il quale ha soltanto servito per determinarlo.

160. Non mi arresto ad esporre li metodi prattici, che si usano operando direttamente sopra de' numeri denominati, poicchè essi si trovano esposti minutamente in tutte le istituzioni di aritmetica prattica.

CAPITOLO X.

Teoria delle Proporzioni, e delle Equi differenze.

ARTICOLO I.

Nozioni preliminari.

161. Noi abbiamo detto, che per formarci una idea distinta di una quantità, dobbiamo paragonarla ad un' altra della medesima sua specie, quindi noi siamo continuamente condotti a paragonare due numeri fra loro, ed a ricercare il risultato di sì fatto paragone, risultato, che noi chiamiamo *ragione*, o *rapporto*; Ma due numeri possono essere fra loro paragonati in due sole maniere, cioè, o vedendo quante volte uno di essi contiene l' altro, lo che facciamo dividendo l' uno di essi per l' altro, o vedendo di quanto l' uno di essi eccede l' altro, loche facciamo sottraendo l' uno di essi dal-

l'altro; quindi noi avremo due sole specie di ragioni, o di rapporti; cioè quella de' rapporti, che si hanno per mezzo del quoziente, che si ottiene dividendo l'uno per l'altro li due numeri, che si paragonano, e questi rapporti saranno da noi chiamati *ragioni, o rapporti per quoziente*; l'altra de' rapporti, che si hanno per mezzo della differenza, che si ottiene sottraendo l'uno dall'altro li due numeri, che si paragonano, e tali rapporti da noi si chiameranno *ragioni, o rapporti per differenza.*

162. Giova qui lo avvertire, che gli antichi, senza alcuna ragione, davano il nome di *rapporto geometrico*, o di *ragione geometrica*, a quel rapporto, che noi abbiamo chiamato *ragione, o rapporto per quoziente*, e chiamavano *rapporto aritmetico, o ragione aritmetica* quel rapporto, che noi abbiamo chiamato *rapporto, o ragione per differenza.*

163. Chiamiamo termini di un rapporto le quantità, che fra loro si paragonano, e con ispezialità, chiamiamo *antecedente* il termine, che si paragona, e *conseguente* quello, a cui l'altro è paragonato.

164. Non essendo il rapporto per differenza altra cosa, se non che il residuo, che si ha sottraendo un termine dall'altro, ne segue, che non si *altera il rapporto per differenza di due quantità, qualora li due termini*

di esso si accrescano, o si diminuiscano di una medesima quantità. Similmente consistendo il rapporto per quoziente di due quantità, nel quoziente, che si ha dividendo uno de' termini del rapporto per l'altro, ne segue, che il *rapporto per quoziente di due quantità non si altera, qualorà li due termini di esso si multiplicano, o si dividono per un medesimo numero.*

165. Si dà il nome di *equidifferenza* al paragone di due rapporti per differenza fra loro eguali, e si scrive così $a.b:c.d$, e si esprime dicendo a sta a b per differenza come c sta a d. Dal che si vede, che sì fatta equidifferenza può essere designata, o per mezzo della eguaglianza $a-b=c-d$, oppure per $b-a=d-c$, essendo indifferente l'ordine, col quale la differenza si trova, soltanto si deve badare a fare la differenza de' termini de' due rapporti eguali nel medesimo ordine.

166. Similmente si dà il nome di *equiquoziente*, o di *proporzione* al paragone di due rapporti per quoziente eguali fra loro, e la proporzione si scrive così $a:b::c:d$, e si enuncia dicendo a sta a b come c sta a d. Dal che si vede, che sì fatta proporzione può essere generalmente espressa per mezzo della eguaglianza $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, oppure per l'altra

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, giacchè è indifferente dividere lo antecedente per lo conseguente, o il conseguente per lo antecedente, facendo però sempre attenzione di fare la divisione de' termini de' due rapporti nel medesimo ordine.

167. Quì avvertiremo che gli antichi davano il nome di *proporzione aritmetica* alla equidifferenza, e di *proporzione geometrica* allo equiquoziente, al quale noi diamo esclusivamente il nome di *proporzione*.

168. Queste prenozioni essendo esposte, passiamo ora ad esaminare 1. Le proprietà della proporzione. 2. Le proprietà della equidifferenza.

ARTICOLO II.

Proprietà delle Proporzioni.

169. Sia la proporzione $a : b :: c : d$; per quello che abbiamo detto, essa può essere posta sotto la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ma qualora due frazioni sono eguali, riducendole allo stesso denominatore restano eguali, dunque $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{b \times d}$, ma qualora due frazioni, che hanno lo stesso denominatore sono eguali fra loro, debbono avere li numeratori eguali, dunque $a \times d = c \times b$, ma $a \times d$ è il prodotto de' termini estremi, e $c \times b$ è il prodotto delli termini di mezzo, *dunque in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è eguale al prodotto de' termini di mezzo.*

170. Sieno ora li due rapporti di $a : b$, e di $c : d$ diseguali fra loro, le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ saranno fra loro diseguali, ma due frazioni diseguali, ridotte al medesimo denominatore, restano diseguali, dunque $\frac{a \times d}{b \times d}$ non sarà eguale a $\frac{c \times b}{d \times b}$, ma due frazioni diseguali, che hanno lo stesso denominatore, deb-

bono avere li numeratori diseguali, dunque $a \times d$ non può essere eguale a $c \times b$; ma $a \times d$ è il prodotto de' termini estremi, e $c \times b$ è il prodotto de' termini medj, dunque qualora due *rapporti sono diseguali, il prodotto de' termini estremi non può essere eguale al prodotto de' termini di mezzo.*

171. Dalle verità dimostrate ricaviamo 1. Che se *quattro grandezze sono tali, che il prodotto delle estreme sia eguale al prodotto delle medie, esse formano una proporzione*, imperocchè se esse non formassero una proporzione, *il prodotto delle estreme non sarebbe eguale al prodotto delle medie.*

2. Che se *quattro quantità sono tali, che il prodotto delle estreme non sia eguale al prodotto delle medie, esse non possono formare proporzione.* Imperocchè se esse formassero una proporzione, il prodotto delle estreme dovrebbe essere eguale al prodotto delle medie.

3. Che se *noi facciamo subire de' cambiamenti alli termini di una proporzione, facendo in modo, che l' ordine in cui si dispongono, sia tale, che il prodotto de' termini estremi sia eguale al prodotto de' termini di mezzo le quantità saranno sempre proporzionali.* Quindi nella proporzione $a : b :: c : d$ li termini possono essere disposti nelle seguenti otto maniere.

$a : b :: c : d$
$a : c :: b : d$
$b : a :: d : c$
$b : d :: a : c$
$c : d :: a : b$
$c : a :: d : b$
$d : c :: b : a$
$d : b :: c : a$

Disposizioni, nelle quali le quantità restano sempre proporzionali, poichè in tutte esse il prodotto de' termini estremi, ed il prodotto de' termini medj sono formati dalli medesimi fattori.

172. Il cambiamento d' ordine de' termini della proporzione, mediante il quale alternano il posto li due termini medj, alcune volte si chiama *alternazione*, o *permutazione*, e quello in cui cambiano di posto li termini di ciascheduno de' rapporti, si chiama *inversione*.

173. Sia la proporzione $a : b :: c : d$, noi avremo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ma se due quantità eguali si multiplicano, o si dividono per un medesimo numero, li prodotti, o li quozienti, che ne risultano sono eguali, dunque multiplicando per qualunque numero, che noi designeremo con la lettera n le due frazioni eguali $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, avremo $\frac{a \times n}{b} = \frac{c \times n}{d}$; e di-

videndole per n sarà $\frac{a}{b \times n} = \frac{c}{d \times n}$; ma la prima di queste eguaglianze ci fornisce la proporzione $a \times n : b :: c \times n : d$, e la seconda dà la proporzione $a : b \times n :: c : d \times n$; dunque *qualora si multiplicano per lo stesso numero gli antecedenti, o li conseguenti di una proporzione, le quantità restano proporzionali.*

174. Similmente avremo $\frac{\left(\frac{a}{n}\right)}{b} = \frac{\left(\frac{c}{n}\right)}{d}$, e $\frac{a}{\left(\frac{b}{n}\right)} = \frac{c}{\left(\frac{d}{n}\right)}$; ma la prima di tali eguaglianze dà la proporzione $\frac{a}{n} : b :: \frac{c}{n} : d$, e la seconda fornisce la proporzione $a : \frac{b}{n} :: c : \frac{d}{n}$

Quindi qualora quattro quantità sono proporzionali, dividendo gli antecedenti, oppure li conseguenti per lo stesso numero, esse restano proporzionali.

175. La stessa proporzione dà sempre $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ma qualora due quantità eguali si accrescono, o si diminuiscono della medesima quantità, le somme, o le differenze, che ne

risultano restano eguali, dunque avremo $\frac{a}{b} + n = \frac{c}{d} + n$; ed $\frac{a}{b} - n = \frac{c}{d} - n$, e riducendo queste quantità ad espressioni frazionarie avremo $\frac{a + b \times n}{b} = \frac{c + d \times n}{d}$, come ancora $\frac{a - b \times n}{b} = \frac{c - d \times n}{d}$, delle quali eguaglianze la prima ci dà la proporzione $a + b \times n : b :: c + d \times n : d$, e la seconda fornisce la proporzione $a - b \times n : b :: c - d \times n : d$. Dal che conchiuderemo, che *qualora quattro quantità sono proporzionali, un antecedente unito ad multiplice qualunque del suo conseguente stà allo stesso conseguente, come l' altro antecedente unito allo egualmente multiplice del suo conseguente allo stesso conseguente; che un antecedente diminuito di un multiplice qualunque del suo conseguente sta allo stesso conseguente, come l' altro antecedente diminuito dello egualmente multiplice del suo conseguente allo stesso conseguente.*

176. Quindi se supponiamo $n = 1$ avremo $a + b : b :: c + d : d$; come ancora $a - b : b :: c - d : d$, e *diremo, che in ogni proporzione la somma, o la differenza de' due primi termini sta al secondo termine come la somma o la differenza delli due ultimi termini sta all' ultimo termine.*

177. Avendo dimostrato, che la proporzione $a : b :: c : d$ ci fornisce le due altre $a + b : b :: c + d : d$, ed $a - b : b :: c - d : d$, ne segue, che, permutando, avremo $a + b : c + d :: b : d$, ed $a - b : c - d :: b : d$; *dunque qualora quattro quantità sono proporzionali, la somma, o la differenza de' termini del primo rapporto sta respettivamente alla somma, o alla differenza de' due termini del secondo rapporto come il primo al secondo conseguente*, e poichè permutando li termini della proporzione $a : b :: c : d$, noi abbiamo $a : c :: b : d$, noi possiamo ancora dire, che *qualora quattro quantità sono proporzionali, la somma, o la differenza de' due termini del primo rapporto sta respettivamente alla somma, o alla differenza de' termini del secondo rapporto, come il primo antecedente al secondo.*

178. Dippiù avendo dimostrato che $a + b : c + d :: b : d$, e che $a - b : c - d :: b : d$, ne segue che $a + b : c + d :: a - b : c - d$, e permutando $a + b : a - b :: c + d : c - d$. Dal che conchiudiamo generalmente, che *qualora quattro quantità sono proporzionali, la somma de due termini del primo rapporto sta alla loro differenza come la somma de' due termini del secondo rapporto sta alla loro differenza.*

179. In oltre se nella proposta $a : b :: c : d$

noi cambiamo di luogo li termini di mezzo, avremo $a : c :: b : d$; e per conseguenza $a + c : c :: b + d : d$, ed $a - c : c :: b - d : d$ e di nuovo permutando, sarà $a + c : b + d :: c : d$ ed $a - c : b - d :: c : d$; dal che conchiudiamo generalmente, che *qualora quattro quantità sono proporzionali, la somma, o la differenza degli antecedenti sta respettivamente alla somma, o alla differenza de' conseguenti come uno degli antecedenti al suo conseguente.*

180. Supponiamo ora, che noi abbiamo una serie di rapporti eguali, per esempio $a : b :: c : d :: e : f :: g : h$ etc.; per quello che abbiamo dimostrato, noi avremo $a + c : b + d :: c : d :: e : f$; e per conseguenza $a + c + e : b + d + f :: e : f :: g : h$, e per conseguenza $a + c + e + g : b + d + f + h :: g : h$ etc. Sicchè qualora si ha *una serie di rapporti eguali, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti li conseguenti come uno degli antecedenti sta al conseguente suo.*

181. Sieno le due proporzioni $a : b :: c : d$, $e : f :: g : h$, la prima delle quali ci fornisce la eguaglianza $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; e la seconda ci dà $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, ma se multiplichiamo in corrispondenza li membri di queste eguaglian-

ze, noi avremo $\frac{aXe}{bXf} = \frac{cXg}{dXh}$, eguaglianza la quale da la proporzione $aXe : bXf :: cXg : dXh$; dunque *qualora si multiplicano in correspondenza li termini di due proporzioni, li prodotti, che ne risultano restano fra loro proporzionali.* E poichè li rapporti, che nascono dal multiplicare in correspondenza li termini di più proporzioni si dicono *rapporti composti* da quelli, dalla multiplicazione de' termini de' quali essi sono formati, e che chiameremo *rapporti componenti*, noi potremo esprimere la verità dimostrata dicendo, *che se vi sono due rapporti respettivamente eguali a due altri rapporti, il rapporto composto dalli due primi è eguale al rapporto composto dalli due secondi*; e poicchè il raziocinio da noi adoperato per dimostaare questa verità, può facilmente essere applicato al caso, in cui vi sia un numero qualunque di rapporti respettivamente eguali ad altrettanti rapporti, noi conchiuderemo generalmente, che qualora *si hanno più rapporti eguali respettivamente ad altrettanti rapporti, il rapporto composto da tutti li primi è eguale al rapporto composto da tutti li secondi.*

182. Dippiù essendo $a : b :: c : d$; noi avremo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ed elevando alla medesima potenza n ambi li membri di questa egua-

glianza avremo $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$, ma questa egua-glianza ci fornisce la proporzione $a^n : b^n :: d^n : c^n$; Dunque qualora li *termini di una proporzione si elevano alla medesima potenza, le potenze che ne risultano sono proporzionali.*

Similmente se da ambi li membri della medesima eguaglianza da noi si estrae una radice del medesimo grado, noi avremo $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$, eguaglianza, che ci fornisce la proporzione $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$; e perciò se dalli *termini di una proporzione si estrae una radice del medesimo grado, le radici, che ne risultano sono proporzionali.*

183. Finalmente se si hanno le due proporzioni $a : b :: c : d$, $e : b :: f : d$, le quali abbiano li medesimi conseguenti, permutando avremo $a : c :: b : d$, $e : f :: b : d$; e perciò $a : c :: e : f$: *Dunque qualora due proporzioni hanno li medesimi conseguenti gli antecedenti di esse sono proporzionali.*

184. Similmente se vi sono le due proporzioni $a : b :: c : d$, $a : f :: c : h$, le quali abbiano li medesimi antecedenti, permutando avremo $a : c :: b : d$, $a : c :: f : h$, e

perciò $b : d :: f : h$, *Quindi qualora due proporzioni hanno li medesimi antecedenti, li conseguenti di esse formano una proporzione.*

ARTICOLO III.

Metodo per trovare il termine ignoto di una proporzione, in cui gli altri tre termini sono noti.

185. Spesso accade, che in una proporzione tre termini sieno noti, e l' altro sia ignoto, e che per conseguenza sia necessario di determinare si fatto termine ignoto; allora possono darsi due casi, cioè 1. Che il termine ignoto sia uno de' termini estremi, 2. Che esso sia uno de' termini medj. In ambi li casi è facile determinare il termine ignoto, facendo uso della verità dimostrata, che in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è eguale al prodotto de' termini medj.

186. In fatti sia la proporzione $a : b :: c : x$, nella quale sia ignoto il termine estremo x, per la verità enunciata avremo $a \times x = b \times c$, e dividendo ambi li membri di questa equazione per a, avremo $x = \frac{b \times c}{a}$, ma $b \times c$ è il prodotto de' termini di mezzo, ed a è l' estremo cognito, dunque

lo estremo *ignoto si determina, dividendo il prodotto de' termini di mezzo per lo estremo cognito.*

187. Similmente nella proporzione $a:b::x:d$ sia ignoto il termine medio x, facendo uso del medesimo principio, noi avremo $a \times d = b \times x$, e dividendo ambi li membri di questa equazione per b, avremo $\frac{a \times d}{b} = x$; ma $a \times d$ è il prodotto de' termini estremi, e b è il medio noto; Quindi conchiuderemo, che *qualora in una proporzione uno de' termini medj è ignoto, esso si determina dividendo il prodotto de' termini estremi per lo medio cognito.*

188. Qui giova avvertire, che potrebbe la proporzione avere tre soli termini distinti, il termine di mezzo facendo l'ufficio di conseguente nel primo rapporto e di antecedente nel secondo, nel quale caso la proporzione è detta *continua*, come sarebbe $a : b :: b : c$, ed allora il prodotto de' termini di mezzo si riduce al quadrato del termine medio, e diremo, che *qualora in una proporzione continua si deve determinare uno de' termini estremi, esso si troverà dividendo il quadrato del termine medio per lo estremo cognito, e che se si vuole determinare il termine medio, esso si avrà estraendo la radice quadrata dal prodotto de' termini estremi.*

ARTICOLO V.

Della Teoria delle equidifferenze.

189. Sia la equidifferenza $a.b:c.d$. Essa potrà esser posta sotto la forma $a-b=c-d$; Ma a tali quantità equali se si aggiunga di comune la quantità $b+d$ avremo $a+d=b+c$ ma $a+d$ è la somma de' termini estremi, $b+d$ è quella de' termini di mezzo; dunque *in qualunque equidifferenza la somma de' termini estremi è eguale a quella de' termini di mezzo.*

I rapporti per differenza $a.b$, $c.d$ sieno fra loro diseguali; $a-b$ non sarà eguale a $c-d$; e perciò se a tali quantità diseguali si aggiungerà la comune $b+d$, avremo le quantità $a+d$, $b+c$, che saranno ancora fra loro diseguali. Ma $a+d$ è la somma degli estremi de' due rapporti dati, e $b+c$ la somma de' termini di mezzo; dunque *qualora due rapporti per differenza sono diseguali, la somma de' loro termini estremi non può essere eguale a quella de' loro termini di mezzo.*

190. Dal che ricaviamo 1. *che se quattro quantità siano tali, che la somma delle estreme eguaglia quella delle medie, esse formeranno una equidifferenza*; imperciocchè se non la formassero, la somma de' termini estremi non equaglirebbe quella de' termini medj: 2. *che se quattro quantità sono tali, che la somma de'*

termini estremi non è eguale a quella de' termini medj, esse non possono formare una equi-differenza; imperciocchè se queste quantità formassero una equidifferenza, la somma degli estremi equivarrebbe a quella de' medj.

191. Le cose dette ci danno un metodo facile per determinare uno de' termini della equidifferenza, qualora gli altri tre sono noti. In fatti, se nella equidifferenza $a . b : c . x$ sia ignoto l'estremo x, noi avremo $a+x=b+c$; e togliendo da queste quantità eguali la quantità comune a, sarà $x=b+c-a$. Se poi il termine ignoto sia uno de' termini medj, come sarebbe x nella equidifferenza $a . b : x c$, noi avremo la eguaglianza $a+c=b+x$; e togliendo da ambi i membri di essa di comune la quantità b, avremo $x=a+c-b$. Dal che ricaviamo generalmente, *che qualora in una equidifferenza si vuole determinare uno de' termini, se esso è estremo, noi lo troveremo sottraendo il termine noto dalla somma de termini medj*: se poi è un medio, *esso si determinerà sottraendo il medio noto dalla somma degli estremi.*

192. Qui giova avvertire, che qualora una equidifferenza abbia solamente tre termini fra loro distinti, essendovene uno, che faccia da conseguente nel primo rapporto, e da antecedente nel secondo, nel qual caso la equidifferenza dicesi *continua*, la somma de' termini estremi è il doppio del termi-

ne medio; ed in tale caso l' estremo ignoto equivale al residuo, che si ottiene sottraendo l' estremo noto dal doppio del termine medio; ed il termine medio sarà eguale alla metà della somma de' termini estremi.

CAPITOLO XI.

Applicazione della Teoria delle proporzioni alla soluzione di alcuni problemi numerici.

193. Per dare a questa materia tutta la chiarezza della quale essa è suscettibile, io esporrò alcune nozioni preliminari.

194. Def. 1. Io chiamo *effetto*, qualunque cosa, la quale è, o può essere considerata come prodotta, vale a dire, tutto ciò, che non racchiude unicamente in se la ragione della sua esistenza.

195. Def. 2. Dò il nome di *cagione* a tutto ciò, che produce, o concorre alla produzione di un effetto.

Così, per esempio, una somma di danaro, che io ricevo da una persona, è un effetto, il quale può nel medesimo tempo avere per cagioni, un capitale impiegato prima nelle sue mani, il tempo durante il quale è restato impiegato, e lo interesse da me convenuto con lui.

196. Def. 3. Un *effetto* si dice *semplice*, quando risulta, oppure è considerato come risultante da una cagione unica, e nel caso contrario è detto *effetto composto*.

Nella natura effettivamente molto piccolo è il numero degli effetti veramente semplici, ma, molto spesso noi, consideriamo come semplici gli effetti composti, delli quali una sola delle cagioni varia, nel mentre si suppone, chè tutte le altre restino le medesime.

Così per esempio quantunque la quantità del danaro, che si dee sborzare per avere un pezzo di panno di una certa lunghezza, non dipenda soltanto da sì fatta lunghezza, ma ancora dalla larghezza, e dalla qualità del panno, tuttavia noi consideriamo tale quantità di danaro, come se dipendesse unicamente dalla lunghezza del pezzo di panno, giacchè tacitamente si suppone, che la sua larghezza, e la sua qualità restino invariabili.

197. Def. 4. Si dice, che un effetto è in *ragione diretta* della sua cagione, o di qualchedunà delle sue cagioni, qualora (le altre cose restando eguali), la cagione divenendo un certo numero di volte maggiore, o minore, l' effetto diviene precisamente lo stesso numero di volte maggiore, o minore.

In questo senso si dice, che il prezzo, che si dee pagare per una mercanzia è in ragione diretta della quantità, che noi ne compriamo.

198. Defi 5. Noi diciamo, che un effetto è in *ragione inversa* della sua cagione, o di una delle sue cagioni, qualora (tutte le altre cose restando eguali) divenendo la cagione un certo numero di volte maggiore, o minore, lo effetto diviene precisamente lo stesso numero di volte minore, o maggiore.

In questo senso noi diciamo, che il tempo, che un uomo impiega a percorrere lo spazio di una lunghezza data è in ragione inversa della velocità, con cui esso si muove.

199. Queste nozioni premesse, vediamo come la teoria delle proporzioni da noi esposta può condurci alla soluzione di alcuni problemi; tutta la difficoltà, che possiamo incontrare, quando ci proponiamo di sciogliere un poblema, si riduce a trovare la maniera da disporre i termini di una proporzione, ed ecco la regola sicura per dare ad essa quella disposizione, che conviene.

200. Tra li quattro termini, dalli quali deve essere composta una proporzione, ve ne sono sempre due della medesima specie tutti e due cogniti, e due di un' altra specie, tra li quali ve ne è uno ignoto, quindi dopo di avere ben distinti li due termini

di ciaschedauna delle due specie, noi stabiliremo un rapporto fra le due quantità note, che noi considereremo come le due cagioni produttrici ciascheduna di un effetto, li quali sono li numeri dell' altra specie; tra li quali vi è la quantità ignota, indi avvertiremo al rapporto, che hanno fra loro le quantità cagioni, e diremo, che lo stesso rapporto deve esistere tra le quantità considerate come effetti delle prime, quindi essendo le quantità cagioni amendue note, noi decidiamo evidentemente se lo antecedente è maggiore, o minore del conseguente, e ne conchiudiamo, che, qualora lo antecedente è maggiore del conseguente, similmente nel rapporto, nel quale li termini sono gli effetti, l'antedente dee essere maggiore del conseguente, e vice-versa; quindi avendo deciso per mezzo del raziocinio, quale degli effetti dee essere maggiore, o minore dell' altro, si stabilirà la proporzione, facendo, cagione maggiore a cagione minore, come effetto maggiore ad effetto minore, oppure cagione minore a cagione maggiore come effetto minore ad effetto maggiore, indi la proporzione così stabilita, si determina il termine ignoto, ed il problema sarà sciolto. Tutte queste cose verranno poste in chiaro da alcuni esempj, che da noi si proporranno per esercizio de' principianti.

201. Prob. I. *Due capitali, uno di* 789 *docati, l' altro di* 576 *sono stati impiegati alla medesima ragione, si sa che quello di* 789 *docati ha dato in un anno lo interesse di* 84 *docati, si cerca sapere quanto renderà il capitale di* 576. *docati.*

In questo poblema vi sono li due capitali, l' uno di 789 doc., l' altro di 576 ambidue noti, e di essi quello di 789 è cagione dello interesse noto, l'altro di 576 deve produrre lo interesse ignoto, che noi disegneremo con la lettera x; Avendo così distinto le cagioni, e gli effetti, incominceremo dallo stabilire il rapporto tra le due cagioni, il quale può indifferentemente essere quello di 789 : 576, o quello di 576 : 789; indi ragioneremo così, se il capitale primo fosse il doppio, il triplo, il quadruplo etc., oppure la metà, il terzo, il quarto etc. del secondo, similmente lo interesse dal primo prodotto sarebbe il doppio, il triplo, il quadruplo, etc., oppure la metà il terzo, il quarto etc. di quello prodotto dal secondo, dal che conchiudiamo, che li capitali sono nella ragione diretta degli interessi da essi prodotti, e che per conseguenza se nel primo rapporto, il primo termine è fatto dal capitale maggiore, nel secondo rapporto il primo termine sarà la rendita da esso prodotta, che è maggiore, e vice-versa se il primo termine è il capitale minore, nel secondo rapporto il primo termine dee essere lo interesse da esso prodotto, che è il minore, e perciò da noi si potrà indifferentemente stabilire una delle due proporzioni

$$789 \text{ doc.} : 576 \text{ doc.} :: 84 \text{ doc.} : x$$
$$576 \text{ doc.} : 789 \text{ doc.} :: x : 84 \text{ doc.}$$

E determinando in una di esse il valore di x, avremo sempre

$$x = 84 \times \frac{575}{789}$$

E quì avvertiremo, che il *termine ignoto viene determinato dal numero* 84 *doc., che è il numero concreto esprimente lo interesse noto, moltiplicato per lo numero astratto, che nasce dal dividere l'uno per l'altro li due numeri concreti della medesima specie, che formano il primo rapporto, e che in questo caso in cui gli effetti sono in ragione diretta delle cagioni, il dividendo è il termine cagione dello effetto ignoto, ed il divisore è il termine cagione dello effetto noto.*

202. Della stessa maniera ragioneremo, qualora dobbiamo sciogliere qualunque altro problema, in cui gli effetti sono in ragione diretta delle cagioni, che li producono, e le stesse operazioni di calcolo, ce ne forniranno la soluzione. Li problemi, nè quali le cagioni sono in ragione diretta degli effetti da esse prodotti, si dicono problemi,

che si sciolgono con la regola del tre semplice, e diretta.

203. Prob. 2. *Un capitano ha nudrito 72 soldati con una data quantità di farina per lo spazio di 90 giorni, il medesimo deve ora nudrire con la stessa quantità di farina 97 uomini, si dimanda per quanti giorni essa può bastare.*

Facendo il raziocinio come nel problema precedente, noi troviamo le due quantità note della medesima specie essere 72 uomini, e 97 uomini, e li due effetti, tra li quali uno è ignoto, essere il noto 90 giorni, tra li quali 72 uomini hanno consumata la farina, ed x giorni ignoto, che sono quelli nè quali 97 uomini consumeranno una eguale quantità di farina. Indi stabiliremo ad arbitrio il primo rapporto, che è quello delli numeri degli uomini, facendo ad arbitrio 72 : 97, oppure 97 : 72; indi cercheremo di scoprire, in quale maniera le cagioni producono gli effetti, e troveremo, che a proporzione, che il numero degli uomini cresce, diminuisce il tempo in cui possono essere nudriti, ed a proporzione, che diminuisce il numero degli uomini, cresce quello de' giorni, e conchiudiamo in conseguenza de' principj esposti, che le cagioni sono in ragione reciproca degli effetti, che esse producono, e poicchè il primo termine del secondo rapporto deve essere maggiore o minore del secondo, qualora il primo termine del primo rapporto è maggiore, o minore del secondo, ne segue che noi potremo ad arbitrio stabilire una delle due proporzioni

$$72 : 97 :: x : 90$$
$$97 : 72 :: 90 : x$$

ed avremo $x = 90 \times \frac{72}{97}$, e qui ancora avvertiremo, che il numero de' giorni dimandato, *si trova multiplicando il numero de' giorni noto per lo numero astratto, che nasce dalla divisione de' numeri concreti della medesima specie, che formano li due termini del primo rapporto, e che in questo caso, in cui gli effetti sono nella ragione reciproca delle cagioni, il dividendo è il termine cagione dello effetto noto, ed il divisore è il termine cagione dello effetto incognito.*

204. Li problemi di questa specie, cioè li ploblemi, nè quali le cagioni sono in ragione reciproca degli effetti, si dicono comunemente problemi, *li quali si sciolgono per la regola del tre semplice reciproca,*

205. Prob. 3. *Un capitale di 364 doc. impiegato per lo spazio di 5 anni ha dato 242 docati di profitto, si dimanda quanto renderà un altro capitale di 753 doc.*

impiegato alla stessa ragione per lo spazio di 8 anni.

Qui dobbiamo considerare li due interessi prodotti dalli due impieghi come effetti prodotti da due specie diverse di cagioni; cioè dalle somme impiegate, e dalli tempi, che esse sono restate impiegate; quindi noi incominceremo dal determinare lo effetto, come se essi non avessero altre cagioni fuori di quelle de' due capitali, che essendo diseguali fanno variare le rendite; e poicchè evidentemente si fatte rendite sono in ragione diretta de' capitali, chiamando in questa supposizione x la rendita ignota, noi potremo stabilire indifferentemente una delle due proporzioni

$$364 : 753 :: 242 : x$$
$$753 : 364 :: x : 242$$

E determinando in una di esse il valore di x, avremo $x = 242 \times \frac{753}{364}$

Indi diremo il capitale di 753 renderebbe $242 \times \frac{753}{364}$, se fosse impiegato per 5 anni;

e conchiuderemo, che vi saranno due effetti; li quali sono le rendite di un medesimo capitale invariabile, una delle quali ha per cagione 5 anni, l'altra 8 anni, quindi chiamando y la rendita dimandata, che il capitale deve dare fra 8 anni, evidentemente conosciamo che si fatte rendite sono in ragione diretta delle loro cagioni, quindi stabiliremo indifferentemente una delle due proporzioni

$$5 : 8 :: 242 \times \frac{753}{364} : y$$

$$8 : 5 :: y : 242 \times \frac{753}{364}$$

e determineremo in una di esse il valore di y, e troveremo $y = 242 \times \frac{753}{364} \times \frac{8}{5}$, e noi troveremo, che lo interesse ignoto si trova multiplicando lo interesse noto per li numeri astratti, che nascono dal dividere respettivamente fra loro li numeri concreti della medesima specie, che formano li primi rapporti nelle due proporzioni.

206. Prob. 4. *Vi sono due compagnie di lavoratori, che lavorano a due opere della medesima difficoltà, e si sà, che la prima di esse è composta da 24 uomini, li quali lavorano 7 ore al giorno, e che hanno fatto 12 palmi in lunghezza, 16 in altezza, e 4 in larghezza, nel termine di 18 giorni; si sa ancora, che la seconda compagnia è composta di 20 uomini, li quali lavorano come li primi, ma 9 ore al giorno, e che debbono fare 14 palmi in lunghezza,*

13 *in altezza, e 5 in larghezza, si vuole sapere quanti giorni essi impiegheranno a fare questo lavoro.*

Egli è evidente, che li numeri de' giorni sono effetti dipendenti da varie cagioni, cioè dal numero degli operarj, delle ore di lavoro, che essi fanno in ciascheduno giorno, e dalle differenti lunghezze, altezze, e larghezze del lavoro; quindi noi incominceremo a vedere, quale sarebbe il numero de' giorni, che la seconda compagnia impiegherebbe a fare il lavoro della prima, travagliando in ciaschedun giorno il medesimo numero di ore, che travaglia la prima, e chiamando x si fatto numero di giorni, noi osserveremo, che a proporzione, che il numero de' lavoratori cresce, o diminuisce, vice-versa il numero de' giorni diminuisce, o cresce, quindi conchiudiamo, che gli effetti sono nella ragione reciproca delle cagioni, e stabiliremo una delle due proporzioni ad arbitrio

$$24 : 20 :: x : 18;$$
$$20 : 24 :: 18 : x.$$

e determinando in una di esse il valore di x, avremo $x = 18 \times \frac{24}{20}$

Indi diremo, il numero de' giorni, che la seconda compagnia avrebbe impiegato a fare il lavoro della prima, sarebbe stato $18 \times \frac{24}{20}$, se li lavoratori avessero fatigato

7 ore al giorno; ma essi ne hanno lavorato 9, dunque noi abbiamo due cagioni, cioè 7 ore di travaglio, e 9 ore di travaglio, abbiamo lo effetto, che la prima produce, cioè il numero de' giorni espresso da $18 \times \frac{24}{20}$, e si cerca lo effetto della seconda, che noi chiameremo y, e considereremo, che nella medesima ragione, che cresce, o manca il numero delle ore del travaglio giornaliero, manca, o cresce il numero de' giorni da impiegarsi per compiere il lavoro della prima compagnia, e conchiudiamo, che le cagioni sono nella ragione inversa degli effetti, e perciò faremo una delle seguenti proporzioni

$$7 : 9 :: y : 18 \times \frac{24}{20}$$
$$9 : 7 :: 18 \times \frac{24}{20} : y$$

e determineremo in una di esse il valore di y, e troveremo $y = 18 \times \frac{24}{20} \times \frac{7}{9}$.

Di poi osserveremo, che il numero determinato de' giorni, che la seconda compagnia impiegherebbe, suppone che essi avessero fatto 12 palmi in lunghezza del lavoro, nel mentre essi debbono farne 14, quindi il numero de' giorni determinato ha per cagione 12 palmi di lunghezza, nel mentre noi dobbiamo determinare il numero de' giorni, che ha per cagione 14 palmi, numero, che noi chiameremo z, e poicchè è evidente, che a proporzione, che crescono, o mancano li numeri de' palmi del lavoro, cresce o manca il numero de' giorni, che si debbono impiegare per eseguirli; noi conchiudiamo, che gli effetti, ossia li numeri de' giorni sono in ragione diretta delle loro cagioni, cioè de' numeri de' palmi del lavoro, e perciò stabiliremo ad arbitrio una delle due proporzioni

$$12 : 14 :: 18 \times \frac{24}{20} \times \frac{7}{9} : z$$
$$14 : 12 :: z, 18 \times \frac{24}{20} \times \frac{7}{9}$$

e determinando in una di esse il valore di z, avremo $z = 18 \times \frac{24}{20} \times \frac{7}{9} \times \frac{14}{12}$

Similmente ragionando, vediamo, che il numero de' giorni determinato deve variare, giacchè esso corrisponde alla cagione 16 palmi di altezza, nel mentre deve dipendere da 13 palmi, quindi le cagioni saranno 16 palmi, e 13 palmi, e l'effetto prodotto da 16 palmi è $18 \times \frac{24}{20} \times \frac{7}{9} \times \frac{14}{12}$, e si deve determinare quello corrispondente a 13 palmi, che chiameremo u, ed essendo evidente, che tali effetti sono in ragione diretta delle loro cagioni, noi stabiliremo una delle due proporzioni

$$16 : 13 :: 18 \times \frac{24}{20} \times \frac{7}{9} \times \frac{14}{12} : u \text{ oppure}$$
$$13 : 16 :: u : 18 \times \frac{24}{20} \times \frac{7}{9} \times \frac{14}{12}$$

e troveremo che

$$u = 18 \times \frac{24}{20} \times \frac{7}{9} \times \frac{14}{12} \times \frac{13}{16}$$

Finalmente ragionando totalmente come

ora abbiamo fatto, troviamo che il numero de' giorni determinato corrisponde al numero di 5 palmi di larghezza, nel mentre dobbiamo determinare quello, che ha per cagione 4 palmi di larghezza, e chiamando si fatto aumento w, vedremo, che noi dobbiamo stabilire una delle due proporzioni

$$5 : 4 :: 18 \times \tfrac{24}{20} \times \tfrac{7}{9} \times \tfrac{14}{12} \times \tfrac{13}{16} : w$$
$$4 : 5 :: w : 18 \times \tfrac{24}{20} \times \tfrac{7}{9} \times \tfrac{14}{12} \times \tfrac{13}{16}$$

in una delle quali determinando il valore di w, avremo

$$w = 18 \times \tfrac{24}{20} \times \tfrac{7}{9} \times \tfrac{14}{12} \times \tfrac{13}{16} \times \tfrac{4}{5}$$

207. Dal che riceviamo, che il numero de' giorni impiegati da 20 uomini lavorando 9 ore al giorno per fare 14 palmi in lungheza, 13 in altezza, e 5 in larghezza è eguale al prodotto, che nasce multiplicando 18 giorni per gli numeri astratti, che nascono dividendo li numeri concreti della medesima specie, che formano li termini delle ragioni semplici, che avrebbero luogo, se si supponessero gli effetti provvenienti successivamente da due cagioni omogenee.

208. Li due ultimi problemi da noi proposti sono conosciuti sotto il nome di problemi, che si sciolgono per mezzo della *regola del tre composta*; ed osservando minutamente quello, che in essi deve essere considerato,

noi vediamo 1., *che nè medesimi non può esservi più di una sola ignota. 2. Che i dati debbono sempre essere in numero dispari. 3. Che un solo de' dati è della stessa natura della ignota 4. Che gli altri dati sono sempre a due a due della medesima specie.*

209. In conseguenza di quanto abbiamo detto, possiamo rinchiudere il metodo pratico per isciorre li problemi di questa specie nella regola seguente.

La *ignota è sempre eguale alla sola quantità nota della medesima sua specie multiplicata per una serie di frazioni, li respettivi termini delle quali sono le quantità cognite della medesima specie.*

210. Resta ora a sapere relativamente a ciascuna frazione, quale termine deve essere il numeratore, e quale il denominatore; locchè facilmente determineremo per mezzo della seguente regola.

Il numeratore di ciascuna delle frazioni, per le quali deve essere multiplicato il numero cognito della medesima specie del numero dimandato per determinare tale numero ignoto, deve essere maggiore o minore del denominatore, secondocchè (supponendo eguali fra loro li due termini di tutte le altre frazioni, ossia ciò che vale lo stesso supponendo la regola del tre semplice) il numero dimandato dovrebbe es-

sere maggiore, o minore del numero cognito della medesima sua specie.

211. Li problemi, che volgalmente si dicono essere della *regola di compagnia* si sciolgono con lo stesso metodo precedente; in fatti supponiamo.

Che tre mercanti A, B, C abbiano fatta una società, fornendo in essa le seguenti somme, A doc. 356, B doc. 842, C doc. 796; la somma delli quali ha fruttato 426 doc, si domanda quanto deve percepire dalla somma lucrata ciascheduno degli associati.

Per isciorre il proposto poblema, noi incominceremo dal considerare, che la somma $356 + 842 + 796$ è la cagione del lucro totale 426, e che 356 è la cagione della parte di 426 che tocca ad A la quale chiameremo x; II che 842 è la cagione della porzione de' 426, che tocca a B, e che chiameremo y, III in fine, che 796 è la cagione della parte del medesimo numero 426, che si deve dare a C, e che noi chiameremo z; quindi facendo uso del metodo ordinario avremo le tre proporzioni

$$356 + 842 + 769 \text{ ossia}$$
$$1967 : 356 :: 426 : x$$
$$1967 : 842 :: 426 : y$$
$$1967 : 769 :: 426 : z$$

Per mezzo delle quali determinando li valori delle ignote avremo

$$x = 426 \text{ doc.} \times \frac{356}{1967};$$

$$y = 426 \text{ doc.} \times \frac{842}{1967},$$

$$z = 426 \text{ doc.} \times \frac{769}{1967}$$

ed osserveremo, *che la porzione di ciascheduno associato, si ottiene prendendo il numero concreto unico, il quale è della medesima specie del numero dimandato, che è sempre il lucro totale, e multiplicando per lo quoziente astratto, il quale nasce dividendo il capitale di ciascuno degli associati per la somma totale, che si è composta dalle somme fornite da tutti gli associati.*

F I N E.

$$x = 426 \text{ doc.} \times \frac{356}{1967};$$

$$y = 426 \text{ doc.} \times \frac{842}{1967},$$

$$z = 426 \text{ doc.} \times \frac{769}{1967}$$

ed osserveremo, *che la porzione di ciascheduno associato, si ottiene prendendo il numero concreto unico, il quale è della medesima specie del numero dimandato, che è sempre il lucro totale, e multiplicando per lo quoziente astratto, il quale nasce dividendo il capitale di ciascuno degli associati per la somma totale, che si è composta dalle somme fornite da tutti gli associati.*

FINE.