'integrale che figura in (1) in due parti, relative l'una all'arco (ω', ω''), l'altra all'arco complementare rispetto all'intera circonferenza. La seconda di queste parti tende a zero, quando $M \to P_0$; ed infatti, per essa, è $(1 - r^2)2r \operatorname{sen}(\alpha - \omega) \to 0$ mentre $1 - 2r\cos(\alpha - \omega) + r^2$ resta maggiore di un numero positivo fisso, ed essa parte ha perciò il modulo minore di

$$\varepsilon \int_0^{2\pi} | f(\alpha) | \, d\alpha,$$

per ogni M sufficientemente vicino a P_0, e ciò comunque sia prefissato il numero positivo ε. Per la prima parte, si ha, invece, integrando per parti,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega'}^{\omega''} f(\alpha) \frac{(1 - r^2) 2r \operatorname{sen}(\alpha - \omega)}{[1 - 2r \cos(\alpha - \omega) + r^2]^2} \, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[f(\alpha) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\alpha - \omega) + r^2} \right]_{\omega''}^{\omega'} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\omega'}^{\omega''} f'(\alpha) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\alpha - \omega) + r^2} \, d\alpha,$$

dove il primo termine del secondo membro tende a zero quando $M \to P_0$, mentre il secondo termine tende a $f'(\omega_0)$, perchè, posto, fuori di (ω', ω''), $f'(\alpha) = 0$, esso non è che l'integrale di Poisson della funzione $f'(\alpha)$ così definita su tutto $(0, 2\pi)$ (la quale è continua per $\alpha = \omega_0$), e ad esso integrale si può applicare il risultato del n.° 146. Con ciò, sotto l'ipotesi posta, la (2) è dimostrata.

Supponiamo, ora, semplicemente l'esistenza e la finitezza della derivata $f'(\omega)$, nel solo punto ω_0, e facciamo vedere che la (2) vale, purchè M tenda a P_0 seguendo un cammino *non tangente alla circonferenza di C.*

Per semplicità di scrittura, possiamo supporre $\omega_0 = 0$. Possiamo anche supporre che sia $f(0) = f'(0) = 0$, perchè, altrimenti, basterebbe considerare la funzione $f_1(\alpha)$, definita in $(-\pi, +\pi)$ da $f_1(\omega) = f(\omega) - f(0) - \omega f'(0)$, e, invece di $f(\omega, r)$, l'integrale di Poisson $f_1(\omega, r)$ della $f_1(\omega)$. E poichè la derivata, rispetto ad ω, dell'integrale di Poisson della funzione $f(0) + \omega f'(0)$, tende, quando $M \to P_0$, verso $f'(0)$, per quello che già abbiamo stabilito, la dimostrazione della (2), per $f_1(\omega, r)$, porta immediatamente la stessa uguaglianza per $f(\omega, r)$.

Sia, dunque, $\omega_0 = 0$, $f(0) = f'(0) = 0$, e scriviamo la derivata parziale, rispetto ad ω, di $f(\omega, r)$ nella forma:

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial f(\omega, r)}{\partial \omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \frac{(1 - r^2) 2r \operatorname{sen}(\alpha - \omega)}{[1 - 2r \cos(\alpha - \omega) + r^2]^2} \, d\alpha.$$

Abbiamo

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial f(\omega, r)}{\partial \omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-\omega)+r^2}\,d\alpha +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\left\{\frac{2r\operatorname{sen}(\alpha-\omega)}{1-2r\cos(\alpha-\omega)+r^2}-\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right\}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-\omega)+r^2}\,d\alpha.$$

Per l'ipotesi $f'(0)=0$, si ha $\lim\limits_{\alpha\to 0}\{f(\alpha):\alpha\}=0$ e quindi $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left\{f(\alpha)\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right\}=0$; e poichè il primo integrale del secondo membro di (4) non è che l'integrale di Poisson della funzione $f(\omega)\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}$, la quale (supposta uguale a 0 per $\omega=0$) è continua nel punto $\omega=0$, ne viene, per quanto si è dimostrato nel n.° 146, che tale integrale tende a zero quando il punto M (interno a C) tende *comunque* al punto $P_0\equiv(0, 1)$ della circonferenza di C.

Per quanto riguarda il secondo integrale che figura in (4), osserviamo che può scriversi $\left(\text{essendo } \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha}\right)$

$$\frac{2r\operatorname{sen}(\alpha-\omega)}{1-2r\cos(\alpha-\omega)+r^2}-\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2r\operatorname{sen}(\alpha-\omega)+2r\operatorname{sen}\omega-(1+r^2)\operatorname{sen}\alpha}{[1-2r\cos(\alpha-\omega)+r^2](1-\cos\alpha)}$$

$$=\frac{2r\{\operatorname{sen}(\alpha-\omega)+\operatorname{sen}\omega-\operatorname{sen}\alpha\}}{[1-2r\cos(\alpha-\omega)+r^2](1-\cos\alpha)}-\frac{(1-r^2)}{1-2r\cos(\alpha-\omega)+r^2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},$$

e quindi

$$\left|\frac{2r\operatorname{sen}(\alpha-\omega)}{1-2r\cos(\alpha-\omega)+r^2}-\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right|$$

$$<\frac{4r\left|\operatorname{sen}\frac{\alpha-\omega}{2}\right|\cdot\left|\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right|}{(1-r)^2+4r\operatorname{sen}^2\frac{\alpha-\omega}{2}}\cdot\frac{1}{\left|\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right|}+\frac{1}{\left|\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right|}$$

$$<\left(\frac{1}{1-r}\left|\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right|+1\right):\left|\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right|,$$

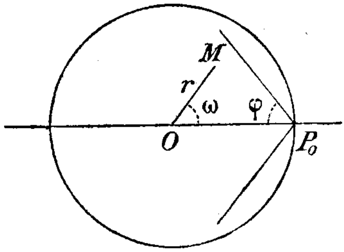
perchè

$$(1-r)^2+4r\operatorname{sen}^2\frac{\alpha-\omega}{2}>4(1-r)\sqrt{r}\left|\operatorname{sen}\frac{\alpha-\omega}{2}\right|$$

$$>4(1-r)r\left|\operatorname{sen}\frac{\alpha-\omega}{2}\right|.$$

Ora, fissato un angolo di vertice P_0, avente per bisettrice P_0O, e di ampiezza $2\varphi < \pi$, supponiamo che il punto M tenda a P_0 restando costantemente in tale angolo. Avremo sempre la relazione

$$\frac{r\,|\operatorname{sen}\omega|}{1-r\cos\omega} \leq \operatorname{tg}\varphi, \quad \text{ossia} \quad r \leq \frac{\operatorname{tg}\varphi}{|\operatorname{sen}\omega| + \operatorname{tg}\varphi\cos\omega},$$



e supposto $|\omega| < \frac{\pi}{2} - \varphi$, da cui segue $\operatorname{tg}\varphi < |\operatorname{sen}\omega| + \operatorname{tg}\varphi\cos\omega$, avremo perciò

$$\frac{\left|\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right|}{1-r} \leq \frac{\left|\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right|\left\{|\operatorname{sen}\omega| + \operatorname{tg}\varphi\cos\omega\right\}}{2\left|\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right|\cos\frac{\omega}{2} - 2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{sen}^2\frac{\omega}{2}} = \frac{|\operatorname{sen}\omega| + \operatorname{tg}\varphi\cos\omega}{2\left\{\cos\frac{\omega}{2} - \operatorname{tg}\varphi\left|\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right|\right\}},$$

e quindi

$$\left|\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right| : (1-r) < 1 : \cos\left(\varphi + \frac{|\omega|}{2}\right),$$

vale a dire, per $|\omega|$ sufficientemente piccolo, $\left|\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right| : (1-r)$ resta inferiore ad un numero fisso K. Dunque, se M appartiene all'angolo indicato di vertice P_0, ed è sufficientemente prossimo a P_0, si ha

$$\left|\frac{2r\operatorname{sen}(\alpha-\omega)}{1-2r\cos(\alpha-\omega)+r^2} - \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right| < (K+1) : \left|\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right|,$$

ed il secondo degli integrali che figurano in (4) è, in modulo, inferiore a

$$\frac{K+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(\alpha)\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}\right|\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-\omega)+r^2}\,d\alpha$$

e questo integrale tende a zero al tendere di M a P_0, per le stesse ragioni indicate per il primo degli integrali di (4). Con ciò è dimostrato quanto avevamo enunciato, vale a dire che, *se in un punto $P_0 \equiv (\omega_0, 1)$ della circonferenza di C esiste finita la derivata $f'(\omega)$, e se il punto $M \equiv (\omega, r)$ tende a P_0 restando interno ad un angolo di vertice P_0, di ampiezza minore di π e di bisettrice $P_0 O$, è*

$$\frac{\partial f(\omega, r)}{\partial \omega} \rightarrow f'(\omega_0).$$

Questo risultato è dovuto a P. Fatou [1].

149. - Comportamento dell'integrale di Poisson verso la circonferenza di C, nel caso più generale.

Poniamo $F(\alpha) = \int_0^\alpha f(\alpha) d\alpha$ ed integriamo per parti l'integrale di Poisson. Otteniamo:

$$f(\omega, r) = \frac{F(2\pi)}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\omega + r^2}$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - \omega) + r^2} d\alpha$$

$$= \frac{F(2\pi)}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\omega + r^2} + \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - \omega) + r^2} d\alpha \right\}.$$

Ora, quando M tende ad un punto $P_0 \equiv (\omega_0, 1)$ della circonferenza di C, con ω_0 diverso da 0 e da 2π, il primo termine dell'ultimo membro tende a zero; il secondo termine, invece, in virtù del risultato del n.° preced., tende a $F'(\omega_0)$, purchè questa derivata esista finita e purchè M tenda a P_0 secondo un cammino non tangente alla circonferenza di C. Ma, su quasi-tutta la circonferenza di C, è $F'(\alpha) = f(\alpha)$; dunque, *su quasi-tutta la circonferenza di C, al tendere di $M \equiv (\omega, r)$ a P_0, non tangenzialmente alla circonferenza, è $f(\omega, r) \rightarrow f(\omega_0)$. In particolare, vale la $f(\omega, r) \rightarrow f(\omega_0)$, al tendere di M a P_0, nel*

---

(1) Loc. cit. in (1) a pag. 22. Per altri risultati sullo stesso argomento, vedi: CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN, loc. cit. in (4) a pag. 356.

modo detto, quando $f(\omega_0)$ è la derivata, nel punto ω_0, dell'integrale della $f(\omega)$.

Anche questo risultato è dovuto a P. Fatou ([1]).

Da quanto abbiamo ora dimostrato e da quello che abbiamo detto nel n.° 143, segue che *se, in un punto x_0, la $f(x)$ è la derivata del suo integrale indefinito e se, in x_0, la serie di Fourier della $f(x)$ è convergente, tale serie converge, nel punto indicato, verso $f(x_0)$.*

Osservazione. — Abbiamo già osservato che, data in $(0, 2\pi)$ una funzione $f(x)$ integrabile, e detti a_n e b_n i suoi coefficienti di Eulero-Fourier, la serie

$$\frac{a_0}{2} + r(a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \ldots + r^n(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \ldots \tag{1}$$

converge per ogni r positivo e minore di 1, e tende, per $r \to 1 - 0$, alla somma della serie di Fourier della $f(x)$ in tutti i punti x in cui questa seconda serie converge. Siccome la (1) rappresenta, per quanto sappiamo, l'integrale di Poisson relativo alla funzione $f(x)$, il teorema or ora dimostrato ci dice che il limite, per $r \to 1 - 0$, della somma della (1) esiste, uguale a $f(x)$, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$; questo limite può dunque esistere e dare il valore della $f(x)$ anche quando la serie di Fourier della $f(x)$ non converge.

Il procedimento — *detto procedimento di Poisson* — che consiste nel costruire, con i coefficienti di Eulero-Fourier della funzione $f(x)$, la serie (1) e nel determinare poi il limite della somma di questa serie per $r \to 1 - 0$, *permette dunque di determinare la $f(x)$, in quasi-tutto $(0, 2\pi)$, quando siano noti i suoi coefficienti di Eulero-Fourier*; e la determinazione della $f(x)$ è completa in tutto $(0, 2\pi)$, se la $f(x)$ è una funzione continua in tutto l'intervallo indicato ([2]).

150. - Procedimento analogo a quello di Poisson.

a) Ponendo, nella serie (1) del n.° preced., $r = c^{-t}$, dove c è un numero maggiore di 1, possiamo dire che il procedi-

---

([1]) Loc. cit. in ([1]) a pag. 22.

([2]) Sul procedimento di Poisson, vedi: A. Rajchman-A. Zygmund, *Sur la possibilité d'appliquer la méthode de Riemann aux séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson.* (Math. Zeitschr., Bd. 25 (1926), pp. 261-273); A. Zygmund, loc. cit. in ([1]) a pag. 119.

mento di Poisson consiste nel formare la serie

$$\frac{1}{2} a_0 + c^{-t}(a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \ldots + c^{-nt}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \ldots,$$

mediante i coefficienti di Eulero-Fourier della funzione $f(x)$, e nel cercare il limite della somma di tale serie, per $t \to +0$.

Nelle applicazioni e specialmente in problemi di fisica-matematica, si presenta anche un altro procedimento, analogo al precedente, e che consiste nel formare, con gli stessi coefficienti a_n e b_n, la serie

$$\frac{1}{2} a_0 + c^{-t}(a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \ldots$$
$$\ldots + c^{-n^2 t}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \ldots, \tag{1}$$

e nel cercare poi il limite della sua somma, per $t \to +0$.

La serie (1) è evidentemente convergente per ogni valore di $t > 0$, riducendosi ad una serie di potenze di $c^{-t} = r$, a coefficienti tendenti a zero; e lo stesso teorema di Abel utilizzato nel n.° 143, mostra, anche nel caso attuale, che se, per un x, la serie di Fourier della $f(x)$ converge, nel medesimo punto la somma della (1) tende, per $t \to +0$, ad un limite finito, dato precisamente dalla somma della serie di Fourier considerata. Ma il limite, per $t \to +0$, della somma della (1) può esistere anche quando la serie di Fourier della $f(x)$ non converge; ed effettivamente avviene che, per quasi tutti gli x di $(0, 2\pi)$, il limite detto esiste ed è uguale a $f(x)$. Ciò è una conseguenza della seguente proposizione, che è una generalizzazione del teorema di Frobenius dimostrato nel n.° 145, e che è dovuta a T. Bromwich [1]:

Se la serie $\sum\limits_0^\infty a_n$ *è sommabile* $(C, 1)$, *vale a dire, col metodo della media aritmetica di Cesàro, ed ha per somma generalizzata* S;

se le funzioni della successione $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots$ *sono definite per un gruppo infinito di valori,* $G[t]$, *avente almeno*

---

(1) *On the limits of certain infinite series and integrals.* (Math. Ann., Bd. 65 (1908), pp. 350-369). Vedi anche: C. N. Moore, *Application of the Theory of summability to developments in orthogonal Functions.* (Bulletin of the Amer. Math. Soc., Vol. XXV (1919), pp. 258-276).

un punto limite t_0, *non appartenente al gruppo, e soddisfano, su* $G[t]$, *alle condizioni seguenti:*

1a) $\sum\limits_1^m n \mid \Delta^2\varphi_n(t) \mid < k$, *per ogni* m, *intero, positivo, dove* k *è una costante, ed è* $\Delta^2\varphi_n = \varphi_{n+2} - 2\varphi_{n+1} + \varphi_n$;

2a) $\lim\limits_{n \to \infty} n\varphi_n(t) = 0$;

3a) $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi_n(t) = 1$;

allora, la serie $\sum\limits_0^\infty a_n\varphi_n(t)$ *converge su* $G[t]$ *ed è, sempre per* t *appartenente a* $G[t]$,

$$\lim_{t \to t_0} \sum_0^\infty a_n\varphi_n(t) = S. \tag{2}$$

Per dimostrare questa proposizione, posto

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n,$$
$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1},$$

applichiamo due volte, alla somma $\sum\limits_0^m a_n\varphi_n(t)$, la trasformazione di Brunacci-Abel:

$$\begin{aligned} \sum_0^m a_n\varphi_n &= \sum_0^{m-1} s_n \{ \varphi_n - \varphi_{n+1} \} + s_m\varphi_m \\ &= \sum_0^{m-1} (n+1)\,\sigma_n\Delta^2\varphi_n + (m+1)\sigma_m\varphi_m - m\sigma_{m-1}\varphi_{m+1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Siccome è, per ipotesi $\sigma_n \to S$, quando $n \to \infty$, e vale la condizione 1a), la serie $\sum\limits_0^\infty (n+1)\sigma_n\Delta^2\varphi_n$ converge assolutamente; inoltre, sempre per la $\sigma_n \to S$ e per la condizione 2a), è $(m+1)\sigma_m\varphi_m \to 0$, $m\sigma_{m-1}\varphi_{m+1} \to 0$, quando $m \to \infty$. Da ciò segue, in virtù della (3), che anche la serie $\sum\limits_0^\infty a_n\varphi_n$ è convergente, per ogni t di $G[t]$, e che è

$$\sum_0^\infty a_n\varphi_n = \sum_0^\infty (n+1)\sigma_n\Delta^2\varphi_n. \tag{4}$$

Consideriamo ora un ε qualsiasi, maggiore di zero, ed indichiamo con m un intero positivo tale che, per $n \geq m$, sia

$|\sigma_n - S| < \varepsilon$. È allora

$$\left|\sum_0^\infty (n+1)\sigma_n\Delta^2\varphi_n - S\sum_0^\infty (n+1)\Delta^2\varphi_n\right|$$
$$< \left|\sum_0^m (n+1)(\sigma_n - S)\Delta^2\varphi_n\right| + \varepsilon\sum_{m+1}^\infty (n+1)\,|\Delta^2\varphi_n|$$

e, per la condizione 1ª),

$$< \left|\sum_0^m (n+1)(\sigma_n - S)\Delta^2\varphi_n\right| + 2\varepsilon K.$$

Siccome poi, per la condizione 3ª), è $\lim\limits_{t\to t_0} \Delta^2\varphi_n = 0$, abbiamo, per un δ positivo e sufficientemente piccolo, e per tutti i t di $G[t]$, tali che $|t - t_0| < \delta$,

$$\left|\sum_0^\infty (n+1)\sigma_n\Delta^2\varphi_n - S\sum_0^\infty (n+1)\Delta^2\varphi_n\right| < (1+2K)\varepsilon.$$

Ma, applicando la (4) per $a_0 = 1$ ed $a_1 = a_2 = \dots = 0$, si ottiene

$$\varphi_0 = \sum_0^\infty (n+1)\Delta^2\varphi_n;$$

è dunque, per tutti i t or ora indicati,

$$\left|\sum_0^\infty a_n\varphi_n - S\varphi_0\right| < (1+2K)\varepsilon,$$

e siccome ε è arbitrario e [per la condizione 3ª)] $\varphi_0 \to 1$ per $t \to t_0$, ne viene la (2).

Da questa dimostrazione segue pure che, se a_n è una funzione limitata di una variabile x, in un certo intervallo (x', x''), e se σ_n tende uniformemente, per ogni x di (x', x''), verso una funzione limitata $S(x)$, allora la convergenza di $\sum\limits_0^\infty a_n\varphi_n(t)$ verso $S(x)$, per $t \to t_0$, è uniforme rispetto a tutti gli x dell'intervallo detto.

b) Possiamo mostrare facilmente che, se poniamo $\varphi_n(t) = c^{-n^2t}$, con $c > 1$, $t_0 = 0$, e prendiamo per $G[t]$ l'insieme dei valori $t > 0$, le condizioni 1ª), 2ª) e 3ª) del precedente teorema sono verificate. Per la 2ª) e la 3ª), la cosa è evidente. Per quanto riguarda la 1ª), abbiamo

$$\Delta^2\varphi_n = c^{-(n+2)^2t} - 2c^{-(n+1)^2t} + c^{-n^2t}$$
$$= 2te^{-(n+\theta)^2t}\log c\,[2(n+\theta)^2t\log c - 1],$$

con $0 < \theta < 2$ [1]; e perciò, quando è $n < \frac{1}{\sqrt{2t \log c}} - 2$, è $\Delta^2 \varphi_n < 0$, e quando è $n > \frac{1}{\sqrt{2t \log c}}$, è $\Delta^2 \varphi_n > 0$. Dunque, per ciascun $t > 0$, $\Delta^2 \varphi_n$ può cambiare segno al massimo tre volte, e per dimostrare la condizione 1ª) basta provare che esiste un numero finito H di cui resta sempre inferiore, in modulo, la somma $\sum\limits_{n=r}^{s} n\Delta^2\varphi_n$, estesa ad un qualsiasi numero di termini consecutivi di $\sum n\Delta^2\varphi_n$, tutti dello stesso segno. Ora è, nel caso attuale, per una tal somma,

$$\begin{aligned}\sum_{n=r}^{s} n\Delta^2\varphi_n &= rc^{-r^2t} - (r-1)c^{-(r+1)^2t} - (s+1)c^{-(s+1)^2t} + sc^{-(s+2)^2t} \\ &= r(c^{-r^2t} - c^{-(r+1)^2t}) - (s+1)(c^{-(s+1)^2t} - c^{-(s+2)^2t}) \\ &+ c^{-(r+1)^2t} - c^{-(s+2)^2t},\end{aligned}$$

e siccome è

$$\begin{aligned}0 < n(c^{-n^2t} - c^{-(n+1)^2t}) &= 2n(n+\theta')tc^{-(n+\theta')^2t}\log c \\ &< 2\,(n+\theta')^2tc^{-(n+\theta')^2t}\log c \\ &\leq 2e^{-1},\end{aligned}$$

e

$$c^{-(r+1)^2t} - c^{-(s+1)^2t} < c^{-(r+1)^2t} < 1,$$

ne viene precisamente

$$\Big|\sum_{r}^{s} n\Delta^2\varphi_n\Big| < 4e^{-1} + 1.$$

c) Da quanto abbiamo dimostrato in ciò che precede e dai risultati dei n.ⁱ 59, 60 e 62, relativi al polinomio trigonometrico di Fejér, possiamo dedurre immediatamente che: *se* $f(x)$ *è una funzione integrabile in* $(0, 2\pi)$, *e se* a_n *e* b_n *sono i suoi coefficienti di Eulero-Fourier, la serie*

$$\begin{aligned}(5)\qquad &\frac{1}{2}a_0 + c^{-t}(a_1\cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \dots \\ &+ c^{-n^2t}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) + \dots\end{aligned}$$

---

[1] Ciò perchè, se in $(x, x+2h)$ le $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ sono continue, è

$$\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = f''(x+\theta h)$$

con $0 < \theta < 2$ (v. n.° 30).

dove è $c > 1$, *converge per ogni* x *ed ogni* $t > 0$ (*e la convergenza è uniforme rispetto ad* x *e rispetto a* t, *purchè sia* $t \geq t_1 > 0$). *Per* $t \to +0$, *la somma della serie scritta tende a* $f(x)$ *in quasi-tutto* $(0, 2\pi)$; *in particolare, essa tende a* $f(x)$ *in ogni punto* x *in cui la* $f(x)$ *è continua, e tende invece a* $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *dove la* $f(x)$ *ha una discontinuità di 1ª specie. Infine, in ogni intervallo* (x_1, x_2) *tutto costituito di punti in cui la* $f(x)$ *è continua, la convergenza della* (5), *per* $t \to +0$, *verso la* $f(x)$, *è uniforme.*

151. — Problema di Dirichlet.

a) L'integrale di Poisson permette di risolvere, in un caso particolarmente notevole, il *problema di Dirichlet.* Questo celebre problema consiste nel trovare una funzione armonica nell'interno di un dato contorno, la quale sia continua anche sul contorno e su di esso assuma valori dati (in modo continuo).

Precisando quanto abbiamo già detto nel n.° 144, con funzione $F(x, y)$ *armonica nell'interno di un dato contorno,* intendiamo una funzione che, in ogni punto interno a tale contorno, sia continua, ammetta finite le derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, e soddisfi all'equazione di Laplace

$$\Delta_2 F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \text{ (1)}.$$

Sia C un cerchio di raggio R, che potremo senz'altro supporre uguale all'unità, ed avente il centro nell'origine delle coordinate x, y. Supponiamo che, sulla circonferenza di C, sia data una funzione ovunque continua, $f(\alpha)$, e costruiamo l'integrale di Poisson

$$(1) \qquad F(x; y) \equiv f(\omega, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - \omega) + r^2} \, d\alpha.$$

---

(1) Ordinariamente si ammette, in ogni punto interno al contorno considerato, anche la continuità delle derivate parziali dei primi due ordini della $F(x, y)$. Ma l'esistenza della $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ e la continuità di tutte le derivate parziali della F dei primi due ordini sono (per quanto diremo nel presente n.°) una conseguenza delle ipotesi più semplici da noi poste.

Per quanto abbiamo dimostrato nel n.° 144, la funzione così costruita è armonica nell'interno di C; dai n.[i] 145 e 146 segue, poi, che, quando il punto $M \equiv (x, y)$, interno a C, tende ad un punto $P_0 \equiv (\omega = \alpha_0,\ r = 1)$ della circonferenza di C, è $F(x, y) \rightarrow f(\alpha_0)$. Dunque, la funzione $F(x, y)$, definita dalla (1) nell'interno di C ed assumente sulla circonferenza di C i valori dati dalla $f(\alpha)$, risulta continua in tutto C, circonferenza compresa; e poichè essa è armonica nell'interno di C, risolve il problema di Dirichlet, nel caso del cerchio.

La soluzione, così ottenuta del problema di Dirichlet, è poi l'unica soluzione possibile. Ed infatti, se ne esistesse un'altra, la differenza fra la $F(x, y)$ e quest'altra soluzione sarebbe una funzione $\psi(x, y)$ continua in tutto C, circonferenza compresa, nulla su tale circonferenza ed armonica nell'interno di C. Posto allora [1]

$$\psi(x, y) : (c - x^2) = q(x, y),$$

con $c > 1$, la funzione $q(x, y)$ risulterebbe continua in tutto C, circonferenza compresa, ed uguale allo zero su tale circonferenza; inoltre, in ogni punto interno a C, la $q(x, y)$ ammetterebbe finite le derivate parziali $\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}, \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}$, e queste derivate verificherebbero l'equazione

$$(2) \qquad \Delta_2 \psi = (c - x^2)\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}\right) - 4x\frac{\partial q}{\partial x} - 2q = 0.$$

Se la $q(x, y)$ assumesse, nell'interno di C, dei valori positivi, essa avrebbe un massimo $q(x_0, y_0) > 0$, in un punto (x_0, y_0) interno a C. In tale punto di massimo le $\frac{\partial q}{\partial x}$ e $\frac{\partial q}{\partial y}$ dovrebbero essere nulle e le derivate seconde $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}$ non potrebbero essere positive. E siccome dentro C è sempre $c - x^2 > 0$, la (2) non potrebbe essere verificata nel punto (x_0, y_0). Dovrebbe

---

[1] Il metodo di questa dimostrazione è dovuto ad A. Paraf (*Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, T. VI (1892), pp. H.1 — H.75).

dunque essere sempre, nell'interno di C, $q(x, y) \leq 0$, e per ragioni analoghe anche $q(x, y) \geq 0$, e quindi $q(x, y) \equiv 0$.

Ciò prova l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet [1].

b) L'integrale di Poisson dà la soluzione del problema di Dirichlet anche nel caso in cui i valori assegnati sulla circonferenza di C non variano con continuità. Infatti, tale integrale risolve il problema di Dirichlet anche se la $f(\alpha)$ è semplicemente integrabile: in questo caso però la funzione armonica fornita dall'integrale di Poisson tende verso $f(\alpha)$ soltanto su quasi–tutta la circonferenza di C, e sotto la condizione che il punto interno a C tenda alla circonferenza non tangenzialmente alla circonferenza medesima (n.° 149).

c) Il risultato del n.° 148 fornisce la soluzione del problema di Dirichlet anche in un caso in cui la $f(\alpha)$ non è integrabile.

Infatti, se la $f(\alpha)$ è, su tutta la circonferenza di C, la derivata finita di una funzione continua e periodica $\varphi(\alpha)$, la derivata parziale rispetto ad ω dell'integrale di Poisson $\varphi(\omega, r)$, della $\varphi(\alpha)$, tende a $f(\alpha)$ quando il punto interno M tende alla circonferenza di C lungo un cammino non tangente alla circonferenza medesima (n.° 148). Ma essendo

$$\varphi(\omega, r) = \frac{1}{2} a_0 + r(a_1 \cos \omega + b_1 \operatorname{sen} \omega) + \dots + \\ + r^n(a_n \cos n\omega + b_n \operatorname{sen} n\omega) + \dots,$$

dove a_n e b_n sono i coefficienti di Eulero-Fourier della $\varphi(\alpha)$, è

$$\frac{\partial}{\partial\omega} \varphi(\omega, r) = r(-a_1 \operatorname{sen} \omega + b_1 \cos \omega) + \dots + \\ + r^n(-na_n \operatorname{sen} n\omega + nb_n \cos n\omega) + \dots,$$

e questa serie, che è una serie di potenze nella r, converge, qualunque sia ω, per ogni r positivo e minore di 1; questa medesima serie, essendo la parte reale di una serie di potenze in $z = re^{i\omega}$, convergente per $|z| < 1$, rappresenta una funzione armonica nell'interno di C. La funzione armonica così ottenuta dà la soluzione del problema di Dirichlet nel caso ora considerato.

---

(1) Il ragionamento ora fatto vale evidentemente per ogni contorno C, anche non circolare.

d) Proponiamoci ora di risolvere il problema di Dirichlet per la corona circolare.

Supponiamo di considerare due cerchi concentrici C e C', di centro l'origine delle coordinate e di raggi rispettivi R e R', con $R > R'$; supponiamo poi di avere, sulle circonferenze di C e C', due funzioni continue (e periodiche) $f(\alpha)$ e $\varphi(\alpha)$, rispettivamente. Vogliamo determinare quella funzione che è armonica nell'interno della corona circolare Γ, limitata dalle circonferenze di C e C', che è continua in tutto Γ, contorno compreso, e che, sulle circonferenze di C e C', assume rispettivamente i valori $f(\alpha)$ e $\varphi(\alpha)$ [1].

La soluzione del problema di Dirichlet per il cerchio C, data in *a)*, mediante l'integrale di Poisson, che, sviluppato in serie, si scrive (n.° 143)

$$\frac{1}{2}a_0 + r(a_1 \cos \omega + b_1 \operatorname{sen} \omega) + \dots + r^n(a_n \cos n\omega + b_n \operatorname{sen} n\omega) + \dots,$$

dove a_n e b_n sono i coefficienti di Eulero-Fourier della funzione $f(\alpha)$, ci suggerisce di cercare la soluzione del problema attuale sotto la forma di uno sviluppo in serie costruito con i coefficienti di Eulero-Fourier delle due funzioni $f(\alpha)$ e $\varphi(\alpha)$.

Seguendo questa via, consideriamo le serie di Fourier

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos \alpha + b_1 \operatorname{sen} \alpha) + \dots + (a_n \cos n\alpha + b_n \operatorname{sen} n\alpha) + \dots,$$

$$\frac{1}{2}a_0' + (a_1' \cos \alpha + b_1' \operatorname{sen} \alpha) + \dots + (a_n' \cos n\alpha + b_n' \operatorname{sen} n\alpha) + \dots,$$

rispettivamente della $f(\alpha)$ e della $\varphi(\alpha)$, e cominciamo con l'osservare che la soluzione del nostro problema, quando fosse

$$f(\alpha) \equiv \frac{1}{2}a_0, \quad \varphi(\alpha) \equiv \frac{1}{2}a_0',$$

sarebbe data senz'altro da

$$(3)\quad \frac{1}{2}a_0 \frac{\log \frac{R'}{r}}{\log q} + \frac{1}{2}a_0' \frac{\log \frac{r}{R}}{\log q} = \frac{a_0 \log R' - a_0' \log R}{2 \log q} + \frac{a_0' - a_0}{2 \log q} \log r,$$

---

[1] Il ragionamento fatto alla fine di *a)*, prova che questo problema non può ammettere più di una soluzione.

dove si è posto $q=R':R$ ed $r=\sqrt{x^2+y^2}$: infatti, $\log\frac{R'}{r}$ e $\log\frac{r}{R}$ sono due funzioni armoniche in Γ [1] e continue anche sul contorno, la prima delle quali assume i valori $\log q$ e 0, rispettivamente sulle circonferenze di C e di C', mentre la seconda assume, sulle stesse circonferenze, i valori 0 e $\log q$.

Osserviamo, inoltre, che, se fosse

$$f(\alpha)\equiv a_n\cos n\alpha+b_n\operatorname{sen} n\alpha,$$
$$\varphi(\alpha)\equiv a_n'\cos n\alpha+b_n'\operatorname{sen} n\alpha,$$

la soluzione del nostro problema sarebbe data da

$$\frac{\left(\frac{r}{R'}\right)^n-\left(\frac{R'}{r}\right)^n}{q^{-n}-q^n}(a_n\cos n\omega+b_n\operatorname{sen} n\omega)+\frac{\left(\frac{R}{r}\right)^n-\left(\frac{r}{R}\right)^n}{q^{-n}-q^n}(a_n'\cos n\omega+b_n'\operatorname{sen} n\omega)$$
$$=\left[\frac{a_n-a_n'q^n}{1-q^{2n}}\left(\frac{r}{R}\right)^n+\frac{a_n'-a_nq^n}{1-q^{2n}}\left(\frac{R'}{r}\right)^n\right]\cos n\omega+$$
$$+\left[\frac{b_n-b_n'q^n}{1-q^{2n}}\left(\frac{r}{R}\right)^n+\frac{b_n'-b_nq^n}{1-q^{2n}}\left(\frac{R'}{r}\right)^n\right]\operatorname{sen} n\omega,$$

ciò che si verifica facilmente [2].

Dopo di ciò, consideriamo la funzione definita, nell'interno di Γ, da

$$\Psi(x,y)\equiv\psi(\omega,r)=\left\{\frac{a_0\log R'-a_0'\log R}{2\log q}+\frac{a_0'-a_0}{2\log q}\log r\right\}+$$
$$(4)\qquad +\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{a_n-a_n'q^n}{1-q^{2n}}\left(\frac{r}{R}\right)^n+\frac{a_n'-a_nq^n}{1-q^{2n}}\left(\frac{R'}{r}\right)^n\right]\cos n\omega+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{b_n-b_n'q^n}{1-q^{2n}}\left(\frac{r}{R}\right)^n+\frac{b_n'-b_nq^n}{1-q^{2n}}\left(\frac{R'}{r}\right)^n\right]\operatorname{sen} n\omega\right\}.$$

---

(1) Si verifica immediatamente che $\log r$ è una funzione armonica in Γ: è, infatti, eseguendo le derivazioni,

$$\Delta_2\log r=\frac{2r^2-2(x^2+y^2)}{r^4}=0.$$

(2) Poichè, per $z=re^{i\omega}$, è $z^n=r^n(\cos n\omega+i\operatorname{sen} n\omega)$, si ha che $r^n\cos n\omega$ e $r^n\operatorname{sen} n\omega$ sono funzioni armoniche in Γ, anche per n intero negativo.

Per mostrare che questa serie converge in ogni punto interno a Γ, decomponiamola nella somma delle due serie seguenti

$$(5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega + B_n \operatorname{sen} n\omega)\left(\frac{r}{R}\right)^n,$$

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (A_n' \cos n\omega + B_n' \operatorname{sen} n\omega)\left(\frac{R'}{r}\right)^n,$$

dove abbiamo posto

$$A_n = \frac{a_n - a_n' q^n}{1 - q^{2n}}, \quad B_n = \frac{b_n - b_n' q^n}{1 - q^{2n}},$$

$$A_n' = \frac{a_n' - a_n q^n}{1 - q^{2n}}, \quad B_n' = \frac{b_n' - b_n q^n}{1 - q^{2n}}.$$

Da queste posizioni segue

$$|A_n| \leq \frac{|a_n| + |a_n'|}{1 - q}, \quad |B_n| \leq \frac{|b_n| + |b_n'|}{1 - q},$$

$$|A_n'| \leq \frac{|a_n| + |a_n'|}{1 - q}, \quad |B_n'| \leq \frac{|b_n| + |b_n'|}{1 - q},$$

e siccome, per $n \to \infty$, è $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, $a_n' \to 0$, $b_n' \to 0$, la serie (5) risulta convergente, per ogni $r < R$, insieme con tutte le serie che da essa si deducono per derivazione termine a termine, e tutte queste serie convergono uniformemente, rispetto a (r, ω), nel campo $r \leq R - \delta$, con $\delta < 0$; la serie (6), insieme con le serie da essa ottenute per derivazione termine a termine, converge, invece, uniformemente nel campo $r \geq R' + \delta$. Dunque la serie dell' ultimo membro di (4) converge nell' interno di Γ, e $\Psi(x, y)$ risulta, in tale interno, una funzione armonica.

L' ultimo membro di (4), per $r = R$, si riduce alla serie di Fourier della $f(\alpha)$: esso è perciò, per $r = R$, sommabile col metodo della media aritmetica di Cesàro (in virtù del teorema di Fejér del n.° 59); e con lo stesso metodo è sommabile la serie (6), sempre per $r = R$ (perchè, per tale valore di r, questa serie è convergente), e quindi lo è anche la (5). E siccome la serie (6) è continua sulla circonferenza di C, ed alla (5) può applicarsi il teorema di Frobenius del n.° 145, possiamo affermare che è

$$\lim_{r \to R-0} \psi(\omega, r) = f(\omega),$$

e la convergenza è uniforme rispetto a tutti gli ω. Ne segue che la funzione $\Psi(x, y)$, definita dalla (4) nell' interno di Γ e posta uguale alla $f(\alpha)$ sulla circonferenza di C, risulta continua su questa circonferenza.

Analogamente, per la circonferenza di C', quando su di essa si ponga la $\Psi(x, y)$ uguale alla $\varphi(\alpha)$.

La funzione $\Psi(x, y)$ risolve, perciò, il problema che ci eravamo proposti.

Osserviamo che la (4), per $R' = 0$, si riduce allo sviluppo in serie dell' integrale di Poisson. Osserviamo pure che il metodo qui seguito consente di risolvere il problema di Dirichlet per la corona circolare, anche se i valori dati sul contorno non variano con continuità [1].

§ 2. L' integrale di Fourier.

152. – Considerazioni preliminari.

Quando sia data una funzione $f(x)$ nell' intervallo $(0, 2\pi)$, sappiamo che, sotto opportune ipotesi, essa è sviluppabile in serie di Fourier. Se la $f(x)$ è data, non in $(0, 2\pi)$, ma in un intervallo (a, b), ponendo (come già si è detto nell' Osservazione del n.° 43) $x = a + \frac{b-a}{2\pi} x'$, $f(x) = f(a + \frac{b-a}{2\pi} x') \equiv \varphi(x')$, si avrà, sempre sotto opportune ipotesi,

$$\varphi(x') = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx' + b_n \operatorname{sen} nx')$$

---

(1) Per il metodo con cui abbiamo risolto il problema di Dirichlet relativo alla corona circolare, vedi: T. H. Gronwall, *Some special boundary problems in the theory of harmonics functions.* (Bulletin of the Amer. Math. Soc., Vol. XIX (1913), pp. 227-233). Sullo stesso problema, sempre per la corona circolare, vedi pure: H. Villat, *Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire.* (Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXXIII (1912), pp. 134-174); M. Picone, *Sul problema di Dirichlet per la corona circolare.* (Bollettino dell' U. M. I. (1926), pp. 114-118). Sul problema di Dirichlet si veda anche: G. C. Evans, *The logarithmic Potential, discontinuous Dirichlet and Neumann problems.* (New York, 1927).

con

$$a_n = \frac{1}{\cancel{2}\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha')\cos n\alpha' d\alpha' = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\cos\frac{2n\pi}{b-a}(\alpha-a)\,d\alpha,$$

$$b_n = \frac{1}{\cancel{2}\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha')\,\mathrm{sen}\, n\alpha' d\alpha' = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\,\mathrm{sen}\frac{2n\pi}{b-a}(\alpha-a)\,d\alpha,$$

e quindi

$$(1)\qquad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty \left\{ a_n \cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) + b_n\,\mathrm{sen}\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\right\},$$

ed osservando che è

$$\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) + b_n\,\mathrm{sen}\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-\alpha)d\alpha =$$

$$\left\{\frac{2}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\cos\frac{2n\pi\alpha}{b-a}d\alpha\right\}\cos\frac{2n\pi x}{b-a} + \left\{\frac{2}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\,\mathrm{sen}\frac{2n\pi\alpha}{b-a}d\alpha\right\}\mathrm{sen}\frac{2n\pi x}{b-a},$$

si ha anche

$$(2)\qquad f(x) = \frac{1}{2}a'_0 + \sum_1^\infty\left(a'_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b'_n\,\mathrm{sen}\frac{2n\pi x}{b-a}\right),$$

con

$$a_n' = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\cos\frac{2n\pi\alpha}{b-a}d\alpha,$$

$$b_n' = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\,\mathrm{sen}\frac{2n\pi\alpha}{b-a}d\alpha.$$

Se, infine, la $f(x)$ è data in un intervallo infinito, e non è periodica, non può trovarsi per essa uno sviluppo del tipo (2), valevole su tutto l'intervallo in cui è data. In questo caso, la rappresentazione analitica della $f(x)$ — sempre sotto opportune ipotesi — può ottenersi in forma di integrale; ed un integrale importante, che si presta a tale rappresentazione, è quello dovuto a Fourier, e che noi vogliamo studiare nei n.[i] seguenti.

153. - Osservazioni sull'integrale di Dirichlet.

Data una funzione $f(x)$, integrabile in $(0, 2\pi)$, e supposto che, in un punto x di questo intervallo, la sua serie di Fourier, converga verso il valore $\Phi(x)$, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è possibile di determinare due numeri positivi σ ed N, con $\sigma \leq \pi:2$, in modo che, per ogni m, *intero o no*, maggiore di N, sia

$$\left| \int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz \right| < \varepsilon, \tag{1}$$

dove, come al solito, è $\varphi(z) = f(x + 2z) + f(x - 2z) - 2\Phi(x)$, e la $f(x)$ si intende definita fuori di $(0, 2\pi)$ mediante la periodicità, di periodo 2π. Ed infatti, per l'ultima proposizione del n.° 100, possiamo determinare σ ed N in modo che, per ogni intero $n > (N-1):2$, sia

$$\left| \int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z} dz \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se m è un qualsiasi numero maggiore di N, potremo scrivere $m = 2n + 1 + \delta$, con n intero e maggiore di $(N-1):2$ e $|\delta| < 2$, ed avremo

$$\left| \int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz - \int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)z}{z} dz \right|$$
$$< \int_0^\sigma | \varphi(z)\delta | dz < 2\int_0^\sigma | \varphi(z) | dz.$$

Supponendo quindi σ anche tale che risulti

$$\int_0^\sigma | \varphi(z) | dz < \frac{\varepsilon}{4},$$

si ha, per ogni $m > N$, la (1).

Dalla (1), segue

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^{\pi:2} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz = 0. \tag{2}$$

Ed infatti, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, siano σ e N i numeri che rendono soddisfatta la (1). L'integrale

$$\int_\sigma^{\pi:2} \frac{\varphi(z)}{z} \operatorname{sen} mz \, dz,$$

che è esteso ad un intervallo non contenente il punto $z = 0$, tende a zero per $m \to \infty$, in virtù del teorema del n.° 76; è possibile, perciò, di determinare un N_1 tale che, per ogni $m > N_1$, sia

$$\left| \int_\sigma^{\pi:2} \frac{\varphi(z)}{z} \operatorname{sen} mz \, dz \right| < \varepsilon.$$

E potendosi scrivere

$$\left| \int_0^{\pi:2} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz \right| \leq \left| \int_0^{\sigma} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz \right| + \left| \int_\sigma^{\pi:2} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz \right|,$$

ne viene allora che, per ogni m maggiore del più grande dei due numeri N e N_1, è

$$\left| \int_0^{\pi:2} \varphi(z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz \right| < 2\varepsilon,$$

il che dimostra la (2).

Supponendo ora che il punto x considerato sia un punto di continuità o di discontinuità di 1ª specie per la $f(x)$, dovrà essere $\Phi(x) = \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, e la (2) potrà scriversi

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^{\pi:2} \{ f(x + 2z) + f(x - 2z) \} \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz =$$

$$= \{ f(x+0) + f(x-0) \} \lim_{m \to \infty} \int_0^{\pi:2} \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz.$$

Ma è

$$\int_0^{\pi:2} \{ f(x + 2z) + f(x - 2z) \} \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz = \int_{-\pi:2}^{\pi:2} f(x + 2z) \frac{\operatorname{sen} mz}{z} dz =$$

$$= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} n(\alpha - x)}{\alpha - x} d\alpha,$$

avendo posto $n = m:2$; ed è poi, come è noto ([1]),

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^{\pi:2} \frac{\operatorname{sen} mz}{z}\, dz = \lim_{m \to \infty} \int_0^{m\pi:2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Ne viene, perciò,

$$(3) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} n(\alpha - x)}{\alpha - x}\, d\alpha = \frac{1}{2} \{ f(x+0) + f(x-0) \}.$$

In quanto precede, supposta la $f(x)$ data in $(0, 2\pi)$, la si è definita, nelle parti di $(x - \pi,\ x + \pi)$ esterne a $(0, 2\pi)$, in base alla periodicità, di periodo 2π. Si può però supporre che la $f(\alpha)$ sia data, anzichè in $(0, 2\pi)$, in un qualunque intervallo di ampiezza 2π. Dunque, la formula (3) vale supponendo la $f(x)$ data (ed integrabile) in $(x - \pi,\ x + \pi)$, continua o con discontinuità di 1ª specie nel punto x, e tale che, in questo punto, risulti convergente la sua serie di Fourier. Rileviamo, infine, che, nella (3), n è un numero positivo qualunque, non necessariamente intero.

154. - Integrale su intervallo infinito.

Sia $f(x)$ una funzione data nell'intervallo infinito $(a, +\infty)$, la quale sia integrabile in ogni intervallo finito (a, b), con $b > a$. *Se esiste, determinato e finito, il limite di* $\int_a^b f(x)dx$ *quando* $b \to +\infty$, *si dirà che la* $f(x)$ *è integrabile in* $(a, +\infty)$ *ed il limite indicato sarà detto integrale della* $f(x)$ *in* $(a, +\infty)$, *e si scriverà*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Se in $(a, +\infty)$ *è integrabile anche il modulo* $|f(x)|$, *si dirà che la* $f(x)$ *è assolutamente integrabile in* $(a, +\infty)$.

È evidente che, se esiste finito il limite, per $b \to +\infty$, di

---

([1]) E ciò, del resto, può dedursi dalla formula (2) del n.º 100.

$\int_a^b |f(x)|\,dx$, esiste anche quello di $\int_a^b f(x)dx$: basta, per questo, applicare la condizione di Cauchy sull'esistenza del limite.

Analoghe definizioni si hanno per l'intervallo $(-\infty, b)$.

Diremo, infine, che la $f(x)$, data ed integrabile in qualsiasi intervallo finito, *è integrabile su* $(-\infty, +\infty)$, *se è integrabile tanto in* $(a, +\infty)$ *quanto in* $(-\infty, b)$.

155. - **Lemma.**

Sia $\varphi(x)$ *una funzione data in* $(a, +\infty)$ *ed integrabile in ogni intervallo finito* (a, b). *Si supponga, di più, che valga una qualunque delle seguenti ipotesi:*

α) $\varphi(x)$ *è assolutamente integrabile in* $(a, +\infty)$;

β) $\varphi(x)$ *è monotona in* $(a, +\infty)$ *e tende a zero, per* $x \to +\infty$.

Allora esistono finiti, per ogni n *positivo (non necessariamente intero), gli integrali*

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) \operatorname{sen} nx\,dx, \quad \int_a^{+\infty} \varphi(x) \cos nx\,dx, \tag{1}$$

ed entrambi tendono a zero, per $n \to \infty$.

Lo stesso avviene se, invece di α) *o* β), *è verificata la seguente ipotesi:*

γ) *è* $\varphi(x) = \psi(x)\cos(\lambda x + \mu)$, *oppure* $\varphi(x) = \psi(x) \operatorname{sen}(\lambda x + \mu)$, *con* $\psi(x)$ *funzione monotona, tendente a zero per* $x \to +\infty$,

purchè, quando $\psi(x)$ *non sia integrabile in* $(a, +\infty)$, *non venga considerato il valore* $n = |\lambda|$ [1].

Supposto, in primo luogo, che valga l'ipotesi α), e preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, determiniamo un numero $a_1 \geq a$, in modo che, se è $b > a' \geq a_1$, risulti

$$\int_{a'}^{b} |\varphi(x)|\,dx < \varepsilon. \tag{2}$$

---

[1] Cfr. A. Pringsheim, *Ueber neue Gültigkeitsbedingungen für die Fourierschen Integralformel.* (Math. Annalen, Bd. 68 (1910), pp. 367-408). Nel caso della condiz. β), il Pringsheim non fa l'ipotesi $\varphi(x) \to 0$, per $x \to +\infty$; tale ipotesi è, peraltro, necessaria.

È allora

$$\left|\int_{a'}^{b}\varphi(x)\operatorname{sen} nx\,dx\right| \leq \int_{a'}^{b}|\varphi(x)|\,dx < \varepsilon,$$

e ciò dimostra che esiste, finito, il primo degli integrali (1).

Dalla (2) segue anche

$$\left|\int_{a'}^{+\infty}\varphi(x)\operatorname{sen} nx\,dx\right| \leq \int_{a'}^{+\infty}|\varphi(x)|\,dx \leq \varepsilon,$$

per ogni $a' \geq a_1$. Fissato uno di questi a', in virtù del teorema del n.° 76, è, per $n \to \infty$,

$$(3) \qquad \int_{a}^{a'}\varphi(x)\operatorname{sen} nx\,dx \to 0,$$

e perciò, per ogni n maggiore di un certo n_1,

$$\left|\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)\operatorname{sen} nx\,dx\right| \leq \left|\int_{a}^{a'}\ldots\right| + \left|\int_{a'}^{+\infty}\ldots\right| < 2\varepsilon,$$

e ciò dimostra che il primo degli integrali (1) tende a zero, per $n \to \infty$.

La dimostrazione può ripetersi anche per il secondo degli integrali (1).

Ammettiamo ora che valga l'ipotesi β). Per il 2° teorema della media, abbiamo, per ogni a' maggiore di a e per ogni $b > a'$,

$$\left|\int_{a'}^{b}\varphi(x)\operatorname{sen} nx\,dx\right| = \left|\varphi(a')\int_{a'}^{b'}\operatorname{sen} nx\,dx\right|$$
$$< \frac{2}{n}|\varphi(a')|,$$

e quindi, se è $|\varphi(a_1)| < \varepsilon$,

$$\left|\int_{a'}^{b}\varphi(x)\operatorname{sen} nx\,dx\right| < \frac{2\varepsilon}{n},$$

purchè sia $b > a' \geq a_1$. Il primo degli integrali (1) esiste dunque finito. Dalla disuguaglianza ora scritta segue poi, per $b \to +\infty$,

$$\left| \int_{a'}^{+\infty} \varphi(x) \operatorname{sen} nx \, dx \right| \leq \frac{2\varepsilon}{n},$$

e di qui e dalla (3) risulta che il primo degli integrali (1) tende a zero, per $n \to \infty$. Lo stesso ragionamento vale anche per il secondo degli integrali (1).

Supponiamo, infine, che valga l'ipotesi γ). Allora, avendosi

$$\cos(\lambda x + \mu) \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{sen} [(n + \lambda)x + \mu] + \operatorname{sen} [(n - \lambda)x - \mu] \right\},$$

$$\operatorname{sen}(\lambda x + \mu) \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2} \left\{ \cos [(n - \lambda)x - \mu] - \cos [(n + \lambda)x + \mu] \right\},$$

il primo degli integrali (1) si scrive

$$\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \psi(x) \operatorname{sen} [(n + \lambda)x + \mu] \, dx + \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \psi(x) \operatorname{sen} [(n - \lambda)x - \mu] \, dx,$$

oppure

$$\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \psi(x) \cos [(n - \lambda)x - \mu] \, dx - \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \psi(x) \cos [(n + \lambda)x + \mu] \, dx,$$

e, se è $n \neq |\lambda|$, per ciascuno dei quattro integrali ora scritti si può ragionare come nel caso dell'ipotesi β).

156. - Prima forma dell'integrale di Fourier.

Dimostriamo la seguente proposizione:

Sia $f(x)$ una funzione data su $(-\infty, +\infty)$ ed integrabile in ogni intervallo finito (a, b), e supponiamo che valga una qualunque delle seguenti ipotesi:

α) *$f(x):x$ è assolutamente integrabile in $(1, +\infty)$;*

β) *$f(x):x$ è, in $(a, +\infty)$, per un $a > 0$, monotona e tendente a zero quando $x \to +\infty$, oppure a variazione limitata ed ancora tendente a zero, per $x \to +\infty$;*

γ) *la $f(x)$ è, per un $a > 0$ e per qualunque $b > a$, assolutamente continua in (a, b), con $f(x):x \to 0$ per $x \to +\infty$, e $f'(x):x$ risulta assolutamente integrabile in $(a, +\infty)$;*

δ) *per un* $a > 0$, *è in* $(a, +\infty)$, $f(x) \equiv \psi(x) \cos(\lambda x + \mu)$ *oppure* $f(x) \equiv \psi(x) \operatorname{sen}(\lambda x + \mu)$, *con* $\psi(x)$ *soddisfacente, in ambedue i casi, alla condizione* β).

Supponiamo poi che, per un $b < 0$, *in* $(-\infty, b)$ *valga una ipotesi analoga ad una qualunque delle* α), β), γ), δ).

Supponiamo, infine, che, in un dato punto x_0, *la* $f(x)$ *sia continua oppure abbia una discontinuità di 1ª specie, e che la sua serie di Fourier risulti, in* x_0, *convergente.*

Vale allora la formula di Fourier (1ª forma)

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\,\frac{\operatorname{sen} n(\alpha - x_0)}{\alpha - x_0}\,d\alpha = \frac{1}{2}\{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)\},$$

intendendo che, in questa formula, non debba considerarsi il valore $n = |\lambda|$, *nel caso dell'ipotesi* δ) [1].

L'integrale che figura nella (1) dicesi *integrale di Fourier* (1ª forma); il numero n che esso contiene è un qualsiasi numero positivo.

Per la dimostrazione del teorema enunciato, cominciamo con l'osservare che, secondo le ipotesi poste, vale, nel punto x_0, la (3) del n.º 153, ossia la

$$(2)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(\alpha)\,\frac{\operatorname{sen} n(\alpha - x_0)}{\alpha - x_0}\,d\alpha = \frac{1}{2}\{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)\}.$$

Tutto si riduce dunque a provare che gli integrali

$$(3)\qquad \int_{x_0+\pi}^{+\infty} f(\alpha)\,\frac{\operatorname{sen} n(\alpha - x_0)}{\alpha - x_0}\,d\alpha,\quad \int_{-\infty}^{x_0-\pi} f(\alpha)\,\frac{\operatorname{sen} n(\alpha - x_0)}{\alpha - x_0}\,d\alpha$$

esistono finiti per $n > 0$ [escluso il valore $n = |\lambda|$, nell'ipotesi δ)] e tendono a zero quando $n \to \infty$.

---

(1) J. B. FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*, n. 415; DEFLERS, *Note sur quelques intégrales définies*. (Bull. Soc. philomat. (6) (1819), pp. 161-166). La condizione α) fu data da E. W. HOBSON (*On a general convergence theorem* ecc., Proc. Lond. Math. Soc. (2), Vol. VI (1908), pp. 349-395), e da A. PRINGSHEIM (loc. cit. in (1) a pag. 407). Le condizioni β) e γ) furono date da PRINGSHEIM (ibidem).

Supponiamo, in primo luogo, che valga la condizione α). Posto, allora, $f(\alpha):(\alpha - x_0) = \varphi(\alpha)$ abbiamo

$$\varphi(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\alpha - x_0},$$

ed essendo, per la α), $f(\alpha):\alpha$ assolutamente integrabile, in $(1, +\infty)$, la $\varphi(\alpha)$ risulta assolutamente integrabile in $(x_0 + \pi, +\infty)$. In virtù del lemma del n.° 155, esistono, pertanto, finiti, per ogni $n > 0$, gli integrali

$$\int_{x_0+\pi}^{+\infty} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\alpha - x_0} d\alpha, \quad \int_{x_0+\pi}^{+\infty} f(\alpha) \frac{\cos n\alpha}{\alpha - x_0} d\alpha,$$

e questi integrali tendono a zero, per $n \to \infty$. Esiste dunque finito anche il primo degli integrali (3), ed esso tende a zero, per $n \to \infty$.

Se vale l'ipotesi β), osservando che ogni funzione a variazione limitata in $(a, +\infty)$, e tendente a zero per $x \to +\infty$, può decomporsi nella differenza di due funzioni monotone e tendenti a zero, per $x \to +\infty$ [1], potremo senz'altro supporre che $f(x):x$ sia, in $(a, +\infty)$, non crescente e tendente a zero, per $x \to +\infty$. Allora, la funzione $\varphi(\alpha)$, sopra definita, risulta anch'essa non crescente in $(a', +\infty)$, con $a' \geq a$ e $a' \geq x_0 + \pi$, ed è $\varphi(\alpha) \to 0$ per $\alpha \to +\infty$. Il lemma del n.° 155 prova pertanto che esiste finito il primo degli integrali (3) e che è, per $n \to \infty$,

$$\int_{a'}^{+\infty} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} n(\alpha - x_0)}{\alpha - x_0} d\alpha \to 0.$$

---

[1] Ed infatti, se $\varphi(x)$ è la funzione, indicando con $p(x)$ e $q(x)$ rispettivamente le variazioni totali positive e negative della $\varphi(x)$ sull'intervallo (a, x), si ha

$$\varphi(x) = \varphi(a) + p(x) - q(x).$$

E siccome $p(x) + q(x)$ è la variazione totale della $\varphi(x)$ in (a, x), e questa variazione totale tende per ipotesi ad un limite finito, per $x \to +\infty$, anche $p(x)$ e $q(x)$ tenderanno a limiti finiti per $x \to +\infty$. Inoltre, essendo, per ipotesi, $\varphi(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, detto l il limite di $q(x)$, l sarà anche il limite di $\varphi(a) + p(x)$, ed allora, scrivendo $\varphi(x) = \{\varphi(a) + p(x) - l\} - \{q(x) - l\}$, avremo la decomposizione voluta.

E siccome è, in forza del teorema del n.° 76,

$$\int_{x_0+\pi}^{\alpha'} f(\alpha)\,\frac{\operatorname{sen} n(\alpha - x_0)}{\alpha - x_0}\,d\alpha \to 0,$$

per $n \to \infty$, tende pure a zero il primo degli integrali (3).

Anche nel caso che valga l'ipotesi δ), ci si può ridurre ad ammettere che la $\psi(x)$ sia monotona e tendente a zero, per $x \to +\infty$, ed allora, posto $\psi_1(\alpha) = \psi(\alpha) : (\alpha - x_0)$, si può ragionare come per i casi precedenti, sfruttando sempre il lemma del n.° 155.

Considerando, infine, l'ipotesi γ), basterà mostrare che essa è un caso particolare della β). A tale scopo, osserviamo che, dall'ammessa assoluta integrabilità di $f'(x):x$, in $(a, +\infty)$, segue l'assoluta integrabilità, in $(a, +\infty)$, di $f(x):x^2$, perchè è, per ogni $b > a$,

$$\int_a^b \frac{|f(x)|}{x^2}\,dx \leq |f(a)| \int_a^b \frac{dx}{x^2} + \int_a^b \left\{ \frac{1}{x^2} \int_a^x |f'(x)|\,dx \right\} dx$$

$$\leq \frac{|f(a)|}{a} + \int_a^b \frac{|f'(x)|}{x}\,dx.$$

Ed essendo

$$\int_a^x \left| \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{x} \right| dx \leq \int_a^x \frac{|f'(x)|}{x}\,dx + \int_a^x \frac{|f(x)|}{x^2}\,dx,$$

ne viene che la variazione totale di $f(x):x$ in (a, x), espressa dal primo membro di questa disuguaglianza, è, per tutti gli x di $(a, +\infty)$, inferiore ad un numero fisso. Dunque $f(x):x$ è a variazione limitata in $(a, +\infty)$,

Quanto si è detto per il primo degli integrali (3), si ripete anche per il secondo.

Se, per esempio, consideriamo la funzione $f(x) \equiv \sqrt{|x|}$, la (1) vale per ogni x di $(-\infty, +\infty)$, vale a dire, è, per tutti gli x,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{|\alpha|}\, \frac{\operatorname{sen} n(\alpha - x)}{\alpha - x}\, d\alpha = \sqrt{|x|}.$$

Analogamente, se consideriamo la funzione $f(x) = 0$ per $x < 0$, e $f(x) = \sqrt{x}$ per $x \geq 0$, la (1) vale per tutti gli x di $(-\infty, +\infty)$, e dà perciò, per ogni $x \geq 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} \, \frac{\operatorname{sen} n(\alpha - x)}{\alpha - x} \, d\alpha = \sqrt{x}.$$

In particolare, facendo $x = 0$, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\sqrt{\alpha}} \, d\alpha = 0,$$

formula che si verifica immediatamente.

Osservazione. — Se la serie di Fourier della $f(x)$ è uniformemente convergente in tutto un intervallo (a, b), allora, nella formula (1), la convergenza dell'integrale di Fourier al suo limite è *uniforme in tutto* (a, b).

157. - Seconda forma dell'integrale di Fourier.

L'integrale semplice, che figura nella (1) del n.° preced., può essere, sotto opportune ipotesi, sostituito con un integrale ripetuto. È ciò che stabilisce il seguente teorema.

Sia $f(x)$ una funzione data su $(-\infty, +\infty)$ ed integrabile in ogni intervallo finito, e supponiamo che valga una qualunque delle seguenti ipotesi:

α) *la $f(x)$ è assolutamente integrabile in $(0, +\infty)$;*

β) *è $f(x) \to 0$, per $x \to +\infty$, e, per un valore di a, la $f(x)$ è, in $(a, +\infty)$, monotona, oppure a variazione limitata;*

γ) *è $f(x) \to 0$, per $x \to +\infty$, e, per un valore di a e per qualunque $b > a$, la $f(x)$ è assolutamente continua in (a, b), e la sua derivata risulta assolutamente integrabile in $(a, +\infty)$.*

Supponiamo poi che, per un $b < 0$, in $(-\infty, b)$ valga una ipotesi analoga ad una qualunque delle α), β), γ).

Supponiamo, infine, che, in un dato punto x_0, la $f(x)$ sia continua oppure abbia una discontinuità di 1ª specie, e che la sua serie di Fourier risulti, in x_0, convergente.

Vale allora la formula di Fourier (2ª forma)

$$(1) \quad \frac{1}{\pi} \int_{+0}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos v(\alpha - x_0) d\alpha = \frac{1}{2} \{ f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) \},$$

intendendo che sia

$$(2) \qquad \int_{+0}^{+\infty} \dots dv = \lim_{\sigma \to +0} \int_{\sigma}^{+\infty} \dots dv.$$

L'integrale che figura nella (1) dicesi pure *integrale di Fourier* (2ª forma) ([1]).

Per dimostrare questo teorema, osserviamo subito che, in virtù delle ipotesi poste, vale la (3) del n.° 153, e cioè la

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} n(\alpha - x_0)}{\alpha - x_0} d\alpha = \frac{1}{2} \{ f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) \}.$$

In virtù dell'uguaglianza

$$(3) \qquad \frac{\operatorname{sen} n(\alpha - x_0)}{\alpha - x_0} = \int_0^n \cos v(\alpha - x_0)\, dv,$$

la formula precedente può scriversi,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(\alpha)\, d\alpha \int_0^n \cos v(\alpha - x_0)\, dv = \frac{1}{2} \{ f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) \}$$

ed anche, invertendo le integrazioni,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dv \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(\alpha) \cos v(\alpha - x_0)\, d\alpha = \frac{1}{2} \{ f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) \}.$$

Per dimostrare la (1), basta dunque provare le uguaglianze

$$(4) \qquad \int_{+0}^{+\infty} dv \int_{x_0+\pi}^{+\infty} f(\alpha) \cos v(\alpha - x_0) d\alpha = 0,$$

$$(5) \qquad \int_{+0}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{x_0-\pi} f(\alpha) \cos v(\alpha - x_0) d\alpha = 0.$$

([1]) J. B. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, n.° 404; S. D. Poisson (loc. cit. in ([1]) a pag. 377, vedi, in particolare, pag. 429). Le condizioni α), β) e γ) furono indicate da U. Dini (loc. cit. in ([2]) a pag. 280) e da A. Pringsheim (loc. cit. in ([1]) a pag. 407).

Daremo la dimostrazione per la (4); quella della (5) si conduce nello stesso modo.

Osserviamo, in primo luogo, che, potendosi scrivere l'integrale della (4) nella forma

$$\int_{+0}^{+\infty} dv \int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha' + x_0) \cos v\alpha' \, d\alpha',$$

e poichè la funzione $f(\alpha' + x_0)$, di α', soddisfa alle stesse condizioni poste, nell'enunciato del teorema, per la $f(\alpha)$, la (4) risulterà provata se noi la dimostreremo nel caso particolare di $x_0 = 0$, vale a dire, se noi dimostreremo l'uguaglianza

$$\int_{+0}^{+\infty} dv \int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha d\alpha = 0 \text{ [1]}. \tag{6}$$

a) Consideriamo dapprima verificata l'ipotesi α). Allora, essendo

$$\int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha d\alpha = \lim_{b \to +\infty} \int_{\pi}^{b} f(\alpha) \cos v\alpha d\alpha \tag{7}$$

ed inoltre

$$\left| \int_{b}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha d\alpha \right| < \int_{b}^{+\infty} | f(\alpha) | \, d\alpha,$$

l'integrale del secondo membro della (7) (il quale è una funzione continua di v) al tendere di b all'infinito, converge uniformemente verso quello del primo membro, per tutti i v; perciò, secondo un noto teorema di integrazione per serie, possiamo scrivere

$$\int_{0}^{n} dv \int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha = \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{n} dv \int_{\pi}^{b} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_{\pi}^{b} f(\alpha) d\alpha \int_{0}^{n} \cos v\alpha \, dv = \int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\alpha} \, d\alpha.$$

---

[1] Nelle ipotesi poste, questa uguaglianza vale anche se a π sostituiamo un qualunque numero *positivo*.

Ma l'ultimo integrale tende a zero, per $n \to +\infty$, in virtù del lemma del n.° 155, e ciò dimostra la (6).

b) Supponiamo ora verificata l'ipotesi β). Se la $f(x)$ è a variazione limitata in $(a, +\infty)$, essa può scriversi come differenza di due funzioni monotone, ambedue tendenti allo zero, per $x \to +\infty$, come la $f(x)$ medesima. Possiamo dunque limitarci al caso della $f(x)$ non crescente e tendente a zero per $x \to +\infty$.

Cominciamo con l'osservare che, se σ è un numero maggiore di zero, l'integrale

$$\int_{\pi}^{b} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha$$

converge, per $b \to +\infty$, al suo limite finito

$$\int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha,$$

uniformemente rispetto a tutti i $v \geq \sigma$. È infatti, applicando il secondo teorema della media, e supponendo $a < a_1 < b$,

$$\left| \int_{a_1}^{b} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha \right| = \left| f(a_1) \int_{a_1}^{b'} \cos v\alpha \, d\alpha \right| \leq \frac{2}{\sigma} f(a_1) < \varepsilon,$$

purchè a_1 sia maggiore di un certo a' tale che $f(a') < \frac{\sigma\varepsilon}{2}$. Si ha, pertanto,

$$\int_{\sigma}^{n} dv \int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha = \lim_{b \to +\infty} \int_{\sigma}^{n} dv \int_{\pi}^{b} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha$$

donde, invertendo le integrazioni e tenendo conto del n.° 155,

$$(8) \qquad \int_{\sigma}^{n} dv \int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha = \int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\alpha} \, d\alpha - \int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \sigma\alpha}{\alpha} \, d\alpha.$$

Ora, se a_2 è maggiore di a e di π, e tale che sia $f(a_2) < \varepsilon$, e se è $b > a_2$, può scriversi

$$\left|\int_{\pi}^{b} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen}\sigma\alpha}{\alpha}\,d\alpha\right| \leq \left|\int_{\pi}^{a_2} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen}\sigma\alpha}{\alpha}\,d\alpha\right| + \left|f(a_2)\int_{a_2}^{b'}\frac{\operatorname{sen}\sigma\alpha}{\alpha}\,d\alpha\right|$$

$$\leq \sigma\int_{\pi}^{a_2}|f(\alpha)|\,d\alpha + \varepsilon\pi \text{ (1)}$$

donde

$$\left|\int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen}\sigma\alpha}{\alpha}\,d\alpha\right| \leq \sigma\int_{\pi}^{a_2}|f(\alpha)|\,d\alpha + \varepsilon\pi,$$

la quale disuguaglianza mostra che è

$$\lim_{\sigma\to 0}\int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen}\sigma\alpha}{\alpha}\,d\alpha = 0.$$

Dalla (8) segue dunque

$$\int_{+0}^{n} dv\int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha)\cos v\alpha\,d\alpha = \int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\alpha}\,d\alpha;$$

e siccome, per $n \to +\infty$, il secondo membro tende a zero (n.º 155), ne viene la (6).

c) La condizione γ) è un caso particolare della β). Ed infatti, per l'assoluta continuità della $f(x)$ in (a, b), la sua variazione totale in (a, b) è data da $\int_a^b |f'(x)|\,dx$, e per l'integrabilità assoluta della $f'(x)$ in $(a, +\infty)$, la variazione totale della $f(x)$, in $(a, +\infty)$, risulta finita. La $f(x)$ è dunque a variazione limitata in tutto $(a, +\infty)$.

Se consideriamo, ad esempio, la funzione definita, in $(-\infty, +\infty)$, da $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$, abbiamo, per ogni $x > 0$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{+0}^{+\infty} dv\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos v(\alpha - x)}{\sqrt{|\alpha|}}\,d\alpha = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

---

(1) Per la (1) del n.º 103.

158. - Estensione di Pringsheim del precedente risultato.

Il teorema del n.° 157 vale anche se, in luogo di una delle ipotesi α), β) *e* γ), *si ha che:*

δ) *per un valore di* a, *è, in* $(a, +\infty)$,

$$f(x) \equiv \psi(x)g(x) \equiv \psi(x)\sum_{r=1}^{\infty} c_r \cos(\lambda_r x + \mu_r), \tag{1}$$

dove la serie $\sum_{r=1}^{\infty} |c_r|$ *è convergente ed è* $|\lambda_r| \to \infty$ *per* $r \to \infty$, *e dove* $\psi(x)$ *tende a zero per* $x \to +\infty$, *ed è monotona od a variazione limitata in tutto* $(a, +\infty)$, *e tale che* $\psi(x) : x$ *risulti assolutamente integrabile nell'intervallo infinito detto.*

Nella formula (1) *del n.° 157, l'integrale rispetto a* v *va ora inteso, nell'intorno di ogni punto* $|\lambda_r|$, *nel senso*

$$\int_c^d \ldots\, dv = \lim_{\sigma \to +0} \int_c^{|\lambda_r|-\sigma} \ldots\, dv + \lim_{\sigma \to +0} \int_{|\lambda_r|+\sigma}^{d} \ldots\, dv \ \text{(1)}. \tag{2}$$

Senza ledere la generalità di quanto vogliamo dimostrare, possiamo supporre $a = \pi$. Inoltre, per quanto abbiamo già detto nel n.° preced., basterà provare l'uguaglianza (6) di tale n.°.

Sia $l' > l \geq 0$, e supponiamo che nell'intervallo (l, l') non cada nessuno dei numeri $|\lambda_r|$. Detta δ la minima distanza dei punti $|\lambda_r|$ $(r = 1, 2, \ldots)$ dai punti di (l, l'), abbiamo, per ogni v di (l, l') e per $\pi \leq b < b'$, (2)

$$\int_b^{b'} g(\alpha)\cos v\alpha\, d\alpha = \sum_{r=1}^{\infty} c_r \int_b^{b'} \cos(\lambda_r\alpha + \mu_r)\cos v\alpha\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} c_r \int_b^{b'} [\cos\{(\lambda_r + v)\alpha + \mu_r\} + \cos\{(\lambda_r - v)\alpha + \mu_r\}]\, d\alpha,$$

---

(1) A. Prinsgheim, loc. cit. in (1) a p. 407, ed anche, dello stesso Autore, Math. Ann., Bd. 71 (1912), pp. 289-298.

(2) La serie che figura in (1) è, per l'ipotesi fatta, uniformemente convergente per tutti gli x di (b, b').

donde

$$(3) \qquad \left| \int_b^{b'} g(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha \right| < \sum_{r=1}^{\infty} |c_r| \left\{ \frac{1}{|\lambda_r + v|} + \frac{1}{|\lambda_r - v|} \right\}$$

$$< \frac{2}{\delta} \sum_{r=1}^{\infty} |c_r|.$$

Se dunque poniamo $\psi(x) \equiv \psi_1(x) - \psi_2(x)$, con $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ funzioni non crescenti in $(\pi, +\infty)$, e tendenti a zero per $x \to +\infty$, abbiamo, applicando il secondo teorema della media,

$$\left| \int_b^{b'} \psi_1(\alpha) g(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha \right| \leq \psi_1(b) \left| \int_b^{b''} g(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha \right|$$

$$\leq \frac{2}{\delta} \psi_1(b) \sum_{r=1}^{\infty} |c_r|;$$

e siccome possiamo scrivere questa stessa disuguaglianza anche per la funzione $\psi_2(x)$, otteniamo, ponendo $\frac{2}{\delta} \sum_{r=1}^{\infty} |c_r| = N$,

$$\left| \int_b^{b'} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha \right| \leq N \{ \psi_1(b) + \psi_2(b) \}.$$

Di qui segue che, preso un $\varepsilon > 0$, per tutti i b maggiori di un certo b_1, e per tutti i $b' > b$, è

$$\left| \int_b^{b'} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha \right| < \varepsilon.$$

Questa disuguaglianza dimostra che, per ogni v di (l, l'), l'integrale

$$\int_\pi^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha$$

esiste finito, e che ad esso converge uniformemente

$$\int_\pi^{b} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha,$$

per $b \to +\infty$. Abbiamo perciò:

$$
\begin{aligned}
\int_l^{l'} dv \int_\pi^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha &= \lim_{b \to +\infty} \int_l^{l'} dv \int_\pi^{b} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha \\
(4) \qquad &= \lim_{b \to +\infty} \int_\pi^{b} f(\alpha) d\alpha \int_l^{l'} \cos v\alpha \, dv \\
&= \lim_{b \to +\infty} \int_\pi^{b} f(\alpha) \left\{ \frac{\operatorname{sen} l'\alpha}{\alpha} - \frac{\operatorname{sen} l\alpha}{\alpha} \right\} d\alpha.
\end{aligned}
$$

E siccome, dall'ipotesi che $\psi(x):x$ sia assolutamente integrabile in $(\pi, +\infty)$, segue l'assoluta integrabilità, in tale intervallo, anche di $f(x):x$, abbiamo pure

$$
(5) \qquad \int_l^{l'} dv \int_\pi^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha = \int_\pi^{+\infty} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} l'\alpha}{\alpha} d\alpha - \int_\pi^{+\infty} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} l\alpha}{\alpha} d\alpha.
$$

Dall'assoluta integrabilità della $f(x):x$ in $(\pi, +\infty)$, segue poi che l'integrale

$$
(6) \qquad \int_\pi^{+\infty} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} l\alpha}{\alpha} d\alpha
$$

è una funzione continua di l, qualunque sia l, perchè, per b sufficientemente grande, si ha

$$
\left| \int_b^{+\infty} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} l\alpha}{\alpha} d\alpha \right| < \int_b^{+\infty} \left| \frac{f(\alpha)}{\alpha} \right| d\alpha < \varepsilon.
$$

Se dunque (l_1, l_1') è un intervallo non contenente nel suo *interno* nessuno dei punti $|\lambda_r|$, ma avente due di tali punti per estremi, dalla (5) segue

$$
\int_{l_1+0}^{l_1'-0} dv \int_\pi^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha = \int_\pi^{+\infty} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} l_1'\alpha}{\alpha} d\alpha - \int_\pi^{+\infty} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} l_1\alpha}{\alpha} d\alpha,
$$

ed anche, qualunque sia $n > 0$,

$$\int_{+0}^{n} dv \int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha = \int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\alpha} \, d\alpha,$$

l' integrale rispetto a v essendo inteso nel senso indicato dalla (2).

Dall' uguaglianza precedente segue, infine, per il lemma del n.° 155 e per l'assoluta integrabilità di $f(x):x$ in $(\pi, +\infty)$, e facendo tendere n a $+\infty$,

$$\int_{+0}^{+\infty} dv \int_{\pi}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha = 0,$$

il che dimostra la proposizione enunciata [1].

---

[1] Se è $g(x) \equiv \cos \lambda x$, è superflua la condizione che $\psi(x):x$ risulti assolutamente integrabile in $(a, +\infty)$. Ed infatti, per la $g(x)$ ora indicata, gli integrali del secondo membro della (5) esistono finiti, perchè essendo ora

$$\begin{aligned} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} l\alpha}{\alpha} &= \{ \psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha) \} \frac{\cos \lambda\alpha \operatorname{sen} l\alpha}{\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \{ \psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha) \} \frac{\operatorname{sen}(\lambda + l)\alpha + \operatorname{sen}(l - \lambda)\alpha}{\alpha}, \end{aligned}$$

le quattro funzioni, che si ottengono sviluppando questo prodotto, sono integrabili in $(\pi, +\infty)$, in virtù della proposizione del n.° 155. Dunque la (5) vale indipendentemente dalla integrabilità di $|\psi(x)|:x$ in $(a, +\infty)$; ed ugualmente sussiste la continuità dell' integrale (6) rispetto ad l, perchè è, per es.,

$$\begin{aligned} \left| \int_{b}^{b'} \psi_1(\alpha) \frac{\operatorname{sen}(\lambda + l)\alpha}{\alpha} \, d\alpha \right| &= \left| \psi_1(b) \int_{b}^{b''} \frac{\operatorname{sen}(\lambda + l)\alpha}{\alpha} \, d\alpha \right| \\ &= \left| \psi_1(b) \int_{b(\lambda+l)}^{b''(\lambda+l)} \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\alpha'} \, d\alpha' \right| < \pi\psi_1(b), \end{aligned}$$

in virtù della (1) del n.° 103, e perciò, se b è sufficientemente grande, si ha

$$\left| \int_{b}^{+\infty} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} l\alpha}{\alpha} \, d\alpha \right| < \pi \{ \psi_1(b) + \psi_2(b) \} < \varepsilon,$$

qualunque sia l.

Se, per esempio, consideriamo la funzione definita, in $(-\infty, +\infty)$, da $f(x) \equiv \operatorname{sen} x : x$, abbiamo

$$\frac{1}{\pi}\int_{+0}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos v(\alpha - x)}{\alpha} d\alpha = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

159. - Estensione di Young-Hahn del risultato del n.° 157.

Il teorema del n.° 157 vale anche se, in luogo di una delle ipotesi α), β) *e* γ), *si ha che :*

ε) *per un valore di* a, *è, in* $(a, +\infty)$,

$$f(x) \equiv \psi(x) g(x), \tag{1}$$

con $g(x)$ *funzione periodica, integrabile (in ogni intervallo finito), e con* $\psi(x)$ *funzione tendente a zero per* $x \to +\infty$, *monotona od a variazione limitata in tutto* $(a, +\infty)$, *e tale che* $\psi(x) : x$ e $f(x) : x$ *risultino assolutamente integrabili in* $(a, +\infty)$.

Nella formula (1) *del n.° 157, l'integrale rispetto a* v *va ora inteso, nell'intorno dei punti* $r = 0$, $\pi : p$, $2\pi : p$, ..., *dove* $2p$ *è il periodo della* $g(x)$, *nel senso*

$$\int_c^d .... dv = \lim_{\sigma \to +0} \int_c^{r-\sigma} .... dv + \lim_{\sigma \to +0} \int_{r-\sigma}^{d} .... dv \ [1].$$

Possiamo supporre anche qui che sia $a = \pi$; inoltre possiamo supporre che la $g(x)$ ammetta come periodo 2π. E come nel n.° preced., basterà dimostrare la uguaglianza (6) del n.° 157.

Sia $l' > l > 0$ e l'intervallo (l, l') non contenga alcun numero intero. Detta δ la minima distanza dei punti di (l, l') dai

---

[1] Nel caso della $\psi(x)$ monotona e tendente a zero per $x \to +\infty$ e nell'ipotesi supplementare che la $g(x)$ sia a quadrato integrabile (su ogni intervallo finito) la proposizione sopra enunciata fu data da W. H. Young (*On Fourier's Repeated Integral*, Proc. Roy. Soc. of Edinburgh, Vol. XXXI (1911), pp. 559-586). La condizione che la $g(x)$ sia a quadrato integrabile fu tolta da H. Hahn (*Ueber eine verallgemeinerung der Fourierschen Integralformel*, Acta Math., Bd. 49 (1926), pp. 301-353).

punti 0, 1, 2,...., abbiamo, per ogni v di (l, l') e per $\pi \leq b < b'$,

$$\int_b^{b'} g(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha = \sum_{r=0}^{k-1} \int_{b+2\pi r}^{b+2\pi(r+1)} g(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha + \int_{b+2\pi k}^{b'} g(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha$$

$$= \sum_{r=0}^{k-1} \int_b^{b+2\pi} g(\alpha) \cos v(2\pi r + \alpha) \, d\alpha + \int_{b+2\pi k}^{b'} g(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha$$

$$= \int_b^{b+2\pi} g(\alpha) \sum_{r=0}^{k-1} \cos v(2\pi r + \alpha) \, d\alpha + \int_{b+2\pi k}^{b'} g(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha,$$

k essendo il massimo intero tale che si abbia $b + 2\pi k \leq b'$. Tenendo presente la formula (5) del n.° 11, deduciamo, dall'uguaglianza scritta,

$$\left| \int_b^{b'} g(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha \right| < \left(\frac{1}{|\operatorname{sen} v\pi|} + 1 \right) \int_b^{b+2\pi} |g(\alpha)| \, d\alpha$$

$$\leq \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \delta\pi} + 1 \right) \int_\pi^{3\pi} |g(\alpha)| \, d\alpha.$$

Non resta allora che ragionare come si è fatto nel n.° preced., a partire dalla disugualianza (3) di tale n.°.

Osservazione. — Se la $\psi(x)$ è monotona, la sua tendenza allo zero, per $x \to +\infty$, e l'assoluta integrabilità di $f(x):x$ sono conseguenze dell'assoluta integrabilità di $\psi(x):x$. Ed infatti, è evidente che, se non fosse $\psi(x) \to 0$, per $x \to +\infty$, sarebbe $\left| \frac{\psi(x)}{x} \right| > \frac{\mu}{x}$, con $\mu > 0$, per tutti gli x di $(a, +\infty)$, e $|\psi(x)|:x$ non potrebbe essere integrabile in $(a, +\infty)$. Inoltre, essendo

$$\int_a^{a+2np} \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx \leq \sum_{r=0}^{n-1} \left| \frac{\psi(a+2rp)}{a+2rp} \right| \int_a^{a+2p} |g(x)| \, dx$$

$$\leq \left(\int_a^{a+2p} |g(x)| \, dx \right) \left(\frac{|\psi(a)|}{a} + \frac{1}{2p} \int_a^{a+2(n-1)p} \left| \frac{\psi(x)}{x} \right| dx \right),$$

dall'assoluta integrabilità di $\psi(x):x$ in $(a, +\infty)$, segue quella di $f(x):x$.

Osserviamo pure che, se la $g(x)$ è periodica, *limitata* ed integrabile (in ogni intervallo finito), l'assoluta integrabilità di $f(x):x$, in $(a, +\infty)$, è conseguenza necessaria di quella di $\psi(x):x$.

160. - Forme particolari dell'integrale di Fourier.

Se la funzione $f(x)$ è data, non in tutto $(-\infty, +\infty)$, ma soltanto in $(0, +\infty)$, ed in questo intervallo soddisfa alle condizioni poste in uno dei teoremi dei n.[i] 157, 158, 159, la formula di Fourier (2.[a] forma), quando in essa si ponga, per $x < 0$, $f(x) = f(-x)$, diventa, per $x_0 \geq 0$,

$$\frac{1}{2}\{f(x_0+0)+f(x_0-0)\} = \frac{1}{\pi}\int_{+0}^{+\infty} dv \int_0^{+\infty} f(\alpha)\{\cos v(\alpha - x_0) + \cos v(\alpha + x_0)\}\, d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{+0}^{+\infty} dv \int_0^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \cos vx_0 \, d\alpha$$

(intendendo che sia $f(-0) = f(+0)$), od anche, ponendo invece, per $x < 0$, $f(x) = -f(-x)$,

$$\frac{1}{2}\{f(x_0+0)+f(x_0-0)\} = \frac{1}{\pi}\int_{+0}^{+\infty} dv \int_0^{+\infty} f(\alpha)\{\cos v(\alpha - x_0) - \cos v(\alpha + x_0)\}\, d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{+0}^{+\infty} dv \int_0^{+\infty} f(\alpha) \operatorname{sen} v\alpha \operatorname{sen} vx_0 \, d\alpha$$

(intendendo che sia $f(-0) = -f(+0)$) (1).

161. - Gli integrali di Sommerfeld.

Nei problemi della fisica-matematica, l'integrale di Fourier (2.[a] forma) si presenta talvolta in forme un po' diverse da

---

(1) J. B. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, n.[i] 345-353.

quella del n.° 157, e più precisamente nelle due forme seguenti:

$$\lim_{k \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{+0}^{+\infty} e^{-kv} dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos v(\alpha - x_0) d\alpha, \tag{1}$$

$$\lim_{k \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{+0}^{+\infty} e^{-kv^2} dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos v(\alpha - x_0) d\alpha. \tag{2}$$

Gli integrali ora scritti saranno da noi chiamati *integrali di Sommerfeld* (1.ª e 2.ª forma, rispettivamente), poichè tale Autore ne studiò per primo la convergenza, per $k \to +0$, dimostrando le formule che ci proponiamo di stabilire in ciò che segue [1].

a) Conviene considerare, con Hardy [2], il seguente limite, del quale (1) e (2) sono casi particolari,

$$\lim_{k \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{+0}^{+\infty} \psi(kv) dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos v(\alpha - x_0) d\alpha, \tag{3}$$

dove $\psi(x)$ è una funzione data su $(0, +\infty)$, con le seguenti proprietà:

1) la $\psi(x)$ è continua, per ogni $x \geq 0$, insieme con $\psi'(x)$ e $\psi''(x)$;

2) è $\psi(0) = 1$ e $\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = 0$;

3) gli integrali $\int_0^{+\infty} |\psi(x)|\, dx$, $\int_0^{+\infty} |\psi'(x)|\, dx$ esistono finiti;

4) per un certo a_0, in $(a_0, +\infty)$, la derivata seconda $\psi''(x)$ è sempre ≥ 0 (oppure sempre ≤ 0).

Osserviamo che le funzioni e^{-x} ed e^{-x^2} soddisfano entrambe alle proprietà 1), 2), 3) e 4), ammesse per la $\psi(x)$.

---

(1) A. Sommerfeld, *Die willkürlichen Functionen in der mathematischen Physik.* (Inaugural-Dissertation, Königsberg, 1891).

(2) G. H. Hardy, *Fourier's Double Integral and the Theory of Divergent Integrals.* (Trans. Cambridge Phil. Soc., Vol. 21 (1911), pp. 427-451).

b) Ciò premesso, dimostriamo il seguente teorema:

Se $\psi(x)$ *soddisfa alle condizioni poste in a*);

se $f(x)$ *è una funzione data in* $(-\infty, +\infty)$, *integrabile in ogni intervallo finito e soddisfacente, in un intervallo* $(a, +\infty)$, *ad una qualunque delle ipotesi* α), β) *e* γ) *del n.° 157, oppure alla* δ) *del n.° 158, oppure alla* ε) *del n.° 159, e così pure in un intervallo* $(-\infty, b)$;

allora, in ogni punto x_0 *in cui esistono finiti* $f(x_0+0)$ *e* $f(x_0-0)$, *è*

$$(4)\qquad \lim_{k\to+0}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\psi(kv)\,dv\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)\cos v(\alpha-x_0)d\alpha=\frac{1}{2}\{f(x_0+0)+f(x_0-0)\},$$

ed in particolare

$$(5)\qquad \lim_{k\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{+0}^{+\infty}e^{-kv}dv\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)\cos v(\alpha-x_0)d\alpha=\frac{1}{2}\{f(x_0+0)+f(x_0-0)\},$$

$$(6)\qquad \lim_{k\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{+0}^{+\infty}e^{-kv^2}dv\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)\cos v(\alpha-x_0)d\alpha=\frac{1}{2}\{f(x_0+0)+f(x_0-0)\}.$$

Se la $f(x)$ *fosse data soltanto in un intervallo* (p, q), *queste formule si applicherebbero ancora ponendo* $f(x)\equiv 0$ *per* $-\infty < x < p$, *e per* $q < x < +\infty$.

In (4), (5) *e* (6), *gli integrali rispetto a* v *vanno intesi nel senso indicato nelle proposizioni dei n.ⁱ 157, 158 e 159.*

Senza ledere la generalità di quanto dobbiamo dimostrare, possiamo supporre $x_0=0$. La (4) diventa allora

$$(4')\qquad \lim_{k\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{+0}^{+\infty}\psi(kv)\,dv\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)\cos v\alpha\,d\alpha=\frac{1}{2}\{f(+0)+f(-0)\}.$$

Cominciamo col provare che, per $\mu>0$, è

$$(7)\qquad \lim_{k\to+0}\int_{+0}^{+\infty}\psi(kv)\,dv\int_{\mu}^{+\infty}f(\alpha)\cos v\alpha\,d\alpha=0.$$

Supponiamo, in primo luogo, che valga una delle ipotesi α), β) e γ) del n.° 157. Allora, per quanto abbiamo dimostrato in tale n.°, fissato un $\sigma > 0$, l'integrale

$$\int_{\mu}^{\mu'} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha,$$

che è una funzione continua di v, converge, per $\mu' \to +\infty$, al suo limite $\int_{\mu}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha$, uniformemente rispetto a tutti i $v \geq \sigma$. Esiste dunque, finito, l'integrale

$$\int_{\sigma}^{u} \psi(kv) \, dv \int_{\mu}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha,$$

per ogni $u \geq \sigma$, e si ha, integrando per parti,

$$\int_{\sigma}^{u} \psi(kv) dv \int_{\mu}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha = \left[\psi(kv) \int_{+0}^{v} dv \int_{\mu}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha \right]_{\sigma}^{u} -$$
$$- k \int_{\sigma}^{u} \psi'(kv_1) dv_1 \int_{+0}^{v_1} dv \int_{\mu}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha \quad (^1).$$

Il secondo membro di questa uguaglianza ha limite finito per $\sigma \to +0$; esiste dunque anche il limite del primo membro, e, intendendo gli integrali rispetto a v nel senso detto al n.° 157, abbiamo

$$(8) \quad \begin{aligned} \int_{+0}^{u} \psi(kv) dv \int_{\mu}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha &= \psi(ku) \int_{+0}^{u} dv \int_{\mu}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha - \\ &- k \int_{+0}^{u} \psi'(kv_1) dv_1 \int_{+0}^{v_1} dv \int_{\mu}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha. \end{aligned}$$

---

(1) Gli integrali rispetto a v, del secondo membro, esistono per quanto si è dimostrato nel n.° 157, e vanno intesi nel senso ivi indicato.

Un ragionamento analogo al precedente prova che questa uguaglianza sussiste anche nel caso che, invece di una delle ipotesi α), β), γ) del n.º 157, valga la δ) del n.º 158 oppure la ε) del n.º 159.

Se ora osserviamo che, per quanto si è dimostrato nei n.i 157, 158 e 159, è

$$\int_{+0}^{+\infty} dv \int_{\mu}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha = 0,$$

e se teniamo conto delle proprietà 2) e 3) della $\psi(x)$, vediamo che esiste il limite del secondo membro della (8), per $u \to +\infty$, e che, perciò, esiste anche quello del primo membro ed è

$$\int_{+0}^{+\infty} \psi(kv) dv \int_{\mu}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha = -k \int_{+0}^{+\infty} \psi'(kv_1) dv_1 \int_{+0}^{v_1} dv \int_{\mu}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha.$$

Se indichiamo con M il limite superiore del modulo di

$$\int_{+0}^{v} dv \int_{\mu}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha$$

per v in $(0, +\infty)$, e se, preso un $\varepsilon > 0$, scegliamo un $l > 0$ in modo che, per ogni $v \geq l$, il modulo dell'integrale ora scritto risulti minore di ε, abbiamo

$$\left| \int_{+0}^{+\infty} \psi(kv) dv \int_{\mu}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha \right| < M \int_{0}^{lk} |\psi'(x)| \, dx + \varepsilon \int_{0}^{+\infty} |\psi'(x)| \, dx$$

$$< \varepsilon \left(M + \int_{0}^{+\infty} |\psi'(x)| \, dx \right),$$

per tutti i k sufficientemente piccoli. E siccome ε è arbitrario, ciò prova la (7).

Insieme con la (7) risulta stabilita anche l' uguaglianza

$$(7') \qquad \lim_{k\to+0}\int_{+0}^{+\infty}\psi(kv)dv\int_{-\infty}^{-\mu}f(\alpha)\cos v\alpha\, d\alpha = 0,$$

e per dimostrare la (4') resta, perciò, da considerare il comportamento, per $k\to+0$, dell' integrale

$$(9) \qquad I = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\psi(kv)dv\int_{-\mu}^{\mu}f(\alpha)\cos v\alpha\, d\alpha.$$

Questo integrale esiste finito, perchè $\int_{-\mu}^{\mu}f(\alpha)\cos v\alpha\, d\alpha$ è una funzione continua di v, sempre, in modulo, inferiore a $\int_{-\mu}^{\mu}|f(\alpha)|\, d\alpha$, e perchè la $\psi(x)$ è assolutamente integrabile in $(0, +\infty)$. Posto, per comodità di scrittura, $\{f(+0)+f(-0)\}:2 = F$, abbiamo

$$(10) \quad I = \frac{F}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\psi(kv)dv\int_{-\mu}^{\mu}\cos v\alpha\, d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\psi(kv)dv\int_{-\mu}^{\mu}\{f(\alpha)-F\}\cos v\alpha\, d\alpha,$$

ed è

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\psi(kv)dv\int_{-\mu}^{\mu}\cos v\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\psi(kv)\frac{\operatorname{sen} v\mu}{v}dv$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\psi(v_1)}{v_1}\operatorname{sen}\frac{\mu}{k}v_1\, dv_1 + \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{+\infty}\cdots,$$

ed il penultimo di questi integrali tende a $\psi(+0)=1$, per $k\to+0$, in virtù della (3) del n.° 153, mentre l' ultimo integrale tende a zero, in forza del lemma del n.° 155. Dunque, per $k\to+0$, il primo addendo del secondo membro della (10) tende a F.

Abbiamo poi che, preso un $\varepsilon > 0$ e supposto μ sufficientemente piccolo affinchè, per ogni x positivo e minore di μ, sia

$| f(x) + f(-x) - 2F | < \varepsilon$, può scriversi

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \psi(kv)\, dv \int_{-\mu}^{\mu} \{ f(\alpha) - F \} \cos v\alpha \, d\alpha \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \psi(kv)\, dv \int_0^{\mu} \{ f(\alpha) + f(-\alpha) - 2F \} \cos v\alpha \, d\alpha \right|$$

$$= \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\mu} \{ f(\alpha) + f(-\alpha) - 2F \} \, d\alpha \int_0^{l} \psi(kv) \cos v\alpha \, dv \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{\pi} \lim_{l \to +\infty} \int_0^{\mu} \left| \int_0^{l} \psi(kv) \cos v\alpha \, dv \right| d\alpha = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\mu} \left| \int_0^{+\infty} \psi(kv) \cos v\alpha \, dv \right| d\alpha$$

$$= \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\mu:k} \left| \int_0^{+\infty} \psi(u) \cos \beta u \, du \right| d\beta.$$

Ma è, integrando per parti due volte, e tenendo conto delle proprietà della $\psi(x)$,

$$\int_0^{+\infty} \psi(u) \cos \beta u \, du = \frac{1}{\beta^2} \int_0^{+\infty} \psi''(u)(1 - \cos \beta u) du \quad (^1), \tag{11}$$

e perciò

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \psi(kv) dv \int_{-\mu}^{\mu} \{ f(\alpha) - F \} \cos v\alpha \, d\alpha \right| <$$

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} | \psi(u) | \, du + 2 \int_1^{+\infty} \frac{d\beta}{\beta^2} \cdot \int^{+\infty} | \psi''(u) | \, du \right\},$$

---

(1) Per la proprietà 4), esiste il limite di $\psi'(x)$ per $x \to +\infty$, e questo limite è 0, perchè altrimenti non potrebbe essere $\psi(x) \to 0$, per $x \to +\infty$. Inoltre, per essere, se $b > a_0$,

$$\int_{a_0}^{b} | \psi''(x) | \, dx = \left| \int_{a_0}^{b} \psi''(x) dx \right| = | \psi'(b) - \psi'(a_0) |,$$

segue che $\psi''(x)$ è assolutamente integrabile in $(0, +\infty)$.

ed il secondo membro di questa disuguaglianza è piccolo a piacere, con ε.

Dunque, preso $\eta > 0$, possiamo determinare un $\mu > 0$ ed un k_1, in modo che, per ogni $k < k_1$, sia

$$|I - F| < \eta. \tag{12}$$

Di qui e dalle (7) e (7'), segue la (4'). La dimostrazione del teorema enunciato è, così, ottenuta.

c) *Sotto le condizioni del teorema dato in* b), *eccettuata quella relativa ai limiti* $f(x_0 + 0)$ e $f(x_0 - 0)$, *i primi membri delle* (4), (5) *e* (6) *esistono finiti ed uguali a* $f(x_0)$ *in quasi-tutto* $(-\infty, +\infty)$, *e, più precisamente, in tutti i punti* x_0 *in cui è*

$$\lim_{z \to +0} \frac{1}{z} \int_0^z | f(x_0 + z) + f(x_0 - z) - 2f(x_0) | \, dz = 0. \tag{13}$$

Supponendo ancora, come è ben lecito, che il punto x_0, in cui ammettiamo verificata la (13), sia il punto $x_0 = 0$, riprendiamo l'uguaglianza (10), in cui ora supporremo $F = f(0)$. Il primo termine del secondo membro di tale uguaglianza tende ancora a F, per $k \to +0$; non resta quindi che esaminare l'integrale

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \psi(kv) dv \int_{-\mu}^{\mu} \{ f(\alpha) - f(0) \} \cos v\alpha \, d\alpha$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} \varphi(\alpha) d\alpha \int_0^{+\infty} \psi(kv) \cos v\alpha \, dv,$$

dove abbiamo posto $\varphi(\alpha) = f(\alpha) + f(-\alpha) - 2f(0)$. Spezzando l'ultimo integrale in due parti, corrispondenti ai due intervalli $(0, k)$ e (k, μ), supponendo $k < \mu$, e tenendo conto della (11), abbiamo

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \psi(kv) dv \int_{-\mu}^{\mu} \{ f(\alpha) - f(0) \} \cos v\alpha \, d\alpha \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi k} \int_0^{+\infty} | \psi(u) | \, du \int_0^{k} | \varphi(\alpha) | \, d\alpha + \frac{2Ak}{\pi} \int_k^{\mu} | \varphi(\alpha) | \frac{d\alpha}{\alpha^2}, \end{aligned} \tag{14}$$

dove A indica il valore di $\int_0^{+\infty} |\psi''(u)|\, du$. Poichè, nel punto $x_0 = 0$, supponiamo soddisfatta la (13), preso un $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un $z_1 > 0$ tale che, per ogni z positivo e minore di z_1, sia $\frac{1}{z}\int_0^z |\varphi(\alpha)|\, d\alpha < \varepsilon$. Se allora supponiamo $\mu < z_1$, dalla (14) deduciamo, integrando per parti l'ultimo integrale che in essa figura,

$$\left| \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \psi(kv)dv \int_{-\mu}^{\mu} \{ f(\alpha) - f(0) \} \cos v\alpha \, d\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{+\infty} |\psi(u)|\, du +$$

$$+ \frac{2Ak}{\pi} \left\{ \frac{1}{\mu^2}\int_0^{\mu} |\varphi(\alpha)|\, d\alpha + 2\int_k^{\mu} \frac{d\alpha}{\alpha^3} \int_0^{\alpha} |\varphi(\alpha_1)|\, d\alpha_1 \right\}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |\psi(u)|\, du + 6A \right\},$$

perchè è

$$\int_k^{\mu} \frac{d\alpha}{\alpha^3} \int_0^{\alpha} |\varphi(\alpha_1)|\, d\alpha_1 < \varepsilon \int_k^{\mu} \frac{d\alpha}{\alpha^2} < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Sussiste perciò ancora la (12), per $F = f(0)$; e da essa e dalle (7) e (7'), segue

$$\lim_{k \to +0} \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \psi(kv)dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha = f(0),$$

Se ora osserviamo che la (13) risulta verificata in quasi-tutto $(-\infty, +\infty)$ (n.^{i} 61 e 62), quanto abbiamo affermato risulta completamente dimostrato (¹).

(¹) Sugli integrali di Fourier e di Sommerfeld, vedi anche: G. Giorgi, *Sul calcolo delle soluzioni funzionali.* (Atti Associaz. Elettrotecnica Italiana, Vol. IX (1905), pp. 651-699); M. Plancherel, *Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies.* (Rend. Circ. Mat. Palermo, T. XXX (1910), pp. 289-335); W. H. Young, *On Sommerfeld's Form of Fourier's Repeated Integrals.* (Proc. of the Royal Society of Edinburgh, Vol. XXXI (1911), pp. 586-603); E. C. TITCHMARSH, *A contribution to the theory of Fourier transforms.* (Proc. London Math. Soc., (2), Vol. XXIII (1025), pp. 279-289); N. WIENER, *On the representation of functions by trigonometrical integrals.* (Math. Zeitschr., Bd. XXIV (1925), pp. 575-616); H. HAHN, *Ueber die Methode der arithmetischen Mittel in der Theorie der verallgemeinerten Fourier'schen Integrale.* (Sitzungsber. Ak. Wissenschaften in Wien, Bd. 134 (1925), pp. 449-470); J: C. BURKILL, *The Stieltjes Integral in harmonic Analysis.* (The Mathem. Gazette, Vol. XIII (1926), pp. 195-196); E. W. HOBSON, loc. cit. in (1) a pag. 11.

CAPITOLO IX.

SERIE DOPPIE DI FOURIER

§ 1. PRELIMINARI.

162. - Definizione di serie doppia di Fourier ([1]).

Considerato, in un piano, un sistema cartesiano ortogonale di assi x e y, chiameremo *quadrato fondamentale*, di tale piano, il quadrato definito dalle disuguaglianze $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$. Indicheremo sempre, nel seguito, con Q questo *quadrato fondamentale*.

Data, sul quadrato Q, una funzione integrabile (nel senso del Lebesgue) $f(x, y)$, diremo *serie doppia di Fourier*, di tale funzione, la serie doppia

$$(1) \quad \sum_{\substack{m \\ n}\Big\}=0}^{\infty} \lambda_{m,n} [a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny + \\ + c_{m,n} \cos mx \operatorname{sen} ny + d_{m,n} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny],$$

dove è

$$(2) \quad \lambda_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{4}, \text{ se è } m = n = 0; \\ \frac{1}{2}, \text{ se è } m = 0,\ n > 0, \text{ oppure } m > 0,\ n = 0; \\ 1, \text{ se è } m > 0,\ n > 0; \end{cases}$$

([1]) Per ragioni di semplicità, ci limiteremo, nel presente Capitolo, a considerare funzioni di due variabili sole; ma quanto diremo si estende anche alle funzioni di un numero qualunque (finito) di variabili.

e

$$
(3) \qquad \begin{cases}
a_{m,n} = \dfrac{1}{\pi^2} \displaystyle\iint_Q f(x, y) \cos mx \cos ny \, dx \, dy, \\
b_{m,n} = \dfrac{1}{\pi^2} \displaystyle\iint_Q f(x, y) \operatorname{sen} mx \cos ny \, dx \, dy, \\
c_{m,n} = \dfrac{1}{\pi^2} \displaystyle\iint_Q f(x, y) \cos mx \operatorname{sen} ny \, dx \, dy, \\
d_{m,n} = \dfrac{1}{\pi^2} \displaystyle\iint_Q f(x, y) \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny \, dx \, dy.
\end{cases}
$$

Se, per esempio, consideriamo la funzione definita in Q da $f(x, y) \equiv xy$, abbiamo:

$$
a_{m,n} = \begin{cases} 4\pi^2, & \text{se } m = n = 0, \\ 0, & \text{in ogni altro caso,} \end{cases}
$$

$$
b_{m,n} = \begin{cases} -\dfrac{4\pi}{m}, & \text{se } m > 0 \text{ e } n = 0, \\ 0, & \text{in ogni altro caso,} \end{cases}
$$

$$
c_{m,n} = \begin{cases} -\dfrac{4\pi}{n}, & \text{se } m = 0 \text{ e } n > 0, \\ 0, & \text{in ogni altro caso,} \end{cases}
$$

$$
d_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{4}{mn}, & \text{se } m > 0 \text{ e } n > 0, \\ 0, & \text{in ogni altro caso.} \end{cases}
$$

Indicata con $s_{\mu,\nu}(x, y)$ [1] la somma parziale della serie doppia (1), cioè posto

$$
(4) \quad s_{\mu,\nu}(x, y) = \sum_{m=0}^{\mu} \sum_{n=0}^{\nu} \lambda_{m,n} [a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny + \\
+ c_{m,n} \cos mx \operatorname{sen} ny + d_{m,n} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny],
$$

diremo, con Stolz e Pringsheim [2], che nel punto (x, y) la serie doppia (1) è convergente ed ha per *somma* il numero $S(x, y)$,

---

[1] Iu tutto il presente Cap., μ e ν indicheranno sempre dei numeri interi, positivi o nulli.

[2] O. Stolz, *Ueber unendliche Doppelreihen*, (Math. Ann., Bd. 24, (1884), pp. 157-171); A. Pringsheim, *Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen*, (Sitzungsberichte d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-phys. Kl., Bd. 27, (1897), pp. 101-152).

se, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è sempre possibile di determinare un numero $N > 0$, tale che, per tutte le coppie μ, ν, di numeri interi, entrambi maggiori di N, sia

$$| S(x, y) - s_{\mu,\nu}(x, y) | < \varepsilon.$$

Analogamente a quanto si è fatto per la somma parziale della serie di Fourier di una funzione di una sola variabile, si può porre la somma $s_{\mu,\nu}(x, y)$ sotto forma di integrale. Si ha, infatti, tenendo conto delle (2) e (3),

$$s_{\mu,\nu}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\mu} \sum_{n=0}^{\nu} \lambda_{m,n} \iint_Q f(\alpha, \beta) \cos m(x-\alpha) \cos n(y-\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(\alpha, \beta) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\mu} \cos m(x-\alpha) \right\} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\nu} \cos n(y-\beta) \right\} d\alpha\, d\beta$$

donde, per la formula (1) del n.° 11,

$$(5)\quad s_{\mu,\nu}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_Q f(\alpha, \beta) \frac{\operatorname{sen} \frac{2\mu+1}{2}(x-\alpha) \operatorname{sen} \frac{2\nu+1}{2}(y-\beta)}{\operatorname{sen} \frac{x-\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{y-\beta}{2}} d\alpha\, d\beta.$$

Sostituiamo i valori della $f(x, y)$ corrispondenti ai punti (x, y) tali che $x = 2\pi$, $0 \leq y < 2\pi$, con quelli relativi ai punti $(0, y)$, ed i valori corrispondenti ai punti (x, y) tali che $0 \leq x < 2\pi$, $y = 2\pi$, con quelli relativi ai punti $(x, 0)$; sostituiamo, infine, $f(2\pi, 2\pi)$ col valore $f(0, 0)$, e definiamo poi la funzione $f(x, y)$ in tutto il piano (x, y) considerandola come funzione periodica, di periodo 2π, sia rispetto ad x che rispetto ad y. Allora, poichè anche la frazione che figura sotto il segno d'integrale nell'ultima uguaglianza scritta è una funzione periodica, di periodo 2π, sia rispetto ad x sia rispetto ad y, abbiamo

$$s_{\mu,\nu}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \int_{y-\pi}^{y+\pi} f(\alpha, \beta) \frac{\operatorname{sen} \frac{2\mu+1}{2}(x-\alpha) \operatorname{sen} \frac{2\nu+1}{2}(y-\beta)}{\operatorname{sen} \frac{x-\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{y-\beta}{2}} d\alpha\, d\beta,$$

ed anche, ponendo $x - \alpha = -2u$, $y - \beta = -2v$,

$$s_{\mu,\nu}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi:2}^{\pi:2} \int_{-\pi:2}^{\pi:2} f(x+2u, y+2v) \frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)u \operatorname{sen}(2\nu+1)v}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} du\, dv.$$

Se ora poniamo

$$(6)\quad F(x+2u,\, y+2v) = f(x+2u,\, y+2v) + f(x-2u,\, y+2v) + \\ + f(x-2u,\, y-2v) + f(x+2u,\, y-2v),$$

otteniamo l'espressione voluta di $s_{\mu,\nu}(x, y)$, e cioè

$$(7)\quad s_{\mu,\nu}(x, y) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi:2}\int_0^{\pi:2} F(x+2u,\, y+2v)\,\frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)u\,\operatorname{sen}(2\nu+1)v}{\operatorname{sen} u\,\operatorname{sen} v}\,du\,dv.$$

Questa formula permette di ricondurre lo studio della convergenza della serie doppia (1) a quello della convergenza ad un limite, determinato e finito, dell' integrale ora scritto, per μ e ν tendenti all' infinito, simultaneamente, ma indipendentemente l' uno dall' altro.

163. - Limiti di integrali doppi trigonometrici.

a) Il teorema del n.° 76, nonchè le osservazioni fatte in tale n.°, si estendono immediatamente al caso delle funzioni di due variabili. Ne viene pertanto, pure immediatamente, anche l' estensione del teorema di Riemann-Lebesgue del n.° 77, vale a dire, si ha che *i coefficienti* $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$, *definiti dalle* (3) *del n.° preced., tendono tutti allo zero, per* $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \to \infty$, cioè quando m ed n tendono all' infinito, simultaneamente, ma indipendentemente l' uno dall' altro (¹).

b) Per le stesse ragioni, la parte dell' integrale che figura nella (7) del n.° precedente, e che si riferisce al quadrato di vertici opposti (δ, δ) e $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, con $\delta > 0$ (oppure ad un qualsiasi rettangolo, contenuto in tale quadrato ed a lati paralleli agli assi coordinati), tende anch' essa allo zero, quando $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \to \infty$.

c) Non è però possibile di estendere alle serie doppie di Fourier il teorema di Riemann del n.° 101, vale a dire, il comportamento di una serie doppia di Fourier, in un dato punto

---

(¹) Con altre parole, preso un $\varepsilon > 0$, ad arbitrio, è possibile di determinare un $N > 0$ tale che, per tutte le coppie m, n, di numeri interi, entrambi maggiori di N, si abbia $|a_{m,n}| < \varepsilon$, $|b_{m,n}| < \varepsilon$, $|c_{m,n}| < \varepsilon$, $|d_{m,n}| < \varepsilon$.

(x_0, y_0), *non* dipende soltanto dai valori che la sua funzione generatrice $f(x, y)$ assume in prossimità di tale punto. Per quanto si è già detto, può solo affermarsi che, *sul comportamento della serie doppia di Fourier della $f(x, y)$, in un dato punto (x_0, y_0), hanno influenza solamente i valori che tale funzione assume nei punti aventi o l'ascissa prossima a x_0 oppure l'ordinata prossima a y_0.*

Per mostrare che sulla convergenza della serie doppia di Fourier di una data funzione, in un dato punto (x_0, y_0), possono avere influenza anche i valori che tale funzione assume in punti non in prossimità di (x_0, y_0), consideriamo la funzione $f_0(x, y)$ definita, sul quadrato fondamentale Q, nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
f_0(x, y) &= 0, \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq \pi, \qquad 0 \leq y \leq 2\pi, \\
&\qquad \text{e per} \quad \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi \\
f_0(x, y) &= \psi(y), \quad \text{per} \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq 2\pi,
\end{aligned}
$$

dove $\psi(y)$ è una funzione continua, data per ogni y dell'intervallo $(0, 2\pi)$ e tale che, per $y = \pi$, la sua serie di Fourier *non converga* ed abbia le sue somme parziali non limitate. La somma parziale, nel punto $\left(x = \frac{\pi}{2}, \; y = \pi\right)$, della serie doppia di Fourier della $f_0(x, y)$ è data, per la formula (7) del n.° 162, da

$$
\begin{aligned}
{}_{\nu}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\pi:4}^{\pi:2} \int_{0}^{\pi:2} \{ \psi(\pi + 2v) + \psi(\pi - 2v) \} \frac{\operatorname{sen}(2\mu + 1)u \operatorname{sen}(2\nu + 1)v}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \, du \, dv \\
&= \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int_{0}^{\pi:2} \{ \psi(\pi + 2v) + \psi(\pi - 2v) \} \frac{\operatorname{sen}(2\nu + 1)v}{\operatorname{sen} v} \, dv \right\} \left\{ \int_{\pi:4}^{\pi:2} \frac{\operatorname{sen}(2\mu + 1)u}{\operatorname{sen} u} \, du \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} s_{\nu}^{*}(\pi) \left\{ \int_{\pi:4}^{\pi:2} \frac{\operatorname{sen}(2\mu + 1)u}{\operatorname{sen} u} \, du \right\} \;\; (^1),
\end{aligned}
$$

dove con $s_{\nu}^{*}(\pi)$ abbiamo indicato la somma parziale, nel punto $y = \pi$, della serie di Fourier della funzione $\psi(y)$. L'ultima

---

(1) Per la (1') del n.° 100.

espressione scritta di $s_{\mu,\nu}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ mostra che questa somma non ha limite per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\to\infty$, vale a dire, che la serie doppia di Fourier della funzione $f_0(x, y)$ *non* converge nel punto $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Sia ora $f(x, y)$ una qualsiasi funzione data ed integrabile sul quadrato fondamentale Q, e supponiamo che, nel punto $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, la sua serie doppia di Fourier sia convergente. La nuova funzione

$$f_1(x, y) = f(x, y) + f_0(x, y),$$

che coincide con la $f(x, y)$ in tutto il cerchio di raggio $\pi:2$, avente il centro nel punto $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, ha allora la sua serie doppia di Fourier *non* convergente nel punto $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Resta così provato che, *se la serie doppia di Fourier di una funzione $f(x, y)$ è convergente in un dato punto (x_0, y_0), modificando opportunamente la funzione soltanto in punti non prossimi a (x_0, y_0), si può sempre ottenere che la serie doppia di Fourier della funzione modificata non sia più convergente nel punto considerato.*

Più innanzi (n.° 185) mostreremo che, se si resta nel campo delle funzioni integrabili in Q e *limitate*, l'influenza dei valori della $f(x, y)$ nei punti al di là di un intorno di un dato punto (x_0, y_0), sulla convergenza, in (x_0, y_0), della serie doppia di Fourier della $f(x, y)$, si traduce in una semplice *indeterminazione del primo ordine*. Più precisamente, mostreremo che se $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ sono due funzioni limitate ed integrabili, coincidenti in un intorno del punto (x_0, y_0), la serie doppia di Fourier della differenza $f_1(x, y) - f_2(x, y)$, nel punto (x_0, y_0), o converge allo zero oppure è indeterminata, ma ha sempre per somma lo zero se viene sommata col metodo della media aritmetica di Cesàro. Perciò, se la serie della $f_1(x, y)$ è convergente nel punto (x_0, y_0), quella della $f_2(x, y)$ o è convergente anch'essa, ed allora ha la stessa somma di quella della $f_1(x, y)$, oppure è sommabile col metodo della media aritmetica, fornendo ancora la stessa somma della serie della $f_1(x, y)$.

d) Quanto abbiamo detto or ora lascia sospettare che se, in prossimità delle rette $x=x_0$ e $y=y_0$, la funzione $f(x, y)$ soddisfa a condizioni opportune, la parte dell'integrale che figura nella (7) del n.º precedente, e che si riferisce ad un rettangolo di vertici opposti $(\delta, 0)$ e $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, oppure $(0, \delta)$ e $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, sempre con $0<\delta<\frac{\pi}{2}$, tende allo zero quando $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\to\infty$. Ciò avviene effettivamente, come risulta dal seguente teorema.

Sia $f(x, y)$ data ed integrabile nel quadrato fondamentale Q, e definiamola in tutto il piano per mezzo della periodicità rispetto ad x e ad y, come si è già detto nel n.º precedente.

Supponiamo che:

1º) i limiti $f(x, y_0 \pm 0)$ e $f(x_0 \pm 0, y)$ esistano finiti, i primi per quasi-tutti gli x ed i secondi per quasi-tutti gli y, e che essi siano integrabili, rispettivamente come funzioni della x e della y;

2º) per ogni $\delta>0$ e minore di $\pi:2$, si possa sempre trovare un $\sigma>0$ tale che le funzioni di u e v

$$\frac{f(x_0+u, y_0+v)-f(x_0+u, y_0+0)}{v}, \quad \frac{f(x_0+u, y_0-v)-f(x_0+u, y_0-0)}{v}$$

risultino entrambe integrabili nei due rettangoli definiti dalle disuguaglianze $\delta \leq |u| \leq \pi:2$, $0 \leq v \leq \sigma$, e che le funzioni

$$\frac{f(x_0+u, y_0+v)-f(x_0+0, y_0+v)}{u}, \quad \frac{f(x_0-u, y_0+v)-f(x_0-0, y_0+v)}{u}$$

risultino integrabili nei rettangoli definiti dalle disuguaglianze $0 \leq u \leq \sigma$, $\delta \leq |v| \leq \pi:2$.

Allora, i due integrali

$$(1) \qquad \int_\delta^{\pi:2}\int_0^{\alpha} F(x_0+2u, y_0+2v)\,\frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)u \operatorname{sen}(2\nu+1)v}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}\, du\, dv \quad (^1),$$

$$(2) \qquad \int_0^{\alpha}\int_\delta^{\pi:2} F(x_0+2u, y_0+2v)\,\frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)u \operatorname{sen}(2\nu+1)v}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}\, du\, dv,$$

---

(1) La funzione F è quella definita dalla (6) del n.º 162.

dove è $0 < a \leq \pi : 2$, *tendono entrambi a* 0 *quando* $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$ (¹).
Possiamo supporre, per semplicità di scrittura, che sia $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Allora, poichè è

$$F(2u, 2v) = f(2u, 2v) + f(-2u, 2v) + f(-2u, -2v) + f(2u, -2v),$$

la parte dell' integrale (1), relativa a $f(2u, 2v)$, possiamo scriverla nella forma

$$(3) \qquad \int_0^{a'} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv \int_\delta^{\pi:2} f(2u, +0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du +$$

$$+ \int_\delta^{\pi:2} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \int_0^{a'} \{ f(2u, 2v) - f(2u, +0) \} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv +$$

$$+ \int_\delta^{\pi:2} \int_{a'}^{a} f(2u, 2v) \frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} du\, dv,$$

dove supponiamo a' positivo e minore tanto di a quanto di σ. La prima parte di (3) tende a zero, quando $\left.\begin{matrix}h\\ k\end{matrix}\right\} \to \infty$, perchè è (per $k > 0$)

$$(4) \qquad 0 < \int_0^{a'} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv < \frac{\pi^2}{2} \text{ (}^2\text{)},$$

$$\int_\delta^{\pi:2} f(2u, +0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \to 0$$

(n.° 76); la terza parte di (3) tende pure allo zero, per quanto si è detto in *b*). Circa il secondo termine di (3), osserviamo che,

---

(¹) Cfr. W. Küstermann, *Ueber Fouriersche Doppelreihen und das Poissonsche Doppelintegral.* Inaugural-Dissertation, München, 1913, pp. 1-61.

(²) È infatti

$$0 < \int_0^{a'} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv < \int_0^{\pi:k} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv < k \int_0^{\pi:k} \frac{v}{\operatorname{sen} v} dv < \frac{\pi^2}{2}.$$

in virtù delle ipotesi poste, esso è, in modulo, inferiore a

$$\frac{2}{\operatorname{sen}\delta}\int_{\delta}^{\pi:2}\int_{0}^{a'}\left|\frac{f(2u, 2v)-f(2u, +0)}{2v}\right|\left|\frac{v}{\operatorname{sen} v}\right| du\, dv <$$

$$< \frac{\pi}{\operatorname{sen}\delta}\int_{\delta}^{\pi:2}\int_{0}^{a'}\left|\frac{f(2u, 2v)-f(2u, +0)}{2v}\right| du\, dv,$$

e quest'ultimo integrale è piccolo come si vuole con a'. Dunque, prefissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, e preso a' sufficientemente piccolo, tutta l'espressione (3) risulta in modulo minore di ε per tutti gli h e k sufficientemente grandi. Ciò prova che l'espressione (3) tende a zero per $\left.\begin{matrix} h \\ k \end{matrix}\right\} \to \infty$. In modo analogo si trattano le altre parti dell'integrale (1); e così è dimostrato che tale integrale tende a zero per $\left.\begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix}\right\} \to \infty$.

Analogamente per l'integrale (2).

OSSERVAZIONE. — *Le condizioni del teorema ora dimostrato risultano tutte verificate se la funzione $f(x, y)$ è tale che esistano tre numeri positivi K, α, β, in modo che si abbia*

$$(5) \qquad |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq K\{|x_1 - x_2|^{\alpha} + |y_1 - y_2|^{\beta}\},$$

per ogni coppia (x_1, y_1), (x_2, y_2), di punti interni [1] *al quadrato Q.*

164. - Funzioni di due variabili a variazione limitata.

Un'altra proposizione, analoga a quella dimostrata in *d*) nel n.° preced., può ottenersi mediante il concetto di funzione di due variabili a variazione limitata, che ora ci proponiamo di introdurre.

Diremo che la funzione $f(x, y)$, supposta definita nel quadrato fondamentale Q, *è a variazione limitata in Q*, se:

1°) per quasi-tutti i valori di x' e di y' dell'intervallo $(0, 2\pi)$, le $f(x', y)$ e $f(x, y')$ sono funzioni, rispettivamente di y e di x, a variazione limitata in $(0, 2\pi)$;

---

[1] Possono dunque fare eccezione i punti del contorno di Q.

2°) le variazioni totali, nell'intervallo $(0, 2\pi)$, della $f(x', y)$, considerata come funzione della y, e della $f(x, y')$, considerata come funzione della x, sono delle funzioni integrabili, rispettivamente di x' e di y', nell'intervallo $(0, 2\pi)$ [1].

Per esempio, la funzione nulla nel punto $(0, 0)$ e definita da $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}}$ negli altri punti del quadrato Q, è *a variazione limitata in* Q.

Indicheremo, nel seguito, con $V_{(x)}(x, y)$ la variazione totale, nell'intervallo $(0, x)$, della $f(x, y)$, considerata come funzione della sola x; e con $V_{(y)}(x, y)$ la variazione totale, nell'intervallo $(0, y)$, della $f(x, y)$, considerata come funzione della sola y. Se la $f(x, y)$ è *a variazione limitata in* Q, le funzioni $V_{(x)}(2\pi, y)$ e $V_{(y)}(x, 2\pi)$ esistono finite, rispettivamente per quasi-tutti i valori di y e di x, in $(0, 2\pi)$, ed esistono finiti ambedue gli integrali

$$\int_0^{2\pi} V_{(x)}(2\pi, y)dy, \qquad \int_0^{2\pi} V_{(y)}(x, 2\pi)dx.$$

Se la $f(x, y)$ è assolutamente continua come funzione della sola x, per quasi-tutti gli y, si ha

$$\int_0^{2\pi} V_{(x)}(2\pi, y)dy = \int_0^{2\pi} dy \int_0^{2\pi} |f_x'|\, dx = \iint_Q |f_x'|\, dx\, dy;$$

ed analogamente, se la $f(x, y)$ è assolutamente continua come funzione della sola y, per quasi-tutti gli x, si ha

$$\int_0^{2\pi} V_{(y)}(x, 2\pi)dx = \iint_Q |f_y'|\, dx\, dy.$$

Se la $f(x, y)$ è definita in tutto il piano (x, y) e periodica, di periodo 2π, tanto rispetto alla x quanto rispetto alla y, e

---

(1) Questa definizione trovasi in: L. TONELLI, *Sulla quadratura delle superficie.* (Rend. R. Accad. Lincei, Vol. III (1926), pp. 357-362); *Sur la quadrature des surfaces.* (Comptes rendus, t. 182 (1926), pp. 1198-1200). VITALI, LEBESGUE, DE LA VALLÉE POUSSIN, ecc., chiamano funzioni a *variazione limitata* quelle funzioni $f(x, y)$ che noi diremo, più innanzi (n.° 176), a *variazione doppia finita*.

se essa è *a variazione limitata* nel quadrato Q, è anche a variazione limitata in ogni altro quadrato o rettangolo a lati paralleli agli assi x e y; diremo allora, senz'altro, che essa è *a variazione limitata.* In questo caso, intenderemo che le funzioni $V_{(x)}(x, y)$ e $V_{(y)}(x, y)$ siano definite in tutto il piano (x, y), la loro definizione essendo dedotta, da quella già data in Q, per mezzo della periodicità, di periodo 2π, rispetto ad ambedue le variabili x e y. A tale scopo, cambieremo il valore della $V_{(x)}(x, y)$ per $x = 0$, ponendolo uguale a $V_{(x)}(2\pi, y)$; ed analogamente, il valore di $V_{(y)}(x, y)$, per $y = 0$, sarà sostituito con $V_{(y)}(x, 2\pi)$.

Sempre considerando la funzione $f(x, y)$ definita in tutto il piano e periodica, come sopra si è detto, tale funzione, quando sia integrabile in Q, risulta integrabile anche in ogni altro quadrato o rettangolo, e noi diremo, senz'altro, che essa è *integrabile.*

165. - **Lemmi.**

Prima di dimostrare la proposizione cui abbiamo accennato nel principio del n.° preced., vogliamo stabilire due lemmi che ci saranno utili fra poco ed anche nel seguito.

LEMMA I. — *Se $f(x)$ è una funzione a variazione limitata nell'intervallo $(0, a)$, con $0 < a \leq \pi : 2$, e se $V(a)$ indica la sua variazione totale nell'intervallo indicato, si ha, qualunque sia il numero reale h,*

$$(1) \qquad \left| \int_0^a \{ f(x) - f(+0) \} \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx \right| < \frac{\pi^2}{2} \{ V(a) - V(+0) \} \text{ [1]}.$$

Indichiamo con $p(x)$, $n(x)$ e $V(x)$ le variazioni positiva, negativa e totale della $f(x)$ nell'intervallo $(0, x)$; esse sono delle funzioni non negative e non decrescenti. E siccome si ha

$$f(x) = f(0) + p(x) - n(x),$$
$$p(x) + n(x) = V(x),$$

si ha pure

$$f(+0) = f(0) + p(+0) - n(+0),$$

---

[1] L. TONELLI, *Sulla convergenza delle serie doppie di Fourier.* (Annali di Matematica, S. IV, t. IV (1927), pp. 29-72).

e

$$f(x) = f(+0) + \{ p(x) - p(+0) \} - \{ n(x) - n(+0) \}.$$

Il primo membro della (1) può dunque scriversi

$$\left| \int_0^a \{ p(x) - p(+0) \} \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx - \int_0^a \{ n(x) - n(+0) \} \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx \right|,$$

ed anche, applicando il secondo teorema della media,

$$\left| \{ p(a) - p(+0) \} \int_{a_1}^a \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx - \{ n(a) - n(+0) \} \int_{a_2}^a \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx \right|,$$

dove a_1 ed a_2 sono due punti convenienti dell'intervallo $(0, a)$.

Gli integrali ora scritti sono ambedue minori, in modulo, di $\pi^2 : 2$ [1] e si ha, pertanto, che il primo membro della (1) è minore di

$$\frac{\pi^2}{2} \{ p(a) - p(+0) + n(a) - n(+0) \} = \frac{\pi^2}{2} \{ V(a) - V(+0) \}.$$

Lemma II. — *Nelle ipotesi del lemma precedente, si ha, qualunque sia il numero reale h,*

$$(2) \qquad \left| \int_\delta^a \{ f(x) - f(+0) \} \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx \right| < \frac{C_\delta}{1 + |h|} \{ V(a) - V(+0) \},$$

dove è $0 < \delta < a \leq \pi : 2$ e C_δ è una costante dipendente da δ, ma indipendente da a e dalla funzione $f(x)$ [2].

Conservando le notazioni della precedente dimostrazione, il primo membro della (2) può scriversi

$$\left| \{ p(a) - p(+0) \} \int_{a'}^a \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx - \{ n(a) - n(+0) \} \int_{a''}^a \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx \right|,$$

dove a' ed a'' sono punti convenienti dell'intervallo (δ, a).

---

(1) È infatti, $\int_{a_1}^a .... = \int_0^a .... - \int_0^{a_1} ....$, e basta tener conto di quanto si è detto in (2) a pag. 442.

(2) L. Tonelli, loc. cit. in (1) a pag. 445.

Ciascuno dei due integrali ora scritti è, per $h > 2\pi:\delta$, minore, in modulo, di $\pi:\left(h \operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\right)$ [1]; perciò, qualunque sia h, il primo membro di (2) è minore di

$$\frac{C_\delta}{1+|h|}\{p(a)-p(+0)+n(a)-n(+0)\} = \frac{C_\delta}{1+|h|}\{V(a)-V(+0)\}.$$

166. - Convergenza allo zero di un integrale doppio trigonometrico.

Dimostriamo la seguente proposizione, relativa alla convergenza degli integrali (1) e (2) del n.° 163.

Se la funzione $f(x, y)$ è data in tutto il piano (x, y), ed è periodica, di periodo 2π, rispetto a ciascuna delle due variabili x ed y, integrabile ed a variazione limitata, i due integrali

$$(1)\qquad \int_\delta^{\pi:2}\int_0^a F(x_0+2u, y_0+2v)\frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)u \operatorname{sen}(2\nu+1)v}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}\,du\,dv\ [2],$$

$$(2)\qquad \int_0^a\int_\delta^{\pi:2} F(x_0+2u, y_0+2v)\frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)u \operatorname{sen}(2\nu+1)v}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}\,du\,dv,$$

dove è $0 < a \leq \pi:2$, tendono entrambi a 0 quando $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\to\infty$ [3].

Supposto anche qui, per semplicità di scrittura, $x_0=0$, $y_0=0$, consideriamo la parte dell'integrale (1) relativa a $f(2u, 2v)$.

Osserviamo, in primo luogo, che, essendo la $f(x, y)$, come funzione della sola y, a variazione limitata su quasi-tutte le parallele all'asse delle y (n.° 164), esiste finito, per quasi-tutti i valori di u, il limite $f(2u, +0)$, e questo limite risulta una funzione quasi-continua, perchè la $f(2u, 2v)$ è quasi-continua,

---

[1] Ed infatti, se è $h > 2\pi:\delta$ e k indica il minimo intero tale che $\frac{k}{h}\pi \geq \frac{\delta}{2}$, si ha $\frac{k}{h}\pi < \delta$, e ciascuno degli integrali indicati risulta minore, in modulo, di

$$\int_{k\pi:h}^{(k+1)\pi:h}\left|\frac{\operatorname{sen} hz}{\operatorname{sen} z}\right| dz < \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}}\int_{k:\pi h}^{(k+1)\pi:h} dz = \pi:\left(h \operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\right).$$

[2] La funzione F è quella definita dalla (6) del n.° 162.

[3] L. Tonelli, loc. cit. in [1] a pag. 445.

rispetto ad u, per quasi-tutti i valori di v, in forza dell'ipotesi che la $f(x, y)$ sia integrabile. Inoltre, se è $0 \leq v \leq \pi:2$, e se v' è un valore dell'intervallo $(\pi:2, \pi)$, tale che la $f(2u, 2v')$ risulti integrabile rispetto ad u [1], si ha

$$|f(2u, 2v') - f(2u, 2v)| \leq V_{(y)}(2u, 2\pi),$$

donde

$$|f(2u, 2v)| \leq |f(2u, 2v')| + V_{(y)}(2u, 2\pi);$$

e siccome $|f(2u, 2v')|$ è integrabile rispetto ad u, e tale è anche la $V_{(y)}(2u, 2\pi)$, per l'ipotesi che la $f(x, y)$ sia a variazione limitata, ne viene che, se, per uno dei v considerati, la $f(2u, 2v)$ è quasi-continua rispetto ad u, essa è anche integrabile. Dall'ultima disuguaglianza scritta e da un noto teorema d'integrazione per serie, segue pure che $f(2u, +0)$ è anch'essa integrabile rispetto ad u.

Ciò premesso possiamo scrivere la parte di (1) relativa a $f(2u, 2v)$, nella forma (3) del n.° 163, e dopo quanto abbiamo detto in tale n.°, resta soltanto da provare che l'integrale

$$\int_{\delta}^{\pi:2} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \int_{0}^{a'} \{ f(2u, 2v) - f(2u, +0) \} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv \tag{3}$$

può rendersi piccolo, in modulo, come si vuole, indipendentemente da h e k, prendendo convenientemente piccolo a'.

A tale scopo, osserviamo che, per quasi-tutti i valori di u, $V_{(y)}(2u, 2v)$ tende, per $v \to +0$, al valore finito $V_{(y)}(2u, +0)$; e siccome è sempre $V_{(y)}(2u, 2v) \leq V_{(y)}(2u, 2\pi)$, e la $V_{(y)}(2u, 2\pi)$ è integrabile rispetto ad u, per essere la $f(x, y)$ a variazione limitata in Q, ne viene, in virtù di un noto teorema di integrazione per serie,

$$\int_{\delta}^{\pi:2} V_{(y)}(2u, 2v)\, du \to \int_{\delta}^{\pi:2} V_{(y)}(2u, +0)\, du$$

---

[1] In virtù dell'integrabilità superficiale della $f(x, y)$, questa funzione risulta, secondo un noto teorema del FUBINI, linearmente integrabile rispetto ad x, per quasi-tutti i valori di y.

per $v \to +0$ (¹). Preso dunque, ad arbitrio, un $\varepsilon > 0$, possiamo supporre a' sufficientemente piccolo in modo che sia

$$\int_{\delta}^{\pi:2} \{ V_{(y)}(2u, 2a') - V_{(y)}(2u, +0) \} \, du < \varepsilon.$$

Abbiamo allora, applicando prima la disuguaglianza (1) del n.° 165 e poi quella soprascritta,

$$\left| \int_{\delta}^{\pi:2} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \int_{0}^{a'} \{ f(2u, 2v) - f(2u, +0) \} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv \right|$$
$$< \frac{\pi^2}{2 \operatorname{sen} \delta} \int_{\delta}^{\pi:2} \{ V_{(y)}(2u, 2a') - V_{(y)}(2u, +0) \} \, du$$
$$< \frac{\pi^2 \varepsilon}{2 \operatorname{sen} \delta},$$

e ciò prova appunto che l' integrale (3) può rendersi, in modulo, piccolo come si vuole, per tutti gli h e k, prendendo convenientemente piccolo a'. Questo basta, come già si è detto nei n.° 163, per dimostrare che gli integrali (1) e (2) tendono a 0 quando $\left.\begin{matrix}\mu \\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$.

(¹) Possiamo sempre supporre che $V_{(y)}(x, y)$ sia, per ogni y, una funzione quasi-continua della x. Ciò è sicuramente vero se la $f(x, y)$ è continua rispetto alla y, ed anche se è, per quasi-tutti gli x e per tutti gli y, $f(x, y-0) \leq f(x, y) \leq f(x, y+0)$. In caso contrario, nei punti di discontinuità che non soddisfano a questa condizione e che si trovano su quelle parallele all'asse delle y sulle quali la $f(x, y)$ è a variazione limitata come funzione della sola y — punti che, su ciascuna di tali parallele, sono al massimo in un'infinità numerabile — si cambierà il valore della $f(x, y)$ (il che non altererà la serie doppia di Fourier dalla $f(x, y)$ medesima) in modo da verificare la doppia disuguaglianza scritta or ora. Con ciò, invece di $V_{(y)}(x, y)$, si avrà una variazione totale $\overline{V}_{(y)}(x, y)$ tale che $\overline{V}_{(y)}(x, y) \leq$ $\leq V_{(y)}(x, y)$. Questa $\overline{V}_{(y)}(x, y)$ risulta quasi-continua ed integrabile su ogni parallela all'asse delle x, in virtù di quanto abbiamo già detto e della disuguaglianza $\overline{V}_{(y)}(x, y) \leq V_{(y)}(x, 2\pi)$, nella quale il secondo membro è integrabile. Ed allora basterà sostituire, nel ragionamento che andiamo facendo nel testo, la $V_{(y)}(x, y)$ con la $\overline{V}_{(y)}(x, y)$.

§ 2. Convergenza delle serie doppie di Fourier.

167. - Definizione dei limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$.

Data una funzione $f(x, y)$ in un certo campo C, consideriamo un punto (x, y) *interno* a C. Diremo che esiste finito il limite

$$\lim_{\substack{h \\ k}\Big\} \to +0} f(x+h,\ y+k)$$

se esiste un numero finito, che indicheremo con $f(x+0,\ y+0)$, tale che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si possa poi sempre determinare un $\delta > 0$, in modo che, per ogni coppia h, k, soddisfacente alle disuguaglianze $0 < h < \delta$, $0 < k < \delta$, sia

$$|f(x+0,\ y+0) - f(x+h,\ y+k)| < \varepsilon.$$

Analogamente si definiranno i limiti

$$f(x-0,\ y+0) = \lim_{\substack{h \\ k}\Big\} \to +0} f(x-h,\ y+k),$$

$$f(x-0,\ y-0) = \lim_{\substack{h \\ k}\Big\} \to +0} f(x-h,\ y-k),$$

$$f(x+0,\ y-0) = \lim_{\substack{h \\ k}\Big\} \to +0} f(x+h,\ y-k).$$

Definiremo poi il limite

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to +0}} f(x+h,\ y+k)$$

come quel numero, se esiste, tale che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si possa poi sempre determinare un $\delta > 0$, in modo che, per ogni coppia h, k, soddisfacente alle disuguaglianze $0 < |h| < \delta$, $0 < k < \delta$, sia

$$\left| \lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to +0}} f(x+h,\ y+k) - f(x+h,\ y+k) \right| < \varepsilon.$$

168. - I° Teorema di convergenza.

a) Sia $f(x, y)$ data in tutto il piano (x, y), periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e rispetto ad y, ed integrabile. Si supponga che valgano le tre condizioni seguenti:

1°) *la* $f(x, y)$ *è a variazione limitata, oppure soddisfa alle condizioni del teorema del n.° 163, d)*;

2°) *per un* $\delta > 0$, *le quattro funzioni di* u *e di* v

$$\frac{f(x_0+u, y_0+v)-f(x_0+u, y_0+0)-f(x_0+0, y_0+v)+f(x_0+0, y_0+0)}{uv},$$

$$\frac{f(x_0-u, y_0+v)-f(x_0-u, y_0+0)-f(x_0-0, y_0+v)+f(x_0-0, y_0+0)}{uv},$$

$$\frac{f(x_0-u, y_0-v)-f(x_0-u, y_0-0)-f(x_0-0, y_0-v)+f(x_0-0, y_0-0)}{uv},$$

$$\frac{f(x_0+u, y_0-v)-f(x_0+u, y_0-0)-f(x_0+0, y_0-v)+f(x_0+0, y_0-0)}{uv},$$

risultano tutte integrabili nel quadrato di vertici opposti $(0, 0)$ *e* (δ, δ);

3°) *esistono finiti i quattro limiti* $f(x_0 \pm 0, y_0 \pm 0)$ *ed è*

$$\lim_{h \to +\infty} \int_0^\delta f(x_0 \pm u, y_0 \pm 0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du = \frac{\pi}{2} f(x_0 \pm 0, y_0 \pm 0),$$

$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^\delta f(x_0 \pm 0, y_0 \pm v) \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv = \frac{\pi}{2} f(x_0 \pm 0, y_0 \pm 0).$$

Allora la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ *converge nel punto* (x_0, y_0), *ed ha per somma*

$$(1) \quad \frac{1}{4}\{ f(x_0+0, y_0+0) + f(x_0-0, y_0+0) + \\ + f(x_0-0, y_0-0) + f(x_0+0, y_0-0)\} \text{ (}^1\text{)}.$$

Senza nuocere alla generalità della dimostrazione, possiamo supporre, per semplicità, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Considerata l'espressione della somma parziale $s_{\mu,\nu}(0, 0)$ della serie doppia di Fourier, data dalla (7) del n.° 162, decomponiamo l'integrale, che in tale espressione figura, in tre parti, corrispondenti ai tre rettangoli di vertici opposti $(0, 0)$

---

(1) L. Tonelli, loc. cit. in (1) a pag. 445.

e (δ, δ); $(\delta, 0)$ e $(\pi:2, \pi:2)$; $(0, \delta)$ e $(\delta, \pi:2)$; dove supponiamo $0 < \delta < \pi:2$. Avremo così decomposto $s_{\mu,\nu}(0, 0)$ in tre parti, che indicheremo con $s^{(1)}_{\mu,\nu}$, $s^{(2)}_{\mu,\nu}$, $s^{(3)}_{\mu,\nu}$.

Per la condizione 1°), si ha, applicando i teoremi del n.° 163, *d*), e del n.° 166,

$$s^{(2)}_{\mu,\nu} \to 0, \quad s^{(3)}_{\mu,\nu} \to 0,$$

quando $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$. Non resta dunque che studiare il comportamento di

$$(2) \qquad s^{(1)}_{\mu,\nu} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\delta\int_0^\delta F(2u, 2v)\frac{\operatorname{sen} hu \ \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \ \operatorname{sen} v}\,du\,dv,$$

dove abbiamo posto $h = 2\mu + 1$, $k = 2\nu + 1$.

Consideriamo la parte di $s^{(1)}_{\mu,\nu}$ relativa a $f(2u, 2v)$, e cioè

$$\bar{s}^{(1)}_{\mu,\nu} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\delta\int_0^\delta f(2u, 2v)\frac{\operatorname{sen} hu \ \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \ \operatorname{sen} v}\,du\,dv,$$

che può anche scriversi

$$(3) \qquad \bar{s}^{(1)}_{\mu,\nu} = \frac{1}{\pi^2} f(+0, +0)\int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du \int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv +$$
$$+ \frac{1}{\pi^2}\int_0^\delta\int_0^\delta \{f(2u, 2v) - f(+0, +0)\}\frac{\operatorname{sen} hu \ \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \ \operatorname{sen} v}\,du\,dv.$$

Il primo termine del secondo membro di questa uguaglianza tende a $\frac{1}{4} f(+0, +0)$, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$, perchè è

$$(4) \qquad \lim_{\mu \to \infty}\int_0^\delta \frac{\operatorname{sen}(2\mu + 1)u}{\operatorname{sen} u}\,du = \frac{\pi}{2},$$

come risulta dalla (2) del n.° 100 e dal teorema del n.° 76.

Esaminiamo l'ultimo termine di (3). Abbiamo

$$\int_0^\delta\!\!\int_0^\delta \{ f(2u,2v) - f(+0,+0) \} \frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}\, du\, dv =$$

$$= \int_0^\delta\!\!\int_0^\delta \{ f(2u,2v) - f(2u,+0) - f(+0,2v) + f(+0,+0) \} \frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}\, du\, dv$$

$$+ \int_0^\delta f(2u,+0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv + \int_0^\delta f(+0,2v) \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv \int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du$$

$$- 2f(+0,+0) \int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv.$$

Tenendo conto della (4) e della condizione 3°), i tre ultimi termini della (5) tendono complessivamente allo zero, quando $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$. Il primo termine del secondo membro di (5) è poi, in modulo, minore di

$$4 \int_0^\delta\!\!\int_0^\delta \left| \frac{f(2u,2v) - f(2u,+0) - f(+0,2v) + f(+0,+0)}{2u \cdot 2v} \right| \frac{uv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}\, du\, dv$$

$$< \pi^2 \int_0^\delta\!\!\int_0^\delta \left| \frac{f(2u,2v) - f(2u,+0) - f(+0,2v) + f(+0,+0)}{2u \cdot 2v} \right| du\, dv,$$

espressione che, in forza della condizione 2°), resta minore di un $\varepsilon > 0$, arbitrariamente prefissato, per tutti i δ sufficientemente piccoli.

Dunque, scelto un $\varepsilon > 0$, ad arbitrio, è possibile di determinare δ in modo che, per tutti i μ e ν sufficientemente grandi, sia

$$\left| \bar{s}^{(1)}_{\mu,\nu} - \frac{1}{4} f(+0,+0) \right| < \varepsilon.$$

Trattando nello stesso modo le altre tre parti di $s^{(1)}_{\mu,\nu}$, si ha che, in corrispondenza di ε, è possibile determinare δ in modo che, per tutti i μ e ν sufficientemente grandi, la differenza fra $s^{(1)}_{\mu,\nu}$ e l'espressione (1) risulti, in modulo, minore di ε. E ciò dimostra il teorema enunciato.

b) Tenendo conto di quanto si è detto nell'Osservazione posta in fine al n.° 163, e nel n.° 102, dal teorema ora dimostrato si deduce immediatamente il seguente

CRITERIO DI CONVERGENZA – *Se la $f(x, y)$, data in tutto il piano (x, y) e periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, è tale che esistano tre numeri positivi K, α, β, in modo che si abbia*

$$(6)\qquad |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq K\{|x_1 - x_2|^\alpha + |y_1 - y_2|^\beta\},$$

per ogni coppia (x_1, y_1), (x_2, y_2), di punti interni al quadrato fondamentale Q, la sua serie doppia di Fourier converge verso $f(x_0, y_0)$ in ogni punto (x_0, y_0), interno a Q, per il quale si possano determinare un intorno e tre numeri positivi K', α', β', in modo da aversi, in tutto l'intorno,

$$(7)\quad |f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)| \leq K'|x - x_0|^{\alpha'}|y - y_0|^{\beta'}.$$

Se il punto (x_0, y_0), in cui vale la (7), *è sul contorno di Q, la convergenza della serie doppia di Fourier, in (x_0, y_0), avviene verso il valore* (1) [1].

Dalle dimostrazioni fatte nel n.° 163, *d*), e nel presente n.°, segue poi, tenendo presente le cose dette nel n.° 110, che, *se la* (6) *è verificata per tutte le coppie (x_1, y_1), (x_2, y_2), di punti di Q, e se la* (7) *vale per qualsiasi coppia (x_0, y_0), (x, y), di punti pure di Q (K', α' e β' restando sempre gli stessi), la convergenza della serie doppia di Fourier verso la $f(x, y)$ è ovunque uniforme* [2].

c) Come caso particolare del precedente criterio, abbiamo: *Se, in tutto il quadrato fondamentale Q, è*

$$f(x, y) = g_1(x) + g_2(y) + \int_0^x\int_0^y g_3(x, y)\,dx\,dy,$$

con $g_1(x)$ e $g_2(y)$ funzioni continue, a derivata limitata, e $g_3(x, y)$ funzione integrabile, limitata, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ è ovunque convergente, e la sua somma è $f(x, y)$ oppure l'espressione (1), *a seconda che (x, y) è interno oppure sul contorno di Q.*

---

(1) L. TONELLI, loc. cit. in (1) a pag. 445.

(2) Ibidem.

169. - II° Teorema di convergenza.

Sia $f(x, y)$ una funzione data in tutto il piano (x, y), periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e rispetto ad y, integrabile ed a variazione limitata.

Se, nel punto (x_0, y_0), valgono le quattro uguaglianze

$$(1)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{u \to +0 \\ v \to 0}} \{ V_{(x)}(x_0 + u, y_0 + v) - V_{(x)}(x_0 + 0, y_0 + v) \} = 0, \\ \lim\limits_{\substack{u \to +0 \\ v \to 0}} \{ V_{(x)}(x_0 - u, y_0 + v) - V_{(x)}(x_0 - 0, y_0 + v) \} = 0, \\ \lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ v \to +0}} \{ V_{(y)}(x_0 + u, y_0 + v) - V_{(y)}(x_0 + u, y_0 + 0) \} = 0, \\ \lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ v \to +0}} \{ V_{(y)}(x_0 + u, y_0 - v) - V_{(y)}(x_0 + u, y_0 - 0) \} = 0, \end{cases}$$

la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge, in tale punto, verso

$$(2)\quad \frac{1}{4} \{ f(x_0 + 0, y_0 + 0) + f(x_0 - 0, y_0 + 0) + \\ + f(x_0 - 0, y_0 - 0) + f(x_0 + 0, y_0 - 0) \}$$ [1].

Supporremo anche qui, per semplicità di scrittura, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, ed osserveremo subito che dalle (1), ammesse per il punto $(x_0 = 0, y_0 = 0)$, segue l'esistenza e la finitezza del limite $f(+0, +0)$.

Ed infatti, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un l positivo in modo che, dalla $0 < x \leq l$, segua $| V_{(x)}(l, l) - V_{(x)}(x, l) | < \varepsilon$, e dalle $0 < x \leq l$, $0 < y \leq l$, segua $| V_{(y)}(x, l) - V_{(y)}(x, y) | < \varepsilon$. Per gli stessi x e y, è allora $| f(l, l) - f(x, l) | < \varepsilon$, $| f(x, l) - f(x, y) | < \varepsilon$, e perciò segue $| f(l, l) - f(x, y) | < 2\varepsilon$, il che prova l'esistenza e la finitezza di $f(+0, +0)$.

Ciò premesso e procedendo come abbiamo fatto nel n.° 168, *a*), il teorema sarà dimostrato se proveremo che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è possibile determinare δ in modo

---

[1] L. Tonelli, loc. cit. in [1] a pag. 445

che sia

$$(3) \qquad \left| \int_0^\delta \int_0^\delta \{ f(2u, 2v) - f(+0, +0) \} \frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} du\, dv \right| < \varepsilon,$$

contemporaneamente per tutti gli h e k (interi, positivi).

Posto

$$I_{r,s} = \int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \int_{s\pi:h}^{(s+1)\pi:k} \{ f(2u, 2v) - f(+0, +0) \} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv,$$

ed indicati con p e q i massimi interi tali che sia $p\pi:h < \delta$, $q\pi:k < \delta$, l'integrale della (3) si scrive

$$(4) \qquad \sum_{r=0}^{p} \sum_{s=r}^{q} I_{r,s} + \sum_{s=0}^{q} \sum_{r=s+1}^{p} I_{r,s},$$

intendendo che, negli integrali $I_{p,s}(s = 0, 1, \ldots, q)$ e $I_{r,q}(r = 0, 1, \ldots, p)$, il campo di integrazione sia limitato a quella parte che si trova nel quadrato di vertici opposti $(0, 0)$ e (δ, δ).

Cominciamo col prendere in esame la somma $\sum_{s=r}^{q} I_{r,s}$.

La funzione $f(x, y)$, essendo a variazione limitata in Q, è, su quasi-tutte le parallele all'asse delle y, a variazione limitata come funzione della sola y. Perciò, se, per ogni punto (x, y) del quadrato di vertici opposti $(0, 0)$ e $(2\delta, 2\delta)$, indichiamo con $P_{(y)}(x, y)$ e $N_{(y)}(x, y)$ le variazioni positiva e negativa, nell'intervallo $(y, 2\delta)$, della $f(x, y)$, considerata come funzione della sola y, abbiamo, per quasi-tutti i valori di x in $(0, 2\delta)$,

$$\begin{aligned} & f(x, y) = f(x, 2\delta) - P_{(y)}(x, y) + N_{(y)}(x, y), \\ (5) \qquad & P_{(y)}(x, y) + N_{(y)}(x, y) = V_{(y)}(x, 2\delta) - V_{(y)}(x, y), \end{aligned}$$

e $P_{(y)}(x, y)$ e $N_{(y)}(x, y)$ sono funzioni non negative e non crescenti col crescere di y nell'intervallo $(0, 2\delta)$. Abbiamo perciò, per quasi-tutti gli x di $(0, 2\delta)$ e per ogni y di $(0, 2\delta)$,

$$(6) \qquad \begin{aligned} f(x, y) - f(+0, +0) = \{ f(x, 2\delta) - f(+0, +0) \} - \\ - P_{(y)}(x, y) + N_{(y)}(x, y). \end{aligned}$$

Preso ad arbitrio un $\sigma > 0$, possiamo supporre δ sufficientemente piccolo in modo da avere, per ogni coppia x, y, di numeri positivi, non superiori a 2δ,

$$(7) \qquad | f(x, y) - f(+0, +0) | < \sigma,$$

ed anche, per le (1),

$$V_{(y)}(x, y) - V_{(y)}(x, +0) < \sigma.$$

È allora, se $0 < x \leq 2\delta$, $0 < y \leq 2\delta$,

$$V_{(y)}(x, 2\delta) - V_{(y)}(x, y) < \sigma,$$

e, per la (5),

$$(8) \qquad P_{(y)}(x, y) < \sigma, \quad N_{(y)}(x, y) < \sigma.$$

Indicando con $I'_{r,s}$, $I''_{r,s}$ e $I'''_{r,s}$ gli integrali che si ottengono sostituendo a $f(2u, 2v) - f(+0, +0)$, nell'espressione di $I_{r,s}$, rispettivamente $f(2u, 2\delta) - f(+0, +0)$, $P_{(y)}(2u, 2v)$ e $N_{(y)}(2u, 2v)$, abbiamo, in virtù della (6),

$$I_{r,s} = I'_{r,s} - I''_{r,s} + I'''_{r,s},$$

e perciò

$$\sum_{s=r}^{q} I_{r,s} = \sum_{s=r}^{q} I'_{r,s} - \sum_{s=r}^{q} I''_{r,s} + \sum_{s=r}^{q} I'''_{r,s}.$$

Ora è

$$\sum_{s=r}^{q} I'_{r,s} = \int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h} \{ f(2u, 2\delta) - f(+0, +0) \} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \sum_{s=r}^{q} \int_{s\pi:k}^{(s+1)\pi:k} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv,$$

e, per la (7) e per il fatto che i termini della somma, che figura al secondo membro di questa uguaglianza, sono a segni alternati ed in modulo decrescenti (da cui segue che il modulo della somma non supera il modulo del primo termine), è anche

$$\left| \sum_{s=r}^{q} I'_{r,s} \right| < \sigma \left| \int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \right| \left| \int_{r\pi:k}^{(r+1)\pi:k} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv \right|;$$

perciò, per $r = 0$, viene

$$\left| \sum_{s=0}^{q} I'_{0,s} \right| < \sigma \frac{\pi^4}{4},$$

mentre, per $r > 0$, essendo

$$\left|\int_{\pi r:h}^{(r+1)\pi:h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du\right| < \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{r\pi}{h}} \int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h} du < \frac{\pi}{2r},$$

si ha

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I'_{r,s}\right| < \sigma \frac{\pi^2}{4r^2}.$$

È poi

$$\sum_{s=r}^{q} I''_{r,s} = \int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \sum_{s=r}^{q} \int_{s\pi:k}^{(s+1)\pi:k} P_{(y)}(2u, 2v) \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv,$$

e siccome $P_{(y)}(2u, 2v) : \operatorname{sen} v$ è funzione non negativa e non crescente al crescere di v, i termini della somma che figura nel secondo membro sono anch'essi a segni alternati ed in modulo non crescenti, e si ha

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I''_{r,s}\right| < \int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \int_{r\pi:k}^{(r+1)\pi:k} P_{(y)}(2u, 2v) \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv;$$

perciò, per la prima delle (8), segue

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I''_{r,s}\right| < \sigma \int_{r\pi:h}^{(r+1)\pi:h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \int_{r\pi:k}^{(r+1)\pi:k} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv,$$

onde

$$\left|\sum_{s=0}^{q} I''_{0,s}\right| < \sigma \frac{\pi^4}{4},$$

e, per $r > 0$,

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I''_{r,s}\right| < \sigma \frac{\pi^2}{4r^2}.$$

Analogamente, si ha

$$\left|\sum_{s=0}^{q} I'''_{0,s}\right| < \sigma \frac{\pi^4}{4},$$

e, per $r > 0$,

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I'''_{r,s}\right| < \sigma \frac{\pi^4}{4r^2}.$$

È perciò

$$\Big|\sum_{s=0}^{q} I_{0,s}\Big| < \sigma\pi^4,$$

e, per $r > 0$,

$$\Big|\sum_{s=r}^{q} I_{r,s}\Big| < \sigma\frac{\pi^2}{r^2},$$

e quindi

$$\Big|\sum_{r=0}^{p}\sum_{s=r}^{q} I_{r,s}\Big| < \sigma\pi^4\left(1+\sum_{1}^{p}\frac{1}{r^2}\right)$$
$$< \sigma\pi^4\left(1+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\right).$$

Resta ora da esaminare la somma $\sum_{s=0}^{q}\sum_{r=s+1}^{p} I_{r,s}$.

Per essere la $f(x, y)$ a variazione limitata in Q, tale funzione è anche a variazione limitata rispetto alla sola x, su quasi-tutte le parallele all'asse delle x. Indicando, perciò, per ogni punto (x, y) del quadrato di vertici opposti $(0, 0)$ e $(2\delta, 2\delta)$, con $P_{(x)}(x, y)$ e $N_{(x)}(x, y)$ le variazioni positiva e negativa, nell'intervallo $(x, 2\delta)$, della $f(x, y)$, considerata come funzione della sola x, abbiamo, per quasi-tutti gli y di $(0, 2\delta)$,

$$f(x, y) = f(2\delta, y) - P_{(x)}(x, y) + N_{(x)}(x, y),$$
$$P_{(x)}(x, y) + N_{(x)}(x, y) = V_{(x)}(2\delta, y) - V_{(x)}(x, y);$$

e ragionando come dianzi e supponendo δ tale che, per ogni coppia x, y di numeri positivi non maggiori di 2δ, sia anche

$$V_{(x)}(x, y) - V_{(x)}(+0, y) < \sigma,$$

otteniamo

$$\Big|\sum_{s=0}^{q}\sum_{r=s+1}^{p} I_{r,s}\Big| < \sigma\pi^4\left(1+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{s^2}\right).$$

Concludiamo che il primo membro della (3), vale a dire, il modulo dell'espressione (4), è minore di

$$2\sigma\pi^4\left(1+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\right),$$

e quindi di ε, se σ è stato preso sufficientemente piccolo. Con ciò il teorema è dimostrato.

OSSERVAZIONE. — Se, nella dimostrazione precedente, invece di scindere la somma $s^{(1)}_{\mu,\nu}$ (definita dalla (2) del n.° 168) nelle quattro parti corrispondenti ai quattro addendi di $F(2u, 2v)$, ragioniamo direttamente sull'intera somma, otteniamo che il teorema stabilito vale anche se le (1) si sostituiscono con le uguaglianze

$$\lim_{\substack{u \\ v}\Big\}\to+0} \{ W_{(x)}(x_0+u,\ y_0+v) - W_{(x)}(x_0+0,\ y_0+v) \} = 0,$$

$$\lim_{\substack{u \\ v}\Big\}\to+0} \{ W_{(y)}(x_0+u,\ y_0+v) - W_{(y)}(x_0+u,\ y_0+0) \} = 0,$$

dove $W_{(x)}(u, v)$ e $W_{(y)}(u, v)$ rappresentano le variazioni totali della $F(x_0+2u,\ y_0+2v)$, considerata rispettivamente come funzione della sola u e della sola v. In questo caso, la somma $s_{\mu,\nu}(x_0, y_0)$ tende, per $\begin{matrix}\mu\\\nu\end{matrix}\Big\}\to\infty$, al valore $\frac{1}{4} F(x_0+0,\ y_0+0)$, vale a dire, la somma della serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ è data, in (x_0, y_0), da

$$\frac{1}{4} \lim_{\substack{u \\ v}\Big\}\to+0} \{ f(x_0+u,\ y_0+v) + f(x_0-u,\ y_0+v) +$$
$$+ f(x_0-u,\ y_0-v) + f(x_0+u,\ y_0-v) \}.$$

170. - **Complementi sulla convergenza allo zero di un integrale doppio trigonometrico.**

Ci proponiamo di dare una nuova dimostrazione della proposizione del n.° 166, *nel caso particolare in cui le variazioni* $V_{(x)}(2\pi, y)$, $V_{(y)}(x, 2\pi)$ *restino limitate in tutto il quadrato fondamentale* Q. Tale dimostrazione, che ci sarà utile per il seguito, è fondata su di un ragionamento del tutto analogo a quello usato nel n.° preced..

Supposto sempre $x_0=0$, $y_0=0$, consideriamo la parte dell'integrale (1), del n.° 166, relativa a $f(2u, 2v)$,

$$(1) \qquad \int_\delta^{\pi:2}\int_0^a f(2u, 2v) \frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)u \operatorname{sen}(2\nu+1)v}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} du\, dv =$$

$$\int_\delta^{\pi:2} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \int_0^a f(2u, 2v) \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv,$$

ed osserviamo che, per l'ipotesi particolare qui fatta, esiste un numero positivo M, tale che, in tutto Q, valgano le disuguaglianze $V_{(x)}(2\pi, y) < M$, $V_{(y)}(x, 2\pi) < M$, $|f(x, y)| < M$. Allora, procedendo come abbiamo fatto per l'integrale che figura nella (3) del n.° precedente, decomponiamo l'integrale doppio (1) in due parti, analoghe a quelle che costituiscono l'espressione (4) del n.° precedente. Ciascuna delle parti così ottenute, risulta (sostituendo, al σ del n.° precedente, il numero M) minore, in modulo, di

$$M\pi^4\left(\frac{1}{p} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(p+r)r}\right),$$

dove p è ancora il massimo intero tale che $p\pi : h < \delta$. Dunque, per h sufficientemente grande, in modo che sia

$$\frac{1}{p} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(p+r)r} < \sigma,$$

ciascuna di tali parti risulta minore, in modulo, di $M\pi^4\sigma$, ed il modulo dell'integrale (1) risulta minore di $2M\pi^4\sigma$, e ciò indipendentemente da k.

171. - Convergenza uniforme.

a) Nel n.° 168, *b*), abbiamo già data una proposizione relativa alla convergenza uniforme di una serie doppia di Fourier. Ci proponiamo, nel presente n.°, di dare sullo stesso argomento altre proposizioni, connesse col teorema di convergenza del n.° 169.

Premettiamo una definizione.

Diremo che, in un punto (x_0, y_0) è verificata la *condizione* α), se la $V_{(x)}(x, y)$ è, per tutti gli y, uniformemente continua come funzione della sola x, nel punto $x = x_0$ [1], e se la $V_{(y)}(x, y)$ è, per tutti gli x, uniformemente continua come funzione della sola y, nel punto $y = y_0$.

---

[1] Vale a dire, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si può determinare un $\lambda > 0$, tale che, per ogni x soddisfacente alla disuguaglianza $|x - x_0| \leq \lambda$, e per *tutti gli* y, sia $|V_{(x)}(x, y) - V_{(x)}(x_0, y)| < \varepsilon$. Nel caso in cui sia $x_0 = 0$ (opp. $x_0 = 2k\pi$) si intenderà che, per $0 < x - x_0 \leq \lambda$, si abbia $V_{(x)}(x, y) < \varepsilon$, e per $0 > x - x_0 \geq -\lambda$, si abbia invece $|V_{(x)}(x, y) - V_{(x)}(2\pi, y)| < \varepsilon$.

Dopo di ciò, dimostriamo il teorema seguente:

Se la funzione $f(x, y)$, data in tutto il piano (x, y), è periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e rispetto ad y, integrabile ed a variazione limitata;

se, nell'intorno di ciascun punto di un insieme chiuso E, le $V_{(x)}(x, y)$, $V_{(y)}(x, y)$ sono funzioni uniformemente continue, rispettivamente della sola x e della sola y;

se, infine, in tutti i punti di E è verificata la condizione α), oppure se le $V_{(x)}(2\pi, y)$, $V_{(y)}(x, 2\pi)$ sono limitate in tutto il quadrato fondamentale Q;

allora la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge uniformemente, su tutto E, verso $f(x, y)$ [1].

Osserviamo, in primo luogo, che dalla supposta uniforme continuità, nell'intorno di ciascun punto di E, delle $V_{(x)}(x, y)$, $V_{(y)}(x, y)$, considerate come funzioni rispettivamente della sola x e della sola y, segue che, nei punti di E, la $f(x, y)$ è funzione continua di (x, y). Pertanto, preso ad arbitrio un ε, si può determinare il numero δ, richiesto per la validità della (3) del n.° 169, in modo che esso valga per tutti i punti di E. Inoltre, poichè la $f(x, y)$ risulta limitata su E, il primo termine del secondo membro della (3) del n.° 168, tende, al suo limite, uniformemente su tutto E, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\to\infty$. Dunque, preso ad arbitrio un $\eta > 0$, è possibile di scegliere δ in modo che sia

$$(1) \qquad | s^{(1)}_{\mu,\nu}(x, y) - f(x, y) | < \eta,$$

per tutti i valori di μ e ν sufficientemente grandi, e per tutti i punti (x, y) di E.

Per dimostrare la convergenza uniforme allo zero di $s^{(2)}_{\mu,\nu}(x, y)$ e di $s^{(3)}_{\mu,\nu}(x, y)$, bisogna fare appello alla condizione α), oppure alla limitazione di $V_{(x)}(2\pi, y)$ e $V_{(y)}(x, 2\pi)$ in tutto Q.

Se è verificata la condizione α), il numero a', determinato nella dimostrazione del teorema del n.° 166, può prendersi in modo che valga per tutti i punti di E, e perciò il secondo termine della (3) del n.° 163 può farsi piccolo a piacere, indipendentemente da h e k, contemporaneamente per tutti i punti di E. Il primo termine della stessa espressione è poi il

(1) Loc. cit. in (1) a pag. 445.

prodotto dell' integrale $\int_0^{\alpha'} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv$ [che resta, in modulo, inferiore a $\pi^2:2$, qualunque sia k (1)] per l' integrale

$$\int_\delta^{\pi:2} f(2u, +0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du. \tag{2}$$

Se (x_0, y_0) è un punto di E, e (x, y) è un altro punto qualsiasi, si ha

$$\left|\int_\delta^{\pi:2} f(x+2u, y+0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du\right| < \left|\int_\delta^{\pi:2} f(x+2u, y_0+0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du\right| +$$

$$+ \int_\delta^{\pi:2} \left| f(x+2u, y+0) - f(x+2u, y_0+0) \right| du.$$

Ora, per $h \to \infty$, il primo integrale del secondo membro tende a zero uniformemente per tutti gli x (n.° 109), ed il secondo integrale tende a zero per $y \to y_0$, perchè, dalla condizione α) segue che $f(x, y)$ è funzione continua di y, per $y = y_0$, uniformemente rispetto a tutti gli x. Si ha dunque che, preso un $\varepsilon > 0$, si possono determinare due numeri positivi λ e $\bar{h}$, tali che, per tutti i punti (x, y) soddisfacenti alla $|y - y_0| \leq \lambda$ e per tutti gli $h > \bar{h}$, sia

$$\left|\int_\delta^{\pi:2} f(x+2u, y+0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du\right| < \varepsilon.$$

Da ciò segue che l' integrale ora scritto tende, per $h \to \infty$, uniformemente allo zero, su tutto l' insieme E. Altrettanto può quindi asserirsi per il primo termine della (3) del n.° 163. Questo stesso fatto si presenta, infine, per il terzo termine della medesima espressione, in forza dell' immediata estensione a due variabili di quanto è detto nella prima parte del n.° 109.

Con ciò resta dimostrato che, se vale la condizione α), $s^{(2)}_{\mu,\nu}(x, y)$, e così anche $s^{(3)}_{\mu,\nu}(x, y)$, tendono uniformemente a zero su tutto E, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$.

---

(1) Vedi la (4) del n.° 163.

Se, invece della condizione α), si ha che $V_{(x)}(2\pi, y)$ e $V_{(y)}(x, 2\pi)$ sono limitati in tutto Q, la conclusione a cui ora siamo giunti risulta immediatamente dalla dimostrazione del n.° 170.

Il teorema è, pertanto, provato.

b) Dal precedente teorema segue, in particolare:

Se la $f(x, y)$ è una funzione ovunque continua, periodica, di periodo 2π rispetto ad x e ad y, ed a variazione limitata, e se le $V_{(x)}(x, y)$, $V_{(y)}(x, y)$ sono ovunque uniformemente continue ([1]) *come funzioni rispettivamente della sola x e della sola y, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge ovunque uniformemente* ([2]).

Si ha pure:

Se la $f(x, y)$ è una funzione periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, integrabile ed a variazione limitata; se le $V_{(x)}(x, y)$ e $V_{(y)}(x, y)$ sono limitate in tutto il quadrato Q, ed inoltre esse sono, in ogni campo chiuso interno a Q, funzioni uniformemente continue, rispettivamente della sola x e della sola y; la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge uniformemente verso la $f(x, y)$, in ogni campo chiuso interno a Q ([3]).

172. – Criterio di convergenza per le funzioni monotone.

a) Ci proponiamo, in questo n.° e nei n.^{i} seguenti del presente §, di dedurre, dai teoremi generali dei n.^{i} 169 e 171, dei particolari criteri di convergenza, per le serie doppie di Fourier, di facile e larga applicazione.

Premettiamo la seguente definizione. Diremo che una funzione $f(x, y)$ è *monotona* in un campo C in cui viene considerata, se, in tale campo, essa è sempre monotona, e nello stesso senso, come funzione della sola x (intendendo che, per tutti gli y ammessi, essa sia sempre non crescente oppure sempre non decrescente come funzione della x) e pure monotona, e nello stesso senso (non necessariamente uguale al precedente), come funzione della sola y. Si hanno così quattro classi di funzioni $f(x, y)$ monotone:

([1]) Nel senso indicato in ([1]) a pag. 461, per quanto riguarda i punti che si trovano sulle rette $x = 2k\pi$, per la prima funzione, e $y = 2k\pi$, per la seconda funzione.

([2]) L. Tonelli, loc. cit. in ([1]) a pag. 445.

([3]) Ibidem.

1[a]) per ogni coppia (x_1, y), (x_2, y), di punti appartenenti a C, con $x_1 < x_2$, è sempre $f(x_1, y) \leq f(x_2, y)$; e per ogni coppia (x, y_1), (x, y_2), di punti pure di C, con $y_1 < y_2$, è sempre $f(x, y_1) \leq f(x, y_2)$;

2[a]) per le coppie di punti già indicati, è sempre $f(x_1, y) \geq \geq f(x_2, y)$, $f(x, y_1) \geq f(x, y_2)$;

3[a]) per le stesse coppie di punti, è sempre $f(x_1, y) \leq f(x_2, y)$, $f(x, y_1) \geq f(x, y_2)$;

4[a]) sempre per le stesse coppie di punti, è $f(x_1, y) \geq f(x_2, y)$, $f(x, y_1) \leq f(x, y_2)$.

Le funzioni della 1[a] e 2[a] classe saranno dette *monotone concordi*; quelle della 3[a] e 4[a] classe, *monotone discordi* (1).

Avvertiamo poi che, *in tutti i criteri di convergenza (di questo n.° e di tutti gli altri n.i del presente §), la funzione $f(x, y)$ sarà sempre tacitamente considerata come definita in tutto il piano (x, y), e sempre periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y.*

b) *Se la $f(x, y)$ è limitata e monotona nell'interno del quadrato fondamentale Q, e se nel punto (x_0, y_0) esistono i quattro limiti $f(x_0 \pm 0, y_0 \pm 0)$, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge in (x_0, y_0), ed ha per somma*

$$
(1) \qquad \frac{1}{4}\{f(x_0+0, y_0+0) + f(x_0-0, y_0+0) + \\ + f(x_0-0, y_0-0) + f(x_0+0, y_0-0)\}.
$$

In particolare, se in (x_0, y_0) la $f(x, y)$ è continua, tale somma è data da $f(x_0, y_0)$ (2).

Ed infatti, la $f(x, y)$, per essere limitata e monotona nell'interno di Q, è integrabile ed a variazione limitata; inoltre, per la monotonia e per l'esistenza dei limiti $f(x_0 \pm 0, y_0 \pm 0)$, risultano verificate, nel punto (x_0, y_0), le uguaglianze (1) del n.° 169. Pertanto, le condizioni del teorema di convergenza del n.° 169 sono tutte soddisfatte, ed il criterio enunciato è provato.

Una condizione sufficiente affinchè la $f(x, y)$, supposta limitata e monotona nell'interno di Q, *ammetta sempre i quattro*

---

(1) Avvertiamo che alcuni Autori (v. per es. HOBSON, loc. cit. in (1) a pag. 11) chiamano *monotone* soltanto quelle funzioni $f(x, y)$ che noi chiamiamo *monotone concordi*.

(2) L. TONELLI, loc. cit. in (1) a pag. 445.

limiti $f(x \pm 0,\ y \pm 0)$, *è che essa, come funzione della sola* x (*oppure della sola* y), *sia, nell'interno di* Q, *uniformemente continua*, o più restrittivamente, *a rapporto incrementale limitato* (¹).

c) *Se la* $f(x, y)$ *è limitata, continua e monotona nell'interno di* Q, *la sua serie doppia di Fourier converge uniformemente verso* $f(x, y)$ *in ogni campo chiuso interno a* Q (²).

Ciò è una conseguenza immediata dell' ultima proposizione del n.° 171.

d) Il criterio dato in *b*) si estende senz' altro al caso della somma di un numero qualsiasi (finito) di funzioni, tutte soddisfacenti alle condizioni ivi indicate per la $f(x, y)$. Altrettanto dicasi per la proposizione data in *c*).

Si ha pure:

Se la $f(x, y)$ (*periodica*) *è la somma di un numero qualsiasi* (*finito*) *di funzioni continue e monotone in tutto* Q (*non necessariamente periodiche*), *la sua serie doppia di Fourier converge verso di essa ovunque uniformemente* (³).

Ciò si deduce dalla prima delle due proposizioni date nel n.° 171, *b*), tenendo presente che, per l'ipotesi ora fatta, la $f(x, y)$ risulta ovunque continua ed a variazione limitata, e le sue variazioni $V_{(x)}(x, y)$, $V_{(y)}(x, y)$ sono uniformemente continue, rispettivamente come funzioni della sola x e della sola y, per essere tali le variazioni corrispondenti dei termini della somma che costituisce la $f(x, y)$.

In particolare, si ha la seguente generalizzazione del teorema del n.° 168, *c*):

Se, in tutto il quadrato Q, *è*

$$f(x, y) = g_1(x) + g_2(y) + \int_0^x \int_0^y g_3(x, y)\, dx\, dy, \tag{2}$$

con $g_1(x)$ *e* $g_2(y)$ *funzioni a variazione limitata e* $g_3(x, y)$ *funzione integrabile, la serie doppia di Fourier della* $f(x, y)$ *è convergente in ogni punto* (x_0, y_0), *con somma uguale all'espressione* (1); *e*

(¹) Il criterio di convergenza, per il caso della $f(x, y)$ limitata, monotona ed a rapporto incrementale, rispetto ad x, limitato, fu dato da E. W. Hobson (loc. cit. in (¹) a pag. 11; vedi in particolare, pag. 710).

(²) Loc. cit. in (¹) a pag. 445.

(³) Ibidem.

se $g_1(x)$ e $g_2(y)$ sono anche funzioni continue, tale serie converge uniformemente verso $f(x, y)$ in ogni campo chiuso interno a Q.

Se infine, oltre a tutte le condizioni poste, la $f(x, y)$ risulta periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, la convergenza della serie doppia di Fourier, verso la $f(x, y)$, è uniforme in tutto Q.

Ciascuna delle funzioni, a variazione limitata, $g_1(x)$ e $g_2(y)$ può, infatti, scomporsi nella differenza di due funzioni monotone [e continue, se tali sono le $g_1(x)$ e $g_2(y)$]; ed altrettanto può farsi per l'ultimo termine di (2), scrivendo

$$\int_0^x\int_0^y g_3(x, y)\,dx\,dy = \int_0^x\int_0^y g_3^{(1)}(x, y)\,dx\,dy - \int_0^x\int_0^y g_3^{(2)}(x, y)\,dx\,dy,$$

con $g_3^{(1)}(x, y) = g_3(x, y)$ dove è $g_3(x, y) \geq 0$, e $g_3^{(1)}(x, y) = 0$ altrove, e $g_3^{(2)}(x, y) = g_3(x, y)$ dove è $g_3(x, y) \leq 0$, e $g_3^{(2)}(x, y) = 0$ altrove.

173. - Criterio del rapporto incrementale.

a) Se, nell'interno del quadrato fondamentale Q, la $f(x, y)$ è limitata, ha limitato in un senso il rapporto incrementale relativo alla x, ed ha pure limitato in un senso (non necessariamente lo stesso del precedente) il rapporto incrementale relativo alla y, la serie doppia di Fourier di tale funzione converge verso

$$\frac{1}{4}\{f(x+0,\ y+0) + f(x-0,\ y+0) + f(x-0,\ y-0) + f(x+0,\ y-0)\}$$

in ogni punto (x, y) in cui esistono tutti e quattro i limiti $f(x \pm 0,\ y \pm 0)$ [1].

Ed infatti, se, per esempio, il rapporto incrementale relativo alla x è sempre minore di un numero positivo A e quello relativo alla y è sempre maggiore di un numero negativo $-B$, posto

$$f(x,\ y) = \{f(x,\ y) - Ax + By\} + \{Ax - By\},$$

la funzione $f(x,\ y) - Ax + By$ risulta monotona nell'interno di Q (decrescente rispetto alla x, e crescente rispetto alla y), e pure monotona risulta la funzione $Ax - By$ (crescente rispetto alla x, decrescente rispetto alla y); e ciascuna di tali

[1] L. TONELLI, loc. cit. in [1] a pag. 445.

funzioni ammette i quattro limiti corrispondenti ai limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$, in ogni punto (x, y) in cui questi ultimi esistono. Non v'è dunque che da sfruttare quanto si è detto nel n.° 172, *d*).

b) *Se la* $f(x, y)$ *soddisfa alle condizioni della proposizione precedente e di più è continua in tutti i punti interni al quadrato* Q *(oppure, in tutto* Q*), la convergenza della sua serie doppia di Fourier è uniforme in ogni campo chiuso interno a* Q *(oppure, in tutto* Q*)* (1).

In particolare:

Se la $f(x, y)$ *ha, nell'interno di* Q *(oppure, in tutto* Q*), i rapporti incrementali, rispetto ad* x *e rispetto ad* y*, limitati, — o, più restrittivamente, ha limitate le derivate parziali del primo ordine — la sua serie doppia di Fourier converge uniformemente in ogni campo chiuso interno a* Q *(oppure, in tutto* Q*)* (2).

174. - Criterio di convergenza per le funzioni limitatamente oscillanti.

Diremo che una funzione $f(x, y)$ è *limitatamente oscillante nell'interno del quadrato* Q, se esiste un numero N tale che, per ciascun y_0, interno a $(0, 2\pi)$, l'intervallo $(0, 2\pi)$ (considerato aperto, cioè privo degli estremi) può essere diviso in un numero non superiore ad N di intervalli parziali in ciascuno dei quali la $f(x, y_0)$, come funzione della sola x, risulti monotona, e se altrettanto avviene per ogni x_0, interno a $(0, 2\pi)$, relativamente alla funzione della sola y, $f(x_0, y)$.

Posta questa definizione, possiamo enunciare il seguente criterio di convergenza:

Se la $f(x, y)$ *è limitata ed integrabile nel quadrato* Q*, e se è limitatamente oscillante nell'interno di* Q*, la sua serie doppia di Fourier converge verso*

$$(1)\qquad \frac{1}{4}\{f(x+0, y+0)+f(x-0, y+0)+ \\ +f(x-0, y-0)+f(x+0, y-0)\},$$

(1) Loc. cit. in (1) a pag. 445.

(2) Cfr. G. Cerni (*Sulla rappresentabilità di una funzione a due variabili per serie trigonometrica*, Rend. R. Istit. Lomb. Scienze e Lettere, S. 2, vol. XXXIV (1901), pp. 921-956). La prima dimostrazione rigorosa di tale proposizione trovasi in L. Tonelli, loc. cit. in (1) a pag. 445.

in ogni punto (x, y) *in cui esistono tutti e quattro i limiti* $f(x \pm 0,\ y \pm 0)$ (1).

Infatti, la funzione $f(x, y)$, per le condizioni poste, risulta immediatamente a variazione limitata; inoltre, osservando che la variazione totale della funzione della sola x, $f(x, y_0)$, in un intervallo (α, β) di $(0, 2\pi)$, è al più uguale alla oscillazione della $f(x, y_0)$ in tale intervallo, moltiplicata per N, ne viene che, ove esistono i limiti $f(x \pm 0,\ y \pm 0)$, valgono le uguaglianze (1) del teorema del n.° 169, e quindi è applicabile tale teorema.

Se, alle condizioni del criterio ora dimostrato, si aggiunge l'ipotesi che la $f(x, y)$ *sia continua in tutti i punti interni a* Q *(oppure , in tutti i punti di* Q*), la convergenza della serie doppia di Fourier della* $f(x, y)$ *è uniforme in ogni campo chiuso interno a* Q *(oppure, in tutto* Q*)* (2).

Ciò segue immediatamente dal n.° 171, *b*).

175. - Criterio dell'assoluta continuità.

Se la $f(x, y)$*, come funzione della sola* x*, è sempre assolutamente continua, ed è pure tale come funzione della sola* y*, e se esistono due numeri positivi* N *e* σ*, tali che sia, per ogni* y *di* $(0, 2\pi)$,

$$\int_0^{2\pi} |f'_x|^{1+\sigma}\, dx < N,$$

e, per ogni x *di* $(0, 2\pi)$,

$$\int_0^{2\pi} |f'_y|^{1+\sigma}\, dy < N,$$

la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ *converge ovunque uniformemente verso* $f(x, y)$ (3).

Per la dimostrazione, si osservi che, in ogni intervallo (α, β), interno a $(0, 2\pi)$, è

$$V_{(x)}(\beta, y) - V_{(x)}(\alpha, y) = \int_\alpha^\beta |f'_x|\, dx,$$

(1) L. Tonelli, loc. cit. in (1) a pag. 445.

(2) Ibidem.

(3) Ibidem.

e, secondo la disuguaglianza di Schwarz-Hölder (n.° 84),

$$\int_\alpha^\beta |f'_x|\,dx \leq \left[\int_0^{2\pi} |f'_x|^{1+\sigma}\,dx\right]^{\frac{1}{1+\sigma}} (\beta-\alpha)^{\frac{\sigma}{1+\sigma}};$$

è dunque

$$V_{(x)}(\beta, y) - V_{(x)}(\alpha, y) \leq N^{\frac{1}{1+\sigma}}(\beta-\alpha)^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}$$

e la $V_{(x)}(x, y)$ risulta così uniformemente continua come funzione di x, in tutto Q. Analogamente, si ha l'uniforme continuità della $V_{(y)}(x, y)$, come funzione di y. Da ciò segue anche che la $f(x, y)$ è funzione continua di (x, y) in tutto Q, e che è anche a variazione limitata. È quindi applicabile il primo teorema del n.° 171, *b*).

Se la $f(x, y)$ fosse priva della periodicità rispetto ad x e ad y, ma, considerata soltanto in Q, soddisfacesse alle condizioni del criterio ora dimostrato, la convergenza uniforme della sua serie di Fourier (sempre verso la $f(x, y)$ medesima) avverrebbe soltanto in ogni campo chiuso interno a Q. Nei punti del contorno di Q, la serie sarebbe ancora convergente, ma avrebbe per somma il valore (1) del n.° 174.

176. - Criterio della variazione doppia finita.

Diremo che la funzione $f(x, y)$ è *a variazione doppia finita* se, per qualsiasi suddivisione dell'intervallo $(0, 2\pi)$, dell'asse delle x, in parti, mediante i punti $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < .... < x_m = 2\pi$, e per qualsiasi suddivisione dell'intervallo $(0, 2\pi)$, dell'asse delle y, mediante i punti $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < .... < y_n = 2\pi$, la somma

$$(1)\qquad \Sigma\,|f(x_r, y_s) - f(x_{r-1}, y_s) - f(x_r, y_{s-1}) + f(x_{r-1}, y_{s-1})|,$$

estesa a tutti i valori $r = 1, 2, ..., m$, e $s = 1, 2, ..., n$, resta sempre inferiore ad un numero fisso, indipendente dalla suddivisione considerata ([1]).

Se la $f(x, y)$ è a variazione doppia finita in Q, si può scrivere, in tutto Q,

$$(2)\qquad f(x, y) = -f(0, 0) + f(x, 0) + f(0, y) + P(x, y) - N(x, y),$$

([1]) Le funzioni *a variazione doppia finita* non sono altro che le funzioni *a variazione limitata* di VITALI, LEBESGUE, DE LA VALLÉE POUSSIN, ecc. Cfr. la Nota ([1]) a piè di pag. 444.

con $P(x, y)$ e $N(x, y)$ limitate, non negative, non decrescenti, sia come funzioni della sola x, sia come funzioni della sola y, e tali, inoltre, che, per $x_2 > x_1$, $y_2 > y_1$, sia sempre

$$(3)\qquad P(x_2, y_2) - P(x_1, y_2) - P(x_2, y_1) + P(x_1, y_1) \geq 0,$$

$$(4)\qquad N(x_2, y_2) - N(x_1, y_2) - N(x_2, y_1) + N(x_1, y_1) \geq 0 \text{ (}^1\text{)}.$$

Per queste funzioni $P(x, y)$ e $N(x, y)$ esistono sempre, finiti, tutti i limiti $P(x \pm 0,\ y \pm 0)$, $N(x \pm 0,\ y \pm 0)$ [2]. Se, perciò, supponiamo che $f(x, 0)$ e $f(0, y)$ siano funzioni, rispettivamente della x e della y, a variazione limitata, per la funzione a variazione doppia finita $f(x, y)$ esistono sempre i limiti $f(x \pm 0,\ y \pm 0)$. E siccome ogni funzione di una variabile, a

---

(1) Ed infatti, se indichiamo, per ciascuna delle doppie suddivisioni più sopra considerate, con p e $-q$ rispettivamente la somma di tutte le espressioni $f(x_r, y_s) - f(x_{r-1}, y_s) - f(x_r, y_{s-1}) + f(x_{r-1}, y_{s-1})$ che risultano positive e quella delle stesse espressioni che risultano negative, abbiamo, per ciascuna doppia suddivisione,

$$f(2\pi, 2\pi) - f(0, 2\pi) - f(2\pi, 0) + f(0, 0) = p - q,$$

e quindi, se P e Q sono i limiti superiori (che risultano necessariamente finiti) di p e q,

$$f(2\pi, 2\pi) - f(0, 2\pi) - f(2\pi, 0) + f(0, 0) = P - Q.$$

Operando, anzichè sul rettangolo di vertici opposti $(0, 0)$ e $(2\pi, 2\pi)$, su quello di vertici opposti $(0, 0)$ e (x, y), ed indicando con $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ i limiti superiori corrispondenti a P e Q, si ha la (2). Per queste funzioni $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ si verificano immediatamente le proprietà indicate nel testo.

(2) Ed infatti, se (x_0, y_0) è un punto di Q, dal fatto che $P(x, y)$, come funzione di x, è non decrescente, segue che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$ e supposto $x_0 < 2\pi$, è possibile determinare un $x_1 > x_0$ e minore di 2π, in modo che sia $0 \leq P(x_1, 2\pi) - P(x_0 + 0, 2\pi) < \varepsilon$, e quindi $0 \leq P(x_1, 2\pi) - P(x, 2\pi) < \varepsilon$ per ogni x tale che $x_0 < x < x_1$. Per questi stessi x e per ogni y di $(0, 2\pi)$ è allora, in conseguenza della (3), $0 \leq P(x_1, y) - P(x, y) < \varepsilon$. Siccome poi $P(x, y)$, come funzione di y, è pure non decrescente, supposto $y_0 < 2\pi$, è possibile determinare un $y_1 > y_0$ e minore di 2π, in modo che sia $0 \leq P(x_1, y_1) - P(x_1, y_0 + 0) < \varepsilon$, e quindi $0 \leq P(x_1, y_1) - P(x_1, y) < \varepsilon$, per ogni y tale che $y_0 < y < y_1$. Dunque, per ogni punto (x, y) tale che $x_0 < x < x_1$, $y_0 < y < y_1$, si ha $0 \leq P(x_1, y_1) - P(x, y) < 2\varepsilon$; e ciò dimostra l'esistenza e la finitezza del limite $P(x_0 + 0, y_0 + 0)$. Nello stesso modo si dimostra l'esistenza e la finitezza degli altri limiti considerati.

Cfr. R. C. Young, *Les fonctions monotones et l'intégration dans l'espace à n dimensions.* Enseignement Mathématique, 1925, pp. 79-84.

variazione limitata, si può sempre scomporre nella differenza di due funzioni non decrescenti, dalla (2), applicando quanto si è detto nel n.° 172, *d*), si deduce:

Se la $f(x, y)$ è a variazione doppia finita in Q, e se $f(x, 0)$ e $f(0, y)$ sono funzioni, rispettivamente della x e della y, a variazione limitata, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge ovunque verso il limite (1) *del n.° 174* (1).

Se, alle ipotesi ora ammesse, aggiungiamo quella della continuità della $f(x, y)$, tutti i termini del secondo membro della (2) (quando $P(x, y)$ e $N(x, y)$ siano definite come è detto in (1) alla pag. preced.) risultano funzioni continue (2), e, sempre per quanto si è stabilito nel n.° 172, *d*), abbiamo:

Se, oltre alle condizioni della proposizione precedente, supponiamo la $f(x, y)$ ovunque continua, la serie doppia di Fourier di tale funzione converge verso di essa ovunque uniformemente.

---

(1) Questo teorema fu dato da G. H. HARDY (*On double Fourier series....* Quart. Journ., Vol. XXXVII (1906), pp. 53-79). HARDY suppone che la $f(x, y)$ sia anche a variazione limitata su ogni parallela all'asse delle x e su ogni parallela all'asse delle y; ma, come risulta dalla (2), ciò è una conseguenza delle ipotesi da noi fatte. Un caso particolare del teorema di HARDY era già stato dato da M. KRAUSE (*Ueber Fouriersche Doppelreihen....*, Leipziger Berichte, Bd. 55 (1903), pp. 164-197).

(2) Per mostrare la continuità di $P(x, y)$ e di $N(x, y)$, poniamo $V(x, y) = P(x, y) + N(x, y)$, e, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, supponiamo che gli x_r e gli y_s siano scelti in modo che l'espressione (1) risulti maggiore di $V(2\pi, 2\pi) - \varepsilon$. Possiamo anche supporre (intercalando, ove occorra, fra gli x_r altri punti di suddivisione) che tutte le differenze $x_r - x_{r-1}$ siano così piccole che la parte di (1), relativa ad una striscia limitata da due rette $x = x_r$ consecutive, risulti minore di ε. Allora, la parte di (1) relativa all'esterno di tale striscia è $> V(2\pi, 2\pi) - 2\varepsilon$, e si ha, a più forte ragione,

$$V(x_{r-1}, 2\pi) + \{ V(2\pi, 2\pi) - V(x_r, 2\pi) \} > V(2\pi, 2\pi) - 2\varepsilon,$$

ossia $V(x_r, 2\pi) - V(x_{r-1}, 2\pi) < 2\varepsilon$. Da ciò segue che, detta δ la più piccola delle differenze $x_r - x_{r-1}$, se è $0 \leq x' < x'' \leq 2\pi$, $0 < x'' - x' < \delta$, è anche $V(x'', 2\pi) - V(x', 2\pi) < 4\varepsilon$, ed a fortiori $P(x'', 2\pi) - P(x', 2\pi) < 4\varepsilon$, e $P(x'', y) - P(x', y) < 4\varepsilon$ qualunque sia la y di $(0, 2\pi)$.

Nello stesso modo si ha che, se δ è sufficientemente piccolo, e se è $0 \leq y' < y'' \leq 2\pi$, $0 < y'' - y' < \delta$, è anche $P(x, y'') - P(x, y') < 4\varepsilon$, qualunque sia la x di $(0, 2\pi)$. Ciò basta per poter affermare la continuità di $P(x, y)$.

Analogamente, per $N(x, y)$. (Cfr. W. H. YOUNG, *On multiple Fourier series,* Proc. London Math. Soc., S. 2, Vol. XI (1912), pp. 133-184; v., in particolare, pag. 143).

Nel caso in cui le condizioni poste nelle due precedenti proposizioni valgano per la $f(x, y)$ considerata soltanto in Q e senza la periodicità, la prima proposizione continua ancora a sussistere, purchè sul contorno di Q si dia ai limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$ lo stesso significato che essi avrebbero ammettendo la periodicità, mentre la seconda si riduce ad affermare la convergenza uniforme soltanto in ogni campo chiuso interno a Q.

§ 3. Sommabilità per linee e per colonne.

177. - Definizione di sommabilità per linee e per colonne.

a) Data una funzione $f(x, y)$, integrabile sul quadrato fondamentale Q, possiamo costruire la sua serie doppia di Fourier, che è data dalla (1) del n.° 162.

Posto

$$A_{m,n} = \lambda_{m,n}[a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny + \\ + c_{m,n} \cos mx \operatorname{sen} ny + d_{m,n} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny],$$

tale serie doppia si scriverà nella forma

$$(1) \qquad \sum_{\substack{m \\ n}\Big\}=0}^{\infty} A_{m,n},$$

ed anche

$$\begin{array}{l} A_{0,0} + A_{1,0} + A_{2,0} + \ldots + A_{m,0} + \ldots \\ + A_{0,1} + A_{1,1} + A_{2,1} + \ldots + A_{m,1} + \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + A_{0,n} + A_{1,n} + A_{2,n} + \ldots + A_{m,n} + \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Diremo che la serie doppia (1) è *sommabile per linee,* in un punto (x, y), se, in tale punto, tutte le serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} (n = 0,$ $1, 2, \ldots)$ sono convergenti e se, inoltre, risulta convergente anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n})$. Il valore di questa serie si dirà allora *somma per linee* della serie doppia (1).

Analogamente si definirà la *sommabilità per colonne.*

È noto che una serie doppia può essere convergente senza essere sommabile per linee o per colonne [1]. È anche noto che una serie doppia può essere sommabile tanto per linee quanto per colonne, ed avere le due somme uguali, senza essere convergente [2]. Si sa poi che, se la serie doppia (1) è convergente, e se la serie $\sum\limits_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ è convergente per tutti i valori di n, allora la (1) è sommabile per linee, ed è

$$\sum_{\substack{m \\ n}\}=0}^{\infty} A_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \Big);$$

ed analogamente, scambiando le linee con le colonne.

---

[1] Per es., la serie doppia

$$\begin{array}{r}
1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\
-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \\
1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots \\
-1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \dots \\
1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots \\
-1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

è convergente ed ha per somma 0, mentre nessuna delle sue linee o delle sue colonne è convergente.

[2] Per es., la serie doppia

$$\begin{array}{r}
1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots \\
-1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots \\
\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots \\
-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \dots \\
\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - 1 + \dots \\
-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 - \dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

è sommabile per linee, con somma 0, è sommabile per colonne, con somma 0, ma non è convergente.

Infatti, se S è la somma della (1), preso un $\varepsilon > 0$, ad arbitrio, si possono determinare due numeri positivi μ_1 e ν_1, tali che, per $\mu > \mu_1$ e $\nu > \nu_1$, sia sempre

$$\left| S - \sum_{n=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{\mu} A_{m,n} \right| < \varepsilon.$$

Passando al limite, per $\mu \to \infty$, si ha,

$$\left| S - \sum_{n=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \right| < \varepsilon,$$

per ogni $\nu > \nu_1$. Di qui segue, per essere ε arbitrario, che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \right)$ è convergente, e che la sua somma è precisamente S.

b) La (1) si dirà *uniformemente sommabile per linee*, su un insieme E di punti (x, y), se, per ciascun valore di n ($n = 0, 1, 2, \ldots$), la serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ è uniformemente convergente su E, e se, inoltre, è uniformemente convergente anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \right)$.

Analoga definizione per *l'uniforme sommabilità per colonne.*

178. - I° Lemma.

a) *Se la $f(x, y)$, data in tutto il piano (x, y), è periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, è integrabile ed a variazione limitata, indicata con $\sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n}$ la sua serie doppia di Fourier, tutte le serie*

$$(1) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} \ (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

sono convergenti in ogni punto (x, y) (le prime convergendo, in ciascun punto (x, y), uniformemente rispetto ad n, e le seconde rispetto ad m), ed è

$$(2) \quad \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} = \frac{2\lambda_{0,n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+0, \beta) + f(x-0, \beta)}{2} \cos n(y - \beta) d\beta,$$

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} = \frac{2\lambda_{m,0}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha, y+0) + f(\alpha, y-0)}{2} \cos m(x - \alpha) d\alpha \ [1].$$

---

[1] Loc. cit. in [1] a pag. 445.

Consideriamo, infatti, la funzione di x

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x, \beta)\cos n\beta \, d\beta, \tag{4}$$

e mostriamo che essa è a variazione limitata in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$. Diviso tale intervallo in parti, mediante i punti $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots x_R = 2\pi$, abbiamo

$$\sum_{r=0}^{R} |\psi_n(x_{r+1}) - \psi_n(x_r)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{r=0}^{R} |f(x_{r+1}, \beta) - f(x_r, \beta)|\, d\beta$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V_{(x)}(2\pi, \beta)\, d\beta.$$

Dunque la variazione totale di $\psi_n(x)$, in $(0, 2\pi)$, è inferiore ad un numero fisso (indipendente da n), vale a dire, $\psi_n(x)$ è a variazione limitata in $(0, 2\pi)$ [1]. Ne segue che la serie di Fourier della $\psi_n(x)$ è convergente in ogni punto, ed ha sempre per somma

$$\frac{\psi_n(x+0) + \psi_n(x-0)}{2} = \lim_{u \to +0} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(x+u, \beta) + f(x-u, \beta)}{2} \cos n\beta \, d\beta.$$

Ma è, per quasi-tutti i valori di β di $(0, 2\pi)$,

$$\lim_{u \to +0} \frac{f(x+u, \beta) + f(x-u, \beta)}{2} = \frac{f(x+0, \beta) + f(x-0, \beta)}{2},$$

e siccome, per un'osservazione già fatta nel n.° 166, le funzioni di β, $f(x+u, \beta)$ e $f(x-u, \beta)$ restano, in modulo, inferiori

---

[1] Potrebbe avvenire che, per qualche valore di x, la funzione di β, $f(x, \beta)$, non fosse quasi-continua; però, per l'ipotesi che la $f(x, y)$ sia integrabile nel quadrato Q, la $f(x, \beta)$ è funzione quasi-continua di β per quasi-tutti gli x di $(0, 2\pi)$. E siccome $|f(x, \beta)|$ resta sempre inferiore ad una funzione di β integrabile (n.° 166), possiamo dire che, per quasi-tutti gli x, la $f(x, \beta)$ è funzione di β quasi-continua ed integrabile, e quindi la (4) definisce effettivamente la funzione $\psi_n(x)$. Per gli x eccettuati, si potrà scegliere uno qualunque dei valori compresi fra i limiti $\psi_n(x-0)$ e $\psi_n(x+0)$, limiti che esistono quando non si tenga alcun conto degli x pei quali la (4) non definisce la $\psi_n(x)$.

ad una funzione integrabile, indipendente da u, si ha, secondo un noto teorema di integrazione per serie,

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(x+u,\beta)+f(x-u,\beta)}{2} \cos n\beta \, d\beta = \int_0^{2\pi} \frac{f(x+0,\beta)+f(x-0,\beta)}{2} \cos n\beta \, d\beta.$$

Ora, la serie di Fourier della $\psi_n(x)$ è

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(\alpha,\beta)\cos n\beta \, d\alpha \, d\beta + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos mx}{\pi^2} \iint_Q f(\alpha,\beta) \cos m\alpha \cos n\beta \, d\alpha \, d\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sen} mx}{\pi^2} \iint_Q f(\alpha,\beta) \operatorname{sen} m\alpha \cos n\beta \, d\alpha \, d\beta \right\},$$

vale a dire

$$\frac{1}{2\lambda_{0,n}} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(a_{m,n} \cos mx + b_{m,n} \operatorname{sen} mx).$$

Dunque questa serie è sempre convergente, ed è

$$\text{(5)} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(a_{m,n} \cos mx + b_{m,n} \operatorname{sen} mx) =$$

$$= \frac{2\lambda_{0,n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+0,\beta)+f(x-0,\beta)}{2} \cos n\beta \, d\beta.$$

Analogamente, ragionando sulla funzione

$$\text{(6)} \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x,\beta) \operatorname{sen} n\beta \, d\beta,$$

si ottiene

$$\text{(7)} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(c_{m,n} \cos mx + d_{m,n} \operatorname{sen} mx) =$$

$$= \frac{2\lambda_{0,n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+0,\beta)+f(x-0,\beta)}{2} \operatorname{sen} n\beta \, d\beta.$$

Dalle (5) e (7) si deduce che la prima delle serie (1) è sempre convergente e che vale la (2).

Proviamo che la convergenza della serie $\sum\limits_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ è uniforme rispetto ad n. A tale scopo, riprendiamo a considerare la serie di Fourier della $\psi_n(x)$, ed indichiamo con $\sigma_{\mu,n}$ la sua somma parziale, cioè poniamo

$$\sigma_{\mu,n} = \frac{1}{2\lambda_{0,n}} \sum_{m=0}^{\mu} \lambda_{m,n}(a_{m,n} \cos mx + b_{m,n} \operatorname{sen} mx).$$

Abbiamo (n.° 100)

$$\sigma_{\mu,n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi:2} \{ \psi_n(x+2z) + \psi_n(x-2z) \} \frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)z}{\operatorname{sen} z}\, dz,$$

e perciò

$$(8) \qquad \sigma_{\mu,n} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(x+0,\beta)+f(x-0,\beta)}{2} \cos n\beta\, d\beta$$

$$= \sigma_{\mu,n} - \frac{\psi_n(x+0)+\psi_n(x-0)}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi:2} \{ \psi_n(x+2z) - \psi_n(x+0) \} \frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)z}{\operatorname{sen} z}\, dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi:2} \{ \psi_n(x-2z) - \psi_n(x-0) \} \frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)z}{\operatorname{sen} z}\, dz.$$

Indicando con $W_n(x)$ la variazione totale di $\psi_n(x)$, nell'intervallo $(0, x)$, e con δ un numero positivo minore di $\pi:2$, abbiamo, per le disuguaglianze (1) e (2) del n.° 165,

$$\left|\int_0^{\pi:2} \{ \psi_n(x+2z) - \psi_n(x+0) \} \frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)z}{\operatorname{sen} z}\, dz\right| \leq \left|\int_0^{\delta} \cdots\right| + \left|\int_{\delta}^{\pi:2} \cdots\right|$$

$$< \frac{\pi^2}{2} \{ W_n(x+2\delta) - W_n(x+0) \} +$$

$$+ \frac{C_\delta}{2(\mu+1)} \{ W_n(x+\pi) - W_n(x+0) \}.$$

Ma ripetendo per l'intervallo $(x+\delta_1, x+2\delta)$, con $0 < \delta_1 < \delta$, il ragionamento fatto, in principio di questa dimostrazione, per l'intervallo $(0, 2\pi)$, abbiamo

$$W_n(x+2\delta) - W_n(x+\delta_1) \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \{ V_{(x)}(x+2\delta,\beta) - V_{(x)}(x+\delta_1,\beta) \} \, d\beta$$

e quindi

$$W_n(x+2\delta)-W_n(x+0)\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{V_{(x)}(x+2\delta,\,\beta)-V_{(x)}(x+0,\,\beta)\}\,d\beta\,;$$

ed analogamente

$$W_n(x+\pi)-W_n(x+0)\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{\,V_{(x)}(x+\pi,\,\beta)-V_{(x)}(x+0,\,\beta)\,\}\,d\beta.$$

Se ne deduce

$$(9)\qquad\left|\int_0^{\pi:2}\{\,\psi_n(x+2z)-\psi_n(x+0)\,\}\,\frac{\text{sen}\,(2\mu+1)z}{\text{sen}\,z}\,dz\right|$$

$$\leq\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}\{V_{(x)}(x+2\delta,\,\beta)-V_{(x)}(x+0,\,\beta)\}\,d\beta+\frac{C_\delta}{2\pi(\mu+1)}\int_0^{2\pi}V_{(x)}(2\pi,\,\beta)d\beta.$$

Ma, per $\delta\to+0$, $V_{(x)}(x+2\delta,\,\beta)$ converge, per quasi-tutti i β di $(0,\,2\pi)$, verso $V_{(x)}(x+0,\,\beta)$, sempre non crescendo, e pertanto, in virtù di un teorema di integrazione per serie, di B. Levi [1], è, per $\delta\to+0$,

$$\int_0^{2\pi}V_{(x)}(x+2\delta,\,\beta)d\beta\to\int_0^{2\pi}V_{(x)}(x+0,\,\beta)d\beta.$$

Se dunque scegliamo δ convenientemente piccolo e poi μ_0 sufficientemente grande, la (9) mostra che l'integrale del suo primo membro resta, per ogni $\mu>\mu_0$ e per tutti gli n, minore, in modulo, di un numero positivo ε, prefissato ad arbitrio. E siccome altrettanto può dirsi dell'ultimo integrale della (8), se ne conclude, per la (8) medesima, che $\sigma_{\mu,n}$, quando $\mu\to\infty$, tende al suo limite uniformemente rispetto ad n.

È così provato che la serie (5) converge uniformemente rispetto ad n; e poichè lo stesso avviene per la (7), resta provata anche la convergenza uniforme di $\sum\limits_{m=0}^{\infty}A_{m,n}$.

Per la seconda delle serie (1), vale una dimostrazione interamente analoga a quella ora compiuta.

---

(1) B. Levi, *Sopra l'integrazione delle serie.* (Rend. R. Ist. Lomb. di Scienze e Lettere, Vol. XXXIX (1906), pp. 775-780).

Osservazione. — Per la dimostrazione della convergenza della serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ non si è fatto uso, in quanto precede, dell'intera ipotesi che la $f(x, y)$ sia a variazione limitata; si è soltanto utilizzato il fatto che l'integrale $\int_0^{2\pi} V_{(x)}(2\pi, y)\, dy$ è finito.

b) Le uguaglianze (2) *e* (3) *valgono anche se la* $f(x, y)$, *invece di essere a variazione limitata, è tale che esistano tre numeri positivi* K, α, β, *in modo da aversi, per ogni coppia* (x_1, y_1), (x_2, y_2), *di punti interni al quadrato* Q,

$$(10) \qquad | f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) | \leq K \{ | x_1 - x_2 |^\alpha + | y_1 - y_2 |^\beta \}.$$

Ed infatti, in tale ipotesi, la funzione $\psi_n(x)$, definita dalla (4), verifica, per ogni coppia x_1, x_2, di punti interni a $(0, 2\pi)$, la disuguaglianza

$$(11) \qquad | \psi_n(x_1) - \psi_n(x_2) | \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} | f(x_1, y) - f(x_2, y) | \, dy$$
$$\leq 2K | x_1 - x_2 |^\alpha,$$

vale a dire, soddisfa, nell'interno di $(0, 2\pi)$, alla condizione di Lipschitz generalizzata, ed è perciò sviluppabile in serie di Fourier ovunque convergente. Ripetendo allora le considerazioni svolte in *a*), si ottiene la validità delle (2) e (3).

179. - I° Teorema di sommabilità.

Dal lemma del n.° preced. e da quanto si è rammentato nel n.° 177, segue immediatamente il seguente teorema:

Se la funzione $f(x, y)$, *periodica, di periodo* 2π *rispetto ad* x *e ad* y, *ed integrabile, è a variazione limitata, oppure verifica, nell'interno del quadrato* Q, *la disuguaglianza* (10) *del n.° preced., la sua serie doppia di Fourier, in ogni punto in cui è convergente, è anche sommabile per linee e per colonne, e le somme così ottenute coincidono con la somma della serie stessa* [1].

In particolare, abbiamo che, *sotto le condizioni del teorema del n.° 169, oppure sotto quelle di uno qualunque dei criteri di*

---

[1] L. Tonelli, loc. cit. in [1] a pag. 445.

convergenza dei n.[i] 168 b), 172, 173, 174, 175, 176, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$, non soltanto è convergente, ma è anche sommabile tanto per linee quanto per colonne, con somme sempre uguali alla somma della serie medesima.

180. - **II° Lemma.**

a) Se, alle ipotesi del lemma del n.° 178, a), si aggiunge la continuità della $f(x, y)$ rispetto ad x ed anche rispetto ad y, la convergenza delle serie $\sum\limits_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_{m,n}$ risulta uniforme rispetto a tutti i punti del piano (x, y) (e ciò indipendentemente da n, per la prima, da m, per la seconda) (1).

Nel caso attuale, $V_{(x)}(x, y)$, come funzione della sola x, è sempre continua (2) per tutti gli y per i quali $V_{(x)}(2\pi, y)$ è finita (vale a dire, per quasi-tutti gli y), e l'integrale $\int\limits_0^{2\pi} V_{(x)}(x, y)\, dy$ è pure funzione continua della x, in virtù del teorema d'integrazione del Levi (3). Pertanto, il secondo degli integrali che figurano nella (9) del n.° 178, e che ora può scriversi

$$\int\limits_0^{2\pi} \{ V_{(x)}(x + 2\delta, \beta) - V_{(x)}(x, \beta) \}\, d\beta,$$

può rendersi minore di un $\varepsilon > 0$, prefissato, per tutti i δ sufficientemente piccoli, e ciò indipendentemente da x. Il ragionamento fatto alla fine della dimostrazione del n.° 178, *a*), mostra perciò che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si può determinare un μ_0 tale che, per ogni $\mu > \mu_0$, sia

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} - \sum_{m=0}^{\mu} A_{m,n} \right| < \varepsilon,$$

per tutti i punti (x, y) e per tutti gli n.

Analogamente per $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_{m,n}$.

---

(1) Loc. cit. in (1) a pag. 445.

(2) Nel senso corrispondente a quello indicato in (1) a pag. 461, per quanto riguarda i punti sulle rette $x = 2k\pi$.

(3) Loc. cit. in (1) a pag. 479.

Osservazione. — Se la continuità della $f(x, y)$, rispetto ad x e rispetto ad y, sussiste soltanto per i punti interni al quadrato Q, l'uniforme convergenza delle serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}$ ha luogo soltanto in ogni campo chiuso interno a Q.

b) Se la $f(x, y)$ — sempre supposta periodica — soddisfa alla disuguaglianza (10) del n.° 178, in tutto il quadrato Q (oppure, nell'interno di Q), la convergenza delle serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}$ è uniforme ovunque (oppure, in ogni campo chiuso interno a Q).

Ciò risulta dal fatto che, in forza della (11) del n.° 178, la convergenza della serie di Fourier della funzione $\psi_n(x)$, definita dalla (4) del n.° indicato, è (per quanto si è detto nel n.° 110) uniforme ovunque (oppure, rispettivamente, in ogni campo chiuso interno a Q).

181. - II° Teorema di sommabilità.

a) Alle condizioni di sommalità per linee e per colonne, già date nel n.° 179, possiamo aggiungerne qualche altra.

Osserviamo, in primo luogo, che, se alle ipotesi ammesse nel lemma del n.° 178, *a)*, aggiungiamo l'altra che, per un punto (x_0, y_0), esista un $\delta > 0$ tale che, in quasi-tutto l'intervallo $(y_0 - \delta,\ y_0 + \delta)$, l'espressione $\frac{1}{2}\{f(x_0 + 0, y) + f(x_0 - 0, y)\}$ coincida con una funzione $g(y)$ a variazione limitata, allora la serie doppia $\sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n}$ è, nel punto (x_0, y_0), sommabile per linee e la sua somma per linee è data da $\frac{1}{2}\{g(y_0 + 0) + g(y_0 - 0)\}$.

Ed infatti, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n})$ è, per la (2) del n.° 178, la serie di Fourier della funzione, della variabile y, $\frac{1}{2}\{f(x_0 + 0, y) + f(x_0 - 0, y)\}$, e tale serie converge, nel punto $y = y_0$, in virtù della condizione ora aggiunta, verso la somma della serie di Fourier della $g(y)$.

La condizione ora aggiunta è verificata se, per ogni y di $(y_0 - \delta,\ y_0 + \delta)$, la $f(x, y)$ è funzione continua di x nel punto $x = x_0$, e se, in $(y_0 - \delta,\ y_0 + \delta)$, la $f(x_0, y)$ è funzione di y a variazione limitata. La somma per linee della serie doppia considerata è, in questo caso, $\frac{1}{2}\{f(x_0, y_0 + 0) + f(x_0, y_0 - 0)\}$.

La stessa condizione è anche verificata se, per ogni x di $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, la funzione, della sola y, $f(x, y)$ ha, nell'intervallo $(y_0 - \delta,\ y_0 + \delta)$, una variazione totale inferiore ad un numero fisso, indipendente da x, e se i limiti $f(x_0 + 0, y)$ e $f(x_0 - 0, y)$ esistono per ogni y di $(y_0 - \delta,\ y_0 + \delta)$. La somma per linee della serie doppia è, in questo caso,

$$\frac{1}{4}\lim_{\delta \to +0}\{ f(x_0 + 0,\ y_0 + \delta) + f(x_0 - 0,\ y_0 + \delta) + \\ + f(x_0 + 0,\ y_0 - \delta) + f(x_0 - 0,\ y_0 - \delta)\}.$$

Da quanto precede deduciamo il seguente teorema di sommabilità:

Se la $f(x, y)$, periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, è integrabile, e se le variazioni totali $V_{(x)}(2\pi, y)$ e $V_{(y)}(x, 2\pi)$ sono limitate nel quadrato Q, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$, $\sum_{\substack{m \\ n}\}=0}^{\infty} A_{m,n}$, è ovunque sommabile per linee ed anche per colonne; la somma per linee è

$$\text{(1)}\qquad \frac{1}{4}\lim_{\delta \to +0}\{ f(x + 0,\ y + \delta) + f(x - 0,\ y + \delta) + \\ + f(x + 0,\ y - \delta) + f(x - 0,\ y - \delta)\},$$

e la somma per colonne

$$\text{(2)}\qquad \frac{1}{4}\lim_{\delta \to +0}\{ f(x + \delta,\ y + 0) + f(x + \delta,\ y - 0) + \\ + f(x - \delta,\ y + 0) + f(x - \delta,\ y - 0)\}.$$

Se, di più, le $V_{(x)}(x, y)$ e $V_{(y)}(x, y)$ sono, come funzioni rispettivamente della sola x e della sola y, uniformemente continue in tutto Q (oppure, nell'interno di Q), la serie doppia è uniformemente sommabile per linee e per colonne, in tutto Q (oppure, in ogni campo chiuso interno a Q), e le due somme così ottenute sono entrambe uguali a $f(x, y)$ [1].

---

[1] L. Tonelli, loc. cit. in [1] a pag. 445.

La prima parte di questo teorema è conseguenza immediata di quanto si è detto più sopra e del lemma del n.º 178, *a*). Per dimostrare la seconda parte, osserviamo, in primo luogo, che, dall'ammessa continuità di $V_{(x)}(x, y)$, rispetto ad x, segue che anche la $f(x, y)$ gode della stessa continuità; e, per ragione analoga, la $f(x, y)$ è anche funzione continua di y. Il lemma del n.º 180, *a*), assicura allora che le serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}$ convergono uniformemente in tutto Q (oppure, rispettivamente, in ogni campo chiuso interno a Q). Osserviamo poi che, per la (2) del n.º 178, la $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \right)$ è la serie di Fourier della funzione, della sola y, $f(x, y)$. Occorre provare che questa serie converge uniformemente in tutto Q (opp. rispett. in ogni campo chiuso interno a Q). A tale scopo, posto

$$\sigma_\nu = \sum_{n=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} = \sum_{n=0}^{\nu} \frac{2\lambda_{0,n}}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x, \beta) \cos n(y - \beta) d\beta,$$

basta ragionare su σ_ν come abbiamo fatto sulla somma $\sigma_{\mu,\nu}$ nel n.º 178, *a*).

b) Un notevole corollario del teorema ora stabilito è il seguente:

Se la $f(x, y)$, *periodica, di periodo* 2π, *rispetto ad ambedue le variabili, ed integrabile, è limitatamente oscillante nell'interno del quadrato* Q (¹), *la sua serie doppia di Fourier è ovunque sommabile per linee e per colonne, con somme rispettive* (1) *e* (2).

Se, inoltre, la $f(x, y)$ *è continua in tutto* Q *(oppure, uniformemente continua nell'interno di* Q*), la sua serie doppia di Fourier è uniformemente sommabile per linee e per colonne in tutto* Q *(oppure, in ogni campo chiuso interno a* Q*), con somme sempre uguali a* $f(x, y)$ (²).

(¹) Vedi n.º 174.

(²) La seconda parte di questo corollario fu data da G. Ascoli (*Sulla rappresentabilità di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometrica.* Memorie della R. Accad. dei Lincei, S. 3, Vol. IV (1879), pp. 253-300; *Sulle serie trigonometriche a due variabili,* ibidem, Vol. VIII (1880), pagine 263-319).

182. - III° Teorema di sommabilità.

Se la $f(x, y)$, periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, soddisfa alla disuguaglianza

$$(1) \qquad |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq K\{|x_1 - x_2|^\alpha + |y_1 - y_2|^\beta\},$$

(dove K, α, β, sono numeri positivi) per tutte le coppie di punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) del quadrato Q (oppure, interni a Q), la sua serie doppia di Fourier è uniformemente sommabile per linee e per colonne, e con somme sempre uguali a $f(x, y)$, in tutto Q (oppure, in ogni campo chiuso interno a Q) [1].

Tenendo presenti i n.i 178, *b*) e 180, *b*), ed osservando che, per la (2) del primo di tali n.i, la $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sum\limits_{m=0}^{\infty} A_{m,n})$ non è che la serie di Fourier della funzione, della sola y, $f(x, y)$, basta provare che questa serie di Fourier converge uniformemente nell'intervallo $(0, 2\pi)$ [oppure, in ogni intervallo interno a $(0, 2\pi)$]. Ora ciò risulta senz'altro dalla (1), per quanto si è detto nel n.° 110.

183. - Esempi di casi singolari.

Si possono dare facilmente esempi di funzioni $f(x, y)$ con serie doppia di Fourier sommabile per linee e per colonne, in un punto, ma non convergente.

a) Sia $f(x, y) = 0$ nel campo $[-\pi \leq x \leq \pi,\ y^2 \leq x^2]$ e $f(x, y) = 1$ in $[-\pi \leq x \leq \pi,\ x^2 < y^2 \leq \pi^2]$. Si definisca poi altrove la $f(x, y)$ mediante la periodicità, rispetto ad x e ad y, di periodo 2π. Per questa funzione, sono verificate le condizioni della prima parte del teorema del n.° 181, *a*), e perciò la sua serie doppia di Fourier è sempre sommabile per linee e per colonne. Nel punto $(0, 0)$ la somma per linee è 1 e quella per colonne è 0. Ciò basta (per quanto si è detto nel n.° 177) per poter asserire che la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ non converge nel punto $(0, 0)$.

Nei vertici del quadrato $\Omega \equiv [-\pi \leq x \leq \pi,\ -\pi \leq y \leq \pi]$, la serie considerata ha come somma per linee 0 e come somma per colonne 1. Quindi anche in tali punti la serie doppia non converge.

In tutti gli altri punti di Ω, soddisfacenti alla disuguaglianza $y^2 < x^2$, la serie doppia è convergente (n.° 174) ed ha per somma 0; nei punti di Ω tali che $y^2 > x^2$, la serie doppia converge verso 1; nei punti delle due diagonali di Ω, distinti dal centro e dai vertici, la serie è convergente, per l'Osservazione del n.° 169, ed ha per somma 1:2.

---

[1] Loc. cit. in [1] a pag. 445.

b) Sia $f(x, y) = 0$, in tutti i punti di Ω eccettuati quelli soddisfacenti alle disuguaglianze $\operatorname{tang} 30^\circ < \left|\frac{y}{x}\right| < \operatorname{tang} 60^\circ$, ove sia, invece, $f(x, y) = 1$. La serie doppia di Fourier di questa funzione è ovunque sommabile per linee e per colonne (n.° 181, *a*)). Nel punto (0, 0), le somme per linee e per colonne sono ambedue uguali a 0; ma la serie doppia non è convergente.

Ed infatti, se essa fosse convergente, dovrebbe avere per somma 0, mentre la sua somma parziale $s_{\mu,\nu}(0, 0)$, quando si facciano tendere μ e ν all' ∞, in modo che $\frac{\mu}{\nu} \rightarrow \sqrt{3}$, tende a

$$\frac{2}{\pi^2}\int\limits_{1:\sqrt{3}}^{1} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\frac{dt}{t} \quad (^1),$$

che è $\neq 0$. Nei punti $(x = \pm\pi,\ y = \pm\pi : \sqrt{3})$, la serie doppia di Fourier ha come somma per linee $1:2$, e come somma per colonne 1; la serie non è perciò convergente. Analogamente, nei punti $(x = \pm\pi : \sqrt{3},\ y = \pm\pi)$, la somma per linee è 1, e quella per colonne $1:2$, e la serie non converge.

In tutti gli altri punti di Ω, la somma per linee è sempre uguale alla somma per colonne, e la serie è convergente con somma 0, se è $\left|\frac{y}{x}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, oppure $\left|\frac{y}{x}\right| > \sqrt{3}$ (n.° 174); è convergente con somma 1, se è $\frac{1}{\sqrt{3}} < \left|\frac{y}{x}\right| < \sqrt{3}$ (n.° 174); è convergente con somma $1:2$, se è $\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, oppure $\left|\frac{y}{x}\right| = \sqrt{3}$ (n.° 169, Osservazione).

§ 4. I polinomi trigonometrici di Fejér, in due variabili.

184. - Definizione e prime considerazioni.

Il metodo della media aritmetica di Cesàro, applicato da Fejér alla rappresentazione approssimata delle funzioni di una variabile, mediante polinomi trigonometrici, può essere esteso alla rappresentazione delle funzioni di due variabili.

Sia $f(x, y)$ una funzione data ed integrabile nel quadrato fondamentale Q, e, costruita per essa la serie doppia di Fou-

---

(1) Ciò si vede subito applicando una formula stabilita da E. C. Titchmarsh (*The Double Fourier Series of a Discontinuous Function.* Proc. Royal Society, S. A, Vol. 106 (1924) pp. 299-314; vedi, in particolare, pag. 302).

rier (1) del n.° 162, consideriamo la somma parziale $s_{\mu,\nu}(x, y)$ di tale serie [n.° 162, formula (4)] e poniamo

$$(1) \qquad \sigma_{\mu,\nu}(x,y) = \frac{1}{\mu\nu} \sum_{m=0}^{\mu-1} \sum_{n=0}^{\nu-1} s_{m,n}(x, y).$$

Questo $\sigma_{\mu,\nu}(x, y)$ sarà detto *polinomio trigonometrico di Fejér, in due variabili, d'ordine* $(\mu - 1, \nu - 1)$, *relativo alla* $f(x, y)$.

Analogamente a quanto si è fatto nel caso delle funzioni di una sola variabile, possiamo porre $\sigma_{\mu,\nu}(x, y)$ sotto forma di integrale, nel seguente modo. Utilizzando la (5) del n.° 162, e procedendo come nel n.° 58, abbiamo

$$(2) \quad \sigma_{\mu,\nu}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2\mu\nu} \iint_Q f(\alpha, \beta) \left(\frac{\operatorname{sen} \mu \frac{x-\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x-\alpha}{2}} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \nu \frac{y-\beta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{y-\beta}{2}} \right)^2 d\alpha\, d\beta,$$

ed anche, con le posizioni del n.° 162,

$$(3) \quad \sigma_{\mu,\nu}(x, y) = \frac{1}{\pi^2\mu\nu} \int_0^{\pi:2} \int_0^{\pi:2} F(x + 2u, y + 2v) \left(\frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v} \right)^2 du\, dv.$$

In particolare, per $f(x, y) \equiv 1$, si ha

$$(4) \qquad 1 = \frac{4}{\pi^2\mu\nu} \int_0^{\pi:2} \int_0^{\pi:2} \left(\frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v} \right)^2 du\, dv.$$

Osservando che, se è $0 < \delta_1 < \pi:2$, $0 < \delta_2 < \pi:2$, si ha

$$(5) \quad \left| \frac{1}{\pi^2\mu\nu} \int_{\delta_1}^{\pi:2} \int_{\delta_2}^{\pi:2} F(x + 2u, y + 2v) \left(\frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v} \right)^2 du\, dv \right|$$
$$< \frac{1}{\pi^2\mu\nu \operatorname{sen}^2 \delta_1 \operatorname{sen}^2 \delta_2} \iint_Q |f(x, y)|\, dx\, dy \to 0,$$

per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$, possiamo affermare che, se è $\lambda > 0$, *sulla convergenza di* $\sigma_{\mu,\nu}(x_0, y_0)$, *per* $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$, *hanno influenza soltanto i valori della funzione* $f(x, y)$ *nei punti che soddisfano ad almeno una delle disuguaglianze* $|x - x_0| < \lambda$, $|y - y_0| < \lambda$.

185. - La condizione (L).

a) Diremo che la funzione $f(x, y)$ soddisfa, nel quadrato fondamentale Q, alla *condizione* (L), se esiste un numero finito L tale che le due disuguaglianze

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi} |f(x, y)|\, dx \leq L, \quad \int_0^{2\pi} |f(x, y)|\, dy \leq L,$$

valgano, rispettivamente, per quasi-tutti gli y e quasi-tutti gli x di $(0, 2\pi)$.

Per esempio, la funzione definita, nell'interno di Q, da $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}}$ soddisfa in Q alla condizione (L).

È evidente che ogni funzione $f(x, y)$, integrabile in Q e *limitata*, soddisfa alla condizione (L). Vi soddisfa anche ogni funzione integrabile ed *a variazione limitata*. Ed infatti, in questa ipotesi, detto x_0 un valore di $(0, 2\pi)$ per il quale $f(x_0, y)$ risulti a variazione limitata come funzione della y, avremo, per un certo numero M e per tutti gli y di $(0, 2\pi)$, $|f(x_0, y)| < M$. E siccome, per tutti gli x di $(0, 2\pi)$ e per quasi-tutti gli y, è $|f(x, y) - f(x_0, y)| \leq V_{(x)}(2\pi, y)$, avremo, per tutti gli x di $(0, 2\pi)$,

$$\int_0^{2\pi} |f(x, y)|\, dy \leq \int_0^{2\pi} V_{(x)}(2\pi, y)\, dy + 2M\pi.$$

b) In base alla definizione posta, dimostriamo che: *se la $f(x, y)$ è, in Q, integrabile e soddisfacente alla condizione* (L), *e se, in un dato punto (x_0, y_0) di Q, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge verso il valore S, esiste il limite di $\sigma_{\mu,\nu}(x_0, y_0)$, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$, e tale limite è S.*

Siccome, per ipotesi, nel punto (x_0, y_0) è $s_{\mu,\nu} \to S$, quando $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un intero positivo N tale che, dalle disuguaglianze $\mu > N$ e $\nu > N$, segua, nel punto (x_0, y_0), $|s_{\mu,\nu} - S| < \varepsilon$. Posto $s_{\mu,\nu} = S + \varepsilon_{\mu,\nu}$, si ha perciò, per $\mu > N$ e $\nu > N$, $|\varepsilon_{\mu,\nu}| < \varepsilon$. Per gli stessi μ e ν, può scriversi, allora,

$$\sigma_{\mu,\nu} = \frac{1}{\mu\nu}\left\{\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{\nu-1} s_{m,n} + \sum_{m=N+1}^{\mu-1}\sum_{n=0}^{N} s_{m,n} + \sum_{m=N+1}^{\mu-1}\sum_{n=N+1}^{\nu-1} s_{m,n}\right\}.$$

Ma è, per le (1) e (3) del n.º 184 e per la (6) del n.º 58,

$$\left|\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{\nu-1} s_{m,n}\right| = \left|(N+1)\nu\,\sigma_{N+1,\nu}\right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi:2}\left(\frac{\operatorname{sen}\nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 d\nu \int_0^{\pi:2} |F(x_0+2u,\, y_0+2v)|\left(\frac{Nu}{\operatorname{sen} u}\right)^2 du$$

$$\leq \frac{N^2 L}{2}\int_0^{\pi:2}\left(\frac{\operatorname{sen}\nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 dv = \frac{\pi N^2 \nu L}{4};$$

e, analogamente,

$$\left|\sum_{m=N+1}^{\mu-1}\sum_{n=0}^{N} s_{m,n}\right| \leq \left|\sum_{m=0}^{\mu+1}\sum_{n=0}^{N} s_{m,n}\right| + \left|\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} s_{m,n}\right|$$

$$\leq \frac{\pi N^2 \mu L}{4} + \frac{\pi N^2 (N+1) L}{4}.$$

È poi

$$\left|\sum_{m=N+1}^{\mu-1}\sum_{n=N+1}^{\nu-1} s_{m,n} - \mu\nu S\right| < \left|\{(\mu-1)(\nu-1)-\mu\nu\}S\right| +$$

$$+ (\mu-1)(\nu-1)\varepsilon.$$

Si ha pertanto

$$|\sigma_{\mu,\nu} - S| < \frac{\pi N^2 L}{4}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}+\frac{N+1}{\mu\nu}\right) + \left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}\right)S + \varepsilon,$$

e quindi, per tutti i μ e ν maggiori di un certo N_0,

$$|\sigma_{\mu,\nu} - S| < 2\varepsilon.$$

Siccome ε è arbitrario, ciò dimostra la proposizione enunciata.

c) *Se la $f(x, y)$, data in tutto il piano (x, y), periodica e di periodo 2π rispetto ad x e ad y, è integrabile e soddisfa in Q alla condizione (L), il comportamento, per* $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\to\infty$, *di* $\sigma_{\mu,\nu}(x, y)$, *in un dato punto (x_0, y_0), ed il suo limite, se esiste,* *dipendono esclusivamente dai valori che la $f(x, y)$ assume in prossimità del punto considerato.*

Per dimostrare questa proposizione, proveremo che, se è $0 < \delta < \pi:2$, si ha, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$,

$$(2)\quad \frac{1}{\pi^2 \mu\nu} \int_\delta^{\pi:2} \int_0^{\pi:2} |F(x_0 + 2u, y_0 + 2v)| \left(\frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 du\, dv \to 0,$$

$$(3)\quad \frac{1}{\pi^2 \mu\nu} \int_0^{\pi:2} \int_\delta^{\pi:2} |F(x_0 + 2u, y_0 + 2v)| \left(\frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 du\, dv \to 0.$$

Abbiamo, infatti, che l'espressione che figura nella (2) è minore di

$$\frac{1}{\pi^2 \mu\nu \operatorname{sen}^2 \delta} \int_0^{\pi:2} \left(\frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 dv \int_0^{\pi:2} |F(x_0 + 2u, y_0 + 2v)|\, du$$

$$< \frac{2L}{\pi^2 \mu\nu \operatorname{sen}^2 \delta} \int_0^{\pi:2} \left(\frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 dv$$

e perciò, per la (6) del n.° 58,

$$(4)\quad \frac{1}{\pi^2 \mu\nu} \int_\delta^{\pi:2} \int_0^{\pi:2} |F(x_0 + 2u, y_0 + 2v)| \left(\frac{\operatorname{sen} \mu u}{\operatorname{sen} u}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 du\, dv < \frac{L}{\pi\mu \operatorname{sen}^2 \delta},$$

da cui segue la (2). Analogamente per la (3) [1].

186. - Estensione a due variabili del teorema di Fejér.

a) Se la $f(x, y)$, data in tutto il piano (x, y), periodica, di periodo 2π rispetto ad x e ad y, è integrabile e soddisfa nel quadrato Q alla condizione (L), il suo polinomio trigonometrico di Fejér, $\sigma_{\mu,\nu}(x, y)$, converge verso di essa, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$, in ogni punto in cui la $f(x, y)$ stessa è continua, e verso la media

---

[1] Se la $f(x, y)$ non soddisfa alla condizione (L), le (2) e (3) valgono per quasi-tutti i punti (x_0, y_0) di Q.

aritmetica dei quattro limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$, *in ogni punto in cui tali limiti esistono finiti* (1).

Procedendo come si è fatto, nel n.° 59, nel caso delle funzioni di una sola variabile, indichiamo con $\Phi(x, y)$ una funzione qualsiasi definita in Q. Posto

$$\varphi(u, v) = F(x + 2u, y + 2v) - 4\Phi(x, y), \tag{1}$$

dove è, come al solito,

$$F(x + 2u, y + 2v) = f(x + 2u, y + 2v) + f(x - 2u, y + 2v) + \\ + f(x - 2u, y - 2v) + f(x + 2u, y - 2v),$$

abbiamo, per le (3) e (4) del n.° 184,

$$\sigma_{\mu,\nu}(x, y) - \Phi(x, y) = \frac{1}{\pi^2\mu\nu}\int_0^{\pi:2}\int_0^{\pi:2}\varphi(u, v)\left(\frac{\operatorname{sen}\mu u}{\operatorname{sen} u}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 du\, dv.$$

Supponendo ora che, in un dato punto (x, y), esista finito il limite $\varphi(+0, +0)$ e che esso sia nullo, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un δ positivo e minore di $\pi:2$, in modo che, per $0 < u \leq \delta$, $0 < v \leq \delta$, risulti $|\varphi(u, v)| < \varepsilon$. Avremo, allora,

$$|\sigma_{\mu,\nu}(x, y) - \Phi(x, y)| < \frac{\varepsilon}{\pi^2\mu\nu}\int_0^{\delta}\int_0^{\delta}\left(\frac{\operatorname{sen}\mu u}{\operatorname{sen} u}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 du\, dv + \\ + \frac{1}{\pi^2\mu\nu}\iint_{\Gamma}|\varphi(u, v)|\left(\frac{\operatorname{sen}\mu u}{\operatorname{sen} u}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 du\, dv, \tag{2}$$

dove Γ è la parte che resta nel quadrato di vertici opposti $(0, 0)$ e $(\pi:2, \pi:2)$ dopo avervi asportato il quadrato di vertici opposti $(0, 0)$ e (δ, δ). Il primo termine del secondo membro della disuguaglianza scritta è, per la (4) del n.° 184, minore di ε, ed il secondo termine tende a zero, quando $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$, in virtù del

(1) Cfr. C. N. Moore, *The summability of the double Fourier series, with applications.* (Bulletin of the Amer. Math. Soc., Vol. 18 (1912), p. 223); W. H. Young, *On Multiple Fourier Series.* (Proc. London Math. Soc. (2), Vol. 11 (1912), pp. 133-184).

n.° 185, *c*). Dunque, nel punto (x, y) considerato, per tutti i μ e ν entrambi maggiori di un certo numero N, è

$$|\sigma_{\mu,\nu}(x, y) - \Phi(x, y)| < 2\varepsilon,$$

vale a dire, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$,

$$\sigma_{\mu,\nu}(x, y) \to \Phi(x, y).$$

Se (x, y) è un punto di continuità per la $f(x, y)$, ponendo $\Phi(x, y) = f(x, y)$, abbiamo che $\varphi(+0, +0)$ esiste ed è uguale a zero; è perciò, in tale punto, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$,

$$\sigma_{\mu,\nu}(x, y) \to f(x, y).$$

Se, in (x, y), esistono finiti i quattro limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$, ponendo $\Phi(x, y) = \frac{1}{4} \Sigma f(x \pm 0, y \pm 0)$, esiste ancora $\varphi(+0, +0)$ ed è uguale zero; e, pertanto, in tale punto è

$$\sigma_{\mu,\nu}(x, y) \to \frac{1}{4} \Sigma f(x \pm 0, y \pm 0).$$

Il teorema è così provato pienamente.

b) Possiamo aggiungere che [ferme restando le ipotesi poste in *a*)], se in (x, y) esiste finito il limite $F(x+0, y+0)$, prendendo $\Phi(x, y) = \frac{1}{4} F(x+0, y+0)$, si ha

$$\sigma_{\mu,\nu}(x, y) \to \frac{1}{4} F(x+0, y+0).$$

Ciò avviene, in particolare, in ogni punto (x, y) per il quale esistono finiti i due limiti f_1 e f_2 di $f(x', y')$ per (x', y') tendente ad (x, y) restando sempre, rispettivamente, al disotto e al disopra di una data retta passante per (x, y). In questo caso è $F(x+0, y+0) = 2(f_1 + f_2)$ e perciò

$$\sigma_{\mu,\nu}(x, y) \to \frac{1}{2}(f_1 + f_2). \tag{3}$$

c) Un altro caso interessante, è il seguente.

Supponiamo che, nel punto (x, y), esistano finiti i limiti f_1 e f_2 di $f(x', y')$ per (x', y') tendente ad (x, y) restando sempre, rispettivamente, al disotto e al disopra di una data curva C, passante per (x, y) ed avente in tal punto una tangente non parallela agli assi delle coordinate. *Allora, sempre sotto la condizione posta in* a) *per la funzione, vale ancora la* (3) [1].

Indichiamo, infatti, con γ il coefficiente angolare della tangente, nel punto (x, y), alla curva C, e supponiamo, per fissare le idee, $\gamma > 0$. Nel quadrato di vertici opposti $(0, 0)$ e (δ, δ), del piano (u, v), vengono ad aversi due curve C_1, C_2 (formate con archi della C e della simmetrica della C rispetto al punto (x, y)), uscenti ambedue dal punto $(0, 0)$ con tangente di coefficiente angolare γ, in modo che, quando il punto (u, v) tende a $(0, 0)$ restando al disotto od al disopra di ambedue le curve, $F(x + u, y + v)$ ammette un limite determinato e finito, uguale precisamente a $2(f_1 + f_2)$. Indicando con Ω il campo contenuto nel quadrato di vertici opposti $(0, 0)$ e (δ, δ) e compreso fra le due curve C_1, C_2, per δ sufficientemente piccolo, si ha, in ogni punto interno ad Ω,

$$|F(x + 2u, y + 2v)| < 3(|f_1| + |f_2|) + 1;$$

pertanto, prendendo $\Phi(x, y) = (f_1 + f_2):2$, ponendo $M = 5(|f_1| + |f_2|) + 1$, e supponendo δ sufficientemente piccolo, si ottiene, invece della (2),

$$(4) \quad |\sigma_{\mu,\nu}(x, y) - \Phi(x, y)| < \frac{\varepsilon}{\pi^2\mu\nu}\int_0^\delta\int_0^\delta \left(\frac{\operatorname{sen}\mu u}{\operatorname{sen} u}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 du\, dv +$$

$$+ \frac{M}{\pi^2\mu\nu}\iint_\Omega \left(\frac{\operatorname{sen}\mu u}{\operatorname{sen} u}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 du\, dv +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2\mu\nu}\iint_\Gamma |\varphi(u, v)| \left(\frac{\operatorname{sen}\mu u}{\operatorname{sen} u}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 du\, dv.$$

Il primo termine del secondo membro è sempre minore di ε, e l'ultimo termine è minore di ε per tutti i μ e ν maggiori

---

(1) C. N. Moore, *On the Summability of the Double Fourier's Series of Discontinuous Functions.* (Math. Ann., Bd. 74 (1913), pp. 555-572). Se la tangente alla curva C, nel punto considerato (x, y), fosse parallela ad uno degli assi coordinati, la (3) potrebbe non essere vera.

di un certo numero N. Per il secondo termine, osserviamo che è [1]

$$(5)\quad \frac{M}{\pi^2\mu\nu}\int\int_{\Omega}\left(\frac{\operatorname{sen}\mu u}{\operatorname{sen} u}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 du\,dv < M\pi^2\int_0^{\delta}\frac{\mu\,du}{(1+\mu u)^2}\int_{a(u)}^{a(u)+b(u)}\frac{\nu\,dv}{(1+\nu v)^2},$$

dove è, per $u \to +0$, $a(u):u \to \gamma$, $b(u):u \to 0$, e quindi $b(u):a(u) \to 0$. E siccome è

$$\int_{a(u)}^{a(u)+b(u)}\frac{v\,dv}{(1+\nu v)^2} = \frac{\nu b(u)}{[1+\nu a(u)]\,[1+\nu\,\{a(u)+b(u)\}\,]} < \frac{b(u)}{a(u)},$$

supponendo δ sufficientemente piccolo affinchè, per $0 < u \leq \delta$, sia $b(u):a(u) < \varepsilon$, ne viene che il secondo membro della (5) è minore di

$$M\pi^2\varepsilon\int_0^{\delta}\frac{\mu\,du}{(1+\mu u)^2} < M\pi^2\varepsilon.$$

Dunque, se δ è preso in modo conveniente, la (4), dà, per μ e ν entrambi maggiori di N,

$$|\,\sigma_{\mu,\nu}(x, y) - \Phi(x, y)\,| < (2 + M\pi^2)\varepsilon,$$

e ciò dimostra la (3).

Sempre ammettendo, per la funzione $f(x, y)$, le ipotesi poste in $a)$, e supponendo che E sia un insieme chiuso di punti di continuità per la $f(x, y)$, la convergenza di $\sigma_{\mu,\nu}(x, y)$, verso $f(x, y)$, è uniforme in tutto E. Ed infatti, posto $\Phi(x, y) \equiv f(x, y)$, potremo determinare il δ della dimostrazione data in $a)$, in modo che valga per tutti i punti di E; ed allora dalla (2), tenendo presente la (4) del n.° 185, segue immediatamente la continuità uniforme annunciata.

In particolare, *se la $f(x, y)$, periodica e di periodo 2π rispetto ad x e ad y, è ovunque continua, $\sigma_{\mu,\nu}(x, y)$ converge verso di essa ovunque uniformemente.*

Osservazione. — Se $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ sono due funzioni periodiche, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, integrabili e soddisfacenti in Q alla condizione (L), e se esse coincidono in

---

[1] Vedi quanto si è detto nel n.° 62.

tutti i punti di un intorno del punto (x_0, y_0), allora, per la proposizione *a*), la serie doppia di Fourier della differenza $f_1(x, y) - f_2(x, y)$ è sommabile, in (x_0, y_0), col metodo della media aritmetica di Cesàro, e la sua somma, così ottenuta, è 0. Perciò le serie doppie di Fourier delle due funzioni sono, in (x_0, y_0), ambedue sommabili col metodo detto, oppure ambedue non sommabili, e nel primo caso hanno la stessa somma.

187. - Estensione del teorema di Lebesgue del n.° 62.

a) I risultati del n.° 186, *a*), *b*), *c*), sono dei casi particolari della seguente proposizione:

Se $f(x, y)$ è una funzione data in tutto il piano (x, y), periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, integrabile e soddisfacente, nel quadrato Q, alla condizione (L), il suo polinomio trigonometrico di Fejér, $\sigma_{\mu,\nu}(x, y)$, converge verso $\Phi(x, y)$, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\to\infty$, in ogni punto in cui è

$$(1) \qquad \lim_{\substack{u\\ v}\Big\}\to+0} \frac{1}{uv}\int_0^u\int_0^v |\varphi(u, v)|\, du\, dv = 0,$$

la $\varphi(u, v)$ essendo definita dalla (1) *del n.° 186* (1).

Riprendendo l'uguaglianza

$$\sigma_{\mu,\nu}(x, y) - \Phi(x, y) = \frac{1}{\pi^2\mu\nu}\int_0^{\pi:2}\int_0^{\pi:2} \varphi(u, v)\left(\frac{\operatorname{sen}\mu u}{\operatorname{sen} u}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 du\, dv,$$

del n.° 186, possiamo scrivere, per $0 < \delta < \pi:2$,

$$\sigma_{\mu,\nu}(x, y) - \Phi(x, y) = I_{\mu,\nu} + \frac{1}{\pi^2\mu\nu}\int_0^{\delta}\int_0^{\delta} \varphi(u, v)\left(\frac{\operatorname{sen}\mu u}{\operatorname{sen} u}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\nu v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 du\, dv,$$

con $I_{\mu,\nu}\to 0$, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\to\infty$, in forza del n.° 185, *c*). Abbiamo

(1) H. Geiringer, *Trigonometrische Doppelreihen*. (Monatshefte für Math. u. Physik, XXIX Jahrgang (1918), pp. 65-114). L'Autrice deduce, dalla proposizione sopra riportata, che è $\sigma_{\mu,\nu}\to f$ quasi-dappertutto, affermando che la (1) vale quasi-dappertutto, se in essa si pone $\Phi(x, y) = f(x, y)$. Ma nessuno ha ancora dimostrato tale affermazione.

quindi, analogamente a quanto facemmo nel n.° 62,

$$|\sigma_{\mu,\nu}(x, y)-\Phi(x, y)|<|I_{\mu,\nu}|+\pi^2\int_0^\delta\!\!\int_0^\delta|\varphi(u, v)|\frac{\mu}{(1+\mu u)^2}\frac{\nu}{(1+\nu v)^2}\,du\,dv;$$

e ponendo

$$\psi(u, v)=\int_0^u|\varphi(u, v)|\,du,$$

$$\Psi(u, v)=\int_0^v\psi(u, v)\,dv=\int_0^u\!\!\int_0^v|\varphi(u, v)|\,du\,dv,$$

con due successive integrazioni per parti, otteniamo, tenendo presente che la $f(x, y)$ soddisfa, in Q, alla condizione (L),

$$(2)\quad |\sigma_{\mu,\nu}(x, y)-\Phi(x, y)|<|I_{\mu,\nu}|+\frac{2\pi^2\mu}{\left(1+\mu\frac{\pi}{2}\right)^2}[L+\pi|\Phi(x, y)|]+$$

$$+2\pi^2\int_0^\delta\frac{\mu^2 du}{(1+\mu u)^3}\int_0^\delta\psi(u, v)\frac{\nu}{(1+\nu v)^2}\,dv$$

$$<|I_{\mu,\nu}|+\left\{\frac{\mu}{\left(1+\mu\frac{\pi}{2}\right)^2}+\frac{2\nu}{\left(1+\nu\frac{\pi}{2}\right)^2}\right\}2\pi^2[L+\pi|\Phi(x, y)|]+$$

$$+4\pi^2\int_0^\delta\!\!\int_0^\delta\Psi(u, v)\frac{\mu^2}{(1+\mu u)^3}\frac{\nu^2}{(1+\nu v)^3}\,du\,dv\ (^1).$$

Il primo ed il secondo termine dell'ultimo membro tendono a zero, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\to\infty$; per il terzo termine, ammesso che nel punto (x, y) valga la (1), e quindi che, preso ad arbitrio un $\varepsilon>0$, si possa determinare il δ, positivo e minore di $\pi:2$, in modo che,

(1) Si tenga presente che è

$$\int_0^\delta\psi(u, v)dv=\int_0^u du\int_0^v|\varphi(u, v)|\,dv\leq 2u[L+\pi|\Phi(x, y)|].$$

dalle disuguaglianze $0 < u \leq \delta$, $0 < v \leq \delta$, segua $\Psi(u, v) < \varepsilon uv$, si ha

$$\int_0^\delta\int_0^\delta \Psi(u, v) \frac{\mu^2}{(1+\mu u)^3} \frac{\nu^2}{(1+\nu v)^3} du\, dv < \varepsilon \int_0^\delta\int_0^\delta \frac{\mu}{(1+\mu u)^2} \frac{\nu}{(1+\nu v)^2} du\, dv.$$
$$< \varepsilon.$$

È dunque, per μ e ν entrambi maggiori di un certo numero N,

$$|\sigma_{\mu,\nu}(x, y) - \Phi(x, y)| < 2\varepsilon,$$

e ciò prova il teorema enunciato [1].

b) Se $f(x, y)$ è una funzione integrabile e limitata nel quadrato Q, in quasi-tutto Q si ha che, presi ad arbitrio due numeri λ e Λ, tali che $0 < \lambda < \Lambda$, il polinomio trigonometrico di Fejér, $\sigma_{\mu,\nu}(x, y)$, tende a $f(x, y)$, al tendere di μ e di ν a ∞, in modo che sia sempre $\lambda \leq \mu : \nu \leq \Lambda$.

In primo luogo, se il punto (x, y) di Q è tale che, preso ad arbitrio un $\rho > 0$ e minore di 1, si abbia, in esso,

$$\frac{1}{uv}\int_0^u\int_0^v |\varphi(u, v)|\, du\, dv \to 0 \quad [2], \tag{3}$$

per u e v positivi, tendenti a zero, in modo che sia sempre $\rho \leq u : v \leq 1 : \rho$, dimostriamo che, presi ad arbitrio λ e Λ, con $0 < \lambda < \Lambda$, è $\sigma_{\mu,\nu}(x, y) \to \Phi(x, y)$ per μ e ν tendenti a ∞, in modo che sia sempre $\lambda \leq \mu : \nu \leq \Lambda$.

Infatti, dalla (2), si trae

$$|\sigma_{\mu,\nu}(x, y) - \Phi(x, y)| \leq A_{\mu,\nu} + 4\pi^2 \int_0^\delta\int_0^\delta \Psi(u, v) \frac{\mu^2}{(1+\mu u)^3} \frac{\nu^2}{(1+\nu v)^3} du\, dv,$$

con $A_{\mu,\nu} \to 0$, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$, e tutto si riduce a studiare il comportamento dell'integrale ora scritto.

Fissati λ e Λ, con $0 < \lambda < \Lambda$, consideriamo un ρ positivo e minore di 1. Per l'ipotesi ammessa relativamente al punto

---

[1] Se la $f(x, y)$ non soddisfa alla condizione (L), si ha $\sigma_{\mu,\nu}(x, y) \to \Phi(x, y)$ in quasi-tutti i punti (x, y) in cui vale la (1).

[2] Qui supponiamo che la $f(x, y)$ venga definita in tutto il piano (x, y) per mezzo della solita doppia periodicità.

(x, y), preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, possiamo determinare δ in modo che, se è $0 < u \leq \delta$, $0 < v \leq \delta$ e $\rho \leq u : v \leq 1 : \rho$, sia $\Psi(u, v) < \varepsilon uv$. Essendosi poi supposta limitata la $f(x, y)$, abbiamo, per un certo valore di M e qualunque siano u e v, positivi, $\Psi(u, v) < Muv$. Risulta dunque

$$(4)\quad \int_0^\delta\!\!\int_0^\delta \Psi(u, v) \frac{\mu^2}{(1+\mu u)^3} \frac{\nu^2}{(1+\nu v)^3} du\, dv < \varepsilon \int_0^\delta\!\!\int_0^\delta \frac{u\mu^2}{(1+\mu u)^3} \frac{v\nu^2}{(1+\nu v)^3} du\, dv +$$

$$+ M \left\{ \int_0^\delta \frac{u\mu^2 du}{(1+\mu u)^3} \int_0^{\rho u} \frac{v\nu^2 dv}{(1+\nu v)^3} + \int_0^\delta \frac{v\nu^2 dv}{(1+\nu v)^3} \int_0^{\rho v} \frac{u\mu^2 du}{(1+\mu u)^3} \right\}$$

$$< \varepsilon + M \left\{ \int_0^\delta \frac{\mu du}{(1+\mu u)^2} \int_0^{\rho u} \frac{\nu dv}{(1+\nu v)^2} + \int_0^\delta \frac{\nu dv}{(1+\nu v)^2} \int_0^{\rho v} \frac{\mu du}{(1+\mu u)^2} \right\}.$$

Ora si ha

$$\int_0^\delta \frac{\mu du}{(1+\mu u)^2} \int_0^{\rho u} \frac{\nu dv}{(1+\nu v)^2} = \int_0^\delta \frac{\rho\nu\mu u du}{(1+\mu u)^2(1+\rho\nu u)} < \rho\nu \int_0^\delta \frac{du}{(1+\mu u)(1+\rho\nu u)}$$

$$= \frac{\rho\nu}{\mu - \rho\nu} \log \frac{1 + \mu\delta}{1 + \rho\nu\delta},$$

e se è sempre $\lambda \leq \mu : \nu \leq \Lambda$ e se supponiamo $\rho < \lambda : 2$,

$$< \frac{2}{\lambda} \rho \log \left\{ \left(\frac{1}{\nu\delta} + \Lambda \right) : \rho \right\},$$

e quindi, per tutti i $\nu > 1 : \delta$,

$$< \frac{2}{\lambda} \rho \log \frac{1 + \Lambda}{\rho}.$$

Analogamente, si ha, per tutti i $\mu > 1 : \delta$, se è sempre $\lambda \leq \mu : \nu \leq \Lambda$ e se supponiamo $\rho < 1 : 2\Lambda$,

$$\int_0^\delta \frac{\nu\, dv}{(1 + \nu v)^2} \int_0^{\rho v} \frac{\mu\, du}{(1 + \mu u)^2} < 2\Lambda\rho \log \frac{1 + (1 : \lambda)}{\rho}.$$

Pertanto, supponendo di aver scelto ρ in modo da soddisfare alle disuguaglianze

$$\rho < \lambda:2, \quad \rho < 1:2\Lambda,$$

$$\frac{2}{\lambda}\rho \log \frac{1+\Lambda}{\rho} < \varepsilon, \quad 2\Lambda\rho \log \frac{1+(1:\lambda)}{\rho} < \varepsilon,$$

abbiamo dalla (4) per tutti i μ e ν, entrambi maggiori di $1:\delta$ e sempre soddisfacenti alle disuguaglianze $\lambda \leq \mu:\nu \leq \Lambda$,

$$\int_0^\delta\!\!\int_0^\delta \Psi(u, v) \frac{\mu^2}{(1+\mu u)^3} \frac{\nu^2}{(1+\nu v)^3} du\, dv < \varepsilon(1+2M).$$

Se ne conclude che, per tutti i μ e ν entrambi maggiori di un certo N e tali che $\lambda \leq \mu:\nu \leq \Lambda$, si ha

$$|\sigma_{\mu,\nu}(x, y) - \Phi(x, y)| < 2\varepsilon(1+M),$$

e ciò prova che, al tendere di μ e di ν a ∞, in modo che sia sempre $\lambda \leq \mu:\nu \leq \Lambda$, è $\sigma_{\mu,\nu}(x, y) \to \Phi(x, y)$.

Per completare la dimostrazione, basta provare ora che, fatto $\Phi(x, y) \equiv f(x, y)$, la proprietà ammessa per il punto (x, y), sopra considerato, risulta verificata in quasi-tutto il quadrato Q.

Osserviamo, a tal fine, che è

$$\int_0^u\!\!\int_0^v |\varphi(u, v)|\, du\, dv \leq \int_{-u}^{u}\int_{-v}^{v} |f(x+2u, y+2v) - f(x, y)|\, du\, dv,$$

e che, utilizzando una nota proposizione sulla derivazione degli integrali doppi (¹), ed estendendo alle funzioni di due variabili il lemma del n.° 61 (²), si ha che, fissato un ρ positivo e minore di 1, in quasi-tutto Q l'espressione

$$\frac{1}{4x'y'}\int_{-x'}^{x'}\int_{-y'}^{y'} |f(x+x', y+y') - f(x, y)|\, dx'\, dy'$$

tende a $|f(x, y) - f(x, y)| = 0$, al tendere di x' e y' allo zero,

---

(¹) Cfr. per es., CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire.* (Paris, 1916).

(²) L. TONELLI, *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali.* (Rend. Circ. Matem. Palermo, T. XXIX (1910), pp. 1-36).

in modo che sia sempre $\rho \leq x' : y' \leq 1 : \rho$. Perciò, fissato ρ come si è detto, in quasi-tutto Q vale la (3), per u e v tendenti a zero con la condizione $\rho \leq u : v \leq 1 : \rho$. In corrispondenza di ciascun ρ, i punti di Q in cui non vale la (3) costituiscono un insieme E_ρ di misura nulla. Se, quindi, diamo a ρ i valori $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots.$, l'insieme E dei punti appartenenti a tutti gli insiemi $E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{1}{3}}, E_{\frac{1}{4}}, \ldots.$, è anche esso di misura nulla; e se (x, y) è un punto di Q non appartenente ad E, comunque si prenda ρ, positivo e minore di 1, la (3) risulta verificata, in tale punto, per u e v tendenti a zero in modo che sia sempre $\rho \leq u : v \leq 1 : \rho$.

Il teorema è, così, pienamente provato.

§ 5. Complementi.

188. – Determinazione della funzione mediante i coefficienti della sua serie doppia di Fourier.

Dati i coefficienti della serie doppia di Fourier di una funzione $f(x, y)$, integrabile in Q, è possibile formare con essi il polinomio trigonometrico di Fejér, $\sigma_{\mu,\nu}(x, y)$, e se si suppone che la $f(x, y)$ sia limitata, in Q, il teorema del n.° 187, b), mostra che, per $\mu \to \infty$, è

$$\sigma_{\mu,\mu}(x, y) \to f(x, y),$$

in quasi-tutto Q. Dunque, la conoscenza dei coefficienti della serie doppia di Fourier di una funzione $f(x, y)$, integrabile, permette di determinare, in quasi-tutto Q, la $f(x, y)$, se questa funzione è limitata. Ciò avviene anche se la funzione non è limitata; ma per trattare questo caso occorre considerare un polinomio trigonometrico dedotto dalla $f(x, y)$ e distinto da $\sigma_{\mu,\nu}(x, y)$, polinomio che studieremo nel n.° seguente.

189. – Il polinomio trigonometrico di De la Vallée Poussin.

Considerata una funzione $f(x, y)$, integrabile nel quadrato fondamentale Q, formiamo l'integrale

$$(1) \qquad P_r(x, y) = \frac{h_r^2}{4} \iint_Q f(\alpha, \beta) \cos^{2r} \frac{x - \alpha}{2} \cos^{2r} \frac{y - \beta}{2}\, d\alpha\, d\beta,$$

dove r è un intero positivo, ed è

$$(2) \qquad \frac{1}{h_r} = \int_0^\pi \cos^{2r} \frac{\alpha}{2}\, d\alpha.$$

L' integrale (1) è, evidentemente, un polinomio trigonometrico nelle variabili x e y, e dà l' estensione a due variabili di un integrale considerato e studiato, per la prima volta, da De la Vallée Poussin (1).

Ci proponiamo di dimostrare la seguente proposizione:

In quasi-tutto il quadrato Q, *è*

$$(3) \qquad \lim_{r \to \infty} P_r(x, y) = f(x, y),$$

e, precisamente, quest' uguaglianza vale in tutti i punti interni a Q *in cui, posto*

$$(4) \qquad \varphi(u, v) = f(x + u, y + v) + f(x - u, y + v) + f(x - u, y - v) + \\ + f(x + u, y - v) - 4f(x, y),$$

risulta

$$(5) \qquad \lim_{\sigma \to +0} \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\sigma \int_0^\sigma |\varphi(u, v)|\, du\, dv = 0 \ (2).$$

In particolare, la (3) varrà in tutti i punti di continuità della $f(x, y)$, interni a Q.

Ponendo $x - \alpha = -u$, $x - \beta = -v$, ed intendendo che fuori di Q la $f(x, y)$ risulti definita mediante la periodicità, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, la (1) si scrive

$$P_r(x, y) = \frac{h_r^2}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + u, y + v) \cos^{2r} \frac{u}{2} \cos^{2r} \frac{v}{2}\, du\, dv.$$

---

(1) Loc. cit. in (4) a pag. 356. Lo studio dell' integrale (1) fu fatto da F. Sibirani (*Su la rappresentazione approssimata delle funzioni di più variabili ecc.* Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, Vol. XLIV (1909), pp. 1-27) e da L. Tonelli (*La formula di Parseval per le serie doppie di Fourier.* Memorie della R. Accad. delle Scienze di Bologna, S. III, T. II (1924-25), pp. 53-60).

(2) L. Tonelli, loc. cit. in (1).

Tenendo conto della (2), è allora

$$P_r(x, y) - f(x,y) = \frac{h_r^2}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ f(x+u, y+v) - f(x, y) \} \cos^{2r} \frac{u}{2} \cos^{2r} \frac{v}{2} \, du \, dv,$$

ed anche, per la (4),

$$P_r(x, y) - f(x, y) = \frac{h_r^2}{4} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(u, v) \cos^{2r} \frac{u}{2} \cos^{2r} \frac{v}{2} \, du \, dv.$$

Occorre dimostrare che, se (x, y) è un punto interno a Q e tale che in esso valga la (5), il secondo membro dell'ultima uguaglianza si può rendere, in modulo, minore di un numero positivo ε, arbitrariamente prefissato, per tutti gli r sufficientemente grandi.

Preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, sia σ un numero positivo, minore di $\pi : 2$ e tale che, per ogni numero positivo $\sigma' < 2\sigma$, sia

$$\int_0^{\sigma'} \int_0^{\sigma'} | \varphi(u, v) | \, du \, dv < \varepsilon \sigma'^2.$$

La determinazione di questo σ è possibile in virtù della (5). Abbiamo allora

$$(6) \qquad P_r(x, y) - f(x, y) = \frac{h_r^2}{4} \left\{ \int_0^{\sigma} \int_0^{\sigma} \varphi(u, v) \cos^{2r} \frac{u}{2} \cos^{2r} \frac{v}{2} \, du \, dv + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\sigma} \int_{\sigma}^{\pi} \ldots + \int_{\sigma}^{\pi} \int_0^{\pi} \ldots \right\}.$$

Osserviamo, in primo luogo, che è

$$\frac{h_r^2}{4} \left| \int_0^{\sigma} \int_{\sigma}^{\pi} \varphi(u, v) \cos^{2r} \frac{u}{2} \cos^{2r} \frac{v}{2} \, du \, dv + \int_{\sigma}^{\pi} \int_0^{\pi} \ldots \right| \leq \frac{h_r^2}{2} \cos^{2r} \frac{\sigma}{2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} | \varphi | \, du \, dv$$
$$\leq \frac{h_r^2}{2} \cos^{2r} \frac{\sigma}{2} \left\{ \iint_Q | f(u, v) | \, du \, dv + 4\pi^2 \, | f(x, y) | \right\};$$

e siccome si ha [1]

$$h_r < \sqrt{\frac{r+1}{\pi}}, \tag{7}$$

è pure per $r \to \infty$, $h_r^2 \cos^{2r} \frac{\sigma}{2} \to 0$, e pertanto, per ogni r maggiore di un certo r_1, risulta

$$\frac{h_r^2}{4} \left| \int_0^\sigma \int_\sigma^\pi \varphi(u, v) \cos^{2r} \frac{u}{2} \cos^{2r} \frac{v}{2}\, du\, dv + \int_\sigma^\pi \int_0^\pi \ldots \right| < \varepsilon. \tag{8}$$

---

(1) Si ha, infatti,

$$\int_0^\pi \cos^{2r} \frac{\alpha}{2}\, d\alpha = 2\int_0^{\pi:2} \cos^{2r}\alpha\, d\alpha = 2\,\frac{2r-1}{2r} \int_0^{\pi:2} \cos^{2(r-1)}\alpha\, d\alpha$$
$$= \frac{(2r-1)(2r-3) \ldots 3\cdot 1}{2r\cdot(2r-2) \ldots 4\cdot 2}\,\pi;$$

e siccome è

$$\int_0^\pi \cos^{2r+1} \frac{\alpha}{2}\, d\alpha = 2\,\frac{2r(2r-2) \ldots 4\cdot 2}{(2r+1)(2r-1) \ldots 5\cdot 3},$$

$$\int_0^\pi \cos^{2r-1} \frac{\alpha}{2}\, d\alpha = 2\,\frac{(2r-2)(2r-4) \ldots 4\cdot 2}{(2r-1)(2r-3) \ldots 5\cdot 3},$$

e si ha

$$\int_0^\pi \cos^{2r+1} \frac{\alpha}{2}\, d\alpha < \int_0^\pi \cos^{2r} \frac{\alpha}{2}\, d\alpha < \int_0^\pi \cos^{2r-1} \frac{\alpha}{2}\, d\alpha,$$

valgono le disuguaglianze

$$\frac{2\pi}{2r+1} < \left(\frac{(2r-1) \ldots 3\cdot 1}{2r \ldots 4\cdot 2}\cdot \pi\right)^2 < \frac{\pi}{r},$$

ossia

$$\frac{2\pi}{2r+1} < \frac{1}{h_r^2} < \frac{\pi}{r}.$$

Di qui segue

$$h_r < \sqrt{\frac{2r+1}{2\pi}} < \sqrt{\frac{r+1}{\pi}}.$$

Resta da considerarsi il primo integrale del secondo membro della (6). È

$$\left|\int_0^\sigma\int_0^\sigma \varphi(u, v)\cos^{2r}\frac{u}{2}\cos^{2r}\frac{v}{2}\,du\,dv\right| \leq \int_0^\sigma \cos^{2r}\frac{v}{2}\,dv\int_0^\sigma |\varphi|\cos^{2r}\frac{u}{2}\,du,$$

e ponendo

$$\Phi_1(u, v) = \int_0^u |\varphi(u, v)|\,du,$$

ed integrando per parti,

$$\left|\int_0^\sigma\int_0^\sigma \varphi(u, v)\cos^{2r}\frac{u}{2}\cos^{2r}\frac{v}{2}\,du\,dv\right| \leq \cos^{2r}\frac{\sigma}{2}\int_0^\sigma \Phi_1(\sigma, v)\cos^{2r}\frac{v}{2}\,dv -$$

$$-\int_0^\sigma \cos^{2r}\frac{v}{2}\,dv\int_0^\sigma \Phi_1(u, v)\frac{d}{du}\cos^{2r}\frac{u}{2}\,du;$$

invertendo le integrazioni, integrando nuovamente per parti, nel secondo integrale, e ponendo

$$\Phi_2(u, v) = \int_0^u\int_0^v |\varphi(u, v)|\,du\,dv,$$

si ottiene

$$\left|\int_0^\sigma\int_0^\sigma \varphi(u, v)\cos^{2r}\frac{u}{2}\cos^{2r}\frac{v}{2}\,du\,dv\right| \leq \cos^{2r}\frac{\sigma}{2}\left\{\Phi_2(\sigma, \sigma) - \int_0^\sigma \Phi_2(u, \sigma)\frac{d}{du}\cos^{2r}\frac{u}{2}\,d\right.$$

$$+\int_0^\sigma\int_0^\sigma \Phi_2(u, v)\frac{d}{du}\cos^{2r}\frac{u}{2}\frac{d}{dv}\cos^{2r}\frac{v}{2}\,du\,dv,$$

ed osservando che è $\frac{d}{du}\cos^{2r}\frac{u}{2} \leq 0$,

$$\leq \cos^{2r}\frac{\sigma}{2}\,\Phi_2(\sigma, \sigma)\left\{2 - \cos^{2r}\frac{\sigma}{2}\right\} + \int_0^\sigma\int_0^\sigma \Phi_2(u, v)\frac{d}{du}\cos^{2r}\frac{u}{2}\frac{d}{dv}\cos^{2r}\frac{v}{2}\,du\,dv$$

Ma è

$$\Phi_2(u, v) \leq \Phi_2(\sqrt{u^2+v^2},\quad \sqrt{u^2+v^2}),$$

e, per il modo con cui si è scelto σ, il secondo membro è minore di $\varepsilon(u^2+v^2)$, per tutti gli u e v di $(0, \sigma)$. Si ha dunque

$$(9)\qquad \frac{h_r^2}{4}\left|\int_0^\sigma\int_0^\sigma \varphi(u, v)\cos^{2r}\frac{u}{2}\cos^{2r}\frac{v}{2}\,du\,dv\right| < \frac{h_r^2}{2}\Phi_2(\sigma, \sigma)\cos^{2r}\frac{\sigma}{2} +$$

$$+\frac{h_r^2}{4}\varepsilon\int_0^\sigma\int_0^\sigma (u^2+v^2)\frac{d}{du}\cos^{2r}\frac{u}{2}\frac{d}{dv}\cos^{2r}\frac{v}{2}\,du\,dv.$$

Per ogni r maggiore di un certo r_2, è

$$(10)\qquad \frac{h_r^2}{4}\Phi_2(\sigma, \sigma)\cos^{2r}\frac{\sigma}{2} < \varepsilon.$$

È poi

$$\int_0^\sigma\int_0^\sigma (u^2+v^2)\frac{d}{du}\cos^{2r}\frac{u}{2}\frac{d}{dv}\cos^{2r}\frac{v}{2}\,du\,dv = 2\int_0^\sigma\int_0^\sigma u^2\frac{d}{du}\cos^{2r}\frac{u}{2}\frac{d}{dv}\cos^{2r}\frac{v}{2}\,du\,dv$$

$$< 2\int_0^\pi\int_0^\pi \ldots = -2\int_0^\pi u^2\frac{d}{du}\cos^{2r}\frac{u}{2}\,du$$

$$= 4\int_0^\pi u\cos^{2r}\frac{u}{2}\,du < 16\int_0^\pi \operatorname{sen}\frac{u}{2}\cos^{2r}\frac{u}{2}\,du = \frac{32}{2r+1}.$$

Di qui e da (9) e (10), segue, tenendo presente la (7),

$$\frac{h_r^2}{4}\left|\int_0^\sigma\int_0^\sigma \varphi(u, v)\cos^{2r}\frac{u}{2}\cos^{2r}\frac{v}{2}\,du\,dv\right| < \varepsilon\left(1+\frac{8}{\pi}\right).$$

Si ha dunque, in virtù della (6) e della (8),

$$|P_r(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon\left(2+\frac{2}{\pi}\right),$$

per ogni r maggiore del più grande dei numeri r_1 e r_2; è pertanto $P_r(x, y) \to f(x, y)$, in ogni punto (x, y), interno a Q, per il quale vale la (5).

Se ora osserviamo che la (5) è verificata in quasi-tutto Q [1], la proposizione enunciata resta provata completamente.

190. - Sviluppo di $P_r(x, y)$.

Abbiamo già osservato, nel principio del n.° precedente, che $P_r(x, y)$ è un polinomio trigonometrico. Diamo ora l'effettivo sviluppo di $P_r(x, y)$.

Consideriamo la formula, facilmente verificabile [2],

$$\cos^{2r}\frac{u}{2}\cos^{2r}\frac{v}{2} = \rho_r^2 \sum_{m=0}^{r}\sum_{n=0}^{r}\lambda_{m,n}\,\Gamma_{r;\,m,n}\cos mu\cos nv,$$

dove è

$$\rho_r = \frac{2}{2^{2r}}\frac{(2r)!}{(r!)^2},$$

$$(1)\ \Gamma_{r;\,m,n} = \begin{cases} 1, \text{ se } m = n = 0, \\ \dfrac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}, \text{ se } m = 0,\ n > 0, \\ \dfrac{r(r-1)\dots(r-m+1)}{(r+1)(r+2)\dots(r+m)}, \text{ se } m > 0,\ n = 0, \\ \dfrac{r(r-1)\dots(r-m+1)}{(r+1)(r+2)\dots(r+m)}\cdot\dfrac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}, \text{ se } m > 0,\ n > \end{cases}$$

---

(1) Cfr. quanto si è detto alla fine del n.° 187.

(2) Dalla formula

$$2\cos\frac{u}{2} = e^{\frac{iu}{2}} + e^{-\frac{iu}{2}},$$

innalzando alla potenza $2r$ ed uguagliando fra loro le parti reali, si ottiene

$$2^{2r}\cos^{2r}\frac{u}{2} = \cos ru + 2r\cos(r-1)u + \binom{2r}{2}\cos(r-2)u + \dots$$
$$\dots + \binom{2r}{r-1}\cos u + \binom{2r}{r} + \binom{2r}{r+1}\cos u + \dots + \cos ru$$

ed anche, riunendo i termini equidistanti dagli estremi,

$$\cos^{2r}\frac{u}{2} = \rho_r\left[\frac{1}{2} + \frac{r}{r+1}\cos u + \frac{r(r-1)}{(r+1)(r+2)}\operatorname{cor} 2u + \dots\right.$$
$$\left.\dots + \frac{r(r-1)\dots 1}{(r+1)(r+2)\dots 2r}\cos ru\right].$$

e dove $\lambda_{m,n}$ ha il significato indicato dalla (2) del n.° 162. Ponendo, nella formula scritta, $u=x-\alpha$, $v=y-\beta$, sostituendo nell'espressione di $P_r(x, y)$ data dalla (1) del n.° 189, e ricordando le formule (3) del n.° 162, che dànno i coefficienti $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$, della serie doppia di Fourier della $f(x, y)$, otteniamo

$$(2)\quad P_r(x, y)=\sum_{m=0}^{r}\sum_{n=0}^{r}\lambda_{m,n}\,\Gamma_{r;m,n}[a_{m,n}\cos mx\cos ny+$$

$$+b_{m,n}\operatorname{sen} mx\cos ny+c_{m,n}\cos mx\operatorname{sen} ny+d_{m,n}\operatorname{sen} mx\operatorname{sen} ny],$$

perchè è [1]

$$\frac{\pi^2 h_r^2\rho_r^2}{4}=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2r(2r-2)\ldots.4\cdot 2}{(2r-1)(2r-3)\ldots.3\cdot 1}\cdot\frac{2}{2^{2r}}\frac{(2r)!}{(r!)^2}\right]^2=1.$$

La formula (2) mostra che, conosciuti i coefficienti $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$, si costruisce immediatamente il polinomio trigonometrico $P_r(x, y)$; e siccome, per il teorema del n.° 189, è, in quasi-tutto il quadrato Q, $P_r(x, y)\to f(x, y)$, quando $r\to\infty$, ne viene che la conoscenza dei coefficienti della serie doppia di Fourier, della funzione $f(x, y)$, è sufficiente per determinare la $f(x, y)$ in quasi-tutto il quadrato Q. Il polinomio trigonometrico $P_r(x, y)$ dà il mezzo per l'effettiva determinazione della $f(x, y)$.

191. - Condizione d'integrabilità di $f^2(x, y)$.

a) Supponiamo che la $f(x, y)$, supposta integrabile nel quadrato Q, sia tale che risulti integrabile anche il suo quadrato. Considerata allora la serie doppia di Fourier di tale funzione e la somma parziale $s_{\mu,\nu}(x, y)$ di questa serie, abbiamo, dallo sviluppo dell'integrale

$$\iint_Q [f(x, y)-s_{\mu,\nu}(x, y)]^2\,dx\,dy\geq 0,$$

che vale la disuguaglianza

$$\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu}\lambda_{m,n}(a_{m,n}^2+b_{m,n}^2+c_{m,n}^2+d_{m,n}^2)\leq\frac{1}{\pi^2}\iint_Q f^2(x, y)\,dx\,dy$$

---

[1] Si tenga conto del valore di h_r calcolato in [1] a pag. 503.

la quale è la *disuguaglianza di Bessel* per le funzioni di due variabili. Di qui segue immediatamente che la serie doppia

$$(1)\qquad \sum_{\substack{m\\n}\Big\}=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(a_{m,n}^2 + b_{m,n}^2 + c_{m,n}^2 + d_{m,n}^2)$$

è convergente e che vale la disuguaglianza

$$(2)\qquad \sum_{\substack{m\\n}\Big\}=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(a_{m,n}^2 + b_{m,n}^2 + c_{m,n}^2 + d_{m,n}^2) \leq \frac{1}{\pi^2}\iint_Q f^2(x, y)dx\,dy.$$

b) Supponiamo ora che la $f(x, y)$, sempre supposta integrabile in Q, sia tale che la serie (1) risulti convergente. Consideriamo il polinomio trigonometrico di De La Vallée Poussin, $P_r(x, y)$, della $f(x, y)$, ed il suo sviluppo dato dalla (2) del n.° 190. Otteniamo facilmente

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_Q P_r^2(x, y)dx\,dy = \sum_{m=0}^{r}\sum_{n=0}^{r} \lambda_{m,n}\Gamma_{r;m,n}^2(a_{m,n}^2 + b_{m,n}^2 + c_{m,n}^2 + d_{m,n}^2),$$

da cui, essendo sempre (per le (1) del n.° 190) $0 < \Gamma_{r;m,n} \leq 1$,

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_Q P_r^2(x, y)dx\,dy \leq \sum_{m=0}^{r}\sum_{n=0}^{r} \lambda_{m,n}(a_{m,n}^2 + b_{m,n}^2 + c_{m,n}^2 + d_{m,n}^2),$$

ed anche, per l'ammessa convergenza della (1),

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_Q P_r^2(x, y)dx\,dy \leq \sum_{\substack{m\\n}\Big\}=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(a_{m,n}^2 + b_{m,n}^2 + c_{m,n}^2 + d_{m,n}^2).$$

Ragionando ora come si è fatto nel n.° 82, e tenendo conto del teorema del n.° 189, si ottiene che $f^2(x, y)$ è integrabile in Q e che vale la disuguaglianza

$$(3)\qquad \iint_Q f^2 dx\,dy \leq \sum_{\substack{m\\n}\Big\}=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(a_{m,n}^2 + b_{m,n}^2 + c_{m,n}^2 + d_{m,n}^2).$$

c) Da quanto si è provato in *a*) e *b*), segue:

Se $f(x, y)$ è integrabile nel quadrato Q, condizione necessaria e sufficiente affinchè il suo quadrato $f^2(x, y)$ sia pure integrabile, è che risulti convergente la serie doppia

$$\sum_{\substack{m\\n}\Big\}=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(a_{m,n}^2 + b_{m,n}^2 + c_{m,n}^2 + d_{m,n}^2).$$

192. - Formula di Parseval per le funzioni di due variabili.

a) Se la $f(x, y)$ è integrabile, nel quadrato Q, insieme col suo quadrato, si ha

$$(1) \qquad \sum_{\substack{m \\ n}\Big\}=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(a_{m,n}^2 + b_{m,n}^2 + c_{m,n}^2 + d_{m,n}^2) = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q f^2(x, y)dx\,dy,$$

dove $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$ sono i coefficienti della serie doppia di Fourier della $f(x, y)$.

Questa proposizione segue immediatamente dalle disuguaglianze (2) e (3) del n.° precedente.

b) La dimostrazione della (1) può anche ottenersi deducendola dalla formula analoga relativa alle funzioni di una sola variabile. Infatti, dall'ipotesi dell'integrabilità di $f^2(x, y)$ in Q, segue, per quasi-tutti gli y, l'integrabilità lineare della $f^2(x, y)$, come funzione della sola x. E se

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_1^{\infty}(\alpha_m \cos mx + \beta_m \operatorname{sen} mx)$$

è lo sviluppo in serie di Fourier della $f(x, y)$, considerata come funzione della sola x e per un y non eccezionale, avremo

$$(2) \qquad \alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y)\cos mx\,dx, \qquad \beta_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y)\operatorname{sen} mx\,dx,$$

e per la formula di Parseval del n.° 83,

$$\frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_1^{\infty}(\alpha_m^2 + \beta_m^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x, y)\,dx.$$

Di qui segue che α_m^2 e β_m^2, entrambi minori od uguali al secondo membro di questa uguaglianza, che è integrabile rispetto ad y, sono anch'essi integrabili rispetto ad y, e che è [per un noto teorema d'integrazione per serie di B. Levi (1)]

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\alpha_0^2 dy + \sum_1^{\infty}\left(\int_0^{2\pi}\alpha_m^2\,dy + \int_0^{2\pi}\beta_m^2 dy\right) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_Q f^2(x, y)\,dx\,dy.$$

---

(1) Loc. cit. in (1) a pag. 479.

Se

$$\frac{1}{2}\gamma_{m,0} + \sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_{m,n} \cos ny + \delta_{m,n} \operatorname{sen} ny)$$

è lo sviluppo in serie di Fourier di α_m, avremo, per la formula di Parseval del n.° 83,

$$\frac{1}{2}\gamma_{m,0}^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_{m,n}^2 + \delta_{m,n}^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \alpha_m^2\, dy,$$

ed analogamente

$$\frac{1}{2}\gamma_{m,0}'^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_{m,n}'^2 + \delta_{m,n}'^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \beta_m^2\, dy,$$

dove abbiamo indicato con $\gamma'_{m,n}$, $\delta'_{m,n}$ i coefficienti di Eulero-Fourier della β_m.

Dalla (3) segue, allora,

$$\begin{aligned}(4)\quad & \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\gamma_{0,0}^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_{0,n}^2 + \delta_{0,n}^2)\right\} + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(\gamma_{m,0}^2 + \gamma'^2_{m,0}) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_{m,n}^2 + \delta_{m,n}^2 + \gamma_{m,n}'^2 + \delta_{m,n}'^2) \\ & = \frac{1}{\pi^2}\iint_Q f^2(x, y)\, dx\, dy.\end{aligned}$$

Ma, essendo

$$\gamma_{m,n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \alpha_m \cos ny\, dy, \quad \delta_{m,n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \alpha_m \operatorname{sen} ny\, dy,$$

tenendo conto delle (2), si ha

$$\gamma_{m,n} = \frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(x, y) \cos mx \cos ny\, dx\, dy,$$

$$\delta_{m,n} = \frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(x, y) \cos mx \operatorname{sen} ny\, dx\, dy,$$

ed analogamente

$$\gamma'_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(x, y) \operatorname{sen} mx \cos ny \, dy,$$

$$\delta'_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(x, y) \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny \, dy;$$

dunque $\gamma_{m,n}$, $\gamma'_{m,n}$, $\delta_{m,n}$, $\delta'_{m,n}$ non sono altro che i coefficienti $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$ della serie doppia di Fourier della $f(x, y)$, e la (4) è precisamente la formula (1) [1].

193. - **Il teorema di Riesz-Fischer.**

Il teorema di Riesz-Fischer, dato nel n.° 91, vale anche per le funzioni di due variabili.

Dati gli infiniti numeri $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$ $(m = 0, 1, 2, ...;$ $n = 0, 1, 2, ...)$, *con la sola condizione che la serie doppia*

$$\sum_{\substack{m \\ n}\Big\} = 0}^{\infty} \lambda_{m,n}(a_{m,n}^2 + b_{m,n}^2 + c_{m,n}^2 + d_{m,n}^2) \tag{1}$$

(*dove* $\lambda_{m,n}$ *è definito dalle* (2) *del n.° 162*) *sia convergente, esiste sempre una funzione* $f(x, y)$, *ed una sola* (*a meno di funzioni nulle quasi-dappertutto*), *integrabile nel quadrato* Q, *ed avente* $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$ *come coefficienti della sua serie doppia di Fourier. Tale funzione risulta a quadrato integrabile in* Q.

Il metodo della dimostrazione è quello stesso seguito nel n.° 91.

Posto

$$s_r(x, y) = \sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} \lambda_{m,n}[a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny +$$

$$+ c_{m,n} \cos mx \operatorname{sen} ny + d_{m,n} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny],$$

$$S_r(x, y) = \int_0^x \int_0^y s_r(x, y) \, dx \, dy,$$

---

[1] Cfr., per il ragionamento ora fatto, G. FUBINI, *Derivate successive di una funzione di più variabili.* (Rend. R. Accad. Lincei, Vol. XXI (1912), pp. 597-601).

dall'ipotesi della convergenza della (1) segue, come nel n.° citato, che $S_r(x, y)$ converge uniformemente, in tutto Q, per $r \to \infty$, verso una funzione $S(x, y)$ *doppiamente assolutamente continua* (¹). È dunque

$$S(x, y) = \frac{1}{4} a_{0,0} xy + \frac{y}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^x (a_{m,0} \cos mx + b_{m,0} \operatorname{sen} mx) dx +$$

$$+ \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y (a_{0,n} \cos ny + c_{0,n} \operatorname{sen} ny) dy +$$

$$+ \sum_{\substack{m \\ n}\}=1}^{\infty} \Big\{ \frac{a_{m,n}}{mn} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny - \frac{b_{m,n}}{mn} (\cos mx - 1) \operatorname{sen} ny -$$

$$- \frac{c_{m,n}}{mn} \operatorname{sen} mx (\cos ny - 1) + \frac{d_{m,n}}{mn} (\cos mx - 1)(\cos ny - 1) \Big\},$$

le serie qui scritte convergendo tutte uniformemente in Q, perchè, per il teorema di Riesz-Fischer sulle funzioni di una sola variabile, esistono due funzioni (a quadrato integrabile) $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ che hanno come serie di Fourier, rispettivamente, $\sum_1^{\infty} (a_{m,0} \cos mx + b_{m,0} \operatorname{sen} mx)$ e $\sum_1^{\infty} (a_{0,n} \cos ny + c_{0,n} \operatorname{sen} ny)$, e perchè, inoltre, vale il teorema del n.° 128.

La precedente uguaglianza può scriversi nella forma

$$(2) \quad S(x, y) - \frac{1}{4} a_{0,0} xy - \frac{y}{2} \int_0^x \varphi(x) dx - \frac{x}{2} \int_0^y \psi(y) dy = \sum_{\substack{m \\ n}\}=1}^{\infty} \{ \dots \}.$$

Il primo membro di questa uguaglianza è una funzione doppiamente assolutamente continua, nulla per $x = 0$ ed anche per $y = 0$. Esiste perciò una funzione $g(x, y)$, integrabile in Q,

---

(¹) Tale cioè che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si possa sempre determinare un λ in modo che, per ogni gruppo di rettangoli, a lati paralleli agli assi x e y, in numero finito, non sovrapponentisi, contenuti in Q, e di area complessiva minore di λ, sia

$$| \Sigma \{ S(x'', y'') - S(x'', y') - S(x', y'') + S(x', y') \} | < \varepsilon,$$

dove (x', y') e (x'', y'') indicano i vertici di coordinate minime e massime del rettangolo generico del gruppo.

in modo che tale primo membro sia dato da

$$\int_0^x\int_0^y g(x,\ y)dx\,dy;$$

e siccome il secondo membro della (2) è una funzione periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, tale è pure l'integrale ora scritto, il quale risulta, pertanto, nullo anche per $x = 2\pi$, qualunque sia y, e per $y = 2\pi$, qualunque sia x. Ne segue che è

$$\int_0^{2\pi} g(x,\ y)dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} g(x,\ y)dy = 0,$$

rispettivamente per quasi-tutti gli y e per quasi-tutti gli x.

Siccome poi la serie doppia del secondo membro della (2) è uniformemente convergente in tutto Q (ed è la serie doppia di Fourier del primo membro), si ha

$$\frac{a_{m,n}}{mn} = \frac{1}{\pi^2}\iint_Q \left\{ \int_0^x\int_0^y g dx\,dy \right\} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny\, dx\, dy,$$

ed integrando per parti, due volte di seguito,

$$\frac{a_{m,n}}{mn} = \frac{1}{\pi^2 m}\iint_Q \left\{ \int_0^y g dy \right\} \cos mx \operatorname{sen} ny\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi^2 mn}\iint_Q g \cos mx \cos ny\, dx\, dy.$$

Formule analoghe valgono per $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$, e possiamo dire perciò che $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$ sono i coefficienti della serie doppia di Fourier della $g(x,\ y)$, per $m \geq 1$ e $n \geq 1$.

Se indichiamo con $a'_{m,n}$, $b'_{m,n}$, $c'_{m,n}$, $d'_{m,n}$ gli altri coefficienti della serie doppia di Fourier della $g(x,\ y)$, con almeno uno degli indici uguale a zero, e se osserviamo che è

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x,\ y)\,dy \sim \frac{1}{2}a'_{0,0} + \sum_1^\infty (a'_{m,0}\cos mx + b'_{m,0} \operatorname{sen} mx),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x,\ y)\,dx \sim \frac{1}{2}a'_{0,0} + \sum_1^\infty (a'_{0,n}\cos ny + c'_{0,n} \operatorname{sen} ny),$$

possiamo concludere che $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$, per $m \geq 0$ e $n \geq 0$, sono i coefficienti della serie doppia di Fourier della funzione

$$g(x, y) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x, y)\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x, y)\,dx + \frac{1}{4\pi^2}\iint_Q g(x, y)\,dx\,dy +$$
$$+ \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\psi(y) + \frac{1}{4}a_{0,0}.$$

Da quanto si è stabilito nel n.° 190, risulta poi che, a meno di funzioni nulle quasi-dappertutto, la funzione ora indicata è l'unica avente come coefficienti dello sviluppo di Fourier i coefficienti dati. Infine, tale funzione è a quadrato integrabile in virtù del teorema del n.° 191.

194. - Integrabilità termine a termine.

Anche il teorema d'integrazione termine a termine del n.° 128 si estende alle serie doppie di Fourier:

Integrando termine a termine, su un qualunque rettangolo a lati paralleli agli assi coordinati, la serie doppia di Fourier di una funzione $f(x, y)$ (integrabile e doppiamente periodica, di periodo 2π), si ottiene l'integrale della funzione sul rettangolo considerato. Se (a, b) e (x, y) sono due vertici opposti del rettangolo su cui si integra, la serie ottenuta è ovunque uniformemente convergente.

Il metodo di dimostrazione è quello seguito nel n.° 128.

Si osservi che, se $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$ sono i coefficienti della serie doppia di Fourier della $f(x, y)$, è

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y)\,dy \sim \frac{1}{2}a_{0,0} + \sum_1^{\infty}(a_{m,0}\cos mx + b_{m,0}\operatorname{sen} mx),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y)\,dx \sim \frac{1}{2}a_{0,0} + \sum_1^{\infty}(a_{0,n}\cos ny + c_{0,n}\operatorname{sen} ny),$$

e pertanto, se si pone

$$g(x, y) = f(x, y) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y)\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y)\,dx + \frac{1}{4\pi^2}\iint_Q f(x, y)\,dx\,dy,$$

si ha

$$g(x, y) \sim \sum_{\substack{m\\n}\Big\}=1}^{\infty} (a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny +$$
$$+ c_{m,n} \cos mx \operatorname{sen} ny + d_{m,n} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny),$$

e la funzione

$$F(x, y) = \int_0^x\int_0^y g(x, y) dx\, dy$$

risulta nulla per $x = 0$ e $x = 2\pi$, qualunque sia y, ed anche per $y = 0$ e $y = 2\pi$, qualunque sia x, perchè è

$$\int_0^{2\pi} g(x, y) dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} g(x, y) dy = 0,$$

rispettivamente per quasi-tutti gli y e per quasi-tutti gli x.

La funzione $F(x, y)$ è, per il teorema del n.° 172, d), sviluppabile in serie doppia di Fourier, ovunque uniformemente convergente verso la $F(x, y)$ stessa. Se $\alpha_{m,n}$, $\beta_{m,n}$, $\gamma_{m,n}$, $\delta_{m,n}$ sono i coefficienti di tale serie, mediante due successive integrazioni per parti, si ottiene, per $m > 0$ e $n > 0$,

$$\alpha_{m,n} = \frac{d_{m,n}}{mn}, \quad \beta_{m,n} = -\frac{c_{m,n}}{mn},$$
$$\gamma_{m,n} = -\frac{b_{m,n}}{mn}, \quad \delta_{m,n} = \frac{a_{m,n}}{mn}.$$

Osserviamo ora che, per quanto si è detto sulla funzione $F(x, y)$, può scriversi

$$F(x, y) = F(x, y) - F(x, 0) - F(0, y) + F(0, 0),$$

e che il secondo membro di questa uguaglianza è dato da

$$\sum_{\substack{m\\n}\Big\}=1}^{\infty} \{ \alpha_{m,n}(\cos mx - 1)(\cos ny - 1) + \beta_{m,n} \operatorname{sen} mx (\cos ny - 1)$$
$$+ \gamma_{m,n} \operatorname{sen} ny (\cos mx - 1) + \delta_{m,n} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny \};$$

si ha, perciò,

$$F(x, y) = \sum_{\substack{m \\ n}\Big\} =1}^{\infty} \left\{ \frac{d_{m,n}}{mn} (\cos mx - 1)(\cos ny - 1) - \frac{c_{m,n}}{mn} \operatorname{sen} mx (\cos ny - 1) \right.$$

$$\left. - \frac{b_{m,n}}{mn} \operatorname{sen} ny (\cos mx - 1) + \frac{a_{m,n}}{mn} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny \right\}.$$

Esprimendo la $F(x, y)$ mediante la $f(x, y)$, e tenendo presente il teorema d' integrazione per le serie di Fourier delle funzioni di una sola variabile, otteniamo

$$\int_0^x\!\!\int_0^y f(x, y) dx\, dy = \frac{1}{4} a_{0,0} xy + \frac{y}{2} \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{a_{m,0}}{m} \operatorname{sen} mx - \frac{b_{m,0}}{m} (\cos mx - 1) \right\} +$$

$$+ \frac{x}{2} \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{a_{0,n}}{n} \operatorname{sen} ny - \frac{c_{0,n}}{n} (\cos ny - 1) \right\} +$$

$$+ \sum_{\substack{m \\ n}\Big\} =1}^{\infty} \left\{ \frac{a_{m,n}}{mn} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny - \frac{b_{m,n}}{mn} \operatorname{sen} ny (\cos mx - 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{c_{m,n}}{mn} \operatorname{sen} mx (\cos ny - 1) + \frac{d_{m,n}}{mn} (\cos mx - 1)(\cos ny - 1) \right\},$$

dove le tre serie convergono tutte uniformemente. Questa formula dimostra il teorema enunciato.

Aggiungiamo che pure il teorema del n.° 130 vale per le serie doppie di Fourier, il che è senz' altro evidente [1].

---

[1] Per altre proposizioni, valide per le serie doppie di Fourier e, più generalmente, per le serie doppie trigonometriche, vedi la Monografia di H. Geiringer, citata in [1] a pag. 495.

INDICE DEGLI AUTORI CITATI (*)

(*) I numeri indicano la pagina.

INDICE DELLE MATERIE

ERRATA CORRIGE

Pag.	64,	linea	16, *invece di* « detta con l_n », *leggi* « detta l_n ».					
»	105,	»	27, *sopprimere* « ∞ ».					
»	110,	»	14, *invece di* « $d\chi$ », *leggi* « dx ».					
»	165,	»	14, dal basso,	*invece di*	« $+\infty$, »,	*leggi*	« $+\infty$. ».	
»	193,	»	2, della Nota (1),	»	« 184 »,	»	« 186 ».	
»	322,	»	2, della Nota (1),	»	« 251 »,	»	« 252 ».	

CASA EDITRICE N. ZANICHELLI - BOLOGNA

BIBLIOTECA DI OPERE SCIENTIFICHE

AGOSTINI A. e BORTOLOTTI E. — *Esercizi di Geometria analitica.* Tre volumi.

ARMELLINI GIUSEPPE — *Trattato di Astronomia Siderale.* Vol. I. Parte Generale.

BELARDINELLI GIUSEPPE — *Esercizi di algebra complementare,* con oltre 700 questioni risolute e proposte.

BERTINI EUGENIO — *Complementi di Geometria proiettiva.*

BIANCHI LUIGI — *Lezioni di geometria analitica.*

— *Lezioni di geometria differenziale.* Terza edizione rifatta. Quattro volumi.

— *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni.*

— *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici.*

— *Lezioni sulla Teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche.* Parte Prima - *Funzioni di variabile complessa.* Terza edizione.

BORTOLOTTI ETTORE — *Lezioni di geometria analitica.* Due volumi.

BURGATTI PIE... *meccanica razionale* - Terza edizione.

BURGATTI PIE... ROGHI — *Problemi ed esercizi di meccanica razionale.*

CASSINA UGO —... *con numerosi esempi e note storiche originali.*

CASTELNUOVO G... *tempo secondo le vedute di A. Einstein.*

— *Calcolo delle Pro...* primo e secondo, seconda edizione riveduta.

CIANI EDGARDO ... *metria projettiva ed analitica.* Terza edizione riveduta e cor...

DONATI LUIGI — ... *entifiche.* Elasticità - Vettori - Elettrologia - Correnti Alter... ti vari.

DUCATI ADRIANO ... *nelle comunicazioni radioelettriche,* con moltissime figure nel testo.

EINSTEIN ALBERTO — *Sulla teoria speciale e generale della relatività.*

ENRIQUES FEDERIGO — *Lezioni di geometria projettiva* - Quarta edizione.

— *Lezioni di geometria descrittiva,* pubblicate per cura del dott. Umberto Concina Ristampa della seconda edizione.

— *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche,* pubblicate per cura del dott. Oscar Chisini. Tre volumi.

FERMI ENRICO — *Introduzione alla fisica atomica.*

FUBINI G. e ČECH E. — *Geometria proiettiva differenziale.* In due Tomi.

LÄMMEL RODOLFO — *I fondamenti della teoria della relatività.*

LEVI-CIVITA TULLIO e UGO AMALDI — *Lezioni di meccanica razionale.*

Volume Primo. *Cinematica - Principi e Statica.*
Volume Secondo. - *Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà.* Parte prima e seconda.

— *Compendio di Meccanica razionale.*

Parte Prima - *Cinematica - Principi e statica.*
Parte Seconda - *Dinamica - Cenni di meccanica di sistemi continui*

LEVI-CIVITA TULLIO — *Questioni di meccanica classica e relativista.*

— *Fondamenti di Meccanica relativistica,* redatti dal prof. E. Persico.

(Segue a pag. 3 di Copertina)

Prezzo del presente volume Lire 100

191