CAP. X.

Maniera da ridurre in serie infinita il quoziente di una divisione, la quale non può essere esattamente eseguita.

105. Noi abbiamo veduto, che qualora una divisione è stata condotta fino a quel punto, in cui la lettera per rapporto alla quale sono stati ordinati il dividendo, ed il divisore, si trova avere nel residuo dividendo un esponente minore di quello, che essa ha nel divisore, la divisione non si fa procedere più oltre, e per completare il quoziente non si fa altro se non se indicare questo complemento aggiugnendo al quoziente trovato la frazione, che ha per numeratore il residuo dividendo, e per denominatore il divisore. Nulladimeno di questo residuo si può intraprendere la divisione secondo le regole date, e proseguirla tanto oltre quanto a noi piacerà. Avremo, ciò facendo, una infinita serie di termini, la quale godendo peculiari proprietà, ci mena ad importanti conseguenze.

Così se questo complemento è $\frac{p}{m+n}$, dividendo secondo le regole date p per $m+n$, si ha per primo quoziente $\frac{p}{m}$, indi multiplicando questo quoziente per lo divisore, e sottraendo il prodotto dal dividendo, si trova per residuo $\frac{-np}{m}$; divido questo residuo per lo primo termine del divisore, ed ottengo il secondo termine del quoziente $\frac{-np}{m^2}$, di poi multiplico questo termine del quoziente per lo divisore, e sottraendo questo prodotto dal residuo dividendo, trovo per secondo residuo dividendo $\frac{n^2p}{m^2}$, il quale diviso per lo primo termine del divisore dà il quoziente $\frac{n^2p}{m^3}$, che è il terzo termine del quoziente; e così procedendo avanti, noi otterremo sempre nuovi termini al quoziente, la divisione non terminerà mai, ed avremo

$$\frac{p}{m+n} = \frac{p}{m} - \frac{np}{m^2} + \frac{n^2p}{m^3} - \frac{n^3p}{m^4} + \frac{n^4p}{m^5} \text{ ec.}$$

e poichè $\frac{p}{m}$ è fattore comune di tutti li termini del quoziente, noi potremo mettere

$$\frac{p}{m+n}=\frac{p}{m}\left(1-\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}-\frac{n^3}{m^3}+\frac{n^4}{m^4}-\text{ec.}\right)$$

Se in vece di $\frac{p}{m+n}$ si scrivesse $\frac{p}{n+m}$, la divisione ci darebbe

$$\frac{p}{m+n}=\frac{p}{n}\left(1-\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}-\frac{m^3}{n^3}+\frac{m^4}{n^4}-\text{ec.}\right)$$

Dal che ricaviamo, che la medesima frazione $\frac{p}{m+n}$ per mezzo della divisione può essere sviluppata all' infinito per due differenti maniere. Quando queste risultanti espressioni, che si concepiscono continuate all' infinito, si vogliono terminare prendendone un certo numero di termini, bisogna sempre aggiugnervi la frazione corrispondente, la quale ha per numeratore l' ultimo residuo, e per denominatore il divisore, affinchè le eguaglianze superiormente notate si verifichino; quindi arrestandoci al quinto termine del quoziente, avremo

$$1.^{\circ} \text{ -- } \frac{p}{m+n} = \frac{p}{m}\left(1 - \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2} - \frac{n^3}{m^3} + \frac{n^4}{m^4} - \frac{\left(\frac{n^5}{m^4}\right)}{m+n}\right.$$

$$2.^{\circ} \text{ -- } \frac{p}{m+n} = \frac{p}{n}\left(1 - \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2} - \frac{m^3}{n^3} + \frac{m^4}{n^4} - \frac{\left(\frac{m^5}{n^4}\right)}{m+n}\right.$$

Tutte le espressioni, le quali sono composte da un aggregato di termini, li quali crescono, o decrescono secondo qualunque legge manifesta, hanno ricevuto il nome di *serie*. Quelle serie, che hanno un numero finito di termini si chiamano *serie finite*, come sarebbe la serie, che nasce dallo sviluppo della frazione $\frac{x^m-a^m}{x-a}$; quelle poi, che sono composte da un numero infinito di termini, come sono le precedenti, si dicono *serie infinite*, e queste si distinguono in *convergenti*, *divergenti*, e *parallele*. Chiamiamo serie convergenti quelle, nelle quali li termini vanno successivamente diminuendo di valore, divergenti quelle nelle quali vanno aumentando, e parallele quelle in cui son tutti di eguale valore; Così la serie 1. sarà convergente se $m>n$, e sarà divergente quando $m<n$; nella seconda poi accaderà tutto il contrario: essa sarà

convergente quando $m<n$, e divergente quando $m>n$; e ambedue saranno parallele quando $m=n$. In fatti nella serie prima, facendo astrazione dalli segni, supponendo $m>n$, è evidente che il secondo termine $\frac{n}{m}$ è una frazione vera, e perciò è minore del primo termine, il quale è l' unità; il terzo termine $\frac{n^2}{m^2}$ è minore del precedende, e così procedendo avanti. Tutto il contrario accade nella serie seconda, nella quale essendo $m>n$, il secondo termine $\frac{m}{n}$ è una espressione frazionaria, e perciò maggiore della unità, , quindi del primo termine della serie e che è $=1$; ma da noi si è dimostrato, che le espressioni frazionarie qualora si elevano a potenza vanno sempre crescendo quando il grado della potenza si accresce, quindi

$$\frac{m^3}{n^3} > \frac{m^2}{n^2}; \quad \frac{m^4}{n^4} > \frac{m^3}{n^3} \text{ ec.},$$

dunque in questo caso la serie è divergente.

Le serie convergono, o divergono tanto più o meno rapidamente quanto maggiore o minore è la differenza che passa tra li successivi termini di esse, e perciò quanto più una serie sarà convergente tanto minore numero de' suoi termini sarà necessario per rappresentare il valore approssimativo della frazione, che le ha data origine. Le serie convergenti sono utilissime qualora dobbiamo determinare un valore, che non si può determinare per altra via, nel mentre le serie divergenti e parallele non sono di alcuna utilità.

Per dare a questa teoria un maggiore rischiarimento, noi ne faremo l' applicazione a varj casi particolari; ed in primo luogo, proponiamoci di ridurre in serie infinita la espressione $\frac{1}{1-a}$. Incominciamo dal fare la divisione di 1 per $1-a$, noi avremo per primo quoziente 1, e per residuo a, e conchiudiamo che il quoziente completo è $1+\frac{a}{1-a}$; ma eseguendo la divisione di a per $1-a$, noi troviamo $\frac{a}{1-a}=a+\frac{a^2}{1-a}$, ed eseguendo la divisione di a^2 per $1-a$, trovasi per quoziente $a^2+\frac{a^3}{1-a}$; similmente operando avremo $\frac{a^3}{1-a}=a^3+\frac{a^4}{1-a}$, ec.;

Dal che conchiudiamo, che la frazione $\frac{1}{1-a}$

può essere posta sotto le forme $1+\frac{a}{1-a}$, $1+a+\frac{a^2}{1-a}$, $1+a+a^2+\frac{a^3}{1-a}$ ec., le quali sono tali, che facendo le necessarie riduzioni, sempre riproducono la frazione proposta $\frac{1}{1-a}$; dal che conchiudiamo, che il valore della frazione data è sempre composto da una parte intera e da un' altra frazionaria, e che la parte intera è la somma delle potenze successive di a, incominciando dallo esponente zero, cioè da $a^0=1$, e da una frazione la quale ha sempre per denominatore $1-a$, ed ha per numeretore la lettera a con un esponente il quale supera di una unità lo esponente che la lettera a tiene nell'ultimo termine della parte intera; quindi essendo a noi nota questa legge dello sviluppo della frazione $\frac{1}{1-a}$, noi metteremo questo sviluppo sotto la forma $\frac{1}{1-a}=$ $a^0+a^1+a^2+a^3+\text{-----}+a^n+\frac{a^{n+1}}{1-a}$. Infatti mettendo $n=3$, il termine a^n sarebbe il quarto termine della serie, cioè a^3, mettendo $n=4$, a^n sarebbe il quinto termine della serie, ovvero a^4, e così procedendo avanti

Supponiamo in primo luogo che sia $a=1$, ed in questo caso il valore dello sviluppo precedente diviene

$$\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=1+1+1+1+\cdots+\text{ec.};$$

ma noi abbiamo dimostrato in aritmetica, che $\frac{1}{0}$, indica il limite dello accrescimento, che può ricevere il quoziente di una divisione, che noi sogliamo indicare col segno ∞; quindi questo sviluppo deve essere eguale all' infinito; ed in fatti questo sviluppo avendo ciascuno delli suoi termini eguale alla unità, ed essendo il numero de'suoi termini infinito, esso sarà eguale allo infinito.

Nella medesima frazione mettiamo $a=2$, avremo

$$\frac{1}{1-2}=-1=1+2+4+8+16+32+\cdots+\text{ec.}$$

risultato il quale a prima vista sembra assurdo, ma non sarà così se, arrestandoci ad un determinato numero di termini, alla somma di essi aggiungiamo il corrispondente termine frazionario. Così se supponiamo, che ci arrestiamo al termine sesto cioè a 32, noi avremo

$$\frac{1}{1-2}=1+2+4+8+16+32+\frac{64}{-1}=$$

$63-64=-1$, e quì generalmente osserveremo, che qualunque sia il termine, al quale ci arrestiamo, aggiungnendo la parte frazionaria, la quale è sempre negativa, e negativamente supera la parte positiva di una unità, e che per conseguenza il risultato è sempre $=-1$

Passiamo ora a vedere quello, che accade qualora ad a si da un valore maggiore del zero e minore dell'unità, e per esempio mettiamo $a=\frac{1}{2}$; avremo $\frac{a}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=$

$2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$ ec.; or se di questa serie si prendono li soli due primi termini, la somma sarà $1+\frac{1}{2}$, la quale differisce da 2 per $\frac{1}{2}$; se si prendono li tre primi termini, la somma sarà $1+\frac{3}{4}$, la quale differisce da 2 soltanto di $\frac{1}{4}$; e così procedendo avanti, chiaramente vediamo, che a proporzione, che noi addizioniamo un numero maggiore di termini, la differenza tra il valore della serie, e la somma de' termini, che si sono addizionati, continuamente diminuisce, e può divenire minore di qualsivoglia quantità assegnabile per quanto piccola essa sia, e conchiudiamo, che 2 è il limite della somma delli termini della serie.

Supponiamo $a = \frac{1}{3}$; avremo $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots +$ ec. Se di questa serie si addizionassero li due primi termini, avremmo $1 + \frac{1}{3}$, che differisce dal vero quoziente per $\frac{1}{6}$; la somma delli tre primi termini differisce dal vero quoziente per $\frac{1}{18}$; prendendo la somma delli quattro primi termini lo errore è di $\frac{1}{54}$ e così procedendo avanti, noi osserviamo, che lo errore diviene sempre $\frac{1}{3}$ dello errore precedente, e perciò esso continuamente si approssima a divenire zero, dal che conchiudiamo, che la somma delli termini tendendo sempre a divenire eguale a $\frac{3}{2}$, il limite della somma della serie è $\frac{3}{2}$

Supponiamo $a = \frac{2}{3}$, avremo $\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \cdots + \text{ec.}$, serie tale, che se di essa si addizionano li due primi termini $1 + \frac{2}{3}$ troviamo, che la somma differisce dal vero valore 3 per $1 + \frac{1}{3}$; addizionando tre termini la differenza è $\frac{16}{27}$, ec.

Supponiamo finalmente $a = \frac{1}{4}$, avremo $\frac{1}{a-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} \cdots + \text{ec.}$, nella quale prendendo soltanto tre termini per la serie intera, noi troviamo, che lo errore è soltanto di $\frac{1}{48}$

Dal che generalmente conchiudiamo, che qualora nella frazione $\frac{1}{1-a}$ noi sostituiamo ad a un valore maggiore del zero, e minore della unità 1. tutti li termini della serie incominciando dal primo vanno continuamente decrescendo in modo che il primo termine, è il massimo, che il secondo è maggiore di ciascuno delli termini seguenti, e così in appresso. 2. Che qualora li termini decrescono rapidamente, la somma di un piccolo numero di termini differisce dalla somma totale di una quantità piccolissima; dal che ricaviamo che se da noi si conosce soltanto la serie, noi possiamo accostarci al valore della frazione, che le ha data la origine, tanto quanto bisogna per lo stato della quistione, e che perciò ad esse abbiamo dato il nome di *serie convergenti*, poichè esse hanno la proprietà di dare con la addizione delli primi termini di esse un valore molto approssimante alla intera serie, il quale non si potrebbe trovare.

Seguendo il metodo tenuto per ridurre in serie infinita la frazione $\frac{1}{1-a}$, noi potremo ridurre in serie infinita anche la frazione $\frac{1}{1+a}$, e troveremo $\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+\text{----}+$ ec. indefinitamente.

Supponendo $a=1$, avremo $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+\text{---}$ ec.. Questa serie mostra una contradizione apparente, poichè se addizioniamo li soli due primi termini avremo zero per risultato, e se addizioniamo tre termini, il risultato è $+1$, ma questa precisamente è la cosa sopra della quale dobbiamo fare attenzione, giacchè dovendosi da noi prendere un numero indefinito di termini, non possiamo arrestarci piuttosto al termine $+1$, che al -1; dal che ricaviamo, che il valore della serie non può essere zero, nè $+1$, ma deve essere una quantità intermedia tra zero ed 1, cioè $\frac{1}{2}$; il che ci ha condotti ad osservare, che se alla somma delli termini, che addizioniamo, si aggiugne la parte frazionaria, si ritrova il medesimo risultato; così se ci arrestiamo al termine quinto, avremo

$$\frac{1}{1+1}=1-1+1-1+1-\frac{1}{1-1}=+\frac{1}{2},$$

e se ci arrestiamo al termine sesto, avremo

$$\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Supponiamo $a = \frac{1}{2}$ avremo $\frac{1}{1+a} =$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$- \frac{1}{32} + \text{ec.}$$

nella quale serie se addizioniamo li due primi termini, troviamo $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, valore che è minore del vero $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{6}$; se addizioniamo li tre primi termini, avremo la somma $\frac{3}{4}$, la quale è maggiore del vero valore $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{12}$; addizionando li quattro primi termini, avremo la somma $\frac{5}{3}$, la quale è minore del vero valore $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{24}$, e così procedendo avanti ; quindi conchiudiamo, che le porzioni successive della serie, sono alternativamente una minore l'altra maggiore del valore $\frac{2}{3}$ della intera serie, e che le differenze, che passano tra asse e la intera serie vanno continuamente diminuendo tanto in eccesso quanto in difetto.

Noi possiamo ridurre la medesima frazione $\frac{1}{1+a}$ in una serie differente dalla precedente dividendo 1 per $a+1$; la quale frazione, dando ad a delli valori particolari, in alcuni casi può cambiare la serie da divergente in convergente.

Riducendo secondo il metodo medesimo in serie infinita la frazione $\frac{a}{x-b}$, avremo

$$\frac{a}{x-b} = \frac{a}{x} + \frac{ab}{x^2} + \frac{ab^2}{x^3} + \frac{ab^3}{x^4} + \text{ec.}$$

Se nella frazione $\frac{a}{x-b}$, noi mettiamo $a=mb$, avremo $\frac{a}{x-b} = \frac{mb}{x-b} =$,

$$m\left(\frac{b}{x-b}\right) = m\left(\frac{b}{x} + \frac{b^2}{x^2} + \frac{b^3}{x^3} + \right.$$
$$\left.\frac{b^4}{x^4} + \text{ec.}\right)$$

Prima di lasciare questa materia stimo essere utile di aggiugnere alcuni esempj per esercizio degli studenti.

Esempio 1. Proponiamoci di ridurre in serie infinita la frazione $\frac{3ab^2}{2c-4d}$; Si mettano $3ab^2=p$, $2c=m$, $-4d=n$, indi si sostituiscano questi valori nello sviluppo di $\frac{p}{m+n}$,

avremo $\frac{3ab^2}{2c-4d}=\frac{3ab^2}{2c}\left(1+\frac{4d}{2c}+\frac{16d^2}{4c^2}+\frac{64d^3}{8c^3}\right.$

$\left.+\frac{256d^4}{16c^4}+\text{etc.}\right)$, e riducendo li termini alla minima espressione, ed aggiugnendovi la parte frazionaria, si ha $\frac{3ab^2}{2c-4d}=$

$$\frac{3ab^2}{2c}\left(1+\frac{2d}{c}+\frac{4d^2}{c^2}+\frac{8d^3}{c^3}+\frac{16d^4}{c^4}\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{64d^5}{c^4}}{2c-4d}\right)$$; osservando in questo sviluppo co-

me un termine deriva dal termine, che lo precede, noi vediamo che ciascuno di essi nasce dal precedente multiplicato per la frazione $\frac{2d}{c}$; quindi essendosi conosciuta questa legge di derivazione, noi possiamo per mezzo della semplice multiplicazione sviluppare qualunque frazione in serie infinita.

Esem. 2. Proponiamoci di sviluppare in serie infinita la frazione $\frac{3}{11}$. Si metta $p=3$, il denominatore 11 si concepisca diviso in $10+1$,

e si metta $m=10$, $n=1$, $\frac{p}{m+n}=\frac{3}{10+1}$; ed

avremo $\frac{3}{10+1}=\frac{3}{10}\left(1-\frac{1}{10}+\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}\right.$

$$\left.+\frac{1}{10000}-\frac{\frac{1}{10000}}{11}\right)$$

Esempio 3. Lo sviluppo in serie infinita della frazione $\frac{mb}{x-b}$ è sommamente comodo per ridurre in frazione decimale una frazione ordinaria, nella quale il denominatore manca da 10, 100, 1000 etc. per una quantità molto piccola.

Proponiamoci di ridurre in frazione decimale la frazione ordinaria $\frac{56}{9993}$, e che si voglia la approssimazione fino a sette cifre decimali.

Si metta il denominatore $9993=10000-7$; ed il numeratore $56=8\times7$, indi nello sviluppo della frazione $\frac{mb}{x-b}$ si sostituiscano 8 in vece di m, 7 in vece di b, e 10000 in vece di x; ed avremo $\frac{56}{9993}=\frac{8\times7}{10000-7}$

$=8(0,0007+(0,0007)^2+(0,0007)^3+$ etc.
$=8(0,0007+0,00000049)+$etc.; delli quali due termini la somma è 0,00070049, la quale multiplicata per 8 dà 0,0056039 2, processo molto più semplice di quello, che avremmo dovuto adoperare seguendo le regole date nella aritmetica.

Adoperando lo stesso sviluppo potremo ridurre la frazione ordinaria $\frac{46}{991}$, mettendo questa frazione sotto la forma $\frac{\frac{16}{3}\times 9}{1\ 000-9}$, e sostituendo nello sviluppo della frazione $\frac{mb}{x-b}$ invece di m la frazione $\frac{16}{3}$, il numero 9 in vece di b, e 1000 in vece di x.

CAP. XI.

Delle progressioni.

106. Diamo il nome di *Progressione* ad una serie di termini, li quali sono tali, che il rapporto di ciascuno di essi a quello, che lo precede è costante, ed in specialità si dice *progressione aritmetica*, o *progressione per differenze* quella, nella quale la differenza delli due termini consecutivi è costante; e la progressione nella quale il quoziente, che si ha dividendo qualunque termine per quello,

che lo precede è costante, si dice *progressione geometrica*, o *progressione per quozienti*. Dippiù nella progressione per differenze si dice *ragione della progressione* la differenza costante, che hanno fra essi li termini consecutivi, e nella progressione per quozienti si chiama *ragione della progressione* il quoziente costante, che si ha dividendo qualunque termine di essa per quello, che lo precede. Nelle due specie di progressioni chiamiamo *crescenti* quelle, nelle quali li termini vanno divenendo continuamente più grandi, e *decrescenti* quelle, nelle quali li termini vanno divenendo continuamente minori.

Così la progressione aritmetica 1, 4, 7, 10, 13, etc. è crescente, e la sua ragione è 3; la progressione geometrica 64, 16, 4, 1, $\frac{1}{4}$, etc. è decrescente, e poichè ciascuno delli suoi termini è $\frac{1}{4}$ di quello, che lo precede, la ragione di essa è $\frac{1}{4}$.

Articolo I.

Delle progressioni per differenze.

107. Se con a, b, c, d, e, etc. disegniamo li termini successivi di una progressione per differenze, noi la scriveremo $\div\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ d\ .\ e\ .$ etc. e la enuncieremo dicendo a sta a b come b sta a c come c sta a d come d sta ad e etc., ed essa equivale ad una serie di equidifferenze continue, nelle quali ciascuno delli termini serve da antecedente, e da conseguente, eccettuati li termini primo ed'ultimo, poichè il primo serve soltanto da antecedente e l'ultimo serve soltanto da conseguente.

108. Supponiamo una progressione per differenze, e se essa è crescente, la sua ragione si disegni con r, se poi è decrescente la sua ragione si disegni con $-r$. Noi dimostreremo le proprietà, le quali appartengono alle progressioni crescenti, poichè esse saranno le medesime per le decrescenti cambiando r in $-r$.

In conseguenza delle definizioni date è evidente, che $b=a+r$, $c=b+r$, $d=c+r$, etc. e per conseguenza $c=a+2r$, $d=a+3r$, etc. Dal che ricaviamo generalmente, che *qualsivoglia termine di una progressione aritmetica è eguale al primo termine più la ragione multiplicata per lo numero de' termini, che lo precedono.*

Così se noi disegniamo con k il termine, che noi consideriamo, e con n il numero delli termini incominciando dal primo fino a k inclusivamente, avremo il termine generale $k=a+(n-1)r$, e se la progressione fosse decrescente avremo $k=a-(n-1)r$, e per conseguenza la formola generale sarà $k=a\pm(n-1)r$, per mezzo della quale possiamo determinare qualsivoglia termine della progressione senza calcolare tutti li termini, che lo precedono; così volendo determinare il termine trentesimo della progressione $\div 1 . 4 . 7$. etc. noi faremo $n=30$, ed $r=3$; ed avremo $k=1+29\times3=88$.

109. Prima di passare più oltre dimostriamo, che in qualunque *progressione per differenze la somma delli due termini estremi è eguale alla somma di due termini qualunque, purchè essi sieno a distanze eguali dalli due estremi.*

Disegniamo con x il termine, che ne ha m avanti di se, e con y il termine, che ne ha m dopo di se, e siano a il primo, e k l'ultimo termine della progressione, noi avremo $x=a+mr$

$y=k-mr$

Quindi addizionando queste due equazioni membro a membro, avremo $x+y=a+k$; dunque la somma delli due termini x, ed y presi ad eguale distanza dagli estremi è eguale alla somma $a+k$ delli medesimi estremi.

110. Dal che ricaviamo, che essendo *la somma di due termini presi ad eguale di-*

stanza dagli estremi eguale alla somma di due altri termini presi pure ad una altra eguale distanza dalli medesimi estremi, sì fatti termini presi nell' ordine, nel quale si trovano nella progressione, formano una equidifferenza.

Sia la progressione $\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \ldots\ldots i \,.\, k \,.\, u$, e sotto di essa si scriva la medesima progressione in ordine inverso $\div u \,.\, k \,.\, i \ldots\ldots\ldots c \,.\, b \,.\, a$; chiamando S la somma della prima progressione, 2S disegnerà la somma delle due progressioni, ed avremo $2S = (a+u) + (b+k) + (c+i) + \ldots\ldots + (i+c) + (k+b) + (u+a)$; ma $(a+u)$, $(b+k)$ etc. sono eguali, dunque sarà $2S = (a+u)n$, ed $S = \frac{(a+u)n}{2}$. Dal che generalmente ricaviamo, che la *somma delli termini di una progressione per differenze è eguale al prodotto, che si ha multiplicando la somma delli termini estremi per la metà del numero delli termini di essa.*

Esempj. 1.° Si dimanda la somma delli 50 primi termini della progressione

$\div 2 \,.\, 9 \,.\, 16 \,.\, 23$ etc.

In primo luogo facendo uso della formola $u = a + (n-1)r$, noi determineremo il cinquantesimo termine, il quale è eguale a $2 + 49 \times 7 = 345$, indi servendoci della formola $S=\frac{(a+u)n}{2}$

avremo $S=\frac{(2+345)50}{2}=347\times25=8675.$

2. Della medesima progressione si cerca il centesimo termine, e la somma delli 100 primi termini; avremo $u=2+99\times7=695$; ed

$$S=\frac{(2+695)100}{2}=697\times50=34850.$$

111. Se si volesse determinare la somma di una progressione per differenze senza prima determinare l'ultimo termine, allora nella formola $S=\frac{(a+u)n}{2}$ invece di u sostituiremo il suo valore $a+(n-1)r$, ed essa sarà trasformata nella formola $S=\left(\frac{2a+(n-1)r}{2}\right)n$; ma questa forma è poco usitata.

112. Le formole $u=(a+(n-1)r$, ed $S=\frac{(a+u)n}{2}$ contengono le cinque quantità a, r, u, n, s; e per conseguenza esse contengono il problema generale, *date tre di queste cinque quantità determinare le altre due*; questo problema generale contiene in se mol-

ti problemi particolari, tra li quali noi scioglieremo soltanto il seguente, *date le quantità* a, n, u *determinare le altre due* r, s.

La formola $u = a + (n-1)r$ ci da $r = \dfrac{u-a}{n-1}$,

e la formeta $S = \dfrac{(a+u)n}{2}$, ci dà immediatamente il valore di S.

113. Fra li molti problemi, che in se contiene il problema generale da noi enunciato ho scelto il precedente; in primo luogo, perchè la sua soluzione non dipende da principj da noi non ancora dimostrati, in secondo luogo perchè esso ci dà il processo, per mezzo del quale noi possiamo inserire tra due numeri dati a, b un numero qualunque di *medie differenziali*, dando il nome di *medie differenziali* alli numeri, che si vogliono inserire tra a, b in modo, che essi formino con a, b una progressione per differenze, quindi proponiamo il problema: *tra due numeri dati* a, b *inserire un numero* m *di medie differenziali*.

Della progressione, che noi dobbiamo formare, b è l' ultimo termine, ed il numero delli termini di essa evidentemente è $m+2$: quindi nella formola $r = \dfrac{u-a}{n-1}$ sostituendo b in vece di u, ed $m+2$ in vece di n, essa si trasformerà nella formola $r = \frac{b-a}{m+2-1} = \frac{b-a}{m+1}$; il che ci fa vedere, che la ragione della progressione dimandata si ha *dividendo la differenza delli due numeri dati* a, b *per lo numero delle medie differenziali da inserire tra* a, b *accresciuto di una unità.*

Avendo determinata la ragione, è facilissima cosa il determinare le medie differenziali, che si vogliono inserire tra a, b. In fatti per avere la prima di esse, noi la troveremo aggiungendo ad a il valore di r, cioè $\frac{b-a}{m+1}$, per avere la seconda noi aumenteremo dello stesso valore di r la prima trovata, e così procedendo avanti.

Proponiamoci di inserire 12 medie differenziali tra 12 e 77, facendo uso della formola precedente $r = \frac{b-a}{m+1}$, avremo $r = \frac{77-12}{13} = \frac{65}{13} = 5$: quindi avremo la seguente progressione ÷ 12. 17 . 22 . 27 . 32 . 37 . 42 . 47 . 52 . 57 . 62 . 67 . 72 . 77.

114. Da quello che abbiamo detto ricaviamo la seguente importantissima conseguenza; *Se tra tutti li termini di una progressione considerati a due a due si inserisce un medesimo numero di medie differenziali, questi termini, e le medie differenziali tra*

essi inserite, riuniti formano una sola progressione.

In fatti sia $\div\, a\, .\, b\, .\, c\, .\, d\, .\, e$ etc. una progressione, ed m disegni il numero delle medie differenziali, che si vogliono inserire tra a, b, tra b, c, tra c, d etc.; la ragione di ciascuna delle progressioni parziali sarà $\frac{b-a}{m+2}$, $\frac{c-b}{m+2}$, $\frac{d-c}{m+2}$, etc.; ma poichè a, b, c, d, etc. sono in progressione, ne segue che $b-a=c-b=d-c$ etc. dunque anche le ragioni $\frac{b-a}{m+2}$, $\frac{c-d}{m+2}$, $\frac{d-c}{m+2}$ etc. delle progressioni parziali sono eguali. In oltre l'ultimo termine della prima progressione parziale serve di primo termine della seconda, l'ultimo termine della seconda fa da primo termine della terza, e così in appresso; dunque tutte queste progressioni parziali formano una sola progressione.

Articolo II.

Delle progressioni per quozienti.

115. Se con a, b, c, d, e disegniamo una serie di numeri, li quali sono in progressione per quozienti, noi noteremo questa progressione così $\dot{\dot{.}}\, a : b : c : d : e : f :$ etc. e la enuncieremo nella medesima maniera, che

abbiamo enunciata una progressione per differenze, facendo però attenzione, che quella è una serie di differenze eguali, nel mentre che questa è una serie di quozienti eguali, nella quale ciascun termine serve da antecedente, e da conseguente, ad eccezione del primo termine, che serve soltanto da antecedente, e l'ultimo, che serve soltanto da conseguente.

116. Rappresentiamo il primo termine della progressione con a, l'ultimo con u, e la ragione con q, ed avvertiamo, che qualora la progressione è crescente $q>1$, e qualora è decrescente $q<1$.

In conseguenza della definizine data si vede chiaramente, che la progressione data può essere posta sotto la forma $\div\!\!\div\; a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 \ldots\ldots : aq^{n-1}$; quindi avremo $u = aq^{n-1}$, formola la quale indicherà il *termine generale* della progressione, per mezzo della quale potremo valutare un termine qualunque della progressione, senza calcolare anticipatamente li termini, che lo precedono. Così per determinare il termine ottavo della progressione $\div\!\!\div\; 2 : 6 : 18 :$ etc. noi mettere-mo $a=2$, $q=3$, $n=8$, ed avremo $u=2\times 3^7 = 2\times 2187 = 4374$. Similmente il termine ottavo u della progressione decrescente $\div\!\!\div\; 64 : 16 : 4 : 1 : \frac{1}{4} :$ etc., si avrà mettendo

$a=64$, $q=\frac{1}{4}$ $n=8$, ed avremo $u=64\times\frac{1}{4^7}$

$$=\frac{4^3}{4^7}=\frac{1}{4^4}=\frac{1}{256}.$$

117. Proponiamoci ora di determinare la somma delli n primi termini di una progressione geometrica $\div\!\!\div\ a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 \ldots\ldots aq^{n-1}$; Si chiami S la somma di questa progressione, avremo $S=a+aq+aq^2+aq^3+\ldots\ldots aq^{n-1}$; e multiplicando per q ambi li membri di questa equazione, avremo $Sq=aq+aq^2+aq^3+\ldots\ldots+aq^n$, e sottraendo da questa equazione la prima, membro a membro, avremo $Sq-S=aq^n-a$, e per conseguenza $S(q-1)$, $=a(q^n-1)$, e perciò $S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$.

118. Si può ancora avere un' altra espressione della medesima somma, facendola dipendere dall' ultimo termine, dal primo, e dalla ragione; in fatti considerando che l' ultimo termine $u=aq^{n-1}$, avremo $uq=aq^n$, quindi nella formola trovata $S=\frac{aq^n-a}{q-1}$ sostituendo uq in vece di aq^n, avremo $S=\frac{uq-a}{q-1}$; dal che generalmente conchiuderemo, *che per avere la somma di un dato numero di termi:*

ni di una progressione per quozienti, bisogna multiplicare l' ultimo termine per la ragione e sottrarre dal prodotto il primo termine, indi dividere il residuo per la ragione diminuita di una unità.

119. Qui bisogna avvertire, che qualora la progressione è decrescente $q<1$, ed $u<a$, e perciò la espressione $S=\frac{uq-a}{q-1}$ diviene negativa; ma noi abbiamo dimostrato, che il valore di una frazione non si altera qualora si cambiano tutti li segni del numeratore, e del denominatore, quindi conchiuderemo, che qualora la progressione è crescente $S=\frac{uq-a}{q-1}$; e che qualora essa è decrescente $S=\frac{a-uq}{1-q}$.

Così la somma degli otto primi termini della progressione crescente $\div\!\!\div$ 2 : 6 : 18..... 2×3^7, ossia $\div\!\!\div$ 2 : 6 : 18.....4374 sarà

$$S=\frac{4374\times3-2}{3-1}=\frac{13122-2}{2}=\frac{13120}{2}=6560.$$

E la somma delli dodici primi termini della progressione decrescente $\div\!\!\div$ 64 : 16 : 4 :

$$1 : \frac{1}{4} \ldots\ldots 64\times\left(\frac{1}{4}\right)^{11}$$; ossia $\div\!\!\div\; 64 : 16 :$

$$4 : 1 : \frac{1}{4} \ldots\ldots \frac{1}{65536}$$, sarà $\dfrac{a-uq}{1-q}$

$$=\frac{64-\frac{1}{65536}\times\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$, e multiplicando li due termini di questa frazione per 4, sarà $\dfrac{a-uq}{1-q}$

$$=\frac{256-\frac{1}{65536}}{3}=\frac{\frac{16777215}{65536}}{3}=\frac{16777215}{196608}$$

$$=85+\frac{65536}{196608}.$$

120. Se si ha la progressione $\div\!\!\div\; 1 : 1 : 1 :$ etc., noi la possiamo considerare come progressione per quozienti, nella quale $a=1$, $u=1$, $q=1$, oppure come progressione per differenze, nella quale $a=1$, $u=1$, $r=o$; trattando questa progressione considerandola

come progressione per quoziente, avremo $S = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{o}{o}$; ma $\frac{o}{o}$ è il simbolo della indeterminazione; dunque sembra, che la espressione $S = \frac{o}{o}$ indicherebbe, che la somma S può avere una infinità di valori, il che sarebbe assurdo, giacchè è evidente, che la somma delli otto primi termini è eguale al valore unico 8, e chè la somma delli quindici termini è eguale a 15, ed in generale, che la somma delli n primi termini è eguale ad n, per togliere questa difficoltà mettiamo la formola $S = \frac{aq^n - a}{q-1}$ sotto la forma $S = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}$; ma noi abbiamo dimostrato, che la espressione $\frac{o}{o}$, la quale spesso è simbolo della indeterminazione, può provenire ancora da un fattore comune delli due termini della frazione, da cui essa deriva, il quale per qualche ipotesi particolare fatta sopra le quantità date diviene nullo, e ciò è appunto quello, che accade nel caso presente; in fatti noi abbiamo dimostrato, che la espressione $\frac{q^n - 1}{q-1}$

$= q^{n-2} + q^{n-3} + q + \ldots\ldots + q + 1$; ed effettuando questa divisione avremo, $S = aq^{n-1} + aq^{n-2} + aq^{n-3} + \ldots\ldots + aq + a$, nella quale facendo $q = 1$, avremo $S = a + a + a = na$; Se poi la medesima progressione da noi si tratta come progressione per differenza, avremo $u = a + (n-1)r$, e poichè nel caso presente $r = o$, avremo $u = a$, e sostituendo in vece di u il suo valore a nella formola $S = \frac{(a+u)n}{2}$, avremo $S = \frac{2an}{2} = an$, il quale è lo stesso valore, che abbiamo ritrovato, qualora nella progressione per quoziente abbiamo ridotta alla minima espressione la formola generale $S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$ applicata al caso particolare proposto.

121. Si è dimostrato, che nella progressione decrescente $S = \frac{a - uq}{1 - q}$, ma $u = aq^{n-1}$ dunque sostituendo avremo $S = \frac{a - aq^n}{1 - q}$ espressione, la quale può essere posta sotto la forma $S = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \times q^n$, e poichè si è supposto, che la

progressione sia decrescente, q è un rotto tale, che il suo valore decresce a misura, che n diviene maggiore, quindi $\frac{a}{1-q}\times q^n$ diverrà tanto più piccolo, quanto maggiore è il numero delli termini, che si prenderanno nella progressione, e per conseguenza la somma di questi termini si accosterà a divenire eguale alla prima parte di S, cioè ad $\frac{a}{1-q}$, talmentechè se si prenderà n maggiore di qualunque numero dato, o ciò che vale lo stesso, se si mette $n=\infty$, il valore di $\frac{a}{1-q}\times q^n$ diverrà minore di qualsivoglia numero dato, e perciò sarà $\frac{a}{1-q}\times q^n=o$, e la espressione $\frac{a}{1-q}$ esprimerà il valore di tutta la serie, dal che ricaviamo, che la *espressione della somma delli termini di una progressione decrescente all'infinito* è $S=\frac{a}{1-q}$. Questa espressione a propriamente parlare è il *limite* verso del quale tendono le somme parziali, che si ottengono prendendo nella progressione un numero di termini sempre crescente, talmente che la differenza, che passa tra queste somme parziali, e la espressione $\frac{a}{1-q}$ diviene continuamente minore, e può divenire tanto piccola quanto a noi piacerà, e diviene effettivamente nulla, qualora il numero de' termini, che si prendono è infinito; e per indicare, che questa espressione $S=\frac{a}{1-q}$ indica il limite della somma della progressione decrescente, noi la noteremo *Lim.* $S=\frac{a}{1-q}$.

122. *Applicaz. della formola Lim.* $S=\frac{a}{1-q}$

Esempio 1. Si cerca la somma di tutti li termini della progressione decrescente ∺ 1 : $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{4}$ etc.

Il primo termine di questa progressione è 1, e la ragione è $\frac{1}{2}$, quindi sarà *Lim.* $S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{(\frac{1}{2})}=2$. In fatti è cosa molto facile vedere, che la somma delli termini di questa progressione continuamente tende a divenire eguale a 2, e che la differenza, che passa tra essa e 2 può divenire tanto piccola quanto a noi piacerà, prendendo un numero sufficiente di termini, ma che essa non può considerarsi come eguale a 2 in altro caso, che in quello in cui supponiamo, che l' ultimo termine sia eguale ad $\frac{1}{2^{\infty}}$, termine verso del quale continuamente ci avviciniamo, senza trovarlo giammai.

Esempio 2. Sia la serie ∻ $1 : -\frac{1}{2} : +\frac{1}{4} : -\frac{1}{8} : +\frac{1}{16} -$ etc. In questa serie il primo termine è 1, e la ragione è $-\frac{1}{2}$; quindi avremo *Lim.* $S = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{(\frac{3}{2})} = \frac{2}{3}$.

132. La considerazione delle cinque a, q, u, n, s, le quali entrano nelle formole $u = aq,^{n-1}$ $S = \frac{aq^n - a}{q-1}$ dà la origine a dieci problemi particolari, delli quali noi ne scioglieremo due soltanto, cioè quelli nelli quali ci proponiamo di determinare q, ed S, qualora sono conosciute le quantità a, u, n, giacchè questi

possono essere sciolti con le cognizioni fino ad ora acquistate.

La prima formola $aq^{n-1}=u$, ci da $q^{n-1}=\frac{u}{a}$, dalla quale ricaviamo $q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$; il quale valore di q sostituito nella formola $S=\frac{uq-a}{q-1}$ dà il valore di S.

124. La formola $q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$, ci dà il processo secondo il quale operando si può inserire fra due quantità date qualsivoglia numero di medie proporzionali.

Proponiamoci di inserire trà a, b un numero m di medie proporzionali, cioè m quantità tali, che facciano con a, b, considerate come termini estremi, una progressione per quozienti.

Per la soluzione di questo problema basta conoscere la ragione, quindi essendo m il numero delli termini da inserire tra a, b, il numero totale delli termini sarà $m+2$, e perciò sarà $n=m+2$, ed $n-1=m+1$; dippiù essendo $u=b$, e $q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$, sostituendo $m+1$ in vece di $n-1$, e b in vece di u, sarà $q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$; dal che ricaviamo, che *per trovare la ragione dobbiamo dividere b per a, ed estrarre dal quoziente la radice indicata dal numero delli termini da inserire accresciuto di una unità*, ed avremo allora la progressione $a : a\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} : a\sqrt[m+1]{\frac{b2}{a2}} : a\sqrt[m+1]{\frac{b3}{a3}} \ldots b$

Così se si vogliono inserire sei medie proporzionali tra 3 e 384, noi metteremo $a=3$, $b=384$, e troveremo $q=\sqrt[7]{\frac{384}{3}}=\sqrt[7]{128}=2$, d' onde ricaviamo la progressione $\div$ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384.

125. Con una dimostrazione analoga a quella, che abbiamo esposta nella teoria delle progressioni per differenze, si può dimostrare, che *se tra tutti li termini di una progressione per quozienti considerati a due a due s iinserisce un medesimo numero di medie proporzionali, tutte le progressioni, che ne nasceranno costituiscono una sola progressione.*