

TEORIA DELL' LOGARITMI.

A R T. I.

Proprietà delli Logaritmi.

126. Per dare a questa teoria tutta la chiarezza, della quale essa è suscettibile, stimo essere ben fatto seguendo Eulero di rimontare alla origine di tutte le operazioni del calcolo fin ora esposte, ed esaminare la maniera secondo la quale esse fra loro sono ligate.

La prima operazione di calcolo, che si presenta allo spirito è la *addizione*, per mezzo della quale noi apprendiamo ad unire insieme due quantità per trovare la *somma* di esse; quindi se con a , b indichiamo le due quantità proposte, e con c la *somma* di esse, avremo $a + b = c$

Noi abbiamo veduto, che la *sottrazione* è la operazione inversa della addizione, poichè in essa ci proponiamo di determinare una delle quantità addizionate, qualora ci è nota la somma di esse, e l'altra quantità, quindi se delle due quantità addizionate a , b , a noi è nota la somma c , ed è nota una di esse a , determiniamo b per mezzo della eguaglianza $b = c - a$, e se è nota b , noi determiniamo a con la eguaglianza $a = c - b$; Ma qui noteremo, che se accade, che il numero, che si

deve sottrarre è minore di quello da cui dobbiamo sottrarlo, noi acquistiamo l'idea di una nuova specie di quantità, che noi chiamiamo *negative*, o *sottrattive*.

Qualora molte quantità, che debbono essere insieme addizionate sono tutte eguali, la somma di esse si trova per mezzo della *moltiplicazione*, e si chiama *prodotto*; quindi se noi con a indichiamo una quantità, che noi dobbiamo prendere b volte per unirla a se medesima, avremo il prodotto ab ; se questo prodotto si indica con la lettera c , avremo $ab=c$; e la moltiplicazione ci dà la regola per determinare il prodotto c , quando sono dati li fattori a , b .

Noi abbiamo detto, che la *divisione* è quella operazione di calcolo, per mezzo della quale cerchiamo di determinare uno de' fattori di una moltiplicazione, qualora ci è noto il prodotto, e l'altro fattore, quindi essa è la operazione inversa della moltiplicazione, e perciò nella eguaglianza $ab=c$, se da noi si suppone noto il prodotto c , ed il fattore b ,

avremo $a = \frac{c}{b}$; e se si suppone noto a ,

avremo $b = \frac{c}{a}$, e poichè spesso accade, che

il numero c non può essere diviso per a , o per b , si presenta una nuova specie di quantità, che noi abbiamo chiamata *rotto*, o *frazione*.

Come la moltiplicazione tira la sua origine dalla addizione, poichè per essa altro non facciamo se non se addizionare insieme più quantità eguali, così ora vediamo, che qualora noi dobbiamo moltiplicare per se medesima una quantità prendendola più volte come fattore, nasce la *elevazione a potenza*. Supponendo, che a disegni la quantità, che deve essere presa b volte come fattore nella moltiplicazione per se medesima, noi generalmente ne indichiamo il prodotto con la formola a^b , e sappiamo per quello, che abbiamo detto, che in questa espressione a indica la radice, b lo esponente, ed a^b la potenza, indichiamo questa potenza con la lettera c , ed avremo $a^b = c$.

Nella teoria della elevazione a potenza abbiamo veduto, come essendo data la radice a , e lo esponente b , si deve determinare la potenza c , ma se ci proponiamo di invertire la quistione, osserviamo, che noi la possiamo invertire di due maniere, e che dobbiamo considerare due casi differenti; in fatti se due delle tre quantità a , b , c sono date, e si cerca di determinare la terza, immediatamente ci accorgiamo, che questa quistione ammette tre supposizioni differenti, e per conseguenza tre soluzioni; noi abbiamo già veduto come si determina c , qualora sono date le quantità a , b ; noi possiamo ora considerare come note c , b , e cercare a ; oppure cercare b supponendo note a , c . Ma prima di passare

più oltre osserveremo, che quando abbiamo nella addizione invertita la quistione, abbiamo potuto farlo in una sola maniera, giacchè le quantità a , b entrano della medesima maniera nella composizione di c , essendo indifferente scrivere $a+b=c$, oppure $b+a=c$. Similmente nella moltiplicazione, le quantità a , b entrano nella stessa maniera nella composizione del prodotto c , essendo indifferente scrivere $ab=c$, oppure $ba=c$, quindi una sola maniera abbiamo avuta per isciorre la quistione inversa della moltiplicazione; ma nella elevazione a potenza non accade la medesima cosa, giacchè a , b non entrano della medesima maniera nella composizione della potenza c , giacchè a entra nella composizione della potenza come fattore, e b come indicatore del numero delle volte, che a deve essere preso come fattore nella moltiplicazione per se medesimo; in fatti noi non possiamo scrivere indifferentemente b^a in vece di a^b . Dal che chiaramente vediamo, che noi dobbiamo proporre due differenti questioni, 1.° data la potenza c , e lo esponente b , determinare la radice a , 2.° data la radice a , e la potenza c determinare lo esponente b .

Della prima di queste quistioni ci siamo di già occupati, quando abbiamo parlato della estrazione delle radici, ed abbiamo generalmente conchiuso, che qualora abbiamo $a^b=c$, si deve avere $a=\sqrt[b]{c}$; ed avendo considerato

il caso in cui c non è potenza perfetta del grado b , abbiamo veduto, che il valore di a non può esprimersi esattamente nè per un intero, nè per un numero frazionario, il che ci ha fatta acquistare la idea delle quantità *incommensurabili*, o *irrazionali*; dippiù abbiamo osservato, che se b disegna un numero pari, e la quantità sotto posta al segno radicale è affetta dal segno negativo, la radice viene immaginaria, ed in conseguenza di questa operazione abbiamo acquistate le idee delle quantità *incommensurabili*, e delle *espressioni immaginarie*.

Proponiamo ora la seconda quistione, nella quale ci proponiamo di determinare lo esponente b conoscendo la potenza c , e la radice a , abbiamo una nuova quistione, la quale ci conduce alla importantissima teoria delli *Logaritmi*, l'uso delli quali è in tutte le matematiche tanto grande, che senza di essi molti calcoli non si potrebbero eseguire, e noi vedremo, che questa teoria ci conduce a trovare una nuova specie di numeri, la quale non può essere nella classe delli numeri irrazionali, che noi abbiamo considerati.

127. Riprendiamo la equazione superiore $a^b = c$, la quale noi noteremo più generalmente scrivendola così $a^x = y$, nella quale supponiamo, che a disegni una quantità presa ad arbitrio, ma di un valore invariabile, ed x un numero tale, che renda a^x eguale ad un numero qualunque y , e per conseguenza x , y indi-

cano due numeri variabili, ed il problema, che da noi si deve sciogliere può generalmente essere enunciato dicendo; Dato un numero costante a determinare lo esponente x , che si deve dare ad a , affinchè a^x divenga eguale ad un numero qualunque dato y . Noi daremo allo esponente x il nome di *logaritmo* di y , e lo noteremo con le lettere iniziali *log.*; e alla quantità costante a daremo il nome di *base* delli logaritmi, poichè essa è una quantità invariabile. Dippiù chiamiamo *sistema logaritmico* la serie delli valori di x calcolati sopra una base costante, ed invariabile a , ed avvertiamo, che qualora si cambia la base a , noi cambiamo il sistema.

128. Supponiamo in primo luogo, che si metta $x=0$, avremo $a^0=1$, ed y sarà eguale alla unità, dal che conchiudiamo $\text{Log.} 1=0$, mettiamo $x=1$, avremo $y=a$, e conchiudiamo, che il *logaritmo della base* $a=1$; Quindi in qualsivoglia sistema logaritmico, il *logaritmo della unità* è sempre zero, ed il *logaritmo della base* è sempre la unità.

129. Cambiamo il $+x$ in $-x$ nella equazione

$$a^x = y, \text{ avremo } y = \frac{1}{a^x}, \text{ quindi il } \log. \frac{1}{a^x} = -x;$$

quindi supponendo $a > 1$, il *logaritmo del*

rotto $\frac{1}{a^x}$ è negativo, e poichè a proporzione,

che x diviene maggiore il rotto $\frac{1}{a^x}$ continua-

mente si impiccolisce, e tende al suo limite zero, ne segue, che i logaritmi delle frazioni vere continuamente crescono negativamente, e che nel limite della diminuzione della frazione, che è zero, il logaritmo deve essere lo infinito negativo, e perciò conchiudiamo che $\log. 0 = -\infty$

130. Con y, y' si rappresentino due numeri, e con x, x' li logaritmi di essi secondo la medesima base, avremo le due eguaglianze $a^x = y, a^{x'} = y'$; moltiplicando queste due eguaglianze membro a membro avremo $a^{x+x'} = yy'$; il $\log.(yy')$ sarà lo esponente $x+x'$ della base, quindi avremo $x+x' = \log.yy'$; ma $x = \log.y$, ed $x' = \log.y'$; dunque $\log.yy' = \log.y + \log.y'$; similmente dimostreremo, che il $\log.yy'y''$ etc. $= \log.y + \log.y' + \log.y''$ etc. Dal che generalmente conchiudiamo, che il *log. del prodotto di più fattori è eguale alla somma delli logaritmi delli medesimi fattori.*

131. Riprendendo la equaz. fondamentale $a^x = y$, se noi eleviamo alla medesima potenza n ambi li membri di essa, avremo $a^{nx} = y^n$, ed in conseguenza della definizione avremo $\log.(y^n) = nx = n \log.y$, dal che ricaviamo, che il *logaritmo della potenza di un numero è eguale al logaritmo del medesimo numero moltiplicato per lo numero, che esprime il grado della potenza.*

132. Dividendo membro a membro le medesime due equazioni $a^x = y, a^{x'} = y'$ avremo $a^{x-x'}$

$= \frac{y}{y'}$, ed in conseguenza della definizione con-

chiuderemo, che $\log. \frac{y}{y'} = x - x' = \log. y$

$- \log. y'$, e diremo generalmente, che il *logaritmo del quoziente di una divisione è eguale al residuo, che si ha sottraendo dal logaritmo del dividendo il logaritmo del divisore*, e di più considerando, che una frazione indica il quoziente, che si otterrebbe dividendo il numeratore per lo denominatore, conchiudiamo, che il logaritmo di una frazione è eguale al residuo, che si ottiene sottraendo il logaritmo del denominatore da quello del numeratore, e per conseguenza, che il *logaritmo di una frazione vera, la quale ha il numeratore minore del denominatore, è negativo.*

133. Finalmente estraendo la radice n da am-

bi li membri della equazione $a^x = y$, avre-

mo $\sqrt[n]{a^x} = \sqrt[n]{y}$; ed in conseguenza della defi-

nizione avremo $\log. \sqrt[n]{y} = \frac{x}{n} = \frac{\log y}{n}$, e con-

chiuderemo generalmente, che il *logaritmo della radice di un numero è eguale al quoziente, che si ha dividendo il logaritmo del medesimo numero per lo indice della radice.*

134. In conseguenza delle cose dimostrate noi

vediamo, che se potessimo avere una tavola a due colonne, in una delle quali fossero scritti li numeri della serie naturale, e nell'altra li logaritmi corrispondenti ad essi, con l'ajuto di esse potremmo effettuare le operazioni della moltiplicazione, della divisione, della elevazione a potenza, e della estrazione delle radici, giacchè esse si riducono alla addizione, alla sottrazione, alla moltiplicazione, ed alla divisione eseguite sopra delli logaritmi corrispondenti, e poichè li risultati di queste operazioni sono sempre logaritmi, essi si cercheranno nella colonna delli logaritmi, ed il numero, che si trova nella colonna delli numeri naturali a fianco al logaritmo trovato è il numero dimandato, di maniera, che possiamo dire, che il logaritmo trovato è *lo indicatore del numero dimandato*.

135. Le proprietà delli logaritmi da noi dimostrate sono indipendenti da qualsivoglia valore, che si voglia dare alla base a del sistema, quindi possiamo mettere a eguale a qualunque numero, noi scegliamo 10 per valore di a , e scegliamo di preferenza questo valore di a , perchè nel mentre esso si trova essere la base del sistema logaritmico è ancora la base del nostro sistema di numerazione, qualunque altro numero avrebbe potuto essere adoperato per lo valore di a , ad eccezione della unità, poichè tutte le potenze della unità sono sempre la medesima unità, e per conseguenza a^x non potrebbe fare nascere tutti li

numeri, si potrebbe anche dare ad a un valore frazionario, o negativo, ma esso porterebbe degli inconvenienti, che renderebbero molto incomodo l'uso delli logaritmi.

136. Avendo adottato il sistema della base 10,

li numeri $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, 1, 10,

100, 1000, 10000, etc. hanno per logaritmi -4 , -3 , -2 , -1 , 0, 1, 2, 3, 4, etc., delle quali due serie la prima forma una progressione per quozienti, e la seconda forma una progressione per differenze, nelle quali noi vediamo, che nel sistema da noi adottato la progressione per differenze comprende in se tutti li numeri possibili positivi, e negativi interi, e frazionari, nel mentre, che la serie per quozienti comprende in se tutti li numeri possibili da zero fino all'infinito; dal che concludiamo, che li numeri negativi non possono avere li loro logaritmi nè positivi nè negativi, e che perciò essi sono immaginari.

137. Da quanto abbiamo detto, chiaramente si vede, quanto grande sia il vantaggio, che l'uso delli logaritmi apporta nelli calcoli aritmetici, e la necessità di avere le tavole, in cui essi sieno registrati, il che con somma fatica è stato fatto dalli Signori Brigio, ed Ulacq, li quali si sono presa la cura di esprimerne li valori per approssimazione, formando le tavole logaritmiche per la base 10, e sebbene le tavole si trovino già costrutte, e per conseguen-

za non dobbiamo noi calcolare li logaritmi, tuttavia per fare conoscere il metodo, secondo il quale essi potrebbero essere calcolati, noi ci proponiamo il problema; *Trovare per approssimazione il logaritmo di un numero compreso tra due potenze successive della base*, e scegliamo per esempio il logaritmo del numero 2.

138. Questo problema si riduce a trovare il valore di x nella equazione $10^x = 2$. Noi incominceremo dal cercare il numero intero, che approssima al valore di x , ma è evidente, che questo valore è maggiore di zero, il quale è il logaritmo della unità, e minore di 1, che è il logaritmo di 10, quindi esso è una

frazione, che noi metteremo eguale ad $\frac{1}{z}$,

ed avremo $(10)^{\frac{1}{z}} = 2$, ed elevando ambi li membri di questa equazione alla potenza z , avremo $10 = 2^z$; cerchiamo il valore di z più prossimo a quello, che sostituito in vece di z renderebbe $10 = 2^z$, or se noi mettiamo $z = 3$, il valore di 2^3 sarebbe minore di 10, se poi si mettesse $z = 4$, allora avremo 2^4 ossia 16 maggiore di 10, dal che conchiudiamo, che z deve essere maggiore di 3, e minore di 4, e che per conseguenza deve essere eguale a 3

più una frazione, quindi metteremo $z = 3 + \frac{1}{z'}$;

e sostituendo, avremo $10 = (2)^{3 + \frac{1}{z'}} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{z'}}$

$= 8 \times 2^{\frac{1}{z'}}$, e dividendo per 8 ambi li membri della equazione $10 = 8 \times 2^{\frac{1}{z'}}$, avremo $\frac{10}{8} = 2^{\frac{1}{z'}}$,

e riducendo alla minima espressione la frazio-

ne $\frac{10}{8}$ avremo $2^{\frac{1}{z'}} = \frac{5}{4}$, ed elevando ambi li

membri di questa equazione alla potenza z'

avremo $2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{z'}$; cercando il valore appros-

simativo di z' , noi vediamo che esso è mag-

giore di 3, poichè $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$ frazione mi-

nore di 2, ed è minore di 4, poichè $\left(\frac{5}{4}\right)^4$

$= \frac{625}{256}$ valore maggiore di 2, e perciò con-

chiamo, che il valore di z' è eguale a 3 più

una frazione, che noi esprimeremo con $\frac{1}{z''}$,

e sostituendo avremo $2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3 + \frac{1}{z''}} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$

$\times \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z''}} = \frac{125}{64} \times \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z''}}$, e dividendo am-

bi li membri di questa equazione per $\frac{125}{64}$,

$$\text{avremo } 2 \times \frac{64}{125} = \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{1}{z''}}, \text{ e perciò } \frac{128}{125}$$

$$= \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{1}{z''}}; \text{ ed elevando ambi li mem-}$$

bri di questa equazione alla potenza z'' avremo $\left(\frac{128}{125} \right)^{z''} = \frac{5}{4}$; similmente ragionando

dopo alcuni tentativi troveremo, che z'' è minore di 10 e maggiore di 9; potremmo portare più oltre questa approssimazione, ma poichè noi abbiamo proposto questo metodo soltanto per fare vedere la possibilità di trovare il logaritmo di 2, ci arresteremo a supporre $z'' = 9$.

$$\text{Essendo } z' = 3 + \frac{1}{z''}, \text{ avremo } z' = 3 + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{28}{9}; \text{ ed essendo } z = 3 + \frac{1}{z'}, \text{ sostituendo}$$

$$\text{avremo } z = 3 + \frac{1}{\left(\frac{28}{9} \right)} = 3 + \frac{9}{28} = \frac{93}{28}; \text{ e poi-}$$

$$\text{chè } x = \frac{1}{z}, \text{ sostituendo avremo } x = \frac{1}{\left(\frac{93}{28} \right)} = \frac{28}{93}.$$

Riducendo questo valore di x in decimale, avremo $x=0.30107$, e questo valore di x è esatto fino alla quarta cifra, e se il calcolo di approssimazione fatto secondo questo processo si fosse portato più oltre, avremo trovato il logaritmo di 2 fino a sette cifre decimali.

139. Qui però è necessario osservare, che per formare le tavole di un sistema logaritmo non è necessario di calcolare tutti li logaritmi con un processo tanto penoso, ma basta soltanto trovare li logaritmi di alcuni numeri primi, per dedurre da essi li logaritmi di tutti gli altri numeri, applicando alla ricerca di essi li teoremi da noi dimostrati.

Così se noi supponiamo trovato il logaritmo di 2, che noi disegneremo con la lettera x ; avremo il $\log. 20 = \log. (2 \times 10) = \log. 10 + \log. 2 = 1 + x$; $\log. 200 = \log. (2 \times 100) = \log. 100 + \log. 2 = 2 + x$, $\log. 2000 = \log. (1000 \times 2) = \log. 1000 + \log. 2 = 3 + x$ etc.; $\log. 4 = \log. (2^2) = 2 \log. 2 = 2x$; $\log. 8 = \log. (2^3) = 3 \log. 2 = 3x$, $\log. 64 = \log. (2^6) = 6 \log. 2 = 6x$ etc. $\log. 40 = \log. (10 \times 4) = \log. 10 + \log. 4 = 1 + \log. 4 = 1 + 2x$, $\log. 400 = \log. (100 \times 4) = \log. 100 + \log. 4 = 2 + \log. 4 = 2 + 2x$, $\log. 4000 = \log. (1000 \times 4) = \log. 1000 + \log. 4 = 3 + 2x$; $\log. 80 = \log. (10 \times 8) = \log. 10 + \log. 8 = \log. 10 + \log. 2^3 = 1 + 3x$ etc; $\log. 50$

$$= \log. \frac{100}{2} = \log. 100 - \log. 2 = 2 - x;$$

$$\log 250 = \log \left(\frac{1000}{4} \right) = \log. 1000 - \log. 2^2 = 3 - 2x$$

$$\log. 25 = \log. \frac{100}{4} = \log. 100 - \log. 4 = \log.$$

$$100 - \log. 2^2 = 2 - 2 \log. 2 = 2 - 2x; \log. 5 =$$

$$\log. \left(\frac{10}{2} \right) = \log. 10 - \log. 2 = 1 - x; \text{ etc.}$$

140. Esaminando li risultati precedenti si vede, che il logaritmo del prodotto di un numero moltiplicato per 10, per 100, per 1000 etc. supera il logaritmo del medesimo numero per 1, 2, 3 etc. unità, talmente che possiamo conchiudere, che qualora al logaritmo di un numero si aggiunge un dato numero di unità si ottiene il logaritmo del medesimo numero moltiplicato per 10, prendendo 10 per fattore tante volte quanto è il numero delle unità aggiunte al logaritmo del numero, e che se il logaritmo di un numero si diminuisce di una, 2, 3 etc. unità, si ha il logaritmo del quoziente del medesimo numero diviso per tante volte 10, quanto è il numero delle unità che si sono tolte dal logaritmo di esso.

141. Osserviamo in oltre, che li logaritmi compresi tra 1 e 10 sono espressi da frazioni vere, che li logaritmi delli numeri compresi tra 10 e 100 sono espressi da una unità più una frazione, che quelli delli numeri compresi tra 100 e 1000 sono espressi da 2 unità più

una frazione , che quelli delli numeri compresi tra 1000 e 10000 sono espressi da 3 unità più una frazione , e così in appresso.

Dippiù le frazioni , che accompagnano la parte intera delli logaritmi sono state ridotte in frazioni decimali , ed esse sono separate dalla parte intera per mezzo di un punto , e si è data alla parte intera del logaritmo il nome di *caratteristica* , poichè il logaritmo di un numero qualunque ha tante unità intere , quante cifre ha il numero dato meno una , dal che chiaramente si vede , che qualora è dato un numero , immediatamente si conosce da quante unità è composta la caratteristica del suo logaritmo , e qualora è dato un logaritmo , per mezzo della caratteristica di esso immediatamente si conosce , quale sia il numero delle cifre , dalle quali è composto il numero , a cui esso appartiene ; alla parte decimale delli logaritmi si è dato il nome di *Mantissa*.

142. *Qualora alla virgola di un numero decimale si fanno fare n passi verso la destra , o verso la sinistra , li logaritmi delli numeri , che ne risultano conservano la medesima parte decimale , e per ottenere li logaritmi , che a sì fatti numeri appartengono si deve accrescere , o diminuire la caratteristica del logaritmo appartenente al decimale proposto di n unità.*

Imperciocchè avanzando la virgola di n passi verso la destra , o verso la sinistra di un nu-

mero decimale, esso è moltiplicato, o diviso per 10^n , così per esempio essendo il logaritmo di $3589 = 3.59758$, da esso ricaveremo il logaritmo di $3,589 = 0,59758$, e $\log.(35,89) = 1.59758$.

143. *La differenza tra li logaritmi di due numeri qualunque diviene tanto più piccola, quanto questi numeri sono più grandi, e la quantità per la quale differiscono diviene minore.*

Noi sappiamo, che il logaritmo del quoziente di una divisione si ha sottraendo dal logaritmo del dividendo il logaritmo del divisore, quindi avremo $\log.(n+d) - \log.n =$

$$\log.\left(\frac{n+d}{n}\right) = \log.\left(1 + \frac{d}{n}\right),$$

ma se nel medesimo tempo n diviene maggiore, e d diviene minore,

il numero $1 + \frac{d}{n}$ si accosta alla unità, ed

il $\log.\left(1 + \frac{d}{n}\right)$ si accosta al logaritmo della

unità, e poichè il logaritmo della unità è ze-

ro, il $\log.\left(1 + \frac{d}{n}\right)$ si accosta al zero, e per-

ciò la differenza tra il $\log.(n+d)$ ed il $\log.n$ dimiuisce, e si accosta a zero.

Così $\log.3 - \log.2 = 0,17690$; $\log.1156 - \log.1155 = 0,00038$, $\log.9768 - \log.9767 = 0,00005$.

Si disegnino con x , ed $x+d$ li logaritmi delli due numeri n , ed $n+d$, avremo

$$\frac{n+d}{n} = 1 + \frac{d}{n}, \text{ e } \frac{\log.(n+d)}{\log.n} = \frac{x+d}{x} = 1 + \frac{d}{x},$$

e $\log.(n+d) - \log.n = d$, ma quando n cresce nel mentre d diminuisce, il $\log.n$ cresce,

e d diminuisce, dunque in questo caso $1 + \frac{d}{n}$,

ed $1 + \frac{d}{x}$ diminuiscono, e si accostano alla

unità, e la differenza che passa fra li due

rapporti $\frac{n+d}{n}$, e $\frac{\log.(n+d)}{\log.n}$ si accosta al zero.

Dal che generalmente conchiudiamo, che il rapporto, che hanno fra essi due numeri è tanto più prossimo al rapporto, che hanno fra essi li logaritmi delli medesimi numeri, quanto più questi numeri sono grandi, e la differenza di essi è minore, e possiamo stabilire, che in questo caso abbiamo prossimamente la proporzione $n+d : n :: \log.(n+d) : \log.n$, e mettendo $d=1$, $n+1 : n :: \log.(n+1) : \log.n$.

144. Quì osserveremo, che qualorail numero n ha quattro cifre, e d non oltrepassa una unità, lo errore è sempre minore di 0.00086, e maggiore di 0.00009, poichè il rapporto di

1001 : 1000 , diminuito del rapporto de'
 $\log.1001 : \log.1000$, ossia $\frac{1001}{1000} = \frac{\log.1001}{\log.1000}$

$= 0.00086$; e quello di 10000 : 9999 ossia
 $\frac{10000}{9999} = \frac{\log.10000}{\log.9999} = 0.00009$, errori li qua-

li potendosi trascurare nelli calcoli ordinari ,
 noi potremo stabilire per approssimazione $\frac{n+d}{n}$

$$= \frac{\log.(n+d)}{\log.n} ; \text{ ed } \frac{n+1}{n} = \frac{\log.(n+1)}{\log.n} .$$

145. Quindi se consideriamo due numeri conse-
 cutivi maggiori di 1000 , che indicheremo per
 n ed $n+1$, ed un altro numero $n+d$ com-
 preso tra $n+1$ ed n , le differenze tra questi
 numeri sono presso a poco proporzionali alle
 differenze delli logaritmi delli medesimi nu-
 meri ; cioè sarà $(n+1) - n : (n+d) - n ::$
 $\log.(n+1) - \log.n : \log.(n+d) - \log.n$, in
 fatti in questo caso l'errore , che si commet-

te prendendo le equazioni $\frac{n+d}{n} = \frac{\log.(n+d)}{\log.n}$,

ed $\frac{n+1}{n} = \frac{\log.(n+1)}{\log.n}$ essendo molto piccolo

noi possiamo stabilire per approssimazione
 $(n+d) : n :: \log.(n+d) : \log.n$

$n+1 : n :: \log.(n+1) : \log.n$; da queste proporzioni ricaviamo

$(n+d)-n : n :: \log.(n+d)-\log.n : \log.n$, ed

$(n+1)-n : n :: \log.(n+1)-\log.n : \log.n$,

ed alternando avremo

$(n+d)-n : \log.(n+d)-\log.n :: n : \log.n$

$(n+1)-n : \log.(n+1)-\log.n :: n : \log.n$;

e per conseguenza

$(n+d)-n : \log.(n+d)-\log.n :: (n+1)-n$

$: \log.(n+1)-\log.n$

Dal che conchiudiamo, che qualora si hanno due numeri consecutivi maggiori di 1000, ed un altro numero tra essi compreso, le differenze tra questi numeri sono presso a poco proporzionali alle differenze delli logaritmi, che ad essi appartengono.

146. Qualora noi sappiamo il logaritmo calcolato secondo una base è facile calcolare il logaritmo del medesimo numero secondo una altra base.

In fatti supponiamo, che noi sappiamo il logaritmo di n calcolato secondo la base a , e proponiamoci di calcolare il logaritmo del medesimo numero secondo una altra base e .

Per le verità dimostrate noi sappiamo, che $a^x = n$, e che $e^{x'} = n$, disegnando con x il logaritmo di n secondo la base a , e con x' il logaritmo del medesimo numero n con la base e , indichiamo con $\log.$ il logaritmo di n secondo la base a , e con $\text{Log}.n$ il logaritmo di n secondo la base e .

Avendo veduto , che $a^x = n$, ed $e^{x'} = n$,
conchiudiamo che $a^x = e^{x'}$, prendendo di que-
sti numeri li logaritmi secondo la base a ,
avremo $x \cdot \log. a = x' \log. e$, ma il logaritmo
della base $a = 1$, dunque avremo $x = x' \log. e$,

e dividendo per $\log. e$, avremo $\frac{x}{\log. e} = x'$

ma x' è logaritmo di n secondo la base e ,
ed x è il logaritmo di n secondo la base a ,

dunque $\text{Log. } n = \frac{\log. n}{\log. e} = \log. n \times \frac{1}{\log. e}$, dal

che generalmente conchiudiamo , che qualora
abbiamo il logaritmo di un numero calcola-
to secondo una base , per trovare il logarit-
mo dello stesso numero calcolato con una
altra base , basterà moltiplicare il logaritmo
di esso calcolato con la prima base per lo
rotto , che ha per numeratore la unità , e
per denominatore il logaritmo della seconda
base calcolato con la prima base.

ARTICOLO II.

Prattica , ed uso delli logaritmi.

147. Li primi, che si occuparono della costru-
zione delle tavole delli logaritmi furono Bri-
gio, ed Ulacq, li quali scelsero per base del
sistema logaritmico il numero 10 , il quale è
il numero stesso , che serve di base al nostro

sistema di numerazione, ed Ulacq estese le sue grandi tavole fino al numero 102000, ed approssimò la *mantissa* fino a dieci cifre decimali; le tavole del Gardiner si estendono fino al medesimo numero, e finalmente quelle di Callet arrivano fino a 108000, e quelle di Lalande, delle quali si fa maggiore uso nelli calcoli ordinari giungono soltanto a 10000.

Il barone Nepero primo inventore delli logaritmi nel 1604 adoperò la base 2,71828183, e chiamò *logaritmi naturali* li logaritmi calcolati secondo questa base, li quali furono anche chiamati *logaritmi iperbolici*, poichè per mezzo di essi si esprime la quadratura degli spazi della iperbole equilatera riferiti agli asintoti; li logaritmi poi calcolati con la base 10 si chiamano *logaritmi ordinari*, o *tavolari*.

148. Per essere nello stato di fare li calcoli con l'ajuto delli logaritmi basta sapere sciogliere li due problemi. 1. Dato *un numero trovare il logaritmo d'esso*. 2. Dato *un logaritmo trovare il numero, al quale esso appartiene*.

Occupiamoci del primo problema.

Qualora il numero dato è un numero intero, che non eccede la estensione delle tavole, basta cercare nelle tavole sulla colonna delli numeri naturali il numero dato; ed alla sua destra nella colonna de' logaritmi si trova il logaritmo, che gli appartiene.

Ma spesso accade, che abbiamo bisogno di trovare li logaritmi di certi numeri, li quali non si trovano nelle tavole, come sono quelli, che eccedono la estensione delle tavole, li numeri composti da interi, e frazioni, e le frazioni vere, quindi noi cercheremo le regole, che si debbono tenere per trovare li logaritmi nelli differenti casi, e per maggiore facilità ragioneremo sopra esempi particolari, ed avvertiamo che noi facciamo uso delle tavole di Lalande, perchè sono quelle, che si adoperano più generalmente.

149. Esempio 1. Proponiamoci di determinare il logaritmo di 587657; il quale eccede la estensione delle tavole; noi incominceremo dal separare dalla destra del numero dato tante cifre, quante ne bisognano, perchè il numero si trovi compreso tra 1000, e 10000; esso diverrà 5876,54, il quale è 100 volte minore del numero dato; quindi se da noi si trovasse il logaritmo di questo numero, esso non sarebbe il logaritmo del numero dato, ma quello di un numero 100 volte minore di esso, che noi ridurremo al logaritmo dimaadata accrescendo la sua caratteristica di 2 unità, ma il logaritmo di 5876,54 non può trovarsi nelle tavole a cagione della decimale 0,54, che accompagna l'intero 5876, quindi noi ricorreremo al principio dimostrato, che nelli numeri maggiori di 1000 le differenze delli numeri successivi sono prossimamente proporzionali alle differenze delli logaritmi, che ad essi

appartengono , quindi noi cercheremo il logaritmo del numero 5877 prossimamente maggiore del dato 5876,54 , il quale è 3.76916 , indi troveremo il log. 5876 inferiore al numero dato , il quale è 3.76907 , e stabiliremo la proporzione , come sta la unità differenza tra 'l numero maggiore , ed il numero minore del dato a 0,57 differenza tra 'l numero dato ed il prossimo minore così stà 0,00008 differenza delli logaritmi delli numeri l' uno prossimamente maggiore , l' altro prossimamente minore del numero dato al quarto proporzionale , il quale ci darà la differenza tra 'l logaritmo del numero dato e quello del numero minore , e per conseguenza quello , che deve essere aggiunto al logaritmo di 5876 per avere approssimativamente il log. 5876,54 , il quale sarà 3.76912 , ed aggiungendo 2 unità alla caratteristica di questo logaritmo , avremo $\log. 587654 = 5.76912$, ma per trovare la quarta proporzionale indicata noi moltiplichiamo la parte frazionaria per la differenza delli logaritmi appartenenti alli numeri prossimo maggiore , e prossimo minore del dato , e dividiamo il prodotto per la unità , quindi ricaviamo la seguente regola generale ; *Quando si vuole il logaritmo di un numero , il quale eccede la estensione delle tavole , si separino dalla sua destra tante cifre quante bisognano , affinchè la parte esistente alla sinistra della virgola sia un numero compreso tra 1000 e 10000 , il numero dato*

si trova ridotto ad un intero unito ad una decimale, indi si trovino li logaritmi di due numeri uno delli quali superi di una unità l'intero, che accompagna la decimale, e l'altro sia lo intero medesimo, che accompagna la decimale, e si trovi la differenza di questi due logaritmi, e moltiplicando la parte decimale per la differenza trovata delli due logaritmi, il prodotto si unisca al logaritmo del numero intero, che accompagna la decimale, e si avrà il logaritmo del numero decimale, al quale si accresca la caratteristica di tante unità quante ne indica il numero delle cifre separate dal numero dato, ed il risultato sarà il logaritmo dimandato.

Esempio 2. Proponiamoci di trovare il logaritmo di $12\frac{2}{3}$. Riduciamo questo numero

alla espressione frazionaria $\frac{38}{3}$. Poichè il lo-

garitmo di un quoziente è eguale al residuo che si ha togliendo dal logaritmo del dividendo il logaritmo del divisore, noi troveremo il logaritmo di 38, il quale è 1,57978, e quello del divisore 3, il quale è 0,47712, e troviamo la differenza di essi, la quale è 1.10266, ed

essa sarà il $\log.\left(\frac{38}{3}\right)$ ossia di $12\frac{2}{3}$. Dal che

ricaviamo la regola generale; Qualora si deve trovare il logaritmo di un intero unito ad una frazione, si riduca il numero dato ad espressione frazionaria, si trovino li logaritmi delli suoi due termini, indi dal logaritmo del numeratore si sottragga il logaritmo del denominatore, il residuo sarà il logaritmo del numero dato.

Esempio 3. Proponiamoci di trovare il logaritmo della frazione vera $\frac{3}{8}$. Poichè la fra-

zione $\frac{3}{8}$ indica il quoziente, che si avrebbe

dividendo il numeratore 3 per lo denominato-

re 8, il logaritmo di $\frac{3}{8}$ sarà eguale al resi-

duo, che si ha sottraendo il $\log.8$, il quale è 0.90309 dal $\log.3$, il quale è 0.47712, e poichè il $\log.8$ è maggiore del $\log.3$, il re-

siduo verrà negativo, e diremo il $\log.\frac{3}{8}$

$= -0.42597$. Dal che ricaviamo generalmente, che qualora si deve trovare il logaritmo di una frazione vera, dal logaritmo del denominatore si deve sottrarre il logaritmo del numeratore, e prendendo il residuo col segno negativo avremo il logaritmo della frazione data.

Esempio 4. Proponiamoci di trovare il logaritmo di una frazione decimale, oppure di un numero decimale composto da un intero unito con una frazione decimale.

Sappiamo, che se la virgola, che separa la parte intera dalla parte frazionaria di un numero decimale si avvanza verso la destra, il decimale si trova moltiplicato per 10, 100, 1000, etc. secondo il numero delli passi, che essa fa, ne segue che se noi facciamo astrazione della virgola, il decimale si trova moltiplicato per 10 elevato alla potenza indicata dal numero delle cifre decimali della parte frazionaria, quindi se noi troviamo il logaritmo dello intero, che risulta dalla soppressione della virgola, noi troviamo il logaritmo del decimale dato moltiplicato per 10 elevato alla potenza indicata dal numero delle cifre, che avea la decimale data, ed il logaritmo trovato avrà tante unità di più, quante ne indica il numero delle cifre della decimale data, e per avere il logaritmo del numero dato basterà diminuire la caratteristica del logaritmo trovato di tante unità, quante sono le cifre della parte frazionaria del numero dato.

Così se vogliamo il $\log. 3,589$, noi faremo astrazione della virgola, e troveremo il $\log. 3589$, e poichè questo numero è 1000 volte maggiore del numero dato dalla caratteristica del logaritmo, che ad esso appartiene, toglieremo 3 unità, ed avremo $\log.(3,589) = 0.55497$.

Esempio 5. Finalmente proponiamoci di determinare il logaritmo della frazione decimale 0,53, facendo astrazione della virgola, noi troveremo il *log.* 53, il quale è 1.72428, e poichè 53 è 100 volte maggiore della frazione data 0,53, dalla caratteristica del logaritmo trovato toglieremo 2 unità, ed avremo *log.* (0,53) = -1,72428.

Quindi qualora si deve trovare il logaritmo di una frazione decimale, *si trovi il logaritmo di essa considerandola come numero intero, e dalla caratteristica del logaritmo trovato si tolgano tante unità quante sono le cifre della decimale.*

Se poi si deve trovare il logaritmo di un numero decimale composto da una parte intera, e da una altra frazionaria, *si faccia astrazione della virgola, e si trovi il logaritmo dello intero, che ne risulta, e dalla caratteristica del logaritmo trovato si tolgano tante unità, quante ne indica il numero delle cifre della frazione decimale.*

150. Proponiamoci ora il problema inverso. *Dato un logaritmo trovare il numero, al quale esso appartiene.*

Prima di entrare in materia stimo non essere fuori di proposito avvertire, che li logaritmi sono stati calcolati per approssimazione con un numero di cifre decimali maggiore di quello delle cifre, che essi hanno nelle tavole, e perciò essendosi sopprese alcune cifre, si è fatto in modo, che il logarit-

mo registrato nelle tavole differisca dal logaritmo calcolato di una quantità minore di una metà di unità del grado della ultima cifra, quindi quando la soppressione delle cifre ci fa commettere un errore in difetto minore di una metà della unità del grado della ultima cifra, la soppressione si è eseguita senza alterare la ultima cifra del logaritmo notato nelle tavole, ma quando la soppressione di esse ci farebbe commettere un errore maggiore di una mezza unità del grado della ultima cifra, si è accresciuta di una unità l'ultima cifra del logaritmo notato nelle tavole, poichè in questo caso lo errore, che si commette in eccesso è minore di quello, che si sarebbe commesso sopprimendo le cifre, senza alterare l'ultima cifra restante, dal che vediamo, che la ultima cifra delli logaritmi registrati nelle tavole non è esatta, e porta la sua approssimazione alla metà in circa di una unità del suo ordine, e perciò se un logaritmo dato differisce da quello, che si trova nelle tavole di una sola unità del grado della ultima cifra decimale di esso, si può considerare, come lo stesso di quello, che è registrato nelle tavole.

151. Qualora il logaritmo dato si trova nelle tavole, il numero, che ad esso corrisponde nella colonna delli numeri naturali è il numero, a cui esso appartiene.

Esaminiamo ora tutti li casi, che possono accadere, qualora il logaritmo dato *non si trova nelle tavole*, e per facilità ragioniamo sopra degli esempj.

Esempio 1. Proponiamoci di trovare il numero a cui appartiene il logaritmo 3.33441; in primo luogo considerando, che questo logaritmo ha la caratteristica 3, conchiudiamo, che esso appartiene ad un numero compreso tra 1000, e 10000, e poichè esso non esiste nelle tavole, noi cercheremo li due logaritmi, uno delli quali sia prossimo maggiore l'altro prossimo minore del dato, e troviamo il primo essere 3.33445 prossimo maggiore, il quale appartiene a 2160, l'altro 3.33425 prossimo minore al dato appartenente 2159, e conchiudiamo, che il logaritmo dato appartiene ad un numero compreso da 2160, e 2159, e che per conseguenza appartiene al numero 2159 unito ad una frazione, la quale deve essere determinata.

Per determinare la frazione, che deve accompagnare il numero 2159, noi faremo uso del principio dimostrato, che nelli numeri maggiori di 1000, le differenze delli logaritmi delli numeri successivi sono prossimamente proporzionali alle differenze delli numeri, alli quali appartengono, e perciò prenderemo la differenza 0,00020, che esiste tra li logaritmi di 2160, e di 2159, e determineremo la differenza 0,00016, che passa tra il logaritmo dato 3,33441, ed il prossimo minore delle tavole, e ragioneremo così, se per 0,00020 che noi aggiugniamo al logaritmo di 2159, noi accresciamo questo numero di una unità, quanto dovremo aggiugnere al medesi-

mo numero 2159, quando il suo logaritmo si accresce di 0,00016; e stabiliremo la proporzione $0.00020 : 0,00016 :: 1 : x$ e tro-

$$\text{veremo } x = \frac{1 \times 0,00016}{0,00020} = \frac{16}{20} = 0,8; \text{ e con-}$$

chiudiamo, che il numero al quale appartiene il logaritmo dato 3.33441 è 2159,8. Dal che ricaviamo la seguente regola generale, *qualora è dato un logaritmo, il quale ha la caratteristica 3, e non si ritrova nelle tavole, si calcoli la differenza, che passa tra il logaritmo prossimo maggiore, ed il prossimo minore al dato, indi si calcoli la differenza, che esiste tral logaritmo dato, ed il prossimo minore al dato, e si stabilisca la proporzione, dicendo, come sta la differenza, che esiste fra li logaritmi prossimo maggiore e prossimo minore al dato, alla differenza che hanno il logaritmo dato, ed il prossimo minore, così stà l'unità, al quarto proporzionale, questo quarto proporzionale dà la frazione, che deve essere aggiunta al numero, a cui appartiene il logaritmo proposto.*

Esempio 2. Proponiamoci di determinare il numero, a cui appartiene il logaritmo 4.33441.

In primo luogo noi osserviamo, che questo logaritmo eccede la estensione delle tavole, giacchè ha per caratteristica 4, quindi diminuiamo la sua caratteristica di una unità, ed esso è ridotto a 3.33541, indi facendo sopra di

esso le medesime operazioni, che abbiamo fatte nell'esempio precedente, noi troviamo, che il numero a cui esso appartiene è 2159,8, ma quì riflettiamo, che avendo al logaritmo dato diminuita la caratteristica di una unità, noi abbiamo trovato il quoziente del numero dimandato diviso per 10, quindi conchiudiamo, che il numero, al quale appartiene il logaritmo dato è $(2159,8)_{10} = 21598$. Dal che ricaviamo la seguente regola generale, qualora si deve determinare il numero, a cui appartiene un logaritmo, la caratteristica del quale eccede 3, *si diminuisca la sua caratteristica di tante unità quante bisogna, affinché la caratteristica divenga 3, indi si determini il numero, a cui appartiene questo logaritmo così alterato, e si multiplli il numero trovato per quella potenza del 10, della quale il grado è indicato dal numero delle unità, delle quali è stata diminuita la caratteristica del logaritmo dato.*

Esempio 3. Proponiamoci di trovare il numero, al quale appartiene il logaritmo 1.33441, il quale non si trova nelle tavole.

Qui in primo luogo osserveremo, che avendo questo logaritmo la sua caratteristica minore di 3, noi dobbiamo accrescere questa caratteristica di 2 unità, e trasformeremo il logaritmo dato in 3.33441, indi opereremo sopra di esso come abbiamo operato nel primo esempio, e troveremo, che il numero, a cui appartiene il logaritmo 3.33441 è 2159,8,

indi osserveremo, che questo numero non è quello, a cui appartiene il logaritmo dato, ma il quoziente, che si ha dividendo questo numero per 100, poichè si è accresciuta di 2 unità la caratteristica del logaritmo dato, e conchiudiamo, che il logaritmo dato appartie-

ne a $\frac{2159,8}{100} = 21,598$. Quindi ricaveremo la

regola generale; qualora si deve determinare il numero, a cui appartiene un dato logaritmo, il quale ha la caratteristica minore di 3; e non si trova nelle tavole, *alla caratteristica si aggiungano tante unità, quante ne bisognano, affinchè essa divenga 3, si trovi il numero, al quale appartiene il logaritmo così alterato, e si divida il numero trovato per quella potenza di 10, della quale il grado è indicato dal numero delle unità, delle quali è stata accresciuta la caratteristica del logaritmo dato.*

Esempio 4. Proponiamoci di determinare il numero, al quale appartiene il logaritmo -1.33441 , noi incominceremo dallo aggiugnere alla caratteristica di esso tante unità, quante sono necessarie, affinchè essa diventi $+3$, quindi aggiugnendo 4 unità a -1.33441 , avremo 3.33441 , e determineremo, seguendo il processo adoperato negli esempj precedenti, il numero, che corrisponde a 3.33441 , il quale è $2159,8$, ma avendo noi accresciuta la caratteristica del logaritmo dato di 4 unità,

noi abbiamo moltiplicato il numero, a cui il logaritmo dato appartiene per 10^4 , e perciò il

2159,8

logaritmo dato appartiene a $\frac{\quad}{10000} = 0,0021598$.

Dal che ricaviamo, che qualora è dato un logaritmo negativo, e si vuole determinare la frazione, alla quale esso appartiene, si deve operare secondo la seguente regola generale. *Si accresca la caratteristica del logaritmo dato di tante unità, quante ne bisognano, affinchè essa divenga 3, indi si determini il numero, al quale appartiene questo logaritmo così alterato, ed il numero trovato si divida per 10 elevato alla potenza, della quale il grado è indicato dal numero delle unità aggiunte alla caratteristica del logaritmo. dato.*

ARTICOLO III.

Uso delle tavole logaritmiche per gli calcoli numerici.

152. *Moltiplicazione.* Noi abbiamo dimostrato, che il logaritmo del prodotto di più fattori si trova facendo la somma delli logaritmi delli medesimi fattori, quindi qualora si vogliono moltiplicare più fattori, basterà fare la somma delli logaritmi di ciascuno di essi, e trovare il numero, al quale si fatta somma appartiene, per avere il prodotto di-

Esempio. Sia da moltiplicare 258 per 38; cerchiamo li logaritmi di questi due numeri, e facciamo la somma di essi....

$$\begin{array}{r} \log. 258 = 2.41162 \\ \log. 38 = 1.57978 \\ \hline \text{somma} = 3.99140 \end{array}$$

cercandò nelle tavole il numero a cui appartiene il logaritmo 3.99140, troviamo, che esso corrisponde al numero 9804, il quale è il prodotto dimandato.

153. *Divisione.* Noi abbiamo dimostrato, che il logaritmo del quoziente di una divisione si trova sottraendo dal logaritmo del dividendo quello del divisore; quindi volendo dividere con l'ajuto delli logaritmi un numero per un altro, cercheremo nelle tavole li logaritmi del dividendo, e del divisore, indi sottraendo dal logaritmo del dividendo quello del divisore, otterremo il numero corrispondente a tale residuo, il quale sarà il quoziente dimandato.

Esempio. Proponiamoci di dividere 5825 per 25, cerchiamo nelle tavole

$$\log. 5825 = 3.93069$$

$$\log. 25 = 1.39794, \text{ e facciamo di essi la}$$

———— sottrazione, avremo

Residuo 2. 53275, cercandò nelle tavole il numero corrispondente al logaritmo 2.53275 troviamo il numero 341, il quale è il quoziente dimandato.

154. *Elevazione a potenza.* Noi abbiamo di-

mostrato , che il logaritmo della potenza di un numero si ha moltiplicando il logaritmo della radice data per lo numero , che indica il grado della potenza , dal che ricaviamo , che se vogliamo con l'ajuto delli logaritmi elevare e potenza un numero , si deve moltiplicare il logaritmo del numero dato per lo numero , che indica il grado della potenza , alla quale si vuole elevare il numero dato , il prodotto sarà il logaritmo della potenza dimandata , ed il numero che ad esso corrisponde nelle tavole sarà la potenza dimandata del numero dato.

Esempio 1. Proponiamoci di elevare a seconda potenza il numero 26. Si trovi nelle tavole il $\log. 26 = 1.41497$, e si moltiplichi per 2 , avremo 2.82994 , il quale è il $\log. (26^2)$, cercandolo nelle tavole in vece di 2.82994 si trova 2.82995 , il quale poichè differisce dal dato di una sola unità nella ultima cifra decimale , si prende per lo logaritmo dato , ed il numero 676 , che ad esso corrisponde è la potenza seconda di 26.

Esempio 2. Proponiamoci di elevare 15 alla terza potenza. Si trovi il logaritmo di 15 , il quale è 1.17609 , e si moltiplichi per 3 , avremo il prodotto 3.52827 , il quale sarà il logaritmo della terza potenza di 15 , ma esso corrisponde al numero 3375 , dunque $3375 = 15^3$.

Esempio 3. Proponiamoci di elevare la decimale 0,5 alla potenza seconda. Noi inco-

minceremo dal fare astrazione della virgola, considerando la frazione data come un numero intero, troveremo il suo logaritmo, il quale è 0.69897, o lo moltiplicheremo per 2, il quale è il numero, che indica il grado della potenza dimandata, ed avremo $\log.(5^2) = 1.39794$; indi consideriamo, che la seconda potenza di 5 diviene 100 volte maggiore della seconda potenza di 0,5, quindi concludiamo, che il logaritmo 1.39794, appartiene ad un numero 100 volte maggiore del numero dimandato, e che perciò per farlo divenire il logaritmo dimandato, deve essere diminuito di 2, che è il $\log.100$, e poichè sottraendo 2 dal logaritmo trovato 1.39794, il residuo è -0.60206 , concludiamo, che

il rotto $\frac{1}{4}$, al quale esso appartiene è la po-

tenza seconda di 0,5, ma $\frac{1}{4} = 0.25$, dun-

que 0.25 è la potenza dimandato di 0,5

Ragionando della stessa maniera si vede, che dovendo elevare 0,5 al cubo, si moltiplicherebbe il logaritmo di 5 per 3; e si avrebbe il $\log.(5^3)$, il quale appartiene ad un numero 1000 volte maggiore del ricercato, e perciò si deve dal logaritmo trovato sottrarre il $\log.1000$ il quale è 3, ed il numero appartenente al residuo è il cubo ricercato; similmente si può ragionare per le altre potenze di qualsivoglia grado.

155. Fino ad ora abbiamo considerata la frazione decimale di una sola cifra, ma se essa fosse composta di due cifre, come sarebbe 0,38, si avrebbe il suo quadrato moltiplicando il $\log.38$ per 2, e togliendo da questo prodotto il logaritmo di 10000, cioè 4, poichè il quadrato di 38 è 10000 volte maggiore di $(0,38)^2$; il logaritmo del suo cubo si avrebbe moltiplicando per 3 il $\log.38$, e togliendo dal prodotto il $\log.(100^3)$, il quale è 6, e così procedendo per le altre potenze superiori.

Quindi stabiliremo la seguente regola generale, *Per trovare il logaritmo di una potenza qualunque di una frazione decimale, bisogna trovare il logaritmo del numero, che esprime la decimale, come un numero intero, moltiplicarlo per lo grado della potenza, e dal prodotto, che ne risulta levare tante unità, quante ne esprime il prodotto del numero delle cifre decimali per lo numero, che esprime il grado della potenza, a cui si vuole elevare la decimale data.*

156. *Estrazione delle radici.* Si è dimostrato, che il logaritmo della radice di un numero dato è eguale al quoziente, che si ha dividendo il logaritmo del numero dato per lo indice della radice, quindi per trovare la radice del numero dato, basterà trovare il numero, che ha per logaritmo il quoziente, che si ha dividendo il logaritmo del numero dato per lo indice della radice.

Esempio 1. Si cerca di determinare per mezzo delli logaritmi la radice quadrata di 625. Ritroveremo il $\log.625=2.79588$, il quale diviso per 2, dà per quoziente 1.39794, il quale sarà il logaritmo della radice quadrata di 625; e perciò 25, che è il numero corrispondente a questo logaritmo è la radice quadrata di 625.

Esempio 2. Per trovare la radice cubica di 1728, noi divideremo per 3 il $\log.1728$, il quale è 3.32754, avremo il quoziente 1.07918, il quale è il $\log.\sqrt[3]{1728}$, ma esso corrisponde al numero 12, dunque $\sqrt[3]{1728}=12$.

257. Della stessa maniera si può ragionare per le radici di qualsivoglia altro indice. Quantunque quello, che fino ad ora abbiamo esposto relativamente all'uso, che si deve fare delle tavole logaritmiche nelli calcoli numerici, sia sufficiente, tuttavia per esercizio delli giovani proporrò alcuni altri esempj.

Esempio 1. Proponiamoci di determinare

il valore di x nella espressione $x = \frac{60 \times 5}{25}$, per

le cose dette sappiamo, che $\log.x = \log.\left(\frac{60 \times 5}{25}\right)$

$$= \log.60 + \log.5 - \log.25$$

$$\text{Ma } \log.60 = 1.77815,$$

$$\log.5 = 0.69897$$

$$\text{Somma } 2.47712$$

$$\log.25 = 1.39794$$

Residuo = 1.07918, il quale è il logaritmo del valore di x , ma a questo logaritmo corrisponde il numero 12; dunque $x = \frac{60 \times 5}{25} = 12$.

Esempio 2. Proponiamoci di determinare il valore di x nella espressione x

$$x = \frac{54\sqrt[3]{58^2} \times 35\sqrt[2]{254}}{30\sqrt[4]{528^3} \times 7\sqrt[3]{54^2}}, \text{ avremo } \log. x =$$

$$\log. \frac{54\sqrt[3]{58^2} \times 35\sqrt[2]{254}}{30\sqrt[4]{528^3} \times 7\sqrt[3]{54^2}} = \log.54 + \frac{2}{3}\log.58 +$$

$$\log.35 + \frac{1}{2}\log.254 - \log.30 - \frac{3}{4}\log.528 -$$

$$\log.7 - \frac{2}{3}\log.54 \text{ ma } \log.54 = 1.73239$$

$$\frac{2}{3}\log.58 = 1.17562$$

$$\log.35 = 1.54407$$

$$\frac{1}{2}\log.254 = 1.20241$$

Somma delli logaritmi positivi 5.65449

$$\log.30 = 1.47712$$

$$\frac{3}{-} \log.528 = 2.04197$$

$$\frac{4}{\log.7} = 0.84510$$

$$\frac{2}{-} \log.54 = 1.15493$$

$$\frac{3}{-}$$

Somma delli logaritmi negativi 5.51912

Dalla somma 5.65449 delli logaritmi positivi si sottragga la somma de' logaritmi negativi 5.51912, avremo il residuo 0.13537, logaritmo, al quale corrisponde prossimamente il numero 1,366, quindi avremo

$$x = \frac{54\sqrt[3]{58^3} \times 35\sqrt[3]{254}}{30\sqrt[4]{528^3} \times 7\sqrt[3]{54^2}} = 1,366$$

258. Quì è bene di osservare, che sebbene le frazioni vere ci conducano sempre ad avere i logaritmi negativi, pure noi possiamo sfuggirli, ed operare sopra logaritmi sempre positivi, e rendere così li calcoli di approssimazione non solo più facili, ma ancora tali che ci diano delli risultati espressi in decimali, e con quel grado di approssimazione, che a noi piacerà; il che si riduce ad accrescere la caratteristica del logaritmo del numeratore della frazione di un numero qualunque di unità, il quale sebbene sia arbitrario, tuttavia deve essere sempre tanto grande, quanto bisogna per potere da esso sottrarre il logaritmo del

denominatore ; ma questo accrescimento della caratteristica fa sì, che il logaritmo, che ne risulta apparterrà ad un numero 10, 100, 1000 etc., volte maggiore del numero dato, secondo il numero delle unità aggiunte alla caratteristica del logaritmo del numeratore, quindi quando saremo giunti al risultato del calcolo, siamo obbligati a fare sopra di essi le convenienti modificazioni, e questo processo ci dà con somma facilità li risultati delle varie operazioni di calcolo fatte sopra le frazioni in decimali, con quella approssimazione, che a noi piacerà ; noi ragioneremo sopra degli esempj per maggiormente conoscere li vantaggi, che questo processo apporta nelli calcoli di approssimazione.

Esempio 1. Proponiamoci di ridurre in
 frazione decimale la frazione ordinaria $\frac{3}{8}$.

Si cerchino nelle tavole il logaritmo del numeratore 3, e quello del denominatore 8, avremo $\log.3=0.47712$, $\log.8=0.90309$; indi si accresca la caratteristica di $\log.3$ di più unità, per esempio di 3, indi dal $\log.3$ così accresciuto, ossia da 3.47712 si sottragga il $\log.8$, ossia 0.90309, avremo il residuo 2.57403, il quale sarà il logaritmo

di $\frac{3}{8} \times 1000$, quindi cercando nelle tavole

il numero esatto, o prossimo, al quale appar-

tiene il logaritmo 2.57403, troveremo 375, il
quale è il prodotto, che si ha moltiplicando $\frac{3}{8}$

per 1000, otterremo $375 = \frac{3}{8} \times 1000$, e per

conseguenza $\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0.375$, ed avremo

ridotta la frazione $\frac{3}{8}$ alla decimale 0,375.

Esempio 2. Proponiamoci di trovare in
decimali il prodotto di $\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$.

Per le cose dimostrate abbiamo $\log. \left(\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} \right)$
 $= \log.5 + \log.3 - \log.7 - \log.4$. Quindi tro-
vando nelle tavole tutti questi logaritmi, e fa-
cendo le operazioni indicate avremo

$$\log.5 + \log.3 = 1.17609$$

$\log.7 + \log.4 = 1.44716$, indi acrescendo
di 4 unità la caratteristica di 1.17609, avre-
mo 5.17609, il quale sarà il logaritmo del pro-
dotto di 5×3 moltiplicato per 10000; se ora
dal logaritmo 5.17609 sottraiamo la somma
di $\log.7$ e $\log.4$, cioè 1.44716, il residuo sarà

il logaritmo del prodotto di $\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$ multi-

plicato per 10000, e trovando nelle tavole il numero appartenente al logaritmo 5.17609 troveremo essere prossimamente 5357, e con-

chiuderemo che il prodotto di $\left(\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}\right) 10000$

$= 5357$, e dividendo per 10000, avremo

$$\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{5357}{10000} = 0,5357 \text{ con un errore minore di } 0,00001.$$

Se di una frazione data si volesse una radice espressa in decimali approssimativamente fino ad un dato punto di approssimazione, per

esempio, se si volesse la radice quadrata di $\frac{3}{8}$

espressa in decimali con una approssimazione fino alle parti millesime, noi incominceremo dal riflettere, che dovendo essa essere approssimata fino alle parti millesime deve avere tre cifre decimali; ma nella aritmetica si è dimostrato, che il quadrato di una decimale deve avere un numero di cifre doppio di quello delle cifre della radice, dunque concludiamo, che il quadrato della radice dimandata deve avere 6 cifre decimali, quindi noi cambiere-

mo la frazione data $\frac{3}{8}$ nella sua equivalen-

te $\frac{3,000000}{8}$, ma se noi togliamo la virgola

dal numeratore la frazione diviene $\frac{3000000}{8}$,

la quale equivale alla frazione proposta $\frac{3}{8}$
 $\times 1000000$; quindi se noi troviamo la radice
 $\frac{3000000}{8}$ di $\frac{3000000}{8}$, noi troviamo la radice di $\frac{3}{8}$

$\times 1000000$, e trovando il $\log.\left(\frac{3000000}{8}\right)$, noi

avremo il logaritmo di $\left(\frac{3}{8} \times 1000000\right)$, ma il

logaritmo di $\frac{3000000}{8} = \log.3 + \log.1000000$

$-\log.8$; dunque noi troveremo $\log.3 = 0.47712$,
 indi quello di 1000000 , il quale è 6 , e ne fa-
 remo la somma, o ciò che vale lo stesso
 accresceremo di 6 unità la caratteristica di
 0.47712 , ed avremo il $\log.3000000 = 6.47712$,
 dal quale sottrajamo il logarit. di 8 , cioè 0.90309 ,

avremo così il $\log.\left(\frac{3}{8} \times 1000000\right) = 5.57403$;

per prendere il logaritmo della radice quadra-

ta di questa frazione $\frac{3}{8} \times 1000000$ si deve

prendere la metà di 5.57403, la quale è 2.78701 ,²⁴⁵

dunque la radice quadrata di $\frac{3}{8} \times 1000000$ è

il numero a cui corrisponde il $\log.2.78701$,
il quale è prossimamente 612, e conchiude-

remo che la radice quadrata di $\frac{3}{8} \times 1000000$,

è prossimamente 612; ma $\sqrt{\frac{3}{8} \times 1000000}$

$$= \sqrt{\frac{3}{8}} \times \sqrt{1000000}, \text{ e } \sqrt{1000000} = 1000;$$

dunque $\sqrt{\frac{3}{8} \times 1000000} = \sqrt{\frac{3}{8}} \times 1000$, ma

$$\sqrt{\frac{3}{8} \times 1000000} = \sqrt{\frac{3}{8}} \times \sqrt{1000000} =$$

$$\sqrt{\frac{3}{8}} \times 1000, \text{ dunque } \sqrt{\frac{3000000}{8}}, \text{ la quale}$$

è eguale approssimativamente a 612, darà

$$612 = \sqrt{\frac{3}{8}} \times 1000, \text{ e dividendo per } 1000$$

$$\text{avremo } \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{612}{1000} = 0.612, \text{ dunque la}$$

radice quadrata approssimativa di $\frac{3}{8}$ è 0,612,

e lo errore è miuore di 0.001 .

Dal che generalmente conchiudiamo , che qualora con l' ajuto delli logaritmi si vuole trovare in decimali approssimativamente la radice quadrata di una frazione con una approssimazione determinata , si *deve accrescere la caratteristica del logaritmo del numeratore di tante unità , quante ne indica il doppio del numero delle cifre della approssimazione assegnata , e dal logaritmo , che ne risulta si deve sottrarre il logaritmo del denominatore della frazione data , indi cercare il numero , che corrisponde alla metà del logaritmo residuo , dal quale separando tante cifre decimali , quante sono quelle della approssimazione fissata , il risultato sarà la radice dimandata della frazione data approssimata fino al punto fissato di approssimazione.*

Ragionando della medesima maniera facilmente si vede , quale deve essere il processo , che deve adoperarsi per estrarre da una frazione ordinaria la radice di qualsivoglia indice , tuttavia accennerò il processo da tenersi , qualora si volesse approssimativamente estrarre la radice cubica dalla

medesima frazione $\frac{3}{8}$ con la approssimazione
fino alle parti millesime.

Incominceremo, dallo osservare, che la approssimazione dovendo giugnere fino alle parti millesime, la radice dimandata deve avere tre cifre decimali, per la aritmetica sappiamo, che qualora una radice cubica ha un certo numero di cifre decimali, il cubo ne deve avere il triplo, ma per la approssimazione fissata la radice dimandata deve avere 3 cifre decimali, dunque il suo cubo ne

terrà 9. Quindi la frazione data $\frac{3}{8}$ si trasfor-

mi nella sua equivalente $\frac{3,000000000}{8}$, e fa-

cendo astrazione della virgola avremo la fra-

zione $\frac{3000000000}{8}$; Indi si trovi il $\log.3$,

al quale si accresca la caratteristica di 9 unità, e si avrà il $\log.3000000000$, e da esso si sottragga il logaritmo del denominatore 8,

avremo così il $\log.\left(\frac{3000000000}{8}\right)$; prendendo

del logaritmo ottenuto la terza parte, si avrà

il $\log.\sqrt[3]{\frac{3000000000}{8}}$, ossia il $\log.\left(\sqrt[3]{\frac{3}{8}}\right)$

$\times \sqrt[3]{1000000000}$, ma $\sqrt[3]{1000000000}$ è 1000,

248

dunque il numero corrispondente a questo logaritmo, il quale è prossimamente 722 è

eguale alla $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} \times 1000$, e dividendo per 1000,

$$\text{avremo } \sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \frac{722}{1000} = 0,722, \text{ frazione de-}$$

cimale, la quale dà la radice cubica della frazione data approssimata fino alle parti millesime.

259. Fino ad ora abbiamo veduto, come per mezzo delli logaritmi si possono fare le differenti operazioni del calcolo sopra le frazioni ordinarie, dirò ora poche parole per fare vedere come per mezzo delli logaritmi si possono fare le medesime operazioni del calcolo sopra delle frazioni decimali, le quali per la natura delli decimali sono molto più facili di quelle, che si eseguono sopra delle frazioni ordinarie.

Proponiamoci in primo luogo di moltiplicare 48 per 0,52, se noi supprimiamo la virgola nel moltiplicatore, noi lo renderemo 100 volte maggiore, ma noi abbiamo dimostrato, che qualora in una moltiplicazione uno delli fattori si moltiplica per un numero, il prodotto si trova moltiplicato per lo stesso numero; quindi se troviamo li logaritmi di 48, e 52 li quali sono $\log. 48 = 1.68124$, e $\log. 52 = 1.71600$, e di essi faremo la somma, avre-

mo 3,39724, e conchiuderemo, che il numero 2496, che ad essa corrisponde, è il prodotto di 48 per 52; ma questo prodotto è 100 volte maggiore del prodotto dimandato di 48×0.52 , dunque per ridurlo al suo valore deve dividersi per 100, o ciò che vale lo stesso bisogna separare con la virgola dalla destra di esso due cifre decimali, ed avremo $48 \times 0.52 = 24.96$.

Se ambi li fattori contenessero delle cifre decimali, allora si farebbe astrazione delle virgole, considerandoli come numeri interi, indi troveremo il numero corrispondente alla somma delli logaritmi delli fattori, e separeremo tante cifre decimali dalla destra di esso, quante se ne contenevano nelli due fattori.

Se ci proponiamo di dividere 36 per 0,75, noi incominceremo, come abbiamo già detto nella aritmetica, ad aggiugnere allo intero dividendo due zeri decimali, indi sopprimeremo la virgola sì nel dividendo, che nel divisore, ed avremo moltiplicato sì il dividendo, che il divisore per lo stesso numero 100, e perciò tanto sarà dividere 36 per 0.75, che 3600 per 75, giacchè come in aritmetica si è dimostrato il quoziente non si altera, qualora sì il dividendo, che il divisore si moltiplicano per lo stesso numero, quindi volendo fare uso delli logaritmi, troveremo li logaritmi del dividendo e del divisore, e da quello del dividendo sottrarremo quello del divisore, e vedremo quale numero corrisponde alla dif-

ferenza trovata delli logaritmi, ed esso sarà il quoziente ricercato, nel caso proposto avremo

$$\log. 3600 = 3.55630$$

$$\log. 75 = 1.87506$$

$$\text{Differenza } 1.68124$$

Quindi il logaritmo del quoziente dimandato è 1.68124, ed il numero ad esso corrispondente 48 è il quoziente dimandato.

Proponiamoci in ultimo luogo di trovare la radice quadrata della frazione decimale 0,582, la quale differisca della vera di una quantità

I

minore $\frac{\quad}{10000}$; noi incominceremo dal riflet-

tere, che volendo noi, che la approssimazione sia tale, che la radice dimandata abbia 4 cifre decimali, e sapendo, che il quadrato di una frazione decimale deve avere un numero di cifre doppio di quello della frazione data, concludiamo che per potere estrarre la radice dimandata dalla decimale data, la quale abbia 4 cifre, la frazione data si deve trasformare in una altra ad essa equivalente, la quale abbia 8 cifre decimali, il che facciamo aggiugnendo cinque zeri alla destra della decimale data, ed avremo $0,582 = 0,58200000$.

Se in questa frazione decimale sopprimiamo la virgola, essa equivalerà a $0,582 \times 100000000$, estraendo la radice quadrata da 528000000 avre-

mo la radice di $0,582 \times \sqrt{1000000}$, cerchiamo per mezzo delli logaritmi la radice quadrata di 52800000, il che faremo trovando il $\log.52800000$, il quale è 7.76492, indi prenderemo la metà di sì fatto logaritmo, la quale è 3.88246, alla quale prossimamente appartiene il numero 7629, il quale sarà la radice quadrata di $0,582 \times \sqrt{100000000}$, ma la radice quadrata di 100000000 è 10000, dunque 7629 è eguale $10000 \sqrt{0,582}$, e divi-

dendo per 10000, avremo $\sqrt{0,582} = \frac{7629}{10000}$

$= 0,7629$.

Similmente ragionando si può estrarre qualunque altra radice da una frazione decimale, facendo attenzione, che qualora si tratta di radice cubica, il cubo della decimale data deve avere un numero di cifre triplo di quello delle cifre, che ha la approssimazione fissata, quando si tratta di radice quarta, quinta etc., il numero delle cifre delle rispettive potenze deve essere rispettivamente quadruplo, quintuplo etc. del numero delle cifre, che ha la approssimazione fissata.

260. Nelli calcoli numerici, nelli quali si fa uso delli logaritmi, non piccolo vantaggio porta ancora il servirsi delli complementi aritmetici, poichè se in vece di sottrarre un logaritmo da un altro, si aggiugne al primo il complemento del secondo, si ottiene lo stesso logaritmo, che si sarebbe avuto facendo là

effettiva sottrazione, con la sola differenza, che esso si trova aumentato di una unità di grado superiore alle unità della caratteristica, ossia di 10 unità di quelle della caratteristica, il che è chiaro per quello, che si è dimostrato nella Aritmetica; Quindi in vece di sottrarre li logaritmi da una somma di altri logaritmi, noi possiamo alla somma de' logaritmi aggiungere li rispettivi complementi aritmetici de' li logaritmi che si debbono sottrarre, avendo la attenzione di togliere dalla somma finale tante volte 10 unità della caratteristica, quanti sono li complementi aritmetici aggiunti.

Esempio 1. Si vuole trovare il $\log. \left(\frac{75 \times 40}{5} \right)$,

il quale è eguale al $\log. 75 + \log. 40 - \log. 5$.

Trovo nelle tavole li logaritmi di 75, di 40, ed il complemento aritmetico di $\log. 5$; avrò

$$\log. 75 = 1.87506$$

$$\log. 40 = 1.60206$$

$$\text{Compl. Arit. } \log. 5 = 9.30103$$

$$\text{Somma} = 12.77815$$

In questa operazione avendo fatto uso di un solo complemento aritmetico, dalla somma trovata 12.77815 tolgo 10 unità dalla carat-

teristica, e conchiuderò, che $\log. \left(\frac{75 \times 40}{5} \right)$

253

$= 2.77815$, al quale corrisponde nelle tavole
il numero 600, e conchiudo, che $\frac{75 \times 40}{5}$

$= 600$:

Esempio 2. Determinare per approssimazione con l'ajuto delli logaritmi, e delli complementi aritmetici il valore di x nella formola

$$x = \frac{350 \sqrt[3]{35^2} \times \sqrt{75}}{76 \sqrt[4]{(351)^3}}, \text{ prendendone li logaritmi,}$$

avremo $\log. x = \log. 350 + \frac{2}{3} \log. 35 + \frac{1}{2}$

$$\log. 75 - \log. 76 - \frac{3}{4} \log. 351,$$

$$\log. 350 = 2.54407$$

$$\frac{2}{3} \log. 35 = 1.02938$$

$$\frac{1}{2} \log. 75 = 0.93753$$

$$\text{Compl. Arit. di } \log. 76 = 8.11919$$

$$\text{Compl. Arit. di } \frac{3}{4} \log. 35 = 8.09102$$

$$\text{Somma } 20.72119$$

Poichè in questo calcolo abbiamo fatto uso di due complementi aritmetici, diminuirò di 20 la caratteristica della somma, ed avremo

$$\log. x = \log. \frac{350 \sqrt[3]{35^2} \times \sqrt[7]{5}}{76 \sqrt[4]{(351)^3}} = 0.72119$$

e cercando il numero, al quale corrisponde il logaritmo 0,72119, troveremo, che esso è prossimamente 5,262; e conchiuderemo, che

$$x = \frac{350 \sqrt[3]{35^2} \times \sqrt[7]{5}}{76 \sqrt[4]{(351)^3}} = 5,262.$$

261. Fino ad ora ci siamo occupati della applicazione delli logaritmi, qualora le quantità date sono espresse in numeri, vediamo ora in quale maniera si può trasformare una formola algebrica, per renderla atta a potere ad essa applicare li logaritmi, qualora alle quantità date espresse in lettere si assegnino quali siovogliono valori numerici.

Supponiamo, che la soluzione di un problema ci dia $x = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)3a}}{\sqrt{(a+b)\sqrt{cd}}}$, vogliamo met-

tere questa formola in istato tale, che dando ad a, b, c, d valori numerici particolari, si possa determinare il valore di x facendo uso delli logaritmi.

In primo luogo noi diremo $\log. x = \log. \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)3a}}{\sqrt{(a+b)\sqrt{cd}}} = \log. \sqrt{(a^2 - b^2)3a} -$

$\log.\sqrt{(a+b)\sqrt{cd}}$; ma il logaritmo di a^2-b^2 non potrebbe determinarsi, giacchè li logaritmi non possono essere applicati alle somme, ed alle differenze de' numeri, quindi, sapendo, che la differenza delli quadrati di due numeri è eguale al prodotto, che si ha moltiplicando la somma per la differenza delli

medesimi numeri, metteremo $\sqrt{a^2-b^2}$

sotto la forma $\sqrt{(a+b)(a-b)}$, ed avremo

$$\log.\sqrt{(a^2-b^2)3a} = \log.\sqrt{(a+b)(a-b)3a}$$

$$= \frac{1}{2} [\log.(a+b) + \log.(a-b) + \log 3 + \log.a;$$

$$\text{ed il } \log.\sqrt{(a+b)\sqrt{cd}} = \frac{1}{2} [\log.(a+b) + \frac{1}{2}$$

$$\log.c + \frac{1}{2}\log.d]. \text{ Quindi } \log.x = \frac{1}{2} [\log(a+b)$$

$$+ \log.(a-b) + \log.3 + \log.a - \frac{1}{2} [\log.(a+b)$$

$$+ \frac{1}{2}\log.c + \frac{1}{2}\log.d] \text{ espressione tale, che}$$

dando alle quantità a, b, c, d qualunque valore numerico, il valore di x si determina facilmente facendo soltanto operazioni di addizione, sottrazione, e semplici divisioni.

Similmente ragionando si può operare sopra di altre formole algebriche, qualora esse vogliono ridursi alla forma, che è necessaria, affinchè dandosi alle quantità letterali valori particolari numerici, possano li valori di esse essere determinati per mezzo delli logaritmi.