CAP. IV.

Verificazioni delle quattro operazioni.

69. Nelli calcoli aritmetici non basta essere sicuri della bontà de' metodi, ma bisogna ancora avere la certezza di non avere errato nella esecuzione de' calcoli, quindi è necessario cercare de' metodi per verificare li risultati da esse forniti.

70. Volendo verificare il risultato di una addizione, incominceremo dal riflettere, che la somma di più numeri essendo nata dalla addizione successiva di ciascuna delle colonne delle unità della medesima specie, se noi togliamo successivamente la somma di ciascheduna di queste colonne dalle somme parziali, che le unità della medesima specie hanno fornito alla somma totale, noi dobbiamo avere zero per residuo della sottrazione dell' ultima colonna, lo che succedendo noi conchiuderemo, che il risultato della addizione è esatto. Ora se noi riflettiamo, che la somma di una colonna non può mai somministrare alla somma totale unità di grado inferiore a quello delle sue, e che può somministrarne di quelle di un ordine superiore, noi conchiudiamo, che la cifra della somma situata sotto la prima colonna a sinistra unita con le cifre degli ordini superiori contie-

ne la somma parziale della prima colonna a sinistra, e che qualora questa somma parziale fosse maggiore della somma della colonna, noi conosceremo l' eccesso di essa sopra la somma della colonna, sottraendo da essa la somma della colonna, e considereremo questo eccesso come appartenente alle somme parziali, che sono risultate dalla addizione delle colonne inferiori; indi ripeteremo la stessa operazione sopra ciascuna delle colonne inferiori.

Così se noi ci proponiamo di verificare se 16252 è la vera somma de' numeri 5649, 768, 8946, 889 ragioneremo così.

5649
768
8946
889
———
16252
3252
252
32
0

Dovendo la somma totale contenere tutte le migliaja, tutte centinaja, tutte decine, e tutte le unità dei numeri dati, ne segue che se noi togliamo dalle 16 migliaja della somma totale le 13 migliaja fornite dalla colonna delle migliaja, il residuo di 3 migliaja unito al numero 252 espresso dalle cifre seguenti darà 3252, il quale deve essere la somma delle centinaja, delle decine, e delle unità de' numeri dati; indi se dalle 32 centinaja di 3252 togliamo le 30 centinaja fornite dalla colonna delle centinaja, il residuo 2 centinaja unito al numero 52 darà il numero 252, il quale deve essere la somma delle decine e delle unità de' numeri dati; e sottraendo da esso le 22 decine fornite dalla colonna delle decine avremo il residuo 3 decine, che unite al numero 2 espresso dalla cifra seguente darà 32, il quale deve essere la somma delle unità de' numeri dati, e sottraendo da esso le 32 unità fornite dalla colonna delle unità, noi avremo il residuo zero; e conosceremo che la somma trovata è la vera somma de' numeri dati. Dal che ricaviamo, che per verificare una somma *si deve sottrarre successivamente andando da sinistra a destra la totalità di ciascheduna colonna dalle unità della sua specie*, *che si trovano nella somma totale*, *e se la sottrazione dell' ultima colonna dà per residuo zero la somma trovata è esatta.*

7 . Per verificare il residuo di una sottrazione, noi consideriamo che il numero maggiore è composto dal numero di cui esso eccede il minore, e dal numero minore, quindi evidentemente conchiudiamo, che se addizioniamo il numero minore col residuo trovato, e la somma che ne risulta è eguale al numero maggiore, il residuo è esatto. Dal che ricaviamo, che

Per verificare il residuo di una sottrazione, si debbono insieme addizionare il residuo ed il numero minore; se la somma che ne risulta produce il numero maggiore dato, il residuo è esatto.

72. Poicchè noi abbiamo verificata la addi-

zione per mezzo della sottrazione, e la sottrazione per mezzo della addizione, la analogia ci induce a cercare nella divisione la verifica della multiplicazione, e nella multiplicazione quella della divisione; ed in fatti

73. *Nella multiplicazione si può considerare uno de' fattori come un numero ignoto, e ricercarlo dividendo il prodotto trovato per l'altro fattore; se la divisione dà per quoziente il fattore noto, che da noi è stato considerato come incognito, conchiuderemo che il prodotto trovato è il vero prodotto.*

74. Finalmente per quanto riguarda la verifica del quoziente di una divisione, la regola si presenta da se medesima; poichè noi sappiamo che il dividendo è la somma del prodotto del divisore per lo quoziente, e del residuo finale; dunque *basterà multiplicare il quoziente per lo divisore, ed unire al prodotto che ne risulta il residuo finale, se la somma che ne nasce riproduce il dividendo conchiuderemo, che il quoziente trovato è esatto.*

75. Bisogna quì avvertire, che spesso può accadere che ne calcoli si facciano errori opposti, li quali possono scambievolmente distruggersi; quindi le verificazioni debbono essere considerate come probabilità più o meno forti, ma che generalmente parlando esse danno una certezza assoluta soltanto in certi casi sommamente semplici.

CAP. V.

Delle Frazioni.

ARTICOLO I.

Nozioni preliminari.

76. La divisione, la quale non può essere esattamente eseguita, cioè la divisione in cui l'ultimo residuo non è eguale a zero, fa nascere le frazioni.

Per esempio qualora ci proponiamo di dividere 25 per 7, noi vogliamo trovare un numero, il quale multiplicato per 7 riproduca il dividendo 25; supponiamo che sì fatto numero sia 3, noi troviamo che 7×3 produce 21, numero il quale è minore di 25, e se supponiamo che il numero cercato sia 4, noi troviamo che 7×4 produce 28, numero maggiore di 25; dunque noi dobbiamo conchiudere, che il quoziente di 25 diviso per 7 è maggiore di 3, ed è minore di 4, ma li numeri 3, e 4 differiscono soltanto di una unità; quindi il quoziente completo che deve risultare dalla divisione di 25 per 7 deve essere 3 unità più una quantità minore di una unità. Lo che ci conduce a ricercare, quale debba essere la quantità minore della unità, che deve essere aggiunta al quoziente 3 per avere il quoziente completo di 25 diviso per 7.

Per fare ciò, consideriamo il dividendo 25 come composto da $21+4$, e noi diremo, che il quoziente completo di 25 diviso per 7 è composto dalla somma di due quozienti, uno de' quali è quello che nasce dalla divisione di 21 per 7, e l'altro quello che risulta dalla divisione di 4 per 7; dunque per trovare il quoziente completo di 25 diviso per 7, noi dobbiamo trovare il quoziente che risulta dalla divisione di 4 per 7, ed aggiungerlo al quoziente 3, che nasce dalla divisione di 21 per 7.

Per trovare il quoziente, che nasce dividendo 4 per 7, noi concepiamo la unità divisa in 7 parti uguali, e poichè una di sì fatte parti ripetuta 7 volte riproduce l'unità, noi conchiudiamo, che ciascuna di esse è il quoziente che si ha dividendo l'unità per 7; ma il numero 4 vale $1+1+1+1$, dunque noi troveremo il quoziente di 4 diviso per 7 prendendo sopra ciascuna delle 4 unità, che compongono il 4, una settima parte; e quindi conchiuderemo, che il quoziente che nasce dividendo 4 per 7 è 4 settime parti della unità. Dunque per avere il quoziente completo di 25 diviso per 7; noi dobbiamo fare la somma del quoziente di 21 diviso per 7, ossia di 3, e del quoziente di 4 diviso per 7, il quale è 4 parti settime della unità.

77. La parte minore della unità, che noi dobbiamo aggiugnere alle unità del quoziente, per avere il quoziente completo di una divisione, si dice *frazione*, oppure *rotto*.

78. Dal che ricaviamo, che qualora il dividendo non è divisibile esattamente per lo divisore, il quoziente è composto da due parti, delle quali una è un numero intero, e l'altra è una frazione, la quale indica il quoziente dell'ultimo residuo diviso per lo divisore.

79. Gli Aritmetici hanno stabilito di scrivere una frazione mettendo il numero che indica in quante parti eguali si concepisce divisa l'unità sotto del numero, che indica quante di sì fatte parti si debbono prendere, e separando l'uno di essi dall'altro per mezzo di una linea. Così volendo scrivere 4 parti settime della unità, hanno scritto $\frac{4}{7}$, in modo che $\frac{4}{7}$ indica, che noi dobbiamo prendere 4 parti della unità divisa in 7 parti eguali. Dippiù essi hanno dato varj nomi alle suddivisioni della unità; quando l'unità è stata divisa in 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 parti eguali, ciascuna di essa è stata chiamata respettivamente *un mezzo*, o *una metà*; *un terzo*, *un quarto*, *un quinto*, *un sesto*, *un settimo*, *un ottavo*, *un nono*, *un decimo*; quindi le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ si enunciano dicendo *un mezzo*, *un ter-*

zo, *un quarto*, *un quinto* ec., e le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ ec., si enunciano dicendo *due terzi*, *tre quarti*, *cinque settimi* ec.; qualora poi si concepisce l'unità divisa in più di 10 parti eguali, si forma il nome di ciascuna di tali parti, aggiugnendo alla fine della parola, che indica il numero di esse, la terminazione in *esimo*; così la frazione $\frac{1}{15}$ si enuncia dicendo *un quindicesimo*, e la frazione $\frac{7}{15}$ si enuncia dicendo *sette quindicesimi.*

80. Poicchè il numero inferiore serve soltanto per dare il nome, ossia per *denominare* le parti della unità, dalle quali la frazione è composta è stato chiamato *denominatore*, il numero superiore ha ricevuto il nome di *numeratore*, poicchè esso serve per contare il numero delle parti, che compongono la frazione; e tutti due sono disegnati col nome comune di *termini della frazione.*

81. Essendo la frazione il quoziente della divisione, che si avrebbe dividendo il numeratore per lo denominatore, ed avendo dimostrato, che sì fatto quoziente si determina dividendo l' unità in tante parti eguali quante ne indica il denominatore, e prendendo di esse tante parti quante ne indica il numeratore; ne segue, che, se per esempio, noi abbiamo la frazione $\frac{7}{15}$, potremo enunciarla dicendo, il *quoziente che si ha dividendo* 7 *per* 15, oppure, *sette quin-*

dicesimi, espressioni identiche, poichè l'una di esse indica il rifultato di una operazione di calcolo non ancora eseguita; e l'altra il medesimo risultato già determinato.

82. Noi abbiamo dimostrato 1. che qualora in una divisione si accresce, o si diminuisce il dividendo senza alterare il divisore, il quoziente similmente si accresce, o si diminuisce. 2. Che, qualora il dividendo non essendo variato, si accresce, o diminuisce il divisore, reciprocamente il quoziente si diminuisce, o si accresce. 3. Che, qualora il dividendo si multiplica, o si divide per un numero, il divisore restando lo stesso, il quoziente si trova similmente multiplicato, o diviso per lo stesso numero. 4. Che qualora non alterandosi il dividendo si multiplica, o si divide il divisore per un numero, il quoziente si trova reciprocamente diviso, o multiplicato per lo stesso numero. 5. Che qualora si multiplicano, o si dividono sì il dividendo, che il divisore per lo stesso numero, il quoziente non si altera. Ma noi abbiamo dimostrato ancora, che qualunque frazione indica il quoziente della divisione, in cui il numeratore è il dividendo, ed il denominatore è il divisore; dunque 1. *Una frazione si accresce, o si diminuisce, qualora si accresce, o diminuisce il suo numeratore senza alterare il suo denominatore.* 2. *Che una frazione similmente si accresce,*

o si diminuisce, *qualora non alterando il numeratore*, *si diminuisce*, *o si accresce il denominatore*. In modo che si può accrescere una frazione, o accrescendo il numeratore senza alterare il denominatore, o diminuendo il denominatore non facendo variare il numeratore; ed una frazione si può rendere minore diminuendo il numeratore senza alterare il denominatore, oppure aumentando il denominatore senza toccare il numeratore. 3. *Se noi multiplichiamo, o dividiamo il numeratore di una frazione per un numero intero senza variare il denominatore, noi multiplichiamo, o dividiamo la frazione per lo stesso numero*. 4. *Se multiplichiamo, o dividiamo per un numero intero il denominatore di una frazione senza alterare il numeratore, la frazione si troverà reciprocamente divisa, o multiplicata per lo stesso numero*: In modo, che possiamo multiplicare una frazione per un numero intero multiplicando il numeratore per sì fatto numero intero, senza alterare il suo denominatore, o dividendo per esso il denominatore, senza toccare il numeratore; e possiamo dividere una frazione per un intero, dividendo per sì fatto intero il numeratore, lasciando alla frazione il medesimo denominatore, oppure multiplicando il denominatore per sì fatto intero, senza alterare il numeratore. 5. *Finalmente non si altera una frazione*, *qualora* *si multiplicano, o si dividono li suoi due termini per lo stesso numero.*

83. Disegnando una frazione, il quoziente che si deve avere dividendo il numeratore per lo denominatore, è evidente 1. *Che qualora essa ha il numeratore minore del denominatore, vale meno di una unità, e perciò è una vera frazione.* 2. *Che qualora il numeratore è eguale al denominatore, essa equivale alla unità.* 3 *Che qualora il numeratore è maggiore del denominatore, essa è maggiore della unità, e per conseguenza esse non sono vere frazioni.* Quindi noi chiameremo *frazioni*, soltanto quelle che hanno il numeratore minore del denominatore, ed *espressioni frazionarie* quelle, che non hanno il numeratore minore del denominatore.

ARTICOLO II.

Delle operazioni preparatorie, o ancillari.

84. Qualora da noi si vogliono paragonare fra loro le frazioni, non basta, che esse sieno rapportate alla medesima unità, ma bisogna ancora che esse sieno espresse in parti di essa, le quali sieno della medesima grandezza, quindi si vede che noi non potremo conoscere il rapporto che passa tra le frazioni $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, giacchè sebbene da noi si sup-

supponga, che esse sieno rapportate alla medesima unità, pure essendo espresse in parti di essa, le quali sono di differente grandezza, il loro rapporto non può determinarsi; quindi è necessario di cercare un metodo per mezzo del quale si possano ridurre in parti della medesima grandezza, senza che il valore di esse si alteri; ma noi sappiamo, che il valore delle parti della unità è determinato dai denominatori delle frazioni, dunque noi dobbiamo cercare il metodo da ridurre le frazioni allo stesso denominatore senza che il loro valore sia alterato. Quindi supponiamo che sieno date le frazioni $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, quali debbano essere ridotte al medesimo denominatore.

Noi incominceremo dal riflettere, che se si dasse a tutte per denominatore il prodotto di tutti li denominatori, noi avremmo le frazioni $\frac{3}{4\times6\times9}$, $\frac{5}{4\times6\times9}$, $\frac{7}{4\times6\times9}$, frazioni, le quali sebbene abbiano un medesimo denominatore, pure non hanno respettivamente lo stesso valore delle frazioni date, ma noi osserveremo, che il denominatore della frazione $\frac{3}{4\times6\times9}$ è nato dalla multiplicazione del denominatore della frazione $\frac{3}{4}$ per lo prodotto 6×9, e che la frazione $\frac{3}{4}$ non avrebbe cambiato di valore se multiplicando il suo denominatore per 6×9 da noi si fosse ancora multiplicato il suo numeratore 3 per lo stesso 6×9, dunque la frazione $\frac{3}{4}$

$= \frac{3 \times 6 \times 9}{4 \times 6 \times 9}$; similmente ragionando noi troveremo che $\frac{5}{6} = \frac{5 \times 4 \times 9}{6 \times 4 \times 9}$; e $\frac{7}{2} = \frac{7 \times 4 \times 6}{9 \times 4 \times 6}$.

Dal che conchiudiamo, che qualora sono date più frazioni, le quali hanno denominatori differenti, noi le riduciamo allo stesso denominatore senza che il loro valore si alteri, *multiplicando li due termini di ciascheduna di esse per lo prodotto de' denominatori di tutte le altre*.

Ma se consideriamo, il nnmeratore della frazione $\frac{3 \times 6 \times 9}{4 \times 6 \times 9}$, noi vediamo, che esso è formato dal numeratore della frazione data $\frac{3}{4}$ multiplicato per lo prodotto de' denominatori 6, e 9 delle altre due, e similmente che il numeratore della frazione $\frac{5 \times 4 \times 9}{6 \times 4 \times 9}$ e formato dal numeratore 5 della frazione data $\frac{5}{6}$ multiplicato per lo prodotto 4×9 delli denominatori delle altre due, e che in fine il numeratore della frazione $\frac{7 \times 4 \times 6}{9 \times 4 \times 6}$ è il prodotto del numeratore 7 della frazione data $\frac{7}{9}$ per

4×6, che è il prodotto de' denominatori delle altre due, noi conchiuderemo la seguente regola generale.

Qualora si vogliono ridurre più frazioni al medesimo denominatore senza che il loro valore sia alterato, *si multiplichi il numeratore di ciascheduna di esse per lo prodotto de' denominatori di tutte le altre, e si dia a ciascuno di sì fatti prodotti per denominatore il prodotto di tutti li denominatori delle frazioni date.*

85. Sebbene il metodo da noi adoperato sia sufficiente per ridurre le frazioni allo stesso denominatore, pure considerando, che le frazioni che ne risultano sono sempre più complicate di quello, che erano le frazioni proposte, noi vediamo che, per rendere i calcoli delle frazioni più commodi, sarebbe necessario di vedere se le frazioni trovate per questo metodo fossero suscettibili di essere ridotte ad una più semplice espressione conservando sempre un denominatore comune, o ciò che vale lo stesso se fosse possibile di trovare un metodo, che, escludendo tutti li fattori inutili, dasse alle frazioni ridotte un denominatore comune, che fusse il minimo possibile. Quindi noi osserveremo, che affinchè ciascuna delle frazioni dimandate sia eguale alla corrispondente delle proposte, deve avere per suoi termini quelli della proposta multiplicati per un medesimo numero,

e che per conseguenza il denominatore comune, che noi cerchiamo, deve essere divisibile per tutti li denominatori delle frazioni date; quindi la quistione si riduce a trovare un numero, che sia divisibile per ciascuno de' denominatori delle frazioni date, e di più che sia il minimo possibile, ossia alla ricerca del minimo dividendo comune delli medesimi denominatori delle frazioni date; numero, che noi troveremo per la regola data.

Dopo di avere trovato il minimo dividendo comune di tutti li denominatori delle frazioni date, che deve essere il denominatore comune delle medesime frazioni ridotte allo stesso denominatore, dobbiamo determinare il numero per cui deve essere multiplicato ciascuno numeratore delle frazioni proposte, affinchè le nuove frazioni abbiano lo stesso valore delle rispettive frazioni primitive; quindi noi osserveremo, che esso deve essere il quoziente del minimo dividendo comune trovato per lo denominatore della frazione data, giacchè questo quoziente è precisamente il fattore per cui si è multiplicato il denominatore primitivo, e per conseguenza la frazione ridotta dovendo avere per suo denominatore il suo denominatore primitivo multiplicato per questo quoziente, anche il numeratore dovrà essere multiplicato per lo stesso quoziente.

Così se vogliamo che le frazioni $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{18}$ sieno ridotte al medesimo denominatore, e che sì fatto comune denominatore sia il minimo possibile, noi incominceremo dal determinare il minimo dividendo comune dei denominatori 9, 12, 18, il quale trovato secondo il metodo dato §. è $2\times2\times3\times3$, indi multiplicheremo li due termini della frazione data $\frac{4}{9}$ per lo quoziente, che si ha dividendo $2\times2\times3\times3$ per 9 ossia per 3×3; e poichè questo quoziente si trova supprimendo nel numero dato $2\times2\times3\times3$, il fattore 3×3, noi multiplicheremo li due termini della frazione $\frac{4}{9}$ per 2×2; e la frazione $\frac{4}{9}$ si ridurrà a $\frac{4\times2\times2}{9\times2\times2}=\frac{16}{36}$. Similmente ragionando noi troveremo che la frazione $\frac{5}{12}$ ossia $\frac{5}{2\times2\times2}$ sarà ridotta al minimo denominatore comune multiplicando li suoi due termini per 3; e conchiuderemo che $\frac{5}{12}=\frac{5\times3}{2\times2\times3\times3}=\frac{15}{36}$; ed in fine ripetendo lo stesso raziocinio per la frazione $\frac{7}{18}$ ossia $\frac{7}{2\times3\times3}$ ritroveremo che essa ridotta al minimo denominatore comune sarà $\frac{7\times2}{2\times2\times3\times3}$

$= \frac{14}{36}$. Dal che ricavaremo la seguente regola generale.

Qualora si vogliono ridurre più frazioni al minimo denominatore comune; *si determini il minimo dividendo comune di tutti li denominatori delle frazioni date, indi si multiplichi il numeratore di ciascheduna frazione per lo quoziente, che si ha dividendo il minimo dividendo comune per lo denominatore della medesima frazione, ed a ciascuno de' prodotti, che ne risultano, si dia per comune denominatore il minimo dividendo comune trovato.*

86. Spesso le operazioni di calcolo, che noi dobbiamo eseguire sopra gli interi, e le frazioni, ricercano, che gli interi sieno ridotti ad espressioni frazionarie, le quali abbiano un dato denominatore, come altresì molte volte le operazioni eseguite sopra delle frazioni danno per risultato espressioni frazionarie, le quali contengono degli interi, che noi dobbiamo da esse estrarre; quindi noi dobbiamo cercare 1. il metodo per ridurre un intero ad espressione frazionaria, la quale abbia un dato denominatore; 2. quello di estrarre da una espressione frazionaria gli interi, che essa contiene.

I. Proponiamoci di ridurre l'intero 8 ad espressione frazionaria, la quale abbia per denominatore 7.

Essendo l'unità eguale a $\frac{7}{7}$, è evidente che 8 è eguale ad 8 volte $\frac{7}{7}$; ma 8 volte $\frac{7}{7} = \frac{8 \times 7}{7}$; dunque $8 = \frac{8 \times 7}{7}$. Dal che ricaviamo, che per ridurre un intero ad una espressione frazionaria, la quale abbia un dato denominatore, noi dobbiamo *multiplicare l'intero dato per lo dato denominatore, e formare una espressione frazionaria, la quale abbia per numeratore il prodotto, che risulta da tale multiplicazione, e per denominatore il denominatore dato.*

87. Se poi si volesse ridurre ad una sola espressione frazionaria un intero unito ad una frazione, come sarebbe $8+\frac{5}{6}$, noi incominceremo dal ridurre 8 ad una espressione frazionaria, la quale abbia per denominatore 6, ed avremo $8 = \frac{8 \times 6}{6} = \frac{48}{6}$; indi osserveremo, che $8+\frac{5}{6} = \frac{48}{6}+\frac{5}{6}$, espressione che evidentemente si riduce a $\frac{48+5}{6}$; dal che ricaveremo, che per ridurre ad una sola espressione frazionaria un intero unito ad una frazione, bisogna *multiplicare l'intero per lo denominatore della frazione data, ed unire al prodotto il numeratore della medesima frazione; indi formare una espressione frazionaria, la quale abbia per numeratore la*

somma trovata, e per denominatore il denominatore della frazione data.

88. II. Sia data la espressione frazionaria $\frac{35}{9}$; dalla quale si debbono estrarre gli interi in essa contenuti; disegnando una espressione frazionaria il quoziente, che si avrebbe dividendo il numeratore per lo denominatore, è evidente che noi avremo gli interi, che si contengono nella espressione frazionaria $\frac{35}{9}$, dividendo 35 per 9; quindi eseguendo la operazione troveremo, che $\frac{35}{9}=3+\frac{8}{9}$; dal che ricaveremo la seguente regola generale; qualora si vogliono estrarre gli interi contenuti in una espressione frazionaria data, *si divida il suo numeratore per lo suo denominatore, il quoziente darà il numero intero, che essa contiene, e la espressione frazionaria data sarà eguale allo intero trovato unito con la frazione vera, che ha per numeratore il residuo della divisione fatta, e per denominatore lo stesso denominatore della espressione frazionaria data.*

89. La brevità, e la semplicità de' calcoli esiggono, che le frazioni sieno espresse per gli minimi numeri possibili, e poichè le frazioni non cambiano di valore, qualora li suoi due termini si dividono per un medesimo numero, ne segue, che se noi scopriamo un fattore comune a tali termini, e dividiamo per esso ambi li termini della frazione, essa sarà ridotta ad una più breve espressio-

ne, senza cambiare il suo valore; ma se li termini della frazione ridotta hanno qualche altro divisore comune, essa potrà similmente essere ridotta ad una espressione più semplice, ed essa sarà sempre riduttibile ad una espressione più semplice fino a tanto, che li suoi termini avranno un fattore comune; quindi per ridurla direttamente alla sua più semplice espressione è necessario conoscere quel fattore comune de' suoi due termini, per lo quale essi essendo divisi, ne risultino per quozienti due numeri primi fra loro; ma noi abbiamo dimostrato, che qualora due numeri si dividono pe 'l loro massimo divisore comune, li quozienti, che ne risultano sono numeri primi fra loro, dunque per ridurre una frazione alla sua minima espressione, basterà dividere li suoi due termini pe 'l loro massimo comune divisore; dal che ricaviamo la seguente regola generale.

Per ridurre una frazione alla sua minima espressione, *si cerchi il massimo comune divisore de' due termini di essa, indi si faccia una nuova frazione, la quale abbia per suoi termini respettivamente li quozienti, che si hanno dividendo li termini della proposta per sì fatto divisore comune.*

C A P. VI.

Composizione de' numeri frazionarj.

90. *Dati più numeri frazionarj addizionarli insieme.*

Dovendo le parti componenti una somma non solo essere rapportate alla medesima unità, ma ancora essere della medesima grandezza, ne segue che, se le frazioni date non hanno il medesimo denominatore, bisogna prima di tutto ridurle allo stesso denominatore; quindi volendo cercare il metodo da addizionare fra loro più frazioni date, noi supponiamo, che esse sieno già ridotte al medesimo denominatore, indi consideriamo, che qualora le frazioni, che si debbono addizionare hanno un medesimo denomitatore, allora altro da noi non si dee fare se non se addizionare li numeri delle parti indicate dal denominatore di esse, ma li numeri di tali parti sono numerate dai numeratori, dunque noi dobbiamo addizionare tutti li numeratori delle frazioni date, ed alla somma che ne risulta dare per denominatore il denominatore comune di esse, il quale indica la grandezza di esse. Dal che ricaviamo la seguente regola generale. Qualora si vogliono addizionare più frazioni ; 1. *Se esse hanno un denominatore comune, si addizionino li* *loro numeratori, ed alla somma, che ne risulta si dia per denominatore il denominatore comune delle frazioni date. 2. Se esse hanno diversi denominatori, si riducano prima al medesimo denominatore, e di poi si operi sulle frazioni, che ne risultano, come si è operato nel caso precedente.*

Così se si vogliano addizionare le frazioni $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{7}$, noi faremo la somma de' numeratori, la quale è $5+4+6$, e ad essa daremo per denominatore il denominatore 7 delle frazioni date, e conchiuderemo che la somma ricercata è $\frac{5+4+6}{7}$, ossia $\frac{15}{7}$; ma poichè questa frazione ha il numeratore maggiore del suo denominatore, essa contiene degli interi, noi potremo estrarli da essa dividendo il numeratore 15 per lo denominatore 7, e diremo che la somma $\frac{15}{7}$ delle frazioni date, equivale a $2+\frac{1}{7}$.

Similmente se noi dobbiamo addizionare le frazioni $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{13}{18}$, le quali hanno denominatori differenti, noi incominciaremo dal ridurle al medesimo denominatore, ed avremo operando secondo la regola data (§.   ) le frazioni equivalenti $\frac{486}{648}$, $\frac{504}{648}$, $\frac{468}{648}$, la somma delle quali è $\frac{486+504+468}{648}=\frac{1458}{648}=$ $2+\frac{162}{648}$, quantità che ridotta alla minima espressione equivale a $2+\frac{1}{4}$.

Noi avremmo potuto ridurre le frazioni $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{13}{18}$ al medesimo denominatore, dando ad esse il minimo denominatore comune, ed operando secondo la regola data (§.) ne sarebbero risultate le frazioni $\frac{27}{36}$, $\frac{28}{36}$, $\frac{26}{36}$, la somma delle quali è $\frac{81}{36}=2+\frac{9}{36}=2+\frac{1}{4}$.

91. Se dovessimo addizionare quantità composte da interi uniti a frazioni, potremo incominciare dal ridurle ad espressioni frazionarie del medesimo denominatore, e di poi farne la addizione col metodo dato nel §. precedente; ma spesso è più commodo di addizionare prima le frazioni, indi gli interi, e qualora la somma delle frazioni contiene degli interi, noi possiamo estrarne gli interi, e notare sotto la colonna delle frazioni la frazione vera che ne risulta, e ritenere gli interi, che in essa si contenevano per riunirli alla somma degli interi.

Così se ci proponiamo di addizionare le quantità $3\frac{5}{9}$; $6\frac{7}{9}$, $5\frac{8}{9}$; noi addizioneremo prima le frazioni, la somma delle quali è $\frac{20}{9}$, ossia $2+\frac{2}{9}$, e scriveremo la frazione $\frac{2}{9}$ sotto la colonna delle frazioni, eviterremo le 2 unità contenute nella somma delle frazioni, le quali riunite alla somma degli interi proposti, danno 16 unità; ed avremo $16+\frac{2}{9}$ per la somma dimandata.

$$\begin{array}{r} 3\frac{5}{9} \\ 6\frac{7}{9} \\ 5\frac{8}{9} \\ \hline 16\frac{2}{9} \end{array}$$

92. La addizione di una frazione più volte a se medesima valendo lo stesso che multiplicare la frazione per lo numero delle vol-

te, che essa deve essere unita a se medesima; ne segue che la multiplicazione di una frazione per un intero altro non è, se non se un caso particolare della addizione delle frazioni, e poichè abbiamo dimostrato, che qualora si multiplica il numeratore di una frazione per un numero intero senza alterare il suo denominatore, la frazione si trova multiplicata per lo stesso numero intero, noi conchiudiamo che qualora si deve multiplicare una frazione per un numero intero, noi *multiplicheremo il suo numeratore per lo numero intero dato, ed al prodotto daremo per denominatore lo stesso denominatore della frazione data.*

Dippiù avendo dimostrato ancora, che qualora si divide il denominatore di una frazione per un numero intero senza alterare il numeratore di essa, la frazione è multiplicata per lo stesso numero intero, conchiudiamo, che possiamo multiplicare una frazione per un numero intero *dividendo il denominatore di tale frazione per lo intero dato; qualora la divisione è possibile, e formare una nuova frazione, la quale abbia per numeratore il numeratore della frazione data, e per denominatore il quoziente trovato dividendo il denominatore della frazione data per lo intero dato.*

Dal che ricaviamo che noi abbiamo due metodi per multiplicare una frazione per un numero intero, cioè quello di multiplicare il numeratore della frazione per lo intero dato, senza toccare il denominatore, e quello di dividere il denominatore della frazione per lo intero dato, quando la divisione sia possibile, senza alterare il suo numeratore.

Così il prodotto della multiplicazione di $\frac{7}{15}$ per 3, potrà aversi multiplicato 7 per 3, e dando al prodotto per denominatore il medesimo denominatore 15 della frazione proposta, in modo che $\frac{7}{15}\times3=\frac{7\times3}{15}=\frac{21}{15}=1+\frac{6}{15}=1+\frac{2}{5}$; oppure possiamo trovare lo stesso prodotto di $\frac{7}{15}\times3$, dividendo per 3 il denominatore 15 della frazione proposta $\frac{7}{15}$; e formare la frazione $\frac{7}{5}$, la quale abbia per numeratore il numero 7, che era il numeratore della frazione proposta, e per denominatore il quoziente 5, il quale è nato dalla divisione del denominatore 15 della frazione data diviso per l'intero dato 3, di maniera che $\frac{7}{15}\times3=\frac{7}{5}=1+\frac{2}{5}$.

93. Da quel che abbiamo detto ricaviamo, che se noi dobbiamo multiplicare una frazione per lo suo denominatore, il prodotto sarà lo stesso numeratore della frazione; in fatti se ci proponiamo di multiplicare la frazione $\frac{5}{7}$ per 7, il prodotto si troverà essere la frazione $\frac{5}{1}$, la quale ha lo stesso numeratore della frazione proposta, e per denomina-

tore l'unità, che è il quoziente del denominatore 7 della frazione data diviso per lo multiplicatore 7; ma la espressione $\frac{5}{1}$ è evidentemente eguale a 5; dunque generalmente conchiuderemo, che *il prodotto di una frazione multiplicata per lo suo denominatore è il numeratare della medesima frazione.*

94. Proponiamoci ora di multiplicare l' intero 5 per la frazione $\frac{3}{4}$; se noi invece di multiplicare l' intero 5 per la frazione $\frac{3}{4}$, multiplichiamo 5 per 3, avremo il prodotto 5×3, il quale sarà 4 volte maggiore del prodotto di $5\times\frac{3}{4}$, poichè noi abbiamo fatto il multiplicatore 3 quattro volte maggiore del multiplicatore dato $\frac{3}{4}$, dunque per avere il prodotto dimandato, bisognerà prendere la quarta parte del prodotto trovato 5×4, quindi il prodotto di $5\times\frac{3}{4}$ sarà $\frac{5\times3}{4}$; dal che ricaviamo la regola generale, che per multiplicare un intero per una frazione *si multiplica l' intero per lo numeratore della frazione: e si dà al prodotto per denominatore lo stesso denominatore della frazione data.*

95. Quì possiamo osservare che il prodotto di $5\times\frac{3}{4}=\frac{5\times3}{4}$; e che il prodotto di $\frac{3}{4}\times5=\frac{3\times5}{4}$; ma $5\times3=3\times5$, dunque $\frac{5\times3}{4}=\frac{3\times5}{4}$; dal che ricaviamo in generale, che *in qua-*

lunque ordine si multiplichino due fattori, de' quali uno sia intero e l' altro frazionario, il prodotto resta sempre lo stesso.

96. Proponiamoci in ultimo luogo di multiplicare fra loro due frazioni; sia per esempio da multiplicarsi $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{6}$. Se noi multiplichiamo $\frac{3}{4}$ per 5, il prodotto sarà $\frac{3\times5}{4}$; ma poichè il multiplicatore 5 è sestuplo del multiplicatore $\frac{5}{6}$, il prodotto trovato $\frac{3\times5}{4}$ è il sestuplo del prodotto dimandato, dunque per avere il prodotto di $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{6}$, bisognerà prendere la sesta parte del prodotto trovato $\frac{3\times5}{4}$, o ciò che vale lo stesso bisognerà dividere $\frac{3\times5}{4}$ per 6; ma noi abbiamo dimostrato, che qualora si multiplica il denominatore di una frazione per un numero intero, la frazione è divisa per lo stesso numero, dunque il quoziente della frazione $\frac{3\times5}{4}$ divisa per 6, sarà $\frac{3\times5}{4\times6}$, e per conseguenza il prodotto di $\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{3\times5}{4\times6}$; ma 3×5 è il pro-

prodotto de' numeratori; e 4×6 è il prodotto de' denominatori delle frazioni date, dunque per moltiplicare una frazione per un altra, *noi moltiplicheremo li due termini dell' una respettivamente per gli due termini dell' altra e formeremo la frazione, che ha per numeratore il prodotto de' numeratori, e per denominatore il prodotto de' denominatori delle frazioni date, ed essa sarà il prodotto dimandato.*

96. Se si hanno più fattori frazionarj a moltiplicare fra loro, come per esempio, $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{8}{11}\times\frac{9}{13}$, noi potremo considerare l'ultima frazione $\frac{6}{13}$ come il multiplicatore di una multiplicazione, nella quale il multiplicando sarebbe il prodotto di $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{8}{11}$; ma in quest' ultimo prodotto noi possiamo considerare l' ultimo fattore $\frac{8}{11}$, come il multiplicatore della multiplicazione, in cui il multiplicando è il prodotto di $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{7}$, quindi noi incominceremo dal multiplicare $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{7}$, ed il prodotto $\frac{3\times5}{4\times7}$ che ne risulta, lo multiplicheremo per $\frac{8}{11}$, ed il prodotto $\frac{3\times5\times8}{4\times7\times11}$ che si ottiene, lo multiplicheremo per $\frac{9}{13}$, ed otterremo per prodotto $\frac{3\times5\times8\times9}{4\times7\times11\times13}$; il quale sarà il prodotto dimandato; Ma il numeratore del prodotto trovato è il prodotto di

tutti li numeratori, ed il denominatore del medesimo prodotto è il prodotto di tutti li denominatori delle frazioni date; Dunque per *trovare il prodotto di qualunque numero di frazioni, si deve formare la frazione, che ha per numeratore il prodotto de' numeratori, e per denominatore il prodotto de' denominatori delle frazioni date.*

97 Qualora multiplichiamo una frazion per un altra per esempio $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{6}$ noi pren- diamo la sesta parte di $\frac{3}{4}$ e la ripetiamo volte, o ciò che vale lo stesso noi prendia mo $\frac{5}{6}$ di $\frac{3}{4}$, dunque la espressione $\frac{5}{6}$ di $\frac{3}{4}$ che noi chiameremo *frazione di frazione* equi vale al prodotto di $\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$, o di $\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}$, quind *una frazione di frazione si riduce ad un frazione semplice, multiplicando fra loro l due frazioni semplici, che la compongono,* si milmente noi dimostreremo, che la *frazion di frazione di frazione* $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$ di $\frac{6}{7}$ equiv le al prodotto di $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}$, ed in fatti $\frac{2}{3}$

$\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}=\frac{2}{3}$ di $\frac{4\times6}{5\times7}=\frac{2\times4\times6}{3\times5\times7}$; e così procede

do avanti, dal che ricaviamo in generale c qualora *si vuole ridurre a frazione ordinar una frazione di frazione di frazione ec. noi do biamo multiplicare fra loro tutte le frazio semplici che la compongono, ed il prodot che ne risulta sarà la frazione semplice eq valente alla frazione di frazione di frazio ec. data.*

98 Finalmente se dobbiamo, multiplicare fra loro de' numeri interi uniti con frazioni, basterà *ridurre li fattori composti da interi e da frazioni in espressioni frazionarie, indi multiplicare fra loro, le espressioni frazionarie ritrovate.* Così se dovessimo multiplicare $3+\frac{4}{5}$ per $6+\frac{5}{7}$; noi ridurremo li due fattori dati nelle espressioni frazionarie equivalenti $\frac{19}{5}$ e $\frac{47}{7}$, indi le multiplicheremo fra loro, ed il prodotto di $(3+\frac{4}{5})\times(6+\frac{5}{7})$ sarà $\frac{893}{35}=33+\frac{8}{35}$.

99 E necessario, che qui noi riflettiamo, che la multiplicazione di un intero per una frazione, o di una frazione per un altra, è una operazione composta da due operazioni differenti, in fatti noi sappiamo, che qualora si multiplica per un numero intero il solo numeratore di una frazione, essa è multiplicata per lo stesso numero, e che qualora si multiplica per un numero intero il solo denominatore di una frazione essa è divisa per lo stesso numero, dunque qualora noi multiplitiplichiamo un numero per una frazione noi multiplichiamo per lo numeratore, e dividiamo per lo denominatore della frazione, che fa da multiplicatore; Così multiplicando 6 per $\frac{3}{5}$ noi abbiamo multiplicato l' intero 6 per lo numeratore 3 della frazione multiplicatore, ed il prodotto 6×3 lo abbiamo diviso per lo

denominatore 5 della medesima frazione.

Similmente multiplicando $\frac{5}{6}$ per $\frac{3}{4}$, noi abbiamo multiplicata la frazione $\frac{5}{6}$ per 3, e di poi il prodotto trovato $\frac{5\times3}{6}$, lo abbiamo diviso per 4, e da questa doppia operazione ne è risultato il prodotto $\frac{5\times3}{6\times4}$.

100 In oltre se riflettiamo, che una frazione vera ha sempre il numeratore minore del denominatore, conchiuderemo, che qualora multiplichiamo un numero per una frazione vera, noi lo multiplichiamo per un certo numero, indi dividiamo il prodotto trovato per un numero maggiore di quello, per cui abbiamo multiplicato il numero dato, e per conseguenza, che questa operazione composta ci fornisce un prodotto minore del multiplicando dato, tutto il contrario di quello che accade, qualora il multiplicatore è maggiore della unità; Qoeste riflessioni ci conducono ad osservare, che le parole *multiplicare*, e *multiplicazione*, le quali portano con loro l' idea di accrescimento sono state adoperate per designare la multiplicazione de' numeri interi, e che se noi le adoperiamo nelle multiplicazioni, in cui il multiplicatore è l' unità, o una frazione di essa, noi lo facciamo dando a queste parole un senso più esteso; in

fatti quando multiplichiamo per un numero maggiore della unità noi facciamo un prodotto, il quale è tale per rapporto al multiplicando, quale è il multiplicatore per rapporto alla unità; così quando noi multiplichiamo un numero per 4, noi troviamo un prodotto, il quale è quadruplo del multiplicando come il multiplicatore 4 è quadruplo della unità. Il multiplicare un numero per 1, vale lo stesso, che prendere il multiplicando una sola volta, locchè dà per prodotto il numero medesimo, così $7 \times 1 = 7$; ed in questo caso essendo il multiplicatore eguale alla unità, il prodotto è anche eguale al multiplicando, ed abbiamo ancora composto un prodotto, il quale è tale per rapporto al multiplicando quale è il multiplicatore per rapporto alla unità; finalmente se multiplichiamo un numero per una parte della unità, noi abbiamo il prodotto, il quale è quella parte del multiplicando, che il multiplicatore è della unità, così qualora si multiplica 8 per $\frac{3}{4}$, il prodotto è 3 volte $\frac{1}{4}$ di 8, come il multiplicatore $\frac{3}{4}$ è 3 volte $\frac{1}{4}$ della unità, ed anche in questo ultimo caso il prodotto è un numero, il quale è tale per rapporto al multiplicando, quale il multiplicatore è per rapporto alla unità. Dal che ricaviamo, che noi possiamo generalmente dire, che la *multiplicazione è quella operazione di calcolo, per la quale essendo dati un multiplicando ed un multipli-*

catore, noi componiamo col multiplicando un prodotto il quale abbia al multiplicando quel medesimo rapporto, che il multiplicatore ha alla unità.

ARTICOLO III.

Elevazione a Potenza delle frazioni.

101. Abbiamo detto, che qualorà noi dobbiamo multiplicare fra loro più fattori frazionarj, il prodotto sarà la frazione, che ha per numeratore il prodotto de' numeratori, e per denominatore il prodotto delli denominatori delle frazioni date; ma se li fattori dati sono fra loro eguali, li prodotti saranno le potenze di uno di essi, e secondochè li fattori eguali sono 2, 3, 4, ec. la potenza trovata sarà la potenza 2.ª, 3.ª 4.ª ec. della frazione data; quindi qualora cherchiamo una potenza di una frazione, noi multiplicheremo la frazione data per se medesima, prendendola per fattore tante volte quante ne indica il grado della potenza, lo che facciamo formando una frazione, che ha per termini le potenze del medesimo grado delli respettivi termini della frazione data.

Dal che ricaviamo, che per *trovare la potenza di un dato grado di una frazione data, noi dobbiamo formare una frazione che abbia per numeratore la potenza diman-*

data del numeratore della frazione data e per denominatore la potenza del medesimo grado del denominatore della medesima frazione 2.° Che la potenza ritrovata sarà tantò minore quanto il grado della potenza dimandata è maggiore, e quanto il denominatore della frazione data è maggiore del suo numeratore.

102. Se si avesse un intero unito ad una frazione, il quale si volesse elevare alla potenza di un dato grado, basterà ridurlo alla espretsione frazionaria equivalente, ed indi operare su questa espressione frazionaria, seguendo la regola data per la elevazione a potenza delle frazioni.

C A P. III.

Della scomposizione delle frazioni.

A R T I C O L O I.

Della sottrazione.

103. *Dati due numeri frazionarj sottrarre il minore di essi dal maggiore.*

Essendo la sottrazione una operazione di calcolo, per la quale, essendo data una somma, ed una delle sue parti, noi cerchiamo di conoscere l'altra parte, e dovendo la somma, e le parti che la compongono essere unità della medesima grandezza ; ne segue che qualora da una frazione si deve sottrarre un' altra frazione, esse debbono essere composte da unità frazionarie della medesima grandezza, e per conseguenza qualora le frazioni sopra delle quali si deve eseguire la sottrazione hanno denominatori differenti, noi debbiamo ridurle al medesimo denominatore; quindi volendo cercare il metodo da sottrarre una frazione da un altra, noi supponiamo che esse sieno già ridotte al medesimo denominatore, indi consideriamo, che qualora le frazioni sulle quali deve essere eseguita la sottrazione hanno lo stesso denominatore, allora altro da noi non si deve fare se non se sottrarre le parti indicate dal comune denominatore contenute nel numero minore dalle parti contenute nel numero maggiore, ma li numeri di si fatte parti sono numerate dalli numeratori delle frazioni date, dunque noi dobbiamo dal numeratore maggiore sottrarre il numeratore minore, e dare al residuo trovato per denominatore il denominatore comune di esse. Dal che ricaviamo la seguente regola generale; Qualora da una frazione maggiore si deve sottrarre una frazione minore I. *se esse hanno lo stesso denominatore, dal numeratore maggiore si sottragga il numeratore minore, ed al residuo trovato si dia per denominatore il denominatore comune delle frazioni date 2. Se esse hanno diversi de-*

nominatori, si riducano prima le frazioni date al medesimo denominatore, e di poi si operi sulle frazioni, che ne risultano, come si è operato nel caso precedente.

Così se vogliamo sottrarre $\frac{7}{15}$ da $\frac{9}{15}$, noi faremo la differenza de' numeratori la quale è $9-7$, e ad essa daremo per denominatore il denominatore 15 delle frazioni date, e conchiuderemo, che la differenza dimandata è $\frac{9-7}{15}$ ossia $\frac{2}{15}$.

Similmente se dalla frazione $\frac{9}{11}$ vogliamo sottrarre la frazione $\frac{4}{9}$, noi incominceremo dal ridurle allo stesso denominatore, ed avremo le frazioni $\frac{81}{99}$, $\frac{44}{99}$, la differenza delle quali è $\frac{81-44}{99}=\frac{37}{99}$.

104. Se dovessimo da un intero unito ad una frazione sottrarre un altro intero unito ad una frazione, noi potremmo incominciare dal ridurli ad espressioni frazionarie dello stesso denominatore, ed indi fare sopra di esse la sottrazione secondo si è detto nel §. precedente; ma spesso è più comodo sottrarre prima le frazioni, ed indi gli interi.

Così volendo da $8\frac{7}{9}$ sottrarre $5\frac{3}{9}$, noi sottrarremo prima da $\frac{7}{9}$ la frazione $\frac{3}{9}$, indi dall' intero 8, l' intero 5 ed avremo il residuo dimandato $3\frac{4}{9}$.

Similmente se da 8 $\frac{3}{11}$ si dovesse sottrarre 3 $\frac{9}{11}$; non potendo da $\frac{3}{11}$ sottrarre $\frac{9}{11}$ noi prenderemo una unità sopra l' intero 8, e la ridurremo ad $\frac{11}{11}$ alla quale aggiunto $\frac{3}{11}$, il numero dato 8 $\frac{3}{11}$ sarà ridotto a 7 $\frac{14}{11}$, dal quale sottraendo 3 $\frac{9}{11}$ avremo il residuo dimandato 4 $\frac{5}{11}$.

Finalmente se da 8 si dovesse sottrarre 3 $\frac{5}{12}$; noi scomporremo l' intero 8 in $7+1=7+\frac{12}{12}$, e da $7+\frac{12}{12}$ sottrarremo 3 $\frac{5}{12}$, ed otterremo il residuo dimandato 4 $\frac{7}{12}$.

ARTICOLO II.

Della divisione delle frazioni.

105. *Dati due numeri de' quali almeno uno sia frazionario, dividere uno di essi per l' altro.*

1. Supponiamo in primo luogo, che si voglia dividere una frazione per un numero intero, e per fissare le idee proponiamoci di dividere $\frac{6}{7}$ per 3.

Noi sappiamo, che qualora si divide il numeratore di una frazione per un numero intero, la frazione è divisa per lo stesso numero, dunque per dividere $\frac{6}{7}$ per 3, basterà dividere il numeratore 6 della frazione dividenda data per lo divisore 3, ed il quoziente dimandato sarà $\frac{2}{7}$.

Dippiù noi abbiamo dimostrato ancora, che qualora si multiplica il denominatore di una frazione per un numero intero, la frazione è divisa per lo stesso numero, dunque se noi multiplicheremo il denominatore 7 della frazione dividenda $\frac{6}{7}$ per 3, avremo la frazione $\frac{6}{21}$, la quale sarà il quozienre dimandato. Quindi noi abbiamo due metodi per dividere una frazione per un intero; il primo è; *si divida il numeratore della frazione dividenda per lo divisore dato, ed al quoziente si dia per denominatore il denominatore medesimo della frazione dividenda data.* Il secondo è; *Si multiplichi il denominatore della frazione dividenda data per lo divisore dato; e si formi una frazione che abbia per numeratore lo stesso numeratore della frazione dividenda data, e per denominatore il prodotto trovato.*

Ma qui avvertiremo, che quantunque di questi due metodi il secondo sia sempre eseguibile, ed il primo lo sia soltanto nel caso, che il numeratore della frazione dividenda sia esattamente divisibile per lo divisore dato, pure tutte le volte, che esso sarà eseguibile deve essere adoperato di preferenza al secondo, perchè il quoziente viene espresso in termini più semplici.

2.° Proponiamo di dividere un intero per una frazione, e sia per esempio da dividere 8 per $\frac{3}{2}$, se noi supponiamo per un momento che il divisore sia 3, il quoziente sarà $\frac{8}{3}$; ma dividendo 8 per 3, noi abbiamo preso per divisore il numero 3 il quale è quintuplo del divisore dato $\frac{3}{5}$, e da noi si è dimostrato, che qualora il divisore si multiplica per un numero intero il quoziente si trova diviso per lo stesso numero, dunque il quoziente trovato $\frac{8}{3}$ è la quinta parte del quoziente dimandato, e perciò per fare si che il quoziente trovato $\frac{8}{3}$ si riduca al quoziente di 8 diviso per $\frac{3}{5}$ si deve multiplicare per 5, ma

$\frac{8}{3}\times 5 = \frac{8\times 5}{3}$; ed 8×5 è il prodotto dell' intero

dividendo dato 8 per lo denominatore 5 della frazione divisore, ed il denominatore 3 è il numeratore della medesima frazione divisore, dunque generalmente, qualora si deve dividere un intero per una frazione, *si multiplichi l' intero dividendo per lo denominatore della frazione divisore, ed al prodotto che ne risulta si dia per denominatore il numeratore della medesima frazione divisore.*

Qui possiamo riflettere, che dividendo

8 per $\frac{3}{5}$, il quoziente è $\frac{8\times 5}{3}$; e che multi-

plicando 8 per $\frac{5}{3}$, che è la frazione divisore

rovesciata, il prodotto è anche $\frac{8\times 5}{3}$, dunque

il quoziente di un intero diviso per una frazione è lo stesso del prodotto, che si ottiene multiplicando il dividendo per la frazione divisore rovesciata, quindi possiamo dire; che qualora si deve dividere un intero per una frazione *noi dobbiamo multiplicare il dividendo per la frazione divisore rovesciata.*

3. Proponiamo in ultimo luogo di dividere una frazione per un altra frazione, e sia per esempio da dividere $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{7}$.

Supponiamo per un momento, che $\frac{3}{4}$ debba dividersi soltanto per 5, per le cose dette il quoziente sarà $\frac{3}{4\times5}$, ma noi dividendo per 5 abbbiamo preso per divisore un numero, il quale è settuplo del divisore dato $\frac{5}{7}$, dunque il quoziente trovato $\frac{3}{4\times5}$ è la settimana parte del quoziente di $\frac{3}{4}$ diviso per $\frac{5}{7}$, e per conseguenza è tale, che multiplicato per 7 darà il quoziente dimandato, dunque il quoziente di $\frac{3}{4}$ diviso per $\frac{5}{7}$ sarà $\frac{3}{4\times5}\times7 = \frac{3\times7}{4\times5}$; ma 3×7 è il prodotto del numeratore 3 della frazione dividenda per lo denominatore 7 della frazione divisore, e 4×5 è il prodotto del denominatore 4 della frazione dividenda per lo numeratore 5 della frazione divisore, dunque per trovare il quoziente di una frazione divisa per un altra, *noi formo una frazione la quale abbia per numeratore il* *prodotto del numeratore della frazione dividenta per lo denominatore della frazione divisore, e per denominatore il prodotto del denominatore della frazione dividenda per lo numeratore della frazione divisore*

Qui rifletteremo, che dividendo $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{7}$ noi abbiamo trovato il quoziente $\frac{3 \times 7}{4 \times 5}$, e che se da noi si multiplicasse $\frac{3}{4}$ per $\frac{7}{5}$, che è la frazione divisore rovesciata, il prodotto sarebbe anche $\frac{3 \times 7}{4 \times 5}$; Quindi conchiuderemo, che qualora si deve dividere una frazione per un altra *noi dobbiamo multiplicare la frazione dividenda per la frazione divisore rovesciata.*

106. Se si dovesse dividere un intero unito ad una frazione per un intero unito ad una fazione, noi incominceremo dal ridurre le quantità date alle espressioni frazionarie ad esse equivalenti, ed indi sopra di tali espresioni frazionarie opereremo secondo la regola data.

107. Da quel, che abbiamo detto relativamente alla divisione, qualora il divisore è una frazione, ne ricaviamo che essa è una operazione composta da una divisione, e da una multiplicazione, giacchè noi multiplichiamo i dividendo per lo denominatore della frazione divisore, e lo dividiamo per lo nu-

meratore della medesima frazione; ma essendo nelle frazioni vere il denominatore maggiore del numeratore, noi multiplichiamo il dividendo dato per un numero, e lo dividiamo per un numero minore di quello, per cui lo abbiamo multiplicato; dunque il quoziente di un dividendo diviso per una frazione vera è maggiore del dividendo dato, tutto all' opposto di quello che accade qualora il divisore è maggiore della unità. Lo che ci conduce a fare sopra le parole *divisione*, e *dividere* le medesime osservazioni, che abbiamo fatte sopra le parole *multiplicazione*, e *multiplicare*; le parole *divisione*, e *dividere* le quali portano con esse la idea della diminuzione sono state da principio adoperate per indicare le divisioni, nelle quali il divisore è un numero intero; indi estendendo la loro significazione sono state adoperate per indicare le divisioni, nelle quali il divisore è l'unità, o una frazione, in fatti dividendo un numero per un numero maggiore della unità noi lo diminuiamo, dividendolo per la unità esso non si altera, dividendolo per un numero minore della unità esso si aumenta; ma poicchè in tutti li casi il prodotto del divisore per lo quoziente deve riprodurre il dividendo, ne segue che *noi possiamo in tutti li casi considerare il dividendo come un prodotto, di cui il divisore, ed quoziente sono li fattori*, e possiamo considerare *la divisione* *come il metodo per mezzo del quale, qualora sono noti il prodotto ed uno de' fattori di una multiplicazione si determina l' altro fattore.*

Finalmente poichè in tutti li casi della divisione il dividendo è il prodotto del divisore per lo quoziente, ne segue che il quoziente deve essere tale per rapporto al dividendo, quale l' unità è per rapporto al divisore, talmente che possiamo generalmente dire, che *la divisione è quella operazione di calcolo per mezzo della quale essendo dato un dividendo ed un divisore noi componiamo un quoziente il quale abbia al dividendo quel medesimo rapporto, che l'unità ha al divisore.*

108. Da quanto abbiamo detto finora evidentemente ricaviamo I. che le operazioni del calcolo, che noi possiamo fare sopra de' numeri interi si riducono a due sole, cioè alla addizione, ed alla sottrazione ; nel mentre che le frazioni eseguono quattro operazioni essenzialmente differenti, cioè la addizione, la sottrazione, la multiplicazione, e la divisione; e che per conseguenza le frazioni hanno introdotte nel calcolo due nuove operazioni.

2. Che passando dal calcolo de' numeri interi al colcolo delle frazioni, abbiamo dovuto generalizzare le definizioni delle operazioni del calcolo, ed il senso attaccato alle parole.

ARTICOLO III.

Determinazione delle frazioni semplici, dalla multiplicazione delle quali è prodotta una frazione data.

109. Quando abbiamo multiplicate più frazioni, noi abbiamo trovato il prodotto di esse formando una nuova frazione, alla quale abbiamo dato per numeratore il prodotto de' numeratori, e per denominatore il prodotto de' denominatori delle frazioni date; quindi si vede, che qualora da noi si volesse sapere, quali sono le frazioni semplici, dalla multiplicazione delle quali è nata una frazione proposta, noi dobbiamo 1.° *cercare tutti li fattori semplici de' due termini della frazione proposta* 2.° *Indi formare tante frazioni semplici con li fattori primi già trovati de' due termini della frazione proposta, quanti sono li fattori primi di quel termine della proposta, che ha il maggior numero di fattori, rimpiazzando con l' unità tutti li fattori, che si trovano mancanti, nel caso che li due termini non abbiano lo stesso numero di fattori.*

110. Quì avvertiremo, che qualora li termini di una frazione data sono numeri primi, essa è indecomponibile, e perciò la chiameremo *frazione semplice*, e daremo il nome di *frazioni composte*, o *frazioni multiple* a quelle, che sono il prodotto di più frazioni semplici.

ARTICOLO IV.

Estrazione delle radici dalle frazioni.

111. Per terminare la teoria delle frazioni resta solo, che da noi si cerchi il metodo da estrarre da una frazione data la sua radice di un grado dato.

Essendo la operazione della estrazione della radice la inversa di quella per la quale si è trovata la potenza, ne segue, che qualora da una data frazione si vuole estrarre la radice, dobbiamo sopra della frazione data eseguire la operazione inversa di quella, per la quale noi troviamo la potenza di una frazione, ma per avere la potenza di un dato grado di una frazione proposta noi formiamo la frazione, che ha per suoi termini li termini della proposta elevati alla potenza dimandata, dunque, per avere *la radice di una frazione data dobbiamo formare una frazione, la quale abbia per suoi termini le radici del grado dimandato de' respettivi termini della frazione data.*

Così se vogliamo la radice quadrata della frazione $\frac{25}{81}$, essa sarà $\frac{5}{9}$; ed in questo caso la frazione proposta avendo il numeratore, ed il denominatore ambidue quadrati perfetti, noi abbiamo ottenuta la sua radice quadrata esatta. Similmente se avessimo dovuto estrarre la radice cubica della frazione $\frac{64}{216}$, nella quale li due termini sono cubi perfetti, noi avremmo trovato, che la radice cubica esatta della frazione proposta $\frac{64}{216}$ è $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Ma potrebbe darsi il caso, che la frazione proposta non sia la potenza esatta di un altra frazione, ed allora possono darsi tre casi I. Che il numeratore non sia una potenza esatta del grado della radice dimandata II. Che il numeratore essendo potenza esatta il denominatore non lo sia. III. Che ambi due li termini non sieno potenze esatte.

Così se noi dovessimo estrarre la radice quadrata da $\frac{18}{25}$, noi osserveremo, che questa frazione non può essere il quadrato perfetto di un altra frazione; poichè in tale caso ambi li termini della frazione proposta dovrebbero essere quadrati perfetti, quindi noi estrarremo la radice prossima di 18, che è 4, e la radice quadrata esatta del denominatore, che è 5, e diremo che la radice quadrata prossima della frazione data $\frac{18}{25}$ è $\frac{4}{5}$, e dippiù diremo che essa differisce dalla radice quadrata esatta di $\frac{18}{25}$ di una quantità minore di $\frac{1}{5}$. Similmente se ci proponiamo di estrarre la radice cubica della frazione $\frac{32}{64}$, della quale il solo denominatore è un cubo perfetto, noi troveremo, che la radice prossima di essa è $\frac{3}{4}$, e che essa differisce dalla radice cubica esatta della frazione $\frac{32}{64}$ di una quantità minore di $\frac{1}{4}$; di maniera, che qualora soltanto il denominatore di una frazione è una potenza perfetta del grado della radice dimandata, noi troviamo la radice prossima di essa, *trovando la radice massima del grado dimandato contenuta nel numeratore della frazione data, dando ad essa per denominatore la radice del medesimo grado del denominatore della frazione data, conchiudendo che la frazione così trovata è la radice prossima della frazione data, e che essa manca dalla radice esatta della frazione proposta di una quantità minore di una unità frazionaria della specie di quelle, che sono determinate dal denominatore della radice trovata.*

II. Supponiamo ora, che debba estrarsi la radice quadrata della frazione $\frac{16}{38}$, nella quale il solo numeratore sia quadrato perfetto, allora se estraiamo la radice quadrata dalli suoi termini, troveremo, che la radice esatta del numeratore è 4, e che quella del denominatore non può aversi esattamente, quindi trovandola per approssimazione, se noi prendiamo per radice 6, che è la prossima inferiore, diremo che la radice prossima alla vera di $\frac{16}{38}$ è $\frac{4}{6}$, e poichè il denominatore di $\frac{4}{6}$ è minore del denominatore, che dovrebbe avere la radice esatta di $\frac{16}{38}$, conchiuderemo, che la radice trovata $\frac{4}{6}$ è maggiore della radice esatta di $\frac{16}{38}$, ma non potremo estimare quanto sia l'eccesso della radice trovata sopra la vera radice della frazione proposta;

similmente se prendiamo per radice di $\frac{16}{38}$ la frazione $\frac{4}{7}$, conchiuderemo che essa è minore della radice esatta di $\frac{16}{38}$, senza però potere apprezzare quanto sia l' errore, che da noi si commette prendendola per radice della frazione data.

Similmente vedremo, che dandosi lo stesso caso, qualora ci proponiamo di estrarre la radice cubica da una frazione, della quale il solo numeratore è un cubo perfetto, estraendo la radice da ambi li termini di essa, possiamo trovare una radice cubica prossima alla vera della frazione data, la quale disferisca dalla vera o in eccesso, o in indifetto, senza potere però determinare fra quali limiti è compreso l'errore, che da noi si commette.

III. Sia da estrarsi la radice quadrata dalla frazione $\frac{12}{56}$, in cui nissuno de' termini è quadrato perfetto, se prendiamo per tale radice la frazione $\frac{3}{7}$, in cui il numeratore è minore della radice del numeratore 12, ed il denominatore 7 è anche minore della radice del denominatore 56 della proposta, noi abbiamo una frazione, la quale differisce dalla vera radice dimandata, ma in maniera da non potere determinare fra quali limiti è compreso l' errore, che noi commettiamo, giacchè per lo numeratore troppo piccolo facciamo un errore in difetto, e per lo denominatore anche troppo piccolo facciamo un errore in eccesso, e non abbiamo mezzi da vedere fino a quale punto questi errori si compensano, e se la radice trovata è prossima in eccesso, o in difetto, e per conseguenza essa è di nissun uso. Or non potendo in questi due ultimi casi fare alcun uso delle radici prossime trovate, a cagione, che non possiamo estimare quanto sia l'errore, che si commette prendendo per radice della frazione data quella da noi trovata, dobbiamo cercare il metodo da potere, in questi due casi, in cui la radice non si può avere esattamente, trovare la radice prossima alla vera, in maniera da potere estimare l'errore, che da noi si commette, locchè noi conseguiremo trasformando la frazione data in un altra equivalente, ma tale che il denominatore sia una potenza perfetta del grado della radice dimandata.

Quindi se si debba estrarre la radice quadrata dalla frazione $\frac{16}{32}$, multiplicando ambi li termini di essa per 32, avremo $\frac{16}{32}=\frac{16\times32}{32\times32}$, e la radice di $\frac{16}{32}$ equivalerà alla radice di $\frac{16\times32}{32\times32}$, or egli è evidente, che la frazione $\frac{16\times32}{32\times32}$ avendo il denominatore, il quale è il quadrato di 32, se noi estraiamo la radice quadrata dalli suoi termini, troveremo una frazione, la quale ha per denominatore 32, e per conseguenza avremo la radice della frazione data, la quale sarà minore della radice vera di una quantità minore di $\frac{1}{32}$.

Se si dimandasse la radice quadrata di $\frac{8}{42}$, della quale li due termini non sono quadrati perfetti, allora multiplicando sì il numeratore che il denominatore per 42, avremo la frazione $\frac{8 \times 42}{42 \times 42}$, nella quale il denominatore è un quadrato perfetto, ed estraendo da' suoi termini la radice quadrata, avremo la sua radice prossima espressa da una frazione, in cui il denominatore è esattamente 42, e diremo che la radice quadrata trovata è la radice prossima di $\frac{8}{42}$, e differisce dalla radice esatta di una quantità minore di $\frac{1}{42}$.

Supponiamo ora che si dimandi la radice cubica di $\frac{27}{130}$, frazione in cui il solo numeratore è un cubo perfetto; noi vediamo in conseguenza di un raziocinio simile a quello, che abbiamo fatto nello stesso caso relativamente alla radice quadrata, che estraendo la radice cubica esatta dal numeratore, e la prossima sia in eccesso, sia in difetto dal denominatore, la frazione che ne risulta, dà una radice inesatta tale, che da noi non può essere apprezzato l' errore che si commette, e perciò di nissun uso; quindi conosciamo la necessità di trasformare la frazione data $\frac{27}{130}$ in un altra equivalente, la quale abbia il denominatore, che sia un cubo perfetto, locchè otterremo multiplicando ambi li termini della frazione data per lo quadrato del suo denominatore, ed avremo $\frac{27}{130} = \frac{27 \times 130 \times 130}{130 \times 130 \times 130}$ ed estraendo dalla frazione trovata la radice cubica, avremo una frazione, la quale avrà per denominatore 130, e conchiuderemo, che la radice cubica trovata, non solo è la radice cubica prossima della frazione data, ma ancora che essa differisce dalla radice esatta di una quantità minore di $\frac{1}{130}$.

Similmente ragionando, noi vedremo, che la radice cubica prossima alla vera della frazione $\frac{32}{78}$, si troverà trasformando la frazione data $\frac{32}{78}$ in $\frac{32 \times 78 \times 78}{78 \times 78 \times 78}$, ed estraendo da essa la radice cubica prossima alla vera, la quale sarà espressa da una frazione, che ha per denominatore 78, e ci indichera che essa manca dalla radice vera della frazione data di una quantità minore di $\frac{1}{78}$.

Estendendo il medesimo raziocinio alla estrazione della radice di qualunque grado da una frazione, ricaveremo in generale. I. *che qualora la frazione ha li suoi due termini ambi due potenze perfette del grado della* *radice dimandata ; noi avremo la radice dimandata esatta della frazione data facendo una frazione , la quale abbia per suoi termini le radici del grado dimandato de' respettivi termini della proposta.* II.° *Che qualora il solo denominatore è potenza perfetta del grado della radice dimandatata, allora avremo la radice cercata della frazione data, facendo una frazione , della quale il numeratore sia la radice prossima del grado dimandato del numeratore della frazione data , ed il denominatore la radice del medesimo grado del denominatore di essa , e questa radice sarà la radice prossima alla vera della frazione proposta , che sarà minore della radice esatta di una quantita minore di una unità frazionaria , la quale sarà denominata dal denominatore della medesima radice.* III.° *Che qualora o il solo denominatore della frazione proposta, o ambi li suoi termini non sono potenza perfetta del grado della radice dimandata, allora si multiplichino ambi li termini della frazione proposta per la potenza del denominatore , il grado della quale sia quello della radice dimandata diminuito di una unità , indi si formi una frazione la quale abbia per numeratore la radice prossima del numeratore della nuova frazione, e per denominatore il denominatore medesimo della frazione proposta ; e questa frazione sarà* *la radice prossima della frazione data, ed essa differirà dalla radice esatta di una quantità minore di una unità frazionaria denominata dal denominatore della proposta.*

113. Qualora si debba estrarre una radice da una quantità composta da un intero e da una frazione, dopo di averla ridotta in espression frazionaria, si estrarrà da essa la radice dimandata, secondo li metodi dati per la estrazione delle radici dalle frazioni.

114. Noi qui osserveremo, che essendo una radice un fattore, che multiplicato per se medesimo produce una potenza, le radici delle frazioni vere *saranno sempre maggiori delle potenze, ed esse le sorpassano tanto più, quanto più alto è il loro grado, e quanto più il denominatore eccede il suo numeratore.*

CAP. IV.

Teoria de' Decimali.

Nozioni preliminari.

115. La difficoltà, che si incontra nella calcolazione delle frazioni ha fatto conoscere la necessità di sottomettere le suddivisioni della unità ad una legge costante di decrescenza, legge la quale si ricava facilmente dal metodo, col quale si scrivono con cifre li numeri interi. In fatti noi sappiamo, che le cifre

per mezzo delle quali noi scriviamo un numero intero esprimono unità decuple le une delle altre, secondocchè avvanziamo dalla destra verso la sinistra, e per conseguenza che esse esprimono quantità suddecuple le une delle altre a misura, che dalla sinistra ritorniamo verso la destra; dal che conchiudiamo, che se noi scriviamo una cifra a destra di quella delle unità semplici, essa esprimerà unità suddecuple della unità principale, ossia parti decime di essa, la cifra, che scriveremo a destra di quella, che esprime le parti decime, rappresenterà parti decime delle decime, ossia centesime della unità, quella posta alla destra della cifra delle centesime rappresenterà parti decime delle centesime, ossia le millesime della unità, e così procedendo innanzi; locchè ci dà il mezzo da scrivere sotto la forma de' numeri interi, cioè senza denominatori, le frazioni della unità, che hanno per denominatori li numeri 10, 100, 1000 ec., cioè le frazioni, che hanno li denominatori formati dalla unità seguita da uno o da più zeri, le quali disegnano parti suddecuple della unità, e che noi chiameremo *frazioni decimali*, o semplicemente *decimali*.

116. Da quanto abbiamo detto possiamo conchiudere, che esse saranno più facili a combinarsi, e noi renderemo molto più semplici li calcoli, se giugneremo a trovare il metodo da ridurre qualunque frazione alla for-

ma delle frazioni decimali, quindi noi ci occuperemo di esse cercando di scoprire le proprietà, che le caratterizzano, ricavandole dalle proprietà delle frazioni ordinarie, le quali appartengono generalmente a qualunque sorta di frazioni.

117. Supponiamo in primo luogo che sia data la frazione $\frac{689}{1000}$, la quale è una frazione decimale scritta sotto la forma delle frazioni ordinarie, e proponiamoci di scovrire il metodo da scriverla sotto la forma decimale; egli è evidente che essa può essere scomposta nelle tre frazioni parziali $\frac{600}{1000}$, $\frac{80}{1000}$, $\frac{9}{1000}$, e che per conseguenza essa equivalerà a $\frac{600}{1000}+\frac{80}{1000}+\frac{9}{1000}$; e supprimendo li zeri comuni alli due termini di esse, sarà $\frac{689}{1000}=\frac{6}{10}+\frac{8}{100}+\frac{9}{1000}$; ma noi sappiamo, che secondo la legge della numerazione una cifra posta alla destra di una altra esprime unità suddecuple, quindi ne segue, che la cifra *6* indicherebbe parti decime della unità, se si scrivesse a destra del posto assegnato alla cifra delle unità semplici, e poicchè in questo caso noi non abbiamo unità semplici, noi scriveremo un zero per occuparne il luogo, ed a destra del zero scriveremo la cifra *6*, e la separeremo dal zero per mezzo di una virgola, a fine di distinguere la parte intera del numero dalla parte frazionaria, e noi avremo $0,7=\frac{7}{10}$; similmente designando la cifra 8 parti centesime della uni-

tà, ossia parti 10 volte minori delle decime dovrà essere scritta a destra della cifra 7, ed avremo 0, $78 = \frac{7}{10} + \frac{8}{100}$, e finalmente la cifra 9, che disegna parti millesime della unità, ossia parti decime delle centesime, dovrà essere scritta a destra della cifra 8 delle centesime, ed avremo 0, $789 = \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{9}{1000}$ ma noi abbiamo veduto, che la frazione data $\frac{789}{1000} = \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{9}{1000}$, dunque $\frac{789}{1000} = 0, 789$.

Similmente se si volesse scrivere sotto la forma decimale la frazione $\frac{6587}{100}$, noi la scomporremo nelle frazioni parziali $\frac{6000}{100}$, $\frac{500}{100}$, $\frac{80}{100}$, $\frac{7}{100}$, e supprimendo li zeri comuni alli due termini di esse, noi troveremo, che la frazione data $\frac{6587}{100} = \frac{60}{1} + \frac{5}{1} + \frac{8}{10} + \frac{7}{100}$, e ragionando come abbiamo fatto nel caso precendente, noi troveremo che $\frac{6587}{100} = 65, 87$.

Proponiamoci in ultimo luogo di scrivere sotto la forma decimale la frazione $\frac{75}{1000}$, ragionando come ne' casi precedenti, noi troveremo, che $\frac{75}{1000} = \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{0}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}$, e per conseguenza essa equivale a 0, 075.

Osservando la maniera, come abbiamo operato per iscrivere sotto la forma di un numero intero una frazione decimale scritta sotto la forma di frazione ordinaria, noi vediamo, che noi abbiamo scritto il suo numeratore, e da esso abbiamo separate per mezzo di una virgola tante cifre alla destra, quanti sono li zeri del denominatore, dal che ris caviamo la seguente regola generale.

Qualora si deve scrivere una frazione decimale sotto la forma di un numero intero, *si scriva il suo numeratore, e da esso si separino per mezzo di una virgola tante cifre a destra, quante ne indica il numero de' zeri del denominatore, badando a scrivere de' zeri a sinistra delle cifre significative nel luogo delle cifre mancanti, se per caso tale numeratore avesse un numero di cifre minore di quello delli zeri del denominatore.*

116. Proponiamoci ora la quistione inversa, cioè data una frazione decimale scritta sotto la forma di numero intero, scriverla sotto la forma di frazione ordinarià. Supponiamo, che il numero decimale 9, 0748 si debba scrivere sotto la forma di frazione ordinaria. Poichè secondo la legge della numerazione qualunque cifra disegna sempre unità suddeculpe di quelle, che indica la cifra che la precede a sinistra, la cifra 7 disegnerà unità 100 volte minori di quelle che disegna la cifra 9, che la precede di due posti a sinistra, ma la cifra 9 disegna le unità, dunque la cifra 7 disegnerà parti centesime di essa, e perciò essa sarà espressa da $\frac{7}{100}$, collo stesso raziocinio noi vediamo, che le cifre 4, 8 disegnano respettivamente parti millesime, e diecimillesime della unità, e che per conseguenza sono espresse dalle frazioni $\frac{4}{1000}$, $\frac{8}{10000}$; dunque il numero decimale 9, $0748 = 9 + \frac{7}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{8}{10000}$, e riducendo ad

unità della minima specie, sarà $9,0748=\frac{90000}{10000}$ $+\frac{700}{10000}+\frac{40}{10000}+\frac{8}{10000}=\frac{90748}{10000}=9+\frac{748}{10000}$. Dal che ricaveremo, che per ridurre a forma di frazione ordinaria un numero decimale scritto sotto la forma di numero intero, noi lo *scriveremo senza fare attenzione alla virgola, e daremo ad esso per denominatore l' unità seguita da tanti zeri, quanti ne indica il numero delle cifre, che sono alla destra della virgola, oppure scriveremo l' intero, e ad esso aggiugneremo la parte decimale, alla quale daremo per denominatore la unità seguita da tanti zeri quanti ne indica il numero delle cifre, che sono alla destra della virgola.*

119. Le cose fin quì dette ci fanno conoscere la maniera, che dobbiamo tenere per enunciare un decimale scritto alla maniera di un numero intero; in fatti per enunciare un decimale, noi dobbiamo enunciare il numeratore ed il denominatore della espressione frazionaria, alla quale si riduce il numero decimale dato, quindi noi vediamo, che dobbiamo metterlo sotto forma di espressione frazionaria, e perciò stabiliremo la seguente regola generale, qualora noi vogliamo enunciare un numero decimale, si *enunci come numero intero facendo astrazione della virgola, indi per fare conoscere la specie delle sue unità decimali, si enunci il suo denominatore, il quale è sempre l' unità seguita*

da tanti zeri, quanti ne indica il numero delle, cifre che sono alla destra della virgola; oppure si enuncj la sua parte intera aggiungnendovi la parola unità, e di poi la parte decimale come abbiamo detto.

Essendo $3+\frac{45}{100}=3+\frac{450}{1000}=3+\frac{4500}{10000}$ ec. ne segue che *non si altera il valore di un decimale, qualora alla sua destra si scriva un numero qualunque di zeri, come similmente, se esso è terminato alla sua destra da zeri, si possono sì fatti zeri supprimere senza che il suo valore sia alterato.*

120. Sia il numero decimale 38, 748, ed in esso si avanzi la virgola di un posto verso la destra, allora avremo il decimale 387, 48, nel quale la cifra 3 che occupava il posto delle decine, occupa quello delle centinaja, la cifra 8 che occupava il posto delle unità, occupa quello delle decine, la cifra 7 che occupava il posto delle parti decime, occupa quello delle unità, la cifra 4 che occupava il luogo delle parti centesime, occupa quello delle parti decime, e la cifra 8 che occupava il posto delle parti millesime, occupa quello delle parti centesime, quindi ciascheduna delle parti del numero decimale dato ha acquistato un valore decuplo, e perciò tutto il numero decimale dato è stato multiplicato per 10; Similmente si dimostra, che qualora la virgola si avanza di due posti verso la destra, il decimale è multiplicato per 100,

che qualora essa si avvanza di tre posti, il decimale è multiplicato per 1000, e così procedendo avanti. Dal che generalmente conchiudiamo, che qualora *in un numero decimale si avanza la virgola di uno, due, tre etc. posti verso la destra*, *esso è multiplicato per* 10, *per* 100, *per* 1000 *etc.*

121. Quindi se noi ci proponiamo di multiplicare un numero decimale per un numero composto dalla unità seguita a destra da uno, o più zeri, *noi avanzeremo la virgola di tanti passi verso la destra del multiplicando, quanti ne indica il numero de' zeri del multiplicatore*, *e se si dasse il caso, che nel multiplicando il numero delle cifre, che sono alla destra della virgola, sia minore del numero de' zeri del multiplicatore, allora prima aggiugneremo de' zeri alla destra del multiplicando, indi avanzeremo la virgola secondo la regola data.*

Così se noi ci proponiamo di multiplicare 36, 48 per 10000, noi incominceremo dallo aggiugnere due zeri alla destra del multiplicando, ed avremo 36, 48 = 36, 4800, indi nel numero 36, 4800 avanzeremo la virgola di quattro passi verso la destra, ed avremo 364800=36, 48×10000.

122. Ragionando della medesima maniera vedremo, che qualora si trasporta la virgola verso la sinistra di un decimale,

esso si trova diviso per 10, 100, 1000 etc., secondo che la virgola avrà fatto uno, due, tre, etc. passi verso la sinistra; dal che conchiudiamo generalmente, che qualora in *un decimale trasportiamo la virgola verso la sinistra, il decimale sarà diviso per* 10, 100, 1000 *etc. secondo che la virgola avrà fatto uno, due, tre etc. passi.*

123. Quindi se noi ci proponiamo di dividere un decimale per la unità seguita alla destra da uno, o più zeri, *basterà trasportare la virgola verso la sinistra, facendo ad essa fare tanti passi, quanti ne indica il numero delli zeri del divisore, e che se nel dividendo il numero delle cifre, che sono alla sinistra della virgola è minore del numero de' zeri del divisore, allora prima aggiugneremo de' zeri alla sinistra del dividendo dato, indi porteremo la virgola dalla destra verso la sinistra, facendo ad essa dare tanti passi, quanti ne indica il numero de' zeri del divisore.*

Così se ci proponiamo di dividere per 1000 il numero decimale 3, 74, noi incominceremo dallo aggiugnere due zeri alla sinistra di 3, 74, ed avremo 3, 74=003, 74, indi osservando, che il divisore 1000 ha tre zeri, avanzeremo la virgola di tre posti verso la sinistra, ed avremo 0, 00374 per lo quoziente di 3, 74 diviso per 1000.