ELEMENTI

DI

GEOMETRIA PIANA

DI

FILIPPO MARIA GUIDI

PROFESSORE DI MATEMATICA NELLA REALE UNIVERSITA'
DEGLI STUDII DI NAPOLI.

NAPOLI,

DA' TORCHI DI RAFFAELLO DI NAPOLI

1824.

INDICE

DE' CAPITOLI.

TEORIA DEL CERCHIO.

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA PIANA

CAP. I.

Nozioni preliminari.

1. Noi abbiamo naturalmente la idea dello spazio illimitato, in cui tutto esiste, e noi conosciamo, che esso è esteso in lunghezza, larghezza, e profondità, le quali sono anche esse illimitate.

Volendo noi considerare una parte di questo spazio, dobbiamo considerarla separata dal resto di esso per mezzo di limiti, questa parte dello spazio illimitato terminata attorno attorno da limiti si chiama *solido*, ed in esso troviamo ancora la lunghezza, la larghezza, e la profondità, le quali sono tutte limitate. Quindi noi diamo il nome di *solido* a quella parte dello spazio mondano, che noi consideriamo terminata da limiti per tutte le direzioni, e che ha tre dimensioni cioè lunghezza, larghezza, e profondità.

2. Li limiti, che racchiudono il solido si chiamano *Superficie*; li limiti, che racchiu-

dono la superficie si dicono *Linee*, ed i limiti che racchiudono la linea si chiamano *Punti*.

3. Quindi la superficie ha soltanto due dimensioni, cioè la lunghezza, e la larghezza: La linea ha una sola dimensione, cioè la lunghezza, ed il punto non ha dimensione alcuna.

4. Le parti, che compongono un tutto debbono avere la medesima natura del tutto, che esse compongono, ma la natura del solido consiste nello avere tre dimensioni, cioè lunghezza, larghezza, e profondità, dunque le parti componenti il solido debbono ancora avere lunghezza, larghezza, e profondità, e perciò debbono essere solidi più piccoli. Similmente si dimostra, che le superficie sono composte da superficie minori, e che le linee sono composte da linee più piccole; il che dimostra, che sarebbe errore il credere il solido composto da superficie, le superficie composte da linee, e le linee da punti.

5. Qui è buono di avvrtire, che quantunque sia errore considerare il solido come composto da superficie, le superficie da linee, e le linee da punti, pure alcuni Geometri, per ajutare la immaginazione, hanno considerato il solido come nato dallo inalzamento, o dallo abbassamento di una superficie, la superficie dallo scorrere lateralmente di una linea, e la linea dallo scorrere di un punto.

6. Le superficie, e le linee non possono

esistere indipendentemente dal solido, ma noi col pensiero possiamo considerarle isolate, così noi determiniamo la lunghezza di una strada senza fare attenzione alla sua larghezza, parliamo della altezza di una torre senza fare attenzione alla sua larghezza ed alla sua lunghezza; Similmente noi parliamo della estensione di un lago considerando la sua lunghezza, e la sua larghezza senza occuparci della sua profondità, al contrario se da noi si vuole determinare la capacità di un vaso, dobbiamo tener conto nel medesimo tempo di tutte tre le sue dimensioni.

7. La *linea retta*, o semplicemente la *retta* è il più corto camino da un punto ad un altro.

8. Poicchè la strada più corta da un punto ad un altro è una sola, quindi da un punto ad un altro non si può tirare più di una sola linea retta, e se più se ne tirassero esse necessariamente si confonderebbero con la prima.

Qualunque retta si indica con due lettere poste agli estremi di essa.

9. Si dice *linea curva* quella, che non è retta, nè è composta di linee rette:

(Fig. 1.). Così AB è una linea retta, ABC è un composto di linee rette, che qualche volta si chiama linea spezzata, EDF è una linea curva.

10. Si dice *superficie piana*, o semplicemente *piano* una superficie tale, che se sopra di essa si tirino per qualunque direzione quan-

te rette si vogliano, queste giacciono tutte, ed in tutta la loro estensione nella superficie medesima.

(Fig. 2.). 11. Si chiama *superficie curva* qualunque superficie, la quale non è piana, nè è composta da superficie piane, A è una superficie piana, B una superficie curva.

(Fig. 3.). 12. Si chiama *Angolo piano* lo spazio illimitato compreso fra due linee rette, le quali si incontrano. Così lo spazio illimitato compreso fra le due rette AB, BC si dice *Angolo piano*, ed il punto B, in cui queste rette si incontrano si chiama *Vertice dell' angolo*, e le due rette AB, BC si dicono *lati dell' angolo*, e l' angolo si nomina con le tre lettere, che sono poste una al vertice, e le altre due alle estremità de' lati; mettendo sempre la lettera, che è nel vertice tra le due, che sono agli estremi de' lati; qualchevolta l' angolo si nomina con la sola lettera, che è posta al suo vertice, però questo si fa quando quel vertice appartiene ad un solo angolo.

13. Dalla definizione dell' angolo si vede chiaramente, che la sua grandezza non dipende dalla lunghezza de' suoi lati, talmente che lo allungamento, o lo accorciamento dei suoi lati non altera l' angolo, ma che esso si accresce, o diminuisce discostando un lato dall' altro, o avvicinando un lato all' altro.

14. Una linea retta si dice *perpendicolare* ad una altra, qualora essa cadendo sopra dell' altra non inclina più da una parte, che

dall' altra, o ciò che vale lo stesso, qualora cadendo sopra di una altra forma con questa due angoli eguali; ed una retta si dice *obliqua* ad una altra, qualora cadendo sopra dell' altra inclina più da una parte, che dall' altra, e perciò fa con questa due angoli diseguali.

15. Gli angoli fatti da una retta, che cade sopra di una altra si dicono angoli *adjacenti*, oppure *consequenti*, ed in particolare essi sono chiamati *angoli retti*, quando sono formati da due rette, delle quali l' una è perpendicolare all' altra; degli angoli fatti da due rette, delle quali l' una è obbliqua all' altra si dice *ottuso* quello, che è maggiore del retto, ed *acuto* quello che è minore del retto.

(Fig. 4.). Così CD è perpendicolare ad AB, e CE è obbliqua ad AB; Gli angoli ACD, DCB sono retti, l' angolo ECB è acuto, e l' angolo ECA è ottuso.

16 Si dice *figura piana* qualunque superficie piana circoscritta da una, o più linee; se queste linee sono tutte linee rette, la figura si dice *rettilinea*, se la figura è terminata da una, o più linee curve, si chiama *curvilinea*, e se è terminata da linee parte curve, e parte rette si dice *mistilinea*.

17 Il complesso delle linee, che terminano una figura, si chiama *Contorno*, o *perimetro* di essa; e ciascuna delle linee rette, che formano il contorno di una figura piana rettilinea, si chiama *lato* di essa.

18. Non potendo due linee rette chiudere spazio, ne segue, che la più semplice delle figure piane rettilinee è quella, che è terminata da tre lati, ed essa prende il nome di figura *trilatera*, o di *triangolo*, qualora poi essa è terminata da un maggiore numero di lati, si chiama *multilatera*, o *poligona*.

19. Poichè per formare un angolo debbono incontrarsi due rette, ed un lato di un poligono dovendo servire di lato a due angoli contigui, ne segue, che il numero de' lati di un poligono è sempre lo stesso, che quello degli angoli di esso, ed ecco perchè la figura trilatera si dice anche *triangola*, o semplicemente *triangolo*, e la figura di quattro lati si chiama *quadrilatero*, o *tetrangolo*, quella di cinque *pentagono* ec.

20. Si dice *Cerchio*, o *circolo* una figura piana curvilinea, la quale è terminata da una linea curva, la quale incomincia da un punto, e ritorna allo stesso punto, e che ha la proprietà di avere tutti li punti suoi egualmente distanti da un punto della figura piana da essa circoscritta

21 La curva, che racchiude il cerchio si chiama *curva circolare*, oppure *circonferenza*, o *periferia* del cerchio. Il punto del cerchio, che è egualmente distante da tutti li punti della Circonferenza, si dice *Centro*, e qualunque retta tirata dal centro alla circonferenza si dice *raggio*.

22. Si da il nome di *Aja* di una figura

piana alla superficie piana terminata dal suo perimetro.

23. Osservando, che due figure piane di forme differenti possono contenere aje eguali, questa circostanza da noi sarà espressa dicendo, che le due figure sono *equivalenti*, riserbando la denominazione di eguali a quelle figure, che sono simili, ed eguali in tutte le loro parti, cioè a quelle, che possono combaciare.

24. La parola *misurare* significa trovare il rapporto di una grandezza ad una altra della medesima specie, che si suppone conosciuta, e che si chiama *unità di misura*, o semplicemente *misura*.

25 Ma se questo si può fare in alcuni casi, in molti altri non si può fare; in fatti noi misuriamo il tempo per mezzo del moto, il quale è anche esso misurato per mezzo dello spazio, che un corpo percorre. Cosi tutti sanno, che per misurare il tempo, che è scorso tra un momento ed un altro, noi esaminiamo lo spazio, che gli indici di un orologio percorrono sopra del quadrante di questa macchina, e ciò accade, perche la Natura ha posta una intrinseca connessione tra il moto, ed il tempo, in maniera, che noi non possiamo concepire la esistenza del moto senza che esista il tempo; per determinare il camino degli indici correspondente al tempo, che da noi si vuole determinare, si paragona questo camino intero a certe divisioni segnate sopra

del quadrante, le quali anche esse correspondono ad intervalli di tempo. Quindi in questo caso, misurare vale lo stesso, che determinare il rapporto, che esiste tra due spazj disegnati sul quadrante, per conchiuderne quello, che esiste fra li due intervalli di tempo, oppure per esprimerci in una maniera più generale, si riduce a determinare il rapporto di una grandezza ad una altra della medesima sua specie per conchiuderne quello di due altre grandezze naturalmente legate con le due prime.

26 E poicchè è facile rapportare tutte le misure all' uno, o all' altro di questi due casi, noi possiamo generalmente dire, che *misurare* vale lo stesso, che *cercare il rapporto di una quantità ad una altra della medesima specie, tanto se si vuole conoscere semplicemente sì fatto rapporto, quanto se si vuole conchiudere per mezzo di esso, quale sia il rapporto di due altre quantità ad esse naturalmente legate.*

CAP II.

Problemi relativi alle linee rette.

27. Prob. I. *Date due rette diseguali, tagliare dalla maggiore una parte eguale alla minore.*

(Fig. 10.). Sieno date le due rette diseguali AB, CD; proponiamoci di tagliare dalla maggiore AB una parte eguale alla minore CD.

Soluz. Si faccia centro lo estremo A della retta AB, e col raggio AE = CD si descriva il cerchio EFG, il quale con la sua periferia interseca la retta AB nel punto F. Dico che AF è la parte dimandata:

Dim. Li raggi di un cerchio sono tutti eguali, dunque AE = AF; ma per costruzione AE = CD, dunque anche AF = CD, sicchè ec.

28. Prob. II. *Da un punto dato tirare una retta eguale ad una altra retta data.*

Sia data la retta CD, e sia dato il punto A; si vuole dal punto A tirare una retta eguale a CD.

Soluz. Dal punto A si tiri una retta indefinita AB, e da essa si tagli la porzione AF eguale alla retta data CD; è evidente che AF è la retta dimandata.

Prob. III. *Date due rette trovare il rapporto, che esse hanno tra loro.*

(Fig. 11.). Sieno date le due rette AB, CD, si vuole trovare il rapporto di AB a CD.

Si porti la retta CD, sopra di AB, e si veda quante volte essa si contiene in AB, se CD si contiene esattamente in AB, è evidente, che il rapporto che passa tra AB e CD è lo stesso di quello, che passa tra 'l numero delle volte che CD si contiene in AB alla unità.

Così se per esempio CD si contiene 6 volte esattamente in AB, avremo AB : CD : : 6 : 1 ; o ciò che vale lo stesso diremo, che AB è il sestuplo di CD.

Se poi CD non si contiene esattamente in AB, supponiamo, che CD si contenga, per esempio, 3 volte in AB, e vi resti il residuo EB, conchiuderemo che AB = 3 CD + EB.

Si porti il residuo EB sopra di CD, e si veda quante volte esso si contiene in CD, sopponiamo, che vi si contenga 2 volte, e vi resti il residuo FD, avremo CD = 2 EB + FD.

Si porti il residuo FD sopra di EB, e si veda quante volte esso si contiene in EB, supponiamo, che esso vi si contenga tre volte, e vi resti il residuo GB, avremo EB = 3 FD + GB,

Si porti GB sopra FD, e supponiamo, che essa vi si contenga esattamente 2 volte, avremo FD = 2 GB; quindi noi abbiamo le eguaglianze seguenti.

FD = 2 GB, ... (1)
EB = 3 FD + GB . : . . (2)
CD = 2 EB + FD . . . . (3)
AB = 3 CD + EB . . . . (4)

Nella seconda eguaglianza sostituiamo in vece di FD la quantità 2 GB avremo
EB = 6 GB + GB = 7 GB.

Nella terza eguaglianza sostituiamo ad EB la sua eguale 7 GB, ed in vece di FD sostituiamo 2 GB

Avremo CD = 14 GB + 2 GB = 16 GB

Nella 4 eguaglianza in vece di CD sostituiamo 16 GB, e 7 GB in vece di EB, avremo AB $= 48$ GB $+ 7$ GB $= 55$ GB; Dal che ricaviamo, che

AB : CD : : 55 GB : 16 GB : : 55 : 16. Sicchè ec.

29. È ora molto facile applicare questo metodo a qoalsivoglia altro esempio; La operazione sopra de' residui consecutivi deve essere portata avanti fino a tanto, che si giunga ad un residuo, che sia contenuto esattamente nel residuo precedente, oppure che sia tale, che il residuo, che esso lascia in questa operazione sia tanto piccolo da non doversene tener conto, nel quale caso il rapporto, che avremo trovato non sarà esatto, ma appossimativo.

C A P III.

Proprietà generale dè triangoli relativamente ai lati, e caratteri da conoscere la eguaglianza di essi.

30. Teor I. In *ogni triangolo qualunque delli suoi lati è minore della somma degli altri due.*

(Fig. 6.). Sia ABC un triangolo, dico che il solo lato AC è minore della somma AB + BC degli altri due.

Dim. Disegnando AC il più breve camino da A a C, ne segue, che AC $<$ AB + BC. Sicchè ec.

31. Teor. II. Se *dentro di un triangolo si prenda ad arbitrio un punto, e da esso si tirino agli estremi di uno de' lati due rette, la somma di queste due linee rette interne è minore della somma degli altri due lati del triangolo.*

(Fig. 5.). Rappresenti ABC qualunque triangolo, e dal punto D preso ad arbitrio dentro di esso sieno tirate agli estremi A, C del lato AC le due rette DA, DC, Dico che $AD + DC < AB + BC$.

Dim Dal punto D si tiri qualsivoglia retta EF, che incontri AB, BC nelli punti E, F.

Nel triangolo EBF, il lato EF è minore della somma $EB + BF$ degli altri due lati; similmente nel triangolo AED il lato $AD < AE + ED$; e nel triangolo DFC il lato $DC < DF + FC$; quindi la somma delle quantità minori $EF + AD + DC$ è minore della somma $EB + BF + AE + ED + DF + FC$ delle quantità maggiori, ma $ED + DF = EF$, $AE + EB = AB$, $BF + FC = BC$, dunque sostituendo avremo $EF + AD + DC < AB + BC + EF$, e togliendo da ambi i membri di questa ineguaglianza la quantità comune EF, resterà $AD + DC < AB + BC$. Sicchè etc.

31 Teor. 3 *Se due triangoli hanno due lati dell' uno respettivamente eguali a due lati dell' altro, e l' angolo compreso fra li due lati del primo eguale all' angolo compreso fra li due lati del secondo, essi saranno eguali.*

(Fig. 6.). Abbiano li due triangoli ABC, DEF i due lati AB, BC del primo respettivamente eguali alli due lati DE, EF del secondo, e l' angolo ABC = DEF. Dicò, che questi due triangoli sono eguali.

Si concepisca il triangolo ABC posto sopra del triangolo DEF in modo, che il punto B cada sopra del punto E, ed il lato AB prenda la direzione del lato ED; Poicchè per la ipotesi l' angolo ABC = DEF, il lato BC prenderà la direzione del lato EF, ma per ipotesi AB = DE, BC = EF, dunque il punto A cadrà sopra del punto D, ed il punto C cadrà sopra del punto E, ma da un punto ad un altro non si può tirare più di una sola linea retta, dunque AC combacia con DF, e per conseguenza tutte le parti del triangolo ABC combaciano con tutte le parti del triangolo DEF, e perciò il triangolo ABC = DEF Sicchè ec.

33. Teor. 4 *Se due triangoli hanno due angoli dell' uno respettivamente eguali a due angoli dell' altro, ed il lato adjacente alli due angoli del primo eguale al lato adjacente alli due angoli del secondo, essi saranno eguali.*

Li due triangoli ABC, DEF abbiano li due angoli in A, ed in C respettivamente eguali agli angoli in D, ed in F, ed il lato AC adjacente alli due angoli del primo eguale al lato DF adjacente alli due angoli del secondo; Dico, che questi triangoli sono eguali.

(Fig. 6.). Si concepisca il triangolo ABC sovraposto al triangolo DEF in modo, che il lato AC combaci col suo eguale DF.

Per la ipotesi l' angolo BAC = EDF, quindi il lato AB prendrà la direzione del lato DE, ed il punto B del lato AB cadrà sopra un punto della retta DE, ed essendo anche per la ipotesi l' angolo BCA = EFD, il lato BC prenderà la direzione di EF, ed il punto B del lato BC cadrà sopra un punto della retta FE, quindi il punto B deve trovarsi sul punto comune alle due rette DE, EF, ma queste rette hanno il solo punto E comune, dunque il punto B cadrà sopra del punto E, e per conseguenza tutte le parti del triangolo ABC combaciano respettivamente con tutte le parti del triagolo DEF, e perciò esse sono eguali, ed il triangolo ABC = DEF. Sicchè ec.

34 Lemma. *Se due triangoli hanno due lati dell' uno respettivamente eguali a due lati dell' altro, e l' angolo compreso fra li due lati del primo minore dell' angolo compreso fra li due lati del secondo, sarà il terzo lato del primo, che è opposto all' angolo minore, anchè minore del terzo lato del secondo, che è opposto all' angolo maggiore.*

(Fig. 7.). Li due triangoli ABC, DEF abbiano AB = DF, AC = DE, e l' angolo CAB < EDF; dico, che sarà ancora CB < EF.

Dim. Si concepisca il triangolo CAB posto sopra del triangolo DEF in modo, che il lato AB combaci col suo eguale DF; poichè per la ipotesi l' angolo CAB < EDF, il lato AC dovrà prendere la direzione per dentro del triangolo EDF; prenda per esempio la direzione DM. Si prenda sopra di DM la porzione DG = AC; possono darsi tre casi I Che l' estremo di DG cada sopra di EF (come fig. n. 1) nel punto G. 2 Che esso cada dentro del triangolo in G (come fig. n. 2). 3 Che esso cada nel punto G fuori del triangolo (come fig. n. 3); Si unisca FG.

In tutti e tre li casi li due triangoli CAB, DGF hanno li due lati CA, AB dell' uno respettivamente eguali alli due lati DG, DF dell' altro, ed eguali gli angoli CAB, GDF compresi da si fatti lati, quindi essi sono eguali, e per conseguenza CB = GF, quindi se dimostriamo che GF < EF, avremo dimostrato che CB < EF.

(Fig n.° 1.). Dim. Nel primo caso è evidente, che la parte GF è minore del tutto EF; dunque anche CB < EF.

(Fig. n.° 2.). Nel secondo caso, poicchè dal punto G preso dentro del triangolo DEF si sono tirate le due rette GD, GF agli estremi D, F del lato DF, la somma DG + GF delle linee interne è minore della somma DE + EF degli altri due lati del triangolo DEF; Ma per ipotesi AC = DE, e per costruzione la stessa AC = DG; dunque AC = DG, e perciò togliendo dalli due membri della ineguaglianza DG + GF < DE + EF queste due quantità eguali, resterà FG < EF, e perciò CB < EF sicchè ec.

(Fig. n.° 3.). Finalmente considerando il terzo caso, noi troviamo, che nel triangolo EOD il solo lato ED < EO + OD somma degli altri due lati, e che per la medesima ragione nel triangolo GOF il lato GF < GO + OF, quindi, addizionando membro a membro queste due ineguaglianze, avremo ED + GF < DO + EO + GO + OF, ma DO + OG = DG, EO + OF = EF, dunque sostituendo sarà ED + GF < DG + EF, ma per le ipotesi AC = DE, e per costruzione la stessa AC = DG; dunque DE = DG e perciò togliendo dalli due membri della disuguaglianza ED + GF < DG + EF, le quantità eguali DE, DG avremo GF < EF, e per conseguenza CB < EF. Sicchè ec.

35. Teor. 5. *Se due triangoli hanno li tre lati dell' uno respettivamente eguali alli tre lati dell' altro, essi saranno eguali.*

(Fig. 6.). Abbiano li due triangoli ABC, DEF, il lato AB = DE, il lato BC = EF, ed il lato AC = DF Dico che avranno l' angolo ABC = DEF, e tutte le altre parti respettivamente eguali.

Dim. Se si niega, che sia l' angolo ABC = DEF, allora li due triangoli ABC, DEF avrebbero li due lati AB, BC respettivamente eguali alli due lati DE, EF, e l' angolo compreso tra li due lati del primo non eguale all' angolo compreso fra li due lati del secondo, ed in conseguenza della verità dimostrata nel lemma precedente, il lato AC non potrebbe essere eguale al lato DF, il che è contro la ipotesi, dunque l' angolo ABC = DEF; ed i triangoli sono eguali, perchè hanno due lati eguali respettivamente a due lati, e gli angoli da sì fatti lati compresi anche eguali. Sicchè. ec.

36 Da quanto abbiamo detto si vede chiaramente, che un triangolo è interamente determinato, quando sono note tre delle sue parti, purchè tra esse vi sia compreso almeno un lato, e che nelli triangoli eguali sono eguali quelli angoli, che sono dirimpetto alli lati eguali, e sono eguali quelli lati, che sono opposti agli angoli eguali.

CAP. IV.

Proprietà delle rette, le quali si incontrano, oppure si intersecano.

37. Teor. I. *Tutti gli angoli retti sono eguali.*

(Fig. 8.) Siano le rette CD, GH respettivamente perpendicolari ad AB, EF, dico che gli angoli retti DCB, HGF sono eguali.

Dim. Si taglino le quattro rette CA, CB, GE, GF tutte fra loro eguali; e si concepisca la retta AB posta sopra di EF in modo, che esse si combacino, è evidente, che il punto C in cui AB è divisa in due parti eguali cadrà sopra del punto G, in cui la EF è anche divisa in due parti eguali, ciò fatto dico che CD prenderà la direzione di GH. In fatti se si nieghi, che CD prenda la direzione di GH, ne prenda se è possibile una altra, per esempio GK. Per la ipotesi li due angoli ACD, DCB sono eguali, dunque anche li due EGK, KGF debbono essere eguali, ma KGF è minore di HGF, ed HGF = HGE, dunque KGF < HGE, di più l' angolo KGE è maggiore dello stesso angolo HGE, dunque l' angolo KGE è maggiore di KGF, ma essi doveano essere eguali, dunque nello stesso tempo essi sarebbero eguali, e diseguali, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che CD non prenda la direzione di GH, e per conseguenza gli angoli retti DCB, HGF combaceranno, e perciò saranno eguali. Sicchè ec.

38 Cor. Essendo l' angolo retto di una grandezza invariabile è evidente, che esso deve essere preso per termine di paragone di tutti gli angoli.

(Fig. 4.) 39. Teor. II. *Se una retta cade sopra di una altra, queste due rette formeranno sempre due angoli adjacenti, li quali o sono retti, o sono presi insieme eguali a due retti.*

Sopra della retta AB in due maniere può cadere una altra retta, cioè o perpendicolarmente, come è la retta CD, ed allora è evidente per la definizione, che gli angoli ACD, DCB sono retti; o obliquamente come CE, ed in tale caso dico, che ACE + ECB = 2R.

Dim. L' angolo ottuso ECA = ECD, + DCA, l' angolo acuto ECB = DCB – DCE, quindi addizionando queste due eguaglianze membro a membro, avremo ECA + ECB = ACD + DCB, ma ACD + DCB = 2R, dunque anche ECA + ECB = 2R. Sicchè ec.

39. Cor. Essendosi dimostrato, che li due angoli ECA, ECB presi insieme sono eguali a due retti, è evidente, che se questi angoli si dividono in quante parti si voglia, sempre la somma di tutti essi equivalerà a due retti, dal che ricaviamo generalmente, che tutti gli angoli, che si possono fare intorno ad un punto dalla medesima parte di una retta, presi insieme eguagliano la somma di due angoli retti.

40. Teor. 3. *Se da un punto di una retta sieno tirate per direzioni opposte due altre rette in modo, che formino con la prima due angoli, che presi insieme siano eguali a due retti, esse formeranno una retta continuata.*

(Fig 9.) Dal punto D della retta CD siano tirate per direzioni opposte le due rette DA, DB in modo, che la somma CDA + CDB degli angoli, che esse formano con la retta CD, sia eguale a due retti, dico che AD, DB formano una retta continuata.

Dim Se si nieghi, che AD, DB formino

una retta continuata, si prolunghi AD, ed il suo prolungamento prenda la direzione di DE. La retta CD cadendo sopra ADE forma li due angoli conseguenti CDA, CDE, li quali presi insieme sono eguali a due retti, ma per la ipotesi anche li due angoli CDA, CDB presi insieme sono eguali a due retti, dunque CDA + CDB = CDA + CDE, si tolga da queste quantità eguali la comune CDA, resterà CDE = CDB, cioè la parte eguale al tutto, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che AD, DB non formino una retta continuata. Sicchè ec.

41. Teor. IV. *Se due rette si intersecano, gli angoli opposti al vertice, che esse formano, sono eguali.*

(Fig. 12.) Le due rette AB, CD si intersechino nel punto O; Dico che gli angoli verticali, che esse formano sono eguali, cioè che AOC = DOB, e AOD = COB.

Dim. La retta AO cadendo sopra di CD forma gli angoli adjacenti AOC ed AOD, li quali insieme presi sono eguali a due retti, similmente cadendo DO sopra di AB la somma AOD + DOB degli angoli adjacenti è anche eguale a due retti, dunque AOC + AOD = AOD + DOB, se ne tolga l' angolo comune AOD, resterà AOC = DOB similmente si dimostra, che gli angoli AOD, COB sono eguali; Dunque ec.

42. Cor. 1. Essendo la somma degli angoli AOC, AOD eguale a due retti, e la som-

ma di COB, e BOD anche eguale a due retti, ne segue che $AOC + AOD + DOB + BOC = 4R$; e se questi angoli si dividono in qualunque numero di parti, sempre la somma di tutti essi sarà anche eguale a quattro retti, quindi conchiuderemo generalmente, che la somma di tutti gli angoli, che si possono fare attorno di un punto, è sempre eguale a quattro angoli retti.

43. Cor. 2. Sia la retta CD perpendicolare ad AB, e si prolunghi verso E. Intersecandosi le rette AB, CE, saranno eguali sì li due angoli verticali ADC, BDE, che gli altri due CDB, ADE, ma li due ADC, CDB sono retti, dunque anche li due ADE, EDB saranno retti, e perciò ED è perpendicolare ad AB, dunque se una retta è perpendicolare ad una altra, anche il suo prolungamento è ad essa perpendicolare; Dippiù essendo CD perpendicolare ad AB, l'angolo CDB è retto, ma abbiamo dimostrato, che l'angolo BDE è anche retto, dunque DB è perpendicolare a CE; e perciò se una retta è perpendicolare ad una altra, anche questa seconda è perpendicolare alla prima.

44. Prob. 1. *Data una retta terminata dividerla in due parti eguali per mezzo di una retta, che sia ad essa perpendicolare.*

(Fig. 14.) Sia data la retta terminata AB, proponiamoci di dividerla in due parti eguali con una retta, che sia ad essa perpendicolare.

Sol. Si faccia centro il punto A, e con qualunque raggio, purchè sia maggiore della metà di AB, si descriva il cerchio CFD, indi facendo centro il punto B col medesimo intervallo si descriva il cerchio ECD, questi due cerchi con le loro circonferenze si intersecano nelli punti C, D; Finalmente dal punto C al punto D si tiri la retta CD. Dico ché CD divide AB in due parti eguali, ed è ad essa perpendicolare.

Dim. Dal punto A alli punti C, D si tirino le rette CA, AD; e dal punto B alli medesimi punti C, D si tirino le rette BC, BD.

Li due triangoli CAD, CBD hanno li due lati CA, AD del primo respettivamente eguali alli due lati CB, BD del secondo, poichè sono raggi di cerchi eguali, hanno di più il lato CD comune, dunque essi saranno eguali, e perciò sarà l' angolo ACD = BCD. Inoltre li due triangoli COA, COB hanno CA = CB, il lato CO comune, e l' angolo ACO eguale all' angolo BCO, dunque essi avranno tutte le altre parti respettivamente eguali, e perciò sarà AO = OB, e l' angolo COA = COB, quindi CD ha divisa la AB in due parti eguali, ed è ad essa perpendicolare.

45. Prob. 2. *Da un punto dato fuori di una retta calare sopra di essa una perpendicolare.*

(Fig. 15.) Sia data la retta BC, e fuori di essa il punto A, si vuole dal punto A calare sopra di BC una perpendicolare.

Sol. Si prenda ad arbitrio il punto H, il quale per rispetto del punto A sia dall' altra parte della retta BC, e si unisca AH, indi fatto centro il punto A con l'intervallo della retta AH si descriva il cerchio DHE, il quale taglia con la sua periferia la retta BC nelli punti D, E. Indi fatto centro il punto D con qualunque raggio maggiore della metà di DE si descriva un cerchio, similmente fatto centro il punto E con lo stesso intervallo si descriva un altro cerchio, questi due cerchi con le loro circonferenze si tagliano nel punto F; finalmente dal punto A al punto F si tiri la retta AF. Dico, che AF è la perpendicolare dimandata.

Dim. Dal punto D alli punti A, F si tirino le rette DA, DF, e dal punto E alli medesimi punti si tirino le rette EA, EF.

Nelli due triangoli ADF, AEF, il lato AD = AE, come raggi del medesimo cerchio, il lato DF = EF, come raggi di cerchi eguali, il lato AF è comune, dunque essi avranno le altre parti respettivamente eguali, e perciò l' angolo DAF = EAF. In oltre li due triangoli DGA, AGE avendo il lato AD = AE, il lato AG comune, e l' angolo DAG = EAG, avranno le altre parti respettivamente eguali, dunque l' angolo AGD = AGE, e perciò AG è perpendicolare a BC; sicchè dal punto dato A si è calata sopra di BC la perpendicolare AG. Sicchè ec.

46. Prob. 3. *Da un punto dato in una retta alzare sopra di essa la perpendicolare.*

(Fig. 16.) Dal punto C dato nella retta AB si vuole ad essa elevare la perpendicolare.

Sol. Sopra di AC si prenda ad arbitrio qualunque punto E, e da CB si tagli la parte CF = CE, indi fatti centri li punti E, F con un raggio maggiore di EC, e di CF si descrivano due cerchi, li quali con le loro periferie si intersecano nel punto G, finalmente dal punto G al punto C si tiri la retta CG. Dico chè CG è la perpendicolare dimandata.

Dim. Dal punto G alli punti E, F si tirino le rette GE, GF.

Nelli due triangoli GCE, GCF, il lato GE = GF, come raggi di due cerchi eguali, il lato CE = CF per costruzione, il lato GC è comune, dunque essi avranno tutte le altre parti respettivamente eguali, e perciò sarà l' angolo GCE = GCF; e per conseguenza la retta GC è perpendicolare ad AB. Sicchè dal punto C della retta AB si è sopra di essa innalzata la perpendicolare GC.

47. Prob. 4. *Dato un punto in una linea retta, e dato un angolo, formare nel dato punto della retta data un angolo eguale allo angolo dato.*

(Fig. 17.) Sia dato il punto A nella retta BC, e sia dato l' angolo LMN, si vuole nel punto A della retta BC formare un angolo, il quale sia eguale all' angolo LMN.

Sol. Sopra de' lati LM, MN dell' angolo LMN si prendano ad arbitrio li punti P, Q, e si unisca la retta PQ. Indi si taglino AD = MQ, AH = MP, HE = PQ; e preso per centro A con l' intervallo AD si descriva il cerchio DKG, e similmente col centro H e con l' intervallo HE si descriva l' altro cerchio EKF, questi due cerchi si intersecano con le loro circonferenze nel punto K, finalmente da A a K si tiri la retta AK; dico che HAK è l' angolo dimandato.

Dim. Si unisca HK. Essendo A centro del cerchio DKG, sarà AD = AK; ma AD = MQ, dunque AK = MQ; similmente HK = HE, come raggi del cerchio EKF, ma HE = PQ, dunque HK = PQ; la AH = MP per costruzione, dunque il triangolo HAK è eguale a PMQ; e perciò l' angolo HAK = QMP; Sicchè nel punto A della retta BC si è formato l' angolo HAK eguale all' angolo dato LMN.

CAP. V.

Dell' ordine, che serbano nella loro grandezza le linee rette tirate sopra di una altra retta da un punto esistente fuori di essa.

48. Teor. *Se da un punto esistente fuori di una retta si calino sopra di essa una perpendicolare, e delle oblique 1. Di tutte queste rette la perpendicolare è la minima 2. Delle obblique, quelle, che la incontrano in punti egualmente distanti dal piede della*

perpendicolare sono eguali, *3. Quelle che la incontrano in punti più vicini al piede della perpendicolare sono minori di quelle, che la incontrano in punti più distanti.*

(Fig. 18.) Dal punto C esistente fuori dalla retta AB siano calate sopra di AB la perpendicolare CD, le due oblique CE, CF, le quali la incontrano nelli punti E, F egualmente distanti dal piede D della perpendicolare CD, e la obliqua CG, la quale la incontri nel punto G più distante dal piede della perpendicolare di quello, che ne è distante il piede E della obbliqua CE.

Dico 1. Che la perpendicolare CD è la minima.

Dim. Si prolunghi CD verso H fino a tanto, che DH sia eguale a CD, e si unisca EH. Nelli due triagoli CDE, EDH sono eguali li due lati CD, DH, il lato ED è comune, e l' angolo CDE = EDH, poicchè sono angoli retti, dunque essi avranno tutte le altre parti respettivamente eguali, e perciò CE = EH; In oltre nel triangolo CEH il solo lato CH è minore della somma CE + EH degli altri due, ma CD è la metà di CH, e CE è la metà di CE + EH, dunque CD < CE; con lo stesso raziocinio si dimostra essere la perpendicolare CD minore di qualsivoglia altra obliqua, dunque la perpendicolare CD e la minima di tutte le rette, che dal punto C si possono calare sopra di AB.

Dico 2. Che CE = CF.

Dim. Nelli due triangoli CDE, CDF per ipotesi ED = DF, CD è comune, e l' ango- CDE = CDF, poichè essi sono retti, dunque li triangoli CDE, CDF sono eguali, e perciò le obblique CE, CF, sono anche eguali. *Dico* 3. Che CE < CG.

Dim. Si unisca GH; come si è dimostrato, che CE è la metà di CE + EH, così si dimostra, che CG è la metà di CG + GH; Dippiù dal punto E preso dentro del triangolo CGH agli estremi C, ed H del lato CH sono tirate le rette EC, EH, dunque CE + EH < CG + GH, e per conseguenza CE, la quale è metà di CE + EH è minore di CG, la quale è metà di CG + GH. Sicchè ec.

49. Cor. 1. Quindi dal punto C preso fuori della retta AB non si possono calare sopra di AB più di due oblique eguali, e queste sono quelle, che cadono una da una parte l'altra dall' altra parte della perpendicolare, ed esse incontrano la retta in punti egualmente distanti dal piede della perpendicolare.

(Fig. 19.) 50. Cor. 2. Dal punto D in cui la retta terminata AB è divisa in due parti eguali, sia inalzata sopra di essa la perpendicolare DE, e da qualunque suo punto C siano tirate agli estremi A, B di AB le oblique CA, CB, è evidente, che queste oblique incontrando AB in punti egualmente distanti dal piede D della perpendicolare CD, sono eguali.

Si prenda ora il punto F fuori di questa perpendicolare, e si uniscano le rette FA, FB, e dal punto H, in cui AF incontra la perpendicolare ED, al punto B si tiri la retta HB; Le due oblique HA, HB sono eguali, ad esse si unisca di comune HF, avremo AH + HF, ossia AF = BH + HF, ma nel triangolo BHF, la somma de' lati BH + HF > BF, dunque AF > BF.

Sicchè se dal punto, in cui una retta è divisa in due parti eguali, si inalzi una perpendicolare sopra di essa, ciascheduno de' punti della perpendicolare è ad eguale distanza dagli estremi di essa, e qualunque punto preso fuori di sì fatta perpendicolare, ha diseguali distanze dagli estremi della medesima retta.

(Fig. 20.) 51. Cor. 3. Dal punto C preso fuori della retta AB sia calata sopra di essa la perpendicolare CD, dico che dal medesimo punto C non si può calare sopra di AB una altra perpendicolare. Se mai è possibile dal medesimo punto si cali una altra perpendicolare CE; Da DB si tagli DF = DE, e si unisca CF. Li due triangoli CDE, CDF, avendo il lato FD = DE, il lato CD comune, e l' angolo CDE = CDF, poicchè essi sono retti, sono eguali, e perciò CE = CF. Si tagli da AE la porzione GE = EF, e si unisca CG. Li due triangoli CEG, CEF sono eguali, poicchè hanno il lato CE comune, GE = EF, e gli angoli CEG, CEF da tali lati compresi, eguali, poicchè essi si sono supposti retti, dunque avranno ancora il lato

CG = CF, ma si è dimostrato, che anche CE = CF; dunque CG = CE = CF, e dal medesimo punto C si sarebbero calate sopra di AB tre rette eguali, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che da un punto si possa abbassare sopra di una retta più di una perpendicolare.

(Fig. 4.) 52. Similmente da un punto preso in una retta non si può inalzare sopra di essa più di una perpendicolare. In fatti se mai è possibile dal punto C della retta AB sieno sopra di essa inalzate le due perpendicolari CD, CE, esse formeranno gli angoli DCB, ECB, li quali sarebbero retti, e perciò eguali, e ne seguirebbe, che il tutto sarebbe eguale alla sua parte, il che è assurdo, dunque è assurdo ancora, che da un punto preso in una retta si possa sopra di essa elevare più di una perpendicolare.

53. Cor. 4. La perpendicolare calata da un punto sopra di una retta essendo unica, ed essendo la minima di tutte le rette, che dal medesimo punto si possono abbassare sopra di essa, ne segue, che essa è la misura naturale della distanza, che un punto ha da una retta data.

54. Cor. 6. Dalle cose dette evidentemente si ricava, che due rette perpendicolari ad una terza non possono incontrarsi, poicchè se si incontrassero, dal punto dello incontro si sarebbero calate due perpendicolari sopra della medesima retta.

55. Avv. Le verità dimostrate ci conducono naturalmente a dimostrare due caratteri particolari da conoscere la eguaglianza di due triangoli, qualora ciascuno di essi ha un angolo retto; quindi noi dimostreremo li due teoremi seguenti.

56. Teor. 2. *Se due triangoli hanno ciascuno un angolo retto, li lati opposti agli angoli retti eguali, ed un altro angolo dell' uno eguale ad un altro angolo dell' altro, essi saranno eguali.*

(Fig. 21.) Li due triangoli ABC, DEF abbiano gli angoli ABC, DEF retti, li lati AC, DF, opposti a tali angoli, eguali, e l' angolo BAC=EDF; Dico che essi sono eguali.

Dim. Si concepisca il triangolo ABC posto sopra del triangolo DEF in modo, che il lato AC combaci col suo eguale DF; per la ipotesi l' angolo BAC = EDF, quindi il lato AB deve prendere la direzione del lato DE, ed il punto B deve cadere sopra del punto E, poichè non cadendo sopra del punto E, dovrebbe cadere sopra di un altro punto qualunque di DE, e la BC non combacerebbe con EF, ma essendo BC perpendicolare ad AB, dovrà essere perpendicolare a DE, che si è confusa con AB, e dal punto F si sarebbero sopra di DE calate due perpendicolari, il che si è dimostrato assurdo, quindi il punto B cade sopra del punto E, e tutto il triangolo ABC combacia col triangolo DEF, e per coseguenza il triangolo ABC = DEF. Sicchè ec.

57. Teor. 3. *Se due triangoli ciascuno de' quali ha un angolo retto, hanno i lati opposti agli angoli retti eguali, ed un altro lato del primo eguale ad un altro lato del secondo, essi sono eguali.*

Sieno li triangoli ABC, DEF, li quali abbiano li due angoli ABC, DEF retti, abbiano li due lati AC, DF opposti agli angoli retti eguali, ed il lato AB = DE. Dico che essi sono eguali.

Dim. Si concepisca il triangolo ABC sovrapposto al trangolo DEF in modo, che il lato AB combaci col suo eguale DE. Poicchè gli angoli ABC, DEF sono eguali, il lato BC prenderà la direzione del lato EF, ed il punto C cadrà sopra del punto F, poicchè il punto C cadendo sopra qualunque altro punto di EF, la retta AC non combacerebbe con DF, e dal medesimo punto D si sarebbero tirate sopra di EF due oblique eguali, le quali la incontrerebbero in punti disugualmente distanti dal piede E della perpendicolare DE, il che è assurdo, dunque il punto C cade sul punto F, ed il triangolo ABC combacia col triangolo DEF, e perciò essi sono eguali. Sicchè ec.

CAP. VI.

Delle rette parallele.

(Fig. 22.) 58. Se due rette AB, CD sono in qualunque maniera situate sopra di un piano e vengono tagliate da una terza EF, esse formano intorno alli punti G, H otto angoli, li quali paragonati due a due prendono nomi particolari in conseguenza della loro posizione respettiva.

Li due AGH, GHD, che sono formati uno dalla secante con una delle rette, l' altro dalla medesima secante con l' altra retta, ed hanno le aperture per direzione opposta, si dicono *alterni interni*; e similmente gl altri due BGH, GHC anche si dicono *alterni interni*.

Li due EGB, CHF, come anche li due EGA, DHF formati dalla secante uno con una delle rette, l' altro con l' altra retta, e che hanno le aperture per direzioni opposte, e al di fuori di esse, si dicono respettivamente angoli *alterni esterni*.

Uno degli esterni, e quello degli interni, che gli è opposto dalla medesima parte della secante si dicono *angoli correspondenti*, quindi vi sono quattro coppie di angoli correspondenti, cioè EGB, GHD; FHD, HGB; AGE, CHG; CHF, HGA.

Gli angoli BGH, GHD, che sono al di dentro delle rette, e dalla medesima parte della secante, come anche gli altri due AGH, GHC, che hanno la stessa situazione per rapporto alla secante, si dicono *interni posti dalla medesima parte.*

E gli angoli EGB, DHF, che sono al di fuori, e dalla medesima parte della secante, come ancora gli altri due EGA, CHF, si dicono *esterni posti dalla medesima parte.*

59. Due rette si dicono *parellele*, qualora sono amendue nel medesimo piano, e poste in modo, che prolungate indefinitamente non si possono incontrare.

60. Quindi avendo noi dimostrato, che due rette perpendicolari ad una terza non possono mai incontrarsi, esse sono tra loro parallele. (Fig. 23.) Sieno le due rette AB, CD perpendicolari alla medesima EF, e perciò parallele; fino a tanto, che queste rette si mantengono perpendicolari ad EF, cioè fino a tanto, che esse formano con EF gli angoli interni da qualsivoglia parte, li quali sieno retti, esse non potranno mai incontrarsi, giacchè esse non inclinano l' una verso dell' altra, ma se uno degli angoli per esempio AGH sarà minore di un retto, allora la retta AB inclinerà verso di CD, e tenderà a formare un angolo con CD, anzi lo formerà effettivamente, qualora le rette AB, CD saranno sufficientemente prolungate dalla parte, nella quale l' angolo AGH è minore del retto; quindi si rende meno difficile a capire il seguente principio di Euclide.

61. *Se due rette esistenti nel medesimo piano venendo intersecate da una terza, ne risultino da una parte due angoli interni, che presi insieme siano minori di due retti, e dall' altra parte due angoli interni, che presi insieme siano maggori di due retti, prolungate quanto occorre dalla parte, ove gli angoli sono minori di due retti, esse debbono incontrarsi.*

62. Teor. 1. *Se una retta è perpendicolare ad una di due parallele, deve essere perpendicolare ancora all' altra.*

Sieno le due rette AB, CD parallele, e sia EF perpendicolare a CD. Dico che essa sarà perpendicolare anche ad AB.

Dim. Poichè se EF non fosse perpendicolare ad AB, uno degli angoli AGE, AGH sarebbe acuto, e l' altro ottuso, giacchè la somma di essi deve eguagliare due angoli retti, e la retta AB prolungata da quella parte, dalla quale forma con EF l' angolo acuto andrebbe ad incontrare la retta CD, il che è assurdo, poicchè per la ipotesi le rette AB, CD sono parallele, dunque la EF forma con AB li due angoli dall' una, e dalla altra parte retti, e perciò è perpendicolare ad AB. Sicchè ec.

63. Teor. 2. *Se due rette parallele sono tagliate da una terza, esse formeranno 1. Gli angoli alterni interni eguali 2 Gli angoli alterni esterni eguali 3. Gli angoli corrispondenti eguali. 4.* Gli *angoli interni posti*

dalla medesima parte presi insieme eguali a due retti 5. Gli angoli esterni posti dalla medesima parte insieme presi eguali a due retti.

(*Fig.* 22.) Le due rette parallele AB, CD sieno tagliate dalla retta EF.

Dico I che gli angoli alterni interni sono eguali, cioè AGH = GHD, e BGH = GHC.

Dim. Dal punto O, in cui la retta GH è divisa in due parti eguali, si cali, sopra di CD la perpendicolare OM, la quale si prolunghi fino all' incontro di AB nel punto K.

La retta KM essendo perpendicolare a CD, che è parallela ad AB, è perpendicolare anche ad AB, quindi li due triangoli KGO, OHM hanno gli angoli retti GKO, HMO, hanno di più li lati GO, OH, opposti agli angoli retti, eguali, e l' angolo KOG = HOM, come verticali, dunque avvranno le altre loro parti respettivamente eguali, e perciò li rimanenti angoli KGO, OHM saranno eguali.

In oltre cadendo HG sopra di AB, avremo la somma AGH + HGB degli angoli adjacenti eguale a due retti; similmente cadendo GH sopra di CD, la somma GHC + GHD degli angoli adiacenti è anche eguale a due retti, dunque AGH + HGB = GHC + GHD, ma noi abbiamo dimostrato, che AGH = GHD, dunque anche BGH = GHC; sicchè ec.

Dico 2. Che gli angoli EGB, CHF alterni esterni sono anche eguali.

Dim. L' angolo EGB è eguale al suo verticale AGH, ma abbiamo dimostrato, che AGH = GHD, e GHD è eguale al suo verticale CHF; dunque EGB = CHF. Sicchè ec.

Dico 3. Che l' angolo EGB è eguale al suo corrispondente GHD.

Dim. L'angolo EGB è eguale al suo verticale AGH, ma abbiamo dimostrato AGH = GHD; dunque anche EGB = GHD. Sicchè ec.

Dico 4. Che la somma BGH + GHD degli angoli interni posti dalla medesima parte è eguale a due retti.

Dim. Si è dimostrato, che AGH = GHD, aggiugnendo ad essi di comune l' angolo BGH, avremo AGH + BGH = GHD + BGH; ma AGH + BGH = 2R, dunque anche GHD + BGH = 2R. Sicchè.

Dico 5. Che la somma EGB + DHF degli angoli esterni posti dalla medesima parte è eguale a due retti.

Dim. Abbiamo dimostrato, che gli angoli correspondenti EGB, GHD sono eguali, aggiugnendo ad essi di comune l' angolo DHF, avremo EGB + DHF = GHD + DHF; ma GHD + DHF = 2R; dunque ancora la somma EGB + DHF degli angoli esterni posti dalla medesima parte è eguale a due angoli retti. Sicchè ec.

64. Teor. 3. *Se due rette esistenti nello stesso piano vengono tagliate da una altra retta, e formano 1. Gli angoli alterni interni eguali, oppure 2. Gli angoli alterni esterni eguali, oppure 3. Gli angoli corrisponden-*

ti eguali, oppure 4. Gli angoli interni posti dalla medesima parte presi insieme eguali a due retti, o finalmente 5 Gli angoli esterni posti dalla medesima parte presi insieme eguali a due retti, esse sono parallele.

1 Le due rette (fig. 22) AB, CD esistenti nel medesimo piano vengano tagliate dalla terza EF, e formino gli angoli alterni interni eguali; cioè AGH = GHD, oppure BGH = GHC, dico che esse sono parallele.

Dim. Dal punto O, nel quale la retta GH è divisa in due parti eguali, si cali sopra di CD la perpendicolare OM, la quale si prolunghi fino a tanto, che incontri AB nel punto K.

Nelli due triangoli KOG, OHM gli angoli verticali KOG, HOM sono eguali, l' angolo KGO = OHM, per la ipotesi, ed il lato OG adjacente alli due angoli del primo eguale al lato OH adjacente alli due angoli del secondo, dunque essi sono equali, e perciò l' angolo OKG = OMH; ma OMH è per costruzione un angolo retto, dunque anche l' angolo OKG è retto, quindi le due rette AB, CD, come perpendicolari alla medesima KM, sono parallele.

Sia ora BGH = GHC.

Cadendo HG sopra di AB, la somma degli angoli conseguenti AGH + HGB = 2R, similmente cadendo GH sopra CD la somma degli angoli conseguenti GHC + GHD = 2R, dunque AGH + HGB = GHC + GHD, togliendo da ambi li membri di questa eguaglianza gli angoli BGH, GHC, che per ipotesi sono eguali, avremo AGH = GHD, ma abbiamo dimostrato, che qualora questi angoli sono eguali, le rette sono parallele, dunque AB, CD sono parallele. Sicchè.

2. Sieno eguali gli angoli alterni esterni EGB, CHF, dico che AB è parallela a CD.

Dim. L' angolo EGB è eguale al suo verticale AGH, e l' angolo CHF è eguale al suo verticale GHD, ma per la ipotesi EGB = CHF, dunque anche AGH = GHD, ma questi sono gli angoli alterni interni, dunque AB, CD sono parallele. Sicchè ec.

3. Siano eguali gli angoli correspondenti EGB, GHD. Dico che AB, CD sono parallele.

Dim. Per la ipotesi EGB = GHD, ma EGB è anche eguale al suo verticale AGH, dunque AGH = GHD, ma questi sono gli angoli alterni interni, dunque AB, CD sono parallele. Sicchè ec.

4. Sia la somma BGH + GHD degli angoli interni posti dalla medesima parte eguale a due angoli retti, dico che AB, CD sono parallele.

Dim. Per la ipotesi BGH + GHD = 2R, ma cadendo HG sopra di AB, anche AGH + BGH = 2R, dunque BGH + GHD = AGH + BGH, toltone il comune angolo BGH, resterà AGH = GHD, e perciò AB, CD sono parallele Sicchè ec.

5. Sia la somma EGB + DHF degli angoli esterni dalla medesima parte eguale a due

angoli retti, dico che AB, CD sono parallele.

Dim. Per la ipotesi la somma EGB + DHF degli angoli esterni posti dalla medesima parte è eguale a due retti, ma cadendo DH sopra EF, anche GHD + DHF = 2R, dunque EGB + DHF = GHD + DHF, toltone il comune angolo DHF, resterà EGB = GHD; ma questi sono gli angoli correspondenti, dunque AB, CD sono parallele. sicchè ec.

65. Cor. Essendosi dimostrato, che quando due rette sono parallelle gli angoli interni posti dalla medesima parte presi insieme sono eguali a due retti, e che qualora due rette esistenti nello stesso piano tagliate da una altra retta formano gli angoli interni posti dalla medesima parte eguali a due retti, esse sono parallelle, ne segue, che quelle rette le quali non hanno questa proprietà non possono essere parallelle; dal che ricaviamo, che quelle rette le quali sono perpendicolari respettivamente a due altre rette, le quali si incontrano, non possono essere parallele, e che sufficientemente prolungate debbono incontrarsi. In fatti (Fig. 24) Se sopra delle rette AB, CB, che si incontrano nel punto B, siano tirate le due perpendicolari DF, EG, tirando tra esse la secante DE, la somma FDE + DEG degli angoli interni posti dalla medesima parte è minore delli due angoli retti FDB, BEG, quindi esse debbono incontrarsi dalla parte medesima, dalla quale la somma delli due angoli FDE, DEG è minore di due angoli retti.

66. Teor. 4. *Le rette parallele ad una terza sono parallele fra esse.*

(Fig. 25) Alla medesima EF sieno parallele le due rette AB, CD; Dico che AB, CD sono anche fra esse parallele.

Dim. Si tiri una secante GI, la quale incontri AB, CD, EF nelli punti G, H, I,

A cagione delle parallele AB, EF, gli angoli alterni interni AGH, HIF sono eguali. A cagione delle due altre parallele CD, EF gli angoli correspondenti GHD, HIF sono anche eguali, quindi AGH, GHD, come eguali al medesimo angolo HIF, sono eguali, e perciò le due rette AB, CD tagliate dalla secante GI formano con essa gli angoli alterni interni eguali, dunque esse sono parallele. sicchè ec.

67. Teor. 5. *Le parti di parallele comprese fra parallele sono eguali.*

(Fig. 26) Sieno AB, CD parallele, come ancora siano parallele EF, GH. Dico che KL = MN, e che KM = LN.

Dim. si tiri KN.

Poicchè le parallele KM, LN sono tagliate dalla KN, gli angoli alterni interni MKN, KNL sono eguali; Similmente le parallele KL, MN tagliate dalla medesima KN, danno gli angoli alterni interni LKN, KNM anche fra loro eguali; quindi li due trangoli KMN, KLN, hanno li due angoli MKN, MNK respettivamente eguali alli due angoli KNL, LKN, ed il lato KN adjacente a questi angoli comune, dunque essi avranno le altre parti respettivamente eguali, e perciò sarà KL = MN, e KM = LN. Sicchè ec.

68. Teor. 6. *Se due rette sono eguali, e parallele, quelle rette, che uniscono dalla medesima parte gli estremi di esse, sono ancora eguali, e parallele.*

(Fig. 27.) Siano le rette AB, CD eguali e parallele, e gli estremi di esse sieno uniti dalla medesima parte dalle rette AC, BD; Dico che AC = BD, e che AC è parallela a BD.

Dim. Dal punto A al punto D si tiri la retta AD.

Nelli due triangoli BAD, ADC, per la ipotesi, AB = CD, AD è ad essi comune, e l' angolo BAD = ADC, come alterni interni delle parallele AB, CD tagliate da AD, dunque essi avranno tutte le altre parti respettivamente eguali; e perciò AC = BD, e l' angolo BDA = DAC, ma questi sono alterni interni fatti dalle rette AC, BD con la secante AD, dunque esse sono parallele, si sono dimostrate eguali, dunque sono eguali, e parallele, sicchè.

69. Teor. 7. *Due rette parallele sono da per tutto ad eguali distanze.*

(Fig. 28.) Sieno le due rette AB, CD parallele, e dalli punti E, G, K etc. presi ad arbitrio nella retta AB siano calate sopra CD le perpendicolari EF, GH, KL etc., queste rette essendo perpendicolari ad una delle parallele CD saranno ancora perpendicolari all' altra AB, e perciò indicano le distanze, che le parallele hanno fra esse. Dico, che esse sono tutte eguali.

Dim. Le rette EF, GH, KL, essendo tutte perpendicolari alla retta CD, sono fra esse parallele, ma ancora AB, CD sono parallele, dunque EF, GH, KL etc, sono porzioni di parallele comprese fra parallele, e perciò sono eguali, dunque le rette parallele sono da per tutto ad eguali distanze.

70 Teor. 8. *Gli angoli, li quali hanno i lati respettivamente paralleli, e le aperture rivolte dalla medesima parte, sono eguali.*

(Fig. 29.) Li due angoli ABC, DEF abbiano i lati AB, BC respettivamente paralleli alli lati DE, EF, e le aperture rivolte alla medesima parte; dico che essi sono eguali.

Dim. Per ipotesi le rette AB, DE sono parallele, esse vengono tagliate da EF, dunque gli angoli correspondenti AHF, DEF sono eguali; similmente per le parallele EF, BC tagliate da AB, gli angoli correspondenti AHF, ABC sono anche eguali, dunque li due angoli DEF, ABC sono eguali al medesimo angolo AHF, e perciò sono eguali. Sicchè ec.

71 Prob. 1. *Data una retta, ed un punto fuori di essa; tirare per lo punto dato una retta, che sia parallela alla retta data.*

(Fig. 30). Sia data la retta AB, e fuori di essa sia dato il punto C, si vuole per lo punto C tirare una retta, che sia parallela ad AB.

Sol. Si prenda in AB ad arbitrio il punto F, e si unisca CF, indi nel punto C della retta CF si faccia l' angolo DCF = CFB, e si prolunghi DC verso E. Dico che DE è la parallela dimandata.

Dim. Le rette AB, DE esistenti nello stesso piano vengono tagliate da CF, e formano gli angoli alterni interni DCF, CFB, li quali per costruzione sono eguali, dunque esse sono parallele, e perciò per lo punto C preso fuori di AB si è tirata ad AB la parallela DE.

72 Prob. 2. *Da un punto dato fuori di una retta, tirare un altra retta, che faccia con la data un angolo eguale ad un angolo dato.*

(Fig. 31). Dato il punto C fuori di AB, e dato l' angolo O, si vuole tirare per lo punto C una retta, che faccia con la data AB un angolo eguale all' angolo dato O.

Sol. Si prenda in AB un punto A ad arbitrio, ed in esso si faccia l' angolo EAB eguale all' angolo O, indi per lo punto C si tiri la CD parallela ad AE. Dico, che CD è la retta dimandata.

Dim. Per le parallele EA, CD tagliate da AB, l' angolo CDB è eguale al suo corrispondente EAB, ma per costruzione EAB = O, Dunque anche CDB = O. Sicchè ec.

CAP. VII

Teoria delle rette proporzionali.

73. Teor. I. *Se due rette sono comunque situate sopra di un piano, ed in una di esse si prenda qualunque numero di parti eguali, e dagli estremi di queste parti si tirino delle parallele, le quali vadano ad incontrare l' altra retta, queste parallele taglieranno l' altra retta in un eguale numero di parti, e queste parti saranno tutte eguali.*

(Fig. 32) Siano le due rette AB, CD comunque situate sopra di un piano, e nella AB siano prese le porzioni EG, GI, IL fra loro eguali, e dalli punti E, G, I, L siano tirate le parallele EF, GH, IK, LM, le quali incontrano la CD nelli punti F, H, K, M, è evidente, che queste tagliano sopra di CD un eguale numero di parti FH, HK, KM. Dico che queste parti sono tutte eguali.

Dim. Per gli punti F, H, K, si tirino le rette FN, HO, KP tutte paralle ad AB, e per conseguenza parallele fra esse; avremo FN=EG, HO=GI, KP = IL, poicchè esse sono parti di parallele comprese tra parallele, ma per la ipotesi EG, GI, IL sono eguali, dunque anche FN, HO, KP sono eguali. In oltre per le parallele FN, HO, KP tagliate da DC, gli angoli correspondenti PKM, OHK, NFH sono eguali, e gli angoli FNH, HOK, KPM, sono anche eguali, poicchè hanno i lati paralleli, e le aperture rivolte alla medesima parte, quindi li triangoli FNH, HOK, KPM *hanno* due angoli dell'uno respettivamente eguali a due angoli di ciascuno degli altri, ed i lati adiacenti a si fatti angoli eguali, anche eguali, dunque essi avranno tutte le altre parti respettivamente eguali, e perciò FH=HK= KM. Sicchè ec.

74 Teor. 2. *Se due rette comunque situate sopra di un piano sono tagliate da tre rette parallele, le parti di una di esse sono proporzionali alle parti dell' altra.*

(Fig. 33) Le rette AB, CD comunque situate sopra di un piano siano tagliate dalle tre parallele EF, GH, KL; Dico, che KE : EG :: LF : FH.

Possono darsi due casi 1. Che EK, EG siano commensurabili 2. Che EK, EG siano incommensurabili.

Dim. 1. Essendo EK, EG commensurabili, esse avranno una comune misura; supponiamo, che questa comune misura sia MK; si concepiscano EK, EG divise in parti tutte eguali ad MK, e supponiamo, che il numero delle volte, che MK si contiene in EK sia disegnato da m, e quello delle volte che essa si contiene in EG sia espresso da n. Indi se per tutti li punti di divisione si concepiscano tirate delle paralele a KL, come è MN, queste parallele divideranno le FL, FH respettivamente in m, ed n parti tutte eguali ad NL; Quindi EK, EG saranno espresse respettivamente da MK×m, MK×n, e perciò avremo EK : EG : : MK×m : MK×n : : m : n. Similmente FL sarà espressa da NL×m, ed FH da NL×n, e perciò avremo FL : FH : . NL×m : NL×n : : m ; n ; e poichè alla medesima ragione di m : n è eguale si la ragione di EK : EG, che quella FL : FH, avremo EK : EG : : FL . FH. Sicchè ec.

(Fig. 34) Dim. 2. Siano EK, EG incommensurabili.

Nel paragonare le parti, in cui le parallele EF, GH, KL tagliano le rette EK, FL, deve avere luogo una delle tre proporzioni.

EK : EG : : FL ad una retta maggiore di FH, per esempio FP.

EK : EG :: FL ad una retta minore di FH, per esempio FQ.

EK : EG : . FL : FH.

Quindi se dimostriamo, che le due prime sono assurde, conchiuderemo essere vera la terza, cioè che EK : EG : : FL : FH.

Supponiamo in primo luogo, che si abbia la proporzione EK : EG : : FL : FP ;

Noi possiamo concepire la retta EK divisa in parti eguali, e tanto piccole quanto a noi piacerà, quindi possiamo considerarla divisa in parti tanto piccole, che se per li punti di divisione si tirassero le parallele ad EF, almeno una di esse incontrasse FL in un punto R esistente nella parte HP, sia per esempio SR questa parallela, in questo caso EK ed ES sono commensurabili, e perciò avremo EK :

ES :: FL : FR, ma per la supposizione avevamo EK : EG :: FL : FP, dunque avremo due proporzioni, le quali hanno li medesimi antecedenti, e perciò li conseguenti formeranno una proporzione, cioè avremo ES : EG :: FR : FP, proporzione evidentemente assurda, poichè il primo antecedente ES è maggiore del suo conseguente EG, nel mentre il secondo antecedente FR è minore del suo conseguente FP, dunque è anche assurda la proporzione EK : EG :: FL ad una retta maggiore di FH.

Supponiamo in secondo luogo, che si abbia la proporzione EK : EG :: FL : FQ.

Noi possiamo concepire la retta EK divisa in parti eguali, e tanto piccole quanto a noi piacerà, quindi possiamo concepirla divisa in parti tali, che se per li punti delle divisioni si concepiscano tirate delle parallele ad EF, almeno una di esse incontri la LF in un punto esistente tra Q ed H, e sia per esempio la retta UT, in questo caso EK, EU sono commensurabili, ed avremo la proporzione EK : EV :: FL : FT, ma avevamo per la supposizione EK : EG :: FL : FQ; dunque avremo due proporzioni, nelle quali vi sono li medesimi antecedenti, e perciò con li conseguenti formeremo la proporzione EU: EG:: FT: FQ, proporzione anche assurda, poichè il primo antecedente EV è minore del suo conseguente EG, nel mentre che il secondo antecedente FT è maggiore del suo consequente FQ;

Dunque è anche assurda la proporzione EK : EG :: FL ad una retta minore di FH.

Quindi delle tre proporzioni da noi supposte non potendo essere ammesse le due prime, dovrà aver luogo la terza, ed avremo EK : EG : : FL : FH. Sicchè ec.

75 Cor. 1. Argomentando sopra la proporzione trovata EK : EG :: FL : FH potremo ricavarne molte altre proporzioni come KG : EG :: LH : HF, dalla quale invertendo ricaveremo EG : GK :: HF : HL, e da questa EK : KG :: FL : LH etc.

76 Cor. 2. Supponiamo, che dal punto F sia tirata la retta FY parallela ad EK, che incontra GH, KL nelli punti X, Y; saranno FY, FX respettivamente eguali ad EK, EG, come parti di parallele comprese tra parallele, Quindi se nella proporzione EK : EG :: FL : FH sostituiamo in vece di EK, EG le rette FY, FX, che sono ad esse respettivamente eguali, avremo FY : FX : : FL : FH. Dunque se in un triangolo sia tirata una retta parallela ad uno de'lati, essa divide gli altri due lati in parti proporzionali.

77. Cor. 3. (Fig. 35.) Reciprocamente, se nel triangolo ABC è tirata la retta DE, la quale divida li due lati BA, BC del triangolo ABC in parti proporzionali, deve la DE essere parallela al terzo lato AC. In fatti se si niega, che DE sia parallela ad AC; si potrà per lo punto D tirare una altra retta, per esempio DF, che sia parallela ad AC. Per quel-

lo, che abbiamo dimostrato, essendo DF parallela ad AC, avremo la proporzione BA: BD :: BC : BF, ma per la ipotesi AB : BD :: BC : BE, dunque queste due proporzioni avendo li medesimi tre primi termini, dovranno avere gli ultimi termini eguali, e perciò dovrà essere BE = BF, cioè la parte eguale al tutto, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che DE non sia ad AC parallela, e perciò DE è parallela ad AC; Sicchè se in un triangolo è tirata una retta, la quale divide due lati di esso in parti proporzionali, essa è parallela al terzo lato.

78. Prob. 1. *Data una retta terminata dividerla in qualsivoglia numero di parti eguali.*

(Fig. 36.) Proponiamoci di dividere la retta terminata AB in qualunque numero di parti eguali, per esempio in quattro parti eguali.

Sol. Dal punto A si tiri una retta indefinita AC, e da essa si tagli una porzione AD ad arbitrio, indi da DC si taglino DE, EF, FG eguali ad AD; di poi dal punto G al punto B si tiri la retta GB, finalmente per gli punti D, E, F si tirino le DH, EK, FL parallele a GB, che incontrano AB nelli punti H, K, L, è evidente, che AB è divisa in quattro parti, dico che esse sono eguali.

Dim. Delle due rette AG, AB una AG è divisa in parti eguali, e per gli punti delle divisioni sono tirate delle rette parallele, le quali incontrano l' altra AB, dunque, per le verità dimostrate, esse dividono AB in altrettante parti anche fra loro eguali, dunque AB è divisa in quattro parti eguali. Sicchè ec.

79. Prob. 2. *Date tre rette trovare ad esse la quarta proporzionale.*

(Fig. 37.) Siano date le tre rette L, M, N, vogliamo trovare una altra retta tale, che sia L : M : : N: alla retta dimandata.

Sol. Si tirino ad arbitrio le due rette AB, AC, che si uniscano nel punto A; indi si taglino AD = L, AE = M, DF = N, e si unisca DE, finalmente per lo punto F si tiri FG parallela a DE, che incontra AB nel punto G; dico che EG è la quarta proporzionale dimandata, cioè che avremo la proporzione L: M : : N : EG.

Dim. Nel triangolo FAG è tirata la retta DE parallela ad FG, dunque essa divide gli altri due lati in parti proporzionali, e perciò avremo AD : AE : : DF : EG, ma per costruzione AD = L, AE = M, DF = N; dunque sostituendo avremo L : M : : N : EG. Sicchè ec.

80. Avv. Qui giova avvertire, che se M = N, allora taglieremo AD = L, AE = M, DF = M, ed eseguiremo il resto della costruzione precedente, ed avremo la proporzione L : M :: M:: EG, ed avremo così trovata la terza proporzionale a due rette date.

CAP. VIII.

Proprietà de' Triangoli.

81. Teor. 1. *La somma di tutti gli angoli di qualunque triangolo è sempre eguale a due angoli retti.*

(Fig. 38.) Rappresenti ABC un triangolo qualunque, dico che la somma delli suoi tre angoli è eguale a due angoli retti.

Dim. Per lo vertice B dell' angolo ABC si tiri la retta DE parallela ad AC.

Le parallele DE, AC, venendo tagliate dalla secante AB, formeranno con AB gli angoli alterni interni DBA, BAC eguali, per la stessa ragione le parallele medesime DE, AC formano con la secante BC gli angoli alterni interni EBC, BCA anche eguali, quindi avremo DBA + EBC = BAC + BCA ; si aggiunga a queste somme eguali l' angolo ABC di comune, avremo BAC + BCA + ABC = DBA + ABC + CBE, ma la somma degli angoli fatti attorno ad un punto dalla medesima parte di una retta è eguale a due retti, dunque DBA + ABC + CBE = 2R, e per conseguenza anche la somma BAC + ACB, + CBA delli tre angoli del triangolo ABC è eguale a due angoli retti. Sicchè ec.

82. Cor. 1. Se nel triangolo ABC, un lato, per esempio AC, si prolunghi verso G, avremo la somma degli angoli adiacenti BCA + BCG = 2R, ma la somma delli tre angoli

BAC + ACB + ABC del triangolo ABC è anche eguale a due retti, dunque avremo BCA + BCG = BAC + BCA + ABC, e togliendo da queste somme eguali il comune angolo BCA, avremo l' angolo esterno BCG eguale alla somma BAC + ABC degli angoli interni ad esso opposti. Sicchè se in un triangolo si prolunghi un lato, l' angolo esterno è eguale alla somma delli due interni ad esso opposti.

83 Cor. 2. Quindi la somma di due angoli di un triangolo è sempre minore di due retti, e l' angolo esterno è sempre maggiore di ciascuno delli suoi interni opposti.

(Fig.ª 39.) Cor. 3. Se dal punto A si tiri a qualunque punto D del lato BC del triangolo ABC la retta AD, avremo, che nel triangolo ABD, il lato BD essendo prolungato verso C, l' angolo esterno ADC è maggiore del suo interno opposto ABC, e se in AD si prende un punto E, e si tiri all'altro estremo del lato AC la retta EC, avremo l' angolo AEC esterno del triangolo EDC maggiore del suo interno opposto EDC, ma EDC si è dimostrato maggiore di ABC, dunque l' angolo AEC è anche maggiore di ABC; dunque se da un punto preso dentro di un triangolo si tirino agli estremi di uno delli suoi lati due rette, queste rette comprendono un angolo maggiore dell' angolo compreso dagli altri due lati del triangolo; ma noi abbiamo altrove dimostrato, che la somma di queste due rette interne AE + EC è minore della somma AB + BC degli altri due lati del triangolo, quindi conchiudiamo generalmente, che se da un punto preso dentro di un triangolo si tirino agli estremi di uno de' lati di esso due rette, la somma delle due rette interne è minore della somma degli altri due lati del triangolo, e l' angolo, che esse comprendono è maggiore dell' angolo, che comprendono gli altri due lati del triangolo.

84. Cor. 4. Essendo la somma de' tre angoli di qualunque triangolo sempre eguale a due retti, ne segue, che se due triangoli hanno due angoli dell' uno eguali a due angoli dell' altro, sarà anche il terzo angolo dell' uno eguale al terzo angolo dell'altro, ed essi saranno equiangoli.

85. Cor. 5. Due triangoli, li quali hanno due angoli dell' uno eguali respettivamente a due angoli dell' altro; e due lati opposti a due angoli eguali anche eguali, debbono essere eguali, giacchè avendo essi due angoli dell' uno eguali a due angoli dell'altro, debbono avere anche gli angoli rimanenti eguali, ed allora li lati eguali si trovano adiacenti ad angoli eguali, nel quale caso abbiamo dimostrato, che li triangoli sono eguali.

86. Cor. 6. Qualora sono dati due angoli di un triangolo, o anche soltanto la somma di essi, si conoscerà il terzo, sottraendo la somma di essi dalla somma di due angoli retti

87. Cor. 7. In un triangolo può esservi un

solo angolo retto, e gli altri due debbono essere acuti, poichè presi insieme debbono eguagliare un altro angolo retto; e se un triangolo ha un angolo ottuso, a più forte ragione gli altri due debbono essere anche acuti, poicchè presi insieme debbono essere minori di un angolo retto; dal che conchiudiamo, che in ogni triangolo sempre due angoli sono acuti, il terzo angolo potendo essere retto, ottuso, o ancora esso acuto, quindi si è chiamato *triangolo rettangolo* quello, che ha un angolo retto, *Ottusangolo* quello, che ha un'angolo ottuso, ed *acutangolo* quello, in cui tutti gli angoli sono acuti. Nel triangolo rettangolo, il lato opposto all'angolo retto si chiama *Ipotenusa*, ed i lati, che comprendono l'angolo retto, si chiamano *Cateti*.

88. Teor. 2. *Qualora in un triangolo due lati sono eguali, anche gli angoli opposti a tali lati sono eguali.*

(Fig. 40.) Rappresenti ABC un triangolo, nel quale il lato AB sia eguale al lato BC. Dico che gli angoli BAC, BCA ad essi opposti sono ancora eguali.

Dim. Si divida il lato AC in due parti eguali nel punto D, e si unisca BD.

Nelli due triangoli BAD, BCD, il lato AB = BC, per la ipotesi, il lato AD = DC, per costruzione, ed il lato BD è ad essi comune, dunque il triangolo BAD = BCD, e perciò l'angolo BAD = BCD. Sicchè etc.

89. Cor. Noi abbiamo dimostrato, che il

triangolo ABD = BCD, quindi sarà l' angolo ABD = DBC, e l' angolo ADB = BDC, e perciò la retta BD è perpendicolare ad AC, e divide l' angolo ABC in due parti eguali. Quindi se in un triangolo, che ha due lati eguali, si divide il terzo lato in due parti eguali, e si unisce il punto di divisione col vertice dell' angolo opposto, questa retta sarà perpendicolare a questo lato, e dividerà l' angolo ad esso opposto in due parti eguali.

90 Teor. 3. *Se in un triangolo un lato è maggiore di un altro, anche l' angolo opposto al lato maggiore è maggiore dell' angolo opposto al lato minore.*

(Fig. 41.) Nel triangolo ABC sia il lato AC maggiore del lato CB, dico che l' angolo CBA opposto al lato maggiore AC è maggiore dell' angolo CAB opposto al lato minore CB.

Dim. Si divida il lato AB in due parti eguali nel punto D; e da questo punto D si elevi sopra di AB la perpendicolare DE, la quale incontra AC nel punto F, e si unisca FB.

Le oblique AF, FB, che incontrano AB nelli punti A, B egualmente distanti dal piede D della perpendicolare ED, sono eguali, quindi nel triangolo AFB, essendo eguali li due lati FA, FB, anche gli angoli FAB, FBA ad essi opposti sono eguali, ma l' angolo CBA è maggiore della sua parte FBA, dunque CBA è anche maggiore di CAB. Sicchè ec.

91. Teor. 4. *Se in un triangolo due an-*

goli sono eguali, anche li lati opposti ad essi sono eguali.

(Fig. 40) Nel triangolo ABC siano eguali li due angoli BAC, BCA, dico che li lati AB, BC ad essi opposti sono ancora eguali.

Dim. Se si nieghi essere AB = BC, sarà AB maggiore, o minore di BC, supponendo AB > BC, dovrebbe essere l' angolo BCA > BAC, e supponendo AB < BC, dovrebbe essere l' angolo BCA < BAC, ma queste due cose ripugnano alla ipotesi, dunque AB = BC. Sicchè ec.

91. Teor. 5. *Se in un triangolo un angolo è maggiore di un altro, anche il lato opposto all' angolo maggiore è maggiore del lato opposto all' angolo minore.*

(Fig. 41) Nel triangolo ABC sia l' angolo ABC > CAB. Dico che il lato AC opposto all' angolo maggiore è maggiore del lato CB opposto all' angolo minore.

Dim. Se si niega essere AC > CB, sarà AC eguale, o minore di BC, se si suppone AC = CB, deve essere anche l' angolo BAC = CBA, il che ripugna alla ipotesi, se si suppone AC < CB, l' angolo CBA deve essere minore dell' angolo BAC, il che è anche contro la ipotesi, dunque AC è maggiore di CB. Sicchè ec.

93. Cor. Quindi è evidente, che il triangolo, che ha li suoi tre lati eguali, deve avere ancora li tre angoli eguali, ed il triangolo, che ha li tre angoli eguali, deve ancora avere li tre lati eguali.

94. Avv. Il triangolo, che ha tutti e tre li suoi lati eguali si dice *equilatero*, e poichè in tale caso li tre angoli sono anche eguali, si può chiamare anche *equiangolo*; il triangolo, che ha due soli lati eguali, si chiama *isoscele*; e quello, che ha tutti tre li lati diseguali, si chiama *scaleno*.

95. Teor. 6. *La retta, che divide l' angolo di un triangolo in due parti eguali, divide il lato opposto a quest' angolo in parti proporzionali agli altri due lati.*

(Fig. 42.) Rappresenti ABC qualunque triangolo, nel quale sia diviso l' angolo ABC in due parti eguali per mezzo della retta BD; Dico, che BD dividerà il lato AC in parti proporzionali alli due lati AB e BC, cioè che avremo la proporzione AD : DC : : AB : BC.

Dim. Per lo punto C si tiri la retta CE parallela a BD, la quale si prolunghi fino a tanto, che incontri AB prolungata nel punto E.

A cagione delle parallele BD, EC tagliate dalla secante AE, gli angoli correspondenti ABD, BEC sono eguali, dippiù per le medesime parallele BD, EC tagliate dalla secante BC, gli angoli alterni interni DBC, BCE sono anche eguali, ma per ipotesi gli angoli ABD, DBC sono eguali, dunque anche BEC = BCE, e perciò il triangolo EBC, avendo due angoli eguali, avrà li lati BE, BC ad essi opposti anche eguali. In oltre nel triangolo EAC si è tirata la retta BD parallela al lato EC, quindi essa divide gli altri due lati in parti proporzionali, ed avremo AD : DC : : AB : BE, ma BE = BC, dunque sostituendo, avremo AD : DC : : AB : BC. Sicche ec.

96. Teor. 7. *Se dal vertice di un angolo di un triangolo si tiri sul lato ad esso opposto una retta, la quale lo divida in parti proporzionali agli altri due lati, essa dividerà l' angolo in due parti eguali.*

(Fig. 42.) Dim. Dal vertice B dell' angolo ABC del triangolo ABC sia tirata sopra del lato AC la retta BD, la quale divida questo lato nelle parti AD, DC proporzionali alli lati AB, BC; dico che l' angolo ABD = DBC.

Dim Per lo punto C si tiri la retta CE parallela a BD, la quale si prolunghi fino a tanto che incotri AB prolungata nel punto E.

Per la ipotesi AD : DC : : AB : BC : ma nel triangolo ACE essendosi tirata BD parallela ad EC, si ha la proporzione AD : DC :: AB : BE, dunque BC = BE; Quindi nel triangolo EBC, essendo li due lati BE, BC eguali, saranno eguali anche gli angoli BCE, BEC; ma per le parallele BD, EC tagliate dalla BC, gli angoli alterni interni DBC, BCE, sono eguali, e per le medesime parallele tagliate dalla secante AE, gli angoli corrispondenti ABD, BEC sono anche eguali, dunque anche ABD = DBC. Sicche ec.

97. Prob. 1. *Date tre rette tali, che ciascuna di esse sia minore della somma delle*

altre due, costruire un triangolo, il quale abbia li suoi lati respettivamente eguali alle tre rette date.

(Fig. 43.) Sieno date le tre rette L, M, N, tali che ciascuna di esse sia minore della somma delle altre due, proponiamoci di descrivere un triangolo, il quale abbia li suoi lati respettivamente eguali alle tre rette date L, M, N.

Sol. Si tiri ad arbitrio la retta AB terminata in A, ed indeterminata in B, e da essa si taglino AC = L, CD = M, DE = N; indi si prenda per centro il punto C con lo intervallo CA, e si descriva il cerchio AFH, similmente si prenda per centro D con lo intervallo DE, e si descriva l' altro cerchio EFG, questi due cerchi con le loro circonferenze si tagliano nel punto F; finalmente dal punto F alli punti C, D si tirino le rette FC, FD, Dico che il triangolo CFD è il triangolo dimandato.

Dim. Per la costruzione il punto C è centro del cerchio AFH, dunque li raggi CA, CF sono eguali, ma AC = L, dunque anche CF = L. Similmente essendo D centro del cerchio EFG, li raggi DE, DF sono eguali, ma DE = N, dunque anche DF = N; finalmente CD si è tagliata eguale ad M, dunque il triangolo CFD ha il lato CF = L, il lato CD = M, ed il lato DF = N, e perciò, avendo li suoi tre lati respettivamente eguali alle tre rette date, è il triangolo dimandato. Sicchè ec.

98. Prob. 2. *Dato un triangolo descrivere un altro triangolo, che sia eguale al dato, impiegando nella sua costruzione due lati del triangolo dato, e l' angolo da tali lati compreso.*

(Fig. 44.) Sia dato il triangolo ABC, e proponiamoci di costruire un altro triangolo, il quale sia eguale ad ABC, impiegando nella costruzione di esso li due lati AB, AC, e l' angolo BAC da tali lati compreso.

Sol. Si tiri la retta DN, e da essa si tagli la porzione DE = AC, indi nel punto D della retta DE si faccia l'angolo MDE = BAC, e dal lato DM si tagli DF = AB, e si unisca FE. Dico che FDE è il triangolo dimandato.

Dim. Li due triangoli ABC, FDE hanno per costruzione gli angoli BAC, FDE eguali, compresi fra li due lati BA, AC dell' uno respettivamente eguali alli lati FD, DE dell' altro, quindi essi sono eguali. Sicchè ec.

99. Prob. 3. *Dato un triangolo, descrivere un altro triangolo eguale al dato, facendo uso nella sua costruzione di due de' suoi angoli, e del lato adiacente ad uno di essi.*

(Fig. 44.) Sia dato il triangolo ABC, e proponiamoci di costruire un altro triangolo eguale ad esso; adoperando nella costruzione li due angoli BAC, BCA, ed il lato AC adiacente ad essi.

Sol. Si tiri ad arbitrio la retta DN, e da essa si tagli la porzione DE = AC, indi nelli punti D, E della retta DE si formino l' angolo FDE = BAC, e l' angolo FED = BCA, e si prolunghino le rette DF, EF fino a tanto, che si incontrino nel punto F. Dico che il triangolo DEF è il triangolo dimandato.

Dim. Li triangoli ABC, DEF hanno per costruzione gli angoli BAC = FDE, BCA = FED, ed il lato AC adiacente alli due angoli del primo eguale al lato DE adiacente alli due angoli del secondo, dunque essi sono eguali. Sicchè ec.

100. Prob. 4. *Date due rette diseguali, e dato un angolo, costruire un triangolo, il quale abbia un lato eguale alla minore delle rette date, uno degli angoli adiacenti a questo lato eguale all' angolo dato, e la somma degli altri due lati eguale alla maggiore delle rette date,*

(Fig. 45.) Siano date le due P, M, delle quali P sia maggiore di M, e sia dato l' angolo O, proponiamoci di costruire un triangolo, che abbia un lato eguale ad M, uno degli angoli a si fatto lato adiacenti eguale all' angolo O, e la somma degli altri due lati eguale alla retta P.

Sol. Si tiri la retta BA = M, e nel punto B si faccia l' angolo ABR = O, indi dalla indefinita BR si tagli BE = P, e si unisca EA, di poi si divida EA in due parti eguali nel punto H, e da H si inalzi sopra di EA la perpendicolare HF, la quale si prolunghi fino a tanto, che incontri BE nel punto F; finalmente dal punto F al punto A si tiri la retta FA. Dico, che ABF è il triangolo dimandato.

Dim. Le rette FE, FA incontrano la retta EA nelli punti A, E egualmente distanti dal piede H della perpendicolare FH, dunque FE = FA, si aggiunga ad esse di comune BF, avremo BF + FE o sia BE = BF + FA, quindi il triangolo BFA ha per costruzione il lato BA = M, la somma BF + FA degli altri due lati eguale a BE, e perciò alla retta data P, e l' angolo FBA adiacente al lato BA eguale all' angolo dato O, dunque BFA è il triangolo dimandato.

C A P. IX.

Teoria delli triangoli simili.

101. Due triangoli si dicono *simili*, qualora hanno gli angoli dell' uno respettivamente eguali agli angoli dell' altro, ed hanno di più li lati opposti agli angoli eguali proporzionali, si dicono lati *omologhi* quelli, che nelli due triangoli sono opposti ad angoli eguali.

102. Teor. 1. *Se due triangoli hanno gli angoli dell' uno respettivamente eguali agli angoli dell' altro, debbono avere ancora li lati omologhi proporzionali, e perciò sono simili.*

(Fig. 46.) Abbiano li due triangoli ABC, DEF gli angoli respettivamente eguali. Dico, che essi sono simili.

Dim. Si taglino da AB la porzione BL = ED, e da BC la porzione BM = EF; e si unisca LM.

Li due triangoli LBM, DEF hanno, per ipotesi, l' angolo LBM = DEF, e per costruzione li due lati LB, BM respettivemente eguali alli due lati DE, EF, dunque essi sono eguali, e perciò sarà LM = DF, e l' angolo BLM = EDF; ma l' angolo EDF = BAC, per la ipotesi, dunque BLM = BAC, e per conseguenza le rette LM, AC tagliate da BA formano gli angoli correspondenti eguali, e perciò sono parallele, ma la parallela ad un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali, dunque AB : BL :: BC : BM; sostituendo in vece di BL, BM li lati ED, EF, avremo AB : DE :: BC : EF; resta ora a dimostrare, che BC : EF :: AC : DF.

Per lo punto M si tiri MN parallela ad AB, sarà AN = LM, come parti di parallele comprese tra parallele, ma LM = DF, dunque AN = DF; in oltre essendosi nel triangolo BCA tirata MN parallela al lato AB, essa divide gli altri due lati BC, CA in parti proporzionali, e perciò avremo BC : BM :: CA : AN, e sostituendo a BM, AN le EF, DF, avremo BC : EF :: AC : DF. Sicchè ec.

103. Cor. 1. Noi abbiamo dimostrato, che

quando due triangoli hanno due angoli dell' uno respettivamente eguali à due angoli dell' altro, debbono avere li rimanenti angoli eguali, quindi conchiudiamo, che qualora due triangoli hanno due angoli dell' uno respettivamente eguali a due angoli dell' altro, essi sono simili.

204. Cor. 2. (Fig. 47.) Rappresenti ABC un triangolo qualunque, e sia tirata una retta parallela ad AC, la quale incontri li lati AB, BC, come DE, o li prolungamenti di essi, come FG, è chiaro, che sì il triangolo DBE, che il triangolo FBG sarà simile al triangolo ABC. In fatti a cagione di DE parallela ad AC gli angoli correspondenti BDE, BAC sono eguali, l' angolo ABC è comune alli due triangoli ABC, DBE, dunque questi due triangoli avendo due angoli dell' uno respettivamente eguali a due angoli dell' altro sono simili; Consideriamo ora li due triangoli ABC, FBG, essi hanno gli angoli verticali ABC, FBG eguali, e gli angoli GFB, BCA anche eguali, come alterni interni delle parallele AC, FG tagliate dalla secante FC, e perció avendo due angoli dell' uno respettivamente eguali a due angoli dell' altro, sono simili.

105. Teor. 2. *Li triangoli, li quali hanno li tre lati dell' uno proporzionali alli tre lati dell' altro, sono simili.*

(Fig. 46.) Li triangoli ABC, DEF abbiano li lati proporzionali, cioè sia AB : DE ::

BC : EF : . AC : DF. Dico che essi sono equiangoli, e perció simili.

Dim. Da BA si tagli BL = DE, e per lo punto L si tiri LM parallela ad AC.

Poichè nel triangolo ABC si è tirata la retta LM parallela al lato AC, il triangolo LBM è simile ad ABC; e perciò abbiamo la proporzione AB : BL : : BC : BM, ma per ipotesi abbiamo la proporzione AB : ED : : BC : EF; e per costruzione BL è eguale ED, dunque, avendo queste due proporzioni li tre primi termini dell' una eguali alli tre primi termini dell' altra, avranno gli ultimi termini anche eguali, e perciò BM = EF; dippiù per la simiglianza delli medesimi triangoli ABC, LBM abbiamo la proporzione BC : BM : : AC : LM, ma per ipotesi abbiamo BC : EF : : AC : DF, ed abbiamo dimostrato BM = EF; dunque le due proporzioni trovate, avendo li tre primi termini dell' una respettivamente eguali alli tre primi termini dell' altra, avranno gli ultimi termini eguali, e perciò LM = DF; quindi li due triangoli BLM, EDF, avendo li tre lati dell' uno respettivamente eguali alli tre lati dell' altro, sono eguali, quindi essendo ABC simile ad LBM, sarà ancora simile a DEF. Sicchè ec.

106. Teor. 3. *Se due triangoli hanno due lati dell' uno proporzionali a due lati dell' altro, e l' angolo compreso fra li due lati del primo eguale all' angolo compreso fra li due lati dell' altro, essi sono simili.*

Abbiano li due triangoli ABC, DEF l'angolo ABC = DEF, e sia AB : DE : : BC : EF; dico che il triangolo ABC è simile al triangolo DEF.

Dim. Si taglino da BA la porzione BL = ED, e da BC la porzione BM = EF; e si unisca LM. Li due triangoli LBM, DEF sono eguali, poichè hanno due angoli eguali compresi fra lati respettivamente eguali. Di più per la ipotesi abbiamo AB : DE : : BC : EF, ma sostituendo BL, BM in vece di DE, EF, avremo AB : BL : : BC : BM, e perciò la retta LM, dividendo li due lati AB, BC in parti proporzionali, è parallela ad AC, e per conseguenza il triangolo ABC è simile al triangolo LBM, ma il triangolo LBM è eguale a DEF, dunque il triangolo ABC è simile anche al triangolo DEF. Sicchè ec.

107. Teor. 4. *Li triangoli, che hanno li lati dell' uno respettivamente paralleli alli lati dell' altro sono simili.*

Li due triangoli con li lati paralleli possono essere situati in due maniere, cioè direttamente come (fig. 46.), o in situazione rovesciata come (fig. 48.); Dico che in ambi li casi essi sono simili.

(Fig. 45.) Dim. 1. Li due triangoli ABC, DEF hanno evidentemente gli angoli respettivamente eguali, poichè essi hanno li lati paralleli, e le aperture rivolte dalla medesima parte, e perciò sono simili.

(Fig. 48.) *Abbiano li due triangoli* ABC, DEF *li lati paralleli* AB ad EF, AC a DF, BC a DE.

Dim. Si prolunghi DF fino a tanto, che incontri AB, BC nelli punti H, G.

Le parallele AB, FE venendo, tagliate dalla secante HF, formano gli angoli BHG, HFE alterni interni eguali, le parallele BC, DE tagliate dalla medesima secante HF formano gli angoli alterni esterni BGH, FDE anche eguali, quindi li due triangoli HBG, DEF, avendo due angoli dell' uno respettivamente eguali a due angoli dell'altro, sono simili. Inoltre essendo HG parallela ad AC, gli angoli correspondenti BHG, e BAC sono eguali, quindi li due triangoli BHG, BAC avendo l' angolo B comune, e l' angolo BHG = BAC sono anche simili, dunque li due triangoli BAC, DEF, come simili al medesimo triangolo BGH, sono anche simili. sicchè ec.

108. Teor. 5. *Se due triangoli hanno li tre lati dell' uno perpendicolari respettivamente alli tre lati dell' altro essi sono simili.*

(Fig. 49.) Li due triangoli ABC, EDF abbiano il lato EF perpendicolare ad AC, DE perpendicolare a BC, FD perpendicolare ad AB, dico che essi sono simili.

Dim. Dal punto A si inalzi sopra di AC la perpendicolare AL, la quale sarà parallela ad EF, la quale è alla medesima AC perpendicolare, indi dal medesimo punto A si indi la AM perpendicolare ad AB, la quale sarà parallela a DF, poicchè DF è alla medesima AB perpendicolare, quindi li due angoli MAL, DFE, avendo li lati paralleli, e le aperture rivolte dalla medesima parte, sono eguali; Dippiù gli angoli MAB, LAC sono retti, ma tutti gli angoli retti sono eguali, dunque MAB = LAC, toltone il comune LAB; resterà MAL=BAC, ma MAL = DFE, dunque BAC = DFE.

Similmente dal punto B si elevi BP perpendicolare a BC, e perciò parallela a DE, e BQ perpendicolare a BA, e perciò parallela a DF, noi avremo li due angoli PBQ, EDF, li quali avendo li lati respettivamente parallele, e le aperture rivolte alla medesima parte, sono eguali. Inoltre l' angolo retto CBP è eguale all' angolo retto ABQ, quindi tolta da essi la porzione comune QBC, resterà PBQ = ABC, ma PBQ = EDF, dunque ABC = EDF, e per conseguenza li due triangoli ABC, DEF, avendo due angoli dell' uno respettivamente eguali a due angoli dell' altro, sono simili. Sicchè ec.

109. Avv. Qui è buono di avvertire, che poichè nelli triangoli simili sono lati omologhi quelli, che si oppongono ad angoli eguali, nelli triangoli, che hanno li lati paralleli sono omologhi quelli lati, che sono paralleli, poichè essi sono quelli, che sono opposti ad angoli eguali, e nelli triangoli, che hanno li lati dell' uno perpendicolari alli lati dell'

altro sono *omologhi* què lati, che sono l' uno all' altro perpendicolari, giacchè essi sono quelli che si oppongono ad angoli eguali.

100. (Fig. 50.) Cor. Dal punto A sieno tirate quante rette si vogliono AB, AG, AK AC, ed esse vengano tagliate dalle due parallele BC, DE, ne segue che sono simili li triangoli ABG, ADF, come ancora AGK, AFH, ed AKC, AHE; Quindi avremo AB AD : : AG : AF : : AK : AH : : AC : AE,: dal che generalmente conchiudiamo, che se da un punto si tiri qualunque numero di rette, le quali vengono tagliate da due parallele, esse sono divise dalle parallele in parti proporzionali.

La simiglianza de' medesimi triangoli, ci dà la seguente serie di rapporti eguali, BG: DF : : AG : AF : : GK : FH : : AK . AH : : KC : HE, e sopprimendo li rappurti AG : AF, AK : AH, resteranno li rapporti eguali BG : DF : . GK : FH : : KC : HE, e generalmente conchiudiamo, che se da un punto si tiri qualunque numero di rette, le quali vengono tagliate da due parallele, queste parallele sono da tali rette tagliate in parti proporzionali.

111. Teor. 6. *Se dal vertice dell' angolo retto di un triangolo rettangolo si cala una perpendicolare sopra della ipotenusa, essa dividerà il triangolo in due altri triangoli, li quali saranno simili al triangolo intero, e perciò anche simili fra essi.*

(Fig. 51.) Sia il triangolo ABC rettangolo in B, e dal vertice B dell' angolo retto sia calata la perpendicolare BD sopra della ipotenusa AC, questa perpendicolare divide il triangolo ABC nelli due trangoli ADB, BDC anche rettangoli, dico che questi due triangoli ADB, BDC sono simili al triangolo ABC, e per conseguenza sono anche simili fra loro.

Dim. Li due triangoli ABC, ADB hanno gli angoli ABC, ADB eguali, poichè essi sono retti, hanno l' angolo in A comune, dunque avranno il terzo angolo BCA eguale al terzo angolo ABD, quindi essi sono equiangoli, e per conseguenza simili.

Similmente li due triangoli ABC, BCD hanno gli angoli ABC, BDC eguali come retti, l' angolo C comune, dunque avranno il terzo angolo BAC = DBC, e perciò essi sono equiangoli, e per conseguenza simili.

Finalmente abbiamo dimostrato, che al medesimo, ttiangolo ABC è simile sì il triangolo ADB, che il triangolo BDC, dunque li triangoli ABD, DBC sono anche simili. Sicchè ec.

112. Cor. 1. Paragonando li triangoli simili ABC, ABD, noi troviamo, che li lati omologhi ci danno la proporzione AC : AB : : AB : AD, paragonando gli altri due triangoli ABC; BCD, troviamo, che li lati omologhi danno l' altra proporzione AC : CB : : CB : CD; paragonando finalmente li due altri triangoli ADB, DBC, abbiamo la proporzione AD : DB : : DB : DC; quindi conchiu-

diamo generalmente, che se dal vertice di un triangolo rettangolo si cali una perpendicolare sopra della ipotenusa, sempre ciascheduno de' cateti è media proporzionale tra la ipotenusa intera, ed il seguento di essa, che è adiacente al medesimo cateto; e che la perpendicolare è media proporzionale fra li due segmenti della ipotenusa.

113. Cor. 2. Se li tre lati del triangolo rettangolo ABC sono espressi in numeri rapportati ad una medesima misura comune, il quadrato del numero, che esprime la ipotenusa è eguale alla somma de' quadrati de' numeri, che esprimono li due cateti.

In fatti la proporzione AC : AB : : AB : AD dà $AD = \frac{AB^2}{AC}$ e la proporzione AC: CB : : CB : CD dà $CD = \frac{CB^2}{AC}$

Ed addizionando queste due eguaglianze membro a membro, avremo

$$AD + CD \text{ o sia } AC = \frac{AB^2 + CB^2}{AC}, \text{ e}$$

multiplicando per AC, avremo

$$AC^2 = AB^2 + CB^2$$

Quindi qualora si conoscono li numeri, che esprimo li due cateti di un triangolo rettangolo, si può determinare il numero, che esprime la ipotenusa, così se per esempio, $AB = 3$, $BC = 4$, avremo $AC^2 = 9 + 16 = 25$, e perciò $AC = \sqrt{25} = 5$.

Similmente si può determinare uno delli cateti, quando si conoscono la ipotenusa, e l' altro cateto; poichè essendo $AC^2 = AB^2 + BC^2$, avremo $AC^2 - CB^2 = AB^2$; in fatti se sappiamo, che la ipotenusa $AC = 13$, ed il cateto $CB = 12$, avremo $AB^2 = 169 - 144 = 25$, ed $AB = \sqrt{25} = 5$; Dal che conchiudiamo generalmente, che qualora si conoscono li numeri esprimenti li due cateti di un triangolo rettangolo, si determina il numero esprimente la ipotenusa, estraendo la radice quadrata dalla somma de' quadrati delli numeri, che osprimono li due cateti; e che qualora si conoscono li numeri esprimenti la ipotenusa, ed uno de' cateti, si determina l' altro cateto, estrasndo la radice quadrata dalla differanza de' quadrati delli numeri, che esprimono la ipotenusa, ed il cateto dato.

114. Prob. 1. *Data una retta terminata, e dato un triangolo, costruire sopra della retta data un triangolo, il quale sia simile al triangolo dato.*

(Fig. 45.) Sia data la retta terminata DF, ed il triangolo ABC, si vuole sopra di DF costruire un triangolo, il quale sia simile al triangolo dato ABC.

Per la soluzione di questo problema possiamo fare uso delli differenti caratteri, per mezzo delli quali conosciamo la simiglianza de' triangoli.

Sol. Facendo uso del primo carattere.

Nelli punti D, F della retta data DF si formino li due angoli EDF, EFD respettivamente eguali agli angoli BAC, BCA del triangolo dato, e si prolunghino li lati DE, FE sino a tanto, che si incontrino nel punto E, avremo così formato sopra DF il triangolo DEF evidentemente simile al triangolo dato ABC, poichè essi hanno due angoli dell' uno respettivamente eguali a due angoli dell' altro.

Facendo uso del secondo carattere; Si faccia nel punto D l' angolo EDF = BAC, indi si tagli DE eguale alla quarta proporzionale in ordine ad AC, DF, ed AB, e si unisca EF, avremo così il triangolo DEF, il quale è simile al triangolo dato ABC, poichè essi hanno li due lati AB, AC dell' uno proporzionali alli due lati ED, DF dell' altro, ed eguali gli angoli BAC, EDF contenuti tra questi lati.

Facendo uso del terzo carattere, noi troveremo la retta M quarta proporzionale in ordine ad AC, DF, ed AB, indi troveremo la retta N quarta proporzionale in ordine ad AC, DF, BC, indi costruiremo il triangolo DEF, il quale abbia li lati respettivamente eguali alle tre rette, DF, M, N, ed i triangoli ABC, DEF saranno evidentemente simili, poichè hanno li lati dell' uno proporzionali alli lati dell' altro.

115. Prob. 2. *Data una retta terminata dividerla in parti proporzionali a quelle, nelle quali una altra retta è stata divisa.*

(Fig. 52.) Sia data la retta terminata AB, e proponiamoci di dividerla in parti proporzionali alle parti, nelle quali è divisa la retta CD.

Sol. Sopra della retta data CD si costruisca il triangolo equilatero CHD, e dal lato CH si tagli la porzione HK = AB, indi per lo punto K si tiri la KP parallela a CD, è evidente, che il triangolo HKP è simile a CHD, poichè qualora in un triangolo è tirata una retta parallela ad un lato, il triangolo che essa determina è simile al triangolo dato, ma il triangolo CHD è equilatero, dunque anche KHP è equilatero, e perciò HK = KP, ma per costruzione HK = AB, dunque anche KP = AB, dunque il problema si riduce a dividere KP in parti proporzionali alle parti di CD; perciò fare

Dal punto H alli punti E, F, G si tirino le rette HE, HF, HG, le quali incontrano la retta KP nelli punti L, M, N. Dico che KL, LM, MN, NP sono proporzionali alle parti CE, EF, FG, GD della retta data CD.

Dim. Noi abbiamo dimostrato, che se da un punto qualunque si tirino quante rette si vogliono, e queste si taglino per mezzo di due parallele; queste parallele vengono da sì fatte rette divise in parti proporzionali, quindi la retta KP è divisa in parti proporzionali alle parti della retta data CD.

116. Avv. Qui giova avvertire, che se per caso la retta data AB è maggiore di CD,

allora si prolunga HC fino a tanto, che sia eguale ad AB, e per lo suo estremo si tira la retta parallela a CD; e le rette, che uniscono il punto H con gli punti C, E, F, G, D si prolungano fino allo incontro della parallela tirata.

Si deve anche avvertire, che se le parti della retta CD sono eguali, anche AB verrà divisa in parti eguali, d'onde evidentemente si vede un altro metedo per dividere una retta in qualsivoglia numero di parti eguali.

C A P. IX.

Proprietà delli Poligoni.

117. Teor. 1. *Se dal vertice di uno degli angoli di un poligono si tirino alli vertici degli angoli opposti quante diagonali si possono tirare, il poligono sarà da queste diagonali diviso in tanti triangoli, quanti ne indica il numero de'suoi lati diminuito di due.*

(Fig. 53.). Rappresenti ABCDEF un poligono, e dal vertice dell'angolo BAF siano tirate alli vertici degli altri angoli le diagonali AC, AD, AE, è evidente, che il poligono è diviso nelli triangoli ABC, ACD, ADE, AEF; Dico che il numero di questi triangoli è eguale al numero de' lati del poligono diminuito di due.

Dim. Li triangoli nelli quali viene diviso il poligono dalle sue diagonali, possono essere distinti in due classi, cioè in triangoli interni, come sono ACD, ADE, ed in triangoli esterni, come sono ABC, AFE; i triangoli interni impiegano nella loro formazione sempre un solo lato del poligono, e perciò essi sono tanti, quanti ne indica il numero de' lati del poligono, diminuito del numero de' lati, che sono impiegati nella formazione delli triangoli esterni, ma li triangoli esterni sono sempre due, ed ognuno di essi impiega due lati del poligono per la sua formazione, quindi per la formazione de' due triangoli esterni si impiegano quattro lati del poligono, dunque il numero de' triangoli interni è lo stesso di quello del numero de' lati del poligono diminuito di quattro, aggiungendo alli triangoli interni li due triangoli esterni, è evidente, che il numero de' tutti li triangoli del poligono è eguale al numero de' lati di esso diminuito di due. Sicchè.

118. Teor. 2. *Tutti gli angoli di un poligono convesso presi insieme equivalgono a tante volte due angoli retti, quante ne indica il numero de' lati del poligono diminuito di due.*

(Fig. 53.). Rappresenti ABCDEF qualsivoglia poligono convesso, dico che la somma di tutti li suoi angoli equivale a 2R ripetuti tante volte, quante ne indica il numero de' suoi lati diminuito di due.

Dim. Dal vertice A di uno degli angoli del poligono ABCDEF si tirino le diagonali AC, AD, AE, esse dividono il poligono nelli triangoli ABC, ACD, ADE, AEF, li quali sono *tanti* quanti ne indica il numero de' lati del poligono diminuito di due.

E' evidente, che la somma degli angoli del poligono ABCDEF equivale alla somma di tutti gli angoli delli triangoli, nelli quali esso è diviso, quindi per determinere il valore della somma di tutti gli angoli del poligono, basterà determinare il valore della somma di tutti gli angoli de' triangoli, nelli quali il poligono è stato diviso; ma la somma di tutti gli angoli di ciascuno di si fatti triangoli equivale a due retti, dunque la somma di tutti gli angoli di si fatti triangoli equivale a due retti ripetuti tante volte, quante ne indica il numero de' triangoli, ma il numero di si fatti triangoli è quello del numero de' lati del poligono diminuito di due, dunque la somma di tutti gli angoli delli triangoli è eguale a due retti ripetuti tante volte, quante ne indica il numero de' lati del poligono diminuito di due, dunque ancora la somma di tutti gli angoli del poligono equivale a due retti ripetuti tante volte, quante ne indica il numero de' suoi lati diminuito di due. Sicchè ec.

119. Cor. 1. Quindi se il numero de' lati del poligono è indicato da n, e la somma di tutti gli angoli del poligono si disegni con la lettera P avremo $P = 2R(n-2) = 2R \times n - 4R$, e per conseguenza $P + 4R = 2R \times n$; cioè la somma di tutti gli angoli di

un poligono accresciuta di 4R equivale a 2R multiplicati per lo numero de'lati del poligono.

120. Cor. 2. Quindi la somma degli angoli di un quadrilatero equivale a 4R, quella degli angoli di un pentagono a 6 retti ec.

121. Teor. 3. *Se i lati di un poligono convesso si prolunghino tutti da una medesima parte, le somma di tutti gli angoli esterni equivale sempre a 4R, qualunque sia il numero de' lati del poligono.*

(Fig. 54.). Nel poligono ABCDEF siano prolungati li lati dalla medesima parte, dico che la somma degli angoli esterni GBH + HCI + IDK etc. = 4R.

Dim. Si metta la somma degli angoli del poligono = P, e quella degli angoli esterni = E; Cadendo HB sopra di AG, la somma degli angoli conseguenti ABH + HBG = 2R, similmente si dimostra, che ciascuno degli angoli interni del poligono unito col correspondente esterno è eguale a 2R, dunque sarà P + E = 2R×n; ma noi abbiamo dimostrato P + 4R = 2R×n, dunque P + E = P + 4R, toltone di comune P, avremo E = 4R, sicchè la somma degli angoli esterni è eguale a quattro retti. Sicchè ec.

CAP. X.

Della simiglianza de' poligoni.

122. Teor. 1. *I poligoni, che sono composti da un eguale numero di triangoli respettivamente simili, e similmente disposti, saranno equiangoli, ed avranno li lati, che comprendono gli angoli eguali proporzionali, cioè saranno simili.*

(Fig. 55.) Li poligoni ABCDEF, GHIKLM sieno composti da un medesimo numero di triangoli ABC, ACD ec, GHI, GIK etc. li quali siano respettivamente simili; dico, che il poligono ABCDEF è simile al poligono GHIKLM.

Dim. La simiglianza de' triangoli ABC, GHI dà l' angolo B eguale all' angolo H, e l' angolo BCA = HIG; La simiglianza delli triangoli ACD, GIK dà l' angolo ACD = GIK, quindi addizionando avremo BCA + ACD = HIG + GIK, cioè l' angolo BCD = HIK, con lo stesso raziocinio si dimostrano gli altri angoli del poligono ABCDEF respettivamente eguali agli altri angoli del poligono GHIKLM; Dippiù per la simiglianza delli respettivi triangoli si ha la serie delli rapporti eguali AB : GH : : BC : HI : : AC : GI : : CD : IK ec; Dunque li poligoni ABCDEF, GHIKLM avendo gli angoli respettivamente eguali, ed i lati intorno ad essi proporzionali sono simili. Sicchè ec.

123. Teor. 2. *Li poligoni simili sono composti da un eguale numero di triangoli rispettivamente simili, e simimlente disposti.*

(Fig. 55.) Siano li due poligoni ABCDEF; GHIKLM simili, e dalli vertici degli angoli eguali A, G siano tirate le diagonali AC, AD, AE, GI, GK, GL, è evidente, chè essi sono divisi in un eguale numero di triangoli; dico che sì fatti triangoli sono respettivamente simili.

Dim. Poichè per la ipotesi li due poligoni sono simili, sarà l' angolo ABC = GHI, ed i lati AB, BC saranno proporzionali alli lati GH, HI, cioè sarà AB : GH : : BC : HI, e perciò li triangoli ABC, GHI, avendo un angolo dell' uno eguale ad un angolo dell' altro, ed i lati, che contengono si fatti angoli proporzionali, sono simili, e perciò equiangoli, dunque l' angolo ACB = GIH; tolti questi angoli eguali respettivamente dagli angoli BCD, HIK de' poligoni, gli angoli residui ACD, GIK saranno eguali, ma per la simiglianza de' triangoli ABC, GHI, abbiamo la proporzione BC : HI : : AC : GI, e per la simiglianza de' poligoni abbiamo BC : HI : : CD : IK, dunque sarà AC : GI : : CD : IK, dunque anche li triangoli ACD, GIK, che hanno gli angoli ACD, GIK eguali, compresi fra lati proporzionali, sono simili. Con lo stesso raziocinio si può dimostrare la simiglianza de' triangoli susseguenti qualunque sia il numero de' lati de' poligoni, dunque li poligoni simili sono composti da un eguale numero di triangoli simili, e similmente disposti.

124. Teor. 3. *Li contorni de' poligoni simili sono nella ragione de' loro lati omologhi.*

(Fig. 55.) Siano ABCDEF, GHIKLM *due poligoni simili; dico che li contorni* di essi sono nella ragione de' lati omologhi AB, GH.

Dim. Per la simiglianza de' poligoni abbiamo la serie de' rapporti eguali AB : GH :: BC : HI :: CD : IK :: DE : KL :: EF : LM :: FA : GM, quindi sarà la somma degli antecedenti AB + BC + CD + DE + EF + FA ossia il perimetro del poligono ABCDEF alla somma delli conseguenti GH + HI + IK + KL + LM + MG ossia al perimetro del poligono GHIKLM come un antecedente AB al suo conseguente GH. Sicchè. ec.

125. Teor. 4. *Se in due poligoni simili sono tirate due linee rette, le quali incontrano due lati omologhi facendo con essi angoli eguali, e dividendoli in parti proporzionali, esse sono fra loro nella ragione di due lati omologhi de' poligoni.*

(Fig. 56.) Nelli due poligoni simili ABCDE, FGHIK siano tirate le due rette LM, NP, le quali facciano con li due lati omologhi AE, FK gli angoli ELM, KNP eguali, e taglino li lati AE, KF in parti proporzionali, cioè in maniera, che sia EA : KF :: EL : KN; dico che LM : NP :: ED : KI.

Dim. Si uniscano le rette LD , NI.

Per ipotesi EA : KF : : LE : KN ; per la simiglianza delli poligoni abbiamo ancora EA: KF : : ED : KI , dunque sarà EL : KN : : ED : KI , e perciò li due triangoli DEL , IKN sono simili , poichè hanno li due angoli DEL , IKN eguali, come angoli de' poligoni simili , ed i lati , che li comprendono proporzionali ; ma li triangoli simili sono equiangoli , dunque sarà l' angolo ELD = KNI , e l' angolo EDL = KIN ; In oltre per la ipotesi , l' angolo ELM = KNP , toltone le parti eguali ELD , KNI, resterà DLM = INP ; Similmente se dagli angoli EDM, KIP , che sono eguali , poichè sono angoli de' poligoni simili, se ne tolgono gli angoli eguali EDL , KIN, resterà l' angolo LDM = NIP , quindi li due triangoli LDM , NIP, avendo due angoli dell' uno respettivamente eguali a due angoli dell' altro , essi sono anche simili , e perciò sarà LM : NP : : LD : NI , ma per la simi glianza delli triangoli LED , NKI abbiamo ED : KI : : LD : NI , dunque sarà LM : NP:: ED : KI, dunque le due rette LM , NP sono nella ragione delli lati omologhi ED , KI, e per conseguenza sono nella ragione di due lati omologhi qualunque delli due poligoni. Sicchè ec.

126. Teor. 5: *Se in due poligoni simili si tirino due rette , che dividano quattro lati omologhi in parti respettivamente pro-*

porzionali, esse sono fra loro nella ragione di due lati omologhi de' poligoni.

Nelli due poligoni simili ABCDE, FGHIK siano tirate le rette LM, NP in maniera, che taglino li due lati EA, KF omologhi, e li due altri omologhi DC, IH, in modo che si abbiano le due proporzioni EA : KF : : EL : KN ; DC : IH : : DM : IP ; Dico che LM : NP : : ED : KI.

Dim. Per ipotesi EA : KF : : EL : KN ; e per la simiglianza de' poligoni EA : KF : : ED : KI, sarà EL : KN : : ED : KI ; quindi li triangoli DEL, IKN sono simili, poichè hanno un angolo eguale compreso fra lati proporzionali, e perció avremo la proporzione ED : KI : : DL : IN. In oltre per la ipotesi abbiamo ancora DC : IH : : DM : IP, e per la simiglianza de' poligoni DC : IH : : ED : KI, dunque DM : IP : : ED : KI, ma per la simiglianza de' triangoli EDL, KIN vi è la proporzione ED : KI : : DL : IN ; dunque sarà DM : IP : : LD : IN ; In oltre se dagli angoli EDM, KIP, che sono eguali, come angoli de' poligoni simili, si tolgono gli angoli EDL, KIN, che sono eguali, come angoli de' triangoli simili EDL, KIN, resterà l' angolo LDM = NIP, ed i triangoli LDM, NIP saranno simili, poichè hanno un angolo eguale compreso fra lati proporzionali; quindi avremo la proporzione LD : NI : : LM : NP, ma abbiamo dimostrato, che LD : IN : : ED : KI ; dunque avremo LM: NP : :

ED : KI. Dunque le due rette LM, NP sono fra loro nella ragione di due lati omologhi ED, KI, e per conseguenza come due lati omologhi qualunque delli poligioni simili. Sicchè ec.

127. Prob. *Sopra di una retta data costruire un poligono simile ad un poligono dato.*

(Fig. 55.) Sia data la retta GL, e sia dato il poligono ABCDEF, proponiamoci di costruire sopra di GH un poligono simile al poligono dato ABCDEF.

Sol. Dal vertice A di uno degli angoli del poligono dato si tirino alli vertici degli angoli C, D, E le diagonali AC, AD, AE, le quali dividono il poligono dato nelli triangoli ABC, ACD, ADE, AEF; indi sopra della retta GH si costruisca il triangolo GHI simile al triangolo ABC; sopra GI si formi il triangolo GIK simile ad ACD, indi sopra GH si faccia il triangolo GKL simile ad ADE, e finalmente sopra GL si costruisca il triangolo GML simile ad AFE. Dico che GHIKLM è il poligono dimandato.

Dim. Li due poligoni ABCDEF, GHIKLM per costruzione sono composti da un eguale numero di triangoli simili respettivamente, e similmente disposti, dunque essi sono simili, dunque sopra della retta data GH si è formato il poligono GHIKLM simile al poligono dato ABCDEF.

128. Avv. Il problema medesimo avrebbe

potuto essere anche sciolto con una altra costruzione.

Sopra di AB si tagli la AP = GH, indi tirate le diagonali AC, AD, AE, per lo punto P si tiri PQ parallela a BC, la quale si prolunghi fino all' incontro di AC nel punto Q, indi per Q si tiri QR parallela a CD, che incontra AD in R, per R si tiri RS parallela ad ED, che incontra AE nel punto S, e finalmente per S si tiri ST parallela ad FE. Avremo così il poligono APQRST, il quale evidentemente è simile al poligono dato ABCDEF, giacchè essi sono composti da un medesimo numero di triangoli simili, e similmente disposti.

Qui avvertiremo, che se per caso la retta data GH fosse maggiore di AB, allora si prolunga AB fino a tanto, che essa sia eguale alla retta data GH, e si esegue la medesima operazione.

CAP. XI.

Proprietà delli Parallelogrammi.

129. Si chiama *parallelogrammo* quel quadrilatero, che ha li lati opposti paralleli.

130 Teor. I. *In ogni parallelogrammo sono eguali sì gli angoli opposti, che li lati opposti, e se in esso si tira la diagonale, questa dividerà il parallelogrammo in due triangoli eguali.*

(Fig. 57.) Sia ABCD un parallelogrammo, ed in esso sia tirata la diagonale DB; Dico che esso avrà AB = DC, AD = BC; avrà ancora l' angolo ADC = ABC, e l' angolo DAB = DCB; e che il triangolo ADB = DCB.

Dim. Che AD sia eguale a CB, ed AB sia eguale DC è chiaro, poichè esse sono parti di parallele comprese tra parallele. E anche evidente, che il triangolo ADB sia eguale al triangolo DCB, giacchè essi hanno li due lati DA, AB dell' uno respettivamente eguali alli due lati BC, CD dell' altro, ed il lato DB comune. Finalmente dalla eguaglianza di questi due triangoli ricaviamo, che l' angolo DAB è eguale al suo opposto DCB, e che l' angolo CDB = DBA, e l' angolo CBD = BDA, ed addizionando CDB + BDA ossia l' intero angolo CDA è eguale ad ABD + DBC ossia all' intero angolo ABC, che è opposto ad ADC. Sicchè ec.

130. Teor. 2. *Il quadrilatero, che ha due lati opposti eguali, e paralleli, è un parallelogrammo.*

Abbia il quadrilatero ABCD, li due lati AB, DC eguali e paralleli, dico che esso è un parallelogrammo.

Dim. Noi abbiamo dimostrato, che le rette, che uniscono dalla medesima parte gli estremi di due rette eguali e parallele, sono anche tra esse eguali e parallele, quindi le rette AD, CB, che uniscono dalla medesima parte gli estremi delle rette AB, DC, le quali per ipotesi sono eguali e parallele, sono anche eguali e parallele, e perciò il quadrilatero ABCD avendo li lati opposti paralleli è un parallelogrammo. Sicchè ec.

131. Teor. 3. *Il quadrilatero, che ha i lati opposti eguali è un parallelogrammo.*

Nel quadrilatero ABCD siano AB = DC, AD = BC. Dico che ABCD è un parallelogrammo.

Dim. Nel quadrilatero ABCD si tiri la diagonale DB.

Li due triangoli DCB, DAB, avendo per la ipotesi AD = BC, AB = DC, ed il lato BD commune, sono eguali, e perciò l' angolo CDB = DBA, e CBD = BDA, ma gli angoli eguali CDB, DBA sono alterni interni delle rette AB, DC tagliate dalla secante DB, dunque DC è parallela ad AB, e gli altri due angoli eguali ADB, DBC sono alterni interni delle due rette AD, CB, tagliate dalla medesima secante DB, dunque anche AD, CB sono parallele, ed il quadrilatero ABCD avendo li lati opposti paralleli è un parallelogrammo. Sicchè ec.

132. Teor. 4. *Se un parallelogrammo ha un angolo retto, tutti gli altri suoi angoli saranno anche retti.*

(Fig. 58.) Nel parallelogrammo ABCD sia retto l' angolo DAB. Dico che tutti gli altri suoi angoli sono anche retti.

Dim. In ogni parallelogrammo gli angoli opposti sono eguali, dunque l' angolo DAB = DCB, ma per la ipotesi l' angolo DAB è retto, dunque anche DCB è retto; dippiù gli angoli di un quadrilatero sono sempre eguali a quattro retti, dunque essendo li due DAB, DCB eguali a due retti, la somma degli altri due ABC, ADC sarà anche eguale a due retti, ma questi angoli sono eguali, poichè sono angoli opposti del parallelogrammo ABCD, dunque anche essi sono retti, e perciò il parallelogrammo, che ha un angolo retto, ha tutti gli angoli retti.

133. Teor. 5. *Se in un parallelogrammo li due lati, che comprendono uno de' suoi angoli, sono eguali, esso sarà equilatero.*

(Fig. 57) Nel parallelogrammo ABCD sieno eguali li due lati DA, AB, che comprendono l' angolo DAB; dico che esso avrà tutti li lati eguali.

Dim. In ogni parallelogrammo i lati opposti sono eguali, quindi AD = BC, AB = DC; ma per ipotesi AB = AD, dunque AB = AD = DC = CB. Sicchè ec.

Cor. 1. Quindi se un parallelogrammo ha un angolo retto compreso fra due lati eguali esso avrà tutti gli angoli retti, e tutti li lati eguali.

Cor. 2. Da quel che abbiamo dimostrato si rileva, che li parallelogrammi possono essere di quattro specie, cioè I può esistere un parallelogrammo, il quale abbia tutti li lati eguali e *tutti gli angoli* retti. 2. Può esistere un parallelogrammo, in cui tutti gli angoli siano retti, ma li lati non tutti eguali. 3. Puó esistere un parallelogrammo, in cui tutti li lati siano eguali, e gli angoli non retti. 4. Finalmente può esistere un parallelogrammo, che non abbia li lati eguali, nè gli angoli retti.

134. Avv. Il parallelogrammo, che ha tutti li lati eguali, e tutti gli angoli retti, si chiama *Quadrato*, ed il quadrato si dice fatto sopra uno de' suoi lati. Il parallelogrammo, che ha gli angoli retti, ed i lati non tutti eguali, si chiama *rettangolo*, o *quadrilungo* e si dice formato dalli due lati, che comprendono uno de' suoi angoli; delli quali ún lato disegna la lunghezza, e l' altro la larghezza di esso. Quel parallelogrammo, che ha li lati tutti eguali, e gli angoli non retti, si chiama *Rombo*, o *Losange*; e quello che ha gli angoli non retti, ed i lati non tutti eguali, si chiama *Romboide*.

Il quadrilatero, il quale ha li lati opposti non paralleli, oppure due paralleli, e due altri non paralleli, si chiama *trapezio*.

135. Teor: 6. *Le diagonali di un parallelogrammo, si dividono in parti respettivamente eguali.*

(Fig. 57.) Nel parallelogrammo ABCD siano tirate le diagonali AC, BD, dico, che ciascuna di esse è divisa in due parti eguali, cioè che AO = OC, DO = OB.

Dim. Per le parallele AB, DC tagliate dalla secante DB gli angoli alterni interni CDO, OBA sono eguali, similmente per le medesime parallele tagliate dalla secante AC gli angoli alterni interni DCO, OAB sono eguali, dunque li due triangoli DOC, AOB avendo due angoli dell' uno respettivamente eguali a due angoli dell' altro, ed i lati DC, AB adiacenti a si fatti angoli eguali, come lati opposti del parallelogrammo ABCD, sono eguali, e perciò DO = OB, AO = OC. Sicchè ec.

136. Cor. Se il parallelogrammo ABCD ha li lati eguali, cioè se esso è un rombo, o un quadrato, allora li triangoli AOD, DOC avendo AO = OC, il lato DO comune, ed AD = DC, saranno eguali, e perciò l' angolo AOD = DOC, e per conseguenza questi due angoli saranno retti, dal che ricaviamo, che le diagonali di un rombo, o di un quadrato non solo si dividono sciambievolmente in parti eguali, ma ancora ad angoli retti.

137. Teor. 7. *Se li lati di qualunque quadrilatero si dividono in due parti eguali, ed i punti di divisione si uniscono per mezzo di quattro rette, il quadrilatero, che ne risulta, è un parallelogrammo.*

(Fig. 59.) Sia ABCD un quadrilatero, ed i lati di esso siano divisi in due parti eguali nelli punti E, F, G, H, e siano congiunte le rette EF, FG, GH, HE, dico che il quadrilatero EFGH, che esse formano, è un parallelogrammo:

Dim. Nel quadrilatero ABCD si tirino le diagonali AC, BD.

Per ipotesi AF = FB, AE = ED, quindi avremo AF : FB : : AE : ED, e perciò nel triangolo BAD si è tirata la retta FE, che divide li due lati AB, AD in parti proporzionali, dunque FE è parallela a BD; similmente si dimostra, che GH dividendo li due lati BC, CD del triangolo BCD in parti proporzionali, è parallela alla medesima BD, ma le rette parallele ad una terza sono parallele fra loro, dunque FE è parallela a GH: con lo stesso raziocinio si dimostra, che le due rette EH, FG sono parallele alla medesima AC, e perciò sono parallele fra esse, dunque il quadrilatero EFGH, avendo li lati opposti paralleli, è un parallelogrammo. Sicchè ec.

138 Teor. 8. *Li supplementi delli parallelogrammi, che sono intorno alla diagonale di un altro parallelogrammo sono equivalenti.*

(Fig. 60) Nella diagonale BD del parallelogrammo ABCD sia preso ad arbitrio qualunque punto O, e per esso siano tirate EF parallela ad AB e DC; e GH parallela ad AD e CB, il parallegrammo ABCD da queste rette è diviso nelli quattro parallelogrammi EDGO, OHBF, AEOH, OFCG, delli quali li due EG, HF si dicono parallelogrammi, che sono intorno alla diagonale DB del parallelogrammo AC, e li due altri AO, OC si dicono supplementi de' parallelogrammi, che sono intorno alla diagonale del parallelogrammo AC; Dico che questi supplementi AO, OC sono equivalenti.

Dim. La diagonale di un parallelogrammo lo divide in due triangoli eguali, quindi il triangolo BAD = BCD; EOD = DOG, OHB = OFB, quindi se dall' triangolo DAB si tolgono li due triangoli DEO, OHB resterà il supplemento AO, e se dal triangolo DCB si tolgono DGO, OFB, che sono respettivamente eguali alli triangoli tolti da DAB, resterà il supplemento OC equivalente ad AO. Sicchè ec.

139. Prob. 1. *Costruire un parallelogrammo, il quale abbia un angolo eguale ad un angolo dato, e che sia questo angolo compreso fra due lati eguali a due rette date.*

(Fig. 61.) Siano date le due rette M, N, e l' angolo P; si vuole formare un parallelogrammo, che abbia un angolo eguale all' angolo P, il quale sia compreso fra due lati respettivamente eguali ad M, N.

Sol. Si tiri la retta AB = M, e nel punto A si faccia l' angolo EAB = P, e dal lato AE si tagli AD = N, finalmente per li punti D, B si tirino DC parallela ad AB, e BC parallela ad AD, le quali si prolunghino fino a tanto, che si incontrino nel punto C; dico che ABCD è il parallelogrammo dimandato.

Dim. Il quadrilatero ABCD ha li lati opposti paralleli, dunque è un parallelogrammo, ha l' angolo DAB eguale all' angolo dato P, ha dippiù il lato AB = M, ed il lato AD = N, dunque esso è il parallelogrammo dimandato.

140 Prob. 2. *Date due rette, costruire il rettangolo formato da tali rette.*

(Fig. 62.) Siano date le due rette L, M, si vuole costruire il rettangolo, che sia da tali rette formato.

Sol. Si tiri la AB eguale ad L, e dal suo estremo A si inalzi sopra di essa la perpendicolare AE, dalla quale si tagli AD = M, finalmente si tirino per lo punto D la retta DC parallela ad AB, e per lo punto B la retta BC parallela ad AD, e si prolunghino fino a tanto, che si incontrino nel punto C. Dico che AC è il rettangolo dimandato.

Dim. Il quadrilatero AC è un parallelogrammo per costruzione, esso ha l' angolo retto DAB, e perciò ha tutti gli angoli retti, ed ha li lati AB, AD, che sono eguali alle rette date L, M, dunque è il rettangolo fatto da L, M.

141. Prob. 3. *Costruire sopra una retta data il quadrato.*

(Fig. 63.) Sia data la retta AB, si vuole sopra di essa costruire il quadrato.

Sol. Dallo estremo A della retta data AB si inalzi sopra di essa la perpendicolare AE, e da essa si tagli la porzione AD = AB, e per li punti D, B si tirino DC parallela ad AB, e BC parallela ad AD, e queste rette si prolunghino fino a tanto che si incontrino nel punto C. Dico che il quadrilatero AC è il quadrato dimandato

Dim. Il quadrilatero AC è per costruzione un parallelogrammo, ha di più l' angolo A retto, e perciò ha tutti gli angoli retti, ha li due lati AD, AB, che comprendono l' angolo DAB, eguali, dunque ha tutti li lati eguali, e perciò è un quadrato, il quale avendo per lato la retta data AB, è il quadrato dimandato.

CAP. XII.

Della composizione delli rettangoli, e delli quadrati.

142. Teor. 1. *Se vi sono due rette delle quali una sia divisa in qualunque numero di parti, e l' altra sia indivisa, il rettangolo fatto dalla intera divisa, e dalla indivisa è eguale alla somma de' rettangoli fatti da ciascheduna delle parti della divisa e dalla indivisa.*

(Fig. 64.) Sia la retta AB divisa nelle parti AE, EG, GB, e sia la retta L indivisa. Dico che il rettangolo fatto da AB e da L è eguale alla somma delli rettangoli fatti da AE e da L, da EG e da L, da GB e da L; che noi sogliamo esprimere così, dico che $AB \times L = AE \times L + EG \times L + GB \times L$.

Dim. Con AB ed AD = L si formi il rettangolo AC, indi dalli punti E, G si elevino *sopra* di AB le perpendicolari EF, GH, le *quali* si prolunghino fino a tanto, che incontrino la retta DC, è evidente, che il rettangolo AC è diviso nelli rettangoli AF, EH, GC, e che per conseguenza il rettangolo AC = AF + EH + GC. Dippiù nelli rettangoli essendo li lati opposti eguali, avremo GH = EF = AD, ma per costruzione AD = L, dunque anche GH, EF sono eguali ad L, e perciò li rettangoli AF, EH, GC, che sono fatti AE e da AD, da EG ed EF, da GB e GH saranno fatti da AE ed L, da EG ed L, da GB ed L, dunque il rettangolo fatto da AB e da L, è eguale alla somma de' rettangoli fatti da AE e da L, da EG e da L, da GB e da L; cioè avremo $AB \times L = AE \times L + EG \times L + GB \times L$. Sicchè ec.

143 Cor. I Se L = AB, allora il rettangolo AC sarà il quadrato fatto sopra di AB, ed i rettangoli AF, EH, GC saranno fatti da AE e da AB, da EG e da AB, da GB e da AB. Dal che conchiudiamo, che se una retta è divisa in più parti il quadrato fatto sopra della intera retta è eguale alla somma di tutti li rettangoli fatti dalla medesima retta e da ciascuna delle sue parti.

144. 2. Supponiamo, che la retta L sia eguale ad una delle parti di AB, per esempio à BG, avremo il rettangolo AC, il quale è fatto dalla intera AB e dalla sua parte GB

eguale alla somma delli rettangoli fatti da AE e da GB, da EG e da GB, da GB e da GB; ma il rettangolo fatto da GB e da GB è il quadrato di GB, Dunque il rettangolo fatto dalla intera divisa AB è dalla sua parte GB è eguale alla somma del quadrato della medesima parte, e di tutti li rettangoli fatti dalla stessa parte e da ciascuna delle altre.

145 Teor. 2. *Il quadrato fatto sopra la somma di due rette è eguale alla somma delli due quadrati fatti sopra delle medesime rette, unita a due volte il rettangolo fatto dalle medesime rette.*

(Fig. 65.) Sia la retta AB somma delle due rette AC, CB; Dico che il quadrato fatto sopra di AB è eguale al quadrato di AC più il quadrato di CB più due volte il rettangolo fatto da AC e da CB, il che sogliamo esprimere così, dico che AB^2 ossia $(AC + CB)^2 = AC^2 + CB^2 + 2AC \times CB$.

Dim. La retta AB è divisa nel punto C, dunque il quadrato fatto sopra la intera AB è eguale alla somma delli rettangoli fatti dalla intera retta AB è da ciascheduna delle sue parti, quindi avremo $AB^2 = AB \times AC + AB \times CB$; ma il rettangolo fatto dalla intera AB e dalla sua parte AC è eguale al quadrato della medesima parte AC unito al rettangolo fatto dalle medesime parti AC e CB, e perciò $AB \times AC = AC^2 + AC \times CB$; ed il rettangolo fatto dalla intera AB e dalla sua parte CB, è eguale al quadrato della medesima parte CB unito al rettangolo fatto dalle medesime parti AC, CB, e perciò avremo $AB \times BC = CB^2 + AC \times CB$; Quindi sostituendo avremo $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AB \times BC$. Sicchè ec.

146. Teor. 3. *La somma de' quadrati fatti sopra due rette è eguale al quadrato fatto sopra della differenza di esse unito a due volte il rettangolo fatto dalle medesime rette.*

(Fig. 65) Siano AB, BC due rette, delle quali AC è la differenza: Dico che la somma de' quadrati fatti sopra di AB e di BC è eguale al quadrato fatto sopra la differenza AC unito a due volte il rettangolo fatto dalle medesime rette AB, BC; che esprimiamo così; dico che $AB^2 + BC^2 = AC^2 + 2AB \times BC$.

Dim. La retta AB è somma delle due rette AC, CB, dunque il quadrato fatto sopra di AB è eguale alla somma de' quadrati fatti sopra delle medesime rette AC, CB unita a due volte il rettangolo fatto dalle medesime rette AC, CB, cioè $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2AC \times CB$; si aggiunga a queste quantità eguali di comune il quadrato di CB, avremo $AB^2 + CB^2 = AC^2 + 2CB^2 + 2AC \times CB$, ma il rettangolo fatto dalla intera AB e dalla sua parte CB è eguale al quadrato della medesima parte CB unito al rettangolo fatto dalle medesime parti AC, CB, quindi avremo

$AB \times BC = CB^2 + AC \times CB$, e prendendo il doppio di queste quantità eguali, avremo $2AB \times BC = 2CB^2 + 2AC \times CB$, e sostituendo avremo $AB^2 + CB^2 = AC^2 + 2AB \times BC$ Sicchè ec.

147. Teor. 4. *Il rettangolo fatto dalla somma e dalla differenza di due rette è eguale alla differenza delli quadrati fatti sopra delle medesime rette.*

(Fig. 66) Sieno le due rette AB, BC, e si prolunghi AB verso D sino a tanto, che sia $BD = AB$, è evidente, che $CD = AB + BC$, e che $AC = AB - BC$; Dico che il rettangolo fatto da DC e da CA è eguale al quadrato fatto sopra di AB, toltone il quadrato fatto sopra di CB, il che esprimiamo così, dico $DC \times CA = AB^2 - CB^2$.

Dim. La retta CD è divisa in B, e la AC è indivisa, dunque il rettangolo fatto dalla intera divisa DC e dalla indivisa AC è eguale alla somma de' rettangoli fatti da ciascheduna parte della divisa e dalla medesima indivisa, dunque avremo $DC \times CA = DB \times CA + BC \times CA$; ma $DB = AB$, dunque sarà $DC \times CA = AB \times CA + BC \times CA$; ma il rettangolo fatto dalla intera AB e dalla sua parte CB è eguale al quadrato fatto sopra della stessa parte BC unito col rettangolo fatto dalle due parti CB, CA; quindi sarà $AB \times BC = BC \times CA + BC^2$; e togliendo da queste quantità eguali di comune BC^2 avremo $AB \times BC - BC^2 = BC \times CA$, quindi sostituendo nella eguaglianza precedente $DC \times CA = AB \times CA + BC \times CA$ in vece di $BC \times CA$ la quantità $AB \times BC - BC^2$, avremo $DC \times CA = AB \times CA + AB \times BC - BC^2$; ma essendo la retta AB divisa in C il quadrato di AB è eguale alli due rettangoli fatti dalla intera AB e da ciascheduna delle sue parti, dunque avremo $AB^2 = AB \times CA + AB \times BC$, e sostituendo nella eguaglianza precedente in vece di $AB \times AC + AB \times BC$ il quadrato AB^2, avremo $DC \times CA = AB^2 - CB^2$. Sicchè ec.

CAP. XIII.

Della misura delle Aje delli poligoni.

148 Qualora un lato di un triangolo o di un parallelogrammo è considerato come la parte inferiore del suo contorno, esso riceve il nome di *base* del triangolo, o del parallelogrammo, e del triangolo sogliamo chiamare *vertice* il vertice dell'angolo opposto alla base, ed *altezza* la perpendicolare abbassata sopra della base dal vertice del triangolo, tanto quando essa incontra la base medesima cadendo dentro del triangolo, quanto quando essa cadendo fuori del triangolo incontra la base nel suo prolungamento; Nel parallelogrammo poi si dice *Altezza* la perpendicolare calata sopra la base di esso da qualunque punto del lato ad essa opposto.

Sapendo noi, che le parallele sono da per tutto egualmente distanti, ne segue, che li parallelogrammi ed i triangoli, li quali hanno le basi sopra di una medesima retta, e sono compresi fra le medesime parallele hanno la medesima altezza; quindi è evidente, che qualora due parallelogrammi, o due triangoli hanno le basi, e le altezze eguali, possono situarsi in modo, che la base dell' uno combaci con la base dell' altro, avendo essi la medesima altezza, il lato parallelo alla base dell' uno dovrà prendere la direzione del lato dell' altro alla medesima base parallelo, e perciò essi avranno la medesima base, e saranno compresi fra le medesime parallele.

149. Teor. I. *Li parallelogrammi, che hanno la medesima base, e la medesima altezza, o ciò che vale lo stesso, li parallelogrammi, che hanno la medesima base, e sono racchiusi tra le medesime parallele sono equivalenti.*

(Fig. 67) Abbiano li due parallelogrammi ABCD, ABEF la medesima base AB e siano racchiusi tra le medesime parallele AB, DE; dico che essi sono equivalenti.

Dim. Li due triangoli ADF, BCE hanno il lato AD = BC, ed il lato AF = BE, poichè sono lati opposti delli parallelogrammi AC, BF, hanno dippiù l' angolo DAF = CBE, poichè essi hanno li lati respettivamente paralleli, e le aperture rivolte alla medesima parte, dunque essi sono eguali.

quindi se dal medesimo quadrilatero ABED si toglie una volta il triangolo ADF, ed una altra volta il triangolo BCE, avremo due residui eguali, ma quando dal quadrilatero si toglie il triangolo ADF rimane il parallelogrammo ABEF, e quando si toglie il triangolo CBE il residuo è il parallelogrammo ABCD, dunque il parallelogrammo ABCD è equivalente al parallelogrammo ABEF. Sicchè ec.

150. Teor. 2. *Li triangoli, che hanno la medesima base, e la medesima altezza, o ciò che vale lo stesso, li triangoli che hanno la medesima base, e sono compresi fra le medesime parallele sono equivalenti.*

(Fig. 67) Abbiano li due triangoli ADB, AEB la medesima base AB, e siano racchiuse tra le medesime parallele AB, DE; Dico, che essi sono equivalenti.

Dim. Si tirino per lo punto B la retta BC parallela ad AD, e per lo punto A la retta AF parallela a BE, saranno AC, BF due parallelogrammi posti sopra la medesima base AB, e racchiusi fra le medesime parallele AB, DE, quindi essi sono equivalenti; In oltre abbiamo dimostrato, che il parallelogrammo è diviso dalla diagonale in due triangoli eguali, quindi li due triangoli ADB, AEB sono le metà respettivamente delli due parallelogrammi AC, BF, ma li parallelogrammi AC, BF sono equivalenti, dunque anche li triangoli ADB, AEB sono equivalenti. Sicchè ec.

151. Cor. Abbiamo dimostrato, che il triangolo ADB è equivalente al triangolo AEB, ma il parallelogrammo AC è doppio del triangolo ADB, dunque il parallelogrammo AC è anche doppio del triangolo AEB; Dunque qualora un triangolo, ed un parallelogrammo hanno la medesima base, e sono compresi fra le medesime parallele, il parallelogrammo è doppio del triangolo.

151. Teor. 3. *Li rettangoli, che hanno eguali basi, sono fra essi nella ragione delle altezze.*

(Fig. 68.) Li due rettangoli ABCD, EFGH abbiano le basi AB, EF eguali, dico che il rettangolo AC sta al rettangolo EG come AD ad EH.

Due casi possono accadere. 1. Che le altezze AD, EH siano commensurabili. 2. Che esse siano incommensurabili.

Dim. 1. Siano AD, EH commensurabili, e sia AM la comune misura di esse; si concepiscano esse divise in parti tutte eguali ad AM, e supponiamo, che AD contenga AM un numero di volte indicato da m, ed il numero delle volte, che EH contiene la stessa AM sia disegnato da n, avremo la proporzione AD : EH : : m : n. In oltre si concepiscano AD, EH divise nelle m, n parti eguali ad AM, e per gli punti delle divisioni si intendano tirate le rette respettivamente parallele ad AB, EF, come sarebbero MN, PQ, è evidente, che il rettangolo AC sarà diviso in m rettangoli, ed il rettangolo EG in n rettangoli, li quali hanno le basi tutte eguali ad AM, e le altezze tutte eguali ad AB, quindi il rettangolo AC è eguale al rettangolo AN×m, ed il rettangolo EG è eguale al rettangolo medesimo AN×n, ed avremo la proporzione AC : EG : : AN×m : AN×n : : m : n; ma al rapporto di m ad n è eguale anche il rapporto di AD : EH; dunque AC : EG : : AD : EH. Sicchè ec.

Dim. 2. Nel caso in cui AD, EH sono incommensurabili, dovrà avere luogo una delle tre proporzioni.

1. Che sia AC : EG : : AD ad una retta maggiore di EH per esempio EK.

2. Che sia AC : EG : : AD ad una retta minore di EH, per esempio, EL.

3. Che sia AC : EG : : AD : EH; quindi se dimostriamo, che le due prime proporzioni sono assurde, conchiuderemo, che AC : EG : : AD : EH.

Supponiamo in primo luogo, che si abbia la proporzione AC : EG : : AD : EK.

Noi possiamo concepire AD divisa in parti tutte eguali, e tanto piccole quanto a noi piacerà, e perciò possiamo concepirla divisa in parti più piccole di KH, quindi dividendo EK in parti eguali a quelle, nelle quali abbiamo concepita divisa A D, è evidente che almeno un punto di divisione cadrà tra H, e K, supponiamo, che questo punto sia P, per P si tiri la PR parallela ad EF, e si compisca il rettangolo ER, ed allora li due rettangoli ER, EG avranno le altezze AD, EP commensurabili, ed avremo AC; ER : : AD EP : ma per la supposizione AC : EG : : AD : EK, quindi avranno luogo due proporzioni, nelle quali vi sono li medesimi antecedenti, e perciò con li conseguenti formeremo la proporzione ER : EG : : EP : EK, proporzione evidentemente assurda, poichè ER è maggiore di EG nel mentre che EP è minore di EK, dunque anche la proporzione AC : EG : : AD : EK è assurda.

Supponiamo in secondo luogo, che si abbia la proporzione AC : EG : : AD : EL.

Noi possiamo concepire la rettta AD divisa in parti tutte eguali, e tanto piccole quanto a noi piacerà, e per conseguenza in parti minori di HL, allora dividendo EH in parti eguali a quelle, nelle quali abbiamo concepita divisa AD, almeno un punto di divisione cadrà tra H ed L, supponiamo, che questo punto sia Q, quindi tirando per questo punto Q la retta QS parallela ad EF compiremo il rettangolo ES, ed i due rettangoli AC, ES avranno le altezze AD, EQ commensurabili, ed avremo la proporzione AC : ES : : AD : EQ, ma per la supposizione AC : EG : : AD : EL, dunque avranno luogo due proporzioni, nelle quali vi sono li medesimi antecedenti, quindi li conseguenti di esse formeranno la proporzione ES : EG : : EQ : EL, proporzione anche evidentemente assurda, poichè ES è minore di EG, nel mentre EQ è maggiore di EL, dunque anche la proporzione supposta AC : EG : : AD : EL è assurda; Quindi essendo assurde le due prime proporzioni, sarà vera la terza, cioè AC : EG : : AD : EH. Sicchè ec.

152. Teor. 4. *Li rettangoli, che hanno diseguali le basi, e diseguali le altezze sono fra essi in ragione composta da quella delle basi, e da quella delle altezze, o ciò che vale lo stesso, essi sono nella ragione delli numeri astratti, che si hanno multiplicando li numeri astratti, che esprimono le basi per quelli, che indicano le altezze rapportate ad una medesima unità lineare.*

(Fig. 69.) Li due rettangoli AC, EG abbiano le basi AB, EF diseguali, e diseguali le altezze AD, EH, e sieno tutte queste rette espresse in numeri rapportati ad una medesima unità lineare; Dico che AC sta ad EG come AB×AD prodotto de' numeri astratti, che esprimono AB, AD ad EF×EH prodotto delli numeri astratti, che esprimono EF, EH relativamente alla medesima unità lineare, alla quale sono rapportate anche AB, AD.

Dim. Da AB si tagli AK = EF, e si tiri KL parallela ad AD.

Li due rettangoli AC, AL avendo la medesima base AD sono fra essi nella ragione delle altezze, cioè AC : AL : : AB : AK; e perciò $AC = AL \times \frac{AB}{AK}$; ma $AK = EF$, dunque $AC = AL \times \frac{AB}{EF}$; In oltre li due rettangoli AL, EG, avendo eguali le basi AK, EF, sono fra essi nella ragione delle altezze AD, EH, e perciò abbiamo la proporzione $AL : EG :: AD : EH$, dalla quale ricaviamo $AL = EG \times \frac{AD}{EH}$; quindi se nella eguaglianza $AC = AL \times \frac{AB}{AK}$ in vece di AL si sostituisce $EG \times \frac{AD}{EH}$, avremo $AC = EG \times \frac{AD}{EH} \times \frac{AB}{EF}$, e dividendo ambi li membri di questa eguaglianza per EG, avremo $\frac{AC}{EG} = \frac{AD}{EH} \times \frac{AB}{EF}$; ma $\frac{AC}{EG}$ esprime il rapporto del rettangolo AC al rettangolo EG, ed $\frac{AD}{EH}$ esprime il rapporto, che indicano le altezze, il quale è astratto, giacchè il rapporto di due quantità omogenee è sempre astratto, ed $\frac{AB}{EF}$ è il rapporto delli numeri, che esprimono le basi, il quale è anche astratto per la medesima ragione, dunque il rettangolo AC sta al rettangolo EG in ragione composta da quella delle basi, e delle altezze, ossia come li prodotti *delli* numeri astratti esprimenti le basi multiplicati per quelli, che esprimono le altezze, rapportando tutte queste rette alla medesima unità lineare.

153. Avv. Avendo noi fatto vedere, che misurare una quantità vale lo stesso, che cercare il rapporto, che passa tra essa, ed una altra quantità della medesima speciè presa per unità, ossia per termine di paragone, ne segue, che se noi dobbiamo misurare un rettangolo dobbiamo paragonarlo con un altro rettangolo, che da noi sarà scelto per unità, quindi se noi scegliamo per unità il quadrato fatto sopra della retta stabilita per la unità lineare, alla quale si rapportano le base, e la altezza del rettangolo, noi avremo la misura del rettangolo, vedendo quante volte il rettangolo contiene sì fatto quadrato; supponiamo che il rettangolo, che si vuole misurare sia il rettangolo AC, e che MN sia la unità lineare, alla quale sono rapportate la altezza AD, e la base AB, e sopra di MN sia formato il quadrato MP, questo quadrato sarà il termine di paragone, al quale da noi si rapporterà il rettangolo AC, e cercheremo di conoscere quante volte il rettangolo AC contiene il quadrato MP, ma noi sappiamo che il rettangolo AC sta al quadrato MP come il prodotto astratto, che si ha multiplicando il numero delle unità lineari di AB per quello di AD al prodotto del numero delle unità lineari di MN per quello di MQ, ma essendo-

sì MN che MQ eguale alla unità, avremo il rettangolo AC al quadrato MP come AB×AD : 1×1 : : AB×AD : 1 ; e conchiudiamo, che il rettangolo AC contiene il quadrato MP, tante volte quante il numero astratto, che nasce multiplicando il numero delle unità della base per lo numero delle unità lineari della altezza contiene l' unità, espressione di una esattezza evidente, giacchè il rapporto dell' aja di un rettangolo alla unità di aje è ridotto al rapporto di due numeri astratti ; ma comunemente per abbreviare questa espressione si suole dire, che *un rettangolo si misura multiplicando la base per la altezza*, espressione, la quale per essere esatta deve sempre essere ridotta alla prima, cioè il *rettangolo contiene in se tante volte il quadrato fatto sopra la unità lineare, quante volte il prodotto astratto delli numeri, che esprimono la base, e la altezza del rettangolo relativamente alla medesima unità lineare contiene la unità astratta.*

154. Cor. 1. Se li lati del rettangolo, che comprendono uno de' suoi angoli sono eguali, allora il rettangolo diviene quadrato, e la sua aja verrebbe misurata dal prodotto di uno de' suoi lati multiplicato per se medesimo, vale a dire, che esso conterrebbe il quadrato fatto sopra la unità lineare tante volte, quante la seconda potenza del numero, che esprime le unità lineari di un lato contiene l' unità,

155. Cor. 2. Noi abbiamo dimostrato, che li parallelogrammi, che hanno la medesima base, e la medesima altezza sono equivalenti, quindi un parallelogrammo obliquangolo equivale al rettangolo, che ha con esso la medesima base, e la medesima altezza, dal che ricaviamo, che l' aja di qualunque parallelogrammo si misura multiplicando la sua base per la sua altezza, come ancora conchiudiamo, che essendo le aje di due parallelogrammi come le misure di essi, li parallelogrammi sono fra essi nella ragione delli prodotti delle loro basi multiplicate per le altezze, e che quelli che hanno eguali le basi sono nella ragione delle altezze, e che quelli che hanno eguali le altezze sono nel rapporto delle basi.

156. Cor. 3. Abbiamo dimostrato, che un triangolo è sempre la metà del parallelogrammo, che ha con esso la medesima base, e la medesima altezza, quindi la misura della aja di un triangolo è la metà della misura di sì fatto parallelogrammo, e perciò essa si troverà multiplicando la base per la metà della altezza, oppure la metà della base per la altezza; Dippiù essendo le metà nel medesimo rapporto degli interi, ne segue, che li triangoli sono fra essi nel rapporto delli parallelogrammi, che hanno con essi respettivamente le medesime basi, e le medesime altezze, dal che conchiudiamo, che le aje delli triangoli sono fra esse come li prodotti

delle basi per le respettive altezze, e che qualora essi hanno le basi eguali sono fra loro come le altezze, e qualora sono eguali le altezze sono come le basi.

157. Cor. 4. Qualunque poligono potendosi sempre ridurre in triangoli dividendolo per mezzo delle sue diagonali, è evidente, che esso si misurerà facendo la somma delle misure delli triangoli, che lo compongono.

(Fig. 70.) 158. Cor. 4. Rappresenti ABCD un quadrilatero, nel quale li due lati AB, DC sieno paralleli, ed in esso sia tirata la diagonale AC, la quale lo divide nelli due triangoli DAC, ACB; e da qualunque punto H della retta DC sia sopra della sua parallela AB calata la perpendicolare HK, considerando AB come base del triangolo ACB, la HK sarà del medesimo triangolo la altezza, e perciò l' aja del triangolo ACB $= \frac{1}{2}$ AB$\times$HK; similmente considerando DC come base del triangolo DAC, la medesima HK disegnerà la sua altezza, e l'aja del triangolo DAC sarà eguale ad $\frac{1}{2}$ DC$\times$HK, e per conseguenza l' aja del quadrilatero ABCD sarà determinata da $\frac{1}{2}$ AB$\times$HK $+ \frac{1}{2}$ DC$\times$HK $= \frac{1}{2}$ (AB$+$DC) HK; cioè l' aja di un quadrilatero, che ha due soli lati paralleli è determinata dal prodotto della metà della somma delli due lati paralleli multiplicata per la distanza delli medesimi lati paralleli.

159. Cor. 6. Supponiamo, che nel quadrilatero ABCD, in cui li due lati AB, CD

sono paralleli, li due lati non paralleli AD, BC *sieno* divisi in due parti eguali nelli punti *E*, F, e che si uniscano li punti E, F *con la* retta EF, e si tiri la diagonale AC; Essendo $AE = ED$, e $CF = FB$, avremo $DA : AE :: CB : BF$, e perciò EF è parallela a DC, ed AB; In oltre essendo nel triangolo DAC tirata la EO paralleia a DC avremo $AD : AE :: DC : EO$; ma $AE = \frac{1}{2} AD$, dunque $EO = \frac{1}{2} DC$; similmente nel triangolo A CB la retta OF è parallela ad AB, dunque sarà $AB : OF :: CB : CF$, ma $CF = \frac{1}{2} CB$, du nque $OF = \frac{1}{2} AB$; e perciò $EO + OF$ ossia tutta $EF = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} (AB + DC)$; quindi sostituendo nella eguaglianza $ABCD = \frac{1}{2} (AB + DC) HK$ in vece di $\frac{1}{2} (AB+DC)$ la EF, che è ad essa eguale, avremo $ABCD = EF \times HK$; quindi l' aja di un quadrilatero, che ha due soli lati paralleli è determinata, qualora si multiplica la retta, che divide in due parti eguali li lati non paralleli per la distanza, che hanno fra loro li lati paralleli.

160. Teor. 5. *Li triangoli simili sono fra essi come li quadrati de' lati omologhi.*

(Fig. 71.) Sieno li due triangoli simili, ABC, DEF, dico che $ABC : DEF :: AB^2 : DE^2$.

Dim. Dalli vertici di due angoli eguali B, E si calino sopra de' lati opporti le perpendicolari BH, EK.

Li due triangoli AHB, DEK hanno gli angoli AHB, EKD eguali, poichè sono retti, gli altri due BAH, EDK anche eguali, poichè sono appartenenti alli triangoli simili ABC, DEF, dunque AHB è simile ad EDK, dunque sarà AB : DE : : BH : EK; dippiù per la simiglianza delli triangoli ABC; DEF, si ha la proporzione AB : DE : : AC : DF : : $\frac{1}{2}$ AC : $\frac{1}{2}$ DF, quindi multiplicando in correspondenza li termini di queste proporzioni, avremo $AB^2 : DE^2 : : \frac{1}{2} AC \times BH : \frac{1}{2} DF \times EK$; ma $\frac{1}{2} AC \times BH$ è la misura dell'aja del triangolo ABC, $\frac{1}{2} DF \times EK$ è la misura dell'aja del triangolo DEF, ed AB^2, DE^2 sono li quadrati de' numeri, che esprimono li lati omologhi AB, DE, dunque le aje delli triangoli simili ABC, DEF sono fra esse nella ragione de' quadrati delli due lati omologhi AE, DB. Sicchè ec.

161. Teor. 6. *Le aje di due poligoni simili sono fra esse nel rapporto de' quadrati di due lati omologhi.*

(Fig. 72.) Rappresentino ABCDE, FGHIK due poligoni simili; dico che ABCDE : FGHIK : : $BC^2 : GH^2$

Dim. Dalli vertici A, F di due angoli eguali delli poligoni si tirino le diagonali AD, AC, FI, FH, le quali dividono li poligoni simili in triangoli eguali di numero, e respettivamente simili.

Per la simiglianza de' poligoni ABCDE, FGHIK, li lati omologhi sono proporzionali, e perciò avremo la serie di rapporti eguali BC GH : : CD : HI : : ED : IK, ma si è dimostrato che qualora più rapporti sono eguali elevando tutti li termini di essi a qualunque potenza del medesimo grado, li rapporti di sì fatte potenze sono anche eguali, dunque $BC^2 : GH^2 :: CD^2 : HI^2 :: ED^2 : IK^2$, ma abbiamo dimostrato, che li triangoli simili sono fra essi come li quadrati de' lati omologhi, dunque sarà $ABC : FGH :: BC^2 : GH^2$; $ACD : FHI :: CD^2 : HI^2$; $AED : FKI :: ED^2 : IK^2$ dunque avremo $ABC : FGH :: ACD : FHI :: AED : FKI$; ma si è dimostrato ancora, che qualora si ha una serie di rapporti eguali, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti li conseguenti come un antecedente al suo conseguente, dunque $ABC + ACD + ADE$ o sia il poligono ABCDE sta ad $FGH + FHI + FIK$ o sia al poligono FGHIK come il triangolo ABC al triangolo FGH; ma $ABC : FGH :: BC^2 : GH^2$; dunque anche $ABCDE : FGHJK :: BC^2 : GH^2$ Sicchè etc.

162. Teor. 7. *Se due triangoli hanno un angolo dell' uno eguale ad un angolo dell' altro, essi avranno le aje proporzionali alli prodotti delli numeri, che esprimono li lati, che contengono gli angoli eguali rapportati alla medesima unità lineare.*

(Fig. 73.) Rappresentino ABC, DEF due triangoli, nelli quali sieno eguali gli angoli BAC, EDF; dico che $ABC : DEF :: AB \times AC : ED \times DF$.

Dim. Dalli punti B, E si calino sopra le basi AC, DF le perpendicolari BG, EH.

È evidente, che li triangoli ABG, EDH sono simili, poichè hanno gli angoli A, D eguali per la ipotesi, e gli angoli G, H eguali, poichè sono retti, quindi li lati omologhi sono proporzionali, ed avremo AB : DE : : BG : EH, dippiù abbiamo la proporzione evidente AC : DF : : $\frac{1}{2}$ AC : $\frac{1}{2}$ DF; quindi multiplicando in corrispondenza li termini di queste due proporzioni, avremo AB×AC : ED×DF : : BG× $\frac{1}{2}$ AC : EH×$\frac{1}{2}$ DF, ma li due termini del secondo rapporto esprimono le misure delle aje delli due triangoli ABC, DEF, e li due termini del primo rapporto sono li prodotti delli numeri, che esprimono li lati, che contengono gli angoli eguali A, D rapportati alla medesima unità lineare, dunque le aje de' due triangoli ABC, DEF, che hanno gli angoli A, D eguali, sono fra esse nella ragione di AB×AC : ED×DF. Sicchè ec.

163. Teor. 8. *Li parallelogrammi, li quali hanno le basi in ragione reciproca delle altezze sono equivalenti, e reciprocamente li parallelogrammi equivalenti hanno le basi in ragione reciproca delle altezze.*

(Fig. 74.) Li parallelogrammi AC, EG abbiano AB : EF : : HL : DK, dico che essi sono equivalenti.

Dim. Per la ipotesi AB : EF : : HL : DK, quindi il prodotto delle estreme eguaglia il prodotto delle medie, e perciò AB×DH= EF×HL; ma di questi due prodotti il primo è la misura dell' aja del parallelogrammo AC ed il secondo è la misura dell' aja del parallelogrammo EG, dunque li due parallelogrammi AC, EG hanno le aje eguali, e perciò *sono* equivalenti.

Sieno ora equivalenti li due parallelogrammi AC, EG; dico che AB : EF : : HL : DK.

Dim. Per ipotesi li due parallelogrammi AC, EG sono equivalenti, dunque $AB \times DK$ che è la misura di AC è eguale ad $EF \times HL$, che è la misura di EG; dunque le quattro quantità AB, EF, HL, DK, avendo il prodotto delle estreme eguale al prodotto delle medie, sono proporzionali, dunque li parallelogrammi AC, EG equivalenti hanno le basi in ragione reciproca della altezze. Sicchè.

164. Teor. 9. *Li triangoli che hanno le basi in ragione reciproca delle altezze sono equivalenti, e reciprocamente li triangoli equivalenti hanno le basi in ragione reciproca delle altezze.*

(Fig. 73.) Li triangoli ABC, DEF abbiamo AC : DF : : EH : BG, dico che essi sono equivalenti.

Dim Per la ipotesi AC : DF : : EH : BG, e per conseguenza AC : DF : : $\frac{1}{2}$ EH : $\frac{1}{2}$ BG quindi il prodotto $AC \times \frac{1}{2} BG$ delle estreme è eguale al prodotto delle medie $DF \times \frac{1}{2} EH$, ma di questi due prodotti il primo è la misura dell' aja del triangolo ABC, ed il secondo è la misura dell' aja del triangolo DEF, dunque il triangolo ABC è equivalente al triangolo DEF.

Sieno equivalenti li triangoli ABC, DEF, dico che AC : DF : : EH : BG.

Dim. Per la ipotesi li due triangoli ABC, DEF sono equivalenti, dunque AC$\times\frac{1}{2}$ BG che è la misura dell' aja del triangolo ABC è eguale a DF$\times\frac{1}{2}$ EH, che è la misura dell' aja del triangolo DEF; quindi le quattro quantità AC, DF, $\frac{1}{2}$ EH, ed $\frac{1}{2}$ BG sono tali, che il prodotto delle estreme eguaglia il prodotto delle medie, e perciò AC : DF : : $\frac{1}{2}$ EH : $\frac{1}{2}$ BG, ma $\frac{1}{2}$ EH : $\frac{1}{2}$ BG : : EH : BG; dunque AC : DF : : EH : BG. Sicchè ec.

165. Prob. 1. *Dato un poligono trasformarlo in un altro, che sia equivalente al poligono dato, ed abbia un lato di meno.*

(Fig. 75.) Sieno dati il poligono convesso ABCDE; ed il poligono ad angoli rientranti GIHKLM, si vogliono trasformare questi poligoni in due altri poligoni ad essi equivalenti, e che abbiano un lato di meno.

(n.o 1.) Sia in primo luogo il poligono ABCDE.

Sol. Nel poligono ABCDE si tiri una diagonale EC, che separa dal poligono dato il triangolo ADC, e per lo vertice D di questo triangolo si tiri la DF parallela ad EC, la quale si prolunghi fino a tanto, che incontri il lato BC prolungato in F, e si unisca la retta EF, è evidente che il poligono ABFE ha un lato di meno del poligono dato ABCDE; Dico che il poligono ABCDE è equivalente al poligono ABFE.

Dim. Li due triangoli EDC, EFC hanno la medesima base EC, e sono compresi fra le medesime parallele EC, DF, dunque essi sono equivalenti, a questi triangoli equivalenti si aggiunga si all' uno che all' altro lo spazio ABCE avremo ABCDE equivalente ad ABFE.

(n.° 2.) Sia in secondo luogo il poligono GHIKLM, il quale ha l'angolo MLK rientrante.

Sol. Si tiri la retta MK, la quale unisca gli estremi de' lati dell' angolo rientrante, e per lo vertice L di esso si tiri la retta LN parallela ad MK, la quale si prolunghi fino a tanto, che incontri il lato KI nel punto N, e si unisca MN; è evidente, che il poligono GHINM ha un lato di meno del poligono dato GHIKLM, si deve dimostrare, che essi sono equivalenti.

Dim. Li due triangoli LMN, LKN avendo la medesima base LN, ed essendo compresi fra le medesime parallele LN, MK sono equivalenti, si aggiunga si all' uno, che all' altro triangolo lo spazio GHINLM avremo GHIKLM equivalente al poligono GHINM. Sicchè ec.

166. Avv. Qui è buono di avvertire, che se la medesima operazione si eseguisse sopra del poligono trasformato, esso si trasformerebbe in un altro poligono, che sarebbe equi-

valente al dato, ed avrebbe due lati, di meno, ed in conseguenza di una serie di operazioni simili potremo trasformare un poligono qualunque in un triangolo ad esso equivalente.

CAP. XIV.

Della grandezza de' quadrati costrutti sopra de' lati de' triangoli.

167. Teor. 1. *In ogni triangolo rettangolo il quadrato fatto sopra della ipotenusa equivale alla somma de' quadrati fatti sopra delli cateti.*

(Fig. 76.) Rapprosenti ABC un triangolo rettangolo in B, e sopra delli suoi tre lati sieno formati li tre quadrati AD, AH, CG; Dico che il quadrato AD fatto sopra della ipotenusa equivale alla somma AH + CG delli quadrati fatti sopra delli cateti AB, BC.

Dim. Dal punto B si cali la perpendicolare BK sopra di ED, la quale sarà anche perpendicolare sopra di AC; e parallela ad AE, CD, e si uniscano le rette BE, KC.

Per la ipotesi l' angolo ABC è retto, e l' angolo HBA come angolo del quadrato AH è anche retto, dunque essi essendo presi insieme eguali a due retti, le rette HB, BC formeranno una retta continuata, e poichè HB è parallela ad IA, tutta HC è parallela ad IA. Con lo stesso raziocinio si dimostra che

AB, BG formano una retta continuata AG, la quale è parallela a CF.

L'angolo IAB come angolo del quadrato AH è retto, similmente l'angolo CAE come angolo del quadrato AD è anche retto, ma gli angoli retti sono eguali, dunque l'angolo IAB = CAE, si aggiunga si all'uno che all'altro di questi angoli eguali l'angolo BAC, avremo l'angolo IAC = BAE, quindi li due triangoli IAC, BAE, avendo il lato AI = AB come lati del quadrato AH, il lato AC = AE, come lati del quadrato AD, e l'angolo IAC compreso fra li due lati del primo eguale all'angolo BAE compreso fra li due lati del secondo, sono eguali. In oltre il quadrato AH, ed il triangolo IAC hanno la medesima base IA, e sono compresi tra le medesime parallele IA, HC, dunque il quadrato AH è doppio del triangolo IAC; Similmente il triangolo BAE ed il rettangolo AK hanno la medesima base AE, e sono compresi fra le medesime parallele AE, BK, dunque il rettangolo AK è doppio del triangolo BAE, dunque il quadrato AH equivale al rettangolo AK; con lo stesso raziocinio si dimostra, che il quadrato CG equivale al rettangolo CK, dunque la somma delli quadrati AH, CG equivale alla somma delli rettangoli AK, KC; ma AK + KC = AD; dunque il quadrato AD fatto sopra della ipotenusa equivale alla somma de' quadrati AH, CG fatti sopra delli cateti. Sicchè ec.

168. Cor. 1. Li due quadrati AH, CG sono equivalenti alli rettangoli AK, KC; dunque sarà AH : CG : : AK : KC; ma li rettangoli AK, KC hanno la medesima altezza AE, e perciò sono come le basi AL, LC; dunque AH : CG : : AL : LC; dal che conchiudiamo generalmente, che se dal vertice dell' angolo retto di un triangolo rettangolo si abbassa una perpendicolare sopra della ipotenusa, li quadrati fatti sopra delli cateti sono fra essi come li segmenti della ipotenusa adjacenti alli medesimi cateti.

Dippiù il quadrato AD sta al rettangolo AK come AC : AL, ma AK equivale al quadrato AH, dunque AD : AH : : CA : AL, con lo stesso raziocinio dimostreremo che AD : CG : : AC : CL, e conchiuderemo generalmente, che il quadrato della ipotenusa sta al quadrato fatto sopra uno de' cateti come la ipotenusa al segmento della ipotenusa adjacente al medesimo cateto.

169 Cor. 2. (Fig. 77.) Sopra de' lati del triangolo retangolo sieno costrutti li tre poligoni simili P, Q, R, li quali abbiano per lati omologhi li tre lati del triangolo. Noi abbiamo dimostrato, che li poligoni simili sono fra essi come li quadrati delli lati omologhi AB, BC, AC; Ma noi abbiamo dimostrato che la somma de' quadrati di AB, e di BC equivale al quadrato di AC, dunque anche la somma delli poligoni P, e Q equivale al poligono R; dal che conchiudiamo generalmente,

che se sopra delli tre lati di un triangolo rettangolo si costruiscono tre poligoni simili, li quali abbiano per lati omologhi li lati di esso, il poligono fatto sopra della ipotenusa equivale alla somma delli poligoni simili fatti sopra delli cateti.

Dippiù essendo $AC^2 : AB^2 : BC^2 :: AC : AD : DC$, saranno ancora $R : P : Q :: AC : AD : DC$; Dal che generalmente conchiudiamo, che se dal vertice dell' angolo retto di un triangolo rettangolo si abbassa una perpendicolare sulla ipotenusa, e si costruiscono sopra delli lati del triangolo tre poligoni simili, li quali abbiano per lati omologhi tali lati, sarà il poligono della ipotenusa a quello fatto sopra di uno de' cateti come la ipotenusa al segmento di essa, che è adjacente al medesimo cateto, ed i poligoni costrutti sopra de' cateti saranno fra essi come li segmenti della ipotenusa alli medesimi cateti adjacenti.

170. Teor. 2. *In ogni triangolo ottusangolo il quadrato fatto sopra del lato opposto all' angolo ottuso equivale alla somma de' due quadrati formati sopra de' due lati, che comprendono l' angolo ottuso unita al doppio del rettangolo fatto da uno de' lati, che comprendono l' angolo e dal segmento, che al medesimo lato aggiugne la perpendicolare calata sul suo prolungamento dal vertice dell' angolo ad esso opposto.*

(Fig. 78.) Rappresenti ABC un triangolo il quale abbia l' angolo ACB ottuso, e dal vertice A dell' angolo opposto al lato BC si cali sopra di BC prolungato la perpendicolare AD; Dico che il quadrato fatto sopra di AB lato opposto all' angolo ottuso C equivale alla somma delli quadrati formati sopra delli due lati AC, CB, che comprendono l' angolo ottuso C unita al doppio del rettangolo formato dal lato BC, e dal segmento CD, che al medesimo lato aggiugne la perpendicolare AD, che dal vertice dell' angolo A ad esso opposto è calata sul prolungamento di esso.

Dim. La retta BD è somma delle due rette BC, CD, dunque $BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC \times CD$, a queste quantità eguali si aggiunga di comune AD^2 avremo $BD^2 + AD^2 = BC^2 + CD^2 + AD^2 + 2BC \times BD$; Ma essendo il triangolo ADB rettangolo in D, si ha $BD^2 + AD^2 = AB^2$, e per lo triangolo ADC rettangolo in D si ha $CD^2 + AD^2 = AC^2$, quindi sostituendo avremo $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \times CD$. Sicchè ec.

171. Teor. 3. *In qualsivoglia triangolo il quadrato fatto sopra del lato opposto ad uno de' suoi angoli acuti equivale alla somma delli quadrati fatti sopra delli due lati, li quali comprendono l' angolo acuto diminuita del doppio del rettangolo fatto da uno de' lati, che comprendono l' angolo acuto, e dal segmento adjacente all' angolo acuto che dal medesimo lato taglia la perpendicolare calata sopra*

di esso dal vertice dell' angolo ad esso opposto.

(*Fig.* 79.) Nel triangolo ABC sia l' angolo B acuto, e sopra del lato BC prolungato, se bisogna, sia calata la perpendicolare AD, la quale taglia dal lato BC il segmento BD adjacente al medesimo angolo; Dico che il quadrato fatto sopra del lato AC opposto all' angolo acuto ABC equivale alla somma de' due quadrati fatti sopra delli lati AB, BC, che comprendono l' angolo acuto ABC diminuita del doppio del rettangolo fatto da uno di si fatti lati BC, e dal segmento BD adjacente al medesimo angolo, che da si fatto lato BC taglia la perpendicolare calata sopra di esso dal vertice dell' angolo A ad esso opposto. Cioè dico che $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$.

Dim. La retta CD è differenza delle due rette BC, BD; dunque la somma delli due quadrati fatti sopra di BC, e di BD equivale al quadrato della differenza DC unito al doppio del rettangolo fatto da BD e da BC, cioè avremo $BC^2 + BD^2 = CD^2 + 2BD \times BC$; si aggiunga si all' una, che alla altra di queste quantità eguali il quadrato di AD, avremo $BC^2 + BD^2 + AD^2 = CD^2 + AD^2 + 2BD \times BC$; ma a cagione delli triangoli ADB, ADC rettangoli in D, abbiamo $BD^2 + AD^2 = AB^2$, e $CD^2 + AD^2 = AC^2$, dunque sostituendo avremo $AB^2 + BC^2 = AC^2 + 2BD \times BC$, e togliendo si dall' una, che dall' altra di queste quantità eguali la quantità $2BD \times BC$, avremo $AC^2 = AB^2 + BC^2 -$

$2BD \times BC$; cioè il quadrato del lato AC opposto all' angolo acuto B è equivalente alla somma de' quadrati di AB, e di BC lati, che comprendono l' angolo acuto B diminuita di due volte il rettangolo fatto dal lato BC, che è uno de' lati, che comprendono l' angolo acuto B, e dal segmento BD, adjacente all' angolo acuto B, che dal medesimo lato taglia la perpendicolare calata sopra di esso dal vertice dell' angolo A ad esso opposto. Sicchè. ec.

172. Teor. 4. *L' angolo di un triangolo è retto, ottuso, o acuto secondo che il quadrato fatto sopra del lato ad esso opposto è eguale, maggiore, o minore della somma de' quadrati fatti sopra de' lati, che lo comprendono.*

(Fig. 80) Nel triangolo ABC sia il quadrato di AC eguale alla somma de' quadrati fatti sopra AB, e BC; dico che l' angolo ABC è retto.

Dim. Dal punto B si inalzi la perpendicolare BD sopra di BC, e da essa si tagli $BD = AB$, e si unisca DC.

Per costruzione $BD = AB$, dunque $AB^2 = BD^2$, aggiugnendo a queste quantità eguali il quadrato di BC, avremo $AB^2 + BC^2 = BD^2 + BC^2$, ma per costruzione l' angolo DBC è retto, e perciò $CD^2 = DB^2 + BC^2$, e per ipotesi $AC^2 = AB^2 + BC^2$, dunque $AC^2 = CD^2$, e perciò $AC = CD$; quindi li due triangoli ABC, CBD hanno $AB = BD$, il lato BC comune, ed il terzo lato AC dimostrato eguale a CD, dunque essi avranno le rimanenti parti eguali, e perciò l' angolo $ABC = CBD$; ma CBD per la costruzione è retto, dunque anche l' angolo ABC è retto.

Con lo stesso raziocinio si dimostra, che se $AC^2 > AB^2 + BC^2$, l' angolo ABC è ottuso; e che se $AC^2 < AB^2 + BC^2$, l' angolo ABC è acuto. Sicchè ec:

173. Teor. 5. *Se dal vertice di un angolo di un triangolo si tiri una retta al punto in cui il lato opposto a questo angolo è diviso in due parti eguali, la somma de' quadrati fatti sopra li due lati, che comprendono l' angolo sarà il doppio della somma de' quadrati fatti uno sopra la retta tirata, l' altro sopra la metà del lato da essa diviso in due parti eguali.*

(Fig. 81.) Dal vertice A dell' angolo BAC al punto E, in cui il lato BC è diviso in due parti eguali, sia tirata la retta AE; Dico che $AB^2 + AC^2 = 2AE^2 + 2BE^2$.

Dim. Dal punto A si cali sopra BC la perpendicolare AD.

Poichè il triangolo AEB ha l' angolo AEB ottuso, avremo $AB^2 = BE^2 + AE^2 + 2BE \times ED$, e per lo triangolo AEC, il quale ha l' angolo AEC acuto, noi abbiamo $AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2CE \times ED = AE^2 + EB^2 - 2BE \times ED$; ed addizionando queste due eguaglianze membro a membro, avremo $AB^2 + AC^2 = 2AE^2 + 2EB^2$. Sicchè ec.

174. Prob. I. *Trovare il lato del quadrato equivalente alla somma di più quadrati dati.*

(Fig. 82.) Sieno A, B, C li lati di tre quadrati dati, noi ci proponiamo di trovare il lato del quadrato equivalente alli quadrati fatti sopra A, B, C.

Sol. Si formi l' angolo retto DEF, e sopra di uno delli suoi lati ED si tagli EG = A, sopra dell' altro lato EF si tagli EH = B, e si unisca GH, è evidente, che essendo l' angolo E retto sarà $GH^2 = EG^2 + EH^2 = A^2 + B^2$. Indi si tagli sopra di ED la EI = GH, sarà anche $EI^2 = A^2 + B^2$, Finalmente si tagli sopra di EF la EK = C, e si unisca IK. Dico che IK è il lato del quadrato dimandato.

Dim. Per lo triangolo IEK rettangolo in E abbiamo $IK^2 = IE^2 + EK^2 = A^2 + B^2 + C^2$. Sicchè ec.

175. Prob. 2. *Dati li lati di due quadrati diseguali, trovare il lato del quadrato equivalente alla differenza di essi.*

(Fig. 83.) Sieno A, B li lati de' due quadrati dati, noi ci proponiamo di trovare il lato del quadrato equivalente alla differenza delli quadrati di A, B.

Sol. Si formi l' angolo retto LMN, e dal lato MN si tagli MP eguale al minore B, e PN eguale al lato maggiore A; Indi col centro P, e l' intervallo PN si descriva l' arco NR, che incontra LM nel punto R; Dico che MR è il lato del quadrato dimandato.

Dim. Si unisca RP. Il triangolo RMP è rettangolo in M, dunque $MR^2 = PR^2 - PM^2$; ma PR = PN = A, MP = B, dunque $MR^2 = A^2 - B^2$. Sicchè ec.

TEORIA DEL CERCHIO

CAP. I.

Nozioni preliminari.

176. Abbiamo detto, che noi chiamiamo cerchio, o circolo la figura piana, la quale è terminata attorno attorno da una linea curva, che rientra in se stessa, e che dippiù ha dentro di se un punto egualmente distante da tutti li punti della curva, a questo punto abbiamo dato il nome di *centro*, alla curva quello di *circonferenza* o *periferia*, ed alle rette eguali, che dal centro si tirano alla periferia quello di *raggi*.

177. Una linea retta non può incontrare la circonferenza di un cerchio in più di due punti, poichè se la incontrasse in più di due punti, sì fatti punti appartenendo alla periferia sarebbero egualmente distanti dal centro, ed allora del centro si potrebbero calare sopra di una retta più di due rette eguali.

178. Si chiama *arco* di cerchio qualunque parte della circonferenza, e si dice *corda* la retta, che unisce due punti della circonferenza; e

si dice, che la corda *sottende* l'arco gli estremi del quale essa unisce, e l' arco si dice *sotteso* della corda.

179. La corda, che passa per lo centro di un cerchio si dice *diametro* del cerchio; e poichè questo diametro è sempre composto da due raggi, è evidente, che tutti li diametri di un medesimo cerchio sono eguali, ed i raggi possono anche chiamarsi *semi diametri.*

180. La porzione dell' aja del cerchio, che è terminata da un arco, e dalla sua corda si chiama *segmento o porzione* del cerchio.

181. È evidente, che il diametro di un cerchio divide in due parti eguali sì il cerchio, che la sua periferia.

(Fig. 84.) In fatti se nel cerchio ABCD si tiri il diametro AC, noi possiamo considerare il segmento inferiore rivoltato sopra del diametro AC, e posto sopra del segmento superioreABC, e vediamo chiaramente, che l' arco ADC dovrà combaciare con l' arco ABC, altrimenti vi sarebbero nell' uno, o nello altro arco de' punti disegualmente distanti dal centro, il che è contrario alla natura del cerchio.

182. È ancora evidente, che li cerchi descritti con raggi eguali sono eguali, e reciprocamente li cerchi eguali sono descritti con raggi eguali.

(Fig.85.)In fatti sieno li cerchi ABK, FGH descritti con li raggi CA, OF eguali, e si concepisca il cerchio FGH sovraposto al cerchio ABD in maniera, cha il centro O cada sul centro C, ed il raggio OF sopra del raggio CA; essendo per la ipotesi OF = CA, il punto F cadrà sopra del punto A, e per conseguenza tutti gli altri punti della periferia FGH dovranno trovarsi sopra della periferia ABK, altrimenti, se non vi si trovassero, caderebbero o dentro, o fuori di essa, ed i raggi di un medesimo circolo sarebbero diseguali, il che è assurdo.

Se poi li cerchi sono eguali è evidente, che posti l' uno sopra l' altro debbono combaciare, e perciò li raggi di essi si confonderanno, e saranno eguali.

CAP. II.

Delle corde de' cerchi considerate relativamente agli archi, che esse sottendono, e degli archi relativamente alle corde, che li sottendono.

183. Teor. 1. *Nelli cerchi eguali gli archi eguali sono sottesi da corde eguali, e reciprocamente le corde eguali sottendono archi eguali, purche gli archi siano della medesima specie, cioè o ambi due minori, o ambi due maggiori della semiperiferia.*

(Fig. 86.) Nelli due cerchi AHB, EGF eguali, sieno presi li due archi AH, EG, dico 1. che se l' arco AH = EG, anche la corda AH eguale alla corda EG; 2. che se la corda AH = EG, anche l' arco AH è eguale all' arco EG.

Dim. I. Per A, E si tirino li due diametri AB, EF, questi diametri saranno eguali, e perciò il semicircolo AHB potrà essere adattato esattamente sopra del semicircolo EGF, e la semicirconferenza AHB combacerà con la semicirconferenza EGF, ma per ipotesi l' arco AH = EG, dunque essendo il punto A caduto sul punto E, anche il punto H deve cadere sopra del punto G, ma da un punto ad un altro non si può tirare più di una linea retta, dunque la corda AH combacia con la corda EG, e perciò AH = EG. Sicchè ec.

2. Sia la corda AH = EG; dico che l' arco AH = EG.

Dim. Si tirino li raggi CH, OG; Li due triangoli ACH, EOG avendo li tre lati dell' uno respettivamente eguali alli tre lati dell' altro, sono eguali, e perciò l' angolo ACH = EOG; quindi se si concepisce il semicircolo AHB sovraposto al semicircolo EGF in modo, che li raggi eguali AC, EO combacino, per la eguaglianza degli angoli ACH, EOG il raggio CH cadrà sul raggio OG, ed il punto H sul punto G, e perciò l' arco AH combacerà con l' arco EG, e saranno li due archi AH, EG eguali. Sicchè ec.

184. Teor. 2. *Se in un medesimo cerchio, o in due cerchi eguali si prendono due archi diseguali ambi due minori della semicircon-*

ferenza, l' arco maggiore sarà sotteso dalla corda maggiore, e reciprocamente la corda maggiore sottenderà l' arco maggiore.

(Fig. 87.) Nel cerchio AHB sieno presi li due archi AD, AH minori della semicirconferenza, e sieno AD, AH le corde, dalle quali essi sono sottesi; Dico 1. Che l' arco maggiore ADH è sotteso dalla corda AH, la quale è maggiore della corda AD, che sottende l' arco minore AMD.

2. Che se la corda AH è maggiore di AD, anche l' arco ADH sotteso dalla corda maggiore AH è maggiore dell'arco AMD sotteso dalla corda minore AD.

Dim. Si tirino li raggi CH, CD, CA.

Li due triangoli ACD, ACH, hanno li due lati AC, CH respettivamente eguali alli due lati, CA CD, e l' angolo HCA visibilmente maggiore dell' angolo DCA, dunque sarà il lato AH opposto all' angolo maggiore anche maggiore del lato AD opposto all' angolo minore.

Dim. 2. Nelli due triangoli ACH, ACD li due lati AC, CH dell' uno sono respettivamente eguali alli due lati AC, CD, ed il lato AH maggiore di AD, dunque l' angolo ACH sarà anche maggiore dell' angolo ACD, e perciò l' arco ADH è anche maggiore dell' arco AMD. Sicchè ec.

185. Avv. 1. Questa proposizione è vera quando gli archi, che si considerano sono minori della mezza circonferenza, quando poi essi

sono maggiori della mezza circonferenza, accade tutto il contrario, poichè quando l' arco cresce la corda diminuisce, e reciprocamente.

186. Avv. 2. Avendo dimostrato, che in due cerchi eguali corde eguali sottendono archi eguali, possiamo sciogliere il seguente prob.

187. Prob. *Dati due archi appartenti ad un medesimo cerchio, o a cerchi eguali, determinare il rapporto, che hanno le lunghezze di essi.*

(Fig. 88.) Sieno dati li due archi AB, CD appartenenti a due cerchi eguali, e proponiamoci di trovare il rapporto di AB a DC.

Soluz. Si prenda la corda dell' arco CD, e si veda quantevolte essa può essere riportata sull' arco AFB, supponiamo, che essa vi sia riportata 2 volte fino al punto F, è evidente, che l' arco AB è composto dalle due parti BF, ed FA, ma BF = 2CD; dunque avremo.

1.° . . . BA = 2CD + AF.

Indi si prenda la corda dell' arco AF, e si porti sopra dell' arco CD, e supponiamo, che essa si possa adattare sopra CD una volta, e vi resti l' arco CE, avremo

2.° . . . DC = AF + EC.

Finalmente la corda dell' arco EC si riporti sull' arco AF, e supponiamo, che essa vi si possa adattare 3. volte esattamente, ed avremo

3.° . . . AF = 3CE.

Essendo AF = 3CE, se nella eguaglianza

2, in vece di AF sostituiamo 3EC avremo DC = 3EC + EC = 4EC.

Essendo nella eguaglianza 1.ª l' arco BA = 2CD + AF; se sostituiamo in vece di 2CD 2 volte 4EC ossia 8EC, ed in vece di AF sostituiamo 3CE, avremo

BA = 8EC + 3EC = 11EC, quindi avremo AB : DC : : 11EC : 4EC : : 11 : 4, ed avremo così determinato il rapporto delli due archi dati AB, CD.

188. Avv. Qui avvertiremo, che la operazione si arresterà, quando saremo giunti ad un residuo, il quale è esattamente contenuto nel residuo precedente, il che accade quando gli archi sono commensurabili, quando gli archi dati sono incommensurabili essa si arresterà, quando saremo giunti ad un residuo tale, che il residuo seguente sfugge alli nostri sensi per la sua piccolezza, ed in questo caso il rapporto trovato non e esatto, ma soltanto approssimativo.

C A P III.

Del sito, che ha il centro dentro del cerchio.

189. Teor. 1. *Se dal punto, nel quale una corda è divisa in due parti eguali si eleva sopra di essa la perpendicolare, questa passerà per lo centro, e dividerà in due parti eguali l' arco sotteso dalla corda.*

(Fig. 89.) Nel cerchio ACBD sia tirata la corda AB, e dal punto E, in cui essa è divisa in due parti eguali, sia ad essa elevata la perpendicolare CD. Dico 1 che CD deve passare per lo centro. 2.° Che essa divide l' arco ADB sotteso dalla corda AB in due parti eguali nel punto D.

Dim. Abbiamo dimostrato, che la perpendicolare inalzata sopra di una retta dal punto, in cui essa è divisa in due parti eguali, deve passare per tutti li punti, che sono ad eguale distanza dagli estremi di essa, ma essendo li punti A, B sulla circonferenza ABC essi sono ad eguale distanza dal centro, dunque la retta CD passa per lo centro.

2. Si tirino le corde AD, BD. Il punto D appartenendo alla retta CD elevata perpendicolarmente sopra di AB dal punto in cui essa è divisa in due parti eguali è egualmente distante dalli punti A, B, quindi le corde AD, BD sono eguali, ma le corde eguali sottendono archi eguali, dunque gli archi AD BD sono eguali. Sicchè.

190. Cor. 1. Noi abbiamo dimostrato, che due punti determinano la posizione di una retta, ma il centro di un cerchio, il punto nel quale una corda è divisa in due parti eguali, ed il punto in cui l' arco sotteso da tale corda è diviso in due parti eguali sono situati sopra di una medesima retta, dunque tutte le volte, che noi sappiamo, che una

retta passa per due di sì fatti punti, conchiudiamo, che deve passare anche per lo terzo.

191. Cor. 2. Noi abbiamo anche dimostrato, che da un punto si può calare una sola perpendicolare sopra di una data retta, quindi conchiudiamo, che la perpendicolare calata dal centro di un cerchio sopra di una corda, la divide in due parti eguali, e la perpendicolare calata dal punto, in cui un arco è diviso in due parti eguali sopra della corda, che lo sottende, divide la corda in due parti eguali.

192. Cor. 3. La verità dimostrata ci da un mezzo facile da dividere in due parti eguali un arco di cerchio, poichè basterà elevare sopra della corda, che sottende l'arco, la perpendicolare dal punto in cui essa è divisa in due parti eguali.

193. Cor. 4. Le stessa verità ci da un mezzo anche facile per trovare il centro di un dato circolo. In fatti sia dato il cerchio ABC del quale si cerca di determinare il centro.

(Fig. 90.) Si prendano ad arbitrio li tre punti A, D, C sopra della circonferenza ADC, e si uniscano le corde AD, DC, indi si dividano in due parti eguali la corda AD nel punto C, e la corda DC nel punto G, e dalli punti C, G si alzino sopra AD, DC le perpendicolari CF, GH; noi abbiamo dimostrato, che le perpendicolari inalzate sopra due rette, che si intersecano debbono incontrarsi, quindi le due rette CF, GH debbono incontrarsi, sia O il punto del loro incontro, è evidente, che questo punto O è il centro dimandato del cerchio ABC.

In fatti essendo CF perpendicolare alla corda AD elevata dal punto C, in cui essa è divisa in due parti eguali, essa deve passare per lo centro, per la medesima ragione essendo GH elevata perpendicolarmente sopra DC dal punto G, in cui essa è divisa in due parti eguali, deve anche passare per lo centro, ma il centro di un cerchio è un punto solo; dunque sarà il punto O, che è il punto unico, che le rette CF, GH hanno comune. Sicchè ec,

194. Cor. 5. Dalla stessa verità ricaviamo ancora il metodo per fare passare per tre punti dati non in linea retta, la circonferenza di un cerchio.

(Fig. 91) Sieno dati li tre punti A, B, C non in linea retta, e proponiamoci di fare passare la circonferenza di un cerchio per tali punti.

Si uniscano le rette AB, BC esse saranno una corda dell'arco, che possa per A, B, e l'altra corda dell'arco, che passa per B, C; si dividano AB in due parti eguali nel punto D, e BC in due parti eguali nel punto E, e dalli punti D, E si elevino DO perpendicolare ad AB, ed EO perpendicolare a BC, queste perpendicolari si debbono incontrare, e sia O il punto dell'incontro di esse. Dico, che *questo* punto O è il centro del cerchio, che *con* la sua periferia passa per li tre punti *dati* A, B, C, talmente che facendo centro il punto O, ed intervallo una delle tre rette OA, OB, OC avremo il cerchio dimandato; imperocchè dovendo li tre punti A, B, C trovarsi nella circonferenza, le AB, BC sono due corde, il centro deve trovarsi nelle perpendicolari DO, EO, che le dividono in due parti eguali, e poichè il punto unico, che esse hanno comune è il punto O, ne segue che il punto O è il centro dimandato.

195. Avv. (Fig. 92.) Qui è buono di avvertire, che li tre punti dati non possono essere situati sopra di una retta, poichè in tale caso le perpendicolari DE, FG essendo perpendicolari ad una medesima retta sarebbero parallele, e non potendosi incontrare non determinerebbero alcun centro; in fatti in tale caso niun cerchio può passare per gli tre punti dati, poichè se ve ne passasse uno, allora la circonferenza di questo cerchio sarebbe incontrata da una retta in più di due punti, il che è dimostrato impossibile.

196. Cor. 6. (Fig. 91.) Qui consideriamo, che la costruzione precedente somministra un solo punto per centro del cerchio dimandato, ed un solo raggio, poichè le rette OA, OC essendo eguali ad OB, come oblique, che si discostano egualmente dalli piedi delle perpendicolari OD, OE, sono tutte tre eguali, dal che conchiudiamo, che per tre punti dati non in

linea retta non può passare più di un cerchio, e per conseguenza, che un cerchio è determinato per tre punti dati, che due cerchi, che hanno tre punti comuni si confondono, e che due cerchi, che si intersecano non possono intersecarsi in più di due punti.

197. (Fig. 93.) Cor. 7. Da quanto abbiamo dimostrato è evidente, che due punti dati non determinano un cerchio; in fatti se ci proponiamo di descrivere un cerchio, che passi per li punti A, B, noi possiamo descrivere una infinità di cerchi, li quali soddisfino a queste condizioni.

Imperocchè se dal punto D, nel quale la retta AB è divisa in due parti eguali, noi inalziamo la perpendicolare DE, tutti li punti di essa sono ad eguale distanza dalli punti A, B estremi della retta AB, e perciò prendendo per centro qualunque punto della retta DE, con l' intervallo determinato dalla retta, che unisce questo punto col punto A, si descrive un cerchio, esso passerà per li punti A, B, e come sopra di DE si possono prendere infiniti punti, infiniti cerchi possono avere per corda AB; Dal che ricaviamo generalmente, che due punti non bastano per determinare un cerchio, che tre punti bastano, e sono necessarj, perchè un cerchio sia determinato, e che più di tre punti sono sovrabbontanti.

198. Avv. Archimede stabilisce per assioma, o principio geometrico, che due linee

curve, o composte di rette, le quali terminando agli stessi punti, rivolgono la concavità dalla medesima parte, quella è maggiore, che comprende l' altra dentro di se, quindi se due archi di cerchio sono sottesi da una medesima corda, l' arco esterno è maggiore di quello, che da esso è compreso, noi in conseguenza di questo principio dimostreremo il seguente teorema.

199. Teor. 1. *Se le estremità di una retta si uniscano per mezzo di due archi di cerchio, ciascuno delli quali sia minore della semiferia del cerchio a cui esso appartiene, il minore di tali archi appartiene ad una circonferenza descritta con un raggio maggiore di quello, con cui è descritta la circonferenza, a cui appartiene l' arco maggiore.*

(Fig· 94.) Sia la retta AB corda delli due archi ADB, ACB, li quali sieno ciascuno minore della semiperiferia, a cui esso appartiene; Dico che l' arco minore ACB appartiene ad una circonferenza, la quale è descritta con un raggio maggiore di quello, con cui è descritta la circonferenza, a cui appartiene l' arco maggiore ADB.

Dim. Dal punto M, nel quale la corda AB è divisa in due parti eguali, si inalzi sopra di essa la perpendicolare DN; per quello che abbiamo dimostrato essa passerà per gli centri delli cerhi alli appartengono gli archi ADB, ACB; si uniscano le corde AD, AC, indi dal punto G, in cui la corda AD è divisa in due parti eguali si inalzi sopra di essa la perpendicolare GK, la quale si prolunghi fino a tanto, che incontri DN nel punto K, è evidente, che il punto K è il centro del cerchio, a cui appartiene l' arco ADB, e tirata la AK, sarà AK raggio del cerchio a cui appartiene lo stesso arco ADB.

Similmente si divida la corda AC in due parti eguali nel punto F, e si inalzi sopra di AC la perpendicolare FH, la quale si prolunghi fino a tanto, che essa incontri DN nel punto H, è evidente, che il punto H è il centro del cerchio, a cui appartiene l' arco ACB, e tirata la retta AH essa sarà il raggio di si fatto cerchio; si deve dimostrare che AH è maggiore di AK.

Nel triangolo AMK, l'angolo AMK è retto per costruzione, dunque l'angolo AKM è un angolo acuto, e perciò il suo supplemento AKH è ottuso; quindi essendo nel triangolo AKH, l'angolo AKH essendo ottuso, l'angolo AHK è acuto, e perciò minore di AKH; ma in un triangolo il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore del lato opposto all' angolo minore, dunque AH è maggiore di AK; dunque il raggio della periferia a cui appartiene l'arco minore è maggiore del raggio della periferia, a cui appartiene l' arco maggiore.

CAP. IV.

Dell'ordine, che serbano nella loro grandezza le corde di un cerchio.

200. Teor. 1. *Di tutte le corde che si possono tirare dentro di un cerchio il diametro è la massima.*

(Fig. 95.) Rappresenti ABC un cerchio nel quale si tirino il diametro AC, e qualsivoglia corda EF; Dico che AC è maggiore di EF.

Dim. Si uniscano li raggi OE, OF. Nel triangolo EOF la somma $EO+OF$ ossia $AC>EF$. sicchè ec.

201. Teor. 2. *Le corde, che sono ad eguali distanze dal centro di un cerchio sono eguali, e reciprocamente le corde eguali hanno eguali distanze dal centro.*

(Fig. 96) Sieno AB, ED due corde tirate nel cerchio ABD, e dal centro C sieno calate sopra di esse le perpendicolari CF, CG, le quali indicano le distanze, che le corde AB, ED hanno dal centro, e sia $CF=CG$; dico che $AB=ED$.

Dim. Si uniscano li raggi CB, CD. Li due triangoli rettangoli CFB, CGD hanno le ipotenuse CB, CD eguali, come raggi dello stesso cerchio, ed hanno di più li due cateti CF, CG eguali per ipotesi, dunque avranno le altre parti respettivamente eguali, e perciò $FB=GD$; ma FB è la metà di AB, e GD è la metà di ED; dunque anche AB=ED. sicchè ec.

2. Sieno ora AB=ED; dico che le distanze CF, CG, che esse hanno dal centro sono eguali.

Le rette CF, CG, che passano per lo centro, sono perpendicolari alle corde AB, ED, dunqne esse le dividono in due parti eguali, ma per ipotesi AB=ED, dunque FB=GD; ed i due triangoli rettangoli BFC, CGD hanno le ipotenuse CB, CD eguali, come raggi del medesimo cerchio, ed i cateti FB, GD eguali, dunque essi avranno le altre parti respettivamente eguali, e perciò CF=CG. sicchè ec.

202. Teor. 3. *Le corde, che hanno minori distanze dal centro sono maggiori di quelle, che hanno distanza maggiore dal centro.*

(Fig. 97) Sieno nel cerchio ABCD tirate le due corde AB, CD, e dal centro O sieno calate sopra di esse le perpendicolari OE, OF, e sia OF>OE; Dico che DC<AB.

Dim. Sopra di OE prolungata, si tagli OK=OF, e si tiri LM parallela ad AB. Le corde LM, DC hanno le distanze OK, OF dal centro, le quali per costruzione sono eguali, dunque anche la corda LM=DC, quindi se dimostriamo LM < AB, avremo dimostrato che DC < AB.

Si uniscano li raggi OA, OB, OL, OM; Li due triangoli OAB, LOM hanno li due lati AO, OB dell' uno respettivamente eguali alli lati LO, OM dell' altro, e l' angolo LOM < AOB, dunque avranno il lato LM opposto all' angolo minore LOM minore del lato AB opposto all' angolo maggiore AOB, dunque anche DC, che è eguale ad LM, è minore di AB. sicchè ec.

CAP. V.

Dell' ordine, che serbano nella loro grandezza le rette tirate alla circonferenza di un cerchio da un punto esistente dentro del cerchio diverso dal centro, o da un punto esistente fuori del cerchio tanto alla parte concava, quanto alla parte convessa della circonferenza di esso.

203. Teor. 1. *Se da un punto esistente dentro di un cerchio diverso dal centro si tirino alla circonferenza di esse quante rette si vogliono 1. di tutte esse la massima è quella, che passa per lo centro, 2 La minima è la restante porzione del diametro. 3 Delle altre quelle, che sono più vicine alla massima sono maggiori di quelle, che ne sono più lontane, 4 Ogni una di esse fuori della massima, e della minima ne può avere una altra sola, che sia ad essa eguale.*

(Fig. 98) Dal punto A esistente dentro del cerchio BDC diverso dal centro O sieno tirate il diametro BC, e le rette AE, AD. Dico 1. Che tra tutte queste rette la AB, che passa per lo centro è la massima 2 Che AC, la quale è la restante porzione del diametro è la minima. 3 Che AE è maggiore di AD, la quale si discosta più di essa dalla massima 4 Che AD ne può avere una altra, che sia ad essa eguale 5. Che non può averne più di una sola eguale.

Dim. 1 Si tiri il raggio OE.

Li raggi OE, OB sono eguali, si aggiunga ad essi di comune OA, avremo BO + OA ossia BA = EO + OA; ma EO + OA è la somma di due lati del triangolo EOA, perciò è maggiore di AE, dunque anche BA > AE; con lo stesso raziocinio si dimostra essere BA maggiore di qualunque altra retta dal punto A tirata alla circonferenza, e perciò essa è la massima.

2. Si tiri OD.

Nel triangolo DOA il lato DO < DA + AO; ma DO = OC; dunque OC < DA + AO; se ne tolga di comune OA, resterà AC minore di AD, con lo stesso raziocinio si dimostra che AC è minore di qualunque altra retta dal punto A tirata alla circonferenza, dunque AC è la minima.

3. Si tirino OD, OE.

Li due triangoli EOA, DOA hanno il lato OA comune, OE = OD, e l' angolo EOA > DOA, dunque AE > AD; e perciò la retta più vicina alla massima è maggiore di quelle, che ne sono più distanti.

4. Nel punto O si faccia l' angolo AOF = DOA, e si unisca AF.

Nelli due triangoli DOA, AOF li lati OD, OF sono eguali, il lato OA è ad essi comune, e l' angolo DOA = AOF, dunque AD = AF; sicchè AD ne può avere una altra eguale.

5. Se dal punto A si tirasse alla circonferenza una altra retta, questa si accosterebbe, o si discosterebbe più di AF dalla massima, e perciò sarebbe di essa maggiore, o minore, dunque AD può avere la sola AF, che ad essa sia eguale. Sicchè ec.

204. Teor. 2. *Di tutte le infinite rette, che da un punto esistente fuori di un cerchio si possono tirare sì alla parte concava, che alla parte convessa della periferia, la massima è quella, che giugne alla parte concava, e passa per lo centro, la minima è quella, che giugne alla parte convessa, e prolungata passerebbe per lo centro; delle altre, che giungono alla parte concava quelle, che sono più vicine alla massima sono maggiori di quelle, che se ne allontanano davvantaggio; di quelle che giungono alla parte convessa, quelle, che sono più vicine alla minima sono minori di quelle, che ne sono più lontane; e tanto di quelle che giungono alla parte concava, quanto di quelle, che giungono alla parte convessa ogni una, ad eccezione della massima, e della minima, può averne una altra sola, che sia ad essa eguale.*

(Fig. 99.) Dal punto A esistente fuori del cerchio BCD sieno tirate le rette AB, che giugne alla parte concava passando per lo centro; la AG, che giugne alla parte convessa, e prolungata passerebbe per lo centro, le due AH, AC, che giungono alla parte concava, delle quali AH sia più vicina di AC ad AB; le due AK, AD, che giungono alla parte convessa, e sia AK più vicina di AD ad AG Dico 1. Che di tutte queste rette AB è la massima. 2. Che AG è la minima. 3. Che di quelle, che giungono alla parte concava $AH > AC$; 4 Di quelle che giungono alla parte convessa $AK < AD$. 5. Che AC ne può avere una altra, che sia ad essa eguale. 6. Che AD ne può avere una altra, che sia ad essa eguale; 7. Che si AC, che AD non può averne più di una sola, che ad essa sia eguale.

Dim. 1. Si uniscano li raggi OH, OK.

Nel triangolo AOH, la somma delli due lati $AO + OH > AH$; ma $OH = OB$, dunque $AO + OB$ ossia $AB > AH$, ma $AH > AK$; dunque la AB, che passa per *lo* centro, e giugne alla parte concava è maggiore di OH, e di OK; con lo stesso raziocinio si può dimostrare, che AB è maggiore di qualunque altra retta, che dal punto A sia tirata alla parte concava, o alla parte convessa della periferia BCD; dunque essa è maggiore di tutte le rette, che da A si possono tirare tanto alla parte concava, quanto alla parte convessa della circonferenza BCD.

2. Nel triangolo AOK il lato AO è minore della somma delli due lati, AK, KO, da esse si tolgano OG, OK, che sono eguali come raggi, resterà AG < AK; ma AK < AH, dunque AG < AH; con lo stesso raziocinio si può dimostrare, che AG è minore di qualunque altra retta, che da A si può tirare sì alla parte concava, che alla parte convessa della circonferenza BCD; dunque essa è minore di tutte le rette, che dal punto A si possono tirare si alla parte concava, che alla parte convessa della circonferenza BCA.

3. Si tirino li raggi OH; OC.

Nelli due triangoli AOH, AOC, il lato AO è comune, OH = OC, come raggi del medesimo cerchio, e l' angolo AOH > AOC, dunque AH, che é più vicina di AC alla massima, è maggiore di AC, che ne è più distante.

4. Li due triangoli AOK, AOD hanno il lato AO comune, gli altri due lati OK, OD eguali, come raggi del cerchio BCD, e l' angolo AOK < AOD, dunque AK, che è più vicina di AD alla minima, è minore di AD, che ne è più distante.

5. Si faccia l' angolo AOE = AOC, e si unisca AE.

Li due triangoli AOC, AOE, avendo OC = OE, il lato AO comune, e l' angolo AOC =

AOE, avranno AC = AE; quindi delle rette, che giungono alla parte concava ogni una ne può avere una altra eguale.

6. Nel punto O si faccia l' angolo AOF = AOD, e si unisca AF.

Li triangoli AOD, AOF hanno il lato AO comune, il lato OD = OF, e l' angolo AOD = AOF, dunque AD = AF; dunque delle rette tirate dal punto A alla parte convessa di BCD ogni una ne può avere una altra, che sia ad essa eguale.

7. Finalmente se dal punto A si tirasse alla parte concava una altra retta diversa da AE, questa o si accosterebbe, o si discosterebbe più di AE dalla massima, e perciò sarebbe maggiore, o minore di AE, e per conseguenza di AC.

Similmente se dal punto A si tirasse alla parte convessa una altra retta diversa da AF, questa o si accosterebbe, o si discostebbe dalla minima AG più di AF, e perciò sarebbe minore, o maggiore di AF, e per conseguenza di AD, dunque di tutte queste rette, che giungono alla parte concava, o alla parte convessa della periferia ogni una non può averne più di una sola, che sia ad essa eguale. Sicchè ec.

CAP. VI.

Delle tangenti al cerchio

205. Una retta si dice *tangente* di un cerchio, quando essa incontra la circonferenza del cerchio in un solo punto, e cade tutta fuori del cerchio; ed una retta si dice *secante* di un cerchio, qualora essa ha una sua porzione fuori del cerchio e penetrando dentro del cerchio incontra la circonferenza in due punti.

206. Teor. 1. *Se una retta è tangente di un cerchio essa è perpendicolare al raggio tirato al punto del contatto.*

(Fig. 100.) Sia la retta AB tangente nel punto C del cerchio CDE, ed al punto C del contatto sia tirato il raggio OC, dico che OC è perpendicolare ad AB.

Dim Di tutte le rette, che dal punto O si possono calare sopra di AB il raggio OC è la minima, poichè esso giugne alla circonferenza in C, nel mentre che tutte le altre per giugnere alla retta AB debbono uscire fuori del cerchio, ma di tutte le rette, che da un punto si possono calare sopra di una altra retta la minima è quella, che è perpendicolare, dunque OC è ad AB perpendicolare. Sicchè ec.

207. Teor. 2. *Se una retta incontra la circonferenza di un cerchio, ed è perpendicolare al raggio tirato al punto dell' in-*

contro, essa è tangente del cerchio nel punto dell' incontro.

(Fig. 100). La retta AB incontri la circonferenza del cerchio CDE nel punto C, e sia perpendicolare al raggio OC; dico che essa è tangente del cerchio nel punto C.

Dim. Di tutte le rette, che dal punto O si possono calare sopra di AB la perpendicolare è la più corta, ma per la ipotesi OC è perpendicolare ad AB, dunque OC è minore di qualsivoglia altra retta, che dal punto O si può tirare agli altri punti di AB, ma AO giugne dal centro alla circonferenza, dunque tutte le altre per giugnere alla retta AB debbono uscire fuori della circonferenza, quindi della retta AB il solo punto C incontra la circonferenza, e tutti gli altri punti sono fuori del cerchio, e perciò AB è tangente del cerchio nel punto C. Sicchè ec.

208. Teor. 3. *Qualunque retta diversa dalla tangente tirata dal punto del contatto è una secante.*

(Fig. 100). Sia AB una tangente al cerchio CDE nel punto C, e dal punto del contatto si tiri qualunque altra retta CF; dico che CF è una secante.

Dim. Si tiri al punto del contatto il raggio OC; essendo l' angolo OCB retto, la retta OC non può essere perpendicolare a CF, quindi dal punto O si può calare sopra CF la perpendicolare OG; ed avremo il triangolo OGC, in cui l' angolo G retto è maggiore dell' angolo OCG acuto, e per conseguenza il lato OC opposto all' angolo maggiore è maggiore del lato OG opposto all' angolo minore, ma OC è un raggio, dunque OG è minore del raggio, e perciò CF passa per dentro del cerchio, e per conseguenza è una secante. Sicchè ec.

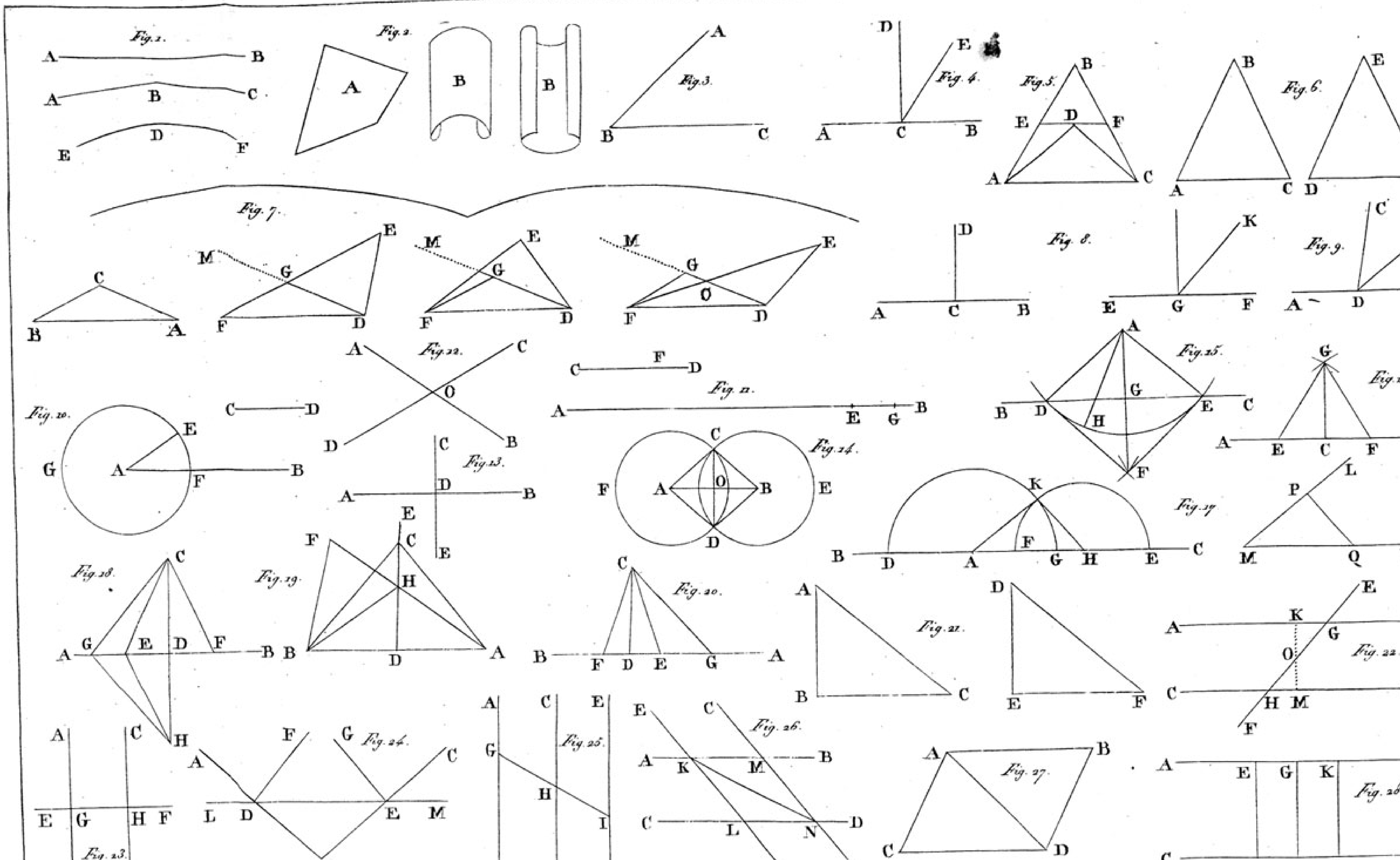
209. Teor. 4. *La perpendicolare elevata sopra della tangente dal punto del contatto deve passare per lo centro.*

(Fig. 100). Sia la retta AB tangente del cerchio CED nel punto C. Dico, che se dal punto C si inalzi la perpendicolare sopra di AB essa deve passare per lo centro O del cerchio CED.

Dim. Se mai è possibile si elevi sopra di AB dal punto C la perpendicolare CP, la quale non passi per lo centro O; e dal centro O si tiri al punto C il raggio OC.

Per quello, che abbiamo dimostrato il raggio OC è perpendicolare ad AB, e perció l' angolo OCB è retto, ma per la supposizione anche l' angolo PCB è retto, dunque l' angolo PCB = OCB, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che la perpendicolare alzata dal punto del contatto sopra di una tangente non passi per lo centro. Sicchè ec.

210. Teor. 5. *Gli archi di cerchio compresi tra una tangente, ed una corda ad essa parallela, o tra due corde parallele sono eguali.*



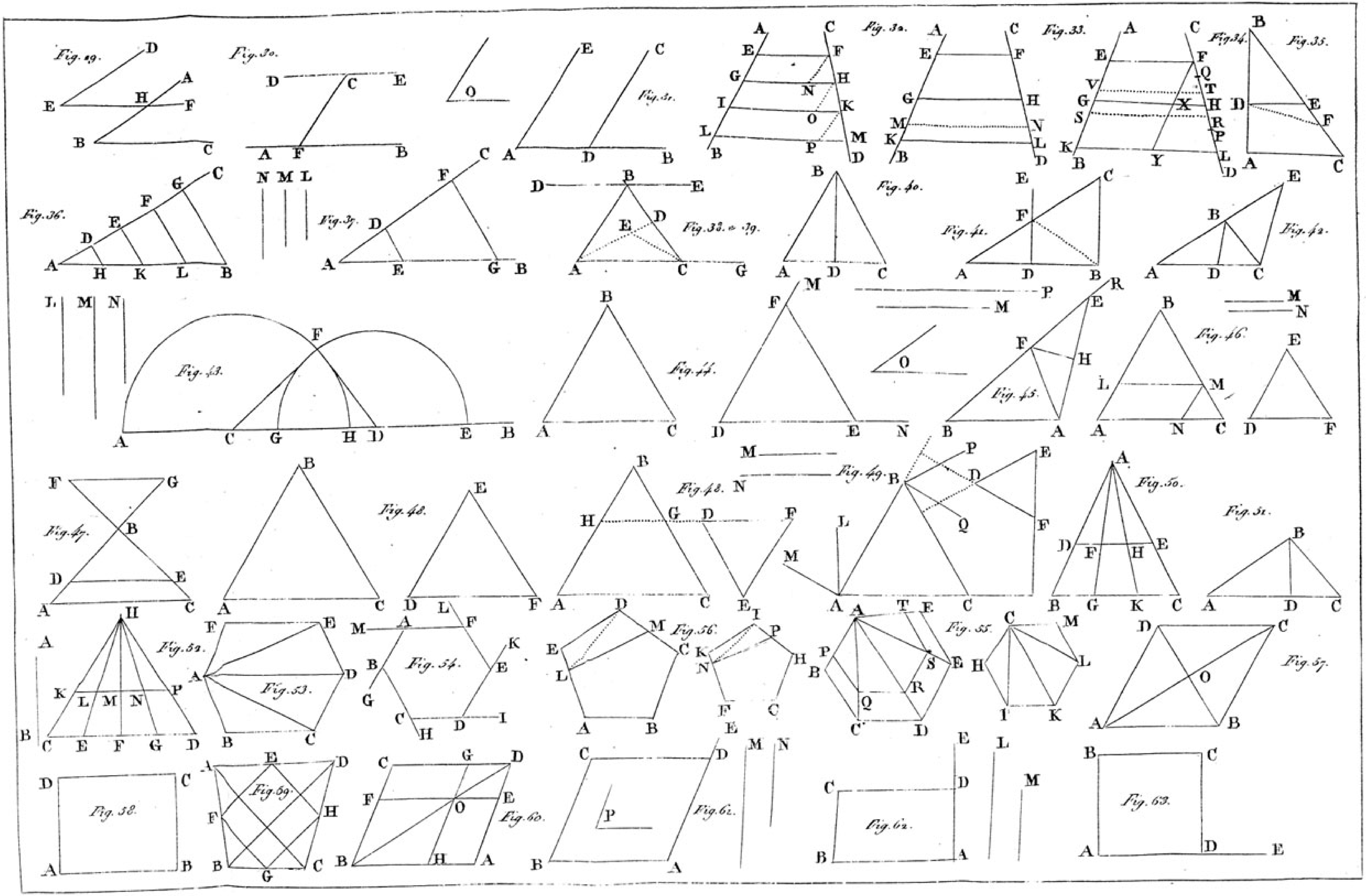


Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38. e 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.

Tav.

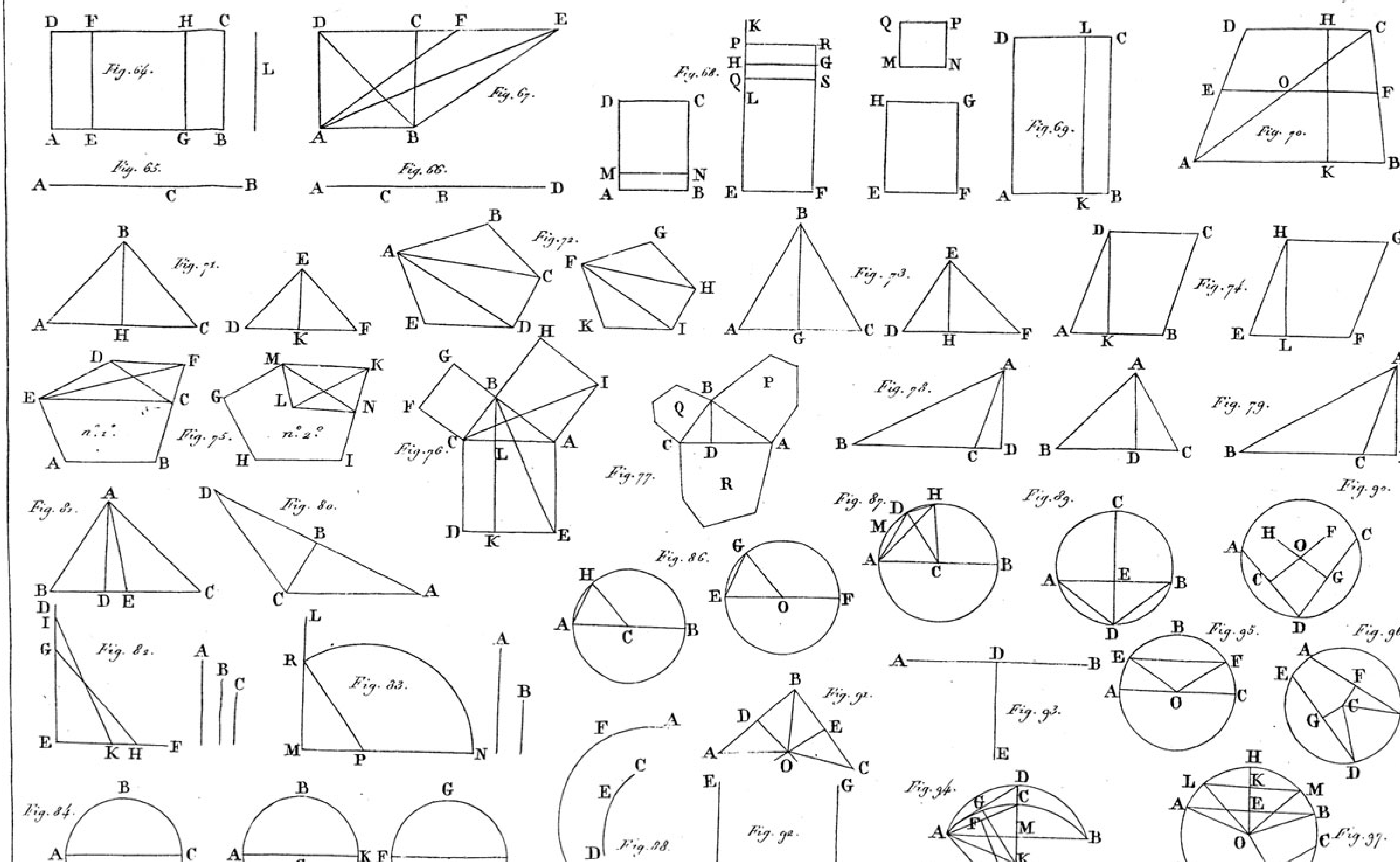
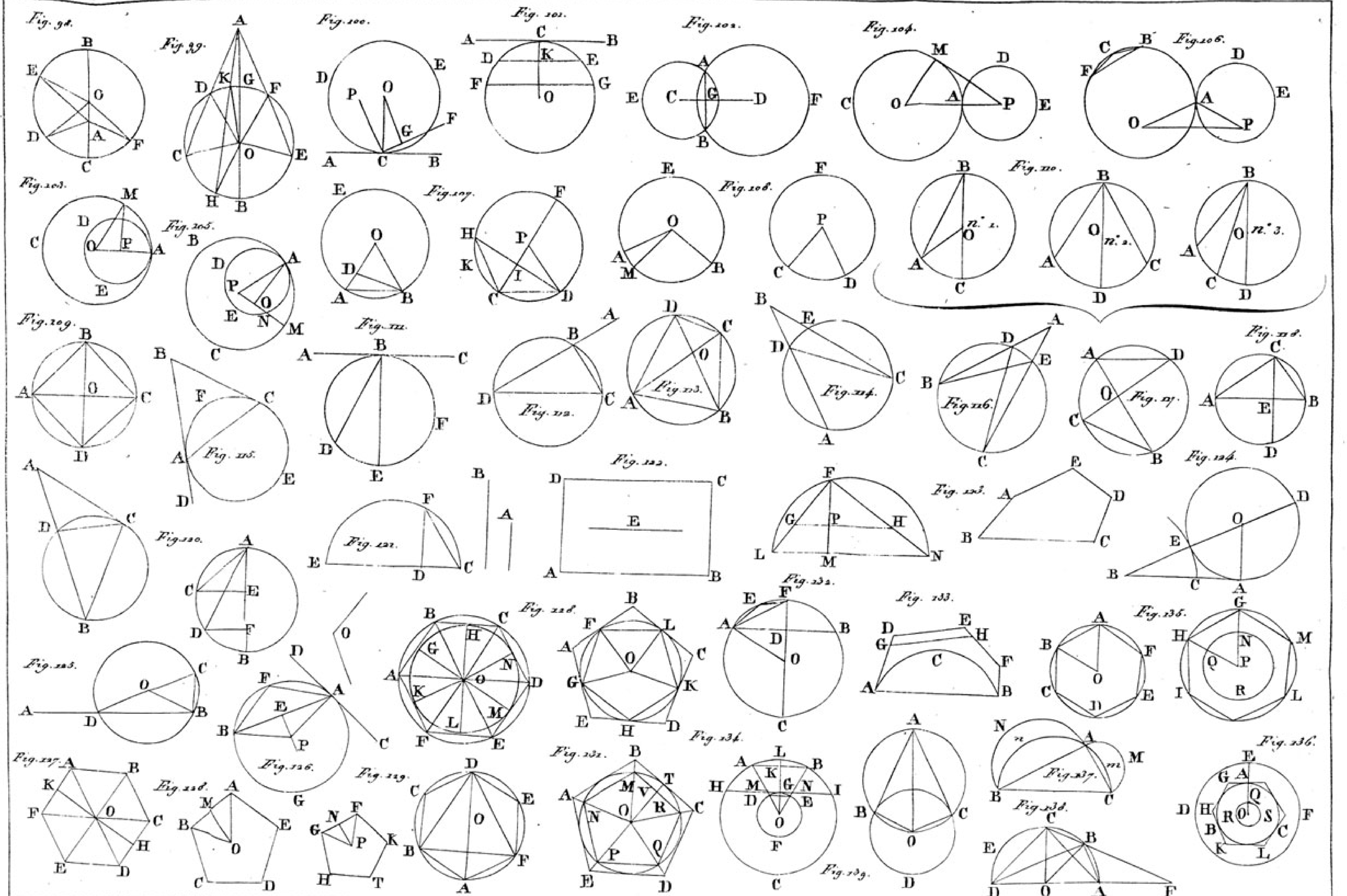


Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
n.º 1.º
n.º 2.º
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 97.



(Fig. 101.) Sieno la tangente AB, e le corde DE, FG parallele ad AB, e per conseguenza anche fra loro parallele; Dico che l'arco CF = CG; e DF = EG.

Dim. Dal centro O si tiri al punto C del contatto il raggio OC, esso sarà ad AB perpendicolare, ma la retta perpendicolare ad una di più parallele è perpendicolare a tutte le altre, dunque OC è perpendicolare ad AB, DE, FG, ma la perpendicolare calata dal centro sopra delle corde divide gli archi sottesi delle corde in due parti eguali, dunque CF = CG, e CD = CE; e per conseguenza CF — CD ossia DF = CG — CE = EG; dunque li due archi CF, CG compresi fra la tangente AB, e la corda FG ad essa parallela sono eguali; e gli archi DF, EG compresi fra le due corde parallele DE, FG sono anche eguali. Sicchè ec.

C A P. VII.

Delli cerchi, che si toccano, o si intersecano.

211. Teor. I. *Due cerchi, che si intersecano non possono intersecarsi con le loro periferie in più di due punti.*

Dim. Noi abbiamo dimostrato, che due cerchi, che hanno tre punti delle loro circonferenze comuni si combaciano, dunque per intersecarsi le loro periferie non possono avere più di due punti comuni.

212. Teor. 2. *Qualora due cerchi si intersecano la corda, che unisce li punti in cui le circonferenza si togliano, è divisa in due parti eguali, e ad angoli retti dalla retta, che unisce li centri di essi.*

(Fig. 102). Si intersechino li due cerchi ABE; ABF con le loro periferie nelli punti A, B, e si unisca la retta AB; Dico che questa retta è divisa in due parti eguali, e ad angoli retti dalla retta CD, che unisce li centri C, D di si fatti cerchi.

Dim. Poichè la retta AB è una corda comune alli due cerchi ABE, ABF, se essa si divide in due parti eguali nel punto G, e da questo punto sì elevi sopra di AB la perpendicolare CD, essa deve necessariamente passare per gli centri C, D di tali cerchi, ma per due punti dati non vi può passare più di una sola retta, dunque la retta CD, che unisce li due centri delli cerchi ABE, ABF divide la AB in due parti eguali, e ad angoli retti. Sicchè ec.

213. Teor. 3. *Due cerchi, che con le loro periferie passano per un medesimo punto della retta, che unisce li centri di essi, hanno questo solo punto comune, nel quale essi si toccano.*

(Fig. 103). 1.° Le due cerchi AMC, ADE si incontrino con le loro circonferenze nel punto A esistente nella retta OPA, in cui sono li centri O, P di essi, e sieno tali cerchi l' uno dentro dell' altro, dico, che questi cerchi non hanno altro punto comune all' infuori del punto A, e per conseguenza, che essi si toccano in questo punto.

Dim. Si prenda sopra della circonferenza del cerchio, che ha il raggio maggiore AMC qualunque punto M, e dal punto M alli centri O, P si tirino le rette MO, MP, avremo il triangolo OMP, nel quale il lato $MO<MP+OP$, ma $MO=OA$, dunque $OA<MP+PO$; ma $OA=OP+PA$, dunque $OP+PA<OP+MP$, e togliendo la quantità comune OP, avremo $PA<MP$; ma PA è raggio del cerchio ADE, dunque PM è maggiore del raggio PA del cerchio ADE, e perciò il punto M è fuori della circonferenza del cerchio ADE, con lo stesso raziocinio si può dimostrare, che qualunque altro punto della circonferenza AMC è fuori della circonferenza ADE, dunque le due circonferenze AMC, ADE hanno di comune il solo punto A, e perciò essi si toccano nel punto A.

(Fig. 104). 2. Li due cerchi AMC, ADE sieno l'uno fuori dell' altro, e con le periferie si incontrino nel punto A della retta OP, la quale unisce li centri di essi, dico che queste circonferenze hanno questo solo punto comune, e perciò si toccano nel punto A.

Dim. Si prenda sopra della circonferenza AMC qualunque punto M, e da esso si tirino alli centri O, P le rette MO, MP, avremo il triangolo OMP, nel quale $OP<OM+MP$; ma $OM=OA$, ed $OP=OA+AP$, dunque

avremo $OA+AP<OA+MP$, e togliendo da queste quantità la comune OA , avremo $AP<MP$, ma AP è raggio del cerchio ADE, dunque MP è maggiore del raggio del cerchio DAE, e perciò il punto M è fuori del cerchio ADE ; con simile ragionamento si può dimostrare , che qualunque altro punto della circonferenza AMC , ad eccezione del solo punto A , è fuori della circonferenza ADE, dunque questi due cerchi hanno il solo punto A comune, e perciò essi si toccano nel solo punto A. Sicchè ec.

214. Teor. 4. *Se due cerchi sono tangenti l'uno dell'altro , le retta che unisce li centri di essi deve necessariamente passare per lo punto del contratto.*

(Fig. 105). Li due cerchi ABC , ADE si tocchino al di dentro nel punto A ; Dico che la retta, che unisce li centri di essi deve passare per lo punto A.

Dim. Se mai è possibile sieno li centri P, O situati in maniera , che la retta POM , che li unisce , non passi per lo punto del contatto A: e si uniscano li raggi OA , PA. Nel triangolo POA il solo lato $PA<PO+OA$, ma $PA=PM$, dunque $PM<PO+OA$, ma $OA=ON$, dungue $PM<PO+ON$, toltone di comune PO, resterà $OM<ON$, cioè il tutto minore della sua parte , il che è assurdo ; dunque è anche assurdo , che li centri sieno situati in maniera, che la retta, che li unisce non passi per lo punto del contatto. Sicchè

qualora due cerchi si toccano al di dentro la retta, che unisce li centri di essi passa per lo punto del contatto.

(Fig. 106). Si tocchino li due cerchi ABC, ADE al di fuori nel punto A, dico che la retta che unisce li centri di essi deve passare per lo punto del contatto A.

Dim. Se mai è possibile sieno li centri O, P di questi due cerchi situati in modo, che al retta OP che li unisce non passi per lo punto A del contatto; dal punto A del contatto si uniscano li raggi OA, AP, la retta OP è maggiore di due raggi, dunque $OP > AO + AP$, e perciò nel triangolo OAP un solo lato sarebbe maggiore della somma degli altri due lati, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che la retta, che unisce li centri di due cerchi, che si toccano al di fuori non passi per lo punto del contatto. Sicchè.

215. Avv. Da quel, che abbiamo detto si vede chiaramente, che affinchè due cerchi possano toccarsi al di dentro è necessario, che la distanza delli due centri sia eguale alla differenza de' raggi, e per conseguenza essi non potranno toccarsi, o intersecarsi, se la distanza delli centri è minore delle differenza de'raggi; e che affinchè due cerchi si tocchino al di fuori la distanza de' due centri deve eguagliare la somma de' raggi, e per conseguenza che essi non potranno toccarsi, o molto meno intersecarsi, se la distanza delli due centri è maggiore della somma delli due raggi di essi

216. *Cor.* Poichè due cerchi, che si toccano al di dentro, o al dì fuori hanno li centri, ed il punto del contatto in una medesima retta, ne segue, che se dal punto del contatto si tiri una perpendicolare alla retta, che unisce li centri, essa è tangente ad essi, ed ancorchè si sia dimostrato, che dal punto del contatto non si possa tirare una retta, che sia tra la tangente e la periferia, pure tra la tangente, e la periferia vi può passare una infinità di circonferenze.

C B P. VII.

Della misura degli angoli.

217. Un angolo si dice *fatto al centro* di un cerchio, quando esso ha il suo vertice al centro, ed i suoi lati sono due raggi. Si dice poi *fatto alla circonferenza*, quando il suo vertice è un punto della circonferenza, e con i suoi lati incontra la circonferenza. Un angolo si dice *iscritto* in una porzione di cerchio, quando ha il vertice in un punto dell' arco, che termina la porzione, e con li suoi lati passa per le estremità della corda.

218. Teor. 1. *In un medesimo cerchio, o in due cerchi eguali, gli angoli eguali fatti al centro appoggiano sopra archi eguali, e reciprocamente sopra archi eguali appoggiano angoli eguali fatti al centro.*

(Fig. 107). Nelli centri O, P delli due cerchi eguali AEB, CFD sieno fatti li due angoli AOB, CPD; dico che se questi due angoli sono eguali, gli archi AB, CD sopra delli quali essi appoggiano sono eguali. 2. Che se gli archi AB, CD sono eguali, anche gli angoli AOB = CPD.

Dim. 1. Si tirino le corde AB, CD.

Nelli due triangoli AOB, CPD li due lati AO, OB dell' uno sono respettivamente eguali alli due lati CP, PD dell' altro, come raggi di cerchi eguali, e l'angolo AOB = CPD per la ipotesi, dunque le basi AB, CD sono anche eguali, ma le corde eguali sottendono archi eguali, dunque l' arco AB = CD. Sicchè ec.

2. Essendo gli archi AB, CD eguali per la ipotesi, anche la corde AB, CD, dalle quali essi sono sottesi, sono eguali, quindi li due triangoli AOB, CPD, avendo li tre lati dell' uno respettivamente eguali alli tre lati dell' altro, sono eguali, e perciò l'angolo AOB, è eguale all' angolo CPD. Sicchè ec.

219. Teor. 2. *Gli angoli fatti alli centri di due cerchi eguali sono nella ragione degli archi sopra delli quali appoggiano.*

(Fig. 108). Nelli centri O, P delli cerchi eguali AEB, CFD sieno fatti gli angoli AOB, CPD; dico che AOB : CPD : : AB : CD.

Due casi possono darsi. 1. Che gli archi AB, CD sieno commensurabili. 2. Che essi sieno incommensurabili.

Dim. 1. Siano gli archi AB, CD commensurabili, e sia AM la comune misura di essi, si concepiscano gli archi AB, CD divisi in parti tutte eguali ad AM, e supponiamo, che AM sia contenuto in AB un numero di volte indicato da m, e che sia contenuto in CD un numero di volte indicato da n, è evidente che AB sarà espresso da AM×m, e CD sarà espresso da AM×n; è perciò avremo AB : CD :: AM×m : AM×n : : m : n.

Si concepiscono dalli centri O, P tirati alli punti delle divisioni li raggi correspondenti, come OM, avremo tutti gli angoli, che appoggiano sopra gli archi eguali ad AM, nelli quali sono divisi gli archi, AB, CD, che saranno tutti eguali, e perciò l'angolo AOB sarà espresso da AOM×m, e l'angolo CPD sarà espresso da AOM×n, e perciò avremo AOB : CPD : : AOM×m : AOM×n : : m : n; ma al rapporto di m : n è eguale anche il rapporto dell'arco AB : CD, dunque AOB : CPD : : AB : CD. Sicchè ec.

2. Sieno gli archi AB, CD incommensurabili, allora potrà avere luogo una delle proporzioni AOB : CPD : : AB ad un arco maggiore di CD, oppure AOB : CPD : : AB ad un arco minore di CD, o finalmente AOB : CPD : : AB : CD; ed adoperando lo stesso raziocinio altre volte posto in uso, dimostreremo le due prime proporzioni assurde, e conchiuderemo, che AOB : CPD : : AB : CD. Sicchè ec.

220. Cor. Noi abbiamo dimostrato, che il rapporto dell'angolo AOB all'angolo CPD è lo stesso di quello dell'arco AB all'arco CD, quindi per determinare il rapporto, che hanno fra essi due angoli, basterà determinare il rapporto, che hanno fra essi li due archi sopra de' quali essi appoggiano, qualora si descrivano due cerchi, li quali abbiano per centri li vertici degli angoli, ed abbiano un medesimo raggio, e poichè misurare una quantità è lo stesso, che cercare il rapporto, che una di esse ha ad una altra della medesima sua specie presa per termine di paragone, ne segue che per misurare un angolo basterà trovare il rapporto, che ha l'arco su cui appoggia l'angolo dato a quello dell' arco su cui appoggia l'angolo preso per termine di paragone, quindi diciamo, che la *misura di un angolo è l'arco di circolo compreso tra li suoi lati, e descritto prendendo il vertice dell'angolo per centro*; quì si vede chiaramente, che questa espressione considerata come è enunciata non ha senso, poichè due grandezze non possono misurarsi se non sono della medesima specie, ed in questo caso noi abbiamo l'angolo, che è una superficie, che vogliamo misurare per mezzo di un arco, che è una linea, ma noi prendiamo per unità d' angolo un angolo, che appoggia sopra di un arco, che noi prendiamo per unità di arco, e la proposizione enunciata deve essere presa per una abbreviazione della proposizione seguente,

qualunque angolo contiene tante volte un certo angolo arbitrario, quante volte l' arco compreso tra li lati di tale angolo, e descritto col suo vertice come centro, contiene l' arco del medesimo circolo compreso tra li lati di questo secondo angolo, e descritto col suo vertice come centro.

Dal che si vede, chiaramente, che gli archi di cerchio sono stati introdotti per la misura degli angoli, soltanto per trovare con facilità il rapporto, che passa tra gli angoli, e per trovare il rapporto numerico di due angoli qualunque, basterà servirci del metodo da noi dato per trovare il rapporto tra due archi di cerchio, che sono descritti col medesimo raggio, giacchè il rapporto di due archi descritti facendo centri li vertici degli angoli, e con un medesimo raggio arbitrario è quello stesso del rapporto numerico, che gli angoli hanno fra essi.

221. (Fig. 109). Cor. 2. Da noi si è dimostrato, che l' angolo retto è invariabile, e di una grandezza costante, quindi è naturale di prendere l' angolo retto per lo termine di paragone di tutti gli altri angoli, or se noi consideriamo il cerchio ABCD, ed in esso tiriamo due diametri AC, BD perpendicolari l' uno all' altro, avremo al centro O quattro angoli retti, e poichè essi sono eguali, li quattro archi sopra de' quali essi appoggiano sono eguali, e perciò ogni uno di essi è la quarta parte della circonferenza, quindi avremo la mi-

sura di un angolo fatto al centro relativamente all'angolo retto rapportando l'arco su cui appoggia l'angolo dato alla quarta parte della medesima circonferenza descritta prendendo per centro il vertice dell'angolo dato, ed un raggio qualunque arbitrario.

222. Cor. 3. Essendosi dimostrato, che gli angoli eguali fatti al centro di un cerchio appoggiano sopra archi eguali, e che sopra di archi eguali appoggiano angoli eguali fatti al centro di esso, ne segue, che le rette, che dividono gli archi in qualunque numero di parti eguali, dividono nel medesimo numero di parti eguali l'angolo misurato da sì fatto arco, e per conseguenza la divisione di un angolo in parti eguali si riduce alla divisione dell'arco, che lo misura, nel medesimo numero di parti eguali. Ma la geometria elementare non ci somministra altro mezzo se non se quello di dividere un arco di cerchio in due parti eguali, e per conseguenza in 4, 8, 16 etc. parti eguali, quindi con la geometria elementare noi non possiamo dividere un angolo, o un arco in tante parti eguali quante a noi piacerà, ma solo in tante parti eguali, quante ne indicano li termini de.la progressione 2, 4, 8, 16 etc.

223. Teor. 3. *L'angolo, che ha il suo vertice alla circonferenza di un cerchio ha per misura la metà dell' arco sopra del quale esso appoggia.*

(Fig. 110). Sia l'angolo ABC, il quale abbia il suo vertice alla circonferenza del cerchio ABC; dico che esso è misurato dalla metà dell'arco AC compreso fra li suoi lati.

Possono darsi tre casi. 1. Che il lato BC dell' angolo passi per lo centro O del cerchio (come fig. n. 1).

2. Che il centro sia compreso dentro l'angolo (come fig. n. 2).

3. Che il centro del cerchio sia fuori dell' angolo ABC (come fig. n. 3).

(Fig. n. 1). Dim. 1. Il lato BC dell'angolo ABC passi per lo centro O.

Si unisca il raggio OA.

Nel triangolo AOB li due lati AO, OB sono eguali come raggi del medesimo cerchio, dunque gli angoli ad essi opposti OAB, OBA sono eguali, ma nel triangolo BOA il lato BO è prolungato verso C, dunque l' angolo esterno AOC è eguale alla somma OAB+OBA delli suoi interni opposti, ma questi angoli OAB, OBA si sono dimostrati eguali, dunque l' angolo AOC, che è eguale alla somma di essi è doppio del solo angolo ABC, e perciò la misura di ABC è la metà della misura dell' angolo AOC, ma l' angolo AOC ha per misura l'arco AC compreso fra li suoi lati, dunque l' angolo ABC ha per misura la metà dell' arco AC sopra del quale esso appoggia.

2. (Fig. n. 2). Sia il centro O dentro dell' angolo ABC.

Per lo punto B si tiri il diametro BD.

In conseguenza di quello che abbiamo dimostrato l'angolo ABD ha per misura la metà di AD, e l'angolo CBD ha per misura la metà dell' arco DC; dunque l'angolo ABC ha per misura la metà di AD unita alle metà di CD, e perciò ha per misura la metà dell' arco AC, sopra del quale esso appoggia.

(Fig. n. 3). 3. Sia il centro O del cerchio ABC fuori dell' angolo ABC.

Si tiri il diametro BD.

L'angolo ABC = ABD − CBD; dunque la misura dell' angolo ABC si avrà prendendo la differenza delle misure delli due angoli ABD, CBD; ma dell' angolo ABD la misura è $\frac{AD}{2}$,

e la misura dell' angolo CBD è $\frac{CD}{2}$; dunque

la misura dell' angolo ABC è $\frac{AD - CD}{2}$, ma

AD − CD = AC; dunque la misura dell' angolo ABC è la metà dell' arco AC compreso fra li suoi lati. Sicchè ec.

224. (Fig. 111). Cor. 1. Sia AC tangente del cerchio DBE nel punto B, e dal punto B del contatto sia tirata la corda BD; quello che noi abbiamo dimostrato nel teorema precedente ci dà il mezzo da misurare sì l'angolo ABD, che l'angolo CBD, che sono fatti dalla tangente AC, e dalla corda BD. In fatti si tiri per lo punto B del contatto il diametro BE, noi vediamo, che l' angolo ABD = ABE − DBE, e che per conseguenza la misura dell' angolo ABD è eguale alla misura di

ABE diminuita della misura dell' angolo DBE, ma l'angolo ABE, come fatto dalla tangente e dal diametro è retto, e perciò ha per misura la quarta parte della circonferenza, ossia $\frac{BDE}{2}$, la misura dell' angolo DBE è $\frac{DE}{2}$, dunque la misura dell' angolo ABD $= \frac{BDE - DE}{2} = \frac{BD}{2}$;

Similmente l' angolo CBD$=$CBE$+$EBD, e perciò la sua misura è la somma dell. misure dell' angolo retto CBE più la misura di EBD; ma la misura dell' angolo retto CBE $= \frac{BFE}{2}$, quella di DBE$= \frac{DE}{2}$, dunque la misura dell' angolo CBD$= \frac{BFE + DE}{2} = \frac{BFD}{2}$; dal che ricaviamo generalmente, che l'angolo fatto da una tangente, e da una corda tirata dai punto del contatto è misurato dalla metà dell'arco compreso tra li suoi lati.

125. (Fig. 112). Cor. 2. Sia l'angolo ABC, che ha il vertice alla circonferenza del cerchio DBC, e che è formato dalla corda BC, e dalla retta AB, che prolungata taglia il cerchio; per le verità dimostrate si vede chiaramente, che la sua misura è la metà dell' arco sotteso dalla corda BC unita alla metà dell' arco BD sotteso dal prolungamento della secante AB; in fatti si unisca la corda DC, allora nel triangolo DBC il lato DB è prolungato verso A, e perciò l' angolo esterno ABC è eguale alla somma degli angoli interni opposti BDC+BCD

e per conseguenza la misura dell' angolo ABC è eguale alla somma delle misure degli angoli BDC, e BCD, ma la misura di $BDC=\frac{BC}{2}$, e quella dell' angolo $BCD=\frac{BD}{2}$, dunque la misura dell'angolo ABC è eguale alla metà della somma dell'arco BC sotteso dalla corda, e della metà dell'arco BD sotteso dal prolungamento della secante.

226. Cor. 3. Tutti gli angoli, che hanno il vertice alla circonferenza, ed appoggiano sopra del medesimo arco sono eguali, poicchè tutti hanno per misura la metà dell'arco sopra del quale essi appoggiano, e perciò tutti gli angoli iscritti in un medesimo segmento circolare sono eguali.

Dippiù se il segmento è un semicerchio tutti gli angoli in esso iscritti appoggiando sopra la semiperiferia, hanno per misura il quarto della circonferenza, ma il quarto della circonferenza è la misura dell'angolo retto, dunque tutti gli angoli iscritti in un semicerchio sono angoli retti.

Se il segmento è minore del semicerchio tutti gli angoli in esso iscritti appoggiano sopra di un arco maggiore della semicirconferenza, e perciò la misura di essi è maggiore della misura dell' angolo retto, e per conseguenza essi sono tutti angoli ottusi.

Finalmente se il segmento è maggiore del mezzo cerchio, gli angoli in esso iscritti appoggiano sopra di un arco minore della semicirconferenza, e perciò la misura di essi è minore della misura dell' angolo retto, e per conseguenza essi sono tutti angoli acuti.

227. Teor. 4. *L' angolo, che ha in suo vertice dentro di un cerchio in un punto diverso dal centro ha per misura la metà della somma degli archi sopra de' quali appoggiano esso, ed il suo verticale.*

(Fig. 113). Sia l' angolo AOB, il quale ha il suo vertice dentro del cerchio nel punto O diverso dal centro, ed i suoi lati AO, BO sieno prolungati fino all' incontro della circonferenza nelli punti C, D; dico che l' angolo AOB è misurato dalla metà dell' arco AB sopra di cui esso appoggia unita alla metà dell' arco DC sopra di cui appoggia il suo verticale DOC.

Dim. Si unisca la corda BC.

Nel triangolo COB il lati CO è prolungato verso A, dunque l' angolo esterno AOB è eguale alla somma degli angoli OCB, OBC interni opposti, dunque la misura dell' angolo AOB è eguale alla somma delle misure degli angoli OCB, ed OBC, ma questi angoli avendo li vertici alla circonferenza sono misurati dalla metà degli archi AB, CD sopra delli quali essi appoggiono, dunque l' angolo AOB ha per misura la metà della somma delli medesimi archi AB, CD. Sicchè ec.

228. Teor. 5. *L' angolo che ha il suo vertice fuori della circonferenza ha per misura*

la metà dell' arco concavo diminuita della metà dell' arco convesso, che li suoi lati tagliano.

(Fig. 114). Sia l' angolo ABC, il quale abbia il suo vertice nel punto B fuori della circonferenza del cerchio ADE, dico che esso ha per misura la metà dell' arco concavo AC diminuita della metà dell' arco convesso DE, che sono compresi fra li lati AB, BC.

Dim. Si unisca la corda DC.

Nel triangolo DBC il lato BD è prolungato verso A, dunque l' angolo interno DBC è eguale all' angolo esterno ADC diminuito dell' altro angolo interno DCB, quindi la misura dell' angolo ABC è eguale alla misura di ADC diminuita della misura dell' angolo DCB, ma di questi angoli, che hanno il vertice alla circonferenza, l' angolo ADC ha per misura la metà dell' arco AC, e l' angolo DCE ha per misura la metà dell' arco DE, dunque l' angolo ABC ha per misura la metà dell' arco concavo AC diminuita della metà dell' arco convesso DE, li quali sono compresi tra li lati del medesimo angolo. Sicchè ec.

229. Cor. (Fig. 115). Lo stesso razicinio dimostra, che l' angolo ABC fatto da due tangenti ha per misura la metà dell' arco concavo AEC compreso fra li suoi lati diminuito della meta dell' arco convesso AFC compreso tra li medesimi lati, in fatti si uniscano li punti del contatto A, C con la corda AC, ed il lato BA si prolunghi verso D; l' ango-

lo interno ABC del triangolo ABC è eguale all' angolo esterno DAC diminuito dell' angolo interno BCA, quindi la misura dell'angolo ABC sarà eguale alla misura dell' angolo DAC diminuita della misura dell' angolo BCA, ma la misura dell' angolo DAC, che è fatto dalla tangente AD, e dalla corda AC è la metà dell' arco AEC compreso fra li suoi lati, e la misura dell' angolo BCA fatto dalla tangente BC e dalla corda AC è la metà dell' arco AFC compreso fra li suoi lati, dunque la misura dell' angolo ABC fatto dalle due tangenti AB, BC è la metà dell' arco concavo AEC diminuita della metà dell' arco convesso AFC, che sono compresi fra li lati dell' angolo.

C A P. VIII.

Proprietà delle corde, delle secanti, e delle tangenti di un cerchio.

230. Teor. 1. *Se da un punto esistente fuori di un cerchio sieno tirate delle secanti, le quali incontrino la parte concava della circonferenza, le secanti intere saranno fra loro in ragione inversa delle loro parti esterne.*

(Fig. 116). Dal punto A esistente fuori del cerchio BDE sieno tirate le due secanti AB, AC, dico che AB : AC : : AE : AD.

Dim. Si uniscano le corde DC, EB.

Li due triangoli BAE, CAD hanno l'angolo comune A, hanno ancora l'angolo B=C, poichè hanno il vertice alla periferia, ed appoggiano sopra lo stesso arco DE, dunque avranno il terzo angolo AEB=ADC, quindi essi sono simili, ma li triangoli simili hanno li lati omologhipro porzionali, dunque sarà AB : AC : : AE : AD. Sicchè ec.

230. Cor. Essendosi dimostrato che AB : AC : : AE : AD, avremo AB×AD=AC×AE; quindi ricaviamo, che se da un punto esistente fuori di un cerchio si tirino quante secanti si vogliano, tutti li rettangoli fatti da ciascuna di esse, e dalla sua parte esterna sono equivalenti.

231. Teor. 2. *Se in un cerchio due corde si intersecano, le parti di esse sono reciprocamente proporzionali.*

(Fig. 117). Nel cerchio ABC si intersechino comunque le due corde AB, CD nel punto O, dico che le parti dell'una di esse sono reciprocamente proporzionali alle parti dell' altra, cioè che AO : OC : : OD : OB.

Dim. Li uniscano le corde AD, BC.

Li due triangoli AOD, COB, hanno gli angoli AOD, COB eguali come verticali, li due angoli DAB, DCB eguali, poichè hanno li vertici A, C alla circonferenza, ed appoggiano sopra lo stesso arco BD, quindi avranno il terzo angolo D dell'uno eguale al terzo angolo B dell' altro, e perciò essendo equiangoli sono simili, ma nelli triangoli simili li *lati omologhi sono proporzionali*, dunque avremo AO : OC : : OD : OB. Sicchè.

232. *Cor.* 1. Avendo dimostrato, che AO: OC : : OD : OB, avremo AO×OB=CO×OD; Quindi qualora in un cerchio due corde si intersecano il rettangolo delle parti dell' una equivale al rettangolo delle parti dell' altra.

(Fig. 118). 232. Cor. 2. Sopra del diametro AB del cerchio ACBD sia calata la corda CD sopra di esso perpendicolare nel punto E, quindi avremo la proporzione AE : EC :: ED : EB, ma il diametro AB essendo perpendicolare sopra la corda CD la divide in due parti eguali, e perciò CE=ED, ed avremo AE : EC : : EC : EB, e per conseguenza AE× EB=EC^2, quindi se da un punto della circonferenza di un cerchio si cali una perpendicolare sopra di un diametro, questa perpendicolare è media proporzionale fra le parti del diametro, che essa taglia, ed il quadrato di sì fatta perpendicolare equivale al rettangolo fatto dalle parti del diametro.

233. Avv. Qui è buono di avvertire, che se si uniscono le corde AC, CB avremo l'angolo ACB retto, poichè è iscritto nel mezzo cerchio ACB, e noi avevamo già dimostrato, che se dal vertice dell' angolo retto si cali una perpendicolare sopra della ipotenusa questa perpendicolare è media proporzionale fra le parti della ipotenusa, ed ecco come la geometria peraltra via ha confirmata una verità già dimostrata.

Dippiù essendo il triangolo ACB rettangolo in C, avremo AB : AE : : AC : AE, ed ancora AB : BC : : BC : BE, dal che conchiudiamo, che se da un punto della circonferenza di un cerchio si cala una perpendicolare sul diametro, e dal medesimo punto si tirino le corde alle estremità del diametro, avremo che sempre ciascheduna di queste corde è media proporzionale tra 'l diametro intero, ed il segmento del diametro adjacente alla medesima corda.

234. Teor. 3. *Se da un punto esistente fuori di un cerchio si tirino ad esso una tangente, ed una secante, la tangente sarà media proporzionale tra la intera secante, e la sua porzione esterna.*

(Fig. 119). Dal punto A esistente fuori del cerchio BDC sieno tirate la secante AB, e la tangente AC; dico che AB : AC : : AC: AD.

Dim. Si uniscano le corde CD, CB.

Nelli due triangoli ABC, ADC l' angolo A è comune, gli angoli ABC, ACD sono eguali, poichè hanno per misura la metà dell' arco CD compreso fra li lati di essi, dunque sarà il terzo angolo ADC dell' uno eguale al terzo angolo ACB dell' altro, e perciò essi sono simili, ma li triangoli simili hanno i lati omologhi proporzionali, dunque BA : AC : : AC : AD. Sicchè ec.

235. Cor. Avendo dimostrato, che AB : AC : : AC : AD, ne segue che $AB \times AD = AC^2$. Quindi se da un punto esistente fuori di un cer-

chio si tirino al cerchio una tangente, ed una secante, il rettangolo fatto dalla intera secante e dalla sua porzione esterna equivale al quadrato fatto sopra della tangente.

236. Teor. 4. *Se da un estremo di un diametro di un cerchio si tirino al cerchio quante corde si vogliano, e dagli estremi delle corde si calino le perpendicolari sopra del diametro, li quadrati delle corde sono fra essi nella ragione delli segmenti correspondenti del diametro.*

(Fig. 120). Dallo estremo A del diametro AB del cerchio ACB sieno tirate le corde AC, AD, dalli estremi C, D delle quali sieno calate sul diametro AB le perpendicolari CE, DF; Dico che $AC^2 : AD^2 :: AE : AF$.

Dim. Noi abbiamo dimostrato, che se dall' estremo di una corda si cali una perpendicolare sopra del diametro, che passa per l'altro estremo di essa, la corda è media proporzionale tra 'l diametro, ed il segmento di esso, che è adiacente alla corda, quindi avremo $AB : AC :: AC : AE$, ed $AB : AD :: AD : AF$, ma la prima di queste proporzioni dà $AB \times AE = AC^2$, e la seconda dà $AB \times AF = AD^2$, dunque avremo $AC^2 : AD^2 :: AB \times AE : AB \times AF :: AE : AF$. Sicchè.

CAP. IX.

Problemi, che si sciolgono per mezzo delle verità dimostrate nella teoria del cerchio.

237. Prob. 1. *Trovare una media proporzionale tra due rette date.*

(Fig. 121). Sieno date le due rette A, B; si vuole trovare una altra retta, che sia media proporzionale tra A, B.

Sol. Si tiri la retta CE terminata in C, ed indefinita in E, e da essa si taglino CD=A, DE=B, indi si descriva un cerchio, il quale abbia per diametro CE, e dal punto D si inalzi sopra CE la perpendicolare FD, la quale si prolunghi fino a che incontri la periferia nel punto F; Dico che DF è la media proporzionale dimandata tra A, B.

Dim. Avendo noi dimostrato, che qualora da un punto della circonferenza di un cerchio si cala una perpendicolare sul diametro essa è media proporzionale tra li due segmenti del diametro, ne segue, che FD è media proporzionale tra CD, DE, ma per la costruzione CD=A, DE=B, dunque DF è la media-proporzionale cercata tra A, B.

238. Prob. 2. *Trovare la media proporzionale tra una retta intera, ed una sua porzione.*

(Fig. 121). Sia data la retta CE, e la sua porzione CD, si vuole la media proporzionale tra CE, CD.

Sol. Si descriva il cerchio, che ha per diametro CE, e dal punto D si elevi sopra CE la perpendicolare DF, la quale si prolunghi fino a tanto, che incontri la periferia nel punto F; finalmente si unisca la corda CF. Dico che CF è la media proporzionale cercata tra la retta CE e la sua parte CD.

Dim. Avendo noi dimostrato, che se dall'estremo di una corda si cali una perpendicolare sul diametro, che passa per l'altra estremità di essa, la corda è media proporzionale tra 'l diametro ed il segmento di esso, che è adiacente alla corda, ne segue che CE CF : : CF : CD; e perciò CF è la media proporzionale dimandata tra la retta CE e la sua porzione CD. Sicchè.

239. Prob. 3. *Dato un rettangolo trasformarlo in un quadrato equivalente.*

Sia dato il rettangolo AC, si vuole frasformarlo in un quadrato, che sia ad esso equivalente.

(Fig. 122). Soluz. Tra li due lati contigui AB, AD del rettangolo dato AC si trovi la media proporzionale E, e sopra di E si descriva il quadrato; Dico, che il quadrato fatto sopra di E é il quadrato dimandato.

Dim. La proporzione AB : E : : E : AD, da $AB \times AD = E^2$; ma $AB \times AD$ è la misura del rettangolo AC, ed E^2 è la misura del quadrato fatto sopra di E, dunque il quadrato fatto sopra di E equivale al rettangolo AC. Sicchè ec.

240. Cor. Essendo qualunque parallelogrammo equivalente al rettangolo, che ha con esso la medesima base, e la medesima altezza, quindi trasformeremo qualsivoglia parallelogramo in un quadrato equivalente, formando il quadrato sopra della media proporzionale trovata tra la sua base, e la sua altezza.

Similmente essendo un triangolo eguale al rettangolo, che ha la medesima base del triangolo ed ha per altezza la metà della altezza del triangolo, ne segue, che il triangolo si trasforma in quadrato, facendo il quadrato sopra la media proporzionale trovata tra la base, e la metà della altezza del triangolo.

Finalmente avendo dato il metodo da ridurre qualunque poligono in un triangolo equivalente, ne segue, che per trasformare un poligono in un quadrato equivalente, prima esso si trasforma nel triangolo equivalente, indi il triangolo trovato si trasforma nel quadrato ad esso equivalente, ed avremo trasformato il poligono nel quadrato equivalente.

241. Prob, 4. *Dato un poligono qualunque, descrivere un altro poligono il quale sia simile al poligono dato, e tale che il poligono dato sia al poligono dimandato in un dato rapporto.*

(Fig. 123). Sia dato il poligono ABCDE, e sia data la ragione di M ; N. Si vuole descrivere un altro poligono, il quale sia simile ad ABCDE, e tale, che sia M : N:: ABCDE al poligono dimandato.

Sol. Si tiri ad arbitrio la retta LN, ed essa si divida in maniera, che sia LM : MN : : M : N, indi presa LN per diametro si descriva il mezzo cerchio LFN, e dal punto M si inalzi sopra LN la perpendicolare MF, che incontra la semicirconferenza nel punto F, indi si uniscano le corde FL, FN; Finalmente si tagli FG=AB, e per lo punto G si tiri GH parallela ad LN, la quale taglia da FN la porzione FH, dico che FH è il lato del poligono dimandato.

Dim. Essendosi dal punto F tirate le rette FL, FM, FN, le quali vengono tagliate dalle parallele GH, LN, esse dividono queste parallele in parti proporzionali, quindi avremo GP : PH : : LM : MN, ma per costruzione LM : MN : : M : N, dunque GP : PH : : M : N. In oltre i poligoni simili fatti sopra de'cateti GF, FH sono fra essi nella ragione delli segmenti, nelli quali la ipotenusa viene tagliata dalla perpendicolare sopra di essa calata dal vertice dell'angolo retto, dunque il poligono, che ha per lato FG sta a quello, che ha per lato omologo FH : : GP : PH : : ma GP : PH : : M. N. Dunque ec.

242. Prob. 5. *Data una retta dividerla in estrema, e media ragione, cioè dividerla in modo, che la retta intera stia alla sua parte maggiore come la medesima parte maggiore alla parte minore restante.*

(Fig. 124). Sia data la retta AB, proponiamoci di dividerla in estrema, e media ragione.

Sol. Dallo estremo A della retta data AB si elevi sopra di essa la perpendicolare AO eguale ad $\frac{1}{2}$ AB, indi col centro O, e con l'intervallo OA si descriva il cerchio AED, dipoi dal punto B al centro O si tira la BO, la quale si prolunghi fino all' incontro della circonferenza nel punto D; questa retta incontra la periferia nel punto E, finalmente fatto centro il punto B con l'intervallo BE si descriva l' arco EC, che incontra AB nel punto C; dico che la retta AB è stata divisa in estrema, e media ragione nel punto C; cioè che AB : BC : : BC : CA.

Dim. Essendo per la costruzione il raggio OA perpendicolare ad AB nel punto dell'incontro A, la retta AB è tangente del cerchio nel punto A, quindi dal medesimo punto B sono tirate al cerchio AED la tangente AB e la secante BD, ed avremo la proporzione DB: BA:: BA : BE; ma BD=BE+ED; ed ED=2AO= AB, dunque avremo DB=AB+BE, e sarà AB+EB: AB : : AB: BE, ma BE=BC, dunque avremo AB+BC: AB: : AB : BC, e facendo la differenza dell'antecedente, e del conseguente sarà BC: AB:: AB−BC : BC :: AC : BC, ed invertendo AB: BC: : BC : AC. Sicchè etc.

243. Prob. 6. *Dall' estremo di una retta data inalzare sopra di essa la perpendicolare senza prolungarla.*

(Fig. 125). Sia data la retta AB, si vuole dal suo estremo B elevare sopra di AB la perpendicolare senza prolungare la retta AB.

Sol. Si prenda ad arbitrio il punto O fuori della *retta* data AB, e si unisca OB; indi col *centro* O, ed il raggio OB si descriva il cerchio BCD, che incontra con la sua periferia la retta AB nel punto D, finalmente dal punto D al centro O si tiri DO, la quale si prolunghi fino a tanto, che incontri la periferia nel punto C, e si unisca CB. Dico che CB è la perpendicolare dimandata.

Dim. Essendo DC un diametro, il segmento DCB è un semi-cerchio, e l'angolo CBD è in esso iscritto, ma l'angolo iscritto nel semicerchio è retto, dunque l'angolo CBD è retto, e perciò CB è perpendicolare ad AB. Sicchè ec.

244. Prob. 7. *Da un punto dato tirare ad un dato cerchio la tangente.*

(Fig. 132). Sia dato il cerchio DBC, si vuole da un punto dato tirare una retta, che sia ad esso tangente.

Sol. 1. Se il punto dato è sopra della circonferenza del cerchio, allora basterà unire con un raggio il centro, ed il punto dato, ed elevare dal punto dato la perpendicolare al raggio, poichè si è dimostrato, che la retta, che incontra la circonferenza, ed è perpendicolare al raggio tirato al punto dell' incontro è tangente del cerchio.

2. Se il punto dato è fuori del cerchio, come il punto A, allora il punto dato si unisca col centro O del cerchio dato per mezzo della retta AO; indi sopra di AO come diametro si

descriva il cerchio ABC, che taglia la circonferenza CBD nelli punti B, C; finalmente si unisca il punto A con li punti B, C per mezzo delle rette AB, AC; dico che le due rette AB, AC sono tangenti del cerchio dato nelli punti B, C.

Dim. Si uniscano li raggi OB, OC.

Li due angoli ABO, ACO sono iscritti nelli semi-cerchi ABO, ACO, dunque essi sono retti, quindi le rette AB, AC incontrano la circonferenza CBD nelli punti B, C, e formano con li raggi OB, OC angoli retti, dunque esse sono tangenti del medesimo cerchio nelli punti B, C. Sicchè ec.

245. Avv. Quì è buono di avvertire, che le due tangenti AB, AC sono eguali, imperocchè li due triangoli ABO, ACO, li quali hanno ciascuno un angolo retto, la ipotenusa AO comune, ed eguali li due cateti OB, OC, debbono avere le altre parti respettivamente eguali, dunque debbono avere gli altri due cateti AB, AC eguali; dippiù osserveremo, che noi abbiamo dimostrato, che da un punto esistente fuori di un cerchio non si possono tirare alla parte convessa della circonferenza di esso più di due rette eguali, dunque da un punto esistente fuori di un cerchio non si possono ad esso tirare più di due tangenti, e queste due tangenti sono eguali.

246. Prob. 7. *Descrivere sopra di una retta data un segmento di cerchio, il quale sia capace di un angolo dato, cioè tale, che gli angoli in esso iscritti sieno eguali ad un angolo dato.*

(Fig. 126). Sia data la retta AB , e sia dato l' angolo O , si vuole sopra di AB descrivere un segmento di cerchio capace dell' angolo dato O.

Sol. Si faccia nel punto A della retta AB l' angolo CAB eguale all' angolo dato O , indi sopra di CD dal punto A si elevi la perpendicolare AP , di poi si divida la AB in due parti eguali nel punto E , e si inalzi dal punto E sopra di AB la perpendicolare EP , le due rette AP , EP, come perpendicolari a due rette , che si incontrano, prolungate si debbono incontrare , e sia P il punto in cui esse si incontrano , finalmente si faccia centro il punto P con l' intervallo PA si descriva il cerchio AFBG , il quale passerà per lo punto B , poichè unita la retta PB , sarà AP=PB , come oblique , che si discostano equalmente dal piede E della perpendicolare PE , e perciò il cerchio, che ha per raggio OA passa per li punto A , B , e determina il segmento AFB , Dico che il segmento AFB è capace dell' angolo dato O.

Dim. Essendo il raggio PA perpendicolare alla CD nel punto A in cui essa incontra la circonferenza AGB , la retta CD è tangente nel punto A ; quindi l' angolo CAB fatto dalla tangente CD , e dalla corda AB ha per misura la metà dell' arco AGB compreso fra li suoi lati ; in oltre qualunque angolo AFB iscritto nel segmento AFB ha anche per misura la metà dell' arco AGB sul quale esso appoggia , dunque qualunque angolo iscritto nel segmento AFB è eguale all' angolo CAB, ma l' angolo CAB è eguale all' angolo dato O, dunque qualunque angolo iscritto nel segmento AFB è eguale all' angolo dato O, e perciò il segmen- AFB avendo per corda la retta data AB, ed avendo gli angoli in esso iscritti eguali all' angolo dato, è il segmento dimandato; e perciò sopra la retta data AB si è descritto il segmento AFB capace dell' angolo dato O. Sicchè ec.

CAP. X.

Delle proprietà delli poligoni simmetrici, e regolari; e della maniera di iscriverli, e circoscriverli al cerchio, e di iscrivere, e circoscrivere ad essi il cerchio.

247. Un poligono è detto *Simmetrico*, quando ha li lati opposti eguali, e paralleli; Quindi si vede, che un poligono per essere Simmetrico deve avere un numero pari di lati. Un poligono si dice *regolare*, qualora ha tutti li suoi lati eguali, e tutti li suoi angoli eguali. Un poligono qualunque si dice *iscritto* in un cerchio, quando i vertici di tutti gli angoli di esso sono sopra della circonferenza del cerchio, ed in questo caso il cerchio si dice *circoscritto* al poligono, ed un poligono si dice *circoscritto* ad un cerchio, quando tutti li suoi lati sono tangenti del cerchio, ed in questo caso il cerchio si dice *iscritto* nel poligono.

248. Teor: 1. *Se dal vertice di ciascuno degli angoli di un poligono simmetrico si tiri al vertice dell' angolo opposto la diagonale, li triangoli opposti al vertice sono eguali.*

(Fig. 127). Rappresenti ABCDEF un poligono simmetrico, e dalli vertici degli angoli A, F, E sieno tirate le diagonali AD, FC, EB alli vertici D, C, B degli angoli opposti, Dico che AOB=EOD, AOF=COD, FOE=BOC.

Dim. Per ipotesi li lati AB, ED sono paralleli, essi sono tagliati dalle secanti AD, BE, dunque gli angoli alterni interni sono eguali, e perciò BAO=ODE, ed ABO=OED, quindi li due triangoli AOB, FOD sono equiangoli, hanno di più li lati AB, ED opposti agli angoli eguali AOB, EOD, li quali per ipotesi sono eguali, dunque essi sono eguali. Con lo stesso raziocinio si dimostra essere FOE=BOC, ed AOF=COD. Sicchè ec.

249. Avv. Il punto O, in cui le diagonali vengono egualmente divise in due parti eguali, si dice *centro* del poligono simmetrico.

250. Avv. 2. Per descrivere un poligono simmetrico di un dato numero di lati, per esempio di sei lati, basterà tirare le rette AD, FC, EB, che facciano tra loro degli angoli qualunque, indi si taglino sopra di esse AO=OD, FO=OC, EO=OB, e si uniscano le rette AB, BC, CD ec., le quali saranno li lati del poligono simmetrico, imperocchè li

triangoli AOB, EOD avendo li lati AO, OB dell' uno eguali respettivamente ai lati DO, OE dell' altro, e gli angoli AOB, EOD da tali lati compresi eguali, come verticali, sono eguali, quindi FE=BC, e l'angolo ABO=EOD, ma questi angoli sono alterni interni delle rette AB, ED tagliate dalla secante BE, dunque AB, ED sono parallele, e perciò li due lati AB, ED del poligono descritto sono eguali, e paralleli; con lo stesso raziocinio si dimostra, che sono eguali, e paralleli li due lati EF, BC, come ancora gli altri due AF, CD, ed in conseguenza conchiudiamo, che il poligono ABCDEF è il poligono simmetrico dimandato.

251. Cor. 1. Se dal vertice A di uno degli angoli del poligono simmetrico si tiri al vertice dell' angolo opposto D la diagonale AD è evidente, che essa divide, il poligono ABCDEF in due parti eguali, e simili, poichè da ciascuna delle parti della diagonale vi è un eguale numero di triangoli eguali e simili.

152. Cor. 2. Qualunque retta KH tirata per lo centro O del poligono simmetrico ABCDEF, che prolungata incontra due lati del poligono, è divisa in due parti eguali nel punto O, e divide il poligono in due parti eguali, e simili. In fatti li due triangoli AOK, HOD, hanno gli angoli AOK, HOD eguali come verticali, l' angolo KAO=ODH, come alterni interni delle parallele AF, CD tagliate

dalla secante AD, ed il lato AO=OD, quindi essi sono eguali; Similmente si dimostra essere KOF=COH; ma abbiamo dimostrato, che AOB=EOD, FOE=BOC, quindi addizionando avremo AOK+AOB+BOC+COH=DOH+DOE+EOF+FOK, o sia KABCH=HDEFK, e poichè questi due poligoni sono composti da un medesimo numero di triangoli eguali, e perciò simili, sono non solo eguali, ma ancora simili.

253. Teor. 2. *Un poligono regolare è composto da tantitriangoli isosceli eguali, quanti sono li lati di esso.*

(Fig. 127). Rappresenti ABCDEF un poligono regolare; Dico che esso è composto da tanti triangoli isosceli eguali, quanti sono li suoi lati.

Dim. Si dividano in due parti eguali due angoli contigui A, B con le rette AO, BO, e dal punto O, in cui esse si incontrano, si tirino le rette OF, OE, OD, OC.

Li due triangoli BOA, FOA hanno il lato AB=AF, poichè sono lati del poligono regolare, il lato AO comune, e l'angolo BAO=OAF, poichè ciascuno di essi è la metà del medesimo angolo BAF, quindi essi sono eguali, e perciò BO=OF, e l' angoli ABO=AFO, ma l' angolo ABO è la metà dell' angolo ABC del poligono, dunque anche AFO è metà dell'angolo AFE del poligono, ma gli angoli del poligono sono tutti eguali, dunque anche le metà di essi sono eguali, e perciò il triangolo AOF è isoscele, dunque li due triangoli AOB, AOF sono isosceli, ed eguali, con lo stesso raziocinio si dimostra, che gli altri triangoli FOE, EOD, DOC, COB sono anche isosceli, ed eguali, dunque il poligono regolare ABCDEF è composto da tanti triangoli isosceli, ed eguali, quanti sono li lati di esso. Sicchè ec.

254. Avv. 1. Il punto O, in cui si trovano avere il loro vertice li triangoli isosceli che compongono il poligono regolare ABCDEF, si chiama *centro* del poligono regolare.

255. Avv. 2. Quì è buono di avvertire, che avendo il poligono regolare tutti li triangoli, che lo compongono eguali, se esso è terminato da un numero pari di lati sarà nel medesimo tempo regolare, e simmetrico, e per conseguenza avrà tutte le proprietà de' poligoni simmetrici.

256. Cor. 1. Poichè tutti li triangoli AOB, BOC, COD ec. dalli quali è composto il poligono regolare ABCDEF sono isosceli, ed eguali, è evidente, che se dal vertice O di questi triangoli si calino la perpendicolari OG, OK, OL, OM etc. sopra delle respettive basi di essi, tutte queste perpendicolari debbono essere eguali; quindi tutte le perpendicolari calate sopra de' lati di un poligono regolare dal centro di esso sono eguali. In appresso davremo il nome di *Apotema* alla perpendicolare calata dal centro di un poligono regolare sopra uno de' suoi lati.

157. Teor. 3. *A qualsivoglia poligono regolare si può sempre circoscrivere, ed iscrivere un cerchio.*

(Fig. 127). Sia il poligono regolare ABCDEF, dico che ad esso possiamo sempre circoscrivere ed iscrivere un cerchio.

Dim. 1. Noi abbiamo dimostrato, che se li due angoli A, B contigui del poligono regolare ABCDEF si dividano in due parti eguali, e pel punto O, nel quale si incontrano le rette AO, BO, che li dividono in due parti eguali, si tirino a tutti li vertici degli altri angoli del poligono le rette OC, OD, OE, OF, queste sono tutte eguali, quindi il cerchio descritto col centro O, e col raggio eguale ad una di queste rette passerà per gli vertici di tutti gli angoli del poligono, e per conseguenza sarà circoscritto al poligono.

Se dal medesimo punto O si calino sopra de' lati del poligono le perpendicolari OG, OK, OL, ec. per qnello, che abbiamo dimostrato queste perpendicolari sono tutte eguali, quindi il cerchio descritto col centro O, e col raggio eguale ad una di queste perpendicolari passerà per tutti li punti G, H, K, ec. di esse, e perciò incontrerà tutti li lati del poligono, e poichè queste perpendicolari sono i raggi, che incontrano con i loro piedi li lati del poligono, li lati del poligono sono tangenti di sì fatto cerchio, e perciò il cerchio è nel poligono iscritto Sicchè ec.

258. Cor. Da quello, che abbiamo dimostrato evidentemente si ricava il processo, che

si deve tenere per circoscrivere, ed iscrivere il cerchio ad un poligono regolare dato; in fatti per circoscriverlo basterà dividere due angoli contigui del poligono dato in due parti eguali, indi facendo centro il punto in cui queste rette, che dividono gli angoli si incontrano, e raggio una di esse, e descrivendo il cerchio, questo cerchio viene ad essere al poligono circoscritto; per iscriverlo poi basterà calare dal medesimo punto la perpendicolare sopra uno de' lati del poligono dato, e descrivere il cerchio, che ha per centro si fatto punto, e per raggio la perpendicolare.

259. Avv. Noi abbiamo dimostrato, che la somma di tutti gli angoli di un poligono, il quale ha un numero di lati disegnato da n, è indicata da $2nR - 4R$, quindi se tutti gli angoli di un poligono sono eguali, allora ognuno degli angoli suoi sarà espresso da $\frac{2nR - 4R}{n}$, quindi ognuno degli angoli di un poligono regolare, che ha n lati sarà espresso da $\frac{2nR - 4R}{n}$.

260. Teor. 4. *Due poligoni regolari, che hanno il medesimo numero di lati, sono simili.*

(Fig. 128). Sieno ABCDE, FGHIK due poligoni regolari, delli quali il numero de' lati sia designato da n; Dico che essi sono simili.

Dim. Essendo n il numero de' lati sì del poligono regolare ABCDE, che quello del poligono FGHIK, è evidente, che ciascuno degli angoli di ciascuno di essi è espresso da $\frac{2nR-4R}{n}$, e perciò essi avranno gli angoli tutti eguali; Dippiù essendo per la ipotesi li poligoni regolari, sarà AB=BC=CD=DE=EA, ed ancora FG=GH=HI=IK=KF, ne segue che le grandezze eguali AB, BC, CD, ec. sieno proporzionali alle grandezze eguali FG, GH, HK ec., quindi li poligoni ABCDE, FGHIK essendo equiangoli, ed avendo li lati proporzionali sono simili. Sicchè ec.

261. Teor. 5. *Li contorni di due poligoni regolari simili sono fra essi come li raggi de' cerchi ad essi iscritti, o circoscritti, e le aje di essi sono come li quadrati delli medesimi raggi.*

(Fig. 128). Sieno li poligoni regolari ABCDE, FGHIK del medesimo numero di lati, Dico 1. Che li contorni ABCDE, FGHIK sono nella ragione de' raggi delli cerchi ad essi iscritti, o circoscritti. 2. Che le aje di essi sono nella ragione delli quadrati delli medesimi raggi.

Dim. 1. Nel poligono ABCDE si dividano in due parti eguali gli angoli contigui A, B con le rette OA, OB, che si incontrano nel punto O, e dal punto O si cali sopra di AB la perpendicolare OM, saranno AO il raggio del cerchio circoscritto al poligono, ed OM il raggio del cerchio ad esso iscritto, similmente si dividano in due parti eguali gli angoli contigui F, G del poligono FGHIK con le rette FP, GP, e dal punto P, in cui queste rette si incontrano, si cali sopra di FG la perpendicolare PN, saranno PF il raggio del cerchio circoscritto, e PN il raggio del cerchio iscritto al poligono.

Essendo, per la ipotesi, li poligoni simili, sarà l'angolo EAB=KFG, e l'angolo ABC=FGH, dunque le metà di essi saranno anche eguali, e perciò li due triangoli AOB, FPG, avendo due angoli dell'uno eguali a due angoli dell'altro, sono simili; Dippiù li due triangoli rettangoli AMO, FNP avendo gli angoli OAM, PFN eguali, sono anche simili; di più noi abbiamo dimostrato, che li contorni di due poligoni simili sono nella ragione delli loro lati omologhi, dunque sarà il contorno ABCDE al contorno FGHIK come AB : FG; ma per la simiglianza delli triangoli AOB, FPG si ha AB : FG : : AO : PF; e per la simiglianza de' triangoli AOM, FPN abbiamo AO : FP : : OM : PN : dunque sarà il contorno di ABCDE al contorno di FGHIK come AO : FP : : OM : PN. Sicchè etc.

2. Si è dimostrato, che le aje de' poligoni simili sono come li quadrati delli lati omologhi, quindi sarà ABCDE : FGHIK : : AB^2 : FG^2, ma noi abbiamo dimostrato, che AB : FG : : AO : FP : : OM : PN; e per conseguenza AB^2 : FG^2 : : AO^2 : FP^2 : : OM^2 : PN^2 dunque sarà ancora ABCDE : FGHIK : : OA^2 : PF^2 : : OM^2 : PN^2 Sicchè ec.

262. Teor. 6. *La misura dell' aja di qualsivoglia poligono regolare si ha multiplicando il suo contorno per la metà dello apotema.*

(Fig. 128). Sia il poligono regolare ABCDE, e sia OM il suo apotema , Dico che la misura dell' aja del poligono ABCDE è espressa da $(AB+BC+CD+DE+EA)\frac{OM}{2}$.

Dim. Abbiamo dimostrato , che il poligono ABCDE è eguale alla somma delli triangoli, ciascuno de' quali ha per base uno de' suoi lati , e per altezza il medesimo apotema OM , ma ciascuno di questi triangoli ha per misura della sua aja il prodotto della sua base multiplicata per la metà della sua altezza OM, dunque la somma di tutti essi, ossia l'aja del poligono ABCDE avrà per misura la somma delle basi, o sia il contorno del poligono ABCDE multiplicato per la metà dell' apotema OM. Sicchè ec.

263. Prob. 1. *In un dato cerchio iscrivere il quadrato.*

(Fig. 129). Sia dato il cerchio ABCD , si vuole in esso iscrivere il quadrato.

Sol. Nel cerchio ABCD si tirino li due diametri AC , BD , li quali sieno l' uno perpendicolare all' altro , e si uniscano le corde AB , BC , CD , DA ; Dico che ABCD è il quadrato dimandato.

Dim. Per la costruzione li quattro angoli fatti intoruo al punto O sono angoli retti , e perciò essi sono eguali , dunque eguali sono ancora gli archi AB , BC , CD , DA sopra delli quali essi appoggiano, ma gli archi eguali sono sottesi da corde eguali, dunque il quadrilatero ABCD ha tutti li suoi lati eguali; dippiù ciascuno degli angoli ABC, BCD, CDA, DAB è iscritto nel semicerchio, e perciò è angolo retto, dunque il quadrilatero ABCD ha tutti li lati eguali, e tutti gli angoli retti, e perciò è un quadrato, è iscritto nel cerchio dato ABCD, dunque è il quadrato dimandato. Sicchè ec.

264. Cor. 1. Il triangolo AOB è rettangolo in O, quindi sarà $AB^2=AO^2+BO^2$, ma $AO=BO$; dunque $AB^2=2AO^2$, ed $AB=BO\sqrt{2}$; quindi mettendo il raggio del cerchio eguale alla unità, avremo $AB=\sqrt{2}$; e sarà il raggio del cerchio al lato del quadrato in esso iscritto come $1:\sqrt{2}$; e conchiuderemo, che il raggio di un cerchio, ed il lato del quadrato in esso iscritto sono due quantità incommensurabile.

265. Cor. 2. Se ciascuno degli archi AB, BC, CD, DA si divida in due parti eguali, e si uniscano le correspondenti corde, è evidente, che avremo iscritto nel cerchio il poligono regolare di otto lati, e così successivamente dividendo gli archi potremo iscrivere nel cerchio li poligoni regolari di 16, 32, 64 etc. lati.

266. Avv. Non è fuori di proposito di avvertire quì, che un quadrilatero ancorchè irregolare alcune volte può essere iscritto in un

cerchio, e questo accade quando il quadrilatero ha ciascuna delle somme degli angoli opposti eguale a due angoli retti.

(Fig. 113). In fatti supponiamo, che nel cerchio ABD sia iscritto il quadrilatero ABCD, allora ciascheduno delli suoi angoli, dovendo avere il vertice alla periferia, sarà misurato dalla metà dell' arco sopra del quale esso appoggia, quindi dell' angolo A la misura è la metà dell' arco DCB, e dell' angolo C la misura è la metà dell' arco DAB, e perciò la misura della somma degli angoli A, B è $\frac{1}{2}$ BCD$+\frac{1}{2}$ BAD, cioè la metà della circonferenza, ma la metà della circonferenza è la misura di due angoli retti, dunque la somma delli due angoli A, C opposti del quadrilatero ABCD è eguale a due angoli retti. In oltre la somma delli quattro angoli di un quadrilatero è sempre eguale a quattro retti, dunque la somma D$+$B degli altri due angoli del quadrilatero ABCD è anche eguale a due retti. Dal che ricaviamo, che un quadrilatero allora è iscrittibile in un cerchio, qualora ha ciascuna delle somme delli suoi angoli opposti eguali a due retti.

264. Prob. 2. *Determinare il rapporto, che passa tra il raggio di un cerchio, ed il lato dello esagono regolare iscrittibile in esso:*

(Fig. 107). Sia AB il lato dell' esagono regolare iscritto nel cerchio AEB, si vuole determinare il rapporto, che hanno fra essi il raggio del cerchio AEB, ed il lato AB dello esagono regolare iscritto in esso.

Sol. Il lato AB detto esagono regolare è la corda dell' arco AB, dunque l' arco AB è $\frac{1}{6}$ della periferia, quindi tirando li raggi OA, OB, avremo l'angolo AOB misurato dall' arco AB, il quale sarà $\frac{1}{6}$ di 4 angoli retti, ossia $\frac{4}{6}$ di un angolo retto, ossia $\frac{2}{3}$ di un retto; In oltre la somma delli tre angoli del triangolo AOB è eguale a due retti, ossia a $\frac{6}{3}$ di un retto, quindi la somma delli due angoli OAB, OBA è eguale a $\frac{6}{3}-\frac{2}{3}$ di un retto, ossia a $\frac{4}{3}$ di un angolo retto; ma essendo nel triangolo AOB il lato OA=OB, anche l' angolo OAB=OBA, dunque ciascuno di essi sarà $\frac{2}{3}$ di un angolo retto, e perciò il triangolo AOB è equiangolo, e per conseguenza equilatero; dunque OB=AB, ma AB è il lato dell' esagono, ed OB è il raggio del cerchio AEB, dunque il lato dello esagono regolare iscritto in un cerchio è eguale al raggio del medesimo cerchio.

265. Cor. 1. Quindi per iscrivere *l'esagono* regolare in un cerchio si deve prendere il raggio, ed adattarlo sei volte nel cerchio.

266. Cor. 2. Se ciascuno degli archi sottesi dalli lati dello esagono regolare si divida in due parti eguali, e si uniscano le correspondenti corde, avremo nel cerchio iscritto il dodecagono regolare, e suddividendo successivamente gli archi sottesi dalli lati delli poligoni, che si vanno iscrivendo, in due parti

eguali, e tirando le correspondenti corde, noi potremo nel cerchio iscrivere li poligoni regolari di 24, 48, 96 etc. lati.

267. (Fig. 129). Cor. 3. Si uniscano con AD li vertici di due angoli opposti D, A dello esagono regolare ABCDEF, è evidente, che DA è un diametro del medesimo cerchio e si uniscano le corde DB, BF, FD. Avremo il triangolo equilatero BDF. Nel triangolo DBA l'angolo DBA è retto, poichè è iscritto nel semicerchio, quindi $DB^2 = AD^2 - AB^2 = 4AO^2 - AO^2 = 3AO^2$; dal che conchiudiamo, che il quadrato del lato del triangolo equilatero iscritto in un cerchio è triplo del quadrato del raggio; e dippiù avremo $DB = \sqrt{3AO^2} = AO\sqrt{3}$; e mettendo il raggio eguale alla unità, avremo $DB = \sqrt{3}$, quindi il raggio di un cerchio sta al lato del triangolo equilatero iscritto in esso come $1 : \sqrt{3}$; e per conseguenza, il raggio di un cerchio è incommensurabile col lato del triangolo equilatero iscrittibile in esso.

268. *Determinare il rapporto, che passa trà il lato del decagono regolare iscritto in un cerchio, ed il raggio del medesimo cerchio.*

(Fig. 107). Sia AB il lato del decagono regolare iscritto nel cerchio AEB, si vuole sapere il rapporto, che ha il raggio OA al lato AB del decagono regolare in esso iscritto.

So. Si uniscano li raggi OA, OB.

L' angolo AOB ha per misura l' arco AB sopra del quale esso appoggia, ma l'arco AB è $\frac{1}{10}$ della periferia, e la periferia è la misura di quattro angoli retti, dunque l' angolo AOB è $\frac{1}{10}$ di quattro angoli retti, e perciò $\frac{4}{10}$ ossia $\frac{2}{5}$ di un retto. In oltre la somma delli tre angoli di un triangolo è eguale a due retti, e perciò a $\frac{10}{5}$ di un retto, quindi la somma delli due angoli in A, B del triangolo AOB è eguale a $\frac{10}{5} - \frac{2}{5}$, ossia ad $\frac{8}{5}$ di un retto, ma questi due angoli sono eguali, poichè il triangolo AOB è isoscele, dunque ciascuno di essi è $\frac{4}{5}$ di un retto, e perciò il triangolo AOB è un triangolo isoscele, che ha ciascuno degli angoli alla base doppio dell' angolo al vertice. In oltre se l'angolo ABO si divida in due parti eguali con la retta BD, ciascuno degli angoli OBD, DBA sarà $\frac{2}{5}$ di un retto, ed avremo il triangolo OBD, nel quale li due angoli OBD, DOB sono eguali, e conchiuderemo, che OD=DB. In oltre nel triangolo ABD essendo l'angolo DAB=$\frac{4}{5}$ di un retto, e l' angolo DBA=$\frac{2}{5}$ di un retto, ne segue, che deve avere anche l' angolo ADB=$\frac{4}{5}$ di un retto, e perciò conchiuderemo, che AB=BD, ma BD=DO, dunque AB=DO; in oltre nel triangolo OBA si è tirata la retta BD, la quale divide l'angolo OBA in due parti eguali, dunque essa deve dividere il lato OA ad esso opposto in parti proporzionali agli altri due lati, e perciò sarà OB : AB : : OD : DA, ma OB=OA, AB=OD, dunque avremo OA :

OD : : OD : DA; ed OD sarà la parte maggiore del raggio AO diviso in estrema, e media ragione, ma abbiamo dimostrato che OD è eguale al lato AB del decagono regolare iscritto nel cerchio ABC, dunque il lato del decagono regolare iscritto in un cerchio è eguale alla parte maggiore del raggio diviso in estrema, e media ragione. Sicchè ec.

269. Cor. Da questa verità si ricava la facile maniera da iscrivere in un cerchio il decagono regolare, poichè basterà dividere il raggio del cerchio in estrema e media ragione, indi iscrivere nel cerchio dato la parte maggiore di esso; ne segue ancora il metodo da iscrivere nel cerchio il pentagono regolare, poichè basterà unire a due a due li vertici degli angoli del decagono regolare, e finalmente dividendo in due parti eguali gli archi sottesi dalli lati del decagono, e tirando le corrispondenti corde iscriveremo il poligono regolare di 20 lati, operando successivamente tali suddivisioni iscriveremo nel cerchio li poligoni regolari di 40, 80, 160 ec. lati.

270. Prob. 4. *Iscrivere in un cerchio dato il pentadecagono regolare.*

(Fig. 87.) Sia dato il cerchio ABH, si vuole in esso iscrivere il pentadecagono regolare.

Sol. Si iscriva nel dato cerchio ABH il lato AD. del decagono regolare in esso iscrittibile; e dallo stesso punto A si iscriva il lato AH dell' esagono regolare anche in esso iscrittibile, e si unisca la corda DH; Dico che DH è il lato del pentadecagono regolare iscrittibile nel cerchio dato.

Dim. Essendo AH il lato dell' esagono regolare iscrittibile nel cerchio ABH, l'arco AH da esso sotteso è $\frac{1}{6}$ della periferia; ed essendo AD il lato del decagono regolare anche iscrittibile in esso, l' arco AD da esso sotteso sarà $\frac{1}{10}$ della medesima periferia, quind l' arco AH, il quale è eguale a AD, DH sarà la parte della circonferenza indicata da $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ di essa, ossia a $\frac{10}{60} - \frac{6}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$ della periferia, e la su a corda DH sarà il lato del pentadecagono re golare, quindi iscrivendo nel dato cerchio 15 volte la retta DH avremo nel dato cerchio iscritto il pentadecagono regolare. Sicchè ec.

271. Cor. Dividendo, e suddividendo in due parti eguali gli archi sottesi dalli lati del pentadecagono regolare, si potranno iscrivere nel cerchio li poligoni regolari di 30, 60, 120 ec. lati.

272. Prob. 5. *Dato un poligono regolare iscritto in cerchio, circoscrivere al medesimo cerchio il poligono regolare simile allo iscritto.*

(Fig. 130). Sia il poligono regolare FGHKL iscritto nel cerchio FHL, si vuole al medesimo cerchio circoscrivere il poligono regolare simile ad FGHKL.

Sol. Dal centro O alli vertici F, G, H, K, L si tirino li raggi OF, OG, OH, OK, OL, e per gli medesimi punti si inalzino sopra di essi le perpendicolari AB, BC, CD, DE, EA, le quali si prolunghino fino a che si incontrino, esse saranno tutte tangenti del cerchio FGH, e formeranno il contorno del poligono ABCDE, il quale è al cerchio circoscritto. Dico, che ABCDE è il poligono regolare dimandato.

Dim. Il triangolo FAG è un triangolo isoscele, poichè ha per lati le due tangenti AF, AG tirate dal medesimo punto A, similmente si dimostra, che gli altri triangoli FBL, LCK ec. sono anche isosceli, dippiù gli angoli alle basi di essi sono tutti eguali, poichè essendo tutti fatti da una tangente, e da una corda, hanno per misura la metà degli archi compresi fra li loro lati, li quali sono tutti eguali, poichè sono sottesi dalli lati del poligono regolare iscritto; dippiù tutti essi hanno li lati FG, GH, HK ec. adiacenti agli angoli eguali, che sono eguali, dunque essi sono eguali, e perciò AF=FB=AG=GE ec. e per conseguenza 2AG=2AF=2BL ec., o sia AB=AC=AD ec., e perciò il poligono ABCDE è equilatero, gli angoli, A, B, C, D, E sono eguali, come angoli de'triangoli GAF, FBL, LCK ec., li quali si sono dimostrati eguali, dunque il poligono ABCDE è regolare, e perciò è il poligono dimandato.

273. Prob. 6. *Dato un poligono regolare circoscritto ad un cerchio, iscrivere nel medesimo cerchio il poligono simile al circoscritto.*

(Fig. 130). Sia dato il poligono regolare ABCDE circoscritto al cerchio FGK, si vuole iscrivere nel medesimo cerchio il poligono regolare simile al circoscritto.

Sol. Li punti F, G, H, K, L si uniscano con le rette FG, GH, HK ec.; dico che il poligono FGHKL è il poligono dimandato.

Dim. Tutti li triangoli GAF, FBL, LCK hanno i lati eguali, poichè ciascuno di essi è la metà di un lato del poligono regolare ABCDE, essi hanno ancora gli angoli A, B, C, D, E eguali, poichè sono angoli del poligono regolare dato, dunque eguali saranno ancora i lati FG, GH, HK, LK, LF. Dippiù essendo eguali le corde FG, GH, HK etc., anche gli archi da esse sottesi saranno eguali, ma ciascuno degli angoli, del poligono FGHKL appoggia sopra del medesimo numero di tali archi eguali, dunque essi sono eguali, e per conseguenza il poligono FGHKL è equilatero, ed equiangolo, e perciò regolare, ha di più il medesimo numero di lati, che ha il poligono circoscritto, dunque è il poligono dimandato. Sicchè ec.

274. (Fig: 131). Avv. Potrebbesi avere ancora il medesimo poligono iscritto, tirando dal centro O alli vertici degli angoli del poligono circoscritto dato le rette OA, OB, OC, OD, OE le quali incontrano la circonferenza nelli punti M, N, P, Q, R, ed unendo questi punti con le rette MN, NP, PQ, QR, RM.

In fatti nelli due triangoli AOB , NOM il lato AO=OB , ON=OM , quindi avremo AO: OB : : ON : OM , ma la retta tirata in un triangolo, la quale divide due lati in parti proporzionali è parallela al terzo lato , dunque MN è parallela ad AB , e perciò il triangolo AOB è simile al triangolo NOM ; similmente si dimostrano simili gli altri triangoli BOC , ed MOR , COD ed ROQ etc. · ed avremo AB: NM : : OB : OM : : BC : MR , ma AB=BC , dunque anche NM=MR , con lo stesso razicinio si dimostra , che gli altri lati del poligono MNPQR sono eguali , dunque il poligono MNPQR è equilatero ; In oltre gli angoli ABC, NMR hanno li lati paralleli , e le aperture rivolte alla medesima parte , dunque essi sono eguali , con lo stesso raziocinio si dimostra , che gli altri angoli del poligono iscritto sono respettivamente eguali a quelli del poligono circoscritto , ma gli angoli del poligono circoscritto sono tutti eguali , dunque anche gli angoli del poligono iscritto sono eguali , e per consegnenza il poligono MNPQR è equilatero , ed equiangolo, e perciò è il poligono regolare dimandato.

(Fig. 131). 276. Cor. Dal centro O al punto del contatto T si tiri il raggio OT , il quale sarà perpendicolare a BC, e per conseguenza alla sua parallela MR; La simiglianza de' triangoli MOR , BOC dà la proporzione MR : BC : : OM: OB , ma la simiglianza de' triangoli rettangoli MUO , BTO dà OU : OT::

OM : OB, dunque MR : BC : : OU : OT, dal che ricaviamo, che il lato del poligono regolare iscritto sta al lato del poligono regolare simile circoscritto come l' apotema al raggio del cerchio, e perciò il lato $BC = \frac{OT \times MR}{OU}$; cioè il lato del poligono regolare circoscritto ad un cerchio è eguale al raggio multiplicato per lo lato del poligono regolare simile iscritto diviso per l' apotema.

275. Prob. 7. *Dato il lato di un poligono regolare, ed il raggio del cerchio, in cui esso è iscritto, determinare l'apotema.*

(Fig. 132). Sia AB il lato del poligono regolare iscritto nel cerchio ABC, e sia dal centro O calato il raggio OF ad esso perpendicolare, sarà OD l'apotema correspondente, si vuole determinare il valore di OD.

Sol. Si unisca il raggio OA, e si metta il lato dato $AB = a$, ed il raggio $= R$.

Il triangolo ADO è rettangolo in D; dunque $OD^2 = AO^2 - AD^2 = R^2 - (\frac{1}{2} a)^2 = R^2 - \frac{1}{4} a^2$, e perciò l' apotema $OD = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4} a^2}$. Sicchè ec.

276. Cor. Noi abbiamo dimostrato, che il lato del poligono regolare circoscritto ad un cerchio è eguale al prodotto del raggio del cerchio multiplicato per lo lato del poligono regolare simile iscritto diviso per l' apotema, quindi chiamando A il lato del poligono regolare circoscritto, a il lato del poligono regola-

re simile iscritto, ed R il raggio, avremo $A = \dfrac{R \times a}{\text{apotema}}$; ma ora abbiamo dimostrato, che l'apotema è eguale alla $\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a^2}$, dunque se si sà il valore del raggio, che chiamiamo R, e quello del lato di un poligono regolare iscritto, che chiamiamo a il valore del lato del poligono regolare circoscritto simile allo iscritto è espresso da $\dfrac{R \times a}{\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a^2}}$, e mettendo $R = 1$; il lato del poligono circoscritto è $\dfrac{a}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}}$.

277. Prob. 8. *Dato il lato di un poligono regolare iscritto in un cerchio, determinare il lato del poligono regolare iscrittibile nel medesimo cerchio, il quale abbia un numero doppio di lati.*

(Fig. 132). Sia AB il lato di un poligono regolare iscritto nel cerchio ABC, si vuole determinare il lato del poligono regolare iscrittibile nel medesimo cerchio, il quale abbia il doppio del numero de' lati del poligono dato.

Sol. Dal centro O si faccia passare il diametro CF, il quale sia perpendicolare ad AB, esso dividerà in due parti eguali si la corda AB, che l'arco AEB, quindi se si unisce la corda AF, evidentemente essa sarà il lato del poligono dimandato.

Si metta $AB=a$, e perciò $AD=\frac{1}{2}a$, e si metta il raggio$=R$, sarà $FD=R-OD$; ma l' apotema $OD=\sqrt{R^2-\frac{1}{4}a^2}$, dunque $FD=R-\sqrt{R^2-\frac{1}{4}a^2}$. Noi abbiamo dimostrato, che se dallo estremo di un diametro si tiri una corda, essa è media proporzionale tra il diametro intero, ed il segmento adjacente alla corda, che taglia dal diametro la perpendicolare calata sopra di esso dall' altro estremo della corda, dunque sarà $2R:AF::AF:FD$, ma $FD=R-\sqrt{R^2-\frac{1}{4}a^2}$, dunque sostituendo avremo $2R:AF::AF:R-\sqrt{R^2-\frac{1}{4}a^2}$, e perciò sarà $AF^2=2R\times(R-\sqrt{R^2-\frac{1}{4}a^2}$; ed $AE=\sqrt{2R(R-\sqrt{R^2-\frac{1}{4}a^2}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{1}{4}a^2}}$.

178. Se si prenda il raggio per termine di paragone ossia per unità, sarà il lato $AE=\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}}$.

Se si dividesse l' arco AE in due parti eguali nel punto E', e si unisse la corda AE', avremo $AE'=\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{1}{4}a'^2}}$ chiamando a' il lato AE; ed avremo così il lato del poligono regolare iscrittibile nel dato cerchio, il quale ha un numero di lati doppio del numero de' lati del poligono, che lo precede, e così in avanti.

Dippiù avendo dimostrato, che il lato del poligono circoscritto correspondente al poligono, che ha per lato AF è espresso da $\frac{R\times a}{\sqrt{R^2-\frac{1}{4}a^2}}$; quello che corresponde ad AE' sarà espresso da

$\frac{R \times a'}{\sqrt{R - \frac{1}{4} a'^2}}$ e mettendo il raggio $=1$, il primo sarà espresso da $\frac{a}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} a^2}}$, ed il secondo da $\frac{a'}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} a'^2}}$

C A P. XI.

Delli rapporti, che hanno fra loro le aje de' cerchi, le circonferenze di essi, gli archi, li settori, e li segmenti simili.

280. Lo spazio racchiuso tra due raggi di un cerchio, e l' arco corrispondente si dice *Settore circolare*. Se in due cerchi si descrivono due settori, li quali comprendono tra li raggi che li terminano, due angoli eguali, essi si diranno *settori simili*, come ancora si chiamano *simili* gli archi sopra de' quali appoggiano angoli eguali fatti alli centrì; e *segmenti simili* quelli, che sono terminati da archi simili.

281. Noi sappiamo, che l' angolo fatto al centro di un cerchio sta a quattro retti come l' arco sopra del quale esso appoggia sta alla intera periferia, quindi se ai centri di due cerchi sono fatti due angoli eguali essi avranno eguali ragioni a quattro retti, dunque anche gli archi sopra delli quali essi appoggiano avranno eguali ragioni alle periferie, e conchiudiamo, che gli archi simili sono proporzionali alle periferie, alle quali essi appartengono.

282. Sebbene altrove da noi, seguendo Archimede, si sia passato come assioma il principio; *Se due linee curve, oppure composte da linee rette, le quali terminando agli stessi punti, rivolgono la convessità dalla medesima parte, quella è maggiore, che comprende l' altra dentro di se*, pure per non mancare al rigore delle dimostrazioni seguenti ne rapporterò la seguente dimostrazione.

283. (Fig. 133). Sia *ABC una linea convessa qualunque, vogliamo dimostrare, che essa è minore di qualsivoglia altro contorno convesso, il quale la circonda interamente.*

Se si niega, che ACB sia il minimo di tutti li contorni, che la circondano, tra tutti li contorni, che circondano ACB, il minimo deve essere minore, o eguale ad ACB; sia se mai è possibile ADEFB il minimo di tutti questi contorni, tiriamo in qualunque situazione si voglia la retta GH, la quale incontri il contorno ADEFB in due punti G, H, e che non incontri la linea convessa ACB; La retta GH è evidentemente minore di GDEH, aggiungendo si all'una, che all' altra di queste quantità AG+HFB sarà AGHFB<ADEFB, il che è assurdo, poichè per la supposizione ADEFB è il minimo delli contorni convessi, che circondano ABC, dunque è anche assurdo, che ACB non sia minore di qualunque altro contorno convesso, che la circonda.

284. Lemma. *Se vi sono due cerchi con-concentrici, tra tutti li poligoni simili, che possono essere iscritti nel cerchio maggiore, e circoscritti al cerchio minore, sempre ve ne possono essere due l' uno iscritto nel cerchio maggiore, l' altro circoscritto al cerchio minore tali, che li lati dello iscritto nel maggiore non incontrino la circonferenza del minore, e che li lati del circoscritto al minore non incontrino la circonferenza del maggiore.*

(Fig. 134). Siano ABC, DEF due cerchi concentrici, dico che tra li poligoni regolari simili, che si possono iscrivere nel maggiore ABC, e circoscrivere al minore DEF si possono trovare due poligoni regolari simili, l' uno iscritto nel maggiore ABC, l' altro circoscritto al minore DEF tali, che li lati dello iscritto non incontrino la circonferenza DEF, e che li lati del circoscritto non incontrino la circonfèrenza ABC.

Dim. Da qualsivoglia punto G preso ad arbitrio nella circonferenza DEF si tiri la tangente HI, la quale incontra la circonferenza ABC nelli punti H, I, si tiri al punto del contatto G il raggio OG, il quale si prolunghi fino allo incontro della circonferenza ABC nel punto L, il raggio OL sarà perpendicolare alla corda HI, e dividerà in due parti eguali si la corda HI, che l' arco HLI da essa sotteso; si iscriva nel cerchio ABC uno qualsivoglia delli poligoni regolari, che si possono in esso iscrivere; indi si divida in due parti eguali ciascuno degli archi sottesi dalli lati di tali poligoni, e si tirino le corde corrispondenti, avremo così iscritto nel cerchio un poligono regolare, il numero de' lati del quale è doppio di quello delli lati del precedente, si ripeta la medesima operazione sopra di questo nuovo poligono, ed avremo un terzo poligono regolare iscritto, il quale ha un numero di lati doppio di quello de' lati del secondo poligono, continuiamo questa operazione fino a tanto, che arriviamo ad avere un poligono regolare iscritto, un lato del quale sia minore di HI, ed iscriviamo questo lato nel cerchio ABC in maniera, che esso sia perpendicolare ad OL, e supponiamo, che questo lato sia AB, si tirino li raggi OA, OB, li quali incontrano HI nelli punti M, N, finalmente si tiri la corda DE.

Qualora in un cerchio si iscrivono più corde, le minori fra esse sono più lontane dal centro di quelle, che sono maggiori, dunque OK è maggiore di OG, e perciò la retta AB non può incontrare DEF nel punto G; dippiù di tutte le rette; che dal punto O si possono calare sopra di AB, la perpendicolare OK è la minima, dunque tutti gli altri punti della retta AB sono dal centro O più lontani di quello, che ne è lontano il punto K, e perciò la retta AB non può incontrare la circonferenza DEF.

In oltre l'angolo al centro AOB appoggia sopra li due archi ALB, DGE, dunque le due corde AB, DE sono lati di due poligoni regolari simili iscritti nelli due cerchi ABC, DEF, e per conseguenza MN è il lato del poligono regolare circoscritto al cerchio DEF; finalmente li triangoli OGM, OKA sono simili, e danno la proporzione OG : OK :: OM : OA; ma OG è minore di OK, dunque OM è minore di OA; e per conseguenza il punto M della retta MN non può incontrare la circonferenza ABC, similmente si dimostra, che il punto N della medesima retta MN non può incotrare la circonferenza ABC; ma se dal puuto O si tirano quante rette si vogliono sopra di MN, queste essendo più vicine al piede della perpendicolare sono tutte minori di OM, e di ON, dunque se li punti M, N non possono trovarsi sopra la circonferenza ABC, la medesima retta non potrà con alcun punto incontrare la circonferenza ABC. Con lo stesso raziocinio si può dimostrare, che gli altri lati del poligono iscritto nel cerchio maggiore non possono incontrare la circonferenza del cerchio minore, e che gli altri lati del poligono circoscritto al cerchio minore non possono incontrare la circonferenza del circolo maggiore, dunque, ec.

285. Teor. 1. *Le circonferenze delli cerchi sono nella ragione de' raggi.*

(Fig. 135). Sieno ACE, GIL le periferie di due cerchi, delli quali OA, PG sieno li raggi ; Dico OA : PG : : Perif. ACE: Perif. GIL.

Dim. Se si niega, che OA : PG:: Perif. ACE : Perif. GIL, sarà OA : PG:: Per ACB: ad una altra periferia minore, o maggiore di Perif. GIL.

Sia se mai è possibile OA : PG: : Perif. ACE: Perif. NQR $<$ Perif. GIL.

Nelli due cerchi ACE, GIL si iscrivano li due poligoni regolari simili ABCDEF, GHIKLM, avremo OA: PG : : contorno ABCDEF : contorno GHIKLM, ma per la supposizione abbiamo OA : PG: : Perif. ACE: Perif. NQR ; dunque sarà Perif. ACE: Perif. NQR : : Cont. ABCDEF : cont. GHIKLM, ma la periferia ACE è maggiore del contorno ABCDEF, dunque anche la perif. NQR è maggiore del contorno GHIKLM, cioè la linea convessa contenuta dovrebbe essere maggiore della linea convessa, che la contiene, il che è assurdo, dunque anche è assurdo, che sia OA: PG : : Perif. ACE ad una periferia minore di GIL.

Sia ora se è possibile OA: PG:: Perif. ACE : perif. $>$ GIL, oppure ciò, che vale lo stesso OA: PG:: Perif. $\nless$ ACE: Perif. GIL.

Essendo per supposizione OA: PG:: Perif. $\nless$ ACE: Perif. GIL avremo invertendo PG: OA:: Perif. GIL: Perif. $\nless$ ACE, ma noi abbiamo dimostrato che questa proporzione è assurda, dunque anche assurda è la proporzione OA : PG:: Perif. ACE ad una perif. maggiore di

GIL ; Dunque essendo assurde le due proporzioni OA: PG:. Perif. ACE : Perif. < GIL, e OA: PG: : Perif. ACE: Perif. >GIL ; Sarà OA: PG:: Perif. ACE: Perif. GIL. Sicchè ec.

286. Cor. Noi abbiamo dimostrato, che gli archi simili sono nella ragione delle periferie alle quali essi appartengono, ma le periferie sono nella ragione delli raggi, dunque anche gli archi simili sono nella ragione delli raggi delli cerchi, alli quali essi appartengono.

287. Teor. 2. *L' aja di qualsivoglia cerchio è sempre eguale alla aja di quel triangolo, che ha per base una retta eguale alla sua periferia, e per altezza il raggio.*

(Fig. 136). Dim. Se si niega, che l' aja del triangolo, che ha per base la perif. ABC e per altezza il raggio OA, sia eguale all' aja del cerchio ABC, l'aja di questo triangolo sarà eguale all' aja di un altro cerchio, il quale sarà maggiore, o minore del cerchio ABC.

Supponiamo se mai è possibile, che l' aja di questo triangolo sia eguale alla aja del cerchio DEF maggiore del cerchio ABC.

Intorno al cerchio ABC si circoscriva il poligono regolare GHKL tale, che il suo perimetro non incontri la circonferenza DEF. Si concepiscano descritti due triangoli, li quali abbiano le altezze eguali al medesimo raggio OA, ed uno di essi abbia per base una retta eguale al contorno del poligono GHKL, e l' altro abbia per base una retta eguale alla Perif.

ABC, questi due triangoli avendo la medesima altezza saranno come le basi; cioè quello che ha per base il cont. GHKL sarà a quello, che ha la base eguale alla perif. ABC: : cont. GHKL : Perif. ABC; ma il cont. GHKL è maggiore della perif. ABC, dunque anche il triangolo, che ha per base una retta eguale contorno GHKL è maggiore di quello, che ha la base eguale alla perif. ABC, ma per la supposizione il triangolo, che ha la base eguale alla Perif. ABC e per altezza il raggio OA è eguale al cerchio DEF, dunque l'aja del poligono GHKL è maggiore della aja del cerchio DEF, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che l'aja del triangolo, che ha per base una retta eguale alla perif. ABC, e per altezza il raggio OA sia eguale all'aja di un cerchio maggiore di ABC. Sicchè abbiamo dimostrato, che l'aja del triangolo, che ha per base una retta eguale alla periferia, e per altezza il raggio di un cerchio non può eguagliare l'aja di un cerchio maggiore del cerchio dato.

Supponiamo ora, che l'aja del triangolo, che ha per base la perif. ABC e per altezza il raggio OA sia eguale all'aja del cerchio QRS minore del cerchio ABC.

Si concepisca al cerchio QRS circoscritto un poligono regolare, li lati del quale non tocchino la circonferenza maggiore ABC, e si concepiscano formati due triangoli, li quali abbiano per comune altezza il raggio OQ, ed uno di essi abbia per base il contorno del poligono circoscritto a QRS, l'altro abbia per base la periferia ABC; sarà il primo di questi triangoli al secondo come il contorno del poligono alla circonferenza ABC, ma il contorno del poligono è minore della periferia ABG, dunque il triangolo, che ha per base il contorno del poligono circoscritto a QRS e per altezza OQ è minore del triangolo, che ha per base la periferia ABC e per altezza OQ, e per conseguenza minore del triangolo, che ha per base la periferia ABC e per altezza $OA>OQ$; ma per la supposizione il triangolo, che ha per base la periferia ABC e per altezza OA si è supposto eguale al cerchio QRS, dunque l' aja del poligono circoscritto a QRS è minore dell' aja del cerchio QRS, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che l'aja del triangolo, che ha per base la periferia ABC e per altezza OA sia eguale all' aja di un cerchio minore del cerchio dato ABC, si è dimostrato, che non può essere eguale all' aja di un cerchio maggiore di ABC, dunque sarà eguale all'aja del cerchio dato ABC. Sicchè ec.

288. Cor. 1. Essendo un settore all'intero cerchio, al quale esso appartiene, come l'arco, che termina il settore alla intera periferia, come è facile a dimostrare, quindi se supponiamo, che si facciano due triangoli, li quali abbiano per comune altezza il raggio, ed uno di essi abbia per base l' arco, che termina il set-

tore, e l' altro abbia per base la intera periferia, essi saranno come le basi, e perciò sarà il triangolo, che ha per base l' arco che termine il settore e per altezza il raggio a quello, che ha per base la circonferenza e per altezza lo stesso raggio come il settore al cerchio, ma si è dimostrato, che il triangolo, che ha per base la periferia, e per altezza il raggio è eguale al cerchio, dunque il triangolo, che ha per base l' arco, che termina il settore, e per altezza il raggio è eguale al settore.

Dippiù un settore è composto dal triangolo, che ha per suoi lati due raggi, e per base la corda, che sottende l' arco, dal quale il settore è terminato, e dal segmento circolare, il quale è racchiuso tra l' arco, che termina il settore, e la corda che sottende questo arco, quindi l' aja di un segmento di cerchio è eguale alla differenza, che si ha sottraendo l' aja del triangolo, che è racchiuso tra li due raggi, e la corda, che sottende l' arco, che termina il settore, dall' aja del triangolo che ha per base l' arco, che termina il settore e per altezza il raggio.

Cor. 2. Noi abbiamo dimostrato, che la misura di un triangolo è espressa dalla metà del prodotto della base per la altezza, dunque l' aja di un cerchio ha per misura la metà del prodotto della periferia per lo raggio, e l' aja di un settore è espressa dalla metà del prodotto dell' arco, che lo termina multiplicato per la metà del raggio.

289. Cor. 3. Si è dimostrato, che un triangolo equivale al quadrato formato sulla retta, che è media proporzionale tra la sua base, e la metà della sua altezza, quindi l' aja di un cerchio equivale al quadrato fatto sopra della retta, che è media proporzionale tra la periferia, e la metà del raggio.

290. Teor. 3. *Le aje delli cerchi sono fra loro sulla ragione delli quadrati de' loro raggi.*

Dim. Si chiamino P, P' le periferie di due cerchi, ed R, R' li respettivi raggi di essi; Noi abbiamo dimostrato, che le periferie de' cerchi sono nella ragione de' raggi di esse, dunque P: P' : : R : R'; dippiù abbiamo la proporzione evidente $\frac{1}{2}$ R: $\frac{1}{2}$ R' : : R: R', e perciò multiplicando in correspondenza li termini di queste due proporzioni avremo $P \times \frac{1}{2} R : P' \times \frac{1}{2} R' :: R^2 : R'^2$; ma $P \times \frac{1}{2} R$; e $P' \times \frac{1}{2} R'$ sono le misure delle aje delli due cerchi, che hanno per raggi R, R' dunque le aje de' cerchi che hanno per raggi R, R' sono nella ragione delli quadrati delli medesimi raggi.

291. Cor. 1. Si chiamino S, S' due settori simili appartenenti alli due cerchi, che hanno per raggi R, R', con A, A' si disegnino agli archi simili, che terminano li settori; noi abbiamo dimostrato, che gli archi simili sono nella ragione delli raggi delli cerchi alli quali essi appartengono, quindi A : A' : : R : R', dippiù noi abbiamo la proporzione evidente $\frac{1}{2}$ R : $\frac{1}{2}$ R': : R : R', e multiplicando in corrispondenza li termini di queste due propor-

zioni avremo $A\times\frac{1}{2}R : A'\times\frac{1}{2}R' :: R^2 : R'^2$, ma li due termini del primo rapporto sono le misure delle aje delli due settori simili, dunque le aje di due settori simili sono nella ragione de' quadrati delli raggi, alli quali essi appartengono.

292. Cor. 2. (Fig. 135). Sieno li due settori simili AOB, GPH, e sieno tirate le corde AB : GH, li segmenti circolari AB, GH, come terminati da archi simili, saranno simili fra essi. Li triangoli isosceli AOB, GPH avendo gli angoli O, P eguali sono simili:, e perciò sarà il triangolo $AOB : GPH :: AO^2 : GP^2$; dippiù il settore $AOB : GPH :: AO^2 . GP^2$; dunque sett. AOB : sett. GPH : : tri. AOB : tr. GPH, ed alterando sett. AOB, tri. AOB : : sett. GPH : tr. GPH, e perciò sett. AOB $-$tr. AOB : tr. AOB : : set. GPH $-$tr. GPH : tr. GPH, ossia seg. AB : tri. AOB : : seg. GH : tri. GPH, e permutando seg. AB : seg. GH : : tri. AOB : tr. GPH, ma tr. AOB : tri. GPH $:: AO^2 : GP^2$; dunque seg. AB : seg. GH $:: AO^2 : GP^2$, e perciò li segmenti circolari simili sono nella ragione de' quadrati delli raggi delli cerchi, alli quali essi appartengono.

293. Cor. 3. Abbiamo dimostrato, che le circonferenze de' cerchi sono nella ragione de' raggi, e per conseguenza nella ragione de' diametri, e che le aje de' cerchi sono nella ragione delli quadrati delli raggi, o delli quadrati delli diametri, quindi se disegniamo

con π la circonferenza del cerchio, che ha il suo diametro$=1$, e con P la periferia del cerchio, che ha per diametro $2R$, avremo $\pi : P : : 1 : 2R$, e perciò $P=2R\times\pi$, cioè la circonferenza del cerchio, il quale ha qualunque raggio si determina sempre trovando il prodotto, che si ha multiplicando la circonferenza del cerchio, che ha per diametro l'unità per lo doppio del raggio del cerchio dato; e se dividiamo per 2π ambi li membri della eguaglianza $P=2R\times\pi$, avremo $R=\frac{P}{2\pi}$, dal che ricaviamo, che qualora da noi si conosce la circonferenza di un cerchio, possiamo sempre ritrovare il raggio di essa, dividendo la circonferenza data per lo doppio della circonferenza, che ha per diametro la unità.

Di più abbiamo dimostrato $P=2\pi\times R$, quindi se multiplichiamo queste due quantità per $\frac{R}{2}$, avremo $\frac{P\times R}{2}=\frac{2\pi R^2}{2}=\pi R^2$; ma $\frac{P\times R}{2}$ è la misura del cerchio, che ha per raggio R dunque l'aja di qualunque cerchio si determina multiplicando la circonferenza del cerchio, che ha per diametro l'unità per lo quadrato del raggio del cerchio dato.

294. (Fig. 137). Cor. 4. Rappresenti BAC un triangolo rettangolo; e sopra delli suoi tre lati si descrivano li tre semi cerchi BAC; BNA, AMC, delli quali siano disegnate le aje per A, A', A'', avremo $A : A' : A'' : : BC^2, BA^2 ; AC^2$ e per con-

seguenza $A : A' + A'' :: BC^2 : BA^2 + AC^2$, ma $BC^2 = BA^2 + AC^2$, dunque anche $A = A' + A''$, si tolga si dall' una, che dall' altra di queste due quantità eguali la somma delle aje mistilinee BnA, AmC, resterà l' aja del triangolo $ABC = BNAn + AMCm$, dal che conchiudiamo, che se sopra delli tre lati di un triangolo rettangolo si descrivono tre semicerchi, l'aja del triangolo equivale alla somma delle lunule descritte sopra delli cateti. Questa verità essendo stata dimostrata per la prima volta da Ippocrate di Chios, si suole chiamare il *teorema delle lunule di Ippocrate.*

295. Avv. Noi abbiamo veduto, che se noi conoscessimo il valore della circonferenza, che ha per diametro l' unità, che noi abbiamo disegnata con π, per mezzo della formola $P = 2\pi \times R$ determineremo la circonferenza di qualunque cerchio, di cui è conosciuto il raggio R, e per mezzo della formola $\frac{P \times R}{2} = \pi \times R^2$, noi determineremo l'aja di qualunque cerchio di cui il raggio R è conosciuto; Quindi per terminare questa teoria non ci resta a fare altro, che determinare il valore di π, il quale non potendosi esattamente determinare, noi con π disegneremo il rapporto approssimativo della circonferenza al suo diametro posto eguale alla unità.

296. Lemma. *Il quadrato fatto sopra la còrda dell' arco supplemento della metà di un arco dato è eguale alla metà della somma del*

quadrato fatto sopra del diametro, e del rettangolo fatto dal diametro, e dalla corda dell' arco supplemento dell' arco dato.

(Fig. 138). Dal punto D della semicirconferenza DCA sia tirata la corda DC, e l'arco CA sia diviso in due parti eguali nel punto B per mezzo della corda DB, saranno DC la corda del supplemento dell' arco CA, e DB la corda del supplemento dell'arco AB metà dell'arco AC; Dico che $DB^2 = \frac{1}{2}(DA^2 + DA \times DC)$.

Dim. Si uniscano le corde CB, BA; e si prolunghi il diametro DA verso F fino a tanto che sia $AF = DC$, e si unisca FB, Finalmente si tirino li raggi OB, OC.

Nel quadrilatero ABCD iscritto nel cerchio, la somma degli angoli opposti $DCB, + BAD =$ a due angoli retti, e perciò eguale a $BAD + BAF$, si tolga da queste somme eguali l'angolo comune BAD, resterà $BAF = DCB$. In oltre nelli due triangoli DCB, BAF il lato $DC = AF$, il lato $CB = BA$, e l'angolo $DCB = BAF$, dunque questi triangoli sono eguali, e perciò $DB = BF$, ed il triangolo DBF è isoscele. In oltre li due triangoli isosceli DOB, DBF hanno l' angolo D comune, dunque essi sono simili, e danno la proporzione $FD : DB :: DB : DO$, ma $FD = DA + AF = DA + DC$, dunque $DA + DC : DB :: DB : DO$, e perciò $DB^2 = (DA + DC)\ DO$ ma $DO = \frac{1}{2} DA$; dunque $DB^2 = (DA + DC)\ \frac{1}{2} DA = \frac{1}{2}(DA^2 + DC \times DA)$; dunque il quadrato fatto sopra DB corda dell'arco supplemento dell' arco metà dell' arco AC è eguale alla metà della somma del quadrato del diametro, e del rettangolo fatto dal diametro e dalla corda del supplemento dell' arco dato. Sicchè ec.

297. Cor. 1. Supponendo il raggio del cerchio $=1$, e per conseguenza il diametro $=2$; la formola $DB^2=\frac{1}{2}(DA^2+DA\times DC)$ diviene $DB^2=\frac{1}{2}(4+2DC)$, e per conseguenza $DB=\frac{\sqrt{4+2DC}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2+DC}$.

298. Cor. 2. Se si suppone, che AC sia il lato dello esagono regolare, il quale è eguale al raggio, sarà $AC=1$, e poichè l' angolo DCA come iscritto nel semicerchio è retto, avremo $DC^2=DA^2-CA^2=4-1=3$, e $DC=\sqrt{3}=1,7320508075$, la formola della corda del supplemento della metà dell' arco dato AC è $DB=\sqrt{2\times DC}$, quindi avremo DB, cioè la corda del supplemento di $\frac{1}{12}$ della periferia $=\sqrt{2+1,7320508075}=\sqrt{3,7320508075}=1,9318516525$. Dopo di avere determinata la corda dell' arco supplemento di $\frac{1}{12}$ della circonferenza, noi potremo determinare le corde delli supplementi degli archi submultiplici.

I.° La corda dell' arco supplemento dell' arco di $\frac{1}{24}$ della periferia, si trova essere $\sqrt{2\times 1,9318516525}=1,9828897227$.

2.° La corda del supplemento di $\frac{1}{48}$ della periferia sarà $=\sqrt{2+1,9828897227}=1,9957178465$.

3.° La corda del snpplemento di $\frac{1}{96}$ della circonferanza sarà $\sqrt{2+1,9957178465}=1,9989291743$.

4.° La corda del supplemento di $\frac{1}{192}$ della periferia sarà $\sqrt{2+1,9989291743}.= 1,9997322757$.

5.° La corda del supplemento di $\frac{1}{364}$ della periferia sarà $\sqrt{2+1,9997322757}= 1,9999330678$.

6.° La La corda del supplemento di $\frac{1}{768}$ della circonferenza sarà $\sqrt{2+1,9999330678}=\sqrt{3,9999330678}$ etc.

Essendo l' arco di $\frac{1}{768}$ della periferia tanto pìècolo, che quasi si confonde con la corda dalla quale esso è sotteso, noi arrestiamo quì il calcolo, ma facendo uso del medesimo processo, noi avremmo potuto determinare le corde degli archi supplimentari submultiplici successivi, e giugnere alla determinazione della corda supplimentare di un arco tanto piccolo, che la sua freccia fosse minore di qualsivoglia quantità assegnabile.

299. Prob. *Determinare il rapporto approssimativo della circonferenza di un cerchio al suo diametro.*

Sol. Supponiamo il raggio del cerchio $=1$ e per conseguenza il suo diametro$=2$, e determiniamo la corda del supplemento dell' arco $\frac{1}{768}$ della circonferenza.

2. Dal quadrato del diametro si sottragga il quadrato della corda del supplemento dell' arco $\frac{1}{768}$ della circonferenza, e dal residuo si estragga la radice quadrata, essa darà la corda di $\frac{1}{768}$ della circonferenza.

3. Si moltiplichi questo numero, che esprime la corda dell' arco $\frac{1}{768}$ della periferia per 768, il prodotto esprimerà il contorno del po-

ligono regolare di 767 lati iscritto nel cerchio, contorno, che differirà dalla periferia del cerchio di una quantità piccolissima.

4. Dal quadrato del raggio si sottragga il quadrato dalla metà della corda determinata dell' arco di $\frac{1}{768}$ della circonferenza, questa radice darà il il valore dell' apotema del poligono regolare di 768 lati iscritto.

5. Si faccia la proporzione, il numero', che esprime l' apotema sta alla unità, che esprime il raggio, come il contorno del poligono iscritto di 768 lati al quarto proporzionale, il quale sarà il contorno del poligono regolalare circoscritto di 768 lati, e questo contorno sarà maggiore della circonferenza di una quantità piccolissima.

6. Finalmente si prenda la metà della somma delli numeri che esprimono li contorni delli due poligoni di 768 lati l' uno iscritto, l' altro circoscritto, e ne risulterà un numero minore di quello, che indica il contorno del poligono circoscritto, e maggiore di quello, che esprime il contorno del poligono iscritto, il quale si accosterà al numero, che esprime la circonferenza più dell' uno, e dell' altro numero, che esprimono li contorni delli poligoni iscritto, e circoscrilto.

Quindi quando noi avremo determinato questo numero relativamente al raggio$=1$; conchiuderemo, che il rapporto del raggio alla periferia sarà quello di 2 al medesimo numero.

300. Avv. 1. Seguendo la regola da noi stabilita troveremo, che il contorno del poligono di 768 iscritto è 6,28317, e quello del poligono simile circoscritto è 6,28322; questi numeri differiscono fra loro soltanto di 0,00005, quantità tanto piccola, che si può trascurare, e perciò conchiuderemo, che il rapporto approssimativo del diametro alla cisconferenza può essere indifferentemente espresso da quello di 2:6,28317, o pure da quello di 2: 6,28322; tuttavia per avere un rapporto più approssimato paragonando 2 alla metà della somma delli due numeri, che esprimono li due contorni del poligono iscritto, e del circoscritto, e conchiuderemo, che questo rapporto è quello di 2 : 6,28319, ossia di 1 : 3,14159.

301. Avv. 2. Nelli calcoli, che non ricercano una grande esattezza possiamo far uso del rapporto di 7 : 22 trovato da Archimede, oppure di quello di 113 : 355 trovato da Pietro Mezio.

302. Avv. 3. Noi abbiamo dimostrato, che l'aja di un cerchio equivale al rettangolo fatto dalla semiperiferia e dal raggio, quindi un cerchio sarà al quadrato del raggio come $\frac{1}{2}P\times R : R^2 : : \frac{1}{2}P : R : : P : 2R$; cioè l'aja di un cerchio sta al quadrato fatto sopra del suo raggio come la periferia al diametro, e perciò come 1 : 3,14159 oppure come 7 : 22, o infine come 113 : 355.

FINE.

Napoli 28 giugno 1824.

Presidenza della Giunta per la pubblica Istruzione.

Vista la dimanda dello stampatore Raffaele di Napoli, con la quale chiede di dare alle stampe la *Geometria piana, e solida, e l' Algebra del professore D. Filippo Guidi.*;

Visto il favorevole parere del Regio Revisore Sig. D. Carlo Baccaro;

Si permette, che l' Opere indicate si stampino; però non si pubblichino senza un secondo permesso, che non si darà se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuta nel confronto uniforme la impressione all' Originale approvato.

Il consultore di Stato Presidente
M. Rosini.

Pel Segr. Gen. e membr. della Giunta
L' Aggiunto A. Coppola.