C A P. V.

Composizione de' numeri decimali.

A R T I C O L O I.

Addizione delli decimali.

124. Quando abbiamo trovata la regola della addizione de' numeri interi, noi la abbiamo ricavata dal vedere, che andando dalla destra verso la sinistra, dieci unità di un ordine formano nna unità dell' ordine superiore, ma le unità de' numeri decimali sono sottoposte alla medesima legge, dunque la addizione delli decimali si eseguirà seeondo la medesima regola, ehe abbiamo adoperata per gli numeri interi.

Proponiamoci per esempio di addizionare li numeri decimali 36, 584, e 9, 72 ossia 36, 584, e 9, 720, noi li disporremo come quì a fianco, indi operando come se fossero numeri interi avremo 46, 304 per la somma dimandata. Qui avvertiamo, che noi abbiamo aggiunto un zero alla destra del numero decimale 9, 72 per fare sì, che li numeri dati fossero ridotti allo stesso denominatore, ma noi ci accorgiamo, che la operazione avrebbe dato il medesimo risultato, se non avessimo scritto il zero

$$\begin{array}{r} 36,\ 584 \\ 9,\ 720 \\ \hline 46,\ 304 \end{array}$$

alla sua destra, facendo però attenzione a situare le parti decime sotto le decime, le centesime sotto le centesime etc. de' numeri dati. Quindi conchiuderemo, che la operazione della addizione de' numeri decimali *si esegue come quella de' numeri interi, disponendo li numeri decimali dati gli uni sotto gli altri, facendo attenzione di situarli in modo, che le cifre, che indicano numeri composti da unità del medesimo grado, sieno posti nella medesima colonna verticale.*

ARTICOLO II.

Multiplicazione de' numeri decimali.

125. Proponiamoci di multiplicare 3, 48 per 7, 9. Per trovare la regola secondo la quale deve essere eseguita questa operazione, osserveremo, che se noi facciamo dare alla virgola due passi verso la destra nel moltiplicando, avremo il numero 348, il quale è eguale al multiplicando $3,48 \times 100$; Similmente avanzando nel multiplicatore la virgola di un rango verso la destra, noi avremo lo intero 79. il quale equivalerà al multiplicatore $7,9 \times 10$; quindi se in vece di multiplicare fra loro li numeri decimali dati, noi multiplichiamo 348 per 79, avre-

mo il prodotto 27492, il quale è nato da un multiplicando, il quale è il multiplicando dato multiplicato per 100, e da un multiplicatore, il quale è il multiplicatore dato multiplicato per 10, ma si è dimostrato, che qualora in una multiplicazione il multiplicando si multiplica per un numero, ed il multiplicatore si multiplica per un altro numero, il prodotto si trova multiplicato per lo prodotto de' due numeri, che hanno multiplicato il multiplicando ed il multiplicatore, dunque il prodotto 27492 è il prodotto dimandato multiplicato per 100×10, ossia per 1000; quindi se esso si dividerà per 1000, noi avremo il prodotto di

$3,48 \times 7,9$; dunque $\frac{27492}{1000} = 3,48 \times 7,9$,

ma $\frac{27492}{1000} = 27,492$, dunque $3,48 \times 7,9 =$

27, 492; ma noi osserviamo, che 27, 492 è il prodotto de' due numeri decimali dati considerati come numeri interi, dal quale si cono separati per mezzo di una virgola andando dalla destra verso la sinistra tante cifre, quante sono le cifre decimali delli due fattori, dunque noi ricaveremo la seguente regola generale; qualora debbono multiplicarsi fra loro due numeri decimali, *si multiplichino come se fossero numeri interi, facendo astrazione della virgola, e dal* *prodotto si separino, andando dalla destra verso la sinistra, tante cifre decimali, quante ne sono nelli due fattori.*

126. Il prodotto de' numeri decimali è lo stesso di quello delle espressioni frazionarie ad essi equivalenti, ma il prodotto delle espressioni frazionarie non si altera qualunque sia l'ordine, secondo il quale li fattori si multiplichino, dunque il *prodotto di due numeri decimali non si altera, qualunque sia l'ordine secondo il quale si multiplichino li fattori.*

ARTICOLO III.

Elevazione a potenza de' numeri decimali.

127. Li numeri decimali altro non sono se non se espressioni frazionarie ordinarie, nelle quali il denominatore è indicato dalla unità, alla destra della quale seguono tanti zeri, quante sono le cifre, che sono alla destra della virgola, quindi esse debbono essere sottoposte alle medesime regole, alle quali sono sottoposte le espressioni frazionarie ordinarie, ma qualora una espressione frazionaria si deve elevare alla potenza di un dato grado, si elevano a tale potenza li suoi due termini, dunque qualora si vuole la potenza di qualunque grado di un deci-

male dato; dobbiamo elevare alla potenza dimandata li suoi due termini, ma la potenza di un numero composto dalla unità seguita da zeri è sempre formata dalla medesima unità seguita dal numero de' zeri, che contiene la radice, multiplicato per lo numero, che esprime il grado della potenza, dunque il denominatore della potenza del numero decimale è la unità seguita da tanti zeri, quanti ne contiene la radice, ripetuti tante volte, quante ne indica il numero delle unità, che contiene il grado della potenza; ma volendo scrivere questa espressione frazionaria sotto la forma di un numero intero, si scrive il suo numeratore, dalla destra del quale si separano, per mezzo della virgola, tante cifre decimali, quanti sono li zeri del denominatore, ed i zeri del denominatore sono tanti quanti ne disegna il prodotto, che nasce multiplicando il numero de' zeri, che contiene il denominatore della radice per lo grado della potenza dimandata, dunque la potenza del decimale dato si trova *elevando alla potenza dimandata il decimale dato considerato come numero intero, e separando dalla destra di esso tante cifre decimali, quante ne indica il prodotto, che nasce multiplicando il numero de' zeri del denominatore del decimale dato per lo grado della potenza dimandata.*

Così volendo elevare 7, 34 al quadrato, noi faremo il quadrato di esso come se fosse un numero intero, ed avremo 538756, indi osserveremo, che il denominatore del decimale dato è 100, cioè l' unità seguita da due zeri, e conchiuderemo, che il denominatore del quadrato sarà l' unità seguita da quattro zeri, ossia 10000, e per conseguenza, che il quadrato di 7, 34 è $\frac{538756}{10000} =$ 53 . 8756.

Similmente ragionando troveremo, che il cubo del medesimo numero decimale 7, 34 è 395, 446904; e così per le altre potenze.

Similmente operando troveremo, che il quadrato di 0, $3 = \frac{9}{100} = 0, 09$; e che il cubo di 0, $3 = \frac{27}{1000} = 0, 027$; dal che ricaviamo, che qualora *il numero delle cifre decimali della potenza del numeratore non sono sufficienti per separne per mezzo della virgola il numero correspondente ai zeri del denominatore, allora le cifre mancanti si suppliranno con aggiungere de' zeri alla sinistra della potenza trovata del numeratore, ed indi separarne il numero delle cifre decimali, che corrispondono alli zeri, che dovrebbe avere il denominatore.*

C A P. VI.

Decomposizione de' numeri decimali.

A R T I C O L O I.

Della Sottrazioue de' numeri decimali.

128. Quando abbiamo trovata la regola delle sottrazione de' numeri interi, noi la abbiamo ricavata dal vedere, che andando dalla destra verso la sinistra, dieci unità di un ordine formano una unità dell' ordine seguente, ma le unità decimali sono sottoposte alla medesima legge, dunque la sottrazione de' numeri decimali si eseguirà secondo la medesima regola, che abbiamo adoperata per gli numeri interi.

Così volendo sottrarre 27, 934 da 96, 26; ossia da 96, 260, noi troveremo come quì a fianco per residuo 68, 326; al 96, 26 noi abbiam aggiunto un zero alla destra della frazione decimale, per ridurre li due decimali allo stesso denominatore, locchè non ha alterato il valore del decimale dato 96, 26.

$$\begin{array}{r} 96,260 \\ 27,934 \\ \hline 68,326 \end{array}$$

ARTICOLO II.

Divisione de' numeri decimali.

129. *Dividere un numero decimale per un altro.*

Tre casi possono darsi 1. Che le parti frazionarie de' due numeri dati sieno composte del medesimo numero di cifre. 2. Che le parti frazionarie di essi non abbiano il medesimo numero di cifre. 3. Che uno soltanto di essi abbia la parte frazionaria, e l' altro sia un nnmero intero.

1. Noi sappiamo, che il quoziente di una divisione non si altera, qualora si multiplichi si il dividendo, che il divisore per un medesimo numero, quindi il quoziente della divisione proposta resterà lo stesso, se si il dividendo, che il divisore dati si multiplicheranno per un numero formato dalla unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre delle parti frazionarie di essi, ma questa operazione si fa supprimendo la virgola, dunque dopo di avere soppressa la virgola sì nel dividendo, che nel divisore, noi faremo la divisione sopra li numeri interi, che ne risultano, ed il qnoziente, che avremo sarà il quoziente dimandato.

2. Qualora le parti frazionarie del dividendo e del divisore non hanno il medesimo numero di cifre, allora a quello de'

numeri dati, in cui la parte frazionaria ha il minor numero di cifre, aggiugneremo a destra tanti zeri, quanti ne bisognano, affichè le parti frazionarie del dividendo e del divisore abbiano il medesimo numero di cifre, locchè non ne altera il valore, indi sopprimendo in essi la virgola, eseguiremo la divisione sopra de' numeri interi, che ne risultano, ed il quotiente, che avremo sarà il quoziente dimandato,

3. Se de' numeri dati uno è un intero, e l'altro un numero decimale, considerando, che il quoziente non si altera qualora multiplichiamo per lo stesso numero si il dividendo, che il divisore, noi conchiudiamo, che se multiplichiamo tanto l'intero, quanto il decimale per la unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre della parte frazionaria del decimale dato, il quoziente non sarà alterato, ma si fatta multiplicazione si fa aggiugnendo alla destra dello intero dato tanti zeri, quanti ne indica il numero delle cifre della parte frazionaria del decimale, e sopprimendo la virgolc nel decimale, dunque dopo di avere aggiunto al numero intero tanti zeri, quante sono le cifre della parte frazionaria del decimale dato, e soppressa la virgola nel decimale, noi divideremo gli interi, che ne risultano, ed il quoziente, che avremo sa-

rà il quoziente dimandato. Dal che ricaviamo.

1. *Che qualora si debbono dividere due numeri decimali, nelli quali le parti frazionarie hanno lo stesso numero di cifre, si fa astrazione delle virgole, e sopra de' numeri interi che ne risultano si esegue la divisione, la quale darà per quoziente il quoziente dimandato.*

2. *Qualora si debbono dividere due numeri decimali, nelli quali le parti frazionarie non hanno lo stesso numero di cifre, si debbono aggiugnere tanti zeri a destra di quel numero decimale, in cui la parte frazionaria ha il minore numero di cifre, quante ne abbisognano, affinchè le parti frazionarie de' due numeri dati abbiano lo stesso numero di cifre, indi avendo fatta astrazione delle virgole, si eseguirà la divisione sopra de' numeri interi, che ne risultano, ed il quotiente, che si avrà, sarà il quotiente dimandato.*

3. *Qualora dobbiamo dividere l' uno per l' altro due numeri, de' quali l' uno sia intero e l' altro decimale, noi aggiugneremo alla destra del numero intero tanti zeri, quante sono le cifre della parte frazionaria del decimale dato, indi facendo astrazione della virgola, divideremo fra loro li due numeri interi, che ne risulta-*

no, ed il quoziente, che avremo sarà il quoziente dimandato.

Proponiamoci per esempio di dividere 9, 728 per 2, 7, come in questo caso il dividendo, ed il divisore non hanno le parti frazionarie composte del medesimo numero di cifre, noi aggiugneremo al divisore 2, 7 due zeri alla destra, e fatta astrazione delle virgole, divideremo 9828 per 2700, come quì a fianco. Eseguendo la divisione sopra gli interi 9828, e 2700, avremo per quoziente lo intero 3, ed il residuo 1728, or perchè questo residuo non contiene più il divisore 2700, noi metteremo alla sua destra un zero, e supporremo, che esso disegni parti decime della unità, in tale modo esso non avrà cambiato di valore, ed il quoziente sarà in parti decime della unità, quindi, dopo di avere posta la virgola alla destra dello intero 3, per indicare, che la cifra seguente esprime parti decime della unità, divideremo 17280 per 2700, e troveremo per quoziente 6, e per residuo 1080, alla destra del quale aggiugneremo un zero, e facendo ad esso indicare parti centesime della unità, non avrà cambiato di valore; finalmente divideremo 10800 per 2700, e troveremo per quoziente 4, e per residuo

9828	2700
8100	3, 64
——	
17280	
16200	
——	
10800	
10800	
——	
00000	

zero; e conchiuderemo, che il quoziente di 9, 828 diviso per 2, 7 è 3, 64.

Similmente sia da dividere 0, 007824 per 3, 26, dopo di avere posto alla destra della parte frazionaria del divisore 3, 26 quattro zeri, noi faremo astrazione della virgola, e divideremo lo intero 007824 ossia 7824 per 3260000, e poichè il dividendo non contiene il divisore, il quotiente sarà zero, ed il residuo sarà lo stesso dividendo 7824, al quale aggiugnendo un zero a destra, e facendo ad esso disegnare parti decime della unità, non avrà cambiato di valore, indi lo divideremo per lo divisore 3260000, ed avremo il quoziente in parti decime della unità, quindi dopo avere posta la virgola a destra del quoziente zero trovato, osserveremo, che il divisore non è contenuto nel dividendo, e che perciò il quoziente deve essere zero, che noi metteremo al posto delle parti decime del quoziente, ed avremo per residuo lo stesso numero 78240 parti decime, alla destra del quale aggiungnendo un zero, e faccndo al numero 782400, che ne risulta, designare parti centesima della unità, non avrà cambiato di va-

1304000	3260000
78240	0, 0024
782400	
7824000	
6520000	
1304000	
13040000	
13040000	
0000000	

lore, indi lo divideremo per lo divisore dato, ed avremo per quoziente zero parti centesime, ed il medesimo numero 782400 per residuo, a destra del quale aggiugneremo di nuovo un altro zero, e faremo che esso disegni parti millesime della unità; indi divideremo il numero, che ne risulta 7824000 per lo divisore 3260000, ed il quoziente 2, che è in parti millesime si scriverà alla destra de' due zeri trovati del quoziente, che è il posto assegnato alle parti millesime della unità, indi troveremo il residuo 1304000 alla destra del quale aggiugneremo un zero, ed al numero 13040000, che ne risulta, faremo disegnare parti diecimillesime, e dopo di averlo diviso per lo divisore 3260000, e trovato il quoziente 4, lo noteremo alla destra della cifra 2, che è il posto assegnato alle parti diecimillesime della unità, e troveremo, che il residuo è zero, e conchiuderemo, che il quoziente di 0, 007824 per 3, 26 è 0, 0024.

Sia in ultimo luogo da dividere 803,52 per 96, noi incominceremo dallo aggiugnere due zeri allo intero 96, e sopprimere la virgola nel decimale, 803, 52, indi divideremo l'uno per l'altro li due interi 80352, e 9600, come quì a fianco, e poichè il dividendo contiene il divisore 8 volte avremo il primo quozi ente intero 8, ed il residuo 3552, al quale aggiugnendo un zero alla destra, e facendo ad esso desisgnare parti decime della unità, lo divideremo per 9600, e dopo di avere posta una virgola a destra del quoziente 8, noteremo alla destra di esso il quoziente 3, ed al residuo 6720 aggiugneremo un zero alla destra; e faremo che esso diseghi parti centesime della unità, e finalmente divideremo 67200

80352	9600
76800	8, 37
———	
3552	
35520	
28800	
———	
6720	
67200	
67200	
———	
00000	

per 9600, e troveremo per quoziente 7 e per residuo zero, e conchideremo, che il quoziente del decimale 803, 52 diviso per lo intero 96 è 8, 37.

ARTICOLO III.

Della estrazione delle radici dalli numeri decimali.

130. *Estrarre da un numero decimale dato la radice di un grado qualunque.*

Egli è evidente, che per estrarre le radici da un numero decimale, bisogna seguire lo stesso processo, che si è posto in uso per la estrazione delle radici dalle frazioni ordinarie, ma noi abbiamo osservato, che per estrarre una radice da una espressione frazionaria, si deve fare in modo, che il denominatore di essa sia una potenza perfetta del grado della radice dimandata, ma il denominatore di un numero decimale è sempre la unità seguita da uno, o più zeri, e la potenza della unità seguita da uno o più zeri è la unità seguita da tanti zeri, quanti ne sono nelli fattori eguali, che formano la potenza, dunque qualora la unità seguita a destra da uno o da più zeri si eleva alla potenza di un dato grado, sì fatta potenza sarà la unità seguita da tanti zeri, quanti ne indica il prodotto, che si ha multiplicando il numero de' zeri della radice per quello, che indica il grado della potenza dimandata, quindi de' numeri 10, 100, 1000 etc. li quadrati sono 100, 10000, 1000000 etc., li cubi sono 1000, 1000000; 1 000 000 000; etc., e così procedendo avanti per le potenze di gradi superiori; ma nelli numeri decimali li numeri delli zeri de' denominatori sono indicati dal numero delle cifre, che essi hanno a destra della virgola, dunque un numero decimale non può avere il denominatore, che sia un quadrato perfetto, qualora il numero delle cifre della parte frazionaria non è un multiplice di 2. Similmente il suo denominatore non può essere un cubo perfetto, se il numero delle cifre della parte frazionaria non è un multiplice di 3, non può essere una quarta potenza perfetta, se il numero delle cifre della parte frazionaria non è un multiplice di 4, e così procedendo avanti, in maniera, che in generale il denominatore non può essere una potenza perfetta di un grado dato, se il numero delle cifre della parte frazionaria non è un multiplice del numero, che indica il grado della potenza. Quindi per estrarre da un numero decimale dato la radice di un grado dato, *si scriveranno alla destra del decimale dato tanti zeri, quanti ne bisognano, affinchè il numero delle cifre, che sono alla destra della virgola sia un multiplice del numero, che indica il grado della potenza dimandata, indi da esso si estrarrà la radice come se fosse un numero intero, ed alla radice trovata si darà per denominatore la unità seguita da tanti zeri, quanti ne indica il numero, che si ha dividendo il numero delle cifre della parte frazionaria del decimale dato, per quello, che indica il grado della radice dimandata, ossia separando dalla destra della radice trovata per mezzo della virgola tante cifre, quante ne indica il quoziente, che si ha dividendo il numero delle cifre della parte frazionaria del decimale dato per lo numero, che indica il grado della radice dimandata.*

Così se si dimanda la radice cubica di

36, 4723, noi aggiugneremo alla destra di questo numero due zeri, indi estrarremo da 36, 472300 la radice cubica come se fosse un numero intero, dalla radice prossima 331 trovata separeremo per mezzo della virgola due cifre alla destra; poichè 2 è il quoziente del numero 6 delle cifre della parte frazionaria diviso per lo numero 3, che indica il grado della radice dimandata, e la radice cubica prossima del numero dato sara 3, 31.

CAPITOLO VII.

Delle trasformazioni delle frazioni ordinarie in frazioni decimali, e reciprocamente delle frazioni decimali in frazioni ordinarie.

ARTICOLO I.

Trasformazione delle frazioni ordinarie in frazioni decimali.

131. Osservando, che le operazioni del calcolo eseguite sopra le frazioni decimali sono sommamente facili, poicchè esse si riducono ad operazioni eseguite sopra di esse, come se fossero numeri interi, si è cercato di trovare la maniera di trasfor-

mare le frazioni ordinarie in frazioni decimali.

132. Noi abbiamo osservato, che qualunque divisione può essere indicata per mezzo di una frazione, e che qualunque frazione deve essere considerata come indicante il quoziente, che si otterrebbe dividendo il numeratore per lo denominatore, e che perciò la frazione $\frac{3}{4}$, per esempio, equivale al quoziente, che si otterrebbe dividendo 3 per 4, e come chiaramente si vede questo quoziente deve essere minore della unità, ossia che esso deve essere una frazione vera, e poicchè il dividendo 3 è minore del divisore 4, il quoziente deve essere espresso in parti, ciascuna delle quali sia $\frac{1}{4}$ della unità, quindi quando vogliamo trasformare la frazione $\frac{3}{4}$ in frazione decimale, altro non vogliamo fare se non se esprimere in parti 10^{me}, 100^{me}, 1000^{me}, ec. della unità quel quoziente, che la frazione ordinaria $\frac{3}{4}$ esprime in parti quarte della medesima unità; ma per trovare questo quoziente espresso in parti decime; centesime, millesime, etc. della unità, basta trovare sì fatto quoziente 10, 100, 1000, etc. volte maggiore, e di poi dare ad esso per denominatore 10, 100, 1000 etc. Ma noi abbiamo dimostrato, che per avere un quoziente 10, 100, 1000 etc.

volte maggiore, basta rendere il dividendo 10, 100, 1000, etc. volte maggiore senza alterare il divisore, dunque per avere nella divisione di 3 per 4 parti 10, 100, 1000, etc. volte maggiori, dovremo fare si, che il dividendo 3 divenga 10, 100, 1000, etc. volte maggiore, locchè si eseguirà mettendo uno, due, tre etc. zeri alla destra del dividendo 3, cioè se vogliamo nel quoziente le parti decime, divideremo 30 per 4, se vogliamo le parti 100^{me} divideremo 300 per 4, ed in questo caso avremo il quoziente 75, cento volte maggiore del vero, che noi ridurremo al suo giusto valore, dando ad esso per denominatore 100, ed il vero quoziente sarà 0, 75. Se avessimo voluto ridurre $\frac{3}{4}$ in parti millesime, avremmo diviso 3000 per 4, ed avremmo avuto per quoziente 750, il quale essendo 1000 volte maggiore del quoziente dimandato, sarà ridotto al suo giusto valore dando ad esso per denominatore 1000, e la frazione data $\frac{3}{4}$ sarebbe ridotta alla frazione decimale 0, 750. Dal che vediamo, che qualora abbiamo aggiunto un zero alla destra del dividendo, abbiamo avuta una cifra decimale al quoziente, e che qualora abbiamo aggiunti due zeri, abbiamo avuto al quoziente due cifre decimali; similmente avremmo potuto osservare, che aggiugnendo al dividendo un certo numero di zeri avremmo ottenuto al quoziente uno eguale numero di cifre decimali. Dal che ricaviamo la seguente regola generale.

Qualora vogliamo ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale, noi *scriveremo alla destra del numeratore tanti zeri, quanto è il numero delle cifre decimali, che da noi si vogliono nel decimale dimandato, indi divideremo il numeratore così alterato per lo denominatore della frazione data, e separeremo dal quoziente, procedendo dalla destra verso la sinistra tante cifre decimali, quanti sono stati li zeri aggiunti al numeratore, potendo scrivere alla destra dèl numeratore qualunque numero di zeri, purchè dal quoziente si separino per mezzo di una virgola tante cifre a destra, quanto è stato il numero de zeri posti a destra del numeratore della frazione data.*

Così se ci proponiamo di ridurre in frazione decimale la frazione ordinaria $\frac{5}{12}$, noi incominceremo dall' osservare, che la frazione data è una frazione vera, e che perciò dividendo il numeratore 5 per lo denominatore 12 avremo per quoziente zero, e per residuo lo stesso 5, a destra del quale

$$\begin{array}{l|l} 5 & 12 \\ 50000 \text{ etc.} & \overline{0,4166 \text{ etc}} \\ \ \ 20 & \\ \ \ \ 80 & \\ \ \ \ \ 80 & \end{array}$$

concepiremo scritto un numero qualunque di zeri, indi dopo avere posta una virgola a destra del quoziente 0, noi divideremo 50 decime per 12, ed avremo il quoziente parziale 4 decime, che noteremo a destra della virgola, nel quoziente, ed il residuo 2 a destra del quale discendiamo un zero, e divideremo il dividendo parziale 20 centesime per 12, noteremo al quoziente a destra della cifra 4 il quoziente parziale 1, che indicherà parti centesime, ed avremo il residuo 8, a destra del quale discenderemo un altro zero, ed avremo il dividendo parziale 80 millesimi, che diviso per 12 darà il quoziente parziale 6 millesimi, che noteremo a destra delle cifre trovate del quoziente, ed avremo il residuo 8 a destra del quale calando un zero avremo lo stesso dividendo parziale 80, lo stesso quoziente parziale 6, e lo stesso residuo 8, in modo che la divisione può essere continuata all' infinito, e perciò volendo avere il valore esatto di $\frac{5}{12}$ espresso in decimali, bisognerebbe incominciare dallo scrivere al quoziente 0, 416, e dipoi alla destra di queste tre cifre scrivere infinite volte la cifra 6; locchè fa vedere, che il valore di $\frac{5}{12}$ non può essere esattamente espresso da una frazione decimale.

133. Quì però avvertiremo, che se noi ci arrestiamo alla prima cifra del quoziente,

lo errore da noi commesso è minore di $\frac{1}{10}$, se ci arrestiamo alla seconda, lo errore è minore di $\frac{1}{100}$, se alla terza lo errore è minore di $\frac{1}{1000}$ etc., in maniera, che lo errore diviene tanto minore, quanto maggiore è il numero delle cifre, che troviamo al quoziente, tuttavia se noi volessimo contentarci di esprimere approssimativamente con un piccolo numero di cifre decimali, il valore della frazione ordinaria $\frac{5}{12}$, volendo servirci di due cifre decimali soltanto, bisognerebbe scrivere piuttosto 0, 42, che 0, 41, poichè 0, 41 è minore di 0, 416 di $\frac{6}{1000}$, nel mentre che 0, 42 è maggiore di 0, 416 di $\frac{4}{1000}$, ed ordinariamente è meglio commettere lo errore di $\frac{4}{1000}$ in eccesso, che quello di $\frac{6}{1000}$ in difetto; similmente se vogliamo fare uso di tre cifre decimali, è meglio scrivere 0, 417, che 0, 416; e così procedendo innanzi.

Ma se riducendo una altra frazione ordinaria in frazione decimale, essa fosse espressa da 0, 3712, e si volesse da essa togliere una cifra, ed esprimere il suo valore approssimativo con tre cifre soltanto, noi scriveremo piuttosto 0, 371, che 0, 372, poichè 0, 371 manca dal suo valore di $\frac{2}{10000}$, nel mentre che 0, 372 eccede il valore di 0, 3712 di $\frac{8}{10000}$, ed ordinariamente è meglio commettere lo errore di $\frac{2}{10000}$ in difetto, che quello di $\frac{8}{10000}$ in eccesso.

Finalmente se si volesse esprimere per approssimazione con sole tre cifre la frazione decimale 0, 7485, noi potremo scrivere indifferentemente in sua vece tanto 0, 748, quanto 0, 749, poichè nel primo caso faremo uno errore di $\frac{5}{10000}$ in difetto, e nel secondo quello di $\frac{5}{10000}$ in eccesso; Però quando non si trascura una sola cifra, ma più cifre, come sarebbe quando ci proponiamo di esprimere con sole tre cifre il valore approssimativo della decimale 0,513597, se noi scriviamo 0, 513 trascuriamo le tre cifre, delle quali le due, che seguono il 5 aumentano il suo valore, e faremo un errore minore aumentando la cifra 3 di una unità, e scriveremo 0, 514 piuttosto, che 0, 513. Dal che ricaviamo la seguente regola generale.

Per ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale, *si renda il numeratore della frazione proposta* 10, 100, 1000 *etc. volte maggiore, indi il numeratore in tale maniera alterato si divida per lo denominatore della medesima frazione, e si consideri il quoziente come esprimente parti* 10^{me}, 100^{me}, 1000^{me}, *etc. della unità, secondo il numero de' zeri, che si sono scritti alla destra del numeratore; Se nella decimale, che ne risulta si supprimono delle cifre, e la prima cifra a sinistra, di quelle, che si sopprimono è maggiore di* 5, *si accresca di una unità la ultima cifra della frazione ridotta, ma se la prima cifra a sinistra delle cifre, che si sopprimono è minore di 5, non si altera la cifra ultima della frazione ridotta; se si sopprimono più cifre, e la prima di esse a sinistra è 5 si accresca ancora di una unità la ultima cifra non soppressa, se poi si sopprime la sola ultima cifra, ed essa è 5 è indifferente, lo accrescere di una unità la ultima cifra non soppressa, oppure lasciarla tale quale essa si trova.*

Proponiamoci di ridurre in frazione decimale la frazione ordinaria $\frac{5}{7}$, noi immagineremo, che alla destra del numeratore 5 sia scritto un numero qualunque di zeri, indi faremo il calcolo secondo quello, che abbiamo detto come qui a fianco, noi osserveremo, che li sei primi dividendi parziali sono 50, 10, 30, 20, 60, 40, 50, li

Divid. 5	Div.	7
50		
10	Quoz.	0,714285714285
30		
20		
60		
40		
50		

quali danno per quozienti parziali successivamente le cifre 6, 1, 4, 2, 8, 5, dopo delle quali li medesimi quozienti parziali debbono ritornare nel medesimo ordine, giacchè il primo de' dividendi parziali 50 ritorna, e perciò deve avere appresso di se li seguenti, e questi sei dividendi ritornando sempre, e nel medesimo ordine, faranno similmente rivenire nel medesimo ordine li medesimi quozienti, ed avremo la frazione ordinaria $\frac{5}{7} = 0,\ 714285\ 714285\ 714285$ etc. Dal che si vede, che vi sono alcune frazioni ordinarie, che non possono essere ridotte esattamente in frazioni decimali, e che qualora una frazione ordinaria non può essere ridotta esattamente in frazione decimale, produce una divisione, che non può terminare, e per conseguenza produce una frazione decimale *infinita*.

Dippiù è evidente, che qualora riduciamo una frazione ordinaria in frazione decimale, li residui delle divisioni parziali non possono mai essere eguali al divisore, nè maggiori di esso, in modo tale, che la divisione, che si fa per eseguire questa operazione, non può fornire tutto al più un numero di residui differenti eguale al numero delle unità del divisore diminuito di una unità, di maniera, che volendo ridurre in frazione decimale la frazione ordinaria $\frac{5}{7}$, prima di eseguire la divione siamo sicuri di non potere avere per residui se non se 1, 2, 3, 4, 5, 6 tutto al più, e questi situati in qualunque ordine, e sappiamo dippiù, che qualora questi residui si saranno avuti, il residuo seguente o sarà zero; e la divisione sarà terminata, oppure uno de' residui precedenti ritornerà, ed allora la frazione decimale diventerà infinita, e poichè in essa una, o più cifre saranno ripetute nel medesimo ordine in modo, che formeranno un *periodo*, la frazione, che ne risulta prende il nome di *frazione decimale periodica*

134. Quando abbiamo ridotta la frazione $\frac{5}{7}$ in frazione decimale, abbiamo osservato 1. Che il residuo, che è ritornato il primo è stato il medesimo, che il primo dividendo parziale. 2. Che il periodo ha incominciato dalla prima cifra del quoziente. 3. Che il periodo è stato composto di sei cifre. Ma qualche volta il residuo, che ritorna è il secondo, il terzo il quarto etc. de' residui precedenti, ed allora correspondentemente il periodo incomincia dalla seconda, terza, quarta etc. cifra del quoziente, e può essere composto di una, due, tre etc. cifre, ed in tale caso la frazione decimale infinita prende il nome di *frazione decimale periodica mista.*

Così nella frazione $\frac{7}{15}=0,4666$. etc. il periodo incomincia alla seconda cifra, ed è di una cifra. Nella frazione $\frac{7}{22}=0,3181818$ etc., il periodo incomincia alla seconda cifra, ed è di due cifre; Nella frazione

$\frac{7}{44} = 0,54944$ il periodo incomincia dopo la terza cifra, ed è di una cifra.

135. Bisogna qui avvertire, che qualora una frazione ordinaria è suscettibile di essere ridotta esattamente in frazione decimale, non si può mai avere il medesimo residuo nella divisione, ossia il medesimo dividendo parziale, poicchè in tale caso dovremmo avere una frazione decimale composta da infinite cifre, e non una frazione finita, tuttavia spesse volte accade, che li residui sieno tra loro poco differenti, ed allora essi forniscono al quoziente la medesima cifra, in modo che nel quoziente si trova, che una o più cifre sono nel medesimo ordine ripetute; in questo caso esse non debbono essere considerate come formanti un periodo. Così, per esempio, la frazione $\frac{51}{200} = 0, 255$ è una frazione finita, e sebbene la cifra 5 sia in essa ripetuta due volte consecutivamente, pure questa ripetizione non produce un periodo.

ARTICOLO II.

Trasformazione delle frazioni decimali in frazioni ordinarie.

136. Dopo di avere trovata la maniera di ridurre le frazioni ordinarie in frazioni decimali, bisogna cercare il metodo, per mezzo del quale una frazione decimale può essere trasformata in frazione ordinaria.

137. Egli è evidente, che una frazione decimale finita sarà ridotta alla forma di frazione ordinaria, qualora sotto di essa scriviamo il denominatore, che noi abbiamo sottointeso, quando la decimale è scritta secondo la sua forma; ma come spesse volte questa maniera di trasformarle produce una frazione capace di essere ridotta ad espressione più semplice; dopo di averla così ridotta, noi la ridurremo alla sua minore espressione, dividendo li suoi termini per lo massimo divisore comune di essi.

Così se abbiamo le frazioni decimali 0, 3; 0, 73; 0, 411; 0, 031, noi le avremo ridotte in frazioni decimali facendo 0, 3 $= \frac{3}{10}$; 0, 73 $= \frac{73}{100}$, 0, 411 $= \frac{411}{1000}$; 0, 031 $= \frac{31}{1000}$; e poicchè li termini di tali frazioni ordinarie sono numeri primi, esse non possono essere riddotte ad una forma più semplice.

Se poi vogliamo ridurre sotto la forma ordinaria la frazione decimale $0,46$, noi osserveremo, che dopo di avere scritto $0,46$ sotto la forma $\frac{46}{100}$, essa si può ridurre a più semplice espressione, giacchè li suoi termini hanno il comune divisore 2, e diremo la decimale $0,46 = \frac{46}{100} = \frac{23}{50}$ Dal che ricaviamo la seguente regola generale.

Qualora si vuole ridurre una frazione decimale finita in frazione ordinaria, *dopo di averla scritta alla maniera delle frazioni ordinarie, si dividano li suoi termini per lo massimo divisore di essi, ed il risultato sarà la frazione ordinaria equivalente alla frazione decimale proposta ridotta alla più semplice espressione.*

138. Resta ora da cercare il metodo da ridurre in frazione ordinaria una *frazione decimale periodica* sia essa *periodica semplice*, sia *periodica mista*.

Ed in primo luogo noi osserveremo, che le frazioni periodiche altro non sono se non se frazioni ordinarie ridotte sotto la forma decimale, e che non possono essere esattamente espresse sotto questa forma, e che per conseguenza esse sono suscettibili di ritornare sotto la forma ordinaria, che è la loro vera forma.

Supponiamo, che si voglia ridurre in frazione ordinaria la frazione periodica $0,7777$ etc.. Se noi multiplichiamo questa frazione per 10, oppure ciò che vale stesso, noi avanziamo la virgola di un passo verso la destra, avremo il numero decimale 7, 777 etc. il quale sarà decuplo della frazione periodica data 0, 7777 etc.. Quindi se da 7, 777 etc. sottrajamo la frazione periodica data 0, 7777 etc. avremo per residuo il numero intero 7, il quale sarà 9 volte maggiore della frazione data, per conseguenza se dividiamo si fatto numero 7 per 9 avremo $\frac{7}{9}$, che sarà eguale alla frazione periodica data 0, 7777 etc.

Supponiamo, che la frazione abbia il periodo di due cifre, come sarebbe 0, 76 76 76 etc., ed avanziamo la virgola di due posti verso la destra, avremo il numero decimale 66, 76 77 76 etc, il quale è centuplo della frazione periodica proposta 0, 76 76 76, quindi se dal numero decimale 76, 76 76 76 etc. togliamo la frazione 0, 76 76 76 etc. avremo per residuo il numero intero 76, il quale è 99 volte maggiore della frazione data 0, 76 76 76 etc., dunque se dividiamo 76 per 99 avremo $\frac{76}{99}$ eguale alla frazione periodica 0, 76 76 76 etc.

Se nella frazione data il periodo fosse di tre cifre, applicando ad essa il raziocinio precedente, noi avremmo trovato, che essa equivale alla frazione ordinaria, la quale ha per numeratore un periodo, e per denominatore un numero fatto da tre volte la cifra 9 cioè da 999; e così procedendo avanti, quallora la frazione periodica ha il periodo composto da qualsivoglia numero di cifre; Lo che ci fa vedere, che qualora la frazione periodica ha il suo periodo di una cifra, essa equivale alla frazione ordinaria, che ha per numeratore il periodo, e per denominatore 9; quando essa ha il periodo di due cifre essa equivale alla frazione ordinaria, che ha per numeratore il periodo, e per denominatore 99, se essa ha il periodo di tre cifre, equivale alla frazione ordinaria, che ha per numeratore il periodo, e per denominatore 999; ed in generale, che qualora la frazione periodica ha il suo periodo di qualsivoglia numero di cifre essa sempre equivale alla frazione ordinaria, la quale ha per numeratore il periodo, e per denominatore un numero composto dalla cifra 9 scritta tante volte, quante ne indica il numero delle cifre del periodo; dal che ricaviamo la seguente regola generale.

Qualora si vuole ridurre in frazione ordinaria una frazione periodica semplice, *bisogna dividere il suo periodo per un numero formato dalla cifra 9 scritta di seguito tante volte quante ne indica il numero delle cifre del periodo.*

139. Proponiamoci ora la ricerca del metodo, che dee tenersi per ridurre in frazione ordinaria una frazione decimale nella

quale si trovano una, o più cifre prima del periodo, e che abbiamo chiamata *frazione periodica mista.*

Sia la frazione periodica mista $0,72974\ 974\ 974$ etc. e mettiamo la virgola alla destra del primo periodo, avremo $72974,974$ etc. $= 10000 \times 0,72974\ 974$ etc. Similmente passiamo la virgola alla sinistra dello stesso primo periodo della proposta, avremo $72,974\ 974\ 974$ eec. $= 100 \times 0,72\ 974\ 974\ 974$ etc. Quindi sottraendo la seconda eguaglianza dalla prima, avremo $72974 - 72 = 99900 \times 0,72\ 974\ 974\ 974$ etc.; e dividendo queste due quantità eguali per 99900, avremo $\frac{72974-72}{99900} = 0,72\ 974974\ 974$ etc. Quindi la frazione periodica mista proposta $0,72\ 974\ 974\ 974$ etc. è eguale alla frazione ordinaria, la quale ha per numeratore $72974 - 72$, cioè la differenza de' due numeri interi, de' quali uno è formato dalle cifre della frazione proposta, che sono dalla prima di esse fino all' ultima inclusivamente del primo periodo, e l'altro è la parte non periodica, e per denominatore un numero composto dalla cifra 9 scritta di seguito tante volte, quante ne indica il numero delle cifre di un periodo seguito da tanti zeri, quanti ne indica il numero delle cifre non periodiche della frazione decimale periodica mista proposta; e poichè lo stesso raziocinio è applicabile a qualunque altra frazione periodica mista, noi ricaveremo la seguente regola generale.

Qualora si vuole ridurre in frazione ordinaria una frazione decimale periodica mista, si prenda il numero formato dalle cifre, che sono comprese tra la prima di essa, e l' ultima inclusivamente del primo periodo, e da esso si sottragga il numero formato dalle cifre non periodiche, indi si faccia una frazione, la quale abbia per numeratore il residuo di tale sottrazione, ed abbia per denominatore il numero composto dalla cifra 9 *scritta di seguito tante volte, quante ne indica il numero delle cifre di un periodo, alla destra del quale sieno scritti tanti zeri, quante sono le cifre non periodiche della frazione decimale periodica mista proposta.*

CAPITOLO VIII.

Origine delle quantità incommensurabili, ed uso de' decimali per determinare il valore approssimativo di esse.

140. Quando da noi si sono esposte le regole per eseguire le operazioni del calcolo sopra de' numeri interi, abbiamo esposto il metodo per estrarre le radici quadrate, e cubiche da un numero dato, ed abbiamo osservato, che quando il numero dato è un quadrato, o un cubo perfetto, noi abbiamo di esso la radice quadrata, o cubica esattamente; e che se il numero dato non è la potenza esatta del grado della radice dimandata, la radice da noi trovata è soltanto approssimativa, e da noi si commette un errore minore di una unità. Similmente abbiamo osservato, che qualora si deve estrarre una radice di un dato grado da una frazione ordinaria, li due termini della quale sieno potenze perfette del grado della radice dimandata, estraendo sì dal numeratore, che dal denominatore di essa la radice del grado dimandato, operando sopra di ciascuno di essi secondo il metodo adoperato per gli numeri interi, la frazione la quale ha per suoi termini le respettive radici delli due termini della frazione data, è la radice esatta della

CAPITOLO VIII.

Origine delle quantità incommensurabili, ed uso de' decimali per determinare il valore approssimativo di esse.

140. Quando da noi si sono esposte le regole per eseguire le operazioni del calcolo sopra de' numeri interi, abbiamo esposto il metodo per estrarre le radici quadrate, e cubiche da un numero dato, ed abbiamo osservato, che quando il numero dato è un quadrato, o un cubo perfetto, noi abbiamo di esso la radice quadrata, o cubica esattamente; e che se il numero dato non è la potenza esatta del grado della radice dimandata, la radice da noi trovata è soltanto approssimativa, e da noi si commette un errore minore di una unità. Similmente abbiamo osservato, che qualora si deve estrarre una radice di un dato grado da una frazione ordinaria, li due termini della quale sieno potenze perfette del grado della radice dimandata, estraendo sì dal numeratore, che dal denominatore di essa la radice del grado dimandato, operando sopra di ciascuno di essi secondo il metodo adoperato per gli numeri interi, la frazione la quale ha per suoi termini le respettive radici delli due termini della frazione data, è la radice esatta della

frazione proposta; e finalmente abbiamo osservato, che se li due termini della frazione proposta non sono potenze perfette del grado della radice dimandata, allora dopo di aver fatto divenire il denominatore di essa potenza perfetta del grado della radice cercata, senza alterare il valore della frazione, facendo la frazione, che ha per numeratore la radice prossima del numeratore della frazione trasformata, e per denominatore il denominatore della proposta, abbiamo la radice prossima della frazione data, la quale differisce dalla radice esatta della proposta quantità, minore di una unità frazionaria, la quale è denominata dal denominatore della frazione proposta. Dal che vediamo, che il problema della estrazione delle radici spesso ci conduce ad avere delle quantità, le quali sono approssimativamente quelle, che da noi si cercano; e questo sempre deriva dal non potere trovare la radice di un dato grado di un numero intero, e dal trovare la radice dell' intero dato, la quale è minore della radice esatta, e tale, che se essa si accresce di una unità diviene maggiore della radice dimandata, dal che siamo autorizzati a conchiudere, che essa deve essere formata dalla radice prossima trovata in numero intero aggiunta ad una frazione vera; e qui si può proporre la quistione; *Qualora da un numero intero non si può estrar-*

re esattamente una radice in numeri interi, potremo noi ottenerla esattamente per mezzo delle frazioni ordinarie, o per mezzo delle frazioni decimali?

Per rispondere alla quistione proposta noi dimostreremo il seguente teorema.

141. *Qualora si moltiplicano fra loro due numeri primi, il loro prodotto non può essere divisibile esattamente per alcun altro numero primo diverso dalli due fattori.*

Rappresentino p, q' due numeri primi, e sia d un numero primo esatto divisore del prodotto $p \times p'$. Dico che d è eguale a p oppure a p', in modo, che se esso non è p, è necessariamente p'.

Per ipotesi d è esatto divisore di $p \times p'$, dunque $\frac{p \times p}{d}$ è uguale ad un numero intero, che noi chiameremo q; e perciò sarà $\frac{p \times p'}{p} =$ q; dividendo queste quantità eguali per p', sarà $\frac{p}{d} = \frac{q}{p'}$; ma noi abbiamo supposto, che p, d sono due numero primi diseguali, dunque $\frac{p}{d}$ è una espressione frazionaria ridotta alla sua minima espressione, e perciò li due termini della espressione frazionaria $\frac{q}{p'}$ o sono eguali alli termini di $\frac{p}{d}$, o sono egualmente multiplici di essi, ma per ipotesi p' è un numero primo, e perciò non può essere multiplice di d, sarà eguale a d, e perciò se d è divisore di $p \times p'$, e non è eguale a p, deve essere eguale a p'.

142. Da questa verità noi ricaviamo, che se si ha un prodotto nato dalla multiplicazione continua di una serie di numeri primi, esso non può avere per divisore esatto alcun numero primo differente da quelli, dalla multiplicazione de' quali esso è formato. In fatti supponiamo che si multiplichino fra loro li numeri primi p, p', p'', e sia il divisore del prodotto, di essi designato da d, io mi propongo di dimostrare, che d è eguale ad uno de' tre numeri p', p, p'', in modo, che se esso non è p, o p', deve necessariamente essere p''.

Sia $\dfrac{p \times p' \times p''}{d} = q$, dividendo queste

quantità eguali per p'', noi avremo $\dfrac{p \times p'}{d} = \dfrac{q}{p''}$, ma

per ipotesi p, p', d sono numeri primi, e per supposizione d non è p, nè p', dunque la

espressione frazionaria $\dfrac{p \times p'}{d}$ è ridotta a mi-

nimi termini, e perciò p'' o deve essere eguale a d, o multiplice di d, ma per ipotesi p'' è numero primo, e per conseguenza non è multiplice di d, dunque $p'' = d$. Con lo stesso raziocinio si può dimostrare la medesima verità, qualunque sia il numero de' fattori primi, che fra loro si moltiplichino.

143. Dal che ricaviamo le seguenti interessantissime verità. 1. *Se vi sono due serie di numeri primi, le quali non abbiano alcun termine comune, il prodotto de' termini della prima serie è numero primo col prodotto de' termini della seconda serie.* Imperocchè ciascuno di sì fatti prodotti non può avere per suo divisore primo un numero primo, il quale non sia uno delli suoi fattori, nè per divisore composto un numero, il quale non sia il prodotto de' medesimi suoi fattori primi.

2. *Se un numero intero non ha la sua radice di qualunque grado esatta in numero intero, non può averla esattamente in numero frazionario.* In fatti supponiamo, che la radice di un numero intero, la quale non può aversi esattamente in un numero intero, si abbia in un intero unito ad una frazione. Si concepisca questo intero unito alla frazione ridotto ad espressione frazionaria, e tale espressione frazionaria sia ridotta alla sua minima espressione.

Le potenze del medesimo grado di questa espressione frazionaria sono li prodotti di due serie di numeri primi, che hanno il medesimo numero di fattori primi tutti dissimili, dunque la frazione, che risulta dalle potenze delli termini della espressione frazionaria ha li suoi termini, che sono numeri primi fra loro, e per conseguenza il numeratore non può contenere il denominatore un numero intero di volte, e perciò la potenza della espressione frazionaria proposta, non può essere un numero intero. Dal che conchiudiamo, che se un numero intero non ha per sua radice esatta un numero intero, non può averla esattamente in numero frazionario.

3. Da quanto abbiamo detto si vede evidentemente, che la operazione della estrazione delle radici dà origine ad una nuova specie di quantità, che noi chiameremo irrazionali, o *incommensurabili*; chiamando così le quantità, che noi concepiamo essere le radici delli numeri interi, le quali non sono numeri interi; e poichè la estrazione delle radici delle frazioni si riduce alla estrazione delle radici de' numeri interi, allora quando esse sono state ridotte ad avere per denominatore una potenza esatta del grado dimandato, questa denominazione si estende ancora alli numeri frazionarj.

Noi ci serviremo del segno $\sqrt{}$ per designare sì fatte quantità, e qualora dentro di questo segno si mettono li numeri 2, 3, 4 etc., esso disegnerà, che la radice dimandata è del secondo, del terzo, del quarto ec. grado, così $\sqrt[2]{\overline{3}}$, $\sqrt[3]{\overline{3}}$, $\sqrt[4]{\overline{3}}$ etc.

disegno respettivamente la radice seconda, terza, o quarta del numero 3, che è sottoposto al segno radicale, ed a queste quantità si è dato il nome, *di quantità irrazionali*, o *incommensurabili*, poichè il rapporto di esse alla unità non può essere esattamente espresso in numeri, e perchè esse non hanno alcuna misura comune con la unità.

145. Per quello, che abbiamo esposto si vede chiaro, che da un numero intero il quale non è potenza perfetta del grado di una radice dimandata, non si può estrarre la radice esatta; tutta via noi possiamo avere la radice dimandata, con quel grado di approssimazione, che da noi si vuole, convertendo il numero dato in una frazione, il denominatore della quale sia la potenza del grado della radice dimandata di quel numero, che deve denominare le unità frazionarie della approssimazione dimandata; per esempio, se si vuole la radice quadrata di 2, approssimandola in modo, che essa differisca dalla sua vera radice di una quantità minore di $\frac{1}{9}$, allora noi ridurremo il numero 2 in una espressione frazionaria, il denominatore della quale sia il quadrato di 9, tale frazione sarà $\frac{162}{81}$, dalla quale estraendo la radice quadrata secondo le regole date, avremo $\sqrt{\frac{162}{81}} = \frac{12}{9} = 1\,\frac{3}{9} = 1\,\frac{1}{3}$, quantità, che differisce dalla radice esatta di 2 per una quan-

tità minore di $\frac{1}{9}$. Similmente se da noi si vuole la radice cubica di 2, in modo che essa differisca dalla radice esatta di una quantità minore di $\frac{1}{5}$, noi ridurremo il numero 2 in una espressione frazionaria equivalente, la quale abbia per denominatore 125 cubo di 5; ed allora, estraendo la radice cubica dalla espressione frazionaria $\frac{250}{125}$, avremo $\sqrt[3]{\frac{250}{125}} = \frac{6}{5} = 1\ \frac{1}{5}$, quantità che differisce dalla vera radice cubica di 2 per una quantità minoje di $\frac{1}{5}$. Similmente si può operare per avere la radice di qualunque grado di un numero dato, da cui essa non si può estrarre esattamente, e dando ad essa qualunque grado di approssimazione.

145. Quantunque il metodo dato possa condurci alla determinazione della radice di qualsivoglia grado delle quantità, che non hanno tale radice esatta, dando ad essa quel grado di approssimazione, che a noi piacerà, pure l' applicazione delli decimali a tale ricerca ci somministra un metodo sommamente comodo, quindi noi cercheremo di esporlo applicandolo alla ricerca delle radici quadrate, e cubiche incommensurabili.

146. Per la teoria da noi esposta delle frazioni decimali sappiamo, che qualora un decimale è espresso in centesime, la sua radice quadrata è in decime, che quando essa è espressa in millesime la sua radice qua-

drata è in centesime etc.. Quindi se noi ci proponiamo di estrarre la radice quadrata di un numero dato, approssimativamente fino alle parti decime, noi ridurremo tale numero in espressione frazionaria decimale espressa in centesime: se vogliamo avere la approssimazione fino alle centesime ridurremo il numero in parti diecimillesime, locche faremo scrivendo alla destra di esso respettivamente due, quattro, etc. zeri; indi ne estrarremo la radice, come se fosse un numero intero, e da essa separeremo con una virgola, andando dalla destra verso la sinistra tante cifre decimali, quante ne indica la metà del numero de' zeri aggiunti alla destra dello intero dato.

Così se vogliamo la radice quedrata di 12 con una approssimazione fino alle parti centesime, noi noteremo quattro zeri alla destra del numero 12, ed estrarremo secondo la regola data dal numero intero 120000 la radice quadrata come se fosse un numero intero, e troveremo che essa è 346 con uno errore minore di una unità. Ma noi dobbiamo separare dalla sua destra due cifre decimali, per avere la radice prossima di 12, dunque la radice prossima di 12 è 3,46, ed essa differisce dalla radice esatta di una quantità minore di una unità decimale del secondo ordine, ossia di $\frac{1}{100}$. Se avessimo voluta la approssimazione fino alle unità del terzo ordine decimale, ossia fino alle millesime avremmo posto sei zeri alla destra del 12; e così procedendo avanti.

Dippiù noi sappiamo, che li cubi de' numeri 10, 10 , 1000 ecc., sono respettivamente 1000, 1000000, 1000000000, ecc., quindi se noi dobbiamo estrarre per approssimazione la radice cubica da un numero dato, che non è cubo perfetto, dobbiamo ridurlo in espressione frazionaria decimale, la quale abbia per denominatore 1000, 1000000, 1000000000, ecc. secondocchè la approssimazione si vuole portata fino alle parti decime, centesime, millesime, ecc. della unità; e perciò dobbiamo scrivere alla destra dello intero dato, tre, sei, nove etc. zeri, indi estrarne la radice cubica come se fosse un numero intero, e separare dalla radice trovata, per mezzo di una virgola andando dalla destra verso la sinistra, una, due, tre, ecc. cifre decimali.

Così se vogliamo la radice cubica di 12, e vogliamo portare la approssimazione fino alle parti centesime, noi scriveremo sei zeri alla destra del numero dato 12; ed allora estrarremo la radice del numero 12000000 secondo la regola data per gli numeri interi, ed avremo $\sqrt{12000000} = 228$, con un'errore minore di una unità. Ma avendo noi alla destra del numero dato 12, scritti sei zeri, dobbiamo separare con la virgola due cifre decimali, quindi la radice cubica di 12 sarà 2,28 con un errore minore di $\frac{1}{100}$; Se avessimo voluto portare la approssimazione fino alle millesime, noi avremmo scritti nove zeri alla destra del 12, e così procedendo avanti.

Se il numero dato fosse stato un intero unito con un decimale, applicando il metodo dato per approssimare la radice di un numero intero al numero decimale dato, troveremo la radice dimandata con quella approssimazione che si vorrebbe; facendo però sempre, che trattandosi della radice quadrata, il numero delle cifre della parte decimale sia sempre un multiplice di 2, e che trattandosi della radice cubica, il numero delle cifre della parte decimale sia sempre un multiplice di 3; e qualora il numero dato non riempisse queste condizioni, esso si completerà aggiugnendo alla sua destra quel numero di zeri, che sarà necessario.

Finalmente se si vuole la radice di una frazione ordinaria con una approssimazione determinata, si ridurrà la frazione data in frazione decimale esatta, se può essere esatta, o approssimata, se essa non è esattamente riducibile in frazione decimale; facendo però attenzione, di condurre la approssimazione della decimale a quel numero di cifre, che è il doppio di quello indicato dall'ordine delle decimali, che denota la approssimazione, se si tratta della radice quadrata, e trattandosi della radice cubica condurla fino a tanto, che la decimale contenga il triplo del numero delle cifre indicato dall'ordine delle decimali, che deve avere la approssimazione dimandata.

CAPITOLO IX.

Teoria de' numeri denominati, o complessi.

ARTICOLO I.

Nozioni preliminari.

Fino ad ora noi abbiamo considerati li numeri in una maniera astratta, poichè ci siamo proposto soltanto di conoscere le proprietà di essi, e le regole per comporli, e decomporli, ma quando la società ha dovuto applicarli ai bisogni di essa, abbiamo dovuto fissare la natura delle unità, ed i numeri sono divenuti *concreti*.

Così in Napoli la unità di lunghezza si è chiamata *canna*; la unità di peso *Rotolo*, la unità di moneta *Docato*, la unità di capacità *Tomolo*, etc. E poichè bisognavano in ciascuna specie delle unità minori, si stabilirono delle unità frazionarie delle prime, ma in vece di esprimerle, e scriverle nella forma frazionaria facendo uso de' denominatori, si credette più comodo, o almeno più adattato alla capacità del popolo dare ad esse de' nomi particolari, in vece di fare uso de' denominatori; Così fu chiamata *Palmo* la ottava parte di una canna. *Oncia* la dodicesima parte di un palmo, e *Minuto* la quinta parte della oncia. Si chiamò *Carlino* la decima parte del docato, *Grano* la decima parte del carlino, *Cavallo* la dodicesima parte del grano, e similmente per le unità rapportate ad altre specie di grandezze; dal che sono nati li numeri, che volgarmente chiamiamo *numeri denominati*, o *complessi*, *poicchè essi contengono unità di diverso nome, ma tutte dipendenti dalla unità pripcipale, della quale esse sono frazioni.*

Egli è evidente, che avendo data questa nuova forma alli numeri, le operazioni del calcolo, che debbono ad essi essere applicate, debbono ricevere qualche modificazione, quindi esporremo le regole, che debbono sopra di essi essere eseguite, ma questo suppone, che si sappiano le leggi della denominazione delle differenti unità concrete, che sono in uso nel paese, in cui esse debbono essere praticate.

Prima però di esporre la teoria de' numeri complessi concreti, stimo non essere fuori di proposito premettere alcune riflessioni generali sul calcolo de' numeri concreti.

149. In primo luogo osserveremo, *che tutte le operazioni, che nella Aritmetica si eseguono sopra de' numeri concreti, dipendono dal calcolo de' numeri astratti*; infatti, quando noi riflettiamo, che il risultato, al quale deve condurre la soluzione di un problema, dipende da due sole cose, cioè dalla natura delle sue unità, e dal numero di esse, il quale è sempre astratto, delle due cose la prima, cioè la natura delle unità, è determinata dallo stato della quistione, la seconda, cioè il numero di tali unità, evidentemente deve essere determinato per la operazione eseguita sopra de' numeri astratti; Così quando cerchiamo di determinare la somma de' due numeri concreti 8 palmi, e 3 palmi, lo stato della quistione ci fa vedere, che il risultato deve essere in unità di palmi, le quali saranno al numero di 11, che è la somma de' numeri astratti 8, e 3. Similmente se ci proponiamo di sottrarre 3 palmi da 8 palmi, il risultato deve essere in palmi, ed il numero di essi è quello che risulta della differenza de' numeri astratti 8, e 3. La multiplicazione del numero concreto 6 canne per lo numero astratto 3, non presenta alcuna difficoltà, giacchè essa si riduce a fa-

re la somma di 3 numeri eguali a 6 canne, la quistione ci fa sapere, che il risultato deve essere in canne, nel mentre che la operazione altro non dee fare, se non se determinare il numero di esse, il quale è evidentemente 18. In fine il prodotto di 6 canne per 3 essendo 18 canne; ne ricaviamo, che dividendo fra loro li due numeri concreti della medesima natura, cioè 18 canne per 6 canne, troviamo il quoziente astratto 3, nel mentre, che il quoziente del numero concreto 18 canne per lo numero astratto 3, dà il numero concreto 6 canne.

150. Dal che ricaviamo le seguenti verità generali 1. *La natura della addizione, e della sottrazione, ci fa evidentemente conoscere, che è impossibile addizionare fra loro, o sottrarre l'uno dall' altro due numeri di differente specie.* 2. *In una multiplicazione*, come abbiamo dimostrato, *il multiplicatore è sempre un numero astratto, e per conseguenza il prodotto di due numeri concreti non può esistere*; principio di massima importanza. 3. Poicchè in qualunque divisione il dividendo è il prodotto del quoziente per lo divisore, è *impossibile dividere un numero astratto per un numero concreto*, imperocchè in questo caso il dividendo non potrebbe avere per suoi fattori il quoziente, ed il divisore; per e-

sempio se il numero astratto 18 potesse dividersi per 6 canne, sarebbe necessario, che il numero astratto 18 fosse eguale al prodotto concreto, che si ha multiplicando il divisore concreto 6 canne per lo quoziente 3, locchè è assurdo. 4. Come ancora si vede, chiaramente, che *un numero concreto di una natura non può essere diviso per un altro numero concreto di natura differente*, come per esempio, non si può dividere 18 canne per 6 rotoli, poicchè in tale caso il dividendo 18 canne dovrebbe eguagliare il prodotto di 6 rotoli multiplicato per lo quoziente 3, ed avremmo 18 rotoli eguali a 18 canne, locchè è assurdo.

151. Le cose fino ad ora dimostrate, ci fanno generalmente conchiudere, che qualora noi ci proponiamo di fare le operazioni di calcolo sopra de' numeri, *noi dobbiamo incominciare dallo esaminare, se essi hanno lo condizioni necessarie per potere sopra di essi applicare la regola della operazione, quando ciò è stato verificato, noi opereremo sopra de' numeri, facendo astrazione dalle specie delle unità, ed il risultato della operazione indicherà di quante unità astratte è composto il numero dimandato, nel mentre, che la natura delle unità è determinata dallo stato della quistione proposta.*

152. Quindi nella addizione, e nella sottra-

zione de' numeri concreti incomplessi, essi debbono essere composti da unità della medesima grandezza, e la natura delle unità del risultato è sempre quella delle unità de' numeri, sopra delli quali si è operato. Nella multiplicazione il multiplicatore è essenzialmente astratto, e le unità del prodotto sono della medesima grandezza di quelle del multiplicando. Nella divisione, quando il dividendo, ed il divisore sono composti dalle medesime unità concrete, il quoziente è un numero astratto, il quale indica quante volte il dividendo contiene il divisore; qualora poi il divisore è astratto, il quoziente è della medesima natura del dividendo, e non indica più quante volte il dividendo contiene il divisore, ma esso è quella parte del dividendo, la quale multiplicata per lo divisore, riproduce il dividendo, e per conseguenza conchiudiamo, che è *assurdo il volere addizionare o sottrarre numeri concreti di differente natura; Volere multiplicare due numeri concreti; o finalmente volere dividere l'uno per l'altro due numeri concreti di differente natura, oppure un numero astratto per un numero concreto.* Ciò posto passiamo ad occuparci de' numeri concreti denominati.

ARTICOLO II.

Operazioni ancillari, o preparatorie.

153. Il calcolo de' numeri complessi si ricava naturalmente da quello, che abbiamo esposto relativamente alli numeri concreti incomplessi, imperocchè per eseguire le operazioni del calcolo sopra di essi, basta trasformarli in frazioni irreduttibili equivalenti, ed eseguire sopra di esse le operazioni del calcolo proposte.

154. Quindi è necessario vedere, in quale maniera un numero complesso può essere trasformato in frazione irreduttibile equivalente, operazione sommamente facile; In fatti, se supponiamo che si voglia ridurre in frazione irreduttibile il numero complesso 3 can. 6 pal. 8 onc., noi diremo, una canna vale 8 palmi, e per conseguenza 3 canne vogliono 3 volte 8 palmi, ossia 24 palmi, dunque 3 can., 6 pal., 8 onc. equivalgono a 30 pal. 8 onc., ma poicchè un palmo equivale a 12 once, 30 palmi equivaleranno a 30 volte 12 once, ossia a 360 once, dunque il numero dato 3 can., 6 pal. 8 onc equivale a 368 once, ma una oncia è la dodicesima parte di un palmo, ed il palmo è la ottava parte della canna, dunque una oncia è $\frac{1}{12}$ di $\frac{1}{8}$ di una canna, dunque riducendo alla frazione semplice $\frac{1}{96}$ la frazio-

ne di frazione $\frac{1}{12}$ di $\frac{1}{8}$ avremo una oncia equivalente ad $\frac{1}{96}$ di una canna, e conchiuderemo, che il numero complesso 3 $^{can.}$ 6 $^{pal.}$ 8 $^{onc.}$, equivale alla espressione frazionaria $\frac{368}{96}$ di canna, la quale ridotta alla sua minima espressione è $\frac{23}{6}$.

155. Dal che conchiudiamo generalmente, che qualora vogliamo ridurre un numero complesso in frazione della unità principale, *si debbono ridurre tutte le parti del numero dato a quelle della più piccola unità contenuta in esso; la somma di tutte queste parti sarà il numeratore della frazione dimandata, ed il denominatore sarà il numero, che esprime quante volte la minima unità del numero dato è contenuta nella unità principale, frazione che si ridurrà alla sua minima espressione, dividendo li due termini della frazione trovata per lo massimo comune divisore di essi.*

156. Reciprocamente se ci proponiamo di ridurre in numero denominato una frazione concreta, *basterà fare la divisione del numeratore per lo denominatore, e ridurre sempre li residui ad unità dell' ordine immediatamente inferiore.*

Così se ci proponiamo di ridurre la espressione frazionaria concreta $\frac{79}{14}$ di docato in numero complesso equivalente, noi divideremo 79 per 14, e metteremo al quoziente il numero 5, che indicherà docati, ed avremo il residuo *9*, che ridurremo a carlini, e dividendo il prodotto multiplicandolo per 10 90 per 14, avremo per quoziente *6* carl., ed il residuo *6*, che multiplicato per 10 dà *6*0 grani, e dividendo *6*0 grani per 14, avremo per quoziente 4 grani, e per residuo 4 grani, che multiplicato per 12 dà 48 cavalli, li quali divisi per 14 danno al quoziente 3 cavalli, e per residuo *6*, che diviso per 14 dà $\frac{6}{14}$ ossia $\frac{3}{7}$, ed avremo $\frac{79}{14}$ di doc. $= 5.^{doc.}6.^{car.}4.^{gr.}3.^{cav.}\frac{3}{7}$

```
79|14
70|5.doc.6car.4gr.3c.6/14
—
90 —
84
—
60
56
—
48
42
—
6
```

ARTICOLO III.

Operazioni del Calcolo sopra de' numeri complessi.

157. Avendo veduto, come facilmente possono li numeri complessi essere trasformati in espressioni frazionarie, e reciprocamente le espressioni frazionarie concrete in numeri complessi, chiaramente si vede, quale deve essere il metodo da eseguire le operazioni del calcolo sopra de' numeri complessi, giacchè basterà ridurli in espressioni frazionarie irreduttibili equivalenti, ed indi operare sopra di esse alla maniera ordinaria, e ridurre li risultati in forma di numeri complessi. Dalle considerazioni precedenti noi ricaveremo la seguente regola generale.

158. Qualora debbono eseguirsi le operazioni di calcolo sopra de' numeri complessi noi *incominceremo dal ridurli in espressioni frazionarie irreduttibili equivalenti ; indi* 1. *Se dobbiamo eseguire una addizione*, o *una sottrazione, noi opereremo sopra le frazioni equivalenti secondo le regole date, ed il risultato, che ne ricaveremo, trasformato in numero complesso, esprimerà la somma, o il residuo dimandato.* 2. Se dobbiamo eseguire una multiplicazione ; *Ricordandoci, che il multiplicatore è essenzialmente astratto, noi faremo astrazione della na-*

tura delle unità della frazione, che determina il multiplicatore, indi eseguiremo la multiplicazione sopra delle frazioni, e la frazione prodotta, che è essenzialmente della natura del multiplicando, trasformata in numero complesso, darà il prodotto dimandato. 3. Finalmente se dobbiamo fare la divisione, *allora se le espressioni frazionarie equivalenti al dividendo, ed al divisore, sono rapportate alla medesima unità, si dividerà la frazione dividenda per la frazione divisore, facendo astrazione della natura di tale unità, ed il quoziente astratto, che ne risulterà sarà il quoziente dimandato. Se poi il dividendo è un numero concreto, ed il divisore è un numero astratto, si multiplicherà la frazione dividenda per la frazione divisore rovesciata, il quoziente, che sarà della natura del dividendo, trasformato in forma di numero complesso, esprimerà il quoziente dimandato.*

158. Proponiamoci per esempio di eseguire le quattro operazioni del calcolo sopra de due numeri complessi
$5^{\text{doc.}}\,7^{\text{car.}}\,8^{\text{gr.}}\,5^{\text{cav.}\frac{4}{5}}$, e $3^{\text{doc.}}\,6^{\text{car.}}\,7^{\text{gr.}}\,9^{\text{cav.}\frac{3}{5}}$, noi incominceremo dal ridurli ad espressioni frazionarie, e troveremo che essi daranno $\frac{34709}{6000}$, $\frac{22068}{6000}$, indi addizionandole avre-

mo la somma $\frac{56777}{6000}$, la quale ridotta in numero complesso dà 9 $^{doc.}$ 4 $^{car.}$ 6 $^{gr.}$ 5 $^{cav.}$ $\frac{2}{5}$; sottraendole troveremo, che la differenza sarà $\frac{12641}{6000}$, la quale ridotta in numero complesso dà 2 $^{doc.}$ 1 $^{car.}$ 0 $^{gr.}$ 8 $^{cav.}$ $\frac{1200}{6000}$ = 2 $^{doc.}$ 1 $^{car.}$ 0 $^{gr.}$ 8 $^{cav.}$ $\frac{1}{5}$. Indi considerando, che li numeri dati sono amendue concreti della medesima natura, conchiuderemo che dividendo l'uno di essi per l'altro, dobbiamo avere un quoziente astratto, il quale sarà $\frac{34709}{6000} \times \frac{6000}{22068} = \frac{34709}{22068} = 1\ \frac{12641}{22068}$.
Finalmente se il multiplicando fosse 5 $^{doc.}$ 7 $^{car.}$ 8 $^{gr.}$ 5 $^{cav.}$ $\frac{4}{5}$, ossia $\frac{34709}{6000}$ di doc., il multiplicatore astratto sarebbe determinato dalle unità, e dalle parti della unità, che si contengono in 3. $^{doc.}$ 6 $^{car.}$ 7 $^{gr.}$ 9 $^{cav.}$ $\frac{3}{5}$, ossia da $\frac{22068}{6000}$, e perciò multiplicando $\frac{34709}{6000}$ per $\frac{22068}{6000}$, avremo il prodotto $\frac{765958212}{36000000}$, che ridotto in numero complesso da 21 $^{doc.}$ 2 $^{car.}$ 7 $^{gr.}$ 7 $^{cav.}$ $\frac{33854400}{36000000}$ = 21 $^{doc.}$ 2 $^{car.}$ 7 $^{gr.}$ 7 $^{cav.}$ $\frac{2351}{2500}$,

che sarà il prodotto dimandato.

169. Quì è a proposito di vedere, quale è la occasione, che può condurci al calcolo precedente. Se si proponesse di trovare quale è l' interesse, che produrrebbe il capitale di 5 $^{doc.}$ 7 $^{car.}$ 8 $^{gr.}$ 5 $^{cav.}\frac{4}{5}$, sapendo che un docato rende 3 $^{doc.}$ 6 $^{car.}$ 7 $^{gr.}$ 9 $^{cav.}\frac{3}{5}$, sostituendo ai numeri denominati le espressioni frazionarie correspondenti, la operazione si ridurrebbe a cercare l' interesse di $\frac{34709}{6000}$ di docato, alla ragione di $\frac{22068}{6000}$ per docato, operazione, che si risolve per una via semplicissima, poicchè essendo $\frac{34709}{6000}$ lo interesse di 1 docato, quello di $\frac{22068}{6000}$ sarà $\frac{22068}{6000}$ di $\frac{34709}{6000} = \frac{765958212}{36000000} =$ 21 $^{doc.}$ 2 $^{car.}$ 7 $^{gr.}$ 7 $^{cav.}\frac{2251}{2500}$; e quì avvertiremo, che il numero concreto 3 $^{doc.}$ 6 $^{car.}$ 7 $^{gr.}$ 9 $^{cav}\frac{3}{5}$, ossia $\frac{22068}{6000}$, ha servito soltanto a determinare il multiplicatore astratto $\frac{22068}{6000}$, e che si commetterebbe un grande errore se si confondesse il multiplicatore astratto $\frac{22068}{6000}$ con $\frac{22068}{6000}$ di doc.,