

G É O M É T R I E

D U

C O M P A S.

MEMORANDUM

TO :

~~SECRET~~

G É O M É T R I E

D U C O M P A S .

Par L. M A S C H E R O N I ;

O U V R A G E T R A D U I T D E L ' I T A L I E N

Par A. M. C A R E T T E , Officier du Génie.

A P A R I S ,

Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques,
quai des Augustins.

A N V I . (1 7 9 8 .)

A BONAPARTE L'ITALIQUE.

J'AI vu ta main, ta main puissante,
Qui frappa tant de Potentats
Et fonda tant d'heureux Etats,
Aux loix d'Euclide obéissante,
Avec moi suivre le Compas.
Vainqueur de leur hauteur extrême,
Tu franchis les monts sourcilleux :
Ton génie aborde de même
Le plus difficile problème,
Et fait douter si nos neveux,
De ce génie à qui tout cède,
Admirant les efforts heureux,
En toi reconnoîtront le mieux
Annibal ou bien Archimède.
De tes triomphes éclatans
Je vois la mémorable année,
Comme un soleil, de gloire environnée,
Briller sur l'abyme des tems,
Et vaincre l'envie étonnée.
Poursuis, BONAPARTE, poursuis ;
De tes hauts faits soutiens la gloire.
Savant, de tous les arts épris,
Amant chéri de la victoire,
Héros, et plus sans doute encor,
Homme généreux et sensible,
Donne à ton ame un libre essor.
A ton bras toujours invincible,
A ton cœur toujours bienfaisant,
L'Italie enfin affranchie,
Va devoir sa nouvelle vie
Et son empire renaissant.

D' A R N A U D.

A BONAPARTE L'ITALICO.

Io pur ti vidi coll' invitta mano ,
Che parte i regni , e a Vienna intimò pace ,
Meco divider con ricurvi giri
Il curvo giro del fedel compasso.
E ti vidi assaltar le chiuse rocche
D'ardui problemi col valor d'antico
Geometra Maestro , e mi sovvenne
Quando l'Alpi varcasti Annibal novo
Per liberar tua cara Italia , e tutto
Rapidamente mi passò davanti
L'anno di tue vittorie , anno che splende
Nell' abisso de' secoli qual sole.
Segui l'impresa , e coll' invitta mano
Guida all' Italia tua liberi giorni.

E R R A T A.

Page 8 , ligne 4 , au lieu de Bp , lisez Pp.

Page 16 , ligne 20 , au lieu de points , lisez parties.

Ibid. ligne pénult. placez au commencement le n.º 30.

Page 34 , ligne 3 , au lieu de nous retirerons , lisez nous tirerons.

Page 55 , pour les n.ºs 73 et 74 , voyez la fig. 25.

Page 57 , pour le n.º 76 , voyez la fig. 26.

Page 58 , pour le n.º 77 , voyez la fig. 27.

Page 59 , pour le n.º 80 , voyez la fig. 29.

Page 169 , pour le n.º 171 , voyez la fig. 86.

Page 172 , ligne 18 , $\sqrt{3}$, lisez $\sqrt{\sqrt{3}}$.

Page 207 , ligne 19 , au lieu de nous sous-entendrons , lisez nous supposerons.

P R É F A C E

DE L'AUTEUR.

LA première idée qui m'engagea à tenter la carrière nouvelle de la Géométrie du Compas fut celle-ci : Puisque l'on fait chaque jour de si belles découvertes en avançant dans les Mathématiques , ne pourroit-on pas , en revenant sur ses pas , trouver quelque'endroit encore inconnu dans le vaste champ qu'elles offrent à parcourir ? Jusqu'ici on a regardé en Géométrie comme les solutions les plus simples celles qui n'exigeoient que le secours de la règle et du compas : c'est-à-dire , de la ligne droite la plus simple des lignes et du cercle la plus simple des courbes. A ces deux instrumens des problèmes , si on peut s'exprimer ainsi , qui pendant un tems constituoient , et déterminoient la Géométrie élémentaire , on ajouta dans la suite les courbes coniques ; celles-ci furent suivies des courbes supé-

rieures au second degré, et des transcendentes de diverses espèces.

Le domaine de la Géométrie continua à s'accroître, à l'aide de ces profondes recherches et avec le nouveau secours de l'analyse finie et infinitésimale, au point, que les inventions qui d'abord avoient fixé l'admiration des Anciens, et mérité les sacrifices de Thalès et de Pythagore, sont devenus l'apanage des enfans de nos jours. Je me dis à moi-même : ne pourrois-tu pas revenir aux élémens, en rentrant dans la ligne de démarcation, et chercher s'il n'est jusqu'ici rien resté en arrière qui ait été négligé ? Est-il bien vrai que les problèmes élémentaires d'Euclide soient de la plus simple construction possible ? Ne pourroit-on pas décomposer l'élément mathématique en ses élémens fondamentaux, la règle et le compas, à l'exemple de ceux qui ont décomposé l'eau en deux airs, et un air regardé jusqu'à présent comme simple, en deux autres substances ?

Alors

Alors je m'avisai que , la règle seule ne pouvant servir qu'à conduire une ligne droite , l'on pouvait peut-être n'employer que le compas , non pour décrire seulement un cercle ou un arc , mais en en décrivant plusieurs de différens centres et avec diverses ouvertures , trouver par le moyen des sections mutuelles de ces cercles plusieurs points utiles et précisément les points cherchés de position dans un problème quelconque. J'ai remarqué jusqu'ici que cette branche n'avoit encore été cultivée par aucun Mathématicien , et que les solutions de ce genre , obtenues par hasard à l'aide du compas seul , auroient été par leur construction plus élémentaires que toute autre.

Deux raisons cependant me firent hésiter pendant quelque tems à entreprendre cet ouvrage , dans la crainte qu'en me servant de ce moyen , mes efforts ne devinssent inutiles ; d'abord , je ne voyois pas trop ce qui résulteroit de trouver avec le seul compas des points que d'au-

tres ont trouvé avec le compas et la règle réunis. Je craignois en second lieu, et cela étoit bien naturel, que mes essais ne fussent pas couronnés du succès que j'en espérois; mon travail alors eût été perdu. Les constructions faites avec le seul compas pour déterminer les points de la Géométrie élémentaire, pouvoient être encore plus compliquées que celles déjà connues où l'on employoit de plus la règle. Ma théorie auroit ainsi manqué d'élégance, et la pratique de précision; ainsi j'étois sur le point d'abandonner mon entreprise.

Dans mon incertitude, il m'arriva par hasard de relire la manière avec laquelle Graham et Bird en Angleterre divisèrent leurs grands quarts de cercle astronomique (*Encyclopédie méthodique. Article quart de cercle mural.*) Celui qu'a fait Graham pour l'observatoire de Greenwich, non-seulement a servi de modèle à la plus grande partie de ceux qu'on a faits depuis, mais encore a mérité par sa précision d'être regardé par les Astronomes comme

un des meilleurs jusqu'à ceux de Ramsden. Je m'apperçus donc que la division de cette célèbre machine avoit été faite à l'aide du compas seul sans la règle ; rien de plus intéressant que la description des moyens employés par cet Artiste , dans cette longue et ingénieuse opération. Je n'entrerai point ici dans l'explication des motifs qui firent exclure la règle ; ils seront facilement sentis par ceux qui se connoissent en travaux de ce genre. Pour démontrer en général la supériorité de l'usage du compas sur celui de la règle , quand il s'agit de décrire avec précision des lignes à l'épreuve du microscope , il suffit de dire qu'avec une règle tant soit peu longue , il est presque impossible de garantir la précision de tous les points qu'on trace , tant il est difficile qu'elle soit rigoureusement droite dans toute sa longueur. Fût-elle même très-droite , les praticiens savent que la trace d'une ligne menée le long de la règle porte avec elle une incertitude de

parallélisme dans le mouvement de l'axe de la pointe qui marque , ou de parfaite application de cette pointe à l'arête de la règle. Le compas n'est point sujet à ces deux inconvéniens , il suffit que son ouverture soit fixe et les pointes très-fines ; en plaçant l'une d'elles en un point pris pour centre , l'autre décrit un arc aussi exact qu'il est possible. En lisant la description de la méthode de Graham , je remarquai qu'il rencontra quatre difficultés :

La première , fut d'être obligé d'opérer par tâtonnemens. En parlant en effet de l'arc de soixante degrés qu'il détermina par le moyen du rayon , on voit que toutes les subdivisions furent faites par essais. Les Anciens ne nous ont laissé le moyen de diviser la circonférence avec le seul compas qu'en six parties, comme il est enseigné et démontré dans la quinzième proposition du liv. 4 des élémens d'Euclide ; Graham ne put donc obtenir une précision géométrique que pour un point.

Le second inconvénient fut, la perte de tems que les plus habiles mêmes ne sauroient éviter dans les expériences.

Le troisième fut, d'avoir été obligé d'employer deux plans, un pour les essais, et l'autre qui étoit le quart de cercle lui-même, sur lequel il transposoit les résultats; ce qu'il faisoit pour ne pas gâter, par les essais sur le quart de cercle, la surface du limbe.

Enfin la quatrième difficulté fut, d'avoir été obligé d'exécuter deux divisions différentes; comme la division du quart de cercle en 90° entraînoit avec elle les subdivisions d'un arc en 3 et en 5 parties, et que les essais de ces subdivisions étoient imparfaits par le trop grand nombre d'erreurs inévitables, il voulut tenter une autre division du même quart de cercle, approchant de la première, qui ne divisoit l'arc que de deux en deux parties. Ayant donc divisé l'arc de 60° en deux parties, il eut l'arc de 30° ; le quart de cercle se trouvant par-là divisé

en 3 parties , avec les subdivisions par 2 , on eut ensuite la 6.^{me} , la 12.^{me} partie , jusqu'à ce qu'enfin le quart restât divisé en 96. Cette division étoit celle qui méritoit le plus de confiance ; mais l'autre division en 90 degrés , devant servir immédiatement aux Astronomes , fut comparée à la première , et corrigée par le moyen d'une table calculée à cet effet.

Tous ces inconvéniens engagèrent sans doute Bird à recourir à une autre méthode pour diviser ses quarts de cercle. Elle consistoit à déterminer les arcs par leurs cordes qu'il prenoit sur une échelle divisée en parties égales. Elle n'étoit pas cependant exempte d'imperfections , puisqu'elle manquoit d'abord de précision géométrique , et qu'en second lieu , le quart de cercle avoit nécessairement les inexactitudes qui se trouvoient sur l'échelle.

L'importance des instrumens astronomiques m'engagea à considérer mon projet de la Géométrie du compas , sous un point de vue plus favorable. Je commen-

çai à croire que j'aurois beaucoup fait, si je réussissois à diviser la circonférence en plus de six parties par le secours du compas seul; j'aurois rendu aux artistes qui travaillent aux instrumens astronomiques, un service d'autant plus important, que mes subdivisions de la circonférence auroient été plus étendues et plus conformes à la division du quart de cercle en 90° . Je fournissois à cette classe de mécaniciens un moyen de précision géométrique dans leurs divisions. Je leur épargnois le tems des tâtonnemens, la nécessité de faire deux divisions à-la-fois et sur deux plans différens, et sur-tout je rendois inutile l'usage de l'échelle dont on ne peut garantir l'exactitude, bien loin qu'elle soit d'une rigueur géométrique. Il ne me restoit que la seule crainte, que ma nouvelle méthode ne fût compliquée et trop longue pour être commode dans la pratique.

Je me mis néanmoins à l'ouvrage. Voyant que je ne devois pas attendre

b iv

beaucoup de l'application de l'algèbre à la géométrie, j'eus recours à d'autres moyens purement géométriques. Je ne les indique pas ici, parce que dans cette nouvelle carrière je n'ai pas tenu toujours la même route, et que je dois beaucoup au hasard. Ce n'a été souvent qu'après mainte tentative différente, que j'ai obtenu le résultat que je cherchois.

Je laisse à d'autres le soin d'examiner la chaîne qui lie entr'eux les problèmes de cette nouvelle théorie; ils parviendront peut-être à suivre le fil qui conduit par ordre de l'un à l'autre, et qui, s'il eût été découvert dès le commencement, auroit rendu plus courte et plus facile l'invention de la Géométrie du compas.

J'adressai, il y a deux ans, le premier essai de mon entreprise au citoyen Annibal Beccaria, avec une lettre que je fis insérer dans le journal de Brugnatelli. Cet excellent artiste, alors Patrice Milanais, depuis membre de la municipalité et du comité d'instruction publique

de cette ville , réunit à la gloire d'être le frère du célèbre auteur du livre *des Délits et des Peines*, celle qui lui est propre d'exécuter avec la plus grande habileté tous les instrumens de mathématiques les plus délicats.

Mon premier essai consistoit dans la méthode de diviser la circonférence en vingt-quatre parties , à l'aide d'un seul point pris hors d'elle. L'exécution de cette division est la plus simple qu'on puisse espérer , et je l'ai conservée dans cet ouvrage. Celle que j'avois donnée en 120 parties étoit trop compliquée ; j'en ai trouvé une beaucoup moins longue , et telle même que je la crois la plus courte possible. J'y avois ajouté aussi une construction très-prompte pour obtenir les racines quarrées des nombres , depuis l'unité jusqu'à 10 ; je l'ai encore conservée dans cet ouvrage.

J'ai omis les autres problêmes exposés dans cette lettre , parce qu'ils étoient trop compliqués , ou d'une approximation insuffisante. Je suis parvenu depuis,

comme on le verra, à diviser très-promp-
tement la circonférence en 240 parties ,
avec une exactitude géométrique, par le
moyen du compas seul et de trois points
pris hors de la même circonférence. Cha-
cune de ces parties est un degré et demi
de la division en 360° , usitée jusqu'ici.
Je partage tout arc quelconque en deux
parties , et cela géométriquement par
approximation. Je divise la circonférence
avec trois points seulement, en degrés et
quarts de degrés sans erreur d'un sixième
de seconde.

Avec ces mêmes points, je la divise
en minutes avec erreur de moins d'une
seconde. Je me suis flatté que les Astro-
nomes pouvoient être contents de cette
précision , parce que je ne sache pas d'ar-
tiste, même parmi les plus célèbres , qui
ait passé outre.

Cependant je ne croyois pas encore
avoir assez fait, si ma nouvelle théorie
ne servoit pas aussi à la nouvelle division
du cercle.

On sait que les Français , heureux de

posséder au sein de leur République les premiers Géomètres de l'univers, ont enfin, d'après leurs conseils, adopté pour tous les arts la seule division décimale tant souhaitée des savans.

Sans doute que cette division réussira avec difficulté dans les autres contrées, à cause des préjugés, et sur-tout de la force d'inertie; mais elle s'établira enfin d'une manière inébranlable par-tout où on aime les sciences, et où les intérêts du commerce sont bien entendus. Une des divisions les plus difficiles à changer, étoit celle de la circonférence du cercle en 360° , et la subdivision en 60 parties, employée par toutes les nations; et cela, à cause des fatigans travaux qu'il falloit nécessairement entreprendre pour refaire les tables trigonométriques dans un nouveau système; mais l'énergie d'une grande nation qui se régénère ne connoît point d'obstacles. Ayant déterminé 400 parties ou degrés dans la circonférence, le quart du cercle, qui est le fondement de la trigonométrie, se trouve divisé en 100 par-

ties , chacune desquelles se subdivise en 100 autres , et ainsi de suite.

Les tables des sinus naturels et artificiels de ces divisions et subdivisions sont déjà calculées et imprimées. Mais pour que rien ne manque à la stabilité et à la certitude de la précision des nombres , on a entrepris en France de les faire imprimer en caractères soudés en plomb. On voit déjà de ces nouvelles tables exécutées d'après la méthode nouvelle et ingénieuse de *Firmin Didot* , appelée stéréotype.

Une société de calculateurs très-habiles en prépare encore d'autres plus étendues et avec un plus grand nombre de décimales , sous la direction du célèbre *Prony*. Toutes ces circonstances m'engagent à chercher une méthode au moins d'approximation , pour diviser la circonférence en ces nouveaux degrés et parties de degrés. J'ai réussi avec trois points seulement et très-peu d'ouvertures de compas , à obtenir cette nouvelle division décimale de la circonférence sans erreur d'une seconde.

Quand je n'eusse fait autre chose que ce que je viens d'indiquer, cela auroit suffi à la recommandation de l'usage du compas seul. Mais en avançant, j'ai trouvé qu'il n'y avoit point de problème de géométrie élémentaire, qui ne puisse se résoudre avec ce seul instrument, c'est-à-dire, en ce sens que le compas suffit pour trouver tous les points demandés par le problème, pour la position et la détermination des droites dont on a besoin. Ceci intéressoit la théorie; j'ai voulu épuiser le sujet, donner tous les élémens pour tous les cas possibles, et démontrer qu'on peut trouver avec le compas seul tous les points qu'Euclide et les autres auteurs de géométrie élémentaire, enseignent à trouver avec le secours de la règle et du compas réunis.

Quoique tous les problèmes élémentaires résolus avec le seul compas n'aient pas une solution assez simple, j'ose dire pourtant que la plus grande partie des plus nécessaires sont résolus avec assez de brièveté et de simplicité, pour enga-

ger les praticiens à rejeter le secours de la règle et à se servir du seul compas pour trouver les points fondamentaux. Les moyens que je propose dans ce livre justifieront ce que j'avance. Je n'indiquerai point ici tous les problèmes semblables qui m'ont paru de quelque importance : en voici cependant quelques-uns.

Si l'on cherche avec le seul compas le centre d'un cercle , on le trouvera promptement et sans peine ; on aura de même les troisièmes et les quatrièmes proportionnelles , et par conséquent les moyennes proportionnelles.

On pourra aussi , avec le seul compas , construire des polygones réguliers inscrits ou circonscrits au cercle (1). Le seul compas suffira encore pour trouver les racines quarrées des nombres , pour doubler , multiplier les surfaces des quarrés , des cercles et des autres figures semblables. On résoudra avec une exactitude géométrique tous ces problèmes ;

(1) Les ingénieurs militaires trouveront peut-être ici quelque chose d'utile pour leurs travaux.

car leur nature les en rend susceptibles. Ensuite , par approximation , on trouvera une longueur égale à la circonférence d'un cercle , ou un arc égal au rayon , ou un quarré égal à un cercle , ou un cercle égal à un quarré , ou une sphère égale à un cube , ou un cube égal à une sphère , ou un cube double ou triple ou quadruple d'un autre. On pourra résoudre tous ces problêmes , en employant des sections d'arcs , ou en déterminant , toujours sans autre instrument que le compas , la longueur des côtés ou des rayons dont on a besoin pour les figures demandées.

Voilà en peu de mots le fonds de la Géométrie du compas que je présente au public. Quant aux démonstrations , je me suis servi , autant que j'ai pu , de la géométrie des Anciens ; cela m'a paru plus conforme à la nature de mes problêmes et plus court. Par-tout où les procédés géométriques devenoient trop longs pour obtenir le résultat , j'ai employé le calcul ; j'ai donc en même-tems

recherché la brièveté, la clarté, l'élégance autant qu'il m'a été possible.

J'ai cité Euclide, ce grand maître en fait d'éléments. Lorsqu'il est question de proportions, les numéros des propositions que je cite sont ceux de *Tacquet*, parce que son livre est plus répandu en Italie que l'ancien texte d'Euclide.

J'ai placé dans le onzième livre en faveur des artistes qui ne voudront que s'amuser avec le compas, plusieurs problèmes récréatifs tirés de *Pappus*, d'*Ozanam*, de *Simpson* et de plusieurs autres auteurs. Voilà tout ce que j'avois à dire à mes lecteurs sur la Géométrie du compas. Elle est, quant à la construction de ses problèmes, la plus simple et la plus élémentaire qu'on puisse désirer, et je ne sache pas que cette matière ait été traitée jusqu'ici par personne.

G É O M É T R I E

D U C O M P A S.

L I V R E P R E M I E R.

P R É L I M I N A I R E S.

1. **J'**APPELLE *Géométrie du compas*, celle qui, par le moyen du compas seulement, et sans le secours de la règle, détermine la position des points.

Etant donnés, par exemple, deux points A et E [*figure 1.^{re}*], si l'on cherche le troisième point D , qui soit aussi éloigné de chacun d'eux qu'ils le sont entr'eux, qu'on décrive d'un intervalle égal au rayon AE , et des points A et E comme centres, les deux cercles EDB , ADV , qui se coupent au point D , ce point D sera le point cherché, puisqu'il sera éloigné des points A et E d'un intervalle égal à AE . (*Prop. 1, liv. 1 des Elémens d'Euclide.*) Ce point D a été trouvé avec le seul compas, sans le secours de la règle.

A

2. Il peut arriver que l'on trouve la position d'un point avec le seul compas, mais que pour démontrer la proposition, on ait besoin de la règle dans la construction de la figure.

Soient, par exemple, donnés deux points A et B [*fig. 2*] qui soient éloignés entr'eux d'un certain intervalle pris pour unité, ou qu'on fait $= 1$, si on cherche un point D qui soit éloigné de B de l'intervalle $BD = \sqrt{3}$, on résoudra le problème de la manière suivante :

Du centre A et d'un rayon AB , soit décrit le cercle BCD ; avec le même rayon et du centre B , soit décrit un arc qui coupe la circonférence au point C ; puis du centre C et avec le même rayon, soit décrit un arc qui coupe plus loin la circonférence en D ; on aura en D le point cherché, ainsi trouvé sans le secours de la règle.

Pour démontrer néanmoins que l'intervalle $BD = \sqrt{3}$, on aura besoin de lignes droites qui se tracent avec la règle. Soit BE le diamètre du cercle BCD , si on mène les droites BD , DE , le triangle BDE sera rectangle en D (31. *liv. 3*), et on aura : $(BE)^2 = (BD)^2 + (DE)^2$; d'où $(BD)^2 =$

$(BE)^2 - (DE)^2$. Mais l'intervalle BC étant égal à $CD = AB$, on aura encore $DE = AB$ (15. liv. 4), ou $DE = 1$, et $BE = 2$. On aura donc : $(BD)^2 = 4 - 1 = 3$: d'où $BD = \sqrt{3}$; ce qu'il falloit démontrer , et ce qu'on ne pouvoit faire sans la règle. Cette proposition est la 12.^e du livre 13 d'Euclide.

3. De la définition précédente (1), il résulte qu'à la géométrie du compas appartiennent tous les problèmes que l'on peut résoudre avec le seul compas , quoiqu'on ne puisse pas les démontrer avec ce seul instrument. Tel est le problème précédent (2).

4. Cette géométrie sera, comme on le verra dans les exemples , d'un très - grand usage dans la pratique pour trouver des points avec la plus grande précision possible , et même beaucoup plus promptement avec le seul compas , qu'en y joignant le secours de la règle.

5. Nous résoudrons donc les problèmes avec le seul compas, et on pourra ensuite , pour les démonstrations , se servir de constructions faites suivant l'usage , avec la règle

et le compas. C'est pourquoi nous citerons les propositions et les livres d'Euclide.

6. Nous verrons aussi, au commencement de ce traité, que l'on n'a omis aucun des élémens nécessaires pour que l'on puisse, avec le seul compas, déterminer tous les points, de quelque problème que ce soit, qui jusqu'ici n'ont pu être déterminés qu'avec la règle et le compas réunis.

7. Nous ne placerons pourtant pas ici tous ces problèmes : mais après avoir démontré les élémens nécessaires et suffisans pour tous, nous en résoudrons un grand nombre des principaux, et sur-tout ceux qui sembleront les plus utiles ou préférables à cause de leur élégance.

8. Nous ajouterons ici en faveur des artistes pour lesquels, en grande partie, cet ouvrage est écrit, que bien convaincus de l'importance des erreurs qui résultent de l'écart et du rapprochement des branches du compas pour obtenir avec précision des ouvertures différentes, nous aurons soin de résoudre les problèmes avec le moindre nombre possible d'ouvertures de compas. Il seroit même mieux que l'artiste eût à sa dis-

position autant de ces compas *fidèles* (ainsi appelés , parce qu'on peut s'assurer qu'ils conservent exactement l'ouverture donnée) , qu'il y a d'ouvertures exigées par la solution du problème ; car il arrivera souvent que nous serons obligés de nous servir plusieurs fois de la même ouverture , après en avoir employé une ou plusieurs autres : alors , sans élargir ou resserrer un seul compas , nous reprendrons le compas mis de côté qui conserve cette ouverture. C'est pourquoi nous appellerons quelquefois du nom de premier, second , troisième compas , les ouvertures successives avec lesquelles on aura résolu le problème.

9. D'ailleurs , comme pour la précision pratique de la position d'un point , il importe que la section des lignes qui le déterminent se fasse à angle droit ou approchant , nous ferons toujours en sorte qu'un arc en coupe un autre , ou à angle droit , ou au moins sous un angle qui en diffère peu.

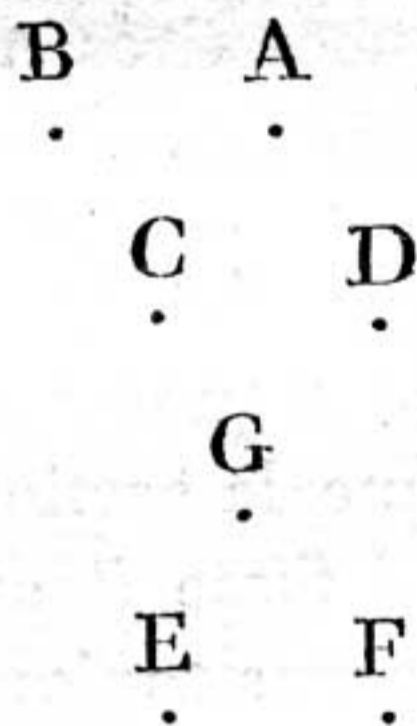
Afin d'être plus courts , sans cependant devenir obscurs , en indiquant la construction des figures , nous emploierons souvent des expressions abrégées , que la seule inspection de la figure fera bientôt comprendre. Par

exemple, dans la figure 2, au lieu de dire :
 « Avec le rayon AB , et du centre B , soit
 » décrit un arc qui coupe la circonférence
 » BCD au point C ; puis avec le même
 » rayon et du centre C , qu'on décrive un
 » arc qui coupe la même circonférence en
 » D , etc. », nous dirons seulement : « Soit
 » fait à $AB = BC = CD$, etc. » En effet,
 c'est assez dire que les points B , C et D ,
 avec lesquels on indique la même circonfé-
 rence BCD , sont des points de cette cir-
 conférence ; ainsi il n'y a aucun risque d'é-
 quivoque.

11. De même étant donnés,
 par exemple, trois intervalles
 AB , CD , EF , quand on
 dira : « Soit fait à $CD =$
 EG , à $AB = FG$, » on de-
 vra entendre ceci : « Avec
 » un rayon CD , et du centre
 » E , soit décrit un cercle

» dans la circonférence duquel soit le point
 » G ; ensuite, avec l'intervalle AB et du
 » centre F , soit décrit un autre cercle qui
 » coupe le premier au point G . »

12. D'autres fois, dans les démonstrations,



nous désignerons quelques lignes droites qui ne seront pas dans la figure, en nommant les deux points extrêmes auxquels elles devroient être menées, comme si, dans la figure 11, on nommoit la droite AB , ou bien CD . C'est ainsi que nous ferons quand il n'y aura pas à craindre d'obscurité, pour conserver la figure nette, et faire mieux paroître la construction faite avec le seul cercle.

13. *Lemme.* Si des deux centres A et B , et avec les rayons AP et AQ , on décrit des arcs qui se coupent en P et p , Q et q , les points Q, q, P et p seront dans la même ligne droite.

Démonstration. Tous les côtés des triangles APp, BPp [fig. 3], étant respectivement égaux entr'eux par construction, l'angle APp sera égal à l'angle BPp , (8. liv. 1). On démontre de même que $APQ = BPQ$. Donc $APp + APQ = BPp + BPQ$. Mais la somme de ces quatre angles est égale à quatre angles droits (13. liv. 1. coroll.). Donc chacune des sommes de deux angles est égale à deux angles droits. Donc la ligne QPp est droite (14. liv. 1). On démontre de la même manière que la

ligne $Pp q$ est droite. Donc les points Q, P, p, q sont dans la même ligne droite.

14. Les choses étant comme au numéro précédent, les droites AB, Bp , ainsi que celles AB, Qq , se couperont à angles droits en deux parties égales au point M , et les droites QP, qp seront égales.

Démonstration. En effet, à cause de l'égalité des côtés des deux triangles APB, ApB , on a l'angle $PAB = pAB$ (8. liv. 1). Mais on a encore $APP = ApP$ (5. liv. 1). Donc aussi $AMP = AMp$ (coroll. prop. 32, liv. 1). Donc ces deux angles sont droits (13. liv. 1), et la ligne Pp sera partagée en deux parties égales au point M par la démonstration de la propos. 10. liv. 1. On démontrera de la même manière que les droites Qq et AB sont divisées en deux parties égales au point M . Donc, en retranchant des droites égales QM et qM , les parties égales PM, pM , les restes QP, qp seront égaux.

15. *Corollaire.* On aura donc : $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$ (47. liv. 1).

16. *Lemme.* Tout étant comme au numéro 13, on aura :

$$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ.$$

Démonstration. Car on a $(AQ)^2 = (AP)^2$

$+ (PQ)^2 + 2MP.PQ$ (12. liv. 2). Mais on a $2MP = Pp$ (14). Donc, etc.

17. *Lemme.* On aura donc $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - Pp.pQ$.

Démonstration. Car on a $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - 2pM.pQ$ (13. liv. 2). Mais on a $2pM = pP$ (14). Donc, etc.

18. *Corollaire 1.^{er}* Puisque $pQ = pP + PQ$, on aura : $(pQ)^2 = pP.pQ + PQ.pQ$ (2. liv. 2) : d'où, en soustrayant $pP.pQ$, on a : $(pQ)^2 - pP.pQ = PQ.pQ$; et substituant cette valeur dans celle de $(AQ)^2$ (17), on aura :

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ.PQ.$$

D'où l'on tire, en soustrayant $(Ap)^2$ de part et d'autre : $(AQ)^2 - (Ap)^2 = pQ.PQ$.

Donc (en effectuant la multiplication de $AQ + Ap$ par $AQ - Ap$) on trouvera : $(AQ + Ap)(AQ - Ap) = (AQ)^2 - (Ap)^2$; et par conséquent : $(AQ + Ap)(AQ - Ap) = pQ.PQ$: d'où (par la 16.^e propos. du liv. 6) on déduit la proportion

$pQ : AQ + Ap :: AQ - Ap : PQ$:
où substituant de même AP au lieu de Ap ,
et transposant les extrêmes :

$$PQ : AQ + AP :: AQ - AP : PQ.$$

De ces deux proportions, on déduit expressément ce fameux théorème :

Dans un triangle quelconque, un côté quelconque est à la somme des deux autres côtés, comme leur différence est à la différence ou à la somme des segmens que fait sur ce côté la perpendiculaire menée de l'angle opposé, suivant qu'elle tombe en dedans ou au dehors du triangle.

19. *Corollaire 2.* On aura $AQ = pQ$. Otant de part et d'autre les deux termes égaux $(AQ)^2$, $(pQ)^2$, et ajoutant des deux côtés la partie $pP \cdot pQ$, on aura $pP \cdot pQ = (Ap)^2$.

20. *Lemme.* Tout étant comme dans le n.^o 13, si l'angle RpQ est droit, [*fig. 4.*] et que l'angle $RpS = RpA$, et $pS = pR = pA$, AS sera parallèle et égale à Pp ; et on aura $(AQ)^2 = (RQ)^2 - AS \cdot PQ$.

Démonstration. En effet, si des deux angles droits RpQ , Rpq , on soustrait les deux angles égaux RpA , RpS , il restera les deux angles égaux ApP , Spq . Mais $ApP = APp$. (5. liv. 1.) Donc $Spq = APq$. Donc AP , Sp sont parallèles (29. liv. 1.) Mais elles sont aussi égales par construction. Donc les deux droites AS , Pp , sont égales et parallèles (33. liv. 1.)

On a aussi $(RQ)^2 = (Rp)^2 + (pQ)^2$ (47. liv. 1.) $= (Ap)^2 + (pQ)^2$; et par le lemme 17, $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2$

— $p P . p Q$. Donc $(A Q)^2 = (R Q)^2 - p P . p Q$,
 $p P . p Q = (R Q)^2 - A S . p Q$.

21. *Lemme.* Tout étant comme dans les n.^{os} 13 et 20, on aura $(S Q)^2 = (R Q)^2 + A S . p Q$.

Démonstration. En effet, si on fait $S T = S p$, $p T = p P$, (11) les deux triangles $S p T$, $A P p$ auront les angles $S p T$, $A P p$ égaux entr'eux (8. liv. 1.) Donc la ligne $P p T$ est droite. (27. liv. 1.) On aura ensuite $(S Q)^2 = (p S)^2 + (p Q)^2 + p Q . p T$ (16.) Mais on a $(p S)^2 + (p Q)^2 = (p R)^2 + (p Q)^2 = (R Q)^2$; et $p T = p P = A S$. Donc $(S Q)^2 = (R Q)^2 + A S . p Q$.

Des deux *lemmes* précédens, il résulte ce corollaire que : $(A Q)^2 + (S Q)^2 = 2 (R Q)^2$.

22. *Lemme.* Si on a $A Q = p Q = B Q$, et $A p = p B = p S$, $p S$ étant sur le prolongement de $B p$, on aura $A S . p Q = (A p)^2$.

Démonstration. Les triangles isoscèles $A Q p$, $B Q p$ ayant les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $Q p A = Q p B$ (8. liv. 1.) On aura ensuite l'angle $A p B$, qui est la somme des deux autres, égal aussi à la somme des deux angles $S A p$, $A S p$ (32. liv. 1.); qui sont égaux entr'eux, parce que le triangle

$A p S$ est isoscèle (5. liv 1.); chacun d'eux sera égal à l'angle $A p Q = p A Q$ (5. liv. 1.) On aura donc le triangle $p A S$ semblable au triangle $Q p A$ (32. liv. 1. 4. liv. 6.) Et de-là, $p Q : A p :: A p : A S$ et $A S . p Q = (A p)^2$. (17. liv. 6.)

23. Lemme. Si on a $A B = A C = B D$, et $A D = B C$, on aura : $D C . A B = (A B)^2 - (A D)^2$.

Démonstration. Les deux triangles $A D B$, $A C B$ [fig. 5.] ayant les côtés respectivement égaux, seront égaux. (8. et 26. liv. 1.) Puis tous les deux étant posés sur la même base $A B$, seront compris entre les mêmes parallèles $D C$, $A B$, (39. liv. 1.) Si donc sur la ligne $B A$ on prend $B E = D C$, $D E$ sera égale et parallèle à $B C$ (33. liv. 1.) et aussi égale à $D A$; d'où les deux triangles isoscèles $B D A$, $D A E$, qui ont un angle commun en A , seront semblables (5, 32. liv. 1, et 4. liv. 6.) et on aura $A B : A D :: A D : A E$; ce qui donne $A B . A E = (A D)^2$ (17. liv. 6.) On a ensuite $A B . A E + A B . B E = (A B)^2$ (2. liv. 2.); et substituant pour $A B . A E$ sa valeur $(A D)^2$ et $D C$ à la place de $B E$, on a $(A D)^2 + A B . D C = (A B)^2$. Enfin, soustrayant $(A D)^2$ on aura $D C . A B = (A B)^2 - (A D)^2$.

24. *Lemme.* Si dans le cercle $B\mu G$, [*fig. 6*] décrit d'un rayon AB , on élève au centre A la perpendiculaire Ae égale à la corde BG de l'arc $B\mu G$, et que du point e comme centre, et d'un rayon AB , on décrive un arc qui coupe la circonférence au point μ , l'arc $B\mu$ sera égal à la moitié de l'arc $B\mu G$.

Démonstration. A cause de l'égalité des côtés des deux triangles ABG , $A\mu e$, on a l'angle $GAB = A\mu e$ (8. liv. 1.) Soit divisé par la moitié l'angle $A\mu e$ par la droite μM , le triangle $\mu e A$ étant isoscèle, on a l'angle $\mu e M = \mu A M$; ensuite les deux triangles $\mu e M$, $\mu A M$ ayant leurs deux autres angles égaux, on aura encore le triangle $\mu M e = \mu M A$. (*Coroll. 32. liv. 1.*); d'où μM est perpendiculaire à Ae (13 liv. 1.), et parallèle à AB , (29. liv. 1.), et on aura l'angle $M\mu A = \mu AB$, (27. liv. 1.): donc μAB sera la moitié de l'angle GAB ; donc aussi l'arc $B\mu$ sera la moitié de l'arc $B\mu G$.

25. Si dans le parallélogramme $ABMN$, [*fig. 7*] on a la diagonale MA égale aux côtés opposés MB , AN , le carré de l'autre diagonale BN est égal au carré de la première, plus aux deux carrés des deux autres côtés.

Démonstration. Soit divisé AB en deux parties égales au point m par la perpendiculaire Mm (10. 11. liv. 1.) ; et sur la droite BA prolongée, soit pris $An = Bm$, on aura $mn = BA = MN$. On aura donc le parallélogramme $MNnm$ (33. liv. 1.), et l'angle NnB sera droit (27. liv. 1). D'où $(BN)^2 = (AB)^2 + (AN)^2 + 2AB \cdot An$ (12. liv. 2). Mais $An = \frac{1}{2} AB$. Donc $(BN)^2 = (AN)^2 + 2(AB)^2 = (AN)^2 + (AB)^2 + (MN)^2$.

26. Si dans un triangle quelconque BPE , [fig. 8] on coupe en deux parties égales au point A la base BE , et que de l'angle opposé P , on mène la droite PA , la somme des quarrés des côtés BP et PE sera égale à la somme des quarrés égaux des deux segmens, en y ajoutant le double quarré de la droite AP .

Démonstration. En effet, si on abaisse la perpendiculaire PR sur la base BE , on aura $(BP)^2 = (BA)^2 + (AP)^2 + 2BA \cdot AR$ (12. liv. 2). On aura donc $(PE)^2 = (AE)^2 + (AP)^2 - 2AE \cdot AR$ (13. liv. 2). Donc après avoir formé la somme des valeurs des deux quarrés $(BP)^2$ et $(PE)^2$, et de plus BA étant égal à AE , on aura $(BP)^2 + (PE)^2 = (BA)^2 + (AE)^2 + 2(AP)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2$.

G É O M É T R I E

DU COMPAS.

LIVRE SECON D.

DE LA DIVISION DE LA CIRCONFÉRENCE ET
DES ARCS DU CERCLE.

P R O B L Ê M E.

27. *P*ARTAGER la circonférence du
cercle $B D d$ en quatre parties égales.

Solution. Soit fait dans la même circonférence [*fig. 9.*] au rayon $A B = B c = B C = C D = D E = E d$, avec le premier compas (8), on aura $d c = c B = B A$ (15. *liv. 4.*).

Soit fait aussi à $B D = B a = E a$ avec le second compas, et à $A a = B F = B f$ avec le troisième compas. On aura divisé la circonférence en quatre parties égales $B F, F E, E f, f B$.

Démonstration. $B A E$ étant un diamètre (15. *liv. 4.*), et les triangles $a A B, a A E$ ayant tous leurs côtés égaux, et, par conséquent les angles $a A B, a A E$ aussi égaux

(8 *liv.* 1.), ces deux angles seront droits (13. *liv.* 1). Donc $(aB)^2 = (AB)^2 + (aA)^2$ (47. *liv.* 1); et soustrayant de part et d'autre $(AB)^2$, on a : $(aB)^2 - (AB)^2 = (aA)^2$. Soit fait pour abrégier $AB = 1$, on aura $(aB)^2 = (BD)^2 = 3$ (2). Donc $(aA)^2 = 3 - 1 = 2$, et encore $(BF)^2 = (aA)^2 = 2 = 1 + 1 = (AB)^2 + (AF)^2$. Donc, dans le triangle FAB , l'angle FAB sera droit (48. *liv.* 1); et par conséquent aussi FAE (13. *liv.* 1). Donc les arcs BF, FE seront égaux entr'eux et quarts de cercle, ainsi que les arcs Bf, fE .

28. *Corollaire.* Les angles $B A a, B A F$ étant droits, les trois points A, F, a seront dans la même ligne droite.

29. Nous avons donc déjà la circonférence divisée, savoir, en deux parties égales aux points B et E ; en trois parties, aux points B, D, d (15. *liv.* 4); en quatre points, aux points B, F, E, f (27); en six parties, aux points B, C, D, E, d, c (15. *liv.* 4).

P R O B L Ê M E.

Diviser une circonférence en huit parties égales.

Solution.

Solution. Tout étant comme au n.º 27, soit fait à $AB = aG = aH$ [*fig. 9.*], avec le premier compas, à $Aa = Gg = Hh$ avec le troisième compas, on aura aussi $gk = Aa$, et la circonférence sera divisée en huit parties égales aux points B, G, F, H, E, h, f, g .

Démonstration. Puisque $(Aa)^2 = 2. (27)$, on aura $(Aa)^2 = (AG)^2 + (aG)^2$. L'angle aGA sera donc droit (48. *liv. 1.*). D'où, à cause du triangle isoscèle aGA , les deux autres angles GAA, GAa , égaux entr'eux, (5. *liv. 1.*) vaudront chacun la moitié d'un angle droit (32. *liv. 1.*) Donc l'angle GAF , qui est le même que l'angle GAa (28) sera la moitié de BAF : donc aussi l'arc $GF = BG$. Mais, par construction, on a $Gg = BF$ (26. *liv. 3.*): donc, ôtant de part et d'autre BG , on aura $GF = Bg$. On démontreroit de même que les autres arcs sont égaux. Donc la circonférence sera divisée en parties, égales chacune à la moitié du quart, et par conséquent en huit parties.

P R O B L Ê M E.

31. *Diviser la circonférence en douze parties égales.*

B

Solution. Les choses étant comme au n.º 27, qu'on fasse [fig. 9.] à $AB = FN = Nn = FO = Oo$. La circonférence sera divisée en douze parties égales aux points $B, N, C, F, D, O, E, o, d, f, c, n$.

Démonstration. En effet, si des arcs égaux BF, FE , on retranche les arcs égaux BC, DE , les arcs restans CF, FD seront égaux. Or l'arc CD est la sixième partie de la circonférence; donc l'arc CF sera la moitié de cet arc, et par conséquent le douzième de la circonférence. A cause de $FN = CD$, on aura encore $CF = CN$. Donc aussi à cause de $FN = CB$, on aura $CN = NB$. On démontrera de la même manière que chacun des autres arcs est le douzième de la circonférence.

P R O B L Ê M E.

32. *Diviser la même circonférence en vingt-quatre parties égales.*

Solution. Les choses étant comme ci-dessus (30 et 31), soit fait [fig. 9.] à $AB = GL = LM = Gk = ki = HI = IK = Hm = ml$, de la première ouverture de compas, et le problème sera résolu.

Démonstration. En effet, si des arcs égaux

GF , GB (30), on retranche les arcs égaux CF , NB (31), les restes GC et GN seront égaux. Or CN est la douzième partie de la circonférence. Donc GC et GN en seront les vingt-quatrièmes parties.

On a ensuite $FN = GL$; retranchant la partie commune FG , on aura $NG = FL$. Donc aussi FL sera la vingt-quatrième partie de la circonférence, et par conséquent, la moitié de FD (31). On démontrera de la même manière que les arcs DH , HO , FI , IC sont égaux, ainsi que tous les autres qui ont été déterminés ci-dessus.

33. Pour être plus courts, nous continuerons à nous servir, sans les citer, ainsi que nous venons de le faire, des propositions 26 et 27 du *livre 3 d'Euclide*, que dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les droites égales sous-tendent des arcs égaux.

34. Les Anciens, au moyen du centre A et du rayon AB , divisoient, avec le compas seulement, la circonférence en six parties égales. Ils obtenoient les autres divisions avec la règle et le compas, en prenant différents points hors de la circonférence. Nous sommes parvenus à déterminer un point a ,

qui seul suffit pour la diviser en vingt-quatre parties égales avec le compas seulement ; ce qui est en même-tems plus expéditif, plus commode, et beaucoup plus exact que les méthodes des Anciens.

35. On peut remarquer en même-tems la loi élégante que suivent les ouvertures de compas suffisantes pour cette division.

L'ouverture du premier compas $= \sqrt{1}$, celle du 3.^e $= \sqrt{2}$, et celle du 2.^e $= \sqrt{3}$.

36. *Lemme.* Si dans le cercle BGE , on a le rayon $AB = 1$, et que l'arc BG soit la huitième partie de la circonférence, on aura le quarré de sa corde BG , c'est-à-dire $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$.

Démonstration. Sur le diamètre BE , soit abaissée la perpendiculaire GP . Dans le triangle rectangle GPA , à cause de l'angle $BAP = 45^\circ$ on aura aussi $AGP = 45^\circ$ (32. liv. 1.), et par conséquent $GP = PA$. Or, on a $(AG)^2 = (PG)^2 + (AP)^2$ (47. liv. 1). Donc $(AG)^2 = 2(AP)^2$, ou $2(AG)^2 = 4(AP)^2$, ou encore $2 = (2AP)^2$: donc $\sqrt{2} = 2AP$; $AP = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $BP = AB - AP = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. On a ensuite, à cause de l'angle droit BGE (31. liv. 3.) BP :

$BG :: BG : BE$ (8. 4. liv. 6). Donc (17. liv. 6.) $(BG)^2 = BP \times BE = 2BP$.
Donc $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$.

37. *Lemme.* Les choses étant comme au n.º 36, on aura $(GE)^2 = 2 + \sqrt{2}$.

Démonstration. $(BE)^2 = (GE)^2 + (BG)^2$ (47. liv. 1). Mais $(BE)^2 = 4$; $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$ (36) : donc $4 = (GE)^2 + 2 - \sqrt{2}$: donc $2 = (GE)^2 - \sqrt{2}$, et par conséquent $(GE)^2 = 2 + \sqrt{2}$.

P R O B L Ê M E.

38. *La circonférence étant déjà divisée en vingt-quatre parties égales (32), la sous-diviser en quarante-huit.*

Solution. Soit fait à $aN = Be = Ee$ (11) avec un quatrième compas, et à $AB = e\mu = e\nu$ avec le premier compas. Les arcs $K\mu$, μN , $M\nu$, νO seront les quarante-huitièmes parties de la circonférence.

Démonstration. Si on conçoit les droites Aa , Nn , aN , aB (12), l'angle $B A a$ étant droit, l'angle $B A N = B A n$ (31) et les trois rayons AN , AB , An égaux, on aura $(aN)^2 = (aB)^2 - Nn \cdot Aa$ (20).
Donc, à cause de $aN = Be$, on aura aussi

$(Be)^2 = (aB)^2 - Nn \cdot Aa$. De plus, les triangles eAB , eAE étant rectangles en A (8. 13. liv. 1), puisque leurs côtés sont respectivement égaux, on aura $(Be)^2 = (AB)^2 + (Ae)^2$ (47. liv. 1), et par conséquent $(AB)^2 + (Ae)^2 = (aB)^2 - Nn \cdot Aa$; mais on a $(aB)^2 = (AB)^2 + (Aa)^2$. Donc $(AB)^2 + (Ae)^2 = (AB)^2 + (Aa)^2 - Nn \cdot Aa$; d'où, retranchant $(AB)^2$ de part et d'autre, on a $(Ae)^2 = (Aa)^2 - Nn \cdot Aa$. Mais $(Aa)^2 = 2$ (27) et $Nn = 1$, puisque Nn est la corde d'un arc de 60 degrés (31). Donc $(Ae)^2 = 2 - \sqrt{2} =$ le carré de la corde de l'arc BG , qui est la huitième partie de la circonférence (30 et 36). On aura donc l'arc $B\mu = \mu G$ (24); retranchant ensuite de chacun de ces arcs, les arcs égaux BK , NG (32), les restes $K\mu$, μN seront égaux; et comme l'arc KN est la vingt-quatrième partie de la circonférence (32), chacun d'eux en sera la moitié, et par conséquent la quarante-huitième partie de la circonférence. Il en sera de même des arcs $K\mu$, μN , $M\nu$, et νO .

39. On pourroit aussi avec la même construction [*fig. 11*], par le moyen des quatre compas ci-dessus indiqués, diviser la circonférence en quarante-huit parties égales (8).

En effet, si avec le premier compas d'une ouverture = AB , on divise la circonférence en six parties, en commençant du point μ , les arcs IF , HO , mo , fl , ng seront partagés en deux parties égales; puis divisant la circonférence en six parties, en commençant du point ν , on aura divisé en deux parties égales les arcs oh , fi , nk , NG , FL . Divisant ensuite la circonférence en quatre parties avec le troisième compas d'une ouverture égale à Aa , en partant du point μ , les arcs restans LD , ic seront divisés en deux parties égales; et en partant du point ν , on partagera de même les arcs IC , ld . Enfin divisant encore avec le premier compas la circonférence en six parties égales, mais en partant des derniers points trouvés avec le troisième compas, tous les autres arcs seront divisés en deux parties égales.

La démonstration est la même que celle n.º 32.

P R O B L Ê M E.

40. *Diviser la circonférence BD d en cinq parties égales.*

Solution. Tout étant comme dans le problème du numéro 31, qu'on fasse [fig. 12]

B 4

à $Aa = Nb = Ob$, avec le troisième compas. Qu'on fasse à $Bb = BQ$, l'arc BQ sera la cinquième partie de la circonférence.

Démonstration. Si on conçoit menées les deux droites NO , AF , qui se coupent en X , à cause des triangles équilatéraux FNA , FOA , la droite AF sera divisée en deux parties égales au point X (10. liv. 1), ainsi que NO (14). Puis l'arc NFO étant égal à l'arc BCD (31), le quarré de sa corde NO sera égale au quarré de la corde $BD = 3$ (2). D'où le quarré de sa moitié, c'est-à-dire, $(NX)^2 = \frac{3}{4}$ (*prop. 4. liv. 2. coroll.*). De plus, les points b , A , X sont en ligne droite, et le triangle NbX est rectangle (12, 13, 14). On a aussi $(Nb)^2 = (Aa)^2 = 2$ (27). D'où on tire : $(Xb)^2 = (Nb)^2 - (NX)^2$ (47. liv. 1) $= 2 - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$.

Mais à cause de l'angle droit XAB , qui est le même que FAB , on a $(BX)^2 = (AB)^2 + (AX)^2$ (47. liv. 1). D'ailleurs, on a : $(AX)^2 = \frac{1}{4}(AF)^2$ (*prop. 4. du liv. 2. coroll.*). Donc $(BX)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = (Xb)^2$. Donc les droites BX , Xb sont égales. Donc on aura le point b , le même qu'emploie Ptolomée dans le premier livre de l'Almageste, pour inscrire dans un cercle un pentagone et un décagone régulier. Voyez la

démonstration de Clavius dans le scholie dépendant de la proposition 10. du liv. 13 d'Euclide. *Voyez* aussi les numéros suivans (45, etc.) qui fourniront la démonstration complète de cette proposition et des suivantes.

P R O B L È M E.

41. *Diviser la circonférence en dix parties égales.*

Solution. Tout étant comme dans le problème précédent (40), qu'on fasse [*fig. 12*] à $A b = B P$, on aura $B P = P Q$. Chacun de ces arcs est égal à la dixième partie de la circonférence.

Démonstration. Voyez la 10. propos. du livre 13 d'Euclide.

P R O B L È M E.

42. *Diviser la circonférence en cent vingt parties égales.*

Solution. Tout étant comme dans les numéros 32 et 40, $Q I$ [*fig. 12*] sera la cent vingtième partie de la circonférence.

Démonstration. En effet, l'arc $B I$ est égal à cinq vingt-quatrièmes (32), et l'arc $B Q$

à la cinquième partie de la circonférence.

$$\text{Donc } QI = BI - BQ = \frac{5}{24} - \frac{1}{5} = \frac{25 - 24}{120} \\ = \frac{1}{120}.$$

43. Maintenant on pourra, quand on voudra, avec quatre compas seulement, ou quatre ouvertures du même compas, et avec les deux seuls points a et b pris hors de la circonférence, diviser la circonférence du cercle en cent vingt parties égales. En effet, après avoir, avec le point a , et avec trois compas, divisé la circonférence en vingt-quatre parties (*problème du numéro 32*), et ayant trouvé le point b (40), qu'on fasse, avec le quatrième compas, à $Ab = BP = PQ = QR = RS$, et par conséquent aussi $= SE$ (41). Ensuite, pour diviser l'arc NG en cinq parties égales, dont chacune soit la cent vingtième de la circonférence, qu'on fasse à $Ab = Lq = qp = I\pi = O\rho = \rho\omega = \omega\phi$. L'arc NG sera divisé en cinq parties égales, et on pourra diviser de la même manière tous les autres arcs GC, CI , etc.

Démonstration. Puisqu'on a $BQ = RE$, $BF = FE$, $IF = FL$, on aura aussi $IQ = LR$; et comme $Lq = QR$, on aura aussi $Qq = LR = QI$. De même QP étant égal

à $q p$, $Q p$ sera aussi égal à $P p$ et à $Q I$. Pareillement, à cause de $I \pi = Q P$, on aura $\pi P = Q I$; et comme on a $O \omega = B Q$, $O I = I B$, on aura encore $I \omega = Q I$. De plus, à cause de $\omega \phi = I \pi$, on a $I \omega = \phi \pi = Q I$: puis, comme on a $O \phi = O p + p \omega + \omega \phi = B P + P Q + Q R = B R$, en retranchant de part et d'autre les arcs égaux $O G$, $B L$, on aura pour reste $G \phi = L R = Q I$. Enfin, à cause de $B I = L N$, si on retranche les arcs égaux $B Q$, $L p$, on aura pour reste $Q I = N p$. Donc on aura divisé l'arc $N G$ en cinq arcs $N p$, $p P$, $P \pi$, $\pi \phi$, ϕG égaux chacun à l'arc $Q I$, et par conséquent égaux entr'eux; et puisque l'arc $N G$ est un vingt-quatrième de la circonférence (32), sa cinquième partie en sera le cent vingtième.

44. Nous avons donc jusqu'à présent fait, sans aucun autre instrument que le compas, les mêmes divisions en parties égales de la circonférence, que celles que faisoient les Anciens en inscrivant au cercle les cinq polygones réguliers; savoir: le triangle, le quarré, le pentagone, l'exagone et le décagone, et en joignant l'usage de la règle à celui du compas, tandis que l'on y est parvenu d'une manière commode, en prenant seulement deux points hors de la circonfé-

rence, et en n'employant que quatre ouvertures d'un seul compas, ou bien quatre compas (43. 8). En comparant cette méthode avec la méthode connue, on pourra juger de sa simplicité, de sa brièveté et de sa précision dans la pratique.

45. Comme on a par le n.º 40 :

$$Xb + XF = Fb = Xb + XA$$

$$\text{et } Ab = Xb - XA,$$

on aura $Fb \cdot Ab = (Xb)^2 - (XA)^2 = (XB)^2 - (XA)^2 = (AB)^2$; ou bien $Fb \cdot Ab = (FA)^2$: donc la droite Fb sera divisée au point A en moyenne et extrême raison (30. liv. 6).

46. On aura donc $Fb \cdot Ab = (FA + Ab) \cdot Ab = (fA)^2 = (fA + Ab) \cdot Ab = fA \cdot Ab + (Ab)^2 = fA(fA - fb) + (Ab)^2 = (fA)^2 - fA \cdot fb + (Ab)^2$. Ayant donc $(fA)^2 = (fA)^2 - fA \cdot fb + (Ab)^2$, retranchant $(fA)^2$, et ajoutant $fA \cdot fb$, on aura $fA \cdot fb = (Ab)^2$: donc aussi la ligne Af sera divisée en b , en moyenne et extrême raison.

47. Si du centre b , et d'un rayon bA , on décrit un arc qui coupe la circonférence au point T , on aura $Tf = Tb = bA$. En effet, on aura $fA \cdot fb = (Ab)^2 = (Tf)^2$:

d'où (17. liv. 6) on tire cette proportion $fA : fT :: fT : fb$. Donc les deux triangles fAT , fbT , qui ont l'angle en f commun, auront leurs côtés contigus proportionnels : donc (6. liv. 6) ils seront semblables : donc aussi le triangle fbT sera isocèle ; ce qui donne $Tb = Tf$.

48. L'angle $TbA = Tfb + bTf$ (32. liv. 1) $= Tbf + bAT$; en ajoutant Tbf , on aura $TbA + Tbf = 2Tbf + bAT$; mais $TbA + Tbf$ valent deux angles droits (13. liv. 1.) : donc $2Tbf + bAT$ valent deux angles droits. Mais $Tbf = bAT + bTA$ (32. liv. 1) $= 2bAT$. (5. liv. 1). Donc $2Tbf + bAT = 5bAT =$ deux angles droits. Donc l'angle bAT , qui est le même que l'angle fAT , sera un cinquième de deux angles droits, et l'arc fT un dixième de la circonférence.

49. Si on prend la corde $ft = fT$, on aura aussi $bt = ft$ (47), et les deux droites tT , bf se couperont au milieu à angles droits en un point y (14) ; alors on aura $(Tf)^2 = (Ty)^2 + (fy)^2$; d'où on tire $4(Tf)^2 = 4(Ab)^2 = 4(Ty)^2 + 4(fy)^2 = (Tt)^2 + (fb)^2$; et $(Tt)^2 = 4(Ab)^2 - (fb)^2$. Mais $(fb)^2 = (fA - Ab)^2 = (fA)^2 -$

$2fA \cdot Ab + (Ab)^2$. Donc $(Tt)^2 = 3(Ab)^2 - (fA)^2 + 2fA \cdot Ab$. Or $2fA \cdot Ab = 2fA(fA - fb) = 2(fA)^2 - 2fA \cdot fb = 2(fA)^2 - 2(Ab)^2$. Donc $(Tt)^2 = 3(Ab)^2 - (fA)^2 + 2(fA)^2 - 2(Ab)^2 = (fA)^2 + (Ab)^2 = (BA)^2 + (Ab)^2 = (Bb)^2$. Donc aussi $Tt = Bb$; mais Tt est la corde de deux dixièmes, ou d'un cinquième de la circonférence. Donc Bb l'est aussi; donc:

50. Dans le triangle rectangle ABb , le quarré du côté du pentagone est égal à la somme des quarrés des côtés de l'exagone et du décagone. Cette proposition est la 10.^e du liv. 13 d'Euclide.

51. Les côtés du triangle rectangle ABb sont cordes d'arcs qui sont en progression contre harmonique. Car ces arcs sont $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ de la circonférence, et on trouve cette proportion : $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} : \frac{1}{6} - \frac{1}{10} :: \frac{1}{10} : \frac{1}{5}$.

52. Des proportions $fb : bA :: bA : Af$ (46), et $fb : bA :: bA : AF$, il suit que le diamètre Ff est divisé aux points A et b en trois parties qui sont en proportion continue.

P R O B L Ê M E.

53. *Diviser la circonférence en vingt parties, c'est-à-dire trouver la vingtième partie de la circonférence.*

Solution. Tout étant comme au n.º 40, soit fait dans le quart de cercle $B V f$, $f v = B b$, l'arc $B V$ sera la vingtième partie de la circonférence.

Démonstration. En effet, on a $B V = B f - f V = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} (40) = \frac{1}{20}$.

Autre solution. Tout étant aussi comme au n.º 40, soit fait dans le quart de cercle $B V f$, $b V = A B$, l'arc $B V$ sera la vingtième partie de la circonférence.

Démonstration. La droite $A b$ étant la corde de la dixième partie de la circonférence, l'arc $B V$ sera la moitié de cette dixième partie, c'est-à-dire, la vingtième (24).

54. A cause de $V b = V A$, le triangle $A V b$ est isoscèle, ainsi que $b T f$. De plus, comme on a $F A : A b :: A b : b f$ (52), ou en substituant des valeurs égales : $V A : A b :: T b : b f$, les deux triangles isoscèles auront leurs côtés proportionnels : donc ils seront semblables. (6. liv. 6.)

55. Comme on a aussi $bF : FA :: FA : Ab$ (45, et 17. liv. 6), en substituant des valeurs égales, on aura $bF : bV :: bV : Ab$. Donc les côtés qui forment l'angle commun en b , dans les deux triangles bFV , bVA , seront proportionnels, et par conséquent ces triangles seront semblables (6. liv. 6). Donc aussi le triangle bFV sera isoscèle, et on aura $FV = Fb$.

56. L'arc fV étant un cinquième (53), et l'arc fT un dixième de la circonférence (47), l'arc TV en sera aussi un dixième; d'où la corde $TV = Tf = Tb = bA$. Mais on a aussi $Vb = TA$ (53). Donc les deux triangles $V Tb$, TbA seront égaux, puisqu'ils auront tous leurs côtés respectivement égaux. (8. 4. liv. 1.)

P R O B L Ê M E.

57. *Diviser une circonférence en 240 parties égales.*

Solution. Tout étant comme au n.º 43, soit divisé par le moyen donné (38, 39) l'arc NG au point δ en deux parties égales, ce qu'on peut faire en faisant les cordes $\nu\beta$, $\beta\delta$ égales au rayon $e\nu$. Les deux arcs $P\delta$, $\delta\pi$ vaudront

vaudront chacun la deux cent quarantième partie de la circonférence. *Voyez* encore le n.º 58.

Démonstration. En effet, soustrayant des deux moitiés $N \delta$, $G \delta$, les arcs égaux $N P$, $G \pi$ (43), il restera $P \delta = \delta \pi$. Mais $P \pi$ est la cent vingtième partie de la circonférence (43); donc, etc.

58. On pourra, avec une ouverture de compas prise du point δ à un point quelconque N de la division déjà obtenue (43), continuer à diviser en deux toutes les cent vingtièmes parties de la circonférence. Par exemple, avec cette ouverture, en plaçant le centre en p , on divisera l'arc $\pi \phi$; en plaçant le centre en P , on divisera l'arc ϕG , et ainsi de suite.

59. Les trois points a et b [*fig.* 12] et e [*fig.* 11] sont très-remarquables. Car, au moyen de ces seuls points pris hors de la circonférence, nous avons divisé la même en deux cent quarante parties égales, et nous sommes ensuite parvenus à en déterminer la deux cent quarantième partie, en n'employant que les cinq ouvertures de compas $A B$, $B D$, $A a$, $a N$, $A b$. Comme ces points peuvent servir dans la suite à plusieurs autres usages

importans , nous trouverons , par rapport à eux , trois équations fondamentales , desquelles nous retirerons , quand il sera à propos , douze autres équations , et dont nous ferons voir les applications , lorsque l'occasion s'en présentera.

P R O B L Ê M E.

60. *Diviser un arc quelconque* BC [fig. 13] *en deux parties égales en* G .

Solution. Avec le rayon AB , qui a décrit l'arc BC à diviser, et des centres B et C , qui sont les deux extrémités de l'arc, soient décrits les arcs AD , AE ; qu'on fasse à $BC = AD = AE$ (10); puis des centres D et E , et d'un rayon $DC = BE$, soient décrits deux arcs qui se coupent en F . Maintenant avec le rayon AF , et des mêmes centres D et E , qu'on décrive deux autres arcs qui se coupent en G , le point G sera sur la circonférence, et on aura l'arc $BG = GC$.

Démonstration. Les côtés des trois triangles DBA , BAC , ACE , étant respectivement égaux, on aura l'angle $BCA = CAE$ (8. liv. 1). Donc BC sera parallèle à AE (28. liv. 1) : donc $BAEC$ sera un parallélogramme (33. liv. 1).

On prouvera de la même manière que $BCAD$ est un parallélogramme. On a ensuite, dans le parallélogramme $BCAD$, la diagonale AB égale aux côtés opposés BD , AC . Donc le carré de la diagonale DC sera égal à la somme du carré de l'autre diagonale AB , et des carrés des deux côtés AD , BC (25), c'est-à-dire, $(DC)^2 = (AB)^2 + 2(AD)^2$; et comme les deux droites DA , AE sont parallèles à la droite BC , les points D , A , E seront dans la même ligne droite. De plus, les triangles FAD , FAE ayant tous leurs côtés égaux, les angles FAD , FAE seront égaux (8. liv. 1), et par conséquent droits (13. liv. 1). On aura donc $(DF)^2 = (AD)^2 + (AF)^2$; mais $(DF)^2 = (DC)^2$. Donc $(AD)^2 + (AF)^2 = (AB)^2 + 2(AD)^2$; et ôtant $(AD)^2$, on aura $(AF)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$. Mais $(DG)^2 = (AF)^2$: donc $(DG)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$; et parce les triangles GAD , GAE ont leurs côtés égaux, les angles GAD , GAE sont égaux et droits (8) (13. liv. 1). Donc $(DG)^2 = (AG)^2 + (AD)^2$: donc $AB = AG$, et par conséquent le point G est sur la circonférence. Ôtant ensuite des angles droits GAD , GAE , les angles égaux BAD , CAE , les angles restans

BAG , GAC seront égaux. Donc l'arc BC est divisé en deux parties égales au point G (33. liv. 6).

61. *Remarque.* Si l'arc à diviser étoit très-petit comme bc [fig. 13], il vaudroit mieux, dans la pratique, y ajouter de part et d'autre des arcs égaux un peu grands, comme bC , cC , et diviser ensuite l'arc BC en deux parties égales au point G ; l'arc bc se trouveroit ainsi divisé en deux parties égales.

62. Si au contraire l'arc à diviser étoit trop grand comme PGQ , il faudroit en retrancher de part et d'autre des arcs égaux PB , QC , afin de donner une grandeur moyenne à la moitié de l'arc BC , et ensuite diviser cet arc par le milieu au point G ; l'arc PGQ se trouveroit ainsi divisé en deux parties égales.

63. On voit donc que tous les problèmes relatifs à la division de la circonférence, ou des arcs de cercle qu'on peut résoudre avec la règle et le compas, peuvent se résoudre aussi avec le compas seul.

G É O M É T R I E

D U C O M P A S.

L I V R E T R O I S I È M E.

DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION DES DISTANCES EN LIGNE DROITE.

P R O B L È M E.

64. *D* O U B L E R la distance AB .

Solution. Du centre A , et d'un rayon AB , décrivez [fig. 2] une demi-circonférence $BCDE$; c'est-à-dire, faites à $AB = BC = CD = DE$ (10) : la ligne BAE sera droite et double de AB .

Démonstration. Voyez la 15.^e du liv. 4.

P R O B L È M E.

65. *T* R I P L E R , *q* U A D R U P L E R , *e* T C . une distance AB .

Solution. Qu'on ajoute [fig. 1] à AB la droite égale AE (64); qu'on ajoute de la même manière la ligne égale EV , etc., la droite $BAEV$ sera égale à $3AB$: en continuant de la même manière, on quadruplera, etc.

Démonstration. La ligne BAE est droite (15. liv. 4), ainsi que la ligne AEV : donc, etc.

P R O B L Ê M E.

66. *Partager en deux parties égales la distance AB , c'est-à-dire, trouver le point M qui soit au milieu de la droite AB .*

Solution I.^{re} Après avoir décrit [fig. 14] la demi-circonférence $BCDE$ (64), du centre E et d'un rayon EB , soit décrit un arc indéfini PBp ; du centre B et d'un rayon BA , soit encore décrite la demi-circonférence $pAP|m$; ensuite, du centre P et du rayon PB , soit décrit l'arc BM , et qu'on fasse à $Pm = BM$; le point M sera le point cherché.

Démonstration. La ligne Bm sera sur le prolongement de Bp (15. liv. 4). Substituant les trois lignes égales BP , Bp , Bm aux trois lignes égales Ap , pB , pS du n.º 22, les trois lignes égales PE , BE , pE aux trois lignes AQ , pQ , BQ , et la ligne Pm à la ligne AS ; l'équation $AS.pQ = (Ap)^2$ (22) deviendra : $Pm.BE = (BP)^2$. Mais $BE = 2AB$, et $BP = AB$: donc $2AB.Pm$

$= (AB)^2$; et divisant par AB , on a $2Pm = AB = 2BM$. De plus, les triangles BPM , BPm ont leurs angles égaux (8. liv. 1) : donc mP est parallèle à BM (28. liv. 1). Mais les triangles BPm , BPE ont aussi les angles égaux (22) : donc mP est parallèle à BE (28. liv. 1) : donc les droites BM , BE se confondent.

Solution II. Du point A comme centre, et du rayon AB [*fig. 15*], soit décrite la demi-circonférence $BCDE$ (64); des points B et E comme centres, et du même rayon AB , soient décrits les deux arcs indéfinis CP , DQ ; des mêmes points B et E comme centres, et du rayon BE , soient décrits les deux arcs EQ , BP ; du centre P et d'un rayon PB soit décrit l'arc BM ; enfin qu'on décrive du point E comme centre, et d'un rayon PQ un arc qui coupe l'arc BM au point M ; le point M sera le point cherché.

Démonstration. Après avoir fait les substitutions nécessaires dans la *fig. 5* (23), on aura : $PQ \cdot BE = (BE)^2 - (BP)^2$. Mais $BE = 2AB$, $BP = AB$, $PQ = ME$. Donc $2ME \cdot AB = 4(AB)^2 - (AB)^2 = 3(AB)^2$: donc, divisant par AB , on aura $2ME = 3AB$. Mais à cause de l'égalité des côtés

opposés, $P Q E M$ sera un parallélogramme qui, divisé en deux triangles équilatéraux par la diagonale $Q M$, donne l'angle $P Q M = Q M E$ (8. *liv.* 1) : d'où on voit que $P Q$ est parallèle à $M E$ (28. *liv.* 1), et $P M$ parallèle à $Q E$ (33. *liv.* 1). De plus, on a $P Q$ parallèle à $B E$ (23) : donc $M E, B E$ coïncident : donc, ayant $M E = M A + A E = M A + A B$, on aura : $2 M E = 2 M A + 2 A B = 3 A B$: d'où on tire $2 M A = A B$.

Solution III. Du centre A et d'un rayon $A B$, soit décrite [*fig.* 16] la demi-circonférence $B C D E$ (64); du centre B et d'un rayon $B E$ soit décrit l'arc indéfini $P E p$; du centre E et d'un rayon $E C$, qu'on décrive un arc qui coupe ce dernier aux points P et p ; des centres P et p , et du même rayon $P E$, soient décrits deux arcs qui se coupent en M , le point M sera le point cherché.

Démonstration. Le point M sera sur la droite $B E$ (13); et en substituant dans l'équation (19) $p P . p Q = (A p)^2$ les distances, c'est-à-dire les droites correspondantes de cette figure, on aura l'équation $E M . E B = (P E)^2$. D'où, à cause de $(P E)^2 = (E C)^2 = 3(A B)^2$ (12. *liv.* 13) (2), on aura : $2 A B . E M$

$\Rightarrow (AB)^2$; et divisant par AB , $2EM = 3AB$, ou bien $2AE + 2AM = 3AB$:
d'où, retranchant les quantités égales $2AE$,
 $2AB$, il reste $2AM = AB$.

Solution IV. La demi-circonférence $BCDE$ [*fig. 17*] étant décrite (64); du centre B et d'un rayon BD , soit décrit un arc indéfini aDp ; du centre E et du même rayon BD , soit décrit un arc qui coupe celui aDp au point a . Puis du rayon Aa et du centre E , soit décrit un arc qui coupe cet arc aDp en P et p ; enfin du même rayon Aa et des centres P et p , soient tracés deux arcs qui se coupent en M , le point M sera le point cherché.

Démonstration. Le point M sera sur la droite BE (13); puis, faisant les substitutions nécessaires dans l'équation :

$(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ$ (18),
on aura : $(PB)^2 = (PE)^2 + EB \cdot MB$;
ou $(BD)^2 = (Aa)^2 + 2AB \cdot MB$;
ou bien (12. liv. 13) (2) :

$3(AB)^2 = 2(AB)^2 [27] + 2AB \cdot MB$;
d'où, soustrayant $2(AB)^2$, $AB = 2MB$.

On peut donner plusieurs autres solutions de ce problème, ou en employant de nouveaux rayons de cercle, ou en combinant entr'elles les solutions précédentes : mais je

crois inutile de les indiquer. En voici une assez simple, mais qui pourtant n'est pas très-exacte dans la pratique, parce que les arcs s'y coupent à angles trop aigus.

Solution V. Après avoir décrit [*fig. 14*], 1.^o du centre A et d'un rayon AB la demi-circonférence $BCDE$ (64); 2.^o du centre E et d'un rayon EB l'arc indéfini PBp , qu'on décrive du centre B et d'un rayon AB un arc qui coupe l'arc PBp en P et p ; soient encore décrits, des centres P et p et du même rayon AB , deux arcs qui se coupent en M , le point M sera le point cherché.

Démonstration. Le point M sera sur la droite BE (13); et comme à cause d'un angle à la base commun en B (5, 32. *liv. 1. 4. liv. 6*), les deux triangles isoscèles PBM , PBE sont semblables, on aura :

$$BE : BP :: BP : BM :$$

d'où (17. *liv. 6*) :

$$BE \cdot BM = (BP)^2 = (AB)^2,$$

ou $2 AB \cdot BM = (AB)^2$;

et divisant par AB :

$$2 BM = AB.$$

P R O B L Ê M E.

67. Continuer la sous-division en deux parties égales, avec une cons-

truction plus simple , de AM en N , de AN en O , etc. à l'infini.

Solution I. Après avoir décrit [*fig. 18*] du rayon AB la demi - circonférence $B C D E$ (64) ; du centre B avec le même rayon AB , l'arc indéfini $P' C A p'$; des centres E et B et du rayon BE les deux arcs $R' Q' P' B p' q' r'$, $P Q R E r q p$; et du centre E , du rayon EC l'arc $P C p$; si on décrit des centres P' et p' et du rayon AB deux arcs , ils se couperont en M au milieu de la droite AB [*solution V* (66)]. Si des centres P et p et du rayon PE on décrit deux arcs , ils se couperont aussi au même point M [*solution III* (66)]. Qu'on fasse maintenant à $AP' = BQ' = Bq' = q'N = Q'N$ (11) , le point N sera au milieu de la droite AM . Qu'on fasse à $AQ' = BR' = Br' = r'O = R'O$. Le point O sera au milieu de la droite AN . En continuant ainsi , on diviseroit de la même manière AO en deux parties égales , etc. à l'infini.

Démonstration. Si on imagine une droite $P'A$ qui divise en deux parties la base BE du triangle $P'BE$ (12) , on aura (26) :

$$(BP')^2 + (P'E)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP')^2$$

D'où , après avoir substitué les valeurs de

$B P' = A B$ et de $P' E = 2 A B$; et soustrayant $2 (A B)^2$, on aura $3 (A B)^2 = 2 (A P')^2$. D'où on tirera en divisant par 2, $(A P')^2 = (B Q')^2 = \frac{3}{2} (A B)^2$; et comme le point N est sur la droite $B E$ (13), le triangle isoscèle $Q' B N$, à cause de l'angle commun en B (5 et 32. *liv. 1*, 4. *liv. 6*), sera semblable au triangle $Q' B E$. D'où $(B Q')^2 = B N . B E$ (17. *liv. 6*). Puis, comparant entr'elles les deux valeurs de $(B Q')^2$, on aura $\frac{3}{2} (A B)^2 = B N . B E = 2 B N . A B$, et divisant par $2 A B$, $\frac{3}{4} A B = B N$: donc $A N = \frac{1}{4} A B$.

De même on aura (26):

$$(B Q')^2 + (Q' E)^2 = 2 (A B)^2 + 2 (A Q')^2.$$

D'où: $\frac{3}{2} (A B)^2 + 4 (A B)^2 = 2 (A B)^2 + 2 (A Q')^2$;

et réduisant: $\frac{7}{4} (A B)^2 = (A Q')^2 = (B R')^2$.

Mais $(B R')^2 = B O . B E = 2 A B . B O$;

Donc aussi: $\frac{7}{4} (A B)^2 = 2 A B . B O$;

d'où: $\frac{7}{8} A B = B O$; et $A O = \frac{1}{8} A B$, etc.

Solution II. Qu'on fasse à $A P = E Q = E q = q N = Q N$, le point N sera au milieu de la droite $A M$.

Qu'on fasse à $A Q = E R = E r = r O = R O$, le point O sera au milieu de la droite $A N$. Continuant de la même manière, on partageroit en deux la droite $A O$, et ainsi de suite à l'infini.

Démonstration. En effet, on a (26) :

$(PE)^2 + (PB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2$; puis, substituant les valeurs de $(PE)^2 = (CE)^2 = 3(AB)^2$ (12. liv. 3) (2), et de $(PB)^2 = (BE)^2 = 4(AB)^2$, on aura :

$7(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2$. D'où ôtant $2(AB)^2$, et divisant par 2, on a : $\frac{5}{2}(AB)^2 = (AP)^2 = (EQ)^2$. Mais à cause des triangles isoscèles semblables EQN , EQB (13) (5, et 32. liv. 1. 4 et 17. liv. 6), $(EQ)^2 = EN \cdot EB$. Donc, $\frac{5}{2}(AB)^2 = EN \cdot EB = 2EN \cdot AB$; et divisant par $2AB$, on a : $\frac{5}{4}AB = EN$, et $AN = \frac{1}{4}AB$.

En raisonnant de la même manière, on aura :

$(QE)^2 + (QB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ)^2$; d'où : $\frac{5}{2}(AB)^2 + 4(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ)^2$: d'où aussi : $\frac{9}{4}(AB)^2 = (AQ)^2 = (ER)^2 = EO \cdot EB = 2AB \cdot EO$; et divisant par $2AB$, $\frac{9}{8}AB = EO$, et $AO = \frac{1}{8}AB$, etc.

Solution III. Du centre A et du rayon AB [fig. 19], soit décrite la demi-circonférence $BCDE$ (64); avec le même rayon AB et des centres B et E soient décrits les arcs indéfinis CP , Dp ; des mêmes centres B et E et du rayon BE soient décrits les arcs $Epqr$, $BPQR$, on pourra trouver le point M , en faisant $PM = PB$, $EM = Pp$ [Solu-

tion II. (66)]. Actuellement, qu'on fasse à $AP = BQ = QN = Eq$; Qu'on fasse aussi à $Qq = EN$, [le point N sera au milieu de la droite AM . Soit fait pareillement à $AQ = BR = RO = Er$, et à $Rr = EO$, le point O sera au milieu de la droite AN .

Démonstration. Après avoir fait dans la *fig. 5* (23) les substitutions nécessaires, on aura : $Qq \cdot BE = (BE)^2 - (BQ)^2$. Mais $BE = 2AB$, et $(BQ)^2 = \frac{3}{2}(AB)^2$ [voyez la démonstration de la solution I.] Donc $2Qq \cdot AB = 4(AB)^2 - \frac{3}{2}(AB)^2$; puis, divisant par $2AB$, et réduisant, on a $Qq = \frac{5}{4}AB$. Donc aussi $EN = \frac{5}{4}AB$; donc la droite AB étant la même dans les deux *fig. 18* et *19*, les côtés des deux triangles $Q'NE$ [*fig. 18*], QNE [*fig. 19*], seront aussi les mêmes. D'où en superposant les trois points B, Q, E de la *fig. 19*, sur les trois points B, Q', E de la *fig. 18*, les points N des deux figures se confondront aussi. Donc, etc.

De même, faisant les substitutions nécessaires dans la figure 5 (23), on a : $Rr \cdot BE = (BE)^2 - (BR)^2$. Mais $(BR)^2 = \frac{7}{4}(AB)^2$ [démonstration de la solution I]; donc $Rr \cdot BE = (BE)^2 - \frac{7}{4}(AB)^2$; ou bien substituant $2AB$ à BE , on a $2AB \cdot Rr = 4(AB)^2 - \frac{7}{4}(AB)^2$. Puis, divisant

par 2 AB , et réduisant : $Rr = \frac{2}{8} AB = OE$. Donc les points E, R, B de la fig. 19 coïncidant avec les points E, R', B de la fig. 18, et les lignes RO et EO y étant respectivement égales aux lignes $R'O, EO$ de la fig. 18, le point O coïncidera aussi. D'où l'on voit que le point O se trouvera au milieu de la ligne AN . On démontreroit de même pour les autres divisions jusqu'à l'infini.

On pourroit employer d'autres moyens pour trouver les mêmes points : mais nous passerons à d'autres divisions de la ligne AB en un nombre différent de parties.

PROBLÈME.

68. *Diviser la distance AB en trois parties égales.*

Solution. Qu'on ajoute en ligne droite de part et d'autre à AB [fig. 20] les deux distances AE, BV qui lui sont égales (64); des centres E et V et du rayon EV soient décrits les deux arcs indéfinis QVq, PEp ; des mêmes centres E et V et du rayon EB soient décrits deux autres arcs qui coupent les premiers en Q, q , et P, p ; avec ce même rayon EB , et des centres P et p soient décrits deux arcs qui se coupent en T ; enfin, avec

le même rayon, et des centres Q, q soient décrits deux arcs qui se coupent en t , la ligne AB sera divisée en trois parties égales aux deux points T et t .

Démonstration. Les points T, t seront dans la ligne droite VE (13); puis, à cause de l'angle commun en E (5 et 32. liv. 1. 4. liv. 6), le triangle isoscèle $EP T$ sera semblable au triangle isoscèle $EP V$; donc $(PE)^2 = ET \cdot EV$ (17. liv. 6). Substituant dans cette équation $2AB$ pour PE , et $3AB$ pour EV , elle deviendra $\frac{4}{3} AB = ET$; d'où $AT = \frac{1}{3} AB$. On démontreroit de même que Bt est un tiers de AB , et par conséquent aussi Tt .

P R O B L Ê M E.

69. *Diviser une distance AB en un nombre quelconque de parties égales.*

Solution. Un exemple ou deux feront mieux sentir la règle générale.

Exemple I. Soit [fig. 21] la distance AB à diviser en cinq parties égales; qu'on lui ajoute en ligne droite les quatre distances AE, EF, FG, GH (65) qui lui sont égales, de manière qu'elle soit quintuplée en BH , c'est-à-dire, multipliée par autant d'unités qu'il

qu'il y en a dans le nombre qui indique en combien de parties on veut la diviser. Des extrémités B et H comme centres, et avec un rayon AB de la longueur de la distance qu'on veut diviser, qu'on décrive deux arcs indéfinis AC , GI ; des mêmes centres B et H , et avec un rayon BH , soient décrits les deux arcs HI , BC ; puis du centre C et du premier rayon AB , qu'on décrive un arc indéfini BQ ; enfin, du centre H avec le rayon CI , qu'on décrive un arc qui coupe l'arc BQ en Q ; la distance BQ sera sur la direction de la ligne BA , et en sera la cinquième partie.

Si on ajoute ainsi à BQ la droite égale Qq (64), et ensuite les autres lignes égales qr , rs , on aura déterminé toutes les cinquièmes parties de la droite BA .

Exemple II. Si on veut diviser la distance AB en sept parties égales [*fig. 22*], soit faite la ligne BH sept fois plus grande que BA ; des extrémités de cette ligne, c'est-à-dire, des points B et H , et avec le rayon AB , soient décrits les arcs indéfinis AC , GI ; des mêmes centres B et H et du rayon BH , soient décrits les deux arcs HI , BC ; du centre C et du premier rayon AB , soit décrit un arc indéfini BQ ; du centre H et du rayon CI , soit

D

décrit un arc qui coupe cet arc BQ en Q ; BQ sera sur la direction de BA , et en sera la septième partie.

Démonstration. Les triangles CQI , IHQ ayant leurs côtés respectivement égaux, on aura l'angle $CIQ = IQH$ (8. liv. 1); donc CI est parallèle à HQ (28. liv. 1). De plus, la ligne CI étant aussi parallèle à BH (23), le point Q sera sur la ligne BH . D'où on voit que les deux triangles isoscèles CBQ , CBH ayant un angle à la base commun en B , seront semblables (5, 32. liv. 1. 4. liv. 6); Ce qui donne $HB : BC :: BC : BQ$, ou bien $HB : AB :: AB : BQ$: donc la ligne AB sera autant de fois plus grande que BQ , que la droite HB sera de fois plus grande que AB .

Solution II. Si on veut diviser [*fig. 23*], la ligne AB , par exemple, en cinq parties égales, après avoir déterminé, comme dans la *solution I*, la ligne BH cinq fois plus grande que la ligne AB , soit décrit du centre H et du rayon AB un arc indéterminé CBc ; maintenant, du centre B avec le rayon BA , qu'on décrive la demi-circonférence cCK (64); puis, du centre C avec le même rayon AB soit décrit l'arc BQ ; enfin, du centre B et du rayon CK , qu'on décrive un arc qui

coupe cet arc BQ en Q , la ligne BQ sera la cinquième partie de la ligne BA et sera placée dans la même direction.

Démonstration. La droite BK sera sur le prolongement de la ligne BC (15. liv. 4). Après avoir fait les substitutions nécessaires (22), on aura : $K C . B H = (B C)^2 = (A B)^2$; ce qui donne (17. liv. 6) : $B H : A B :: A B : K C$, ou bien $B H : A B :: A B : B Q$: donc la même ligne AB sera d'autant plus grande que BQ , que BH sera plus grande que AB ; et quand on aura $BH = 5 AB$, on aura aussi $AB = 5 BQ$; ensuite les deux triangles BKC , BCQ ayant tous leurs côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $KCB = CBQ$ (8. liv. 1). Mais l'angle CBH est aussi égal à l'angle KCB (22) : donc BQ sera sur la direction de BH .

70. Il est clair que ce dernier problème (69) peut être très-utile dans la pratique pour diviser en lignes un pied déjà divisé en pouces, puisque BH étant égale à douze pouces, BQ deviendra égale à la douzième partie du premier pouce AB , c'est-à-dire, à une ligne. On pourra de la même manière sous-diviser en centimètres le mètre déjà divisé en décimètres. Quand la droite AB , sur laquelle on

doit trouver le point Q , sera décrite, l'opération sera plus simple, puisque, sans décrire du centre C , et avec le rayon AB l'arc BQ , il suffira de couper en Q la droite donnée AB avec les ouvertures de compas précédemment indiquées.

G É O M É T R I E

D U C O M P A S.

L I V R E Q U A T R I È M E.

DE L'ADDITION ET DE LA SOUSTRACTION
DES DISTANCES ; DE LA SITUATION DES
PERPENDICULAIRES ET DES PARALLÈLES.

71. **I**L est sans doute fort simple et très-facile d'ajouter à des distances données , ou d'en retrancher une autre distance avec la règle et le compas , en tirant une droite indéfinie par les deux extrémités de la première distance , et en y ajoutant , ou en en retranchant avec le compas la seconde distance (3. *liv.* 1) ; mais il n'est certainement pas aussi prompt , ni aussi aisé de le faire avec le compas seul : aussi ne donnerons - nous pas ici les problêmes suivans comme d'un grand usage , mais seulement pour faire voir qu'il n'y a aucun problême de la Géométrie élémentaire qu'on ne puisse aussi résoudre avec le compas seul dans le sens déjà expliqué (1) , ce qu'on démontrera dans la suite plus rigoureusement ; et pour remplir la promesse que nous

avons faite (7) de n'omettre aucuns des élémens de cette nouvelle Géométrie.

P R O B L È M E.

72. *De la distance* AB [fig. 24] *retrancher une distance égale à* CD .

Solution. Du centre B et du rayon CD (si c'est du côté de B qu'on veut retrancher la distance), décrivez la circonférence $FGEH$; du centre A et d'un rayon quelconque , soit décrit un arc qui la coupe en E et F , et divisez en deux parties égales au point G l'arc $E G F$ (60), le point G sera sur la droite BA , et on aura pour reste la ligne GA .

Démonstration. Les triangles EBG , FBG ayant les côtés égaux , l'angle EBG sera égal à l'angle FBG (8. liv. 1) : donc l'angle EBG sera égal à la moitié de l'angle EBF . Les triangles EBA , FBA ayant aussi les côtés égaux entr'eux , on prouvera de même que l'angle EBA est aussi la moitié de l'angle EBF . Donc l'angle EBG est égal à l'angle EBA : donc le point G est sur la droite BA . Mais BG est aussi égal à CD : donc en retranchant de AB la droite CD , on aura GA pour reste.

PROBLÈME.

73. *Ajouter à la ligne AB la distance CD en ligne droite.*

Solution. Du centre B (si c'est de ce côté qu'on veut ajouter la distance CD) et d'un rayon CD , soit décrit le cercle $FGEH$. Du centre A et d'un rayon quelconque, soit décrit un arc qui coupe le cercle en E et F ; Qu'on divise en deux parties au point H l'arc EHF (60), le point H sera sur la droite AB , et AH sera la somme des deux distances AB , CD .

Démonstration. Les triangles EBH , FBH ayant les côtés respectivement égaux, ainsi que EBA , FBA , l'angle EBH sera égal à l'angle FBH , et l'angle EBA égal à l'angle FBA . Donc $EBH + EBA = FBH + FBA$. Mais la somme de ces quatre angles vaut quatre angles droits (13. liv. 1) : donc leur moitié (par exemple, $EBH + EBA$) vaudra deux angles droits : d'où on voit que la ligne HBA sera droite (14. liv. 1). De plus, $BH = CD$; donc $AH = AB + CD$.

PROBLÈME.

74. *Placer sur AB de B vers A la distance CD plus grande que AB .*

Solution. Du centre B et du rayon CD , soit décrit un arc indéfini LMN , ou un cercle entier; du centre A et d'un rayon arbitraire soit décrit un arc qui coupe le premier aux points L et N ; qu'on divise l'arc LN en deux parties égales au point M (60), la ligne BM sera la ligne CD placée où on vouloit qu'elle le fût.

Démonstration. Comme on a l'angle $LMA = NMA = \frac{1}{2} LMN$, et aussi $LMB = NMB = \frac{1}{2} LMN$, on trouvera, par le moyen des démonstrations des deux problèmes précédens, que l'angle $LMA = LMB$: d'où l'on voit que BAM est droite: de plus, elle est égale à CD : donc, etc.

75. *Observation.* Si l'arc décrit du centre A coupoit à angles trop aigus l'arc décrit du centre B , ce qui arrive quand la ligne AB est trop petite par rapport à CD , il faudroit ajouter à BA la ligne égale AE en ligne droite, et couper avec un arc décrit du centre E en L et M l'arc LMN décrit du centre B ; si alors les angles des deux arcs sont encore trop aigus, il faut tripler, quadrupler, etc. (65), la ligne BA de B vers A , jusqu'à ce que le point qui la termine, pris pour centre

du second arc, donne les angles d'intersection en L et M plus approchans de l'angle droit. On fera la même chose dans les cas semblables pour les n.^{os} 72 et 73.

P R O B L Ê M E.

76. *Etant donnés deux points A et B , trouver un point H tel que la droite BH soit perpendiculaire en B à la ligne AB , et égale à une ligne donnée CD .*

Solution. Du centre B , et avec la distance CD pour rayon, soit décrit un cercle FEG ; du centre A , et avec la distance AB pour rayon, soit décrit un arc qui coupe le cercle en F et E ; qu'on détermine la demi-circonférence FEG (64), et qu'on divise en deux parties égales au point H l'arc GE (60), le point H sera le point cherché.

Démonstration. A cause de la similitude des triangles GEB , EBA (22), on aura l'angle $GEB = EBA$: d'où on voit que GE est parallèle à BA (28. liv. 1). Mais BH qui divise l'angle GBE en deux parties égales, est perpendiculaire à la corde GE (9. 11. 12. liv. 1), et par conséquent aussi à BA (28. liv. 1). Or on a de plus $BH = CD$; donc H est le point cherché.

Si la ligne AB étoit plus petite que CD , il faudroit doubler, tripler, etc. (64, 65).

P R O B L Ê M E.

77. *Etant donnés deux points A et B , trouver un point D , tel que DA soit perpendiculaire à AB .*

Solution. Des centres A et B , et d'un rayon (AB , par exemple) pris arbitrairement, soient décrits deux arcs qui se coupent en C ; avec le même rayon et du centre C , soit décrite la demi-circonférence BAD (64), le point D sera le point cherché.

Démonstration. L'angle DAB est inscrit et appuyé sur le diamètre : donc il est droit (31. liv. 3).

P R O B L Ê M E.

78. *Etant données les deux extrémités d'une droite AB , et un point D pris hors de cette ligne, trouver [fig. 28] un autre point E qui détermine la position de la droite DE perpendiculaire à AB , et le point M où elle la coupe.*

Solution. Soit fait à $AD = AE$, à BD

$= BE$ (11), le point E sera le premier point cherché. Soit divisée la ligne DE en deux parties égales au point M , le point M sera le second point.

Démonstration. Elle se trouve au n.º 14.

P R O B L Ê M E.

79. *Trouver deux points d'une droite qui soit perpendiculaire au milieu de DE [fig. 28].*

Solution. Soit fait à un rayon quelconque pris arbitrairement $= DA = EA$; soit fait de l'autre côté au même rayon, ou à tout autre pris arbitrairement, $= DB = EB$, les points A et B seront les deux points cherchés.

Démonstration. Elle se trouve au n.º 14.

P R O B L Ê M E.

80. *Etant donnés deux points A et B d'une ligne droite, et un point C pris hors de cette ligne, par lequel on veut mener une parallèle à AB, trouver un autre point D qui en détermine la position.*

Solution. Soit fait à $CA = BD$ (11), et

à $BA = CD$, le point D sera le point cherché.

Démonstration. Dans les deux triangles CDB , CAB , qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun, l'angle DCB est égal à l'angle CBA (8. liv. 1) : donc CD est parallèle à AB (28. liv. 1).

P R O B L È M E.

81. *Etant donnés [fig. 30] deux point A et B d'une ligne droite, et un point C pris hors de cette ligne, porter à ce point C une distance CB; de manière que la droite CE soit parallèle à AB, et égale à une ligne donnée MN.*

Solution. Ayant trouvé un point D de la ligne parallèle qui passe par le point C (80), sur la direction de la ligne CD , placez la droite MN , en la soustrayant, si elle est plus petite (72), ou en l'ajoutant de l'autre côté (73), ou en la plaçant sur CD de C vers D , si elle est plus grande (74), suivant que l'exigeront les conditions du problème.

Cette solution n'a pas besoin de démonstration.

PROBLÈME.

82. *Vérifier* [fig. 31] *si les points* A, B, C *sont en ligne droite.*

Solution. Des centres A et C , et d'un rayon (AC , par exemple) pris arbitrairement, soient décrits deux arcs qui se coupent en D et E ; puis qu'on observe si $DB = EB$; si cela est, les trois points A, B, C sont en ligne droite; sinon ils n'y sont pas.

Démonstration. Si on a encore $DB = EB$, on aura l'angle $DAB = EAB = \frac{1}{2} DAE$ (8. liv. 1), car les deux triangles DAB, ABE ont les côtés égaux chacun à chacun. Mais par la même raison, dans les triangles DAC, EAC , les angles DAC, EAC sont égaux, et par conséquent chacun d'eux est égal à la moitié de l'angle DAE : donc on aura $DAB = DAC$; d'où on voit que les trois points A, B, C sont en ligne droite.

Mais si la ligne DB est plus grande ou plus petite que EB , l'angle DAB sera ou plus grand ou plus petit que l'angle EAB (25. liv. 1); il ne pourra donc pas être égal à l'angle DAC , puisqu'il ne sauroit être égal à la moitié de l'angle DAE : donc les trois points A, B, C ne pourront être en ligne droite.

P R O B L Ê M E.

83. *Etant donnés trois points A, B, D [fig. 32], vérifier si la ligne DA est perpendiculaire à AB.*

Solution. Soit doublée la ligne AB en BE (64) par le moyen du demi-cercle $BPQE$; qu'on observe si on a $DB = DE$; si cela est, l'angle DAB est droit; autrement il ne l'est pas.

Démonstration. La droite BAE étant le diamètre du cercle, fera avec DA deux angles, dont la somme vaudra deux angles droits (13. liv. 1). De plus, dans les deux triangles DAE , DAB , qui ont les côtés AE , AB égaux, et le côté AD commun, quand on aura le côté DE égal au côté DB , l'angle DAE sera aussi égal à l'angle DAB (8. liv. 1), et par conséquent ils seront tous deux droits. Mais quand DE sera plus grande ou plus petite que DB , l'angle DAE sera aussi plus grand ou plus petit que DAB : donc l'un sera aigu et l'autre obtus (25. liv. 1).

P R O B L Ê M E.

84. *Vérifier si la droite, qui passe*

par deux points donnés D, F [fig. 33], est perpendiculaire à celle qui passe par deux autres points donnés A, B .

Solution. Trouvez par le moyen du point D la droite DE perpendiculaire à AB (78), et voyez si les trois points D, E, F sont en ligne droite (82); s'ils y sont, la ligne DF est perpendiculaire à AB ; sinon elle ne l'est pas.

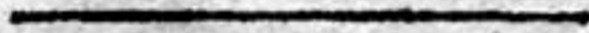
Démonstration. En effet, DE est perpendiculaire par construction; si DF l'est aussi, ce sera la même droite, puisque d'un point D à une droite AB , on ne peut mener deux perpendiculaires (coroll. prop. 32. liv. 1).

P R O B L È M E.

85. Etant donnés [fig. 34] deux points A, B d'une droite, et deux points C, D d'une autre, vérifier si ces deux lignes sont parallèles.

Solution. Soit fait à $AD = AE$, à $BD = BE$ (11), et de même à $AC = AF$ et à $BC = BF$, on observera si $DE = CF$; dans ce cas, les deux lignes seront parallèles; sinon elles convergeront du côté de la plus petite.

Démonstration. Les lignes DE , CF sont perpendiculaires à AB , et sont coupées par moitié aux deux points M et N (14) : donc elles sont respectivement doubles des distances DN , CN des points D et C de la droite AB : donc, quand ces lignes seront égales, les distances le seront aussi, et par conséquent les lignes AB , DC seront parallèles ; autrement elles convergeront.



G É O M É T R I E

D U C O M P A S.

L I V R E C I N Q U I È M E.

DES DISTANCES PROPORTIONNELLES.

P R O B L È M E.

86. *T* R O U V E R une troisième proportionnelle à deux distances Qp , MN (fig. 35), dont la première Qp est plus grande que la seconde MN .

Solution. Du centre Q et d'un rayon Qp , soit décrit un arc indéfini ApB ; du centre p et d'un rayon MN soit décrite la demi-circonférence $BA S$; la ligne AS sera la troisième proportionnelle demandée.

Démonstration. Par le lemme du n.º 22, on aura : $AS.pQ = (Ap)^2$. Donc $AS.pQ = (MN)^2$, donc (17. liv. 6) :

$$pQ : MN :: MN : AS.$$

P R O B L È M E.

87. *Trouver une troisième propor-*

tionnelle à deux distances Qp , MN (fig. 36), dont la première est plus petite que la seconde, mais pourtant plus grande que la moitié de cette ligne.

Observation. Nous serons assurés que la ligne Qp est plus grande que la moitié de MN , si les deux cercles décrits des centres Q et p , qui sont les extrémités de la première distance et des rayons Qp et MN , qui sont les deux distances données, se coupent comme dans la figure.

Solution. C'est la même que la précédente, appliquée à la figure 36.

Démonstration. Elle est la même que la précédente.

88. Si le cercle $p b Q'$ [fig. 37], décrit du centre Q et du rayon Qp n'avoit aucun point d'intersection avec le cercle décrit du centre p et du rayon MN comme dans la figure 37, on se serviroit du problème suivant.

P R O B L Ê M E.

89. *Trouver (fig. 37) une troisième proportionnelle à deux distances Qp , MN , dont la première est plus petite que la moitié de la seconde.*

Solution. Du centre p et du rayon MN , soit décrit un arc indéfini $BA S$; du centre Q et du rayon Qp soit décrite la demi-circonférence $pb Q'$ (64); du centre Q' et du rayon $Q'p$ soit décrit un arc indéfini; si cet arc coupe l'arc $BA S$ en deux points B et A , qu'on détermine la demi-circonférence $BA S'$ (64); et qu'on ajoute en ligne droite à AS' (64) une droite égale $S'S$; la ligne AS sera la troisième proportionnelle cherchée.

Démonstration. On a [22] :

$$AS' \cdot pQ' = (Ap)^2 = (MN)^2.$$

Mais $pQ' = 2pQ$. Donc $2AS' \cdot pQ = (MN)^2$; ou bien $AS \cdot pQ = (MN)^2$, d'où (17. liv. 1) :

$$pQ : MN :: MN : AS.$$

90. Si cependant l'arc $pc Q''$ [fig. 38.] décrit du centre Q' et du rayon $Q'p$ coupoit l'arc $BA S$ décrit du centre p et du rayon MN , déterminez la demi-circonférence $pc Q''$, et décrivez du centre Q'' et du rayon $Q''p$ un arc indéfini; s'il coupe l'arc $BA S$ aux deux points A et B , déterminez la demi-circonférence $BA S'$ (64); quadruplez AS' (65), et faites $AS = 4AS'$. Cette ligne sera la troisième proportionnelle cherchée.

Démonstration. En effet, on a (22) :

$$AS' \cdot pQ'' = (Ap)^2 = (MN)^2, \text{ et } 4AS' \cdot pQ$$

$$= (MN)^2 = AS \cdot pQ.$$

D'où (17. liv. 6) :

$$pQ : MN :: MN : AS.$$

91. On procéderoit de la même manière , quand même la distance $Q''p$ seroit plus grande que la moitié de MN ; c'est-à-dire , on prendroit une distance double de cette ligne , et huit fois plus grande que Qp , et on octuple-roit la ligne AS' , que l'on vient de déterminer. Cette distance octuple de AS' seroit la troisième proportionnelle cherchée , et ainsi de suite.

La démonstration est la même que celle qui précède.

92. Dans le cas encore où la première distance Qp seroit un peu plus grande que la moitié de la seconde MN , il faudroit doubler cette distance , afin que les intersections des deux cercles se fassent à angles moins aigus et plus approchans de l'angle droit (9).

P R O B L Ê M E.

93. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois distances PQ , RS , TV , (fig. 32).*

Solution. D'un même centre O , et avec les deux premières distances PQ et RS , prises pour rayon , décrivez les deux cercles BC , DE ;

d'un rayon égal à la troisième distance TV , et d'un point quelconque B de la première circonférence, décrivez un arc de cercle qui la coupe en C ; du même point B , et avec un rayon arbitraire, décrivez un arc de cercle qui coupe la seconde circonférence en D ; du même rayon BD , et du centre C coupez la même circonférence en E ; joignez les deux points par la droite DE ; elle sera la quatrième proportionnelle cherchée.

Démonstration. Les triangles COE, BOD , ayant les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $COE = BOD$ (8. liv. 1); retranchant l'angle commun BOE (ou l'ajoutant), on aura $COB = EOD$. Donc $OCB + OBC = OED + ODE$ (32. liv. 1). Mais les deux triangles COB, EOD sont isoscèles: donc les demi-sommes, c'est-à-dire, les angles à la base, sont égaux. Donc ces deux triangles sont semblables, et on a: $CO : DO :: CB : DE$; ou bien $PQ : RS :: TV : DE$.

94. *Observation* I. Il conviendra de prendre le rayon arbitraire BD , tel que l'angle BDO soit à-peu-près droit (9): ce qui peut se faire à vue-d'œil.

95. *Observation*. II. Si la troisième distance TV ne peut pas être placée comme corde sur BC , ce qui arrivera lorsque TV sera plus

grande que deux fois la ligne PQ , il faudra doubler les deux distances PQ , RS (64), et avec ces deux distances ainsi doublées, décrire les deux cercles BC , DE , et achever la construction comme ci-dessus (93). Si cela ne suffisoit pas, on les tripleroit, etc. quand même TV pourroit s'appliquer comme corde au premier cercle; si elle est presque égale au diamètre de ce cercle, il faudra doubler ou tripler ces distances pour éviter les sections à angles aigus, et en obtenir d'autres plus approchantes de l'angle droit.

La démonstration est fondée sur la proportion suivante :

$PQ : RS :: 2PQ : 2RS :: 3PQ : 3RS ::$, etc.
Donc, lorsqu'on aura fait :

$BC : DE :: 2PQ : 2RS :: 3PQ : 3RS ::$, etc.
ce qui suit de la construction, on aura aussi :

$PQ : RS :: BC : DE$;
ou $PQ : RS :: TV : DE$ (4. liv. 5).

P R O B L È M E.

96. *Diviser la droite MN en P en parties proportionnelles à deux distances données PQ , RS .*

Solution. Portez sur le prolongement de PQ , la droite $QV = RS$ (73); cherchez une quatrième proportionnelle aux trois

droites PV , MN , PQ [93] : portez-la sur la ligne MN en MP , en la soustrayant de MN (72) ; le point P où elle tombera sera le point cherché.

Démonstration. On a par construction :

$$PV : MN :: PQ : MP ;$$

on aura donc aussi (5. liv. 5) :

$$PV : MN :: QV : PN.$$

D'où :

$$PQ : MP :: QV : PN ;$$

ou bien $PQ : QV :: MP : PN$;

et en mettant pour QV sa valeur :

$$PQ : RS :: MP : PN.$$

P R O B L Ê M E.

97. *Diviser la droite AB (fig. 41) en moyenne et extrême raison.*

Solution. Du centre A et du rayon AB , décrivez le cercle BDd ; soit fait dans sa circonférence à $AB = BC = CD = DE = Ed$; faites à $BD = Ba = Ea$; faites à $Aa = Eb = db$; la droite AB sera divisée en moyenne et extrême raison au point b , et on aura : $BA : Ab :: Ab : bB$.

Démonstration. Voyez le n.º 46.

98. Ce dernier problème est encore un de ceux que l'on résout au moyen du compas

seul, plus simplement qu'avec la règle et le compas réunis. On peut s'en convaincre, en comparant cette solution avec celles données dans les traités ordinaires de Géométrie. Cependant la démonstration en est plus compliquée.

P R O B L È M E.

99. *Trouver une moyenne proportionnelle entre les distances données AB et CD (fig. 42).*

Solution. Sur la droite AB , portez CD de B en H (73); divisez AH en deux parties égales au point F (66); prolongez la ligne BF de la partie égale Bf (64); des points F et f pris pour centre et avec un rayon égal à AF , décrivez deux cercles qui se coupent au point M , BM sera la moyenne proportionnelle demandée.

Démonstration. Les points f , B , F étant sur la même droite HA , et les triangles MBf , MBF ayant les côtés respectivement égaux, on aura l'angle $MBF = MBf$ (8. liv. 1), et par conséquent chacun de ces angles sera droit (13 liv. 1); donc MB sera perpendiculaire sur le diamètre du demi-cercle HMA . De-là on a (13 liv. 6) : $AB : BM :: BM : BH$; ou bien : $AB : BM :: BM : CD$.

G É O M É T R I E

D U C O M P A S .

L I V R E S I X I È M E .

D E S R A C I N E S .

P R O B L È M E .

100. **T** R O U V E R *facilement les racines des nombres entiers , depuis un jusqu'à dix , en prenant pour unité la distance AB (fig. 43).*

Solution. Du rayon AB , décrivez le cercle $B D d$; faites à $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$; des points B et E pris pour centre , et du rayon BD , décrivez les arcs de cercle qui se coupent en a et α ; du même rayon BD et des centres D et d , décrivez des arcs de cercles qui se coupent au point V . Du rayon Aa , et du centre B , coupez la circonférence au point F ; des centres R et F et du rayon AB , décrivez deux arcs de cercle qui se coupent au point T ; on aura :

$$AB = \sqrt{1}$$

$$Aa = \sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{3}$$

$$BE = \sqrt{4}$$

$$ET = \sqrt{5}$$

$$aV = \sqrt{6}$$

$$CV = \sqrt{7}$$

$$a\alpha = \sqrt{8}$$

$$BV = \sqrt{9}$$

$$TV = \sqrt{10}$$

Démonstration. On a prouvé [27], que $(Aa)^2 = 2$; donc $Aa = \sqrt{2}$. On sait aussi [2] que $BD = \sqrt{3}$; on a ensuite $BE = 2 = \sqrt{4}$.

Les triangles BTA , TAF , ayant les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $BTA = TAF$ (8. liv. 1), et par conséquent BT parallèle à FA (28. liv. 1): donc BT sera perpendiculaire sur BA , de même que FA [27] (27 liv. 1): de plus, les points A et E étant à la même distance des points D et d , ainsi que les points B et V , les quatre points B , A , E , V , seront dans la même droite [13], et on aura $EV = BA$ [14]. On aura donc :

$$\begin{aligned} (ET)^2 &= (TB)^2 + (BE)^2 \quad (47. liv. 1) \\ &= (AB)^2 + 4(AB)^2 = 5. \end{aligned}$$

d'où : $ET = \sqrt{5}$.

De même $(aV)^2 = (Aa)^2 + (AV)^2$.

et comme $EV = BA$, on aura :

$$AV = BE = 2AB;$$

d'où : $(AV)^2 = 4(AB)^2 = 4$.

On a de plus $(Aa)^2 = 2[27]$; donc $(aV)^2 = 6$, et $aV = \sqrt{6}$. Comparant ensuite les points C, B, c, A, V avec les points A, p, B, P, Q de la figure 3, et substituant dans l'équation :

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ [18];$$

on aura :

$$(CV)^2 = (CB)^2 + BV \cdot AV = 1 + 3 \cdot 2 = 7.$$

d'où : $CV = \sqrt{7}$; et comme $Aa = A\alpha [14]$,

on aura :

$$(a\alpha)^2 = 4(Aa)^2 = 8.$$

d'où : $a\alpha = \sqrt{8}$. On a ensuite $BV = 3 = \sqrt{9}$.

Enfin on a :

$$(TV)^2 = (TB)^2 + (BV)^2 = 1 + 9 = 10;$$

donc $TV = \sqrt{10}$.

PROBLÈME.

101. *Par le moyen des racines trouvées dans le problème précédent, trouver (fig. 44) les autres racines des nombres entiers, depuis 10 jusqu'à 36.*

Solution. Soit soustrait le nombre dont on veut avoir la racine du nombre quarré immédiatement plus grand, qui sera, ou 16, ou 25, ou 36; avec la racine du reste que l'on trouvera [100], prise pour rayon, et du centre A , soit décrite la demi-circonfé-

rence QLR [64]; avec la racine du nombre quarré immédiatement plus grand, prise pour rayon (on la trouvera par la méthode du n.º 65), et des centres Q et R , soient décrits deux arcs qui se coupent en P ; la ligne AP sera la racine cherchée.

Par exemple, si on veut la racine de 29, on aura $36 - 29 = 7$; du rayon $CV = \sqrt{7}$ [100], après avoir décrit la demi-circonférence QLR , soient des centres Q et R , et d'un rayon $= 6$, tracés deux arcs qui se coupent en P , on aura $AP = \sqrt{29}$.

Démonstration. L'angle PAQ étant droit [83], on aura :

$$(PQ)^2 = (AQ)^2 + (AP)^2 \quad (47. \text{ liv. } 1) :$$

d'où :

$$(PQ)^2 - (AQ)^2 = (AP)^2.$$

Maintenant supposant $(PQ)^2 = 36$, et égalant successivement $(AQ)^2$ aux nombres entiers compris depuis 1 jusqu'à 10, $(AP)^2$ sera successivement égal aux quarrés compris depuis 36 jusqu'à 25. Donc on aura successivement pour AP les racines de tous ces nombres. Mais la racine de 25 est 5 [65] : donc supposant $(PQ)^2 = 25$, on aura de la même manière les racines depuis 25 jusqu'à 16; et faisant $(PQ)^2 = 16$, on aura les autres racines depuis 16 jusqu'à 10.

Dans l'exemple que nous avons pris, on aura :
 $(PQ)^2 - (AQ)^2 = 36 - 7 = (AP)^2 = 29$:
 d'où $AP = \sqrt{29}$.

P R O B L Ê M E.

102. *Trouver les racines de tous les nombres entiers.*

Solution. Il est clair qu'en employant la même méthode (101), on peut, avec les racines que l'on a déjà trouvées, avoir les autres racines des nombres supérieurs, et avec celles-ci continuer ainsi à l'infini. Nous avons donc déjà le moyen d'obtenir les racines de tous les nombres entiers.

P R O B L Ê M E.

103. *Trouver la racine d'un nombre fractionnaire quelconque.*

Solution. Trouvez la racine du dénominateur (102), puis celle du numérateur, et faites cette proportion :

La première racine est à la seconde, comme l'unité est à une quatrième proportionnelle (93); ce quatrième terme sera la racine cherchée.

Démonstration. Soit en effet d le dénominateur, et n le numérateur; si on fait cette proportion :

$\sqrt{d} : \sqrt{n} :: 1 :$ à une 4.^e proportionnelle $= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}}$.

Mais $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}} = \sqrt{\frac{n}{d}}$: donc, etc.

P R O B L Ê M E.

104. *Trouver facilement (fig. 45) la moitié des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 25.*

Solution. Du rayon $AB=1$, et du centre A , soit décrit le cercle BDd , et dans sa circonférence soit fait à $AB=BC=CD=DE=Ed$.

Du centre B et du rayon BD , soit décrit un arc qui passe par les points a', N, D, d, n, a .

Du même rayon et du centre E , soit décrit un arc qui passe par les points a, M, C, m, a .

Du rayon Aa et du centre B , soit décrit un arc qui passe par les points M, F, Q, q, m .

Du même rayon et du centre E , soit décrit un arc qui passe par les points N, F, P, p, n .

Du rayon AB et du centre B , soit décrit un arc qui passe par les points P et p .

Du même rayon et du centre E , soit décrit un arc qui passe par Q et q .

Du même rayon et du centre P , soit décrit un arc qui passe par R , et coupe la circonférence en S ; du centre p , soit décrit un autre arc qui coupe le premier en R , et la circonférence en s .

Du même rayon et des centres Q et q , soient décrits deux arcs qui se coupent en T , et coupent la circonférence en O et o .

Du même rayon et du centre a , soit décrit un arc qui coupe la circonférence en g ; du centre R , soit décrit un arc qui coupe la circonférence en L et l ; des centres O et o , soient décrits deux arcs qui se coupent en H ; des centres H et T , soient décrits deux arcs qui se coupent en V et v .

on aura :	$RA = \frac{1}{2} \sqrt{1}$	$HF = \frac{1}{2} \sqrt{13}$
	$RQ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$	$EO = \frac{1}{2} \sqrt{14}$
	$RD = \frac{1}{2} \sqrt{3}$	$Ll = \frac{1}{2} \sqrt{15}$
	$RP = \frac{1}{2} \sqrt{4}$	$BE = \frac{1}{2} \sqrt{16}$
	$RF = \frac{1}{2} \sqrt{5}$	$Ha = \frac{1}{2} \sqrt{17}$
	$AM = \frac{1}{2} \sqrt{6}$	$HN = \frac{1}{2} \sqrt{18}$
	$Qq = \frac{1}{2} \sqrt{7}$	$HD = \frac{1}{2} \sqrt{19}$
	$Aa = \frac{1}{2} \sqrt{8}$	$ag = \frac{1}{2} \sqrt{20}$
	$BR = \frac{1}{2} \sqrt{9}$	$dV = \frac{1}{2} \sqrt{21}$
	$BL = \frac{1}{2} \sqrt{10}$	$HS = \frac{1}{2} \sqrt{22}$
	$pS = \frac{1}{2} \sqrt{11}$	$Mm = \frac{1}{2} \sqrt{23}$
	$BD = \frac{1}{2} \sqrt{12}$	$Mn = \frac{1}{2} \sqrt{24}$
		$HE = \frac{1}{2} \sqrt{25}$

Démonstration. Si on compare les points P, B, p, R, E de cette figure avec les points A, p, B, P, Q de la fig. 3 par le moyen de l'équation du n.º 18 :

$$(A Q)^2 = (A p)^2 + p Q \cdot P Q ;$$

on aura pour cette figure :

$$(P E)^2 = (P B)^2 + B E \cdot R E ;$$

ou :

$$(A a)^2 = (A B)^2 + 2 A B \cdot R E ;$$

ou bien (27) :

$$2 = 1 + 2 R E ;$$

d'où on tire $R E = \frac{1}{2} A E$;

et puisque le point R est sur la même droite $B A E$ [13] , on aura aussi :

$$R A = \frac{1}{2} A E = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{1} .$$

Le point T étant au milieu de $A B$, par la même raison que le point R est au milieu de $A E$, ce qu'on a démontré , on aura $A T = R E$; d'où on voit , en comparant les points Q, T, q, E, R de cette fig. 45 , avec les points A, q, B, Q, P de la fig. 3 , le point A de la fig. 45 sera le point p de la fig. 3. Donc de l'équation du n.º 16 :

$$(A Q)^2 = (A P)^2 + (P Q)^2 + P p \cdot P Q$$

on tirera pour cette fig. 45 , l'équation :

$$(Q E)^2 = (R Q)^2 + (R E)^2 + A R \cdot R E ;$$

et substituant les valeurs numériques :

$$1 = (R Q)^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} ;$$

d'où

d'où on tire :

$$(RQ)^2 = \frac{1}{4} \cdot 2; RQ = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Comparant les points D, A, d, E de la fig. 45, avec les points P, A, p, B de la fig. 3, il restera démontré (14) que les deux droites AE, Dd se coupent réciproquement en deux parties égales. Mais AE est coupée en deux parties égales au point R : donc Dd l'est aussi. Mais $Dd = BD = \sqrt{3} [2]$: donc $RD = \frac{1}{2} \sqrt{3}$.

Qu'on se rappelle que DRd est aussi perpendiculaire à AE (14). On a ensuite $RP = 1$: donc $RP = \frac{1}{2} \sqrt{4}$.

L'angle $FA R$ étant droit (27), on a :

$$(RF)^2 = (FA)^2 + (AR)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4};$$

donc : $RF = \frac{1}{2} \sqrt{5}$.

La base BAE du triangle BME étant coupée au milieu par la droite AM , on aura (26) :

$$(BM)^2 + (EM)^2 = 2(AB)^2 + 2(AM)^2;$$

c'est-à-dire ,

$$(Aa)^2 + (BD)^2 = 2(AB)^2 + 2(AM)^2;$$

ou bien :

$$2 + 3 = 2 + 2(AM)^2;$$

$$\text{d'où : } 6 = 4(AM)^2, \sqrt{6} = 2AM, AM = \frac{1}{2} \sqrt{6}.$$

De la comparaison que l'on vient de faire des points Q, T, q, E, R, A , de la figure 45, avec les points A, q, B, Q, P, p de la fig. 3,

il résulte (13) qu'on a dans la figure 45, $AQ = Aq = QR = Rq$. On verra par les mêmes raisons que les droites AP, Ap, PT, Tp sont égales entr'elles, et aux quatre lignes AQ, Aq, QR, Rq . Donc les deux triangles isocèles PTA, QAR ayant tous les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $PAT = QRA$ (8. liv. 1); et comme la ligne TAR est droite, PA sera parallèle à QR (29. liv. 1); d'où on voit aussi que PQ est égale et parallèle à AR (33. liv. 1).

Mais Qq est perpendiculaire à AR (14); donc elle l'est aussi à PQ (27. liv. 1). Ensuite dans les triangles PAT, RAq , les deux angles PAT, RAq seront égaux (8. liv. 1), et la ligne TAR sera droite. Donc les deux angles PAT, PAR étant égaux à deux angles droits, (13. liv. 1), les deux angles PAR, RAq le seront aussi. D'où la ligne PAq sera droite aussi (14. liv. 1). Donc : $(Pq)^2 = (2RQ)^2 = (PQ)^2 + (Qq)^2$ (47. liv. 1);

c'est-à-dire, $2 = \frac{1}{4} + (Qq)^2$;

d'où : $\frac{7}{4} = (Qq)^2$ et $Qq = \frac{1}{2} \sqrt{7}$.

Puis on a $(Aa)^2 = 2[27] = \frac{8}{4}$:

d'où $Aa = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{8}$.

On a aussi $BR = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{9}$.

Si on compare les points B, L, R, l, A de la figure 45, avec les points Q, A, p, B, P de la figure 3, de l'équation :

$$(A Q)^2 = (A P)^2 + (P Q)^2 + P p \cdot P Q \quad (16)$$

on tirera pour la fig. 45 l'équation :

$$(B L)^2 = (L A)^2 + (A B)^2 + A R \cdot A B;$$

$$\text{ou bien } (B L)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2};$$

$$\text{d'où } B L = \frac{1}{2} \sqrt{10}.$$

Les deux triangles $P S A, P B A$ ont les angles respectivement égaux. Donc on a l'angle $S P A = P A B$ (8. liv. 1); d'où les lignes $P S, B A$ sont parallèles (28. liv. 1). Mais $P p$ coupe $B R$ à angles droits (14). Donc elle sera aussi perpendiculaire à $P S$ (27. liv. 1). On démontrera ensuite que $(P p)^2 = \frac{7}{4}$ de la même manière que l'on a démontré que $(Q q)^2 = \frac{7}{4}$. D'où, à cause de

$$(p S)^2 = (P p)^2 + (P S)^2 \quad (47. \text{ liv. } 1);$$

$$\text{on aura } (p S)^2 = \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4};$$

$$\text{d'où } p S = \frac{1}{2} \sqrt{11}.$$

$$\text{On a ensuite } (B D)^2 = 3 [2] = \frac{12}{4};$$

$$\text{d'où } B D = \frac{1}{2} \sqrt{12}.$$

On a aussi : $(H F)^2 = (H A)^2 + (A F)^2$; et en démontrant que $Q O$ est parallèle à $B E$, de la même manière qu'on l'a fait pour $P S$, les points O, P, Q, S seront dans la même droite; et :

$$P O = Q O - P Q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = P Q.$$

Donc OP étant égale et parallèle à TA et à TB , les lignes OT , PA seront aussi égales et parallèles, ainsi que les lignes OB , PT (33. *liv.* 1). Mais on a démontré plus haut que $PT = PA$. Donc OT , OB seront aussi égales à ces lignes. Par la même raison, les lignes oT , oB de l'autre côté seront égales à $pA = PA$. Si maintenant on compare les points O, o, A, T, B, H avec les points A, B, Q, P, p, q de la figure 3, on tirera [14] :

$$HB = AT = \frac{1}{2}.$$

On aura donc $(HA)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$;

d'où $(HF)^2 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$,

et $HF = \frac{1}{2} \sqrt{13}$.

Si on compare les points E, O, H, o, A avec les points Q, A, p, B, P de la fig. 3, de l'équation :

$$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ$$

[16], on tirera pour la fig. 45 :

$$(EO)^2 = (OA)^2 + (AE)^2 + HA \cdot AE.$$

$$= 1 + 1 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = \frac{14}{4}:$$

d'où, $EO = \frac{1}{2} \sqrt{14}$.

Ensuite si on compare les points A, R, L, Q, q, l de la figure 45, avec les points A, B, Q, P, p, q de la figure 3, on a [15] pour la figure 3, l'équation : $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$; et multipliant par 4,

$$4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2,$$

ou : $(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2$,

on tirera pour la figure 45 :

$$(Ll)^2 = 4(AL)^2 - 4(AR)^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

d'où résulte : $Ll = \frac{1}{2} \sqrt{15}$.

On a ensuite : $BE = 2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1}{2} \sqrt{16}$.

A cause de l'angle droit aAH (27), on a :

$$(Ha)^2 = (HA)^2 + (Aa)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = \frac{17}{4} :$$

d'où $Ha = \frac{1}{2} \sqrt{17}$.

Démontrant que $(AN)^2 = \frac{3}{2}$ de la même manière qu'on l'a fait pour $(AM)^2$, et aussi que

$(An)^2 = \frac{3}{2}$; et parce que NR coupe par moitié

la base AE du triangle ANE , on aura (26) :

$$(AN)^2 + (NE)^2 = 2(AR)^2 + 2(RN)^2 ;$$

c'est-à-dire , $\frac{3}{2} + 2 = \frac{2}{4} + 2(RN)^2$;

et réduisant, on trouve : $(RN)^2 = \frac{3}{2} = (AN)^2$.

De même on trouve $(Rn)^2 = \frac{3}{2}$. Si maintenant

on compare les points H, N, R, n, A de

la figure 45, avec les points Q, A, p, B, P

de la figure 3, de l'équation :

$$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ$$

[16], on tirera pour la figure 45 l'équation :

$$(HN)^2 = (AN)^2 + (AH)^2 + AR \cdot AH ;$$

c'est-à-dire , $(HN)^2 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{18}{4}$:

d'où résulte $HN = \frac{1}{2} \sqrt{18}$.

La ligne DR étant perpendiculaire à AE ,

c'est-à-dire , à HR , on aura :

$$(HD)^2 = (HR)^2 + (RD)^2 \quad (47. \text{ liv. } 1)$$

$$= 4 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4} ;$$

d'où $HD = \frac{1}{2} \sqrt{19}$.

La base aAa du triangle $ag\alpha$ étant coupée au milieu par la droite gA , on aura (26) :

$(ag)^2 + (\alpha g)^2 = 2(Aa)^2 + 2(Ag)^2$,
ou $(ag)^2 + 1 = 4 + 2$; et $(ag)^2 = 5 = \frac{20}{4}$;
d'où $ag = \frac{1}{2} \sqrt{20}$.

Les deux triangles HTV , AED ayant les côtés égaux entr'eux, l'angle $VTH = DEA$ (8. liv. 1), et les points H, T, A, E étant sur la même droite, VT sera parallèle à son égale DE (29. liv. 1) : d'où VD est aussi parallèle et égale à TE (33. liv. 1). Mais Dd est perpendiculaire à AE , c'est-à-dire, à TE ; donc elle l'est aussi à VD (27. liv. 1); d'où $(dV)^2 = (VD)^2 + (Dd)^2 = (TE)^2 + (BD)^2 = (\frac{3}{2})^2 + 3 \cdot [2] = \frac{9}{4} + \frac{12}{4} = \frac{21}{4}$;
d'où $dV = \frac{1}{2} \sqrt{21}$.

Ayant démontré PS égale et parallèle à AE , ainsi que ps par la même raison, SE sera aussi égale et parallèle à AP (33. liv. 1), de même que sE l'est à Ap . A cause de l'égalité et du parallélisme des trois droites PS , TR , ps , on prouvera de même l'égalité de RS , Rs aux lignes PT , pT , toutes deux déjà démontrées égales à $AP = RQ$. Comparant maintenant les points H, S, E, s, R de cette figure 45, avec les points Q, A, p, B, P de la figure 3, de l'équation;

$(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ$ [18],
on tirera pour la figure 45 :

$$(HS)^2 = (SE)^2 + EH \cdot RH = (RQ)^2 + EH \cdot RH = \frac{2}{4} + \frac{5}{2} \cdot 2 = \frac{22}{4} :$$

d'où $HS = \frac{1}{2} \sqrt{22}$.

La base AE du triangle AME étant divisée en deux parties égales par la droite MR , on aura [26] :

$$(AM)^2 + (EM)^2 = 2(RA)^2 + 2(RM)^2,$$

c'est-à-dire, $\frac{6}{4} + 3 = \frac{2}{4} + 2(RM)^2 :$

d'où il résulte après la réduction :

$$(RM)^2 = 2 = (BM)^2 = (Bm)^2;$$

de cette valeur, on déduiroit de la même manière celle de $(Rm)^2$: d'où $BM = MR = Rm = mB$. Si maintenant on compare les quatre points B, M, R, m de la figure 45 avec les quatre points A, Q, B, q de la figure 3, on a (15) :

$$(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2;$$

et de-là : $4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2;$

c'est-à-dire, $(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2;$

on aura pour la figure 45 :

$$(Mm)^2 = 4(BM)^2 - (BR)^2 = 8 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ = \frac{32}{4} - \frac{9}{4} = \frac{23}{4} :$$

d'où $Mm = \frac{1}{2} \sqrt{23}$.

Les triangles BME, BnE ayant les côtés égaux entr'eux, et ayant tous deux la base commune BE divisée en deux parties égales

par les lignes AM , An , de l'équation (26), il résultera la même valeur pour AM , An . Donc les triangles BAM , Ean ayant les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $BAM = Ean$ (8. liv. 1); d'où, à cause de la droite BAE , la somme des angles MAB , MAE étant égale à deux droits (13. liv. 1); et substituant à l'angle MAB son égal Ean , la somme des deux angles MAE , Ean vaudra deux angles droits; d'où les deux lignes MA , An seront une seule ligne droite, (14. liv. 1).

On aura donc : $(Mn)^2 = 4(AM)^2 = \frac{24}{4}$; d'où $MN = \frac{1}{2} \sqrt{24}$.

Enfin, $HE = \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{25}$.

105. Comme on a $\frac{1}{2} \sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{4}}$; par exemple, $\frac{1}{2} \sqrt{7} = \sqrt{\frac{7}{4}}$, etc., on aura facilement, au moyen de ce problème, les racines de tous les quarts depuis un jusqu'à vingt-cinq : ce dont on fera usage, comme nous le verrons, dans la construction des figures semblables.

106. Si on avoit pris le rayon $AB = 2$, on auroit eu toutes ces distances doubles de valeur; d'où nous aurions eu les racines entières des nombres depuis 1 jusqu'à 25. On pourroit donc facilement doubler l'une quelconque de ces moitiés de racines, pour avoir la racine entière (64).

107. La facilité de cette construction qu'on exécute avec les trois seules ouvertures déjà observées (35) ; savoir :

la première = $\sqrt{1}$;

la troisième = $\sqrt{2}$;

la seconde = $\sqrt{3}$,

avec lesquelles on a déjà divisé le cercle en 24 parties égales , et trouvé ensuite les 25 racines successives des premiers nombres , fait voir l'excellence de la Géométrie du compas , et combien elle peut contribuer à la perfection des Arts.

108. On a eu soin , dans la construction précédente , d'employer le plus qu'il a été possible le premier compas dont l'ouverture = 1 , qui a décrit la circonférence BDd , et qui , conservant l'ouverture fondamentale , mérite plus de confiance que les autres. C'est aussi pourquoi on n'a voulu employer que les trois premiers compas les plus remarquables (107) ; ce qui a fait que quelques-unes des sections des arcs se sont faites à angles un peu aigus , comme celles des points S, s, O, o , et sur-tout celles des points L et l . Si on vouloit avoir tous les angles d'intersection plus approchans de l'angle droit , on pourroit employer la construction suivante.

Autre construction de la figure 45.

109. Après avoir trouvé les points M et m , comme dans la solution (104); du rayon BD et des centres M et m , soient décrits deux arcs qui se coupent en H .

Du rayon AB , et du centre H , soit décrit un arc qui coupe la circonférence en O et o ; du même rayon soient déterminées les demi-circonférences OEs , oES (64); du rayon BE et du centre H , soit décrit un arc qui coupe la circonférence en L et l .

Tous les autres points de la figure se trouveront comme au n.º 104.

Démonstration. Nous démontrerons que les points que l'on trouve avec cette construction, sont les mêmes que ceux trouvés par la première.

Après avoir démontré [104] que $BM = MR = Rm = mB$, et que les trois points B, A, R sont dans la même droite, ayant de plus par construction $MH = ME = mH = mE$, H sera sur la même droite BAR [13], et on aura $HB = RE$ [14]: donc le point H sera le même que dans l'autre construction. Ensuite les lignes HO, Ho étant égales dans les deux constructions, les points O et o seront aussi les mêmes. Si on

soustrait l'arc osE des deux demi-circonférences BsE , oES , les arcs restans Bo , ES seront égaux.

D'où : $ES = Bo = BO = AQ = RQ$:

d'où aussi le point S sera le même que dans la première construction ; le point s le sera également ; puis la base HTR du triangle HLR étant divisée par LT en deux parties égales, on aura (26) :

$$(HL)^2 + (LR)^2 = 2(HT)^2 + 2(TL)^2;$$

c'est-à-dire, $4 + (LR)^2 = 2 + 2(TL)^2$;
ou bien $2 + (LR)^2 = 2(TL)^2$.

Mais encore la base TR du triangle TLR étant divisée par moitié au point A par la droite LA , on aura (26) :

$$(TL)^2 + (LR)^2 = 2(TA)^2 + 2(AL)^2;$$

et doublant :

$$2(TL)^2 + 2(LR)^2 = 4(TA)^2 + 4(AL)^2 \\ = 1 + 4 = 5;$$

d'où soustrayant $2(LR)^2$, on a :

$$2(TL)^2 = 5 - 2(LR)^2.$$

Mais on a trouvé ci-dessus :

$$2(TL)^2 = 2 + (LR)^2;$$

donc :

$$5 - 2(LR)^2 = 2 + (LR)^2.$$

Soustrayant 2, et ajoutant $2(LR)^2$, on a :

$$3 = 3(LR)^2;$$

d'où ; $1 = (LR)^2 = (AB)^2$.

Donc on aura $LR = AB$ comme dans la première construction. On prouvera la même chose pour RL ; les autres points sont déterminés comme dans la construction précédente : donc tous les points de la figure sont les mêmes que dans cette construction.



G É O M É T R I E

D U C O M P A S.

L I V R E S E P T I È M E.

DE L'INTERSECTION DES LIGNES DROITES
AVEC LES ARCS DE CERCLE ET ENTRE
ELLES.

P R O B L È M E.

110. *E*TANT donnés deux points L et M d'une droite (fig. 46), et le centre A avec le rayon AB d'un arc BCD , trouver les deux points P et Q auxquels la ligne LM coupe ledit arc, si toutefois elle le coupe.

Solution. Des points L et M donnés sur la droite, pris pour centres, et avec leurs distances respectives MA , LA du centre donné, prises pour rayons, soient décrits deux arcs qui se coupent en V ; du centre V et du rayon donné AB , soit décrit un arc indéfini EFG ; si cet arc coupe l'arc donné en P et Q , ces deux points seront les points cherchés; s'il ne le coupoit pas,

la droite LM n'en couperoit pas moins l'arc donné.

Démonstration. Les quatre distances AP , AQ , VP , VQ étant égales entr'elles, et les deux autres AM , VM aussi égales entr'elles, les trois points P , M , Q seront dans la même droite (13). On démontre de la même manière que les trois points Q , P , L sont dans la même ligne droite : donc la droite LM passe par les points P et Q , quand ces points d'intersection s'y trouvent.

Si le cercle EFG [*fig. 47*], décrit du centre V et du rayon AB , ne coupoit pas le cercle BCD , LM ne couperoit pas ce même cercle. En effet, si on conçoit la droite VA qui coupe les cercles en C et F , CF étant divisée par moitié en m , on aura $Vm = mA$. Donc LM coupera perpendiculairement VA en m [14] hors du cercle BCD ; si on prend un autre point quelconque P sur la droite LM , dans le triangle rectangle PmA , on aura le côté PA plus grand que mA , parce qu'il est opposé à un plus grand angle (32, et 18. *liv. 1*). Donc le point P sera beaucoup plus hors du cercle que le point m : donc la droite LM ne coupera dans aucun point le cercle BCD .

PROBLÈME.

111. *Etant donné [fig. 48.] un arc BCD décrit du centre A, trouver les deux points où la circonférence est coupée par la droite qui passe par A et par un autre point donné L.*

Solution. Du centre L et d'un rayon arbitraire LP , soit décrit un arc qui coupe l'arc BCD en P et en Q ; soit partagé l'arc PQ en deux parties égales au point m (60); soit déterminée la demi-circonférence mDn (64); les points m et n seront les deux points cherchés.

Démonstration. Les trois points A , m et L étant à la même distance des points P et Q , seront dans la même ligne droite (13). Mais la droite mA contient aussi le point n , extrémité du diamètre mn (15. liv. 4) : donc, etc.

PROBLÈME.

112. *Etant donnés deux points A, B d'une droite [fig. 49 et 50.], et deux points C, D d'une autre droite, trouver le point S où elles se coupent.*

Solution. De deux points d'une des deux droites, par exemple, des points A et B pris pour centres, et avec les distances respectives AC , AD de ces points, et BC , BD des deux points C , D de l'autre droite, prises pour rayons, soient décrits quatre arcs, dont deux se coupent aux points C et c , et les deux autres aux points D et d .

Soit trouvé le quatrième point δ du parallélogramme $CDd\delta$, en faisant à $Dd = C\delta$, et à $DC = d\delta$ (11).

Soit trouvée la quatrième proportionnelle aux trois lignes $c\delta$, CD , Cc .

Avec cette distance prise pour rayon et des centres C et c , soient décrits deux arcs qui se coupent en S ; le point S sera celui de l'intersection des deux droites AB , CD .

Démonstration. Les droites AB , Cc seront perpendiculaires l'une à l'autre (13, 14), ainsi que AS , Cc : donc le point S sera dans la même ligne AB ; puis AB ou AS étant aussi perpendiculaire à Dd [13, 14], la même ligne Dd sera parallèle à Cc (29. liv. 1). Mais à cause des côtés égaux entre eux dans les deux triangles $dC\delta$, dCD , on a les angles $dC\delta$, CdD égaux (8. liv. 1).

Donc

Donc les deux lignes $C\delta$, Dd sont aussi parallèles (28. liv. 1) : donc les points c , C , δ sont dans la même droite. Maintenant, à cause des deux côtés égaux dans les deux triangles CBA , cBA , les angles CBA , cBA seront égaux (8. liv. 1) ; par la même raison, on trouvera les angles ABD , ABd égaux dans les triangles ABD , ABd : donc, dans la figure 49, l'angle cBd , qui est la somme des deux angles cBA , ABd , sera égal à l'angle CBD , somme des deux angles CBA , ABD . Dans la figure 50, l'angle cBd , qui est la différence des deux angles ABd , cBA , sera aussi égal à l'angle CBD , qui est la différence des deux angles ABD , CBA : donc pour les deux figures dans les triangles cBd , CBD , qui ont deux côtés et l'angle compris égaux, le troisième côté cd sera égal au troisième côté CD (4. liv. 1). Mais $CD = d\delta$: donc le triangle $cd\delta$ est isoscèle ; de plus, le triangle cCS étant aussi isoscèle, on a la proportion :

$$c\delta : CD \text{ ou } d\delta :: Cc : CS ;$$

d'où vient encore :

$$c\delta : cd :: cC : cS.$$

Donc les deux triangles $c \delta d$, $c C S$ ont les angles égaux entr'eux (5. *liv.* 6); d'où l'angle $c \delta d$ étant égal à l'angle $c C S$, $C S$ sera parallèle à δd (29. *liv.* 1). Or CD est aussi parallèle à δd : donc le point S sera sur cette ligne: donc, etc.

G É O M É T R I E

D U C O M P A S .

L I V R E H U I T I È M E .

DE LA CONSTRUCTION, DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION DES ANGLES, ET DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

113. **O**BSERVATION. Quand nous dirons : *construire un angle abc [fig. 51] avec le compas*, nous entendrons : *trouver avec le compas trois points a, b, c , ou un de ces points étant donnés, trouver les autres, de manière qu'en tirant ensuite par deux de ces points a, b , une droite, et par un de ces deux points b , et le troisième c , une autre droite, on ait un angle abc aussi grand qu'on veut.* Quoique l'angle abc ne soit pas réellement construit, les droites ab, bc n'étant pas encore tirées, ce qui ne peut se faire avec le compas seulement, néanmoins nous adopterons la première phrase, en y attachant le sens dont nous sommes convenus.

P R O B L Ê M E.

114. *Etant donné un angle ABC au moyen des trois points A, B, C , et deux autres points b et a , trouver un point c tel que l'angle abc soit égal à ABC .*

Solution. Cherchez (93) une quatrième proportionnelle aux trois distances AB, ab, BC ; avec cette ligne prise pour rayon, et du centre b , décrivez un arc qui passe par le point c ; cherchez de même une quatrième proportionnelle aux trois distances AB, ab, AC , et avec cette ligne prise pour rayon, du point a pris pour centre, décrivez un autre arc qui coupe le premier en c , on aura l'angle $abc = ABC$.

Démonstration. Puisque les deux triangles ABC, abc ont leurs côtés proportionnels, les angles opposés aux côtés proportionnels seront égaux (5. liv. 6).

115. La solution du problème précédent [114] servira donc aussi à résoudre le problème suivant : *Etant donnés trois points A, B, C [fig. 51], qui forment les sommets des trois angles d'un triangle, et deux autres a et b , et qui soient les sommets de deux*

angles d'un autre triangle, trouver un troisième point c , de manière que le triangle $a b c$ soit semblable au triangle $A B C$.

P R O B L È M E.

116. Doubler, tripler, quadrupler, etc. un angle donné $B A C$ (113).

Solution. Du centre A [fig. 52], et avec les côtés $A B$, $A C$, pris pour rayons, décrivez deux arcs indéfinis $B D F$, $C E$;

faites à $C B = C D$, l'angle $B A D$ sera double de $B A C$;

faites à $C D = D E$, l'angle $B A E$ sera triple de $B A C$;

faites à $D E = E F$, l'angle $B A F$ sera quadruple de $B A C$, etc.

Pour quadrupler l'angle proposé, on pourroit encore faire à $B D = D F$.

Démonstration. Les triangles $B A C$, $C A D$, $D A E$, $E A F$ ayant leurs côtés respectivement égaux, les angles $B A C$, $C A D$, $D A E$, $E A F$, etc. (8. liv. 1), seront égaux. Donc, etc. : d'où, l'angle $B A D$ étant égal à $D A F$, on aura aussi : $B D = D F$ (4. liv. 1).

P R O B L È M E.

117. Reconnoître si l'angle $B A G$
G 3

donné au moyen des trois points B, A, G est égal à la moitié d'un angle droit.

Solution. Du rayon AB [fig. 53], et du centre A , décrivez la demi-circonférence BFE [64]; faites à $GB = GF$ [10]. Si l'on a $BF = FE$, l'angle BAG sera égal à la moitié d'un angle droit; si BF est plus petit ou plus grand que FE , l'angle BAG sera plus petit ou plus grand que la moitié d'un angle droit.

Démonstration. Puisque l'angle BAF est double de l'angle BAG [116]; si l'angle BAG est égal à la moitié d'un angle droit, l'angle BAF sera droit, et par conséquent l'on aura $BF = FE$ [83]. Mais si BAG est moindre ou plus grand que la moitié d'un angle droit, BAF sera moindre ou plus grand qu'un angle droit, et par conséquent BF plus petit ou plus grand que FE (24. liv. 1).

P R O B L Ê M E.

118. *Diviser en deux parties égales l'angle BAC donné au moyen des trois points B, A, C seulement, le point A n'étant pas pris à la même distance du point B que du point C.*

Solution. Du centre A [fig. 54], et du rayon AB , décrivez l'arc BMD ; faites à $CB = CD$; divisez l'arc BMD en deux parties égales au point M [60]; divisez l'arc BN en deux parties égales en N ; l'angle BAN sera la moitié de l'angle BAC .

Démonstration. L'angle BAD étant double de BAC [116], et double aussi de BAM , (33. liv. 6), l'angle BAC sera le même que BAM ; mais l'angle BAN est la moitié de BAM : donc aussi BAN sera la moitié de BAC .

P R O B L È M E.

119. *Etant donné l'arc BC [fig. 55] décrit du point A pris pour centre, en trouver le sinus, le cosinus, la tangente et la sécante.*

Solution. Dans la circonférence décrite avec le rayon AB , faites à $BC = Bc$; divisez en deux parties égales la corde Cc au point M [66]; CM sera le sinus et MA le cosinus de l'arc donné.

Du point M pris pour centre, et du rayon MA , décrivez un arc qui coupe, s'il est possible, la circonférence en D et en d ; déterminez la demi-circonférence $dD\delta$ [64]; prolongez BA de B en V , en faisant BV

$= B A$: des centres A et V , et du rayon $D\delta$, décrivez deux arcs qui se coupent en S , $B S$ sera la tangente, et $S A$ la sécante.

Démonstration. La ligne $B A$ coupe au point M la corde $C c$ en deux parties égales, et à angles droits [14] : donc $C M$ est le sinus, et $M A$ le cosinus de l'arc $B C$.

$S B$ est perpendiculaire à $A B$ [83] ; $D\delta$ est troisième proportionnelle aux deux lignes $A M$, $A C$ [87] : il en sera de même de $A S$ qui est égal à $D\delta$. Donc, dans les deux triangles rectangles $A M C$, $A B S$, on a la proportion : $A M : A C :: A B : A S$, et *invertendo* (4. liv. 5) :

$$A C : A M :: A S : A B.$$

On tire de - là (35. liv. 5) :

$$(A C)^2 : (A M)^2 :: (A S)^2 : (A B)^2 ;$$

et en substituant pour $(A C)^2$ et $(A S)^2$ leurs valeurs tirées de la 47.^e proposition du liv. 1, on aura :

$$(A M)^2 + (M C)^2 : (A M)^2 :: (A B)^2 + (B S)^2 : (A B)^2.$$

D'où (17 liv. 5) :

$$(M C)^2 : (A M)^2 :: (B S)^2 : (A B)^2 ;$$

et (34. liv. 5).

$$M C : A M :: B S : A B :$$

donc, les côtés $M C$, $B S$ seront aussi proportionnels : donc l'angle $M C A$ sera le même que

$B S A$ (5. liv. 6) : donc les points A, C, S seront dans la même droite, et $B S$ sera la tangente, et $A S$ la sécante de l'arc $B C$.

Si le cercle décrit du centre M et du rayon $M A$ ne coupoit pas la circonférence, ou la coupoit sous des angles trop aigus, il faudroit avoir recours aux moyens indiqués (89 ou 90 et 91).

Autre Solution pour trouver la tangente et la sécante.

Décrivez [64] la demi - circonférence $B C E$ [*fig. 56*]; du rayon $B C$ et du centre E , coupez-la au point Q ; du rayon $C Q$ et des centres A et B , décrivez deux arcs indéfinis qui se coupent en V ; avec le même rayon $C Q$ et du centre V , coupez la circonférence en e ; du rayon $E e$ et des centres A et B , décrivez deux arcs qui se coupent en m ; du même rayon $E e$ et du centre m , décrivez la demi - circonférence $A B S$ [64], $S B$ sera la tangente et $S A$ la sécante de l'arc $B C$.

Démonstration. Si l'arc $B C F$ est égal au quart de la circonférence $= F E$; comme on a par construction $B C = Q E$, on aura aussi $C F = F Q$. On sait de plus, par les définitions trigonométriques, que le sinus de l'arc $C F$ est le même que le cosinus de l'arc $B C$,

et que la corde de l'arc CFQ double de l'arc CF , est double du sinus de l'arc CF ou du cosinus de l'arc BC : cette corde est égale à $CQ = AV$; on a de plus [22] :

$$AV \cdot Ee = (AB)^2 :$$

la ligne AmS [64] étant droite $= 2Ee$, et $AV = 2 \cos. BC$; on aura :

$$2Ee \cdot \cos. BC = (AB)^2 = AS \cdot \cos. BC :$$

donc (17. liv. 6) :

$$\cos. BC : AB :: AB : AS ;$$

donc AS sera troisième proportionnelle au cosinus et au rayon , et par conséquent égale à la sécante , suivant les démonstrations trigonométriques. De plus , l'angle ABS étant droit [31. liv. 3] , la sécante AS sera déterminée de position , et par conséquent BS sera la tangente.

P R O B L È M E.

120. *Etant donné le sinus mn d'un arc d'un rayon donné AB , trouver cet arc.*

Solution. Décrivez [*fig. 57*] avec le rayon AB , le cercle CcK ; doublez mn [64] ; d'un rayon $= 2mn$, et d'un point quelconque C de la circonférence , décrivez un arc qui la coupe en c : divisez l'arc Cc en deux parties égales au point B [60] ; BC sera l'arc cherché.

Démonstration. Le sinus de l'arc BC , d'après les définitions trigonométriques, est la moitié de la corde double de BC ; donc, etc.

P R O B L È M E.

121. *Etant donné le cosinus ma d'un arc d'un rayon donné AB , trouver cet arc.*

Solution. Décrivez le cercle CcK [fig. 57] avec le rayon AB , doublez ma [64]: d'un point quelconque c de la circonférence pris pour centre, et d'un rayon $= 2ma$, coupez la circonférence au point K ; déterminez la demi-circonférence KcC [64]; divisez en deux parties égales l'arc Cc au point B [60]; BC sera l'arc cherché.

Démonstration. Tirez l'autre corde Cc , elle sera divisée au point M en deux parties égales et à angles droits par le rayon AB [14], Mais l'angle CcK étant inscrit et appuyé sur le diamètre, est aussi droit (31. liv. 3): donc les deux triangles CMA , CcK , qui ont un angle commun en C , et chacun un angle droit, sont équiangles entr'eux (32. liv. 1): donc on a (4. liv. 6): $CM : Cc :: MA : cK$: mais CM est la moitié de Cc ; donc $MA = \frac{1}{2} cK = ma$; de plus, MA est le cosinus de l'arc BC ; donc, etc.

P R O B L Ê M E.

122. *Etant donnée la tangente sb d'un arc d'un rayon donné AB [fig. 55], trouver cet arc.*

Solution. Décrivez avec le rayon AB le cercle BC^δ ; au point B élevez sur AB une perpendiculaire $BS = bs$ [76]; trouvez [111] le point C où SA coupe la circonférence; BC sera l'arc cherché.

Cette solution n'a pas besoin de démonstration.

P R O B L Ê M E.

123. *Etant donnée [fig. 55] la sécante sa d'un arc d'un rayon donné AB , trouver cet arc.*

Solution. Décrivez avec le rayon AB la circonférence BC^δ ; sur AB portez $BV = AB$ [64]; puis, des centres A et V , et du rayon sa , décrivez deux arcs qui se coupent en S ; trouvez [111] le point C où la ligne SA coupe la circonférence, BC sera l'arc cherché.

Démonstration. La ligne SB sera perpendiculaire à BA [83]: donc elle sera la tangente de l'arc BC , et par conséquent SA en sera la sécante.

G É O M É T R I E

D U C O M P A S .

L I V R E N E U V I È M E .

D E S F I G U R E S S E M B L A B L E S E T D E S P O L I G O N E S R É G U L I È R S .

124. *O*BSERVATION. Quand nous dirons : *Construire une figure ou un polygone*, nous entendrons : *Trouver tous les points qui suffisent pour déterminer de grandeur et de position toutes les droites qu'il conviendrait de tirer pour construire entièrement le polygone.*

P R O B L È M E .

125. *Sur un côté donné ab , construire un triangle semblable à un triangle donné ABC [fig. 51].*

Solution. Voyez 115.

P R O B L È M E .

126. *Etant donnée [fig. 58] une figure*

110 GÉOMÉTRIE DU COMPAS.
ABCEFD, construire une figure qui lui soit semblable, et dont la surface soit avec celle de cette figure dans un rapport donné.

Solution. Si l'on veut, par exemple, que la surface de la nouvelle figure soit les deux cinquièmes de la surface de la figure donnée.

D'un rayon AB , le plus grand qu'il sera possible, construisez la figure 43 [100]; prenez dans cette figure la ligne $Aa = \sqrt{2}$ pour rayon: du centre O [fig. 58], décrivez le cercle plus petit, dans la circonférence duquel se trouve le point v . De la ligne $ET = \sqrt{5}$ [fig. 43], prise pour rayon, et du même centre O , décrivez le cercle plus grand, dans la circonférence duquel se trouve le point V , déterminé par rapport au point v , de telle manière que la ligne Vv soit à-peu-près tangente au point v du cercle intérieur.

Supposez la figure donnée divisée en autant de triangles ABC , ACD , CDE , EDF , en imaginant des droites AC , CD , etc. et placez les nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc. sur les distances AB , AC , CD , etc. qui mesurent les côtés de ces triangles; appliquez successivement les distances 1, 2, 3, etc. comme

cordes à autant d'arcs consécutifs du cercle V ; savoir : AB de V en 1, AC de 1 en 2, BC de 2 en 3, et ainsi de suite jusqu'à la fin. Ce que l'on fera en prenant la distance AB pour rayon, et en décrivant du point V pris pour centre un arc qui coupe cette même circonférence au point 1, etc.

D'un rayon égal à Vv , et en prenant successivement pour centres les points 1, 2, 3, 4, etc., décrivez des arcs qui coupent successivement la plus petite circonférence aux points 1, 2, 3, 4, etc. jusqu'à la fin.

Les cordes du cercle intérieur, ou les distances de v à 1, de 1 à 2, de 2 à 3, de 3 à 4, etc. seront les côtés ab , ac , bc , cd , etc. de la nouvelle figure que l'on construira triangle par triangle; avec la distance du point v au point 1, on déterminera les deux points a et b ; des centres a et b , et avec la seconde et la troisième distance, prise dans le cercle intérieur (la seconde du point 1 au point 2, et la troisième du point 2 au point 3), décrivez deux arcs qui se coupent en c ; des centres c et a , et avec les distances quatrième et cinquième, prises dans le cercle intérieur (la quatrième, de 3 à 4, et la cinquième, de 4 à 5), décrivez deux arcs qui se coupent en d : on déterminera de la même

manière les points e et f , et la figure sera construite.

Démonstration. Les cordes du cercle intérieur sont aux cordes homologues du cercle extérieur, comme le rayon Ov est au rayon OV [93], ou comme $\sqrt{2}$ est à $\sqrt{5}$: donc tous les côtés des triangles de la figure $abcefd$, et les côtés homologues des triangles de la figure $ABC EFD$ sont dans le même rapport : donc les triangles des deux figures sont équiangles entr'eux, et par conséquent semblables (5. liv. 6. déf. 1) : donc les deux mêmes figures polygones sont semblables (20. liv. 6), et les surfaces étant entr'elles comme les quarrés des côtés homologues, la surface du polygone $abcefd$ sera à celle du polygone $ABC EFD$, comme 2 est à 5 : donc la surface de la plus petite des deux figures sera à celle de la plus grande, comme 2 est à 5.

D'après cet exemple, il est facile de voir la méthode à suivre pour résoudre le problème, quel que soit le rapport qu'on propose d'établir entre la surface de la figure à construire, et celle de la figure donnée.

On décrira deux circonférences v et V avec des rayons qui soient entr'eux comme les racines des nombres qui expriment le rapport

rapport des surfaces ; sur celle des deux circonférences qui correspond à la figure donnée , on portera successivement comme cordes les côtés des triangles dans lesquels cette figure est supposée divisée. On déterminera , par la méthode ci-dessus exposée , dans l'autre circonférence des cordes proportionnelles qui seront les côtés respectifs des triangles de la nouvelle figure.

Le rapport des moitiés des racines étant le même que celui des racines entières , la figure 45 servira dans plusieurs cas (104). Pour les autres cas , voyez les numéros 101 , 102 et 103.

On prend ensuite un rayon AB [*fig.* 44 et 45] , le plus grand que l'on peut employer commodément , pour que les cercles puissent mieux recevoir les longueurs des cordes à appliquer , et pour que les intersections qui en résultent se fassent à angles plus approchans de l'angle droit.

127. Si on avoit donné le rapport des côtés AB et ab entr'eux , ou de deux autres droites quelconques entr'elles , on choisiroit dans ce rapport les deux rayons OV , Ov , les plus grands possibles.

P R O B L Ê M E.

128. *Inscrire à un cercle donné un quelconque des polygones réguliers que l'on peut y inscrire en se servant de la règle et du compas.*

Solution. Divisez la circonférence en autant de parties égales que le polygone qu'on veut inscrire a de côtés (27, 29, 30, 31, 32, 38, 40, 41, 42, 53, 57, 60, 63), les points de division seront les sommets des angles du polygone régulier cherché, et les cordes des arcs en seront les côtés.

Démonstration. Tous les côtés étant égaux comme cordes d'arcs égaux, les angles qu'ils forment seront égaux, puisqu'ayant leur sommet à la circonférence, ils sont tous appuyés sur des arcs égaux (21. liv. 3). On a donc inscrit au cercle un polygone régulier d'autant de côtés que l'on vouloit (déf. 1. liv. 3).

129. Puisqu'avec trois points seulement pris hors de la circonférence, et six ouvertures de compas au plus (59), on peut la diviser en 240 parties égales (57), on pourra inscrire au cercle avec ces trois points et ces six ouvertures, autant de polygones réguliers qu'il y a

de nombres exactement diviseurs de 240 : or ces nombres sont : 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240 ; on pourra donc , en omettant le diviseur 2 , inscrire au cercle un polygone régulier de 3, de 4, de 5, de 6, de 8, de 10, etc. , et enfin de 240 côtés.

130. Si le nombre des côtés du polygone que l'on veut inscrire se trouve être un de ceux dans lesquels on a divisé la circonférence , par les méthodes enseignées (27 , 30 , etc.) , par exemple , le nombre 12 , on divisera la circonférence en douze parties égales (31) ; les deux extrémités de chacune de ces divisions seront les sommets des angles du polygone qu'il étoit question d'inscrire , ou , ce qui est la même chose , les cordes de ces arcs seront les côtés du polygone.

Si le nombre des côtés du polygone à inscrire ne se trouve point précisément dans les problèmes du liv. II ; par exemple , si l'on veut inscrire un polygone de 60 côtés , on doublera , triplera , quadruplera , etc. ce nombre jusqu'à ce qu'on parvienne à avoir un de ceux exprimés dans les problèmes précédens : c'est ainsi qu'en doublant 60, nombre des côtés du polygone indiqué, on a 120. Or on

a donné (42) le moyen de diviser la circonférence en 120 parties égales. Ces parties prises deux à deux fourniront 60 arcs égaux dont les cordes sont les côtés du polygone en question.

S'il avoit fallu tripler le nombre, par exemple si on eût voulu inscrire un polygone de 16 côtés, on auroit alors, comme au problème (38), divisé la circonférence en 48 parties, nombre triple de 16; on auroit pris ensuite trois de ces arcs pour en avoir un qui fût la seizième partie de la circonférence, et chacun de ces arcs égaux auroit eu pour corde un côté du polygone de 16 côtés.

P R O B L Ê M E.

131. *Circonscrire un triangle équilatéral (124) à un cercle donné BCDd [fig. 59.].*

Solution. Soit fait au rayon AB de ce cercle $= BC = CD$, et à $BD = BL = DL = Dd = DN = dN = dM = BM$.

Les trois points L, M, N seront les sommets des angles du triangle équilatéral circonscrit au cercle.

Démonstration. Le triangle BDd , inscrit au cercle (29, 130), étant équilatéral, les triangles DLB , NDd , $dB M$ auront leurs côtés égaux à ceux de ce triangle; donc leurs angles seront égaux (8. liv. 1); les trois angles NDd , dDB , BDL seront donc égaux aux trois angles du triangle inscrit, c'est-à-dire, à deux droits (32. liv. 1) : donc la ligne NDL sera droite (14. liv. 1.) : on démontreroit la même chose pour les deux lignes $LB M$, $Nd M$; et comme chacune d'elles est double du côté BD , elles seront par conséquent égales entr'elles. Donc le triangle LMN est équilatéral; ensuite les angles NDd , DLB étant égaux, la droite Dd sera parallèle à LB (29. liv. 1), ou à LM . Or les points N, A, B sont dans une même droite perpendiculaire à Dd (13, 14). Donc AB est aussi perpendiculaire à LM (27. liv. 1) : donc LM est tangente au cercle (16. liv. 3). On démontreroit la même chose pour les deux lignes NL , NM : donc le triangle NLM est équilatéral et circonscrit au cercle (déf. 2. liv. 4).

P R O B L È M E.

132. *Circonscrire un quarré à un cercle donné [fig. 60].*

Solution. Divisez la circonférence de ce cercle en quatre parties égales aux points B, F, E, f [27]; de ces points comme centres, et du rayon AB , décrivez des arcs qui se coupent en R, S, T, V , ces quatre derniers points seront les sommets des angles du quarré circonscrit au cercle.

Démonstration. Les angles TBA, SBA étant droits (100), la ligne TSB est une droite (14. liv. 1) perpendiculaire au diamètre BE , et par conséquent tangente au cercle (16. liv. 3): on démontreroit la même chose pour les autres lignes TFV, VER, RfS . De plus, les triangles BFT, BFA ayant les côtés respectivement égaux, on aura l'angle $BTf = BAF$ (8. liv. 1), et par conséquent droit (27): la même chose se démontreroit pour les autres angles V, R, S : donc, etc.

P R O B L Ê M E.

133. *Circonscrire à un cercle donné un pentagone régulier.*

Solution. Soit le cercle BDE [fig. 61], décrit avec le rayon AB ; divisez sa circonférence en cinq parties égales (40) aux points B, C, D, E, F ; d'un de ces points C comme

centre, et du rayon CB décrivez la demi-circonférence BDP [64]; prenant pour centre le point E opposé à l'arc CB , et avec le rayon EC coupez l'arc BDP en p ; des centres B, C, D, E, F et avec le rayon Pp , décrivez des arcs qui se coupent aux points b, c, d, e, f ; ces points d'intersection seront les sommets des angles du pentagone circonscrit au cercle.

La démonstration est la même que celle du problème suivant.

PROBLÈME.

134. *Etant donnés les sommets des angles d'un polygone régulier quelconque inscrit au cercle, trouver les sommets des angles d'un polygone semblable circonscrit.*

Solution. Soient les points B, C, D, E [fig. 62] les sommets des angles du polygone inscrit : de l'un de ces points C pris pour centre, et d'un rayon égal à la distance CB , de deux d'entr'eux, décrivez la demi-circonférence BDP [64]; des centres B et C , et avec le rayon BD , décrivez deux arcs qui se coupent au point V (dans le cas du problème précédent, [fig. 61], le point V coïncide

avec le point E) : de ce même rayon BD , et du point V comme centre, coupez la circonférence BDP en p ; avec Pp pour rayon, et des centres B, C, D, E , etc., qui sont les sommets des angles du polygone inscrit, décrivez les arcs qui se coupent aux points b, c, d, e , etc. ; ces points seront les sommets des angles du polygone régulier circonscrit.

Démonstration. On a : $pP.VC = (CD)^2$ [22],
 c'est-à-dire, $cC.BD = (BC)^2$;
 d'où (17. liv. 6) :

$$BD : BC :: BC : Cc :$$

mais $BC = CD$, et $Bc = cC$: donc les deux triangles isoscèles BCD, BcC auront leurs côtés proportionnels : donc (5. liv. 6) l'angle cCB sera égal à l'angle CBD ; d'où il suit que les deux lignes cC, BD seront parallèles (28. liv. 1) ; on prouveroit de même que Cd est aussi parallèle à BD . Les points c, C, d seront donc dans la même ligne droite : mais de ce que $BC = CD$, il suit que le rayon AC est perpendiculaire à BD [14] ; il le sera donc aussi à la droite cd (29. liv. 1) : donc cd est tangente à sa moitié en C (16. liv. 3) ; on démontreroit de même que $de = cd$ est tangente à sa moitié en D ; ainsi des autres. Le nombre de ces lignes sera égal à

celui des points B, C, D, E , etc. Donc, etc.
(*déf.* 2. *liv.* 4).

P R O B L È M E.

135. *Sur un côté donné* AE [fig. 1],
construire un triangle équilatéral.

Solution. On trouvera le point D suivant la méthode indiquée (1); le triangle ADE sera le triangle cherché.

P R O B L È M E.

136. *Sur un côté donné* AB [fig. 43],
construire un quarré.

Solution. Les deux points F, T étant trouvés d'après la méthode prescrite (100), le quarré $ABTF$ sera le quarré cherché.

Démonstration. BT étant égale et parallèle à FA , et par conséquent perpendiculaire à AB (100), la ligne FT sera aussi parallèle à BA (33. *liv.* 1); d'où aussi les angles FTB, AFT seront droits (27. *liv.* 1), et $ABTF$ sera un quarré (*déf.* 32. *liv.* 1).

P R O B L Ê M E.

137. *Sur un côté donné AB [fig. 63], construire un pentagone régulier.*

Solution I. Avec le rayon AB et du centre A , décrivez la circonférence $BCDEd$, et faites à $AB = BC = CD = DE = Ed$; faites encore à $BD = Ba = Ea$, et ensuite à $Aa = Db = db$; du centre B , et avec le rayon BA , décrivez l'arc indéfini ACL , dans lequel vous ferez à $Ab = AH = HK = KL$: pareillement, dans la circonférence BCD , faites à $Ab = BQ = QP = PN$. Des points L et N pris pour centres et du rayon AB , décrivez deux arcs qui se coupent en M ; les points A, B, L, M, N seront les sommets des angles du pentagone régulier cherché.

Démonstration. L'angle CBF [fig. 61] du pentagone régulier $BCDEF$, a pour mesure la moitié de l'arc $CDEF$ (20. liv. 3); cet angle étant donc égal à trois cinquièmes de la circonférence, l'angle CBF du pentagone a pour mesure les trois dixièmes: or les arcs $AHKL, BQPN$, qui mesurent les angles ABL, BAN , valent chacun les trois dixièmes de la circonférence (41); donc ces angles

ABL , BAN sont ceux du pentagone régulier à construire sur AB ; ensuite les trois côtés AB , BL , AN , côtés du pentagone, sont égaux entr'eux; donc, en comparant les points L , B , A , N de la figure 63, avec les points C , B , F , E de la figure 61, le triangle LMN de la première figure, ayant les côtés respectivement égaux aux côtés du triangle CDE de la seconde, ils auront aussi les angles égaux (8. liv. 1), et tout coïncidera parfaitement : donc, etc.

Solution II. Décrivez comme ci-dessus, du rayon AB et du centre A , la circonférence BDd [fig. 64]; faites - y à $AB = BC = CD = DE = Ed$; à $BD = Ba = Ea$; et enfin, à $Aa = Db = db$; ensuite, avec le rayon bE , et du centre A , décrivez un arc qui passe par les points L et M ; du centre B , et avec le même rayon bE , coupez cet arc au point M et la circonférence en N ; enfin avec le même rayon, et du centre N , coupez l'arc LM en L ; les points A , B , L , M , N seront les sommets des angles du pentagone régulier.

Démonstration. On a (4. liv. 2) :

$$(BE)^2 = (bE)^2 + (Bb)^2 + 2Bb \cdot bE :$$

l'angle BNE étant inscrit et appuyé sur le diamètre, on a (31. liv. 3, 47. liv. 1) :

$$(BE)^2 = (BN)^2 + (NE)^2 :$$

en comparant les deux valeurs de $(BE)^2$, dans lesquelles $(bE)^2 = (BN)^2$, il résulte que :

$$(Bb)^2 + 2Bb \cdot bE = (NE)^2 :$$

puis bE étant égal à $bA + AE = Ab + AB$, on aura :

$$(Bb)^2 + 2Bb \cdot Ab + 2Bb \cdot AB = (NE)^2 :$$

mais $2Bb \cdot AB = 2(Ab)^2$ [46] ;

donc

$$(Bb)^2 + 2Bb \cdot Ab + (Ab)^2 + (Ab)^2 = (NE)^2 :$$

or, $(Bb)^2 + 2Bb \cdot Ab + (Ab)^2 = (AB)^2$:

donc : $(AB)^2 + (Ab)^2 = (NE)^2$:

NE sera donc le côté du pentagone inscrit au cercle BDd [50] (10. liv. 13). L'arc NE étant égal à deux dixièmes de la circonférence, l'arc BCN sera égal à trois dixièmes, et l'angle BAN sera l'angle du pentagone régulier. Substituant ensuite la droite BN aux deux côtés BA , AN du pentagone régulier, elle deviendra le côté du triangle isoscèle qui a pour base AB , et chacun des angles à la base sera double de l'angle au sommet (11. liv. 4) ; les points L et M seront donc aussi les sommets du pentagone régulier que l'on avoit à construire.

P R O B L È M E.

138. *Construire un exagone régulier sur un côté donné AB [fig. 65].*

Solution. Du rayon AB et des points A et B , comme centres, soient décrits deux arcs qui se coupent au point O ; avec le même rayon, et du centre O , soit décrit un cercle dans la circonférence duquel on fera à $AB = BC = CD = DE = EF$; l'exagone $ABCDEF$ sera l'exagone demandé.

Voyez pour la démonstration, la quinzième du *liv. 4*.

P R O B L È M E .

139. *Sur un côté donné* AB [fig. 66], *construire un octogone régulier.*

Solution I. Des points A et B pris pour centres, et avec le rayon AB , décrivez les deux demi-circonférences $BCDE$, $ACde$ [64]; faites à $CE = Ea = Ba = Aa = ea$; avec le rayon AB et du centre a , coupez l'arc DE au point H ; avec le même rayon, et du centre a , coupez l'arc de au point h : encore avec le même rayon et des points H, h comme centres, décrivez deux arcs qui passent par les points G, g ; avec le rayon Ba et des points a, a pris pour centres, coupez ces deux arcs en g, G ; avec le rayon AB , et des centres G et g , soient décrits deux arcs qui passent par les points F et f ; coupez ces deux arcs en

f, F avec le rayon Aa , et des centres α, α' ; les points A, B, h, g, f, F, G, H seront les sommets de l'octogone régulier construit sur le côté AB .

Démonstration. Les côtés $AB, Bh, hg, gf, AH, HG, GF$ sont tous égaux par construction. Maintenant, si l'on considère un octogone régulier inscrit au cercle, on trouvera que chacun de ses angles à la circonférence a pour base un arc égal aux $\frac{6}{8}$ de la circonférence, et par conséquent $\frac{3}{8}$ pour mesure (20. liv. 3); on a ensuite l'arc BCH égal à $\frac{3}{8}$ (30): donc l'angle BAH est un angle de l'octogone, ainsi que l'angle ABh : ensuite $\alpha A, \alpha B$ étant perpendiculaires à AB [27], elles seront parallèles entr'elles (29. liv. 1): donc la droite Ha qui fait un angle de 45° avec αA (27), en fera encore un semblable avec la ligne αB (27. liv. 1); mais hBa est aussi de 45° : donc αH est parallèle à hB (28. liv. 1): donc aussi αh est égale et parallèle à HB (33. liv. 1); d'où l'angle $h\alpha H = hBH$ (34. liv. 1); or l'angle $hBH = hBE - HBE = hBE - \frac{1}{2}HAE$ (20. liv. 3), il aura donc pour mesure $\frac{3}{8} - \frac{1}{16}$, c'est-à-dire, $\frac{5}{16}$ de la circonférence: donc l'angle Bha qui avec l'angle $h\alpha H$ équivaut à deux droits (27. liv. 1), aura pour mesure $\frac{3}{16}$ de la

circonférence. Ensuite les deux triangles $a h B$, $a h g$ ayant tous leurs côtés égaux entr'eux, l'angle $a h g = a h B$ (8. liv. 1); d'où l'angle total $g h B$ aura pour mesure $\frac{3}{8}$ de la circonférence, et sera angle de l'octogone, ainsi que l'angle $A H G$. L'angle $h g a$ sera encore égal à l'angle $h B a$, et les deux triangles $g f a$, $B A a$ ayant aussi les côtés égaux entre eux, l'angle $f g a$ sera égal à $A B a$ (8. liv. 1). L'angle $h g f$ sera donc composé de deux angles respectivement égaux aux deux qui composent l'angle $h B A$: ces deux angles seront donc égaux, et chacun d'eux sera par conséquent angle de l'octogone: il en sera de même pour l'angle $H G F$; les points f et F seront donc aussi sommets d'angles de l'octogone comme tous les autres.

Solution II. Avec le rayon $A B$ et des points A et B pris pour centres, décrivez comme ci-dessus les deux demi-circonférences $B C D E$, $A C d e$; et ayant fait à $C E = E a = B a = A a = e a$, du rayon $A B$ et du centre a , décrivez un arc qui coupe l'arc $D E$ en H , et passe par le point F ; avec le même rayon, et du centre a , décrivez encore un arc qui coupe l'arc $d e$ en h et passe par le point f ; du rayon $a A$ et du centre a , décrivez un arc qui passe par le point f ; avec le

même rayon et du centre α , décrivez un arc qui passe par le point F : enfin, avec le rayon AB et des centres H et F , h et f , décrivez des arcs qui se coupent aux points G et g .

Démonstration. D'après la démonstration de la première solution, les droites AB , $\alpha\alpha$ étant parallèles et égales entr'elles, ainsi que les droites αA , αB , avec lesquelles elles forment des angles droits, si on fait, pour abrégier $AB = 1$; on aura aussi $\alpha\alpha = \alpha f = \alpha F = 1$: on a ensuite $(A\alpha)^2 = 2 = (\alpha f)^2 = (\alpha F)^2$: donc les angles $f\alpha\alpha$, $F\alpha\alpha$ seront droits (48. liv. 1), et les points f , α , B dans la même droite (14. liv. 1), comme aussi les points F , α , A dans la même parallèle : ensuite de l'égalité de $f\alpha$, $F\alpha$, il résulte que fF sera aussi égale et parallèle à $\alpha\alpha = 1$, et $F\alpha\alpha f$ sera un quarré. De plus, les triangles FGa , HGa ayant les côtés égaux entr'eux, ont aussi les angles égaux (8. liv. 1), et l'angle FGa est égal à GaH ; les deux droites GH , Fa seront donc parallèles, comme aussi FG , aH (33. liv. 1) : mais l'angle FaH extérieur au triangle aHA est égal aux deux angles intérieurs opposés aHA , aAH (32. liv. 1), c'est-à-dire, à trois angles demi-droits : donc on a l'angle $FaH = BAH$: donc aussi les angles opposés dans les parallélogrammes,

l'éloigrammes étant égaux (34. liv. 1), $FGH = BAH$; on a ensuite l'angle $AaH = aHG$: de plus, l'angle AHa est droit; donc aussi l'angle AHG vaut trois demi-droits: de même l'angle fFa étant droit, et l'angle aFG étant égal à aHG qui est demi-droit, l'angle fFG sera aussi égal à trois demi-droits: on démontre la même chose pour les angles en f, g et h : donc tous les côtés et tous les angles étant égaux, la figure sera un octogone régulier.

Si on quadruple les deux membres de l'équation (15) :

$$(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2,$$

qui appartient à la figure 3; on aura :

$$4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2;$$

c'est-à-dire, $(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2$; d'où résulte le théorème suivant pour tout rhombe quelconque : *le quarré d'une des diagonales du rhombe vaut quatre fois le quarré d'un de ses côtés, moins le quarré de l'autre diagonale* : d'où, dans le rhombe $FaHG$, on aura : $(aG)^2 = 4(Fa)^2 - (FH)^2$. Mais comme l'angle $FGH = HAB$, et que les côtés qui comprennent ces deux angles égaux sont aussi égaux, on a aussi : $FH = BH$ (4. liv. 1). On aura donc :

$$(aG)^2 = 4(AB)^2 - (BH)^2 = (BE)^2 - (BH)^2 :$$

mais (31. liv. 3, et 47. liv. 1) :

$$(BE)^2 = (BH)^2 + (HE)^2;$$

donc $(aG)^2 = (HE)^2$; d'où $aG = HE$.

Solution III. Après avoir, du centre A et du rayon AB [fig. 67], décrit la demi-circonférence $BCDE$ (64), et avoir fait à $BD = Ba = Ea$; du centre a et du rayon AB soit décrit un arc qui coupe l'arc DE en H , et passe par F ; du centre a et du rayon aA soit décrit un arc qui passe par f ; du centre a et du rayon aB soit décrit un arc qui passe par g ; du centre a et du rayon BH , soit décrit un arc qui passe par h ; du centre a et du rayon HE soit décrit un arc qui passe par G ; soit fait à $AB = Bh = hg = gf = fF = FG$; on aura aussi $FG = GH$, etc.

Démonstration. Les triangles aAB , aBh , aHg , agf , etc. qui ont leur sommet en a , et leurs bases sur les côtés de la figure, ont tous leurs côtés respectivement égaux à ceux des triangles affectés des mêmes lettres dans la figure 66 (voyez les deux démonstrations précédentes) : donc ils auront aussi leurs angles égaux (8. liv. 1); et comme ils sont semblablement ordonnés, les angles de la figure 67, qui sont composés des angles de ces triangles pris deux à deux, seront aussi égaux aux angles de l'autre figure; donc, etc.

Solution IV. Après avoir, du centre A et du rayon AB , décrit la demi-circonférence $BCDE$, en y faisant à $AB = BC = CD = DE$, et avoir fait à $BD = Ba = Ea$; ayant du centre a et du rayon AB coupé la demi-circonférence en H , soient des centres E et A , avec le rayon EH , décrits deux arcs qui se coupent en P ; du centre P , avec le même rayon PA , soit coupée la demi-circonférence en Q ; des centres B et H , avec le rayon BQ , soient décrits deux arcs qui se coupent en O : maintenant soit décrit du centre O et du même rayon OH , un cercle qui passera par A ; soit fait dans sa circonférence à $AB = Bh = hg = gf = fF = FG$; les points A, B, h, g, f , etc. seront les sommets des angles de l'octogone.

Démonstration. Comme on a $QP = AP = EP$, ainsi que $QA = AE = AB$, et que AB est sur le prolongement de AE (15. liv. 6), on aura [22]:

$$BQ \cdot AP = (AQ)^2 :$$

d'où (17. liv. 6): $AP : AQ :: AQ : BQ$;

ou bien : $HE : AE :: AB : BO$.

Mais HE est un côté de l'octogone inscrit au cercle qui a pour rayon AE : donc aussi AB sera le côté de l'octogone inscrit au cercle qui a pour rayon BO .

P R O B L È M E.

140. *Sur un côté donné* AB [fig. 69.] *construire un décagone régulier.*

Solution. Du centre A et du rayon AB , soit décrit le cercle BDd ; soit fait dans sa circonférence à $AB = BC = CD = DE = Ed$; soit fait à $BD = Ba = Ea$; soit fait ensuite à $Aa = Db = db$. Maintenant des centres A et B avec le rayon bE , soient décrits deux arcs qui se coupent en V ; du centre V et du même rayon bE , soit décrit le cercle $BLMNOPQRSA$, et soit fait à $AB = BL = LM = MN = NO = OP = PQ = QR = RS$; le point S sera dans la section des deux circonférences, et les points A, B, L, M , etc. seront les sommets des dix angles du décagone régulier cherché.

Démonstration. La ligne bE est un côté du triangle isoscèle qui, ayant pour base AB , a chacun des angles à la base double de l'angle au sommet (137). Donc, dans le triangle VAB , l'angle BVA sera égal à un cinquième de deux angles droits (32. liv. 1); l'arc BA qui le mesure sera donc égal à un dixième de la circonférence, ainsi que les autres arcs BL, LM, MN : donc le polygone $ABLMNOPQRS$ sera un déca-

gone régulier inscrit au cercle qui a le point V pour centre, et construit sur le côté AB .

P R O B L È M E.

141. *Sur un côté donné AB [fig. 69], construire un polygone régulier quelconque, de ceux qu'on peut inscrire au cercle (128).*

Solution. Du rayon AB , soit décrit un cercle BDd ; soit inscrit à ce cercle un polygone régulier semblable à celui qu'on veut construire sur le côté AB , c'est-à-dire, d'un égal nombre de côtés (128), et soit Bl un côté de ce polygone inscrit; soit ensuite cherchée une troisième proportionnelle à ce côté Bl et au rayon AB (87, 89, 90, 91, 92); avec cette ligne prise pour rayon, et des centres A et B , soient décrits deux arcs qui se coupent en V ; du point V comme centre, et du même rayon VA , soit décrit un cercle $ABL MN$, etc., et soit fait à $AB = BL = LM = MN$, etc.; les points A, B, L, M, N , etc. seront les sommets des angles du polygone cherché.

Démonstration. Les côtés du triangle BAI étant proportionnels à ceux du triangle BVA , on aura l'angle $BAI = BVA$ (5. liv. 6): donc les arcs Bl, BA qui le me-

surent , seront des portions égales de leurs circonférences ; donc , etc.

P R O B L È M E.

142. *Construire un quarré sur une diagonale AB donnée [fig. 70].*

Solution. Du centre A et du rayon AB , soit décrit l'arc $BCDE$; du centre B , avec le même rayon , soit décrit l'arc indéfini CP , et soit fait à $BC = CD = DE$; soit fait ensuite à $BD = Ba = Ea$. Maintenant, du centre E et du rayon Aa , soit coupé l'arc CP en P ; des centres A et B , et du rayon AP , soient décrits deux arcs qui se coupent en L et M ; $ALBM$ sera le quarré cherché.

Démonstration. Si on suppose pour abrégé $AB = 1$, on aura :

$$AP = \frac{1}{2} \sqrt{2} [104] = AL = BL :$$

d'où ; $(AL)^2 = (BL)^2 = \frac{1}{2}$,

et $(AL)^2 + (BL)^2 = 1 = (AB)^2$.

Donc l'angle BLA est droit (48. liv. 1), et les deux angles LBA , LAB égaux entr'eux valent chacun la moitié d'un angle droit (5, et 32. liv. 1). On démontrera de même que l'angle BMA est droit, et que les angles MBA , MAB valent chacun la moitié d'un angle droit : donc les angles MBL , MAL seront droits, et $ALBM$ sera le quarré cherché.

G É O M É T R I E

D U C O M P A S .

L I V R E D I X I È M E .

D E S C E N T R E S .

P R O B L È M E .

143. *T* R O U V E R le centre d'un cercle donné MAB [fig. 71].

Solution. Ayant pris pour centre un point quelconque A de sa circonférence , d'un rayon arbitraire AB , plus petit que le diamètre du cercle donné, et plus grand que le quart de ce diamètre, soit décrite la demi-circonférence BCE , en faisant à $AB = BC = CD = DE$; soit M le point où elle coupe la circonférence du cercle donné; des centres E et A avec le rayon EM , soient décrits deux arcs qui se coupent en L ; du centre L et du même rayon LA , soit coupé le cercle BME en Q ; des centres B et A et du rayon BQ , soient décrits deux arcs qui se coupent en O ; le point O sera le point cherché.

Démonstration. La ligne BAE étant droite (15. liv. 4), l'angle extérieur LAB est égal aux deux angles intérieurs opposés ALE , AEL pris ensemble, dans le triangle ALE (32. liv. 1). Or les triangles LAE , LAQ ont tous les côtés égaux entr'eux, et par conséquent les angles opposés aux côtés égaux sont aussi égaux (8. liv. 1). Donc l'angle $AEL = QAL$, et l'angle $ALE = ALQ$: donc l'angle LAB est égal aux deux angles QAL et QLA pris ensemble; et retranchant de part et d'autre l'angle QAL , on a l'angle restant $QAB = QLA$. Donc la somme des deux angles LAQ , LQA dans le triangle LAQ , est égale à la somme des deux angles AQB , ABQ dans le triangle ABQ (32. liv. 1). Mais ces deux triangles LAQ , ABQ sont isoscèles par construction : donc les angles à leurs bases seront égaux chacun à la demi-somme (5. liv. 1), et par conséquent égaux entr'eux, dans l'un et l'autre triangle : donc les triangles LAQ , ABQ seront semblables (4. liv. 6), et on aura :

$$LA : AQ :: AQ : QB;$$

et substituant les valeurs égales,

$$ME : EA :: AB : OB:$$

donc les triangles isoscèles MAE , AOB

ayant les côtés proportionnels, sont équiangles entr'eux (5. liv. 6), et on a l'angle $OAB = AME = AEM$. Mais l'angle extérieur MAB est égal à la somme des deux angles intérieurs AME, AEM égaux entr'eux, dans le triangle AEM (32. liv. 1): donc il sera égal à l'angle OAB pris deux fois; ou bien on aura $OAB = OAM$. Mais les deux triangles OAB, OAM ont encore les côtés AB, AM égaux entr'eux, et de plus le côté OA commun, c'est-à-dire, ces deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux: donc (4. liv. 1) le troisième côté OB de l'un de ces triangles sera aussi égal au troisième côté OM de l'autre: donc les trois lignes OB, OA, OM sont égales, et par conséquent le point O est le centre que l'on cherchoit du cercle MAB (9. liv. 3).

144. Quand on a trouvé la valeur de QB , troisième proportionnelle aux deux lignes LA, AQ , ou aux deux lignes EM, EA , valeur qui est celle du rayon du cercle dont on cherche le centre, il suffit de prendre deux points à volonté dans la circonférence du cercle, et de ces points comme centres avec le même rayon, décrire deux arcs qui

se coupent ; le point de leur intersection sera le centre du cercle.

145. Pour obtenir des sections à angles moins aigus, il sera utile, dans la pratique, de choisir à vue d'œil un rayon AB , qui approche de la valeur du rayon du cercle que l'on cherche.

P R O B L È M E.

146. *Circonscrire et inscrire un cercle à un triangle équilatéral donné* [fig. 72].

Solution. Soient A , B et M les sommets des angles du triangle donné ; du centre A et du rayon AM , soit tracé l'arc MDE , et soit fait à $AM = MD = DE$; des centres B et A , avec le rayon BD , soient tracés deux arcs qui se coupent en L ; du centre L , avec le même rayon LA , soit décrit un arc qui coupe l'arc DE en Q ; des sommets de deux angles du triangle, des points A et B , par exemple, pris pour centres, avec le rayon QE , soient décrits deux arcs qui se coupent en O ; du centre O et du même rayon OA , soit décrit un cercle : il sera circonscrit au triangle.

Soit divisée la ligne QE en deux parties égales au point m [66]; du même centre O et du rayon Qm , soit décrit un autre cercle; il sera inscrit au triangle.

Démonstration. De la démonstration du n.º 142, il résulte que la ligne BAE étant droite, QE est troisième proportionnelle aux deux lignes EM , EA . Donc QE sera le rayon d'un cercle qui passe par les trois points M , A , B ; et le point O en sera le centre (143).

Dans la figure 59, où le cercle DBd est inscrit au triangle NLM , AD est perpendiculaire à LD , et NAB à LB (131): donc les triangles rectangles NDA , NBL , qui ont un angle commun en N , ont aussi le troisième angle égal (32. liv. 1); d'où on a la proportion (4. liv. 6):

$$NL : LB :: NA : DA.$$

Mais NL est double de LB : donc aussi NA est double de DA , c'est-à-dire, le rayon du cercle circonscrit au triangle équilatéral, est double du rayon du cercle inscrit: donc, etc.

P R O B L È M E.

147. *Circonscrire et inscrire un cercle à un quarré donné [fig. 73].*

Solution. Soient A, B, T, F les sommets des angles du quarré donné ; soit fait à $AB = AE$; à $FB = FE$; du centre B , avec le même rayon BF , soit décrit un arc qui passe par Q et q ; du centre E et du rayon EA , soit coupé cet arc en Q et q ; des centres Q et q , et du même rayon AE , soient décrits deux arcs qui se coupent en M ; des centres A et B , et du rayon AQ , soient décrits deux arcs qui se coupent en O ; du centre O et du même rayon OB , soit décrit un cercle ; il sera circonscrit au quarré ; du même centre O et du rayon OM , soit décrit un autre cercle : il sera inscrit au quarré.

Démonstration. Si on fait, pour abrégé, $AB = 1$, on aura :

$$AQ = \frac{1}{2} \sqrt{2} [104] = AO = BO ;$$

on aura donc :

$$(AO)^2 + (BO)^2 = 1 = (AB)^2 :$$

d'où l'angle BOA sera droit (48. liv. 1), et les angles OAB, OBA seront égaux chacun à la moitié d'un angle droit (5, et 32. liv. 1) : de plus, l'angle BAF du quarré étant droit, l'angle OAF en vaudra la moitié : donc dans les deux triangles BAO, FAO , on aura un angle égal compris entre côtés égaux : d'où on aura aussi $OB = OF$ (4. liv. 1) ; on démontre

de la même manière que l'on a aussi $OB = OT$: donc le cercle $ABTF$ est circonscrit au quarré.

La ligne OM est perpendiculaire à MA [83] : donc BMA est tangente au cercle décrit avec le rayon OM ; on démontre la même chose pour les autres côtés AF , FT , TB : donc le cercle décrit du centre O et du rayon OM est inscrit au quarré.

P R O B L È M E.

148. *Circonscrire et inscrire un cercle à un polygone régulier quelconque* [fig. 74].

Solution. Soient B, A, M les sommets de trois angles de ce polygone régulier, dont celui du milieu A soit également éloigné des deux autres B et M ; du point A comme centre et du rayon AB , soit décrite la demi-circonférence $B C D E$ (64) ; des centres A et E , et du rayon ME soient décrits deux arcs qui se coupent en L ; du centre L et du même rayon LA soit coupée la demi-circonférence $B C D E$ en Q : la ligne BQ sera le rayon du cercle circonscrit ; puis, des sommets B et A , par exemple, de deux des angles

du polygone comme centres, et du rayon BQ soient décrits deux arcs qui se coupent en O ; le point O sera le centre de ce cercle.

Si AB est un côté du polygone, on le divisera en deux parties égales au point T (66), OT sera le rayon du cercle inscrit que l'on décrira du même centre O ; si une autre ligne quelconque Ab est un des côtés du polygone, on la divisera en deux parties égales au point t , et Ot sera le rayon du cercle à inscrire avec le même centre O .

Démonstration. Il résulte de la démonstration du n.º 14, que O est le centre du cercle qui passe par les trois points B, A, M : donc il est le centre du cercle circonscrit, puisque par les trois points B, A, M , on ne peut faire passer qu'un seul cercle (25. liv. 3). On a ensuite OT perpendiculaire à TA [83]: d'où TA sera tangente au cercle décrit du centre O avec le rayon OT (16. liv. 1). La même démonstration s'applique à tous les autres côtés égaux à AB : donc ce cercle est inscrit au polygone qui a pour côté AB ; on démontre de même que le cercle décrit du centre O , et du rayon Ot , est inscrit au polygone, qui a pour côté Ab .

149. Si AB est un côté du polygone dans

lequel on veut inscrire le cercle, il y aura plusieurs manières de le diviser en deux parties égales (66); nous avons donné la plus simple pour le quarré (147): pour le triangle seul (146), le rayon du cercle inscrit est la moitié du rayon du cercle circonscrit; dans le quarré seul, il est égal à la moitié du côté.

P R O B L È M E.

150. *Trouver le centre S [fig. 75] d'un cercle qui passe par trois points donnés P, Q, R.*

Solution. Des points P et Q comme centres et d'un rayon arbitraire, soient décrits deux arcs qui se coupent en A et B ; des centres Q et R et d'un rayon arbitraire, soient décrits deux arcs qui se coupent en C et D : le point S où les lignes AB , CD se coupent (112), sera le centre cherché.

Démonstration. Voyez (25. liv. 3).
