C A P. VI.

Della estrazione delle radici.

Articolo I.

76. Noi abbiamo detto nella teoria della multiplicazione, che la potenza m di una quantità è il prodotto di m fattori eguali a questa quantità, ed abbiamo dimostrato, 1 che per elevare una quantità ad una potenza dobbiamo multiplicare lo esponente della quantità per lo numero, che indica il grado della potenza. 2. Che per elevare un prodotto ad una potenza si deve elevare ciascheduno de' fattori alla potenza dimandata, e per conseguenza multiplicare lo esponente di ciascheduno fattore per lo numero, che indica il grado della potenza. 3. Che per elevare un rotto ad una potenza si debbono elevare separatamente alla potenza dimandata li due termini della frazione. 4. Che qualunque potenza di grado pari è sempre affetta dal segno $+$; e che qualunque potenza di grado dispari è affetta da quel segno medesimo, da cui era affetta la radice; Quindi considerando, che elevando a^m alla potenza n, noi dobbiamo multiplicare lo esponente m della lettera a per lo grado n della potenza, ne segue che dovendo estrarre da a^m la radice n, da noi si deve dividere lo esponente m per lo indice n della radice, ed avremo $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, quindi noi abbiamo due differenti maniere per indicare la operazione della estrazione della ra-

dice n della quantità a^m, la prima delle quali è $\sqrt[n]{a^m}$, da noi stabilita per convenzione, l' altra $a^{\frac{m}{n}}$ è una conseguenza della notazione adottata per esprimere le potenze, li gradi delle quali sono numeri interi. Dippiù dovendo noi dal prodotto $a^m b^n c^p$ estrarre la radice q, noi la estrarremo da ciaschedun fattore in particolare, e perciò evidentemente avremo $\sqrt[q]{a^m b^n c^p} = a^{\frac{m}{q}} b^{\frac{n}{q}} c^{\frac{r}{q}}$; e finalmente quando cerchiamo la radice di una frazione dobbiamo estrarre la radice dimandata separatamente da ciascuno delli due termini della frazione,

77. In oltre qualora dobbiamo estrarre la radice di grado pari da una quantità affetta dal segno $+$, noi affettaremo la radice col segno $\pm$, poichè questa quantità produce sempre la stessa potenza tanto se si prende col segno $+$, quanto se si prende col $-$, Dippiù dovendo la potenza di grado dispari portare il medesimo segno, che avea la radice, conchiuderemo, che alla radice di grado dispari daremo il segno $+$, oppure il segno $-$, secondochè le quantità data ha il segno $+$, oppure il segno $-$. Quindi $\sqrt[2n]{a^m} = \pm a^{\frac{m}{2n}}$, e $\sqrt[2n+1]{\pm a^m} = \pm a^{\frac{m}{2n+1}}$.

78. Finalmente noi chiaramente vediamo, che la radice di grado pari di una quantità

negativa non può essere nè positiva, nè negativa, giacchè una quantità sì positiva, che negativa elevata a potenza di grado pari dà una quantità positiva, quindi una quantità della forma $\sqrt[2n]{-a^m}$ non può avere alcun valore reale; queste specie di espressioni algebraiche si chiamano *espressioni immaginarie*;

79. Quindi abbiamo tre nuove forme di espressioni algebraiche, cioè quelle, che sono sottoposte ad un segno radicale, quelle che sono affette da esponenti frazionari, e finalmente quelle che sono immaginarie, quindi dobbiamo cercare li metodi per eseguire sopra di esse le operazioni del calcolo.

Articolo II.

Operazioni preparatorie al calcolo delli radicali.

80. Noi diamo il nome di *radicali simili* a quelli radicali, li quali hanno la medesima quantità sottoposta a segni radicali, li quali hanno il medesimo indice, quantunque differiscano nelli coefficienti, e nelli segni, e si dicono radicali dissimili quelli, che mancano di qualcheduna di queste condizioni; così li radicali $2a\sqrt[n]{b^m}$, $5b\sqrt[n]{b^m}$ sono simili, come ancora $(3a+5b)\sqrt[n]{a^m}$, $(5c-2d)\sqrt[n]{a^m}$ sono anche simili; Li radicali $3\sqrt[n]{a^m}$, $2\sqrt[n]{b^r}$ sono

dissimili, poichè sebbene abbiamo il medesimo indice, hanno quantità differenti sotto del segno, come anche dissimili sono i radicali $\sqrt[n]{a^p}$, $\sqrt[m]{a^p}$, poichè sebbene abbiamo la medesima quantità sotto de' segni, hanno indici differenti, però spesso accade, che due radicali nella maniera come si presentano sembrano dissimili, e qualora si riducono secondo il genio della lingua algebraica alla più semplice espressione, essi divengono simili; quindi prima di eseguire le operazioni del calcolo sopra delli radicali conviene ridurli alla loro più semplice espressione; così per esempio, se noi abbiamo li due radicali $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{a^5}$, noi facilmente conosciamo, che essi ridotti alla loro più semplice espressione, divengono simili, in fatti $\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2\times a}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{a}=a\sqrt{a}$, e $\sqrt{a^5}=\sqrt{a^4\times a}=\sqrt{a^4}\times\sqrt{a}=a^2\sqrt{a}$, e li due radicali $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{a^5}$, che sembravano dissimili, sono suscettibili di esser ridotti ad una forma sotto la quale essi sono simili, riducendoli alla loro minima espressione, quindi cerchiamo il metodo, che dobbiamo tenere per ridurre li radicali alla loro più semplice espressione.

81. Proponiamoci per esempio di ridurre alla più semplice espressione il radicale $\sqrt[3]{a^8b^7c^3d^{11}}$; noi sappiamo, che la radice di un prodotto

equivale al prodotto delle radici delli fattori, dalli quali esso è composto; quindi possiamo scomporre questo radicale in due fattori, uno delli quali sia il prodotto di tutti li fattori, che sono potenze perfette del terzo grado, cioè quelli che hanno gli esponenti multiplici di 3, ed il secondo abbia sotto del segno il prodotto di tutti li fattori, che hanno gli esponenti minori di 3, ed avremo $\sqrt[3]{a^8b^7c^3d^{11}}$ $=\sqrt[3]{a^6.\,a^2.\,b^6.\,b.\,c^3.\,d^9.\,d^2}=\sqrt[3]{a^6\;b^6\;c^3\;d^9}$ $\times\sqrt[3]{a^2bd^2}$, essendo il radicale dato ridotto a questa forma, vediamo chiaramente, che dalla prima parte di esso possiamo estrarre la radice terza, giacchè esso si riduce a $\sqrt[3]{a^6}\times\sqrt[3]{b^6}$ $\times\sqrt[3]{c^3}\times\sqrt[3]{d^9}=a^2\,b^2\,cd^3$, ed il radicale dato sarà ridotto ad $a^2\,b^2\,cd^3\sqrt[3]{a^2\,bd^2}$. Potrebbe il radicale dato avere sotto del segno radicale un fattore numerico, allora saremo obligati a trovare li fattori semplici di essi, e mettere sopra ciascuno di essi un esponente indicato dal numero delle volte, che ciascheduno di essi entra come fattore nel numero dato, così se sia dato il radicale $\sqrt[3]{43200a^8b^7c^3d^{11}}$; noi incominceremo dal trovare tutti li divisori primi del numero 43200, e noi troveremo, che in esso vi è 2 sei volte fattore, 3 tre volte fattore, e 5 due volte fattore, quindi esso si riduce a $2^6.3^3.5^2$, quindi sostituiamo sotto del segno questa espressione in vece del numero 43200; ed il radicale prenderà la forma

$$\sqrt[3]{2^6.3^3.5^2a^8b^7c^3d^{11}}=\sqrt[3]{2^6.3^3a^6b^6c^3d^9}\times\sqrt[3]{5^2a^2bd^2}$$

$$=2^2.3a^2b^2cd^3\sqrt[3]{5^2a^2bd^2}=12a^2b^2cd^3\sqrt[3]{25a^2bd^2}$$

82. Quindi ricaviamo la seguente regola generale, per *ridurre un radicale alla sua più semplice espressione si mettano fuori del radicale tutti li fattori, che sono potenze perfette del grado indicato dall' indice del radicale, lasciando sotto del medesimo segno soltanto quelli fattori, che non sono potenze perfette, indi avendo estratta la radice dal prodotto delle potenze perfette, si metta questa radice come coefficiente del radicale, il quale ha sotto del segno il prodotto di tutti li fattori, che non sono potenze perfette del grado espresso dall' indice del radicale.*

83. Alcune operazioni di calcolo non possono eseguirsi sopra delli radicali, qualora essi hanno indici differenti, quindi è necessario cercare il processo, che deve tenersi per ridurre al medesimo indice li radicali, che hanno indici differenti, senza che il loro valore si alteri; processo che noi facilmente troveremo, qualora avremo dimostrato, che un radicale non cambia di valore, qualora si multiplicano o si

dividono per lo stesso numero sì l' indice del radicale, che l' esponente della quantità sottoposta al segno.

84. Noi sappiamo, che $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$; ma della frazione $\frac{m}{n}$ non si cambia il valore se li suoi due termini si multiplicano per lo medesimo numero r, dunque $\frac{mr}{nr}=\frac{m}{n}$; e perciò $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mr}{nr}}$; ma $a^{\frac{mr}{nr}}=\sqrt[nr]{a^{mr}}$ ed $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$; dunque $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nr]{a^{mr}}$; dunque il *valore di un radicale non si altera, qualora si multiplicano per uno stesso numero sì l' indice del radicale, che lo esponente della quantità sottoposta al segno.*

Con un simile raziocinio si dimostra, che il valore di un radicale non si altera, qualora per un medesimo numero si dividono sì l' indice del radicale, che l' esponente della quantità sottoposta al segno. In fatti $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$; ma del rotto $\frac{m}{n}$ non si altera il valore, se li suoi due termini si dividono per qualunque numero r; dunque $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{\left(\frac{m}{r}\right)}{\left(\frac{n}{r}\right)}}$; ma $a^{\frac{\left(\frac{m}{r}\right)}{\left(\frac{n}{r}\right)}}=\sqrt[\frac{n}{r}]{\left(a^{\frac{m}{r}}\right)}$

dunque $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[\frac{n}{r}]{\left(a^{\frac{m}{r}}\right)}$ Sicchè il valore di *un radicale non si altera se si dividono per lo stesso numero sì l' indice del radicale , che lo esponente della quantità sottoposta al segno.*

In conseguenza de' principj dimostrati si ricava evidentemente il processo , che si deve tenere per ridurre al medesimo indice li radicali , che hanno indici differenti ,

In fatti se abbiamo $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[q]{a^p}$, sapendo noi che il valore del primo radicale $\sqrt[n]{a^m}$, non si altera multiplicando sì l' indice n , che lo esponente m della quantità sottoposta al segno per p, il radicale $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$, similmente multiplicando per n sì l' indice q del radicale $\sqrt[q]{a^p}$, che lo esponente p della quantità ad esso sottoposta , avremo $\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{pn}}$; quindi qualora dobbiamo ridurre due radicali di diverso indice al medesimo indice , noi multiplicheremo sì l' indice , che lo esponente della quantità sottoposta al segno del primo radicale per lo indice del secondo ; e tanto l'indice quanto lo esponente della quantità sottoposta al secondo radicale per lo indice del primo ; e generalmente per ridurre più radicali di diverso indice al medesimo indice, noi *multiplichiamo sì l' indice, che l' esponente che ha la quantità sottoposta al segno radicale di ciascheduno radicale per lo prodotto degli indici di tutti gli altri radicali.*

Non è fuori di proposito di avvertire quì, che qualora si ha un radicale, nel quale l'indice, e lo esponente della quantità sottoposta al segno hanno un fattore comune, esso si può supprimere, senza che il radicale si alteri, così se abbiamo $\sqrt[mn]{a^{pn}b^{qn}c^{rn}}$, noi lo riduciamo alla forma più semplice $\sqrt[n]{a^p b^q c^r}$.

Articolo III.

Della composizione de' radicali.

Addizione. Per addizionare più radicali, se essi sono dissimili altro non possiamo fare, che scriverli gli uni appresso degli altri conservando ad essi li medesimi segni; quando poi essi sono simili addizioniamo li coefficienti, appresso alli quali scriviamo il radicale tale quale esso si trova. Così se dobbiamo addizionare $3\sqrt{a-b}$ con $5\sqrt{a-b}$, noi faremo la somma de' coefficienti, e scriveremo la somma $8\sqrt{a-b}$; similmente la somma di $6ab\sqrt{a^2-b^2}$, e di $(5a^3-6)\sqrt{a^2-b^2}$ sarà $(6ab+5a^3-6)\sqrt{a^2-b^2}$; e quella di..........

$(6a^3-8a+2)\sqrt[3]{a^5-b}$ e di $-(5a^3-7a)\sqrt[3]{a^5-b}$ sarà $(a^3-a+2)\sqrt[3]{a^5-b}$.

Multiplicazione. Qualora più radicali, che hanno il medesimo indice debbono multiplicarsi insieme, noi considereremo, che avendo dimostrato, che la radice di un prodotto è eguale al prodotto delle radici delli fattori, come per esempio $\sqrt{abc}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}$; reciprocamente ne segue, che $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}=\sqrt{abc}$; quindi ricaviamo la regola generale, che per fare il prodotto di più radicali, che hanno il medesimo indice, *si debbono moltiplicare le quantità sottoposte al segno, ed affettare il prodotto del medesimo segno radicale.*

Se poi le quantità fossero sottoposte a segni radicali di indici differenti, noi le ridurremo prima al medesimo indice, ed indi opereremo sopra di esse secondo la regola data; così dovendo multiplicare $\sqrt[n]{a^m}$ per $\sqrt[q]{b^p}$, noi le ridurremo al medesimo indice, ed avremo $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nq]{a^{mq}}$, e $\sqrt[q]{b^p}=\sqrt[nq]{b^{np}}$; ed il prodotto delli due radicali dati sarà $\sqrt[nq]{a^{mq}b^{np}}$

Elevazione a potenza. Dovendo elevare $\sqrt[n]{a^m}$ alla seconda potenza, noi avremo $\sqrt[n]{(a^m)^2}$ $=\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^m\times a^m}=\sqrt[n]{a^{2m}}$; similmente

$$\sqrt[n]{(a^m)^3}=\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{m+m+m}}=\sqrt[n]{a^{3m}};$$

e generalmente avremo $\sqrt[n]{(a^m)^p}=\sqrt[n]{a^{mp}}$; Dal che ricaviamo la regola generale, che qualora un radicale si deve elevare ad una potenza intera, e positiva, bisogna *elevare alla potenza dimandata la quantità posta sotto del segno, o ciò che vale lo stesso, multiplicare gli esponenti di questa quantità per lo grado della potenza, e sottomettere la quantità trovata al medesimo segno radicale.*

Articolo iv.

Decomposizione delli radicali.

Sottrazione. Dovendo sottrarre da un radicale un altro radicale, se essi sono dissimili, basterà cambiare il segno al radicale, che deve essere sottratto e scriverlo appresso di quello dal quale si deve sottrarre; se poi essi sono simili si esegue la sottrazione sopra delli coefficienti, e si scrive il radicale appresso al residuo trovato delli coefficienti.

Così se dobbiamo sottrarre $\sqrt[q]{a^p}$ da $\sqrt[n]{b^m}$, noi scriveremo il residuo $\sqrt[n]{b^m}-\sqrt[q]{a^p}$, se si deve sottrarre $(3a-5c)\sqrt[n]{b^m}$ da $(7a-3c)\sqrt[n]{b^m}$; noi avremo per residuo $(4a+2c)\sqrt[n]{b^m}$

Divisione. Supponiamo in primo luogo, che li radicali dati sieno sottoposti a segni radicali del medesimo indice, come per esempio $\sqrt[n]{a^m}$ da dividere per $\sqrt[n]{b^p}$, noi considereremo, che se dovessimo elevare $\frac{a}{b}$ alla potenza n, noi eleveremo separatamente li suoi termini alla potenza n; quindi reciprocamente se si deve estrarre la radice n da una frazione, dobbiamo estrarla separatamente da ciascuno delli suoi termini, e perciò, che $\sqrt[n]{\left(\frac{a^m}{b^n}\right)} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^p}}$;

dunque $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^p}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a^m}{b^n}\right)}$; Quindi ricaviamo, che qualora dobbiamo dividere un radicale per un altro radicale del medesimo indice, *noi divideremo la quantità che è sotto del segno nel dividendo, per quella, che è sotto del segno nel divisore, e sottoporremo il quoziente al medesimo segno radicale.*

Se li radicali avessero indici differenti li ridurremo prima allo stesso indice, indi opereremo sopra di essi secondo la regola data.

Estrazioni delle radici. Noi abbiamo veduto, che per elevare a^m alle potenze successive n, p, bisognava multiplicare l' esponente m

per n, p, ed abbiamo $((a^m)^n)^p = a^{mnp}$, quindi se dalla quantità a^m si vogliano estrarre le radici successive n, p, da noi si deve dividere lo esponente m per lo prodotto degli indici n, p, e perciò $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^m}} = a^{\frac{m}{np}}$, ma $a^{\frac{m}{np}} = \sqrt[np]{a^m}$, dunque per estrarre la radice p da $\sqrt[n]{a^m}$ basterà *multiplicare lo indice n del radicale per lo indice della radice dimandata, e scrivere sotto del segno la medesima quantità*, e se dal medesimo radicale si dovessero estrarre più radici successive, la operazione si riduce a *multiplicare lo indice del radicale per lo prodotto di tutti gli indici delle radici dimandate, e lasciare sotto del segno la medesima quantità.*

Quì stimo non essere fuori di proposito avvertire, che in tutto quello, che precede noi abbiamo considerata la quantità $\sqrt[n]{a}$, come una quantità assoluta, e perciò suscettibile di un solo valore, che noi chiameremo *valore aritmetico*, ma se da noi si considera algebraicamente, essa è suscettibile di un numero n di valori; in fatti se noi supponiamo $\sqrt[n]{a} = x$, elevando ambi li membri alla potenza n, avremo $a = x^n$, oppure $x^n - a = o$;

e noi vedremo nella teoria delle equazioni a due termini, che questa equazione fornisce n valori della incognita x.

Articolo V.

Del calcolo delli radicali immaginari, che hanno il numero 2 per indice

85. Nello esporre le regole del calcolo delli radicali immaginari, noi non ci arresteremo ad esporre le regole della addizione, e della sottrazione, giacchè quando essi sono dissimili, per addizionarli *basterà scriverli l' uno appresso l' altro con i propri segni; e qualora sono simili basterà addizionare li coefficienti; ed appresso alla somma trovata di essi scrivere il radicale tale quale esso è*. Nella sottrazioue poi, se essi sono dissimili si *cambieranno li segni della espressione, che deve essere sottratta, indi essa si scriverà in seguito di quella, da cui deve essere sottratta*, se poi essi sono simili, *si esegue la operazione sopra delli coefficienti, ed il residuo trovato si mette per coefficiente del radicale.*

86. *Moltiplicazione e divisione.* Prima di esporre il metodo, che si deve mettere in opera per eseguire la multiplicazione delli radicali immaginari, si deve osservare, che qualora si deve estrarre la radice quadrata, per esempio da a^2, noi non sappiamo se

la sua radice a sia stata presa col segno $+$, o col segno $-$ per formare a^2, giacchè $+a^2$ può essere il prodotto tanto di $+a\times+a$, quanto di $-a\times-a$, quindi la radice quadrata di $+a^2$ deve essere preceduta dal doppio segno $\pm$; ma qualora conosciamo quale delle due quantità $+a$, oppure $-a$ è stata multiplicata per se medesima per produrre $+a^2$, non è più in nostro potere di prendere l' altra, quindi quando noi sappiamo, che multipliando $\sqrt{-a}$ per $\sqrt{-a}$, abbiamo prodotto $\sqrt{+a^2}=\pm a$, sapendo noi, che la quantità $+a^2$ esistente sotto del segno è nata da $-a\times-a$ non può più avere luogo il segno ambiguo $\pm$, qualora dobbiamo trovare il valore di $\sqrt{+a^2}$, e dobbiamo scrivere $\sqrt{a^2}=-a$, se dunque dobbiamo trovare il prodotto di $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{1^2}$, diremo in questo caso che $\sqrt{1^2}=-1$, poichè sappiamo, che in questo caso la unità sotto del segno radicale è il prodotto di -1×-1.

87. Noi abbiamo dimostrato, che volendo elevare ad una data potenza il prodotto di più fattori, dobbiamo fare il prodotto di tutte le potenze delli fattori, quindi se dobbiamo fare la potenza p del prodotto di $a^m\times-b^n\times c^r$, noi troveremo questa potenza elevando ciascuno delli fattori a^m, $-b^n$, c^r alla potenza p, ed indi facendo il prodotto delle potenze trovate; dunque reciprocamente la radice di una quantità composta da più fattori, sieno essi positivi, sieno negativi equi-

vale al prodotto delle radici delli medesimi fattori, quindi se noi abbiamo il radicale $\sqrt{-a}$, chiaramente vediamo, che esso equivale a $\sqrt{a\times-1}=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$, e che $\sqrt{-b}=\sqrt{b\times-1}=\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$, e conchiudiamo che se dobbiamo multiplicare $\sqrt{-a}$ per $\sqrt{-b}$, il prodotto sarà quello medesimo, che avremo multiplicando $\sqrt{a}\sqrt{-1}$ per $\sqrt{b}\sqrt{-1}$, ma $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, e $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$, dunque $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}$

Con lo stesso raziocinio si fa vedere, che

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}};$$

Non è necessario arrestarci a dimostrare che $\sqrt{-a}\times\sqrt{b}=\sqrt{-ab}$, e che $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}=$

$$\sqrt{\frac{-a}{b}}=\sqrt{-\frac{a}{b}}$$

88. *Elevazione a potenza*. Considerando sempre $\sqrt{-a}$ come il prodotto di $\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$, si vede chiaramente, che per elevare la espressione immaginaria $\sqrt{-a}$ ad una potenza n, noi avremo $(\sqrt{-a})^n=(\sqrt{a})^n(\sqrt{-1})^n$, quindi tutta la ricerca si riduce a trovare la maniera da conoscere il valore della espressione $(\sqrt{-1})^n$; prima però di occuparci di questa ricerca sarà ben fatto di osservare, che tutti li numeri possono essere posti sotto una delle quattro forme seguenti $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, secondo che il residuo, che si ha dividendo questo numero per 4 è zero, 1, 2, oppure 3; della medesima maniera noi potremmo mettere tutti li numeri sotto le forme $3n$, $3n+1$, $3n+2$, secondo che il residuo, che si ha dividendo questo numero per 3 è zero, uno, o due, e così per altri numeri; noi però consideriamo li numeri posti sotto le prime forme regolate sopra del numero 4, poichè esse sono quelle, che fanno al nostro proposito.

Ricerchiamo quindi le potenze successive di $\sqrt{-1}$, esse ci daranno il quadro seguente, nel quale si vedono li processi, che si debbono tenere per trovarle, ed i risultati di essi

$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1}$

$(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$

$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\times\sqrt{-1}=-1\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$

$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2\times(\sqrt{-1})^2=-1\times-1=+1$

$(\sqrt{-1})^5=(\sqrt{-1})^4\times\sqrt{-1}=+1\sqrt{-1}=+\sqrt{-1}$

$(\sqrt{-1})^6=(\sqrt{-1})^4\times(\sqrt{-1})^2=+1\times-1=-1$

$(\sqrt{-1})^7=(\sqrt{-1})^6\times\sqrt{-1}=-1\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$

$(\sqrt{-1})^8=(\sqrt{-1})^4\times(\sqrt{-1})^4=+1\times+1=+1$

Considerando questo quadro noi vediamo, che le potenze 5^a, 6^a, 7^a, 8^a, di $\sqrt{-1}$ sono le medesime potenze 1^a, 2^a, 3^a, 4^a di $\sqrt{-1}$, lo stesso accaderebbe per le quattro potenze seguenti, e così in avanti, quindi tutte le potenze di $\sqrt{-1}$ possono essere ridotte a quattro classi, cioè a quelle che avrebbero lo esponente della forma $4n$, quelle che avrebbero lo esponente della forma $4n+1$, quelle che avrebbero lo esponente della forma $4n+2$, e quelle finalmente, che avrebbero lo esponente della forma $4n+3$

In fatti $(\sqrt{-1})^{4n}=((\sqrt{-1})^4)^n=(+1)^n=+1$

$(\sqrt{-1})^{4n+1}=(\sqrt{-1})^{4n}\times\sqrt{-1}=+1\sqrt{-1}=+\sqrt{-1}$

$(\sqrt{-1})^{4n+2}=(\sqrt{-1})^{4n}\times(\sqrt{-1})^2=+1\times-1=-1$

$(\sqrt{-1})^{4n+3}=(\sqrt{-1})^{4n}\times(\sqrt{-1})^3=+1\times(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$

Dal che ricaviamo, che tutte le potenze di $\sqrt{-1}$ si riducono alle quattro prime

89. *Estrazione delle radici.* Per estrarre la radice da un radicale immaginario del secondo grado, noi adopereremo la medesima regola, che abbiamo eseguita per gli radicali reali, cioè *moltiplicheremo lo indice del radicale per lo indice della radice dimandata*, e così avremo $\sqrt[n]{\sqrt{-a}}=\sqrt[2n]{-a}$, e quì faremo la medesima considerazione, che abbiamo fatta, quando abbiamo data la regola della estrazione delle radice dalli radicali reali, considerando, che queste radici come espressioni analitiche sono suscettibili di un numero $2n$ di valori, li quali si troveranno a suo luogo, quando scioglieremo le equazioni a due termini.

90. Dopo di avere esposta la teoria del calcolo delli radicali tanto reali quanto immaginari, considerando quanto sia necessario esercitarsi nella esecuzione delle regole della sintassi della lingua algebraica, stimo essere ben fatto soggiugnere alcuni esempi del calcolo di sì fatti radicali; e come alcune operazioni eseguite sopra di essi rendono li risultati delli calcoli comodi, e vantagiosi per la prattica, e ci fanno ancora conoscere quanto il calcolo delle radici immaginarie sia prezioso nelle applicazioni, che potremo farne in appresso, quindi soggiugneremo alcuni

esempi delle operazioni di questo calcolo, ed alcune espressioni sopra delle quali applicando il calcolo delli radicali tanto reali, quanto immaginari, esse acquistano una forma non solo più semplice, ma ancora più vantagiosa per la applicazione, che di esse dobbiamo fare nella prattica.

Articolo VI.

Esempi delle operazioni del calcolo delli polinomi composti tanto da termini tutti radicali reali, quanto di quelli composti da termini parte radicali reali, o immaginari, e parte razionali.

91. *Esempi della multiplicazione.* Proponiamoci di multiplicare li polinomi

$$m-3\sqrt{a}-3b^3\sqrt[3]{c^2}$$

$$\text{per } \sqrt{a}-m\sqrt[3]{b^2c}$$

Incominciamo dalla reduzione delli radicali al medesimo indice; ed i polinomi dati saranno ridotti ad

$$m-3\sqrt[6]{a^3}-3b^3\sqrt[6]{c^4}$$

$$\sqrt[6]{a^3}-m\sqrt[6]{b^4c^2}$$

Prod. parz.

$$m\sqrt[6]{a^3}-3\sqrt[6]{a^6}-3b^3\sqrt[6]{a^3c^4}$$

$$-m^2\sqrt[6]{b^4c^2}+3m\sqrt[6]{a^3b^4c^2}+3b^3m\sqrt[6]{b^4c^6}$$

Prima di trovare il prodotto totale è ben fatto di mettere sotto forma razionale quelli termini, dalli quali si può estrarre esattamente la radice, che indica il segno radicale, e ridurre a più semplice espressione quelli radicali, che ne sono suscettibili, quindi avremo $m\sqrt[6]{a^3}=m\sqrt{a}$, $-3\sqrt[6]{a^6}=-3a$, $-m^2\sqrt[6]{b^4c^2}=-m^2\sqrt[3]{b^2c}$, $3b^3m\sqrt[6]{b^4c^6}=3b^3cm\sqrt[3]{b^2}$,

Ed il prodotto totale ridotto alla più semplice espressione sarà

$$m\sqrt{a}-3a-3b^3\sqrt[6]{a^3c^4}-m^2\sqrt[3]{b^2c}+3m\sqrt[6]{a^3b^4c^2}$$
$$+3b^3cm\sqrt[3]{b^2}$$

Divisione. Sia da dividere $a^3+2ab\sqrt{ab}+b^3$ per $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}$, questi due polinomi sono ordinati per rapporto alla lettera a, quindi divideremo il primo termine a^3 del dividendo per lo primo termine $a\sqrt{a}$ del divisore; per potere eseguire questa divisione, noi considereremo a^3, come composto dalli due fattori a^2 ed a, e poichè $a=\sqrt{a}\sqrt{a}$, noi metteremo questo primo termine sotto la forma $a^2\sqrt{a}\sqrt{a}$, il quale diviso per lo primo termine $a\sqrt{a}$ del divisore, evidentemente dà per quoziente $a\sqrt{a}$, il quale multiplicato per lo divisore dà per prodotto $ab+ab\sqrt{ab}$, che sottratto dal dividendo dà per residuo dividendo $ab\sqrt{ab}+b^3$; indi dividendo il primo termine $ab\sqrt{ab}$ di questo residuo dividendo per lo primo termine $a\sqrt{a}$ del divisore, avremo per quoziente $b\sqrt{b}$, il quale multiplicato per lo divisore dà per prodotto $ab\sqrt{ab}+b^3$, il quale sottratto dal residuo dividendo dà per residuo zero, e conchiudiamo che $\frac{a^3+2ab\sqrt{ab}+b^3}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}=$ $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}$

2. Proponiamoci di dividere $6b\sqrt{ab}-4b^2\sqrt[6]{b^3c^2}$ $-9m\sqrt[6]{a^3c^2}+6bm\sqrt[3]{c^2}$ per $3\sqrt{a}-2b\sqrt[3]{c}$

Incominciamo dal dividere il primo termine $6b\sqrt{ab}$ del dividendo per $3\sqrt{a}$ primo termine del divisore, ed avremo per quoziente

$2b\sqrt{b}$, il quale multiplicato per lo divisore da per prodotto $6b\sqrt{ab}-4b^2\sqrt[6]{b^3c^2}$, che sottratto dal divisore dà per residuo dividendo $-9m\sqrt[6]{a^3c^2}+6bm\sqrt[3]{c^2}$, indi dividiamo il primo termine $-9m\sqrt[6]{a^3c^2}$ del residuo dividendo per lo primo termine $3\sqrt{a}$ del divisore, ma poichè questi radicali hanno indici differenti li riduciamo al medesimo indice 6, multiplicando per 3 sì l'indice del radicale $3\sqrt{a}$, che lo esponente nella quantità sottoposta al segno, ed il radicale $3\sqrt{a}$, avrà presa la forma $3\sqrt[6]{a^3}$, ed eseguendo la divisione avremo per quoziente $-3m\sqrt[6]{c^2}=-3m\sqrt[3]{c}$, finalmente multiplicando questo quoziente per lo divisore, avremo il prodotto $-9m\sqrt[6]{a^3c^2}+6bm\sqrt[3]{c^2}$, il quale sottratto dal residuo dividendo da per residuo zero, e conchiudiamo, che

$$\frac{6b\sqrt{ab}-4b^2\sqrt[6]{b^3c^2}-9m\sqrt[6]{a^3c^2}+6bm\sqrt[3]{c^2}}{3\sqrt{a}-2b\sqrt[3]{c}}=$$

$$2b\sqrt{b}-3m\sqrt[3]{c}$$

92. Le divisioni delle quantità radicali, le quali non si possono eseguire esattamente danno origine alle frazioni, nelle quali uno delli termini, o tutti due sono radicali; noi non ci arrestiamo ad esporre i metodi per eseguire sopra di esse le operazioni del calcolo, giacchè sopra di esse si opera nella stessa maniera, secondo la quale si opera sopra delle frazioni razionali, tuttavia stimo non essere fuori di proposito avvertire, che qualora una frazione ha li suoi termini radicali, spesso ci conviene di fare svanire il radicale in uno de' suoi termini, nel quale caso noi operiamo, come abbiamo operato nella aritmetica, moltiplicando li due termini della frazione per lo radicale, che si vuole fare svanire, elevato alla potenza indicata dall' indice del radicale diminuito di una unità, per la quale operazione la frazione non cambia di valore, così se nella frazione $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2}}$ vogliamo rendere il numeratore razionale, noi multiplicheremo li due termini di essa per $\sqrt{a}$, ed essa si ridurrà a $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt[6]{a^3b^4}} = \frac{a}{\sqrt[6]{a^3b^4}}$;

similmente se nella medesima frazione $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2}}$

si volesse fare svanire il radicale del denominatore, noi moltiplicheremo ambi li termini della frazione per $(\sqrt[3]{b^2})^2$, ossia per $\sqrt[3]{b^4}$, ed avremo $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{b^2}\times\sqrt[3]{b^4}}=\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^3 b}}{\sqrt[3]{b^6}}$

$=\frac{\sqrt[3]{a}\times b\sqrt[3]{b}}{b^2}=\frac{\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}}{b}$

93. Estendiamo l' uso di questa operazione a qualche esempio più complicato, e proponiamoci di rendere razionale il denominatore delle frazioni $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$, $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$, supponendo, che a, b, c sieno numeri interi, e che c non sia quadrato perfetto; noi sappiamo, che la somma di due quantità multiplicata per la differenza di esse dà per prodotto la differenza delli quadrati delle medesime quantità, quindi se noi multiplichiamo per $b-\sqrt{c}$ li due termini della prima frazione, essa si ridurrà ad $\frac{ab-a\sqrt{c}}{b^2-c}$; e se multiplichiamo per $b+\sqrt{c}$ li due termini della seconda frazione, essa si ridurrà ad $\frac{ab+a\sqrt{c}}{b^2-c}$.

94. Prima di dare un esempio per fare vedere il vantaggio, che può produrre nelli

calcoli questa trasformazione di una frazione, che ha li suoi termini radicali, esporrò una altra trasformazione delli radicali egualmente interessante per combinarla con la precedente, e rendere il calcolo delle approssimazioni molto più vantagioso; questa è quella trasformazione, per la quale facciamo passare sotto del segno radicale il coefficiente della quantità radicale; sia per esempio il radicale $3a\sqrt{5b}$, e proponiamoci di fare passare sotto del segno radicale il coefficiente $3a$; è evidente, che $3a=\sqrt{9a^2}$, e che per conseguenza, $3a\sqrt{5b}=\sqrt{9a^2}\times\sqrt{5b}=\sqrt{45a^2b}$; quindi per fare passare sotto del segno radicale il coefficiente; basta *elevare si fatto coefficiente alla potenza indicata dall' indice del radicale, e multiplicare per tale potenza la quantità sottoposta al segno.*

Vediamo in un caso particolare, quale vantaggio apporta nel calcolo questa trasformazione; proponiamoci per esempio di valutare la espressione $6\sqrt{13}$ con un errore minore di una unità; noi osserviamo, che 13 non è un quadrato perfetto, e che perciò la sua radice prossima è 3; alla quale dovrebbe essere aggiunta una frazione, quindi multiplicando questa radice per 6, avremo per prodotto 18 con l' aggiunta della frazione ancora multiplicata per 6, risultato che può avere una parte intera maggiore di 18, quindi evidentemente conosciamo, che il solo mezzo, che da noi si può adoperare per trovare esattamente questa parte intera è di mettere la espressione data $6\sqrt{13}$ sotto la forma $\sqrt{6^2 \times 13} = \sqrt{36 \times 13} = \sqrt{468}$; ma la parte intera di $\sqrt{468} = 21$, dunque conchiudiamo che $6\sqrt{13}$ determinata con un errore minore di una unità non è 18 ma 21, e perciò vediamo chiaramente, che la trasformazione da noi esposta è di somma necessità nelli calcoli.

Proponiamoci ora di trovare il valore approssimativo della espressione $\frac{7}{3-\sqrt{5}}$, noi incominceremo dal fare svanire dal denominatore il segno radicale, multiplicando li termini della frazione per $3+\sqrt{5}$, ed essa sarà trasformata nella frazione $\frac{7(3+\sqrt{5})}{9-5} = \frac{21+7\sqrt{5}}{4}$, e facendo passare il coefficiente 7 sotto del segno radicale, l' avremo trasformata nella espressione $\frac{21+\sqrt{49 \times 5}}{4} = \frac{21+\sqrt{245}}{4}$; ma $\sqrt{245} = 15 +$ una frazione, quindi conchiudiamo che $\frac{7}{3-\sqrt{5}} = \frac{21+15+\text{ una frazione}}{4} = \frac{36}{4} = 9$ con un errore minore di $\frac{1}{4}$; approssimazione, che potrebbe essere ridotta più vicina alla esattezza, trovandosi la radice prossima di 245 con l' ajuto delli decimali, e poi aggiugnendo alla radice così trovata il numero 21, e dividendo il risultato per 4.

Proponiamoci in secondo luogo di valutare la espressione $\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$, e di approssimarne il valore fino alle centesime; secondo li principj esposti, essa sarà trasformata nella frazione $\frac{7\sqrt{5}(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{11-3}=\frac{\sqrt{5}(7\sqrt{11}-7\sqrt{3})}{8}=\frac{7\sqrt{55}-7\sqrt{15}}{8}$, ma $7\sqrt{55}=\sqrt{49\times55}$, e $7\sqrt{15}=\sqrt{49\times15}$, quindi la espressione data sarà ridotta a $\frac{\sqrt{2695}-\sqrt{735}}{8}$; ma $\sqrt{2695}=51,91$ approssimata fino alle centesime, e $\sqrt{735}$ con la medesima approssimazione è $27,11$, dunque il valore della espressione $\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}=\frac{51,91-27,11}{8}=\frac{24,80}{8}=3,10$;

È vero, che avremmo potuto calcolare approssimativamente il valore di ciascuno delli radicali del numeratore, e del denominatore della espressione data, ma si vede chiaro, che non essendo il denominatore di essa una potenza esatta, noi non avremmo potuto decidere, ed apprezzare fino a quale punto fosse giunta la nostra approssimazione, nel mentre che avendo reso razionale il denominatore, noi abbiamo apprezzato il grado della approssimazione ottenuta.

Esempi delle operazioni del calcolo delle radici immaginarie.

94. Noi abbiamo veduto, che non si può assegnare la radice di indice pari di una quantità affetta dal segno $-$, ed abbiamo conchiuso, che essendo $2n$ la formola generale, che esprime qualsivoglia numero pari, la $\sqrt[2n]{-a}$ è impossibile, poichè se il radicale $\sqrt[2n]{-a}$ si eleva a potenza $2n$, la quantità $-a$, che è sotto del segno sarebbe questa potenza, ma tutte le potenze di grado pari debbono avere il segno $+$, dunque $\sqrt[2n]{-a}$ non può essere negativa, nè positiva, nè anche zero; quindi $\sqrt[2n]{-a}$ è impossibile, e perciò *immaginaria*, ma si ingannerebbe di molto chi credesse, che tali grandezze immaginarie non debbano essere sottoposte alle operazioni del calcolo, giacchè il calcolo delle radici immaginarie è di somma importanza nell'algebra, ed oltre degli altri vantaggi, che esso apporta, ci conduce *a* delli simboli preziosi, con li quali l'Algebra ci fa vedere, come un problema, il quale quando è enunciato non mostra se la sua soluzione sia,

o non sia possibile, ci dà nella soluzione un valore immaginario della quantità, che da noi si cerca di determinare, e così ci fà conoscere la impossibilità del problema proposto, quindi è a noi necessario, che si acquisti la prattica della esecuzione delle operazioni del calcolo, che sopra di esse si debbono fare.

Dippiù nella teoria delle espressioni immaginarie da noi esposta abbiamo dimostrato, che qualora un radicale è immaginario, esso lo è perchè in esso si trova introdotto come fattore il radicale $\sqrt{-1}$, quindi dovendo proporre degli esempj per esercitarci sopra le operazioni del calcolo delli radicali immaginari, basterà prendere degli esempi, nelli quali si trovano delli radicali della forma $\sqrt{-1}$. La importanza di questi colcoli fa sì, che da noi si mettano molti esempi, e si facciano varie riflessioni, affinchè li giovani acquistino quella abitudine, che è ad essi tanto necessaria per fare de' progressi nell' algebra.

95. In primo luogo noi osserveremo, che le espressioni $\sqrt{-ab}$, $\sqrt{ab}\sqrt{-1}$, $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{-1}$, $\sqrt{-a}\sqrt{b}$, $\sqrt{a}\sqrt{-b}$, sono tutte identiche, e si riducono tutte alla espressione $\sqrt{ab}\sqrt{-1}$

2. Che il prodotto di $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=$ $\sqrt{a}\sqrt{-1}\sqrt{b}\sqrt{-1}=\sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b}=$ $\sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{ab}=-1\sqrt{ab}=-\sqrt{ab}$

3. Che la frazione $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{-1}}{\sqrt{b}} =$ $\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{a}{b}}$; e che la frazione $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} =$ $\frac{\sqrt{a}\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

4. Che se noi multiplichiamo $a+\sqrt{-b}$ per $a-\sqrt{-b}$ abbiamo per prodotto la quantità reale a^2+b

5. Che multiplicando per $1+\sqrt{-1}$ li due termini della frazione $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$ essa diverrà $\frac{(1+\sqrt{-1})^2}{1-(\sqrt{-1})^2} = \frac{1+2\sqrt{-1}-1}{1+1}$ $= \frac{2\sqrt{-1}}{2} = \sqrt{-1}$, e che multiplicando per $1-\sqrt{-1}$ li due termini della frazione $\frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}$, essa si riduce ad $\frac{(1-\sqrt{-1})^2}{1-(\sqrt{-1})^2} =$ $\frac{1-2\sqrt{-1}-1}{1+1} = \frac{-2\sqrt{-1}}{2} = -\sqrt{-1}$, e che multiplicando per $1-\sqrt{-1}$ li due termini della frazione $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$ essa si riduce ad

$$\frac{1+1}{(1-\sqrt{-1})^2}=\frac{2}{1-2\sqrt{-1}+(\sqrt{-1})^2}=$$
$$\frac{2}{1-2\sqrt{-1}-1}=\frac{2}{-2\sqrt{-1}}=\frac{1}{-\sqrt{-1}}=$$
$$\frac{-\sqrt{-1}}{-1}=\sqrt{-1}$$; e finalmente che multiplicando per $1+\sqrt{-1}$ li due termini della frazione $\frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}$ essa si riduce ad $\frac{1+1}{(1+\sqrt{-1})^2}$
$$=\frac{2}{1+2\sqrt{-1}-1}=\frac{2}{2\sqrt{-1}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}=$$
$$\frac{\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^2}=\frac{\sqrt{-1}}{-1}=-\sqrt{-1}$$

96. *Esempi della multiplicazione, e della divisione delli radicali immaginari.*

Proponiamoci di multiplicare la quantità immaginaria $2b\sqrt{-c}$ per la quantità reale $3\sqrt{a}$, considerando che in questa operazione, noi ci proponiamo di aggiugnere a se medesima, e nel medesimo senso la quantità $2b\sqrt{-c}$ prendendola tante volte, quante ne indica $3\sqrt{a}$, noi conchiudiamo, che il prodotto è $6b\sqrt{-ac}$, e poichè in qualunque ordine si multiplicano due fattori il prodotto non si altera, ne segue, che se la quantità reale $3\sqrt{a}$ si deve multiplicare per lo radicale immaginario $2b\sqrt{-c}$ il prodotto è ancora $6b\sqrt{-ac}$; che $-3\sqrt{a}\times 2b\sqrt{-c}=$

$-6b\sqrt{-ac}$, e che $-3\sqrt{a}\times-2b\sqrt{-c}=6b\sqrt{-ac}$. Dal che ricaviamo, che qualora li fattori di una multiplicazione sono uno reale, e l' altro immaginario, la *regola delli segni è la medesima di quella, che si è data per la multiplicaziooe delle quantità reali.*

97. Proponiamoci di multiplicare due quantità immaginarie, ed in primo luogo proponiamoci di multiplicare $a\sqrt{-1}$ per $b\sqrt{-1}$, il prodotto sarà $ab\sqrt{-1}\sqrt{-1}=ab(\sqrt{-1})^2=ab\times-1=-ab$, poichè $(\sqrt{-1})^2=-1$. Se li due fattori fossero stati $-a\sqrt{-1}$, $-b\sqrt{-1}$, il prodotto sarebbe stato $+ab(\sqrt{-1})^2=-ab$; se multiplichiamo $a\sqrt{-1}$ per $-b\sqrt{-1}$, il prodotto sarà $-ab(\sqrt{-1})^2=-ab\times-1=+ab$, come similmente $-a\sqrt{-1}\times b\sqrt{-1}=+ab$.

Quindi ricaviamo, che *la regola de' segni nella multiplicazione, quando li fattori sono radicali quadratici immaginari è la inversa della regola data per gli segni, quando li fattori sono reali; e che li risultati delle multiplicazioni sono quantità reali.*

Proponiamoci di multiplicare

$$a+\sqrt{-1}+b\sqrt{-3} \text{ per}$$
$$c+2\sqrt{-1}$$

---

prodotti parziali $ac+c\sqrt{-1}+bc\sqrt{-3}$
$2a\sqrt{-1}+2\sqrt{-1}\sqrt{-1}+2b\sqrt{3}\sqrt{-1}\sqrt{-1}$

Prodotto totale $ac+2a\sqrt{-1}+c\sqrt{-1}+bc\sqrt{-3}-2(\sqrt{-1})^2+2b\sqrt{3}(\sqrt{-1})^2 = ac+2a\sqrt{-1}+c\sqrt{-1}+bc\sqrt{3}\sqrt{-1}+2-2b\sqrt{3}$

Proponiamoci di multiplicare

$$3a-2\sqrt{-3}+c\sqrt{-1} \text{ per}$$
$$2a-3c\sqrt{-1}+\sqrt{-a}$$

---

prod. parz.

$$6a^2-4a\sqrt{-3}+2ac\sqrt{-1}$$
$$-9ac\sqrt{-1}-6c\sqrt{3}+3c^2$$
$$3a\sqrt{-a}+2\sqrt{3a}-c\sqrt{a}$$

---

lotto totale $6a^2-4a\sqrt{-3}-7ac\sqrt{-1}$
$3+3c^2+3a\sqrt{-a}+2\sqrt{3a}-c\sqrt{a}$.

oniamoci di sviluppare la espressione,

$$\frac{\quad\sqrt{-3}}{\quad}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

minciamo dal multiplicare li due pri-
ori, avremo

$$\frac{\quad\sqrt{-3}}{\quad}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\frac{1-\sqrt{-3}-\sqrt{-3}-3}{4}=$$

$$\frac{\quad\sqrt{-3}}{\quad}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

ltiplichiamo questo prodotto per lo ter-
tore, avremo

$$\frac{\quad\sqrt{-3}}{2}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\frac{1-\sqrt{-3}+\sqrt{-3}+3}{4}=$$

1

sviluppasse la espressione $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times$
$\frac{\quad\sqrt{-3}}{2}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, noi avremmo
rodotto anche la unità, dal che rica-

viamo, che vi sono tre espressioni differenti cioè 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, che elevate a terza potenza danno per risultato la unità, quindi la unità ha tre radici cubiche, delle quali la prima, cioè la unità è la *radice assoluta*, o *aritmetica*, le altre sono *relative*, o *espressioni algebraiche*.

Esempi della divisione

98. Sia la quantità immaginaria $ab\sqrt{-1}$ da dividere per a, è evidente che il quoziente è $b\sqrt{-1}$, come ancora è evidente, che $\frac{-ab\sqrt{-1}}{a}=-b\sqrt{-1}$, e che $\frac{-ab\sqrt{-1}}{-a}$ $=b\sqrt{-1}$, dal che chiaramente ricaviamo, che qualora *una quantità immaginaria si divide per una quantità reale, le regole sono quelle medesime, con le quali abbiamo eseguita la divisione sopra delle quantità reali.*

Supponiamo, che si debba dividere la quantità reale ab per la espressione immaginaria $b\sqrt{-1}$, avremo $\frac{ab}{b\sqrt{-1}}=\frac{a}{\sqrt{-1}}$, e multiplicando li due termini di questa frazione per $\sqrt{-1}$, avremo $\frac{ab}{b\sqrt{-1}}=\frac{a}{\sqrt{-1}}=$ $\frac{a\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^2}=\frac{a\sqrt{-1}}{-1}=-a\sqrt{-1}$

Similmente dividendo $-ab$ per $b\sqrt{-1}$ avremo $\frac{-ab}{b\sqrt{-1}}=\frac{-a}{\sqrt{-1}}$; e multiplicando ambi li termini di $\frac{-a}{\sqrt{-1}}$ per $\sqrt{-1}$, avremo $\frac{-ab}{b\sqrt{-1}}=\frac{-a\sqrt{-1}}{-1}=a\sqrt{-1}$.

Similmente si vede chiarámente, che $\frac{ab}{-b\sqrt{-1}}=\frac{a}{-\sqrt{-1}}=\frac{-a}{\sqrt{-1}}$, e multiplicando li due termini di questa frazione per $\sqrt{-1}$, sarà $\frac{ab}{-b\sqrt{-1}}=\frac{-a\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^2}=\frac{-a\sqrt{1}}{-1}=+a\sqrt{-1}$

Finalmente dividendo $-ab$ per $-b\sqrt{-1}$, $\frac{-ab}{-b\sqrt{-1}}=\frac{+a}{\sqrt{-1}}$; e multiplicando li due termini di questa frazione per $\sqrt{-1}$, avremo $\frac{-ab}{-b\sqrt{-1}}=\frac{+a\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^2}=\frac{+a\sqrt{-1}}{-1}=-a\sqrt{-1}$; Dal che ricaviamo, che qualora si divide una quantità reale per una immaginaria quadratica *il quoziente ha il segno positivo, quando il dividendo ed il divisore hanno segni differenti, e che esso ha il segno negativo, quando il dividendo, ed il divisore hanno il medesimo segno, e perciò la regola delli segni è la opposta di quella, che ha luogo per la divisione del-*

le quantità reali, ed il quoziente è sempre immaginario.

Sia ora da dividere una espressione immaginaria quadratica per esempio $ab\sqrt{-1}$ per una altra anche immaginaria quadratica $b\sqrt{-1}$, avremo $\frac{ab\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} = a$, quantità reale, similmente è anche evidente, che $\frac{-ab\sqrt{-1}}{-b\sqrt{-1}} = +a$, anche quantità reale; così anche è chiaro, che $\frac{-ab\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} = -a$, che $\frac{ab\sqrt{-1}}{-b\sqrt{-1}} = -a$; Dal che generalmente conchiudiamo, che *qualora due radicali immaginari quadratici si dividono l' uno per l' altro, la regola è la medesima della regola adoperata nella divisione delle quantità reali, ed il quoziente è sempre reale.*

Applichiamo queste regole alla divisione delli polinomi, che contengono radicali immaginari.

99. Non mi arresto sulla elevazione a potenza delli radicali immagginari, giacchè abbiamo veduto, che $\sqrt{-1}$ elevata a potenza $4n$ dà 1, alla potenza $4n+1$ dà $+\sqrt{-1}$ ed elevata alla potenza $4n+2$ da -1, ed alla potenza $4n+3=-\sqrt{-1}$; dal che ricaviamo, che tutte le potenze paridelli radicali immaginari sono reali, e le dispari sono immaginarie, delle pari poi sono positive quelle, delle quali li gradi sono esattamente divisibili per 4, e delle immaginarie sono positive tutte quelle, delle quali il grado diminuito di una unità è divisibile per 4; e qui bisogna avvertire, che $(\sqrt{-1})^1$ ha per esponente la unità, la quale diminuita di uno dà zero, il quale essendo divisibile per qualunque numero è per conseguenza divisibile per 4, è perciò $(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}$, quantità positiva.

CAP. VII.

Del calcolo delle quantità affette da esponenti frazionari.

100. Per rapporto alla addizione, ed alla sottrazione di queste quantità altro non possiamo dire, se non che qualora queste quantità sono dissimili esse si addizionano scrivendole le une appresso delle altre con li medesimi segni, e che qualora hanno de' termini simili, di essi si fa la contrazione; qualora poi di esse si deve fare la sottrazione, dopo di avere cambiati li segni delli termini della quantità che si deve sottrarre, essa si scrive in seguito di quella, dalla quale deve essere sottratta, e se vi sono termini simili di essi si fa contrazione; quindi ci occuperemo delle operazioni della multiplicazione, della divisione, della elevazione a potenza, e della estrazione delle radici, che sopra di esse si debbono fare; e poichè abbiamo dimostrato, che esse possono essere poste sotto la forma di radicali, noi faremo le operazioni sopra delli radicali, ed indi passeremo li risultati sotto la forma di quantità con gli esponenti frazionari.

Multiplicazione. Proponiamoci di multiplicare $a^{\frac{m}{n}}$ per $a^{\frac{p}{q}}$; noi abbiamo dimostrato, che $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, e che $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, dunque il prodotto di $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}}$ sarà eguale ad $\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p}$, ma $\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq}{nq} + \frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$; quindi lo *esponente di a nel prodotto è eguale alla somma degli esponenti delli fattori.*

Proponiamoci di multiplicare a^m per $a^{\frac{p}{q}}$, essendo $a^m = \sqrt[q]{a^{mq}}$ essa si potrà mettere sotto la forma $a^{\frac{mq}{q}}$, allora avremo $a^m \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{q} + \frac{p}{q}} = a^{m + \frac{p}{q}}$; quindi qualora nella multiplicazione li *fatttori hanno gli esponenti frazionari*, *oppure un esponente è intero*, *e l' altro è frazionario*, *al prodotto si da sempre per esponente la somma degli esponentt delli fattori.*

Divisione. Proponiamoci di dividere $a^{\frac{m}{n}}$ per $a^{\frac{p}{q}}$, il quoziente sarà quello che avremmo dividendo $\sqrt[n]{a^m}$ per $\sqrt[q]{a^p}$, ma $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}}$, e $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{pn}}$, dunque $\dfrac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} =$

$$\frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{pn}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq}{nq} - \frac{np}{np}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}};$$ il

che ci dimostra, che lo *esponente del quoziente si ha sottraendo dallo esponente del dividendo lo esponente del divisore.*

Se avessimo da dividere a^m per $a^{\frac{p}{q}}$ metteremo a^m sotto la forma $a^{\frac{mq}{q}}$, eseguiremo la divisione, e ne risulterà anche il quoziente $a^{\frac{mq}{q} - \frac{p}{q}} = a^{m - \frac{p}{q}}$ similmente si conosce chiaramente, che se si dovesse dividere $a^{\frac{p}{q}}$ per a^m, avremo per quoziente $a^{\frac{p}{q} - m}$; **Dal che generalmente conchiudiamo**, che *qualora in una divisione il dividendo, ed il divisore sono affetti tutti due da esponenti frazionari, o uno di essi è affetto da esponente intero, e l' altro da esponente frazionario, l' esponente del quoziente si ha sottraendo lo esponente del divisore da quello del dividendo.*

Elevazione a potonza. Se si vuole elevare $a^{\frac{m}{n}}$ ad una potenza intera p, noi osserveremo, che il risultato deve essere il prodotto di $a^{\frac{m}{n}}$ preso p volte come fattore, dunque $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}}$ Dunque per *elevare una quantità, che ha lo esponente frazionario ad una potenza il grado della quale è un numero intero, si deve multiplicare lo esponente frazinnario per lo numero, che indica il grado della potenza dimandata*

Sia in secondo luogo $a^{\frac{m}{n}}$ da elevare alla potenza indicata da $\frac{p}{q}$; in questo caso la espressione $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}$ si riduce a $\sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{a^{\frac{mp}{n}}} = a^{\frac{mp}{nq}}$; dunque *nella elevazione a potenza il cui grado è una frazione, dobbiamo sempre multiplicare lo esponente della quantità per lo numero, che indica il grado della potenza dimandata.*

Estrazione delle radici. Considerando, che per elevare una quantità a qualsivoglia potenza, della quale il grado è indicato da una frazione dobbiamo multiplicare lo esponente della quantità per lo grado della potenza, conchiudiamo, che qualora *vogliamo fare la estrazione della radice, la quale è la operazione inversa, dobbiamo dividere lo esponente della quantità per lo indice della radice*, quindi $\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{\left(\frac{m}{n}\right)}{\left(\frac{p}{q}\right)}} = a^{\frac{mq}{np}} = \sqrt[np]{a^{mq}}$.

CAP. VII.

Calcolo degli esponenti negativi.

Moltiplicazione. Sia la quantità a^{-m} da multiplicare per la quantità a^{-n}, noi abbiamo dimostrato, che $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, e che $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; dunque $a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}$; similmente dimostreremo che $a^{-m} \times a^n = \frac{1}{a^m} \times a^n = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; e $a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; quindi nella multiplicazione delle quantità, le quali hanno gli esponenti interi, e negativi, *operiamo nella stessa maniera, nella quale abbiamo operato sulle quantità affette da esponenti interi e positivi.*

Elevazione a potenza. Sia la quantità a^{-m} da elevare alla potenza positiva n, supponendo m, n interi, o frazionari; avremo

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}\ ;\ \text{e perciò}\ \left(a^{-m}\right)^n=\left(\frac{1}{a^m}\right)^n=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}$$

Quindi qualora una quantità affetta da esponente negativo si deve elevare ad una potenza di grado positivo, dobbiamo multiplicare lo esponente negativo della quantità per lo numero, che esprime il grado della potenza dimandata.

Supponiamo che si debba elevare a^m alla potenza $-n$, disegnando m, n numeri interi, o frazionari, avremo $(a^m)^{-n}=\frac{1}{(a^m)^n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}$ Quindi conchiudiamo generalmente, che qualora *una quantità affetta da un esponente negativo, o positivo si deve elevare ad una potenza, il grado della quale sia indicato da un numero qualunque intero, o frazionario, positivo, o negativo, la potenza dimandata si ha multiplicando lo esponente della quantità per lo numero, che indica il grado della potenza dimandata.*

Estrazione delle radici. Proponiamoci di estrarre la radice n da a^{-m} supponendo che m, ed n sieno quali si vogliano interi, o frazionari, avremo $\sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}}$; Dal che generalmente conchiudiamo, *che le regole date per le operazioni dal calcolo per le quantità affette da esponenti interi positivi sono le medesime di quelle, che si debbono adoperare per lo calcolo delle quantità affette dagli esponenti negativi tanto quando essi sono interi, che quanto essi sono frazionari.*

Prima di lasciare questa materia, stimo non essere fuori di proposito avvertire, che quando noi ci siamo occupati del calcolo de' radicali noi abbiamo considerato il solo caso, in cui gli esponenti delle quantità, e gli indici delle radici erano numeri interi e positivi, poichè noi abbiamo poggiati tutti li raziocini sulla trasformazione $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; trasformazione da noi dimostrata esatta nella supposizione, che m, n indicavano numeri interi positivi; ora che abbiamo dimostrate le regole del calcolo degli esponenti interi, frazionari , positivi , e negativi , noi abbiamo veduto , che questa trasformazione è anche esatta in tutti li casi , e quindi tutte le conseguenze , che da essa abbiamo ricavate restono generalizzate , e perciò avremo $\sqrt[-n]{a^{-m}} = a^{\frac{-m}{-n}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}}$; e che $\sqrt[-n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{-n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{m}}}$

CAP. IX.

Della estrazione della radice quadrata da un polinomio

Prima di cercare il metodo per estrarre la radice quadrata da un polinomio dato, è necessario conoscere quale sia la legge della formazione del quadrato di un polinomio dato.

Noi abbiamo veduto, che il quadrato del binomio $x+a$ è eguale ad $x^2+2ax+a^2$.

Supponiamo ora, che si voglia elevare a quadrato il trinomio $a+b+c$; si metta $a+b=x$ avremo $(a+b+c)^2=(x+c)^2=x^2+2cx+c^2$ ma $x^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, e $2xc=2(a+b)c=2ac+2bc$, dunque $(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$ Dal che ricaviamo, che il *quadrato di un trinomio è composto dalla somma delli quadrati delli suoi tre termini, e dalli doppi prodotti differenti, che nascono multiplicando questi termini a due a due.*

Con un simile raziocinio noi dimostreremo che $(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+2ac+b^2+2ad+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2$; Similmente si potrebbe verificare la medesima legge, supponendo un polinomio composto da cinque, sei etc. termini; ma per dimostrare, che questa legge della composizione del quadrato di qualunque polinomio, sia sempre vera, supponiamo che essa sia verificata per un polinomio composto da m termini, e vediamo se essa si verifica per un polinomio composto da $m+1$ termini; supponiamo, che la legge sia verificata per lo polinomio $a+b+c+d+ \text{-------} +h$, il quale sia composto da m termini; dico, che essa deve essere verificata per lo polinomio $a+b+c+d+\text{-------}+h+k$, il quale ha $m+1$ termini; si metta x eguale alla somma delli m primi termini di questo polinomio, cioè si faccia $x=a+b+c+d\text{------}+h$; il polinomio dato si ridurrà ad $x+k$; ed avremo $(x+k)^2=x^2+2kx+k^2$; e sostituendo in vece di x il suo valore, avremo $(x+k)^2=(a+b+c+d+\text{-------}+h)^2+2(a+b+c+d+\text{------}+h)k+k^2$, ma noi abbiamo supposto, che la legge enunciata è vera, per lo polinomio, che ha m termini, dunque la prima parte di questa espressione è composta dalli quadrati delli m termini, e dal doppio delli prodotti differenti, che si possono fare multiplicandoli a due a due, la seconda parte è fatta dalli doppi prodotti, che nascono multiplicando li m termini del primo polinomio per lo termine introdotto, e l'ultimo termine è il quadrato del termine aggiunto, dunque la legge verificata per lo polinomio composto da m termini è anche vera quando il numero delli termini del polinomio è $m+1$, ma questa legge si è dimostrata vera per un quadrinomio, dunque sarà vera per lo polinomio composto da cinque termini, ed essendo vera per un polinomio composto da cinque termini, sarà vera per quello, che è composto da sei termini, e così in appresso, dunque essa è generalmente vera.

Per potere più commodamente applicare la legge enunciata alla estrazione della radice quadrata da un polinomio dato, noi la enuncieremo come segue

Il quadrato di un polinomio contiene il quadrato del primo termine di esso, più il doppio del prodotto del primo termine per lo secondo, più il quadrato del secondo; più il doppio del prodotto di ciascuno delli due primi termini per lo terzo, più il quadrato del terzo; più il doppio del prodotto delli tre primi termini per lo quarto, più il quadrato del quarto, ec.

A prima vista sembra, che quello che abbiamo detto potrebbe essere sufficiente per estrarre la radice quadrata da qualunque polinomio; in fatti se noi eleviamo il polinomio ($a+b+c+d+$ etc.) al quadrato, ed ordiniamo il quadrato per rapporto alla lettera a, esso prenderà la forma $a^2+2a(b+c+d+$ etc.$)$ $+(b+c+d+$ etc.$)^2$; nella quale il primo termine a^2 è il semplice quadrato del primo termine della radice, e poiche abbiamo ordinato il secondo termine per rapporto alla medesima lettera a, esso si trova essere il prodotto del doppio del primo termine a della radice multiplicato per la somma di tutti gli altri termini di essa, e perciò la regola della estrazione della radice quadrata da un polinomio sarebbe sommamente facile, poichè essa si ridurrebbe ad estrarre la radice quadrata dal primo termine, e dividere per lo doppio di si fatto termine la somma di tutti gli altri termini del polinomio, in cui si trova come fattore il primo termine trovato della radice, ma per convincerci del contrario basta osservare quello, che accade nello sviluppo di $(5x^2 - x + a)^2 = 25x^4 - 10x^3 + 10ax^2 + x^2 - 2ax + a^2$, il quale non è più della forma $a^2 + 2a(b + c + d + \text{etc.}) + (b + c + d + \text{etc.})^2$; quindi prima di accingerci alla estrazione della radice quadrata dal polinomio dato, bisognerebbe trasformarlo in modo, che prendesse la forma nota, ma poichè è alquanto difficile il fargli subire una tale trasformazione, noi cercheremo di evitarla per mezzo di alcune considerazioni che ora esporremo.

In primo luogo noi osserveremo, che se noi ordiniamo il polinomio dato per rapporto ad una lettera ordinatrice, il primo termine dovrà essere il semplice quadrato del primo termine della radice dimardata, indi sopprimendo il primo termine del polinomio dato, il residuo conterrà il doppio del medesimo primo termine della radice per la somma di tutti li termini seguenti, più il quadrato di questa medesima somma, ma chiaramente vediamo, che questo doppio prodotto deve anche esso essere composto da tanti termini, quanti sono quelli, che restano a trovarsi nella radice, cioè del doppio del primo termine trovato per lo primo termine di quelli, che si debbono trovare, ossia per lo secondo termine della radice, indi il prodotto del doppio del medesimo termine per lo terzo, e così procedendo avanti, e poichè è evidente, che il prodotto del doppio del primo termine per lo secondo è quello, nel quale la lettera ordinatrice ha il massimo esponente, e per conseguenza è il primo termine del residuo, dunque se noi dividiamo questo primo termine del residuo per lo doppio del primo termine trovato della radice, il quoziente sarà il secondo termine della radice; quindi se scriviamo questo termine dopo del doppio del primo termine trovato col suo proprio segno, e multiplichiamo la somma che ne risulta per lo secondo termine trovato avremo per prodotto il doppio del primo termine per lo secondo più il quadrato del secondo, e sottraendo questo prodotto dal residuo, ne evidentemente conosciamo, che avremo un secondo residuo, il quale conterrà il prodoto del doppio delli due termini trovati per la somma di tutti gli altri termini, che si debbono trovare, più il quadrato della medesima somma; infatti dal quadrato dato noi abbiamo tolto prima il quadrato del primo termine della radice, indi il doppio del primo termine multiplicato per lo secondo, finalmente il quadrato del secondo, ma la somma di questi tre termini sottratti formano il quadrato delli due primi termini della radice, dunque il secondo residuo non può contenere altro, che il doppio prodotto di questi due termini per la somma delli termini seguenti più il quadrato di questa ultima somma.

Il primo termine di questo secondo residuo, cioè il termine nel quale la lettera ordinatrice ha il massimo esponente, è evidentemente il prodotto del doppio del primo termine della radice per lo primo delli termini non trovati, cioè per lo terzo, dunque se dividiamo questo primo termine del secondo residuo per lo doppio del primo termine della radice, avremo il terzo termine della radice. Se ora al' doppio della somma delli due primi termini si aggiunga questo termine, e la somma, che ne risulta si multiplichi per questo terzo termine, avremo il doppio del prodotto delli due primi termini per lo terzo termine più il quadrato di questo terzo termine, e poichè dal polinomio dato si era sottratto il quadrato delli due primi termini, è evidente, che sottraendo dal residuo trovato questo doppio prodotto delli due primi termini, della radice per lo terzo più il quadrato del terzo, noi avremo dal quadrato totale tolto il quadrato delli primi tre termini trovati della radice, ed il residuo, che ne risulterà conterrà soltanto il doppio del prodotto delli tre termini trovati per la somma di quelli, che restano a trovare più il quadrato di questa ultima somma.

Similmente operando sopra del nuovo residuo, troveremo il quarto termine della radice, e così procedendo avanti.

Esempio I.

Proponiamoci di estrarre la radice quadrata dal polinomio $25x^4-10x^3+10ax^2+x^2-2ax+a^2$, il quale è ordinato per rapporto alla lettera x.

Noi incominceremo dallo estrarre la radice dal primo termine, cioè da $25x^4$, ed avremo $5x^2$ per primo termine della radice dimandata, e sopprimiamo dal polinomio dato il suo quadrato, cioè il primo termine di esso, avremo per primo residuo $-10x^3+10ax^2+x^2-2ax+a^2$; indi raddoppiando il termine trovato $5x^2$ avremo $10x^2$, e dividiamo il primo termine $-10x^3$ del residuo trovato, avremo il quoziente $-x$, il quale sarà il secondo termine della radice; di poi scriviamo questo termine $-x$ dopo del doppio del primo termine, ed avremo $10x^2-x$, e multiplichiamo $10x^2-x$ per $-x$, ne risulterà il prodotto $-10x^3+x^2$, il quale è composto dal doppio del primo termine della radice per lo secondo più il quadrato del secondo, quindi se sottraiamo questa quantità dal primo residuo, avremo dal polinomio sottratto tutto il quadrato delli due primi termini della radice, ed il secondo residuo sarà $10ax^2-2ax+a^2$, nel quale il primo termine $10ax^2$ contiene il prodotto del doppio del primo termine trovato della radice per lo primo de' termini da trovarsi, quindi se questo primo termine $10ax^2$ si divida per $10x^2$ doppio del primo termine $5x^2$ della radice, avremo il quoziente a, il quale sarà il terzo termine della radice cercata, finalmente si scriva questo termine a dopo $10x^2-2x$ doppio della somma delli due primi termini della radice, avremo $10x^2-2x+a$, e multiplicando questa somma per a avremo $10ax^2-2ax+a^2$, cioè il doppio prodotto delli due primi termini della radice per lo terzo, più il quadrato di questo terzo termine, e sottraendo questa quantità dal residuo precedente avremo per residuo zero, e conchiuderemo che $5x^2-x+a$ è la radice dimandata.

Prima di terminare questo articolo noi faremo le seguenti considerazioni.

I.° Spesso accade, che il polinomio, dal quale si deve estrarre la radice quadrata non è un quadrato perfetto, ed in questo caso è chiaro, che il proseguimento delle operazioni del calcolo non ci condurrebbe mai ad avere il zero per residuo; per conseguenza se da noi non si avesse un carattere per conoscere quando un polinomio non è un quadrato perfetto, le operazioni del calcolo si prosequirebbero indefinitamente, quindi è necessario di trovare questo carattere, il che è sommamente facile, imperocchè sapendo noi, che il primo termine di qualsivoglia residuo deve essere il doppio prodotto del primo termine della radice per uno delli termini da trovarsi, ne segue che subito che noi troveremo il primo termine di un residuo, il quale non è algebraicamente divisibile per lo doppio del primo termine della radice, conchiuderemo, che il polimonio non è quadrato perfetto.

II.° Un binomio non può essere mai un quadrato perfetto, poichè sappiamo, che il quadrato del più semplice polinomio, cioè di un binomio, deve avere tre parti distinte, che non possono ricevere alcuna contrazione tra esse, così a^2+b^2 non può essere un quadrato perfetto, poichè in esso manca il termine $\pm 2ab$ per essere il quadrato del binomio $a\pm b$; e che un trinomio allora può essere il quadrato perfetto, quando due delli suoi termini sono quadrati perfetti, e l'altro termine è il doppio delle radici delli due altri termini, anzi la radice quadrata di un trimonio si può immediatamente avere per la semplice ispezione delli termini di esso; il che faremo estraendo le radici dalli due termini, che sono quadrati perfetti, effettando li due termini col medesimo segno, o con segni contrari, secondo che il terzo termine è preceduto dal segno $+$, oppure dal segno $-$, verificando però se il doppio prodotto di queste due radici dà il terzo termine del trinomio proposto. Così il trinomio $9a^8-48a^5b^2+64a^2b^4$ ha per sua radice quadrata $3a^4-8ab^2$, poichè $2(3a^4\times8ab^2)=48a^5b^2$; al contrario $4a^2+12ab-9b^2$ non può essere un quadrato perfetto, sebbene $2a$, e $3b$ sieno le radici quadrate di $4a^2$, e di $9b^2$, e $12ab$ sia eguale $2(2a\times3b)$, imperocchè $-9b^2$ non può essere un quadrato essendo esso preceduto dal segno $-$.

III. Finalmente osserveremo, che qualora dobbiamo estrarre le radici quadrate da polinomi, che non sono quadrati perfetti, spesso possiamo applicare le simplificazioni, che noi abbiamo esposte nella teoria delli radicali; così per esempio se dobbiamo estrarre la radice quadrata dal polinomio $a^3b+4a^2b^2+4ab^3$, che non è quadrato perfetto, noi lo metteremo sotto la forma $ab(a^2+4ab+4b^2)$, espressione nella quale il trinomio $a^2+4ab+4b^2$

evidentemente è il quadrato di $a+2b$, e conchiudiamo, che $\sqrt{a^3b+4a^2b^2+4ab^3} = \sqrt{ab(a^2+4ab+4b^2)} = (a+2b)\sqrt{ab}$.

Articolo VII.

Della estrazione delle radici cubiche dalli polinomi.

Il metodo, che si deve tenere per estrarre la radice cubica da un polinomio dipende da considerazioni analoghe a quelle, che ci hanno guidato per trovare il processo per mezzo del quale estraiamo da un polinomio la radice quadrata.

Quindi in primo luogo supponendo ordinato il polinomio per rapporto ad una lettera ordinatrice, noi troviamo, che il primo termine è il cubo del primo termine della radice, e perciò estraendo da questo termine, la radice cubica, noi otteniamo il primo termine della radice, e sopprimendo questo primo termine del polinomio dato, il residuo conterrà il prodotto del triplo del quadrato del primo termine della radice per la somma di tutti gli altri più il triplo del quadrato della somma di tutti questi altri termini per lo primo, più il cubo di questa medesima somma, e poichè il triplo del quadrato del primo termine trovato della radice per lo primo di quelli, che si debbono trovare, è quello in cui la lettera ordinatrice deve avere il massimo esponente, ne segue che questo prodotto è il primo termine del residuo, dunque se formiamo il triplo del quadrato del primo termine trovato della radice, e per esso dividiamo il primo termine del residuo, il quoziente sarà il secondo termine della radice dimandata; Di poi se formiamo il triplo del quadrato del primo termine trovato, e lo multiplichiamo per lo secondo termine, ed al prodotto aggiugniamo il triplo del quadrato del secondo termine multiplicato per lo primo, ed il cubo di questo secondo termine, e sottraiamo la somma trovata dal primo residuo, noi avremo sottratto dal polinomio dato tutto il cubo delli due primi termini della radice, giacchè da esso si era da principio sottratto il cubo del primo termine, e conchiudiamo, che il secondo residuo conterrà soltando il prodotto del triplo del quadrato della somma delli due termini trovati per la somma di quelli, che debbono trovarsi, più il prodotto del triplo del quadrato di questa seconda somma per gli due termini trovati, più il cubo della somma delli termini da trovare, e poichè il primo termine di questo secondo residuo è il prodotto del triplo quadrato del primo termine trovato per lo terzo termine della radice, ne segue, che se dividiamo questo primo termine del secondo residuo per lo triplo del quadrato del primo termine della radice il quoziente sarà il terzo termine di essa, e così procedendo avanti.

Il carattere per conoscere se un polinomio non è un cubo perfetto ci viene offerto da un residuo in cui il primo termine non è algebraicamente divisibile per lo triplo del quadrato del primo termine della radice.

Li processi per estrarre le radici di grado superiore al terzo, si eseguono in una maniera analoga alli precedenti, deducendoli dalle leggi secondo le quali si formano le corrispondenti potenze.