SOLUZIONI E DIMOSTRAZIONI

DEI

PROBLEMI E TEOREMI

DETTATI DAI PROFESSORI

ENRICO BETTI E FRANCESCO BRIOSCHI

COME ESERCIZI AGLI

ELEMENTI D'EUCLIDE

PEL PROFESSORE

ANGELO ANDRIANI

2ª edizione.

riveduta e corretta con 193 figure nel testo

NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
DI B. PELLERANO
Strada di Chiaia, 60 e Largo Nilo 6.
1880

Tipografia A. Trani, Strada Medina 25

AD ACHILLE COMM. SANNIA

PROF. NELL' UNIVERSITÀ DI NAPOLI

IN ATTESTATO

DI

SINCERA GRATITUDINE

IL DISCEPOLO

ANGELO ANDRIANI

AI LETTORI

Il libro che vi presentiamo, o lettori, non è stato elaborato per acquistarci alcun che di fama, sia per l'umiltà del soggetto, sia per la sua direi quasi volgare trattazione. Il pregio che crediamo possa accompagnarlo, si è, che con esso si giustifichi l'operato di quei due illustri scienziati, E. Betti e F. Brioschi, col aver voluto ristabilire in Italia lo studio degli Elementi d' Euclide. La ragione precipua che adducono parecchi professori contro il ripristinamento dell' Euclide, si è, che l'Euclide non basta da sè solo per l'apprendimento della geometria, per essere non solo privo di molte teoriche moderne, ma poco adatto a conseguire uno scopo pratico. Si può rispondere dapprima col dire che i sullodati benemeriti della scienza non intesero pretendere che col solo studio dell'Euclide si potesse addiventare un geometra, o ingegnere; tanto vero che a coloro che amano progredire nelle matematiche raccomandano, dopo lo studio dell' Euclide, quello del Baltzer. Essi nel proporre l'Euclide s' ispirarono allo scopo cui deve mirare lo studio delle matematiche nei Licei, il quale, come quello di tutte le altre materie, consiste nello sviluppare le facoltà mentali dei giovanetti, e renderle atte quandochesia a saper comprendere ed apprezzare lo studio delle scienze nelle Università. Ora se collo studio dell' Euclide si raggiunga questo scopo non havvi chi nol vegga. Che, a dirla come la sentiamo poi, lo studio dell' Euclide basti a far progredire il giovane da sè solo nelle scienze esatte, il libro che vi presentiamo, o lettori, vi convincerà.

I problemi e i teoremi in esso contenuti sono stati risoluti col semplice aiuto degli Elementi d' Euclide. È vero che ve ne sono taluni risoluti coll'Algebra; ciò abbiamo fatto per dare ai giovani l' idea di questo metodo di soluzione. Del resto non sorpassano la decina. Nell' esposizione non abbiamo usato il linguaggio puramente Euclideo, perchè lo scopo nostro non è stato di presentarvi un libro di testo, che debba servire a formare il linguaggio geometrico nel giovane, ma per dimostrare che col solo Euclide si possono risolvere quasi tutte le quistioni relative alla geometria.

Un altro scopo ci siam prefissi ottenere da questa pubblicazione, che asseriamo non secondo al primo. Esso è uno scopo pedagogico.

L'esperienza ci ha fatti avvertiti che col dare al giovanetto un quesito di geometria, lasciandolo in balia di sè, è lo stesso che indurlo a gittare via il libro, e dire a sè stesso, io non sono buono a risolvere problemi geometrici.

Il nostro libro può ovviare a questo inconveniente, impiegandolo a questo modo: Dopo che il giovanetto avrà appreso le prime proposizioni della geometria mediante le spiegazioni del professore e lo studio del testo, lo si lasci solo a studiare nel nostro libro quei teoremi che si poggiano a quelle proposizioni apprese, e lo si obblighi a rifarli, esponendoli con un linguaggio più rigoroso, e sviluppando tutte le ragioni che a bella posta si sono omesse nelle loro dimostrazioni. Ciò servirà ad abituare il giovanetto a parlare e scrivere con rigore geometrico. Dopo lo si cominci ad addestrare nella soluzione dei problemi facendogli prima svolgere le soluzioni date da noi colla massima brevità, e qualche fiata con un po' di astrusità, e quindi facendogli notare che queste soluzioni sono state trovate non come sono esposte, ma con metodi che andiamo ad esporre con quella chiarezza ed estensione che ci permette lo spazio d'una introduzione.

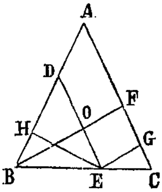
In generale due sono i metodi per la ricerca dei veri e per la soluzione delle quistioni: *la sintesi e l'analisi.*

Il primo consiste nel dedurre da una o più proposizioni note altre che sono conseguenze delle precedenti. Il secondo è l'inverso del primo, e consiste nel cercare una proposizione che se fosse vera, porterebbe per conseguenza quella che si ha in mira di dimostrare. Se questa proposizione scelta è conosciuta, la proposta è vera: se no, si cerchi un'altra che porterebbe per conseguenza la precedente e quindi quella che è in quistione, e così via, finchè si giunga ad una proposizione nota.

Un esempio farà più chiaro il già detto.

Il teorema 4, libro 1.°: *Se da un punto qualunque della base d'un triangolo isoscele si conducono le perpendicolari ai lati, la somma di queste è uguale alla distanza di un termine della base dal lato opposto*, è dimostrato sinteticamente nel testo, dimostriamolo qui analiticamente.

Sia E un punto qualunque della base BC del triangolo isoscele ABC; si deve dimostrare che la somma delle perpendicolari EH, EG menate da E ai lati uguali AB, AC è uguale alla distanza BF d'uno dei termini della base dal lato opposto, cioè, si deve avere



$$EH + EG = BF.$$

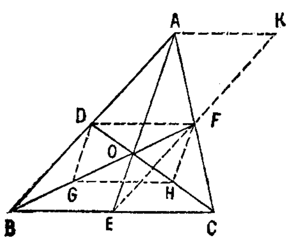
Se prendiamo su BF, a partire dal punto F, un segmento FO uguale ad FG, resta a dimostrare che BG è uguale ad EH. Congiungiamo E con O, e risulta $EGFO$ rettangolo.

Allora, se dimostriamo che i due triangoli OBE, HBE sono uguali, conchiuderemo che il teorema proposto è vero. Ma questi due triangoli effettivamente sono uguali, per ragioni facili a vedere, dunque ecc.

Questo metodo deve usarsi a preferenza di qualunque altro nelle dimostrazioni di quei teoremi che richieggono qualche costruzione; perchè lo spirito umano non può vedere le relazioni fra i diversi elementi d'una figura senza separarle con un'analisi accurata e precisa, per quindi compararle fra loro e scegliere quelle che servono all'uopo.

Ecco un esempio che farà chiari questi concetti.

Dimostrare che le tre mediane d'un triangolo concorrono in un punto, propriamente ai loro due terzi.



Sia O il punto d'incontro delle tre mediane AE, BF, CD del triangolo ABC. Siano G ed H i punti medi di BO, CO. Allora, poichè dev'essere BO doppio di OF, e CO doppio di OD, sarà $OG = OF$, $OH = OD$, e quindi il quadrilatero $DGHF$ è un parallelogrammo; di guisa che siamo condotti a dimostrare che è $DF = GH$, $DG = FH$. Osserviamo, inoltre, che D ed F sono i medi dei lati AB, AC; come pure G, H sono i medi di OB, OC; quindi le due rette DF, GH debbono avere la stessa proprietà rispetto alla base comune BC dei due triangoli ABC, OBC; ma DF dev'essere parallela a GH, quindi ambedue devono essere parallele a BC; onde siamo condotti a dimostrare che la retta che congiunge i punti medi di due lati d'un triangolo è parallela al terzo lato. Se questo teorema è vero sarà vero il proposto.

Per dimostrarlo si congiunga E con F, e prolunghiamo la congiungente fino all'incontro K della parallela alla BC tirata dal vertice A. Se KE fosse parallela ad AB, i due quadrilateri $ADFK$, $DBEF$ sarebbero due parallelogrammi uguali, e quindi $KF = FE$; di guisa che, se tirando dal punto F una retta KFE parallela ad AB e a terminare alle AK, BC parallele fra loro restasse divisa per metà in F, resterebbe dimostrato che la congiungente i medi di due lati d'un triangolo è parallela al terzo lato.

Ora i due triangoli AFK, FEC, avendo il lato $AF = FC$, l'angolo $KAF = ECF$, $AFK = CFE$, sono uguali, e quindi $FK = FE$.

Dunque avendo dimostrato che F è punto medio di EK, il teorema proposto è vero per conseguenza.

Questo metodo di dimostrare un teorema se è necessario per l'investigazione del ragionamento, non è poi buono per la esposizione. Quindi dopo aver fatto l'analisi è d'uopo far percorrere dallo spirito il cammino inverso; cioè far la sintesi, ed esporre sinteticamente la dimostrazione.

Se l'impiego dell'analisi in un teorema è spesso necessario, nei problemi poi è indispensabile; e si può dire che quasi è impossibile risolvere un problema sinteticamente, a meno che non sia tanto semplice da essere una conseguenza immediata, o un'applicazione d'un teorema noto.

« Esso consiste nel ricercare * un problema tale, che, se la sua soluzione fosse nota, porterebbe per conseguenza quella del problema proposto; ciò che dicesi *ridurre* il problema ad un altro. Se la soluzione del secondo è nota, quella del primo è trovata; in opposto cercheremo similmente di ridurre il secondo ad un altro; e se, così proseguendo, giungeremo ad un problema la cui soluzione sia nota, risolveremo prima que-

---

* Si vegga Sannia e d'Ovidio, Geometria, pag. 107, ediz. 3ª, 1876. A proposito della Geometria di Sannia e d'Ovidio, avvertiamo i giovani studenti, che se essi vogliono un testo che unisca il doppio pregio del rigore Euclideo nei ragionamenti, e della estensione delle teoriche elaborate dai Geometri moderni, studiino con amore la sullodata opera. Noi che l'abbiamo adottata nel nostro insegnamento possiamo assicurare quanta forza essa ha nello sviluppare la mente degli studiosi, e quanto profitto da essa se ne trae. È vero che essa nelle prime pagine è di dura digestione; ma sorpassate le prime difficoltà si corre a gonfie vele verso la meta. Non sappiamo se quei due scienziati siano più filosofi che matematici nel sintetizzare i principii gene-

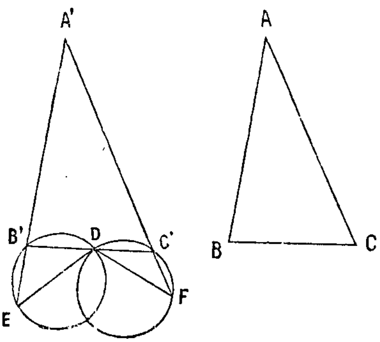
st'ultimo, indi come conseguenza il penultimo, e così via retrocedendo otterremo la soluzione del primo.

Per agevolare l'applicazione di questo metodo, è utile cominciare dal supporre già risoluto il problema proposto, e disegnare alla meglio una figura che soddisfaccia alle condizioni assegnate. Studiando poi le relazioni, che passano fra le linee e i punti componenti le figure date e cercate (e altre linee e punti ausiliari che si creda utile di aggiungervi) si tenterà di semplificare il problema, riducendolo a un altro tale, che, saputo risolvere, ci farebbe risolvere il primo. E così si proseguirà, finchè si giunga a un problema di nota soluzione.

Non di rado il problema proposto, o alcuni di quelli che gli sostituiscono, si possono decomporre in più altri; e allora si risolveranno questi separatamente. »

Applichiamo questi concetti alla risoluzione del seguente problema:

Per tre punti dati tirare tre linee rette in modo che facciano un triangolo che abbia i suoi lati ed i suoi angoli uguali a quelli d'un triangolo dato.



Sia ABC il triangolo dato, e $A'B'C'$ il richiesto, cioè, uguale al dato, e tale che i suoi tre lati passino per i tre punti dati D, E, F.

Essendo noto l'angolo $A'B'C'$, sarà noto pure $EB'D$, perchè supplementare; quindi il vertice B' deve trovarsi sopra l'arco di cerchio descritto su ED capace dell'angolo $EB'D$. Similmente, essendo noto l'angolo $B'C'A'$, sarà noto pure $FC'D$, perchè supplementare; quindi il vertice C' deve trovarsi sull'arco di cer

---

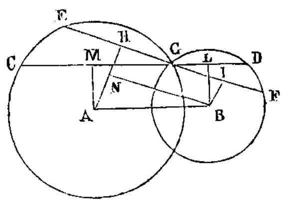
rali di logica che soprastanno allo sviluppo di tutta la scienza. Per noi questo libro è l'unico che può sostituire i tanti che ci vengono da oltre monti ad invadere le nostre scuole.

Se il governo obbligasse lo studio dei primi tre libri d'Euclide nel Ginnasio, per poscia far studiare la Geometria di Sannia e d'Ovidio nei Licei, risolverebbe il problema del vero mezzo per far apprendere dai giovani Italiani la Geometria; e quindi allontanerebbe i tanti inconvenienti in cui s'incorre negli esami di Licenza Liceale.

chio descritto su DF capace dell' angolo $FC'D$. Essendo, per l'ipotesi fatta, il lato $B'C' = BC$, siamo condotti a menare pel punto D la retta $B'DC'$ tale che terminando alle due circonferenze descritte sia uguale ad una retta data (BC).

Onde per risolvere il problema proposto, dobbiamo risolvere quest' ultimo.

Supponiamo risoluto anche questo problema, e sia EGF la retta richiesta, cioè, tale che passi pel punto d'intersezione delle due circonferenze, i cui centri sono A e B, e terminando alle medesime sia uguale alla retta data.



Se da A e B meniamo le perpendicolari AH, BI alla EF, si avrà $GH = HE$, $GI = IF$, e quindi HI metà della retta data. Se conduciamo $BN \parallel EF$, risulta $HNBI$ rettangolo, e $BN = HI$. Ora se fosse noto il punto N, il problema sarebbe risoluto. Osservando che questo punto N deve trovarsi sulla circonferenza descritta sulla congiungente i centri A e B, come diametro, e dev'essere l'estremo della BN=alla metà della retta data, quindi il problema è ridotto a descrivere su AB, come diametro, la circonferenza, e tagliare questa coll'altra descritta con B centro e con raggio uguale alla detta metà, ed in fine a condurre dal punto G la retta EGF parallela alla NB.

Le soluzioni di questi problemi sono note, dunque il secondo problema e quindi il proposto è risoluto. Veggasi, inoltre, Eserc. 94. lib. III.

Lo studioso dopo aver fatta l'analisi del problema ne faccia la sintesi; e si assicuri, mediante la dimostrazione, che la figura risultante soddisfi alle condizioni del problema.

E buono notare che non sempre un problema è suscettibile di una sola soluzione. Alle volte ve ne sono due o più, o nessuna. Quindi è d'uopo esaminare bene le condizioni assegnate, e vedere quando il problema è possibile; e se è possibile, quante soluzioni e quali esso può ammettere.

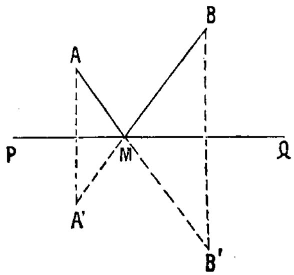
Così, nel nostro problema, se la retta data fosse maggiore del doppio di AB, il problema sarebbe impossibile; perchè delle rette che si possono condurre dal punto G a terminare alle circonferenze secanti la massima è quella che è parallela ad AB, la quale risulta doppia di AB. (Veggasi Eserc. 9, lib. III).

Merita speciale menzione un altro metodo per la soluzione d' una certa classe di problemi, che può andare sotto la denominazione » *Soluzione dei problemi per Simmetria.*

Esso consiste nel far rotare la figura racchiudente i dati ed i quesiti del problema intorno ad una retta o punto, finchè le due figure risultanti, che si dicono simmetriche, giacciano in un medesimo piano. Allora si scorgeranno facilmente delle proprietà, che senza della rotazione è impossibile o almeno difficilissimo scoprire.

Un esempio farà chiaro il già detto.

Essendo dati due punti fuori d' una retta data trovare sopra di questa un punto tale che unito coi dati risulta la somma delle congiungenti un minimo, e la differenza un massimo.



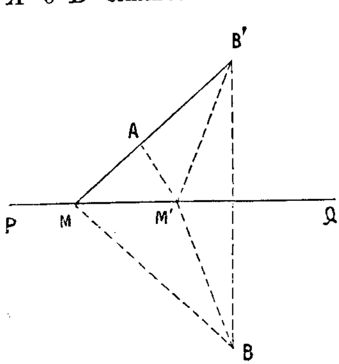
1.° Sia PQ la retta data, A e B i punti dati, M il punto cercato tale che si abbia

$$AM + MB = \text{un minimo.}$$

Facendo rotare il piano superiore intorno a PQ, finchè giunga a sovrapporsi sull'inferiore, i punti A e B prenderanno delle posizioni A', B'. Si facciano prendere ad A e B le primitive posizioni. Allora si avrà

$$AM + MB = AB', \text{ e } AM + MB = BA'.$$

Ma AB' e BA' sono un minimo allorquando sono linee rette, quindi la soluzione del problema proposto è: di trovare il punto A' o B' simmetrico di A o B, e congiungere AB' o BA'.



L' intersezione di una di queste congiungenti colla retta data risolve il problema.

Se i punti A e B sono da bande opposte della PQ, la congiungente i medesimi evidentemente risolve il problema.

2.° Siano A e B i punti dati PQ la retta data. Facciamo rotare il piano sul quale si trova il punto B intorno a PQ, finchè coincida col piano sul quale si trova il punto A. Il punto B prenderà una posizione B', e facciamo indi prendere a B la primitiva posizione. Si prolunghi la congiungente $B'A$ fino all' incontro M colla retta PQ; il punto M sarà il richiesto.

In fatti, congiunto un punto qualunque M' con A e B' si ha

$$AB' > B'M' - AM', \text{ ovvero}$$

$$B'M - AM > B'M' - AM'.$$

Ma $B'M = BM$, $B'M' = BM'$, quindi

$$BM - AM > BM' - AM'.$$

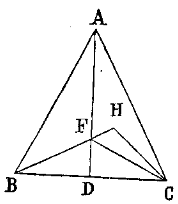
Cioè che il punto M gode la proprietà che la differenza delle distanze di esso dai punti B ed A è maggiore della differenza delle distanze d'un altro punto M' dai medesimi B ed A; quindi esso è il punto che soddisfa al problema.

Havvi eziandio un altro metodo che si può dire il più generale e fecondo per la soluzione dei problemi, il quale va detto *metodo delle intersezioni dei luoghi geometrici.*

Luogo geometrico non è altro che una linea o superficie i cui punti e soli essi godono d'una certa proprietà.

Quando è dato a trovare un luogo geometrico, per rinvenirlo bisogna supporre che un certo punto goda la proprietà assegnata, e poi « studiando le relazioni fra quel punto e gli elementi dati ed ausiliari della figura, mostrare che esso fa parte d'una linea o superficie che sappiamo determinare. Potrà conchiudersi che questa è il luogo richiesto quando si sarà dimostrato che ogni punto di essa gode la proprietà stabilita ».

Per es. *Vogliasi trovare il luogo dei punti equidistanti da due punti dati* A *e* B.



Sia A uno dei punti del luogo richiesto. Unendo A col punto medio di BC, risulta il triangolo $ADB = ADC$, e quindi gli angoli in D uguali, e AD perpendicolare nel punto medio di BC.

Ora è chiaro che ogni altro punto di AD è ugualmente distante da B e C dunque AD è il luogo cercato.

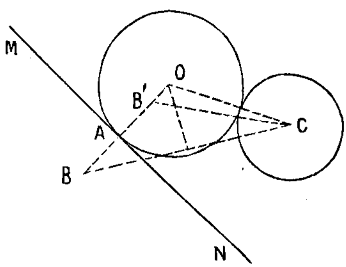
Veniamo ora a vedere come si applicano i luoghi geometrici alla risoluzione dei problemi.

Si noti innanzi tutto che nella soluzione d'un problema si riduce a trovare nella maggior parte dei casi uno o più punti che sono intersezioni di luoghi geometrici.

Così, per descrivere una circonferenza che passi per tre punti dati, non si ha da cercare altro che il suo centro (e raggio), il quale non è che l'incontro delle perpendicolari innalzate dai medi delle rette che uniscono i punti dati due a due; e queste perpendicolari non sono che luoghi geometrici. Per inscrivere una circonferenza in un triangolo, basta trovare il suo centro (e raggio), che è l' intersezione delle bisettrici dei lati degli angoli di detto triangolo ecc.

Diamo un esempio che possa meglio far vedere come si debba procedere per impiegare questo metodo.

Descrivere una circonferenza tangente ad un cerchio dato e ad una retta data in un punto dato in essa.



Sia C il cerchio dato, MN la retta data, A il punto in essa. È chiaro che il centro del cerchio richiesto deve trovarsi sulla perpendicolare innalzata da A sulla retta data; e sia O questo centro. La congiungente il centro O del cerchio incognito e del centro C del cerchio dato passa pel punto di contatto, quindi essa è uguale alla somma dei loro raggi. Se prolunghiamo il raggio OA di AB uguale al raggio del cerchio dato, il centro O sarà ugualmente distante dai punti B e C; quindi O è l' incontro di AO e della perpendicolare innalzata dal medio della congiungente BC; cioè, che O è l'incontro di due luoghi geometrici.

Si osservi che se prendiamo $AB' = AB$, e dal medio di $B'C$ innalziamo la perpendicolare fino all' incontro di AO prolungata, si avrà un' altra soluzione del problema.

Col già detto sinora, non abbiamo inteso di darvi, o lettori, delle regole per risolvere qualunque problema geometrico. Ciò può servire a spianare la via nella ricerca della dimostrazione d' un teorema, e della soluzione d' un problema. Che se v'imbatterete in teoremi o problemi, per la dimostrazione o soluzione dei quali v' ha bisogno di costruzioni ausiliarie, l' unica via a cui si può ricorrere è l'ingegno, il lungo studio, l'esperienza e la esatta conoscenza degli elementi di Geometria.

Abbiamo detto che spesso un problema è suscettibile di più d' una soluzione, e intanto noi abbiamo data quasi sempre una sola soluzione.

Ciò abbiamo praticato per invitare i giovanetti a cercare la rimanente o rimanenti soluzioni.

Abbiamo fatto uso dei segni $\parallel$, $\times$, $+$, $\sqrt{\ }$, $=$, $>$, $<$, (noti a tutti) per economia di scrittura.

Qualche professore ci ha incolpati di troppa astrusità nell'esposizione della soluzione di qualche problema. Ciò è troppo vero; quindi se il lettore incontrerà serie difficoltà nell'intendere qualche problema, ci chiegga spiegazione, e noi ci faremo un dovere soddisfarlo nelle sue richieste.

Saremo poi grati a coloro i quali ci indicheranno le pecche che qua e là potranno rinvenire in tutto il libro; perchè noi allora faremo tesoro delle loro osservazioni, e libereremo il nostro libro di quelle imperfezioni che tanto dispiacciono ai cultori di scienze esatte.

SOLUZIONI E DIMOSTRAZIONI

DEI

PROBLEMI E TEOREMI

POSTI DA

BETTI E BRIOSCHI

come esercizi agli elementi d'Euclide

LIBRO I.

1.

La somma delle rette condotte da un punto situato nell'interno di un triangolo ai tre vertici è minore della somma dei tre lati e maggiore della metà di quest' ultima somma.

Sia O il punto dentro il triangolo ABC; dico essere

$$OB+OC+OA<AB+AC+BC, \text{ ed } OA+OB+OC>\frac{AB+AC+BC}{2}.$$

In vero è $OB+OC<AB+AC$ (21, I), $OA+OC<BA+BC$, $OA+OB<BC+AC$; sommando termine a termine queste tre disuguaglianze, si avrà:

$$2(OB+OC+OA)<2(AB+AC+BC), \text{ onde}$$
$$OB+OC+OA<AB+AC+BC.$$

Nei triangoli AOB, AOC, BOC si ha $OA+OB>AB$ (20, I), $OA+OC>AC$, $OB+OC>BC$, onde $2(OA+OB+OC)>AB+AC+BC$, ed $OA+OB+OC>\frac{AB+AC+BC}{2}$.

2.

I punti equidistanti da due punti dati sono nella retta che biseca ad angolo retto quella che unisce i punti dati. (Fig. 1).

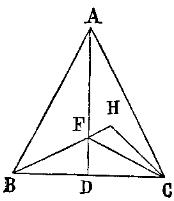


Fig. 1.

Sia BC la retta che unisce i punti dati B, C; AD la bisettrice perpendicolare a BC; dico che tutti i punti equidistanti da B e C sono in AD.

1.° Difatti unendo un punto qualunque A AD con B e C risultano i triangoli ABD, ACD uguali; perchè hanno $BD=DC$, AD di comune e l' angolo $ADB = ADC$, quindi $AB = AC$.

2.° Qualunque altro punto H che non sia su di AD non può essere ugualmente distante da B e C.

Imperocchè se H fosse ugualmente distante da B e C, dovrebbe essere $HF+FB=HC$; ma essendo F un punto di AD, si ha $FB = FC$, quindi $FC + HF = HC$, il che è impossibile (20, I).

3.

I punti equidistanti da due rette date sono nelle rette che dividono per metà gli angoli delle rette date *.

Siano AB, CD le rette date, e DFB uno degli angoli formati da queste rette; dico che i punti equidistanti da esse sono nella bisettrice FE dell'angolo DFB o AFC.

Difatti da un punto qualunque E della bisettrice menando le perpendicolari EB, ED alle rette AB, CD risultano i triangoli FDE, FEB uguali, e quindi le distanze EB, ED uguali. Similmente si dimostra che qualunque punto della bisettrice FL dell' angolo BFC è ugualmente distante dalle AB, CD, dunque ecc.

Il reciproco è anche vero.

4.

Se da un punto qualunque della base d' un triangolo isoscele si conducono le perpendicolari ai lati, la somma di queste è uguale alla distanza d' un termine della base dal lato opposto. (Fig. 2).

* N. B. Abbiamo omessa le figura, perchè il lettore può senza difficoltà farla da sè. Ogni qualvolta la figura è di facile costruzione, la ometteremo.

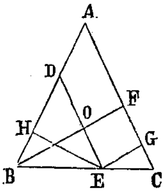


Fig. 2.

Se da un punto E della base BC del triangolo isoscele ABC si conducono le perpendicolari EH, EG ai due lati AB, AC; dico che è $EH+EG=BF$, essendo BF la distanza del termine B dal lato opposto AC.

Dal punto E si conduca $ED \parallel AC$. Risulta $EGFO$ rettangolo, l'angolo BOD retto ed il triangolo DBE isoscele. Ora i triangoli DBO, DHE avendo l'angolo $DOB=DHE$, BDE di comune, il lato $DB=DE$, sono uguali, e quindi $BO=HE$, ed essendo $OF=EG$ sarà $EH+EG=BF$.

Si dimostra pure facilmente che se il punto E è sul prolungamento della base, la differenza delle distanze di esso dai detti lati è costante. È facile ancora dimostrare che se il triangolo è equilatero, la somma delle distanze di un punto preso nel suo piano dai lati è costante.

5.

Sopra una retta data descrivere un triangolo, nel quale ciascuno dei lati sia doppio della base.

Si faccia centro nei due estremi della retta data e con raggio doppio di essa si descrivano due circonferenze; unendo i punti d'intersezione coi due centri si hanno due triangoli che risolvono il problema.

6.

Se due circoli si segano fra loro, la retta che congiunge i loro punti d'intersezione è bisecata ad angolo retto dalla retta che passa per i centri.

Difatti unendo i centri A e B con i punti d'intersezione D, C, si formeranno due triangoli che hanno i lati rispettivamente uguali, e quindi uguali, e l'angolo $DAB=BAC$.

Sia O l'intersezione di AB, DC.

I due triangoli ADO, ACO hanno il lato $AD=AC$, AO di comune, l'angolo $DAO=CAO$, dunque sono uguali, epperò il lato $OD=OC$, e gli angoli in O retti.

7.

Delle rette che da un punto dato si possono condurre a terminare ad una retta data la perpendicolare è la minima; quella *che è più vicina alla perpendicolare è minore di quella che è più lontana; e due sole rette uguali si possono condurre dal punto dato alla retta, l' una da una parte e l' altra dall'altra parte della perpendicolare.*

Sia PH la perpendicolare tirata dal punto P sulla retta AC; dico 1.° che essa è più corta di qualunque obliqua PD. Infatti prolungando PH di $HG = PH$ e congiungendo D con G, si ha il triangolo $PHD = HDG$, quindi $PD = DG$; ed essendo $PG < PD + DG$, sarà PH metà di PG minore di PD metà di $PD + DG$.

2.° Che PD che è più vicina alla perpendicolare è minore di PA più lontana. Infatti per la uguaglianza dei triangoli PAH, HAG si ha $AP = AG$; ed essendo $PD+DG<PA+AG$ (21, I), sarà PD che è metà di $PD + DG$ minore di PA che è metà di $PA + AG$.

3.° Che due sole rette PD, PC si possono tirare dall' una e dall' altra parte di PH uguali fra loro.

Invero supponendo $HD=HC$, si ha il triangolo $PDH=PHC$, quindi $PD = PC$. Ora qualunque altra retta, come PA, tirata da P alla CA essendo più lontana dal piede H è maggiore di PD, e quindi anche di PC.

8.

Da un punto dato fuori d' una retta data tirare una retta che faccia colla data un angolo dato.

Colla retta data in un punto di essa si faccia un angolo uguale all' angolo dato, e dal punto dato tirisi la parallela alla retta colla quale si è formato l'angolo uguale al dato.

9.

Costruire un triangolo, dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi.

In una delle rette indefinite che comprendono l'angolo dato si prenda una porzione uguale ad un lato dato poscia fatto centro nell' estremità di questa porzione e con raggio uguale all' altro lato si descriva una circonferenza che determinerà il triangolo cercato.

Vi sono due, o una, o nessuna soluzione.

10.

Descrivere un circolo che passi per due punti dati ed abbia il centro sopra una retta data.

Si uniscano i due punti dati, dal punto medio di questa congiungente s' innalzi la perpendicolare; il punto d' incontro di questa colla retta data è il centro del cerchio richiesto.

11.

Da due punti dati dalla stessa parte d' una retta data condurre due rette che s' incontrino sulla retta e facciano con questa angoli uguali.

Da uno dei punti dati si abbassi la perpendicolare sulla retta data e la si prolunghi dall' altra parte d' una quantità uguale alla distanza dal punto alla retta, si congiunga l' estremo di questa perpendicolare prolungata coll' altro punto; il punto d' intersezione della congiungente colla retta risolve il problema.

12.

Intorno ad una retta data, come diagonale, descrivere il quadrato.

Si costruisca un quadrato qualunque, sulla diagonale prolungata di esso si prenda una porzione uguale alla retta data, dall' estremo di questa porzione si abbassino due perpendicolari sui lati, prolungati se è necessario, del quadrato; esse determinano il quadrato cercato.

13.

La differenza dei due lati d' un triangolo è sempre minore del terzo lato.

Siano a, b, c i tre lati d' un triangolo. Si ha (20, I),

$$a + b > c, \text{ onde } a > c - b \text{ (ass. 5), ovvero } c - b < a.$$

14.

La somma delle diagonali di un quadrilatero è minore della somma delle quattro rette che congiungono un punto qualunque ai quattro vertici.

Siano AC, BD le diagonali, EA, EB, EC, ED le rette che congiungono un punto qualunque E ai quattro vertici; dico essere $AC + BD < EA + EB + EC + ED$.

Infatti nel triangolo AEC si ha $AC < EA + EC$, e nel triangolo EBD si ha $BD < EB + ED$ (20, I); sommando le due disuguaglianze si ha $AC + BD < EA + EB + EC + ED$.

15.

Costruire un triangolo, essendo dato un lato, un angolo adiacente e la somma o la differenza degli altri due lati.

1.° Sui lati indefiniti dell' angolo dato si prendano due porzioni, una uguale al lato dato, e l' altra alla somma data, innalzando dal punto medio della congiungente gli estremi di queste porzioni la perpendicolare, verrà determinato il triangolo cercato.

2.° Se è data la differenza, si faccia un angolo supplementare dell' angolo dato, e si operi come nel primo caso.

16.

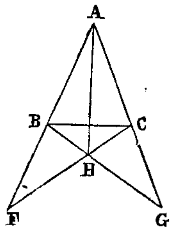
Da un punto dato condurre tre rette di grandezze date, in modo che i loro termini cadano in linea retta e vi determinino due segmenti uguali.

Dal punto dato si conduca una retta uguale alla prima data, poscia fatto centro nelle due estremità di questa si descrivano due cerchi, uno abbia per raggio la seconda retta data, e l' altro il doppio della terza, e unendo uno dei punti d' intersezione coi due centri si sarà formato un triangolo. Poscia dai due estremi del lato che è doppio della terza retta, menando due parallele agli altri due lati, si formerà un parallelogrammo, in cui uniti i vertici opposti verrà risoluto il problema.

17.

Nella figura della prop. 5 (*Eucl.*), *se* BG, CF *s' incontrano in* H, *mostrare che* AH *divide per metà l'angolo* BAC. (Fig. 3).

Fig. 3.

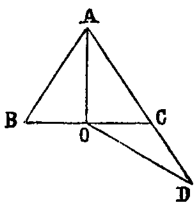


Si sa dalla dimostrazione del teorema di cui si parla che è l'angolo $GBC = BCF$, quindi il triangolo HBC è isoscele; onde i due triangoli ABH, AHC avendo due lati uguali e gli angoli compresi uguali, sono uguali, quindi l'angolo $BAH = HAC$.

18.

Se una retta, che divide per metà l' angolo al vertice d' un triangolo, divide per metà anche la base, il triangolo è isoscele. (Fig. 4).

Fig. 4.



Sia BAC l' angolo bisecato dalla retta AO, la quale biseca anche la base BC in O; dico che il triangolo ABC è isoscele.

Infatti se i lati AB, AC non sono uguali, uno di essi sarà il maggiore, e sia AB il maggiore.

Allora prendendo $AD = AB$, e congiunto DO, si avrà il triangolo $AOD = ABO$, ed il lato $OD = OB$; ma è $OB = OC$, sarà $OD = OC$, e l' angolo $ODC = OCD = OBA$, cioè l' esterno uguale all' interno opposto, il che è impossibile.

19.

Da un punto dato condurre una retta che faccia angoli uguali con due rette date.

Si prolunghino le due rette date finchè s' incontrino, ed abbassando dal punto dato la perpendicolare sulla bisettrice dell' angolo formato da quelle rette, prolungandola sufficientemente, sarà risoluto il problema.

20.

Per un punto dato condurre una retta che sia ugualmente distante da due altri punti.

Risolve il problema la retta che parte dal punto dato e biseca la congiungente degli altri due punti.

21.

Le rette che dividono per metà gli angoli di un triangolo concorrono in un punto (Fig. 5).

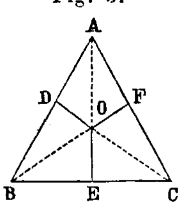
Le due bisettrici AO, BO degli angoli A e B del triangolo ABC, concorrono nel punto O, dico che questo appartiene anche alla terza bisettrice OC.

Infatti le tre distanze del punto O dai tre lati, cioè, OD, OE, OF sono uguali fra loro; ed essendo OC ipotenusa comune ai due triangoli OCF, OCE, sarà $\overline{OE}^2+\overline{EC}^2=\overline{OF}^2+\overline{FC}^2$, e $FC=EC$, e quindi il triangolo $OCF=OCE$, ed OC bisettrice dell' angolo ECF, dunque ecc.

22.

Le rette che bisecano ad angolo retto i lati di un triangolo concorrono in un punto (Fig. 5).

Fig. 5.



Sia ABC un triangolo qualunque, DO, FO due perpendicolari che bisecano due lati AB, AC, e che concorrono evidentemente in O; dico che la terza perpendicolare tirata dal medio di BC passa per O.

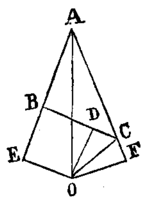
È chiaro che le rette OA, OB, OC sono uguali fra loro. Unendo O col punto medio E di BC, risulta il triangolo $OBE=OCE$, e l' angolo $BEO=OEC$, epperò OE è perpendicolare nel punto medio di BC, dunque ec.

23.

Se si prolungano due lati d' un triangolo, le rette che bise-

cano i due angoli esterni e quella che biseca il terzo angolo interno concorrono in un punto. (Fig. 6).

Fig. 6.



Le rispettive bisettrice AO, CO dell'angolo interno BAC, dell' esterno BCF del triangolo ABC concorrono nel punto O. Da questo punto si conducano ai tre lati del triangolo ADC le perpendicolari OF, OD, OE, e ne risulta il triangolo $ODC = OFC$, $OAE = OAF$, e quindi il lato $OF = OD = OE$. Unendo O con B risultano due triangoli rettangoli EBO, ODB che si dimostrano uguali come nell' esercizio 21°, quindi l' angolo $EBO = OBD$, dunque ecc.

24.

Se una retta avente i termini su due rette parallele è divisa per metà, ogni altra retta tirata pel punto di divisione fra le due parallele, sarà ivi divisa per metà.

Infatti con quella retta tirata per quel punto si formano due triangoli uguali, perchè hanno un lato uguale compreso fra due angoli rispettivamente uguali.

25.

Le diagonali di un parallelogrammo si dividono scambievolmente per metà.

Sia $ABCD$ il parallelogrammo, AD, BC le diagonali che si segano in E. I triangoli AEB, CED hanno l'angolo $EAB = EDC$, $EBA = ECD$, il lato $AB = CD$, dunque sono uguali, e quindi $AE = ED$, $BE = EC$.

26.

Un rombo è un parallelogrammo, e le sue diagonali si bisecano ad angolo retto.

Sia $ABCD$ il rombo, AC, BD le diagonali che si tagliano in E. I triangoli ABD, BDC avendo i lati uguali, sono uguali, quindi l' angolo $ABD = BDC$, $ADB = DBC$, cioè gli angoli alterni uguali, epperò $ABCD$ è parallelogrammo, ed essendo parallelogrammo le diagonali si bisecano scambievolmente (Teor. prec.).

Chiaramente si vede che i triangoli ABE, CBE sono uguali, e quindi gli angoli in E retti.

27.

La retta che congiunge i punti medi dei lati non paralleli d'un trapezio è uguale alla semisomma delle basi.

Sia $ABCD$ il trapezio. Pel punto medio E di DC si conduca $GHE \parallel AB$ fino all'incontro di AD in H, e BC in G. Si ha $ABGH$ parallelogrammo, il triangolo $DEH=CGE$, quindi $DH=GC$, $HE=EG$. Ora FE che congiunge i punti medi di AB, DC, congiunge anche i medi di AB, HG, quindi $AF=HE$, ed il triangolo $FAE=AHE$, onde $EF=AH=BG$. Ciò posto si ha evidentemente

$$EF = AD + DH,\ EF = BC - GC, \text{ e sommando si ha}$$

$$2EF = AD + BC, \text{ ed } EF = \frac{AD+BC}{2}.$$

28.

Se un parallelogrammo ha le diagonali uguali, esso è rettangolo.

Sia $ABCD$ il parallelogrammo che ha le diagonali uguali AC, BD. I triangoli ADC, DCB hanno il lato $AC=BD$, $AD=BC$, DC di comune, dunque sono uguali, e l'angolo $ADC=DCB$, epperò retti; ma è $ABC=ADC$, $BAD=BCD$, dunque $ABCD$ è rettangolo.

29.

Da un triangolo isoscele segare un trapezio che abbia la stessa base del triangolo e gli altri tre lati uguali fra loro.

Si biseca un angolo della base e dal punto d'incontro della bisettrice col lato opposto all'angolo bisecato si meni la parallela che determinerà il trapezio richiesto.

30.

Se si congiungono fra loro i punti medi dei lati d'un triangolo i quattro triangoli risultanti sono uguali.

Sia ABC il triangolo, E, D, F i punti medi dei lati AC, BC,AB. Si prolunghi DE finchè incontri $AG \parallel BD$ nel punto G.
I triangoli AEG, EDC sono uguali; quindi $GE = ED$, $AG=CD=DB$, ed $ABDG$ parallelogrammo. Essendo $AF=FB$, $GE=ED$, saranno $AFEG$, $FBDE$ due parallelogrammi uguali, ed i triangoli AEG, AEF, FBD, FDE uguali fra loro; ma è $AEG = EDC$, dunque ecc.

31.

Il quadrilatero le cui diagonali si bisecano scambievolmente, è un parallelogrammo.

Sia $ABCD$ il quadrilatero, AC, DB le diagonali che si bisecano scambievolmente in E; dico che esso è parallelogrammo.
Infatti i triangoli AED, BEC hanno il lato $AE = EC$, $ED = EB$, l'angolo $AED = BEC$, dunque sono uguali, quindi l'angolo $ADE = EBC$, epperò $AD \parallel BC$. Similmente si dimostra il lato $AB \parallel DC$, quindi $ABCD$ è parallelogrammo.

32.

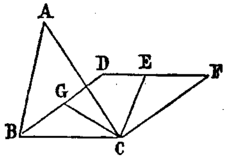
Condurre una retta che se fosse prolungata dividerebbe per metà l'angolo di due rette date, e ciò senza prolungare queste fino al loro incontro.

Da un punto preso ad arbitrio su una delle rette date si conduca la parallela all'altra, l'angolo così formato si divida per metà, dal punto medio della bisettrice compresa fra le rette date s'innalzi la perpendicolare che sarà la retta richiesta.

33.

Condurre una retta DE *parallela alla base* BC *di un triangolo* ABC, *in modo che* DE *sia uguale alla somma o alla differenza di* BD *e* CE. (Fig. 7).

Fig. 7.



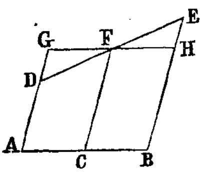
1.° Si conducano dagli estremi BC due rette parallele fra loro ciascuna uguale alla metà di BC, la congiungente gli estremi di queste parallele sarà la retta uguale alla somma.

2.° Su BC si costruisca un rombo con un angolo acuto in B, il che è facile a farsi. Nel punto C si facciano gli angoli BCG, FCE ciascuno uguale a DBC, e così verrà determinata la retta DE uguale alla differenza di BD e CE.

34.

Se AB *è divisa per metà in* C, *e da* A, B, C *si tirino delle rette parallele a incontrare una retta data in* D, E, F, *dimostrare che* CF *è uguale alla semisomma o alla semidifferenza di* AD *e* BE. (Fig. 8)—(Fig. 9).

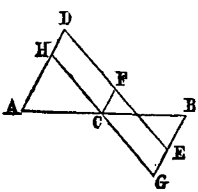
Fig. 8.



1.° Per il punto F tirisi $GFH \parallel AB$, e si prolunghi AD finchè incontri GH in G. I quadrilateri GB, GC, FB sono parallelogrammi per costruzione, e quindi $FC = GA = HB$, $GF = AC = CB = FH$. Per essere $GF = FH$ risulta il triangolo $FGD = FEH$, e quindi $GD = EH$, onde

$$GA + HB = DA + EB.$$

Fig. 9.



Ora $FC = \dfrac{GA + HB}{2}$, quindi

$$FC = \frac{DA + EB}{2}.$$

2.° Sia DE la retta data, e pel punto C si faccia passare $HCG \parallel DE$, la quale incontra DA, BE in H, G. I triangoli HAC, BCG sono evidentemente uguali, quindi $HA = BG$. Le rette FC, DH, EG sono uguali, perchè DC, FG sono parallelogrammi. Ora $FC = DA - HA$, $FC = BG - BE$, quindi

$$2FC = DA - BE\,, \quad \text{essendo} \quad HA = BG\,, \quad \text{epperò}$$

$$FC = \frac{DA - BE}{2}.$$

35.

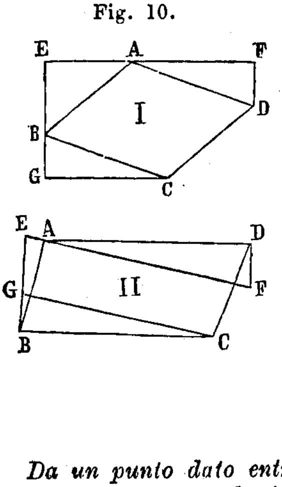
Per un punto dato fra due rette date tirare una retta in modo che i segmenti intercetti fra esso punto e le rette date siano aguali.

Dal punto dato si tiri la perpendicolare ad una delle rette date, si prolunghi questa da parte dell' altra retta data, si prenda a partire dal punto dato una porzione uguale alla perpendicolare, dall' estremità di questa retta prolungata si conduca la parallela alla prima, che incontrerà la seconda in un punto, per questo e il dato si faccia passare una retta fino all' incontro dell' altra retta data, e il problema sarà risoluto.

36.

ABCD *è un parallelogrammo; per* A *tirare una retta qualunque e mostrare che la distanza di* C *da questa retta è uguale alla somma o alla differenza delle distanze di* B *e* D *dalla retta medesima.* (Fig. 10).

Fig. 10.



Sia (Fig. I, II) AEF la retta che passa per A. Per C conducasi $CG \parallel EF$, per D e B le DF, BE perpendicolari ad EF e si prolunghi BE ad incontrare CG in un punto G. Da questa costruzione risultano i triangoli ADF, CBG che hanno l'angolo $F=G$, $DAF=BCG$, il lato $AD=BC$, dunque sono uguali, e quindi $DF=BG$, onde $BE+DF=GE$ (Fig. I), e $BE-DF=GE$ (Fig. II), ma si vede chiaramente che GE è uguale alla distanza di C ad EF, dunque ecc.

37.

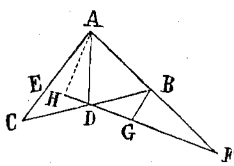
Da un punto dato entro l' angolo di due rette date tirare una retta in modo che i segmenti compresi fra esso punto e le rette date siano l' uno doppio dell' altro.

Dal punto dato tirisi la perpendicolare su un lato, la si prolunghi dalla parte opposta del doppio di essa, dall' estremità di questo prolungamento si conduca la parallela a quella retta su cui si è tirata la perpendicolare; questa parallela incontrerà l' altra retta in un punto che determinerà la retta cercata.

38.

Di tutti i triangoli che hanno lo stesso angolo al vertice e le cui basi passano per un punto dato, il minimo è quello la cui base è bisecata in questo punto. (Fig. 11).

Fig. 11.



Sia BAC l' angolo, D il punto dato, BC la base del triangolo ABC bisecata in D, ed FE la base d' un altro triangolo AEF, la quale passa anche per D; dico che il triangolo ABC è il minimo.

Infatti dalle prop. 37 e 38 lib. 1° Eucl. si ricava essere il triangolo $ABD = ADC$, onde $ABD > ADE$, e con più forte ragione $AFD > ADE$, e quindi il lato $FD > DE$. Perchè se si volesse $DE > DF$, prendendo $DH = DF$, s'avrebbe il triangolo $ADH = ADF$, il che non può essere. Si prenda $DG = DE$, e sarà il triangolo $DBG = DEC$, ed aggiungendo di comune la figura $BDEA$, s' avrà $ABGE = ABC$, e quindi $ABC < AEF$.

39.

Nella diagonale prolungata d' un quadrato trovare un punto dal quale se si tira una retta parallela ad un lato e segante un altro lato prolungato, essa formi colla diagonale prolungata un triangolo uguale al quadrato dato.

Si prolunghi il lato del quadrato d' una quantità uguale al lato medesimo, s' unisca l' estremità di questo prolungamento coll' estremità della diagonale, e si tiri pel medio della congiungente la parallela al lato adiacente al prolungato, che incontrerà la diagonale nel punto cercato.

40.

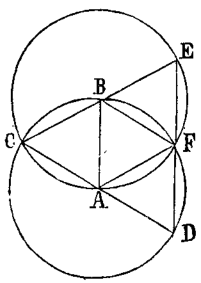
Nella figura della prop. 5 (*Eucl.*), *se* BG, CF *s' incontrano* *in* H, *e se gli angoli* FBG, ABC *sono uguali, l'angolo* BHF *è doppio dell' angolo* BAC (Fig. 3).

Essendo l'angolo $ABG = ACF$, sarà $CBG = BCF$, e quindi BHF doppio di CBG. Essendo l'angolo $FBG=ABC$, e quindi ad ACB, la somma degli angoli ABC, CBG, ACB sarà uguale a due retti; ma la somma degli angoli del triangolo ABC è uguale a due retti, sarà, togliendo il comune ABC e ACB, $CBG = BAC$; ma BHF è doppio di CBG, sarà anche doppio di BAC.

41.

Nella figura della prop. 1 (*Eucl.*), *se si prolunga* CA, CB *ad incontrare la circonferenza in* D, E, *e se* F *è l' altro punto d' intersezione dei due cerchi, mostrare che* D, E, F *sono in linea retta.* (Fig. 12).

Fig. 12.



Si vede chiaramente che i triangoli CAB, ABF, ADF, BFE sono uguali fra loro, e ciascuno è equiangolo, onde ciascuno degli angoli DFA, AFB, BFE è due terzi di retto, e la somma uguale a due retti, epperò D, E, F sono in linea retta.

42.

Dividere un angolo retto in tre parti uguali *.

Su un lato, a partire dal vertice, si costruisca un triangolo equilatero, un lato del quale distaccherà la terza parte dell' angolo retto, e si bisechi il rimanente dell' angolo retto.

43.

Se uno degli angoli acuti di un triangolo rettangolo è triplo dell' altro angolo acuto, dividere in tre parti uguali l'angolo acuto minore.

Sia ACB il triangolo rettangolo in A.

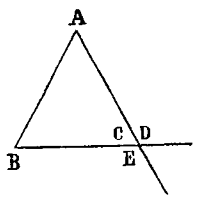
* Nell'Euclide non è detto angolo retto, ma semplicemente *angolo*. Noi abbiamo aggiunta la parola *retto,* perchè, come tutti sanno, non si può dividere un angolo qualunque in tre parti uguali.

Essendo l' angolo acuto minore $^1/_4$ di retto, la sua terza parte sarà $^1/_{12}$, ovvero $^1/_3 - ^1/_4$. Quindi essendo ACB l' angolo acuto minore, facendo ACD uguale alla terza parte del retto, l' angolo BCD sarà la terza parte di ACB; e conoscendo la terza parte si può trisecare l' angolo, il che è facile a farsi.

44.

Se si prolunga la base d' un triangolo isoscele, il doppio dell' angolo esterno supera di due retti l' angolo al vertice (Fig. 13).

Fig. 13.



Sia ABC il triangolo isoscele, BC la base prolungata. Prolunghisi il lato AC. L' angolo esterno D è uguale ad $A+B$, e l'esterno $E = B + A = C + A$, sommando si ha $D + E$ ovvero $2D = B + C + A + A$; ma $B + C + A = 2$ retti, dunque $2D$ supera A di due retti.

45.

Dividere una retta data in tre parti uguali.

Sulla retta data BC si costruisca il triangolo equilatero ABC, agli angoli B, C si tirino le bisettrici BD, CD, al loro punto d' incontro D si facciano gli angoli BDE, CDF, ciascuno uguale a DBC, le rette DE, DF tagliano la retta BC nel modo cercato.

46.

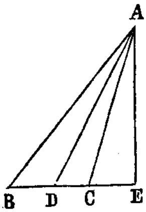
Dividere un triangolo equilatero in nove parti uguali.

Agli angoli del triangolo si conducano le bisettrici, le quali concorrono in un punto (21. I. Es.), ciascun lato si divida in tre parti uguali (prob. prec.), i punti di divisione si uniscano al punto d' incontro delle bisettrici, e il triangolo resterà diviso nel modo richiesto.

47.

La differenza degli angoli alla base d' un triangolo qualunque è doppia dell' angolo contenuto da due rette tirate da *vertice, l' una che bisechi l' angolo al vertice, e l' altra perpendicolare alla base.* (Fig. 14).

Fig. 14.



Sia ABC un triangolo qualunque, AD la bisettrice, AE la perpendicolare, dico essere l' angolo $ACB - ABC = 2EAD$.

Difatti è l' angolo $ACB = AEC + CAE$; ma $AEC = EAD + ADE$, dunque $ACB = EAD + ADE + CAE$; ma $ADE = DBA + BAD$, dunque $ACB = EAD + DBA + BAD + CAE$; ma $BAD = DAC$, dunque $ACB = EAD + DBA + DAC + CAE$; ma $DAC + CAE = EAD$, dunque $ACB = 2EAD + DBA$, e quindi $ACB - DBA = 2EAD$.

48.

Nella base BC *d' un triangolo isoscele* ABC *prendasi un punto* D; *in* CA *facciasi* CE = CD *e sia* F *l' intersezione di* ED *con* AB; *dimostrare, che il triplo dell'angolo* AEF *supera di quattro retti l' angolo* AFE.

Infatti l' angolo $AEF = EDC + C$, $AEF = EDB$ (5, I.), $AEF = EDC + ABC$; onde sommando si ha $3AEF = EDC + C + EDB + EDC + ABC$; ma $ABC = BDF + AFE = DEC + AFE$, dunque $3AEF = EDC + C + EDB + EDC + DEC + AFE$, e quindi $3AEF = 4$ retti $+ AFE$.

49.

Se l' angolo alla base d' un triangolo isoscele è la quarta parte dell' angolo al vertice, se dal vertice di quello si tira la perpendicolare alla base sino ad incontrare il lato prolungato, allora la parte prolungata, la perpendicolare ed il lato rimanente formeranno un triangolo equilatero.

Sia ABC il triangolo isoscele che ha l' angolo alla base $ABC = {}^1/_4\ BAC$; dico che se si tira BD perpendicolare a BC, fino ad incontrare CA in un punto D, il triangolo DBA è equilatero.

Difatti è l' angolo $DAB = ABC + C$, quindi DAB è metà di BAC. Tirando AF perpendicolare a BC, sarà l' angolo BAC diviso per metà, quindi l' angolo $DAB = BAF = FAC$;

ma è $BAF = DBA$, $FAC = D$, perchè è $DB \parallel AF$; dunque il triangolo DBA è equiangolo, epperò equilatero.

50.

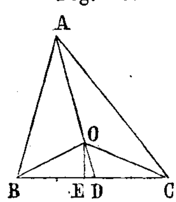
Se ABC *è un triangolo rettangolo in* A, *ed avente l'angolo* B *doppio di* C; *mostrare che il lato* CB *è doppio del lato* AB.

Dal punto medio D di BC s'innalzi DE perpendicolare; che incontra CA in E; si congiunga BE. I triangoli BDE, EDC sono uguali, quindi l'angolo $EBD = C$, epperò EBD è metà di ABD. I triangoli ABE, EBD risultano anche uguali, quindi il lato $BD = AB$, onde BC e doppio di AB.

51.

Se si dividono per metà i tre angoli di un triangolo, ed una delle bisettrici sia prolungata a segare il lato opposto, l'angolo contenuto da questa retta prolungata e da una delle altre due bisettrici è uguale all'angolo contenuto dalla terza bisettrice e dalla perpendicolare calata dal loro punto comune pel lato suddetto. (Fig. 15).

Fig. 15.



Sia ABC il triangolo, AD, BO, CO le bisettrici che concorrono nel punto O (21; I. Es.), AD la bisettrice che incontra il lato opposto in D, OE la perpendicolare; dico essere l'angolo $DOC = BOE$.

Infatti è l'angolo $OEC = OCB + EOC =$ un retto; $BAO + ABO + OCB =$ un retto, quindi $EOC = BAO + ABO$; ma $BAO + ABO = BOD$, dunque $EOC = BOD$, e togliendo di comune EOD, rimane $DOC = BOE$.

52.

Un quadrilatero nel quale i lati opposti o gli angoli opposti siano uguali è un parallelogrammo.

1.° Tirando una diagonale al quadrilatero risultano due triangoli uguali per avere i lati rispettivamente uguali, e quindi gli angoli alterni interni uguali, epperò i lati paralleli, e il quadrilatero parallelogrammo.

2.° Essendo nel quadrilatero $ABCD$ l'angolo $A=C$, $B=D$, sarà $A+B=C+D$; ma la somma degli angoli d'un quadrilatero è uguale a 4 retti, sarà $A+B=2$ retti, e quindi il lato $AD \parallel BC$. Dippiù essendo l'angolo $A=C$, sarà $B+C=$ 2 retti, onde il lato $AB \parallel DC$, epperò $ABCD$ è parallelogrammo.

53.

La figura formata da quattro punti presi rispettivamente nei quattro lati di un quadrato a distanze uguali dai quattro vertici, è un altro quadrato.

Sia $ABCD$ il quadrato, E, F, G, H i quattro punti a distanze uguali dai vertici, cioè i punti medi dei lati, e si congiungano fra loro; dico che $EFGH$ è un quadrato.

Infatti i quattro triangoli formati sono uguali ed isosceli, quindi $EFGH$ è equilatero. Essendo ciascuno degli angoli AEH, BEF un mezzo retto, sarà FEH un retto. Similmente degli altri angoli, dunque è anche rettangolo, epperò quadrato.

54.

Siano AD, AE *i quadrati costruiti sui cateti del triangolo rettangolo* ABC, *conducansi* DF, EG *perpendicolari sull'ipotenusa prolungata; allora* BC *è uguale alla somma di* DF, EG, *ed il triangolo* ABC *è uguale alla somma dei triangoli* DBF *ed* ECG.

Si conduca AH perpendicolare su BC. I triangoli ABH, DBF hanno il lato $AB=DB$, l'angolo $AHB=DFB$, $BAH=FBD$; perchè, ambidue complementari dell'angolo ABH * dunque i triangoli ABH, FDB sono uguali, epperò $BH=DF$. Similmente si dimostra $HC=EG$, quindi $BC=DF+EG$, ed il triangolo $BAC=DBF+ECG$.

55.

Se si dividono per metà i lati opposti di un parallelogrammo, le rette tirate dai punti di divisione ai vertici opposti dividono la diagonale in tre parti uguali.

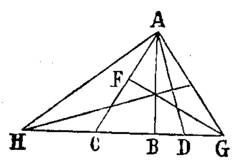
* Due angoli si dicono complementari, quando la loro somma è uguale ad un retto; e quindi due angoli complementari d'uno stesso angolo sono uguali.

Siano E, F i punti medi di AD, BC, lati opposti del parallelogrammo $ABCD$; EC, FA le rette tirate dai punti di divisione ai vertici opposti, che incontrano la diagonale BD in H, G; dico essere $BG=GH=HD$. Difatti i triangoli GBF, EHD hanno due angoli uguali ed i lati compresi uguali, dunque sono uguali, quindi $BG=DH$. Tirando $GI \parallel BC$, fino all'incontro di CE in I, si dimostra facilmente il triangolo $BGF=GHI$, e quindi $BG=GH$; dunque $BG=GH=HD$.

56.

Data la perpendicolare dal vertice alla base, e data la differenza fra ciascun lato ed il segmento adiacente, costruire il triangolo. (Fig. 16).

Fig. 16.

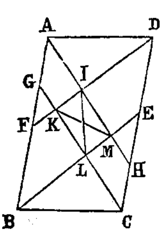


Sia AB la perpendicolare, BC, BD le differenze, e si situino per diritto perpendicolarmente ad AB. Si unisca AC, e dal punto medio F di AC tirisi FG perpendicolare ad AC, la si prolunghi finchè incontri CD in un punto G, e si congiunga AG. I triangoli AFG, FCG sono uguali, quindi $AG=CG$, epperò $AG-BG=BC$. Si unisca il punto A con D, si faccia la medesima costruzione, e risulterà $AH-BH=BD$, onde il triangolo AHG è il richiesto.

57.

Le rette che dividono per metà gli angoli di un parallelogrammo formano un parallelogrammo rettangolo, le cui diagonali sono parallele ai lati del parallelogrammo. (Fig. 17).

Fig. 17.



Sia $ABCD$ il parallelogrammo, AH, BE CG, DF le bisettrici dei suoi angoli, dico 1.° che esse formano un rettangolo $IKLM$.

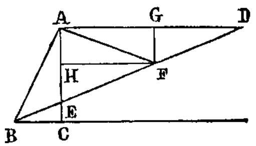
La somma degli angoli GBC, HCB è uguale a 2 retti, e quindi quella delle loro metà, cioè, EBC, GCB uguale ad un retto, epperò gli angoli in L retti. Similmente si dimostrano gli angoli in K, M, I retti, quindi $LKIM$ è rettangolo.

2.° I triangoli GLB, BLC sono uguali, quindi il lato $GL=LC$. Similmente si dimostra $AI=IH$, ed essendo $GC=AH$, sarà $GL=AI$, epperò $AGLI$ parallelogrammo, ed $IL \parallel AB$. I triangoli MKL, IKL sono uguali, quindi l'angolo $MKL=KLI$; ma $KLI=GAI=LCB$, quindi sarà $MKL=LCB$, epperò la diagonale $KM \parallel BC$.

58.

AD, BC *sono due rette parallele segate obliquamente da* AB *e perpendicolarmente da* AC; BED *è una retta condotta a segare* AC *in* E *in modo che* ED *sia doppia di* AB; *dimostrare che l'angolo* ABC *è triplo di* DBC. (Fig. 18).

Fig. 18.



Dal punto medio F di ED si conduca $FG \parallel CA$ ed $FH \parallel DA$, e si congiunga FA. I triangoli FGD, FHE sono uguali, quindi $HE=GF=HA$. I triangoli AHF, FHE sono uguali, quindi $AF=EF=FD$, e l'angolo $D=FAD$, $BFA=ABF$, perchè $AB=AF$. Ora $AFB=D+DAF$, dunque $ABF=D+DAF$, ossia al doppio di D; ma $D=DBC$, dunque ABF è doppio di DBC, e quindi ABC triplo di DBC.

59.

Adattare in un angolo dato una retta uguale ad una data e parallela ad un' altra data.

Dal vertice dell' angolo dato si conduca una retta uguale alla data e parallela all' altra, dall' estremità di questa si tiri la parallela ad un lato e la si prolunghi, finchè incontri l'altro, e da questo punto si conduca un' altra parallela alla retta menata pel vertice, che sarà la richiesta.

60.

Ciascuna retta che passa pel punto comune alle diagonali di un parallelogrammo e terminata a due lati opposti è ivi divisa per metà, e divide anche il parallelogrammo in due parti uguali.

Sia $ABCD$ il parallelogrammo, O il punto comune delle diagonali, ed EF la retta che passa per O. È il triangolo $AOE = FOC$, quindi $EO = OF$. È il triangolo $EOD = BOF$, $DOC = AOB$, sommando si ha il quadrilatero $EFCD = EFBA$, dunque ecc.

61.

Per un punto dato condurre una retta in modo che il segmento di essa compreso fra due rette parallele sia uguale ad una retta data.

Col centro in un punto preso su una delle parallele, con raggio uguale alla retta data si descriva la circonferenza, si uniscano i punti d' incontro col centro, e dal punto dato si conducano delle parallele alle congiungenti che risolvono il problema.

Il problema non ha soluzione se la distanza delle parallele è minore della retta data.

62.

In un triangolo rettangolo il punto medio dell' ipotenusa è ugualmente distante dai tre vertici.

Sia ABC il triangolo rettangolo in B, D il punto medio di AC. Se DB non è uguale a DC sarà o maggiore o minore; se maggiore, si prenda $DE = DC$, si congiunga AE, CE, e si avrà $DE = DC = DA$, quindi sarà l'angolo $DEC = DCE$, $AED = DAE$, e $DEC + AED = DCE + DAE =$ un retto, il che non può essere, quindi DB non può essere maggiore di DC. Similmente si dimostra che non può essere minore, dunque ecc. *

63.

In un triangolo qualunque ABC, *se* BE, CF *sono perpendicolari ad una retta tirata in modo qualunque per* A, *e se* D *è il punto di mezzo di* BC, *dimostrare che* DE = DF.

Pel punto D si faccia passare $GH \parallel FE$, la quale incontra BE, CF in H, G; $EFGH$ è un rettangolo.

Per l' uguaglianza dei due triangoli BHD, DGC, è il lato $HD = DG$, onde facilmente si scorge essere il triangolo $DEH = DFG$, e quindi $DE = DF$.

* Altra dimostrazione. Prolungato BD d'una quantità uguale a sè stesso risulta un rettangolo, in cui le diagonali sono uguali, epperò le loro metà saranno uguali, e quindi $AD = BD = DE$.

64.

Se dal vertice d' un angolo retto d' un triangolo rettangolo si tirano due rette, l' una a dividere l' ipotenusa per metà, e l' altra perpendicolare all' ipotenusa medesima, l' angolo di quelle due rette sarà uguale alla differenza degli angoli acuti del triangolo.

Sia ABC il triangolo rettangolo in B, BE la perpendicolare sull' ipotenusa AC, BD la mediana.

L' angolo $ABC = A + C = EBC + C$, quindi l' angolo $A = EBC$; ma $DBC = C$ (62, I. Es.), onde $DBE = C - A$.

65.

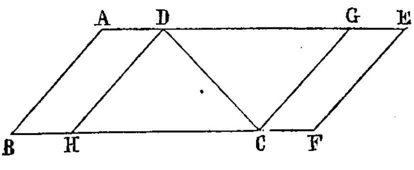
Trovare il punto della base d' un triangolo, dal quale tirate le rette parallele ai lati sino ad incontrarli, queste riescano uguali.

Il punto cercato è l' incontro della base colla bisettrice dell' angolo opposto ad essa base.

66.

Un trapezio è la metà d' un parallelogrammo compreso fra le stesse parallele, la cui base sia uguale alla somma dei due lati paralleli del trapezio. (Fig. 19).

Fig. 19.

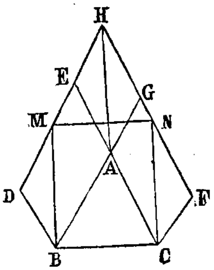


Sia $ABCD$ il trapezio, ed $ABFE$ il parallelogrammo compreso fra le stesse parallele AE, BF, la cui base BF è uguale ad $AD + BC$. Dai punti D e C si conducano DH, CG parallele alle due AB, EF. Da ciò risultano i triangoli DHC, CGD uguali, i parallelogrammi AH, GF uguali, quindi il trapezio $ABCD = DCFE$, ossia $ABCD$ metà di $ABFE$.

67.

Sui lati AB , AC *d'un triangolo descrivansi i parallelogrammi* ABDE, ACFG *e si prolunghi* DE, FG *ad incontrarsi in* H , *la somma di questi parallelogrammi sarà uguale al parallelogrammo contenuto da* BC *e da una retta uguale e parallela ad* AH. (Fig. 20).

Fig. 20.

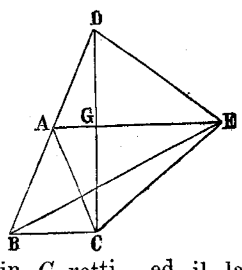


Si tirino BM, CN parallele ad AH, e risultano uguali e parallele, perchè HB, HC sono parallelogrammi, onde $MBCN$ è parallelogrammo. Il parallelogrammo $HB = EB$, $HC = GC$, quindi $HB + HC = EB + GC$; ed essendo il triangolo $NHM = ABC$, sarà il parallelogrammo $MBCN = HB + HC = EB + GC$, ma $MBCN$ è contenuto da BC ed $MB =$ e $\parallel AH$, dunque ecc. *

68.

Il perimetro d'un triangolo isoscele è minore di quello di qualsivoglia altro triangolo uguale descritto sulla stessa base (Fig. 21).

Fig. 21.



Sia ABC il triangolo isoscele, EBC un suo equivalente costruito sull'istessa base BC; dico essere il perimetro $BAC < BEC$.

Sul prolungamento di AB si prenda $AD = AB$, si congiunga DC che segherà AE, che è parallela a BC (39, I.), in un punto G. I due triangoli AGD, AGC sono uguali, perchè il lato $AD = AC$, AG di comune e l'angolo $DAG = GAC$, quindi gli angoli in G retti, ed il lato $DG = GC$. I triangoli EDG, EGC sono uguali, quindi $DE = EC$. Ciò posto è $BA + AD < BE + DE$, ma $AD = AC$, $DE = EC$, quindi $BA + AC < BE + EC$.

69.

Di tutti i triangoli descritti sulla stessa base e che hanno lo stesso perimetro, il più grande è l'isoscele.

* Se l'angolo BAC fosse retto e GC, EB fossero quadrati, si dimostrerebbe facilmente che AH è uguale a BC, e quindi il quadrato fatto sull'ipotenusa BC uguale alla somma dei quadrati fatti sui cateti AC, AB.

Siano ABC, DBC i triangoli costruiti sulla stessa base aventi il medesimo perimetro; dico essere il triangolo isoscele $ABC > DBC$. Se non è maggiore sarà o eguale o minore. Non può essere uguale perchè sarebbe il perimetro $ABC > DBC$ (prop. prec.); non può essere minore, perchè il vertice D sorpasserebbe la linea retta $AE \parallel BC$, e s' avrebbe il perimetro $BDC > BAC$, dunque ecc.

70.

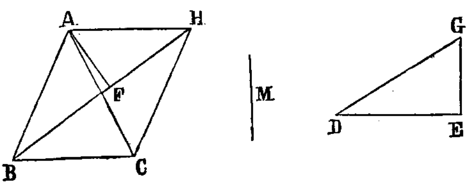
Dato un triangolo ABC *ed un punto* D *in* AB, *costruire un altro triangolo* ADE *uguale al dato ed avente lo stesso angolo* A.

Si unisca il punto D con C, e da B si conduca $BE \parallel DC$, prolungandola finchè incontri AC in un punto E, e il triangolo ADE è il richiesto.

71.

Trasformare un triangolo in un altro uguale, la cui altezza sia data. (Fig. 22).

Fig. 22.



Sia ABC il triangolo dato, M l' altezza. Su una retta indefinita DE s' innalzi EG perpendicolarmente, e la si ponga uguale ad M; col centro G e raggio uguale ad AB si tagli ED in un punto D, e si congiunga GD. Ciò posto col lato AB nel punto A si faccia l' angolo $BAF = DGE$, si prenda $AF = M$, e si tiri BF prolungandola, finchè incontri in un punto H la retta $CH \parallel AB$; ABH è il triangolo richiesto.

72.

Trasformare un trapezio in un triangolo con un angolo co-

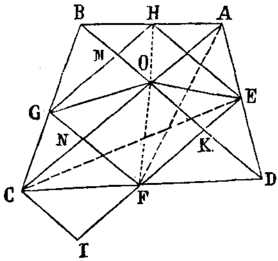
mune; e quindi mostrare come si può trasformare un poligono qualunque in un triangolo il cui vertice debba essere in un dato vertice del poligono e la base in uno dei lati.

Al trapezio $ABCD$ si conduca la diagonale DB, e da C la retta $CE \parallel BD$, che incontrerà AD in un punto E; il triangolo ABE è il richiesto. Con un' analoga costruzione si trasforma un poligono di n lati in un altro avente un lato di meno, e questo in un altro avente un lato di meno, e così via via, finchè si sarà trasformato in un triangolo uguale avente un angolo ed un lato comune col poligono.

73.

Se si congiungono i punti di mezzo dei lati di un quadrilatero, la figura inscritta è un parallelogrammo uguale alla metà del quadrilatero dato; dimostrare inoltre che le rette congiungenti i punti di mezzo dei lati opposti si bisecano fra loro. (Fig. 23).

Fig. 23.



1.° Sia $ABCD$ il quadrilatero, E, H, G, F i punti medi, si conducano AC, AF, CE.

È il triangolo $AFE = EFD = CEF$, quindi $EF \parallel AC$. Similmente si dimostra $HG \parallel AC$, ed HE, GF parallele a BD, dunque $HGEF$ è parallelogrammo.

2.° Si prolunghi EF, finchè incontri $CI \parallel BD$. I triangoli DKF, CIF sono uguali, quindi $DK = CI$, $DK = KO$. Similmente si dimostra * $OL = LA$, $OM = MB$, $ON = NE$. Il triangolo $KOE = EDK$, $LOE = LAE$, $OLH = LAH$, $OMH = MBH$, $OMG = MBG$, $ONG = NCG$, $ONF = NCF$, $OKF = KDF$; ma la somma dei primi termini è uguale a quello dei secondi, perciò il parallelogrammo $EFGH$ è metà di $ABCD$.

3.° Le rette che congiungono i punti medi dei lati opposti si bisecano fra loro (25, I. Es.).

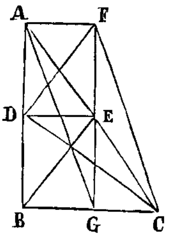
74.

Per D, E *punti di mezzo dei lati* AB, AC *d' un triangolo,*

* Pongasi la lettera L nel punto d' incontro di OA con HE.

si tirino DF, EF *parallele a* BE, AB, *mostrare che i lati del triangolo* DCF *sono uguali alle tre rette condotte dai vertici del triangolo dato ai punti medi dei lati opposti.* (Fig. 24).

Fig. 24.



Infatti $FDBE$ è parallelogrammo, quindi $DF = BE$. Il triangolo $FDE = EDB$, ma $EDB = ADE$, quindi $EDF = ADE$, epperò $AF \parallel DE$. E il triangolo $DEC = DEB$, perchè ciascuno è uguale ad ADE, quindi $DE \parallel BC$. Si congiunga E con G punto medio di BC, e risulta il triangolo $AGE = EGC = EBG$, quindi $EG \parallel AB$; ma EF si è messa parallela ad AB, quindi EG è per diritto ad EF. I triangoli, AEF, GEC sono uguali, ed aggiungendo AEG di comune si ha $AFG = AGC$, quindi $FC \parallel AG$, epperò $AGCF$ parallelogrammo ed il lato $FC = AG$; dunque ecc.

75.

Dividere per metà un triangolo con una retta condotta da un punto in un lato.

Il lato in cui è il punto dato dividasi per metà, da questo punto medio si conduca la parallela alla retta che unisce il punto dato col vertice dell' angolo opposto, questa parallela incontrerà un lato del triangolo in un punto, il quale unito col dato, si avrà quello che si cerca.

76.

Se un punto qualunque della diagonale di un parallelogrammo si congiunge ai vertici, il parallelogrammo sarà diviso in due paja di triangoli uguali.

Sia $ABCD$ il parallelogrammo, E il punto dato sulla diagonale, e tirisi DB che incontra AC in O.

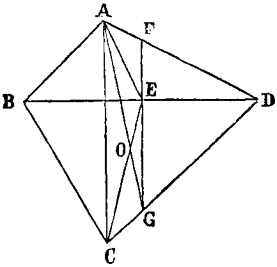
Il triangolo $AOD = AOB$, $EOD = EOB$, quindi $AED = AEB$; essendo $COD = COB$, sarà $CED = CEB$; dunque ecc.

77.

Per E, *punto di mezzo della diagonale* BD *di un quadri-*

latero ABCD, *conducasi* FEG *parallela ad* AC, *mostrare che* AG *divide la figura in due parti uguali.* (Fig. 25).

Fig. 25.

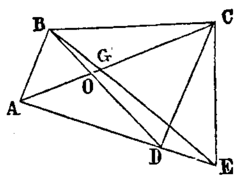


Sia unisca A e C con E, e si ha triangolo $AED+DEC=AEB+EBC$; il triangolo $AEC=ACG$, quindi $AOE=OCG$, dunque $AGD=ABCG$.

78.

Se dei quattro triangoli in cui le diagonali dividono un quadrilatero, due opposti sono uguali, il quadrilatero ha due lati opposti paralleli. (Fig. 26).

Fig. 26.



Sia $ABCD$ il quadrilatero avente due triangoli AOD. BOC uguali; dico essere $CD \parallel BA$. Se non è $CD \parallel BA$, sia CE; ed unendo B col punto d'incontro E di AD, CE, sarà il triangolo $ABE=ABC$, quindi $AGE=BGC$, ed AOD minore di AGE e di BGC; ma $AOD=BOC$, sarà $BOC<BGC$, il che è impossibile; dunque non può essere $CE \parallel AB$, ecc.

79.

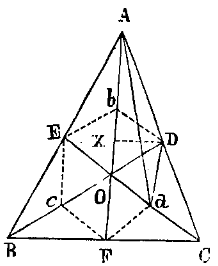
Le tre rette (mediane) che congiungono i vertici di un triangolo ai punti medi dei lati opposti, concorrono in un punto e dividono il triangolo in tre parti uguali. (Fig. 27).

Sia ABC il triangolo, E, F, D i punti medi dei lati. È il triangolo $EDB=AED=EDC$, quindi $DOC=EOB$; ma $AOD=DOC$, $AOE=EOB$, quindi i quattro triangoli AOD, DOC, AOE, EOB sono uguali fra loro, epperò $AOC=AOB$. Si unisca O con F. È il triangolo $BOF=COF$, ed aggiungendo a questo AOC, a quello AOB, si avrà $AFC=ABF$, quindi FO è per diritto ad OA, onde le tre mediane concorrono nel punto O. Essendo il triangolo $EBO=DOC$, $BOF=FOC$, sommando termine a termine, sarà $EBFO=DOFC$. È il triangolo $BEF=EAF=EFC$, quindi $EOA=FOC$, ed aggiungendo a questo DOC, a quello AOD, s'avrà $DOFC=AEOD$.

80.

Ciascuna mediana del triangolo è divisa nel punto d'intersezione in due parti delle quali una è doppia dell'altra. (Fig. 27).

Fig. 27.



Le mediane AF, BD, CE dividono il triangolo ABC in sei triangoli uguali, il che si ricava dalla prop. prec. Si dividano per metà le rette AO, BO, CO, ed i punti di divisione b, c, a si uniscano con D, E, F; i dodici triangoli risultanti saranno uguali fra loro. Cioè il triangolo $ADa = DaC = DOa$, quindi la retta $Da \parallel AF$; ed essendo $DbO = OaF$, sarà il lato $bO = OF$; perchè se non è, sia $OX = QF$, quindi il triangolo $DXO = OaF = DbO$, il che non può essere, dunque ecc. Similmente delle altre mediane, dunque ciascuna mediana ecc. *

81.

Se due lati di un triangolo sono dati, il triangolo è massimo quando contengono un angolo retto.

Siano AC, CB i due lati dati formanti l'angolo retto ACB. Tirando $AD \parallel BC$, ed unendo B ad un punto D di AD, risulterà il triangolo $DBC = ABC$. Ora è chiaro che è $CD > CA$, perchè CD è ipotenusa di DAC; quindi prendendo su CD la $CE = AC$, sarà evidentemente $EBC < DBC$, epperò minore di ABC, dunque ecc.

82.

I triangoli formati dalle rette che uniscono un punto preso ad arbitrio dentro un parallelogrammo ai termini dei lati opposti, valgono insieme la metà del parallelogrammo.

* Altra dimostrazione dei teoremi 79 e 80. Nella fig. 27 si dimostra facilmente che DE è parallela a BC; cioè che la congiungente i medi di due lati d'un triangolo è parallela al terzo lato. Quindi Da, Ec congiungendo i medi di CO, CA e BO, BA risultano parallele ad AO. Si vede pure che è $ca \parallel BC$; quindi $DEca$ è parallelogrammo, e quindi $EO = Oa = aC$, e $DO = Oc = cB$; vale a dire che le mediane BD, CE si tagliano ai loro due terzi, e perciò le tre mediane s'incontrano in un punto.

Dal punto E preso ad arbitrio si conduca EF parallela ed uguale ad AB, lato del parallelogrammo $ABCD$, e si unisca F con B e C, E con A e D. È il triangolo $ABE = EBF$, $DEC = EFC$, quindi $ABE + DEC = EBF + EFC$; ed essendo $AED = CBF$, sarà $ABE + DEC = AED + EBC$.

83.

Se dai termini d' uno dei lati obliqui d' un trapezio si tirano due rette al punto medio del lato opposto, il triangolo così formato col primo lato è metà del trapezio.

Sia $ABCD$ il trapezio, AE, BE, le rette tirate dall'estremità di AB al punto medio E di DC lato opposto obliquo; dico essere ABE metà di $ABCD$.

Invero tirando EG, FEH rispettivamente parallele ad AD, AB, risultano $AGEF$, $GBHE$, parallelogrammi uguali, e il triangolo $DFE = EHC$, quindi $AGE + EGB = AFE + EBH$, e sostituendo EHC ad EFD, si avrà $AED + EBC = ABE$, cioè ecc.

84.

Se dai termini della base di un triangolo isoscele si tirano le rette perpendicolari ai lati, la retta che congiunge il loro punto d' intersezione col vertice bisecherà la base ad angolo retto.

Sia ABC il triangolo isoscele, AD la retta che passa pel punto d'intersezione O delle perpendicolari BE, CF; dico essere AD perpendicolare a BC.

Difatti è il triangolo $EBC = CFB$, quindi $EC = FB$, epperò $EA = FA$, ed il triangolo $AOE = AOF$, e l'angolo $FAO = EAO$, epperò il triangolo $BAD = DAC$, e quindi l' angolo $ADB = ADC$; onde AD è perpendicolare a BC.

85.

Nella figura della prop. 47 (*Eucl.*), *dimostrare che, se si conducono* BG *e* CH, *queste rette sono parallele.* (Fig. 28).

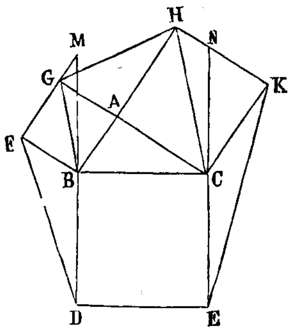
Difatti l' angolo ACH è mezzo retto, come ancora GBA: $ABC + ACB$ un retto, dunque $GBC + HCB$ è uguale a due retti, e quindi $GB \parallel CH$. O più semplicemente.

Essendo angolo $CHA = GBA = \frac{1}{2}$ retto, sarà $HC \parallel GB$.

86.

Nella stessa figura, se DB, EC *sono prolungate ad incontrare* FG *e* KH *in* M, N, *i triangoli* BFM, CKN *sono equiangoli ed uguali al triangolo* ABC. (Fig. 28).

Fig. 28.



Difatti è l'angolo $BFM=BAC$, $FBM=ABC$, perchè $FBA=MBC$, il lato $FB=BA$, dunque il triangolo $MFB=BAC$, ed essendo uguali tutte le loro parti, sono anche equiangoli. Similmente si dimostra $NCK=ABC$, dunque ecc.

87.

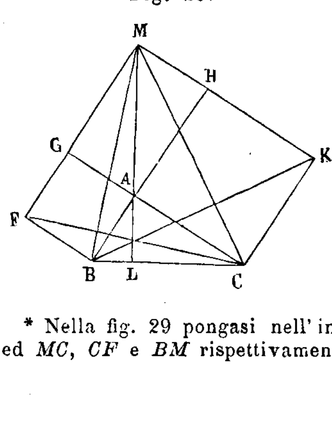
Nella stessa figura, se si congiungono GH, KE, FD, *ciascuno dei triangoli così formati è uguale al triangolo dato* ABC. (Fig. 28).

Difatti è il triangolo $GAH=ABC$ per sovrapposizione; $FBD=FBM$, perchè $DB=BM$, quindi uguale ad ABC; per l'istessa ragione è $KCE=ABC$, dunque ecc.

88.

Nella stessa figura, prolunghinsi FG, KH *ad incontrarsi in* M, *e si prolunghi* MA, *a tagliare* BC *in* L; *mostrare che* ML *è perpendicolare a* BC. (*Le tre rette* AL, BK, CF *concorrono in uno stesso punto*). (Fig. 29).

Fig. 29.



1.° I due triangoli MGA, ABC hanno il lato $MG=AC$, $GA=AB$, l'angolo $MGA=BAC$, dunque sono uguali, e quindi l'angolo $GMA=ACB$; ed essendo $LAC=MAG$, sarà anche $ALC=MGA$=un retto, dunque ecc.

2.° Si conducano le rette * MPC, MIB. I triangoli MCK, BKH hanno il lato $MK=HB$, $KC=HK$, l'angolo compreso

* Nella fig. 29 pongasi nell'incontro delle rette BK ed MC, BH ed MC, CF e BM rispettivamente P, R, I.

$MKC = BHK$, dunque sono uguali, e quindi l'angolo $CMK = HBK$; ed essendo $BRP = MRH$, sarà $BPR = MHR$=un retto, epperò BP perpendicolare ad MC. Similmente si dimostra CI perpendicare ad MB; dunque le tre rette ML, BK, CF sono perpendicolari condotte dai tre vertici del triangolo MBC ai suoi tre lati, e quindi concorrono in un punto O, come dimostreremo nel teorema seguente.

89.

Le perpendicolari abbassate dai vertici d'un triangolo sui lati opposti concorrono in un punto.

Si facciano passare pei vertici del triangolo ABC le rette DF, DE, EF rispettivamente parallele ad AB, BC, AC, e ne risulta il triangolo DEF. A cagione delle parallele, $ABCD$, $AEBC$ sono parallelogrammi, e quindi $BC = AD = AE$, cioè A è un punto medio di ED. Similmente si dimostra C, B punti medi di DF, FE; dunque le perpendicolari condotte dai vertici ai lati del triangolo ABC, sono anche perpendicolari ai punti medi dei lati del triangolo DEF; ma le perpendicolari elevate dai punti medi dei lati d'un triangolo concorrono in un punto (22, I. Es.), dunque le perpendicolari ecc.

90.

Dati due segmenti uguali di due rette date di posizione, trovare un punto che con quelle determini due triangoli uguali in tutte le loro parti.

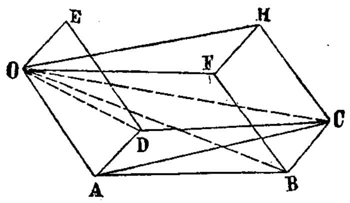
Si uniscano l'estremità dei segmenti, dai punti medi delle congiungenti si menino le perpendicolari, il punto d'incontro delle quali è il richiesto.

91.

Se O è un punto qualunque nel piano d'un parallelogrammo ABCD, *la somma o la differenza dei triangoli* ABO, ADO *è uguale al triangolo* ACO. (Fig. 30).

1.° Dai vertici B, C, D, si conducano BF, CH, DE uguali e parallele ad AO. È chiaro che BH, AE sono pa-

Fig. 30.



rallelogrammi uguali, e che $OABF$, $OACH$ sono parallelogrammi. I triangoli OFH, ABC sono uguali, perchè hanno i lati rispettivamente uguali, ed aggiungendo all' uno e all' altro la figura $OACHF$ si ha
$BCHF + OABF = OACH$;
ma $BCHF = OADE$, quindi $OADE + OABF = OACH$, e prendendo la metà dei termini dell' eguaglianza si ha $ABO + ADO = ACO$.

2.° Un' analoga dimostrazione si fa per la differenza, prendendo il punto O dentro il parallelogrammo.

FINE DEL PRIMO LIBRO.

LIBRO II.

1.

Se si congiunge con una retta (mediana) il vertice di un angolo acuto d' un triangolo rettangolo col punto di mezzo del lato opposto, il quadrato di quella retta sarà minore del quadrato dell' ipotenusa di tre volte il quadrato della metà del cateto bisecato.

Sia ABC il triangolo rettangolo in A. CD la mediana. Perchè è DA metà di AB, sarà $AB^2=4AD^2$ quindi $BC^2=4AD^2+AC^2$, ma $AD^2+AC^2=DC^2$, perciò $BC^2=3AD^2+DC^2$, e $DC^2=BC^2-3AD^2$.

2.

Se dal punto medio di un cateto d' un triangolo rettangolo si abbassa la perpendicolare sull' ipotenusa, la differenza dei quadrati dei segmenti dell' ipotenusa è uguale al quadrato dell' altro cateto.

Sia ABC il triangolo rettangolo in A, ED la perpendicolare tirata da E punto medio di AB sull' ipotenusa BC, tirisi EC.

Essendo EC ipotenusa comune ai due triangoli rettangoli EAC, EDC, si ha $ED^2+DC^2=AC^2+AE^2$, ma $AE^2=EB^2=ED^2+DB^2$, quindi $ED^2+DC^2=AC^2+ED^2+DB^2$, e togliendo di comune ED^2, si ha $DC^2=AC^2+DB^2$, onde $DC^2-DB^2=AC^2$.

3.

In qualunque triangolo se dal vertice si abbassa la perpendicolare sulla base, la differenza dei quadrati dei lati è uguale alla differenza dei quadrati dei segmenti alla base.

Sia ABC un triangolo qualunque, AD la perpendicolare. $AD^2 = AB^2 - DB^2$, $AD^2 = AC^2 - DC^2$, onde $AB^2 - DB^2 = AC^2 - DC^2$, e quindi $AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2$.

4.

Sia OAB *un quadrante di circolo, il cui centro è* O, *da un punto qualunque* C *dell' arco si abbassi* CD *perpendicolare sopra* OA *od* OB, *la quale incontri in* E *il raggio che bisechi l' angolo* AOB; *dimostrare che, la somma dei quadrati di* CD *e* DE *è uguale al quadrato* OA.

Tirisi OC, e si ha $OC^2 = CD^2 + OD^2$. Essendo EOD mezzo retto, sarà anche OED mezzo retto, quindi $OD = DE$, epperò $OC^2 = CD^2 + DE^2 = OA^2$.

5.

Se da un punto qualunque del diametro di un semicerchio si tirano due rette alla circonferenza, una al punto medio e l' altra perpendicolare al diametro la somma dei quadrati di queste due rette è doppia del quadrato del raggio.

Sia B il punto preso sul diametro EF, BD la perpendicolare al diametro, BC la retta che va al punto medio dell'arco, A il centro; tirinsi CA, DA.

I triangoli CEA, CAF sono uguali, quindi gli angoli in A retti. $CB^2 = CA^2 + BA^2$; $DB^2 = DA^2 - BA^2$, e sommando si ha $CB^2 + DB^2 = CA^2 + DA^2$, cioè uguale a due volte il quadrato del raggio.

6.

Se A *è il vertice d' un triangolo isoscele* ABC, *e* CD *sia condotta perpendicolarmente ad* AB, *provare che la somma dei quadrati dei tre lati è uguale alla somma del quadrato di* BD, *del doppio di* AD *e del triplo di* CD.

$AC^2 = AD^2 + DC^2$; AC essendo uguale ad AB si ha $AB^2 = AD^2 + DC^2$; $BC^2 = BD^2 + DC^2$, sommando si ha $AC^2 + AB^2 + BC^2 = BD^2 + 2AD^2 + 3DC^2$.

7.

Se da un punto qualunque si conducono le perpendicolari *su tutti i lati d' un poligono, la somma dei quadrati dei segmenti non contigui dei lati è uguale alla somma dei quadrati degli altri segmenti.*

Sia $ABCD$ un poligono, OE, OF, OG, OH le perpendicolari condotte da un punto O ai lati AB, BC, CD, DA. Si unisca O coi vertici.

Essendo OD ipotenusa comune ai due triangoli HOD, DOG si ha

$$OG^2 + GD^2 = OH^2 + HD^2,$$ per l' istessa ragione

si ha $$OH^2 + AH^2 = OE^2 + AE^2$$ »

» $$OE^2 + EB^2 = OF^2 + BF^2$$ »

» $$OF^2 + FC^2 = OG^2 + CG^2,$$ donde »

$$GD^2 + AH^2 + EB^2 + FC^2 = HD^2 + AE^2 + BF^2 + CG^2.$$

8.

Se dal vertice di uno degli angoli acuti di un triangolo rettangolo si tira una retta sino al lato opposto, la somma dei quadrati di questo lato e di quella retta è uguale alla somma dei quadrati dell' ipotenusa e del segmento adiacente all' angolo retto.

Sia ABC il triangolo rettangolo in A, CD la retta tirata dal vertice dell' angolo acuto C al lato opposto AB.

$$BA^2 + AC^2 = BC^2;\ DC^2 - AC^2 = DA^2,$$

sommando si ha

$$BA^2 + DC^2 = BC^2 + DA^2.$$

9.

Descrivere un quadrato uguale alla differenza di due quadrati dati.

Si costruisca un triangolo rettangolo che abbia per ipotenusa il lato del quadrato maggiore, e per un cateto il lato dell' altro quadrato, l' altro cateto è il lato del quadrato differenza dei due quadrati dati.

10.

Dividere, quando sia possibile, una retta data in due parti, in modo che la somma dei loro quadrati sia uguale ad un quadrato dato.

Si faccia centro in un estremo della retta data e raggio uguale al lato del quadrato dato si descriva un arco, all'altro estremo si faccia un angolo uguale ad un mezzo retto, dal punto d'incontro del lato dell'angolo coll'arco s'abbassi la perpendicolare sulla retta data, che la segherà nel modo cercato.

11.

Dal punto medio D *del lato* AC *di un triangolo equilatero* ABC, *condotta* DE *perpendicolare a* BC; *dimostrare che il quadrato di* BD *è tre quarti di* BC, *e che la retta* BE *è tre quarti di* BC.

1.° Difatti $BC^2 = BD^2 + DC^2$, ma $DC^2 = \frac{1}{4} AC^2 = \frac{1}{4} BC^2$, dunque $BD^2 = BC^2 - \frac{1}{4} BC^2 = \frac{3}{4} BC^2$.

2.° Si prenda $EG = EC$. I triangoli DCE, DEG sono uguali, quindi $DG = DC$, e l'angolo $C = DGE$; ma C è $\frac{2}{3}$ di retto, anche DGE sarà $\frac{2}{3}$ di retto, e quindi il triangolo DGC equilatero, epperò $BG = GC$; ed essendo GE metà di GC, sarà $BE = \frac{3}{4} BC$.

12.

Se dal vertice A *del triangolo rettangolo* ABC, *si abbassa* AD *perpendicolare sull'ipotenusa, dimostrare che i rettangoli di* BC *e* BD, *di* BC *e* CD, *di* BD *e* CD *sono rispettivamente uguali ai quadrati di* AB, AC, AD.

Siano $ABEG$, $BCFH$ i quadrati costruiti sul cateto AB e sull'ipotenusa BC; e sia prolungata AD fino all'incontro di HF in L.

Dalla dimostrazione della prop. 47, libro 1.° Euclide, si rileva, che il rettangolo BL è uguale al quadrato BG, ma BL

è il rettangolo di BC e BD, dunque ecc. Similmente si dimostra $BC \times CD = AC^2$.

$$AD^2 = AC^2 - CD^2, \text{ ma } AC^2 = BC \times CD, \text{ quindi}$$

$$AD^2 = BC \times CD - CD^2 = CD(BC - CD) = CD \times BD.$$

13.

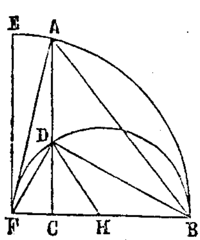
Prolungare una retta data in modo che il rettangolo contenuto dall' intera retta prolungata e dalla retta data sia uguale ad un quadrato dato.

Si descriva un arco col centro in un estremo e con raggio uguale al lato del quadrato dato, il quale arco incontrerà la perpendicolare innalzata dall' altro estremo in un punto, da questo tirisi un' altra perpendicolare alla retta che lo unisce col primo estremo, la quale incontrerà la retta data nel modo cercato. La dimostrazione s' appoggia sul teorema precedente.

14.

Se sul raggio di un cerchio si descrive un semicerchio e si conduce una perpendicolare al diametro comune; il quadrato della corda del cerchio maggiore, compresa fra il termine del diametro ed il punto di sezione della perpendicolare sarà doppia del quadrato della corrispondente corda nel cerchio minore. (Fig. 31).

Fig. 31.



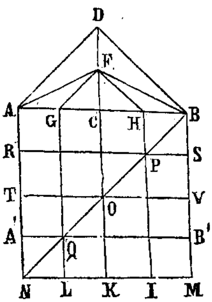
Sia AC la perpendicolare al diametro comune, la quale taglia la semicirconferenza BDF descritta sul raggio BF del cerchio maggiore BAE nel punto D. Si unisca D con B, col centro H del cerchio minore e col centro F del cerchio maggiore, e si congiunga AF.

$AB^2 = AC^2 + CB^2$, ma $AC^2 = AF^2 - FC^2 = FB^2 - FC^2$, quindi $AB^2 = FB^2 - FC^2 + CB^2$, ma $FB^2 = FC^2 + CB^2 + 2FC \times CB$, quindi $AB^2 = FC^2 + CB^2 + 2FC \times CB + CB^2 - FC^2$, e perchè $FC^2 - FC^2 = 0$, e $2FC \times CB = 2CD^2$ (12, II. Es.) risulta $AB^2 = 2CD^2 + 2CB^2 = 2DB^2$.

15.

Dividere una retta in due punti equidistanti dai suoi estremi, in modo che il quadrato della parte media sia uguale alla somma dei quadrati delle estreme; e dimostrare che allora il quadrato dell' intera retta è uguale alla somma dei quadrati delle parti estreme e del doppio rettangolo dell' intera retta e della parte media. (Fig. 32).

Fig. 32.



1. Sia AB la retta data. La si bisechi in C; s' innalzi CD perpendicolare ad AB, si prenda $CD{=}AC{=}CB$; agli angoli DAB, DBA si menino le bisettrici AF, BF, le quali concorrono con la DC nell'istesso punto F (I, 21, Es.); si conducano FG, FH rispettivamente parallele a DA, DB; la retta AB è divisa in G, H come si voleva.

2. Sia $ANMB$ il quadrato costruito su AB. Dai punti G, C, H si conducano GL, CK, HI parallele ad AN, si tiri la diagonale BN, e pei punti di intersezione P, O, Q si conducano RS, TV, $A'B'$ parallele ad AB. Da questa costruzione risulta il rettangolo $CP=PV$ (I, 43.) *, $VU=UK$; PO, OU sono il doppio quadrato di CH, ma $2CH^2=HF^2$ ossia UM, dunque $CI=PM$. Similmente si dimostra $RL=GK$, dunque $PM+RL=GI$; ma GI è il rettangolo di AB e GH, quindi $GI+PM+RL$ è uguale al doppio rettangolo di AG e GH, ed aggiungendo i quadrati di AG ed HB si ha $AB^2=AG^2+HB^2+2AB\times GH$.

16.

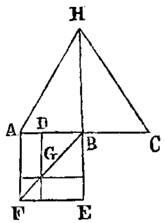
Dividere una retta in due parti in modo che la somma dei quadrati dell' intera retta e di una parte sia uguale al doppio quadrato dell' altra parte; e dimostrare che allora il quadrato della parte maggiore è uguale al doppio rettangolo dell'intera retta e della parte minore. (Fig. 33).

1. Si tracci una retta AC doppia della data AB, si costruisca su di essa il triangolo equilatero AHC. Prendasi su

* Pongasi la lettera U nell'intersezione di HI ed $A'B'$.

AC una parte CD uguale all'altezza HB del triangolo; dico che AB è divisa in D nel modo richiesto.

Fig. 33.



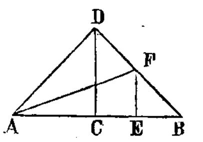
Infatti $AH^2 = HB^2 + AB^2$, ovvero $AC^2 = DC^2 + AB^2 = 4AB^2$, e $3AB^2 = DC^2 = BD^2 + BC^2 + 2DB \times BC$; ed essendo $AB^2 = BC^2$, sarà $2AB^2 = DB^2 + 2DB \times BC$; ed essendo ancora $AB^2 = AD^2 + DB^2 + 2AD \times DB$, sarà $AB^2 + AD^2 + DB^2 + 2AD \times DB = DB^2 + 2DB \times BC$; e togliendo il termine comune DB^2, e trasportando $2DB \times AD$ nell' altro membro si avrà: $AB^2 + AD^2 = 2DB \times BC - 2DB \times AD = 2DB\,(BC - AD) = 2DB^2$.

3. Si costruisca su AB il quadrato $AFEB$, tirisi BF, e $DG \parallel AF$. È $2BG = AE + GF = BG + 2DF$, e quindi $BG = 2DF$, cioè $DB^2 = 2AB \times AD$.

17.

Dividere una retta in due parti in modo che la somma dei loro quadrati sia la più piccola possibile. (Fig. 34).

Fig. 34.



Sia AB la retta, la si divida per metà in C; dico che essa è divisa nel modo cercato. A tale oggetto s' innalzi CD perpendicolare ad AB e la si ponga uguale ad AC; s' innalzi eziandio da un altro punto E un' altra perpendicolare EF, e si ha $AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + CB^2$, $AF^2 = AE^2 + EF^2$, ma $AF > AD$, dunque ecc.

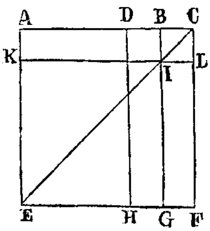
18.

Dimostrare che la somma dei quadrati di due rette non è mai minore del doppio loro rettangolo, e che la differenza dei loro quadrati è uguale al rettangolo contenuto dalla loro somma e dalla loro differenza. (Fig. 35).

1. Siano AB, BC le due rette messe per diritto. Si bisechi AC in D.

Si sa che $AB^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2DB^2$ (II, 9), e $2AD^2 = 2AB \times BC + 2BD^2$ (II, 5), quindi $AB^2 + BC^2 = 2AB \times BC +$

Fig. 35.



$4BD^2$. Quando è $AB = BC$, DB svanisce e si avrà $AB^2 + BC^2 = 2AB \times BC$.

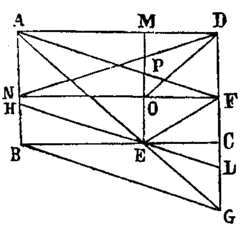
2. Su AC si costruisca il quadrato $AEFC$, si tiri la diagonale CE, si prenda $BD = BC$, si tirino BG, DH parallele a CF, e per I punto d' incontro di CE, BG si tiri $LK \parallel AC$.

Ciò posto è il rettangolo $IF = IA = IH$, quindi il quadrato $KG = KH + AI$, e quindi $KG = CI + AH$, cioè $AB^2 - BC^2 = AC \times AD$.

19.

ABCD *è un rettangolo,* E *un punto qualunque in* BC *ed* F *in* CD*; dimostrare che il rettangolo* ABCD *è uguale a due volte il triangolo* AEF *insieme col rettangolo delle* BE, DF. (Fig. 36).

Fig. 36.



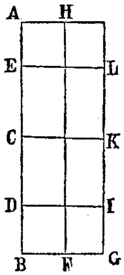
Si tiri $BG \parallel AF$, e prolungandola fino all' incontro di FC in G, risulta il parallelogrammo $ABGF = ABCD$. Per F si faccia passare $HL \parallel AF$, ed $EM \parallel AB$. È il triangolo $PEF = EFL$, $AEP = AHE$, quindi il triangolo AEF è metà del parallelogrammo $AHLF$.

Tirisi FN parallela ad AD, ed unendo il punto d' intersezione O con D, ed E con G, risulta il triangolo $NOD = BEG$, ma il primo è metà del rettangolo AO, cioè di $DF \times BE$, ed il secondo metà del parallelogrammo HG, dunque $DF \times BE = HG$, epperciò $ABCD = ABGF = 2AEF + BE \times DF$.

20.

Se una retta è divisa in due parti uguali ed anche in due parti disuguali, la somma dei quadrati delle due parti disuguali è uguale a due volte il rettangolo contenuto da queste parti, insieme con quattro volte il quadrato della retta compresa fra i due punti di divisione. (Fig. 37).

Fig. 37.



Sia AB la retta divisa in parti uguali in C e in parti disuguali in D. Si costruisca colla retta AB e colla BG doppia di DB il rettangolo AG. Si bisechi BG in F, si prenda $CE = DC$, e per i punti F, D, C, E si conducano FH, DI, CK, EL, la prima parallela ad AB, le altre a BG. Ciò posto: $AD^2 + DB^2 = 2CB^2 + 2CD^2$ (II, 9.), ma $2CB^2 = 2CD^2 + 2DB^2 + 4CD \times DB$ (II, 4.), quindi $AD^2 + DB^2 = 4CD^2 + 2DB^2 + 4CD \times DB$; ma osservando nella figura che $2DB^2 = AL$, e $4CD \times DB = EI$, quindi $AD^2 + DB^2 = 4CD^2 + AI = 4CD^2 + 2AD \times DB$.

21.

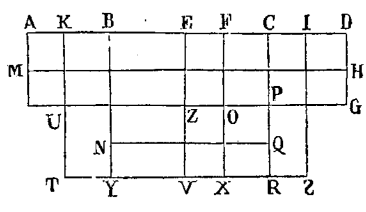
Se dal vertice di uno degli angoli uguali di un triangolo isoscele si cala una perpendicolare sul lato opposto il doppio rettangolo contenuto da questo e dal segmento di esso adiacente alla base è uguale al quadrato della base.

Sia ABC il triangolo isoscele, CD la perpendicolare. $AC^2 - CB^2 = AD^2 - DB^2$ (II, 3, Es.), e trasportando si ha, $AC^2 + DB^2 = AD^2 + CB^2$; $AC^2 = AB^2 = AD^2 + DB^2 + 2AD \times DB$, dunque $AD^2 + 2DB^2 + 2AD \times DB = AD^2 + CB^2$; ed essendo $DB^2 + AD \times DB = AB \times BD$ (II, 3.), e togliendo AD^2 di comune si ha $2AB \times BD = CB^2$.

22.

A, B, C, D *sono quattro punti nella stessa retta.* E *è un punto della retta medesima, ugualmente distante dai punti medi dei segmenti* AB, CD; F *è un altro punto in* AD; *dimostrare che la somma dei quadrati di* AF, BF, CF, DF *supera la somma dei quadrati di* AE, BE, CE, DE *di quattro volte il quadrato di* EF. (Fig. 38).

Fig. 38.



$$AF^2 = AE^2 + EF^2 + 2AE \times EF \quad (\text{II, 4.})$$

$$BF^2 = BE^2 + EF^2 + 2BE \times EF \quad »$$

$$CF^2 = CE^2 - EF^2 - 2CF \times EF \quad »$$

$$DF^2 = DE^2 - EF^2 - 2DF \times EF \quad »$$

donde sommando e riducendo si ha: $AF^2+BF^2+CF^2+DF^2= AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 + 2AE \times EF + 2BE \times EF - 2CF \times EF - 2DF \times EF$; da ciò si vede che la differenza dei rettangoli contenuti nell' uguaglianza dev' essere uguale a $4EF^2$.

A tale oggetto dal punto D tirisi DG, doppia di EF, perpendicolare ad AD; e CR, FX, EV, BY ciascuna doppia e parallela a DG; per R e pel punto medio H di DG si facciano passare ST, HM parallele ed AD; si compia il rettangolo AG, e dal punto medio Q di PR tirisi $QN \parallel AD$. È rettangolo $AZ + ZY = 2AE \times EF + 2BE \times EF$, ma $AU = UY$, quindi $AZ + ZY = KV$.

Inoltre $DO + OR = 2DF \times EF + 2CF \times EF$, ma $IG = PS$, quindi $DO + OR = FS$. Ora essendo la retta $EK = EI$, sarà il rettangolo $KV = ES$, onde $KV - FS = EX = 4EF^2$ dunque ecc.

23.

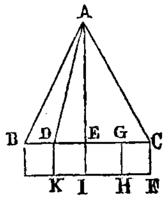
Se i termini di una corda qualunque di un cerchio si congiungono ad un punto qualunque del diametro parallelo alla corda, la somma dei quadrati delle congiungenti è uguale alla somma dei quadrati dei segmenti del diametro.

Sia AB il diametro, GF la corda, GC, FC le congiungenti di G, F al punto C di AB. Dai punti G, F conducansi le perpendicolari GH, FD ed i raggi FO, GO. Perchè è il triangolo $GHO = FOD$, sarà il lato $HO = OD$. Ora $FC^2 = FO^2 + OC^2 - 2OC \times OD$ ovvero $- 2OC \times HO$; $GC^2 = GO^2 + OC^2 + 2OC \times HO$; sommando si ha $FC^2+GC^2=2AO^2+2OC^2$; ma $2AO^2 + 2OC^2 = AC^2 + CB^2$ (II, 9.), dunque $FC^2 + GC^2 = AC^2 + CB^2$.

24.

In un triangolo isoscele ABC, *se* AD *congiunge il vertice ad un punto qualunque della base, provare che la differenza* *dei quadrati di* AB *e* AD *è uguale al rettangolo di* BD *e* CD. (Fig. 39).

Fig. 39.

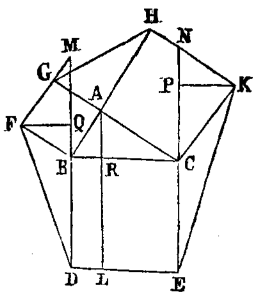


Si conduca AE perpendicolare su BC che viene divisa in due parti uguali in E. Su BC si faccia il rettangolo $BF = BC \times BD$, si prenda $EG = ED$, si tirino GH, EI, DK parallele a CF. $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \times DE$; $BK = BD^2$, $DH = 2DE \times BD$, dunque $BD^2 + 2DE \times BD = BK + DH = BH = DF = BD \times CD$, quindi $AB^2 - AD^2 = BD \times CD$.

25.

Se nella figura della prop. 47, *Eucl.*, *I*, *si uniscono i vertici, la somma dei quadrati dei sei lati della figura risultante è uguale ad otto volte il quadrato dell' ipotenusa.* (Fig. 40).

Fig. 40.



Si prolunghino EC, DB, finchè incontrino HK, FG in N, M e si tirino KP, FQ perpendicolari ad EN, DM.

$KE^2 = EC^2 + CK^2 + 2EC \times CP$; $FD^2 = DB^2 + BF^2 + 2DB \times BQ$. I triangoli CKN, BFM sono uguali ad ABC (I, 86. Es.), $PKC = ABC$, $FQB = ABR$, quindi $PC = RC$, $BQ = BR$, epperò $2EC \times CP = 2RE$, e $2BD \times BQ = 2BL$, e la loro somma uguale a $2BC^2$. onde $KE^2 + FD^2 = EC^2 + CK^2 + DB^2 + BF^2 + 2BC^2 = 5BC^2$; $KH^2 + HG^2 + GF^2 + DE^2 = 3BC$, dunque ecc.

26.

Se un angolo di un triangolo è quattro terzi di un retto, il quadrato del lato opposto è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati insieme col rettangolo contenuto da questi.

Sia ABC il triangolo che ha l' angolo ABC uguale a quattro terzi di un retto. Su AB si costruisca il triangolo equilatero AEB, si conduca AD perpendicolare su EB. Il lato

EB è per diritto a BC, perchè la somma degli angoli ABE e ABC è uguale a due retti; la perpendicolare AD divide EB per metà, quindi $AB = 2BD$. Ciò posto, si ha $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BD \times CB$., ma $2BD = AB$, quindi $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB \times CB$.

27.

Se nel triangolo ABC, *ciascuno degli angoli* B, C *è doppio all'angolo* A, *il quadrato di* AB *è uguale al quadrato di* BC *insieme al rettangolo di* AB *e* BC.

Si bisechi l'angolo ABC mediante BE, e si tiri BD perpendicolare su AC. È l'angolo $BEC = BCE$, perchè $BEC = A + ABE$. ed $ABE = A$, quindi $BC = BE = EA$, e BD divide EC per metà in D. $AB^2 - BE^2 = AE^2 - ED^2$ (II, 3, Es.) e trasportando si ha $AB^2 + ED^2 = AD^2 + BE^2$; ma $AD^2 = CA \times EA + ED^2$ (II, 6), quindi sostituendo e togliendo ED^2 di comune si ha $AB^2 = CA \times EA + BE^2$; ma è $BC = BE = EA$, dunque $AB^2 = BC^2 + AB \times BC$.

28.

In un triangolo qualunque ABC, *se* BP, CQ *sono condotte perpendicolarmente ad* AC, AB *prolungate se è necessario, il quadrato di* BC *è uguale al rettangolo di* AB, BQ *insieme col rettangolo di* AC, CP.

Infatti $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times QB$, onde $AB^2 = AC^2 - BC^2 + 2AB \times QB$; $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \times PC$, quindi $BC^2 + AC^2 - 2AC \times PC = AC^2 - BC^2 + 2AB \times QB$, e togliendo AC^2 di comune, trasportando e dividendo per 2, si ha $BC^2 = AB \times QC + AC \times PC$.

29.

Se il vertice dell'angolo retto d'un triangolo rettangolo si congiunge ai vertici opposti del quadrato descritto sull'ipotenusa, la differenza dei quadrati delle congiungenti è uguale alla differenza dei quadrati dei due cateti.

Sia ABC il triangolo rettangolo, $BDEC$ il quadrato costruito sull'ipotenusa BC. Si prolunghino EC, DB, finchè incontrino $AF \parallel DE$ in F, G.

$AE^2 = CE^2 + AC^2 + 2CE \times CF$; $AD^2 = DB^2 + AB^2 + 2BD \times BG$, donde $AE^2 - AD^2 = AC^2 - AB^2$.

30.

In un triangolo qualunque la somma dei quadrati di due lati è doppia della somma del quadrato della metà della base e del quadrato della retta che congiunge il punto medio della base al vertice opposto.

Sia ABC un triangolo qualunque, AE la retta che va al punto medio E della BC. S' abbassi AD perpendicolare a BC.

$AB^2 = BE^2 + AE^2 + 2BE \times ED$, $AC^2 = CE^2 + AE^2 - 2CE \times ED$. Sommando ed essendo $BE = EC$ si avrà $AB^2 + AC^2 = 2BE^2 + 2AE^2$.

31.

Se DB *divide per mezzo in* D *il lato* AC *del triangolo* ABC, *e se* AE *è perpendicolare a* BC, *dimostrare che il quadrato di* BD *è uguale alla somma del quadrato della metà di* AC *e del rettangolo di* BE, BC.

1.° $AB^2 + BC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$ (II, 30, Es.), ma $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times CE$, quindi $AC^2 + 2BC^2 - 2BC \times CE = 2BD^2 + 2AD^2$; ma $2BC^2 = 2BC \times CE + 2BC \times BE$ (II, 2), ed $AC^2 = 4AD^2$, dunque sostituendo, dividendo per 2 e togliendo AD^2 di comune si ha $AD^2 + BC \times BE = BD^2$.

2.° Supponiamo ora che la perpendicolare AE cada sul prolungamento di BC.

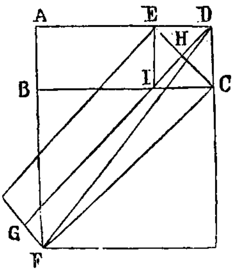
$AB^2 + BC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$; $AB^2 = BE^2 + AE^2$, $AE^2 = AC^2 - CE^2$, sostituendo si ha: $BC^2 + BE^2 + AC^2 - CE^2 = 2BD^2 + 2AD^2$; ma $BC^2 + BE^2 = 2BE \times BC + CE^2$ (II, 8), quindi $AC^2 + 2BE \times BC = 2BD^2 + 2AD^2$; ed essendo $AC^2 = 4AD^2$, sostituendo, dividendo per 2 e togliendo AD^2 di comune si ha: $AD^2 + BE \times BC = BD^2$. Da ciò si vede che l'enunciato del teorema come si ritrova negli Esercizi è erroneo.

32.

Un rettangolo qualunque è la metà del rettangolo contenuto dalle diagonali dei quadrati dei suoi lati. (Fig. 41).

Siano CF, DI i quadrati costituiti sui lati BC, DC del rettangolo $ABCD$, CF. EC le loro rispettive diagonali, dico che il rettangolo $ABCD$ è uguale alla metà del rettangolo EF contenuto da CF, EC.

Fig. 41.



Infatti, tirando la retta DIG, il rettangolo EF resterà diviso per metà, perchè gli angoli in H sono retti, ed $EH = HC$. È il triangolo

$$ACD = DFC = \frac{1}{2} HGFC, \text{ quindi}$$

$HGFC = 2ACD = ABCD$, epperò $ABCD$ metà di EF.

33.

Se un punto qualunque preso dentro un rettangolo si congiunge ai vertici, la somma dei quadrati delle congiungenti, condotte a due vertici opposti, è uguale alla somma dei quadrati delle altre due.

Sia O il punto preso dentro il rettangolo $ABCD$, OA, OB' OC, OD le congiungenti. Tirisi $FOE \parallel AB$, che incontra AD, BC in F, E.

$OD^2 = OF^2 + FD^2$, $OB^2 = OE^2 + BE^2$, quindi $OD^2 + OB^2 = OF^2 + FD^2 + OE^2 + BE^2$ (1). Similmente $OC^2 + OA^2 = OF^2 + FA^2 + OE^2 + EC^2$ (2); ma $FA^2 = BE^2$, $EC^2 = FD^2$, dunque i secondi membri delle uguaglianze (1) e (2) sono uguali, e perciò $OD^2 + OB^2 = OC^2 + AO^2$.

34.

La somma dei quadrati delle diagonali di un parallelogrammo è uguale alla somma dei quadrati dei quattro lati.

Sia $ABCD$ il parallelogrammo, AC, BD le diagonali le quali si bisecano scambievolmente (I. 25. Es.).

$AB^2 + AD^2 = 2BO^2 + 2AO^2$ (II, 30, Es.).

$BC^2 + CD^2 = 2BO^2 + 2CO^2 = 2BO^2 + 2AO^2$, onde sommando

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 4BO^2 + 4AO^2 = BD^2 + AC^2$.

35.

La somma dei quadrati delle diagonali di un quadrilatero è superata dalla somma dei quadrati dei lati di quattro volte il quadrato della retta che unisce i punti medi delle diagonali.

Sia $ABCD$ il quadrilatero, E, F i punti medi delle diagonali AC, BD.

$$AD^2 + AB^2 = 2AF^2 + 2FD^2 \text{ (II, 80, Es.)},$$

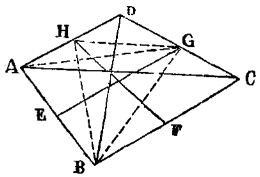
$$BC^2 + CD^2 = 2FC^2 + 2FD^2 \quad \text{»}$$

ma $2AF^2 + 2FC^2 = 4FE^2 + 4AE^2$, quindi sommando le prime due uguaglianze, e sostituendo il secondo membro della terza si ha: $AD^2\ AB^2 + CB^2 + DC^2 + = 4EF^2 + 4AE^2 + 4FD^2 = 4EF^2 + AC^2 + BD^2$.

36.

La somma dei quadrati delle diagonali di un quadrilatero è doppia della somma dei quadrati delle due rette congiungenti i punti medi dei lati opposti. (Fig. 42).

Fig. 42.



Sia $ABCD$ il quadrilatero, E, F, G, H i punti medi dei lati. Si conducano EG, HF, GH, GA, GB, HB, AC, DB.

$$DB^2 + BC^2 = 2BG^2 + 2DG^2 \text{(II,30,Es.)},$$

$$AC^2 + AD^2 = 2AG^2 + 2DG^2 \quad \text{»}$$

$$DC^2 + AC^2 = 2CH^2 + 2DH^2 \quad \text{»}$$

$$DB^2 + BA^2 = 2BH^2 + 2DH^2 \quad \text{»}$$

sommando si ha $2DB^2 + 2AC^2 + BC^2 + AD^2 + CD^2 + BA^2 = 2BG^2 + 2AG^2 + 2CH^2 + 2BH^2 + 4DG^2 + 4DH^2$; ma $2BG^2 + 2AG^2 = 4GE^2 + AB^2$, perchè è $4AE^2 = AB^2$, e $2CH^2 + 2BH^2 = 4HF^2 + BC^2$, per l'istessa ragione; e $4DG^2 = DC^2$, $4DH^2 = AD^2$; dunque sostituendo, togliendo le quantità comuni, e dividendo per 2 si ha: $DB^2 + AC^2 = 2GE^2 + 2HF^2$.

37.

La somma dei quadrati dei lati di un triangolo è tripla della somma dei quadrati delle distanze dei vertici dal punto comune alle mediane.

Sia O il punto comune delle tre mediane AE, BF, CD del triangolo ABC.

$$AO^2 + BO^2 = 2OD^2 + 2AD^2 \text{ (II, 30, Es.)},$$

$$AO^2 + CO^2 = 2OF^2 + 2AF^2 \quad \text{»}$$

$$BO^2 + CO^2 = 2OE^2 + 2BE^2 \quad \text{»}$$

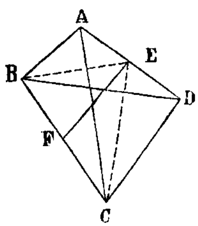
Ora essendo $OD = \frac{1}{2} OC$, $OF - \frac{1}{2} OB$, $OE = \frac{1}{2} OA$ (I, 80,

Es.), sarà $2OD^2 + 2OF^2 + 2OE^2 = \frac{1}{2} OC^2 + \frac{1}{2} OB^2 + \frac{1}{2} OA^2$, e sostituendo questi tre termini nelle prime tre uguaglianze, sommando e moltiplicando tutti i termini per 2 si ha:
$4AO^2 + 4BO^2 + 4CO^2 = OC^2 + OB^2 + OA^2 + AB^2 + AC^2 + BC^2$,
e $3AO^2 + 3BO^2 + 3CO^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$.

38.

Se due lati opposti di un quadrilatero sono divisi per metà, la somma dei quadrati degli altri due lati insieme coi quadrati delle diagonali è uguale alla somma dei quadrati dei lati bisecati insieme col quadruplo del quadrato della retta che unisce i punti di bisecazione. (Fig. 43).

Fig. 43.



Siano E, F i punti medi di AD, BC del quadrilatero $ABCD$.

$AC^2 + CD^2 = 2CE^2 + 2AE^2$ (II, 30, Es.),

$AB^2 + BD^2 = 2BE^2 + 2AE^2$ » .

Sommando si ha:

$AC^2 + AB^2 + CD^2 + BD^2 = 2CE^2 + 2BE^2 + 4AE^2$, ma $2CE^2 + 2BE^2 = 4EF^2 + 4BF^2$, e $4BF^2 = BC^2$, $4AE^2 = AD^2$; dunque sostituendo si ha: $AC^2 + AB^2 + CD^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 + 4FE^2$.

39.

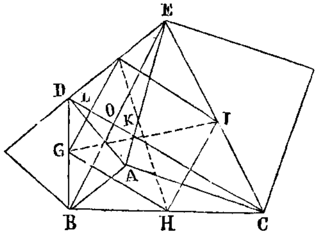
La somma dei quadrati delle diagonali di un trapezio è uguale alla somma dei quadrati dei suoi lati non paralleli insieme col doppio rettangolo contenuto dai lati paralleli.

Si congiungano i punti medi E, F di AB, CD del trapezio $ABCD$, e siano AB, DC i lati non paralleli. $AD^2 + BC^2 + AC^2 + BL^2 = AB^2 + DC^2 + 4EF^2$ (teor. prec.); $EF = \frac{AD + AB}{2}$ (I, 27, Es.), ed $EF^2 = \frac{AD^2 + BC^2 + 2AD \times BC}{4}$ (1), donde $4EF^2 = AD^2 + BC^2 + 2AD \times BC$; sostituendo il 2° membro della (1) nella prima uguaglianza e togliendo di comune $AD^2 + BC^2$ si ha: $AC^2 + DB^2 = AB^2 + DC^2 + 2AD \times BC$.

40.

Se BD , CE *sono i quadrati descritti sui lati di un triangolo, mostrare che la somma dei quadrati di* BC *e* DE *è doppia della somma dei quadrati di* AB *ed* AC. (Fig. 44).

Fig. 44.



Siano G, H, I, F i punti medi di BD, BC, CE, ED; O, L i punti d'intersezione di DC, EB e DC, FG.

I due triangoli DAC, BAE sono uguali, quindi l'angolo $ACD = AEB$; ed essendo gli angoli in K uguali, saranno gli angoli in O retti; e perchè $BE \parallel GF$ (I, 73, Es.), saranno gli angoli in L anche retti; essendo per la stessa ragione $FI \parallel DC$, sarà l'angolo GFI retto, come ancora FGH retto; quindi $FGHI$ è rettangolo, ed $FH = GI$. Ciò posto, $DC^2 + BE^2 = 2FH^2 + 2GI^2 = 4GI^2$ (II, 36, Es.); $DC^2 + DE^2 = 2DI^2 + 2EI^2$, e $CB^2 + BE^2 = 2BI^2 + 2EI^2$ (II, 30, Es.); sommando le ultime due uguaglianze si ha: $DC^2 + DE^2 + CB^2 + BE^2 = 2DI + 2EI^2 + 2BI^2 + 2EI^2 = 4EI^2 + 4GI^2 + 4GD^2$, essendo $2DI^2 + 2BI^2 = 4GI^2 + 4GD^2$ (II, 30, Es.); e sopprimendo i termini uguali, cioè, nel primo membro $DC^2 + BE^2$, e nel secondo $4GI^2$, resterà, $DE^2 + CB^2 = 4EI^2 + 4GD^2 = EC^2 + DB^2 = 2AC^2 + 2AB^2$.

41.

Se si descrivono i quadrati sui lati di un triangolo qualunque, e si congiungono i vertici di questi quadrati, la somma dei quadrati dei lati della figura esagona così ottenuta sarà uguale a quattro volte la somma dei quadrati dei lati del triangolo.

Siano $ABED$, $BFGC$, $ACHI$ i quadrati costruiti sui lati AB, BC, AC del triangolo ABC, e si congiunga DI, EF, HG.

$$DI^2 + FG^2 = 2AC^2 + 2AB^2 \text{ (teor. prec.)},$$

$$DE^2 + HG^2 = 2AC^2 + 2BC^2 \quad \text{»}$$

$$EF^2 + HI^2 = 2AB^2 + 2BC^2 \quad \text{»}$$

sommando si ha:

$$DI^2 + DE^2 + EF^2 + FG^2 + HG^2 + HI^2 = 4AC^2 + 4AB^2 + 4BC^2.$$

42.

Presi due punti nel diametro di un cerchio, egualmente distanti dal centro, la somma dei quadrati delle due rette condotte da questi punti ad un punto qualunque della circonferenza sarà costante.

Siano D, E i due punti presi sul diametro ugualmente distanti dal centro O. Si prendano i due punti B, C ad arbitrio sulla circonferenza.

$$BD^2 + BE^2 = 2BO^2 + 2DO^2 \quad \text{(II, 30, Es.)},$$

$$CD^2 + CE^2 = 2CO^2 + 2DO^2 \quad \text{»}$$

ma $BO = CO$, dunque $BD^2 + BE^2 = CD^2 + CE^2$.

43.

L' ipotenusa AB *di un triangolo rettangolo* ABC *sia divisa in tre parti uguali nei punti* D, E; *provare che congiunte* CD, CE, *la somma dei quadrati dei lati del triangolo* CDE *è due terzi del quadrato di* AB.

$$CA^2 + CE^2 = 2CD^2 + 2DE^2 \quad \text{(II, 30, Es.)},$$

$$CB^2 + CD^2 = 2CE^2 + 2DE^2 \quad \text{»}$$

sommando, e sopprimendo $CD^2 + CE^2$ si ha:

$$CA^2 + CB^2 = CD^2 + CE^2 + DE^2 + 3DE^2 = AB^2;$$

ma $3DE^2 = \frac{1}{3} AB^2$, quindi $CD^2 + CE^2 + DE^2 = \frac{2}{3} AB^2$.

44.

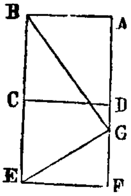
Dividere una retta data in due parti contenenti un rettangolo uguale ad un quadrato dato.

Si descriva sulla retta data una semicirconferenza, s'innalzi sulla stessa, da un punto preso ad arbitrio, la perpendicolare uguale al lato del quadrato dato, dall' estremità di questa tirisi la parallela alla retta data, che incontrerà la circonferenza in un punto, dal quale tirando la perpendicolare sulla retta data sarà risoluto il problema.

45.

Se un triangolo è uguale ad un quadrato, il perimetro del triangolo è maggiore del perimetro del quadrato. (Fig. 45).

Fig. 45.



Si faccia un rettangolo $ABEF$ doppio del quadrato $ABCD$.

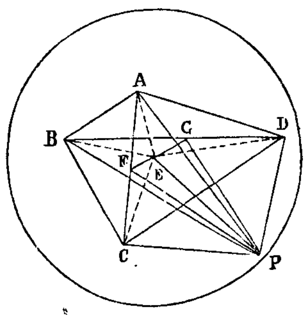
Qualunque triangolo $BGE = ABCD$ ha il perimetro maggiore.

Infatti è $GE > FE = DC$, $GB > AG > AD$, $BE = AB + BC$; dunque $GE + GB + BE > DC + AD + AB + BC$.

46.

ABCD *è un quadrilatero,* E *il punto medio della retta congiungente i punti medi delle diagonali; se col centro* E *si descrive un cerchio, e se sia P un punto qualunque della circonferenza, dimostrare che la somma dei quadrati delle rette* PA, PB, PC, PD *è uguale alla somma dei quadrati delle rette* EA, EB, EC, ED *insieme con quattro volte il quadrato* EP. (Fig. 46).

Fig. 46.



$AP^2 + PC^2 = 2PF^2 + 2FA^2$ (II, 30, Es.),

$PB^2 + PD^2 = 2PG^2 + 2BG^2$ »

$EA^2 + EC^2 = 2EF^2 + 2FA^2$ »

$EB^2 + ED^2 = 2EG^2 + 2BG^2$ »

Nelle prime due uguaglianze si ha $2PF^2 + 2PG^2 = 4EP^2 + 4FE^2$, quindi $AP^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4EP^2 + 4FE^2 + 2FA^2 + 2BG^2$.

Nelle seconde due uguaglianze si ha $2EF^2 + 2EG^2 = 4FE^2$, quindi

$$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4FE^2 + 2FA^2 + 2BG^2;$$

dunque

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 + 4EP^2.$$

FINE DEL SECONDO LIBRO.

LIBRO III.

1.

Descrivere con un raggio dato una circonferenza, che passi per due punti dati.

Con centro nei due punti dati e col raggio dato si descrivano due circonferenze, il punto d' intersezione sarà il centro del cerchio richiesto.

2.

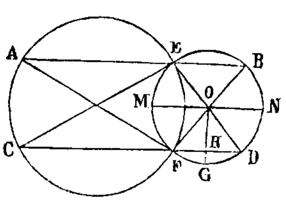
Se col vertice d' un triangolo isoscele, come centro, si descriva una circonferenza che tagli la base o la base prolungata, le parti di questa intercettate tra la circonferenza e la estremità della base sono uguali.

Sia ABC il triangolo isoscele, DE la circonferenza che taglia la base in D, E. Su BC dal vertice A si conduca la perpendicolare AF, la quale biseca BC, perchè ABC è isoscele; ma è isoscele ADE, dunque $FD=FE$, epperò $DB=EC$.

3.

Se due circonferenze si tagliano scambievolmente, e per i punti d' intersezione si tirino due rette parallele, le parti di esse intercettate tra le due circonferenze saranno eguali. (Fig. 47).

Fig. 47.



Siano AB, CD le rette parallele tirate per i punti d'intersezione E, F dei circoli $ACFE$, $BDFE$.

Si conduca il diametro $MN \parallel CD$, il raggio OG perpendicolare a CD. E il triangolo $FHG=GHD$, l'arco $FG=GD$; ma $MG=$

GN, quindi $MF = ND$. Similmente si dimostra l'arco $ME = NB$; onde risulta l'arco $EFD = BDF$, e la corda $ED = BF$. Ora i triangoli AFB, CED hanno l'angolo $BAF = ECD$, $ABF = CDE$, il lato $ED = BF$, dunque sono uguali, e quindi il lato $AB = CD$.

4.

Tirare per un punto d' intersezione di due circonferenze una linea retta prolungata fino ad incontrarle di nuovo ambedue, e che sia bisecata in questo punto.

Si unisca il punto d' intersezione col punto medio della retta congiungente i centri; parallelamente a quella retta così tirata si tirino dai due centri due raggi, pel detto punto d'intersezione si conduca la perpendicolare ai detti raggi, e il problema sarà risoluto.

5.

Una corda PAQ *taglia il diametro di un cerchio in un punto* A *e fa col diametro un angolo uguale alla metà di un retto; dimostrare che la somma dei quadrati di* AP *e di* AQ *è il doppio del quadrato del raggio.*

Si conducano PB, QC perpendicolarmente al diametro, e si uniscano P, Q col centro O.

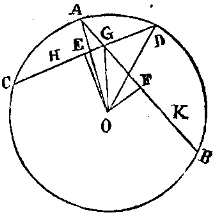
I triangoli CQA, APB sono rettangoli ed isosceli, quindi gli angoli in Q, A, P sono mezzi retti. L'angolo $BPO =$ un mezzo retto meno OPQ*, $COQ =$ un mezzo retto meno PQO; ma $OPQ = PQO$, perchè il triangolo PQO è isoscele; dunque l'angolo $BPO = COQ$. Ora essendo l'angolo $BPO = COQ$, $B = C$, il lato $OP = OQ$, sarà il triangolo $OPB = OCQ$, quindi $OB = QC = CA$, $CO = AB$. Ciò posto:
$AP^2 = 2AB^2 = 2CO^2$, $AQ^2 = 2QC^2$, quindi $AP^2 + AQ^2 = 2CO^2 + 2QC^2$; ma $2CO^2 + 2QC^2 = 2QO^2$; dunque $AP^2 + AQ^2 = 2QO^2 = 2R^2$.

6.

Se due corde s' intersecano in un cerchio, la differenza dei loro quadrati è uguale alla differenza dei quadrati delle differenze dei segmenti. (Fig. 48).

* Il centro O deve cadere fra A e B, perchè l'angolo PAB è per ipotesi un mezzo retto.

Fig. 48.



Siano AB, CD le corde che si segano in G. Dal centro O si conducano su di esse le perpendicolari OF, OE. Si sa essere $ED = EC$, $AF = FB$ (III, 3); dalla GC si tolga $CH = GD$, e dalla GB si tolga $BK = AG$; saranno HG, KG le rispettive differenze dei segmenti. Ciò posto:

$AB^2 = BG^2 + AG^2 + 2BG \times GA$ (II, 4)

$CD^2 = CG^2 + GD^2 + 2CG \times GD$ » onde

$$AB^2 + CD^2 = BG^2 + AG^2 + (CG^2 + GD^2) \ (1).$$

$$\left.\begin{array}{l} BG^2 + AG^2 = 2AF^2 + 2FG^2 \\ CG^2 + GD^2 = 2ED^2 + 2EG^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l}(11,\ 9.),\ \text{sostituendo in } (1) \\ \text{si ha:}\end{array}$$

$$AB^2 - CD^2 = 2AF^2 + 2FG^2 - (2ED^2 + 2EG^2) \ (2);$$

ma $2AF^2 = 2OA^2 - 2OF^2$, e $2ED^2 = 2OD^2 - 2OE^2$, sostituendo in (2) si ha: $AB^2 - CD^2 = 2AO^2 - 2OF^2 + 2FG^2 - 2OD^2 + 2EO^2 - 2EG^2$, ovvero $AB^2 - CD^2 = 2FG^2 + 2EO^2 - 2EG^2 - 2OF^2$ (3); ma $2EO^2 = 2OG^2 - 2EG^2$, e $2OF^2 = 2OG^2 - 2GF^2$, sostituendo in (3) si ha: $AB^2 - CD^2 = 2FG^2 + 2OG^2 - 2EG^2 - 2EG^2 - 2OG^2 + 2GF^2 = 4FG^2 - 4EG^2 = GK^2 - HG^2$.

7.

Due corde parallele in un cerchio hanno rispettivamente 6 e 8 metri di lunghezza, e sono distanti di un. metro, quanti metri è il diametro?

Sia la corda $AB = 6$, $CD = 8$, e GE la distanza uguale ad uno. Si prolunghi GE, finchè incontri il centro O; e chiamando x la retta EO, si ha l'equazione:
$OA^2 = (1 + x)^2 + 3^2$, e $OC^2 = x^2 + 4^2$, onde $(1 + x)^2 = x^2 + 4^2$, ed $x = 3$. Sostituendo il valore di x in una delle due equazioni, e chiamando R il raggio, si ha $R^2 = 25$, $R = 5$, $2R = 10$.

8.

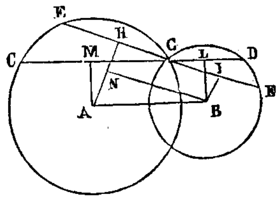
Tirare una linea retta che tagli due cerchi concentrici, in modo che la parte di essa intercettata dalla circonferenza del maggior cerchio, sia il doppio della parte intercettata dalla circonferenza minore.

Sul raggio del cerchio maggiore si descriva una semicirconferenza, e sul raggio di questa, che è situato sul primo si descriva un' altra semicirconferenza; si unisca l' estremità comune dei raggi col punto d' incontro dell' ultima semicirconferenza col cerchio minore, la quale congiungente prolungata sufficientemente sarà la linea retta dimandata.

9.

Se due circonferenze si tagliano scambievolmente, la linea retta di maggior lunghezza, che si possa tirare per un punto d' intersezione, è quella che è parallela alla retta che unisce i centri. (Fig. 49).

Fig. 49.



Sia AB la congiungente i centri, CD la parallela ad AB passante pel punto d' intersezione G dei due cerchi; dico che CD è maggiore di qualunque altra retta EGF.

Infatti si tirino le perpendicolari AM, AH, BL, BI rispettivamente su CG, EG, GD, GF, e si ha $MG = MC$, $GL = LD$, $HG = HE$, $GI = IF$, quindi $MG + GL = \frac{CD}{2}$, $HG + GI = \frac{EF}{2}$, ovvero $ML = \frac{CD}{2}$, $HI = \frac{EF}{2}$; ma $HI = BN$ perpendicolare ad AH, ed è $AB > BN$, perchè ANB è triangolo rettangolo; dunque è $AB > HI$; ed essendo $AB = ML$, sarà $ML > HI$, e quindi $CD > EGF$.

10.

Descrivere tre cerchi eguali tangenti tra loro, e quindi un altro tangente a tutti e tre.

I centri dei tre cerchi uguali tangenti sono i tre vertici d'un triangolo equilatero. Il centro del cerchio tangente a tutti e tre è il punto d' incontro delle bisettrici degli angoli. Il raggio dei primi tre cerchi è la metà del lato del triangolo, quello dell'ultimo è la differenza ed anche la somma del raggio d'uno dei tre cerchi e della bisettrice compresa tra il vertice ed il centro del triangolo.

11.

Quanti cerchi uguali possono descriversi intorno ad un dato cerchio della stessa grandezza, che siano tangenti a questo e tra loro? Ris. 6.

12.

Descrivere una circonferenza, che passi per un punto dato, e sia tangente a un cerchio dato in un dato punto, non essendo i due punti in una tangente al cerchio dato.

Si uniscano i due punti dati, dal punto medio della congiungente tirisi la perpendicolare, la si prolunghi finchè incontri il raggio condotto dal punto dato sulla circonferenza, quel punto d'incontro è il centro della circonferenza richiesta.

13.

Descrivere un cerchio tangente a un cerchio dato in un dato punto, e tangente ad una linea retta data.

Si meni una tangente al cerchio pel punto dato, si bisechi l'angolo che essa fa colla retta data, il punto d'incontro della bisettrice col raggio condotto pel punto dato è il centro del cerchio cercato.

14.

Due linee rette tirate da un punto dentro un cerchio in modo da far angoli uguali colla retta tirata da questo punto al centro, tagliano dal cerchio segmenti uguali.

Sia A il punto, O il centro, DE, FG le rette passanti per A, e che fanno l'angolo $GAO = OAE$. Si tirino da O le OB, OC rispettivamente perpendicolari a DE, FG. Risultando i triangoli AOB, AOC uguali, sarà $OB = OC$, e quindi $DE = FG$ (III, 14), epperò il segmento $DFE = FDG$ (III, 28).

15.

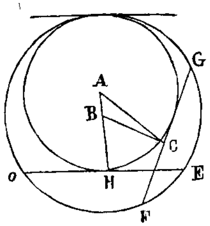
Tirare per un punto dato dentro un cerchio la corda di minima lunghezza.

Si unisca il punto dato col centro, e pel punto medesimo si meni la perpendicolare alla congiungente.

16.

Se due cerchi sono tangenti internamente, di tutte le linee tangenti al cerchio interno e terminate al cerchio esterno, la massima è quella che è parallela alla tangente comune ai due cerchi. (Fig. 50).

Fig. 50.

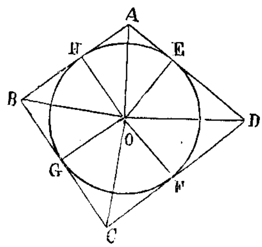


Sia DE tangente parallela alla tangente comune, GF un'altra tangente. Si trovino i centri A e B del cerchio interno ed esterno, si tiri BC perpendicolare a GF. È chiaro che la retta congiungente i centri passa pel punto di contatto H di DE. È chiaro pure che è $AC \geqq AH$, $AB+BC>AC$, e quindi di AH, onde $BC>BH$, e per conseguenza $DE>GF$ (III, 15).

17.

Dimostrare che le due tangenti a un cerchio tirate da uno stesso punto, sono uguali tra loro; e quindi provare che la somma dei lati opposti di un quadrilatero descritto intorno al cerchio sono uguali, e che gli angoli sottesi al centro del cerchio da due lati opposti, sommati insieme fanno due retti. (Fig. 51).

Fig. 51.



1.° Siano AH, AE le due tangenti menate da un punto A al cerchio di centro O. Si sa che ciascun quadrato costruito su AH, AE è uguale al rettangolo contenuto da una secante condotta da A e dalla sua parte esterna, quindi $AH^2=AE^2$, ed $AH=AE$.

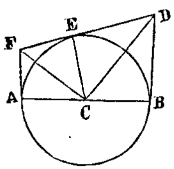
2.° Sia $ABCD$ il quadrilatero circoscritto, E, H, G, F i punti di contatto. Si ha $AH=AE$, $BH=BG$, $CF=CG$, $DF=DE$, quindi $AB+DC=AD+BC$.

3.° È chiaro essere il triangolo $AOE = AOH$, $HOB = BOG$, $CGO = COF$, $DFO = DEO$, quindi l'angolo $AOH = AOE$, $HOB = BOG$, $COF = COG$, $FOD = DOE$; e sommando termine a termine si ha $AOB + DOC = AOD + BOC$, ma la somma degli angoli intorno al punto O è uguale a quattro retti, dunque, ecc.

18.

La parte di una tangente a un cerchio, compresa tra le tangenti condotte all' estremità di un diametro, sottende al centro un angolo retto. (Fig. 52).

Fig. 52.



Siano AF, BD le tangenti condotte all' estremità del diametro, FD la parte di tangente compresa tra le prime due.

Si unisca il punto di contatto E della tangente FD col centro C, e tirisi FC, DC. La somma degli angoli AFD, BDF è uguale a due retti; per l' eguaglianza dei triangoli EDC, CDB e degli altri FEC, FAC, è l' angolo $CDE = CDB$, $EFC = CFA$, onde $CDE + EFC = CDB + CFA$, e quindi $EFC + CLE$ è uguale ad un retto, epperò FCD retto.

19.

Determinare sopra il prolungamento del diametro di un cerchio, un punto, dal quale tirando una tangente al cerchio, questa sia uguale al diametro.

Dall' estremità del diametro tirisi la perpendicolare e la si ponga uguale al diametro, la sua estremità si unisca al centro, si prenda sul diametro prolungato a partire dal centro una porzione uguale alla congiungente, il termine di questa sarà il punto cercato.

20.

Descrivere una circonferenza che passi per un punto dato, abbia un raggio dato, e sia tangente ad una retta data.

Dal punto dato tirisi la perpendicolare sulla retta data e l si ponga uguale al raggio dato, col quale raggio e col centro all' estremo della perpendicolare si descriva un arco che passerà pel punto dato e taglierà la retta data in un punto, da questi due punti si conducano due parallele rispettivamente ai raggi dell' arco, che terminano ai detti punti, l' incontro di esse è il centro della circonferenza cercata.

21.

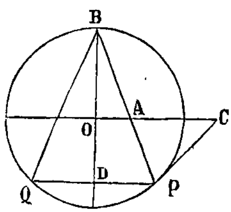
Descrivere una circonferenza che abbia il centro sopra un cateto di un triangolo rettangolo, che passi per il vertice dell' angolo retto e sia tangente all' ipotenusa.

L' incontro della bisettrice di un angolo acuto col cateto opposto è il centro del cerchio cercato.

22.

A *è un punto di un diametro (o di un diametro prolungato) di un cerchio, il cui centro è* O, OB *un raggio perpendicolare al diametro, se* AB *taglia la circonferenza in* P, *e la tangente nel punto* P *taglia* AO *in* C, *dimostrare che* AC *è uguale a* CP. (Fig. 53).

Fig. 53.



Dal punto P tirisi PQ parallela al diametro, e si prolunghi BO finchè incontri PQ in D. A cagione dell' eguaglianza dei triangoli QBD, DBP è la corda $BQ = BP$, e quindi gli archi da esse sottesi sono uguali, e l' angolo $BPQ = BQP = BPC$; ma $BPQ = CAP$, dunque $BPC = CAP$, epperò $AC = CP$.

23.

Tirata una tangente comune a due cerchi, se descritta sopra la parte di essa compresa tra i punti di contatto, come diametro, una circonferenza, *questa passerà per i punti di contatto dei due cerchi, e le sarà tangente la linea che congiunge i loro centri.*

Siano E, F i due cerchi, AB la tangente comune. Dal punto di contatto D dei due cerchi s' innalzi DC perpendicolare sulla EF congiungente i centri fino all' incontro di AB in C. È chiaro che DC è tangente ad ambi i cerchi; ed essendo CB tangente al cerchio F, sarà $DC = CB$ (III, 17, Es.), come ancora $CD = AC$, quindi $CD = CB = CA$; epperò il cerchio col centro C e raggio CD passerà per A, D, B.

Essendo FE perpendicolare all' estremo del raggio CD, sarà tangente al medesimo cerchio.

24.

Descrivere una circonferenza con un dato raggio col centro in una linea data, e tangente ad un' altra linea data.

Le due rette date si prolunghino, finchè s' incontrino in un punto, da questo punto sulla retta che si vuole tangente s'innalzi la perpendicolare uguale al raggio dato, dall' estremo di questa tirisi la parallela all' altra retta data, la quale incontrerà la prima in un punto, dal quale si tiri un' altra parallela alla perpendicolare, che incontrerà la seconda retta in un punto che sarà il centro del cerchio cercato.

25.

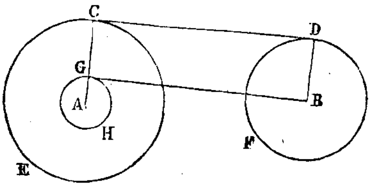
Descrivere una circonferenza tangente ad una linea data in un punto dato, e tangente ad una data circonferenza.

Dal punto dato sulla retta data s' innalzi la perpendicolare uguale al raggio del cerchio dato, il cui centro si unisca alla estremità della perpendicolare, dal punto medio della congiungente s' innalzi un' altra perpendicolare, prolungandola, finchè incontri la prima in un punto, il quale sarà il centro del cerchio cercato.

26.

Tirare una tangente comune a due cerchi, con i punti di *contatto dalla stessa parte, e da parti opposte della retta che congiunge i centri.* (Fig. 54).

Fig. 54.



Siano CE, DF i due cerchi. Si descriva un cerchio GH concentrico al cerchio CE con raggio uguale alla differenza dei raggi dei circoli dati; dal centro B si conduca una tangente a GH, e sia BG; si prolunghi il raggio AG sino alla circonferenza data in C, tirisi $BD \parallel AC$, e si congiunga DC, che è la tangente richiesta.

Per avere l' altra tangente, si descriva concentricamente al cerchio CE un cerchio con raggio uguale alla somma dei raggi dei cerchi dati; dal centro B si conduca una tangente a questo circolo, e si finisca la costruzione analogamente alla precedente.

27.

Tirare una linea retta tangente a un cerchio dato e che faccia un dato angolo con una linea data.

Dal centro del cerchio si meni la perpendicolare a quella retta che colla data fa un angolo uguale all' angolo dato, dal punto d' incontro di questa perpendicolare colla circonferenza si tiri la parallela alla medesima, la quale sarà la tangente richiesta.

28.

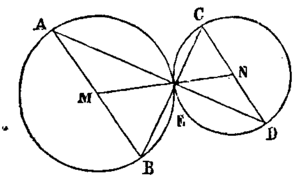
Descrivere con raggi dati due circonferenze tangenti tra loro, e ad una medesima linea data dalla stessa parte.

Descrivasi un cerchio con uno dei raggi dati tangente alla retta data, e si unisca il centro col punto di contatto. Su questo raggio, a partire dal punto di contatto si prenda una porzione uguale all' altro raggio, dall' estremo di questa tirisi la parallela alla retta data, e descrivendo un cerchio con centro del primo cerchio e con raggio uguale alla somma dei raggi dati, sarà segata la parallela tirata in un punto, che sarà il centro dell' altro cerchio cercato.

29.

Se due cerchi sono tangenti fra loro, e si tirino diametri paralleli, le linee che congiungono l' estremità di questi diametri passeranno per il punto di contatto. (Fig. 55).

Fig. 55.

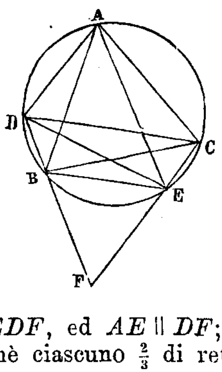


Siano AB, CD diametri paralleli dei due cerchi tangenti in E. Unendo i centri M, N, il punto E con C e B, risulta l' angolo $BME = ENC$, $MEB + EBM = ECN + NEC$; ma MEB è metà della prima somma, NEC è metà della seconda; dunque $MEB = NEC$, ed aggiungendo di comune MEC, si ha $BEM + CEM = NEC + CEM = 2$ retti, epperò EC è per diritto a BE. Similmente si dimostra AE per diritto ad ED, dunque ecc.

30.

La retta tirata da un vertice di un triangolo equilatero a un punto della circonferenza circoscritta al triangolo è uguale alla somma o alla differenza delle due rette condotte dall'estremità della base a quel punto, secondo che quella linea taglia o non taglia la base. (Fig. 56).

Fig. 56.



Sia AE la retta tirata dal vertice del triangolo equilatero inscritto ABC nel cerchio $ADBC$, BE, CE le rette, condotte dall' estremità della base al punto E.

Si conduca $CD \parallel BE$, e si prolunghi CE, finchè incontri BD in F. È l' angolo $DCB = CBE$, quindi l' arco $DB = CE$, e $DE = CB$, onde l' angolo $DCE = CDB = BAC$, quindi il triangolo DCF, come pure BEF sono equilateri. Essendo l' arco $AB = DE$, sarà $AD = BE$, quindi l'angolo $AED = EDF$, ed $AE \parallel DF$; ed essendo l' angolo $ADC = BEF$, perchè ciascuno $\frac{2}{3}$ di retto, sarà $ADE = DEF$, e quindi $AD \parallel EF$;

onde $ADFE$ è parallelogrammo; epperò $AE = DF = DB + BE = BE + EC$.

Un' analoga dimostrazione si fa per la differenza.

31.

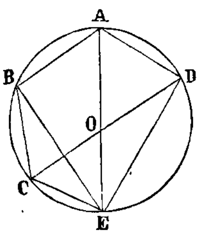
AB, AC *sono due corde qualunque di un cerchio*; D, E *i punti di mezzo degli archi* AB, AC; DE *taglia* AB, AC *nei punti* F, G; *dimostrare che* AF *è uguale ad* AG.

Si conducano le corde AD, AE. È l'angolo $DAB = AED$, perchè è l'arco $DB = AD$; $ADE = EAC$, perchè è arco $AE = EC$; e sommando si ha $DAB + ADE = AED + EAC$; ma $DAB + ADE = AFG$, $AED + EAC = AGF$, dunque $AFG = AGF$, e quindi $AF = AG$.

32.

Dimostrare che si può far passare una circonferenza per tutti i vertici d' un quadrilatero quando la somma dei suoi angoli opposti è uguale a due retti, e trovare il centro e il raggio di questa circonferenza. (Fig. 57).

Fig. 57.

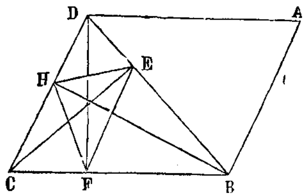


Sia $ABCD$ un quadrilatero che ha la somma degli angoli BAD, BCD uguale a due retti: dico che pei suoi vertici può passare una circonferenza. Dai punti B, D si conducano a BA, DA le perpendicolari BE, DE, le quali s' incontrano in E, e dividendo per metà AE, si avrà il centro O del cerchio che passa per A, D, E, B. Ora si ha angolo $BED + BAD = 2$ retti, $BCD + BAD = 2$ retti, dunque $BED = BCD$, epperò il cerchio passerà anche per C. Ecc.

33.

ABCD *è un parallelogrammo, condotta* CE *perpendicolare alla diagonale* BD, *e le perpendicolari ad* AB, AD, *nei punti* B, D, *dimostrare che queste tre rette s' incontrano in un medesimo punto.* (Fig. 58).

Fig. 58.



Le due perpendicolari condotte dai punti B, D, sono anche rispettivamente perpendicolari a DC in H, ed a BC in F. Ciò posto, immaginiamo su BC descritta una semicirconferenza, essa passerà per E ed H, e quindi l'angolo $HBC = HEC$, perchè insistenti sul medesimo arco HC.

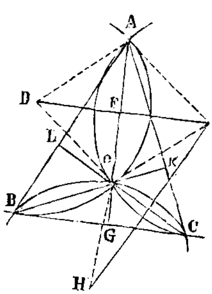
Similmente la semicirconferenza descritta su DC passerà per E ed F, e quindi l'angolo $CDF = CEF$; ma $CDF = HBC$, perchè ciascuno è complemento di DCB; dunque $HBC=CEF=HEC$. Egualmente si dimostra l'angolo $EHB=BHF$, $EFD=DFH$; onde si vede che le tre perpendicolari sono bisettrici degli angoli del triangolo EFH, le quali s'incontrano nel medesimo punto (I, 21, Es.).

2.ª Dim.ᵉ Le tre rette CE, BH, DF sono perpendicolari condotte dai tre vertici del triangolo DBC sui lati opposti, e quindi concorrono in un punto (I, 89, Es.).

34.

Le tre circonferenze che passano ciascuna per due vertici di un triangolo, e per il punto d'intersezione delle tre perpendicolari condotte dai vertici sui lati opposti, sono eguali tra loro. (Fig. 59).

Fig. 59.

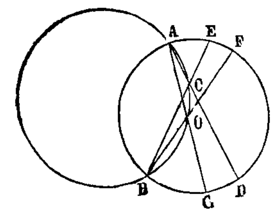


Sia ABC il triangolo, CL, BK, AG le tre perpendicolari che s'incontrano in O (I, 89, Es.); H, E, D i tre centri dei cerchi passanti per due vertici, e per il punto d'intersezione delle perpendicolari. L'angolo $ACO= ABO$, perchè i triangoli KOC, LOB sono equiangoli; ma l'angolo ACO è metà di AEO, ABO metà di ADO (III, 20, Eucl.), dunque $AEO=ADO$. La congiungente i centri DE biseca in F la retta AO ad angoli retti (I, 6, Es.), e quindi si ha il triangolo $AEF=EFO$ e l'angolo AEF metà di AEO, come pure il triangolo $ADF = DFO$ e l'angolo ADF metà di ADO; onde l'angolo $AEF = ADF$, il triangolo $AEF = ADF$ e il raggio $AE = AD$. Similmente si dimostra $EO = OH$, dunque ecc.

35.

Due circonferenze si tagliano nei punti A, B, *e il centro di una è sopra l' altra; tirata una corda* ACD *che le taglia ambedue, dimostrare che* CB *è uguale a* CD. (Fig. 60).

Fig. 60.



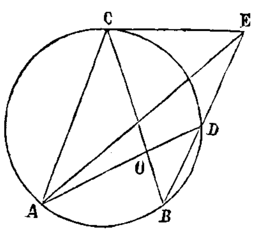
Si prolunghi BC finchè incontri la circonferenza ABD in un punto E si tirino i diametri AG, BF. È l' angolo $OAC = CBO$, perchè, insistono sul medesimo arco CO, quindi è l'arco $GD = EF$, ed $FG = ED$; ma $FG = AB$; quindi è l' arco $ED = AB$, e però l' angolo

$$EBD = ADB, \text{ e } CB = CD.$$

36.

Degli angoli che fanno le rette condotte da due punti dati sopra una circonferenza a un punto di una tangente alla medesima, il massimo è quello che si ottiene quando il punto della tangente è il punto di contatto. (Fig. 61).

Fig. 61.



Siano A, B i due punti dati sulla circonferenza $ABDC$, CE una tangente. Si uniscano A e B con un punto E della tangente e col punto di contatto C; dico che l' angolo

$$ACB > AEB.$$

Infatti unendo A con D, punto d' intersezione di BE colla circonferenza, si ha l'angolo $BDA = BCA$; ma è $BDA > BEA$, dunque $ACB > AEB$.

37.

Dati tre punti d' una circonferenza, dimostrare come si pos-

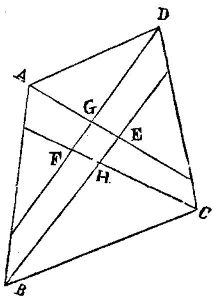
sano trovare quant' altri punti si vogliano della medesima, senza conoscere la posizione del centro.

Si unisca un punto dato cogli altri due, e con quelle congiungenti negli estremi facciansi due angoli uguali, le rette che han formato gli angoli determineranno un altro punto della circonferenza.

38.

Se per i vertici d' un quadrilatero si conducono le bisettrici degli angoli, tutti i punti nei quali una bisettrice incontra l' adiacente, saranno sopra una circonferenza, (Fig. 62).

Fig. 62.



Siano AG, BE, CH, BF le bisettrici degli angoli del quadrilatero $ABCD$; G, F, H, E i punti d' incontro. Essendo l' angolo $EAD = EAB$, $ADF = FDC$, $BCF = FCD$, $CBE = EBA$, sarà la somma dei primi membri uguale a quella dei secondi; ma la somma degli angoli d' un quadrilatero è uguale a quattro retti, quindi sarà $EAD + ADF + BCF + CBE = 2$ retti, epperò $AGD + BHC = 2$ retti, cioè la somma degli angoli opposti del quadrilatero $GFHE$ è uguale a 2 retti, e quindi è inscrittibile (III, 32, Es.).

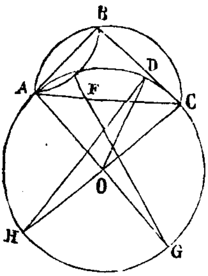
39.

ABC *è un semicerchio*, ADC *un quadrante sopra la stessa linea* AC *e dalla medesima parte*; *tirate da un punto qualunque* B *della semicirconferenza* BA *e* BDC, *dimostrare che* BA *e* BD *sono uguali*, *e che delle rette* AB, BC *soltanto la maggiore può tagliare il cerchio* ADC. (Fig. 63).

1.° Si uniscano i punti A, D, C fra loro e col centro O del quadrante ADC. Angolo $BAD + DAO + DCO = 2$ retti, perchè $ABC + AOC = 2$ retti; $BDA + ADO + ODC = 2$ retti; ma $DAO = ADO$, e $DCO = ODC$, perchè i triangoli AOD, ODC sono isosceli, dunque $BAD = BDA$, e $BA = BD$.

2.° Si compia la circonferenza ADC, e tirinsi i diametri

Fig. 63.

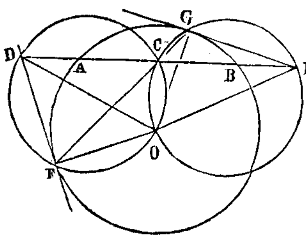


AOG, COH. Se è possibile sia AFB la retta minore che incontra l'arco ADC in F; allora è l' angolo $AFG = FBC =$ un retto, ed il quadrilatero $ABCO$ avendo ang. $FBC + AOC = 2$ retti, sarà $FAO + BCO = 2$ retti; ma è $FAO < 1^r$, sarà $BCO > 1^r$, il che è impossibile, per essere HDC retto, dunque AB non può tagliare il cerchio ADC, ma solamente lo taglia la BDC.

40.

Se una corda sia bisecata da un' altra, e prolungata all' incontro colle tangenti all' estremità della bisettrice, le parti di essa compresa tra le tangenti e la circonferenza sono eguali. (Fig. 64).

Fig. 64.



Condotte le OC, OF, OG, che risultano rispettivamente perpendicolari alle AB, FD, GE; si unisca OD, OE. Sulle rette OD, OE come diametri si descrivano due circonferenze, delle quali la prima passerà per F, C, per essere retti gli angoli OFD, OCD, la 2.^{a} per C, G. Gli angoli OGC, OEC, essendo contenuti in uno stesso segmento, sono uguali; per la stessa ragione sono pure uguali gli angoli OFC, ODC; ma gli angoli OGC, OFC sono uguali, perchè il triangolo FGO è isoscele, dunque gli angoli OEC, ODC sono uguali, epperò i triangoli rettangoli OEC, ODC risultando uguali, daranno $CE = CD$; ma $CB = CA$, dunque $BE = AD$.

41.

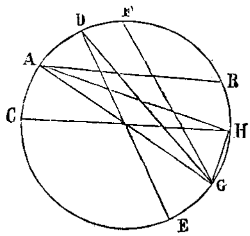
Se a partire dalle estremità A, C *di un dato arco di cerchio si prendono in direzioni opposte due archi eguali* AB, CD, *le corde* AC, BD *sono parallele.*

Unendo B con C, risulta l' angolo $ACB = CBD$, perchè ambidue insistono su archi uguali, quindi AC è parallela a BD.

42.

Gli archi intercettati da due corde parallele sono eguali; e se due corde qualunque s' intersecano, la somma degli archi intercettati da esse è uguale alla somma degli archi intercettati dai diametri paralleli alle medesime. (Fig. 65).

Fig. 65.



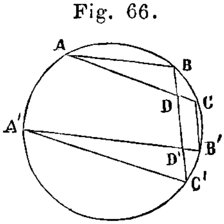
1.° Essendo AB, CH due corde parallele, sarà l'angolo $BAH = AHC$, e quindi l' arco $AC = BH$.

2.° Siano AB, FG le corde che s' intersecano, CH, DE i diametri rispettivamente paralleli ad AB, FG. Si congiunga AG, AH, DG, AD, GH. I due triangoli DAG, AGH hanno l'angolo $ADG = AHG$, $DAG = AGH$, dunque sarà anche $AGD = HAG$, e quindi l' arco $AD = GH$; ed essendo l' arco $AC = BH$, $EG = DF$, sarà $AD + AC + EG = HG + BH + DF$, ed aggiungendo al 1° membro HG, al 2° AD, sarà $DC + HE = AF + GB$.

43.

A, B, C, A′, B′, C′ *sono punti d' una circonferenza; se* AB, AC *sono rispettivamente parallele ad* A′ B′, A′ C′; BC′ *sarà parallela a* B′C. (Fig. 66).

Fig. 66.



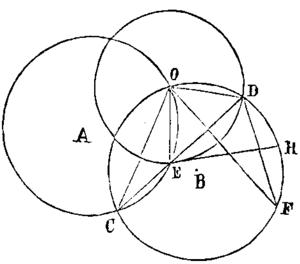
Di fatti, perchè è $AB \parallel A'B'$, sarà l' angolo $ABC' = A'D'C'$; e perchè è $AC \parallel A'C'$, sarà l'angolo $ADB = A'C'B$, quindi i triangoli BAD, $D'A'C'$ sono equiangoli, epperò l' angolo $BAC = D'A'C'$, e la corda $BC' \parallel CB'$ (III, 41, Es.).

44.

Se due circonferenze eguali si tagliano; e col centro in uno dei due punti d' intersezione si descrive un' altra circon-

ferenza, i punti nei quali questa taglia una delle due circonferenze eguali è in linea retta con l'altro punto di intersezione di queste. (Fig. 67).

Fig. 67.



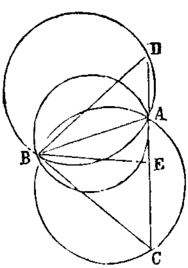
Siano A e B le due circonferenze eguali che si segano in C ed O, DE il cerchio di centro O, che le sega in E e D; dico che la retta ED è per diritto a CE.

Di fatti essendo la corda $OE = OD$, come raggi dello stesso cerchio, sarà l'arco $OE = OD$, quindi l'angolo $OCE = OFD$. Ciò posto se ED non è per diritto a CE, sia EH; ed essendo l'angolo $OCH = OFD$, sarà l'arco $OD = OH$, il che è impossibile, dunque ecc.

45.

Se due circonferenze uguali si tagliano, e da uno dei punti d'intersezione si tira una linea retta che le tagli, la parte di questa compresa tra loro sarà bisecata dal cerchio, il cui diametro è la corda comune ai due cerchi uguali. (Fig. 68).

Fig. 68.



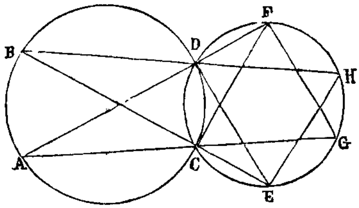
Sia DAC la retta che taglia i due cerchi uguali DAB, ABC; AEB il cerchio di diametro AB, che taglia la retta DAC in E; dico che E è il punto medio di DAC.

Infatti i due triangoli DEB, EBC hanno l'angolo $BDA = BCA$, come insistenti su archi uguali, gli angoli in E retti, perchè AEB è nella semicirconferenza, il lato EB è comune, dunque sono uguali, e quindi $DE = EC$.

46.

Se due circonferenze si tagliano, e siano presi due punti qualunque in una di esse, dai punti d'intersezione delle due circonferenze siano tirate a ciascuno di questi due linee che *taglino l' altra circonferenza, le linee rette che congiungeranno i punti dove le rette tirate dallo stesso punto d' intersezione delle due circonferenze tagliano l' ultima circonferenza, saranno eguali fra loro.* (Fig. 69).

Fig. 69.



Siano A e B i punti presi nella circonferenza $ABDC$; ACG, ADF le due rette tirate dai punti d' intersezione al punto A, e BCE, BDH le altre due tirate dai medesimi punti al punto B; dico che le due rette GF, EH sono uguali.

Infatti è l'angolo $GCF = CAF + AFC$, $EDH = DBE + BED$; ma $CAF = DBE$, $AFC = BED$, come insistenti sul medesimo arco CD; dunque $GCF = EDH$, e quindi la corda $GF = EH$.

47.

A *e* B *sono punti dati; se si tirano per questi quante si vogliano copie di rette* AC, BC *che facciano tra loro angoli uguali ad un angolo dato, le bisettrici di questi angoli passeranno tutte per uno stesso punto.*

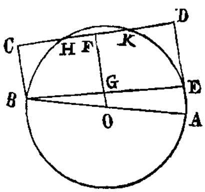
Se si fa passare per i punti A, B, C una circonferenza, tutti gli angoli, ciascuno uguale al dato ACB, avranno i vertici alla circonferenza ed insisteranno sul medesimo arco AB, e quindi tutte le loro bisettrici passeranno pel punto medio dell' arco AB.

48.

Se si tirino dall' estremità d' un diametro le perpendicolari ad una corda di un cerchio, le parti della corda comprese tra loro e la circonferenza saranno eguali, e la perpendicolare minore sarà eguale al segmento della maggiore compreso tra la corda e la circonferenza. (Fig. 70).

Siano AD, BC le due rette perpendicolari menate dagli estremi del diametro AB sulla corda HK. Si unisca il punto

Fig. 70.

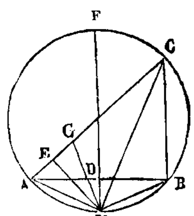


d' intersezione E con B. L'angolo AEB è retto, perchè nella semicirconferenza, quindi $EBCD$ è rettangolo; e se si tira dal centro O la perpendicolare OF su CD, sarà CD bisecata in F, perchè BE è bisecata in G, e quindi $CH{=}KD$; ed essendo $CBED$ parallelogrammo, sarà $BC = ED$.

49.

Se la base di un triangolo sia bisecata dal diametro del cerchio circoscritto, e si tiri dall' estremità di questo diametro una perpendicolare sul lato maggiore questa dividerà il lato stesso in due segmenti uno dei quali sarà eguale alla semisomma e l'altro alla semidifferenza degli altri due lati. (Fig. 71).

Fig. 71.



Sia FH il diametro perpendicolare alla base BA del triangolo ABC, AC il lato maggiore. Si prenda $CG = CB$, si conduca HE perpendicolare ad AC e si congiunga HB, HA, HG. I due triangoli HGC, HCB sono uguali, quindi $HG{=}HB{=}HA$; onde risultano uguali i due triangoli rettangoli AEH, EHG, e quindi $AE = EG$. Ora $AC + CB = 2EG + 2GC$, quindi $EC = \frac{AC + CB}{2}$, $2AE = AC - CB$, ed $AE = \frac{AC - CB}{2}$.

50.

Dato il raggio di un cerchio tangente a due linee date non parallele, determinarne il centro.

Dal punto d' incontro delle due linee date s' innalzi la perpendicolare sopra una di esse uguale al raggio dato, dall'estremo di questa perpendicolare si conduca la parallela alla bisettrice dell' angolo delle due linee, dal punto d' incontro di questa parallela si tiri ad essa la perpendicolare che incontrerà la bisettrice in un punto che sarà il centro cercato.

51.

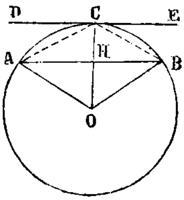
Trovare un punto nel diametro prolungato di un dato cerchio, tale che tirando da esso le due tangenti al cerchio, la parte concava della circonferenza sia doppia della convessa.

Sul prolungamento del diametro si prenda una porzione uguale al raggio del medesimo cerchio, la sua estremità è il punto richiesto.

52.

La retta condotta per il punto di mezzo di un arco parallelo alla corda, è tangente al cerchio in questo punto, e il raggio che biseca la corda di un arco, biseca anche l'arco. (Fig. 72).

Fig. 72.



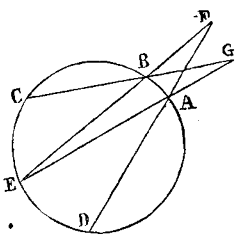
1.° Sia DE la parallela condotta dal punto medio C dell' arco ACB alla corda AB. Unendo il centro O con C risulterà il triangolo $COA = COB$, $AHC = CHB$, e gli angoli in H retti, e quindi l'angolo DCH retto.

2.° Risultando i due triangoli AOH, HOB uguali, sarà l' angolo $AOC = COB$, e quindi l' arco AB bisecato in C.

53.

Se conducansi dall' estremità di due archi adiacenti eguali, linee rette a due punti dati sopra la rimanente circonferenza, e si prolunghino fino al loro incontro, gli angoli di queste linee saranno eguali tra loro. (Fig. 73).

Fig. 73.



Siano ED, EC i due archi uguali, A e B due punti dati sulla rimanente circonferenza, G ed F i punti di incontro di GB, EA, e DA, EB.

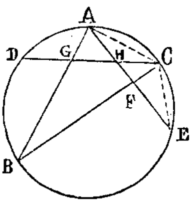
È l' angolo $DAE = F + E$, $CBE = G + E$; ma $DAE = CBE$, quindi $F + E = G + E$, epperò $F = G$.

54.

Se dal punto di mezzo di un arco

di cerchio si tiri una perpendicolare al diametro che passa per una delle sue estremità, questa perpendicolare bisecherà il segmento fatto nella corda dalla retta che congiunge il medesimo punto dell' arco coll' altra estremità del medesimo diametro. (Fig. 74).

Fig. 74.



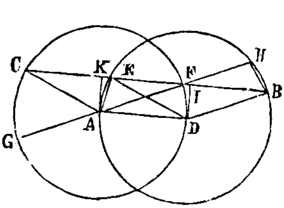
Sia DC l'arco bisecato in A, AFE la perpendicolare al diametro BC che passa per l'estremo C dell'arco BC e taglia il diametro BC in F.

Per l'eguaglianza dei triangoli ACF, CFE, si ha l'angolo $AEC = CAE$; ma $AEC = ACD$; dunque $CAE = ACD$, e quindi $AH = HC$. Essendo l'angolo BAC retto, sarà $AGC + GCA = CAH + HAG$; ma $GCA = CAH$, quindi $AGC = HAG$, epperò $GH = AH = HC$.

55.

Due circonferenze uguali; i centri delle quali sono A, D, *passano ciascuna per il centro dell' altra; tirata una corda comune* CEFD *parallela ad* AD, *dimostrare che le* ACED, AFBD *sono parallelogrammi, e se* AF *si prolunghi fino ad incontrare di nuovo le due circonferenze in* C, H, *dimostrare che* EF *è eguale ad* FH, *e* CB *a* GH. (Fig. 75).

Fig. 75.



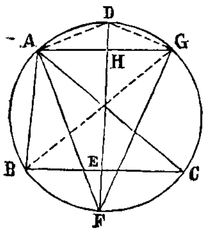
Si conducano AK, DI perpendicolari su CB. I due triangoli AKC, BID sono uguali, e CAF, EBD sono isosceli, quindi l'angolo $KCA = IBD = IED = KFA$, onde è $CA \parallel ED$, $FA \parallel DB$, e per conseguenza $ACED$, $AFBD$ sono parallelogrammi. I due triangoli EAF, FBH hanno l'angolo $EAF = HBF$, $EFA = HFB$, il lato $AF = FB$, perchè ciascuno è uguale ad AD, quindi sono uguali, epperò $FE = FH$, $CE + FB = 2AD = GF$, quindi $CB = GH$.

56.

ABC *è un triangolo inscritto in un cerchio, e* DEF *un dia-*

metro perpendicolare a BC *in* E; *dimostrare che la differenza degli angoli* B *e* C *è doppia dell' angolo* AFD. (Fig. 76).

Fig. 76.

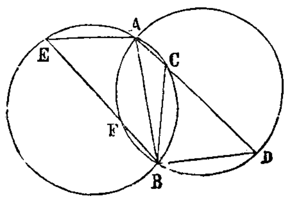


Conducendo $AG \parallel BC$, risulta l' angolo $GBC = AGB = ACB$; onde ABG è la differenza di ABC e C. Per la eguaglianza dei triangoli ADH, DHG è la corda $AD = DG$, e quindi l' arco $AD = DG$. L'angolo AFG è doppio di AFD; ma $ABG = AFG$; dunque ABG doppio di AFD.

57.

ACB, ADB *sono archi di cerchi eguali sopra la stessa linea retta* AB *e dalla medesima parte di questa*; *tirata una corda* ACD *che li taglia ambidue, dimostrare che* BC *è eguale a* BD. (Fig. 77).

Fig. 77.



Si compiano le circonferenze ACB, ADB. La somma degli angoli ACB, AEB è uguale a 2 retti; ed $ACB + BCD = 2$ retti; dunque $AEB = BCD$; ma è $BDC = AEB$; quindi $BCD = BDC$, e il lato $BC = BD$.

58.

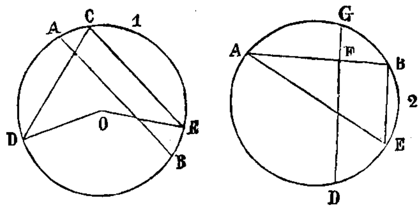
Se in un cerchio due corde si segano scambievolmente, l'angolo che fanno è la metà dell' angolo al centro sotteso da un arco uguale alla somma o alla differenza degli archi intercettati da esse, secondo che s' incontrano dentro o fuori del cerchio. Dimostrare inoltre che se s' intersecano ad angolo retto la somma dei due archi opposti sarà uguale alla semicirconferenza. (Fig. 78, 1).

1.° Siano AB, CD le corde che si segano in F. Si conduca $CE \parallel AB$. Perchè è l' arco $AC = BE$ (III. 42, Es.), sarà l'arco $DBE =$ alla somma degli archi DB ed AC. Ora l'angolo al centro DOE è doppio di DCE; ma $DFB = DCE$, dunque DOE è doppio di DFB.

2.° Un' analoga dimostrazione si fa nel secondo caso.

3.° Fig. 78, 2. Se si tira $BE \parallel GD$, sarà l'angolo ABE retto, per essere uguale ad AFD, quindi l'arco ADE è una semicir-

Fig. 78.

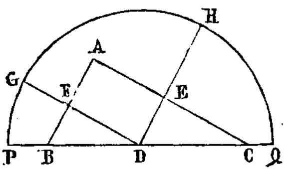


conferenza uguale alla somma di AD, GB, perchè $GB=DE$.

59.

Il cerchio, che ha il centro nel punto di mezzo della ipotenusa di un triangolo rettangolo, e il diametro uguale alla somma dei cateti, è tangente ai due cerchi descritti sopra i cateti, come diametri. (Fig. 79).

Fig. 79.



Sia ABC il triangolo rettangolo in A; D il punto medio dell' ipotenusa BC, $PGHQ$ il cerchio di centro D e di diametro $PQ = AB + AC$.

Se si descriva su BC una semicirconferenza, essa passerà per A; e tirando da D le DFG, DEH perpendicolarmente ai cateti AB, AC, sarà $AFDE$ un rettangolo, ed AF metà di AB, AE metà di AC, onde $AF + AE = \frac{AB + AC}{2} = GD$, ma $AE=FD$, quindi $AF = FG$. Similmente si dimostra $AE=EH$: onde ecc.

60.

Dimostrare che le perpendicolari: Aa, Bb, Cc *abbassate dai vertici di un triangolo* ABC *sopra i lati opposti, bisecano gli angoli del triangolo* abc.

La dimostrazione si può ricavare da quella della proposizione 33 degli Esercizi 3° libro.

61.

Se una circonferenza è descritta sopra un raggio di un'altra come diametro, una linea qualunque condotta dal punto d'in-

contro delle due circonferenze fino ad incontrare di nuovo la circonferenza esterna, sarà bisecata dalla circonferenza interna.

Infatti unendo il punto d' intersezione della circonferenza interna col centro del cerchio esterno, risulta la congiungente perpendicolare alla linea tirata.

62.

Le circonferenze descritte sopra i lati di un triangolo, come diametri, s' intersecano sopra i lati, o sopra i lati prolungati del triangolo.

Imperocchè tirando dai vertici le perpendicolari ai lati, ciascuna circonferenza descritta sopra ciascun lato passerà per due punti d' incontro delle perpendicolari coi lati.

63.

La metà delle corde tirate in un cerchio dalla estremità di un diametro, giacciono tutte sopra una stessa circonferenza.

Imperocchè unendo i punti estremi delle metà delle corde col centro del cerchio, tutti gli angoli che risultano sono retti.

64.

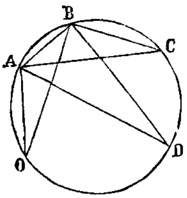
Se un triangolo equilatero sia inscritto in un cerchio, e gli archi adiacenti sottesi da due dei suoi lati siano divisi per metà, la linea che congiunge i punti di mezzo sarà trisecata dai lati.

Sia ABC il triangolo equilatero inscritto. D, E, i punti medi degli archi adiacenti AB, AC. È chiaro che $DBCE$ è rettangolo, perchè ciascuno dei suoi angoli insiste sulla semicirconferenza. Siano F, G i punti d' incontro di DE con AB, AC. Per l' eguaglianza dei triangoli DBF, ECG è $DF = GE$; e perchè è l' angolo $DEA = EAG$, come insistenti su archi uguali, sarà $AG = GE$; ma $AG = GF$, perchè il triangolo AFG è equiangolo ad ABC, e quindi equilatero; dunque $GE = GF = FD$.

65.

L'angolo al vertice di un triangolo obliquangolo inscritto *in un cerchio, è maggiore o minore di un angolo retto dell' angolo fatto dalla base e dal diametro condotto per una estremità della base; e nessun parallelogrammo, tranne il rettangolo, può essere inscritto in un cerchio.* (Fig. 80).

Fig. 80.



1.° Sia ABC il triangolo obliquangolo, DAC l' angolo formato dalla base AC e dal diametro AD. Si tiri BD. L'angolo ABD è retto, $DBC = DAC$, perchè sono nel medesimo segmento, dunque è $ABC = ABD \pm DAC$; cioè maggiore o minore di un angolo retto dell' angolo formato dalla base AC e dal diametro AD.

2.° Un quadrilatero è inscrittibile in un cerchio, quando la somma di due angoli opposti è uguale a due retti; ma dei parallelogrammi il solo rettangolo ha la somma di due angoli opposti uguale a due retti, dunque ecc.

66.

Tirare una perpendicolare a una estremità di una retta che non può prolungarsi.

Si descriva una circonferenza con centro preso ad arbitrio fuori della retta data (a destra dell' estremità) e con raggio uguale alla distanza dal centro all' estremità; dal punto d' incontro della circonferenza colla retta tirisi un diametro il cui estremo congiunto coll' estremità data si avrà la perpendicolare cercata.

67.

ABC *è un triangolo equilatero,* D, E, F *sono i punti di mezzo dei suoi lati AC, BC, AB; dimostrare che* DF *è tangente al cerchio* CDE.

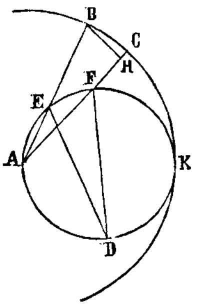
Essendo $AD = AF$, sarà l'angolo $ADF = AFD$; ma FAD è $\frac{2}{3}$ di retto, sarà anche ADF $\frac{2}{3}$ di retto, quindi ADF triangolo equiangolo, e $DF \parallel CB$. Similmente si dimostra DEC essere un triangolo equiangolo. Dal punto D tirando DH perpendicolare a DF, sarà anche perpendicolare nel punto H medio di EC; e quindi il centro del cerchio CDE sarà in DH;

onde DF si rattrova perpendicolare all' estremità del raggio del cerchio CDE, epperò gli è tangente.

68.

Se sopra un raggio di un cerchio, come diametro, si descriva un altro cerchio, e si tirino due altri raggi che taglino quest' ultimo, la corda dell' arco intercettato da essi è uguale alla perpendicolare condotta dall' estremità dell' uno sopra l' altro. (Fig. 81).

Fig. 81.

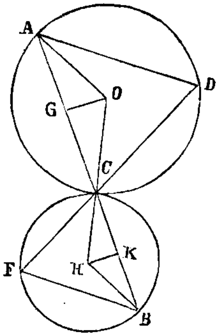


Sia EAD il cerchio descritto sul raggio dell' altro BK; AB, AC i due raggi che tagliano il cerchio EAD in E ed F. Tirisi il diametro FD, si unisca ED ed EF eia BH la perpendicolare condotta da B su AC. I due triangoli rettangoli EDF, ABH hanno l'angolo $EDF=BAH$, l'ipotenusa $DF=AB$, dunque sono uguali, e quindi $EF=BH$.

69.

Se due cerchi siano tangenti tra loro e si tirino due rette per il punto di contatto, le corde degli archi intercettati saranno parallele. (Fig. 82).

Fig. 82.



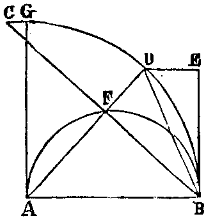
Siano AB, DF le due rette che passano pel punto di contatto C dei due cerchi AD, FB. Si uniscano i due centri O, H, la congiungente dei quali passa anche pel punto di contatto; si tirino OG, HK perpendicolari ad AB.

L'angolo AOC è doppio di GOC, CHB doppio di CHK; ma $GOC=CHK$, perchè i due triangoli OGC, CHK sono equiangoli, quindi $AOC = CHB$: ed essendo ADC metà di AOC, CFB metà di CHB, sarà $ADC = CFB$, e quindi $AD \parallel FB$.

70.

Descritto un semicerchio sopra il lato di un quadrante, e *tirato un raggio a un punto dell' arco del quadrante, la parte del raggio, compresa tra l' arco del quadrante e il semicerchio, sarà eguale alla perpendicolare condotta dallo stesso punto alla tangente comune.* (Fig. 83).

Fig. 83.



Sia AFD il semicerchio descritto sul lato AB del quadrante AGB, AD il raggio che sega in F la semicirconferenza AFB, BE la tangente comune, DE la perpendicolare menata da D sulla tangente. Si tiri BF e la si prolunghi, finchè incontri l'arco BG in C. Essendo AF perpendicolare alla corda BC, sarà l' arco $DB = DC$, e quindi l' angolo $DBE = DBF$; onde i due triangoli DBF; DBE avendo due angoli uguali ed un lato comune, sono uguali, e quindi $DF = DE$.

71.

Dato un angolo, il lato opposto, e la somma degli altri due lati, costruire il triangolo.

Si faccia un angolo uguale alla metà dell' angolo dato, su un lato si prenda, a partire dal vertice, una porzione uguale alla somma data, all'estremo di questa, che non sia il vertice, si faccia centro e con raggio uguale al lato dato si descriva una circonferenza che taglierà l'altro lato dell' angolo costruito in due punti; dai punti medi delle due rette, una compresa tra il primo punto e il vertice, e l' altra tra il secondo ed il medesimo vertice, s' innalzino due perpendicolari che determineranno due triangoli che risolvono il problema.

72.

Data l' area e l' ipotenusa d' un triangolo rettangolo, costruirlo.

Sull'ipotenusa data si costruisca un parallelogrammo con area doppia della data, si descriva sulla medesima ipotenusa la semicirconferenza che taglierà il lato opposto ad essa ipotenusa in due punti, i quali determinano due triangoli che risolvono il problema.

73.

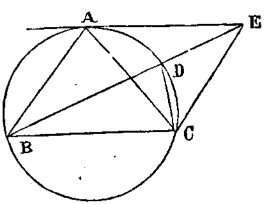
Data la base, l' angolo al vertice e l' altezza, costruire il triangolo.

Si costruisca sulla base data un segmento di cerchio capace dell' angolo dato, da un punto preso su di essa s' innalzi la perpendicolare uguale all' altezza data, dal suo estremo tirisi la parallela alla base, che segherà il segmento in due punti che uniti cogli estremi della base, daranno due triangoli che risolvono il problema.

74.

Di tutti i triangoli che hanno la stessa base e lo stesso angolo al vertice, il triangolo isoscele è il massimo; e reciprocamente di tutti i triangoli sulla stessa base e tra le medesime parallele, l'isoscele ha il massimo angolo al vertice. (Fig. 84).

Fig. 84.



1.° Siano ABC, DBC due triangoli cogli angoli A e D uguali e colla stessa base BC, e sia ABC isoscele; dico che questo ha l'area massima.

Infatti si costruisca su BC un segmento di cerchio capace dell'angolo A; esso passerà pei vertici A e D. La perpendicolare tirata da A su BC, passa per il centro, perchè biseca BC ad angoli retti; quindi la distanza di A da BC è maggiore di quella di D dalla stessa BC; onde la parallela tirata da A a BC, non può toccare il triangolo DBC, e quindi $ABC > DBC$.

2.° Si prolunghi BD finchè incontri $AE \parallel BC$ in un punto E. È l' angolo $BDC > BEC$, e quindi $BAC > BEC$.

75.

Per tre punti condurre tre rette in modo che facciano un triangolo equilatero.

Si uniscano due dei tre punti dati col terzo punto e sopra le due congiungenti si descrivano due segmenti di cerchio capaci di un angolo uguale a $\frac{2}{3}$ di retto; per quel punto dato che è comune ai due segmenti si tiri una secante che incontri i due segmenti di circonferenza, per questi punti d'incontro si tracciano due rette che passino per gli altri due punti, e il problema sarà risoluto.

76.

Tirare per un punto d'intersezione di due cerchi una retta che tagli ambidue i cerchi e sia eguale a una retta data; e quindi per tre punti dati tirare tre linee rette in modo che facciano un triangolo che abbia i suoi lati ed angoli eguali a quelli di un triangolo dato.

1.° Con centro in uno dei centri dei cerchi dati, con raggio uguale alla metà della retta data si descriva la circonferenza; dall'altro centro si conduca una tangente a questo nuovo cerchio, si unisca il punto di contatto col primo centro, e tirando per il punto d'intersezione dei due cerchi dati la parallela alla congiungente, risulterà la retta richiesta.

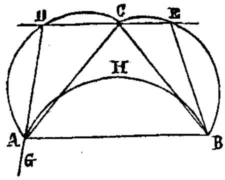
2.° Si uniscano i tre punti dati, su due lati del triangolo risultante si costruiscano due segmenti, il primo capace d'un angolo, il secondo d'un altro angolo del triangolo dato, pel punto d'intersezione dei due segmenti si tiri una secante comune uguale al lato compreso dagli angoli di cui sono costruiti i segmenti, unendo gli estremi di questa secante cogli altri due punti, e prolungando le congiungènti risulterà il triangolo richiesto.

77.

Trovare un punto dentro un triangolo, tale che le rette condotte ai vertici adiacenti facciano angoli eguali; e dimostrare che se sopra i tre lati di un triangolo si descrivano simili segmenti di cerchio dalla stessa parte, e si conducano dall'estremità della base tangenti al segmento descritto sopra la medesima e si prolunghino sino all'incontro colle altre circonferenze, i punti d'incontro e il vertice del triangolo saranno sopra la medesima retta parallela alla base. (Fig. 85).

1.° Il punto richiesto è l'incontro degli archi di due segmenti di cerchio costruiti su AC, CB, ciascuno capace di $\frac{4}{3}$ di retto.

Fig. 85.

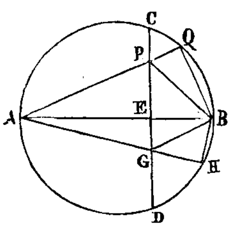


2.° Siano AHB, ADC, BEC i tre segmenti simili di cerchi costruiti rispettivamente sui lati AB, AC, CB del triangolo ACB e dalla stessa parte; AD, BE le tangenti condotte dagli estremi della base AB. L' angolo GAB è eguale all'angolo nel segmento AHB (III, 32, Eucl.), ma l' angolo nel segmento AHB è uguale ad ADC, perchè angoli di segmenti simili, dunque sarà l'angolo $GAB = ADC$, epperò $DC \parallel AB$, e l'angolo $DCA = CAB$. Similmente si dimostra $CE \parallel AB$, e l'angolo $ECB = CBA$; onde la somma degli angoli DCA, BEC, ACB è uguale alla somma degli angoli del triangolo ABC, cioè uguale a 2 retti, quindi DC è per diritto a CE, e $DE \parallel AB$.

78.

AB *è diametro di un cerchio*, CD *una corda perpendicolare ad* AB; *se per un punto qualunque* P *di* CD *si tira una corda* APQ, *il rettangolo contenuto dalle* AP, AQ *è costante.* (Fig. 86).

Fig. 86.



Si sa (II, 8, Eucl.) che

$$2AQ\times AP+PQ^2=AQ^2+AP^2,$$
$$2AH\times AG+GH^2=AH^2+AG^2;$$

ma $AQ^2=AB^2-BQ$,

ed $AH^2=AB^2-BH^2$,

sostituendo si ha

$$\left.\begin{array}{l} 2AQ\times AP+PQ^2=AB^2-BQ^2+AP^2, \\ 2AH\times AG+GH^2=AB^2-BH^2+AG^2, \end{array}\right\}$$

e trasportando nei primi membri le quantità negative,

si ha $\left.\begin{array}{l} 2AQ\times AP+PQ^2+BQ^2=AB^2+AP^2, \\ 2AH\times AG+GH^2+BH^2=AB^2+AG^2, \end{array}\right\}$ ovvero

$\left.\begin{array}{l} 2AQ\times AP+PB^2=AB^2+AE^2+EP^2 \\ 2AH\times AG+GB^2=AB^2+AE^2+EG^2, \end{array}\right\}$ onde

trasportando PB^2, GB^2 nei secondi membri si ha

$$\left.\begin{array}{l} 2AQ\times AP=AB^2+AE^2+EP^2-PB^2 \\ 2AH\times AG=AB^2+AE^2+EG^2-GB^2 \end{array}\right\}$$

ma $EP^2 = PB^2 - EB^2$, ed $EG^2 = GB^2 - EB^2$, sostituendo si avranno i secondi membri uguali, quindi i primi membri eguali, e dividendoli per 2 si avrà $AQ \times AP = AH \times AG$.

79.

Data l' area, un angolo, e una linea tirata dal vertice di uno degli altri angoli alla metà del lato opposto, costruire il triangolo.

Sulla mediana data si costruisca un parallelogrammo uguale all' area data, e dall' altra banda della mediana si costruisca un segmento di cerchio capace dell' angolo dato, si prolunghi un lato del parallelogrammo d' una quantità uguale a sè stesso, dalla parte dov' è il segmento; dall' estremo di questo prolungamento si tiri la parallela alla mediana che incontrerà l' arco del segmento in due punti, pei quali e per l' estremo della mediana, quello per dove passa il lato prolungato, tirando due rette incontreranno il lato del parallogrammo parallelo alla mediana in due punti, che risolvono il problema.

80.

Descrivere una circonferenza che passi per due punti dati, e sia tangente a una retta data.

Si uniscano i due punti dati e si prolunghi la congiungente finchè incontri la retta data in un punto; si faccia un quadrato uguale ad un rettangolo contenuto, dalle rette comprese tra i punti dati ed il punto d' incontro, si porti il lato del quadrato sulla retta data, (a partire dal punto d' incontro) il quale determinerà un terzo punto, e quindi il cerchio richiesto.

81.

Descrivere una circonferenza che passi per due punti dati, e sia tangente a una retta data in uno dei due punti.

Il centro del cerchio è il punto d' intersezione delle due perpendicolari, una menata dal punto medio della retta che unisce i punti dati, e l' altra dal punto della retta data.

82.

Per un punto dato descrivere una circonferenza tangente a due rette date.

Dal punto dato si meni la perpendicolare alla bisettrice dell' angolo formato dalle rette date, questa perpendicolare si prolunghi dall' altra banda d' una quantità uguale a sè stessa, e il suo estremo sarà un altro punto della circonferenza richiesta; quindi il problema è ridotto a far passare per due punti una circonferenza tangente ad una retta data, il che si sa fare (III, 80, Es.).

83.

Descrivere un cerchio tangente a due rette date e ad un altro cerchio.

Dal punto d' incontro delle rette date s' innalzi la perpendicolare (uguale al raggio del cerchio dato) ad un lato dell'angolo formato; dall' estremo di questa perpendicolare si tiri la parallela al detto lato; dal centro del cerchio dato si meni la perpendicolare alla bisettrice del detto angolo e la si prolunghi dall' altra banda d' una quantità uguale a sè stessa, per l' estremo di questo prolungamento e pel centro dato si descriva una circonferenza tangente alla parallela tirata; (III, 80. Es.) dal punto d' incontro si conduca la perpendicolare che incontrerà la bisettrice in un punto che sarà il centro del cerchio dimandato.

84.

Descrivere un triangolo isoscele, dato l' angolo alla base, e la perpendicolare condotta dall' estremità della base sul lato opposto.

Da un punto preso su d' un lato dell' angolo dato s' innalzi la perpendicolare uguale alla data, dall' estremità di qnesta si tiri la parallela all' altro lato, e nel medesimo estremo colla parallela si faccia un angolo uguale al dato, e sarà determinato il triangolo.

85.

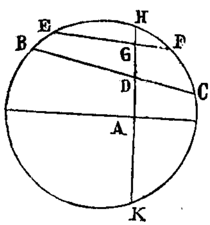
Se dal centro di un cerchio si conduca una retta a un punto *di una corda, il quadrato di questa retta insieme col rettangolo contenuto dai segmenti della corda sarà eguale al quadrato del raggio.*

Sia AB la corda, OD la retta tirata dal centro al punto D della corda. Si conduca OC perpendicolare ad AB, sarà AB divisa in parti eguali in C e in parti diseguali in D; quindi $BD \times DA + DC^2 = CA^2$, ed aggiungendo OC^2 di comune si avrà $BD \times DA + OC^2 + DC^2 = CA^2 + OC^2$, ossia $BD \times DA + DO^2 = OA^2$.

86.

Sia un diametro di un cerchio perpendicolare ad una corda nel punto A, *e un' altra corda qualunque* BC *tagli la stessa corda in* D; *la somma del quadrato di* AD *e del rettangolo contenuto da* BD, CD *sarà costante.* (Fig. 87).

Fig. 87



Infatti si ha $HD \times DK + DA^2 = AH^2$ (II, 5, Eucl.), ma $HD \times DK = BD \times DC$, quindi $BD \times DC + DA^2 = AH^2$. Sia EF un' altra corda che taglia HK in G. Si ha pure $EG \times GF + GA^2 = AH^2$, onde $BD \times DC + DA^2 = EG \times GF + GA^2$.

87.

Se per un punto qualunque che sia dentro o fuori di un cerchio due linee si tagliano ad angolo retto, le somme dei quadrati delle due linee che congiungono le loro estremità e la somma dei quadrati dei quattro segmenti, sono ciascuna uguale al quadrato del diametro.

Siano AB, CD le rette che si tagliano ad angoli retti nel punto E, sia O il centro del cerchio, e si tirino OH, OF rispettivamente perpendicolare a CD, AB. Le rette CD, AB essendo rispettivamente divise in parti eguali ed in parti diseguali in H, ed E, F ed E si ha:

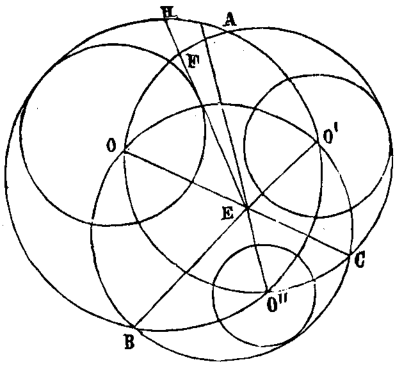
$$\left.\begin{aligned} ED^2 + EC^2 &= 2CH^2 + 2HE^2 \\ AE^2 + EB^2 &= 2FB^2 + 2FE^2 \end{aligned}\right\} \text{(II, 9, Eucl.)}$$

sommando si ha $ED^2 + EC^2 + AE^2 + EB^2 = 2CH^2 + 2HE^2 + 2FB^2 + 2FE^2$; ma $FE^2 = OH^2$, $EH^2 = FO^2$, quindi $ED^2 + EC^2 + AE^2 + EB^2 = 2CH^2 + 2OH^2 + 2FB^2 + 2FO^2 = 2OC^2 + 2OB^2 = 4OC^2 = CB^2 + AD^2$; dunque ecc.

88.

Dati tre cerchi qualunque in un piano, e descritti tre cerchi, ciascuno dei quali passi per i centri di due qualunque dei tre cerchi dati e sia tangente al terzo, le linee che congiungono il centro di ciascuno dei primi cerchi col punto in cui i cerchi che passano per il medesimo s' intersecano, s' incontreranno nello stesso punto. (Fig. 88).

Fig. 88.



Siano O, O', O'' i tre circoli dati, $AOO''C$, $OBCO'$, $BO''O'A$ i tre cerchi, ciascuno dei quali passa per due centri di due qualunque dei tre cerchi dati e tangente al terzo; OC, $O'B$ due rette che congiungono i due centri O, O' e i punti d' intersezione C, B dei cerchi che passano per questi centri; dico che la terza retta $O''A$ che congiunge il terzo centro col punto d' intersezione A dei due cerchi passanti pel medesimo, passerà pel punto d' incontro E delle prime due OC, $O'B$.

Suppongasi che $O''E$ non passi per A, ma passi per H; con questa ipotesi, EH taglierà necessariamente le due circonferenze che passano pel centro O'' nei punti F, H. Ciò posto si ha:

$$EO \times EC = EO' \times EB = HE \times EO'', \text{ ma}$$

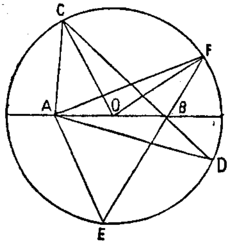
$$EO \times EC = EF \times EO'', \text{ dunque}$$

$HE \times EO'' = EF \times EO''$, e quindi sarà $HE = EF$, il che non può essere; dunque ecc.

89.

Presi due punti nel diametro di un cerchio a distanze qualunque dal centro eguali, e tirata per uno di questi una corda, e congiunte le sue estremità coll' altro punto; dimostrare che il triangolo così formato ha invariabile la somma dei quadrati dei suoi lati. (Fig. 89).

Fig. 89.



Siano A e B i due punti presi sul diametro ad egual distanza dal centro; sia FE una corda che passa per B; FA, EA le congiungenti di F ed E con A; dico che la somma dei quadrati dei lati del triangolo AEF è costante.

Sia ACD un altro triangolo analogo ad AEF. Si sa che $AC^2 + CB^2 = 2CO^2 + 2OB^2$ (II, 30, Es.), ed $AF^2 + FB^2 = 2FO^2 + 2OB^2$, ma $2CO^2 = 2FO^2$, quindi $AC^2 + CB^2 = AF^2 + FB^2$. Similmente si ha $AD^2 + DB^2 = AE^2 + EB^2$. Si ha pure $2CB \times BD = 2EB \times BF$ (III, 35, Eucl.).

Sommando le ultime tre uguaglianze si ha

$$AC^2 + AD^2 + CB^2 + DB^2 + 2CB \times BD = AF^2 + AE^2 + FB^2 + EB^2 + 2EB \times BF;$$

ma $$CB^2 + DB^2 + 2CB \times BD = CD^2, \text{ ed } FB^2 + EB^2 + 2EB \times BF = FE^2 \text{ (II, 4. Eucl.)},$$

dunque sostituendo si ha

$$AC^2 + AD^2 + CD^2 = AF^2 + AE^2 + FE^2.$$

90.

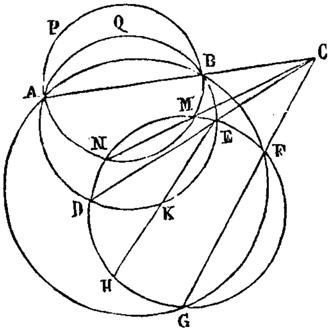
ABC *è un triangolo,* A *il vertice di un angolo acuto; dimostrare che il quadrato di* BC *è minore dei quadrati di* AB, AC *di due volte il quadrato della retta condotta da* A *tangente al cerchio descritto sopra* BC, *come diametro.*

Si unisca A col centro O, e sia AD la tangente. Si ha $AB^2 + AC^2 = 2AO^2 + 2OC^2$ (II, 32, Es.); ma $2AO^2 = 2AD^2 + 2OD^2 = 2AD^2 + 2OC^2$, dunque sostituendo si ha $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 4OC^2 = 2AD^2 + BC^2$.

91.

Descritte quante circonferenze si vogliano che passino per due punti dati, le rette che congiungono i loro punti d'intersezione *con una circonferenza data, incontreranno nello stesso punto la retta che unisce i due punti dati.* (Fig. 90).

Fig. 90.

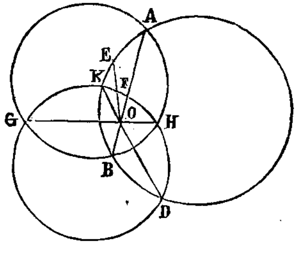


Siano A e B i due punti per cui passano varie circonferenze APB, AQB, ABF tagliate dalla $EMNDG$ rispettivamente in M ed N, E e D, F e G. Le congiungenti AB, GF s' incontrano in un punto C, e la congiungente CE passa per D. Che se non passasse, allora passerà per un altro punto H della circonferenza secante e taglierà la AQB in K, e si avrà $CA \times CB = CE \times CK = CG \times CF = CE \times CH$, quindi $CK = CH$, il che è impossibile dunque ecc. Similmente si dimostra che CM passa per N, dunque ecc.

92.

Se tre circonferenze si tagliano a due a due, le loro tre corde d' intersezione s' incontreranno in uno stesso punto. (Fig. 91).

Fig. 91.



Siano AHB, AKB, HKG le tre circonferenze che si segano a due a due in A e B, K e D, H e G. Le congiungenti AB, GH s' incontrano in O; la DO passerà per K; perchè non passando taglierà le due circonferenze HKG, AHB in F, E, e si avrà $DO \times EO = AO \times OB = HO \times GO = FO \times OD$, quindi $EO = FO$, il che è impossibile; dunque ecc.

93.

Sia ACDB un semicerchio, il cui diametro è AB, *e* AD, BC *siano due corde qualunque che si tagliano in* P; *dimo-*

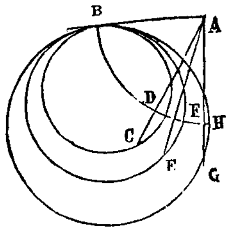
strare che il quadrato di AB *è eguale alla somma dei rettangoli contenuti da* AD, AP, *e da* BC, BP.

Infatti $AB^2 = AC^2 + CB^2$, ma $CB^2 = CP^2 + PB^2 + 2CP \times PB$, e $AC^2 = AP^2 - CP^2$, quindi sostituendo si ha $AB^2 = PB^2 + 2CP \times PB + AP^2$; ed essendo $CP \times PB = PA \times PD$, sarà $AB^2 = PB^2 + CP \times PB + PA \times PD + AP^2$, ovvero $AB^2 = PB\ (PB + CP) + AP\ (AP + PD) = PB \times BC + AP \times AD$,

94.

Tirata la tangente comune a quanti si vogliano cerchi tangenti tra loro internamente, e descritto un cerchio col centro in un punto qualunque di questa tangente, il quale tagli gli altri cerchi; se dal centro di questo cerchio si tirino linee rette alle intersezioni dei cerchi, i segmenti di queste rette dentro tutti i cerchi saranno eguali tra loro. (Fig. 92). *

Fig. 92.



Siano BDC, BFE, BHG cerchi tangenti internamente e alla retta AB nel punto B, e DFH un cerchio descritto col centro in un punto A di AB e secante i primi cerchi in D, F, H; dico essere $DC = FE = HG$. Infatti $AC \times AD = AB^2$, $AE \times AF = AB^2$, $AG \times AH = AB^2$, quindi $AC \times AD = AE \times AF = AG \times AH$, ma $AD = AF = AH$, onde sarà $AC = AE = AG$, epperò $DC = FE = HG$.

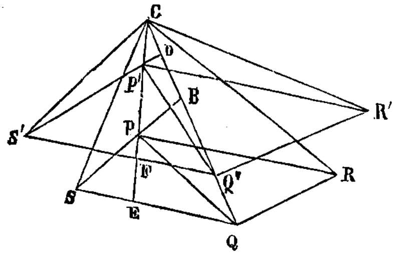
95.

Una retta PQ *di data lunghezza si muove tra due rette fisse* CP, CQ; *le perpendicolari condotte da* P *e* Q *sopra* CP *e* CQ *s' incontrano in* R, *e quelle da* P *e* Q *sopra* CQ *e* CP *s' incontrano in* S; *dimostrare che i punti* R *si trovano sopra una circonferenza e i punti* S *sopra un' altra, e queste circonferenze hanno lo stesso centro.* (Fig. 93).

---

* N. B. La circonferenza descritta col centro A e tagliante le altre in D, F, H è malamente disegnata nella figura 92. Si compiaccia il lettore correggere da sè.

Fig. 93.

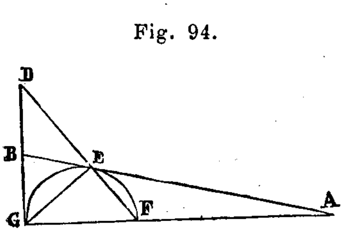


Si uniscano R ed R', S ed S' col punto C. Se su CR, CR' come diametri si descrivono due circonferenze, la prima passerà pei punti P e Q la seconda pei punti P' e Q', perchè CPR, CQR sono angoli retti, e $CP'R'$ $CQ'R'$ sono anche angoli retti. Ora la retta PQ è corda della prima circonferenza, la retta $P'Q'$ è corda della seconda, e l'angolo PCQ ha il vertice su ambedue le circonferenze ed insiste sulle corde uguali PQ, $P'Q'$ quindi le due circonferenze sono uguali, epperò $CR = CR'$; onde i punti R, R' appartengono ad una circonferenza che ha per centro C, e per raggio CR. Se su PQ, $P'Q'$ come diametri si descrivono due circonferenze (le quali sono eguali perchè $PQ = P'Q'$), la prima passerà pei punti E e B, la seconda per F e D; ed essendo l'angolo $CQE = CQ'F$, perchè $QE \parallel Q'F$, sarà la corda $BE = DF$. Ciò posto essendo $BE = DF$, si dimostra come sopra che i punti S, S' appartengono ad una circonferenza che ha per centro lo stesso punto C e per raggio CS o CS'.

96.

Se un semicerchio sia inscritto in un triangolo rettangolo in modo da essere tangente all'ipotenusa ed ad un cateto, e dall'estremità del suo diametro sia condotta una linea per il punto di contatto coll'ipotenusa sino all'incontro del cateto prolungato, la parte prolungata sarà eguale al cateto. (Fig. 94).

Fig. 94.



Sia CEF il semicerchio inscritto nel triangolo rettangolo, AB tangente all'ipotenusa in E e al cateto in C, FED la retta tirata dall'estremità F del diametro passante pel punto di contatto E e terminata all'incontro di CB in D; dico che è $DB = BC$.

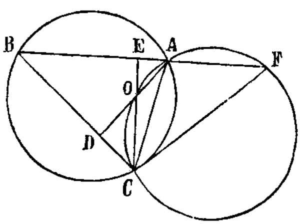
Infatti l'angolo DEC è retto, perchè CEF è retto, essendo nel semicerchio, l'angolo $BEC = ECB$, perchè ciascuno è eguale a CFE (III, 32, Eucl.); e perchè $BED + BEC =$

$ECB + D$, sarà $D = BED$, epperò $BD = BE$, ma $BE = BC$, quindi sarà $BD = BC$.

97.

La circonferenza che passa per due vertici di un triangolo, e per l'intersezione delle perpendicolari abbassate dai vertici sui lati opposti, sarà eguale alla circonferenza che passa per i tre vertici del triangolo. (Fig. 95).

Fig. 95.



Siano ABC, ACF le due circonferenze di cui la prima passa per i tre vertici del triangolo ABC, la seconda per i due vertici A e C e per il punto O di intersezione delle perpendicolari AD, EC; dico che esse sono eguali. Infatti angolo $AFC + AOC = 2$ retti, $EBD + EOD = 2$ retti, ma $AOC = EOD$, quindi $AFC = EBD$, epperò il segmento di cerchio AFC è simile ad ABC, ma sono costruiti sulla medesima retta AC, dunque sono uguali, e per conseguenza le due circonferenze sono eguali.

98.

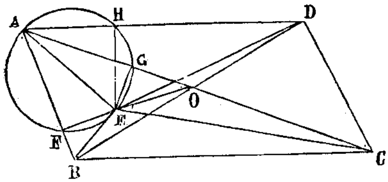
AB, CD *sono corde di un cerchio, di centro* O, *le quali si tagliano in* E *ad angoli retti; dimostrare che i quadrati di* AB, CD, *presi insieme con quattro volte il quadrato di* OE, *fanno il doppio del quadrato del diametro.*

Infatti conducendo le perpendicolari OH, OF su CD, AB si avrà: $4OC^2 = 4CH^2 + 4OH^2$, $4OB^2 = 4FB^2 + 4OF^2$; ma $4OF^2 = 4EH^2$, quindi $8OC^2 = 4OE^2 + AB^2 + CD^2$.

99.

ABCD *è un parallelogrammo, ed è descritto un cerchio che passa per* A, *e taglia i lati* AB, AD *e la diagonale* AC *rispettivamente nei punti* F, H, G; *il rettangolo contenuto da* AC, AG *sarà eguale alla somma dei rettangoli contenuti da* AB, AF *e da* AD, AH. (Fig. 96).

Fig. 96.



Le diagonali s' incontrano in O, si tiri il diametro AE, le corde EH, EG, EF, e si congiunga EO.

Si ha (II, 30, Es.) $2EC^2+2EA^2=4EO^2+4AO^2=4EO^2+AC^2$, quindi $2EC^2+2EA^2-AC^2=4EO^2$; similmente si ha $2EB^2+2ED^2-DB^2=4EO^2$, onde $2EC^2+2EA^2-AC^2=2EB^2+2ED^2-DB^2$; ma $2EC^2=2EA^2+2AC^2-4AC\times AG$, e $2EB^2=2EA^2+2AB^2-4AB\times AF$, $2ED^2=2EA^2+2AD^2-4AD\times AH$, sostituendo, trasportando $-DB^2$ al primo membro e sopprimendo i termini comuni si ha $AC^2+DB^2-4CA\times AG=2AB^2+2AD^2-4AB\times AF-4AD\times AH$. ma $AC^2+DB^2=2AB^2+2AD^2$ (II, 34, Es.), quindi sopprimendo e cambiando i segni e dividendo per 4 si ha $AC\times AG=AB\times AF+AD\times AH$.

100.

Dati l' angolo al vertice, la differenza dei lati che lo comprendono, e la differenza dei segmenti fatti sulla base dalla perpendicolare abbassata dal vertice; costruire il triangolo.

Colla differenza dei segmenti della base nel primo estremo si faccia un angolo metà del dato, con centro nel secondo estremo e con raggio uguale alla differenza dei lati si tagli l'altro lato del detto angolo, la congiungente l'altro estremo e il punto d' incontro prolungata formerà un angolo col detto altro lato; all' altro estremo di questo lato si faccia un altro angolo eguale al secondo formato, i lati dei quali angoli s' incontreranno in un punto, nel quale fatto centro e con raggio uguale ad uno di questi lati si descrive una circonferenza che incontrerà la differenza dei segmenti della base in un punto, e il triangolo sarà determinato.

FINE DEL TERZO LIBRO.

LIBRO IV.

1.

Adattare in un cerchio una linea retta di lunghezza data e che passi per un punto dato.

Si adatti nel cerchio in una posizione qualunque una retta uguale alla data, si unisca il punto medio di essa col centro; col raggio uguale a questa congiungente si descriva un cerchio concentrico al primo, dal punto dato menando una tangente a questo cerchio risulterà la retta richiesta.

2.

Tirare un diametro di un cerchio che sia distante di una lunghezza data da un punto dato.

Si faccia centro nel punto dato, e con raggio uguale alla distanza data si descriva una circonferenza, poscia dal centro del cerchio dato menando una tangente alla circonferenza risulterà il diametro cercato.

3.

Il quadrato del lato d' un triangolo equilatero inscritto in un cerchio è triplo del quadrato del lato dell' esagono regolare inscritto nel medesimo cerchio.

Sia AB il lato del triangolo equilatero inscritto, BC quello dell' esagono. L' arco BCA è la terza parte della circonferenza, e BC la sesta parte, onde CA è la sesta parte, quindi la corda $BC = CA$; ed unendo C con D punto medio di AB, risulterà il triangolo $CBD = CDA$, gli angoli in D retti, la retta CD passante pel centro O, e il triangolo $CDA = BDO$, e quindi $CD = DO$. Ciò posto è $4BD^2 = 4CB^2 - 4CD^2$ ma $4BD^2 = AB^2$, $4CD^2 = CO^2 = CB^2$, dunque $AB^2 = 4CB^2 - CB^2 = 3CB^2$.

4.

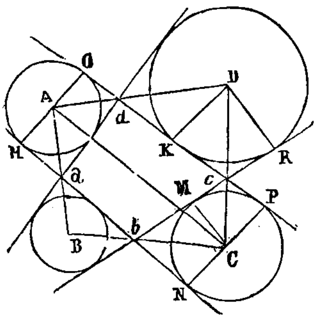
Un triangolo equilatero è inscritto in un cerchio, e sono condotte per i suoi vertici le tangenti al cerchio; dimostrare che queste formano un triangolo equilatero eguale a quattro volte il primo triangolo.

Siano DE, DF, FE le tangenti condotte per i vertici, A, B, C del triangolo ABC inscritto nel cerchio ABC; dico che DEF è un triangolo equilatero eguale a quattro volte ABC.
Infatti l'angolo EAC formato da una tangente e da una secante è uguale ad ACB che insiste sull' arco $AB=AC$, quindi $EA \parallel CB$. Similmente si dimostra che è $CE \parallel AB$, quindi $ABCE$ è parallelogrammo, epperò il triangolo $EAC = ABC$. Per le medesime ragioni è il triangolo $BCF = ABC$, $DBA = ABC$, onde DEF è quattro volte ABC, ed è chiaro che è equilatero.

5.

Dimostrare che si può descrivere una circonferenza che passi per i centri di quattro cerchi, ciascuno dei quali sia tangente a un lato e ai due adiacenti prolungati, di un quadrilatero. (Fig. 97).

Fig. 97.



Siano A, B, C, D i centri dei quattro cerchi tangenti come nell' enunciato. Gli angoli KcR, McP sono uguali, e le loro metà KcD, CcP saranno anche uguali; ed aggiungendo a queste metà di comune DcP, risulterà la somma $KcD+DcP=CcP+DcP$; ma la prima somma è uguale a 2 retti, sarà dunque la seconda 2 retti, epperò DcC è una linea retta. Similmente si dimostra che DdA, AaB, BbC sono linee rette. Inoltre essendo HN tangente comune ai due cerchi A e C, i raggi AH, CN condotti ai punti di contatto sono paralleli, e quindi angolo $HAC + ACN = 2$ retti; similmente $GAC + ACP = 2$ retti onde $HAC + GAC + ACN + ACP = 4$ retti. Chiaramente si vede che BAD è metà di $HAC + GAC$, e BCD è metà di $ACN+ACP$, dunque $BAD+BCD=2$ retti, epperò $ABCD$ è inscrittibile (III, 32, Es.).

6.

La somma dei diametri dei due cerchi, uno inscritto e l'altro circoscritto a un triangolo rettangolo è eguale alla somma dei due cateti.

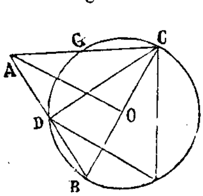
Siano ABC, EDF i due cerchi rispettivamente circoscritto ed inscritto al triangolo rettangolo ABC.

Si unisca il centro O del cerchio inscritto coi punti di contatto E, F, D. È chiaro che l'ipotenusa BC è diametro del cerchio circoscritto, ed è facile scorgere che $AEOD$ è quadrato. Ciò posto; perchè CF, CD sono tangenti al cerchio EDF sono uguali (III, 37, Eucl.); per la stessa ragione $BF=BE$, $AE=AD$, quindi $BF+CF=BE+CD$; $EO+OD=EA+AD$, onde $BF+CF+EO+OD=BE+CD+EA+AD$, ovvero $BC+EO+OD=AC+AB$.

7.

La perpendicolare abbassata dal vertice alla base di un triangolo equilatero è eguale al lato di un triangolo equilatero inscritto in un cerchio il cui diametro è la base. (Fig. 98).

Fig. 98.



Sia ABC il triangolo equilatero, BDC il cerchio che ha per diametro la base BC, AO la perpendicolare abbassata dal vertice A alla base BC.

Essendo l'angolo ABC $\frac{2}{3}$ di retto, sarà DGC la terza parte della circonferenza, e la corda DC lato del triangolo equilatero inscritto. Ora i triangoli ABO, BDC essendo uguali, avranno i lati AO, CD uguali.

8.

Inscrivere un quadrato e un cerchio in un dato quadrante.

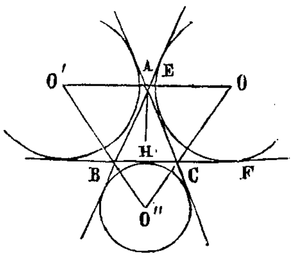
1.° Per inscrivere il quadrato si divida l'angolo del quadrante per metà, e dal punto d'intersezione della bisettrice coll'arco si menino le perpendicolari ai raggi.

2.° Dal detto punto d' incontro si conduca una tangente che incontrando i raggi prolungati del quadrante, risulterà un triangolo, il punto d' incontro della bisettrice dei suoi angoli sarà il centro del cerchio cercato.

9.

Trovare i centri dei tre cerchi, ciascuno dei quali è tangente a un lato e al prolungamento degli altri due di un triangolo; e dimostrare che la retta, che congiunge due qualunque di questi centri, è perpendicolare alla retta che congiunge il centro del cerchio inscritto al triangolo col vertice compreso tra essi. (Fig. 99).

Fig. 99.



1.° Si bisecano gli angoli EAC, ACF mediante le rette AO, CO, il punto d' incontro O di esse è il centro del primo cerchio. In simil modo si trovano gli altri centri.

2.° Si dimostra come nell'esercizio 5°, libro III, che OAO' è una linea retta; ed essendo il centro del cerchio inscritto il punto d'incontro delle bisettrici degli angoli del triangolo ABC, sarà AH congiungente detto centro H e il vertice A bisettrice, quindi l'angolo $BAH=HAC$, ed essendo $O'AB=OAC$, sarà $BAH+O'AB=HAC+OAC$, cioè $O'AH=HAO$, dunque ecc.

10.

La bisettrice di un angolo di un triangolo inscritto in un cerchio taglia la circonferenza in un punto equidistante dalle estremità del lato opposto all'angolo bisecato e dal centro del cerchio inscritto.

Sia AD la bisettrice dell' angolo BAC del triangolo ABC inscritto. Essendo l'angolo $BAD=DAC$, sarà l' arco $BD=DC$.

Si sa che il centro del cerchio inscritto nel triangolo BAC è il punto d' incontro O delle tre bisettrici AO, BO, CO. Ciò posto è l'angolo $DOC=OAC+ACO=DCB+OCB=OCD$, perchè $OAC=DCB$, $ACO=OCB$, quindi $OD=DC=DB$.

11.

ABCD *è un rettangolo : se nel triangolo* ABC *sia inscritto un cerchio, e siano* E, F *i punti di contatto di questo coi lati* AB, BC *e si tirino* EGH, FGK *parallele ad* AD, CD, *il rettangolo* HK *sarà uguale al gnomone* AFH.

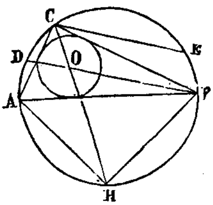
È chiaro che il punto d'incontro di EGH, FGK è il centro del cerchio inscritto, perchè si deve trovare nello stesso tempo in EH, FK, che sono perpendicolari ai punti di contatto delle tangenti BA, BC; siano M, N i punti d'incontro di AC con FK, EH.

Ciò posto, è il triangolo $ADC = ABC$, e tirando il raggio GL al punto di contatto L della tangente AC, risulta il triangolo $MLG = AKM$, $GLN = HNC$, quindi $AKM + HNC = MGN$, ed aggiungendo al primo membro la figura $AMGNCB$, ed al secondo $KMNHD$ si avrà quel che si volea dimostrare.

12.

Il luogo dei centri dei cerchi inscritti nei triangoli rettangoli che hanno la stessa ipotenusa, è l'arco del quadrante descritto sopra l'ipotenusa comune. (Fig. 100).

Fig. 100.



Sia ABC uno dei triangoli rettangoli (i quali come facilmente si può scorgere, avranno i vertici sopra una medesima circonferenza) ed O il cerchio inscritto in esso. Circoscrivasi il cerchio $ACBH$. È chiaro che la bisettrice CO dell'angolo ACB passa pel centro O del cerchio inscritto e pel punto medio H dell'arco AHB, come anche la bisettrice BOD passa pel medesimo centro O, e pel punto medio D dell'arco CDA. Tirando $CE \parallel DB$, sarà l'arco $EB=ED=DA$, ed essendo $BH=AH$, sarà $EBH=DAH$, e l'angolo $HCE = HBD$, ma $HCE = HOB$, quindi $HOB = HBO$, epperò la retta $HO = HB = HA$; onde il centro O trovasi su una circonferenza che passa per A e B, ed ha per centro il punto H; ma l'angolo AHB essendo retto, sarà l'arco AOB quadrante, quindi; il centro O si trova su l'arco del quadrante che è descritto su l'ipotenusa AB. Similmente si dimostra essere nel medesimo quadrante qualunque altro centro di cerchio inscritto in triangolo rettangolo che ha per ipotenusa AB, dunque ecc.

13.

Se in un triangolo qualunque ABC, *la retta* AD *biseca l'angolo* A *e taglia* BC *in* D, *e si tira dal centro* O *del cerchio inscritto la* OE *perpendicolare a* BC, *l'angolo* BOE *sarà eguale all'angolo* EOD.

Questo teorema si dimostra in modo affatto analogo al 51° degli esercizi del libro I, imperocchè il centro del cerchio inscritto è il punto d'incontro delle tre bisettrici.

14.

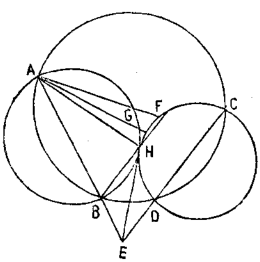
Inscrivere un quadrato in un dato triangolo rettangolo e isoscele.

Si divida l'ipotenusa in tre parti uguali (Es. 45, lib. I), e dai punti di divisione s'innalzino due perpendicolari su di essa, le quali determineranno il quadrato richiesto.

15.

Descrivere una circonferenza tangente a un dato cerchio e che passi per due punti dati; e dimostrare che di tutte le rette condotte dai due punti a un punto della parte convessa della circonferenza del dato cerchio, quelle condotte al punto di contatto faranno il massimo angolo. (Fig. 101).

Fig. 101.



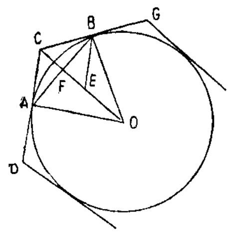
1.° Si descriva una circonferenza che passi per i punti dati A, B, e tagli il cerchio dato in due punti C, D. Si uniscano A e B, C e D, e le congiungenti si prolunghino fino al loro incontro E. Da questo punto d'incontro si conduca una tangente al cerchio dato, il punto di contatto sarà un terzo punto che determinerà il cerchio cercato.

2.° Siano AF, BF due rette tirate da A e B ad un punto F del cerchio dato. È l'angolo $AHB = AGB > AFB$, ecc.

16.

Un esagono regolare inscritto è $\frac{3}{4}$ di quello circoscritto al medesimo cerchio. (Fig. 102).

Fig. 102.



Sia AB lato dell' esagono regolare inscritto, CD, CG due lati adiacenti del circoscritto. Tirisi la bisettrice BE dell' angolo ABO, dopo unito il centro coi punti di contatto A, B della circonferenza coi lati AC, CB. È chiaro che il triangolo ABO è $\frac{1}{6}$ dell'esagono regolare inscritto, e il quadrilatero $AOBC$ è anche $\frac{1}{6}$ del circoscritto. Ora per dimostrare che l' esagono regolare inscritto è $\frac{3}{4}$ del circoscritto, basta dimostrare che $\frac{1}{6}$ dell' inscritto è $\frac{3}{4}$ di $\frac{1}{6}$ del circoscritto.

Perchè è l' angolo $EBO = EOB$, essendo ciascuno metà di angoli uguali, sarà $EB = EO$; ed essendo l' angolo $CBA = EOB = OBE$, sarà $CBE = ABO = \frac{2}{3}$ di retto; ed è anche l'angolo $CEB = EOB + EBO = \frac{2}{3}$ di retto, dunque il triangolo CEB è equilatero, e quindi $CE = EB = EO$. È il triangolo $CFA = EBF$, quindi $ABC = CBE$, ma CBE è $\frac{1}{4}$ di $ABCO$, sarà ABC $\frac{1}{4}$ di $ACBO$, ed ABO $\frac{3}{4}$ parti, cioè che $\frac{1}{6}$ dell' esagono regolare inscritto è $\frac{3}{4}$ di $\frac{1}{6}$ dell' esagono regolare circoscritto, quindi ecc.

17.

Sopra una retta data come diagonale descrivere un rombo, che abbia due dei suoi angoli doppi degli altri due. Quindi mostrare come si può trisecare un angolo retto.

Con centri nelle due estremità della retta data e con raggio uguale alla medesima retta data si descrivano due circonferenze, unendo i due punti d' intersezione coi centri risulterà il rombo richiesto.

I due triangoli che risultano dall' una e dall'altra banda della retta data sono equiangoli, quindi se all' estremità di essa vi fosse un angolo retto, sarebbe separato un angolo eguale a $\frac{2}{3}$ di retto, e la porzione rimanente sarà $\frac{1}{3}$, onde ecc.

18.

Dati l' angolo al vertice, la bisettrice di quest' angolo è la *differenza della base e della somma dei lati, costruire il triangolo.*

Su ciascun lato dell'angolo dato a partire dal vertice, si prenda una porzione uguale alla metà della differenza data, dagli estremi di queste porzioni s'innalzino due perpendicolari che s'incontreranno in un medesimo punto della bisettrice, con centro in questo punto e con raggio uguale alla detta perpendicolare si descriva una circonferenza, per l'estremo della bisettrice si conduca una tangente al cerchio, e risulterà il triangolo cercato.

19.

Tirare dal vertice dell' angolo ottuso di un dato triangolo una retta alla base, in modo che il suo quadrato sia eguale al rettangolo contenuto dai segmenti della base.

Circoscrivasi un cerchio al triangolo, si unisca il vertice dell' angolo ottuso col centro, su questo raggio si descriva una semicirconferenza che incontrerà il lato opposto all'angolo suddetto in un punto che risolve il problema.

20.

I centri dei cerchi inscritto e circoscritto a un triangolo equilatero coincidono, e il diametro di uno è doppio di quello dell' altro.

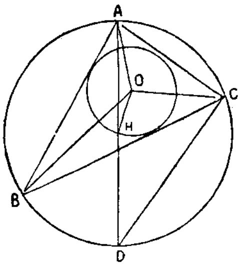
Il centro del cerchio inscritto è il punto d'incontro delle tre bisettrici degli angoli del triangolo, e queste bisettrici cadendo perpendicolarmente ai punti medi dei lati, il loro punto d'incontro sarà anche centro del cerchio circoscritto.

La ragione per cui il diametro del cerchio circoscritto è doppio di quello dell' inscritto si ritrova nell' esercizio 80, I. libro.

21.

La retta che congiunge i centri del cerchio inscritto e di quello circoscritto a un triangolo, sottende a ciascuno dei vertici un angolo eguale alla semidifferenza degli altri due angoli del triangolo. (Fig. 103).

Fig. 103.



Sia O il centro del cerchio inscritto, H quello del circoscritto al triangolo ABC. Si conduca AH e la si prolunghi fino all' incontro D della circonferenza. Le rette OA, OB, OC, sono bisettrici degli angoli del triangolo ABC, quindi angolo $OAH + HAB + OBC + 2OCB = 1$ retto$+ OCB$, $OAH + HAB + 2OCB = 1^r + OCB - OBC$, ma $HAB + 2OCB = ACD = 1^r$, dunque

$$OAH = OCB - OBC = \frac{ACB - ABC}{2}, \text{ dunque ecc.}$$

22.

Dati gli angoli di un triangolo e il raggio del cerchio inscritto: costruire il triangolo.

Si costruisca un triangolo che abbia gli angoli rispettivamente uguali agli angoli dati, il che è facile a farsi, indi si circoscriva un triangolo al cerchio di raggio dato equiangolo al cerchio di raggio dato equiangolo al triangolo costruito (IV. 3. Eucl.).

23.

Dati l' angolo al vertice di un triangolo, e i raggi del cerchio inscritto e circoscritto; costruire il triangolo.

Sulla bisettrice dell' angolo dato si prenda a partire dal vertice una porzione uguale al raggio del cerchio circoscritto, col centro nell' estremità di questa e col raggio del cerchio circoscritto si descriva una circonferenza che taglierà i lati in due punti, dal punto medio della congiungente s' innalza la perpendicolare uguale al raggio del cerchio inscritto, con centro nell' estremo di questa perpendicolare e con raggio del cerchio inscritto si descriva una circonferenza dagli estremi della congiungente i due punti si conducano le tangenti all' ultimo cerchio, che determineranno il triangolo richiesto.

24.

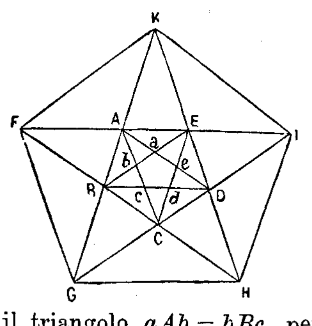
Porre in un dato cerchio otto cerchi tangenti tra loro al cerchio dato.

Si circoscriva al cerchio un ottagono regolare, si unisca il centro coi vertici, agli angoli dei triangoli risultanti si menino le bisettrici che determineranno otto punti che saranno i centri dei cerchi richiesti, e i raggi sono le perpendicolari condotte dai detti punti ai lati dei detti triangoli.

25.

Le rette che congiungono i vertici alterni, o le intersezioni dei lati alterni, di un pentagono regolare, formano un altro pentagono regolare. (Fig. 104).

Fig. 104.



Siano AC, CE, EB, BD, DA le congiungenti i vertici alterni del pentagono regolare $ABCDE$, che s' intersecano in a, b, c, d, e; dico 1° che $abcde$ è pentagono regolare.

Infatti i quindici angoli formati ai vertici del pentagono sono uguali fra loro (IV, 11, Eucl.); l'angolo $eab = aAB + ABb = 3aAb$, come pure $cba = 3aAb$, e così degli altri angoli, dunque $abcde$ è pentagono equiangolo. Essendo il triangolo $aAb = bBc$, perchè è l' angolo $aAb = bBc$, $Aba = Bbc$ e il lato $Ab = Bb$, essendo BAb triangolo isoscele, sarà $ab = bc$; come pure è $bc = cd$ ecc. dunque $abcde$ è pentagono regolare, perchè equiangolo ed equilatero.

2.° Siano F, G, H, I, K le intersezioni dei lati alterni; dico che $FGHIK$ sarà anche pentagono regolare. Infatti i triangoli AFB, BGC, CHD ecc., sono uguali ed isosceli, e quindi anche eguali ed isosceli i triangoli KAF, FGB, GCH ecc., onde si scorge di leggieri che $FGHIK$ è pentagono regolare.

26.

Sopra una data retta descrivere un ottagono regolare.

Si faccia un angolo uguale a $\frac{3}{2}$ di retto, sui lati si prendano, a partire dal vertice, due porzioni uguali alla retta data, per gli estremi di queste e per il vertice si faccia passare una circonferenza, e adattando la retta data successivamente sulla circonferenza risulterà l'ottagono regolare richiesto.

27.

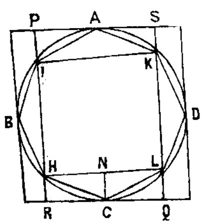
Inscrivere in un dato cerchio un rettangolo eguale a un dato poligono.

Sul diametro del cerchio dato si costruisca un rettangolo uguale al poligono dato, si unisca il punto di incontro del lato opposto al diametro e della circonferenza con gli estremi del diametro medesimo, e risulta un triangolo rettangolo che ripetuto dall' altra parte del diametro formerà il rettangolo dimandato.

28.

L' ottagono regolare inscritto in un cerchio è eguale al rettangolo contenuto dai lati dei quadrati inscritto e circoscritto. (Fig. 105).

Fig. 105.



Si costruisca la figura come nell' enunciato, si prolunghino i lati del quadrato inscritto IH, KL, finchè incontrino quelli del circoscritto, si conduca CN perpendicolare su HL, e risulta il triangolo $NCL = LCQ$, $HCN = HRC$, onde $HRC + LCQ = HCL = KLD$. Similmente si dimostra $API + ASK = IBH$, dunque ecc.

29.

Inscrivere un quadrato nello spazio compreso da due cerchi eguali che si tagliano.

Si uniscano i centri e i punti d' intersezione dei due cerchi uguali, si bisechi l' angolo di queste congiungenti, dal punto d'incontro della bisettrice con l'arco interno si conducano le parallele alle congiungenti, che determineranno il quadrato richiesto.

30.

Inscrivere un cerchio in un rombo dato.

Si faccia centro nel punto d'incontro delle diagonali del rombo e con raggio uguale alla distanza del detto punto da un lato si descriva un cerchio che risolve il problema.

31.

ABCD *è un quadrilatero inscritto in un cerchio: prolunghiamo* AD, BC *fin che s'incontrino in* E, *da un punto qualunque* F *di* DE *tiriamo* FH *parallela a* BE, *che incontri* CD *in* H, *e conduciamo* FB *che tagli la circonferenza in* G: *dimostrare che* GH *taglierà di nuovo la circonferenza in un punto fisso* K.

È l'angolo $GFH = GBC = GDC$, quindi se si descrive su GH un segmento di cerchio capace dell'angolo GFH, esso passerà anche pel punto D, onde sarà l'angolo $HGD = HFD = CED$, quindi DGK sarà costante, e la retta GH passerà sempre per K.

32.

Inscrivere un triangolo equilatero in un dato quadrato con un vertice nel mezzo di un lato, e poi con un vertice in un vertice del quadrato.

1.° Si faccia centro nel punto medio del lato del quadrato dato e con raggio uguale al lato del medesimo quadrato si descriva una circonferenza, la quale determinerà due punti su due lati del quadrato e questi uniti col punto medio risulterà il triangolo richiesto.

2.° Ad un vertice del quadrato coi lati consecutivi si facciano al di dentro due angoli ciascuno $\frac{1}{6}$ di retto i lati di questi due angoli determineranno il triangolo richiesto.

33.

Inscrivere in un dato quadrato il quadrato minimo.

Si uniscano i punti medi dei lati del quadrato dato e sarà risoluto il problema.

34.

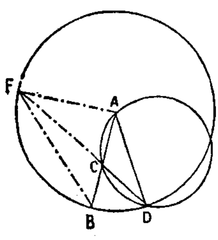
Descrivere una circonferenza che passi per un vertice e sia tangente a due lati di un dato quadrato.

All' estremo d'una diagonale del quadrato s' innalzi la perpendicolare che incontrerà il lato prolungato opposto all'angolo retto formato in un punto, e si formerà un angolo, l'incontro della bisettrice di quest' angolo con la diagonale sarà il centro del cerchio cercato.

35.

Nella figura (Eucl. IV, 10) *dimostrare che* AC *è il lato di un decagono regolare inscritto nel cerchio maggiore e di un pentagono regolare inscritto nel minore.* (Fig. 106).

Fig. 106.



1.° L' angolo BAD è $\frac{1}{2}$ ABD ed $\frac{1}{2}$ ADB, e quindi $\frac{1}{5}$ di 2 retti e $\frac{1}{10}$ di 4 retti, epperò l' arco BD la decima parte della circonferenza maggiore; ed essendo $DB = DC = AC$, sarà AC il lato del decagono regolare inscritto nel cerchio maggiore.

2.° Poichè è l'angolo $CAD = CDA = \frac{2}{5}$ di retto, sarà $ACD = \frac{6}{5}$ di retto, ma $\frac{6}{5}$ di retto è l' angolo del pentagono regolare, dunque AC è il lato del pentagono regolare inscritto nel cerchio minore.

36.

Nella figura (Eucl. IV, 10) *prolungata DC fino all' incontro col cerchio in* F, *l'angolo* ABF, *sarà triplo dell'angolo* BFD. (Fig. 106).

È l'angolo $DAC = ADC = AFC$, ma DAC è doppio di BFD, sarà quindi AFC doppio di BFD, ed AFB triplo di BFD, ma $AFB = ABF$, quindi anche ABF triplo di BFD.

37.

Se ABCDE *è un pentagono regolare, la somma degli angoli* ABE, BCA, CDB, DEC, EAD *sarà eguale a due retti.* (Fig. 104).

I 15 angoli ABE, EBD ecc., sono uguali fra loro (IV, 11, Eucl.). Ora la somma degli angoli interni del pentagono è eguale a 6 retti, quindi la somma dei 5 angoli ABE, BCA, CDB, DEC, EAD, essendo la terza parte di quella degli angoli del pentagono, sarà due retti.

38.

Dato un pentagono regolare, descrivere un triangolo che gli sia eguale ed abbia la stessa altezza. (Fig. 104).

Dai punti B, E si tirino due rette rispettivamente parallele ad AC, AD, i punti d' incontro di queste con la CD uniti al vertice A risolvono il problema.

39.

Se si tirino in un pentagono regolare due diagonali che si taglino tra loro, i segmenti maggiori saranno eguali a un lato del pentagono. (Fig. 104).

È l' angolo $AbE = bBA + BAb = 2BAb$, $EAb = 2BAb$, quindi $AbE = EAb$, epperò $AE = bE$.

40.

Dividere un angolo retto in cinque parti eguali.

Col centro nel vertice dell' angolo retto si descriva una circonferenza, nell' arco compreso dai lati si adatti il lato dell' icosagono regolare inscritto nella medesima circonferenza, i punti di divisione uniti col vertice risolvono il problema.

41.

I lati opposti di un esagono regolare sono paralleli, e se *due lati di un esagono inscritto sono paralleli a due altri lati, saranno paralleli i rimanenti.*

1.° Si circoscriva all' esagono regolare $ABCDEF$ un cerchio. Perchè è l' arco $AFE = BCD$, sarà l' angolo $ABE = BED$, quindi $BA \parallel DE$, così degli altri.

2.° Se si suppone $BA \parallel DE$, $AF \parallel CD$, sarà l' arco $BA = DE$, e $AF = CD$ (III, 42, Es.), onde $BF = CE$, e quindi l'angolo $CFE = BCF$, epperò è $BC \parallel FE$.

42.

Inscrivere un esagono regolare in un dato triangolo equilatero e confrontarne la grandezza con quella del triangolo.

Le bisettrici degli angoli che sono intorno al punto d' incontro delle tre altezze determineranno l' esagono regolare cercato, e sarà $\frac{2}{3}$ del triangolo.

43.

Inscrivere un decagono regolare in un dato cerchio, e dimostrare che è eguale al quadrato di un lato del triangolo equilatero inscritto nello stesso cerchio.

S' inscriva un pentagono regolare, e unendo i suoi vertici coi punti medi degli archi risulterà il decagono regolare richiesto.

La seconda parte dell' enunciato non è vera, ma però è vera pel dodecagono regolare. Infatti è facile osservare che l' area del dodecagono regolare inscritto è eguale a tre volte il quadrato del raggio; e il quadrato del lato del triangolo equilatero inscritto nel medesimo cerchio è tre volte il quadrato del raggio, dunque ecc.

44.

Due lati alterni AB, CD *di un poligono regolare prolungati s' incontrino in E; dimostrare che la figura* AECO, *essendo* O *il centro del poligono, può essere inscritta in un cerchio.*

Infatti l' angolo $EAO = OCD$, $OCD + OCE = 2$ retti, quindi

$EAO + OCE = 2$ retti, epperò $AECO$ è inscrittibile (III, 32. Es.).

45.

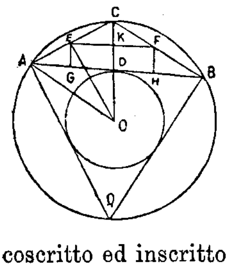
Dato un poligono regolare inscritto in un cerchio, mostrare come si può inscrivere e circoscrivere allo stesso cerchio un altro poligono regolare di un doppio numero di lati.

Se si dividono per metà gli archi sottesi dai lati, e si uniscono i punti di divisione coi vertici del poligono, risulterà un poligono regolare di un numero doppio di lati; e se per i vertici di questo nuovo poligono si conducono le tangenti al cerchio risulterà un poligono regolare circoscritto anche di un numero doppio di lati.

46.

Se R *ed* r *siano i raggi dei cerchi inscritto e circoscritto a un poligono regolare, ed* R′, r′ *i raggi corrispondenti dei poligoni regolari dello stesso perimetro e di un numero doppio di lati, dimostrare che* r′ *è uguale alla semisomma di* R *ed* r, *e che il quadrato di* R′, *è eguale al rettangolo contenuto da* R *ed* r′. (Fig. 107).

Fig. 107.



Sia $AO = R$ raggio del cerchio circoscritto, $OD = r$ raggio del cerchio inscritto. Prolungando OD fino all' incontro C colla circonferenza, e tirando dal punto medio E di AC la $EF \parallel AB$, si avrà $EF = \frac{1}{2} AB$, e sarà il lato di un poligono regolare isoperimetro e di un numero doppio di lati; $OE = R'$ $OK = r'$ saranno i raggi dei cerchi circoscritto ed inscritto. Essendo $CK = EG = KD$, sarà $OK = OD + DK$, $OK = OD + KC$, e $2OK = OC + OD$, $OK = r' = \frac{R + r}{2}$.

$$OE^2 = R'^2 = OC \times OK = Rr' \text{ (II, 12, Es).}$$

47.

Se da un punto qualunque preso dentro un poligono regolare di n *lati si tirino le* n *perpendicolari ai lati, la somma di queste sarà eguale ad* n *volte il raggio del cerchio inscritto al poligono. Come si può far comprendere a questo teorema anche il caso in cui il punto è preso fuori del poligono.*

Chiamando P l' area del poligono regolare di n lati, ed a uno dei lati eguali, si avrà P uguale ad $\frac{a}{2}$ moltiplicato per la somma delle n perpendicolari tirate da un punto qualunque preso dentro il poligono. Ora questo punto potendo essere anche il centro, e le perpendicolari tirate dal centro sono appunto i raggi, ne segue che la somma delle perpendicolari tirate da un punto qualunque preso dentro il poligono regolare è uguale a quella dei raggi. Se il punto è fuori del poligono, lo si unisce cogli n vertici, e si formeranno n triangoli la cui somma è uguale al poligono più un triangolo esterno; e si ricava facilmente che la somma degli n raggi è uguale a quella delle perpendicolari tirate dal detto punto sugli n lati meno la perpendicolare del triangolo esterno.

Può accadere che fuori del poligono si formino più triangoli esterni, allora la somma degli n raggi sarà eguale a quella delle perpendicolari tirate dal detto punto sui lati, meno la somma delle perpendicolari tirate da esso sui lati che appartengono ai triangoli esterni.

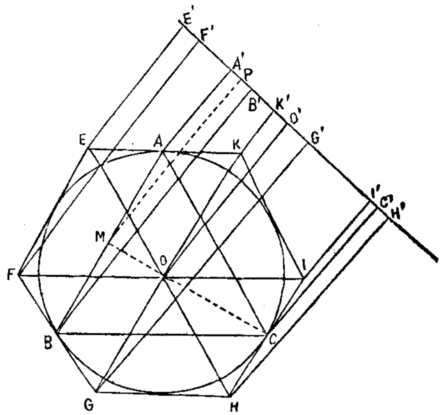
48.

Se dai vertici di un triangolo equilatero si tirino rette parallele tra loro (ordinate) fino ad una retta data fuori del triangolo, la somma di queste ordinate e quella delle ascisse (cioè dei segmenti della retta data compresi fra le ordinate ed un punto preso fuori di esse) saranno rispettivamente eguali a tre volte l' ordinata e l' ascissa del centro del cerchio inscritto al triangolo. Dimostrare che questo è vero anche di un poligono regolare qualunque, e spiegare come si possa far comprendere a questo teorema anche il caso in cui la retta data tagli la figura, e il punto fisso sia situato comunque sopra la retta.

1.° (Fig. 108). Sia ABC il triangolo equilatero, AA', BB',

CC' le tre ordinate, $A'E'$, $B'E'$, $C'E'$ le tre ascisse, OO' l'ordinata, e $O'E'$ l'ascissa del centro del cerchio inscritto. Si circoscriva al cerchio ABC un esagono regolare come si vede nella figura, e si tirino EE', FF', GG', HH', II', KK parallele alle ordinate.

Fig. 108.



Si ha (I, 34, Es.).

$$AA' = \frac{EE' + KK'}{2}, \quad BB' = \frac{FF' + GG'}{2}, \quad CC' = \frac{II' + HH'}{2}.$$

Quindi $AA' + BB' + CC' = \dfrac{EE' + KK' + FF' + GG' + II' + HH'}{2}$,

ma $\dfrac{EE' + HH'}{2} = OO'$, $\dfrac{KK' + GG'}{2} = OO'$, $\dfrac{FF' + II'}{2} = OO'$,

dunque $\quad AA' + BB' + CC' = 3OO'$.

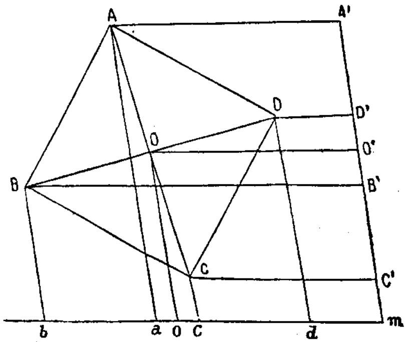
$$E'A' + E'B' + E'C' = E'A' + E'O' - B'O' + E'O' + O'C'$$
$$= 2EO' + E'A' + O'C' - B'O'.$$

Essendo CO doppio di OM (1, 80, Es.), si dimostra facilmente che è $O'C' = 2PO'$ e si avrà:

$$E'A' + E'B' + E'C' = 2E'O' + E'A' + 2PO' - (PO' - PB') =$$
$$2E'O' + E'A' + PO' + PB' = 2E'O' + E'A' + PO' + PA' = 2E'O'$$
$$+ E'\,O' = 3E'O'.$$

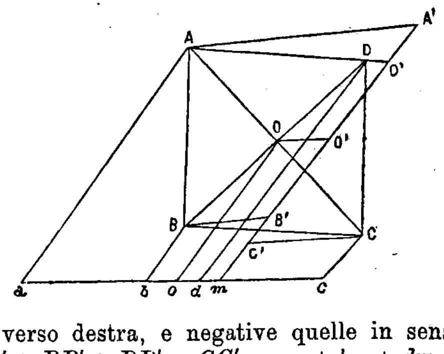
2.° (Fig 109). Sia $ABCD$ un poligono regolare qualunque, AA', BB', CC', DD' le ordinate, OO' quella del centro del cerchio inscritto. Da un punto m preso sopra la retta data di posizione si conduca mb parallela alle ordinate, su questa mb si proiettino le ordinate, e si ha $AA' + BB' + CC' + DD' = am + bm + cm + dm = om + ao + om + bo + om - co + om - do = 4om + ao - co + bo - do = 4om$. Analogamente si dimostra la stessa proprietà riferita alle ascisse.

Fig. 109.



3.° (Fig. 110). Se la retta taglia il poligono, fatta la stessa costruzione, e considerando come positive le ordinate che vanno

Fig. 110.



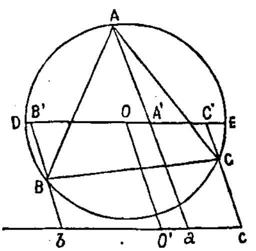
da sinistra verso destra, e negative quelle in senso contrario, si avrà $AA' + BB' + DD' - CC' = am + bm + dm - mc = om + ao + om + bo + om - do - (oc - om) = 4om + ao - oc + bo - do = 4om$.

Similmente si dimostra avere le ascisse la stessa proprietà prendendo il punto anche in qualunque modo sopra la retta, dunque ecc.

49.

Se dai vertici di un triangolo equilatero si tirino le ordinate fino ad un diametro del cerchio circoscritto, la ordinata che cade sola da una parte del diametro sarà eguale alla somma delle due che cadono dall' altra parte, e il segmento del diametro che solo è da una parte del centro, è eguale alla somma dei due che rimangono dall' altra parte. (Fig. 111).

Fig. 111.



Sia ABC il triangolo equilatero inscritto, DE il diametro, AA', BB', CC' le ordinate. Si tiri $cb \parallel DE$.

1.° Si ha (prop. prec.) $Aa + Bb + Cc = 3OO' = BB' + Bb + CC' + Cc + OO'$; $AA' + A'a + Cc + Bb = BB' + Bb + CC' + Cc + OO'$, quindi $AA' = BB' + CC'$.

2.° Si ha pure (prop. prec.) $cb + ab = 3O'b$, ovvero $cO' + O'b + aO' + O'b = O'b + O'b + O'b$, onde $cO' + aO' = O'b$, e $C'O + A'O = OB'$.

50.

Se ABC *è un triangolo equilatero; e* P *un punto qualunque di un cerchio concentrico al cerchio circoscritto al triangolo, la somma dei quadrati di* PA, PB, PC *sarà costante, e se* ABCP, A'B'C'P' *siano cerchi concentrici ed* ABC, A'B'C' *triangoli equilateri inscritti, in essi la somma dei quadrati di* P'A, P'B, P'C *sarà eguale alla somma dei quadrati di* PA', PB', PC'. (Fig. 112 e 113).

Nella figura 112 si unisca il punto P col centro O, e si conducano le perpendicolari AD, BH, CE sopra PO.

$$\text{Si ha } PA^2 = PO^2 + OA^2 - 2PO \times DO,$$

$$PB^2 = PO^2 + BO^2 + 2PO \times HO,$$

$$PC^2 = PO^2 + CO^2 + 2PO \times EO;$$

onde, perchè $DO = HO + EO$ (prop. prec.), si avrà, addizionando, $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PO^2 + 3OA^2$.

Fig. 112.

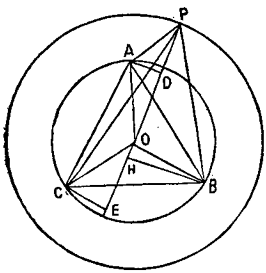
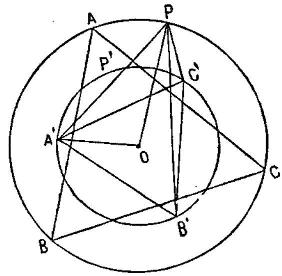


Fig. 113.



Nella figura 113 è $PA'^2 + PB'^2 + PC'^2 = 3PO^2 + 3OA'^2$, e $P'A^2 + P'B^2 + P'C^2 = 3P'O + 3OA = 3PO^2 + 3OA'^2$, dunque ecc.

FINE DEL QUARTO LIBRO.

LIBRO V DI EUCL. VI.

1.

Il rettangolo contenuto da due linee è medio proporzionale tra i loro quadrati.

Siano AB, CB le due linee, e immaginiamole sovraposte in guisa che C sia fra A e B. Dal punto A si conduca AD perpendicolare ed uguale ad AB, si unisca D con B e tirisi $CE \parallel AD$. I due triangoli DAB, ECB sono simili, quindi si ha $AB:AD = CB:CE$, e $AB:CB = AD:CE$, e moltiplicando termine a termine si ha $AB^2:AD \times CB = CB \times AD:CE^2$, ossia $AB^2:AB \times CB = AB \times CB:CB^2$.

2.

Un quadrilatero ha uguali le perpendicolari abbassate dai vertici opposti sopra una diagonale: dividerlo in quattro triangoli uguali per mezzo di linee condotte ai vertici da un punto interno.

Il punto medio della stessa diagonale risolve il problema.

3.

Se da un vertice di un triangolo si tira una retta alla metà del lato opposto, e da un altro vertice si tira per la metà di questa un' altra retta sino all' incontro del lato opposto; questo lato rimarrà diviso in due parti una delle quali sarà doppia dell' altra.

Sia ABC il triangolo, AD la mediana, BG la retta che passa pel punto medio G di AD e termina all' incontro E di AC; dico che EC è doppia di AE. Si tiri DF parallela BE, e si avrà la proporzione $BD:DC = EF:FC$, ed essendo $BD = DC$, sarà $EF = FC$. È il triangolo $BGD = BGA$; $AGE = EGD$, quindi sarà $ABE = BED$, ma $BED = BEF = BFC$, dunque $ABE = BEF = BFC$, e quindi BEC doppio di BAE, e la base BEC doppia di AE.

4.

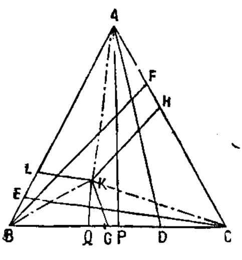
Tirare per un punto dato una linea retta in modo che se da due altri punti si abbassino sopra di essa due perpendicolari, le parti intercette tra il punto dato e i piedi delle perpendicolari siano uguali.

Si unisca il punto dato con uno degli altri due; la congiungente si prolunghi dalla parte del punto dato di una quantità uguale a sè stessa, si unisca l'estremo di questo prolungamento coll' altro punto, la perpendicolare menata dal punto dato a questa seconda congiungente risolve il problema.

5.

Se conduciamo tre rette uguali dai tre vertici di un triangolo ai tre lati opposti, o ai loro prolungamenti, e da un punto interno al triangolo tre linee parallele a queste sino all' incontro con i lati, la somma di queste ultime sarà uguale ad una delle prime. (Fig. 114).

Fig. 114.

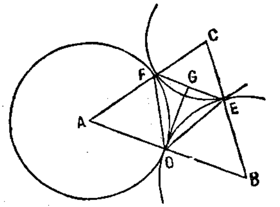


Sia ABC un triangolo qualunque, AD, BF, CE le rette uguali tirate dai tre vertici, KG, KH, KL le parallele a queste. Si conducano le perpendicolari AP, KQ sopra BC. I triangoli QKG, APD sono simili, quindi le altezze stanno come $KG{:}AD$, epperò $BKC{:}BAC = KG{:}AD$. Similmente si ha $AKC : BAC = KH{:}BF$, e $AKB{:}BAC = KL{:}CE$, donde triangolo $ABC : KG + KH + KL = BAC{:}AD$, dunque ecc.

6.

Se tre cerchi sono tra loro tangenti e due di essi sono uguali, l' angolo al vertice del triangolo formato congiungendo i *punti di contatto, è eguale all' angolo alla base del triangolo isoscele, formato congiungendo i tre centri.* (Fig. 115).

Fig. 115.



Siano A, B, C i tre cerchi tangenti, dei quali A e B sono uguali, dico essere l' angolo al vertice FDE, del triangolo formato congiungendo i punti di contatto E, F, D uguale a BAC, angolo alla base del triangolo isoscele formato congiungendo i centri. Infatti CB, CA passano per i punti di contatto E, F. Donde è $AF = BE$, $FC = EC$, quindi $AF : FC = BE : EC$, epperò $FE \parallel AB$. Dal punto D s' innalzi la perpendicolare DG, che sarà tangente comune ai due cerchi A, B, e risulta il triangolo $DFG = DGE$, e l' angolo $FDG = GDE$, ma FDG è metà di FAD, dunque $FDE = FAD$.

7.

ABC è un triangolo equilatero, E *un punto sopra AC, sopra il prolungamento di* BC *prendiamo CD, CF, uguali rispettivamente a* CA, CE, *ed* AF, DE *s' incontrino in un punto* H; *dimostrare che* HC *è ad* EC *come* AC *è ad* AC *più* EC.

I due triangoli ACF, ECD sono uguali, quindi l' angolo $D = CAF$, il triangolo $EAH = HDF$, quindi $HE = HF$, e il triangolo $EHC = HCF$, e l' angolo $ECH = HCF$; ed essendo $ECF = \frac{2}{3}$ di 2 retti, sarà $HCF = \frac{1}{3}$ di 2 retti, uguali quindi a CBA, epperò $HC \parallel AB$, onde si ha la proporzione $HC : AB = CF : BF$, ossia $HC : AC = EC : AC + CE$.

8.

Le diagonali AC, *BD di un quadrilatero inscritto in un cerchio s' incontrano in* E; *dimostrare che il rettangolo contenuto da* AB, BC *è al rettangolo contenuto da* AD, DC *come* BE *è ad* ED.

I due triangoli ABE, DCE sono simili, quindi $AB : DC = BE : EC$, ed essendo simili anche i triangoli AED, BEC si ha $BC:AD = EC:DE$, e moltiplicando si ha $AB \times BC:DC \times AD = BE \times EC:EC \times DE = BE:DE$.

9.

Se in un triangolo rettangolo sia iscritto un quadrato con un lato sopra l'ipotenusa, questa rimane divisa in proporzione continua.

Sia ABC il triangolo rettangolo in A, $GDEF$ il quadrato inscritto che ha un lato DE sull'ipotenusa BC; dico che si avrà $BD:DE = DE:EC$.

I due triangoli GDB, GAF sono simili, quindi $BD:DG = GA:AF$. Similmente si ha $FE:EC = GA:AF$, onde queste due proporzioni avendo un rapporto di comune danno $BD:DG = FE:EC$, ma $DG = FE = DE$, quindi $BD:DE = DE:EC$.

10.

Se ABC *è un triangolo inscritto in un cerchio, si tiri per il punto* B *una retta parallela alla tangente al cerchio nel punto* A, *e si prolunghi sino all'incontro nel punto* D *con* AC *e col suo prolungamento; dimostrare che* AB *sarà media proporzionale tra* AC *e* AD.

I due triangoli ABC, ABD hanno l'angolo BAC di comune, $ACB = ABD$, perchè ciascuno è eguale ad HAB, quindi sono simili, e si avrà $AD:AB = AB:AC$.

11.

Se AB *è diviso in* C *e* D *in modo che* AC *sia medio proporzionale tra* AB *e* AD, *e si tiri un' altra retta comunque* AE *uguale ad* AC, *l'angolo* BED *sarà diviso per metà da* EC.

I due triangoli AEB, AED avendo i lati proporzionali, cioè $AB:AE = AE:AD$, e l'angolo BAE di comune sono equiangoli e quindi l'angolo $AED = EBD$. Ora l'angolo $AEC = ACE = CBE + BEC$, ma $CBE = AED$, dunque sarà $DEC = CEB$.

12.

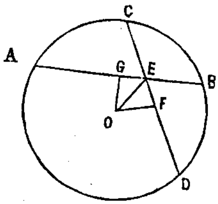
La parte di una tangente al cerchio intercetta fra le due tangenti all' estremità di un diametro, è divisa nel punto di *contatto in modo che il raggio è media proporzionale tra i due segmenti.*

Siano CA, DB le tangenti all' estremità del diametro CD, AB la tangente intercettata tra esse, OE il raggio che va al punto di contatto. I due triangoli AOC, AOE sono uguali, quindi l' angolo $AOE = COA$; come pure si ha l'angolo $EOB = BOD$, onde $AOE + EOB = COA + DOB = 1^r$, onde il triangolo AOB è rettangolo in O, OE è perpendicolare sull' ipotenusa, e quindi è media proporzionale tra i due segmenti AE, EB.

13.

Se due corde in un cerchio s' intersecano in modo che i segmenti dell' una abbiano la stessa ragione dei segmenti dell'altra, la retta che divide per metà l'angolo dei segmenti omologhi passa per il centro del cerchio. (Fig. 116).

Fig. 116.



Siano AB, CD le corde i cui segmenti AE, EB, ED, CE sono in proporzione, cioè $AE{:}EB = ED{:}CE$ (1).

Essendo $AE \times EB = ED \times EC$, sarà $AE : EC = ED : EB$, e confrontandola con (1) si ha $EB : EC = CE{:}EB$, onde $EB^2 = EC^2$ ed $EB = EC$, e quindi in (1) $AE = ED$, e la corda $BA = CD$. Tirando dal centro O le perpendicolari OG, OF ad AB, CD, si avrà il triangolo $OGE = EF$, e quindi, l' angolo $GEO = OEF$.

14.

Se un triangolo sia inscritto in un semicerchio, e si innalzi una perpendicolare da un punto qualunque del diametro, che incontri la circonferenza e gli altri due lati, i tre segmenti della perpendicolare saranno in proporzione continua.

Sia ABC il triangolo inscritto, DG la perpendicolare che incontra AC, BC in G, E, e la circonferenza in F. Il triangolo GCE è simile a GAD e ad EDB, quindi GAD ed EDB sono simili, epperò si ha $AD{:}DG = DE{:}DB$, onde $DG \times DE = AD \times DB = FD^2$, e $DG{:}FD = FD{:}DE$.

15.

Se le diagonali di un quadrilatero iscritto in un cerchio si *segano ad angolo retto, la somma dei rettangoli contenuti dai lati opposti sarà uguale al doppio del quadrilatero.*

Sia $ABCD$ il quadrilatero inscritto, AOC, DOB le diagonali che si segano ad angolo retto in O.

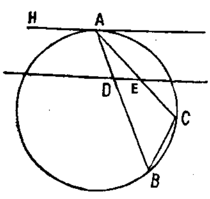
È il triangolo $ABC = AC \times \frac{BO}{2}$, ed $ADC = AC \times \frac{OD}{2}$;

sommando si ha $ABCD = AC\left(\frac{BO+OD}{2}\right) = AC \times \frac{BD}{2}$ e $2ABCD = AC \times BD$. Ma $AC \times BD = AD \times BC + AB \times DC$ (prop. D, 6, Eucl.), dunque $2ABCD = AD \times BC + AB \times DC$.

16.

Se da un punto fisso della circonferenza di un cerchio, si tirino corde qualunque, esse saranno tagliate dalla corda parallela alla tangente al cerchio nel punto fisso in modo, che i rettangoli contenuti da ciascuna corda e dal suo segmento compreso tra il punto fisso e la corda parallela alla tangente saranno tutti uguali tra loro. (Fig. 117).

Fig. 117.



Siano AC, AB corde qualunque tirate dal punto fisso A, DE la parallela alla tangente AH tracciata pel punto fisso A; dico che si ha $AC \times AE = AB \times AD$. Infatti i due triangoli ABC, ADE sono simili, perchè hanno l' angolo DAE di comune, $ACB = ADE$, essendo ciascuno uguale ad HAB, dunque si ha la proporzione $AC : AB = AD : AE$, e $AC \times AE = AB \times AD$.

17.

Se in due triangoli simili, dai vertici di due angoli uguali si tirino rette ai lati opposti, le quali facciano angoli uguali con i lati omologhi, queste avranno la stessa ragione dei lati sopra i quali cadono, e li divideranno proporzionalmente.

Siano ABC, DEF; i due triangoli simili, AG, DH le due rette tirate dai vertici omologhi A, D, in guisa che sia l'angolo $BAG = EDH$; dico che si avrà $AG : DH = BC : EF$, e $BG : GC = EH : HF$.

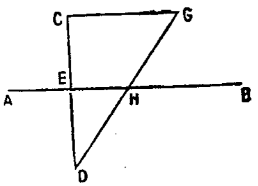
Infatti i due triangoli ABG, DEH sono simili, quindi $AB : DE = AG : DH$, ma $AB : DE = BC : EF$, dunque $AG : DH = BC : EF$.

Per la somiglianza dei triangoli ABG, EDH, ed AGC, DHF si ha $BG{:}AG = EH{:}DH$, e $GC{:}AG = HF{:}DH$, onde $BG{:}GC = EH{:}HF$.

18.

Applicare la prop. 2 del lib. VI a dimostrare come si possa con un pezzo di cordicella condurre per un dato punto una parallela ad una retta data. (Fig. 118).

Fig. 118.

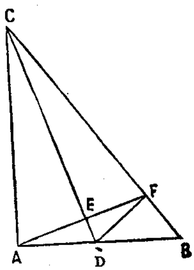


Si distenda la funicella perpendicolarmente su AB avente un estremo in C dato, si prenda $ED = CE$, poscia collocando un estremo in D la si distenda in modo che tagli AB in H, e la si prolunghi di $HG = DH$, la CG sarà la parallela richiesta.

19.

In un triangolo ABC *rettangolo in* A, *se tiriamo la* CD *bisettrice dell' angolo* C, *dimostrare che sarà la differenza di* BC *ed* AC *ad* AD *come* AB *è ad* AC. (Fig. 119).

Fig. 119.



Su DC dal punto A s' abbassi la perpendicolare AEF; e unendo D con F, risulta il triangolo $AEC = CEF$, $ADE = EDF$, $ADC = DFC$, quindi il triangolo DBF è rettangolo in F e simile ad ABC; epperò si ha $BF{:}BA = FD{:}AC$; ma $BF = BC - FC$, ossia $BC - AC$ ed $FD = AD$. Sostituendo si ha $BC - AC{:}AB = AD{:}AC$.

20.

Se due cerchi sono tangenti esternamente, la parte di una tangente comune compresa tra i punti di contatto sarà media proporzionale tra i loro diametri.

Sia AC la tangente comune ai due cerchi AB, CD.

Dai punti di contatto si conducano i diametri AB, CD che sono paralleli, perchè ambidue perpendicolari ad AC, e se si uniscono le loro estremità, le congiungenti BC, AD passeranno pel punto di contatto E dei due cerchi (III, 29, Es.). I due triangoli ABC, ADC sono simili, quindi si ha $AB : AC = AC : CD$.

21.

Date le lunghezze delle tre rette condotte dai vertici ai punti di mezzo dei lati opposti, costruire il triangolo. (Fig. 27).

Siano AF, BD, CE le tre mediane date, esse nel triangolo si debbono incontrare in un punto O, e saranno OF, OD, OE rispettivamente metà di OA, OB, OC (I. 80, Es.), di modo che le tre rette OB, OF, OC saranno note, e noto sarà il triangolo OBC, la cui soluzione ricade sul problema 16 del I. lib. Es. Costruito il triangolo OBC, si prolunghi CO di una quantità OE uguale alla metà di OC e BO di OD uguale alla metà di BO, si conducano BE, CD che prolungate s' incontrano in A, ed ABC sarà il triangolo richiesto.

22.

Inscrivere un quadrato in un dato segmento di cerchio.

Da una estremità della corda s' innalzi la perpendicolare uguale alla medesima, si unisca l' estremo di questa perpendicolare col punto medio della corda, la congiungente incontrerà l' arco in un punto che segnerà un vertice del quadrato richiesto.

23.

Trovare il luogo dei punti nei quali sono divise secondo una data ragione le rette condotte da un dato punto alla circonferenza di un cerchio dato.

Si unisca il punto dato col centro del cerchio dato, la congiungente si divida nel rapporto dato, da questo punto di divisione si conduca la parallela al raggio che unisce un punto d' incontro di una secante condotta dal punto dato colla circonferenza, si faccia centro nello stesso punto di divisione con raggio uguale alla parallela tirata (quella compresa tra la congiungente e la secante) si descriva una circonferenza che sarà il luogo cercato.

24.

Dati due cerchi i quali si tagliano, tirare per uno dei punti d' intersezione una linea retta che tagli le due circonferenze in modo che le corde intercette siano tra loro in una data ragione.

La congiungente i centri si divida nel rapporto dato, questo punto di divisione si unisca con uno dei punti d'intersezione, per questo punto si conduca la perpendicolare alla seconda congiungente, che risolverà il problema.

25.

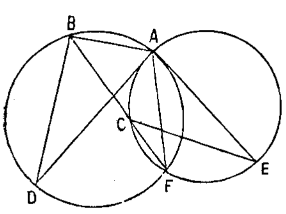
Inscrivere in un dato triangolo un parallelogrammo simile ad un parallelogrammo dato.

Da un vertice del triangolo dato si tiri la parallela al lato opposto, dal medesimo vertice tirisi una retta fino a questo lato, in modo che faccia colla parallela un angolo uguale ad uno del parallelogrammo dato, sulla retta tirata, si costruisca un parallelogrammo simile al dato, si unisca un secondo vertice del triangolo dato con un vertice del parallelogrammo costruito, la congiungente taglierà il lato opposto in un punto, dal quale tirate le parallele a due lati adiacenti sarà risoluto il problema.

26.

Se per il vertice e per l' estremità della base di un triangolo si descrivano due cerchi, in modo che intersechino la base o la base prolungata, i loro diametri saranno tra loro come i lati per l' estremità dei quali passano le loro circonferenze. (Fig. 120).

Fig. 120.

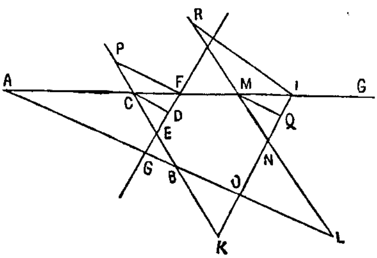


Sia ABC il triangolo, ABD, ACE i due cerchi passanti pel vertice A, che s' intersecano in un punto F della base BC e che il primo passa pel vertice B, il secondo pel vertice C. Si conducano i diametri AD, AE. È l'angolo $AEC = AFC = ADB$, quindi per la simiglianza dei triangoli ABD, ACE, si ha $AD : AE = AB : AC$.

27.

Se due linee rette qualunque, che si taglino, sono intersecate da due rette date, i rettangoli contenuti dai loro rispettivi segmenti saranno tra loro come i rettangoli contenuti dai rispettivi segmenti fatti dalle rette date sopra due altre parallele alle prime. (Fig. 121).

Fig. 121.



Siano CB, FG le rette che si segano in E, intersecate dalle date AI, AL; ML, IO le rette rispettivamente parallele alle prime ; dico che si avrà $CE{\times}EG:EB{\times}EF=NO{\times}MN:IN{\times}NL$. Si conduca $CD \parallel AG$, e risultano equiangoli i triangoli CED, GEB, e si ha $CE:EB=CD:GB$, come ancora $AF:CF=AG:CD$; e moltiplicandole, ed eguagliando il prodotto degli estremi a quello dei medi si ha $CE \times AF{\times}GB=EB \times CF \times AG$.

Tirando $FP \parallel AB$, si trova egualmente,

$CF \times AB \times EG = CA \times CF \times GB$; e moltiplicando queste due ultime uguaglianze, e sopprimendo i fattori comuni si ha $CE \times AF \times AB \times EG = EB \times AG \times CA \times EF$; e passando dall' eguaglianza alla proporzione si ha

$$AG \times AC : AB \times AF = CE \times EG : EB \times EF \quad (1).$$

Analogamente tirando MQ ed IR parallele ad AL si troverà

$$AM \times IN \times OL = MI \times AL \times NO.$$

$$MI \times AO \times NL = AI \times MN \times OL,$$

onde $$AM \times IN \times AO \times NL = AL \times NO \times AI \times MN,$$

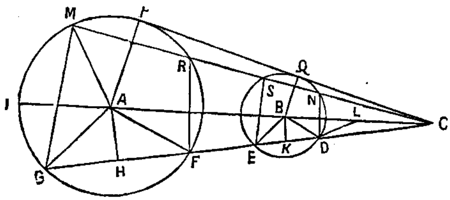
e $$AM \times AO : AL \times AI = NO \times MN : IN \times NL \quad (2).$$

Essendo $CB \parallel ML$ si ha $AC : AB = AM : AL$, e perchè è $GF \parallel KI$ si ha $AG : AF = AO : AI$; e moltiplicando si ha $AG \times AC : AB \times AF = AM \times AO : AL \times AI$, ed osservando che il primo rapporto di quest' ultima proporzione è uguale al primo di (1), ed il secondo è uguale al primo di (2), si conchiude che $CE \times EG : EB \times EF = NO \times MN : IN \times NL$.

28.

A, B *sono i centri di due cerchi disuguali*, PA, BQ *una coppia di raggi paralleli dimostrare che* PQ *passa per un punto fisso, le cui distanze dai centri sono tra loro come i rispettivi raggi; e dedurne un metodo per condurre una tangente comune ai due cerchi.* (Fig. 122).

Fig. 122.



AB, PQ incontrandosi in un punto C, a cagione di $AP = BQ$, i due triangoli ACP, BCQ risultano equiangoli, e quindi $AC : BC = AP : BQ$. Sia AF un altro raggio parallelo al raggio BD. Se la congiungente FD non passa per C, passerà per L, e si avrà $AL : BL = AF : BD = AC : BC$; e $AL - BL : BL = AC - BC : BC$, ossia $AB : BL = AB : BC$; onde $BL = BC$, il che non è, dunque FD non può passare per L, ma deve passare per C. È facile dimostrare che le distanze dei centri da queste rette sono tra loro come i rispettivi raggi. Dopo aver tirati i raggi paralleli AF, BD e prolungate le congiungenti FD, AB fino al loro punto d'incontro C, condotta la CQ tangente al cerchio EDQ, questa sarà tangente anche a GFP.

29.

Se per il punto fisso dell' esercizio precedente si tira una retta qualunque che tagli i due cerchi, i raggi condotti ai punti d' intersezione saranno paralleli, e le corde intercette saranno tra loro come i raggi rispettivi. (Fig. 122).

Sia $CDFG$ la retta tirata dal punto fisso C. Pel teorema precedente si ha $AC : BC = AF : BD$. Se dai centri si conducono le perpendicolari AH, BK, si scorgerà che gli angoli AFH, BDK sono acuti e quindi AFC, BDC ottusi, onde i due triangoli AFC, BDC avendo due lati proporzionali, un angolo di comune, i rimanenti angoli della medesima natura saranno simili, e quindi l'angolo $AFC = BDC$, $AF \parallel BD$. Similmente si dimostra $AG \parallel BE$.

In fine i due triangoli AGF, BED sono equiangoli, quindi $GF : ED = AG : BE$.

30.

Se per il medesimo punto fisso si tirano due linee qualunque che taglino i due cerchi, le corde che congiungeranno i corrispondenti punti d' intersezione saranno parallele, e degli otto punti d' intersezione, quattro saranno sopra la circonferenza di un altro cerchio, purchè due di questi quattro non siano sopra lo stesso cerchio e sopra la stessa retta data. (Fig. 122).

Siano CM, CG le due rette qualunque che tagliano i due cerchi; dico 1° essere $GM \parallel ES$, $FR \parallel DN$. Per il teorema precedente è il raggio $AG \parallel BE$, e $AM \parallel BS$. È l'angolo $GAI = EBI$, $IAM = IBS$, onde $GAM = EBS$, e quindi il triangolo GAM simile ad EBS, e l'angolo $AGM = BES$, ed essendo $CGA = CEB$, sarà $CGM = CES$, e quindi $GM \parallel ES$. Similmente si dimostra $FR \parallel DN$.

2.° Angolo $GMR + GFR = GFR + RFE$, onde $GMR = RFE$, $ESC + ESM = ESM + GMS$, perchè è $ESC = GMS$; ma $GMS = RFE$, dunque $ESC + ESM = ESM + RFE$, cioè uguale a due retti; ma quando un quadrilatero $FESR$ ha la somma degli angoli opposti uguale a 2 retti è inscrittibile (III, 32 Es.), dunque ecc.

31.

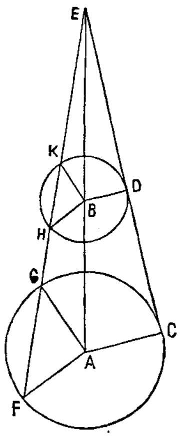
CDE *è una tangente comune a due cerchi, che incontra la linea dei centri* AB *nel punto* E; FGHKE *è una retta che taglia i due cerchi e passa per* E; *dimostrare che i rettangoli contenuti da* EC, ED, *da* EF, EK, *da* EG, EH *sono uguali.* (Fig. 123).

Si unisca il centro A con F, G, C, e il centro B con H, K, D, e sarà $AF \parallel BH$, $AG \parallel BK$ (VI, 29, Es.), e $AC \parallel BD$, quindi risultano le proporzioni:

$$EC : ED = EA : EB,$$

$$EF : EH = EA : EB = EG : EK, \text{ onde } (1)$$

Fig. 123.



$EC : ED = EF : EH = EG : EK$, $EF \times EK = EG \times EH$ (2). Inoltre si ha $ED^2 = EH \times EK$, e quindi $EK : ED = ED : EH$, la quale avendo con (1) i conseguenti uguali, gli antecedenti saranno in proporzione, cioè, $EC : EK = EF : ED$, epperò

$$EC \times ED = EF \times EK,$$

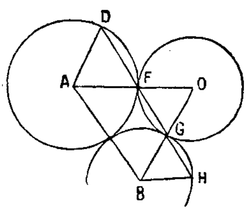
e quindi per (2) si ha

$$EC \times ED = EF \times EK = EG \times EH.$$

32.

Le rette che uniscono i punti di contatto di ciascun cerchio tangente a due cerchi dati passano per uno stesso punto. (Fig. 124).

Fig. 124.



Siano A, B i due centri di due cerchi tangenti ad un terzo di centro O, $DFGH$ la retta che passa per i punti di contatto F, G. È l'angolo $AFD = OFG = FGO = BGH$, quindi i triangoli ADF, BGH sono simili, e il raggio $AF \parallel BH$, onde la $DFGH$ passa per un punto fisso (VI, 28, Es.).

33.

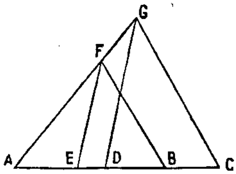
Trovare la media aritmetica, geometrica ed armonica tra due linee date.

La media aritmetica è la retta che unisce i punti medi dai lati non paralleli di un trapezio, i cui lati paralleli sono le due linee date.

Per trovare la media geometrica si uniscano le due linee date e dal punto d'unione s' innalzi una perpendicolare fino all' incontro della semicirconferenza descritta sulla somma delle due linee come diametro, la perpendicolare è la media geometrica.

Per trovare la media armonica si costruisca sulla somma delle due linee AB, BC (Fig. 125) un triangolo AGC, si prenda $BD=BC$, si tiri $BF \parallel CG$ e $FE \parallel DG$, la EB è la media armonica richiesta.

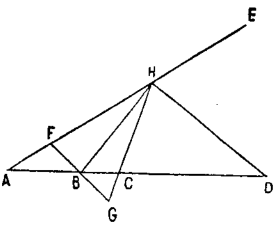
Fig. 125.



34.

Se due angoli che una retta fa con un' altra da una stessa parte siano bisecati, dimostrare che tutte le rette che tagliano queste quattro linee sono divise armonicamente da esse; e reciprocamente, se una retta è divisa armonicamente, e si uniscano i punti di divisione con un punto qualunque per mezzo di rette, due alterne delle quali facciano tra loro un angolo retto, gli angoli delle altre due saranno divisi per metà. (Fig. 126).

Fig. 126.



La prima parte della proposizione si dimostra identicamente al corollario della prop. A, VI, Euclide.

2.° Sia AD la linea divisa armonicamente in B, C, e BH, DH due rette alterne che uniscono B, D ad H in modo che sia BHD un angolo retto; dico che gli angoli AHC, CHE sono divisi per metà dalle BH, DH.

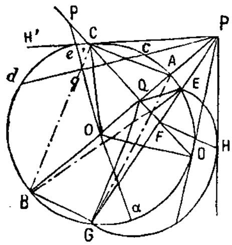
Tirisi per B la $FBG \parallel HD$ e si avrà $GB : HD = BC : CD$, ma per ipotesi si ha $AB : BC = AD : CD$, quindi $GB : HD = AB : AD = BF : HD$, onde è $GB = BF$, e quindi i due triangoli HFB. BHG sono uguali per avere il lato $FB = BG$, HB, di comune e l'angolo $FBH = HBG$, e per conseguenza l'angolo $FHB = BHG$. Similmente si dimostra l'angolo $CHD = DHE$, dunque ecc.

35.

Se da un punto P *fuori di un cerchio si tirino le tangenti* PC, PD, *e la retta* CD, *che unisce i punti di contatto, tagli in* Q *il diametro* AOB *che passa per* P; *dimostrare che il rettangolo contenuto da* OP, OQ *è uguale al quadrato del rag-*

gio, e che la retta PB *è divisa armonicamente e l'angolo* PCQ *bisecato.* (*Il punto* P *si dice il polo di* CQD, *e* CQD *la polare di* P). (Fig. 127).

Fig. 127.



Si unisca il centro O con C e D, e il punto C con B ed A. Chiaramente si vede che è il triangolo $COP=DOP$, e quindi l'angolo $CPO=DPO$, onde il triangolo $PCQ=DPQ$, e gli angoli in Q retti.

Nel triangolo ODP, la DQ è perpendicolare all' ipotenusa OP, quindi $OP \times OQ = OD^2$.

Essendo l' angolo $COA=DOA$, sarà l'arco $CA=AD$, e l'angolo $PCA=ACD$. Essendo il diametro BA perpendicolare alla corda CD, sarà l' arco CBD diviso per metà in B, onde l' angolo $H'CB=BCD$. Di qui si vede che BC, CA essendo rispettivamente bisettrici degli angoli $H'CQ$, QCP, sarà PB divisa armonicamente.

36.

Se P *sia il polo di* CQD, *e si tiri una retta qualunque per il punto* P, *che tagli il cerchio nei punti* E, G, *e la retta* CD *nel punto* F, *dimostrare che* PG *è divisa armonicamente, e gli angoli* PEQ, PGQ *sono bisecati da* EA, GA. (Figura 127).

Sopra GE si descriva il semicerchio GHE, si tiri FH perpendicolare sopra PG e si congiunga HP. Si ha $CP^2=PQ^2+CQ^2$, ma $CQ^2=CF \times FD+QF^2$ (II, 5, Euclide), quindi $CP^2=PQ^2+CF \times FD+QF^2=PF^2+CF \times FD=PF^2+GF \times FE=PF^2+FH^2=PH^2$; ed essendo $CP^2=GP \times PE$, sarà anche $PH^2=GP \times PE$, e quindi PH tangente a GHE, onde la PG è divisa armonicamente (prop. prec.). Gli angoli AEB, AGB sono retti, ed essendo PB diviso armonicamente in Q, A, le rette EA, GA saranno bisettrici degli angoli PEQ, PGQ (34, VI, Es.).

37.

Se P *sia il polo di* CQD, *il polo di una retta che passa per* P *sarà sopra* CQD; *e reciprocamente la polare di un punto qualunque di* CQD *passerà per* P. (Fig. 127).

1.° Sia Pd la retta che passa per P; pel medio q di cd si conduca la perpendicolare qp che incontrerà CQD in un punto p; dico che p sarà il polo di dqP.

Infatti i due triangoli POq, pOQ sono simili, quindi $Oq:OQ = OP:Op$, e $Oq \times Op = OQ \times OP = R^2 = Oe^2$ (VI, 35, Es.) onde $Oe : Oq = Op : Oe$, e $Oe - Oq : Oe + Oq = Op - Oe : Op + Oe$, ovvero $pa : qa = pe : eq$. cioè che i tre segmenti, pa, ea, qa sono in proporzione armonica, quindi p è il polo di Pd.

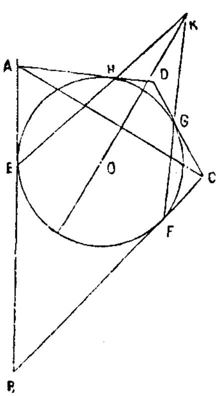
2.° Reciprocamente se p preso sulla CQD è polo, la sua polare dc passerà per P.

Infatti, unendo P con q ed essendo $pO \times Oq = PO \times OQ = R^2$ (VI, 35, Es.), ossia $pO : PO = OQ : Oq$, risultano simili i due triangoli pOQ, POq per avere due lati proporzionali e l' angolo compreso uguale, quindi Pq è perpendicolare a pa, epperò coinciderà con cd.

38.

Dimostrare che, se un cerchio iscritto in un quadrilatero ABCD *è tangente ai suoi lati* AB, BC, CD, DA, *rispettivamente nei punti* E, F, G, H, *ed* EH, FG *siano prolungate fino ad incontrarsi in un punto* K, *la retta condotta da* K *al centro del cerchio sarà perpendicolare ad* AC. (Fig. 128).

Fig. 128.



Essendo AE, AH tangenti al cerchio EFG, il punto A sarà il polo di EH (VI, 35, Es.), e il polo di AC, deve trovarsi sopra EH (prop. prec.). Similmente, essendo CF, CG tangenti ad EFG, il punto C sarà il polo di FG, e il polo di AC deve trovarsi sopra FG, quindi il punto d'incontro K di EH, FG sarà polo di AC, e la KO che passa pel centro sarà perpendicolare ad AC.

39.

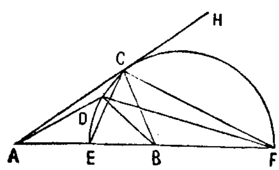
Se in un triangolo ABC *il lato* AC *è doppio di* BC; *e se* CD, CE *sono le rispettive bisettrici dell' angolo* C *e dell' angolo esterno formato dal prolungamento di* AC *i triangoli* CBD, ACD, ABC, CDE *saranno tra loro come i numeri* 1, 2, 3, 4.

Si sa che (VI, 3. Eucl.) $BC : AC = BD : DA$; ma $BC = \frac{1}{2} AC$, sarà $BD = \frac{1}{2} DA$, onde $DA = 2BD$, $AB = 3BD$. Si sa pure (VI, A, Eucl.) che $BC : AC = BE : AE$, quindi $AE = 2AB$, $AB = BE = 3BD$; e $DE = 4BD$, onde DB, DA, AB, DE sono come i numeri 1, 2, 3, 4, e quindi il triangolo CBD: $ACD : ABC : CDE = 1 : 2 : 3 : 4$.

40.

Il luogo dei vertici di tutti i triangoli che hanno la stessa base, e gli altri due lati in una data ragione, è la circonferenza di un cerchio. (Fig. 129).

Fig. 129.

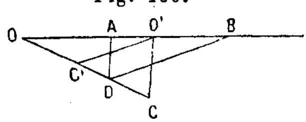


Siano ACB, ADB i triangoli della stessa base che hanno $AC : CB = AD : DB = m : n$. Si divida AB in modo che sia $AE : EB = m : n$, e $AF : BF = m : n$. Unendo F con C, risulterà ECF retto, per essere CE bisettrice dell' angolo ACB, e CF bisettrice di BCH (VI, 3 ed A, Eucl.). Similmente si dimostra che l' angolo EDF è retto; buindi i vertici C, D sono sopra la circonferenza di diametro EF.

41.

Trovare il luogo dei punti nei quali due cerchi dati sono veduti sotto lo stesso angolo (Fig. 130).

Fig. 130.



Si divida la congiungente i centri O, O' in A e B in modo che i segmenti OA, AO' ed OB, $O'B$ stiano come i raggi dei cerchi dati : la circonferenza descritta sopra AB come diametro sarà il luogo cercato.

Oss. Per trovare i punti A *e* B *bisogna prendere* OD = R, DC=R', DC'=R', *e tirare dal punto* D *le* DA, DB *rispettivamente parallele a* CO', C'O'. *Analogamente si trovano i punti* E, F *nella figura della proposizione precedente.*

42.

In un triangolo ABC *rettangolo in* A, *bisecare con* CD *l'angolo* C, *e dimostrare che il doppio del quadrato di* AC *è alla differenza dei quadrati di* AC *e di* AD, *come* AB *è ad* AD.

Poichè CD è bisettrice dell'angolo C, si ha (VI, 3, Eucl.), $AC : CB = AD : DB$ (1), ovvero $AC : AD = CB : DB$, ed elevando a quadrato tutti i termini di questa proporzione si ha $AC^2 : AD^2 = CB^2 : DB^2$, ed $AC^2 - AD^2 : AC^2 = CB^2 - DB^2 : CB^2$ e $2AC^2 : AC^2 - AD^2 = 2CB^2 : CB^2 - DB^2$ (2). Da (1) si ha $AC + CB : CB = AD + DB : DB$, e $(AC + CB)^2 : CB^2 = (AD + DB)^2 : DB^2$, onde perchè è

$$AD + DB = AB, \text{ si ha } DB^2 = CB^2 \times \frac{AB^2}{(AC + CB)^2},$$

e sostituendo in (2) si ha,

$$2AC^2 : AC^2 - AD^2 = 2CB^2 : CB^2 - CB^2 \times \frac{AB^2}{(AC + CB)^2} \quad (3);$$

ma

$$\frac{2CB^2}{CB^2 - CB^2 \times \dfrac{AB^2}{(AC + CB)^2}} =$$

$$\frac{2BC^2}{BC^2\left(1 - \dfrac{AB^2}{(AC + CB)^2}\right)} = \frac{2BC^2}{BC^2\left(\dfrac{(AC + BC)^2 - AB^2}{(AC + BC)^2}\right)} =$$

$$\frac{2BC^2\,(AC + BC)^2}{BC^2\left((AC + BC)^2 - AB^2\right)} = \frac{2(AC + BC)^2}{(AC + CB)^2 - AB^2};$$

questo rapporto sostituendo in (3), si ha

$$2AC^2 : AC^2 - AD^2 = 2(AC + BC)^2 : (AC + CB)^2 - AB^2 \quad (4).$$

Ma dalla figura si ricava che $(AC + BC)^2 - AB^2 = (AC + BC)^2 - BC^2 + AC^2 = (AC + BC + BC)\,(AC + BC - BC) + AC^2 = (AC + 2BC)\,AC + AC^2 = 2AC\,(AC + BC)$,
e sostituendo in (4) si ha

$$2AC^2 : AC^2 - AD^2 = 2(AC + BC)^2 : 2AC\,(AC + CB) = AC + BC : AC;$$

ma da (1) si ha

$$AC + BC : AC = AD + DB : AD = AB : AD,$$

dunque $2AC^2 : AC^2 - AD^2 = AB : AD$.

43.

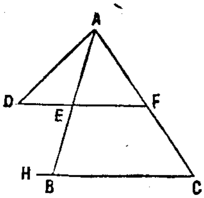
Dati un lato, l' angolo opposto e la ragione degli altri due lati, costruire un triangolo.

Sul lato dato si costruisca un segmento di cerchio capace dell' angolo dato, poscia lo si divida nel rapporto dato; sopra un segmento di esso lato si costruisca un altro segmento di cerchio capace della metà dell' angolo dato, il quale, incontrando il primo segmento di cerchio, determinerà il triangolo richiesto.

44.

Se in due triangoli un angolo dell' uno è uguale a un angolo dell' altro e un altro angolo dell'uno è supplementare ad un altro angolo dell' altro, i lati opposti a questi quattro angoli saranno proporzionali. (Fig. 131).

Fig. 131.



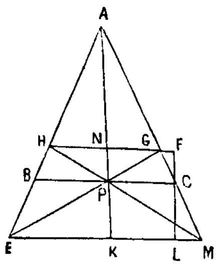
Siano ABC, ADE i due triangoli che hanno l'angolo $BAC = DAE$, ABC supplemento di DEA. Si situino detti triangoli come nella figura, e prolungando DE fino all' incontro di AC in F, sarà $EF \parallel BC$, e si avrà $AC : AF = BC : EF$. E perchè è l'angolo $DAE = EAF$, si ha (VI, 3, Eucl.) $AD : AF = DE : EF$, e quindi $AC : AD = BC : DE$.

45.

Per un punto qualunque dato sulla bisettrice di un angolo tirare una retta che faccia con i lati angoli uguali e dimostrare che questa linea è la più breve che passi per quel punto e termini ai due lati, e il triangolo così formato è il minimo. (Fig. 132).

Dal punto P della bisettrice AP dell' angolo BAC menando la perpendicolare ad AP risulterà l'angolo $ACP = ABP$.

Fig. 132.



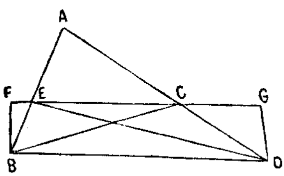
Ora BC è la più corta retta che si può tirare pel punto P. Si conduca un' altra retta EPG, e $GH \parallel BC$, $EM \parallel BC$, $FCL \parallel AP$. Si dimostra facilmente che $EP > PG$, quindi, perchè si ha $EP : PG = MC : CG = LM : FG$, sarà $LM > FG$, epperò $PC < \frac{1}{2}(NG + KM)$, e $BC < \frac{1}{2}(HG + EM)$. Si ha eziandio $(HG + EM) < (HP + PG + PE + PM)$, $= (HM + GE) = 2GE$, quindi $BC < GE$.

Il triangolo ABC è il minimo (I, 38, Es.).

46.

La retta che taglia ad angoli uguali i lati di un angolo, è la più corta che possa formare un triangolo di area data. (Fig. 133).

Fig. 133.



Sia BC la retta che taglia i lati dell' angolo BAC ad angoli uguali, e supponiamo che abbia formato il triangolo ABC di area data. Tirisi una retta qualunque CE, e $BD \parallel EC$; e si ha il triangolo $AED = ABC$; ora dico che è $DE > BC$.

Da B, D conducansi BF, DG perpendicolari ad EC. Perchè è $EC \parallel BD$, si ha $AD : AB = CD : EB$, ma è $AD > AB$, sarà anche $CD > EB$. Ciò posto è $CD^2 = DG^2 + CG^2$, $EB^2 = BF^2 + EF^2$, ma $CD > EB$, sarà $DG^2 + CG^2 > BF^2 + EF^2$, quindi $CG^2 > EF^2$, $CG > EF$, ed $EG > FC$. Ora $ED^2 = EG^2 + GD^2$, $BC^2 = FC^2 + BF^2$, ma $EG^2 + GD^2 > FC^2 + BF^2$, sarà anche $ED^2 > BC^2$, ed $ED > BC$.

47.

Se un triangolo isoscele sia iscritto in un cerchio, e dal vertice sia tirata una retta finchè incontri la base del triangolo e la circonferenza, il rettangolo contenuto dai segmenti di que-

sta linea sarà uguale al quadrato di uno dei lati uguali del triangolo.

Sia ABC il triangolo isoscele iscritto, AED una retta tirata dal vertice A e seghi la base e la circonferenza rispettivamente in E, D; dico che si avrà $AC^2 = AD \times AE$.

Difatti è l'angolo $AEC = EDC + ECD = ACD$, quindi i due triangoli ADC, AEC per avere l'angolo DAC di comune, $AEC = ACD$, sono simili, epperò $AC : AD = AE : AC$, da cui $AC^2 = AD \times AE$.

48.

Porre dentro un cerchio sei cerchi uguali tangenti tra loro e al dato cerchio, e dimostrare che il cerchio interno che è tangente a tutti è uguale a ciascuno di essi.

Si circoscriva al cerchio dato un esagono regolare, si tirino le diagonali che passeranno per il centro, le bisettrici degli angoli dei triangoli formati determinano i centri dei cerchi uguali tangenti tra loro e al cerchio dato. La ragione per cui il cerchio interno tangente a tutti è uguale a ciascuno di essi, si ritrova nell'esercizio 80, 1, libro.

49.

Le perpendicolari abbassate dai vertici di un triangolo sui lati opposti s'incontrano in un punto.

Questo teorema è stato dimostrato nel I libro, Es. 89. Un' altra dimostrazione si rinviene nell'Es. 33 III lib. Si può eziandio dimostrarlo facilmente dalla simiglianza dei triangoli risultanti.

50.

AB *è diametro di un cerchio;* AC, BD *sono due corde* AB *s'intersecano in* E; *abbassata* EF *perpendicolare ad* AB, *dimostrare che prolungata passa per l' intersezione di* AD, BC.

È una conseguenza del precedente teorema.

51.

Trovare fuori di un dato cerchio un punto tale che la som-

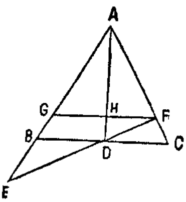
ma delle due tangenti condotte da esso al cerchio, sia uguale alla retta condotta da esso al centro e prolungata fino all' incontro colla circonferenza.

Dall' estremo del diametro si tiri su di esso la perpendicolare uguale alla metà del raggio, dall' estremo di questa si conduca una tangente al cerchio che determinerà nel suo incontro col diametro il punto richiesto.

52.

ABC *è un triangolo isoscele; tirate* AD *perpendicolare alla base, e* DEF *che tagli* AB, AC *nei punti* E, F; AD *sarà a* DE, *come la somma di* AB *e di* AF *è alla differenza di* AB, AF. (Fig. 134).

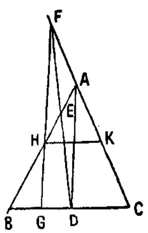
Fig. 134.



Il teorema come è enunciato non può sussistere. Infatti sia se è possibile $AD{:}DE{=}AB{+}AF{:}AB-AF$. Tirando $FHG \parallel BC$ si ha $AD:DE=AB+AG:AB-AG$, ovvero: BG (1), essendo $AF=AG$, e $AB-AF=AB-AG=BG$. Essendo $GH \parallel BD$ si ha $AB:AG=AD:AH$, e $AB+AG:AB-AG=AD+AH:AD-AH$: e paragonando con (1) si ha $AD:DE=AD+AH:AD-AH$ ovvero: HD, onde $AD \times HD = DE \times AD + DE \times AH$ (2). Ciò posto è $ED > BE > FC > HD$, quindi l' eguaglianza (2) non può sussistere, dunque ecc.

Se la retta DEF taglia i lati AB, AC, come nella figura 135, anche si manifesta l' assurdo.

Fig. 135.

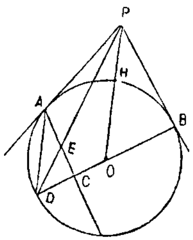


Infatti tirando FHG perpendicolare a BC, e $HK \parallel BC$, si dovrebbe avere $AD{:}DE{=}BA{+}AF{:}BA{-}AF{=}FC{:}HB$, ovvero (perchè $HB=KC$) $AD{:}DE=FC{:}KC=FG{:}HG$, ossia $AD{:}FG=DE:HG$, il che è assurdo.

53.

Da un punto P *tirate le tangenti* PA, PB *ad un cerchio, e condotta* AC *perpendicolare al diametro* BD, *dimostrare che* AC *è bisecata da* PD *in* E. (Fig. 136).

Fig. 136.



Si unisca A con D, e P col centro O, PO divide l' arco AHP per metà, quindi l' angolo $ADB = POB$, e i due triangoli ADC, OPB sono equiangoli, e si ha $DC{:}AC = OB{:}PB$. I due triangoli EDC, DPB dànno $DC{:}EC = DB{:}PB$; dalle quali proporzioni si ricava $AC : EC = DB : OB$; ma OB è $\frac{1}{2}$ DB, sarà $CE = \frac{1}{2} AC$.

54.

Dividere una data retta in un numero qualunque di parti uguali, e quindi dimostrare come si può dividere un triangolo nello stesso numero di parti uguali per mezzo di rette.

1.° Colla retta data si faccia un angolo qualunque, sul lato indefinito a partire dal vertice si prendano n porzioni uguali, si unisca l' estremo dell' ultima porzione con l' estremo della retta data, si tirino alla congiungente dai punti di divisione delle parallele che taglieranno la retta data in n parti uguali.

2.° Si divide in parti uguali la base del triangolo, e si uniscono i punti di divisione col vertice.

55.

AD *è la bisettrice dell' angolo al vertice di un triangolo, e taglia la base* BC *in* D; *in* BC *prolungata preso un punto* E *ugualmente distante da* A *e da* D, *dimostrare che* BE *è a* DE *come* DE *è a* CE.

L'angolo $ADE = B + BAD = DAC + CAE$, ma $BAD = DAC$, quindi $B = CAE$, e i due triangoli BAE, CAE sono equiangoli, e danno $BE : AE = AE : CE$, e per essere $AE = DE$ si ha $BE : DE = DE : CE$.

56.

Se per il punto di mezzo della base di un triangolo si tiri una rettaqualunque, essa sarà divisa armonicamente da un lato del triangolo, dalla base, dall' altro lato prolungato e da una retta parallela alla base condotta per il vertice.

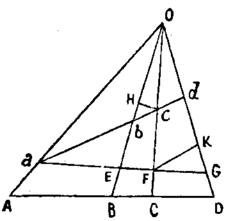
Sia ABC il triangolo, $DEFC$ la retta che taglia i lati AB, AC, la AG parallela alla base BC in D, F, G, e la base nel medio E.

I due triangoli AFG, EFC danno $FG : GA = FE : EC$; e i due triangoli DAG, DEB danno $DG : GA = DE : BE$, quindi $DG : FG = DE : FE = DG - EG : EG - FG$.

57.

Se quattro rette che passano per uno stesso punto dividono una retta data armonicamente, divideranno anche armonicamente un' altra retta qualunque. (Fig. 137).

Fig. 137.



Siano OA, OB, OC, OD le rette che dividono armonicamente la AD, cioè si abbia $AD : CD = AB : BC$; dico che qualunque retta ad sarà divisa armonicamente.

Tirisi $aG \parallel AB$, $cH \parallel aG$, $FK \parallel ad$. Per la simiglianza dei triangoli abE, Hbc, e dei due OEF, OHC si ha

$$ab : aE = bc : cH$$

$$EF : cH = OF : Oc, \text{ quindi}$$

$$ab \times EF \times OC = aE \times bc \times OF, \text{ e}$$

$\dfrac{ab \times EF \times OC}{aE \times bc \times OF} = 1$ (1). Similmente si ha $ad : FK = aG : FG$,

$$Oc : OF = cd : FK, \text{ e quindi}$$

$$\frac{ad \times Oc \times FG}{aG \times OF \times cd} = 1 \quad (2).$$

Le (1) e (2) danno $\dfrac{ab \times EF}{bc \times aE} = \dfrac{ad \times FG}{cd \times aG}$, ma per l'ipotesi, e per le parallele aG, AD si ha

$$\frac{FG}{aG} = \frac{CD}{AD} = \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{aE}, \text{ quindi } \frac{ab}{bc} = \frac{ad}{cd}.$$

58.

Due cerchi, uno dei quali è tangente ai tre lati di un trian-

golo ABC, *l'altro a un lato* BC *e ai prolungamenti degli altri due, siano tangenti ad* AB *in* D_1 *e* D_2, *ad* AC *in* E_1, E_2; *dimostrare che i rettangoli contenuti da* BD_1, BD_2, *da* CE_1, CE_2, *e dai due raggi sono uguali tra loro.*

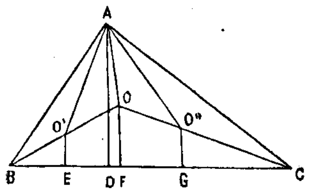
Siano O, O' i centri dei cerchi. Essendo l'angolo $D_1 BO = OBC$, $D_2 BO' = O'BC$, sarà $D_1 BO + D_2 BO' = 1^r$, onde $D_2 BO' = D_1 OB$, e i due triangoli $D_1 BO$, $D_2 BO'$ sono simili, e danno $BD_1 : D_1 O = D_2 O' : D_2 B$, quindi $BD_1 \times BD_2 = D_1 O \times D_2 O' = R \times R'$.

Similmente si dimostra essere $E_1 C \times E_2 C = R \times R'$.

59.

AD *è la perpendicolare abbassata dal vertice* A *sulla ipotenusa* BC *di un triangolo rettangolo; dimostrare che il quadrato del raggio del cerchio iscritto in* ABC, *è uguale alla somma dei quadrati dei raggi dei cerchi iscritti in* ABD, ACD. (Fig. 138).

Fig. 138.



Siano O', O, O'' i centri dei cerchi iscritti in ABD, ABC, ADC; O', O si debbono trovare sulla bisettrice dell'angolo ABC, e O, O'' su quella dell'angolo BCA.

I due triangoli ABO', OBC sono simili, quindi stanno fra loro come i quadrati delle altezze, ossia dei raggi $O'E$, OF; cioè si ha

$$ABO' : OBC = O'E^2 : OF^2 = AB^2 : BC^2,$$

come pure si ha

$$AO''C : OBC = O''G^2 : OF^2 = AC^2 : BC^2,$$

quindi

$$O'E^2 : O''G^2 = AB^2 : AC^2,\ O'E^2 + O''G^2 : AB^2 + AC^2 = O'E^2 : AB^2 = OF^2 : BC^2,$$

ma

$$BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

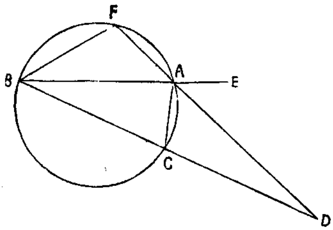
quindi

$$OF^2 = O'E^2 + O''G^2.$$

60.

Se l'angolo esterno di un triangolo sia bisecato da una retta che tagli il prolungamento della base, il quadrato di questa linea sarà uguale alla differenza dei rettangoli contenuti dai segmenti della base e dai lati del triangolo (Fig. 139).

Fig. 139.



Sia AD la bisettrice dell'angolo esterno CAE del triangolo ABC, che incontra la base BC in D. Si faccia l'angolo $ABF = ADC$, e si prolunghi AD fino all'incontro di BF in F. I due triangoli ACD, AFB sono equiangoli, quindi $AB{:}AD = AF{:}AC$, e $AB \times AC = AD \times AF$ (1). Essendo l'angolo $ACD = F$, si avrà $F + ACB = 2$ retti, quindi per i punti A, F, B, C passerà la circonferenza $AFBC$, e si ha $BD \times CD = FD \times AD = AD \times AF + AD^2$ (3, II, Eucl.), quindi per (1) $AD^2 + AB \times AC = BD \times CD$, e $AD^2 = BD \times CD - AB \times AC$.

61.

Se dal vertice A *di un parallelogrammo sia tirata una retta che tagli la diagonale in* E *e i lati* BC, CD *in* F, G, *dimostrare che* AE *sarà media proporzionale tra* EF *ed* EG.

I due triangoli ABE, DEG sono simili, quindi $BE{:}ED = AE : EG$; ed essendo simili anche i due triangoli AED, BEF si ha $BE : ED = EF : AE$, quindi $EF : AE = AE : EG$.

62.

Data la parte n^{esima} *di una retta trovarne la parte* $(n+1)^{\text{esima}}$.

Dall'estremo della retta n^{esima} si tracci una retta indefinita, su questa si prendano n porzioni uguali, e si unisca l' estremo della prima porzione coll' altro della n^{esima}, poscia si divida la retta composta di n porzioni in $n+1$ parti uguali: la parallela tirata dall' estremo della prima delle $n+1$ porzioni alla prima congiungente, risolve il problema.

63.

CAB, CEB *sono due triangoli che hanno un angolo comune* B, *e i lati* CA, CE *uguali, se in* BE *prolungata si prenda* ED *terza proporzionale a* BA, AC, *i triangoli* BDC, BAC *saranno simili.*

Per l'ipotesi si ha $BA : AC = EC : ED$; ed essendo l' angolo $BAC = CED$, i due triangoli BAC, CED sono equiangoli, quindi l'angolo $D = ACB$, e i triangoli BAC, BDC simili.

64.

APB *è il quadrante di un cerchio*, SPT *una tangente nel punto* P, *che taglia i raggi* OA, OB *nei punti* S, T; *tirata* PM *perpendicolare ad* OA, *dimostrare che il triangolo* AOB *è media proporzionale tra i triangoli* SOT, OMP.

Si ha triangolo $SOT : AOB = SO \times OT : AO \times OB$. Tirando PQ perpendicolare sopra OB. si ha $PO^2 = SO \times MO$,

$$\text{e} \quad SO = \frac{PO^2}{MO}. \text{ Similmente si trova } OT = \frac{PO^2}{OQ};$$

quindi

$$SOT : AOB = \frac{PO^2}{MO} \times \frac{PO^2}{OQ} : AO \times OB;$$

e dividendo i termini del secondo rapporto per PO^2 si ha

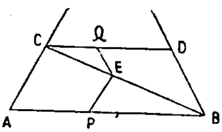
$$SOT : AOB = PO^2 : MO \times OQ = AO \times OB : MO \times OQ = AOB : PMO.$$

65.

Per un punto dato tirare una retta che quando fosse prolungata, passerebbe per il punto d' incontro di due rette date senza prolungare queste rette fino ad incontrarsi. (Fig. 140).

Pel punto dato P tirisi la trasversale APB, poscia un' al-

Fig. 140.

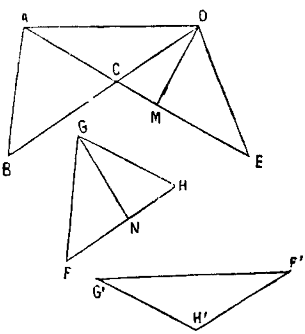


tra qualunque $CD \parallel AB$, e si unisca C con B; tirata $PE \parallel AC$, $EQ \parallel BD$, sarà determinato un punto Q che risolve il problema.

66.

Se due triangoli sono uguali ed hanno i lati che comprendono un angolo in ciascuno reciprocamente proporzionali, questi angoli o saranno uguali o supplementari l' uno all' altro. (Fig. 141).

Fig. 141.



1.° Siano ABC, GHF i due triangoli uguali, e che hanno $AC : GH = HF : BC$, e quindi $AC \times BC = GH \times HF$.

Si prolunghino i lati AC, BC, e prendasi $CD = GH$, $EC = HF$, e si avrà triangolo $ABC : CDE = AC \times BC : DC \times EC$, ma si ha pure triangolo $ABC : GHF = AC \times BC : GH \times HF$, quindi il triangolo $CDE = GHF$, ed avendo la base $CE = HF$, sarà l'altezza $DM = GN$, onde i due triangoli rettangoli CDM, GHN sono uguali, e quindi l' angolo $GHF = DCE = ACB$.

2.° Sia triangolo $ABC = G'H'F'$, $AC \times BC = G'H' \times H'F'$. Si ha $ABC : G'H'F' = AC \times BC : G'H' \times H'F'$; si ha pure $ABC : ACD = AC \times BC : AC \times CD$, quindi il triangolo $G'H'F' = ACD$, e si conchiude come sopra che l' angolo $G'H'F' = ACD$, epperò ACB supplementare di $G'H'F'$.

67.

Costruire un triangolo isoscele uguale ad un dato triangolo scaleno e collo stesso angolo al vertice.

La media proporzionale tra i due lati che comprendono l'angolo al vertice del triangolo scaleno è uno dei lati uguali del triangolo isoscele cercato.

68.

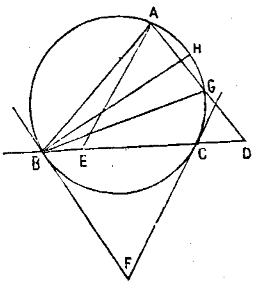
ABCD *è un rettangolo; tirata una retta* AE *da* A *a un punto di* CD, *e la* BF *perpendicolare ad* AE, *dimostrare che il rettangolo contenuto da* AE , BF *è uguale al dato rettangolo* ABCD.

Si ha triangolo $ABE : FBE = AE : FE$, $FBE : ABC = BF \times FE : AB \times BC$, quindi $ABE : ABC = AE \times BF : AB \times BC$; ma $ABE = ABC$, sarà anche $AE \times BF = AB \times BC$.

69.

ABC *è un triangolo iscritto in un cerchio* , AD , AE *rette tirate alla base parallele alle tangenti al cerchio in* B, C; *dimostrare che* AD *è uguale ad* AE, *e che* BD *è a* EC *come il quadrato di* AB *è al quadrato di* AC. (Fig. 142).

Fig. 142.



1.° Essendo $AE \parallel CF$, $AD \parallel BF$, sarà l' angolo $AED = ECF = CBF = ADE$, quindi $AE = AD$.

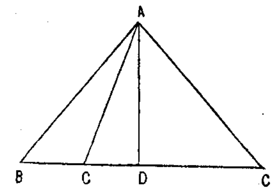
2.° Tirisi il diametro BH che sarà perpendicolare ad un AD, e sarà la corda $AB = BG$, l' arco $AKB = BCG$ e l' angolo $BCA = BAD$, onde i due triangoli ABD, ABC sono simili, e quindi $BD : AB = AB : BC$. Similmente si trova $CE : AC = AC : BC$; dalle quali proporzioni si ricava $BD : CE = AB^2 : AC^2$.

70.

In un triangolo qualunque, abbassata la perpendicolare dal vertice sopra la base, la base è alla somma dei lati, come la differenza dei lati è alla differenza o alla somma dei segmenti della base, secondo che la perpendicolare cade dentro o fuori del triangolo. (Fig. 143).

Sia ABC il triangolo, AD la perpendicolare. Riteniamo positivo il segmento DC a destra di D, e negativo il segmento DC a sinistra di D.

Fig. 143.

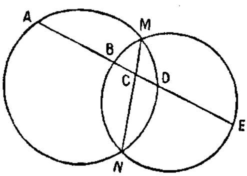


Ciò posto si ha $AB^2-BD^2=AC^2-DC^2$, $AB^2-AC^2=BD^2-DC^2$, $(AB+AC)\ (AB-AC)=(BD+DC)\ (BD-DC)$, e $AB+AC:BD+DC=BD-DC:AB-AC$, ossia $BC:AB+AC=AB-AC:BD\mp DC$, secondo che DC è a sinistra o a destra di D.

71.

Se ABCDE *è una retta che tagli due cerchi che s' intersecano, essendo* C *il punto dove essa incontra la retta che unisce i punti d' intersezione dei due cerchi;* AB *sarà a* BC *come* ED *a* DC, *e il quadrato di* AE *sarà al quadrato di* BD *come il rettangolo contenuto da* AC , CE *è al rettangolo contenuto da* BC, CD. (Fig. 144).

Fig. 144.



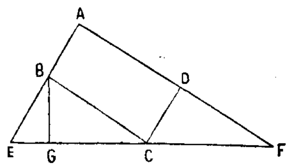
1.° Si ha $AC\times CD=MC\times CN=BC\times CE$, quindi $AC:BC=CE:CD$ (1), e $AC-BC:BC=CE-CD:CD$, onde $AB:BC=DE:CD$.

2.° Da (1) si ha $AC+CE:CE=BC+CD:CD$, ossia $AE:BD=CE:CD$, la quale paragonata con (1) dà $AE:BD=AC:BC$, e quindi $AE^2:BD^2=AC\times EC:BC\times CD$.

72.

Se un rettangolo sia iscritto in un triangolo rettangolo, con un angolo comune, il rettangolo contenuto dai segmenti dell' ipotenusa sarà uguale alla somma dei rettangoli contenuti dai segmenti dei cateti (Fig. 145).

Fig. 145.



Sia $ABCD$ il rettangolo inscritto nel triangolo AEF rettangolo in A. Tirisi BG perpendicolare ad EF.

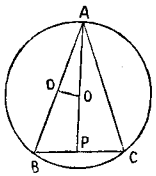
I triangoli BEG, BGC, DCF sono simili, quindi $BE:EG=CF:DC$ ovvero AB, epperò $BE\times AB=EG\times CF$, e BC ovvero $AD:CG=CF:DF$, quindi

$AD \times DF = CG \times CF$, onde $BE \times AB \times AD \times DF = EG \times CF \times CG \times CF = CF\ (EG + CG) = CF \times EC$.

73.

Se un triangolo isoscele che ha ciascun lato doppio della base sia iscritto in un cerchio, il quadrato del raggio del cerchio sarà al quadrato di uno dei lati uguali come 4 *è a* 15. (Fig. 146).

Fig. 146.



Sia ABC il triangolo isoscele che ha ciascuno dei lati uguali doppio della base. Si conducano AP, OD perpendicolari a BC, AB. $AB^2 = 16BP^2$, $AP^2 = AB^2 - BP^2 = 15PB^2$; quindi $AB^2 : AP^2 = 16 : 15$. Inoltre $AB^2 = 4AD^2$, quindi $4AD^2 : AP^2 = AO^2 : AD^2$, onde $AO^2 : AD^2 = 16 : 15$, e moltiplicando AD^2 per 4, e dividendo 16 per 4, si ha $AO^2 : 4AD^2$ ovvero $AO^2 : AB^2 = 4 : 15$.

74.

ABC è un triangolo rettangolo in A, *e che ha l' angolo* B *doppio dell' angolo* C; *tirata* BD *bisettrice dell' angolo* B, *e* AE, DF *perpendicolari sopra* BC *dimostrare che il rettangolo contenuto da* AE, BF *è uguale alla somma dei rettangoli contenuti da* BE, DF *e da* BF, DF.

Tirisi DH perpendicolare ad AE. Si ha $FC = FB = AB$, e $2FB \times BE = AB^2 = FB \times FC$, e quindi $2BE = FC = AB$; $AH = HG = GE$, e quindi $BE = HD = EF$. *

Ciò posto si ha $GE : BE = AH : HD = DF : FC$, quindi $AH \times FC = HD \times DF$, ed essendo $AH = AE - HE$, si ha $(AE - HE)\ FC = HD \times DF = BE \times DF = AE \times FC - HE \times FC = AE \times BF - BF \times DF$, quindi $AE \times BF = BE \times DF + BF \times DF$.

75.

Se una retta è tangente a un cerchio, e si abbassi la perpendicolare dal punto di contatto sopra un diametro qualunque, e dall' estremità di questo diametro e dal centro s'innalzino perpendicolari al diametro fino all' incontro colla tangente, le quattro perpendicolari saranno proporzionali.

* Pongasi la lettera G nell' incontro di AE con BD.

Sia PFQ la tangente in F, O il centro, AB il diametro che incontra la tangente PQ in un punto P, AD, FC, OG, BQ perpendicolari ad AB.

Si ha $PB : PF = PF : PA$, e $PO : PF = PF : PC$, quindi $PB : PO = PC : PA$; ma $PB : PO = BQ : OG$, e $PC : PA = CF : AD$, quindi $BQ : OG = CF : AD$.

76.

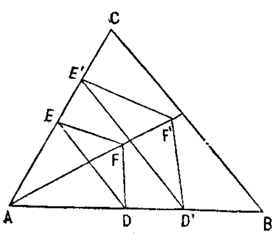
Inscrivere un quadrato in un pentagono regolare.

Tirisi una diagonale, dall' estremo conducasi la perpendicolare alla medesima e si la ponga uguale a sè stessa, si unisca l' estremo di questa perpendicolare col vertice opposto alla diagonale (quel vertice che appartiene al triangolo che ha distaccato la diagonale), la congiungente taglierà un lato del pentagono in un punto che farà determinare il quadrato richiesto, tirando dal medesimo la parallela alla diagonale ecc.

77.

Le rette terminate AB, AC *siano divise proporzionalmente in* D, E, *e le perpendicolari ad esse innalzate da* D, E *s'incontrino in* F: *dimostrare che qualunque siano le posizioni di* D, E, *il punto* F *sarà sempre sopra una stessa retta che passa per* A. (Fig. 147).

Fig. 147.

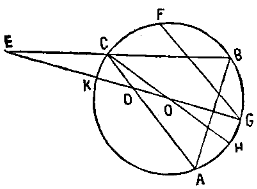


Essendo $AD : DB = AE : EC$, sarà $CB \parallel ED$. Siano D', E' altri due punti presi in modo che si abbia $AD' : D'B = AE' : E'C$, e sia $D'F'$ perpendicolare ad AB. Si ha $D'E' \parallel CB \parallel ED$, e risultano equiangoli i due triangoli EDF, $E'D'F'$; perchè si ha $DE : D'E' = AD : AD' = DF : D'F'$, e l' angolo $EDF = E'D'F'$, onde $E'F'$ è perpendicolare ad AC.

78.

AB *è una corda di un cerchio, ed* AC, BC *condotte per un* *punto qualunque della circonferenza tagliano il diametro perpendicolare ad* AB *in* D, E; *se* O *è il centro del cerchio*, *il rettangolo contenuto da* OD, OE *sarà uguale al quadrato del raggio*. (Fig. 148).

Fig. 148.



Si prolunghi il raggio CO, e tirisi $GF \parallel AC$. È l'arco $CF = AG = GB$, $KC = HG$, quindi $CF + KC = GB + HG$, cioè $KF = HB$, onde l'angolo $HCB = KGF = KDC$, e il supplemento $ECO = CDO$, e il triangolo EOC simile a DCO, epperò $EO : OC = OC : OD$, e $OD \times OE = OC^2$.

79.

Descrivendo due mezzi cerchi sopra i segmenti dell' ipotenusa fatti dalla perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo, i segmenti dei lati intercettati da questi semicerchi saranno in ragione triplicata coi lati.

Sia ABC il triangolo rettangolo in A, AP la perpendicolare all' ipotenusa BC, BDP, PEC i semicerchi descritti sui segmenti BP, PC, che incontrano i cateti AB, AC in D, E.

Si ha $BC : BA = BP : BD$, quindi $BC \times BD = BA \times BP$. Si ha pure $BC : BA = BA : BP$, quindi $BC \times BP = BA^2$, onde $BC^2 \times BD = BA^3$, e $BC^3 \times BD = BA^3$, $\times BC$.

Similmente si trova $BC^3 \times EC = AC^3 \times BC$; e dividendo quest' ultime due eguaglianze membro a membro si ha $BD : EC = BA^3 : AC^3$.

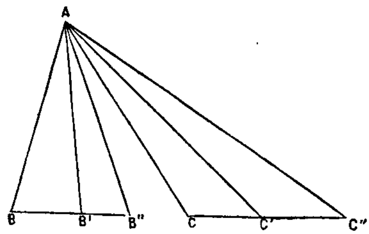
80.

I lati di un angolo dato sono in una ragione data, ed il vertice è fisso; dimostrare che se l' estremo di un lato si muove sopra una retta data, si muoverà sopra una retta anche l'altro estremo. (Fig. 149).

Sia BAC l' angolo dato, BB'' la retta su cui muovesi l' estremo B. Quando il punto B è giunto in B', B'', il punto C giungerà in C', C'', restando il rapporto

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{AB''}{AC'''}, \text{ e l' angolo } BAC = B'AC' = B''AC'',$$

Fig. 149.



e quindi i triangoli BAB', $B'AB''$ rispettivamente equiangoli a CAC', $C'AC''$, onde i due angoli in B' sono uguali ai due in C', ma la somma dei due in B' è uguale a due retti, sarà anche la somma di due in C' uguali a due retti. ecc.

81.

Se dall' estremità della base di un triangolo si tirino due rette, ciascuna parallela ad uno dei lati ed uguale all' altro, le rette che congiungono l' altra loro estremità coll'altra estremità della base taglieranno dai lati segmenti uguali, ciascuno dei quali sarà medio proporzionale tra gli altri due segmenti.

Sia ABC un triangolo qualunque, $CD = AC$ e parallela ad AB, $BE = BA$ e parallela ad AC; dico che DB, EC tagliano dai lati segmenti uguali, cioè $AG = AF$, ciascuno dei quali è medio proporzionale tra BF e CG. Infatti i triangoli simili EFB, AFC danno $AF : BF = AC : BE$; e componendo AF: $AF + BF = AC : AC + BE$, ovvero $AF : AB = AC : AC + BA$ (1), poichè è $BE = BA$. Similmente si trova $AG : AC = AB : AB + AC$. Confrontando quest' ultima proporzione con (1) si scorge essere $AG = AF$.

Essendo $AF : BF = AC : BE = AC : AB$

$$GC : AG = CD : AB = AC : AB, \text{ si ha } BF : AF = AG : GC.$$

82.

AB, AC *sono lati di un pentagono e di un decagono regolare iscritti in un cerchio di centro* O : *se* OD *è la bisettrice di* AOC *condotta fino ad* AB, *dimostrare che i triangoli* ACB, ACD, *come pure i triangoli* AOB, DOB *sono simili, e quindi che il quadrato del raggio è uguale alla differenza dei quadrati di* AB, AC.

È il triangolo $ADO = DOC$, quindi l' angolo $DAO = DCO$ e $DAC = DCA$, onde ADC è triangolo simile ad ACB.

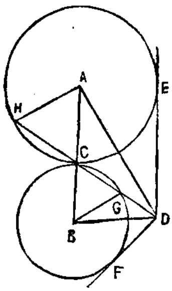
L'angolo DBO è $\frac{3}{5}$ di retto. $BOA = \frac{4}{5}$ di retto. $BOD = \frac{3}{4}$ di BOA, quindi $BOD = \frac{3}{4}$ di $\frac{4}{5}$ di retto, ossia è $\frac{3}{5}$ di retto, dunque $DBO = BOD$, e il triangolo DBO simile ad ABO.

Si ha $AB : AC = BC : AD$, e $AB \times AD = AC^2$; si ha pure $AB : BO = AO : DB$, e $AB \times BD = AO^2$, quindi $AB \times AD + AB \times BD = AC^2 + AO^2$. e $AB\ (AD + BD) = AC^2 + AO^2$, e $AB^2 - AC^2 = AO^2$.

83.

Se due cerchi sono tangenti tra loro nel punto C, *e si prenda un punto qualunque* D *fuori di essi in modo che i raggi* AC, BC *sottendano angoli uguali in* D, *e* DE, DF *siano tangenti al cerchio, il rettangolo contenuto da* DE, DF *sarà uguale al quadrato di* DC. (Fig. 150).

Fig. 150.



La DC incontrerà i due cerchi in H, G.

I due triangoli ADH, DCB sono simili e danno $AH : CB = DH : DC$, quindi

$$DH = \frac{AC \times DC}{CB} = \frac{AC \times DC}{CB}.$$

Similmente dalla simiglianza dei triangoli DAC, DGB si ricava $DG = \dfrac{DC \times CB}{AC}$.

Ciò posto

$$DE^2 = DC \times DH = DC \times \frac{AC \times DC}{CB} \quad (1), \text{ e}$$

$$DF^2 = DC \times DG = DC \times \frac{DC \times CB}{AC} \quad (2)$$; e moltiplicando (1) e (2) si ha $DE^2 \times DF^2 = DC \times \dfrac{AC \times DC}{CB} \times DC \times \dfrac{DC \times CB}{AC} = DC^4$

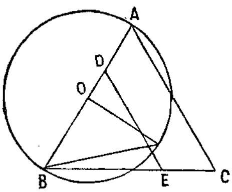
onde $DE \times DF = DC^2$.

84.

Bisecare un triangolo con una linea parallela ad uno dei lati. (Fig. 151).

Sia ABC il triangolo. Su AB come diametro si descriva

Fig. 151.



un cerchio, si prenda BD uguale al lato del quadrato iscritto in esso, la $DE \parallel AC$ risolve il problema. In fatti, si ha triangolo $ABC:DBE = AB \times BC : BD \times BE$, e $AB : BC = BD : BE$, e quindi $AB \times BE = BC \times BD$. Moltiplicando i due termini del secondo rapporto della prima proporzione rispettivamente per $AB \times BE$, $BC \times BD$, si ha $ABC:DBE = AB^2 : BD^2$; ma AB^2 è doppio di BD^2, dunque il triangolo ABC è doppio di DBE.

85.

Un cateto di un triangolo rettangolo è doppio dell'altro, dimostrare che i segmenti della ipotenusa fatti dalla perpendicolare abbassata dal vertice saranno tra loro come 1 è a 4.

Sia ABC il triangolo rettangolo in A, AC doppio di AB, AE la perpendicolare. Si ha $AC^2 : AB^2 = EC : EB$, ma $AC^2 : AB^2 = 4 : 1$, quindi $EC : EB = 4 : 1$.

86.

Se due triangoli sono tra loro come le basi, hanno la stessa altezza, e triangoli e parallelogrammi di altezza disuguale sono tra loro nella ragione composta dalle ragioni delle loro basi e delle loro altezze.

1.° Siano T, t i due triangoli che sono come le basi B, b, cioè si abbia $T : t = B : b$. Si costruisca un altro triangolo T' che abbia l'altezza del primo e la base del secondo, e si avrà $T : T' = B : b$, onde $T : t = T : T'$, e quindi $t = T'$, e l'altezza di t uguale a quella di T' o T.

2.° Siano T, t i due triangoli che hanno rispettivamente per base B, b, per altezze A, a.

Si costruisca un altro triangolo K che abbia per base B e per altezza a; e si ha $T : K = A : a$, $K : t = B : b$, onde $T : t = A \times B : a \times b$ ecc.

87.

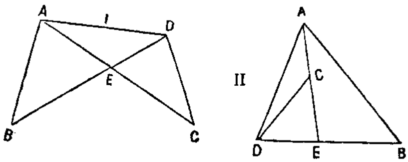
Descrivere un rombo uguale a una data figura rettilinea, e che abbia un angolo uguale a un angolo dato.

Si trasformi la figura data in un parallelogrammo che abbia un angolo uguale al dato (I, 45, Eucl.), la media proporzionale dei lati avviluppanti l'angolo dato è il lato del rombo richiesto.

88.

Se due triangoli hanno un angolo uguale a un angolo, o un angolo supplemento di un angolo, saranno nella ragione composta delle ragioni dei lati che lo contengono. (Fig. 152).

Fig. 152.



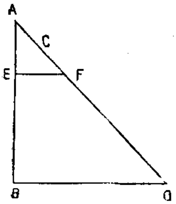
Siano ABE, EDC i triangoli che hanno gli angoli uguali nella figura (I) e supplementari nella (II). Si possono situare come si veggono nelle due figure.

I due triangoli ABE, ADE avendo la stessa altezza danno $ABE : ADE = BE : ED$; come pure i due triangoli AED, DEC danno $ADE : DEC = AE : EC$, onde moltiplicando si ha $ABE : DEC = BE \times AE : ED \times EC$.

89.

Descrivere un quadrato, del quale sia data la differenza tra la diagonale ed un lato. (Fig. 153).

Fig. 153.



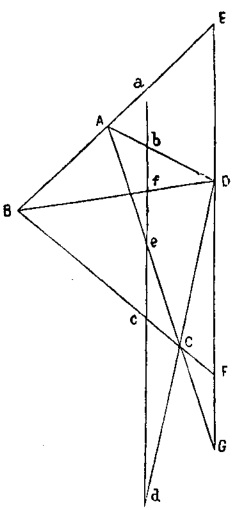
Supponiamo il problema risoluto e sia AF la differenza, e tirisi $FE \parallel BC$.

Si ha $AC : AF = BC : EF$, e $AC - AF : AF = BC - EF : EF$, ovvero $FC : AF = FC - EF : EF$, e $FC \times EF = AF \times FC - AF \times EF$, ovvero $AF \times FC - FC \times EF = AF \times EF$, donde $FC\ (AF - EF) = AF \times EF$. Ora se si prenda $AG = AF - EF$, la quarta proporzionale dopo le rette AG, AF, EF risolve il problema.

90.

ABCD *è un quadrilatero*: *tirata una retta che tagli* AB, CD *in* a, d; AD, BC *in* b, c; *ed* AC, BD *in* e, f; ab *sarà a* cd *come il rettangolo contenuto da* af, be *è al rettangolo contenuto da* ef *e* de. (Fig. 154).

Fig. 154.



Per D tirisi $DE \parallel ac$, che incontrerà BA, BC, AC, in E, F, G. Per la simiglianza dei triangoli DFC, Ccd e DCG, e Cde si ha $DF : cd = DC : Cd = DG : de$, ovvero

$$DF : cd = DG : de$$

Si ha pure

$$ab : DE = be : DG, \text{ e}$$
$$DE : DF = af : fc;$$

moltiplicando quest' ultime tre proporzioni, e sopprimendo i fattori comuni si ha $ab : cd = af \times be : fc \times de$.

91.

Dimostrare che la ragione della diagonale di un quadrato al suo lato è incommensurabile, e quindi dimostrare che il suo valore numerico è approssimatamente uguale ad 1, 4142.

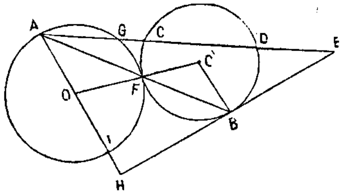
Chiamando a la diagonale e b il lato del quadrato si ha $a^2 = 2b^2$, onde $a = \sqrt{2b^2} = b\sqrt{2}$, quindi la diagonale sta al lato come $b\sqrt{2} : b$, ovvero come $\sqrt{2} : 1$; cioè che la ragione della diagonale al lato è incommensurabile. È facile mostrare che il suo valore numerico è 1, 4142.

92.

Descrivere una circonferenza che passi per un punto dato e sia tangente a una data retta e a un dato cerchio. (Fig. 155).

Si supponga il problema risoluto, e sia CFB il cerchio richiesto tangente al cerchio dato in F e alla retta data in B. Tirisi BF fino all' incontro in A del cerchio dato, e da A una retta che passi pel punto dato D e finisca in E punto d' incontro colla retta data. La retta ADE incontra il cerchio dato in F e il costruito in C. Se il punto C fosse conosciuto, il

Fig. 155.



problema sarebbe ridotto all'es. 8[0]mo, 3, lib A tal fine uniscansi i centri O, O'; la congiungente passerà pel punto di contatto F, e risultano simili i due triangoli AOF, $FO'B$ (VI, 7, Eucl.), quindi $AOH \parallel BO'$ e l'angolo AHB retto. Per i punti, H, I, F, B passa una circonferenza; come pure i punti H, I, G, E passa una circonferenza, quindi

$$AD \times AC = AB \times AF = AH \times AI = AE \times AG\,;$$

onde il punto C si ottiene, col trovare una quarta proporzionale dopo le rette AE, AD, AG ecc.

93.

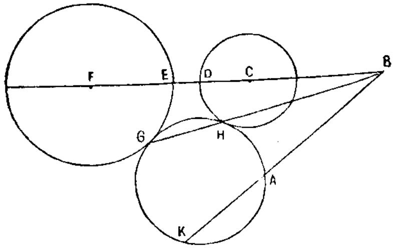
Descrivere un cerchio tangente a due cerchi dati e ad una retta data.

Concentricamente al cerchio maggiore si descriva un circolo con raggio uguale alla differenza dei raggi dei circoli dati, si tiri la parallela alla retta data di una distanza uguale alla stessa differenza, si descriva una circonferenza tangente a questa retta, al circolo costruito e passante pel centro dell' altro circolo dato (probl. prec.) , il centro del secondo circolo costruito sarà il centro del cerchio richiesto, e il raggio sarà la differenza tra quello del secondo circolo costruito e quello del cerchio minore dato.

94.

Descrivere una circonferenza tangente a due cerchi dati e che passi per un punto dato. (Fig. 156).

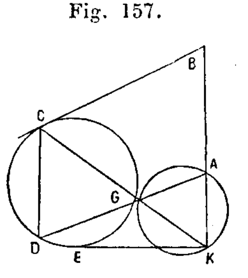
Fig. 156.



Supponiamo il problema risoluto, e siano F, C i centri dei cerchi dati, A il punto, e GHA il cerchio cercato. La congiungente i centri, e la congiungente i punti di contatto passano pel punto fisso B (VI, 32, Es.) il quale è quell' istesso di cui si è parlato negli esercizi, 28, 29, 30, 31 onde si ha (31) $BE \times BD = BG \times BH = BK \times BA$; e quindi il punto K sarà determinato cercando la quarta proporzionale dopo le rette BA, BD, BE, ed il problema è ridotto a descrivere un cerchio che passi per K ed A e sia tangente ad uno dei cerchi dati.

Supponiamo anche questo problema risoluto, e sia KAG il cercato (Fig. 157), G il punto di contatto. Conduciamo le

Fig. 157.



rette KGC, AGD e CB tangente al cerchio dato CDG, che incontra KA in B.

Le corde KA, DC sono parallele (III, 60, Es.), l'angolo $CDG = BCG = GAK$, e i due triangoli AGK, BCK sono simili, e si avrà $KA : CK = KG : KB$, onde $KA \times KB = CK \times KG = KE^2$, essendo KE tangente al cerchio CDG, e il punto B sarà determinato, e quindi anche i punti C e G, ed il problema è ridotto a far passare per G, K, A una circonferenza.

95.

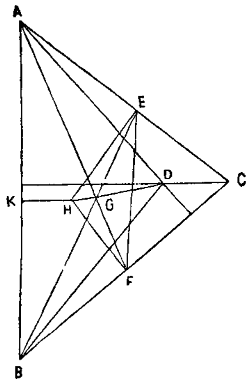
Descrivere un cerchio tangente a tre cerchi dati.

Siano A, B, C, i tre cerchi dati, e sia $A > B > C$. Nel primo si descriva concentricamente un cerchio con raggio uguale alla differenza dei raggi del 1° e 3°, e nel 2° cerchio si descriva un altro con raggio uguale alla differenza dei raggi del 2° e 3°, indi si descriva una circonferenza tangente a questi due costruiti e passante pel centro del terzo dato (probl. prec.), il centro di quest' ultima sarà quello del cerchio cercato.

96.

In un triangolo qualunque sono in una stessa linea retta la intersezione delle perpendicolari abbassate dai vertici sopra i lati opposti, delle bisettrici dei lati condotte dai vertici opposti, e delle perpendicolari innalzate sulle metà dei lati, e le *distanze di questi punti uno dall' altro sono tra loro come i numeri* 1, 2, 3. (Fig. 158).

Fig. 158.



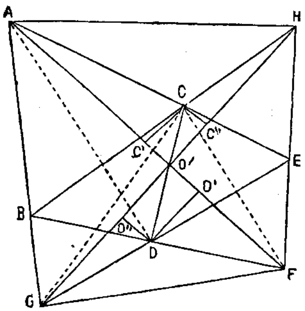
Sia D il punto d'incontro delle tre perpendicolari abbassate dai vertici, G quello delle mediane, H quello delle perpendicolari condotte da F, E, K; dico 1° che DGH è una linea retta.

Poichè è $AE=EC$, $BF=FC$, sarà $EF \parallel AB$; e poichè si ha $BC:FC=AB:EF$, sarà $AB=2EF$. Inoltre è $BG=2GE$, $AG=2GF$ (I, 80, Es.). I due triangoli HEF, DAB, perchè hanno i lati rispettivamente paralleli sono simili, quindi $AB:EF=AD:HF$, onde $AD=2HF$; ed essendo anche $AG=2GF$, i due triangoli GAD, GHF, risultano simili, e quindi l'angolo $AGD=HGF$, epperò DGH è una linea retta. 2° Dalla proporzione $GA:GF=DG:GH$ si deduce che $DG=2GH$, e quindi $DH=3GH$, onde $GH:DG:DH=1:2:3$.

97.

Presi sei punti in un piano, dei quali tre A, C, E *in una linea retta, e gli altri tre* B, D, F *in un' altra linea retta, dimostrare che le intersezioni di* AB *e* DE, *di* BC *ed* EF, *di* CD *ed* FA *sono in linea retta.* (Fig. 159).

Fig. 159.



Sia G l'intersezione di AB e DE, H quella di BC ed EF; dico che quella di AF e CD sarà sulla retta HG.

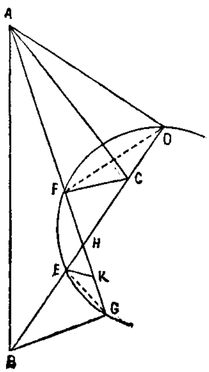
Si ha triangolo $GEF:GHE=EF:EH=EDF:HDE$, onde $GEF-EDF:GHE-HDE=EDF:HDE=EF:EH$, ovvero $GDF:HGD=EF:EH$ (1).

Similmente si trova $ACF:ACH=EF:EH$, e paragonando con (1) si ha $GDF:HGD=ACF:ACH$ (2). Analogamente si trova $ADF:GDF=ACH:GCH$ (3). Il prodotto degli estremi di (2) è uguale a quello dei medi di (3), quindi $ADF:ACF=HGD:GCH$, epperò le perpendicolari di questi triangoli, che sono rispettivamente DD', CC', DD'', CC'' sono proporzionali, cioè si ha $DD':CC'=DD'':CC''$, ma i triangoli ODD', OCC' sono simili, simili saranno anche i triangoli ODD'', OCC'', e quindi HG passa pel punto d' incontro O delle AF e CD.

98.

Se dall' estremità della base di un triangolo si abbassino le perpendicolari sopra la bisettrice dell' angolo al vertice, il cerchio che passerà per i punti d' intersezione e per il piede della perpendicolare abbassata dal vertice alla base, bisecherà la base, e il triangolo sarà uguale al rettangolo contenuto da una delle due prime perpendicolari e dal segmento della bisettrice compreso tra il vertice e l' altra perpendicolare. (Figura 160).

Fig. 160.



Siano CF. BG le perpendicolari condotte dagli estremi della base BC sulla bisettrice AG dell'angolo BAC, AD la perpendicolare condotta dal vertice A sulla BC. Dal medio E di BC tirisi EK perpendicolare a BC, che incontrerà AG in K. Il circolo che passa per A, B, C passa per K; imperocchè le due EK, AK passano pel medio dell'arco BKC, quindi $BH\times HC=AH\times HK$.

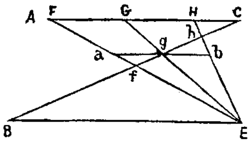
Per la somiglianza dei due triangoli BHG, EHK si ha $BH:HG=HK:EH$ (1); come pure per la somiglianza dei due triangoli AHD, FHC si ha $HC:HF=AH:HD$ (2); moltiplicando (1) e (2) si ha $BH\times HC:HG\times HF=HK\times AH:EH\times HD$, ed essendo $BH\times HC=HK\times AH$, sarà anche $HG\times HF=EH\times HD$, onde per i punti D, F, E, G passa una circonferenza; ma E è punto medio di BC, dunque ecc.

I due triangoli BEG, AFD, sono simili perchè i due angoli BEG, AFD sono uguali come supplemento degli angoli uguali HEG, HFD, e l' angolo $EBG=FAD$, quindi $BE:BG=AF:AD$, e $BE\times AD=BG\times AF$; ma $BE\times AD$ rappresenta la misura del triangolo ABC, dunque $ABC=BG\times AF$.

99.

AC, BE *sono rette parallele*, F, G, H, *ecc.*, *una serie di punti equidistanti in* AC; *tirata per il punto* B *una retta che tagli* EF, EG, EH *ecc.*, *in* f, g, h, *ecc.*, *dimostrare che* Bf, Bg, Bh, *ecc. sono in proporzione armonica.* (Fig. 161).

Fig. 161.

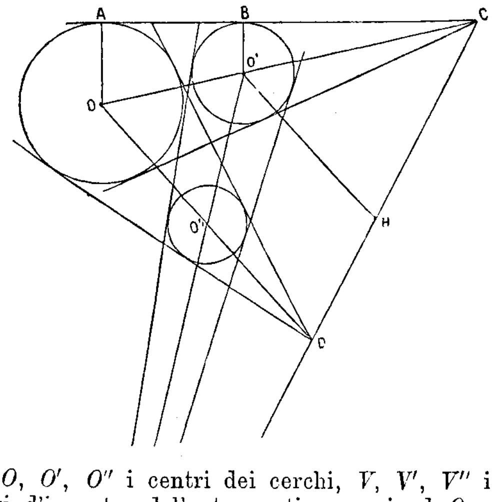


Tirisi $agb \parallel AC$. Si ha $FG:GH = ag:gb$, ma $FG = GH$, sarà $ag = gb$. I due triangoli BfE, afg danno $Bf:BE = fg:ag$, e i due triangoli BhE, ghb danno $Bh:BE = gh:gb$, quindi $Bh:Bf = gh:fg = Bh - Bg : Bg - Bf$.

100.

Se coppie di tangenti comuni siano condotte ad ogni coppia di tre cerchi dati, le intersezioni di ogni coppia di tangenti saranno in una medesima linea retta. (Fig. 162).

Fig. 162.



Siano O, O', O'' i centri dei cerchi, V, V', V'' i raggi; C, D i punti d'incontro delle tangenti comuni ad O, O' ed O, O''. Conducasi CD fino all' incontro F della $O'\,O''$.

Si ha $OD : O''D = V : V''$, e $OC : O'C = V : V'$; dividendo termine a termine si ha

$$\frac{OD}{OC} : \frac{O''D}{O'C} = 1 : \frac{V''}{V'} \quad (1).$$

Si ha pure

$$\frac{O'H}{O'C'} = \frac{OD}{OC} \text{ e } \frac{DO''}{CO'} = \frac{DO''}{CO'},$$

quindi

$$\frac{O'H}{O'C} : \frac{DO''}{CO'} = \frac{OD}{OC} : \frac{DO''}{CO'};$$

e paragonando con (1) si ha

$$\frac{O'H}{O'C} : \frac{DO''}{CO'} = 1 : \frac{V''}{V'}.$$

Di più si ha

$$O'H : DO'' = O'F : O''F = \frac{O'H}{O'C} : \frac{DO''}{CO'},$$

quindi

$$O'F : O''F = 1 : \frac{V''}{V'} = V' : V'' ;$$

onde F è il punto d'incontro delle due tangenti di O', O''.

101.

Se una retta si divida in estrema e media ragione e se al segmento maggiore si aggiunga la metà di tutta la retta; il quadrato della retta così ottenuta è quintuplo del quadrato della metà.

Sia x la parte maggiore della retta a divisa in media ed estrema ragione, $a - x$ sarà la parte minore; e si ha $x^2 = a^2 - ax$ (1).

Inoltre $\frac{a}{2} + x$ rappresenta la metà della retta data accresciuta della parte maggiore, e si ha $\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$; e sostituendo ad x^2 il valore di (1), si avrà $a^2 - ax + ax + \frac{a^2}{4}$ $= 5\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}+x\right)^2$.

102.

Se il quadrato di una retta sia quintuplo del quadrato di un' altra retta, e si divida il doppio della seconda in estrema e media ragione, il segmento maggiore sarà uguale all'eccesso della prima retta sulla seconda.

Siano a e b le due rette, e sia $a^2 = 5b^2$, da cui $a = b\sqrt{5}$. Sia x il segmento maggiore della retta $2b$ divisa in media ed estrema ragione, e si ha $2b : x = x : 2b - x$, onde $x^2 + 2bx - 4b^2 = o$, ed $x = b\sqrt{5} - b$; ma $b\sqrt{5} = a$, dunque sostituendo si ha $x = a - b$.

103.

Se una retta si divida in estrema e media ragione, e se al segmento minore si aggiunga la metà del segmento maggiore, il quadrato della retta così ottenuta sarà quintuplo del quadrato della detta metà.

Sia a la retta, x il segmento maggiore, $a - x$ sarà il segmento minore. Si ha $\left(a - x + \frac{x}{2}\right)^2 = a^2 - ax + \frac{x^2}{4}$ (1). Inoltre $x^2 = a^2 - ax$, donde $a = \frac{x}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$, e sostituendo questo valore di a in (1) si ha $\left(\frac{x}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)\right)^2 - \frac{x}{2}\left(\sqrt{5}+1\right) \times a + \frac{x^2}{4}$ $=5\left(\frac{x}{2}\right)^2$, dunque $\left(a - x + \frac{x}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{x}{2}\right)^2$.

104.

Se una retta sia divisa in estrema e media ragione, la som-

ma dei quadrati dell' intera retta e del segmento minore è tripla del quadrato del segmento maggiore.

Sia a la retta, x il segmento maggiore, $a - x$ sarà il segmento minore.

Si ha $a^2 + (a - x)^2 = 2a^2 - 2ax + x^2$ (1). Inoltre si ha $x^2 = a^2 - ax$, donde $a = \frac{x}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$, e sostituendo questo valore di a nel 2º membro di (1), si ha

$$\frac{x^2}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)^2 - x^2\left(\sqrt{5} + 1\right) + x^2 = 3x^2, \text{ dunque } a^2 + (a - x)^2 = 3x^2.$$

105.

Se ad una retta, divisa in estrema e media ragione, si aggiunga il segmento maggiore, e la retta così ottenuta si divide di nuovo in estrema e media ragione, il segmento maggiore di questa sarà uguale alla prima retta.

Sia a la retta, x il segmento maggiore.

Si ha $$x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \quad (1).$$

Sia b la somma $a + x$, y il segmento maggiore di b divisa in media ed estrema ragione.

Si ha $$y = \frac{b}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = \frac{a + x}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right);$$

e sostituendo in luogo di x il suo valore di (1), si ha

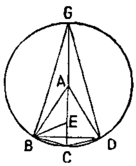
$$y = \frac{a + \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = \frac{2a + a\left(\sqrt{5} - 1\right)}{4} \times$$

$$\left(\sqrt{5} - 1\right) = \frac{2a\sqrt{5} + 4a - 2a\sqrt{5}}{4} = a.$$

106.

I lati dell' esagono e del decagono equilateri inscritti nello stesso cerchio, sono il segmento maggiore ed il segmento minore di una stessa retta segata in media ed estrema ragione. (Fig. 163).

Fig. 163.



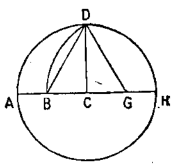
Il lato del decagono è il segmento maggiore del raggio diviso in media ad estrema ragione.

Sia AC il raggio, AE il segmento maggiore, e si ha $AC : AE = AE : EC$, onde $AC + AE : AC = AE + EC : AE$, ossia $AC + AE : AC = AC : AE$, il che dimostra l'enunciato.

107.

Se in un cerchio siano inscritti il pentagono, l' esagono ed il decagono equilateri, il quadrato del lato del pentagono è uguale alla somma dei quadrati dei lati dell' esagono e del decagono. (Fig. 163 e 164).

Fig. 164.



Proponiamoci prima di risolvere il seguente problema. Calcolare in funzione del raggio il lato del decagono e del pentagono.

1° Il lato del decagono è il segmento maggiore del raggio diviso in media ed estrema ragione; e chiamando x il segmento maggiore, r il raggio si avrà $x^2 = r^2 - rx$, donde $x = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

2° Sia BD (Fig. 163) il lato del pentagono, BC quello del decagono, CG il diametro del cerchio.

Si ha $BD \times GC = 2BG \times BC$; ma per il triangolo rettangolo GBC si ha $BG = \sqrt{4r^2 - BC^2}$, e $BC = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$, quindi

$$BD = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Ciò posto si descriva (Fig. 164) un cerchio, dal centro C si innalzi il raggio CD perpendicolare al diametro, si bisechi in

G il raggio CH, col centro G e col raggio GD si descriva l'arco BD, e si trova facilmente essere

$$BC = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5}-1\right), \text{ e } BD = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

ma queste due formole sono quelle già trovate ; dunque si deve conchiudere, che il lato del pentagono regolare inscritto è l' ipotenusa d' un triangolo rettangolo che ha per cateti il lato dell' esagono e del decagono regolare inscritti nel medesimo cerchio, epperò ecc.

108.

Il quadrato di un lato del triangolo equilatero è triplo de quadrato del raggio del circolo circoscritto.

Sia ABC il triangolo equilatero inscritto nel cerchio di centro O. Tirisi il diametro AD, il quale è perpendicolare a BC nel punto H, e sarà $OH = HD$.

Si ha $4BO^2 - 4OH^2 = 4BH^2$, ossia $4BO^2 - OD^2 = BC^2 = 3BO^2$.

109.

Se in un circolo sieno inscritti il pentagono, l' esagono ed il decagono equilateri, la somma dei lati dell' esagono e del decagono è doppia della perpendicolare calata dal centro sul lato del pentagono. (Fig. 165).

Sia BA il lato del pentagono, CA quello del decagono, AO quello dell' esagono. Dal triangolo rettangolo ADO si ha

$$DO = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\right)} = \frac{r}{4}\sqrt{b+2\sqrt{5}}$$

(vedi VI, 107, Es.) e

$$2DO = \frac{r}{2}\sqrt{b+2\sqrt{5}} \text{ (1)}.$$

D'altronde si ha

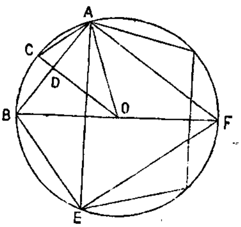
$$CA + AO = r + \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) \quad (2).$$

Elevando a quadrato il 2° membro di (1) si ha $\frac{r^2}{4}\left(b + 2\sqrt{5}\right)$, ed elevando a quadrato il 2° membro di (2) si ha $\frac{r^2}{4}\left(b + 2\sqrt{5}\right)$, dunque ecc.

110.

Se in un circolo sia inscritto il pentagono equilatero la somma dei quadrati di un lato del pentagono e della corda sottesa a due lati è quintupla del quadrato del raggio. (Fig. 165).

Fig. 165.



Sia AB il lato del pentagono inscritto, AE la corda sottesa a due lati.

Tirisi il diametro BF, e si ha $AE \times BF = 2BA \times AF$, e $AE^2 \times BF^2 = 4BA^2 \times AF^2 = 4BA^2(BF^2 - BA^2)$,

$$\text{e } AE^2 = \frac{BA^2}{r^2}(4r^2 - BA^2);$$

e sostituendo il valore di AB^2 trovato nell' esercizio 107, si ha

$$AE^2 = \frac{\left(\frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)^2}{r^2} \times \left(4r^2 - \left(\frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)^2\right.$$

$$= r^2\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Inoltre

$$AB^2 = \left(\frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)^2 = r^2\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right),$$

quindi

$$AE^2 + AB^2 = \frac{r^2(5 + \sqrt{5})}{2} + \frac{r^2(5 - \sqrt{5})}{2} = 5r^2.$$

111.

Due rette divise in estrema e media ragione stanno fra loro come i segmenti maggiori.

Siano AB, CD le due rette divise in media ed estrema ragione; e siano AG, CH i segmenti maggiori. Con centri A, C e con raggi AB, CD si descrivano due cerchi, e loro si adattino le corde BE, DF rispettivamente uguali ad AG, CH. I triangoli EAG, FCH sono equiangoli, quindi danno $AE : CF = AG : CH$, ovvero $AB : CD = AG : CH$.

FINE DEL QUINTO LIBRO.

LIBRO VI, DI EUCL. XI.

1.

Condurre per un punto dato un piano perpendicolare a una retta data.

Per il punto dato e per la retta data si faccia passare un piano, ed in questo piano dal punto dato si conduca la perpendicolare alla retta data ; dal piede di questa perpendicolare s' innalzi un' altra perpendicolare alla medesima in un altro piano che passi per essa , le due perpendicolari determinano il piano cercato.

2.

Condurre per un punto dato una retta che incontri due rette non situate nello stesso piano.

Per una delle rette date e per il punto dato si faccia passare un piano che taglierà l' altra retta data in un punto, si unisca questo punto col dato e si avrà la retta richiesta.

3.

Condurre per una retta data un piano parallelo ad un'altra retta data.

Da un punto della prima retta conducasi la parallela all' altra retta data, il piano che passa per la parallela e per la prima retta è il richiesto.

4.

Condurre per un punto un piano parallelo a due rette date.

Pel punto dato conducasi la parallela ad una delle due rette date, e per questa parallela un piano parallelo all' altra retta data (Es. prec.) che sarà il richiesto.

5.

Conducasi una retta parallela ad una retta data e che incontri due rette non situate nello stesso piano.

Per un punto qualunque di una delle due rette non situate nel medesimo piano conducasi la parallela alla retta data, per questa parallela e per la retta su cui s' è preso il punto si faccia passare un piano che incontrerà l' altra che è nello spazio in un punto, dal quale tirando la parallela alla retta data, il problema sarà risoluto.

6.

Tirare una perpendicolare a due rette date che non sono nello stesso piano.

Per la 1^a retta conducasi un piano perpendicolare alla 2^a, e per questa un piano perpendicolare ad un altro piano che passa per la 1^a parallelamente alla 2^a, l' intersezione dei due piani perpendicolari sarà la perpendicolare comune alle due rette.

7.

Dati due punti perpendicolari tra loro, condurne un terzo perpendicolare ad ambidue.

Da un punto preso sulla intersezione dei due piani conducasi in ciascuno la perpendicolare a questa intersezione , il piano che passa per le due perpendicolari sarà il richiesto.

8.

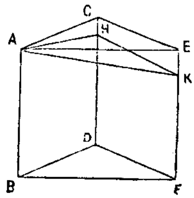
Dati due punti ed una retta che non sia con essi in un medesimo piano, tirare da essi due rette uguali ad un medesimo punto della retta.

Dal punto medio della congiungente i due punti facendo passare un piano perpendicolare alla medesima incontrerà la retta data nel punto richiesto.

9.

Se tre linee rette che non sono nello stesso piano sono uguali e parallele, i triangoli formati congiungendo le loro estremità adiacenti sono uguali e i loro piani sono paralleli. (Fig. 166).

Fig. 166.



Siano AB, CD, EF le tre rette uguali e parallele e non nel medesimo piano. Poichè AB è $=$ e $\parallel DC$, sarà $AC =$ e $\parallel BD$. Similmente si dimostra $EC =$ e $\parallel DF$, $AE =$ e $\parallel BF$; quindi i due triangoli ACE, BDF, avendo i tre lati rispettivamente uguali, sono uguali. I loro piani sono paralleli, perchè se nol fossero, tirando per A un altro piano parallelo a ADF, esso taglierà DC ed FE in H, K, e sarà $HD = AB$, $FK = AB$, ma $AB = CD = EF$, dunque $HD = DC$, $KF = FE$, il che è assurdo, onde ecc.

10.

Se due linee rette son parallele, la sezione comune di due piani qualunque che passano per esse sarà parallela ad ambedue. (Fig. 166).

Siano AB, EF le due rette parallele, CD la intersezione dei piani che passano per AB, EF. Se CD non è parallela ad AB, allora prolungate le AB, CD s' incontreranno in un punto; ma CD è nel piano CF, quindi AB incontrerà il piano CF, il che è impossibile.

11.

Descrivere un cerchio tangente a due piani dati e che passi per un punto dato.

Si conduca un piano che divida l'angolo diedro formato dai due piani dati in due parti uguali, pel punto dato si faccia passare un piano perpendicolare al piano bisettore, che taglierà i due piani dati secondo due linee rette, si descriva un circolo (III, 82, Es.) che passi pel punto dato e sia tangente alle due rette, e il problema sarà risoluto.

12.

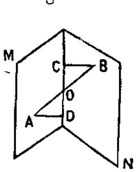
Se una retta è perpendicolare a un piano la sua proiezione sopra un altro piano sarà perpendicolare alla sezione comune dei due piani.

Per la perpendicolare si faccia passare un piano perpendicolare alla comune sezione dei due piani, e taglierà l' altro piano secondo una retta. Ora la proiezione della perpendicolare sull' altro piano coincida colla detta retta, la quale appartenendo al piano perpendicolare sarà perpendicolare alla comune sezione.

13.

Dati due punti sopra due piani che s' incontrano, tracciare il cammino più breve da un punto all' altro nei medesimi piani. (Fig. 167).

Fig. 167.

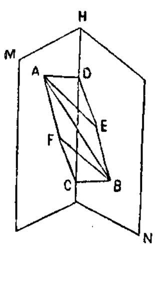


Siano A, B i due punti, dai quali si conducano AD, BC perpendicolari alla comune intersezione dei due piani: si divida CD in O in modo che s'abbia $AD:BC = DO:CO$; AOB sarà il più breve cammino fra i due punti A, B.

14.

Una linea retta è ugualmente inclinata sopra due piani che si tagliano quando essa li incontra in due punti ugualmente distanti dalla loro intersezione. Dimostrare che è vera anche la reciproca. (Fig. 168).

Fig. 168.



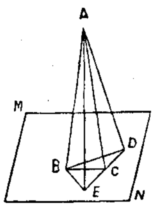
Siano A, B i punti ugualmente lontani dalla comune intersezione dei piani M, N, e siano AD, BC le distanze. Conducasi AE perpendicolare ad N, BF ad M e congiungasi A con B. Il piano che passa per le AE, AD è perpendicolare ad N, quindi la intersezione DE è perpendicolare allo spigolo HK, onde l'angolo ADE è l'angolo piano corrispondente al diedro HK. Similmente si dimostra che FCB è l' angolo piano corrispondente al diedro HK, dunque l' angolo $ADE = FCB$, e il triangolo $AED = FCB$, e la $AE = BF$. I due triangoli rettangoli AEB, AFB risultano uguali, quindi l'angolo d'inclinazione $BAE = ABF$, ed AB è ugualmente inclinata sui due piani.

Viceversa essendo l'angolo $BAE = ABF$, sarà $AD = BC$. Infatti i due triangoli ADE, BCF, avendo $AE = BF$, l'angolo $ADE = FCB$, sono uguali e quindi $AD = BC$.

15.

Qualunque retta obbliqua a un piano è perpendicolare a una retta condotta per il suo piede in questo piano. (Fig. 169).

Fig. 169.



Da un punto A dell'obbliqua AC si abbassi sul piano MN una perpendicolare AB, s'unisca BC, e dal punto C sul piano MN conducasi DCE perpendicolare a BC, e prendasi $DC = CE$. I due triangoli BCD, BEC sono uguali, quindi $BD = BE$; e per l'eguaglianza dei triangoli ABE, ABD si ha $AE = AD$, e quindi risultano uguali anche i triangoli ACE, ACD, epperò DC perpendicolare ad AC.

16.

Le due rette che condotte per un punto dato sono ugualmente inclinate sopra un piano, incontrano questo piano in punti situati sulla circonferenza che ha per centro il piede della perpendicolare abbassata dal punto dato sul piano stesso.

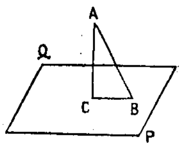
Infatti abbassando dal punto dato la perpendicolare sopra il piano, si dimostra facilmente che le oblique sono uguali e le distanze del piede della perpendicolare dai punti d'incontro delle oblique col piano sono uguali.

17.

Quando una retta AB *non è perpendicolare a un piano* PQ *non si può per essa condurre altro che un piano solo perpendicolare al piano* PQ. (Fig. 170).

Tirando da un punto A della retta AB la perpendicolare AC su PQ, il piano delle AB, AC è perpendicolare a PQ.

Fig. 170.

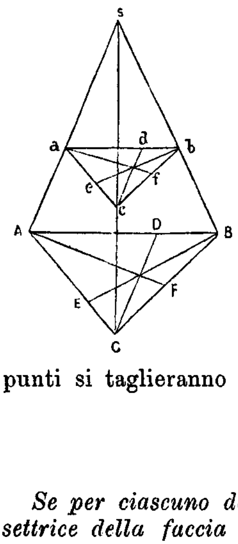


È il solo; imperocchè se si faccia passare per AB un altro piano, tirando da A all'intersezione di questo piano con PQ la perpendicolare, essa risulta perpendicolare al piano PQ, e quindi dal punto A si potrebbero abbassare due perpendicolari al piano PQ, il che è impossibile, dunque ecc.

18.

I piani condotti perpendicolarmente alle facce di un angolo triedro per gli spigoli opposti alle facce stesse, passano per una stessa retta. (Fig. 171).

Fig. 171.



Sia S l'angolo triedro. Si taglino gli spigoli con due piani ABC, abc paralleli.

Il piano condotto per SA perpendicolarmente alla CSB taglia i due piani paralleli secondo due rette AF, af perpendicolari a CB, cb; come ancora i piani condotti per SB, SC perpendicolarmente alle facce ASC, ASB tagliano i detti piani secondo BE, be e CD, cd perpendicolari ad AC, ac e ad AB, ab; ma le intersezioni AF, BE, CD, come ancora af, be, cd si incontrano in uno stesso punto, quindi i tre piani dovendo passare per due punti si taglieranno secondo una stessa retta.

19.

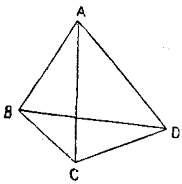
Se per ciascuno degli spigoli di un angolo triedro e la bisettrice della faccia opposta si fa passare un piano, i tre piani che così si ottengono passano per una stessa retta.

Si prendano su i tre spigoli tre porzioni uguali (Fig. 171) e si faccia passare un piano ABC per le loro estremità. I piani che passano per ciascuno spigolo e per la bisettrice della faccia opposta determinano sul piano ABC tre mediane che s'incontrano in un punto; quindi con un' analoga dimostrazione a quella del teorema precedente si conchiude che i tre piani passano per una linea retta.

20.

Qualunque sezione fatta in un angolo triedro rettangolo per mezzo di un piano perpendicolare ad uno qualunque dei suoi spigoli, è un triangolo rettangolo. (Fig. 172).

Fig. 172.



Sia $BACD$ l' angolo diedro retto, e sia BCD un piano menato perpendicolarmente allo spigolo AB; dico che l' angolo BCD è retto.

Infatti essendo AB perpendicolare al piano BCD, sarà anche il piano BAC perpendicolare al piano BCD, ma per ipotesi il piano ACD è perpendicolare al piano BAC, dunque i piani ACD, BCD sono ambidue perpendicolari a BAC, epperò la loro intersezione CD sarà perpendicolare al piano BAC, e l'angolo BCD retto.

21.

Il punto d' incontro delle altezze del triangolo che si ottiene tagliando un angolo triedro trirettangolo con un piano qualunque è il piede della perpendicolare abbassata dal vertice dell' angolo triedro sopra questo piano. (Fig. 172).

Sia $ABCD$ l' angolo triedro trirettangolo, BCD un piano che taglia i tre spigoli. Il piano condotto per AC perpendicolarmente al piano BCD, è anche perpendicolare alla faccia opposta BAD e alla retta BD, per essere CA perpendicolare alle rette BA, BA e quindi perpendicolare al piano BAD. Similmente i piani condotti per AB, AD nello stesso modo sono perpendicolari alle facce opposte, e quindi alle CD, BC; ma questi tre piani s' incontrano secondo una retta (XI, 18, Es.) e questa retta essendo intersezione di piani perpendicolari ad uno stesso piano, passerà per il punto d' incontro delle tre altezze del triangolo BCD.

22.

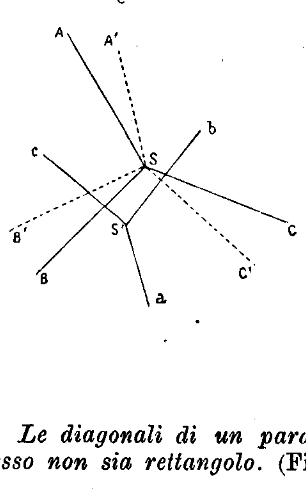
Tagliare un angolo solido a quattro facce per mezzo di un piano in modo che la sezione sia un parallelogrammo.

Si facciano passare due piani per le costole opposte, per un punto della intersezione si tirino due rette a finire alle dette costole in guisa che siano divise per metà nel detto punto, (ciò si fa analogamente all'esercizio 38, 1° libro) queste due rette saranno le diagonali del parallelogrammo richiesto.

23.

Le perpendicolari abbassate da un punto preso nell'interno di un angolo triedro sui piani delle facce, sono gli spigoli di un secondo angolo triedro di cui tanto gli angoli piani quanto le inclinazioni delle facce sono supplementari di quelli corrispondenti del primo. (Fig. 173).

Fig. 173.



Sia $SABC$ l'angolo triedro, $S'a$, $S'b$, $S'c$ le perpendicolari condotte da un punto S' preso nel triedro S alle facce CSB, ASC, BSA. Dal vertice S tirinsi SA', SB', SC' perpendicolari alle facce CSB, ASC, BSA. Il triedro $SA'B'C'$ è supplementare del triedro $SABC$ (Blanchet, prop. 38, V) *, ma $S'abc$ è uguale ad $SA'B'G'$, dunque anche $S'abc$ è supplementare di $SABC$.

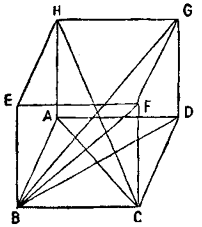
24.

Le diagonali di un parallelepipedo son disuguali quando esso non sia rettangolo. (Fig. 174).

Sia se è possibile la diagonale $HC = BG$; allora si avrà $HC^2 = HA^2 + AC^2$, e $BG^2 = BD^2 + GD^2$, onde $HA^2 + AC^2 = BD^2 + GD^2$; ma $HA^2 = GD^2$, quindi sarà $AC^2 = BD^2$, e $AC = BD$, epperò sarà $ABCD$ un rettangolo, il che è contro l' ipotesi.

* Ci siamo permessi di citare Blanchet per amore di brevità.

Fig. 174.



25.

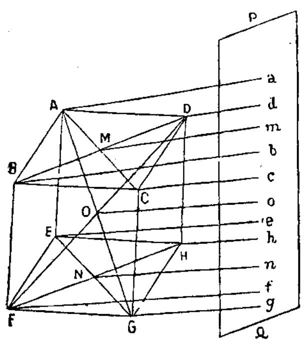
Il quadrato della diagonale di un parallelepipedo rettangolo, è uguale alla somma dei quadrati delle sue tre dimensioni. (Fig. 174).

Infatti $HC^2 = HA^2 + AC^2$, ma $AC^2 = AB^2 + BC^2$, quindi $HC^2 = HA^2 + AB^2 + BC^2$.

26.

La somma delle distanze dei vertici di un parallelepipedo da un piano esterno, è uguale a otto volte la distanza del punto d' intersezione delle diagonali dal medesimo piano. (Fig. 175).

Fig. 175.



Sia AG, il parallelepipedo, PQ il piano a cui sono condotte le perpendicolari dai vertici del parallelepipedo. Dai punti M, N, intersezioni delle diagonali delle due basi si conducano al detto piano le perpendicolari Mm, Nn. Si ha (I. 34. Es.) $Aa + Cc = 2Mm$, e $Dd + Bb = 2Mm$, quindi sommando si ha $Aa + Cc + Dd + Bb = 4Mm$. Similmente si trova $Ee + Gg + Hh + Ff = 4\,Nn$; ma $4Mm + 4Nn = 8\,Oo$, dunque ecc.

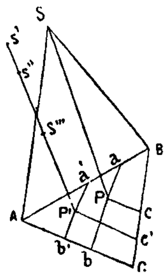
27.

Per un punto qualunque preso nell' interno di un poligono regolare base di una piramide, si elevi sul piano della base stessa una perpendicolare; essa incontrerà tutte le facce laterali della piramide prolungate se occorre. Dimostrare che la somma delle distanze dei punti di incontro dal piano della base è costante. (Fig. 176).

Sia $SABC$ la piramide la cui base ABC è regolare, $S'P'$ la perpendicolare che incontra le tre facce in S', S'', S''', SP l' altezza della piramide.

Dai punti P, P' conducansi le perpendicolari ai lati della base, e siano Pa, Pb, Pc, $P'a'$, $P'b'$, $P'c'$.

Fig. 176.



I triangoli SPa, $S'P'a'$ sono simili, quindi

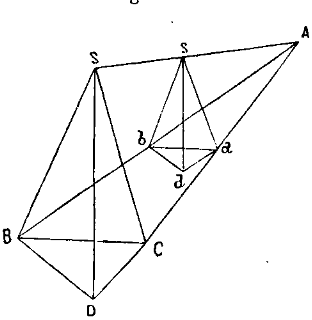
$SP : S'P' = Pa : P'a'$; similmente si ha
$SP : S''P' = Pb : P'b'$, e
$SP : S'''P' = Pc : P'c'$; essendo
$Pa = Pb = Pc$, si avrà
$S'P' : P'a' = S''P' : P''b' = S'''P' : P'c'$, e
$S'P' + S''P' + S'''P' : P'a' + P'b' + P'c' =$
$S'P' : P'a' = SP : Pa$.

Ora il rapporto $SP:Pa$ è costante, sarà anche costante il primo rapporto dell' ultima proporzione ; ma il secondo termine è costante (IV, 47, Es.), dunque è costante anche il primo.

28.

Se due piramidi simili hanno le loro facce omologhe parallele ciascuna a ciascuna, le rette che congiungono i loro vertici omologhi concorrono tutte nel medesimo punto. (Figura 177).

Fig. 177.



Siano $SBDC$, $sbda$ le due piramidi che hanno le facce rispettivamente parallele. Le congiungenti Ss, Ca s' incontrano in A. I due triangoli simili ASC, Asa danno

$$AS : As = SC : sa = SB : sb;$$

quindi i triangoli ASB, Asb avendo l' angolo $BSA = bsA$ e i lati che sono d' intorno proporzionali sono simili, quindi l' angolo $SBA = sbA$, epperò la retta Ab si confonderà con AB, dunque ecc.

29.

Tagliare un cubo con un piano in modo che la sezione sia un esagono regolare. (Fig. 174).

Pei punti medi degli spigoli EB, EH, HG si faccia passare un piano che determinerà l' esagono richiesto.

30.

I piani bisettori degli angoli diedri di un tetraedro passano per uno stesso punto.

I piani bisettori del tetraedro passano per le tre altezze del medesimo ; ora si dimostra facilmente che le tre altezze del tetraedro passano per uno stesso punto, dunque ecc.

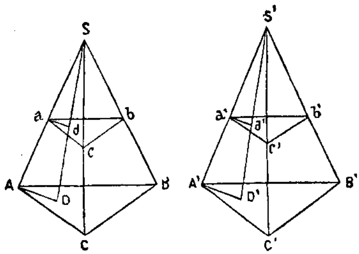
FINE DEL SESTO LIBRO.

LIBRO VII, D'EUCL. XII.

1.

Due piramidi sono simili quando hanno un angolo diedro, adiacente alla base, uguale e compreso fra due facce rispettivamente simili e disposte nello stesso ordine. (Fig. 178).

Fig. 178.



Siano $SABC$, $S'A'B'C'$ le due piramidi che hanno la faccia SAC simile a $S'A'C'$, SBC simile a $S'B'C'$ e il diedro $SC = S'C'$; dico che sono simili.

Infatti l' angolo solido $S = S'$, per avere un diedro uguale compreso tra due facce simili e similmente disposte quindi è l'angolo $ASB = A'S'B'$. Essendo simili i triangoli ASC e $A'S'C'$, SCB e $S'C'B'$, si ha

$$SA : S'A' = SC : S'C' = SB : S'B',$$

quindi i triangoli ASB, $A'S'B'$ sono simili. Similmente si dimostra che è l' angolo solido $C = C'$, e ABC simile a $A'B'C'$; e che gli angoli solidi A e B sono uguali ad A' e B', per avere gli angoli piani uguali e similmente situati, dunque ecc.

2.

Le altezze delle piramidi simili sono proporzionali alle costole omologhe. (Fig. 178).

Siano SD, $S'D'$ le altezze delle due piramidi S, S'. I piani che passano per SD ed SA, $S'D'$ ed $S'A'$ determinano due triangoli simili, quindi $SA : S'A' = SD : S'D'$.

3.

Qualunque piano parallelo alla base di una piramide divide le costole laterali e l'altezza in segmenti proporzionali. (Figura 178).

Sia abc il piano parallelo alla base della piramide S. Per la costola SA e l'altezza SD si faccia passare un piano che taglierà i piani ABC, abc secondo due rette AD, ad, parallele fra loro, e si ha, per la somiglianza dei triangoli SAC. Sac ed SAD, Sad, $SD : Sd = SA : Sa = SC : Sc$. ecc.

4.

Se si tagliano due piramidi che abbiano altezze uguali con piani paralleli alle basi ed ugualmente distanti dai vertici, le sezioni sono tra loro nella medesima ragione delle basi. (Figura 178).

I piani ABC, abc essendo simili danno

$$ABC : abc = AB^2 : ab^2, \text{ ma}$$

$$AB : ab = SA : Sa = SD : Sd, \text{ quindi}$$

$$ABC : abc = SD^2 : Sd^2.$$

Similmente si trova

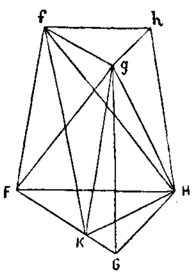
$$A'B'C' : a'b'c' = S'D'^2 : S'd'^2, \text{ quindi}$$

$$ABC : abc = A'B'C' : a'b'c'.$$

5.

Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla sua base, il tronco di piramide che ne risulta può decomporsi in *tre piramidi che abbiano la stessa altezza del tronco, e le cui basi rispettive siano, la base inferiore del tronco, la base superiore, e una media proporzionale fra queste due.* (Fig. 179).

Fig. 179.



Potendo supporre una piramide qualunque equivalente ad una triangolare con uguale base ed uguale altezza, e quindi i tronchi distaccati ad eguale altezza della base con piani paralleli risultando equivalenti, basterà dimostrare il teorema per un tronco di base triangolare.

Sia $GFHhfg$ un tronco di piramide triangolare a basi parallele. Per F, g, H conducasi un piano, il quale distaccherà la piramide $gFGH$, la quale ha per altezza quella del tronco, per essere g sul piano della base superiore fgh, e per base la base inferiore FGH.

Tolta questa piramide rimarrà la piramide quadrangolare $gfhHF$ il cui vertice è g e la base è $fhHF$. Il piano fgH divide la piramide quadrangolare nelle due triangolari $gFfH$, $gfhH$, delle quali la 2ª ha per base la base superiore del tronco e per altezza quella del tronco per avere il vertice H sulla base inferiore, e questa è la 2ª piramide del tronco: e quindi non resta che a considerare la terza piramide $gFfH$.

Da g conducasi $gK \parallel fG$, e si immagini una novella piramide $fFHK$ che ha per vertice K e per base FfH. Queste due piramidi sono equivalenti per avere la base FfH di comune e la stessa altezza, essendo i vertici g, K sulla retta gK parallela al piano della base; ma la piramide $fFKH$ può considerarsi come se avesse per base FKH, e per vertice il punto f; epperò avendo la stessa altezza del tronco, ci rimane a dimostrare che la base è media proporzionale tra quelle del tronco.

Essendo l'angolo $GFH = gfh$, i triangoli FHK, fgh stanno tra loro come i prodotti dei lati che comprendono gli angoli uguali; ma $FK = fg$, dunque si ha

$$FHK : fgh = FH : fh.$$

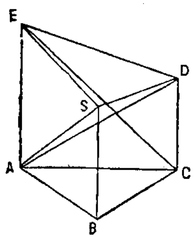
Similmente si ha $FHG : FHK = FG : FK$ ovvero fg : ma i secondi rapporti sono uguali per la somiglianza dei triangoli FGH, fgh, quindi si ha

$$FGH : FHK = FHK : fgh.$$

6.

Se un prisma triangolare è tagliato da un piano obbliquo qualunque, il tronco di prisma può decomporsi in tre piramidi che abbiano la stessa base del tronco, e i cui vertici sieno alle estremità delle tre costole laterali. (Fig. 180).

Fig. 180.



Sia $ABCDES$ il tronco di prisma triangolare colla base DSE obliqua alla base ABC.

Si conduca il piano SAC e sarà distaccata la 1ª piramide.

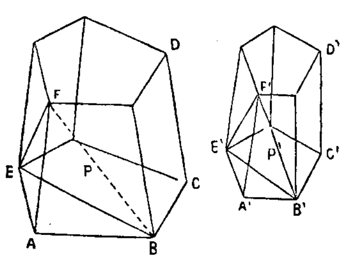
Si conduca il piano SEC, e la piramide quadrangolare $SACDE$ sarà divisa in due triangolari $SECD$, $SEAC$. Questa è equivalente alla piramide $EABC$, per avere la stessa base EAC e la stessa altezza, poichè SB è parallela al piano AEC, per essere parallela alle due EA, DC, e questa è la 2ª piramide.

Infine la piramide $SCDE$ è equivalente ad $ASCD$, e questa è equivalente ad $ABCD$, per avere la stessa base ADC e la stessa altezza, essendo SB parallela alla base, ma la piramide $ABCD$ può immaginarsi come avente per base ABC e per vertice il punto D, dunque ecc.

7.

Due poliedri simili possono essere decomposti in uno stesso numero di piramidi simili e disposte nello stesso ordine. (Figura 181).

Fig. 181.



Siano P, P' i due poliedri simili, e immaginiamo divise le superficie in triangoli nell'istesso ordine. Ciascun triangolo della prima superficie sarà simile a ciascun triangolo omologo della seconda superficie. Siano A e A' due vertici omologhi. AF, $A'F'$ due lati omologhi dei poliedri P e P', AFE, AFB i triangoli adiacenti al lato AF; $A'F'E'$, $A'F'B'$, i triangoli omologhi adiacenti al lato $A'F'$.

Le piramidi $FAEB$, $F'A'E'B'$ sono simili per avere un diedro uguale compreso tra due facce simili ciascuna a ciascuna e similmente disposte. Ora, se si distaccano rispettivamente dai poliedri P, P' queste due piramidi, si otterrà per resto due poliedri aventi gli angoli solidi uguali e le facce adiacenti simili. Si applicherà a questi due poliedri la medesima decomposizione, e, dopo aver ottenuto successivamente per resto due poliedri aventi gli angoli solidi uguali e le faccie adiacenti simili, si preverrà in fine a due resti che saranno due piramidi triangolari simili.

8.

Due poliedri simili sono fra loro nella ragione triplicata dei loro lati omologhi.

Siano P e P' i poliedri simili dati. Dividiamo questi due poliedri in un medesimo numero di piramidi triangolari simili ciascuna a ciascuna. Siano t_1, t_2, t_3,... i volumi delle piramidi che compongono il poliedro P; s_1, s_2, s_3,... i volumi delle piramidi che compongono il poliedro P'. Dinotiamo con a e a' due lati omologhi e con V e V' i volumi dei due poliedri. Poichè il rapporto di due lati omologhi è uguale a quello di due altri lati omologhi qualsiansi si ha:

$$\frac{t_1}{s_1}=\frac{a^3}{a'^3},\ \frac{t_2}{s_2}=\frac{a^3}{a'^3},\ \frac{t_3}{s_3}=\frac{a^3}{a'^3},\ \ldots;$$

quindi

$$\frac{t_1}{s_1}=\frac{t_2}{s_2}=\frac{t_3}{s_3}=\ldots,$$

donde

$$\frac{t_1+t_2+t_3+\ldots}{s_1+s_2+s_3+\ldots} \text{ ovvero } \frac{V}{V'}=\frac{a^3}{a'^3}.$$

9.

Le superficie di due poliedri simili sono fra loro nella ragione duplicata dei loro lati omologhi.

Siano A, B, C . . . e A', B', C' . . . le facce omologhe simili, a, b, c . . . e a', b', c' . . . i lati omologhi.

Si ha $\frac{A}{A'} = \frac{a^2}{a'^2}, \frac{B}{B'} = \frac{b^2}{b'^2}, \frac{C'}{C'} = \frac{c^2}{c'^2}, \ldots;$

ma $$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{c^2}{c'^2}, \ldots;$$

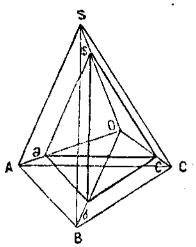
quindi $$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \ldots;$$

e $$\frac{A + B + C + \ldots}{A' + B' + C' + \ldots} = \frac{A}{A'} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

10.

Se si unisce un punto interno di un poliedro qualunque con tutti i suoi vertici, e si tagliano queste congiungenti proporzionalmente alla loro lunghezza, i piani condotti per i punti di divisione formeranno un poliedro simile al primitivo. (Figura 182).

Fig. 182.



Sia $SABC$ un poliedro qualunque, e siano OS, OA, OB, OC le congiungenti d' un punto O preso dentro il poliedro coi vertici; s, a, b, c i punti che dividono queste congiungenti in parti proporzionali.

Essendo $OA : Oa = OB : Ob$, sarà $ab \parallel AB$; similmente è $bc \parallel BC$, $ac \parallel AC$, quindi il piano abc è parallelo e simile al piano ABC. Egualmente si dimostra il piano sab parallelo e simile al piano SAC ecc., dunque tutte le facce del poliedro $sabc$ sono rispettivamente parallele e simili a quelle di $SABC$. Inoltre gli angoli solidi a, b,... sono uguali agli angoli solidi A, B, ..., per avere gli angoli piani omologhi uguali ciascuno a ciascuno, dunque i due poliedri sono simili.

11.

Determinare una sfera di cui la superficie passi per i quattro vertici di una piramide triangolare.

Per tre vertici della piramide si faccia passare una circonferenza, e per altri tre vertici fra cui è il quarto della piramide si faccia passare un' altra circonferenza. Dal centro del primo cerchio s' innalzi sul suo piano una perpendicolare, e dal centro del secondo cerchio s' innalzi anche sul suo piano un' altra perpendicolare, queste due perpendicolari s' incontreranno in un punto che sarà il centro della sfera dimandata.

12.

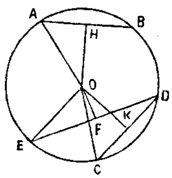
Qualunque sezione fatta in una sfera per mezzo d'un piano è un circolo.

Imperocchè, tutti i punti della linea che produce la sezione sono ugualmente lontani dal centro della sfera; e se dal centro della sfera si conduca una perpendicolare sul piano della sezione, sarà il piede ugualmente lontano dai punti della detta linea, perchè coi raggi della sfera e colla perpendicolare si formeranno dei triangoli tutti uguali fra loro.

13.

I piani che distano ugualmente dal centro della sfera danno luogo a sezioni uguali. Fra due sezioni disuguali la maggiore è quella prodotta dal piano più prossimo al centro. (Fig. 183).

Fig. 183.



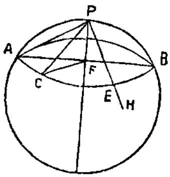
1.° Siano AB, CD i due piani (che sono due cerchi (Es. prec.)) ugualmente lontani dal centro O della sfera. È chiaro che le distanze OH, OK passano per i centri dei due cerchi AB, CD, quindi essendo uguali i due triangoli rettangoli OAH, OCK, per avere $OA = OC$, $OH = OK$, sarà il raggio $AH = CK$, epperò i due cerchi AB, CD sono uguali.

2.° Siano AB, ED i due piani, di cui ED è più vicino al centro colla sfera. Si ha $AO^2 = AH^2 + HO^2$, $EO^2 = EF^2 + OF^2$ quindi $AH^2 + HO^2 = EF^2 + OF^2$, ma è $HO^2 > OF^2$, sarà anche $EF^2 > AH^2$, ed $EF > AH$, onde il cerchio $ED > AB$.

14.

Tutti i punti della superficie della sfera che distano ugualmente da un punto fisso sulla superficie stessa, si trovano sulla medesima circonferenza. (Fig. 184).

Fig. 184.



Sia P il punto fisso, PA, PC, . . . le distanze uguali. Per due punti A, B, estremi delle distanze PA, PB, si conduca un piano perpendicolare al diametro PQ della sfera, questo piano passerà per tutti gli estremi delle distanze. Imperocchè se un estremo H fosse fuori della circonferenza ACB, si avrebbe $PH = PE$, essendo chiaramente $PE = PC$, ma ciò non può essere, dunque i detti estremi debbono essere sopra una circonferenza.

15.

L' intersezione di due sfere è un circolo di cui il piano è perpendicolare alla retta che unisce i loro centri.

Per la retta che unisce i centri delle due sfere si faccia passare un piano che taglierà le due sfere secondo due cerchi massimi, i quali s' incontreranno in due punti ugualmente distanti dalla congiungente; e le distanze saranno sulla stessa retta. Ora se si fanno girare i due semicerchi dei cerchi massimi intorno alla congiungente, essi genereranno le due sfere, ed il punto d' incontro dei semicerchi massimi genererà la loro linea d' intersezione ; ma in questo movimento la distanza a cui appartiene il punto d' incontro non cambierà di grandezza e resterà costantemente perpendicolare alla congiungente, dunque ecc.

FINE.

ENUNCIATI DI TUTTI GLI ESERCIZI

LIBRO PRIMO

pag.

1. La somma delle rette condotte da un punto situato nell' interno di un triangolo ai tre vertici è minore della somma dei tre lati e maggiore della metà di quest' ultima somma. . . 1
2. I punti equidistanti da due punti dati sono nella retta che biseca ad angolo retto quella che unisce i punti dati. . . 2
3. I punti equidistanti da due rette date sono nelle rette che dividono per metà gli angoli delle rette date. 2
4. Se da un punto qualunque della base di un triangolo isoscele si conducono le perpendicolari ai lati, la somma di queste è uguale alla distanza di un termine della base dal lato opposto. 2
5. Sopra una retta data descrivere un triangolo isoscele, nel quale ciascuno dei lati uguali sia doppio della base. . . . 3
6. Se due circoli si segano fra loro, la retta che congiunge i loro punti d' intersezione è bisecata ad angolo retto dalla retta che passa pei centri. 3
7. Delle rette che da un punto dato si possono condurre a terminare ad una retta data la perpendicolare è la minima; quella che è più vicina alla perpendicolare è minore di quella che è più lontana; e due sole rette uguali si possono condurre dal punto dato alla retta, l' una da una parte e l' altra dall' altra parte della perpendicolare. 3
8. Da un punto dato fuori di una retta data tirare una retta che faccia colla data un angolo dato. 4
9. Costruire un triangolo, dati due lati e l' angolo opposto ad uno di essi. 4
10. Descrivere un circolo che passi per due punti dati ed abbia il centro sopra una retta data. 5
11. Da due punti dati dalla stessa parte di una retta data condurre due rette che s' incontrino sulla retta data e facciano con questa angoli uguali. 5
12. Intorno ad una retta data, come diagonale, descrivere il quadrato. 5

(*) Trapezio è un quadrilatero che ha due lati paralleli e due non paralleli.

ESERCIZI

LIBRO SECONDO

ESERCIZI

LIBRO TERZO

ESERCIZI

LIBRO QUARTO

(*) Un poligono dicesi *regolare*, se è equilatero ed equiangolo.

(**) *Quadrante* è la quarta parte del cerchio.

ESERCIZI

LIBRO QUINTO

(*) Tre linee si dicono in *progressione aritmetica* se togliendo la seconda dalla prima e la terza dalla seconda, le rimanenti sono uguali.

Tre linee si dicono in *progressione geometrica* se la prima è alla seconda come la seconda è alla terza.

Tre linee si dicono in *progressione armonica* se la prima è alla terza come la differenza della prima e della seconda è alla differenza della seconda e della terza.

14

(*) Il punto P si dice il *polo* di CQD, e CQD la *polare* di P.

ESERCIZI

LIBRO SESTO

*

ESERCIZI

LIBRO SETTIMO