ELEMENTI

DI

ARITMETICA

DI

ILIPPO MARIA GUIDI
ROFESSORE DI MATEMATICA
ella R. Università degli Studii di Napoli.

IN NAPOLI 1819.
PRESSO DOMENICO SANGIACOMO

Con licenza de' Superiori.

ELEMENTI
DI
ARITMETICA.

CAP. I.

Nozioni Preliminari.

1. Si dicono *grandezze* o *quantità* tutte quelle cose le quali possono ricevere accrescimento, o diminuzione, purchè sieno paragonabili con le altre della medesima specie di esse.

Ognuno vede che noi non possiamo avere una idea esatta della quantità, se non se paragonandola ad un' altra della medesima specie da noi conosciuta per abitudine, la quale possa servire di termine di paragone.

2. La quantità che serve di termine di paragone fra le altre quantità della sua medesima specie si chiama *unità*.

3. Si dice *numero* il rapporto, che passa tra una quantità e quella che abbiamo scelta per unità.

4. Se questo rapporto è espresso dalla riunione di più unità, si dice *numero intero*; e si dice *numero frazionario* o semplicemente *frazione*, se esso è espresso in parti dell' unità.

Quindi il numero intero è la collezione di più unità.

5. Si chiamano *operazioni di calcolo*, quelle operazioni per mezzo delle quali noi componiamo, e scomponiamo li numeri.

6. Si chiama *Aritmetica* la scienza, la quale dà li metodi per eseguire facilmente le operazioni di calcolo.

7. Qualora noi ci proponiamo di comporre la serie naturale de' numeri interi, subito ci accorgiamo, che essa è illimitata, poicchè non vi è numero, per quanto grande esso sia, che non possa divenire maggiore aggiugnendo ad esso una unità, e che tra qualunque numero della serie, ed il suo vicino esiste la differenza costante di una unità.

8. Noi ci occuperemo in primo luogo della formazione della serie naturale de' numeri, cioè della serie de'numeri che differiscono ciascuno dal suo vicino di una unità,

indi della maniera di dare a ciascuno di essi un nome, ed in fine della maniera di scriverli per mezzo delle cifre, le quali tre cose costituiscono ciò, che noi chiamiamo *numerazione*.

9. Per formare la serie naturale de' numeri, noi incominceremo dall'aggiugnere una unità ad un' altra unità, e così formeremo il primo numero, questo numero aumentato di una unità dà il numero seguente, e continuando così ad aggiugnere successivamente una unità a ciascuno de' numeri formati, avremo la serie naturale de' numeri, nella quale ciascuno de' numeri differisce di una unità dal suo vicino.

10. Dopo di avere appreso a formare la serie naturale de' numeri, noi ci accorgiamo della necessità in cui siamo di distinguerli, dando a ciascuno di essi un nome, ma la moltitudine di essi, e la illimitazione della serie naturale mettendoci nella impossibilità di dare a ciascuno di essi un nome particolare, gli aritmetici sono giunti ad esprimerli tutti con un piccol numero di nomi variamente modificati; tali nomi semplici sono *uno*, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *nove*; indi con il numero che nasce dall'unire una unità al numero nove, ossia con la collezione di nove unità più una unità, formarono un nuovo ordine di unità, ossia una unità di secondo ordine, che essi chiamarono

decina, e come essi aveano contato da una unità fino a nove unità, così contarono da una decina fino a nove decine; ed invece di dire una decina, due decine, tre decine ... nove decine, dissero *dieci*, *venti*, *trenta* ... *ottanta*, *novanta*; ma come la serie naturale ricevea una interruzione trovandosi una lacuna tra dieci e venti, tra venti e trenta ec., per esprimere li numeri compresi tra due numeri consecutivi di decine, stabilirono di enunciare successivamente li numeri delle decine, e quelli delle unità, così la collezione di quattro decine e sette unità fu espressa dicendo quarantasette, e quantunque da essi si fosse stabilita questa regola generale, pure l'uso ha fatto ad essa subire una eccezione per gli sei primi numeri, che sono tra dieci e venti, in fatti invece di dire secondo la regola *dieci ed uno*, *dieci e due*, *dieci e tre*, *dieci e quattro*, *dieci e cinque*, *dieci e sei*, noi diciamo *undeci*, *dodeci*, *tredeci*, *quattordeci*, *quindeci*, e *sedeci*.

Con la collezione di novantanove unità più una unità formarono il numero *cento*, ossia una unità del terzo ordine, che chiamarono *centinajo*, e contarono similmente dal un centinajo fino a nove centinaja, e contarono li numeri compresi tra li due numeri consecutivi di centinaja aggiungendo ai nomi dei numeri delle centinaja quelli de' novantanove primi numeri, così la collezione di sei centinaja otto decine e quattro unità fu espressa dicendo sei cento ottanta quattro, e così facendo si giunse ad esprimere tutti li numeri dall' unità fino a novecento novantanove, numero che accresciuto di una unità formò il numero che essi chiamarono *mille*. e dalla collezione di mille unità formarono un nuovo ordine di unità, che chiamarono *migliajo* o *unità del quarto ordine*, e similmente contarono da mille fino a nove mila, e per esprimere li numeri che sono tra mille e duemila, tra duemila e tremila ec. aggiunsero al nome delle migliaja quelli de' nove cento novantanove numeri precedenti, indi seguendo l'analogia, alla collezione di novemila novecento novantanove unità più una unità avrebbe dovuto darsi un nuovo nome, ma essi convennero di dare alle decine di migliaja i nomi di diecimila, ventimila, trentamila ec. contando le migliaja della stessa maniera, secondo la quale essi aveano contato le unità, cioè per unità, decine, e centinaja di migliaja, incominciando dalle unità di migliaja fino a mille unità di migliaja. che essi chiamarono *milione*; talchè la collezione di novecento novantanovemila novecento novantanove più uno forma il *milione*, quella di mille milioni forma il *bilione*, quella di mille bilioni il *trilione*. e così procedendo avanti. I nomi dei numeri che riempiono le lacune, che esi sono tra un milione ed un bilione, si avranno aggiungendo ai nomi un milione, due milioni, tre milioni ec quelli delli novantanovemila novecento novantanove numeri precedenti; e così in appresso.

11. Da quanto abbiamo detto ricaviamo, che il nome di qualsivoglia numero dipende dalla sola combinazione de' nomi de' novecentonovantanove primi numeri, con aggiugnere ad essi le parole unità, migliajo, milione, bilione ec., in modo che un numero non può contenere più di nove unità, nove decine, nove centinaja di ciascuna delle suddette specie di unità.

12. Resta ora a vedere come gli aritmetici hanno trovato il metodo di scrivere li numeri in una maniera abbreviata, e commoda, per potere eseguire sopra di essi le operazioni del calcolo; ciò che forma l'ultima parte della numerazione.

13. Gli aritmetici osservando, che con i nomi dati alli nove primi numeri potevano esprimere in una maniera metodica, e breve tutti li numeri della serie naturale, stabilirono di adottare nove cifre per esprimere sì fatti nove numeri, e come la combinazione de' nomi de' nove primi numeri con quelli delle differenti specie di unità avea dato i nomi a tutti li numeri, così essi sottomisero le nove cifre alla medesima legge, esprimendo con la medesima cifra il medesimo numero tanto quando esso rappresentava le unità, quan-

to allorchè esso esprimeva le decine, le centinaja, le migliaja ec. Le cifre esprimenti li nove primi numeri furono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Con queste nove cifre essi semplificarono un poco la espressione scritta dei numeri; poichè rimpiazzarono li nomi dei numeri delle unità, delle decine, delle centinaja ec. con le cifre che esprimevano sì fatti numeri, così dovendo scrivere il numero settecento novantasei, essi lo scomposero in sette centinaja, nove decine, e sei unità e lo scrissero come segue.

7 *Centinaja* 9 *decine* 6 *unità*; maniera di scrivere il numero proposto, la quale quantunque non sia abbastanza abbreviata, pure è commoda per gli calcoli, poichè mette in evidenza li numeri delle unità di ciascheduna specie. Questo esempio basta per farci conoscere in quale maniera essi poterono travedere la possibilità di scrivere tutti li numeri per mezzo della semplice combinazione delle nove cifre con le parole unità, decine, centinaja ec. Ma la necessità di sottomettere li numeri alle operazioni del calcolo, fece sì, che essi si accorgessero, che la miscela delle parole *unità*, *decine*, e *centinaja* ec. complicava la scrittura de' numeri, e che per conseguenza sarebbe stato necessario di fare scomparire le lettere, perciò essi classificarono li nomi delle unità, delle decine, delle centinaja ec. secondo il loro posto, chiaman-

do le unità semplici col nome di *unità del primo ordine*, le decine furono dette *unità del secondo ordine*, le centinaja *unità del terzo ordine* ec. ed in conseguenza di questa convenzione essi scrissero il numero settecento novantasei, così

7 Unità del terzo ordine, 9 unità del secondo ordine 6. unità del primo ordine; Questa forma quantunque molto complicata fece in essi nascere l'idea di disporre le cifre le une a fianco delle altre, in modo che il posto che ciascuna di esse si trovava ad occupare, designasse l'ordine delle unità che essa esprimeva, e si convenne, che qualora si trovavano molte cifre scritte le une a fianco delle altre, la prima a destra designasse le unità del primo ordine, ossia le unità semplici, la seconda le unità del secondo ordine ossia le decine, la terza le unità del terzo ordine ossia le centinaja, e così procedendo avanti; e secondo questa convenzione il numero settecento novantasei si scrive 796, giacchè il 7 occupando il terzo luogo andando da destra a sinistra esprime sette unità del terzo ordine, ossia 7 centinaja, la cifra 9 occupando il secondo luogo, disegna 9 unità del secondo ordine, ossia 9 decine, e la cifra 6 occupando il primo luogo, esprime 6 unità del primo ordine, ossia 6 unità semplici; e così ad ogni cifra si trovarono assegnati due valori, cioè il *valore proprio*, che è quello che essa indica senza fare attenzione alla specie delle sue unità, ed il *valore locale*, che è quello che essa ha facendo attenzione al grado delle unità, che essa disegna, il quale grado è indicato dal posto, che essa occupa alla sinistra della prima cifra.

14. Ma non si tardò molto ad acorgersi, che molti numeri non potrebbero essere scritti secondo questo sistema, in fatti per mezzo di esso non si potrebbe scrivere un numero, in cui mancasse qualcheduno degli ordini di unità di grado inferiore a quello del più alto grado, quindi furono condotti ad inventare la cifra ausiliaria, 0, che chiamarono *zero*, la quale, non avendo in se valore alcuno, potesse adoperarsi soltanto per conservare alle cifre significative il luogo che appartiene all' ordine delle loro unità; così volendo scrivere il numero due mila settanta quattro composto da due migliaja da sette decine, e quattro unità, e che non contiene centinaja, si mette un zero tra la cifra 2 che disegna le due migliaja, e la cifra 7 che disegna le 7 decine, per disegnare che la cifra delle centinaja manca, ed il numero dato sarà espresso da 2074.

15. Da quanto abbiamo detto ricaviamo le seguenti due regole generali. I. Qualora si vuole scrivere un numero enunciato in lettere, o dettato, *si scrivono successivamente l' una a fianco dell altra incominciando*

dalla sinistra le centinaja, le decine, e le unità di ciaschedun ordine ternario, e si rimpiazzino per mezzo di zeri le cifre delle unità, delle decine, o delle centinaja delle unità di sì fatto ordine, che potrebbero mancare, e giunti alla cifra delle unità semplici, il numero enunciato sarà scritto in cifre.

Così se si deve scrivere il numero sei milioni sette mila ed otto. Noi consideriamo che nel numero dato le unità del più alto grado sono li milioni, quindi conchiudiamo che il numero deve avere tre sezioni, cioè una per gli milioni, una per le migliaja, ed una per le unità semplici; noi metteremo perciò in ogni una di esse, prima la cifra delle centinaja, indi quella delle decine, ed in fine quella delle unità enunciate, facendo attenzione a supplire con i zeri le cifre delle unità dall' ordine mancante, ed il numero dato sarà scritto così 6007008. II. Per enunciare, o dettare un numero scritto, *si divida il numero in sezioni di tre cifre l' una incominciando dalla destra, l' ultima sezione a sinistra potendo essere composta di tre cifre, e potendone contenere due, ed anche soltanto una, indi si enuncj ciascuna delle sezioni significative come se essa fosse sola, dandole il nome della unità, che ad essa appartiene*; queste unità sono dell' ordine dall' ultima delle cifre della sezione dell' ordine che si considera, in modo che andando dalla destra verso la sinistra, li nomi delle sezioni ternarie si succedono così, unità, migliaja, milione, bilione ec.. *Quando avremo enunciata l' ultima cifra della sezione significativa a destra, noi avremo enunciato il numero proposto.*

Così volendo enunciare il num.° 9008004 scritto in cifre, noi lo divideremo in sezioni di tre cifre l' una, incominciando dalla destra, indi enuncieremo ciascuna delle sezioni incominciando dalla sinistra, ed aggiugneremo alla enunciazione di ciascuna sezione significativa il nome delle unità che essa esprime; ed avremo in quella maniera enunciato il numero dato; così il dato numero 9008004 sarà enunciato dicendo nove milioni otto mila quattro.

16. Un numero è detto *astratto* quando da noi si considera facendo astrazione dalla natura delle sue unità, così il numero 36 unità, oppure 36 volte 1, è un numero *astratto*. Il numero poi è detto *concreto*, qualora si disegna la specie delle unità, delle quali esso è composto. Così 36 ducati, 17 miglia, 12 cantaja ec. sono numeri *concreti*.

CAP. II.

Composizione de' Numeri.

ARTICOLO I.

Della Addizione.

17. Si dice *addizione* l' operazione di calcolo, per cui dati due numeri rapportati alla medesima unità, si cerca un altro numero che solo contenga tutte le unità de' numeri dati. Il numero, che risulta da questa operazione, si dice *somma*, o *totale*.

Sebbene spesso accada, che sieno dati più di due numeri da addizionare insieme, pure se si fa attenzione al processo della operazione, noi vediamo che essa si esegue sempre sopra due numeri.

18. In conseguenza della definizione data si vede chiaramente, che la somma di due numeri dati si potrebbe ottenere aggiugnendo ad uno di essi successivamente tutte le unità dell' altro, ma subito ci accorgiamo che qualora il numero dato per essere aggiunto all'altro è un numero piccolo, tale operazione è eseguibile, e che se sì fatto numero è molto grande la operazione non solo diviene lunga, e penosa, ma ancora alcune volte essa è

ineseguibile ; quindi noi siamo obbligati di cercare un metodo da potere eseguire la addizione in sì fatti casi. Ma considerando che noi avremmo la somma totale de' numeri dati, qualora noi avessimo un numero il quale contenesse in se le somme delle unità di differenti gradi, dalle quali sono composti li numeri dati, poicchè allora la ricerca della somma totale dipenderebbe dalla ricerca delle somme successive delle unità, delle decine, delle centinaja, etc. delli numeri dati; e come li numeri esprimenti le unità de' varj ordini, che compongono li numeri dati, sono sempre espressi da una cifra sola, facendo le addizioni parziali successive di sì fatti numeri, noi faremo dipendere la ricerca della somma de' grandi numeri da quella de' piccoli numeri espressi da una sola cifra, che noi sappiamo eseguire.

Così, per esempio, se ci proponiamo di addizionare li due numeri 3584, ed 8697, noi diciamo così; la somma di questi due numeri risulta dalla somma delle 7 unità dell'uno con le 4 unità dell'altro, delle 9 decine dell'uno con le 8 dell'altro, etc.; ma le 7 e 4 unità de' numeri dati fanno 11 unità, ossia 1 unità, ed 1 decina, la somma di esse darà dunque 1 unità, che noi scriveremo per prima cifra della somma totale, indi diremo che sì fatta somma totale conterrà oltre le 17 decine, che risultano dalla addizione delle cifre delle decine de' numeri dati, anche la decina risultata dalla addizione delle unità, e per conseguenza diremo che essa deve contenere 18 decine, ossia 8 decine, che noi noteremo a sinistra della cifra delle unità della somma totale, ed un centinajo, e diremo la somma totale deve contenere oltre le 11 centinaja che risultano dalla addizione delle centinaja de' numeri dati anche il centinajo fornito dalla somma delle decine di sì fatti numeri; quindi essa conterrà 12 centinaja, ossia 2 centinaja, che noi scriviamo a sinistra della cifra delle decine della somma totale, anche un migliajo, e conchiuderemo dicendo la somma de' numeri dati deve contenere non solo la somma delle 11 migliaja, che risultano dalla addizione delle migliaja de' numeri dati, ma ancora un migliajo risultante dalla addizione delle centinaja delli medesimi numeri, e per conseguenza conterrà 12 migliaja, ossia 2 migliaja, che scriviamo a sinistra della cifra delle centinaja, ed una decina di migliaja, che scriviamo alla sinistra dell' ultima cifra trovata; e così ragionando qualora dovessimo addizionare qualisivogliano altri numeri, noi ricaveremo la seguente regola generale.

19. *Per addizionare più numeri si dispongano gli uni sotto gli altri in modo che le loro unità del medesimo ordine si trovino nella medesima colonna verticale, e sotto di*

essi si tiri una linea per separare li numeri dati dalla loro somma. *Dopo di avere così disposta la operazione, si addizionino li numeri contenuti nella colonna delle unità, se la somma di essi non eccede 9, essa si scriva sotto la colonna delle unità, e se essa sorpassa 9, si scrivano soltanto le unità, e si ritengano le decine per riunirle alla colonna delle decine, indi si operi della medesima maniera sulla colonna delle decine, e così in appresso fino a tanto che si giunga alla ultima colonna a sinistra, la somma della quale si scriva tale quale si trova, e l' addizione sarà terminata; avvertendo però che se qualcheduna delle somme parziali contiene soltanto decine senza unità del suo grado, si deve allora mettere un zero sotto la colonna che si è addizionata, per occupare il luogo delle unità di sì fatta colonna, e conservare alle cifre della somma totale il luogo che conviene alla natura delle loro unità.*

20. Dalle cose dette si vede che *una somma aumenta, o diminuisce di tanto, quanta è la totalità degli accrescimenti, o delle diminuzioni delle parti che la compongono.* Imperocchè essendo la somma composta di tutte le parti de' numeri proposti, necessariamente cresce, o diminuisce di tanto quanta è la somma degli accrescimenti, o delle diminuzioni delle parti di questi medesimi

numeri, e perciò *una somma non si altera qualora la somma degli accrescimenti delle sue parti è eguale alla somma delle diminuzioni delle medesime parti*; poichè sì fatta somma si accrescerebbe e si diminuirebbe della medesima quantità. Ed in fine la *somma di due numeri non si cambia qualora di tanto si accresce uno di essi di quanto si diminuisce l' altro.*

ARTICOLO II.

Della Multiplicazione.

21. Spesso nella addizione noi dobbiamo addizionare più numeri tra loro eguali, nel quale caso la somma di essi deve contenere un medesimo numero tante volte quante volte noi lo abbiamo scritto; per designare questa specie particolare di addizione, e fare conoscere che una somma contiene due, tre, quattro, etc. volte un numero dato, abbiamo detto che essa è il *doppio*, il *triplo*, il *quadruplo*, etc., ed in generale un *multiplice* del numero dato, locchè ha fatto nascere le espressioni *duplicare*, *triplicare*, *quadruplicare*, etc., ed in generale *multiplicare* un numero dato, per indicare che si *vuole trovare la somma di un tale numero scritto due, tre, quattro, ed in generale un numero qualunque di volte.*

Ma ogn' un vede, che se si volesse fare una tale operazione con la regola esposta, essa diverrebbe lunga, e qualche volta anche impraticabile, nel caso in cui un grande numero dovesse essere ripetuto un grande numero di volte, lo che mostra la necessità di cercare un metodo più semplice per eseguirla; quindi ne è nata la operazione, che chiamiamo *multiplicazione*; la quale è l'*operazione di calcolo, per la quale essendo dato un numero se ne trova un altro, il quale sia eguale al dato ripetuto tante volte quante a noi piacerà.*

Il numero che si ripete si chiama *multiplicando*; ed il numero delle volte che questo numero si avrebbe dovuto scrivere, ossia il numero delle volte, che il multiplicando deve essere contenuto nella somma, si dice *multiplicatore*, il risultato della operazione è chiamato *prodotto*; ed in fine il multiplicando ed il multiplicatore sono espressi col nome comune di *fattori* del prodotto. In modo che il prodotto di una multiplicazione deve essere considerato come un tutto composto da parti eguali, la grandezza delle quali è espressa dal multiplicando, ed il numero di esse dal multiplicatore; quindi in ogni multiplicazione il *multiplicatore è essenzialmente un numero astratto*, poichè esso indica il numero delle volte, che si deve prendere il multiplicando; nel mentre che il *prodotto deve necessariamente essere della medesima natura del multiplicando, dalla ripetizione del quale esso è formato;* ed in fine qualora il *multiplicando è zero, il prodotto deve essere sempre zero, qualunque sia il multiplicatore*, poicchè il zero ripetuto qualunque numero di volte dà sempre zero.

22. Abbiamo detto, che qualora li due fattori sono piccoli numeri volendo avere il prodotto di essi, basta scrivere il multiplicando tante volte quante ne indica il multiplicatore, e farne la somma, mezzo sufficiente per farci comodamente trovare li prodotti di tutti li numeri di una cifra multiplicati a due a due, e poicchè sì fatti prodotti sono in piccol numero, si vede chiaro, che sarebbe sommamente utile di farne un quadro, ed anche di apprenderli a memoria, tanto più che essi sono di grandissimo uso nella multiplicazione de' numeri composti da più cifre, operazione che noi vedremo dipendere dalla multiplicazione de' numeri di una sola cifra.

Per rendere questo quadro più comodo, noi disporremo tutte le cifre significative in due colonne, delle quali una sia orizzontale e l'altra verticale, a ciascuna delle case orizzontali faremo corrispondere una nuova colonna verticale, ed a ciascuna delle case della colonna verticale faremo corrispondere una nuova colonna orizzontale, e per mezzo di questa disposizione troveremo commodo di situare ciascheduno de' prodotti nella casa interna, che corrisponde alle due case una orizzontale, l'altra verticale che contengono li fattori di sì fatto prodotto.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	[illegible]	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Così volendo coll' ajuto di questo quadro, chiamato *tavola pittagorica*, avere il prodotto di 7 per *6*, noi dalla casa dove è il fattore 7 nella prima colonna orizzontale discenderemo verticalmente fino alla casa, che è dirimpetto al fattore *6* nella prima verticale, e nella casa in cui ci saremo arrestati troveremo il numero 42, che è il prodotto di 7 multiplicato per *6*.

*

23. Facendo uso della tavola pittagorica, noi ci accorgiamo che il prodotto di due fattori, che hanno ciascuno una cifra non si altera, quantunque si cambj l' ordine de' fattori; quindi per la analogia sembra che da noi si possa conchiudere, che la medesima proprietà appartenga a tutti li numeri; ma come la analogia non ci assicura della verità generale, noi dimostreremo direttamente la proposizione generale, che *il prodotto di due fattori resta sempre lo stesso qualunque sia l' ordine secondo il quale si multiplicano li due fattori*.

Supponiamo che si abbiano li due fattori 4 e 5, dico che $4 \times 5 = 5 \times 4$.

Il numero 5 equivale ad $1+1+1+1+1$; se si scrive questa fila di unità quattro volte l' una sotto l' altra, noi formeremo il quadro

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

La somma delle unità contenute in questo quadro può essere considerata come formata da quattro file orizzontali, delle quali ciascuna è composta da 5 unità, ossia come il prodotto di 5×4; come altresì può essere considerata come formata da 5 file verticali, delle quali ciascuna contenga 4 unità, ossia come il prodotto di 4×5; ma questa somma fatta nelle due maniere dà sempre il medesimo numero di unità; dunque 5 ripetuto 4 volte, dà lo stesso numero che risulta dal 4 ripetuto 5 volte, e perciò $5 \times 4 = 4 \times 5$.

24. *Quindi in ogni multiplicazione si può cambiare il multiplicando in multiplicatore, ed il multiplicatore in multiplicando, senza che il prodotto sia alterato.*

25. Può darsi il caso che noi abbiamo tre, o più fattori a multiplicare fra essi, nel quale caso è chiaro che il prodotto si troverà multiplicando due di essi fra loro, ed indi multiplicando di nuovo il prodotto trovato per un altro de' fattori, e così procedendo avanti fino a tanto che si saranno adoperati tutti li fattori dati. Così se noi dovessimo multiplicare 8, 12, 15, noi potremmo trovare il prodotto dimandato con multiplicare 8 per 12, ed indi multiplicare per 15 il prodotto trovato; oppure multiplicare 8 per 15, e di poi multiplicare il prodotto trovato per 12; oppure etc. Ma perchè questo processo resti fuori di ogni dubbio, bisogna che sia generalmente dimostrato, *che in qualunque ordine si multiplichino più fattori il prodotto resta sempre lo stesso*

Per ciò fare bisognerebbe in primo luogo disporre li fattori dâti in tutte le maniere possibili, indi dimostrare che li prodotti, che risulterebbero dalla multiplicazione di essi in tutte le disposizioni sono eguali.

Supponiamo in primo luogo che li fattori sieno al numero di tre, e vediamo di disporli in tutte le maniere possibili.

Per disporre li tre fattori dati in tutte le maniere possibili, ed essere sicuri che nessuna disposizione manchi; noi metteremo ciascuno de' fattori al primo luogo a sinistra, indi alla sua destra situeremo gli altri due fattori in tutte le disposizioni possibili; quindi avremo le sei disposizioni seguenti, supponendo che li fattori dati sieno 8, 12, 15

$$8\times12\times15 \quad 12\times8\times15 \quad 15\times8\times12$$
$$8\times15\times12 \quad 12\times15\times8 \quad 15\times12\times8$$

Passiamo ora a dimostrare che tutti questi produttori sono eguali.

Noi abbiamo dimostrato che il prodotto di due fattori è sempre lo stesso qualunque sia l'ordine, secondo il quale essi si multiplicano; quindi nelli due primi ternarj il prodotto di 12 per 15 è lo stesso del prodotto di 15 per 12, ma sì fatti prodotti sono li multiplicatori del medesimo numero 8, che occupa il primo luogo nelli due primi ternarj. Dunque li prodotti designati da sì fatti due ternarj sono eguali. Con lo stesso raziocinio dimostreremo che $12\times8\times15=12\times15\times8$, e che $15\times8\times12=15\times12\times8$.

Resta ora a dimostrare, che uno delli due primi prodotti è eguale ad uno de' secondi; e che uno de' secondi è eguale ad uno de' terzi. Ma noi vediamo che nel primo prodotto della prima coppia dobbiamo moltiplicare per 15 il prodotto di 8×12, e che nel primo prodotto della seconda copia dobbiamo moltiplicare anche per 15 il prodotto di 12×8 quindi sapendo che $8\times12=12\times8$ noi conchiuderemo che $8\times12\times15=12\times8\times15$. Finalmente nel secondo prodotto della seconda coppia noi dobbiamo multiplicare per 8 il prodotto di 12×15, e nel secondo prodotto della terza coppia dobbiamo moltiplicare anche per 8 il prodotto di 15×12; dunque $12\times15\times8=15\times12\times8$. Dunque essendo fra loro eguali li due prodotti formanti ciascheduna delle tre coppie, ed essendo uno de' prodotti della prima coppia eguale ad uno di quelli della seconda, li quattro prodotti delle due prime coppie sono tutti fra loro eguali, e poichè uno de' prodotti della seconda coppia eguaglia uno di quelli della terza, noi conchiuderemo che tutti e sei li prodotti delle tre coppie sono eguali. Resta dunque dimostrato generalmente che *in qualunque ordine si multiplichino tre fattori, il prodotto resta sempre lo stesso.*

L' Analogia potrebbe farci conchiudere che il prodotto di 4, 5, *6*, ec. fattori comunque fra loro ordinati è sempre lo stesso, ma noi possiamo dimostrarlo direttamente facendo uso dello stesso raziocinio, di cui ci siamo serviti per dimostrare la stessa verità qualora li fattori erano al numero di tre; in fatti supponiamo, che li quattro fattori sieno 8, 12, 15, 19; operando siccome abbiamo fatto per gli tre fattori 8, 12, 15, fissiamo ciascheduno de' quattro fattori nel primo luogo a sinistra e disponiamo a destra di esso li tre altri fattori ordinandoli in tutte le maniere possibili, noi troveremo le quattro disposizioni seguenti

$8\times12\times15\times19$	$12\times8\times15\times19$	$15\times8\times12\times19$	$19\times8\times12\times15$
$8\times12\times19\times15$	$12\times8\times19\times15$	$15\times8\times19\times12$	$19\times8\times15\times12$
$8\times15\times12\times19$	$12\times15\times8\times19$	$15\times12\times8\times19$	$19\times12\times8\times15$
$8\times15\times19\times12$	$12\times15\times19\times8$	$15\times12\times19\times8$	$19\times12\times15\times8$
$8\times19\times12\times15$	$12\times19\times8\times15$	$19\times15\times8\times12$	$19\times15\times8\times12$
$8\times19\times15\times12$	$12\times19\times15\times8$	$15\times19\times12\times8$	$19\times15\times12\times8$

Poichè noi abbiamo dimostrato che li prodotti formati da tre fattori in qualunque maniera ordinati sono tutti eguali, è evidente che tutti li prodotti di quattro fattori, che hanno il medesimo fattore per multiplicando o per multiplicatore, debbono essere eguali, e per conseguenza non solo li prodotti, che compongono una medesima colonna sono eguali fra loro, ma bensì tutti li prodotti sono eguali, giacchè in ciascheduna delle colonne si trova sempre un prodotto, che ha per ultimo moltiplicatore il medesimo fattore, che serve di multiplicando in una delle altre colonne, dal che conchiudiamo che tutti li prodotti sono fra loro eguali.

Così se il primo prodotto $8 \times 12 \times 15 \times 19$, ha per multiplicando il numero 8, in tutte le altre colonne v'è almeno un prodotto che avrà 8 per ultimo fattore, e poichè i prodotti di tre fattori in qualunque ordine disposti sono tutti eguali, ne segue che in qualunque colonna vi è sempre un prodotto eguale ad $8 \times 12 \times 15 \times 19$.

Con un ragionamento analogo, si potrebbe dimostrare, che la stessa verità avrebbe luogo qualora si avesse un numero maggiore di fattori; dal che conchiuderemo generalmente, che *il prodotto di un numero qualunque di fattori resta costantemente lo stesso, qualunque sia l'ordine secondo il quale essi si moltiplicano.*

26. Qualora *si vuole multiplicare per un dato numero la somma di più numeri dati, basterà multiplicare per sì fatto numero ciascheduna delle parti di essa*; e reciprocamente *quando si multiplica ciascheduna delle parti di una somma per un dato numero, la somma è multiplicata per lo stesso numero.* In fatti per multiplicare una somma, bisogna prenderla tante volte, quante ne indica il numero delle unità del multiplicatore, dunque ogni parte sua deve essere presa questo medesimo numero di volte. La reciproca evidentemente si dimostra della medesima maniera.

27. *Qualora vogliamo dividere una som-*

ma per un numero, basterà dividere per tale numero ciascuna delle parti di essa; e reciprocamente *qualora si dividono per un numero tutte le parti, che compongono una somma, la somma sarà divisa per lo stesso numero.*

In fatti quando la somma $7+3$ si divide per 5, essa diviene $7+3$ diviso per 5, ossia 7 diviso per 5 più 3 diviso per 5; quindi ciascuna delle parti è divisa per 5. Similmente quando si dividono per 5 le due parti 7 e 3 noi abbiamo la somma 7 diviso per 5 più 3 diviso per 5, che vale lo stesso che $7+3$ diviso per 5.

28. *Qualora in una multiplicazione si accresce il multiplicatore di qualche numero di unità, il prodotto si troverà aumentato del multiplicando ripetuto tante volte quante ne indica il numero delle unità aggiunte al multiplicatore. Similmente se il multiplicando si accresce di qualunque numero di unità, il prodotto si troverà accresciuto del multiplicatore ripetuto tante volte quante ne indica il numero delle unità aggiunte al multiplicando.*

Imperocchè il prodotto è composto del multiplicando ripetuto tante volte, quante ne indica il multiplicatore, dunque qualora il multiplicatore è accresciuto di un certo numero di unità, il prodotto deve essere accresciuto del multiplicando preso tante volte quante unità dipiù si trovano nel multiplicatore.

Dippiù non alterandosi un prodotto, qualunque sia l'ordine nel quale si multiplicano li fattori, ne segue che qualora il multiplicando accresciuto si passa in multiplicatore ed il multiplicatore in multiplicando, si troverà similmente il prodotto accresciuto di tanto quanto è il multiplicatore ripetuto tante volte quante ne indicano le unità delle quali è stato accresciuto il multiplicando.

Dal che possiamo ricavare la seguente verità generale. *Qualora in una multiplicazione uno de' fattori si accresce di un dato numero di unità, il prodotto si trova accresciuto del prodotto, che nasce multiplicando l' altro fattore per l' accrescimento fatto al fattore variato.*

29. Con un simile raziocinio si dimostra che *qualora in una multiplicazione si diminuisce uno de' due fattori di un dato numero di unità, il prodotto si diminuisce del prodotto, che nasce multiplicando l' altro fattore per lo numero delle unità delle quali è stato diminuito il fattore variato.*

30. *In ogni multiplicazione, qualora uno de' fattori è multiplicato o diviso per un numero il prodotto è similmente multiplicato o diviso per lo stesso numero.*

In fatti sia 56 prodotto da 7×8; se noi multiplichiamo il fattore 8 per 3, allora il fattore 7 sarà multiplicato per 8×3, ed il prodotto sarà $7\times8\times3$, e perciò eguale al prodotto di 7×8 preso 3 volte.

Similmente se il fattore 8 si divide per 3, il prodotto sarà 7 moltiplicato per 8 diviso per 3, ossia 8 volte 7 diviso per 3.

31. Reciprocamente *qualora in una multielicazione il prodotto di due fattori è multiplicato, o diviso per un numero, ed uno de' due fattori non è cambiato, l' altro fattore deve essere similmente multiplicato o diviso per lo stesso numero, che ha multiplicato, o diviso il prodotto.*

In fatti sia 56 il prodotto di 7 per 8, se il fattore 7 non varia, e si multiplichi il prodotto per 2; questo prodotto sarà 7×8 ripetuto 2 volte, ossia $7\times8\times2$, o ciò che vale lo stesso, che 7 moltiplicato per 8×2, e perciò il fattore 8 è stato multiplicato per lo numero 2, che avea multiplicato il prodotto.

Similmente se il fattore 7 non è alterato, ed il prodotto di 7×8 sarà diviso per 2, il prodotto sarà la metà di 7×8, ossia ciò che vale lo stesso sarà 7 moltiplicato per la metà di 8; ossia per 8 diviso per 2.

32. Dal che ricaviamo 1. Che qualora in una multiplicazione *uno de' fattori si multiplica per un numero nel mentre si divide l' altro fattore per lo stesso numero il prodotto non si varia*: 2. *Che qualora avendo multi-*

plicato o diviso uno de' fattori per un numero, il prodotto non è variato, l'altro fattore deve essere reciprocamente diviso o multiplicato per lo stesso numero.

33. Dopo di esserci occupati delle verità, che riguardano la multiplicazione, resta ora che da noi si cerchi la regola da seguire per isciorre il problema, *dati due numeri trovare il prodotto della multiplicazione di essi.*

Due casi possono darsi 1. Che ambi li fattori sieno di una sola cifra: 2. Che li fattori sieno composti da qualsivoglia numero di cifre.

1. *Caso.* Quando li fattori sono di una sola cifra, abbiamo già veduto come si deve operare (§. 22.), ed abbiamo avvertito, che noi supponiamo, che li prodotti si sappiano a mente.

Ora noi dobbiamo far vedere, come si possa fare dipendere la formazione de' prodotti de' fattori composti da un numero qualunque di cifre dalla cognizione de' prodotti de' fattori di una sola cifra.

2. *Caso.* Supponiamo in primo luogo che si voglia multiplicare il numero 8746 per 8.

Poichè noi dobbiamo trovare un prodotto, il quale contensa 8 volte il numero 8746, la operazione si ridurrà a prendere 8 volte ciascheduna delle parti del multiplicando 8746, cioè 8 volte le unità, 8 volte le decine, 8 volte le centinaja, ed 8 volte le migliaja del multiplicando 8746, operazione che riduce la multiplicazione de' numeri dati ad una serie di multiplicazioni parziali successive, le quali hanno li fattori di una sola cifra. Ciò posto noi scriveremo il multiplicatore 8746 e sotto di esso scriveremo il multiplicatore 8, sotto del quale tireremo una linea per separare li fattori dati dal risultato della operazione, ossia dal prodotto.

$$\begin{array}{r} 8746 \\ 8 \\ \hline 69968 \end{array}$$

Indi diremo 8 volte 6 unità dà 48 unità, ossia 8 unità, e 4 decine, scriviamo le 8 unità sotto la linea, e riteniamo le 4 decine per riunirle al prodotto delle decine, indi diciamo 8 volte 4 decine dà 32 decine, che unite alle 4 decine ritenute formano 36 decine, ossia 6 decine, e 3 centinaja, scriviamo nel prodotto le 6 decine nel luogo delle decine, e riteniamo le 3 centinaja per aggiugnerle al prodotto delle centinaja; indi proseguendo diciamo 7 centinaja ripetute 8 volte danno 56 centinaja, le quali unite alle 3 centinaja ritenute danno 59 centinaja, ossia 9 centinaja e 5 migliaja, scriviamo le 9 centinaja nel luogo delle centinaja del prodotto, e riteniamo le 5 migliaja per riunirle al prodotto delle migliaja: finalmente multiplichiamo le 8 migliaja per lo multiplicatore 8, ed avremo 64 migliaja, le quali unite alle 5 migliaja ritenute danno

69 migliaja, che scriviamo interamente alla sinistra delle cifre trovate del prodotto, ed avremo 69968 per lo prodotto dimandato di 8746×8.

Proponiamci ora di moltiplicare 749 per 368. Poichè il prodotto deve contenere 368 volte il moltiplicando 749, esso lo conterrà 8 volte più 60 volte più 300 volte; quindi la multiplicazione si riduce a prendere tutte le parti del multiplicando 749 prima 8 volte, indi 60 volte, ed in fine 300 volte.

Per prendere 8 volte il multiplicando 749, noi opereremo della stessa maniera secondo la quale abbiamo operato nel caso precedente, e troveremo il primo prodotto parziale 5982, che scriveremo sotto la linea.

$$\begin{array}{r} 749 \\ 368 \\ \hline 5982 \\ 44940 \\ 224700 \\ \hline 275622 \end{array}$$

Indi noi dobbiamo prendere 60 volte lo stesso multiplicando 749, prendendolo soltanto 6 volte, avremo il prodotto 4494, prodotto il quale è nato dal multiplicando multiplicato per 6, il quale è 10 volte minore del vero multiplicatore, quindi il prodotto 4494 è 10 volte minore del prodotto di 749 per 60, e per conseguenza esso deve essere multiplicato per 10, affinchè acquisti il suo vero valore, locchè noi facciamo aggiugnendo alla sua destra un zero, ed allora avremo 44940 per secondo prodotto parziale, che noi scriveremo sotto del primo prodotto parziale, facendo sì, che le unità del medesimo ordine di essi si trovino nella medesima colonna verticale.

Finalmente per multiplicare 749 per 300, noi multiplicheremo 749 per 3 ed al prodotto 2247 aggiugneremo alla destra due zeri, e lo scriveremo sotto gli altri prodotti parziali, anche facendo sì che le unità del medesimo ordine si trovino situate nella medesima colonna verticale. La somma 265622 di tutti li prodotti parziali sarà evidentemente il prodotto totale dimandato.

Potrebbe darsi il caso che o uno de' fattori, o tutti due fossero terminati alla loro destra da uno, o da più zeri, come per esempio, se il moltiplicando fosse 74900, ed il moltiplicatore 368; oppure se il multiplicando fosse 74900, ed il moltiplicatore 3680.

Nel primo caso è evidente che multiplicando 749 per 368, noi facciamo divenire il multiplicando 100 volte minore di quello, che deve essere, e perciò il prodotto 265622, che così troveremo sarebbe 100 volte minore del prodotto dimandato, e perciò se lo multiplicheremo per 100, lo che faremo aggiungendo due zeri alla sua destra, noi avremo il prodotto dimandato 26562200.

Nel secondo caso essendo il multiplicando 74900, ed il multiplicatore 3680, qualora multiplichiamo 74900 per 368 avremo

il

il prodotto 26562200, il quale è 10 volte minore del vero prodòtto dimandato, quindi per ridurlo al suo vero valore noi lo multiplicheremo per 10, ossia noi aggiugneremo un zero alla sua destra, ed avremo così il vero prodotto dimandato 265622000.

Finalmente può darsi il caso che tra le cifre significative del multiplicatore, o del multiplicando, oppure di tutti due vi fossero uno o più zeri, come sarebbe se noi dovessimo multiplicare 300008 per 6002, allora l' operazione si riduce a multiplicare 300008 per 2, indi per 6000, la multiplicazione per 2 si esegue come abbiamo fatto quì sopra, la multiplicazione poi per 6000 noi l' eseguiamo multiplicando prima per 6, indi multiplicando il prodotto trovato per 1000, locchè si esegue mettendo tre zeri alla destra del prodotto trovato, oppure scrivendo la prima cifra del medesimo prodotto sotto la cifra delle migliaja del primo prodotto parziale, e facendo la somma di sì fatti prodotti parziali avremo il prodotto totale dimandato.

Da quanto abbiamo detto noi ricaveremo la seguente regola generale.

34. *Per multiplicare un numero per un altro si deve scrivere il multiplicando, e sotto di esso il multiplicatore, sotto del quale si tirerà una linea. Indi incominciando dalla destra si multiplichi ciascuna cifra del*

multiplicando per la cifra delle unità semplici del multiplicatore, ed il prodotto parziale che ne risulta si scriva sotto del multiplicatore, se multiplicando una cifra del multiplicando si ha un prodotto di due cifre si scrive soltanto la prima cifra a destra, e si ritiene quella di sinistra per aggiugnerla al prodotto della cifra seguente del multiplicando multiplicata per la medesima cifra del multiplicatore, e si avrà così il primo prodotto parziale. Indi si multiplichino tutte le cifre del multiplicando successivamente per ciascheduna delle cifre significative del multiplicatore, avendo l attenzione di mettere alla destra di ciascuno de' prodotti parziali tanti zeri, quanti ne disegna il luogo che occupa la cifra del multiplicatore a sinistra di quella delle unità semplici, o ciò che vale lo stesso situare la prima cifra di ciascuno prodotto parziale sotto quella cifra del multiplicatore che è del medesimo grado. Finalmente si addizionino tutti li prodotti parziali, e la somma che ne risulterà sarà il prodotto totale dimandato.

Se si dá il caso che li fattori abbiano alla loro destra qualche zero, noi potremo eseguire la multiplicazione facendo astrazione de' zeri, ed alla destra del prodotto, che troveremo aggiungere tanti zeri quanti ne sono alla destra de' fattori.

ARTICOLO III.

Delle elevazioni a potenza.

35. Potrebbe darsi il caso, che da noi si dovesse fare la multiplicazione di più fattori fra loro eguali, allora la multiplicazione si eseguirebbe in questi casi particolari con la medesima facilità colla quale si è eseguita qualora li fattori sono qualunque, ma poichè ci interessa per la ricerca de' metodi di scomposizione de' numeri, di sapere quale è la legge secondo la quale sono composti li prodotti nati dalla multiplicazione di fattori eguali, noi cercheremo di scovrirla. Ma per distinguere li prodotti nati dalla multiplicazione di fattori eguali da quelli che nascono dalla multiplicazione di fattori diseguali, noi daremo in generale il nome di *potenza*, ai prodotti che nascono dalla multiplicazione di fattori eguali, e particolarmente qualora queste potenze nascono dalla multiplicazione di 2, 3, 4 etc. fattori eguali, le chiameremo *potenza seconda o quadrato*, *potenza terza o cubo*, *potenza quarta*, *potenza quinta* etc. e daremo il nome di *radice seconda*, o *radice quadrata*, *radice terza*, o *radice cubica*, *radice quarta*, *radice quinta* etc., al fattore costante, secondocchè esso avrà prodotta la potenza seconda, la potenza terza, la potenza quarta etc.

36. Occupiamoci in primo luogo della composizione del quadrato di un dato numero.

Supponiamo che si cerchi il quadrato della somma $+4$; esso si troverà multiplicando $5+4$ per $5+4$; il quale prodotto ritrovato secondo le regole date sarà eguale a $5+4$ multiplicato per 5, più il prodotto dello stesso $5+4$ multiplicato per 4. Dunque il quadrato di $5+4$ è composto dal quadrato di 5, più il prodotto di 5×4 preso due volte, più il quadrato di 4. Dunque *il quadrato della somma di due numeri è eguale alla somma del quadrato del primo di essi, del prodotto del primo per lo secondo preso due volte, e del quadrato del secondo.*

$$\begin{array}{r} 5+4 \\ 5+4 \\ \hline 5\times5+5\times4 \\ +5\times4+4\times4 \end{array}$$

Supponiamo che sia proposto il numero 74 composto da 7 decine e 4 unità, esso potrà considerarsi come la somma di 7 decine, ossia di 70 e di 4 unità; quindi il suo quadrato sarà eguale al quadrato delle 7 decine più due volte il prodotto delle 7 decine multiplicate per le 4 unità, più il quadrato delle 4 unità. Dai che ricaveremo il teorema generale. Il quadrato *di un numero composto da decine e da unità è eguale alla somma del quadrato delle decine, al doppio del prodotto delle decine per le unità, ed al quadrato delle unità.*

In oltre sappiamo, che le decine multiplicate per le decine danno al prodotto unità di centinaja, che le decine multiplicate per le unità danno unità di decine al prodotto, ed in fine che le unità multiplicate per le unità danno unità al prodotto. Dunque ***il quadrato delle decine viene in centinaja, il doppio del prodotto delle decine per le unità viene in decine, ed il quadrato delle unità viene in unità.***

Dippiù li quadrati de' numeri 1, 10, 100, 1000 etc. sono 1, 100, 1000, 10000 etc.; quindi li quadrati de' numeri compresi tra 1 e 10, ossia li quadrati de' numeri di una cifra debbono essere tra 1 e 100, e perciò non possono avere più di due cifre, il quadrato di 10 che è il minimo numero di due cifre essendo 100, ed il quadrato di 100 che è il minimo numero di tre cifre essendo 10000, ne segue che il quadrato di qualunque numero di due cifre deve essere compreso tra 100 e 10000, e per conseguenza deve avere almeno tre cifre ed al più quattro cifre. Similmente si dimostra che un numero di tre cifre non può avere al suo quadrato meno di cinque cifre, nè più di sei, e generalmente che *qualora un numero è composto da n cifre, il suo quadrato non può avere più di $2n$ cifre, nè meno di $2n-1$ cifra.*

37. Sia la medesima somma $5+4$ della

quale si cerca il cubo. Noi avremo il cubo di $5+4$ multiplicando il quadrato di $5+4$ per $5+4$; ma il quadrato di $5+4$ è $5\times5+5\times4+5\times4+4\times4$; dunque il cubo di $5+4$, sarà $5\times5+5\times4+5\times4+4\times4$ multiplicato per $5+4$, ed eseguendo sì fatta multiplicazione noi troveremo per prodotto

$5\times5\times5+5\times5\times4+5\times5\times4+4\times4\times5+4\times4\times5+5\times5\times4+4\times4\times5+4\times4\times4$. Dal che conchiudiamo, che il cubo della somma $5+4$ è eguale a $5\times5\times5$, ossia al cubo della prima parte, più $5\times5\times4$ preso tre volte, ossia il triplo del quadrato della prima parte multiplicato per la seconda, più $4\times4\times5$ preso tre volte, ossia il triplo del quadrato della seconda parte multiplicato per la prima, più $4\times4\times4$, ossia il cubo della seconda parte. Quindi conchiuderemo generalmente, che *il cubo della somma di due numeri è eguale alla somma del cubo del primo numero, del triplo del quadrato del primo multiplicato per lo secondo, del triplo del qnadrato del secondo multiplicato per lo primo, e del cubo del secondo.*

Quindi se abbiamo un numero composto da decine e da unità, esso potrà essere considerato come la somma fatta dalle sue decine, e dalle sue unità, e per conseguenza il *suo cubo sarà composto dal cubo delle decine, dal triplo del quadrato delle decine multiplicato per le unità, dal triplo del qua-*

drato delle unità multiplicato per le decine, e dal cubo delle unità.

Dippiù essendo il quadrato delle decine composto da centinaja, ne segue che esso multiplicato per le decine dia al prodotto migliaja. Il quadrato delle decine essendo in centinaja, multiplicato per le unità verrà in centinaja; il quadrato delle unità essendo in unità qualora sarà multiplicato per le decine darà il prodotto in decine; e finalmente il cubo delle unità provvenendo dal quadrato delle unità, che è in unità, multiplicato per le unità verrà in unità. Quindi conchiudiamo generalmente, che *il cubo delle decine di un numero dato viene in migliaja*, *che il tripla del quadrato delle decine multiplicato per le unità viene in centinaja*, *che il triplo del quadrato delle unità multiplicato per le decine viene in decine*, *ed in fine che il cubo delle unità viene in unità.*

In fine essendo delli numeri 1, 10, 100 etc. li cubi respettivamente 1, 1000, 1000000000 etc. ne segue che il cubo di un numero di una cifra, il quale è compreso tra 1 e 10, deve essere minore di 1000, che è il minimo numero di 4 cifre, dunque esso non può avere più di 3 cifre; un numero compreso tra 10 e 100, che ha per conseguenza due cifre, deve avere il suo cubo compreso tra 1000 e 1000000, e per conseguenza non può avere meno di 4 cifre nè più di *6*. Similmente si dimostra che un numero di tre cifre non può avere al suo cubo meno di 7 cifre nè più di 9, etc.; ed in generale che *un numero di n cifre non può avere al suo cubo più di 3n cifre, nè meno di 3n—2 cifre.*

38. Ragionando della medesima maniera come abbiamo ragionato per conoscere la composizione del quadrato e del cubo di un numero, noi potremmo conoscere la composizione delle potenze 4^a, 5^a etc. di esso, ma esse divenendo tanto più complicate quanto più alto è il grado della potenza, noi rimetteremo ad un luogo più adattato sì fatta ricerca.

39. Ricapitulando le varie maniere da noi tenute per comporre li numeri, vediamo, che questa composizione da noi si è fatta. 1. Per la successiva addizione dell' unità. 2. Per la addizione di più numeri differenti. 3. Per quella di più numeri fra loro eguali. 4. Per la ripetizione de' numeri ottenuti per mezzo della operazione precedente, ripetizione la quale può essere indicata da numeri diseguali, o da numeri eguali a quelli precedentemente adoperati.

40. Ogni una delle operazioni, per mezzo delle quali noi abbiamo composti li numeri, ha la sua corrispondente qualora vogliamo scomporre li numeri; quindi li problemi che possono proporsi per la scomposizione de' numeri si riducono alli seguenti.

1. *Da un numero dato togliere successivamente l' unità.* 2. *Essendo data la somma di due o più numeri, determinare li numeri che l' hanno prodotta* 3. *Dato il prodotto di due o più fattori, determinare li fattori.* 4. *Data la potenza di un dato grado, determinare la radice.*

Questi problemi che sono precisamente gli inversi di quelli, che abbiamo sciolti relativamente alla composizione de' numeri sono troppo indeterminati, quindi per toglierc la indeterminazione noi li modificheremo sottoponendoli a certe date condizioni; così per esempio noi proporremo il secondo, nella maniera seguente. *Data la somma di due numeri ed uno di essi, determinare l' altro.* Il terzo si modificherà dicendo: *Dato il prodotto di due fattori, e dato uno di essi, determinare l' altro fattore.* Il quarto finalmente si potrà proporre nella seguente maniera: *Data la potenza di un numero e dato il suo grado, determinare la radice corrispondente.*