

G É O M É T R I E

D U C O M P A S.

L I V R É O N Z I È M E.

P R O B L Ê M E S D I V E R S.

P R O B L Ê M E.

151. *E*TANT donnée une échelle SL ,
trouver la surface du triangle ABD ,
et du quadrilatère $ABCD$ [fig. 76].

Solution. Faites à $BA = Ba$, et à $DA = Da$ [11]; portez sur l'échelle SL les distances Aa et BD prises avec le compas. Supposons, par exemple, que l'on trouve $Aa = 7$, $BD = 8$, multipliez ces deux nombres entr'eux; prenez le quart du produit $= 14$, ce nombre exprimera la surface du triangle ABD .

Pour trouver la surface du quadrilatère $ABCD$, après avoir déterminé le point a comme ci-dessus, on fera à $BC = Bc$ et à $DC = Dc$; on trouvera sur l'échelle les deux distances Aa , Cc ; soit par exemple $Aa = 7$, $Cc = 5$; prenez la somme de ces deux quantités

tités $= 12$; multipliez par cette somme $= 12$ la valeur de BD trouvée sur l'échelle $= 8$; prenez le quart du produit $= 24$, ce nombre exprimera la surface du quadrilatère $ABCD$.

Démonstration. La ligne Aa est double de la perpendiculaire qui tombe du point A sur la ligne BD (14) ; mais la surface du triangle ABD est égale à la moitié de la surface d'un parallélogramme qui auroit pour base la ligne BD , et pour hauteur cette perpendiculaire (41. liv. 1) : donc elle est égale au quart du produit de Aa par BD ; de même la surface du triangle BCD est égale au quart du produit de Cc par BD : donc la surface du quadrilatère $ABCD$ est égale au quart du produit de la somme des deux parallèles Aa , Cc par leur perpendiculaire BD .

152. Le problème précédent peut servir à mesurer la surface d'un espace renfermé par un polygone quelconque , en imaginant des droites qui le partagent en autant de triangles ou de quadrilatères que l'on jugera convenable ; on pourroit proposer encore d'autres manières de la réduire en trapèzes ; mais on peut facilement les déduire de la méthode avec laquelle on a résolu ce problème.

P R O B L È M E.

153. *Etant donnés [fig. 77] les plans triangulaires qui comprennent une pyramide tétraèdre, trouver sur sa base le point où tombe la perpendiculaire abaissée du sommet, et trouver sa hauteur.*

Solution. Soit le triangle ABC la base de cette pyramide tétraèdre, et soient AEC , BDC , AFB les plans triangulaires qui vont se réunir à son sommet; du centre C et du rayon $CD=CE$, soit décrit un arc qui passe par les points e et d ; du centre B et du rayon BD , soit décrit un arc qui coupe le premier en d ; du centre A et du rayon AE , soit décrit un arc qui coupe le rayon en e ; soit trouvé le point P où se coupent les deux droites Dd , Ee [112]; ce point sera celui où tombe la perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide.

Soit divisée par moitié la droite CE au point m [66]; du centre m et du rayon mC , soit décrite la demi-circonférence CpE ; soit fait à $CP=Cp$; la ligne Ep sera la hauteur de la pyramide.

Démonstration. Si dans la pyramide $SABC$ qui a pour base le triangle ABC , et pour sommet le point S , on mène dans le triangle SCB la droite $S\delta$ perpendiculaire à CB , et si on élève du point δ pris dans le plan de la base ACB la perpendiculaire δd , elle contiendra le point P , où tombe du sommet la perpendiculaire SP [11. liv. 11]; de même, si du point S dans le plan SAC , on mène à AC la perpendiculaire $S\epsilon$, et si du point ϵ dans le plan de la base ACB , on mène à la même droite AC la perpendiculaire ϵe ; elle contiendra le point P : donc ce point sera l'intersection des deux droites δd , ϵe . Mais dans la fig. 77, où les points D et E représentent le point S de la fig. 78, Dd est perpendiculaire à BC en un point δ [14]; de même aussi Ee est perpendiculaire à AC en un point ϵ : donc le point P est le point cherché.

De plus, les deux triangles $CP S$ [fig. 78], $Cp E$ [fig. 77], étant rectangles en P et p , le premier par supposition, et le second par la 31.^e prop. du liv. 3; et CS étant la même ligne que CE , on a $CP = Cp$; on aura encore $PS = pE$; car [fig. 78] (47. liv. 1):

$$(CS)^2 - (CP)^2 = (PS)^2;$$

de même on a [fig. 77]:

$$(CE)^2 - (Cp)^2 = (pE)^2.$$

Mais $(CS)^2 - (CP)^2 = (CE)^2 - (Cp)^2$;
donc $(PS)^2 = (pE)^2$; d'où $PS = pE$;
donc pE est la hauteur de la pyramide.

154. Jusqu'ici toutes les démonstrations que nous avons données étoient fondées sur les élémens d'Euclide. Mais comme nous ne pourrions pas toujours suivre la même marche sans être trop prolixes , nous emploierons quelques équations qui sont démontrées dans tous les traités de trigonométrie plane.

155. Si , dans un cercle décrit avec un rayon égal à l'unité , on appelle x et y deux arcs quelconques , on aura :

$$\sin. (x + y) = \sin. x \cos. y + \sin. y \cos. x.$$

$$\sin. (x - y) = \sin. x \cos. y - \sin. y \cos. x.$$

$$\cos. (x + y) = \cos. x \cos. y - \sin. x \sin. y.$$

$$\cos. (x - y) = \cos. x \cos. y + \sin. x \sin. y.$$

156. Si dans la troisième équation l'on fait $x = y$, on aura :

$$\cos. 2x = (\cos. x)^2 - (\sin. x)^2 ;$$

et comme $(\cos. x)^2 + (\sin. x)^2 = 1$; d'où l'on tire : $(\cos. x)^2 = 1 - (\sin. x)^2$, on aura :

$$\cos. 2x = 1 - 2 (\sin. x)^2 ;$$

$$\text{d'où : } (\sin. x)^2 = \frac{1 - \cos. 2x}{2} , \text{ et } \sin. x = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos. 2x}{2}\right)}.$$

157. Si l'on ajoute les deux premières équations [155], on aura :

$$\sin. (x+y) + \sin. (x-y) = 2 \sin. x \cos. y ;$$

$$\text{d'où } \sin. x \cos. y = \frac{\sin. (x+y) + \sin. (x-y)}{2}.$$

Si l'on fait $(x+y) = p$, $(x-y) = q$,
on aura : $2x = p + q$, $2y = p - q$:

$$\text{d'où : } \sin. p + \sin. q = 2 \sin. \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \cos. \left(\frac{p-q}{2} \right).$$

158. Si l'on ajoute les deux dernières équations (155), on aura :

$$\cos. x \cos. y = \frac{\cos. (x+y) + \cos. (x-y)}{2} ;$$

$$\text{d'où : } \cos. p + \cos. q = 2 \cos. \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \cos. \left(\frac{p-q}{2} \right).$$

159. Si l'on retranche la 3.^e des mêmes équations de la 4.^e, on aura :

$$\sin. x \sin. y = \frac{\cos. (x-y) - \cos. (x+y)}{2}.$$

$$\text{d'où } \cos. q - \cos. p = 2 \sin. \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \sin. \left(\frac{p-q}{2} \right).$$

160. A cause de l'équation $2 \sin. x = \text{corde } 2x$,
on aura (156) :

$$\text{corde } 2x = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos. 2x}{2}}.$$

et si l'on suppose $2x = x$, on aura :

$$\text{corde } x = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos. x}{2}} = \sqrt{(2 - 2 \cos. x)}.$$

Si l'on appelle k la corde d'un arc, c le cosinus, s le sinus, h la corde du complé-

ment, on aura : $k^2 = 2 - 2c$, et $h^2 = 2 - 2s$.

La première de ces deux équations donne $c = 1 - \frac{1}{2}k^2$; et comme on a :

$s = \sqrt{1 - c^2} = \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}k^2} = k\sqrt{1 - \frac{1}{4}k^2}$,
on aura : $h^2 = 2 - 2k\sqrt{1 - \frac{1}{4}k^2}$.

P R O B L Ê M E.

161. *Dans un triangle équilatéral ABC [fig. 79], inscrire un quarré e b c d [fig. 124].*

I.^{ere} Solution. Si on veut se servir des côtés donnés du triangle, soit décrit du centre A , et avec le rayon AB , le demi-cercle $BCDE$ [64].

Du centre E et avec le rayon EC , soit décrit un arc qui coupe le côté donné AB en b ; du centre A et avec le rayon Bb , soit décrit un arc qui coupe le même côté en e ; des centres e et b , et avec le rayon eb , soient décrits deux arcs qui coupent les côtés AC en d , et CB en c ; $ebcd$ sera le quarré cherché.

Démonstration. Faisant pour abrégier $AB = 1$, on aura $Eb = EC = BD = \sqrt{3}[2]$; d'où : $Bb = BE - Eb = 2 - \sqrt{3} = Ae$; d'où on tire : $be = AB - 2Ae = 2\sqrt{3} - 3 = (2 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = bc$; donc on aura :

$$Bb : bc :: (2 - \sqrt{3}) : (2 + \sqrt{3}). \sqrt{3} :: 1 : \sqrt{3}.$$

Mais si on suppose que AB soit coupée au milieu en T par la perpendiculaire CT , on aura aussi :

$$BT : TC :: \frac{1}{2} : \frac{1}{2} \sqrt{3} [104] ;$$

c'est-à-dire, $BT : TC :: 1 : \sqrt{3} :$

donc bc est parallèle à TC [2. liv. 6], et par conséquent perpendiculaire à AB [27. liv. 1] : on démontreroit la même chose pour la droite de : donc $ebcd$ est le quarré inscrit.

II.^e *Solution.* Si on ne vouloit pas se servir de l'intersection des côtés donnés du triangle ABC , mais qu'étant donnés seulement les trois points A , B et C sommets des angles du triangle, on dût trouver les quatre points b , c , d , e du quarré à inscrire ; du centre E , comme dans la solution précédente, et avec le rayon EC , soit décrit un arc qui passe par b , C et a ; du centre B , et avec le même rayon, soit décrit un arc qui coupe en a celui qu'on vient de tracer ; du centre a , et avec le rayon AB , soit coupée la demi-circonférence $B C D E$ en H ; et soit fait dans cette circonférence à $Ha = HI = IK$; du centre D et avec le rayon aK , soit décrit un arc qui passe par b ; le point b sera déterminé ; du centre A et du rayon Bb , soit décrit un arc qui passe par le point e ; du centre C et du rayon Cb , soit dé-

crit un autre arc qui coupe le dernier en e ; des centres e et C , et du rayon be , soient décrits deux arcs qui se coupent en d ; des centres b et C , avec le même rayon be , soient décrits deux arcs qui se coupent en c ; $b c d e$ sera le quarré cherché.

Ou bien en employant le cercle $B C D E \delta$, et faisant à $A B = E \delta$; des centres D et δ , et avec le rayon $a K$ déterminé plus haut, soient décrits deux arcs qui se coupent en b ; le reste se fait comme ci-dessus.

Démonstration. Le point K sera ici déterminé comme dans la fig. 9 (32) par le moyen du même point a , ainsi l'arc $B K$ sera un vingt-quatrième de la circonférence. On a ensuite dans la fig. 9, $B K = B k = E M$; si on compare les points a, K, B, k, A, M avec les points Q, A, R, S, p, B de la fig. 4, on tirera pour la fig. 9, de l'équation :

$$(A Q)^2 = (R Q)^2 - A S . p Q [20]$$

celle-ci : $(a K)^2 = (B a)^2 - K k . A a$:

or $K k$ est la corde d'un douzième de la circonférence. Pour trouver sa valeur, en supposant pour abréger $A B = 1$, on a le sinus de $B N = K k = A X [fig. 12] = \frac{1}{2}$, et le double de son cosinus, c'est-à-dire, $2 N X = N O = B D = \sqrt{3}$: d'où substituant $K k$ pour x ,

et $\sqrt{3}$ pour $2 \cos. x$, dans l'équation [159] :

$$\text{corde } x = \sqrt{(2 - 2 \cos. x)},$$

on aura la droite $Kk = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$;

d'où : $(aK)^2 = 3 - (\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}) \cdot \sqrt{2}$ [27]

$$= 3 - (\sqrt{3} - 1) = 4 - \sqrt{3}.$$

Maintenant, si des centres D et δ , et avec le rayon aK , on décrit deux arcs qui se coupent en b , le point b sera sur la droite BE [13], qui divisera en deux parties égales à angles droits la ligne $D\delta$ au point R [14], en faisant, $RD = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ [104] : donc, puisque [47. liv. 1] :

$$(Db)^2 = (DR)^2 + (bR)^2:$$

on aura : $(bR)^2 = (Db)^2 - (DR)^2$

$$= 4 - \sqrt{3} - \frac{3}{4} = \frac{13 - 4\sqrt{3}}{4};$$

et de-là : $bR = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$, et $bE = \sqrt{3}$.

Donc par la démonstration de la solution, le point b est une des extrémités du quarré : on le trouvera de même avec les centres D et E , et avec les deux rayons aK et BD comme dans la première partie de la II.^e solution ; puis les deux triangles CAe , CBb ayant tous leurs côtés respectivement égaux, on aura l'angle $CBb = CAe$ [8. liv. 1] $= CBA$; d'où le point e sera sur la ligne BA et sera une autre extrémité du quarré. Enfin, comme dans cette seconde solution les droites Cb , Ce sont les mêmes de grandeur et de position

que dans la première solution, et qu'on a aussi dans la première solution $Cd = ed$, $Cc = bc$ à cause du triangle équilatéral Ccd et de la ligne cd parallèle à AB [2. liv. 6], les points d et c seront déterminés dans cette seconde solution comme dans la première.

P R O B L Ê M E.

162. *Inscrire dans le quarré $ABLF$ [fig. 80] un triangle équilatéral, qui a un angle B à l'un des angles du quarré.*

I.^{ere} Solution. Du centre A et du rayon AB , soit décrite la demi-circonférence BFE , en faisant à $FB = FE$; soit fait aussi à $BE = BQ = EQ$: si on veut se servir des sections des côtés donnés du quarré; du centre F et du rayon FQ , soit décrit un arc qui coupe deux côtés du quarré aux points M et N , les points B, M, N seront les sommets des angles du triangle cherché.

Démonstration. L'angle QAB étant droit (83), on aura :

$$(BQ)^2 = (AB)^2 + (AQ)^2 \text{ [47. liv. 1]};$$

et faisant pour abrégier $AB = 1$, on aura :

$$4 = 1 + (AQ)^2;$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } AQ &= \sqrt{3}; FQ = AQ - AF \\ &= \sqrt{3} - 1 = FM = FN; \end{aligned}$$

d'où : $(FM)^2 = (FN)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$;

et par conséquent ,

$(MN)^2 = (FM)^2 + (FN)^2 = 8 - 4\sqrt{3}$;

ensuite comme on a :

$LM = LF - FM = 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3}$;

on aura : $(LM)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$; d'où :

$(BM)^2 = (BL)^2 + (LM)^2 = 8 - 4\sqrt{3} = (MN)^2$:

on démontre de même que $(BN)^2 = (MN)^2$;

donc : $BM = MN = BN$.

II.^e Solution. Si on ne suppose données que les quatre extrémités A, B, L, F du quarré, après avoir trouvé comme dans la première solution le point Q , soit décrite du centre F , et avec le rayon FQ , la circonférence $QRSNM$; puis faisant à $FQ = QR = RS = SN$, du centre B et avec le rayon BN , soit coupée cette circonférence au point M ; les points B, N, M seront les sommets des angles du triangle cherché.

Démonstration. L'arc $QRSN$ est la moitié de la circonférence (15. liv. 4) : donc le point N est sur la droite QFA , et est aussi éloigné de F que dans la première solution; donc il est le même. Le point M se trouve aussi dans la première solution, comme dans la seconde, à l'intersection des deux arcs décrits des centres F et M et avec des rayons égaux à FQ et à BN ; donc il est le même; donc, etc.

P R O B L È M E.

163. *Dans un triangle équilatéral dont les sommets p, q, R sont donnés, inscrire un exagone régulier.*

Solution. Divisez la distance QR [fig. 81] en trois parties égales aux points c et d (68); des centres c et d , et du rayon cd , décrivez deux arcs qui se coupent en A , du même rayon et du point A pris pour centre, décrivez un cercle, faites sur la circonférence à $dc = cB = Bc = cD = Dc = dE$; les points B, C, D, E, d, e , seront les sommets de l'exagone inscrit.

Démonstration. Le triangle BcQ a ses côtés Bc et Qc égaux aux côtés Ad et cd du triangle Adc : de plus, l'angle compris entre ces côtés est égal dans chaque triangle à cause du parallélisme des lignes Bc et Ad [27. liv. 1]: donc ces deux triangles sont égaux (4. liv. 1), et l'angle $cQB = dcA = cQP$: donc le point B est sur la droite PQ : on démontre de la même manière, que les autres points C, D, E sont sur les côtés du triangle proposé: donc, etc.

P R O B L È M E.

164. *Dans un quarré donné ABLF, inscrire un octogone régulier.*

I.^{ere} *Solution.* Si l'on veut se servir des intersections des côtés du quarré donné, du point A pris pour centre [*fig. 82*], et du rayon AB , décrivez la demi-circonférence $B C D E$, en faisant à $AB = BC = CD = DE$; faites à $BF = BQ$, à $EA = EQ$; du rayon AQ , et du centre A , déterminez les points b et g ; puis du même rayon et des centres B , L et F , coupez les côtés aux points a, d, c, f, e, h , ces points seront les sommets de l'octogone $abcdefgh$.

II.^e *Solution.* Ayant déterminé le point Q comme dans la première solution, du rayon AQ et des points A et B pris pour centre, décrivez deux arcs qui se coupent en O ; avec le même rayon et du centre A , déterminez le point b sur le côté AB ; du point O pris pour centre, et du rayon Ob , décrivez un cercle qui coupe les côtés du quarré dans les autres points c, d, e, f, g, h, a ; ces points seront les sommets de l'octogone.

III.^e *Solution.* En supposant que les côtés du quarré ne soient pas donnés, mais que l'on

connût seulement les quatre sommets A, B, L, F , on déterminera le point Q comme dans la première solution ; on fera à $EC = EM$, à $BF = BM$: du rayon AM et du centre A , décrivez un arc qui passe par les points c et d ; du même rayon et du centre B , décrivez un arc qui passe par les points f et g ; du même rayon et du centre L , décrivez un arc qui passe par les points h et a ; du même rayon et du centre F , décrivez un arc qui passe par les points b et c ; du rayon AQ et des centres A, B, L, F , coupez ces arcs aux points b, g, d, a, c, f, e, h ; ces points seront les sommets de l'octogone.

Démonstration. Supposons pour plus de simplicité $AB = 1$, on aura : $AM = \frac{1}{2} \sqrt{6}$ [104] ; $AQ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$, et au moyen de l'équation $(Bd)^2 = (AQ)^2 = \frac{1}{2}$, on aura : $(Ad)^2 = (AM)^2 = \frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2} = (AB)^2 + (Bd)^2$: donc l'angle ABd sera droit (48. liv. 1), et par conséquent le point d sera sur la droite BL : on démontrera de la même manière que tous les autres points sont sur les côtés du quarré proposé ; on aura de plus $Ld = BL - Bd = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} = Le$, et $(de)^2 = (Ld)^2 + (Le)^2$ [47. liv. 1] $= 2(Ld)^2$: d'où l'on tire : $de = Ld \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$. Mais on a $cd = BL - Ld - Bc = BL - 2Ld = 1 - 2 + \sqrt{2}$

$= \sqrt{2} - 1$: donc $cd = de$; on démontrera de la même manière que tous les côtés de l'octogone sont égaux entr'eux. De plus, les triangles Lde , Bbc , Aah , Ffg étant égaux en tout, leurs angles aux points a, b, c, d, e, f, g, h seront égaux : donc leurs suppléments, c'est-à-dire, les angles de l'octogone seront aussi égaux (13. liv. 1).

PROBLÈME.

165. *Etant donné un octogone régulier $ABhg fFGH$, trouver facilement [fig. 66], 1.^o le côté d'un octogone régulier dont la surface soit double ; 2.^o le côté d'un octogone dont la surface soit triple.*

Solution. Avec le côté AB de l'octogone donné, pris pour rayon, des points F et H comme centres, soient décrits deux arcs qui se coupent en a .

1.^o af ou aA sera le côté de l'octogone double.

2.^o AB ou ag sera le côté de l'octogone triple.

Démonstration. Si on suppose $AB = 1$, on aura :

$$aA = af = \sqrt{2} [139] ; aB = ag = \sqrt{3} [2] ;$$

mais les surfaces des figures semblables sont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues (20. liv. 6) : donc aA sera le côté d'un octogone double et AB celui d'un triple.

P R O B L È M E.

166. *Dans un cercle d'un rayon AB [fig. 83], inscrire trois cercles qui le touchent et se touchent entr'eux.*

Solution. Dans la circonférence du cercle donné, soit fait à $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$; du centre B et du rayon BD , soit décrit un arc qui passe par les points a, p , et α ; du centre E et du même rayon BD , soit coupé cet arc en a et α ; avec le même rayon, des centres C et c , soient décrits deux arcs qui se coupent en V , et des centres D et d , deux autres arcs qui se coupent en v ; des centres V et v , et avec le même rayon, soient décrits deux arcs qui passent par m et n ; des centres a et α et du rayon AB , soit coupée la circonférence du cercle donné en G, H , et en g, h ; soit fait dans cette circonférence au même rayon $AB = GL = HI = gl = hi$; soit fait à $Aa = BF$; à $IL = LY = IY = ly = iy$; à $Yy = Fm = Fn$; à $Dn = Dp$: du centre
 A

A et du rayon mn , soit décrit le cercle $PSRXQT$, sur la circonférence duquel, prenant un point arbitraire P , on fasse à $PA = PS = SR = RX = XQ = QT$: enfin, des centres P, Q, R et du rayon pn , soient décrits trois cercles; ils seront tangens au cercle donné, et tangens entr'eux.

Démonstration. La droite IL étant corde d'un douzième de la circonférence (32), on aura :

$$IL = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} [160];$$

et comme on a (47. liv. 1. 31. liv. 3) :

le carré du diamètre $(Li)^2 = (IL)^2 + (Ii)^2$,

on aura : $4 = 2 - \sqrt{3} + (Ii)^2$;

d'où : $(Ii)^2 = 2 + \sqrt{3}$, et $Ii = \sqrt{(2 + \sqrt{3})}$.

On aura ensuite (20) :

$$\begin{aligned} (aI)^2 &= (aB)^2 - Ii. Aa = 3 - \sqrt{(4 + 2\sqrt{3})} \\ &= 3 - (1 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}; \end{aligned}$$

d'où $aI = IL = \sqrt{(2 - \sqrt{3})}$;

on aura par les mêmes raisons $aL = LI$;

d'où $aIYL$ sera un rhombe, et on aura (139) :

$$(aY)^2 = 4(aI)^2 - (IL)^2 = 3(IL)^2;$$

d'où : $aY = IL \cdot \sqrt{3}$: mais les points I et L étant également éloignés du point A , les trois points a, Y, A seront dans la même droite (13); d'où :

$$\begin{aligned} AY &= Aa - aY = \sqrt{2} - \sqrt{(6 - 3\sqrt{3})} \\ &= \sqrt{2} - (3\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}) = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = IL. \end{aligned}$$

L

La même démonstration s'applique à la ligne Ay ; ensuite le point y étant sur la ligne $\alpha\alpha$, c'est-à-dire, sur αA (13), on aura $Yy = 2AY$: or les points V, B, A, E, v sont dans la même droite (13). Si on suppose pour un moment que les points m, n soient dans la même droite, on aura :

$$Am = AV - Vm = 2 - \sqrt{3}.$$

En effet, si on compare les points C, c, V, B, A, E avec les points A, B, Q, P, p, q de la fig. 3, on aura dans cette fig. 83 : $VB = AE$ (14) : d'où $AV = 2$ et $Vm = \sqrt{3}$; on démontrera de même qu'on a $An = 2 - \sqrt{3}$; d'où on aura : $(Fm)^2 = (Am)^2 + (AF)^2$ (47. liv. 1)

$$= 7 - 4\sqrt{3} + 1 = 4(2 - \sqrt{3}) ;$$

d'où : $Fm = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 2AY$;

de plus on a, par la construction de la figure :

$$Fn = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} ;$$

donc le point m sera dans la droite VA : on démontrera la même chose pour le point n : donc, puisque $Am = 2 - \sqrt{3}$, on aura : $mn = 4 - 2\sqrt{3}$; puis les triangles BpD, vnD ayant les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $Dvn = DBp$ (8. liv. 1). Mais l'angle Dvn qui est le même que l'angle DvB , étant égal à l'angle DBV (5. liv. 1), on aura l'angle $DBp = DBv$: donc le point p est dans la droite AE ; on a ensuite $Dn = Dp$: on dé-

montre de même que $dn = dp$: donc comparant les points D, d, A, n, p, E de la fig. 83, avec les points A, B, Q, P, p, q de la fig. 3, on trouvera [fig. 83] :

$$pE = An = 2 - \sqrt{3} ; \text{d'où :}$$

$$pn = AE - 2An = 1 - 4 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3.$$

De plus, le triangle équilatéral PQR étant semblable au triangle équilatéral BDd , et par conséquent aussi le triangle ABD semblable au triangle APR (20. liv. 6), on aura :

$$AB : BD :: AP : PR ;$$

c'est-à-dire ,

$$1 : \sqrt{3} :: 4 - 2\sqrt{3} : PR ;$$

d'où on tire : $PR = 4\sqrt{3} - 6 = 2pn$.

Donc la ligne PR étant coupée par moitié au point p , le point p se trouvera également sur les deux circonférences des cercles décrits des centres P et R , et sera le point de contact (12. liv. 3) ; qu'on ajoute ensuite à la droite $AR = mn = 4 - 2\sqrt{3}$, le rayon du cercle décrit du centre R , ou bien la droite $Rr = np = 2\sqrt{3} - 3$, on aura :

$$Ar = 4 - 3 = 1 = AB.$$

Donc le point r sera également sur les deux circonférences ; et le cercle décrit du centre R touchera intérieurement le cercle donné (11. liv. 3) ; on démontrera la même chose pour les autres cercles ; donc, etc.

Ce problème se trouve élégamment résolu avec la règle et le compas, par Thomas Simpson, dans son ouvrage : *Select Exercises, etc. Geometrical Problems, problème 13* : on voit qu'on peut par notre construction résoudre ce problème avec la règle et le compas plus brièvement encore que ne le fait Simpson, en menant la droite Vav , et après y avoir pris à $AB = BV = Ev$, en faisant à $BD = Vm = Bp = vm$; puis en décrivant du centre A et du rayon mn le cercle PQR , et faisant tout le reste de la construction comme dans la solution précédente.

P R O B L È M E.

167. *Du centre A [fig. 83], décrire un cercle qui touche extérieurement les trois cercles inscrits par le problème précédent (166) à un cercle donné.*

Solution. Cherchez une troisième proportionnelle aux deux droites AB , Am [86]; avec cette ligne prise pour rayon et du centre A , soit décrit un cercle; ce sera le cercle cherché.

Démonstration. AB étant $= 1$, et $Am = 2 - \sqrt{3}$, on aura la troisième proportionnelle $= 7 - 4\sqrt{3}$. Si maintenant du rayon $Ar = 1$,

on soustrait le diamètre qr du cercle décrit du centre R , c'est-à-dire, si on soustrait $2np = 4\sqrt{3} - 6$, on aura précisément $7 - 4\sqrt{3}$: donc un cercle décrit du centre A et avec cette troisième proportionnelle pour rayon, sera tangent au point q à ce cercle inscrit (12. liv. 3), et aux deux autres cercles.

P R O B L È M E.

168. *Inscrire dans un cercle d'un rayon donné AB [fig. 84], quatre cercles qui lui soient tangens, et qui soient tangens entr'eux.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné, à $AB = BC = CD = DE$; à $BD = Ba = Ea$; à $Aa = BF = Bf$; à $AB = FN = FO$; et à $BD = NP = OP$; du centre A et du rayon aP , soit décrit le cercle $QRST$; puis prenant un point arbitraire Q sur la circonférence, soit fait à $BQ = FR = ES = fT$; enfin des centres Q, R, S, T , et du rayon aF , soient décrits quatre cercles : ils seront les cercles demandés.

Démonstration. Comme on a (27) :

$$BF = FE = Ef = fB,$$

on aura aussi (93) :

$$QR = RS = ST = TQ :$$

donc l'angle $T A Q$ sera droit ; donc :

$$(TQ)^2 = (AT)^2 + (AQ)^2 = 2(AT)^2 ;$$

puis ayant fait $AB = 1$, on aura aussi (165) :

$FP = 1$; d'où : $AP = 2$; on aura encore (27) :

$$Aa = \sqrt{2} ; \text{ d'où : } aP = 2 - \sqrt{2} ; aF = \sqrt{2} - 1 ;$$

d'où on tire :

$$2(AT)^2 = 2(aP)^2 = (TQ)^2 = 2(2 - \sqrt{2})^2 ;$$

et

$$TQ = (2 - \sqrt{2})\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1) = 2aF :$$

donc la distance des deux centres T et Q est égale à la somme des rayons des deux cercles décrits de ces points comme centres : donc ils sont tangens en p au milieu de TQ . On prouveroit la même chose pour deux autres quelconques. Soit ensuite r le point, où la ligne Ar prolongée coupe le cercle décrit du centre R , on aura :

$$Ar = AR + Rr = aP + aF = PF = 1 = AB :$$

donc le point r sera sur la circonférence du cercle donné ; d'où on voit que la ligne Ar passant par les deux centres A et R , sera perpendiculaire à la tangente qui les touche tous deux au point r : donc ils seront tangens entr'eux (13 et 16. *Liv.* 3) ; la même démonstration s'applique aux autres cercles.

P R O B L Ê M E.

169. *Du centre A (fig. 84), décrire un cercle qui touche les quatre que l'on vient d'inscrire (168) dans un cercle donné.*

Solution. Cherchez une troisième proportionnelle aux deux droites FP , Fa [86]; avec cette ligne prise pour rayon et du centre A , soit décrit un cercle, il sera le cercle cherché.

Démonstration. PF étant égal à 1, et $Fa = \sqrt{2} - 1$, on aura la troisième proportionnelle $= 3 - 2\sqrt{2}$; or soit q le point où le rayon Ar coupe le cercle décrit du centre R : qr en sera le diamètre $= 2aF = 2\sqrt{2} - 2$; soustrayant de $1 = Ar$ cette valeur, on aura: $Aq = 3 - 2\sqrt{2} =$ cette troisième proportionnelle: donc le point q sera dans les deux circonférences; mais il se trouve dans la droite AR ; donc la perpendiculaire à cette droite sera tangente en q , aux deux cercles, lesquels se toucheront au point q (13 et 16. liv. 3); on démontrera la même chose pour les autres cercles.

P R O B L È M E.

170. *Trouver [fig. 85] un arc de cercle dont le cosinus égale la corde.*

Solution. D'un rayon AB qu'on fait $= 1$, soit décrit l'arc $B C D E$, et soit fait à $AB = BC = CD = DE = DP = CP$; soit fait ensuite à $BD = Ba = Ea$, et à $Aa = BF$: du centre B , et du rayon PF , soit décrit un arc qui coupe l'arc BC en Q ; l'arc BQ sera celui que l'on cherche.

Démonstration. Les points A, F, a, P sont dans la même droite (13); puis les points B, A, D, P étant tous éloignés du point C de la distance CB , sont dans la circonférence d'un cercle qu'on décrirait du centre C et du rayon CB : comme on a de plus à $CB = BA = AD = DP$, BCP sera le diamètre de ce cercle (15. liv. 6), et on aura $PA = \sqrt{3}$ [2]; d'où :

$$PF = \sqrt{3} - 1 = BQ:$$

si maintenant on abaisse sur AB la perpendiculaire QR , on aura (13. liv. 2) :

$$(BQ)^2 = (AB)^2 + (AQ)^2 - 2AB.AR;$$

c'est-à-dire :

$$(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3} = 2 - 2AR;$$

$$\text{d'où : } AR = \sqrt{3} - 1 = BQ;$$

ainsi qu'on s'étoit proposé de le faire. Ces derniers problèmes sont d'Ozanam, qui les a résolus avec la règle et le compas.

P R O B L Ê M E.

171. *Etant donnés les axes BE , MN d'une hélice, décrire autour d'eux un ovale composé de cercles qui soient tangens entr'eux.*

Solution. Du centre A où les axes se coupent et du rayon AB qui est la moitié du plus grand axe, soit décrite la demi-circonférence BDE , et soit fait à $EA = ED$; du centre B et du rayon BD , soit coupé l'axe BE en d : du centre A et du rayon AM , soit coupé le demi-axe AE en m ; du même centre A et du rayon Ad , soit décrit l'arc de , et soit fait à $Em = de$; des centres d et e et d'un rayon pris arbitrairement, soit coupé l'arc BDE en δ et ϵ ; du centre A et du rayon $\delta\epsilon$, soit coupé l'axe BE en P et Q ; des centres P et Q et du rayon $PB = QE$, soient décrits les arcs FBf , GEg , et soit fait à $PB = BF = Bf = EG = Eg$; soit fait ensuite à $PQ = PR = Pr = QR = Qr$; puis du centre R et du rayon RF , soit décrit l'arc FG qui passera par M : enfin

du centre r et du rayon R $F = rf$, soit décrit l'arc fg qui passera par N , et toute la construction sera faite.

Démonstration. Les triangles BFP , PQR étant équilatéraux, les angles BPF , QPR seront égaux (8. liv. 1); et les deux lignes FP , PR formeront une seule droite, parce que les deux angles $FPA + APR$ sont égaux aux deux angles $FPA + APN$ (13 et 14. liv. 1): donc les deux arcs BF , FG seront tangens l'un à l'autre en F (13. liv. 3): la même démonstration s'applique aux points de contact f , G , g .

Soit fait ensuite pour abréger $AB = 1$, on aura: $BD = \sqrt{3} [2] = Bd$; d'où:

$$Ad = \sqrt{3} - 1;$$

et comme on a [93]:

$$Ad : de :: A^{\delta} : \delta^{\epsilon}.$$

On aura encore en multipliant les deux termes du premier rapport par $\sqrt{3} + 1$ (4. liv. 5):

$$Ad (\sqrt{3} + 1) : de (\sqrt{3} + 1) :: A^{\delta} : \delta^{\epsilon};$$

puis substituant les valeurs numériques de Ad et A^{δ} , et exécutant la multiplication dans le premier terme, on aura:

$$2 : de (\sqrt{3} + 1) :: 1 : \delta^{\epsilon};$$

d'où:

$$2 \delta^{\epsilon} = 2AP = de (\sqrt{3} + 1) = PQ = PR.$$

De plus, $PRQr$ étant un rhombe, on

aura (139) :

$$(Rr)^2 = 4(PR)^2 - (PQ)^2 = 3(PR)^2;$$

d'où :

$$Rr = PR \cdot \sqrt{3} = de(3 + \sqrt{3});$$

$$\text{et } RA = \frac{1}{2} de(3 + \sqrt{3}).$$

On a ensuite :

$$AM = Am = AE - Em = AE - de = 1 - de;$$

$$\text{d'où : } RA + AM = 1 + \frac{1}{2} de(1 + \sqrt{3});$$

$$\text{ou bien : } RM = 1 + \frac{1}{2} PR;$$

et comme on a :

$$PF = PB = 1 - AP = 1 - \frac{1}{2} PR,$$

on aura :

$$PF + PR = 1 + \frac{1}{2} PR, \text{ c'est-à-dire, } FR = RM.$$

Donc l'arc FG passera par M : on feroit voir de même que l'arc fg passe par n : donc, etc.

PROBLÈME.

172. *Décrire [fig. 87] une spirale BLEMFNGPH, composée de plusieurs arcs de cercle.*

Solution. Soit $BE = BF$ la distance qu'on veut donner aux révolutions de cette spirale ; après avoir divisé BE en deux parties égales au point A (66) ; de ce point comme centre et d'un rayon AB , soit décrite la

demi-circonférence BLE (64); du centre B et du rayon BE , soit décrite la demi-circonférence EMF ; soit encore décrite du centre A , et avec le rayon AF la demi-circonférence $FN G$; soit encore décrite du centre B , et avec le rayon BG la demi-circonférence GPH , on pourroit ainsi continuer cette spirale à l'infini.

On pourra de la même manière doubler cette spirale, en décrivant des centres A et B alternativement les demi-circonférences ble , emf , $fn g$, gph , etc.; après avoir pris le point b à une distance arbitraire de B sur la ligne AB (73).

Ce problème n'a pas besoin de démonstration.

P R O B L Ê M E.

173. Trouver $\sqrt{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{3}$.

Solution. Avec le rayon $AB=1$, et du centre A , décrivez (*fig. 88*) la demi-circonférence $B C D E$, en faisant à $AB=BC=CD=DE$; puis faites à $BD=Ba=Ea$; à $Aa=BP$; à $AB=EP$; marquez sur la demi-circonférence les points H, I, K , en faisant à la même ligne $AB=aH=HI=IK$.

Des centres E et H , et du rayon AP ,

soient décrits deux arcs qui se coupent en L et M ; on aura : $LM = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Des centres a et K , avec le rayon AB , soient décrits deux arcs qui se coupent en Q et R ; on aura $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$.

Démonstration. $ELHM$ étant un rhombe, on aura (139) :

$$(LM)^2 = 4(LH)^2 - (HE)^2 = 4(AP)^2 - (AE)^2.$$

Mais,

$$(AP)^2 = \frac{1}{2}[104], (HE)^2 = 2 - \sqrt{2}[30 \text{ et } 36] :$$

donc $(LM)^2 = \sqrt{2}$; d'où on tire : $LM = \sqrt{\sqrt{2}}$.

$aQKR$ étant aussi un rhombe, on aura également :

$$(QR)^2 = 4(aQ)^2 - (aK)^2.$$

Mais $(aQ)^2 = (AB)^2 = 1$; $(aK)^2 = 4 - \sqrt{3}[160]$:

donc $(QR)^2 = \sqrt{3}$; d'où on tire : $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$.

174. On pourroit, par de semblables artifices, obtenir les racines quatrièmes des autres nombres entiers, sans employer la méthode de trouver les moyennes proportionnelles (99). Pour avoir $\sqrt{\sqrt{2}}$ par cette méthode, on auroit eu à trouver une moyenne proportionnelle entre 1 et $\sqrt{2}$, ou entre $\frac{1}{2}$ et $2\sqrt{2}$, ou entre deux autres quantités qui, multipliées l'une par l'autre, fussent égales à $\sqrt{2}$. Mais cette marche seroit beaucoup plus compliquée.

En cultivant cette géométrie du compas,

on en retirera de très-grands avantages. J'ai sur cette matière d'autres recherches toutes prêtes qui pourront trouver place dans un ouvrage plus étendu que celui-ci. Voici une application du problème précédent relative à la pyramide tétraèdre régulière.

P R O B L È M E .

175. *Etant donné le côté AB d'une pyramide tétraèdre régulière SABC [fig. 89], trouver, 1.^o sa hauteur; 2.^o le côté d'un quarré qui lui soit égal en surface; 3.^o le côté du quarré, sur lequel il faudroit construire une pyramide qui eût pour hauteur le côté de celle proposée, pour qu'elle lui fût égale en solidité; 4.^o le côté du quarré sur lequel il faudroit construire une pyramide de hauteur égale à celle de la pyramide proposée, pour qu'elle lui fût aussi égale en solidité; 5.^o le rayon d'une sphère circonscrite.*

Solution. La figure 88 étant construite avec

le rayon AB , comme dans le problème 173, du centre B et du rayon Ba , soit décrit l'arc aN , et soit fait à $Aa = EN$; des centres A et E , avec le rayon AN , soient décrits deux arcs qui se coupent en n ; du même rayon nA , coupez la demi-circonférence $BCDE$ au point S . Enfin divisez en deux parties égales LM au point m (66), ainsi que QR en q . 1.^o BS sera la hauteur de la pyramide; 2.^o QR sera le côté du quarré qui lui est égal en surface; 3.^o Mm sera le côté du quarré qui forme la base d'une pyramide de hauteur égale au côté de celle proposée, et qui lui est égale en solidité; 4.^o Qq sera le côté du quarré qui sert de base à une pyramide égale en hauteur et en solidité à celle proposée; 5.^o AN est le diamètre d'une sphère circonscrite.

Démonstration. Si du sommet S de la pyramide on abaisse une perpendiculaire Sm sur le côté AB , à cause du triangle équilatéral SAB , elle coupera par moitié au point m la droite AB (12. liv. 1). Donc si, sur la base ABC , on élève au point m de la droite AB la perpendiculaire mT , elle passera par C (11. liv. 1), et contiendra le point T où tombe la perpendiculaire abaissée du sommet S sur la base (11. liv. 11).

On démontre de même que le point T est dans la droite Bn , qui divise en deux parties égales le côté AC . Soit menée la droite mn , elle sera parallèle à BC (2. liv. 6), et le triangle Amn sera équiangle au triangle ABC (27. liv. 1), et BC sera double de mn (4. liv. 6); puis les triangles BCT, mnT auront les angles égaux chacun à chacun, et on aura (4. liv. 6) :

$$BC : mn :: CT : mT.$$

Donc CT est double de mT ; d'où $mT = \frac{1}{2} Cm$; puis faisant $AB = 1$, on a $Cm = Sm = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ [104] : donc $Tm = \frac{1}{4} \sqrt{3}$. De plus, comme on a :

$(Sm)^2 = (mT)^2 + (ST)^2$ [47. liv. 1];
c'est-à-dire, $\frac{1}{4} = \frac{1}{12} + (ST)^2$;
on aura : $(ST)^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$; d'où $ST = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
On a ensuite (fig. 88) :

$AN = \frac{1}{2} \sqrt{6}$ [104] $= \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = An$;
on a aussi (fig. 89) :

$$An : AS :: AS : SB$$
 [86];

c'est-à-dire, $\sqrt{\frac{3}{2}} : 1 :: 1 : SB$;

d'où on a : $SB = \sqrt{\frac{2}{3}} = ST$; ce qu'il falloit 1.^o démontrer.

Ensuite la surface de la pyramide tétraèdre est égale au quadruple de la surface de la base ABC [fig. 89]; laquelle étant égale à $\frac{1}{2} AB \cdot Cm = \frac{1}{4} \sqrt{3}$ [41. liv. 1], sera la
surface

surface de la pyramide $=\sqrt{3}$; d'où le côté du quarré qui lui est égal $=\sqrt{\sqrt{3}}$. Mais on a (*fig.* 88) : $QR=\sqrt{\sqrt{3}}$ [173] : donc QR est le côté du quarré cherché. C. Q. F. 2°. D.

Dans les pyramides égales, les bases étant en raison inverse des hauteurs (9. *liv.* 12), on aura :

$1 : \sqrt{\frac{2}{3}} :: \frac{1}{4} \sqrt{3} :$ à la base de la pyramide qui a pour hauteur $AB=1$; d'où la surface de cette base $=\frac{1}{4} \sqrt{2}$, et le côté du quarré de cette surface $=\frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{2}}=Mm$ [173]. C. Q. F. 3°. D.

Les pyramides de hauteur égale étant entr'elles comme leurs bases, le quarré, qui est égal au triangle $ABC=\frac{1}{4} \sqrt{3}$, aura pour côté $\frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{3}}=Qq$ [173]. C. Q. F. 4°. D.

Enfin le quarré du diamètre de la sphère circonscrite à la pyramide tétraèdre vaut une fois et demie le quarré du côté de la pyramide (13. *liv.* 13), c'est-à-dire le diamètre $=\sqrt{\frac{3}{2}}$: il est donc égal à AN . C. Q. F. 5°. D.

P R O B L È M E.

176. *Etant donnée la hauteur ST [fig. 89 et 88] d'une pyramide tétraèdre régulière, trouver son côté AB.*

Solution. Avec un rayon AB (*fig.* 88)

M

égal à ST (*fig. 89*), soit décrit le demi-cercle $B C D E$ en faisant à $AB = BC = CD = DE$; du centre B et du rayon BD , soit décrit l'arc $D N a$; du centre E et avec le même rayon, soit coupé cet arc au point a ; du même centre et avec le même rayon $A a$, soit coupé le même arc en N ; AN sera le côté cherché égal au côté AB de la figure 89.

Démonstration. On a dans la figure 88 :

$$AB : AN :: 1 : \sqrt{\frac{2}{3}} [175];$$

et comme on a $1 : \sqrt{\frac{2}{3}} :: \sqrt{\frac{2}{3}} : 1$, ainsi que cela se démontre en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens, on aura :

$$AB : AN :: \sqrt{\frac{2}{3}} : 1;$$

c'est-à-dire, que AB est à AN dans le rapport de la hauteur de la pyramide tétraèdre à son côté (175). Donc, etc.

P R O B L È M E.

177. *Diviser [fig. 90] la ligne $AB=1$, en cinq parties égales, lors même qu'on ne peut pas avoir une ligne quintuple de AB , comme au n.º 69.*

Solution. Après avoir, du centre A et du rayon AB , décrit le cercle BDp , et avoir

fait dans sa circonférence à $AB=BC=CD=DE$, et à $BD=Ba=B_{\alpha}=Ea=E_{\alpha}$, soit du centre α et du rayon AB , coupée la circonférence en g ; de ce point g comme centre et du même rayon, soit décrit l'arc An_{α} ; maintenant du centre α et du rayon BE , soit coupé cet arc en n ; du centre B et du rayon αn , soit coupée la circonférence en P et p ; des centres p et P , et du même rayon pB , soient décrits deux arcs qui se coupent en Q ; AQ sera un cinquième de AB , et sera placée sur sa direction.

Démonstration. Si on prend un point u sur la direction de AE , et qu'on aie $Au=Aa$, on aura, à cause des angles droits αAu , αAa :

$$(au)^2=2(Aa)^2=2(\alpha A)^2=(\alpha u)^2=4=(BE)^2;$$

$$\text{d'où : } au=\alpha u=BE=\alpha n;$$

puis les angles égaux gAB , gA_{α} valant chacun la moitié d'un angle droit (30), les angles gAa , gAu égaux entr'eux, vaudront chacun trois fois la moitié d'un angle droit. D'où les deux triangles gAa , gAu ayant un angle égal compris entre côtés égaux, le troisième côté ga sera aussi égal au troisième côté gu (4. liv. 1) : donc un cercle décrit du centre g et du rayon ga ,

passera par le point u , et sera concentrique au cercle $A n^{\alpha}$.

On a ensuite $g a = \sqrt{5}$ [185]; et comme $a n = u^{\alpha}$, on a [93] :

$$g a : g A :: a u : n^{\alpha};$$

c'est-à-dire, $\sqrt{5} : 1 :: 2 : n^{\alpha}$:

donc on aura : $n^{\alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}$; d'où aussi chaque côté du rhombe $P B p Q = n^{\alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}$:

donc si on compare les points P, B, p, Q, A de la fig. 90 avec les points A, p, B, P, Q de la fig. 3, on aura pour la fig. 90 :

$BQ \cdot BA = (BP)^2$ [19], c'est à-dire, $BQ = \frac{4}{5}$; d'où AQ qui est dans la même droite [13] $= \frac{1}{5}$.

178. Ce problème, qui a une solution assez simple, devoit trouver place ici à cause de la division décimale qu'on exécute en divisant en deux, puis en cinq ou réciproquement. Le problème suivant est aussi de quelque utilité.

P R O B L È M E.

179. *Former [fig. 90] un triangle rectangle dont les côtés soient en proportion arithmétique.*

Solution. Après avoir fait la construction de la solution précédente (177), du centre E

et du rayon $E Q$, soit coupée la circonférence en N ; le triangle BNE sera le triangle cherché.

Démonstration. Ce triangle sera rectangle (31. liv. 3); puis faisant $AB = 1$, on aura :

$$EQ = EA + AQ = \frac{6}{5} = EN;$$

de plus on a (47. liv. 1) :

$$(BE)^2 = (EN)^2 + (BN)^2, \text{ c. à d. } 4 = \frac{36}{5} + (BN)^2;$$

on aura donc : $(BN)^2 = \frac{64}{5}$; d'où $BN = \frac{8}{5}$;

d'où on voit que les côtés $EN = \frac{6}{5}$, $BN = \frac{8}{5}$,

$BE = \frac{10}{5}$ seront en proportion arithmétique.

PROBLÈME.

180. *Former (fig. 91) un triangle rectangle dont les côtés soient en proportion géométrique.*

Solution. Du centre A avec un rayon AB , soit décrit un cercle BDd , et soit fait dans sa circonférence à $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$; soit fait ensuite à $BD = Ba = Ea$ et à $Aa = Db = db = C\beta = c\beta$; maintenant du centre E et du rayon $b\beta$, soit coupée la circonférence du cercle en N ; le triangle BNE sera le triangle cherché.

Démonstration. La ligne AB est divisée en b en moyenne et extrême raison (46): donc si on fait $AB = 1$, $Ab = x$, on aura :

$$Bb = 1 - x, \quad \text{et } x^2 = 1 - x;$$

et résolvant cette dernière équation,

$$x = A b = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1);$$

d'où résulte :

$$b \beta = 2 A b = \sqrt{5} - 1 = E N;$$

on a ensuite (31. liv. 3) (47. liv. 1) :

$$(B E)^2 = (E N)^2 + (B N)^2;$$

c'est-à-dire,

$$4 = 6 - 2\sqrt{5} + (B N)^2;$$

d'où on tire :

$$(B N)^2 = 2(\sqrt{5} - 1) = B E . N E;$$

donc on a (17. liv. 6) :

$$B E : B N :: B N : N E;$$

donc, etc.

181. *Lemme.* Si on fait les côtés des cinq polyèdres réguliers = 1, on aura le rayon d'une sphère

$$\text{circonscrite} \left\{ \begin{array}{l} \text{au tétraèdre} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}, \\ \text{au cube} = \frac{1}{2} \sqrt{3}, \\ \text{à l'octaèdre} = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \\ \text{au dodécaèdre} = \frac{1}{4} \sqrt{3} . (\sqrt{5} + 1) \\ \text{à l'icosaèdre} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)}. \end{array} \right.$$

Démonstration. Le quarré du diamètre de la sphère circonscrite à la pyramide comprise entre quatre triangles équilatéraux vaut (13. liv. 13), une fois et demi le quarré du côté de la pyramide, c'est-à-dire, en faisant le côté

$= 1$, le diamètre est égal à $\sqrt{\frac{3}{2}}$; d'où le rayon $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Le quarré du diamètre de la sphère circonscrite au cube, vaut (15. *liv.* 13) trois fois le quarré du côté de la pyramide, c'est-à-dire, le diamètre $= \sqrt{3}$; d'où le rayon $= \frac{1}{2} \sqrt{3}$.

Le quarré du diamètre de la sphère circonscrite à l'octaèdre (corps régulier terminé par huit faces qui sont toutes des triangles équilatéraux), est (14. *liv.* 13), double du quarré du côté d'un de ces triangles, c'est-à-dire, le diamètre $= \sqrt{2}$; d'où le rayon $= \frac{1}{2} \sqrt{2}$.

La sphère circonscrite au dodécaèdre (corps régulier, terminé par douze faces qui sont toutes des pentagones réguliers), est aussi circonscrite (17. *liv.* 13) à un cube qui a pour côté une diagonale de ces pentagones. Mais si on fait [*fig.* 64] le côté $AB = 1$, la diagonale BN du pentagone $ABLMN$ $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$; en effet, on a (137) : $BN = bE = Ab + AE = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) + 1$ [180] $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$: donc BN ou la diagonale d'un pentagone qui a le côté $= 1$, est égale à $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Si sur cette ligne on forme un cube, on aura le quarré du diamètre de la sphère qui lui sera circonscrite $= 3(BN)^2$, et le diamètre $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \cdot \sqrt{3}$: donc le rayon de la sphère qui comprend le dodécaèdre $= \frac{1}{4} \sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 1)$.

Si AB est le diamètre de la sphère qui comprend l'icosaèdre, [fig. 92], et qu'après avoir pris sur ce diamètre $AC = 4 CB$, et élevé la perpendiculaire CD qui rencontre en D la demi-circonférence ADB , on décrive avec le rayon DB un cercle, et dans ce cercle un pentagone régulier, le côté de ce pentagone sera [16. liv. 13] le côté de l'icosaèdre (corps régulier terminé par vingt faces qui toutes sont des triangles équilatéraux); or le côté du pentagone est au rayon du cercle circonscrit comme Bb est à BA [fig. 12] (40); mais faisant $AB = 1$, on a :

$$Ab = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1);$$

$$(Ab)^2 = \frac{1}{4} (6 - 2\sqrt{5}) = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5});$$

$$(Bb)^2 = (AB)^2 + (Ab)^2 [47. liv. 1] = \frac{5 + \sqrt{5}}{2};$$

$$\text{d'où on aura : } Bb : AB :: \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)} : 1;$$

$$\text{mais on a : } \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)} : 1 :: 1 : \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10}\right)}.$$

Donc supposant le côté de l'icosaèdre = 1, on aura :

$$BD [fig. 92] = \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10}\right)}.$$

On a ensuite :

$$(AB)^2 = 5 (BD)^2 [16. liv. 13] = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} :$$

$$\text{donc } AB = \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)}, \text{ et le rayon } = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)}.$$

PROBLÈME.

182. *Etant donné le côté AB des cinq corps réguliers (fig. 93), trouver le rayon des différentes sphères qu'ils comprennent.*

Solution. Du centre A avec le rayon AB , soit décrit le cercle BDd , et soit fait dans sa circonférence à $AB = BC = CD = DE = Ed$; soit fait ensuite à $BD = Ba = B\alpha = E\alpha = Ea$; du centre α et avec le rayon $\alpha\alpha$, soit décrit l'arc αP ; du même centre α et avec le rayon αB , soit décrit l'arc $Bpq s$; du même centre α et avec le rayon AB , soit décrit l'arc grt ; du même centre α et avec le rayon BE , soit décrit l'arc $MQRST$; des centres D et d , avec le rayon $A\alpha$, soient décrits deux arcs qui se coupent en b ; du centre E et avec le rayon Ab , soit coupée la circonférence en L ; soit fait à $AB = \alpha P = MQ$; à $A\alpha = MR$; à $E b = MS$; et à $BL = MT$; soit fait ensuite à $\alpha B = Pp$; à $MB = Qq = Ss$; et à $Mg = Rr = Tt$;

Bp Bq gr Bs gt	$\left\{ \begin{array}{l} \text{sera le rayon} \\ \text{de la sphère} \\ \text{qui comprend} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{le tétraèdre,} \\ \text{le cube,} \\ \text{l'octaèdre,} \\ \text{le dodécaèdre,} \\ \text{l'isocaèdre.} \end{array} \right.$
--------------------------------------	---	--

Démonstration. En faisant $AB=1$, on a :

$$\alpha a = 2\sqrt{2} [100], \alpha B = \sqrt{3}.$$

on a ensuite : $\alpha a : \alpha B :: \alpha P : Bp [93]$;

c'est-à-dire, $2\sqrt{2} : \sqrt{3} :: 1 : Bp$;

on aura donc : $Bp = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$; d'où, etc. [181].

On a aussi [93] : $\alpha M : \alpha B :: MQ : Bq$;

c'est-à-dire, $2 : \sqrt{3} :: 1 : Bq$; d'où $Bq = \frac{1}{2} \sqrt{3}$.

On a de même : $\alpha M : \alpha g :: MR : gr$;

c'est-à-dire,

$$2 : 1 :: \sqrt{2} : gr; \text{ d'où } gr = \frac{1}{2} \sqrt{2};$$

on a également $\alpha M : \alpha B :: MS : Bs$.

Mais $MS = bE = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ [181] :

donc $2 : \sqrt{3} :: \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) : Bs$;

d'où $Bs = \frac{1}{4} \sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 1)$.

On a enfin $\alpha M : \alpha g :: MT : gt$; mais $MT = BL$.

De plus, $(BL)^2 = (BE)^2 - (EL)^2$ [31. liv. 3. 47. liv. 1];

c'est-à-dire, $(BL)^2 = (BE)^2 - (Ab)^2$

$$= 4 - \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) [181] = \frac{5 + \sqrt{5}}{2};$$

d'où $BL = MT = \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)}$;

et par conséquent $2 : 1 :: \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)} : gt$;

d'où $gt = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)}$.

Donc les distances Bp , Bq , gr , Bs , gt seront respectivement les rayons des sphères qui comprennent les cinq corps réguliers, savoir : la pyramide, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

PROBLÈME.

183. *Etant donné (fig. 94) le rayon AB de la sphère qui comprend les cinq corps réguliers, trouver leurs cotés.*

Solution. Du centre A avec le rayon AB , soit décrit le plus grand cercle de la sphère BDd , et soit fait dans sa circonférence à $AB = BC = CD = DE = Ed$; puis à $BD = Ba = Ea$, et à $Aa = Db = db$; soit fait ensuite dans la circonférence à $AB = aH$, et à $Aa = EF = Hh$; du centre a et avec le rayon aE , soit décrit l'arc $ESQP$; du même centre a et avec le rayon ah , soit décrit l'arc hT ; soit fait à $Aa = EP$; à $AB = EQ$; à $Ab = ES$; à $bF = hT$. Puis, soit fait à $EL = Pp = Qq = Ss$, et à $hL = Tt$:

Lp sera le côté du tétraèdre,

Lq du cube,

Aa de l'octaèdre,

Ls du dodécaèdre,

Lt de l'icosaèdre.

Démonstration. On a l'arc Eh égal à un huitième de la circonférence (30); d'où $ah = \sqrt{5}$ [185]; et comme l'angle droit bAF est le même que BAF , parce que le point b

est sur la ligne AE [13. 27], bF sera le côté du pentagone (40), et Ab le côté du décagone inscrit au cercle BDd [41]; faisant donc $AB=1$, on aura : $Ab=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ [180]; et $(bB)^2=(AF)^2+(Ab)^2=1+\frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$; d'où $bF=hT=\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$.

On aura ensuite : $aE:aL::EP:Lp$ [93], c'est-à-dire , $\sqrt{3}:2::\sqrt{2}:Lp$:

donc on aura : $Lp=2\sqrt{\frac{2}{3}}$. Or le rayon de la sphère est au côté du tétraèdre qu'elle contient comme $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}:1$ [181] :: $1:2\sqrt{\frac{2}{3}}$: donc faisant le rayon AB de la sphère $=1$, Lp sera le côté du tétraèdre qui y est contenu.

On aura aussi (93) : $aE:aL::EQ:Lq$, c'est-à-dire ,

$$\sqrt{3}:2::1:Lq; \text{ d'où } Lq=2\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Or le rapport du rayon de la sphère au côté du cube qui y est contenu , est :

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}:1 \text{ [181] } :: 1:2\sqrt{\frac{1}{3}}; \text{ donc , etc.}$$

On aura de même $Aa=\sqrt{2}$ pour côté de l'octaèdre ; car le rapport du rayon de la sphère au côté de l'octaèdre qui y est contenu est : $\frac{1}{2}\sqrt{2}:1$ [181] :: $1:\sqrt{2}$, donc , etc.

On aura également : $aE:aL::ES:Ls$, c'est-à-dire , $\sqrt{3}:2::\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1):Ls$;

d'où $Ls = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}$. Or le rapport du rayon de la sphère au côté du dodécaèdre qui y est contenu, est :

$$\frac{1}{4} \sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 1) : 1 [181] :: 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}} ;$$

donc, etc. Enfin on aura :

$$ah : aL :: hT : Lt [93],$$

c'est-à-dire, $\sqrt{5} : 2 :: \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} : Lt :$

d'où : $Lt = 2 \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}$. Or le rapport du rayon de la sphère au côté de l'icosaèdre qui y est contenu, est :

$$\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} : 1 [181] :: 1 : 2 \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}.$$

Donc, etc.

P R O B L È M E.

184. *Etant donné un point B sur la circonférence d'un cercle donné [fig. 95], trouver deux autres points L et M, tels que le triangle BLM soit équilatéral et touche le cercle par le côté LM au point E qui en est le milieu.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné à son rayon $AB = BC = CD = DE = Ed$; puis, soit fait à $BD = Ba = Ea :$

du centre a , et avec le rayon aA , soit décrit un arc qui passe par α ; du centre E et avec le rayon EA , soit décrit un arc qui coupe le précédent en α ; du centre α , avec le même rayon αE , soit coupée la circonférence en P . Puis, du centre E et du rayon EP , soit décrit un arc qui passe par L et M ; des centres D et d avec le rayon αP , soient décrits deux arcs qui coupent le précédent en L et M ; les points L et M seront les deux points cherchés.

Démonstration. Si on compare les points a , A , E , α , P de la fig. 95, avec les points Q , A , p , B , P de la fig. 3, de l'équation :

$(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - pP \cdot pQ$
qui appartient à la fig. 3, on tirera pour la fig. 95 celle-ci :

$(Aa)^2 = (AE)^2 + (Ea)^2 - EP \cdot Ea$;
et substituant les valeurs numériques [27] :

$$2 = 1 + 3 - EP \cdot \sqrt{3},$$

d'où : $2 = EP \cdot \sqrt{3}$ et $EP = \frac{2}{\sqrt{3}}$;

et comme les trois points E , P , a sont dans la même droite [13], on aura :

$$Pa = Ea - EP = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Si on suppose menée la ligne BE qui coupe en R la ligne Dd , on aura [104] :

$$BR = \frac{2}{\sqrt{3}}; RD = \frac{1}{2} \sqrt{3}; BE = 2;$$

d'où la quatrième proportionnelle aux trois lignes BR , RD , BE sera égale à $\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{3} = EM$:

on aura aussi [104] : $RE = \frac{1}{2}$, $BD = \sqrt{3}$ [2] ; d'où la quatrième proportionnelle aux trois lignes BR , BD , RE sera égale à $\frac{1}{2} \sqrt{3} = DM$: donc les lignes EM , DM seront de la longueur nécessaire pour que le triangle BEM soit semblable au triangle BRD (2. liv. 6) : donc ils seront semblables ; car le point M ne peut être placé dans un autre endroit (8. liv. 1). On prouvera de la même manière que le triangle BRd est semblable au triangle BEL ; d'où on voit que le triangle BDd est semblable au triangle BML (20. liv. 6) : donc aussi ce dernier est équilatéral. De plus, les angles BEM , BEL égaux aux angles BRD , BRd sont droits, et les lignes EN , EL sont égales : donc BLM est le triangle cherché.

P R O B L È M E.

185. *Dans un cercle dont le rayon AB soit donné [fig. 96], inscrire cinq quarrés égaux, dont l'un soit concentrique au cercle et les autres le touchent, chacun ayant un côté commun avec le quarré du milieu.*

Solution. Soient faites égales au rayon AB les cordes BC , CD , DE . Soit fait à $BD =$

$Ba = Ea$; faites encore égales à Aa les cordes BF, Bf : du centre a , avec le rayon AB , coupez le cercle en G et faites la corde $Gg = Aa$; du centre g avec le rayon ga , décrivez un arc aP et faites sa corde $aP = aA$; du même centre g et avec le rayon gA , décrivez un arc Ap sur la direction de l'arc aP ; faites à $aA = Pp$; faites maintenant égales à Ap les cordes Bq, fn, Em, Fl ; avec le même rayon Ap et des centres B, q, f, n, E, m, F, l , décrivez des arcs qui se coupent dans le cercle en L, Q, N, M ; $LMNQ$ sera le quarré central, et $BLQq, fQNn, ENMm, FMLl$ seront les autres quarrés cherchés.

Démonstration. Si on compare les points a, A, G, B, g de cette figure avec les points Q, p, A, R, S de la fig. 4, on aura (21) pour la fig. 87 l'équation :

$$(ag)^2 = (aB)^2 + Gg \cdot Aa,$$

c'est-à-dire, en faisant le rayon $AB = 1$,

$$(ag)^2 = 3 + 2 = 5 [27]; \text{ d'où } ag = \sqrt{5}.$$

De plus, on a $aP = aA = \sqrt{2}$.

Or : $ga : aP :: gA : Ap$ [93],

c'est-à-dire, $\sqrt{5} : \sqrt{2} :: 1 : Ap$;

d'où $Ap = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = EM$;

et comme $BCDE$ est une demi-circonférence [64], BmE sera un angle droit (31 liv. 3);

d'où :

d'où :

$$(B E)^2 = (B m)^2 + (m E)^2; \text{ c. à. d. } 4 = (B m)^2 + \frac{2}{5};$$

$$\text{d'où } (B m)^2 = 9 \cdot \frac{2}{5}, \text{ et } B m = 3 \sqrt{\frac{2}{5}} = 3 m E.$$

On trouvera la même valeur pour $q E$, et on démontrera que tous les autres angles du quadrilatère $B m E q$ qui sont inscrits et appuyés sur un diamètre sont droits : donc ce quadrilatère est un parallélogramme rectangle. On démontre de même que $F l f n$ est un parallélogramme rectangle.

Si on fait la corde $E m = k$, $m F$ sera la corde du complément de l'angle droit $= h$ [159], et on aura $h^2 = 2 - 2k \sqrt{1 - \frac{1}{4}k^2}$; d'où, à cause de $k^2 = \frac{2}{5}$, on aura :

$$h^2 = 2 = 2k \sqrt{\frac{2}{10}} = 2 - 2 \sqrt{\frac{2}{5}} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5} = 2k^2,$$

$$\text{c'est-à-dire, } (F m)^2 = (F M)^2 + (M m)^2;$$

$$\text{d'où l'angle } F M m \text{ sera droit (48. liv. 1),}$$

$$\text{ainsi que les autres angles } B L l, f Q q, E N n.$$

Puis, si on appelle x la distance du point m à celui où tombe du point F la perpendiculaire sur $B m$, on aura (13. liv. 2) :

$$(B F)^2 = (F m)^2 + (B m)^2 - 2 B m . x,$$

$$\text{c'est-à-dire, } 2 = \frac{4}{5} + \frac{18}{5} - 6x \sqrt{\frac{2}{5}};$$

$$\text{d'où } x \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}, \text{ et divisant par } \sqrt{\frac{2}{5}},$$

$$x = \sqrt{\frac{2}{5}} = m M.$$

Ensuite, si on nomme y la perpendiculaire qui tombe du point F sur $B m$, on aura :

$$y^2 = (F m)^2 - x^2 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5};$$

N

d'où on tire : $y = \sqrt{\frac{2}{5}} = FM$.

On démontre par-là que les points M et L sont sur la ligne Bm ; et comme on a :

$$Bm = 3 . Em = Mm + BL + Em ;$$

on aura donc aussi : $LM = Em$.

De plus, on démontre que les autres côtés MN , NQ , LQ ont la même valeur. De tout ce qui précède, il résulte que les angles extérieurs au quadrilatère $LMNQ$ qui ont leurs sommets aux points L , M , N , Q sont droits : donc les angles intérieurs le seront aussi : donc on aura les cinq quarrés demandés.

P R O B L È M E.

186. *Etant donnés les cinq points A, B, C, D, E , sommets des angles d'un pentagone régulier [fig. 97], trouver les cinq points a, b, c, d, e où se coupent les diagonales de ce pentagone.*

Solution. Des centres A, B, C, D, E avec le côté AB du pentagone pris pour rayon, soient décrits des arcs qui se coupent en a, b, c, d, e ; ces points seront ceux d'intersection des diagonales.

Démonstration. Si on suppose les diagonales menées et les côtés du pentagone $ABCDE$ tracés, on aura l'angle $BAC = BDA$ (29. liv. 3)

$= CAD$: d'où $Ab = bD$ (6. liv. 1). On aura ensuite $BbA = bDA + bAD$ (32. liv. 1) $= BAb + bAD = BAD = ABD$ (5. liv. 1); d'où le triangle ABb sera isoscèle (6. liv. 1), c'est-à-dire, on aura $AB = Ab = bD$; donc, etc.

P R O B L È M E.

187. *Dans un cercle d'un rayon AB donné [fig. 98], inscrire six pentagones réguliers.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné, à $AB = BC = CD = DE = Ed$; à $BD = Ba = Ea$; et à $Aa = BF = Db = db$; soit aussi fait dans la même circonférence à $bF = BP = PQ = QR = RS$; avec le même rayon bF et des centres B, P, Q, R, S , soient décrits des arcs qui se coupent en β, p, q, r, s . Maintenant des centres β, P avec le rayon βp , soient décrits deux arcs qui se coupent en c ; avec le même rayon et des centres P, p , soient décrits deux arcs qui se coupent en d ; on aura deux des pentagones cherchés, savoir : $\beta p q r s$ qui a son centre en A , et $\beta p d P c$ qui touche le cercle donné en P . On trouvera de la même manière les sommets des angles des quatre autres pentagones $p q f Q e$, $q r h R g$, $r s k S i$, $s \beta m B l$.

Démonstration. Les points B, P, Q, R, S seront les sommets des angles d'un pentagone régulier inscrit au cercle donné (40. 128); d'où les points β, p seront dans la diagonale BQ , et les points p, q dans la diagonale PR [186]; et comme $Bp = \beta Q$, on aura $B\beta = pQ$. On prouvera de même que $Pp = qR$, et à cause de $BQ = PR$ 27. liv. 3], on aura aussi $B\beta = Pp$, et $\beta p = pq$. On prouvera aussi de la même manière que tous les côtés du pentagone $\beta p q r s$ sont égaux entr'eux. De plus, on a l'angle $\beta p q$, c'est-à-dire, $BpR = BPR + PBp$ [32. liv. 1]; mais PBp , c'est-à-dire, $PBQ = QPR$: donc $\beta p q = BPQ$. On démontre de même que les autres angles du pentagone $\beta p q r s$ sont égaux aux angles du pentagone $BPQRS$: donc ils sont tous deux réguliers. En outre, l'angle QBR formé par deux diagonales du pentagone $BPQRS$, qui est l'angle βBs sera égal à l'angle βqs formé par deux diagonales du pentagone $\beta p q r s$ (20. liv. 6). Or comme les triangles βBs , βqs sont isoscèles, ils auront aussi les angles à la base commune βs égaux entr'eux (5. 32. liv. 1); d'où aussi les triangles seront en tout égaux (26. liv. 1); d'où les triangles $Bm\beta$, βpq ayant tous les côtés égaux entr'eux, auront aussi les angles égaux (8. liv. 1), ainsi que les

triangles Bls , srq : donc tous les côtés et tous les angles du pentagone $Bm\beta sl$ seront égaux aux côtés et aux angles du pentagone $\beta p qrs$; ils seront donc tous deux réguliers. On démontre la même chose pour les autres pentagones $\beta c Pdp$, $pe Qfq$, $qg Rhr$, $ri Sks$: donc, etc.

188. Le point b sera le centre du pentagone $\beta m Bls$, et la distance bB le rayon du cercle circonscrit à ce pentagone et aux autres qui lui sont égaux, ainsi que nous le démontrerons bientôt : ce qui ajoute encore une belle propriété au point b que nous avons déjà remarqué tant de fois dans cette géométrie. Car, outre les divisions en moyenne et extrême raison qu'il nous a fait obtenir dans le diamètre BAE (45, 46), outre qu'il a servi à déterminer le côté bF du pentagone inscrit au cercle du rayon AB [40], le côté bA du décagone inscrit au même cercle (41) ; on a encore le rayon Bb du cercle circonscrit aux six pentagones qu'on peut inscrire au plus grand cercle du rayon AB , comme dans le présent problème ; car si on suppose le rayon $AB=1$, on a : $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ [180] ; et comme (31. liv. 3)

$$(BE)^2 = (BQ)^2 + (QE)^2 = (BQ)^2 + (Ab)^2 ;$$

on aura : $BQ = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$.

On a ensuite : $\beta Q = BP = bF = \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$ [181] :

d'où : $BQ : \beta Q :: BQ \cdot \beta Q : (\beta Q)^2 :: \sqrt{5} : \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

$:: 1 : \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) :: BA : bA :$

d'où : $BQ : BQ - \beta Q :: BA : BA - bA,$

c'est-à-dire, $BQ : B\beta :: BA : Bb.$

Donc les deux diagonales des pentagones $BPQRS$, $Bm\beta sl$ seront entr'elles comme $BA : bA$: donc BA étant le rayon du premier pentagone, Bb sera le rayon du second (20. liv. 6).

P R O B L È M E.

189. *Etant donnés les sommets des angles d'un exagone régulier BCDEdc [fig. 99], trouver les points l, m, n, g, p, q où se coupent celles de ses diagonales qui ne passent pas par le centre.*

Solution. Soit fait à $BD = Ba = Ea$; puis à $BC = BA = CA = B\alpha$; à $aA = a\alpha$; à $\alpha B = \alpha P = AP$. Maintenant des centres B, C avec le rayon aP , soient décrits deux arcs qui se coupent en l ; des centres C, D , soient décrits deux autres arcs qui se coupent en m ,

et ainsi de suite ; ces points l, m , etc. seront les points cherchés.

Démonstration. Supposons que les diagonales indiquées se coupent en l, m, n, g, p, q , comme on a l'angle $BDc = DcE$ (29. liv. 3), BD sera parallèle à cE (28. liv. 1) : donc le triangle Clm sera semblable au triangle CcE (2, 5. liv. 6), et par conséquent équilatéral. De même on aura le triangle Blq semblable au triangle BDd , puis les triangles CcE et BdD ayant les côtés égaux, seront égaux (2) (8. 4. liv. 1) ; et le côté BD , et par conséquent lm étant à égale distance du côté cE que le côté Cc , ainsi que ql du côté dD (14. liv. 3), si on applique le triangle BdD sur le triangle CcE , la droite ql tombera sur la droite lm , et elles seront égales ; mais $Bl = lq$: donc $Bl = lm$. De même on démontre que $Dm = ml$. Donc, en faisant le rayon du cercle $BC = AB = 1$ [2], on a :

$$Bl = \frac{1}{3} BD = \frac{1}{3} \sqrt{3};$$

de même $Cl = \frac{1}{3} \sqrt{3}$. mais on a fait précisément

$$Bl = Cl = aP = \frac{1}{3} \sqrt{3} \text{ [184] } :$$

donc l est un des points cherchés. On démontre la même chose pour les autres points m, n, g, p, q ; donc, etc.

P R O B L Ê M E.

190. *Dans le cercle du rayon donné AB [fig. 100], inscrire sept exagones réguliers, dont un soit concentrique au cercle, et les autres soient disposés autour du premier.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné à $AB = BC = CD = DE = Ed$; puis à $DB = DV = dV$. Des centres C et A , avec le rayon CV , soient décrits deux arcs qui se coupent en P ; du centre P , avec le même rayon PC , soit coupée la circonférence du cercle en δ ; $d\delta$ sera le côté des exagones à inscrire, et que l'on inscrira facilement l'un près de l'autre. Ensuite, des centres d et δ , avec le même côté $d\delta$ pris pour rayon, soient décrits deux arcs qui se coupent en α ; du centre α et avec le même rayon, soit décrit un cercle dans lequel on inscrive (15. liv. 4) un exagone régulier $d\delta mnpq$. Du centre A avec le même rayon, soit décrit un cercle qui passera par np ; soit décrit dans ce cercle l'exagone qui a pour un des côtés la ligne pn ; sur les côtés de cet exagone, soient décrits les autres exagones, comme on a fait d'abord sur le côté $d\delta$, et on aura les sept exagones demandés.

Démonstration. En faisant pour abréger $AB=1$, on aura $CP=CV=\sqrt{7} [100]=AP$; puis on aura $AP : A\delta :: A\delta : \delta d [86]$, c'est-à-dire, $\sqrt{7} : 1 :: 1 : \delta d$; d'où $\delta d = \sqrt{\frac{1}{7}}$. Supposons pour un moment inscrits les exagones cherchés, et soit leur côté $d\delta$ qui est la quantité inconnue $=x$; on divisera cette ligne en deux parties égales au point v , et on mènera la droite Av , qui lui sera perpendiculaire [83], et passera par α centre de l'exagone, dont $d\delta$ est le côté, en coupant aussi par moitié au point μ le côté pn de l'exagone central; et comme on a dans le triangle équilatéral Apn :

$$pn : A\mu :: 1 : \frac{1}{2} \sqrt{3} [104];$$

on aura $x : A\mu :: 1 : \frac{1}{2} \sqrt{3}$; d'où $A\mu = \frac{1}{2} x \sqrt{3}$, et $Av = 3 A\mu = \frac{3}{2} x \sqrt{3}$, et encore $dv = \frac{1}{2} x$; puis, comme $1 = (Ad)^2 = (Av)^2 + (dv)^2$, on aura :

$$1 = \frac{27}{4} x^2 + \frac{1}{4} x^2 = 7 x^2; \text{ d'où } x^2 = \frac{1}{7} \text{ et } x = \sqrt{\frac{1}{7}}$$

valeur qui est précisément celle déterminée pour la ligne $d\delta$ dans la solution du problème, ainsi qu'on vient de le démontrer; donc, etc.

On trouve dans Pappus, *liv. 8, probl. 15, prop. 19*, ce problème résolu avec la règle et le compas, d'une manière qui n'est pas plus simple que la précédente. Il y a aussi ajouté une construction mécanique.

191. Nous croyons avoir jusqu'ici rempli les promesses que nous avons faites (6 et 7). Quant au premier point, nous avons déjà donné tous les élémens de la *Géométrie du compas*, c'est-à-dire, la totalité des problèmes qui suffisent pour trouver avec le compas seul et sans la règle tous les points qu'on peut trouver avec ces deux instrumens réunis. Pour démontrer ceci [71], on observe d'abord que la géométrie élémentaire fournit le moyen de trouver les points d'un problème, ou par la section des arcs entr'eux (et ce moyen est tout-à-fait propre à la Géométrie du compas), ou par la section des arcs et des lignes droites, ou par celle des lignes droites entr'elles (et tout cela se trouve compris dans le livre 7), [110 et suivans]. Ensuite une droite quelconque nécessaire à la solution d'un problème se trouve déterminée de grandeur et de position. Par rapport à la grandeur, nous avons enseigné dans le liv. 3, [64 et suivans], et dans le liv. 4, [72, 73, 74], à aggrandir, diminuer, diviser une grandeur quelconque finie en un nombre quelconque de parties ; puis, dans le livre 5, [86 et suiv.], à trouver les troisièmes, les quatrièmes, les moyennes proportionnelles, ainsi qu'à diviser une droite dans un rapport quelconque donné. Quant à la position des droites,

elle se détermine par la position de deux points pour chacune d'elles ; or le livre 4 [76 et suivans] enseigne à trouver les points pour tous les cas des perpendiculaires et des parallèles. Le livre 8 [113 et suiv.] donne tout ce qui est nécessaire pour déterminer la position des lignes droites entr'elles sous un angle quelconque , donné par le moyen de deux points. On a épuisé dans le liv. 2 [27 et suiv.] les divisions de la circonférence du cercle et de tous les arcs qui sont du ressort de la Géométrie élémentaire. Je ne vois plus d'après tout cela quels autres élémens on pourroit désirer. A l'égard du choix des problèmes que nous avons recueillis ici , nous laisserons aux Mathématiciens le soin de juger si dans un grand nombre de cas utiles ou récréatifs, il n'est pas préférable, non-seulement pour la précision du résultat, mais encore pour la promptitude de la construction, d'abandonner la règle et de se servir du compas seulement, jusqu'à ce qu'ayant trouvé les points nécessaires au problème, on mène, s'il le faut, d'un point à l'autre une ou plusieurs droites que l'on ne peut pas à la vérité tracer avec le compas seul, et qui exigent l'usage de la règle.

G É O M É T R I E

D U C O M P A S.

L I V R E D O U Z I È M E.

P R O B L Ê M E S R É S O L U S P A R A P P R O X I M A T I O N.

192. **T**ous les problèmes supérieurs au second degré ne peuvent être résolus géométriquement seulement avec la règle et le compas ; mais ils exigent des intersections de courbes coniques ou de degré supérieur ; et par conséquent on ne peut les résoudre exactement avec la seule Géométrie du compas. Les instrumens faits pour décrire la cicloïde , la conchoïde , la cissoïde , la trajectoire et d'autres courbes semblables qui servent à la résolution de ces problèmes , sont assurément d'une invention très - ingénieuse et d'un prompt et élégant usage dans la pratique. Pourtant , lorsqu'on n'a pas besoin d'avoir toute la trace de la courbe à laquelle ils sont destinés , et qu'il suffit d'obtenir un point par l'intersection de cette courbe avec d'autres lignes , comme ils laissent toujours quelques soupçons

de petites erreurs qu'on ne peut pas quelquefois bien calculer, il vaudra mieux, dans beaucoup de cas, préférer à l'exactitude théorique de ces méthodes l'approximation pratique suffisante d'une construction faite avec la règle et le compas. Alors je dis que le plus souvent une solution obtenue avec le seul compas sera encore préférable. On pourra s'en convaincre par des exemples, en comparant nos solutions avec celles déjà connues.

193. Comme il n'y a encore aucune méthode générale pour obtenir par la Géométrie élémentaire ces approximations, on ne doit pas attendre que j'en propose aucune par ma Géométrie du compas. Je n'appelle point méthode géométrique d'approximation celle par laquelle on obtient une valeur approchée à l'aide d'une de ces échelles qu'on nomme géométriques, puisqu'avant de s'en servir il faut faire un calcul arithmétique : une telle méthode doit être plutôt appelée arithmétique. Supposons par exemple, qu'on veuille la racine cubique du nombre 2, l'extraction qu'on veut faire arithmétiquement de cette racine, pour pouvoir ensuite prendre les portions décimales ou une fraction quelconque sur une échelle géométrique avec le com-

pas, afin de doubler un cube, se fait par un moyen qui est plutôt du ressort de l'Arithmétique que de celui de la Géométrie.

194. Je n'ai pu encore jusqu'ici appercevoir d'autre moyen d'obtenir d'une manière très-approchée la solution de plusieurs problèmes utiles supérieurs au second degré, que celui de trouver des genres, et pour ainsi dire des classes différentes de construction de figures élémentaires; puis de soumettre au calcul le plus grand nombre possible de cas particuliers presque innombrables qui en résultent, et de choisir parmi ceux qui tendent le mieux au but qu'on se propose, et les employer à résoudre le problème.

195. J'ai déjà examiné plusieurs de ces genres, et pour ainsi dire de ces classes de constructions, et j'ai entre les mains des recherches sur cette matière. La classe la plus simple est celle dont nous ferons presque uniquement usage dans ce dernier livre de notre Géométrie. Elle est fondée sur les trois points remarquables a , b et e [*fig. 9, 11 et 12*] (59), qui nous ont déjà tant servi dans les livres précédents, et sur lesquels nous avons à donner les douze équations que nous avons promises [59].

196. Soit le point Z un point quelconque

pris sur le quart de la circonférence BF dans la fig. 12 construite comme dans le livre second, et soit pris dans l'autre quart Bf le point z , de manière qu'on ait $Bz = BZ$, on aura [20 et 21] :

$$[A] \dots (aZ)^2 = (aB)^2 - Zz \cdot Aa$$

$$[B] \dots (bZ)^2 = (bB)^2 + Zz \cdot Ab$$

$$[E] \dots (eZ)^2 = (eB)^2 - Zz \cdot Ae$$

197. Si on veut avoir les équations pour les distances des trois points a , b et e du point z , on n'aura qu'à changer les signes du second membre des équations précédentes, et on aura [20 et 21] :

$$[A'] \dots (az)^2 = (aB)^2 + zZ \cdot Aa$$

$$[B'] \dots (bz)^2 = (bB)^2 - zZ \cdot Ab$$

$$[E'] \dots (ez)^2 = (eB)^2 + zZ \cdot Ae.$$

198. La droite Zz étant la corde de l'arc double de $BZ = 2 \sin. BZ$, et supposant $AB = 1$, ce que nous sous-entendrons toujours, on aura : $(aB)^2 = (BD)^2 = 3$ [2]; $(Aa)^2 = 2$ [27]; $(Bb)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ [181]; $(Ae)^2 = 2 - \sqrt{2}$ [38]; d'où $(eB)^2 = (AB)^2 + (Ae)^2 = 3 - \sqrt{2}$; et $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ [180]: si on fait $aZ = a$, on aura : $[A'] \dots a^2 = 3 - 2 \sin. A \cdot \sqrt{2}$. Cette équation comprend aussi le cas où l'arc A est négatif comme Bz , dans lequel le signe $-$ placé devant $2 \sin. A \sqrt{2}$ se change en $+$.

199. La valeur de a peut toujours être celle d'une corde quelconque du cercle BDd , excepté dans le cas où la valeur de la distance az exprimée par a est plus grande que 2. Pour calculer alors plus facilement la valeur de a , comme on a :

$$\sqrt{2} = BF = 2 \sin. 45^\circ,$$

et $2 \sin. A \cdot \sin. 45^\circ = \cos. (A - 45^\circ) - \cos. A + (45^\circ)$
 $= \cos. (45^\circ - A) - \sin. (45^\circ - A)$ [158];
 on aura :

$$[*] a^2 = 3 - 2 \cos. (45^\circ - A) + 2 \sin. (45^\circ - A).$$

200. Dans les autres cas où a est plus petit que 2, en appelant A' l'arc dont a est la corde, on aura :

$$\frac{a^2}{4} = \sin.^2 \cdot \frac{1}{2} A' = \frac{1 - \cos. A'}{2} \quad [155]$$

$$= \frac{3}{4} - \sin. A \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} - \sin. A \cdot \cos. 45^\circ;$$

d'où réduisant $\cos. A' = 2 \sin. A \cdot \cos. 45^\circ - \frac{1}{2}$;

d'où encore [159],

$$\cos. A' = \sin. (A + 45^\circ) + \sin. (A - 45^\circ) - \sin. 30^\circ,$$

ou bien,

$$[1] \cos. A' = \cos. (45^\circ - A) - \sin. (45^\circ - A) - \sin. 30^\circ.$$

201. Si on veut se servir de cette équation pour obtenir une des divisions de la circonférence que l'on ne peut pas avoir exactement, on y introduira au lieu de A un arc précis, par exemple, la vingtième partie de la circonférence

férence $= 18^\circ$, en faisant $BZ = 18^\circ$ [fig. 12], et on aura :

$$\cos. A' = \cos. 27^\circ - \sin. 27^\circ - \sin. 30^\circ.$$

$$\text{Or } \sin. 27^\circ = 0,4539905$$

$$\sin. 30^\circ = 0,5000000$$

$$0,9539905$$

$$\cos. 27^\circ = 0,8910065$$

$$\text{d'où } \cos. A' = -0,0629840.$$

On trouve ensuite dans les tables :

$$0,0629840 = \sin. 3^\circ 36' \frac{1235}{2903}.$$

Or comme la valeur de $\frac{1235}{2903}$ approche tellement de $\frac{2}{3}$, qu'il n'y a pas seulement erreur d'une unité entière dans le dernier chiffre du nombre 1935, on pourra prendre 0,0629840 pour le sinus de $3^\circ 36' 40''$, sans qu'on puisse reconnoître avec les tables ordinaires, s'il y a erreur d'une tierce. Donc l'arc A' , qui a son cosinus négatif, sera $= 93^\circ 36' 40''$, et BZ étant supposé $= 18^\circ$, la distance aZ sera la corde de cet arc. Donc en appliquant pour corde sur la circonférence la distance aZ prise avec le compas, on déterminera un arc $= 93^\circ 36' 40''$ avec une approximation suffisante.

202. Pour rechercher l'erreur qui se trouve dans les nombres des tables ordinaires, on observe que le sinus de 18° étant égal à la

moitié de la corde de la dixième partie de la circonférence, c. à. d. $= \frac{1}{2} Ab = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1)$, et le cosinus de 45° étant égal à $\frac{1}{2} \sqrt{2}$, l'équation $\cos. A' = 2 \sin. A . \cos. 45^\circ - \frac{1}{2}$ [200] donne $\cos. A' = \frac{1}{4} \sqrt{2} (\sqrt{5} - 1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (\sqrt{10} - \sqrt{2}) - \frac{1}{2} = 0,0629839824$.

Puis, calculant aussi avec plus de chiffres le sinus de $3^\circ 36' 40''$, on trouve $0,062984061154$, et en se tenant à huit décimales,

on trouve $\sin. 3^\circ 36' 39'' = 0,06297921$

la différence pour $1''$ ou $60'''$ est de 485 ;

donc si 485 donne $60'''$, 8 donnera $\frac{96'''}{97}$, et

par conséquent ne donnera pas une tierce entière. Donc l'arc qui a pour corde la distance aZ n'excède pas d'une tierce entière $93^\circ 36' 40''$.

203. D'après cela, voici l'usage qu'on pourroit faire de cette valeur pour l'ancienne division du cercle. Il est clair qu'elle pourroit servir à diviser une minute en trois parties, dans des cercles où on auroit marqué les minutes; car on trouveroit les $40''$, c'est-à-dire, $\frac{2}{3}'$ entre une minute et la suivante, et cela sans erreur d'une tierce. On peut encore l'employer pour trouver la troisième partie d'un degré. En effet, comme l'arc $cBN = 90^\circ$, et $Np = 3^\circ$ [31. 43], si on prend $BZ = Kp$,

alors on aura l'arc $BZ = 18^\circ [32]$; du point c pris pour centre avec le rayon aZ , soit décrit un arc, il coupera la circonférence entre p et P en un point distant de p de $36' 40''$ à très-peu de chose près. Nommons y ce point, et triplons par exemple l'arc $Ny = 3^\circ 36' 40''$, nous aurons un arc $= 10^\circ 50'$, sans qu'il y ait une erreur de trois tierces, et si c'est de N vers G qu'on triple cet arc, la dernière division tombera entre π et ϕ ; nommons n le point où elle tombe, de manière qu'on ait $Nn = 10^\circ 50'$; nommons ensuite μ le point qui est à la moitié de l'arc $\pi\phi$ obtenu par le n.º 58, on aura l'arc $\mu n = 20'$ sans qu'il y ait erreur de trois tierces, c'est-à-dire, qu'on aura obtenu un tiers de degré de l'ancienne division avec une telle précision, que je ne crois pas qu'on en puisse désirer une plus grande dans la pratique.

204. Nous avons pris cet exemple parmi toutes les valeurs de $\cos. A'$ calculées en introduisant successivement, dans l'équation [1] au lieu de A , les arcs 90° , $88^\circ 30'$, 87° , et ainsi de suite jusqu'à 0° , puis $-1^\circ 30'$, -3° , etc. jusqu'à $-19^\circ 30'$ inclusivement; au-delà de cet arc, l'équation [1] n'a plus lieu, parce que ses valeurs deviennent plus grandes que l'unité.

205. Nous allons maintenant continuer la recherche des autres équations.

Toute distance du point b des points de la circonférence, qui sera plus petite que le diamètre 2, pourra être corde d'un arc. Nommons B' l'arc qui a pour corde la distance b Z , on aura $\frac{b}{2} = \sin. \frac{1}{2} B'$; et nommant B l'arc BZ , on aura $Zz = 2 \sin. B$; puis, divisant par 4 l'équation $[B]$ du n.º 196, on aura :

$$\sin. \frac{1}{2} B' = \frac{1 - \cos. B'}{2} [155] = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} = \sin. B. \frac{\sqrt{5} - 1}{4};$$

$$\text{d'où } \cos. B' = 1 - \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{4} \right) = \sin. B. \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$= 1 - 2 \sin.^2 36^\circ = 2 \sin. B. \sin. 18^\circ$$

$$= \cos. 72^\circ - \cos. (B - 18^\circ) + \cos. (B + 18^\circ) [155, 158];$$

donc on aura :

$$[2] \cos. B' = \sin. 18^\circ + \cos. (B + 18^\circ) - \cos. (B - 18^\circ).$$

206. Pareillement si on nomme E' l'arc qui a pour corde la distance e Z , et E l'arc BZ , l'équation $[E]$ du n.º 196 donnera :

$$\sin.^2 \frac{1}{2} E' = \frac{1 - \cos. E'}{2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{4} = \sin. E. \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2};$$

d'où on tire :

$$\cos. E' = \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} + 2 \sin. E. \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2}$$

$$= \sin. 45^\circ - \sin. 30^\circ + 2 \sin. E \sin. 22^\circ 30';$$

et enfin :

$$[3] \cos. E' = \sin. 45^\circ - \sin. 30^\circ$$

$$+ \cos. (E - 22^\circ 30') - \cos. (E + 22^\circ 30').$$

207. Au moyen de ces trois équations, un

arc A , B ou E étant donné, on aura, avec les tables des sinus et cosinus naturels, et par de simples additions ou soustractions, les cosinus et les arcs A' , B' et E' , qui ont pour cordes les distances aZ , bZ , eZ , que l'on trouvera être les mêmes, en doublant le sinus de la moitié des arcs A' , B' , et E' .

208. Réciproquement si la distance aZ est égale à une corde d'un arc connu A' , et si on cherche de quel arc Zz deviendra la corde, ou de combien de degrés deviendra l'arc BZ , qui en est la moitié, et est $= A$; de l'équation [198] :

$$a^2 = 3 - 2 \sin. A \sqrt{2};$$

on tirera $\sin. A = \frac{3-a^2}{2\sqrt{2}}$; et substituant la valeur de $a^2 = 4 \sin.^2 \cdot \frac{1}{2} A' = 2 - 2 \cos. A'$ [155],

on aura : $\sin. A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos. A' \sqrt{\frac{1}{2}}$

$= \sin. 30^\circ \cdot \sin. 45^\circ + \cos. A' \sin. 45^\circ$;

et [156, 158] comme $\sin. (45^\circ + A') = \cos. (45^\circ - A')$

on aura cette équation : [4] $\sin. A =$

$\frac{1}{2} (\sin. 45^\circ + \sin. (45^\circ - A') + \cos. (45^\circ - A'))$.

229. De même si on connoît l'arc B' , qui a pour corde la distance bZ , et si on cherche l'arc $B = BZ$ par le moyen de Zz ,

qui est la corde de $2B$, en multipliant l'équation $[B]$ du n.º 196 par $\sqrt{5+1}$; et à cause de $(bB)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, et de $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, on aura : $(bZ)^2 \cdot (\sqrt{5+1}) = 2\sqrt{5} + 4\sin. B$; et substituant pour $(bZ)^2$ sa valeur

$$4 \sin.^2 \frac{1}{2} B' = 2 - 2 \cos. B'. [155],$$

on aura, après avoir fait les réductions :

$$\sin. B = \frac{1}{2} - 2 \cos. B' \cdot \left(\frac{\sqrt{5+1}}{4} \right).$$

Or Bb , étant le côté du pentagone

$= \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right)}$ corde de 72° , sera

$$\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right)} = \sin. 36^\circ;$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{1}{4} \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right) = \sin.^2 36^\circ;$$

$$\begin{aligned} \text{or :} \quad 1 - \sin.^2 36^\circ &= \cos.^2 36^\circ = \sin.^2 54^\circ \\ &= \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{\sqrt{5+1}}{4} \right)^2 : \end{aligned}$$

d'où on tirera $\sin. B = \frac{1}{2} - 2 \cos. B' \sin. 54^\circ$; et enfin [156]

$$\begin{aligned} [5] \sin. B &= \sin. 30^\circ - \sin. (54^\circ + B') \\ &\quad - \sin. (54^\circ - B'). \end{aligned}$$

210. De même si on connoît l'arc E' , qui a pour corde la distance eZ , et si on cherche le degré de l'arc $BZ = E$, égal à la moitié de l'arc qui a pour corde $Zz = \sin. E$, en substituant dans l'équation $[E]$ du n.º 196 pour $(eZ)^2$ sa valeur $2-2 \cos. E'$;

pour $(eB)^2$ sa valeur $3 - \sqrt{2}$, et pour AE sa valeur $\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2 \sin. 22^\circ 30'$. [198. 38], on aura :

$2 \sin. E \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2 \cos. E' + 1 - \sqrt{2}$;
ce qui, en multipliant par $\sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{2}$ donne :

$$\begin{aligned} 4 \sin. E &= 2 \cos. E' \cdot \sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ &\quad - (\sqrt{2} - 1) \sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ &= 2 \cos. E' \sqrt{(2 + \sqrt{2}) \sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\ &= 2 \cos. E' \sqrt{(2 + \sqrt{2}) \sqrt{2} - \sqrt{(2 - \sqrt{2}) \sqrt{2}}} ; \end{aligned}$$

puis divisant par 4, et considérant que l'on a :

$\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2 \sin. 67^\circ 30'$ [37],
et $\sqrt{2} = 2 \sin. 45^\circ$, on aura [156, 157, 158] :

$$\begin{aligned} \sin. E &= 2 \cos. E' \sin. 67^\circ 30' \sin. 45^\circ \\ &\quad - \sin. 22^\circ 30' \sin. 45^\circ, \text{ ou } \sin. E = \\ &\cos. E' (\cos. (67^\circ 30' - 45^\circ) - \cos. (67^\circ 30' + 45^\circ)) \\ &\quad - \sin. 22^\circ 30' \sin. 45^\circ ; \end{aligned}$$

ou bien $\sin. E = \cos. E' \cos. 22^\circ 30'$
 $+ \cos. E' \sin. 22^\circ 30' - \sin. 22^\circ 30' \sin. 45^\circ$;
ou enfin :

$$[6] \sin. E = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &\cos. (E' + 22^\circ 30') + \sin. (E' + 22^\circ 30') \\ &+ \sin. 22^\circ 30' + \cos. (E' - 22^\circ 30') \\ &- \sin. (E' - 22^\circ 30') - \cos. 22^\circ 30' \end{aligned} \right\}.$$

211. Ainsi des trois équations [A], [B], et [E] nous en avons tiré six au moyen desquelles, des arcs étant donnés, nous pourrions

en obtenir de nouveaux, ainsi que leurs nouvelles cordes, à l'aide des trois seuls points a , b et e .

212. Comme il peut y avoir une infinité d'arcs, chacune de ces équations donne une infinité de solutions. Mais si on ne veut avoir la valeur que des arcs que l'on peut trouver par le moyen des mêmes points a , b et e , on en trouvera 120 pour chaque équation, quand il n'y aura de limites particulières pour aucune d'elles. En effet, on pourra, par le moyen de ces trois points, diviser la circonférence en 240 parties égales (57), et par conséquent la demi-circonférence en 120; on aura donc 60 points Z et 60 points z , qui pris ensemble détermineront 120 cas pour chaque équation. Mais aucune d'elles n'aura de limites particulières.

213. Si on vouloit prendre avec le compas, par exemple, la corde de 3° , c'est-à-dire, de la cent vingtième partie de la circonférence (42), et décrire un arc en plaçant en a la pointe du compas, cet arc ne pourroit couper la circonférence en aucun point Z , attendu que sa corde est plus petite que la distance $aF = \sqrt{2} - 1$. On ne pourra donc pas dans l'équation [4] mettre au lieu de A' l'arc de

3°, et si on veut le faire, on trouvera pour $\sin. A$ une valeur plus grande que l'unité, c'est-à-dire, une valeur absurde. Pour voir quel est le premier arc qu'on pourra mettre à la place de A' entre les arcs de la série 1° 30', 3°, 4° 30', etc. on observera quel est l'arc qui a pour corde la distance aF , qui est la plus petite entre le point a et le cercle, et qui est égale à $\sqrt{2-1} = 2 \sin. 45^\circ - \frac{1}{2} = 0,91421356 = \cos. 23^\circ 54' +$. Donc le premier arc qu'on puisse employer de ceux qu'on trouve par le moyen des trois points a , b et e sera celui de 24°. Après cet arc, on pourra employer tous les autres arcs de la suite 25° 30', 27°, 29° 30' jusqu'à 180°; car les cordes de tous ces arcs peuvent être des distances du point a à quelque point Z ou z de la circonférence.

214. Les équations [5] et [6] sont plus limitées; car dans l'équation [5] on ne peut pas employer les arcs B' dont la corde est plus petite que bf ou plus grande que bF : de même l'équation [6] n'admet aucun des arcs E' dont la corde est plus petite que eF et plus grande que ef .

215. Nous verrons dans la suite dans quel cas on peut se servir avantageusement de quelques-unes de ces valeurs pour la division du

cercle ou pour quelque'autre problème qu'on ne peut résoudre que par approximation, en choisissant celles qui approchent le plus de la valeur qu'on cherche, et se déterminent en même-tems par des sections d'arcs qui diffèrent moins de l'angle droit.

216. Pourtant, afin de retirer tous les avantages possibles des trois points a , b et e sans en introduire de nouveaux, des trois équations $[A]$, $[B]$ et $[E]$ nous en tirerons six autres pour avoir de nouvelles valeurs d'arcs et de cordes.

217. Soit BZ un arc connu, par exemple, un de ceux qu'on obtient par les problèmes du livre second et nommons B cet arc; on prendra avec le compas la distance bZ , qu'on portera de a à quelque'autre point Z' qui détermine un autre arc $BZ' = A$, et comparant les deux équations $[A]$ et $[B]$, on en tirera une nouvelle équation qui fait connoître sa valeur. En effet, si dans ces deux équations, on fait $bZ = aZ'$, en faisant dans la première $[A]$ $Zz = 2 \sin. A$, puis dans la seconde $[B]$ $Zz = 2 \sin. B$, on aura :

$$(aB)^2 - 2 \sin. A. Aa = (bB)^2 + 2 \sin. B. Ab,$$

ou bien [198] :

$$3 - 2 \sin. A. \sqrt{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} + \sin. B (\sqrt{5} - 1);$$

et dégageant $\sin. A$, on aura :

$$\begin{aligned}\sin. A &= \frac{\sqrt{5+1}}{4} \sqrt{\frac{1}{2}} - 2 \sin. B \cdot \frac{\sqrt{5-1}}{4} \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= \sin. 54^\circ \sin. 45^\circ - 2 \sin. B \sin. 18^\circ \sin. 45^\circ [209] \\ &= \frac{1}{2} (\cos. 9^\circ + \sin. 9^\circ) - \sin. B (\cos. 27^\circ - \sin. 27^\circ) [158]; \\ &\text{d'où (155 et suiv.) :}\end{aligned}$$

$$[7] \sin. A = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cos. 9^\circ + \sin. 9^\circ \\ + \cos. (B-27^\circ) - \sin. (B-27^\circ) \\ - \cos. (B-63^\circ) + \sin. (B-63^\circ) \end{array} \right\}$$

218. On ne pourra pas non plus prendre ici pour B tous les arcs, mais seulement ceux qui donnent une distance bZ ou bz qui ne soit pas plus petite que aF .

219. Maintenant soit connu un arc BZ que l'on nomme A , si on porte la distance aZ prise avec le compas de b à quelque'autre point Z' de la même circonférence, qui détermine l'arc $BZ' = B$, on connoîtra cet arc B , et si on veut sa corde, en dégageant $\sin. B$ de l'équation [217]

$$\sin. A = \frac{\sqrt{5+1}}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - 2 \sin. B \cdot \frac{\sqrt{5-1}}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Multipliant cette équation par le facteur $2(\sqrt{5} + 1)\sqrt{2}$, on aura :

$$2 \sin. A (\sqrt{5} + 1) \sqrt{2} = 3 + \sqrt{5} - 4 \sin. B;$$

d'où on tire :

$$\begin{aligned}\sin. B &= \frac{3 + \sqrt{5}}{4} - 4 \sin. A \cdot \frac{\sqrt{5+1}}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \sin.^2 54^\circ - 4 \sin. A \sin. 54^\circ \sin. 45^\circ [209];\end{aligned}$$

et traitant comme ci-dessus les équations [155 et suiv.], on aura enfin :

$$[8.] \sin. B = 1 + \sin. 18^\circ - \sin. (A + 9^\circ) + \cos. (A + 9^\circ) - \sin. (A - 9^\circ) - \cos. (A - 9^\circ).$$

220. On ne pourra pas dans cette équation [8] employer pour A les arcs BZ qui donnent une distance aZ plus grande que bF .

221. Actuellement si dans l'équation [A] du n.º 196, on fait $Zz = 2 \sin. A$ et dans l'équation [E] une autre distance $Zz = 2 \sin. E$, en faisant en outre dans ces deux équations $(aZ)^2 = (eZ)^2$, on aura, après les substitutions nécessaires (198) :

$$3 - 2 \sin. A \cdot \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} - 2 \sin. E \sqrt{(2 - \sqrt{2})};$$

$$\sin. A = \frac{1}{2} + 2 \sin. E \cdot \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \sin. E \sin. 22^\circ 30' \sin. 45^\circ, \text{ et [158] }$$

$$= \frac{1}{2} + \sin. E \cos. 22^\circ 30' - \sin. E \sin. 22^\circ 30';$$

d'où enfin [156, 158] :

$$[9] \sin. A = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} + \sin. (E + 22^\circ 30') \\ + \cos. (E + 22^\circ 30') \\ + \sin. (E - 22^\circ 30') \\ - \cos. (E - 22^\circ 30') \end{array} \right\}.$$

222. On peut encore trouver cette neuvième équation d'une autre manière pour rendre le calcul plus facile par le moyen des sinus et cosinus artificiels que l'on trouve dans les

tables de dix en dix secondes. C'est pourquoi comme on a :

$$\begin{aligned} \sin. A &= \frac{1}{2} + 2 \sin. E \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{(4-2\sqrt{2})}} + \sin. E \right) \frac{\sqrt{(4-2\sqrt{2})}}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} + \sin. E \right) \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \\ &= (\sin. 67^{\circ} 30' + \sin. E) \frac{\sin. 22^{\circ} 30'}{\sin. 45^{\circ}} [37]; \end{aligned}$$

et faisant $67^{\circ} 30' = p$; $E = q$, on aura [156] :

$$(9) \sin. A = \frac{\sin. \frac{67^{\circ} 30' + E}{2} \cos. \frac{67^{\circ} 30' - E}{2}}{\cos. 22^{\circ} 30'} ;$$

équation qu'il sera facile de calculer par le moyen des logarithmes des sinus et des cosinus.

223. Si donc on prend avec le compas une distance du point e à un point quelconque Z , extrémité d'un arc connu $BZ = E$, et qu'on la porte du point a à quelqu'autre point Z' de la circonférence , on connoîtra le nouvel arc $BZ' = A$ par le moyen de l'équation [9] ou de celle (9). Ces équations auront leurs limites , puisque l'arc BZ devra être tel que la distance eZ ne soit pas plus petite que aF .

224. On a trouvé [221] :

$$2 \sin. A \sqrt{2} = \sqrt{2} + 2 \sin. E \cdot \sqrt{(2 - \sqrt{2})} ;$$

multipliant cette équation par $\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}}$,
on aura :

$$2 \sin. A \sqrt{(2+\sqrt{2})} = \sqrt{(2+\sqrt{2})} + 2 \sin. E ;$$

$$\text{d'où } \sin. E = 2 \sin. A \cdot \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} - \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$$

$$= 2 \sin. A \cdot \sin. 67^{\circ} 30' - \sin. 67^{\circ} 30' [37];$$

d'où [158] :

$$[10] \sin. E = \cos. (A - 67^{\circ} 30') - \cos. (A + 67^{\circ} 30') \\ - \sin. 67^{\circ} 30'.$$

225. On peut encore préparer autrement cette équation pour la rendre soluble par l'usage des logarithmes. En effet, puisqu'on a :

$$\sin. E = 2 \sin. \left(A - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$$

$$= 2 (\sin. A + \sin. -30^{\circ}) \sin. 67^{\circ} 30'$$

en faisant $A = p$; $-30^{\circ} = q$, on aura [156] :

$$[10] \sin. E = 4 \sin. \frac{A-30^{\circ}}{2} \cos. \frac{A+30^{\circ}}{2} \sin. 67^{\circ} 30'.$$

226. Il est évident que cette dixième équation aura aussi ses limites, puisque l'on ne pourra pas y introduire toutes les valeurs de l'arc BZ ou $Bz \pm A$, qui donneroient la distance aZ plus grande que ef .

227. Enfin on peut de la comparaison de l'équation $[B]$ avec celle $[E]$, tirer deux autres équations. Car si on porte une distance du point e à un point quelconque Z de la

circonférence, qui soit l'extrémité d'un arc connu $BZ = E$, et que du point b comme centre et de cette distance eZ prise pour rayon, on décrive un arc qui coupe la circonférence en quelque'autre point Z' qui détermine l'arc $BZ' = B$, on connoîtra cet arc au moyen de son sinus de la manière suivante : soit fait dans l'équation $[B]$ du n.^o 196, $Zz = 2 \sin. B$, dans celle $[E]$ $Zz = 2 \sin. E$, et dans toutes les deux $bZ = eZ$, on aura, après avoir fait les substitutions nécessaires [198] :

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2} + \sin. B (\sqrt{5}-1) = 3 - \sqrt{2} - 2 \sin. E \sqrt{(2-\sqrt{2})};$$

d'où on tire :

$2 \sin. B (\sqrt{5}-1) = \sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{2} - 4 \sin. E \sqrt{(2-\sqrt{2})};$
 et multipliant les deux membres de l'équation par $\frac{\sqrt{5+1}}{8}$, on aura :

$$\begin{aligned} \sin. B &= \frac{3+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{5+1}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - 4 \sin. E \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5+1}}{4} \\ &= 2 \sin.^2 54^\circ - 2 \sin. 54^\circ \sin. 45^\circ \\ &\quad - 4 \sin. E \sin. 22^\circ 30' \sin. 54^\circ [209]; \end{aligned}$$

d'où on tire [158] :

$$\sin. B = 1 - \cos. 108^\circ - \cos. 9^\circ - \sin. 9^\circ - 2 \sin. E (\cos. 31^\circ 30' - \cos. 76^\circ 30');$$

et par conséquent [156] :

$$\begin{aligned} [11] \sin. B &= 1 + \sin. 18^\circ - \cos. 9^\circ - \sin. 9^\circ \\ &\quad - \sin. (E + 31^\circ 30') - \sin. (E - 31^\circ 30') \\ &\quad + \sin. (E + 76^\circ 30') + \sin. (E - 76^\circ 30'). \end{aligned}$$

228. L'équation [11] aura aussi des limites de deux côtés; car la distance la plus petite $e F = 1 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, est moindre que celle $b f = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, et la plus grande ef est plus grande que $b F$.

229. Si on multiplie par $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}$ l'équation

$2 \sin. B(\sqrt{5}-1) = \sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{2} - 4 \sin. E \sqrt{2-\sqrt{2}}$ que l'on a trouvé plus haut [227], on aura :

$$\begin{aligned} \sin. E &= 2 \frac{\sqrt{5+1}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ &- 4 \sin. B \frac{\sqrt{5-1}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \sin. 54^\circ \sin. 67^\circ 30' \sin. 45^\circ - \sin. 67^\circ 30' \\ &- 4 \sin. B \sin. 18^\circ \sin. 67^\circ 30' \sin. 45^\circ \\ &= \sin. 67^\circ 30' (\cos. 9^\circ + \sin. 9^\circ) - \sin. 67^\circ 30' \\ &- 2 \sin. B \sin. 67^\circ 30' (\cos. 27^\circ - \sin. 27^\circ) \\ &= \frac{1}{2} (\sin. 76^\circ 30' - \cos. 76^\circ 30' \\ &\quad + \sin. 58^\circ 30' + \cos. 58^\circ 30') \\ &- \sin. 67^\circ 30' - \sin. B (\sin. 85^\circ 30' \\ &\quad + \sin. 40^\circ 30' - \cos. 40^\circ 30' - \cos. 85^\circ 30'); \\ &\text{d'où on a enfin :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [12] \sin. E &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &\sin. 76^\circ 30' - \cos. 76^\circ 30' \\ &+ \sin. 58^\circ 30' + \cos. 58^\circ 30' \end{aligned} \right\} - \sin. 67^\circ 30' \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &\cos. (85^\circ 30' - B) + \sin. (85^\circ 30' - B) \\ &- \cos. (85^\circ 30' + B) - \sin. (85^\circ 30' + B) \\ &+ \cos. (40^\circ 30' - B) + \sin. (40^\circ 30' - B) \\ &- \cos. (40^\circ 30' + B) - \sin. (40^\circ 30' + B) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

équation qui n'a pas de limites.

230. Si par hasard quelque'une des valeurs qu'on trouve avec ces douze équations est au premier abord très - approchante de quelque valeur utile et cherchée dans la solution des problêmes , on aura l'avantage de parvenir au même but par un moyen très-simple. Car on n'aura à employer d'autres points pris hors de la circonférence que les trois seuls points a , b et e que l'on a déjà remarqué tant de fois, et dans la circonférence quelque'un de ceux qui servent à la division exacte de la circonférence par le moyen des solutions des problêmes du livre second. Nous allons actuellement donner quelques exemples.

231. Nous verrons d'abord comment on peut diviser le cercle à l'ancienne manière en degrés et minutes sans erreur d'une seconde. Pour cela , nous supposerons que la circonférence du cercle BDd [fig. 12] , est divisée en deux cent quarante parties [57, 58] dont chacune comme P^d contient $1^{\circ} 30'$, que l'on commence à compter les quantités positives de B vers F , et de même les quantités négatives de B vers f , et que les points Z et Z' sont des points vagues soumis pour le moment à la seule condition de se trouver, savoir : les points Z et Z' entre B et F sur

la circonférence, et les points z et z' entre les points B et f . Nous en agissons ainsi, pour éviter le trop grand nombre de figures dont on auroit besoin si on en répétoit une pour chaque problème. D'ailleurs, la petitesse des divisions les laisseroit à peine appercevoir même dans une figure beaucoup plus grande que la figure 12.

P R O B L È M E.

232. *Trouver [fig. 12] l'arc d'un degré de l'ancienne division, ou de 1° sans erreur d'une demi-seconde.*

1.^{re} Solution. Soit l'arc $Bz = -55^{\circ} 30'$ [231]. Prenez avec le compas la distance bz , et du point e comme centre, décrivez un arc qui coupe la circonférence en un point Z ; on aura l'arc $BZ = 52^{\circ} 59' \frac{1732}{1751}$, c'est-à-dire, de 53° sans qu'il y manque vingt-cinq tierces. On a ensuite dans les divisions de B vers F exécutées par le problème du n.^o 42, l'arc de $54^{\circ} = \frac{18}{120}$. On aura donc aussi l'arc $54^{\circ} - 53^{\circ} = 1^{\circ}$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation [12] on fait $B = -55^{\circ} 30'$, on trouve à la fin du calcul $\sin. E = 0,7986343 = \sin. 52^{\circ} 59' \frac{1732}{1751}$.

II.^e *Solution.* Soit l'arc $BZ = 10^{\circ} 30'$; du centre a et avec la distance bZ prise pour rayon , décrivez un arc qui coupe la circonférence en un autre point Z' ; on aura l'arc $BZ' = 29^{\circ} 29' \frac{2511}{2532}$, c'est-à-dire , $= 29^{\circ} 30'$ sans erreur d'une demi-seconde. On trouve ensuite dans les divisions du cercle faites au n.^o 58 l'arc de $28^{\circ} 30' = \frac{12}{240}$ de la circonférence. Donc on aura la différence des deux arcs égale à 1° avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation [7] on fait $B = 10^{\circ} 30'$, on trouvera à la fin du calcul $\sin. A = 0,4924215 = \sin. 29^{\circ} 29' \frac{2511}{2532}$: donc les arcs ne différeront pas de $29'''$, de la valeur d'un degré.

233. Cette seconde solution est moins approchée que la première , de $5'''$, mais les sections des arcs s'y font sous un angle qui diffère moins de l'angle droit.

234. Puisqu'on a l'arc de $1^{\circ} 30'$ [225] , et qu'on a trouvé [226] l'arc de 1° , on aura aussi en soustrayant l'un de l'autre l'arc de $30'$, ou le demi-degré , et par conséquent on aura la manière de diviser toute la circonférence en demi-degrés sans accumulation d'erreurs , et sans qu'aucun point soit éloigné , d'une demi-seconde , de sa véritable situation.

P R O B L È M E.

235. *Trouver l'arc d'un quart de degré ou de 15', sans erreur d'une tierce.*

Solution. Soit l'arc $BZ = -12^\circ$, la distance $e z$ sera égale à la corde de $87^\circ 15'$; d'un rayon égal à cette distance prise avec le compas et du point B comme centre, coupez l'arc BF en un point Z' , on aura l'arc $BZ' = 87^\circ 15'$. On a de plus par les divisions du cercle faites au n.º 42 l'arc de $87^\circ = \frac{22}{120}$ de la circonférence. On aura donc la différence de ces deux arcs $= 15'$.

Démonstration. Si dans l'équation [3] (206)
 $\cos. E' = \sin. 45^\circ - \sin. 30^\circ + \cos. (E - 22^\circ 30')$
 $- \cos. (E + 22^\circ 30')$,
 on fait $E = -12^\circ$, on aura :

$$\sin. 45^\circ - \sin. 30^\circ = 0,2071068 \mid$$

$$\cos. -34^\circ 30' = 0,8241262$$

$$- \cos. 10^\circ 30' = -1,0167451$$

$$\cos. E' = 0,0479781.$$

Or dans les tables qui donnent les sinus naturels avec sept chiffres, on trouve $0,0479781 = \cos. 87^\circ 15'$ sans aucune différence même dans le dernier chiffre. En employant ensuite plus de décimales, on trouve :

$$\cos. E' = 0,0479780622$$

$$\cos. 87^{\circ}. 15' = 0,047978128520;$$

et ne prenant que huit décimales, on a :

$$\cos. 87^{\circ} 15' 1'' = 0,04797229.$$

On a donc pour $1''$ la différence 584. Or si 584 donne $60'''$ de différence, 7 donnera $\frac{105}{146}$ de tierces. On aura donc l'arc E' , qui a pour corde la distance $e Z'$, $= 87^{\circ} 15'$ avec une erreur plus petite que $1'''$.

236. On pourra, par le moyen de ce problème, diviser la circonférence en 1440 parties, c'est-à-dire, en 1440 quarts de degrés sans qu'il y ait en aucun point de division une erreur de trois tierces. Car si on fait sur chaque arc $P \delta$ de $1^{\circ} 30'$ trois divisions de $15'$ en $15'$ de P vers δ et deux de δ vers P , l'arc $P \delta$ se trouvera divisé en six parties, dont chacune sera d'un quart de degré sans qu'il y ait erreur de $1'''$ dans la position d'aucun point de division; il en sera de même pour le reste de la circonférence. D'après cela, nous supposerons dorénavant la circonférence divisée en degrés et quarts de degrés, en les considérant comme exacts, afin de simplifier le calcul. On pourra, quand on voudra, tenir compte des erreurs.

P R O B L È M E.

237. *Trouver un arc de 10' ou la sixième partie d'un degré, sans erreur de 10'' ou de la sixième partie d'une seconde.*

Solution. Soit l'arc $Bz = -49^{\circ} 30'$; la distance bz sera égale à la corde de l'arc de $38^{\circ} 50'$ sans erreur de 10'' : puis soustrayant l'arc de $38^{\circ} 50'$ de celui de $39^{\circ} = \frac{13}{120}$ de la circonférence qu'on a par l'en.^o 42, on aura l'arc de 10'.

Démonstration. Si dans l'équation [2] on fait $B = -49^{\circ} 30'$, elle deviendra :

$\cos. B' = 0,7789738 = \cos. 38^{\circ} 49' \frac{1819}{1824}$; on a donc $B' = 38^{\circ} 50'$ à moins de 9'' près.

238. Soustrayant d'un arc de 50' auquel manquent 9'' un arc de 45' [236] auquel il manque quelques tierces, on aura l'arc de 5' ou la douzième partie d'un degré sans qu'il y ait une erreur de 9''.

P R O B L È M E.

239. *Trouver l'arc de 6' ou un dixième de degré sans erreur de 13''.*

Solution. Soit l'arc $Bz = 45^{\circ}$, c'est-à-dire, soit l'arc BG ; du point b comme centre et avec

la distance BG prise pour rayon, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en z ; on aura, sans erreur de $13''$, l'arc $Bz = -40^{\circ} 6'$. et soustrayant [236] l'arc de..... -40° ;

on aura pour reste l'arc de..... $6'$.

Démonstration. Si dans l'équation [5] on fait $B' = 45^{\circ}$, elle deviendra :

$$\sin. B = -0,6441228 = \sin. -40^{\circ} 5' \frac{2217}{2225}.$$

On aura donc l'arc $B = Bz = -40^{\circ} 6'$ à moins de $12''$ près.

240. Soustrayant de l'arc de $6'$ [239] l'arc de $5'$ [238], l'arc restant sera de $1'$ avec une erreur de quelques tierces. Mais on peut trouver immédiatement cet arc par le problème suivant.

P R O B L È M E.

241. *Trouver immédiatement l'arc de $1'$ sans erreur de $22''$.*

Solution. Soit l'arc $Bz = -27^{\circ}$; du point e comme centre et avec un rayon égal à la distance bz prise avec le compas, soit coupée la circonférence en Z . On aura l'arc $BZ = 29^{\circ} 59'$ avec un excès de $10''$: donc l'arc BN étant de 30° [31], l'arc ZN sera de $1'$ avec $10''$ de moins.

Démonstration. Si dans l'équation [12] on

fait $B = -27^\circ$, on aura :

$$\sin. E = 0,4997496 = \sin. 29^\circ 59' \frac{15}{2519} :$$

donc, etc.

P R O B L È M E.

242. *Trouver l'arc de 9' sans qu'il y ait erreur de 7'''.*

Solution. Du point e comme centre, avec la distance bK prise pour rayon, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en z ; on aura l'arc $Bz = -4^\circ 21'$ avec un excédent de 6''', lequel soustrait de $-4^\circ 30'$ donne pour reste 9' sans erreur de 7'''.

Démonstration. Si dans l'équation [12] on fait $B = 15^\circ = BK$ [32], on aura :

$$\sin. E = -0,0758494 = \sin. -4^\circ 21' \frac{5}{2901} :$$

donc l'arc $Bz = -4^\circ 21' 0'' 6'''$.

Ce problème servira encore à la nouvelle division du cercle, ainsi que nous le verrons ci-après [256].

243. L'arc de 15' manquant de moins

de 1''' [235],

celui de 10' excédent de moins de 10''' [237],

celui de 6' manquant de moins de 13''' [239],

celui de 1' de moins de 22''' [241],

et celui de 9' de moins de 7''' [242],

on pourra les combiner par addition ou sous-

traction, sans accumuler beaucoup les erreurs, de manière qu'à la fin toute la circonférence se trouve divisée en degrés et minutes, sans autre erreur que de très-peu de tierces. En effet, en doublant, par exemple, l'arc de $9'$, on aura un arc de $18'$ à moins de $14'''$ près; et soustrayant de cet arc celui de $6'$ approché à moins de $13'''$, on aura l'arc de $12'$ à moins d'environ $1'''$. Soustrayant maintenant cet arc de celui de $15'$ approché à moins d'une tierce [235], on aura l'arc de $3'$ avec à peine une erreur d'une tierce. Par ce moyen, on pourra diviser en cinq parties chaque arc de $15'$, et toute la circonférence se trouvera divisée de trois en trois minutes avec une erreur moindre de six tierces sur cette dernière division; erreur qui deviendra encore moindre, si on la porte en sens contraire de celle de trois tierces au plus qu'on commet dans la division de $15'$ en $15'$ [235]. Puis employant l'arc de $1'$ qui a $4'''$ de moins [240] à diviser chaque arc de $3'$, on ne commettra plus une erreur de $10'''$, et on aura divisé la circonférence en degrés et minutes.

On pourroit aussi combiner ces arcs ou d'autres tirés des douze équations précédentes, de manière que l'on parvînt à commettre de moindres erreurs, et nous emploierions

pour cela quelques problèmes, si d'un côté la division du cercle en 360° ne devoit pas avec le tems cesser d'être employée, et si d'ailleurs nous croyions que les artistes qui voudroient continuer à s'en servir, trouvassent ces recherches avantageuses pour la pratique. Nous ne croyons pourtant pas devoir omettre les problèmes suivans, dans la solution desquels nous supposerons que le cercle entier est divisé en anciens degrés et minutes que, pour la simplicité du calcul, nous considérerons comme exacts.

P R O B L È M E.

244. *Trouver l'arc de $20''$ ou un tiers de minutte qui ait à peine $1'''$ de trop.*

I.^{ere} *Solution.* On trouve [201] l'arc de $40''$ avec moins d'une tierce de trop. Donc aussi l'arc de $20''$, complément d'une minute, n'a pas tout-à-fait $1'''$ de moins.

II.^e *Solution.* Du point *e* comme centre et avec un rayon égal à la corde de l'arc de $61^{\circ} 30'$ prise avec le compas, soit coupée la circonférence en *Z*; on aura l'arc $BZ = 20^{\circ} 39' 40''$ avec à peine une tierce de trop; puis soustrayant cet arc de celui de $20^{\circ} 40'$,

l'arc restant sera de $20'$ avec à peine $1''$ de moins.

Démonstration. Si dans l'équation [6] on fait $E' = 61^{\circ} 30'$, en employant de plus grandes tables de sinus, on aura :

$$\sin. BZ = \sin. E = 0,35283991 ;$$

on a ensuite $\sin. 20^{\circ} 39' 40'' = 0,35283984$.

$$\text{Or } \log. 0,3528399 = 9,5475777$$

$$\log. \sin. 20^{\circ} 39' 40'' = 9,5475776$$

$$\log. \sin. 20^{\circ} 39' 50'' = 9,5476334$$

$$\text{différence} = 558.$$

Donc E surpassera l'arc $20^{\circ} 39' 40''$ de $\frac{10}{558}$ environ, c'est-à-dire, de $1''$ et un peu plus.

P R O B L È M E.

245. *Trouver l'arc de $15''$ ou un quart de minute à moins de $10'''$ près, ou environ.*

Solution. Du point e comme centre, avec un rayon égal à la corde de $31^{\circ} 30'$ prise avec le compas, soit coupée la circonférence en un point Z ; on aura l'arc $BZ = 57^{\circ} 30' 15''$ à $9'''$ de moins près.

Démonstration. Si dans l'équation [6] on fait $E' = 31^{\circ} 30'$, on trouvera $E = 57^{\circ} 30' \frac{386}{1563}$; mais on a $\frac{390}{1563} = \frac{1}{4}$. Donc ce qui lui manque est de $\frac{4}{1563}$ environ, c'est-à-dire, d'environ $10'''$.

P R O B L Ê M E.

246. *Trouver l'arc de 12", ou un cinquième de minute à 1''' de moins près ou environ.*

Solution. Soit $Bz = -10^{\circ} 30'$; du point a comme centre et d'un rayon égal à la distance bz prise avec le compas, soit coupée la circonférence en Z : on aura l'arc $BZ = 40^{\circ} 40' 12''$ avec environ 1''' de moins.

Démonstration. Si dans l'équation [7] on fait $B = -10^{\circ} 30'$, on trouvera par le calcul $A = 40^{\circ} 40' \frac{440}{2206}$. Or on a $\frac{441}{2206} = \frac{1}{5}$: on a donc en moins une erreur de $\frac{1}{2206}$, c'est-à-dire, de 1''' environ.

Si on avoit fait le calcul avec de plus grandes tables, on auroit relevé l'erreur avec plus de précision.

P R O B L Ê M E.

247. *Trouver l'arc de 10" ou un sixième de minute qui surpasse d'environ 1'''.*

Solution. Soit l'arc $Bz = -24^{\circ}$. Du point a comme centre et d'un rayon égal à la distance ez prise avec le compas, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en Z ; on aura

l'arc $BZ = 16^{\circ} 15' 10''$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation [9] on fait $E = -24^{\circ}$, on trouvera pour résultat :

$$\log. \sin. A = 9,4469652.$$

Ce logarithme se trouve être celui du sinus de $16^{\circ} 15' 10'' \frac{20}{722}$: donc l'excès ne va pas à deux tierces.

P R O B L È M E.

248. *Trouver l'arc de $5''$ ou d'un douzième de minute avec une erreur inappréciable par les tables ordinaires et moindre que $2'''$.*

I.^{ere} Solution. Soit l'arc $BZ = 4^{\circ} 30'$; du point a comme centre avec un rayon égal à la distance eZ prise avec le compas, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en un autre point Z' ; on aura l'arc $BZ' = 32^{\circ} 51' 5''$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation (9) on fait $E = 4^{\circ} 30'$, on aura pour résultat :

$$\log. \sin. A = 9,7343692 ;$$

$$\text{or } \log. \sin. 32^{\circ} 51' = 9,7343529,$$

et la différence est 163 ; de plus, dans les tables, la différence pour dix minutes est 326,

c'est - à - dire , précisément double de 163 : donc, etc.

En calculant l'erreur avec de grandes tables, on la trouve moindre que 2'''.

II.^e *Solution.* Soit l'arc $BZ = 31^{\circ} 30'$. Du centre a avec un rayon égal à la distance eZ prise avec le compas , soit coupée la circonférence en un autre point Z' ; on aura l'arc $BZ' = 51^{\circ} 30' 55''$ trop petit de moins d'une tierce.

Démonstration. Si dans l'équation (9) on fait $E = 31^{\circ} 30'$, on trouvera par le moyen des tables ordinaires :

$\log. \sin. A = 9,8936365 = \log. \sin. 51^{\circ} 30' 50'' \frac{84}{167}$; laquelle fraction $\frac{84}{167}$ se comparant à 10'', donnera 5'' avec un excès moindre de 1'''. On aura donc $A = 51^{\circ} 30' 55''$, lequel arc soustrait de $51^{\circ} 31'$ donnera 5'' avec l'approximation demandée.

Mais il est tems de passer à la démonstration de l'usage qu'on peut faire des douze équations précédentes quand on veut diviser la circonférence du cercle suivant la nouvelle manière des Français.

249. Suivant cette manière , la circonférence se trouve divisée en 400 degrés , afin que le quart de cercle qui est le fondement de toute

la trigonométrie soit par-là divisée en 100 degrés. Chaque degré est divisé en 100 minutes, chaque minute en 100 secondes, et ainsi de suite. On peut, si on veut, se dispenser de dénommer les degrés, minutes ou secondes, la position des décimales faisant assez connaître la nature de ces fractions.

250. Par conséquent on voit que neuf degrés anciens valent 10 degrés nouveaux, ou bien que $9^{\circ} = 0,10$; que $54' = 0,01$; que $27' = 0,005$; que $5' 24'' = 0,001$; que $32'' 24''' = 0,0001$; c'est-à-dire, qu'un degré nouveau vaut 54 minutes anciennes, qu'une minute nouvelle vaut $32'' 24'''$ de l'ancienne division, etc.

251. Les divisions obtenues exactement par le moyen des trois points a , b , et c dans le second livre donnent jusqu'à la 240.^{me} partie de la circonférence [59]. L'arc qui forme cette partie est exactement de $1^{\circ} 30'$ de l'ancienne division. Il ne s'exprime pas également avec un nombre fini de décimales dans la division moderne; le premier arc, formé par l'assemblage de plusieurs 240.^{mes}, qu'on exprime avec un nombre fini de décimales du quart de cercle est celui de $\frac{3}{240}$ ou de $\frac{1}{80}$ de la circonférence, lequel est de $4^{\circ} 30' = 0,05$ du quart de cercle, c'est-à-dire, de 5 degrés de la nouvelle divi-

sion. On peut donc avec les méthodes du livre second et par le moyen des trois seuls points a , b et c pris hors de la circonférence, la diviser en deux parties égales, chacune de cinq degrés modernes, et cela avec la précision géométrique, ce qui est un des avantages de cette Géométrie.

252. On pourroit, si on vouloit, par la division des arcs en deux parties égales [60], diviser ensuite la circonférence en arcs de deux degrés et demi chacun ou de 0,025 et continuer ainsi cette division; mais il est clair que par ce moyen on ne pourra pas avoir un degré avec précision. Il ne reste donc d'autre moyen à la Géométrie, pour obtenir l'arc d'un degré [63], que celui de chercher quelque construction qui le donne au moins par approximation.

P R O B L È M E.

253. *Trouver l'arc d'un nouveau degré, ou de 0,01 sans qu'il excède d'un sixième de seconde de la nouvelle division ou de 3 tierces de l'ancienne.*

Solution. Prenez avec le compas la corde de 138° de l'ancienne division, ou de quarante-six vingtièmes de la circonférence [42],
et

et du point a comme centre, décrivez un arc qui coupe le quart de cercle Bf en un point z , l'arc Bz sera de 11 degrés de la nouvelle division; d'où soustrayant l'arc de $9^\circ = 0,10$ [252], on aura pour reste un arc $= 0,01$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si, dans l'équation [4], on fait $A' = 138^\circ$, on aura :

$$\sin. A = \frac{1}{2} (\sin. 45^\circ + \sin. 183^\circ + \sin. -93^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} (\sin. 45^\circ - \sin. 3^\circ - \sin. 87^\circ).$$

On a ensuite $-\sin. 3^\circ = -0,0523360$
 $-\sin. 87^\circ = -0,9986295$
 $\sin. 45^\circ = 1,2928932$

 $= 0,3438587$
 $= 0,1719293$

On a de plus $\sin. 9^\circ 54' = 0,1719291$
 $\sin. 9^\circ 55' = 0,1722156.$

Donc l'arc $Bz = A = 9^\circ 54'$, avec le seul excès de $\frac{2}{2865}$ d'une minute de l'ancienne division, c'est-à-dire, sans qu'il y ait un excédent de $4'''$, et par conséquent sans qu'il y ait erreur d'une seconde de la nouvelle division.

254. On pourroit, avec des tables un peu plus étendues que celles ordinaires, rechercher cette erreur avec plus de précision. Dans tous les cas, elle est si petite, qu'en

l'accumulant encore deux ou trois fois, elle ne seroit pourtant pas sensible dans les plus grands quarts de cercle. Or, dans leurs divisions, on n'a pas besoin de l'accumuler plus de deux fois; car on a déjà, avec la précision géométrique, l'arc de 0,05 [251]. Si sur cet arc on trace deux divisions d'un degré en commençant des deux extrémités, et allant en sens contraire, on aura marqué sur cet arc quatre points qui en donneront la division en cinq degrés, et chacun de ces points ne sera pas éloigné de sa véritable position de six tierces entières de l'ancienne division, ou d'un tiers de seconde de la nouvelle.

255. D'après ce problème, on supposera maintenant la circonférence divisée en 400 degrés de la nouvelle division.

P R O B L Ê M E.

256. *Trouver l'arc d'un nouveau demi-degré, sans qu'il y ait excès de six tierces de l'ancienne division ou d'un tiers de seconde de la nouvelle.*

Solution. Prenez avec le compas la distance du point *b* au point *K*, et du point *e*

comme centre avec ce rayon bK , décrivez un arc qui coupe la circonférence en un point z , vous aurez l'arc $Bz = -4^{\circ} 21'$, avec un excès moindre que $7''$; soustrayez en un arc de $3^{\circ} = Np$ [43], il viendra pour reste $1^{\circ} 21'$, c'est-à-dire, un degré et demi de la nouvelle division; alors de tous les points des degrés [225] pris pour centre, et d'un rayon égal à la corde de cet arc, on pourra diviser tous ces mêmes degrés en deux parties égales.

Démonstration. Si dans l'équation (12) on fait $B = BK = 15^{\circ}$ [32], on aura $E = -4^{\circ} 21' \frac{5}{2901}$. Donc, etc. [242].

P R O B L È M E.

257. *Trouver l'arc d'un cinquième de degré de la nouvelle division, sans qu'il y ait excès d'une seconde ancienne.*

Solution. Du point e comme centre, avec un rayon égal à la corde de 51° , prise avec le compas, décrivez un arc qui coupe le quart de cercle en Z , l'arc BZ sera de trente-sept degrés nouveaux plus un cinquième de degré avec la précision demandée.

Démonstration. Si dans l'équation [6]

on fait $E' = 51^\circ$, on aura :

$$E = 33^\circ 28' \frac{1068}{2426} = 33^\circ 28' 48'' \frac{1632}{2426}.$$

Mais $33^\circ 28' 48'' = 0,372$. Donc, etc.

P R O B L Ê M E.

258. *Trouver l'arc de 4 dixièmes d'un nouveau degré, sans qu'il y ait excès de 16^m anciennes.*

Solution. Soit l'arc $BZ = 76^\circ 30'$; puis du point a comme centre, et d'une ouverture de compas $= bZ'$, prise pour rayon, décrivez un arc qui coupe le quart de cercle en un point Z' ; on aura l'arc $BZ' = 0,094$, c'est-à-dire, de neuf nouveaux degrés et quatre dixièmes, avec l'excès indiqué.

Démonstration. Si dans l'équation [7] on fait $B = 76^\circ 30'$, elle deviendra $A = 8^\circ 27' \frac{1738}{2877}$. Mais $8^\circ 27' \frac{1726}{2877} = 0,094$. Donc, etc.

P R O B L Ê M E.

259. *Diviser un degré de la nouvelle division en dix parties égales.*

Solution. Après avoir divisé cet arc en deux parties égales [256], ôtez de l'arc de 0,005 les arcs de 0,004 [258] et de 0,002 [257],

et on aura les arcs de 0,001, et de 0,003, avec une erreur de quelques tierces de l'ancienne division seulement; on aura donc tous les arcs, par la division de l'arc de 0,005 en cinq parties; et divisant ensuite de la même manière l'autre moitié de l'arc, il sera divisé en dix parties égales.

260. On pourra soustraire et ajouter ces arcs de manière que balançant les erreurs en plus et en moins, on obtienne exactement la millième partie d'un nouveau degré: on pourra donc par la suite supposer le quart de cercle divisé en millièmes ou de dix en dix nouvelles minutes. On les considérera comme exacts, pour la simplicité du calcul.

P R O B L È M E.

261. *Trouver l'arc d'une nouvelle minute, sans erreur d'une tierce ancienne.*

Solution. Soit un arc $Bz = -1^{\circ} 30'$; la distance az sera corde d'un arc de 1,3609, sans erreur d'une tierce ancienne. Soustrayant cet arc de celui de 1,361 [260], on aura l'arc de 0,0001.

Démonstration. Si dans l'équation [1] on

Q 3

fait $A = -1^{\circ} 3'$, elle devient $A' = 122^{\circ} 28' \frac{2111}{2454}$
 $= 122^{\circ} 28' 51' 36'' = 1,3609$ [250]. Donc, etc.

P R O B L È M E.

262. *Trouver l'arc de deux nouvelles minutes, sans erreur d'une tierce ancienne.*

Solution. Soit l'arc $Bz = -48^{\circ}$; la distance bz sera corde d'un arc de 0,4422 avec la précision demandée. Soustrayant de cet arc celui de 0,442 [260], l'arc restant sera de 0,0002.

Démonstration. Si dans l'équation [2] on fait $B = -48^{\circ}$, elle devient :
 $B = 39^{\circ} 47' \frac{1639}{1862} = 39^{\circ} 52' 48'' = 0,4422$ [250].
 Donc, etc.

P R O B L È M E.

263. *Trouver l'arc de trois nouvelles minutes, sans erreur d'une nouvelle tierce.*

Solution. Soit un arc $Bz = -78^{\circ}$; du point a comme centre, avec la distance ez prise pour rayon, soit décrit un arc qui coupe le quart de cercle Bf en un point z' ; on

aura l'arc $Bz' = -0,0187$ avec la précision demandée ; et soustrayant celui-ci de l'arc $= -0,019$ [260], on aura l'arc restant $= -0,0003$.

Démonstration. Si dans l'équation [9] on fait $E = -78^\circ$, le sinus de A devient négatif ; en changeant les signes dans les deux membres de l'équation , on a $\log. \sin. A = 8,4678991$. Or dans les nouvelles tables de *Callet* pour la nouvelle division du cercle, on trouve :

$8.4678990 = \log. \sin. 0,0187$;
 puis de $\log. \sin. A = 8,4678991$
 soustrayant $DS = 6,1960574$ (*V. CALLET.*)

on aura $2,2718417 = \log. 187,00004$.
 On a donc $A = -0,018700004$; l'erreur se trouve encore moins forte , si on emploie plus de chiffres dans les logarithmes.

264. On a pour la position du point dans les trois problèmes précédens , et spécialement dans le dernier , une telle approximation , qu'on n'en peut pas desirer une plus grande. Au moyen des arcs trouvés par ces problèmes , on peut diviser de plusieurs manières un millième du quart de cercle [260] en deux parties égales , c'est-à-dire en minutes de la nouvelle division du cercle.

265. On pourroit de même obtenir des divisions plus petites; mais il faudroit employer des tables plus grandes que celles dont je me suis généralement servi dans les calculs des douze équations précédentes. On pourroit aussi, si on en avoit besoin, étendre la division de la circonférence au-delà des minutes du nouveau système français.

P R O B L È M E.

266. *Dans un cercle d'un rayon donné AB, trouver une corde Bb qui approche d'être égale au quart de la circonférence.*

Solution. Faites (fig. 101) sur la circonférence à $AB = BC = CD = DE$; puis à $BD = Ba = Ea$; du point C pris pour centre, et du rayon Ca , décrivez un arc qui coupe la circonférence en b , Bb sera la corde cherchée.

Démonstration. AB étant supposée $= 1$, si l'on fait $BC = A = 60^\circ$ dans l'équation [1], on aura $A' = 43^\circ 33' \frac{286}{2005} = Cb$. Donc l'arc BCb sera de $103^\circ 33' \frac{286}{2005}$; sa moitié, qui est de $51^\circ 46' \frac{1145}{2005}$, a pour sinus 0,7855998. Donc la corde Bb aura pour valeur 1,5711996;

le quart de la circonférence étant ensuite égal à 1,5707663 ; l'erreur ne sera donc que de 0,0004 environ.

267. Suivant le rapport d'Archimède , en supposant le rayon $= 1$, on trouve pour le quart de la circonférence $\frac{11}{7} - = 1,5714$. Donc la construction du problème ci-dessus [266] donne une plus grande approximation. Cette construction étant d'ailleurs très-simple, il sera plus commode de l'employer dans la pratique que les autres que nous pourrions bien donner aussi ; mais quoique susceptibles de donner dans la théorie un plus grand degré d'approximation , elles seroient plus compliquées , et par conséquent plus sujettes à erreur.

P R O B L È M E.

268. *Dans un cercle d'un rayon donné AB, trouver l'arc qui approche le plus d'être égal au rayon.*

Solution. Faites sur la circonférence $BLCMFDOEd$ (fig. 102) à $AB = BC = CD = DE = Ed$; à $BD = Ba = Ea$; à $Aa = BF = Db = db = aL$; à $AB = FO$, et enfin à $bF = OM$; l'arc LM

sera celui qui approchera le plus d'être égal au rayon.

Démonstration. Si dans l'équation [4] on fait $A' = 90^\circ$, cet arc ayant pour corde aL , on aura $BL = A = 20^\circ 42' \frac{786}{2721}$, comme on a de plus $OM = bF$ corde de la cinquième partie de la circonférence [40], ou de 72° , et l'arc $FG = 60^\circ$, on aura l'arc $Fm = 12^\circ$, et par conséquent l'arc $LM = BF - BL - FM = 57^\circ 17' \frac{1235}{2721} = 57^\circ 17' 43'' + \dots$; on aura donc pour l'arc égal au rayon $57^\circ 17' 44''$, comme on le sait déjà. Donc, etc.

P R O B L È M E.

269. *Trouver le côté d'un quarré qui approche le plus d'être égal en surface à un cercle d'un rayon donné AB.*

Solution. Faites sur la circonférence $BPCQDRE$ (fig. 103), à $AB = BC = CD = DE$; du même rayon BA et des centres B et E , décrivez les deux arcs ALc , AMd ; des centres C et D et du rayon DB , décrivez les arcs cNM , dNL ; faites à $AN = BP = PQ$; puis à $LM = QR$, BR sera le côté cherché.

Démonstration. Si dans le triangle isoscèle CND on suppose la base $CD = 1$, divisée

en μ en deux parties égales, on aura $(CN)^2 = (C\mu)^2 + (N\mu)^2$, ou $[2] = 3 = \frac{1}{4} + (N\mu)^2$. Donc $N\mu = \frac{1}{2} \sqrt{11}$; ensuite on a $(Ca)^2 = (C\mu)^2 + (A\mu)^2$, et par conséquent $A\mu = \frac{1}{2} \sqrt{3}$. Donc on aura $AN = \frac{1}{2}(\sqrt{19} - \sqrt{2}) = 0,7922869$, valeur qui se trouve être celle de la corde de l'arc de $46^\circ 40' \frac{1272}{2671} = BP = PQ$. Donc l'arc BQ sera de $93^\circ 20' \frac{2544}{2671}$; tirez les droites BL divisées par le milieu au point n , BD , Dn , BE , et les perpendiculaires $D\delta$, Ll , Mm perpendiculaires à la même ligne BE aux points δ , l et m . L'angle DBE étant égal à 30° [20. liv. 3], on aura : $\sin. DBE = \frac{1}{2}$; $\cos. DBE = \frac{1}{2} \sqrt{3}$. On a ensuite, suivant les propositions de la trigonométrie : $\cos. DBn = \frac{Bn}{DB}$; $\sin. DBn = \frac{Dn}{DB}$ ou $\cos. DBn = \frac{1}{6} \sqrt{3}$; et comme l'on a $Dn = \sqrt{((DB)^2 - (Bn)^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{11}$, on aura $\sin. DBn = \frac{1}{6} \sqrt{33}$. On a ensuite [154] $\cos. LB l = 6 (DBn - DBE) = \cos. DBn \cdot \cos. DBE + \sin. DBn \cdot \sin. DBE = \frac{1}{12} (3 + \sqrt{33}) = \frac{Bl}{BL} = Bl$ (BL étant égal à $BA = 1$). Donc $Al = AB - Bl = \frac{1}{12} (9 - \sqrt{33})$, et par conséquent $lm = LM = 2Al = \frac{1}{6} (9 - \sqrt{33}) = 0,5425729$, valeur qui est celle de la corde de $31^\circ 28' \frac{1518}{2799}$.

$= QR$. Donc l'arc BQR sera de $124^{\circ} 49' \frac{6370}{7476}$; sa moitié $62^{\circ} 24' \frac{6223}{7476}$ a pour sinus $0,8863283$, et par conséquent on aura la corde de $BQR = 1,7726566$. Or en faisant le rayon $= 1$, on a la surface du cercle $= 3,1415926$, qui a pour logarithme $0,4971499$. La moitié de ce logarithme , c'est-à-dire , $0,2485749 = \log. \sqrt{3,1415926}$ se trouve être $\log. 1,772453$. On n'a donc qu'une erreur de $0,002$ environ ; ce qui donne une approximation suffisante.

270. Au lieu de AN , on auroit pu employer les lignes dL ou cM , qu'on doit trouver égales à cette ligne AN .

Démonstration. Menez les droites dL et Dp au point p milieu de AN , on aura $\sin. LDp = \frac{Lp}{DL}$. Mais l'angle $LDp = \frac{1}{2} LDd = \frac{1}{2} (BDd - BDL) = 30^{\circ} - BDn$. Donc [154] : $\sin. LDp = \frac{1}{2} \cos. BDn - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin. BDn$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \sqrt{33} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{6} \sqrt{3}$;
d'où $Lp = DL \sin. LDp = \frac{1}{4} \sqrt{11} - \frac{1}{4} \sqrt{3}$,
et $Ld = \frac{1}{2} \sqrt{11} - \frac{1}{2} \sqrt{3} = AN$.

P R O B L È M E.

271. Etant donné le côté AB d'un quarré [fig. 104], trouver le rayon d'un

cercle qui approche de lui être égal en surface.

Solution. Du centre A , avec le rayon AB , décrivez la circonférence $BCFD.LPMEd$; faites à $AB = BC = CD = DE = Ed$; du centre B et avec le rayon BD , décrivez l'arc $dn NDa$; du centre E et avec le même rayon, coupez cet arc en a ; faites à $Aa = BF = Db = db$, et à $AB = Dn = dN$; du centre C et avec le rayon CN , coupez la circonférence en P ; faites à $Nn = PM$, et à $FB = CL$; on aura LM pour le côté cherché.

Démonstration. Si on fait $AB = 1$, le triangle BNd ayant les côtés respectivement égaux à ceux du triangle BDL de la fig. 103, on aura :

$$\sin. \frac{1}{2} dBN = \frac{1}{6} \sqrt{3}; \cos. \frac{1}{2} dBN = \frac{1}{6} \sqrt{33} [270];$$

d'où :

$$\sin. dBN = 2 \sin. \frac{1}{2} dBN \cdot \cos. \frac{1}{2} dBN [154] = \frac{1}{6} \sqrt{11};$$

$$\cos. dBN = \sqrt{(1 - \sin.^2 dBN)} = \frac{5}{6}.$$

De plus, l'angle CBd étant droit (31. liv. 3), on aura :

$$\cos. CBN = \sin. dBN = \frac{1}{6} \sqrt{11}.$$

Mais on a par la trigonométrie :

$$(CN)^2 = (BC)^2 + (BN)^2 - 2BC \cdot BN \cdot \cos. CBN:$$

donc :

$$CN = \sqrt{(4 - 2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{6} \sqrt{11})} = \sqrt{(4 - \frac{1}{3} \sqrt{33})}$$

$= 1,4440025$, que l'on trouve être la corde de $92^{\circ} 26' \frac{804}{2013} = CP$;

puis on a :

$$\begin{aligned} \sin. NBE &= \frac{Nn}{BN} = \sin. (CBE - CBN) \\ &= [154] \sin. 60^{\circ} \cos. CBN - \cos. 60^{\circ} \sin. CBN \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{6} \sqrt{11} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}; \end{aligned}$$

on aura $Nn = 2BN \cdot \sin. NBE$

$$= \frac{1}{6} (3\sqrt{11} - 5\sqrt{3}) = 0,2149367,$$

que l'on trouve être la corde de $12^{\circ} 20' \frac{246}{2892}$

$= PM$. On aura donc l'arc $CPM = 104^{\circ} 46' \frac{4220}{5821}$; d'où soustrayant l'arc CL ,

qui est un cinquième de la circonférence $[40] = 72^{\circ}$, il restera l'arc $LM = 32^{\circ} 46' \frac{4220}{5821}$

dont on trouve la corde $= 0,5643274$. Or

nommant π le rapport de la circonférence au diamètre, et R le rayon du cercle, on

a, comme on sait, sa surface $= \pi R^2$; fai-

sant donc $\pi R^2 = 1$, qui est la surface du

quarré du rayon $AB = 1$, auquel on veut

que le cercle soit égal, on aura $R = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$,

et $\log. R = -\frac{1}{2} \cdot \log. \pi = -0,2485749$

$= -1 + ,7514251 = \log. 0,5641896$;

l'erreur ne sera donc pas de 0,0002.

P R O B L È M E.

272. Etant donné le rayon AB d'une

sphère [fig. 105], trouver le côté d'un cube dont la solidité approche d'être égale à la moitié de celle de la sphère.

Solution. Après avoir décrit du centre A avec le rayon AB la circonférence $BGCDPEd$; faites à $AB = BC = CD = DE = Ed$; du centre B , avec le rayon BD , décrivez l'arc $aDNd$; du centre E , et avec le même rayon, soit coupé cet arc en a ; faites à $AB = aG = dN$; et à $CN = CP$; PG sera le côté cherché.

Démonstration. En effet, on aura [271] CN corde de $92^{\circ} 26' \frac{804}{2013}$. On aura ensuite $GC = 15^{\circ}$ [32]; d'où $PG = 107^{\circ} 26' \frac{804}{2013}$ dont la corde, en faisant $AB = 1$, se trouve être égale à 1,6122696. Or dans la même hypothèse, et supposant le rapport de la circonférence au diamètre $= \pi$, on a la solidité de la sphère $= \frac{4}{3} \pi$, et son logarithme $= \log. 4 + \log. \pi - \log. 3 = 0,6220886$, dont le tiers 0,2073628 se trouve être le logarithme de 1,611991; et par conséquent l'erreur qui en résulte ne va pas à 0,0003.

PROBLÈME.

173. *Etant donné le côté AB d'un*

cube [fig. 106], trouver le rayon d'une sphère qui approche de lui être égale en solidité.

Solution. Du centre A avec le rayon AB , décrivez la circonférence $BLCMFDE$; faites à $AB=BC=CD=DE$; à $BD=Ba=Ea$; à $Aa=BF$; puis à $Fa=FM$, et à $FA=FL$; LM sera le rayon cherché.

Démonstration. On aura l'arc $FL=60^\circ$ [15. liv. 4]. On a ensuite, en faisant $AB=1$, $aF=Aa-AF=\sqrt{2}-1$ [27] $=0,4142136$, que l'on trouve être corde de $23^\circ 54' \frac{276}{2846}$. On aura donc l'arc $LM=36^\circ 5' \frac{1870}{2846}$, qui a pour corde $0,6195986$. Or la solidité d'une sphère qui a R pour rayon, est, comme on sait, exprimée par la formule $\frac{4}{3} \pi R^3$: si on fait $\frac{4}{3} \pi R^3=1$, qui est la solidité du cube donné, on aura:

$$\log. R = \frac{\log. 3 - \log. 4 - \log. \pi}{3}$$

$$=-1 + ,7926371 = \log. 0,6203504.$$

Donc l'erreur en moins qui en résulte, ne va pas à $0,0008$.

274. Comme toutes ces approximations dans la rectification, la quadrature et la cubature de la circonférence, du cercle et de la

la

la sphère, et dans les problèmes inverses, ne font pas erreur d'une millième partie du rayon, on les regarde comme suffisantes dans la pratique. Quand on voudra pousser plus loin les approximations, il n'y aura autre chose à faire, qu'à trouver en degrés et minutes l'arc dont la quantité linéaire que l'on cherche est la corde; puis tirer cette corde dans le cercle, après l'avoir divisé dans le nombre trouvé de degrés et minutes, en employant les méthodes précédemment démontrées [235, 243].

P R O B L È M E.

275. *Doubler le cube par approximation.*

Solution. Soit AB le côté du cube qu'on veut doubler [fig. 107]; après avoir décrit du centre A avec le rayon AB la circonférence $BQMNCFPDEde$, et y avoir fait à $AB=BC=CD=DE$; à $BD=Ba=Ea$; à $Aa=BF$; et à $FA=FN$; aN sera, à très-peu de chose près, le côté du cube double.

Démonstration. L'arc BN sera un douzième de la circonférence [31] $= 30^\circ$; si on fait cet arc $BN=A$ dans l'équation [1],

R

l'arc A' , dont aN est la corde, sera $= 78^\circ 2' \frac{2358}{2846}$. On a donc, en faisant $AB=1$,

$$aN = 2 \sin. 39^\circ 1' \frac{1179}{2846} = 1,2592800.$$

On a ensuite $\sqrt[3]{2} = 1,2599209$.

L'erreur en moins qui en résulte n'est donc pas de 0,0007.

II.^e Solution. Si on vouloit une plus grande approximation, après avoir fait la construction de la première solution, et avoir fait en outre à $AB = Ed = dc$; à $Aa = BF = Db = db$; à $aN = cM = MP$; à $Fb = FQ$; PQ sera le côté cherché, avec une approximation plus grande que dans la solution précédente.

Démonstration. Comme, pour la démonstration de la 1.^{re} solution, on a l'arc $cM = 78^\circ 2' \frac{2358}{2846} = MP$, on aura l'arc $cMP = 146^\circ 5' \frac{1870}{2846}$; puis soustrayant l'arc $FQ = 72^\circ [40]$ de l'arc $Fbc = 150^\circ [27, 29]$, on aura l'arc restant $cQ = 78^\circ$; en le soustrayant de l'arc cMP , on aura l'arc $QP = 78^\circ 5' \frac{1870}{2846}$, dont la corde se trouve être $= 1,2599190$; l'erreur en moins qui en résulte ne sera donc que de 0,000019, c'est-à-dire, à peine de deux millionièmes de rayon.

P R O B L Ê M E.

276. *Tripler, quadrupler, etc. et octupler le cube [fig. 108].*

Solution. Soit AB le côté du cube donné ; du centre A et avec le rayon AB , décrivez la circonférence $B\omega G\mu C\varepsilon\nu FLDO Edc$; faites y à $AB=BC=CD=DE=Ed=dc$; des centres B, c, d, E, D , avec le même rayon AB , décrivez les arcs $A\pi c, Aqd, c\beta A\delta E, Apd, A\tau E$; du centre B , avec le même rayon BD , décrivez l'arc $d\tau\delta Da$; du centre E et avec le même rayon, coupez cet arc en a ; des centres C et D , et avec le même rayon, décrivez les arcs $c p q E, B\beta \pi d$; faites à $Aa=BF$; à $AB=FO=aG=GL$; à $EL=a\omega$; à $\pi\tau=B\varepsilon$; à $p\delta=B\mu$; et à $q\tau=\mu\nu$, on aura :

$A O$	pour côté du cube	{	double [275],
$C \delta$			triple,
$O G$			quadruple,
$O \omega$			quintuple,
$c \varepsilon$			sextuple,
$c \nu$			septuple,
$B E$			octuple.

Démonstration. Si on fait $AB=1$, on aura [271] : $C\delta=\sqrt{(4-\frac{1}{3}\sqrt{33})}=1,4422493$; on a ensuite $\sqrt[3]{3}=1,4422493$. Donc l'excès n'est pas de 0,002.

L'arc OFG étant de 105° [29, 30], sa corde OG sera égale à $2 \sin. 52^\circ 30' = 1,5867066$. On a de plus $\sqrt[3]{4} = 1,5874007$. Donc ce qui manque est de 0,0007 environ.

On aura ensuite l'arc $EL = \frac{5}{24}$ de la circonférence [32] $= 75^\circ$; si dans l'équation [4], on fait $A' = 75^\circ$, on a

$$\text{l'arc } A = B^\omega = 32^\circ 27' \frac{27}{2454};$$

et comme $FO = 60^\circ$ (15. liv. 4), on aura l'arc $OF^\omega = 117^\circ 32' \frac{2427}{2454}$, qui a pour corde 1,7102744. On a ensuite $\sqrt[3]{5} = 1,7099757$. Donc l'excès n'est pas de 0,0003.

Puisque $BD = B\tau = D\pi = \sqrt{3}$, et $D\tau = B\pi = 1$, on aura [23] :

$\pi\tau \cdot BD = (BD)^2 - (B\pi)^2$, c'est-à-dire, $\pi\tau \cdot \sqrt{3} = 2$; d'où $\pi\tau = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,1547005$, que l'on trouve être la corde de $70^\circ 31' \frac{1725}{2375} = B\epsilon$. On aura donc l'arc $cB\epsilon$, de $130^\circ 31' \frac{1725}{2375}$, qui a pour corde 1,8164964. On a ensuite $\sqrt[3]{6} = 1,8171204$. Donc on fait une erreur en moins qui n'est pas de 0,0007.

Les deux triangles $C\delta p$, $Bp\delta$ ayant les côtés respectivement égaux, seront égaux (8. et 26. liv. 1); et comme ils sont sur la même base $p\delta$, les droites $p\delta$, BC seront parallèles entr'elles (39. liv. 1). On aura donc l'angle $CB\delta = B\delta p$ (27. liv. 1).

Donc $\cos. CB^\delta = \frac{1}{6} \sqrt{11} [271] = \cos. B^\delta p$.

On a ensuite par la trigonométrie :

$$(Bp)^2 = (B^\delta)^2 + (p^\delta)^2 - 2B^\delta \cdot p^\delta \cdot \cos. B^\delta p ;$$

et les lignes Bp et C^δ étant égales , puisqu'on les détermine par la même construction , on aura :

$$4 - \frac{1}{3} \sqrt{33} = 3 + (p^\delta)^2 - 2p^\delta \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{6} \sqrt{11} ;$$

$$\text{d'où } 1 - \frac{1}{3} \sqrt{33} = (p^\delta)^2 - p^\delta \cdot \frac{1}{3} \sqrt{33} :$$

ajoutant dans les deux membres de l'équation le quarré de $\frac{1}{6} \sqrt{33}$, on aura :

$$(1 - \frac{1}{6} \sqrt{33})^2 = (p^\delta - \frac{1}{6} \sqrt{33})^2 ;$$

$$\text{d'où } p^\delta - \frac{1}{6} \sqrt{33} = \pm (1 - \frac{1}{6} \sqrt{33}).$$

On a ensuite [23] $p^\delta \cdot dE = (dE)^2 - (pd)^2$,

c'est-à-dire , $p^\delta = 1 - (pd)^2$, et par conséquent la ligne p^δ est plus petite que l'unité ; puis on déterminera $p^\delta = \frac{1}{3} \sqrt{33} - 1$

$= 0,9148541$, que l'on trouve être corde de l'arc de $54^\circ 26' \frac{1408}{2588}$. On a ensuite $q\tau = LM$ de la fig. 103 = la corde de l'arc de

$31^\circ 28' \frac{2518}{2799}$ [269]. Donc l'arc $cB\mu\nu = 60^\circ$

$+ 54^\circ 26' \frac{1408}{2588} + 31^\circ 28' \frac{2518}{2799} = 145^\circ 55' \frac{1607}{3622}$,

arc dont on trouve la corde $c\nu = 1,9122214$.

On a ensuite $\sqrt[3]{7} = 1,9129309$. Donc on

fait une erreur en moins qui n'est pas de

$0,000702$; on a enfin $BE = 2 = \sqrt[3]{8}$. Donc, etc.

P R O B L Ê M E.

277. *Sous-doubler le cube par approximation* [fig. 108].

Solution. Soit AB le côté du cube donné ; du centre A avec le rayon AB , décrivez la circonférence $BCDEd$, et faites à $AB = BC = CD = DE = Ed$; du centre B , avec le rayon BD , tracez l'arc $D^\delta d$; du centre d , avec le rayon dA , tracez l'arc $A^\delta E$; D^δ sera le côté cherché.

Démonstration. La droite D^δ de cette figure a été déterminée comme celle dL de la figure 103. On aura donc [269] $D^\delta = 0,7922869$. Or on a $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0,7937039$. Donc on fait une erreur en moins qui n'est pas de 0,002.

278. Nous n'avons pas voulu omettre les solutions de ces deux derniers Problèmes, quoiqu'il y ait erreur dans quelques résultats, savoir : d'un ou deux millièmes dans les uns, et de quelques dix millièmes dans les autres, parce que ces erreurs sont souvent négligeables et que d'ailleurs les solutions en sont simples. On peut avoir des valeurs beaucoup plus exactes que les précédentes, pour former

des cubes, non-seulement dans les rapports ci-dessus exprimés, mais eucore dans d'autres, si on cherchoit les arcs exprimés en degrés, minutes et parties de minutes, qui ont pour cordes les racines cubiques, ou leurs moitiés, leurs tiers, etc. nécessaires pour la construction du cube cherché; on retireroit ensuite ces cordes du cercle divisé exactement en degrés, minutes, etc. [243, 244], et on les emploieroit ensuite, ainsi que leurs multiples, à la même construction du cube.

279. C'est ici que se termine enfin la Géométrie du Compas : si elle est accueillie favorablement des Géomètres, et si elle peut être de quelqu'utilité aux Artistes, aux Dessinateurs, et spécialement aux Ingénieurs en instrumens de mathématiques à l'usage des Géographes et des Astronomes, je me trouverai bien récompensé du long ennui que m'a coûté sa composition.

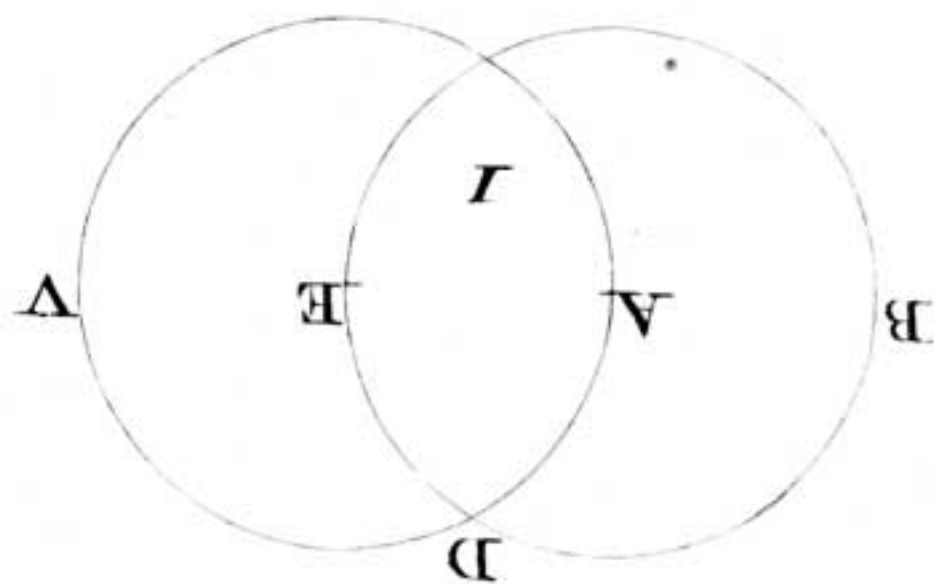
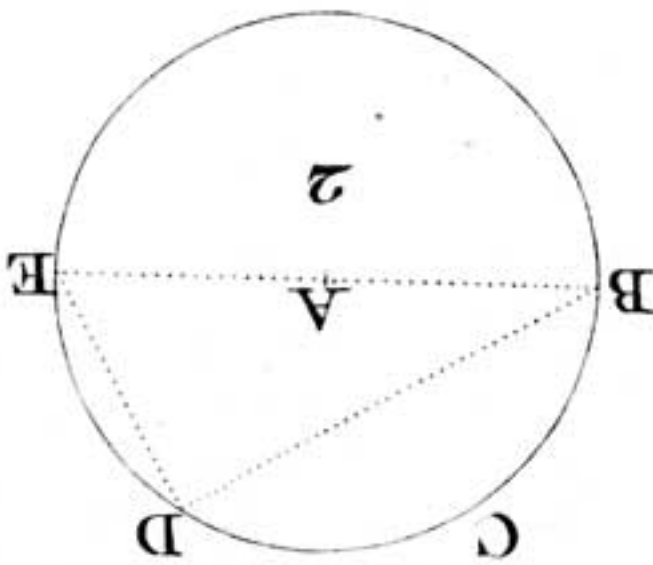
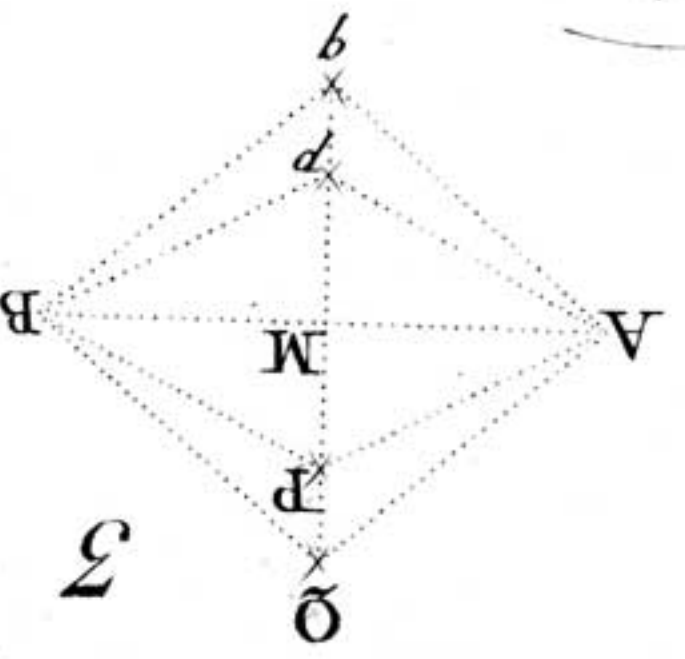
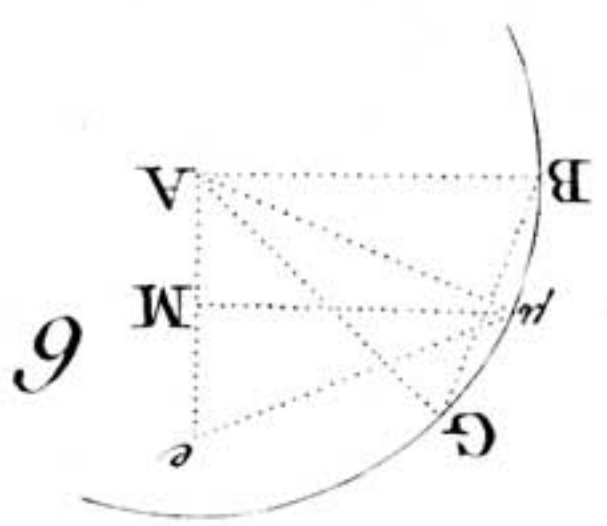
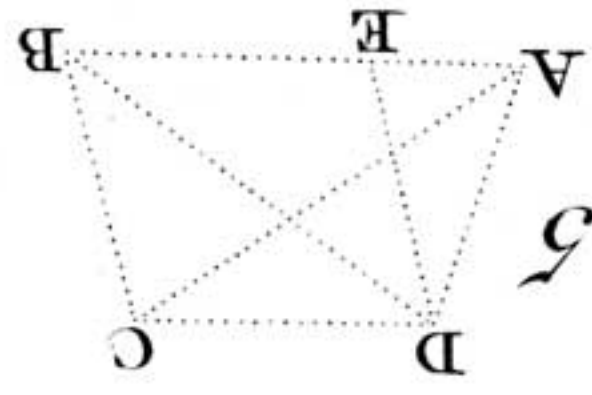
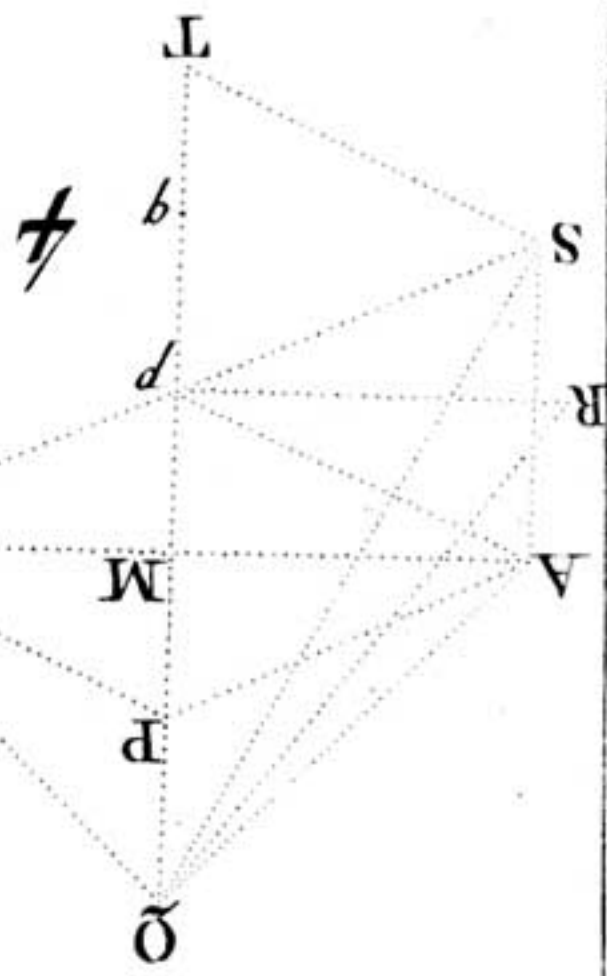
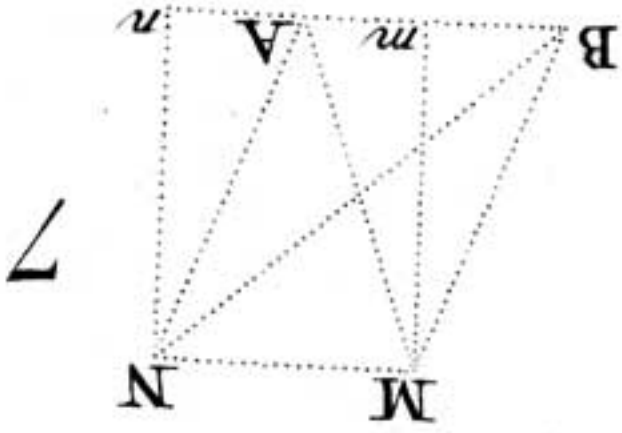
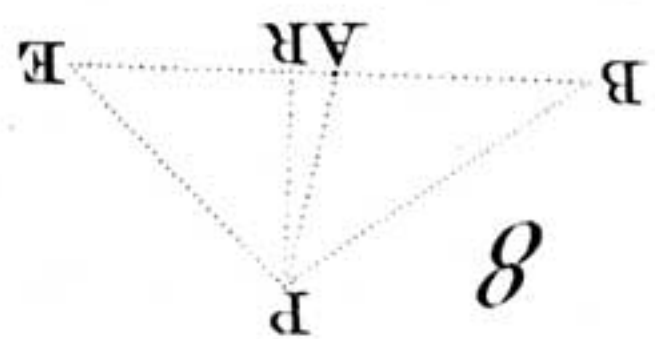
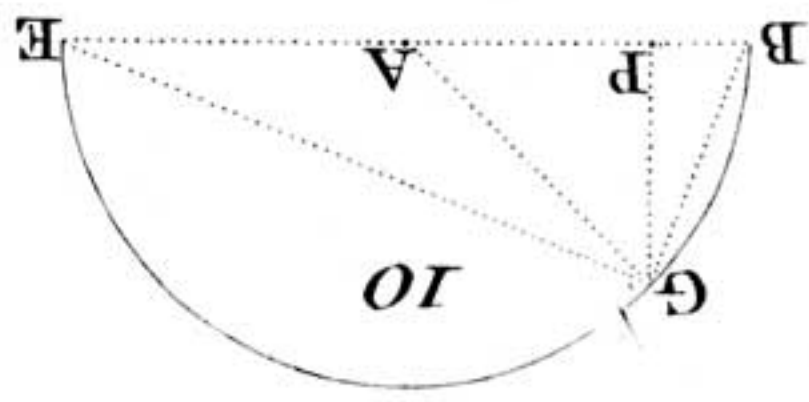
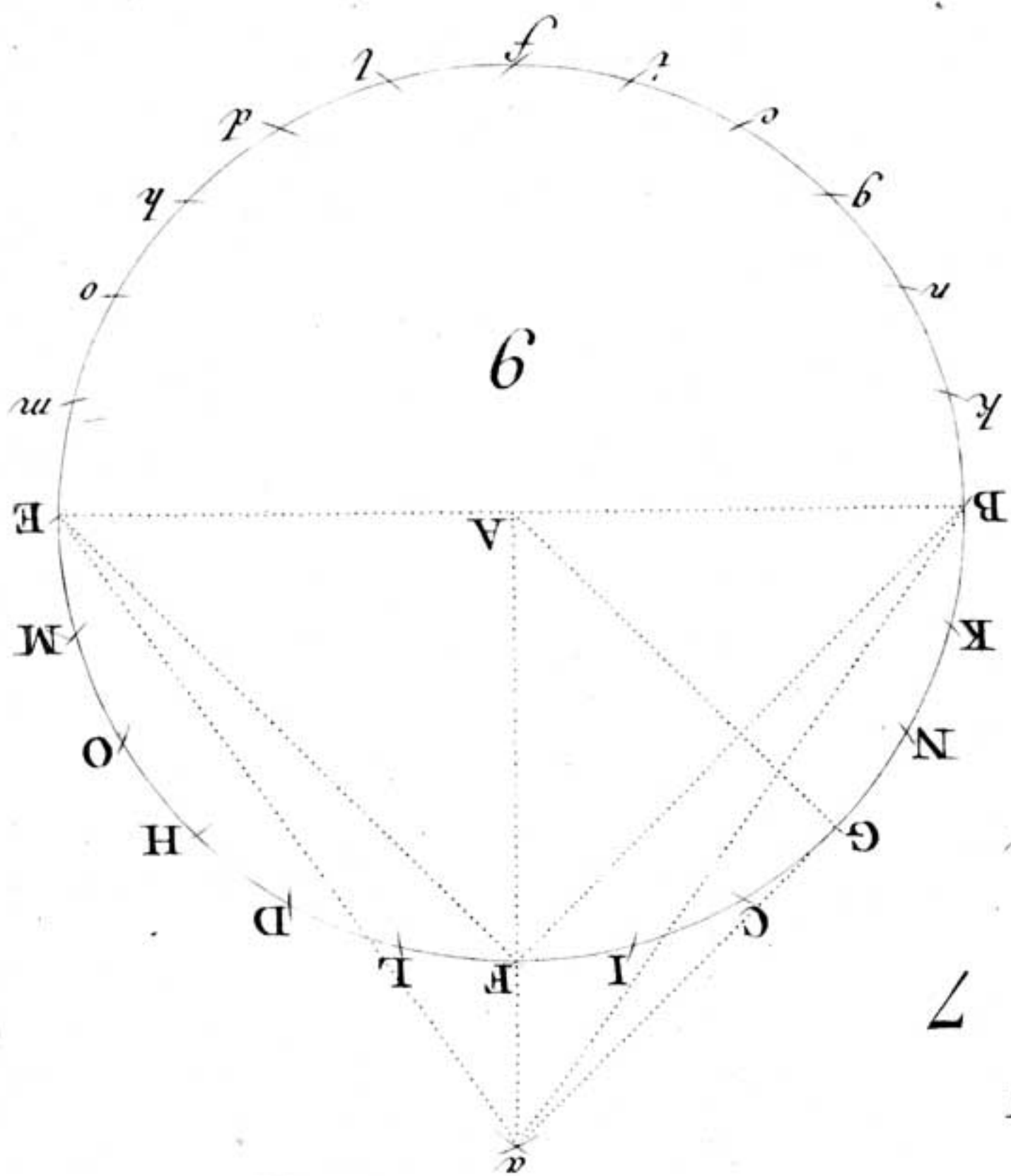
F I N.

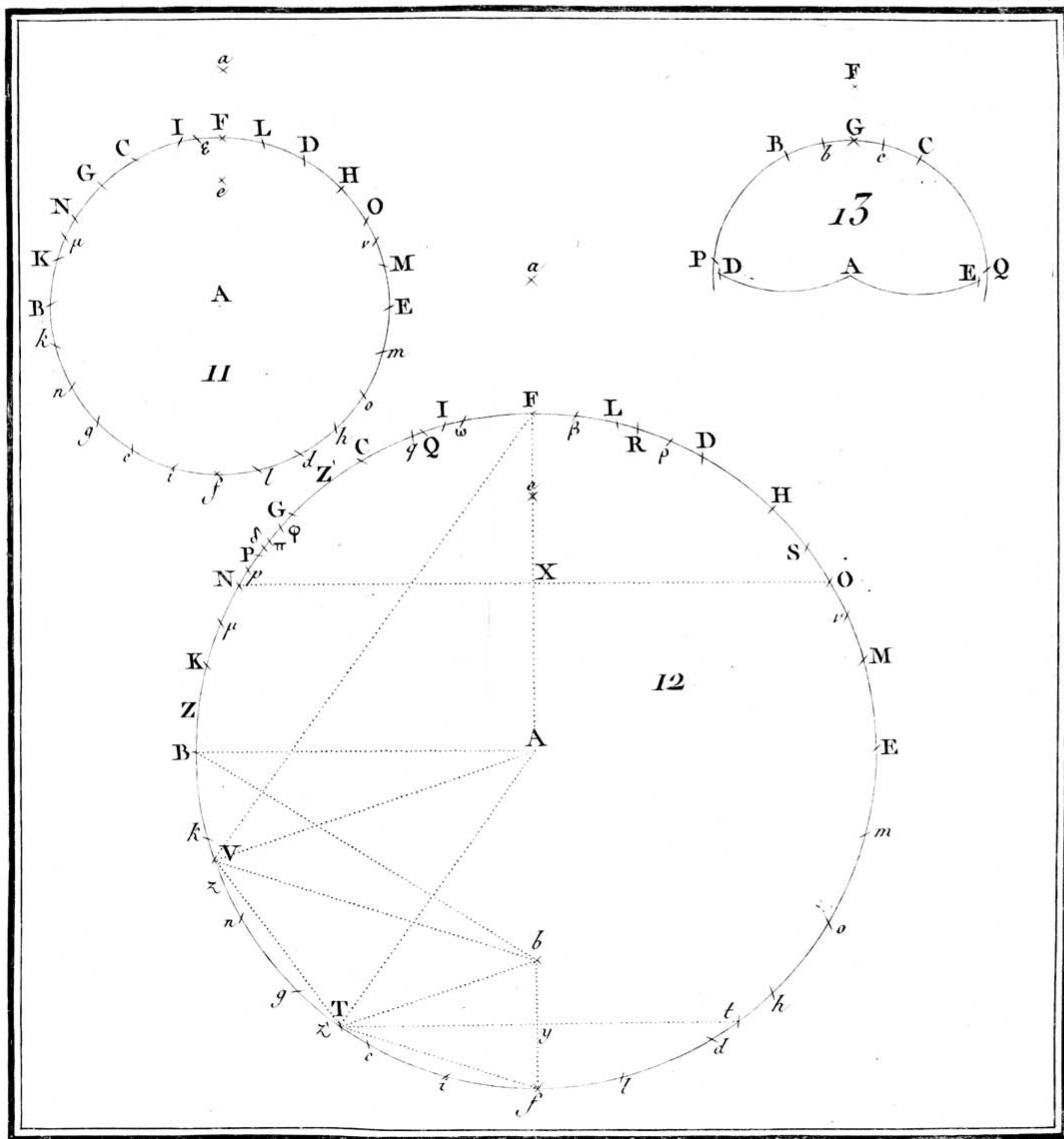
T A B L E.

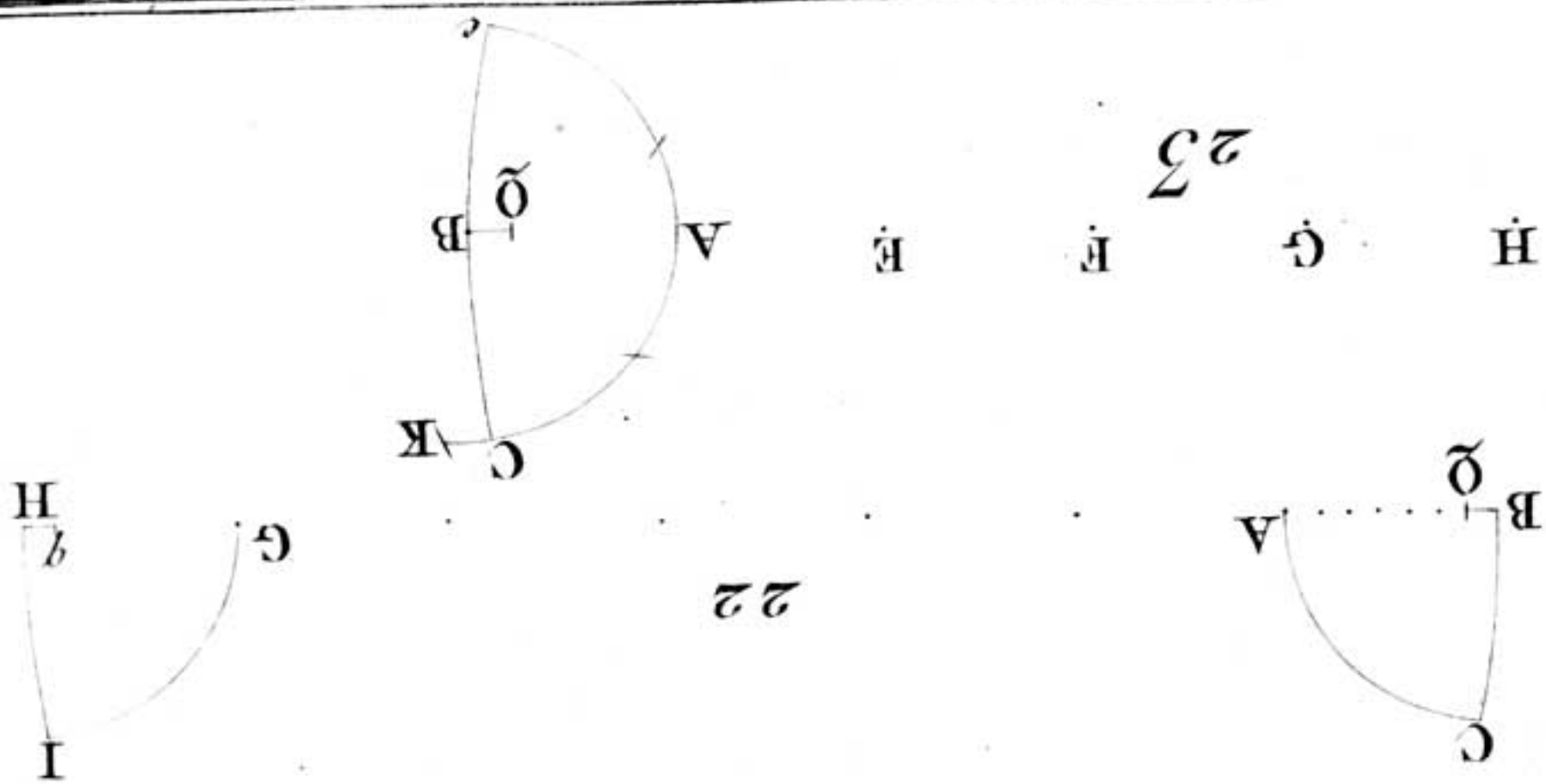
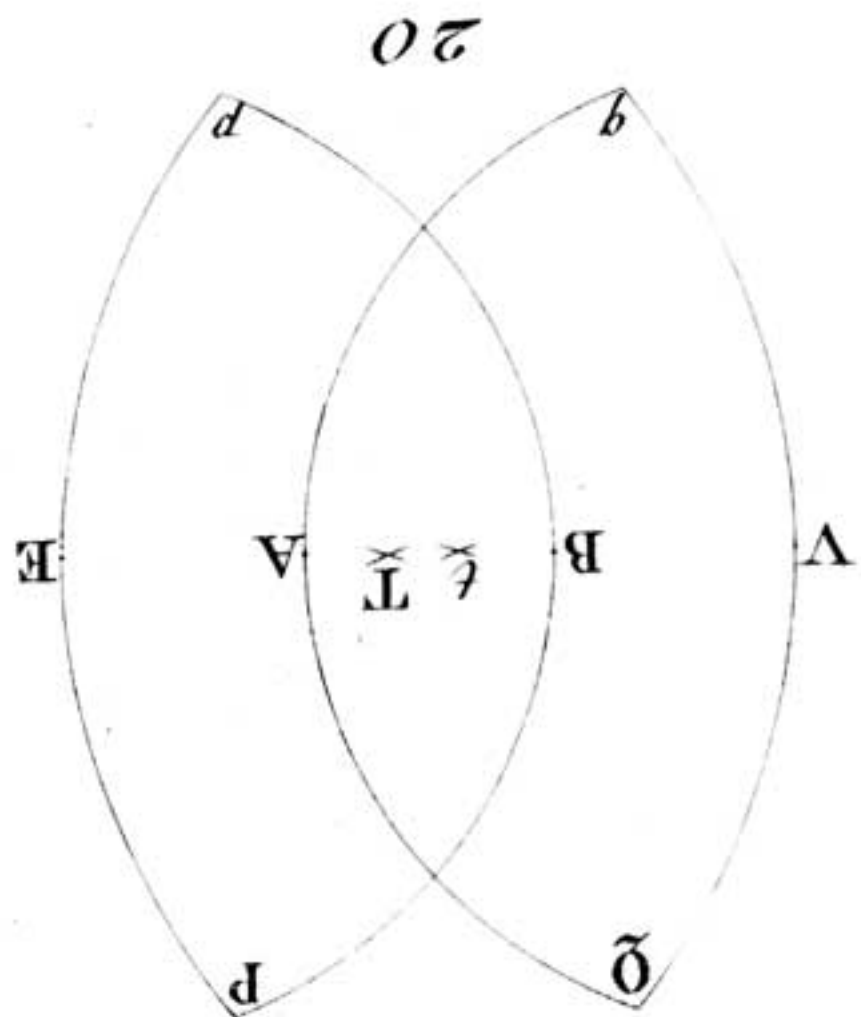
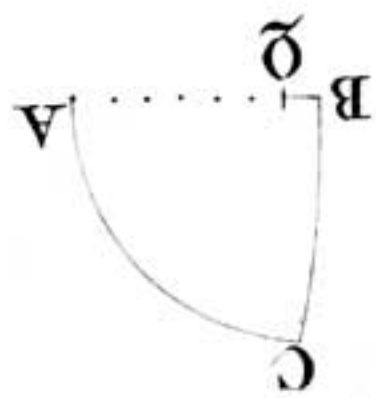
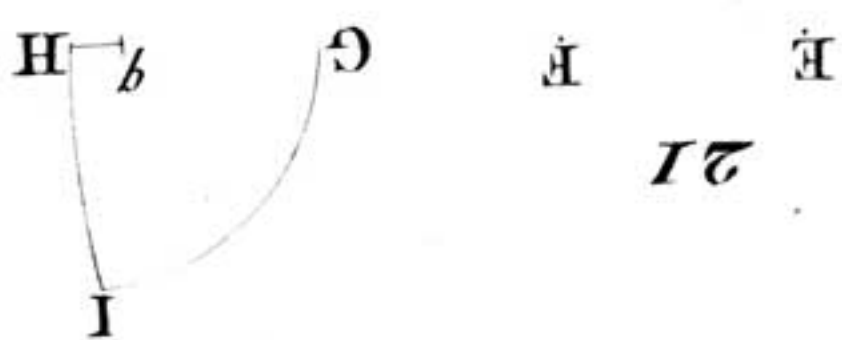
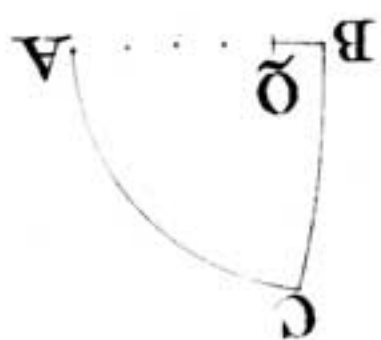
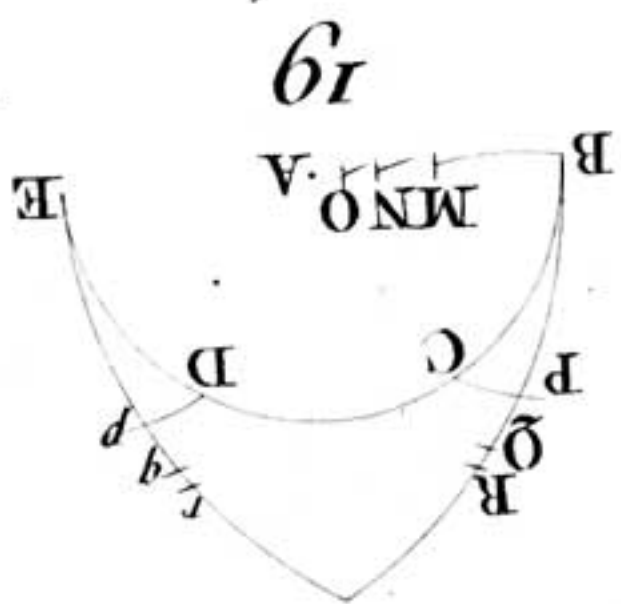
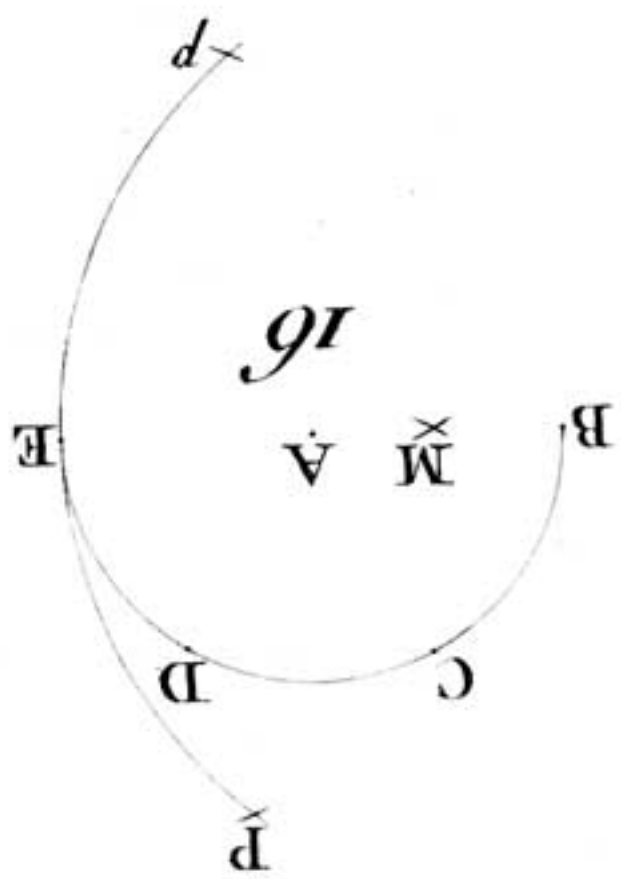
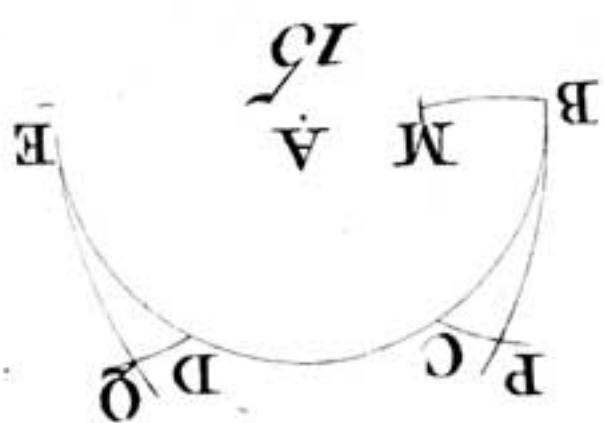
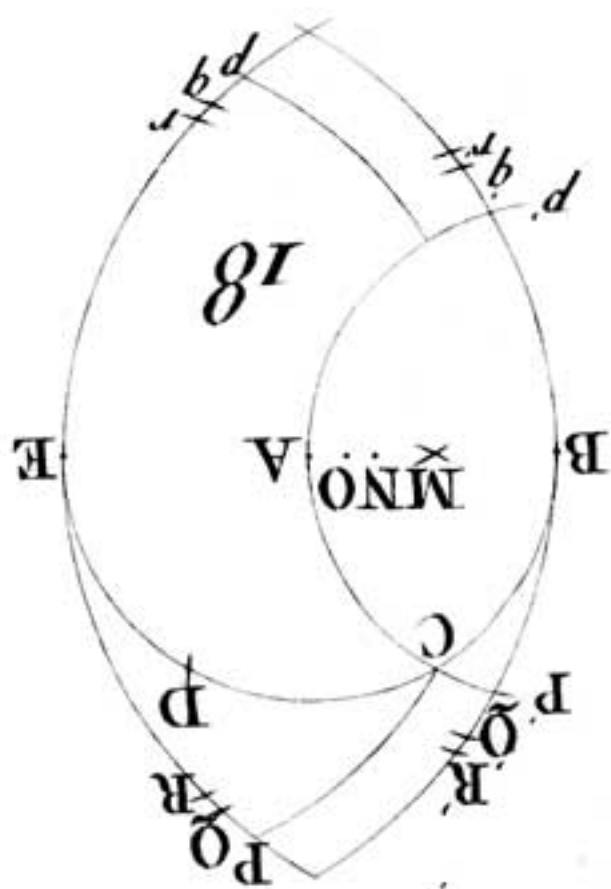
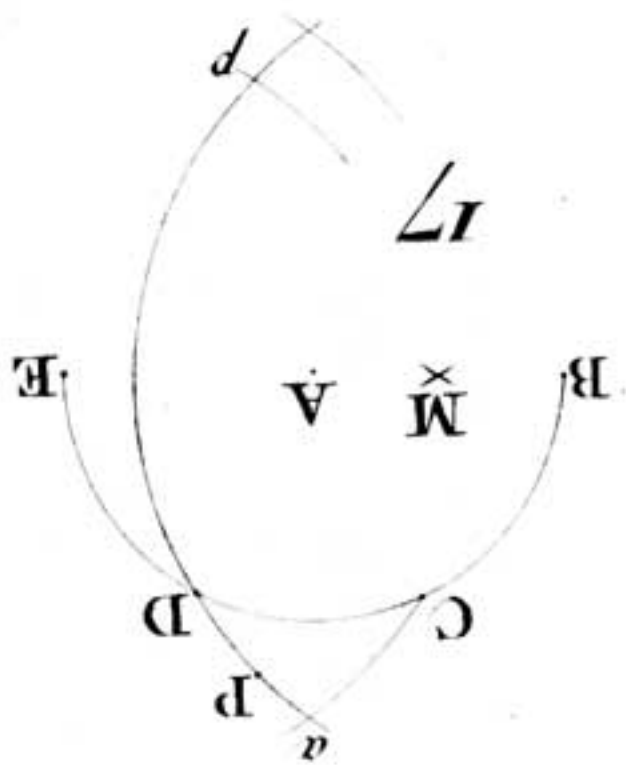
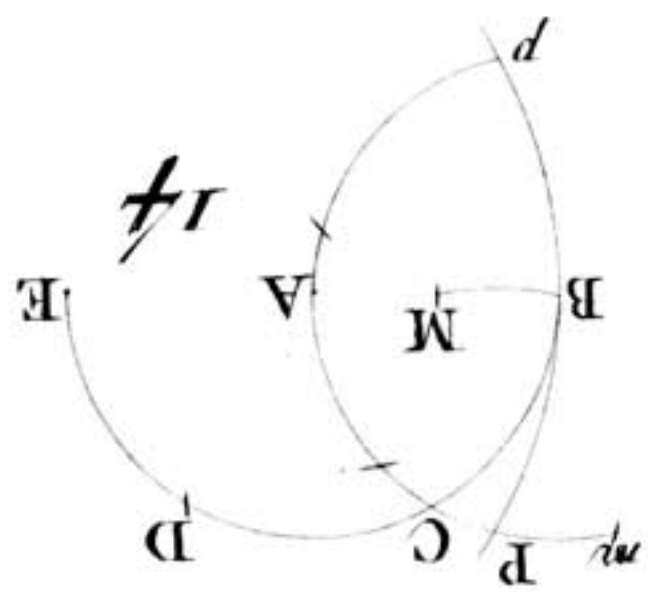
LIVRE I. <i>Préliminaires.</i>	Page 1
— II. <i>De la division de la circonférence et des arcs du cercle.</i>	15
— III. <i>De la multiplication et de la division des distances en ligne droite.</i>	37
— IV. <i>De l'addition et de la soustraction des distances ; de la situation des perpendiculaires et des parallèles.</i>	53
— V. <i>Des distances proportionnelles.</i>	65
— VI. <i>Des racines.</i>	73
— VII. <i>De l'intersection des lignes droites avec les arcs de cercle et entre elles.</i>	93
— VIII. <i>De la construction, de la multiplication et de la division des angles, et des lignes trigonométriques.</i>	99
— IX. <i>Des figures semblables et des polygones réguliers.</i>	109
— X. <i>Des Centres.</i>	135
— XI. <i>Problèmes divers.</i>	144
— XII. <i>Problèmes résolus par approximation.</i>	204

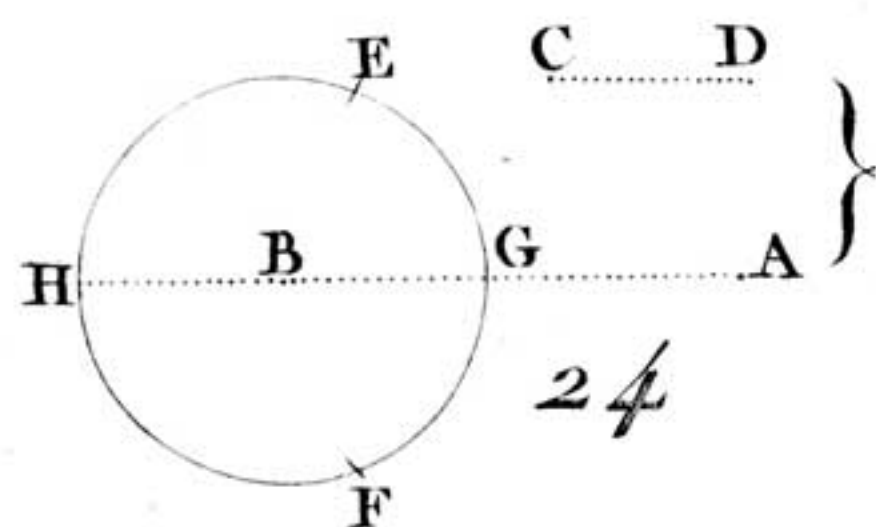
Fin de la Table.

De l'Imprimerie de LEGRAS et CORDIER, rue
du Plâtre S. Jacques, n.º 23.

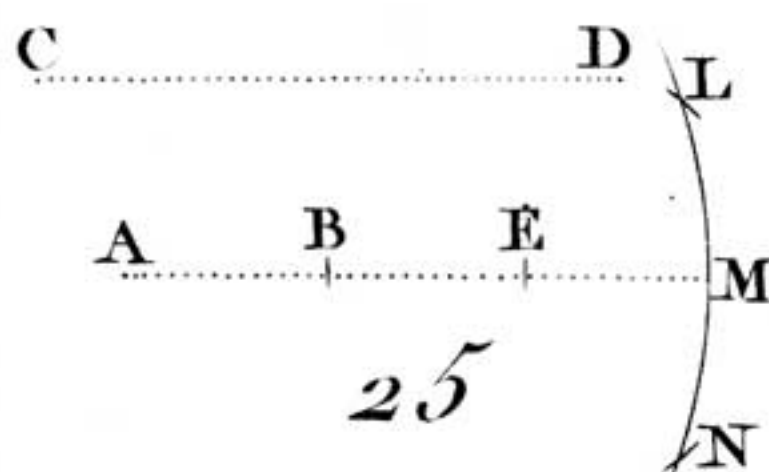




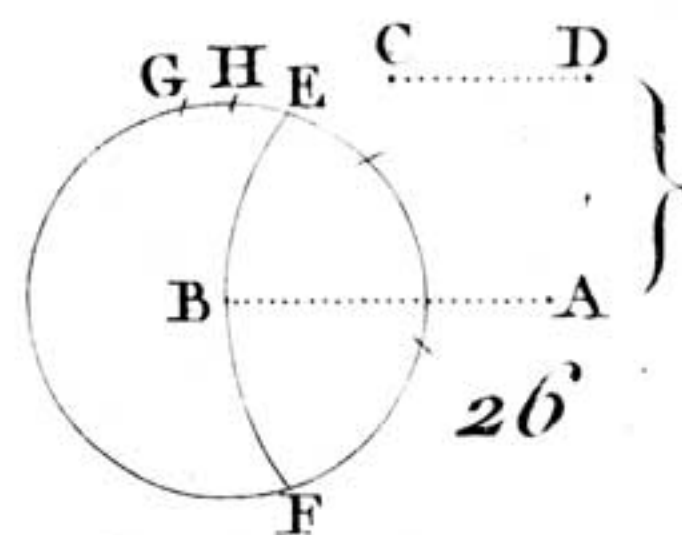




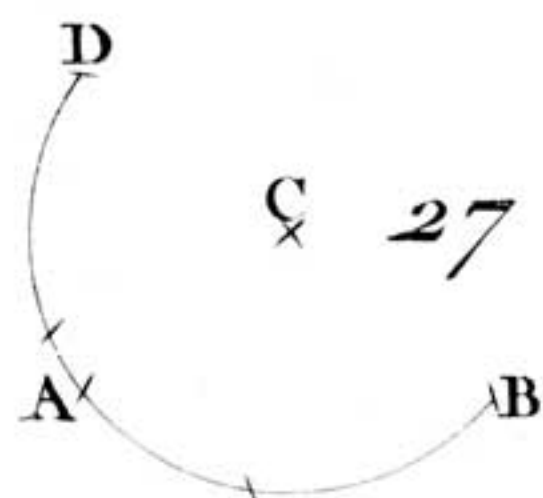
24



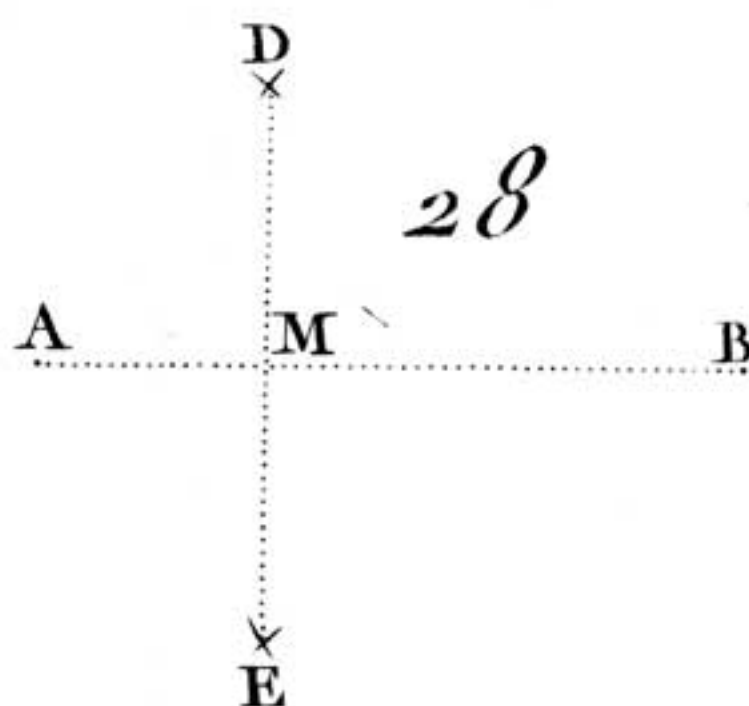
25



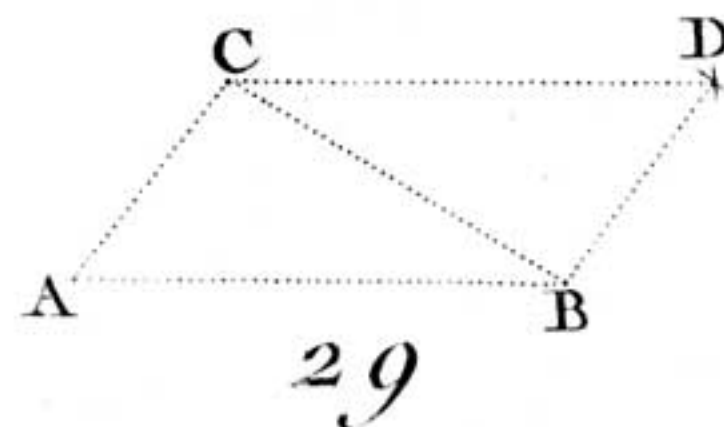
26



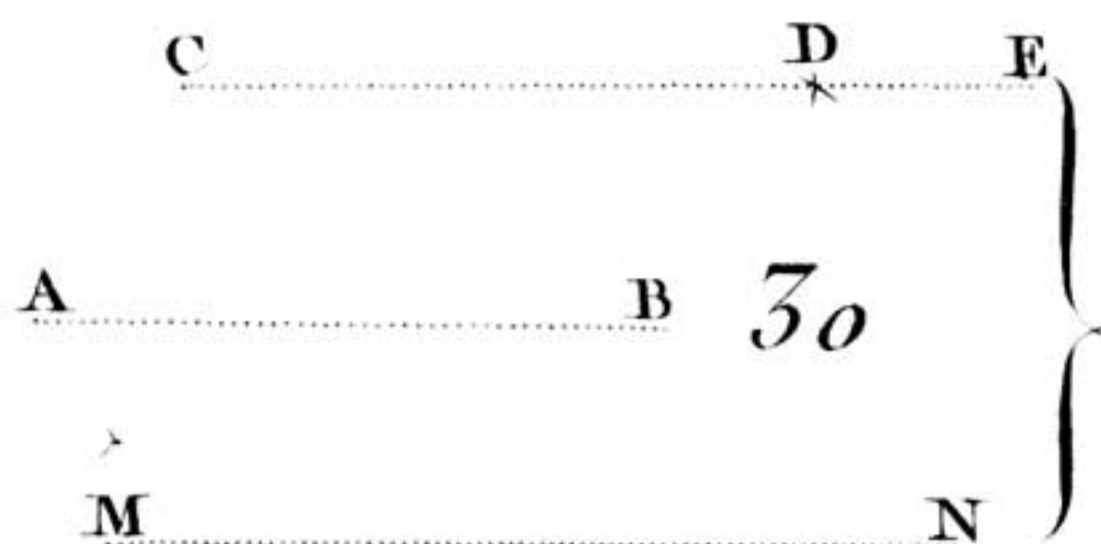
27



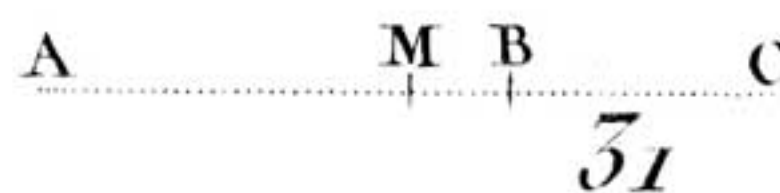
28



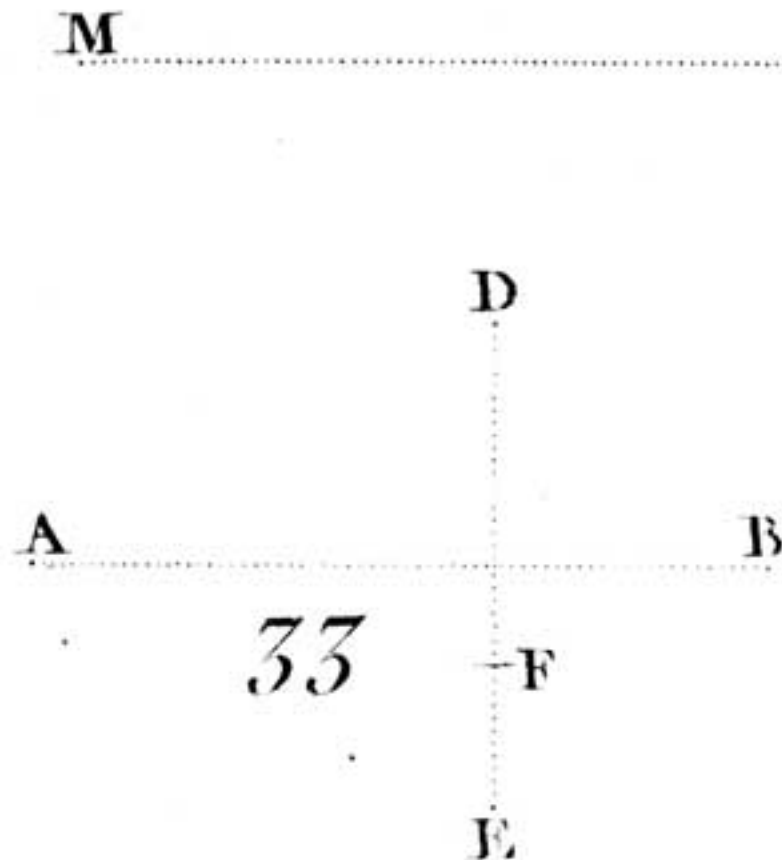
29



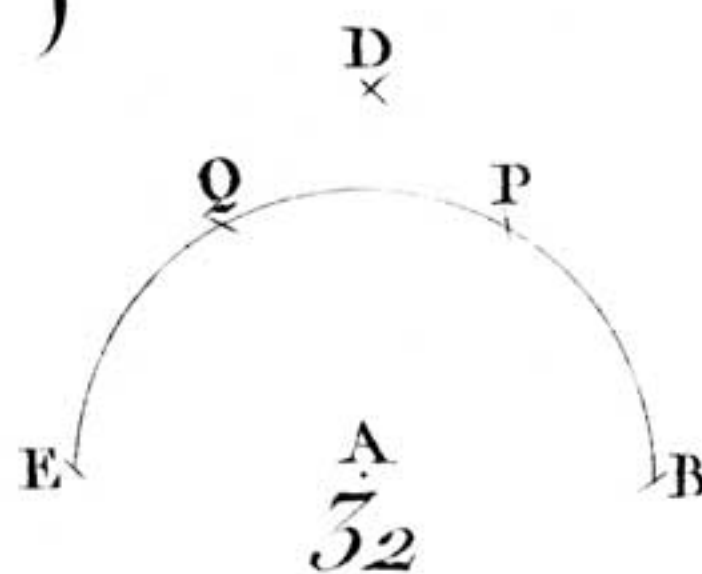
30



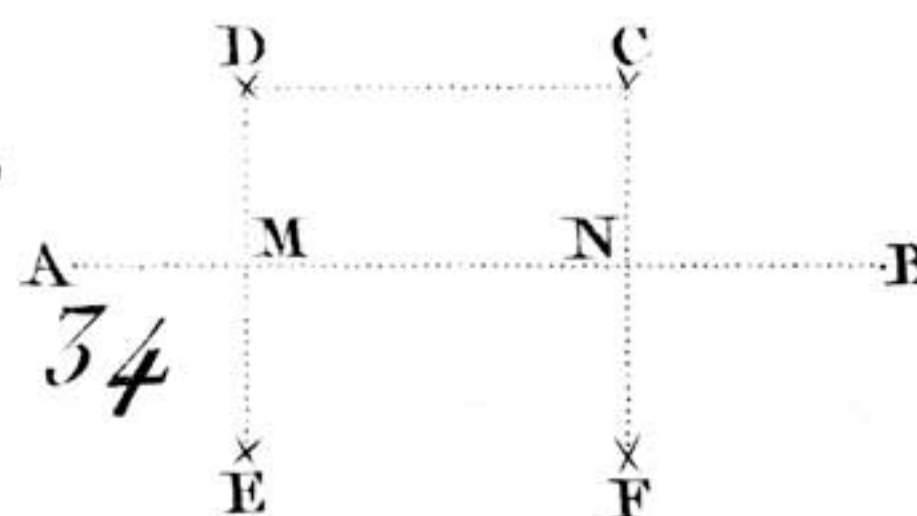
31



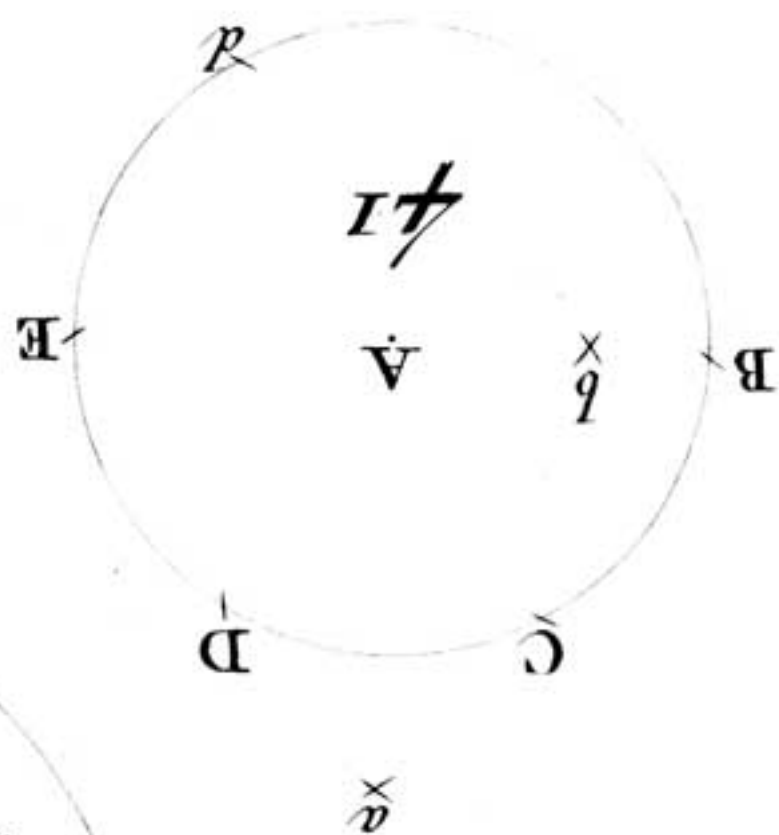
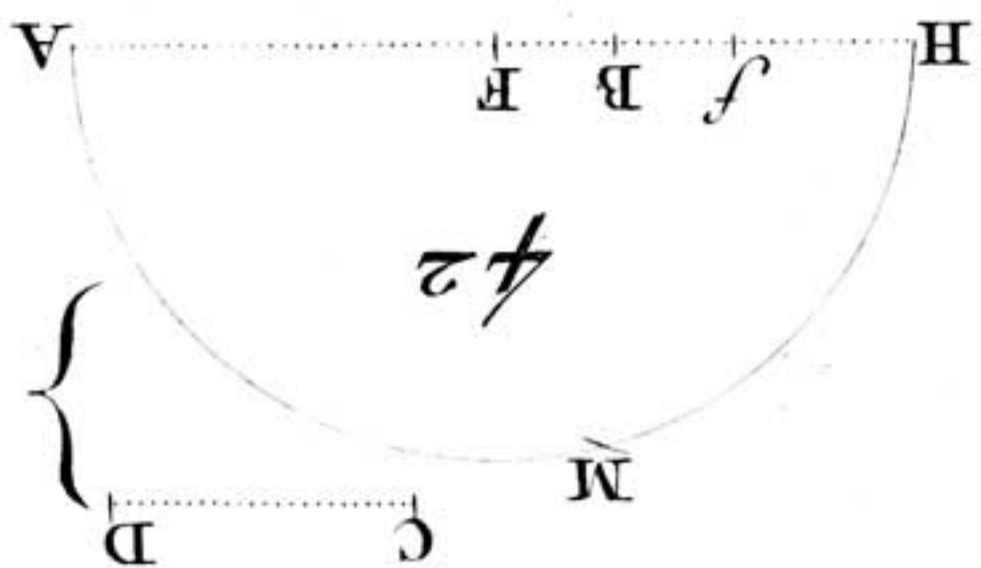
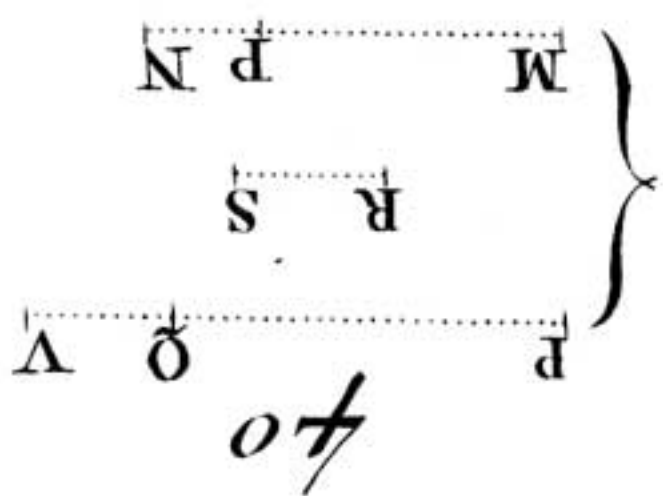
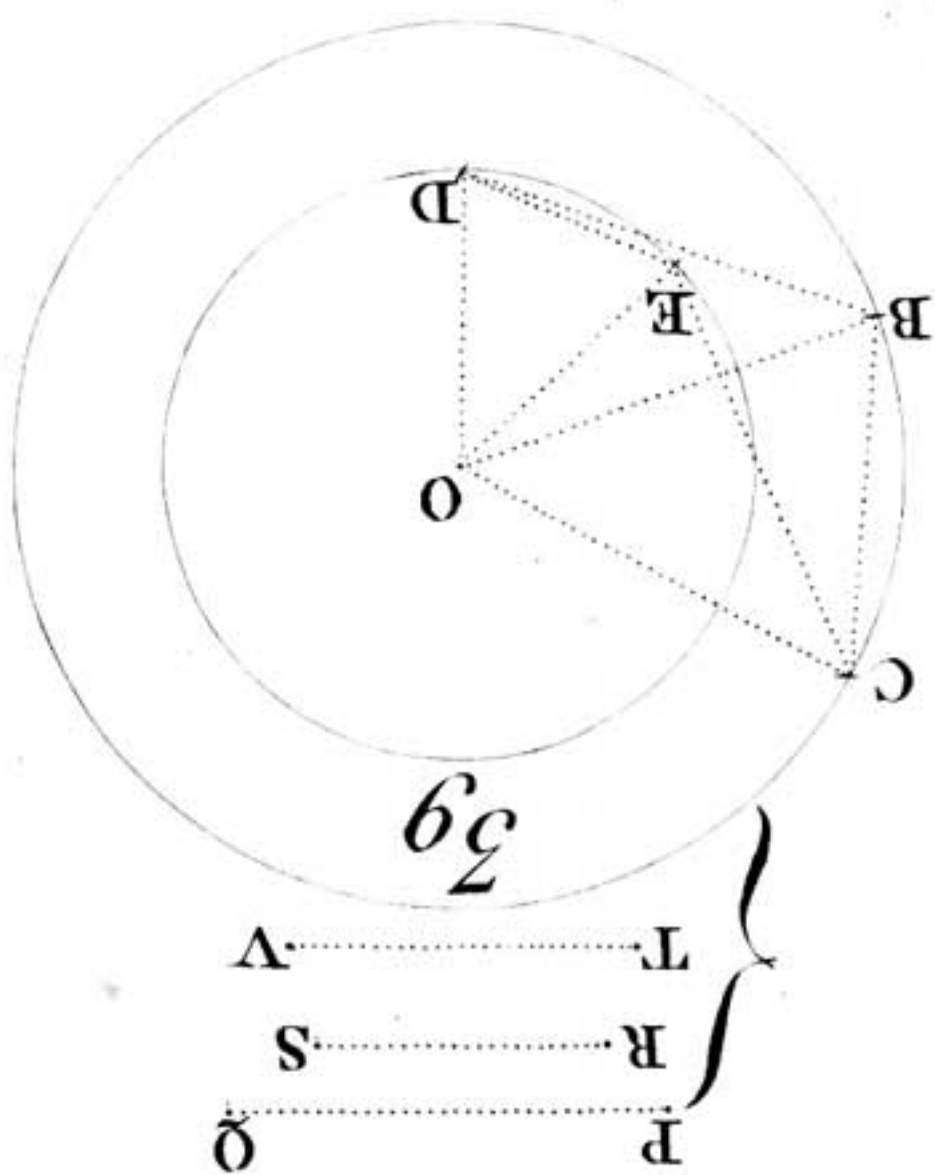
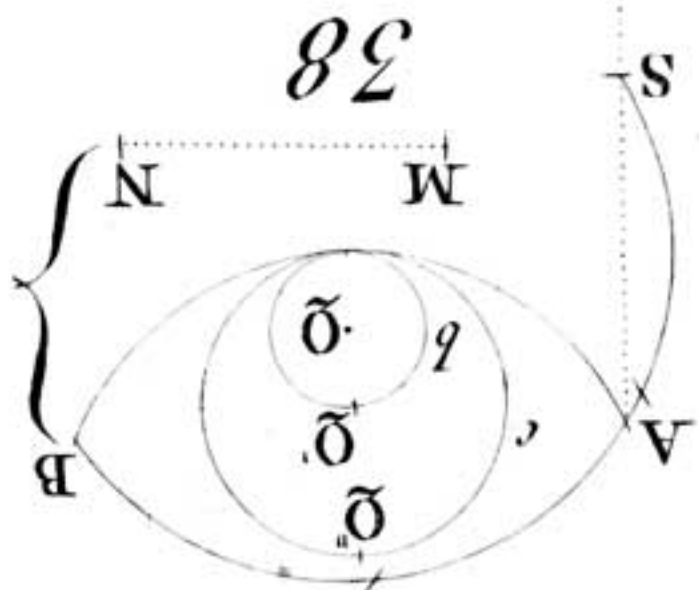
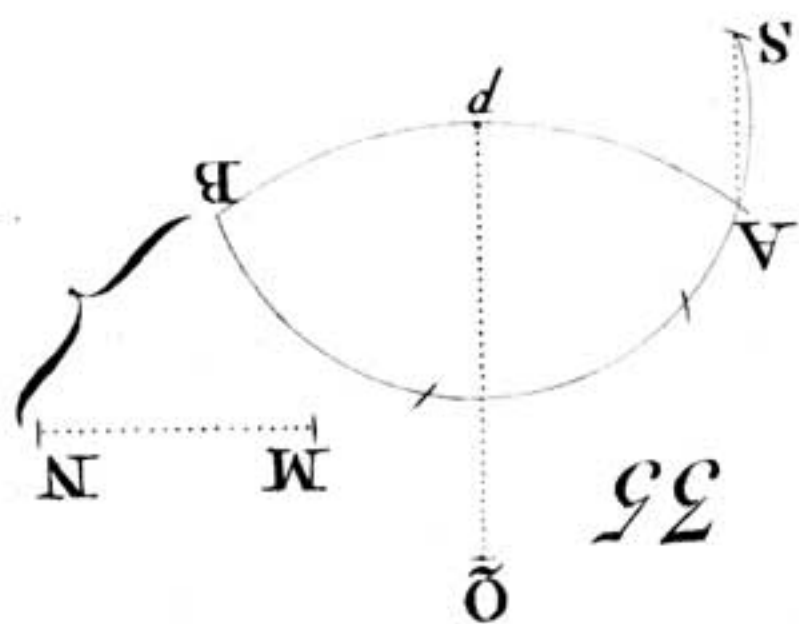
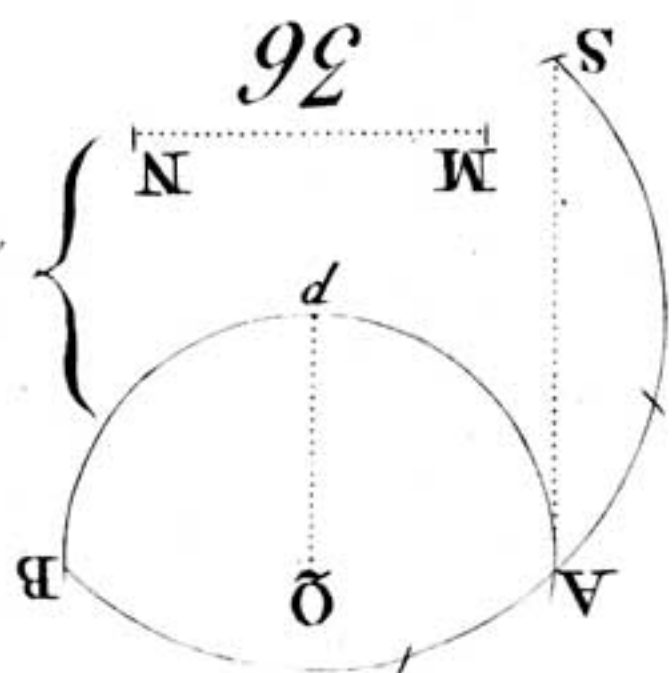
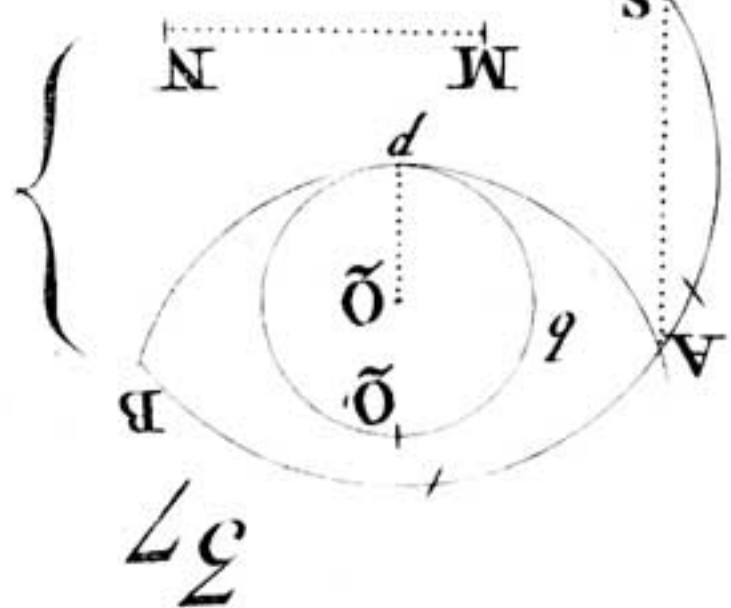
33

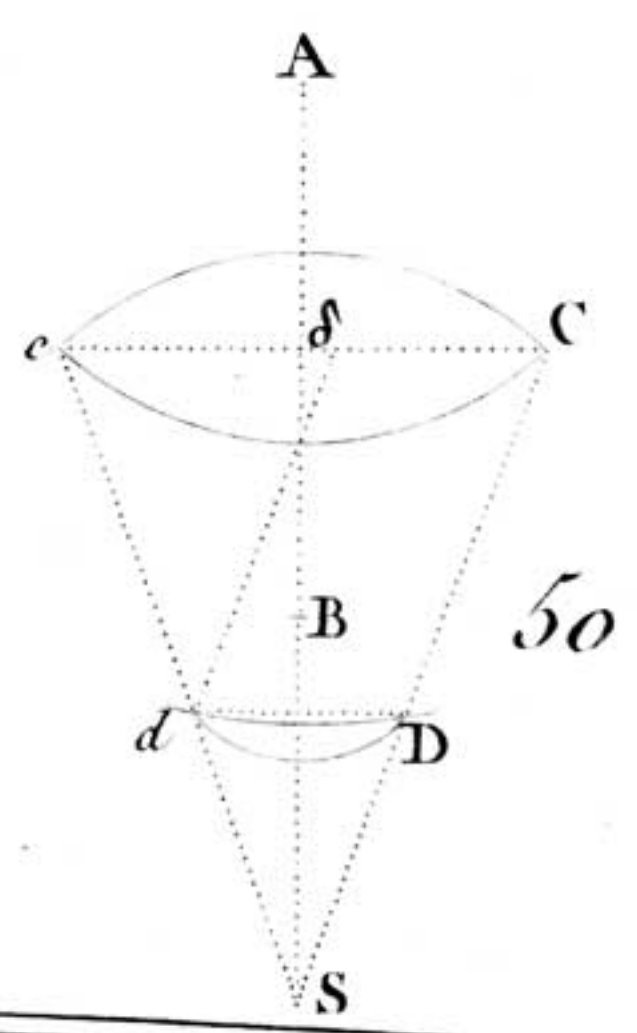
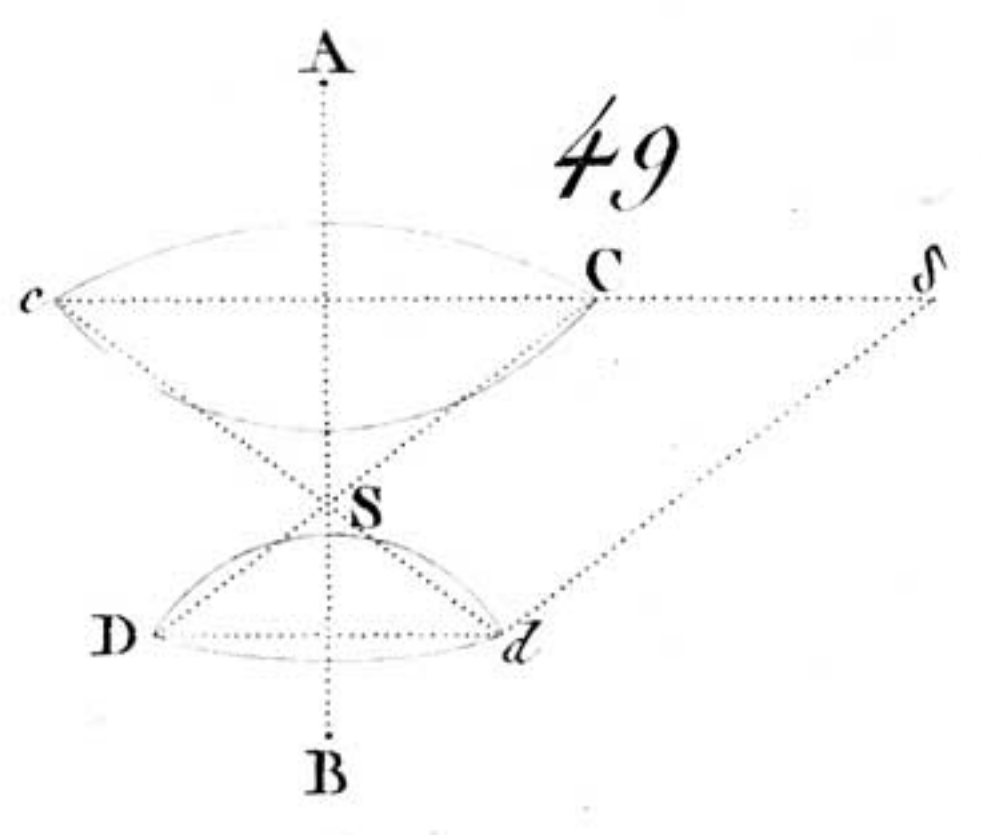
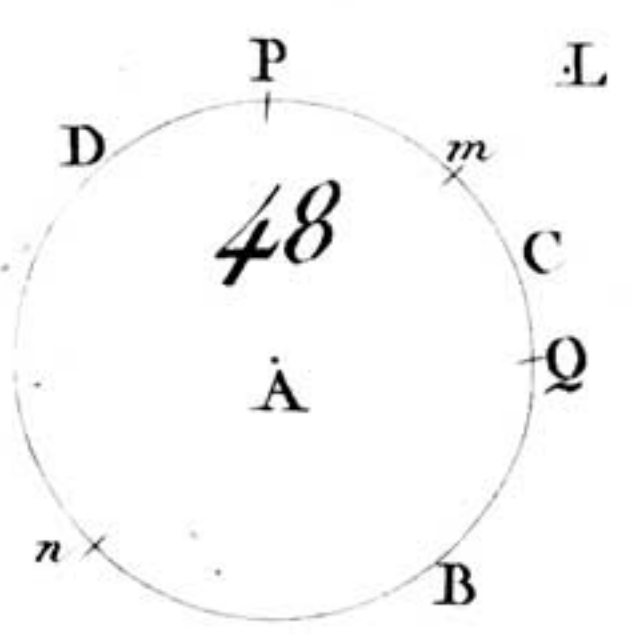
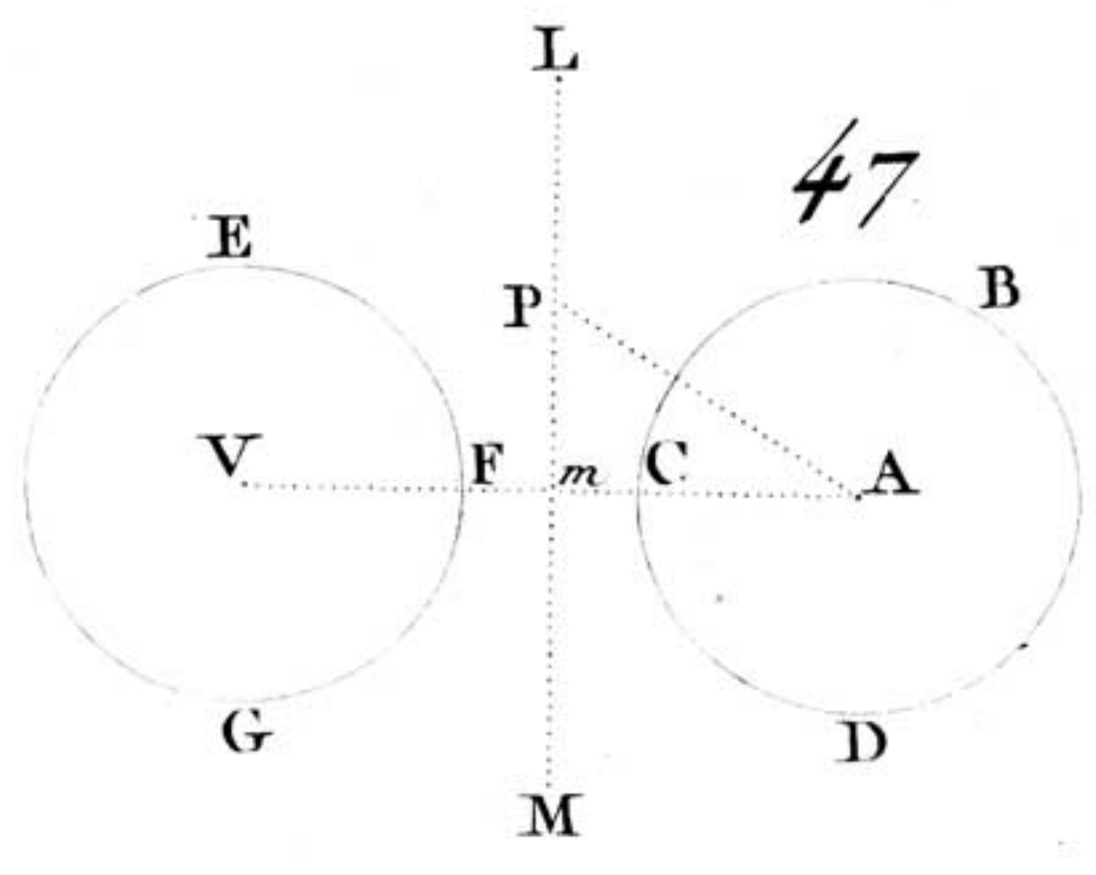
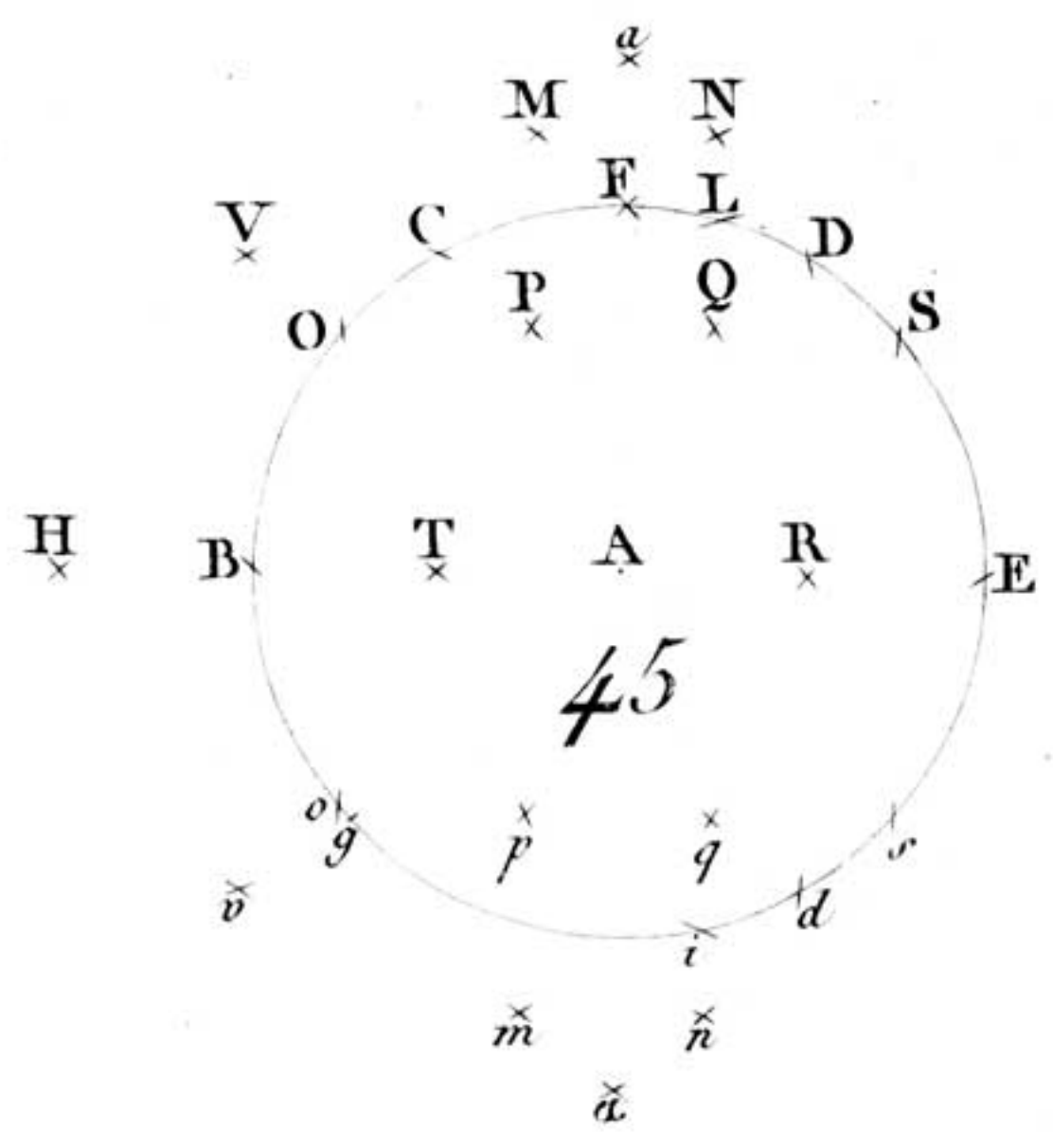
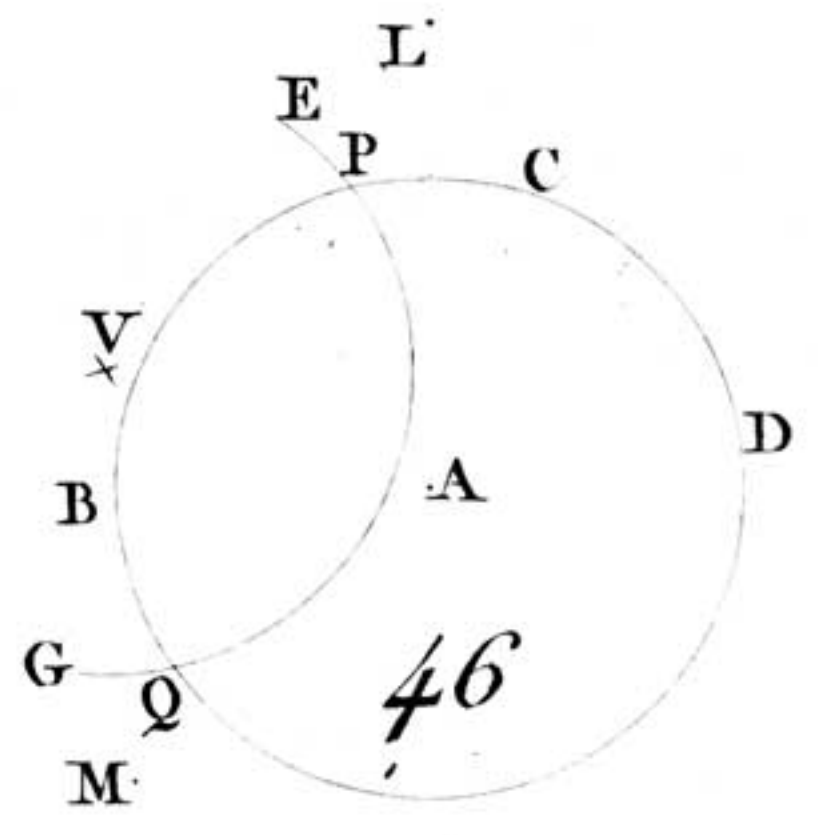
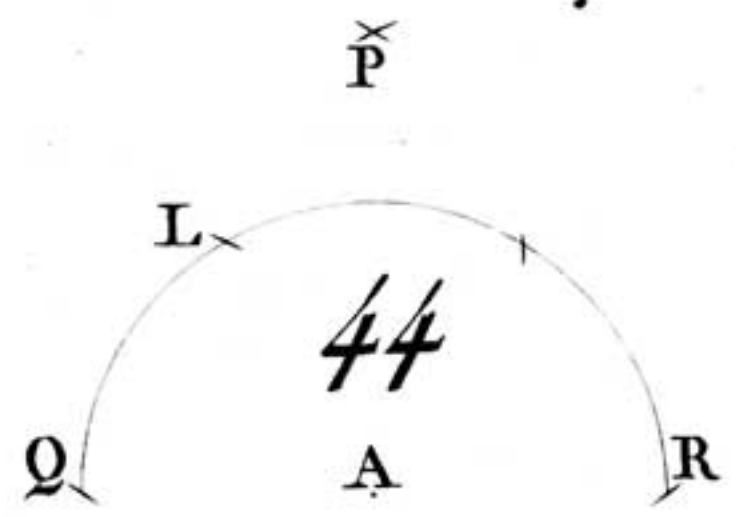
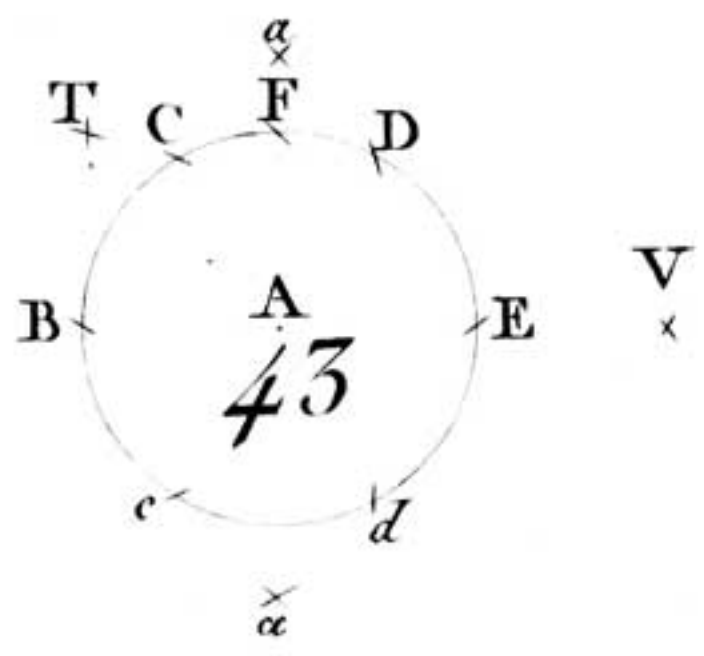


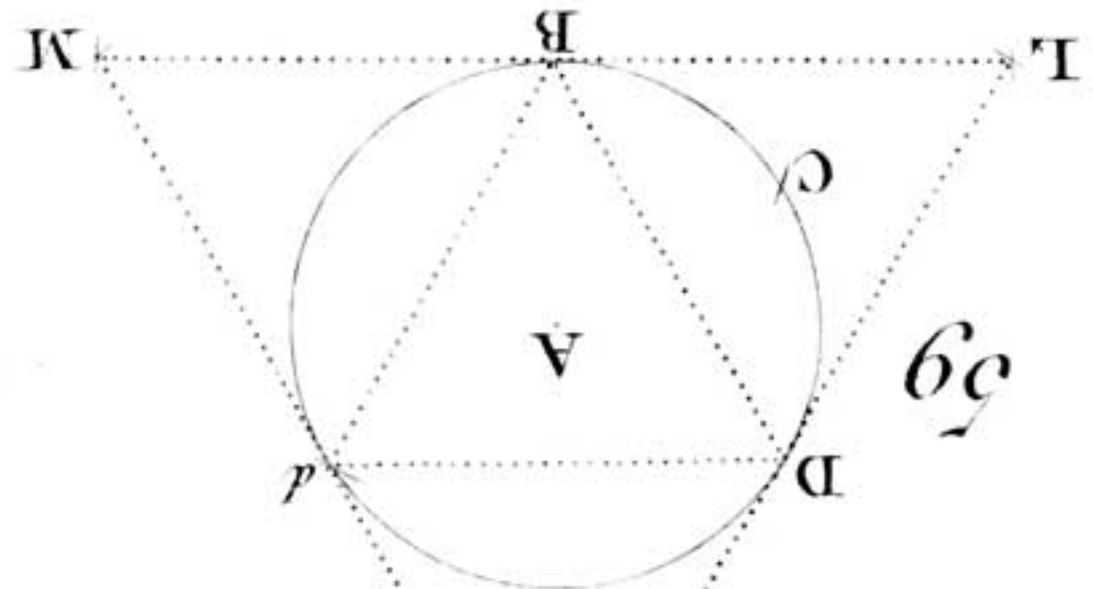
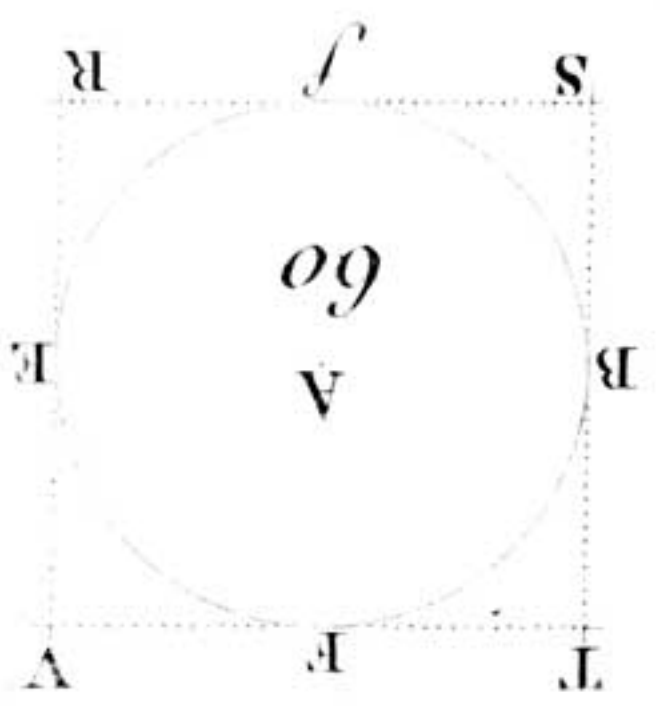
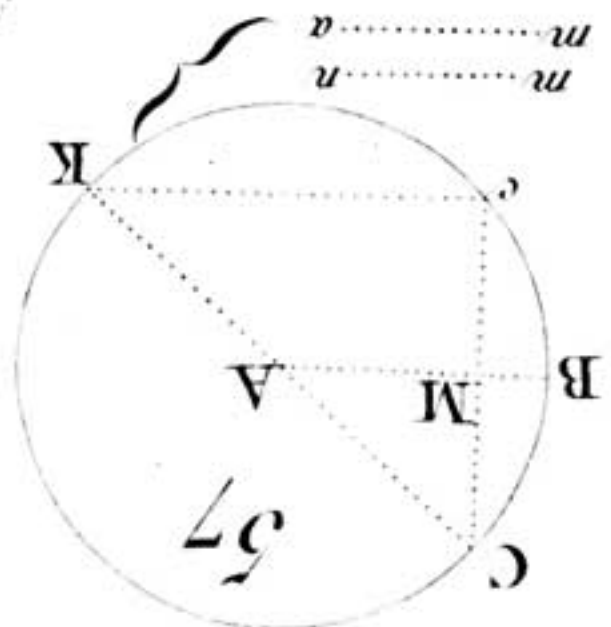
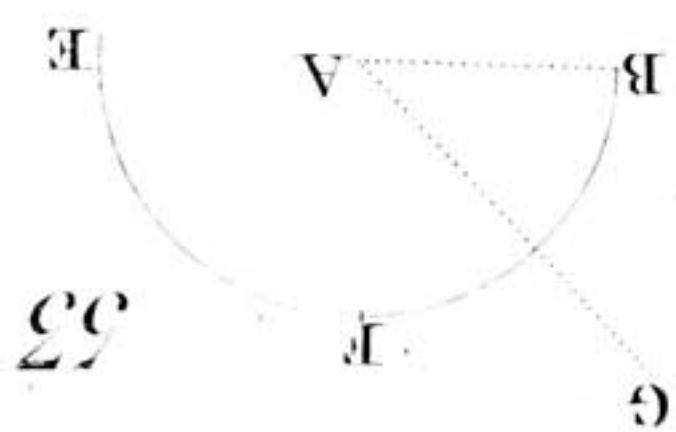
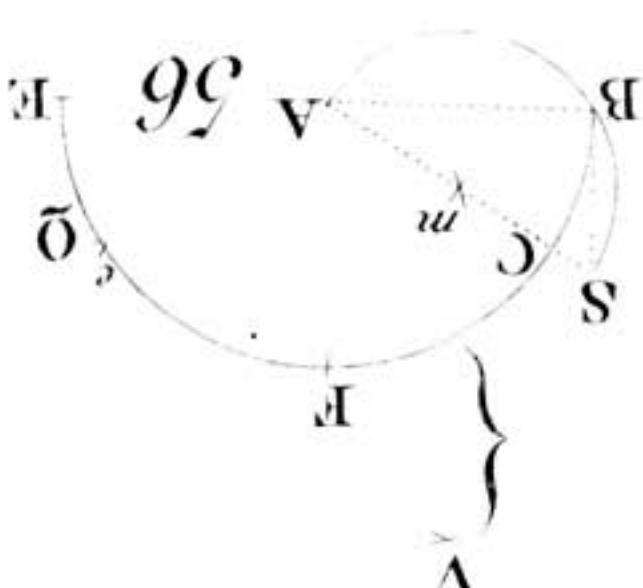
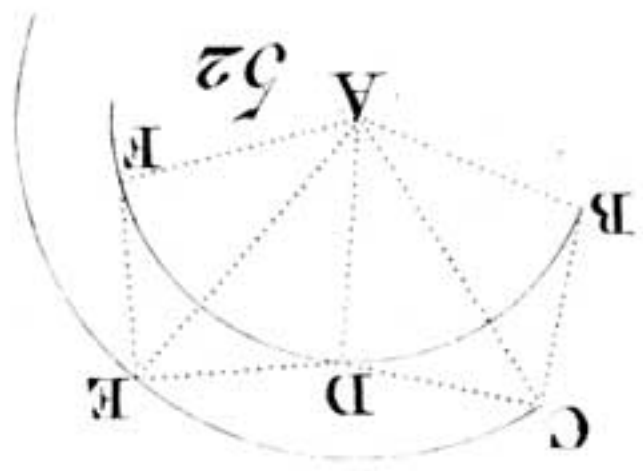
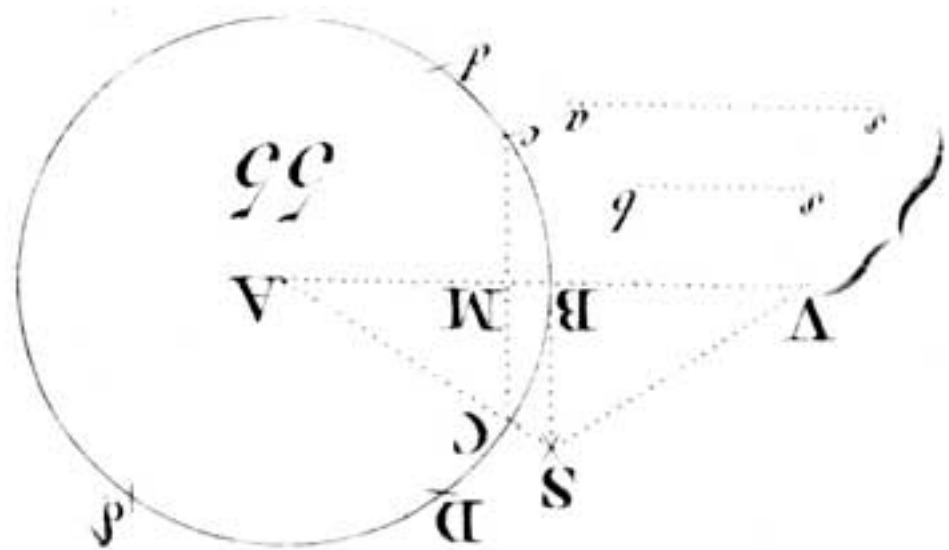
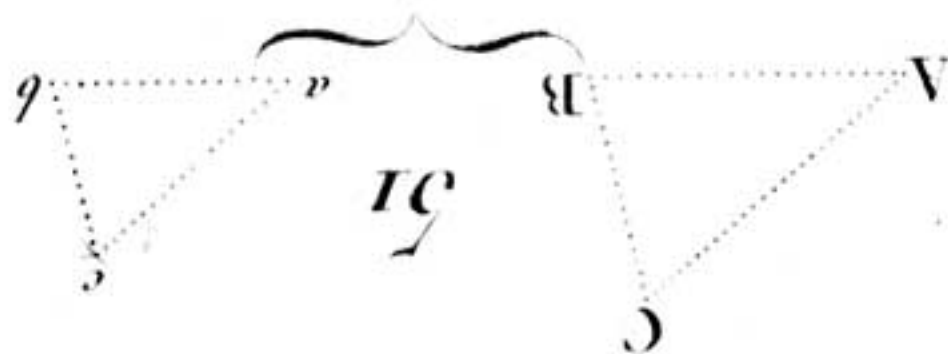
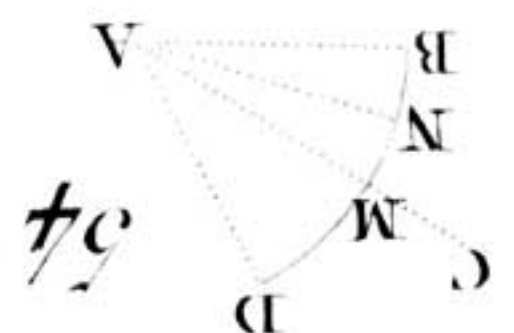
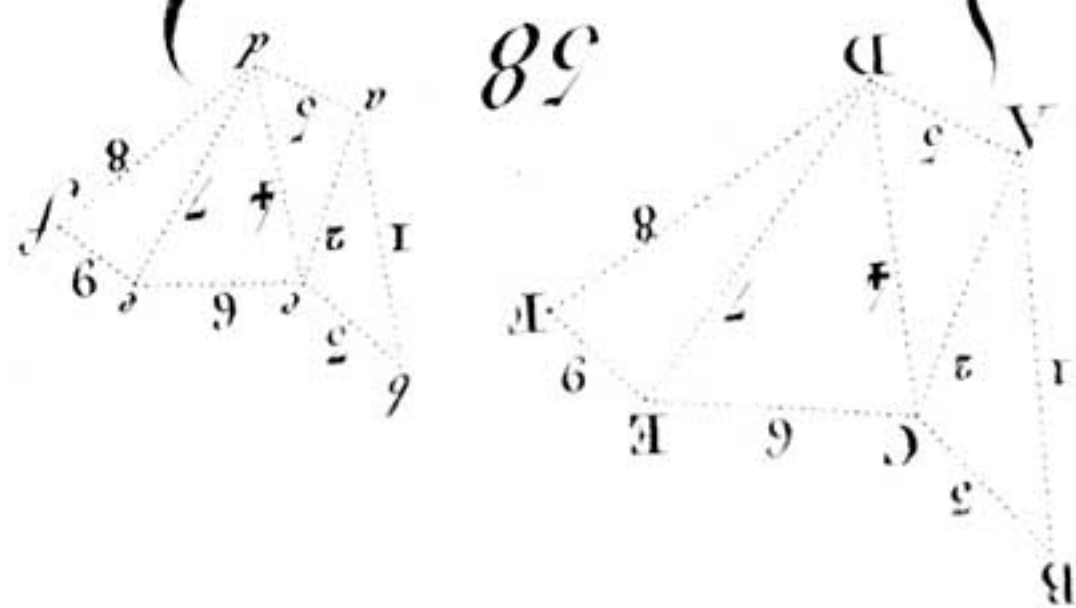
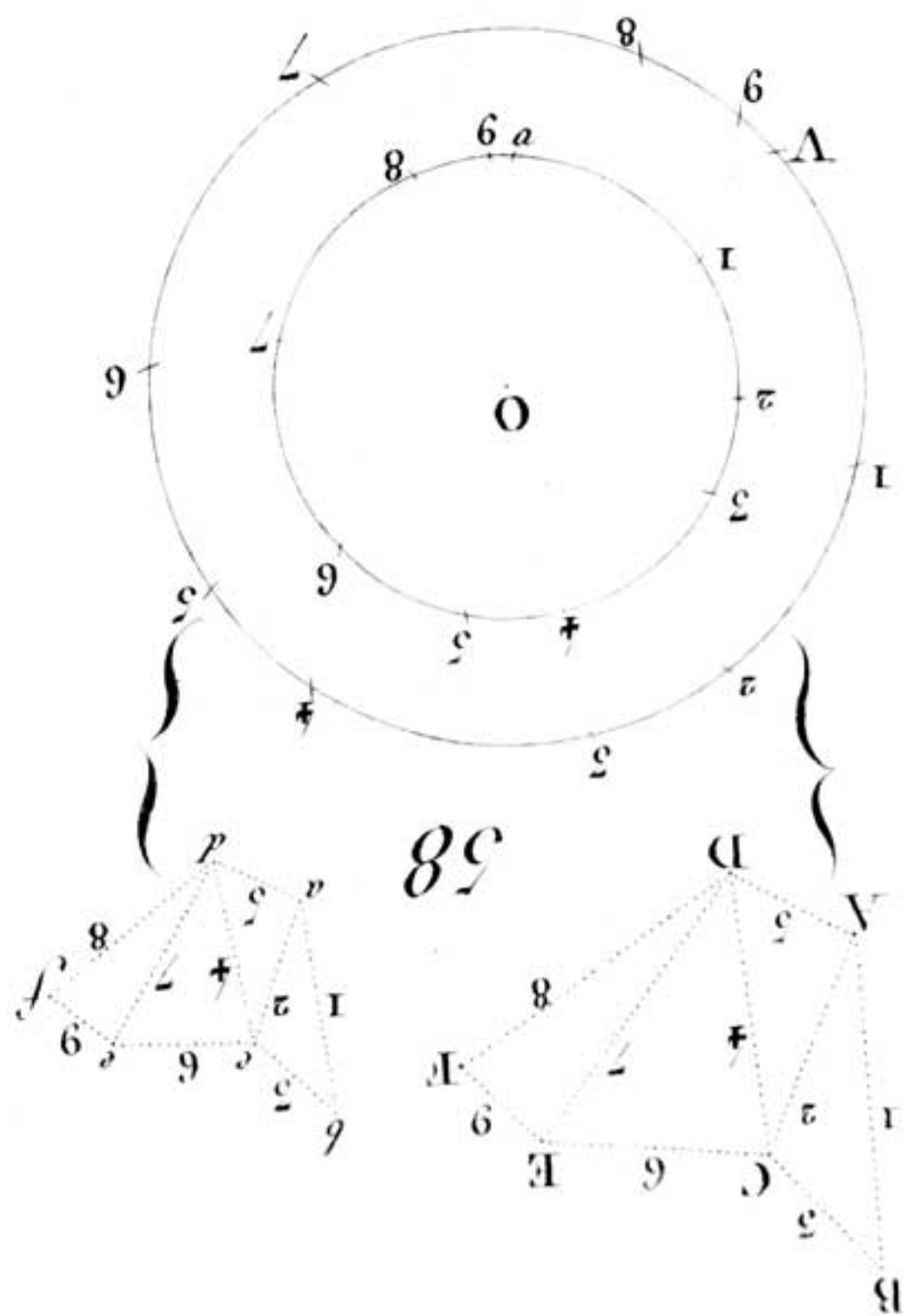
32

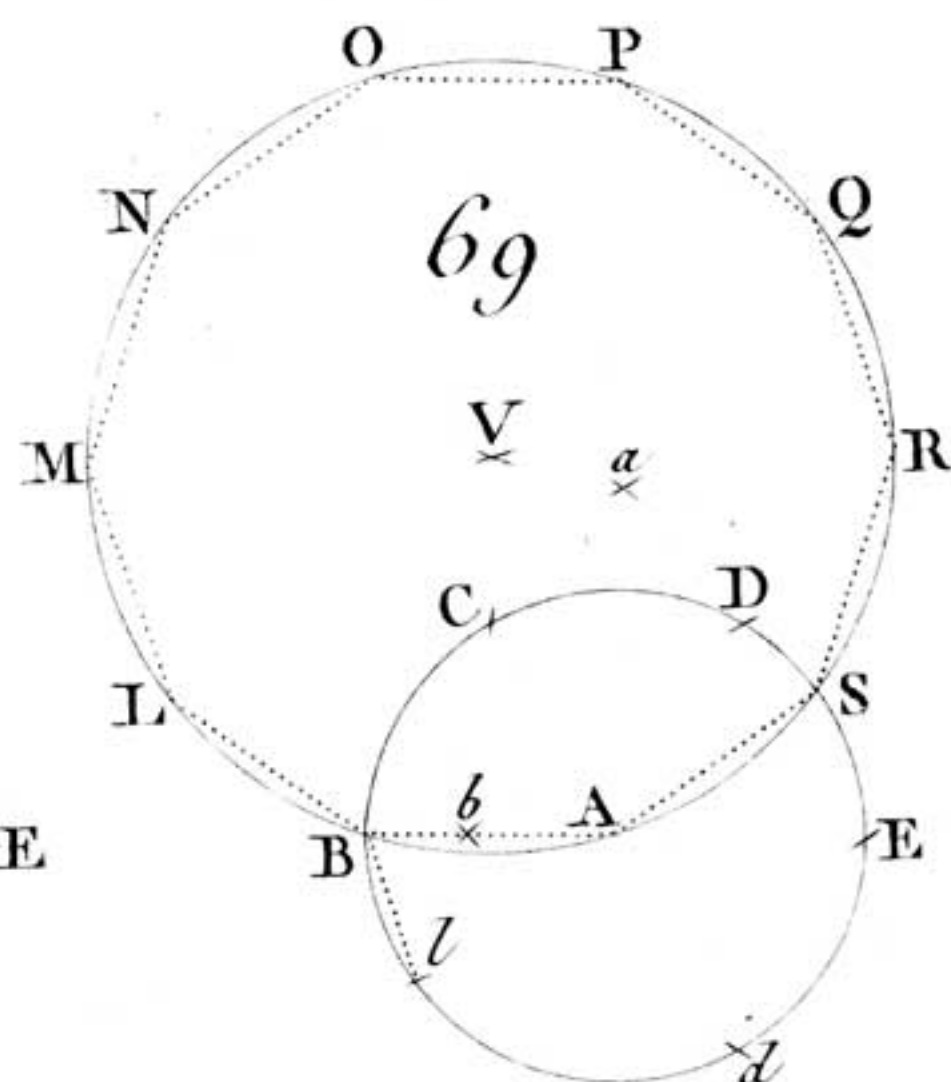
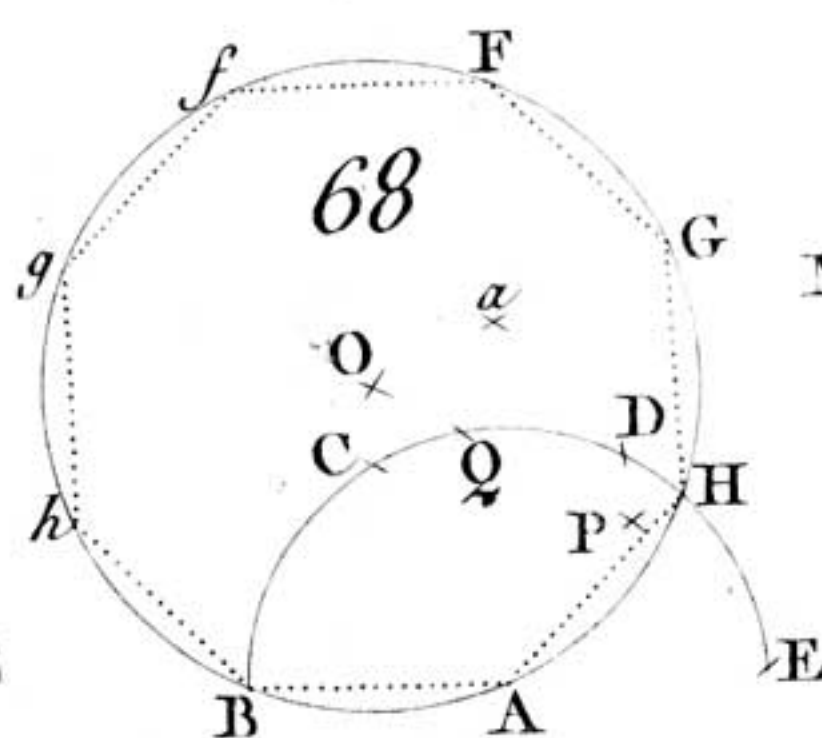
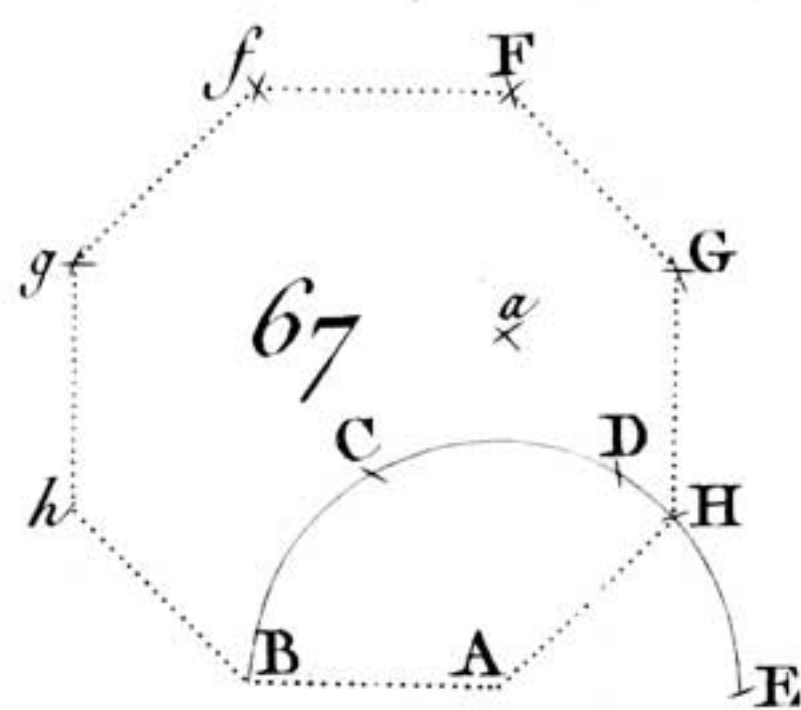
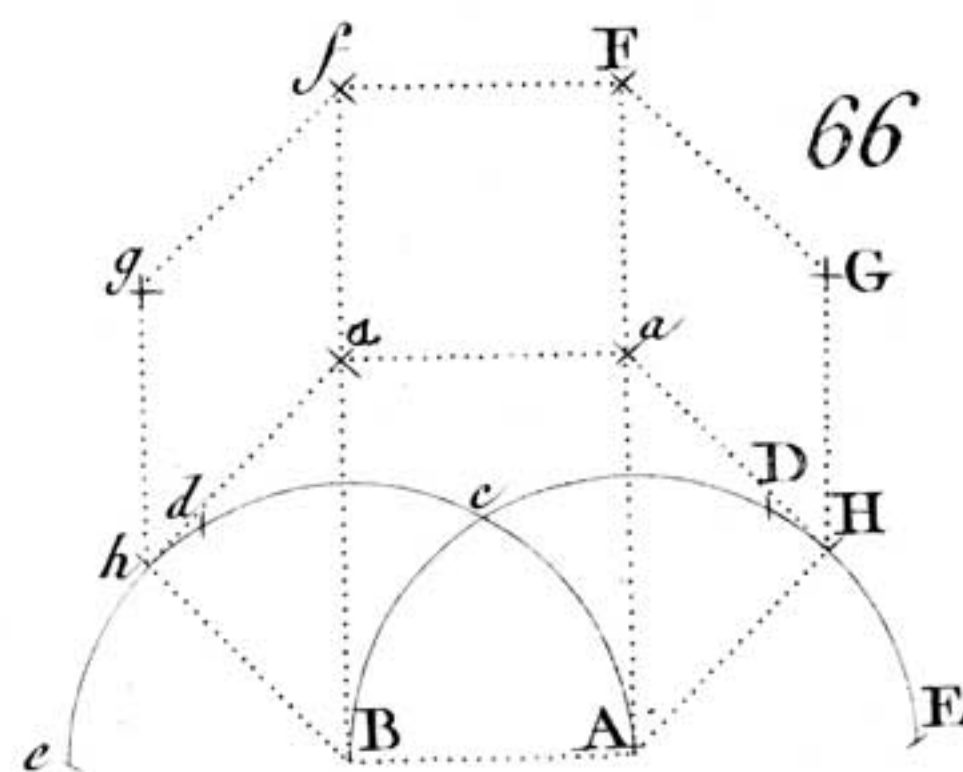
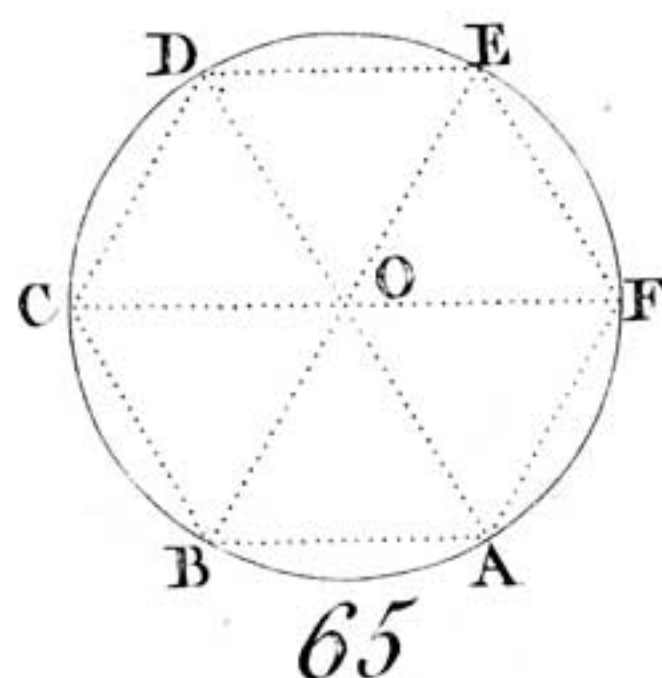
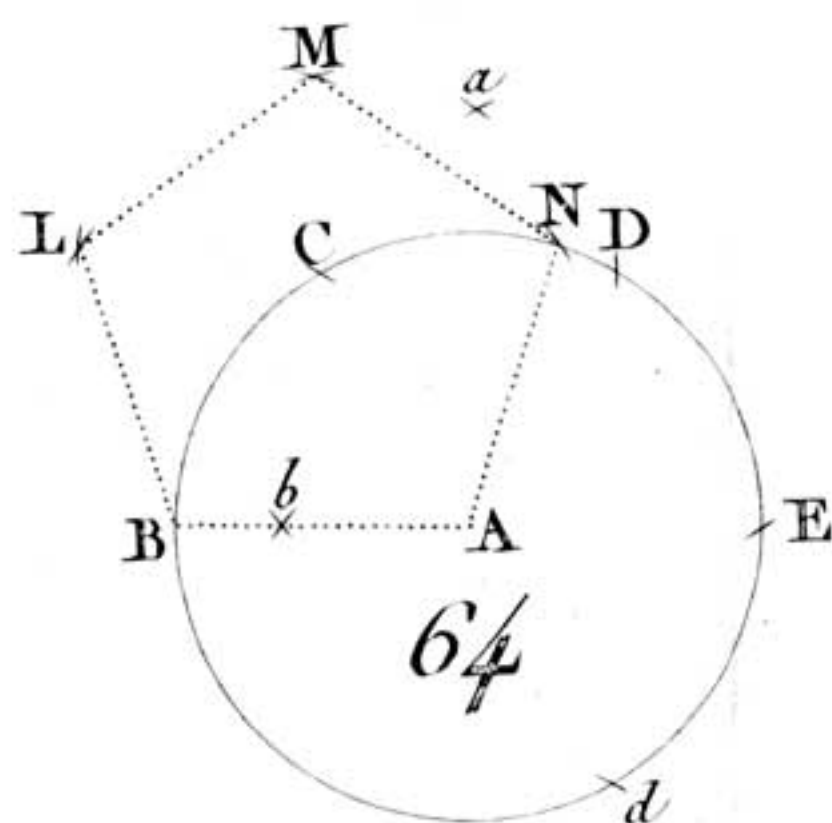
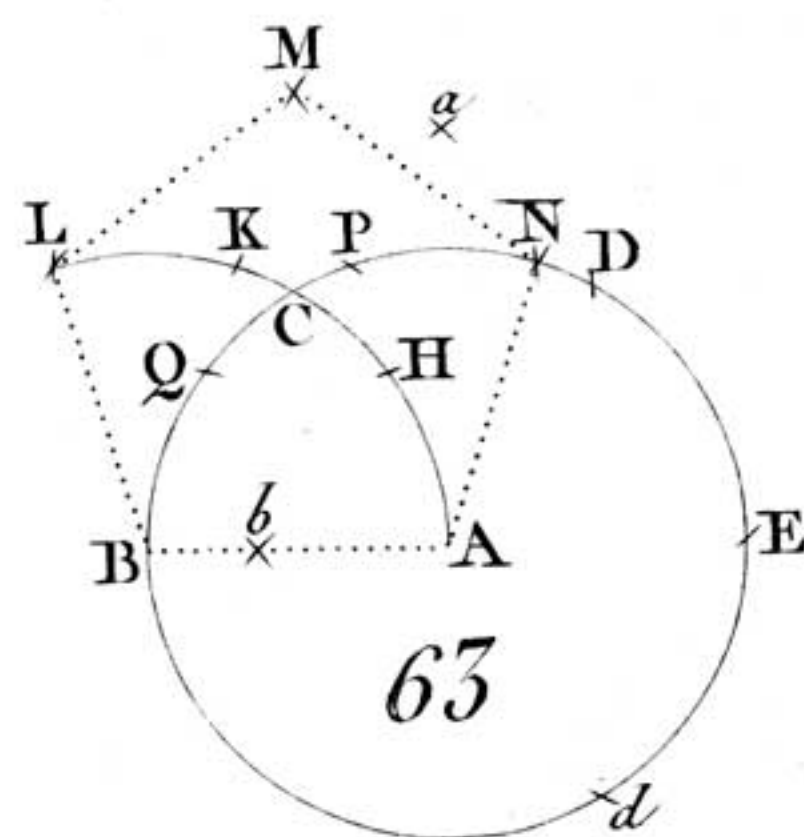
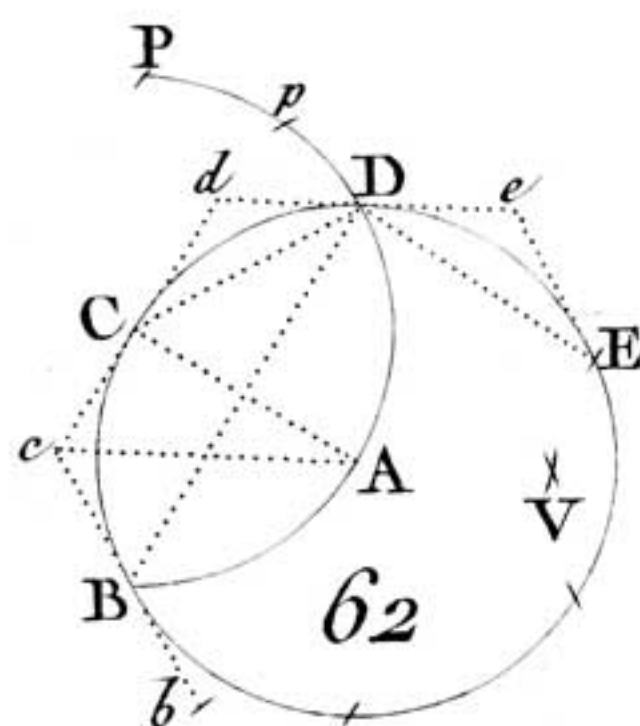
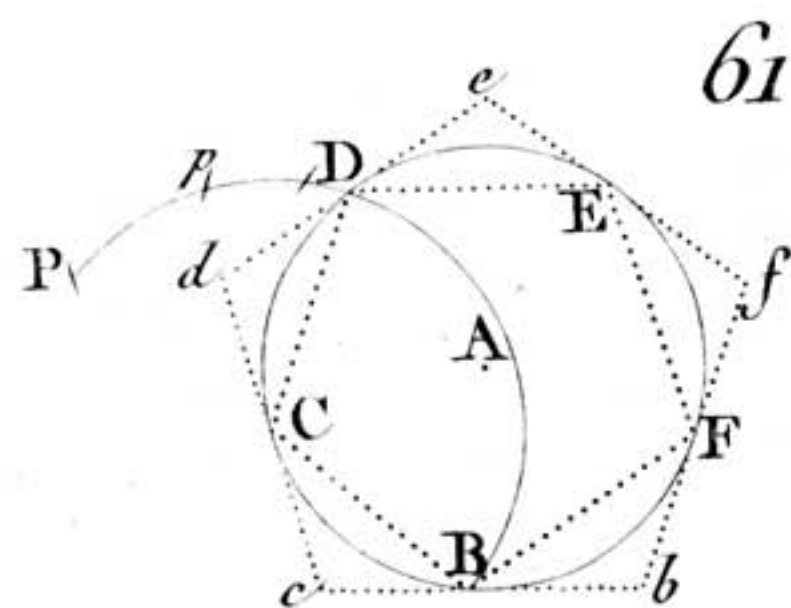


34









Duruisseau Sculp.

