ELEMENTI

DI

ALGEBRA

DI

FILIPPO M.a GUIDI

PROFESSORE DELLA REGIA UNIVERSITA' DEGLI STUDJ
DI NAPOLI

VOL. I.

NAPOLI,

DA' TORCHI DI RAFFAELLO DI NAPOLI

1827.

INDICE

Del I. Volume dell' Algebra.

Cap. I. *Nozioni preliminari.* . pag. 1
Cap. II. *Nozioni preliminari alle operazioni del calcolo* 11
Cap. III. *Della composizione delle quantità algebraiche* 15
Art. 1. *Della Addizione* . . . ivi
Art. 2. *Della Multiplicazione, e formola del Binomio di Newton.* . 18
Art. 3. *Osservazioni sopra la formola del Binomio* 43
Art. 4. *Sviluppo della potenza di un Polinomio.* 49
Cap. IV. *Della decomposizione delle quantità* 50
Art. 1. *Della sottrazione* . . . 51
Art. 2. *Della divisione* . . . 54
Art. 3. *Del raccoglimento delli fattori.* 72
Art. 4. *Della ricerca del massimo comune divisore.* 77
Cap. V. *Teoria delle frazioni* . . 89
Cap. VI. *Della estrazione delle radici.* 101
Art. 1. *Nozioni preliminari.* . . ivi
Art. 2. *Operazioni preparatorie al calcolo de' Radicali.* . . . 103

Art. 3. *Della composizione delli radicali.* 109
Art. 4. *Decomposizione delli radicali.* 111
Art. 5. *Del calcolo delli radicali immaginari, che hanno il numero 2 per indice.* 114
Esempj delle operazioni del calcolo delle radici immaginarie. . . . 129
Cap. VII. *Del calcolo delle quantità affette da esponenti frazionarj.* . . 140
Cap. VIII. *Calcolo degli esponenti negativi* 145
Cap. IX. *Della estrazione della radice quadrata da un polinomio.* . . 149
Art. 1. *Della estrazione delle radici cubiche dalli polinomi* . . 159
Cap. X. *Riduzione delle frazioni in serie infinite.* 162
Cap. XI. *Delle progressioni.* . . . 180
Art. 1. *Delle progressioni per differenze.* 182
Art. 2. *Delle progressioni per quozienti* 188
Cap. XII. *Teoria delli logaritmi* . . 200
Art. 1. *Proprietà delli logaritmi.* . . ivi
Art. 2. *Pratica, ed uso delli logaritmi* 220
Art. 3. *Uso delle tavole logaritmiche per gli calcoli numerici.* . 233

ELEMENTI DI ALGEBRA

CAP. I.

Nozioni preliminari

1. L'algebra è quella parte delle matematiche, nella quale si fa uso di alcuni segni generali, ed abbreviativi per risolvere tutte le quistioni, che si possono proporre relativamente alli numeri.

Essa ha una lingua a parte, la quale non solo ha segni particolari, ma ancora una particolare sintassi, la quale consiste nelle regole del calcolo, e perciò essa costituisce una vera lingua.

2. Gli elementi particolari di questa lingua sono, I. Le lettere dell' alfabeto, le quali servono per disegnare li numeri, sopra delli quali si deve ragionare.

Noi facciamo uso di esse per due fini. I. Per mostrare, che una data proprietà appartiene a vari numeri 2. Per fare vedere, che la soluzione di un dato problema è indipendente da qualunque valore particolare attribuito alli numeri compresi nella enunciazione di esso.

II. Il segno $+$, del quale facciamo uso per indicare la addizione di due numeri, e lo enunciamo con la parola *più*.

Così $25+30$ si enuncia dicendo 25 più 30, che vale lo stesso, che 25 accresciuto di 30; Similmente $a+b$ si enuncia dicendo a più b, che significa, che il numero disegnato da *a* deve essere unito al numero disegnato da *b*.

III. Il segno $-$, che si enuncia con la parola *meno*, e di esso facciamo uso per indicare la sottrazione di un numero da un altro.

Così $20 - 8$, che si enuncia dicendo 20 *meno 8*, indica che 20 deve essere diminuito di 8; similmente $a - b$, che si enuncia dicendo *a meno b*, indica che dal numero disegnato da *a* deve togliersi il numero disegnato da *b*; o ciò che vale lo stesso, che il numero indicato da *a* deve essere diminuito di tanto quanto è il numero disegnato da *b*.

IV. Il segno $\times$, il quale si adopera per indicare la multiplicazione.

Così 24×8, il quale indica, che 24 si deve multiplicare per 8, oppure il prodotto di 24 multiplicato per 8, si enuncia dicendo 24 *multiplicato per* 8. Alcune volte in vece di scrivere 24×8, scriviamo $24 \cdot 8$, sostituendo il punto tra li fattori invece del segno $\times$. Quando si debbono multiplicare numeri espressi con lettere, noi siamo convenuti di scrivere le lettere di seguito le une appresso alle altre senza interposizione di alcun segno, in maniera che le notazioni ab, abc indicano lo stesso, che queste altre $a\times b$, $a\times b\times c$ ec, quelle sono più semplici di queste ultime; dippiù ognuno chiaramente vede, che esse possono essere adoperate soltanto, quando li numeri sono espressi per mezzo delle lettere, e non qualora essi sono espressi in cifre.

V. Qualora dobbiamo indicare una divisione, noi mettiamo due punti tral dividendo ed il divisore, oppure tiriamo una retta sopra della quale scriviamo il dividendo, e sotto di essa scriviamo il divisore.

Così 12 : 4, oppure $\frac{12}{4}$, che indicano la divisione di 12 per 4, da noi si enuncia dicendo 12 diviso per 4, o ciò che vale lo stesso, il quoziente di 12 diviso per 4. Similmente $\frac{a}{b}$, oppure $a : b$, indica il quoziente, che si ha dividendo a per b.

VI. Il *coefficiente* è un numero, che noi adoperiamo per indicare quante volte un numero indicato da una lettera deve essere preso nella addizione con se medesimo. Così in vece di scrivere $a+a+a+a$, noi osserveremo, che il numero espresso da a deve essere preso quattro volte nella addizione con se medesimo, e noi lo scriviamo $4a$; similmente $7a$ indica, che a deve essere presa 7 volte nella addizione con se medesima.

Quindi il coefficiente, è un numero astratto scritto alla sinistra di un altro numero espresso da una, o da più lettere per indicare quante volte esso è preso nella addizione con se medesimo.

VII. Lo *esponente* è un numero, del quale noi facciamo uso per indicare quante volte un numero espresso da una lettera è preso come fattore nella multiplicazione per se medesimo. Così in vece di scrivere $a \times a \times a \times a$, noi considereremo, che essa deve essere presa quattro volte come fattore, e noi più semplicemente scriviamo a^4, che ci disegna che essa è stata presa quattro volte come fattore nella multiplicazione per se medesima, o ciò che vale lo stesso, ci indica, che essa è stata elevata alla quarta potenza.

Dal che ricaviamo, che lo esponente è un numero astratto scritto alla destra di una lettera alquanto al di sopra di essa per indicare quante volte il numero espresso da essa deve essere preso come fattore in una multiplicazione, oppure per indicare il grado della potenza, alla quale sì fatto numero deve essere elevato.

Per mostrare quanto sia importante cosa nell'Algebra l'uso delli coefficienti, e degli esponenti basta osservare, che se da noi si dovessero prendere a quattro volte come fattore in una multiplicazione, nella quale b dovrebbe entrare cinque volte come fattore, e d tre volte, e che sì fatto prodotto dovesse essere preso otto volte, facendo uso delli coefficienti, e degli esponenti noi scriveremo semplicemente $8a^4\ b^5\ d^3$, il che ci dà una idea del laconismo della lingua algebraica.

VIII. Il segno $\sqrt{\ }$ il quale da noi si adopera per disegnare, che dal numero, il quale è scritto appresso di esso deve estrarsi la radice di un certo grado. Così $\sqrt{a}$ oppure $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ ec., indicano, che dal numero espresso con a si deve estrarre la radice seconda, o quadrata, la radice terza, o cubica, la radice quarta ec.

3. Oltre delli segni da noi fino ad ora esposti l' algebra fa ancora uso di altri segni particolari per indicare li rapporti, che hanno fra loro li numeri, del calcolo delli quali essa si occupa.

Il segno $=$ posto fra due quantità indica, che esse sono eguali. Così per denotare che la somma di 5, e 4 è eguale a 9, noi scriviamo $5+4=9$, e ci esprimiamo dicendo 5 più 4 è eguale a 9, oppure la somma di 5e4 è eguale a 9; similmente per esprimere con li segni dell'algebra, che la differenza di 10 e 4 è 6, noi scriviamo $10-4=6$.

Il segno $>$ è inventato per indicare, che li numeri tra li quali esso è posto sono diseguali, e con ispezialità indica, che il numero maggiore è quello verso del quale è rivolta la apertura, ed il minore è quello verso del quale è rivolta la punta del segno, vale a dire, che facendo uso di questo segno dobbiamo situarlo in maniera, che la sua apertura sia rivolta dalla parte dove è posta la quantità maggiore. Così trovando $a>b$ diciamo a è maggiore di b, oppure b è minore di a; e trovando $a<b$, diciamo a è minore di b, oppure b è maggiore di a.

4. Dalle poche cose, che noi abbiamo esposte si vede chiaramente, che noi possiamo dire con Condillac, che l'Algebra è una lingua

composta da una serie di segni generali, ed abbreviativi, per mezzo delli quali possiamo con facilità seguire lo incatenamento delle idee nella formazione delli raziocinii, che da noi si debbono fare, tanto per dimostrare la esistenza di una proprietà nelle quantità che da noi si considerano, quanto nel determinare il numero, che corresponde alle condizioni di un problema, e quantunque noi non abbiamo ancora esposte le operazioni del calcolo, le quali formano la sintassi di questa lingua, pure per dare un saggio di quello, che essa può fare, noi esporremo la soluzione di un problema, e la dimostrazione di un teorema, riserbandoci a tempo più opportuno di estenderci sopra questa materia.

5. Prob. *Di due numeri la somma è 20, la differenza è [illegible], si cercano li due numeri.*

Sol. Se il minore delli due numeri ci fosse noto, noi conosceremmo il maggiore unendo al minore il numero 6, quindi se noi indichiamo con x il numero minore, il maggiore sarà indicato da $x+6$, quindi la somma delli due numeri sarà $x+x+6$, ma noi sappiamo che questa somma è 20, dunque $x+x+6=20$, e facendo uso delli coefficienti avremo $2x+6=20$, or se queste due quantità, che sono eguali si diminuiscano amendue di 6, li residui $2x$, e $20-6$ saranno eguali, cioè avremo $2x=20-6=14$, ma se di queste quantità eguali si prendano le metà, esse saranno ancora eguali, dunque $x=7$, quindi il minore delli numeri cercati è 7, ed il maggiore sarà $7+6=13$; In fatti la somma di 13 e 7 è 20, e la differenza di 13 e 7 è 6.

6. Perchè si veda il laconismo del linguagio algebraico, esponiamo il quadro delli calcoli algebraici, per osservare come questo calcolo rende corto, e semplice quello, che sarebbe lungo e penoso facendo uso del linguagio ordinario.

Sia x il numero minore, sarà $x+6$ il numero maggiore.

Avremo $2x+6=20$, e perciò $2x=14$, ed $x=\frac{14}{2}=7$, ed $x+6=7+6=13$. In fatti $7+13=20$, $13-7=6$.

7. Quantunque questo quadro ci faccia conoscere la brevità, e la facile maniera, con la quale noi possiamo giugnere alla soluzione di un problema, tuttavia noi riprenderemo lo stesso problema, ed invece di esprimere li numeri in cifre, noi li esprimeremo in lettere, per giugnere alla soluzione del medesimo problema senza assegnare alli numeri noti alcun valore particolare, e trovare così la soluzione, la quale senza rifare li raziocinii, ed i calcoli dia la soluzione per tutti li casi, nelli quali li valori particolari delli numeri dati sono fissati.

La somma delli numeri dati sia S, e la differenza di essi sia D; ed il minore delli numeri cercati si chiami x, il maggiore delli numeri cercati sarà $x+D$; quindi avremo la equazione $2x+D=S$, togliendo da queste quantità D, avremo $2x=S-D$, e per conseguenza

$x = \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}D$; il numero maggiore sarà $x+D=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}D+D=\frac{1}{2}S+\frac{1}{2}D$.

Poichè questi due valori sono indipendenti da qualunque valore particolare assegnato alle lettere, ne segue un teorema generale del quale faremo spesso uso, cioè.

8. *Qualora si conosce la somma, e la differenza di due numeri si determina il numero maggiore unendo alla metà della somma la metà della differenza, ed il minore togliendo dalla metà della somma la metà della differenza.*

Così se si metta $S=30$, $D=12$ avremo il numero maggiore eguale a $15+6=21$, ed il minore eguale a $15-6=9$; in fatti $21+9=30$, e $21-9=12$.

9. Quì non è fuori di proposito fare vedere, quale vantaggio ha l'algebra sopra della aritmetica, questa eseguendo sopra delli numeri le operazioni del calcolo, queste non lasciano alcuna traccia di esse nel risultato, e per conseguenza il problema dà una soluzione dipendente dalli valori particolari assignati alli numeri dati, e variando questi numeri, quantunque il problema sia lo stesso, ha bisogno, che tutti li raziocinii, e le operazioni del calcolo si rifacciano, al contrario l'algebra esprimendo con lettere li numeri dati, non potendo sopra di esse eseguire le operazioni del calcolo, ma soltanto accennarle per mezzo delli segni, essa conserva nel risultato la traccia

delle operazioni del calcolo, che si debbono eseguire sopra delle quantità note per ottenere le quantità dimandate.

Le quantità $\frac{1}{2}$ S$+\frac{1}{2}$ D, che indicano nel problema sciolto il numero maggiore, ed $\frac{1}{2}$ S$-\frac{1}{2}$ D che indica il numero minore, in algebra si chiamano *formole*, giacchè esse possono essere considerate come quelle espressioni, che contengono le soluzioni di tutti li problemi della medesima natura, nelle enunciazioni de' quali si fanno variare soltanto li valori numerici delli numeri dati.

10. Dopo di avere veduto il vantaggio, che presenta l' uso delli segni per la soluzione di un problema, vediamo ora come per mezzo di essi si possono dimostrare generalmente li teoremi.

Teor. *Il prodotto della somma di due numeri per la differenza di essi è eguale alla differenza delli quadrati delli medesimi numeri.*

Si disegnino con a il maggiore, e con b il minore delli numeri dati, la somma di essi sarà $a+b$, e la differenza sarà $a-b$.

Supponiamo, che $a+b$ si dovesse multiplicare soltanto per a, nella aritmetica si è dimostrato, che il prodotto sarà $aa+ab$ ossia a^2+ab; ma $a+b$ non dovea essere multiplicato per a, bensì per a diminuita di b, e poichè nella aritmetica si è dimostrato ancora, che qualora in una multiplicazione uno de' fattori si diminuisce di una quantità il prodotto si deve diminuire di tanto quanto è l' altro fattore multiplicato per la diminuzione fatta al fattore variato, ossia di $a+b$ multiplicato per b cioè di $ab+b^2$, dunque il prodotto di $a+b$ multiplicato per $a-b$ sarà $a^2+ab-ab+b^2$, ma $ab-ab=o$, dunque il prodotto della somma $a+b$ di due numeri per la loro differenza $a-b$ è a^2-b^2, cioè è eguale alla differenza delli quadrati delli medesimi numeri.

Noi abbiamo ricavato il risultato a^2-b^2, senza avere assegnato ad a, e b alcun valore particolare, quindi il teorema enunciato è generalmente vero, qualunque sia il valore delli numeri dati.

11. Nella soluzione del ploblema precedente, e nella dimostrazione del teorema noi abbiamo avuto bisogno di fare sopra de' numeri dati alcune operazioni di calcolo, quindi per potere fare uso dell' algebra nella soluzione de' problemi, e nella dimostrazione de' teoremi è necessario, che da noi si conoscano le regole, con le quali queste operazioni si debbono eseguire, e sebbene la parte dell' algebra, in cui queste regole si espongono sia alquanto arida, pure perchè essa forma la sintassi di questa lingua, li principianti debbono possederla a perfezione, se vogliono fare rapidi progressi nel vasto, e fecondo campo dell' algebra.

CAP II.

Nozioni preliminari alle operazioni del calcolo.

12. Qualunque quantità scritta con li segni abbreviativi dell' algebra è chiamata *quantità algebraica*, oppure *espressione algebraica* della quantità proposta.

Così $3a$ è la espressione algebraica del triplo del numero, che è espresso da a; $7a^2b^5$ è la espressione algebraica del settuplo del prodotto del quadrato di a multiplicato per la quinta potenza di b; $4a-3b$ è la espressione algebraica della differenza tra il quadruplo del numero espresso da a ed il triplo del numero espresso da b; $3a^2-2ab+5b^2$ è la espressione algebraica della differenza, che passa tra il triplo del quadrato di a, ed il doppio del prodotto di a per b accresciuta del quintuplo del quadrato di b.

13. Si da il nome di *termine*, o *di monomio* ad una quantità algebraica, la quale non è unita ad alcuna altra quantità per mezzo del segno $+$, o del segno $-$; e si dice *polinomio*, cioè quantità a più termini una quantità composta da più parti separate le une dalle altre, dalli segni $+$, e $-$

Così $3a$, $4a^2b$, $6a^5b^2d$ sono monomii; e le quantità $5a^3b^2-3a^2bc^2$; $4a^3b-5ac^2+4c^3$ etc. sono polinomie, il primo di questi, perchè è composto di due termini si dice *binomio*, ed il secondo sì chiama *trinomio*.

14. Il valore numerico di una espressione algebraica è il numero, che si ricaverebbe, qualora assegnando valori particolari alle lettere, dalle quali essa è composta, sopra di sì fatti numeri si eseguissero le operazioni aritmetiche, che sono indicate dalla espressione, ed osserveremo, che dipendendo tali valori numerici dalli valori assegnati alle lettere, debbono variare secondo che variano li valori assegnati alle lettere, così se ad a diamo il valore di 5, la quantità $4a^3$ sarebbe 500, nel mentre dando ad a il valore di 3 essa varrebbe 108.

14. È evidente per le cognizioni acquistate nella aritmetica, che il valore numerico di una quantità algebraica non si altera, qualora si inverte l' ordine delli termini, che la compongono, purchè si abbia la attenzione di conservare a ciascuno di essi il suo segno, osservazione, che ci sarà molto utile nel progresso di queste istituzioni.

15. Delli termini, che compongono un polinomio dato, alcuni sono preceduti dal segno $+$, altri dal segno $-$, quelli preceduti dal segno $+$ si chiamano *additivi*, e quelli preceduti dal segno $-$, si dicono *sottrattivi*, un tempo impropriamente li primi si chiamavano *positivi*, e gli altri *negativi*, tuttavia ancora oggi si fa uso di queste denominazioni, perchè consacrate dall' uso.

16. Si dice *dimensione* di un termine ciascuno delli fattori letterali, che entra nella sua composizione, e si dice *grado* del termine il numero delle sue dimensioni, ossia il numero delli fattori letterali di esso; il coefficiente non è considerato come dimensione, così $4a$ è detto di una dimensione, oppure di primo grado, $5ab$ è detto di due dimensioni, o di secondo grado, $6a^3b^2$ è detto di cinque dimensioni, o di quinto grado,

In generale il *grado* di un termine è quello, che nasce dalla somma delle unità, che contiene la somma degli esponenti delle lettere, che entrano nella composizione di esso, facendo però attenzione, che se in esso si trovano lettere senza esponente, si considerano, che esse abbiano per esponente la unità, che per comodo non si scrive.

17. Un polinomio si dice *omogeneo*, qualora tutti li termini, dalli quali esso è composto, sono del medesimo grado.

18: Di un polinomio si dicono *termini simili* quelli, che sono composti dalle medesime lettere, e che hanno li medesimi esponenti rispettivi.

Così $5ab$, $3ab$ sono termini simili $8a^2b^3$, $5a^2b^3$ sono simili, ma $3a^3b^2c^4$, $5a^2b^3c^4$ non sono simili, abbenchè sieno composti dalle medesime lettere, poichè le medesime lettere sono affette da esponenti differenti.

19. Dovendo noi nell' Algebra cercare la maniera da esprimere una quantità quanto più semplicemente possiamo, è necessario prima

di entrare a trattare delle operazioni, vederi come li polinomii, che hanno termini simil-si possono ridurre ad una più semplice espresesione.

Sia il polinomio $5a^3b^2 - 4a^2c, c + 8b^2d^2 + 6a^2c - 3b^2d^2 + 4a^2c - 3a^3b^2$, esso può essere scritto come segue $5a^3b^2 - 3a^3b^2 + 6a^2c + 4a^2c - 4a^2c + 8b^2d^2 - 3b^2d^2$; ma $5a^3b^2 - 3a^3b^2 = 2a^3b^2$, $+6a^2c + 4a^2c - 4a^2c = 6a^2c$; $8b^2d^2 - 3b^2d^2 = 5b^2d^2$, dunque il polinomio si riduce a $2a^3b^2 + 6a^3c + 5b^2d^2$.

Se in un polinomio qualunque si incontrino li termini simili $4a^3b - 6a^3b + 8a^3b - 5a^3b + 12a^3b$, facendo la somma delli termini additivi avremo $24a^3b$, facendo la somma delli termini sottrattivi avremo $-11a^3b$, dunque la somma delli termini simili proposti si riduce a $13a^3b$.

Può accadere, che la somma delli termini sottrattivi superi la somma delli termini simili additivi, in questo caso si sottrae dal coefficiente sottrattivo il coefficiente additivo, ed il risultato si affetta col segno $-$; così se la somma delli termini additivi è $8a^3b^2$, e quella delli termini sottrattivi è $-15a^3b^2$, poichè $-15a^3b^2$ equivale a $-8a^3b^2 - 7a^3b^2$, ne segue che $8a^3b^2 - 15a^3b^2 = 8a^3b^2 - 8a^3b^2 - 7a^3b^2$, il quale evidentemente si riduce a $-7a^3b^2$

20. Da quanto abbiamo detto ricaviamo la seguente regola generale.

Qualora si deve fare la contrazione delli termini simili di un polinomio si formi un solo termine di tutti li termini simili additi-

vi, addizionando tutti li coefficienti delli termini simili preceduti dal segno +, dando questa somma per coefficiente alla parte letterale de' termini simili, e similmente si operi sopra de' termini simili sottrattivi, e si sottragga dal coefficiente maggiore il coefficiente minore, ed il residuo si dia per coefficiente della parte letterale delli termini simili, affettando il residuo del segno, che affettava la quantità maggiore.

Questa operazione, che noi chiameremo *contrazione*, oppure *reduzione* è una operazione particolare dell' algebra, ed essa ha luogo in tutte le operazioni algebraiche analoghe a quelle della aritmetica, quindi noi la abbiamo premessa alle operazioni del calcolo, cioè alle regole della composizione, e della decomposizione delle quantità algebraiche.

CAP III.

Della composizione delle quantità Algebraiche.

Articolo I.

Della Addizione.

21. Nella aritmetica abbiamo veduto, che la addizione di più numeri dati consiste in trovare un numero, il quale contenga in se tante unità, quante ne contengono tutti li nume-

ri dati, similmente nella addizione algebraica noi ci proponiamo *di determinare la espressione algebraica la più semplice possibile del numero totale delle unità contenute in più espressioni algebraiche proposte.*

Proponiamoci I. di addizionare $3a$, $5b$, $7c$, avremo per risultato $3a+5b+7c$ espressione, che non può essere resa più semplice. 2. Se si debbono addizionar le quantità $5a^3b^2$, $3a^3b^2$, $7a^3b^2$, il risultato sarebbe $5a^3b^2+3a^3b^2+7a^3b^2$, sopra del quale facendo la contrazione, lo ridurremo alla espressione equivalente $15a^3b^2$. 3. Sieno dati li polinomii $3a^2-4ab$, $2a^2-5ab+2b^2$, $4ab-2b^2$ Per trovare la espressione la più semplice della somma di questi tre polinomii, noi osserveremo che aggiungere al numero espresso da $3a-4ab$ quello espresso da $2a^2-5ab+2b^2$, vale lo stesso, che unire la differenza del numero delle unità espresse da $3a+2a^2+2b^2$ ed il numero delle unità espresse da $5ab$ e da $4\ ab$, operazione che si eseguirebbe facilmente se si attribuissero valori particolari ad a, b, ma come non si può eseguire nello stato attuale delle quantità, si riduce ad unire prima $3a^2+2a^2+2b^2$ ed indi sottrarne $5ab$, e $4ab$, e ne risulterà $3a^2+2a^2+2b^2-5ab-4ab$, e similmente unendo a queste quantità $4ab-2b^2$ avremo la somma delli tre polinomii dati essere $3a^2+2a^2+2b^2-5ab-4ab+4ab\ b+2b^2$, e facendo sopra questo risultato la contrazione delli termini simili avremo per risultato finale $5a^2-5ab$.

22. Li raziocinii precedenti potendo essere applicati ad altri polinomii, noi conchiuderemo la seguente regola generale per la addizione di più polinomii.

Si scrivano i polinomii dati gli uni appresso degli altri, conservando alli termini, dalli quali essi sono composti li loro segni respettivi, e si esegua sopra del risultato la contrazione delli termini simili.

Esempio. Sieno li polinomii da addizionarsi

$$\begin{array}{l} 6a^2b^3 - 4ac^2 + 4b^2c^3 \\ 7a^3b^2 - 4a^2b^3 + 8ac^2 \\ 3a^2b^3 - 7ac^2 - 4d^3 \\ \hline \end{array}$$

Somma $5a^2b^3 - 3ac^2 + 7a^3b^2 + 4b^2c^3 - 4d^3$

23. Nella pratica da noi si sogliono scrivere le quantità date le une sotto le altre, come si vede fatto nello esempio precedente, indi si fa successivamente la riduzione delli termini simili, e si scrivono li risultati con li loro segni rispettivi, così nello esempio proposto considerando, che li termini $6a^2b^3, -4a^2b^3, +3a^2b^3$ sono simili, noi abbiamo ridotti essi al solo termine $5a^2b^3$, e lo abbiamo scritto al risultato, ed operando sogliamo avere la cura sbarrarli con una leggiera linea nelli polinomii dati, indi abbiamo fatto lo stesso per gli altri termini simili; quì avvertiremo, che la leggiera linea, che tiriamo sopra li termini è necessaria, per prevenire la omissione di

qualche termine, che potrebbe accadere nel risultato.

24. Per mezzo della addizione noi abbiamo trovata la maniera di unire insieme più quantità diseguali, o eguali, e trovarne una altra, la quale sia eguale a tutte le date unite insieme, è naturale ora il proporsi di formare la quantità, la quale risulta da una medesima quantità più volte a se medesima riunita, dal che nasce la multiplicazione, che è un caso particolare della addizione ordinaria, come noi abbiamo veduto nella aritmetica, e poichè ci interessa di esaminare tutti li casi della composizione delle quantità algebraiche, noi vedremo, quale metodo si debba tenere per multiplicare un monomio per un altro monomio, un monomio per un binomio, un binomio per un binomio, un binomio per più binomii, un polinomio per uno, o per più altri polinomii.

ARTICOLO II.

Della Multiplicazione.

25. Noi incominceremo dal caso il più semplice, cioè dalla multiplicazione di un monomio per un monomio. Noi sappiamo per quello, che abbiamo detto, che non potendo eseguire le operazioni del calcolo sopra delli numeri espressi in lettere, noi scriviamo li fattori let-

terali gli uni appresso degli altri senza interposizione di alcun segno, e che qualora un numero rappresentato da una lettera deve essere multiplicato per se medesimo, allora facciamo uso degli esponenti, quindi dovendo multiplicare a per b per c noi scriveremo abc; se dovessimo multiplicare a per a per a, noi possiamo scrivere per prodotto aaa, e facendo uso degli esponenti scriveremo a^3, se dovessimo multiplicare a^3b^2 per a^2bc^3, considerando, che queste quantità si riducono ad $aaabb \times aabccc$, e che in qualunque ordine li fattori si multiplicano il prodotto non si altera, avremo per prodotto $aaaaabbbccc$, e facendo uso degli esponenti, il prodotto sarà $a^5b^3c^3$.

Supponiamo ora, che si debba multiplicare $5a^3b^2c^3$ per $4a^2b^3d$, quantità affette dalli coefficienti 5, e 4; se noi multiplichiamo questi monomi facendo astrazione delli coefficienti, il prodotto sarà $a^5b^5c^3d$, ma considerando, che il multiplicando deve essere multiplicato per 5, e che perciò il prodotto deve anche essere multiplicato per 5, il prodotto di . . . $5a^3b^2c^3$ per a^2b^3d sarà $5a^5b^5c^3d$, ma il multiplicatore non era a^2b^3d, bensì era $4a^2b^3d$, dunque il prodotto trovato $5a^5b^5c^3d$ deve essere multiplicato per 4, ed il prodotto dimandato sarà $4 \times 5a^5b^5c^3d$, e perchè li coefficienti sono espressi in cifre, si può eseguire la multiplicazione di 4 per 5, ed il prodotto sarà $4 \times 5a^5b^5c^3d$, oppure $20a^5b^5c^3d$.

*

26. Dal che ricaviamo la seguente regola generale, che qualora debbono multiplicarsi due monomi, *si debbono multiplicare li coefficienti, indi si debbono scrivere appresso del prodotto de' coefficienti li numeri espressi in lettere, avendo la attenzione di scrivere una sola volta le lettere, che sono nelli due fattori, e dare ad esse per esponente la somma degli esponenti, che esse hanno nelli due fattori, e scrivere le lettere dissimili le une dopo delle altre senza alcuna interposizione di segni.*

27. In tutto quello, che abbiamo detto; abbiamo considerati li fattori come numeri assoluti, cioè facendo astrazione dalli segni $+$, e $-$, dalli quali essi possono essere affetti, quindi bisogna ora occuparci delli segni.

Noi abbiamo veduto nella aritmetica, che nella multiplicazione il prodotto deve essere formato dal multiplicando della maniera medesima, che il multiplicatore è formato relativamente alla unità, quindi qualora si deve multiplicare $+a$ per $+b$, noi dobbiamo comporre il prodotto col multiplicando $+a$ di quella medesima maniera, che il multiplicatore $+b$ è composto con la unità, ma il multiplicatore $+b$ è composto da $+1$ preso b volte, dunque il prodotto è composto da $+a$ preso b volte, e perciò $+a \times +b = +ab$.

Sia ora da multiplicare $-a$ per $+b$, per formare il multiplicatore $+b$, noi abbiamo presa la unità, ossia $+1$ tante volte quante ne indica b, dunque per formare il prodotto dobbiamo aggiugnere il multiplicando a se medesimo prendendolo tante volte, quante ne indica b, ed avremo $-a \times +b = -ab$.

Supponiamo ora, che debba multiplicarsi $+a$ per $-b$, allora il multiplicatore $-b$ è composto da -1 aggiunto a se medesimo preso tante volte quante ne indica b, quindi cambieremo similmente il segno del multiplicando, $+a$, il quale diviene $-a$, ed a se medesimo lo aggiugneremo prendendolo b volte, ed avremo $+a \times -b = -ab$.

Finalmente se ci proponiamo di multiplicare $-a$ per $-b$; noi considereremo, che per formare il multiplicatore $-b$, noi abbiamo incominciato dal cambiare il segno della unità facendola divenire -1, indi la abbiamo aggiunta a se medesima prendendola b volte, quindi per avere il prodotto, incominceremo dal cambiare il segno del multiplicando $-a$, il quale diverrà $+a$, ed indi lo uniremo a se medesimo prendendolo b volte, ed avremo $-a \times -b = +ab$.

28. Dal che ricaviamo la regola delli segni della multiplicazione, la quale è, che *il prodotto di una quantità per una' altra deve essere preceduto dal segno* $+$, *quando li due fattori sono preceduti ambidue dal medesimo segno* $+$, *o dal medesimo segno* $-$; *e deve essere preceduto dal segno* $-$, *quando li due fattori sono preceduti da segni contrarii.*

29. Noi abbiamo veduto, che volendo multiplicare a^m per a^n il prodottò è a^{m+n}, supponendo sempre, che m ed n disegnino numeri interi, e positivi, noi dobbiamo ora vedere, quale deve essere lo esponente di a nel prodotto, che nasce da a^m preso n volte come fattore nella multiplicazione per se medesimo, o sia quale deve essere lo esponente di $(a^m)^n$, noi sappiamo, che $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m$ ec. $= a^{m+m+m+\cdots} = a^{mn}$.

Vediamo ora, quale sarebbe lo esponente di $((a^m)^n)^p$, noi osserviamo, che questa espressione indica, che a^m deve essere elevata prima alla potenza n, ed avremo a^{mn}, indi deve essere elevata alla potenza p, quindi $(a^{mn})^p = a^{mnp}$, e perciò $((a^m)^n)^p = a^{mnp}$.

Dal che generalmente conchiudiamo, *che qualora vogliamo elevare una potenza di una lettera a varie potenze di qualsivogliano gradi, dobbiamo moltiplicare lo esponente della lettera per tutti li numeri, che indicano li gradi delle potenze, alle quali essa deve essere elevata.*

Proponiamoci ora di vedere, quali dovranno essere gli esponenti di un monomio $a^p b^q c^r$ prendendolo n volte come fattore nella multiplicazione per se medesimo, o sia quale sarà lo sviluppo di $(a^p b^q c^r)^n$, eseguendo la multiplicazione per lo processo ordinario avremo $a^{p+p+p+\cdots}\ b^{q+q+q+\cdots}\ c^{r+r+r+\cdots} = a^{np} b^{nq} c^{nr}$.

30. Dal che conchiudiamo, che qualora un monomio si deve elevare ad una data potenza

noi *dobbiamo multiplicare lo esponente di ciascuno de' fattori per lo numero, che indica il grado della potenza dimandata.*

31. In oltre noi sappiamo che $+a^m \times +a^m = +a^{2m}$, che $+a^m \times +a^m \times +a^m = +a^{3m}$, e così procedendo innanzi, quindi potremmo per analogia conchiudere, che qualora si elevi a qualsivoglia potenza una quantità preceduta dal segno $+$, la potenza sarà anche essa preceduta dal segno $+$.

Similmente sappiamo, che $-a^m \times -a^m = +a^{2m}$, che $-a^m \times -a^m \times -a^m = -a^{3m}$, che $-a^m \times -a^m \times -a^m \times -a^m = +a^{4m}$, ec; quindi per analogia potremmo anche conchiudere, che qualora una quantità preceduta dal segno $-$ si eleva ad una potenza di grado pari, la potenza sarà preceduta dal segno $+$; e che qualora essa si eleva ad una potenza di grado dispari, la potenza sarà preceduta dal segno $-$; pure per avere di questi fatti la certezza, noi dimostreremo li due teoremi seguenti.

32. Teor. 1. *Qualunque potenza di grado pari di una quantità è sempre preceduta dal segno* $+$.

Dim. La formola generale, che esprime un numero pari è $2n$, quindi se noi abbiamo $\pm a^m$ da elevare ad una potenza pari, la indicheremo per $(\pm a^m)^{2n}$, la quale equivale a $((\pm a^m)^2)^n$; ma $(\pm a^m)^2 = +a^{2m}$; dunque $(\pm a^m)^{2n} = (+a^{2m})^n = +a^{2mn}$. Sicchè, ec.

33. Teor. 2. *Qualunque potenza di grado dispari è affetta sempre dallo stesso segno, dal quale è affetta la radice.*

Dim. La formola generale, che indica li numeri dispari è $2n+1$, quindi se si ha la grandezza $\pm a^m$ da elevare ad una potenza di grado dispari, noi la disegneremo con ..... $(\pm a^m)^{2n+1}$, quantità la quale equivale ad $(\pm a^m)^{2n} \times \pm a^m$, ma noi abbiamo dimotrato, che $(\pm a^m)^{2n} = + a^{2mn}$, dunque $(\pm a^m)^{2n+1} = + a^{2mn} \times \pm a^m = \pm a^{2mn+m}$. Sicchè ec.

34. Da quanto abbiamo detto ricaviamo la seguente regola generale; *Qualora si vuole elevare un monomio a qualsivoglia potenza, noi affetteremo la potenza col segno + se il grado della potenza è pari, e lo affetteremo col segno medesimo della radice, se è di grado dispari, indi multiplicheremo gli espenenti delli fattori della radice per lo numero, che esprime il grado della potenza, alla quale il monomio deve essere elevato, e poichè il coefficiente è ancora uno delli fattori della radice, ed ha per esponente la unità, se gli deve dare anche per esponente il medesimo numero, che esprime il grado della potenza dimandata, e poichè esso è espresso in cifre, se si vuole, se ne trova la potenza secondo le regole date nella aritmetica.*

35. Passiamo ora alla multiplicazione di un monomio per un binomio, di un binomio per

un monomio, e di un binomio per un altro binomio.

Sia da multiplicare a per $b-c$, noi sappiamo, che se da noi si dovesse multiplicare a per b, il prodotto sarebbe ab, ma dovendo multiplicare a per $b-c$, il multiplicatore b deve essere diminuito di c, quindi il prodotto trovato ab deve essere diminuito di tanto quanto è il multiplicando a ripetuto tante volte, quante ne indica c, cioè di ac, e perciò il prodotto è $ab-ac$.

36. Quì stimo non essere fuori di proposito avvertire, che pare, che per quello che abbiamo detto, si supponga, che sia b maggiore di c, ma se fosse $b<c$, noi osserveremo, che aggiugnendo a b una quantità espressa da K, tale, che sia $b+K>c$, allora avremo $a(b+K-c)=ab+aK-ac$, ma aggiugnendo al multiplicatore la quantità K di troppo, il prodotto ha di troppo il prodotto di a ripetuto K volte, dunque se dal prodotto $ba+aK-ac$ si toglie il termine aK, che vi è di troppo, avremo il prodotto di $a(b-c)=ab-ac$, come si era trovato per lo primo processo.

37. Se si dovesse multiplicare $b-c$ per a, noi troveremo lo stesso risultato, imperocchè multiplicando b per a, noi abbiamo il prodotto ba, ma non si doveva multiplicare b per a, bensì b diminuito di c per a, dunque, per gli principii dimostrati nella aritmetica, il prodotto ba deve essere diminuito di tanto quanto è $c\times a$, o sia di ca, e perciò $(b-c)a=ab-ac$.

38. Sia in ultimo luogo da multiplicare $a - b$ per $c - d$, supponiamo, che da noi si debba multiplicare $a - b$ per c, per quello, che abbiamo dimostrato, il prodotto sarebbe $ac - bc$ ma noi non dovevamo multiplicare $a - b$ per c, bensì per c diminuito di d, dunque il prodotto trovato $ac - bc$ deve essere diminuito di $a - b$ multiplicato per d, cioè di $ad - bd$, or se da $ac - bc$ togliamo ad avremo per risultato la quantità $ac - bc - ad$, ma avendo tolto da $ab - bc$ la quantità ad, abbiamo tolta una quantità maggiore di quella, che si dovea sottrarre di tanto quanto è bd, dunque il risultato $ac - bc - ad$ è minore di quello, che deve essere di tanto quanto è bd, dunque per avere il vero prodotto di $(a - b)(c - d)$ dobbiamo aggiungere bd, alla quantità $ac \cdots - bc - ad$, e perciò il prodotto di $(a - b)(c - d)$ è $ac - bc - ad + bd$.

39. E quì noteremo, che in questa operazione noi troviamo per mezzo di principj differenti da quelli usati antecedentemente la medesima regola delli segni, la quale viene ad essere confirmata anche nel caso, che li fattori non sieno monomii.

40. Proponiamoci in ultimo luogo di multiplicare il polinomio $3a^4 - 4a^3b - 2b^2$ per $5a^2 - 3ab$.

Egli è evidente per quello, che abbiamo detto, che per eseguire questa multiplicazione dobbiamo multiplicare tutto il multiplicando per $5a^2$, ed indi togliere dal prodotto trovato il prodotto dello stesso multiplicando per

$3ab$, il che vale lo stesso, che multiplicare ciascuno delli termini del multiplicando per ciascuno delli termini del multiplicatore, e fare la contrazione delli prodotti parziali ritrovati, la operazione si esegue come quì sotto

$$
\begin{array}{l}
3a^4 - 4a^3b - 2b^2 \\
5a^2 - 3ab \\
\hline
15a^6 - 20a^5b - 10a^2b^2 \\
\qquad - 9a^5b + 12a^4b^2 + 6ab^3 \\
\hline
15a^6 - 29a^5b + 12a^4b^2 - 10a^2b^2 + 6ab^3
\end{array}
$$

ed avremo per prodotto totale $15a^6 - 29a^5b + 12a^4b^2 - 10a^2b^2 + 6ab^3$.

41. Quì è bene di avvertire, che nel fare la multiplicazione delli polinomii per mettere una certa regola nelle successive multiplicazioni parziali, e per isfuggire le occasioni degli errori, noi sogliamo scegliere una lettera, la quale è comune a più termini delli fattori, che chiameremo *lettera ordinatrice*, ed ordiniamo li termini di ciascuno de' fattori, e del prodotto relativamente a tale lettera, e se facciamo, che li termini de' polinomj abbiano la lettera ordinatrice col massimo esponente nel primo termine, e con gli esponenti successivamente minori nelli termini seguenti, si dirà, che il *polinomio è ordinato secondo le po-*

tenze discendenti di tale lettera, se al contrario hanno la lettera ordinatrice, sulla quale gli esponenti vanno continuamente crescendo nelli termini successivi, esso si dice *ordinato secondo le potenze ascendenti della lettera ordinatrice*, noi però sogliamo quasi sempre ordinare i polinomii secondo le potenze descendenti della lettera ordinatrice, e se qualche volta ordiniamo secondo le potenze ascendenti, abbiamo la attenzione di avvertirlo.

Esempio. Sia da multiplicare.

$$\begin{array}{l} 3a^4b^2 - 5a^3b^3 + 4ac^2 \\ \underline{5a^3b + 3a^2b^2 - 5c^3d} \end{array}$$

Prodotti parziali

$$\left\{\begin{array}{l} 15a^7b^3 - 25a^6b^4 + 20a^4bc^2 \\ \qquad + 9a^6b^4 - 15a^5b^5 + 12a^3b^2c^2 \\ \qquad\qquad - 15a^4b^2c^3d + 25a^3b^3c^3d - 20ac^5d \end{array}\right.$$

Prodotto totale

$$\left\{\begin{array}{l} 15a^7b^3 - 16a^6b^4 - 15a^5b^5 + (20bc^2 - 15b^2c^3d)a^4 \\ + (25b^3c^3d + 12b^2c^2)\, a^3 - 20ac^5d. \end{array}\right.$$

In questo esempio volendo, che il prodotto fosse ordinato secondo le potenze discendenti della lettera ordinatrice a, delli termini affetti della medesima potenza di a, come sono quelli, che hanno a^4 ne abbiamo fatto un solo termine $20bc^2 - 15b^2c^3d$ multiplicato per a^4, che per commodo abbiamo scritto $(20bc^2 - 15b^2c^3d)a^4$, e così faremo sempre in simili casi, come abbiamo fatto ancora negli altri termini nelli quali si trova a^3.

42. Passiamo ora ad analizzare questi prodotti, ed incominciamo dal primo prodotto parziale, nel quale osserveremo, che il suo primo termine $15a^7b^3$ è formato per rispetto alla lettera ordinatrice, la quale si trova nel multiplicando avere il massimo esponente relativamente a quelli, che essa ha negli altri termini di esso, quindi nel primo termine del primo prodotto parziale essa dovrà avere un esponente sempre maggiore di quello, che essa hà in ciascuno delli termini seguenti, e perciò il primo termine del primo prodotto parziale non può avere nello stesso prodotto alcun termine, che gli sia simile.

Similmente il primo termine del secondo prodotto parziale nascendo dalla multiplicazione del primo termine del multiplicando per lo secondo termine del multiplicatore, nel mentre, che gli altri termini dello stesso prodotto nascono dalla multiplicazione degli altri termini del multiplicando per lo stesso secondo termine del multiplicatore, sapendo, che tutti li termini del multiplicando, che seguono il primo hanno la lettera ordinatrice con esponente minore dello esponente, che essa ha nel primo, conchiudiamo, che la lettera ordinatrice dovrà avere nel primo termine di questo prodotto un esponente maggiore di quello, che ha nelli termini seguenti, e perciò il primo termine del secondo prodotto parziale non può avere nello stesso prodotto alcun termine, che ad esso sia simile; lo stesso si dimostra per tutti li prodotti parziali seguenti.

In oltre il primo termine del primo prodotto parziale nascendo dalla multiplicazione del primo termine del multiplicando per lo primo termine del multiplicatore, nel mentre, che li primi termini degli altri prodotti parziali nascono dallo stesso primo termine del multiplicando multiplicato per gli termini successivamente seguenti il primo termine del multiplicatore, considerando, che questi termini successivi del multiplicatore hanno sopra la lettera ordinatrice un esponente minore di quello, che essa ha nel primo termine, ne segue, che la lettera ordinatrice uel primo termine del primo prodotto parziale ha un esponente maggiore di quello, che essa ha nelli primi termini degli altri prodotti parziali, ed i primi termini degli altri prodotti parziali avendo sopra la lettera ordinatrice esponenti maggiori di quelli, che essa ha negli altri termini di tali prodotti, ne segue, che il primo termine del primo prodotto parziale non ha in tutti li prodotti parziali alcun termine ad esso simile, e perciò nella formazione del prodotto totale esso vi entra solo, e senza miscela, e formerà il primo termine del prodotto totale, e poichè esso è il prodotto del primo termine del multiplicando per lo primo termine del multiplicatore, ne segue, che il primo termine del prodotto totale sarà il prodotto del primo termine del multiplicando per lo primo termine del multiplicatore.

Dippiù il prodotto totale essendo la somma di tutti li prodotti parziali, ne segue, che se dal prodotto totale si sottragga il primo prodotto parziale, ed il residuo si ordini per rapporto alla medesima lettera ordinatrice, il residuo conterrà la somma degli altri prodotti parziali, e poichè la lettera ordinatrice ha nel primo termine del secondo prodotto parziale un esponente maggiore di quello, che la medesima lettera ha in tutti gli altri suoi termini, ed in tutti li termini degli altri prodotti parziali, ne segue che esso sarà il primo termine di tale residuo, e poichè esso è il prodotto del primo termine del multiplicando per lo secondo termine del multiplicatore, ne segue, che il primo termine di tale residuo è il prodotto del primo termine del multiplicando per lo secondo termine del multiplicatore.

Similmente si dimostra, che se da questo residuo si toglie il secondo prodotto parziale, ed il residuo si ordina per rapporto alla medesima lettera ordinatrice, questo secondo residuo avrà per suo primo termine il prodotto del primo termine del multiplicando per lo terzo termine del multiplicatore, e così procedendo avanti.

43. Quì è necessario fare varie considerazioni 1. Qualora nelli fattori polinomi li respettivi termini di ciascuno di essi sono omogenei, anche li termini del prodotto sono omogenei, questa è una conseguenza della regola

degli esponenti, e delle lettere della multiplicazione de'monomj.

2. Quando nella multiplicazione de' polinomii il prodotto non ha termini simili, il numero delli termini di esso è quello, che nasce dalla multiplicazione del nnmero de' termini di uno delli fattori per lo numero de' termini dell'altro.

3. Qualora nel prodotto ha luogo la contrazione, il numero delli termini può essere molto minore, però tra li termini del prodotto ve ne sono sempre due, che non possono essere mai contratti, e questi sono il termine, che nasce dalla multiplicazione del termine del multiplicando affetto dal più alto esponente di una lettera per lo termine del multiplicatore, il quale è affetto dal massimo esponente della medesima lettera, l'altro è quello, che nasce dalla multiplicazione dalli due termini delli due fattori, che sono affetti dal minimo esponente della medesima lettera, in fatti questi due prodotti parziali debbono contenere si fatta lettera l'uno con lo esponente maggiore, l'altro con lo esponente minore dello esponente, che la medesima lettera ha in qualunque altro termine del prodotto totale; Quindi il prodotto di due polinomi deve avere almeno due termini.

44. Nel fare le multiplicazioni che noi abbiamo eseguite negli esempi precedenti, osserviamo, che esse tutte si riducono a multiplicare un monomio per un altro, essi ci fanno ancora vedere, che la legge secondo la qua-

le si formano li prodotti per mezzo delli fattori è talmente complicata, che non può ridursi ad una regola semplice, e pratticabile, ma essi lasciano travedere la possibilità di stabilire una legge, qualora li fattori fossero semplici, e formati in una maniera regolare, quindi per vedere se la legge, con la quale un prodotto si forma per mezzo delli fattori, si possa scovrire, noi multiplicheremo fra essi più fattori binomi.

45. Quì avvertiremo, che invece di dare il prodotto della multiplicazione delli polinomj, spesso indichiamo la multiplicazione rinchiudendo ciascuno delli fattori fra due parentesi; così per indicare la multipllcazione di $x+a$, per $x+b$, per $x+c$, per $x+d$, noi scriviamo $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ ec.

46. Proponiamoci ora di multiplicare. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ ec., e vediamo di scovrire la legge, secondo la quale li fattori entrano nella composizione del prodotto.

Per eseguire questa multiplicazione faremo, come abbiamo operato nella aritmetica, cioè multiplicheremo il primo binomio per lo secondo, indi il prodotto, che ne risulta lo multiplicheremo per lo terzo binomio, e così procedendo avanti, come si vede quì sotto.

$$
\begin{array}{l}
x+a \\
x+b \\
\hline
x^2+ax+bx+ab \\
x+c \\
\hline
x^3+ax^2+bx^2+abx+cx^2+acx+bcx+abc \\
x+d \\
\hline
x^4+ax^3+bx^3+abx^2+cx^3+acx^2+bcx^2 \\
+abcx+dx^3+adx^2+bdx^2+abdx+cdx^2 \\
+acdx+bcdx+abcd\;;
\end{array}
$$

ed ordinando li termini di tutti questi prodotti per rapporto alla lettera ordinatrice comune x, avremo.

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2.$$
$$+(ab+ac+bc)x+abc.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+$$
$$(a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd$$
$$+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$$

47. Quindi se noi consideriamo come un solo termine il prodotto di una data potenza di x per lo polinomio compreso nella parendesi, noi potremo conchiudere le seguenti leggi.

1°. Che il primo termine di ciascuno prodotto è formato dal termine comune a tutti li binomi dati elevato alla potenza, il grado della quale è il numero delli fattori binomi, che si sono multiplicati.

2°. Che il secondo termine del prodotto è formato dal prodotto della somma delli secondi termini delli binomii dati multiplicato per lo termine comune a tutti li inomi dati con lo esponente del primo termine diminuito di una uuità.

3. Che il terzo termine è il prodotto della somma di tutti li prodotti differenti, che nascono multiplicando a due a due li secondi termini delli binomi dati per lo termine comune a tutti essi con l'esponente di una unità minore dello esponente, che esso ha nel termine precedente.

4. Che il quarto termine è il prodotto, che si ottiene multiplicando la somme delli prodotti differenti, che si hanno multiplicando a tre a tre li secondi termini delli binomi dati per lo termine comune con lo esponente di una unità minore dello esponente, che esso ha nel termine precedente, e così in avanti, fino all'ultimo termine, il quale è il semplice prodotto di tutti li secondi termini delli binomi dati.

48. Osservando, che questa legge non si altera, qualora alli fattori dati se ne aggiugne un altro, potremmo per analogia conchiudere, che essa si deve avverare qualunque sia il numero delli fattori dati, tuttavia noi cercheremo di dimostrarla direttamente, affinchè essa sia certa.

Quandi se supponiamo, che da noi si sia verificato il prodotto di m fattori binomii, li quali hanno tutti per primo termine x, ed i secondi termini tutti differenti, allora questo prodotto, potrà essere espresso nella seguente maniera abbreviata.

$$x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+S_3x^{m-3}+\ldots+S_m$$

Disegnando con S_1 la somma delli secondi termini delli binomi dati, con S_2 la somma delli prodotti differenti, che si possono fare multiplicando a due a due li medesimi secondi termini, con S_3 la somma delli prodotti differenti, che si possono fare multiplicando li medesimi secondi termini a tre a tre, e così in avanti, ed in fine con S_m la somma di tutti li secondi termini multiplicati ad m ad m, o ciò che vale lo stesso il prodotto di tutti li secondi termini.

La legge trovata sarà generalmente vera, se per la introduzione di un nuovo fattore essa non viene alterata.

Quindi multiplichiamo questo sviluppo del prodotto di m fattori per un nuovo binomio $x+K$, disponendo li due prodotti parziali l'uno sotto l'altro in modo, che si corrispondano le medesime potenze di x, come quì sotto, avremo.

$$+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+S_3x^{m-3}+\ldots+S_{m-1}x+S_m$$
$$+K.$$

prodotto

$$\begin{array}{ll|l|l}
x^{m+1} & +S_1 & x^m+S_2 & x^{m-1}+ \\
 & +K & +S_1K & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
+S_{m-1} & x^2+S_m & x+S_mK \\
+S_{m-2}K & +S_{m-1}K & \\
\end{array}$$

Esaminando questo prodotto noi conosceremo chiaramente, che S_1+K è la somma di tutti li secondi termini delli $m+1$ binomi, giacchè S_1 è la somma delli secondi termini delli primi m binomi.

Che S_2+S_1K è la somma delli prodotti differenti delli secondi termini delli $m+1$ binomi, poichè S_2 è la somma delli prodotti differenti, che si possono fare multiplicando a due a due li secondi termini delli primi m binomi, ed allora S_2+S_1K contiene prima tutti li prodotti differenti, che si possono avere senza impiegare la lettera K, ed indi tutti li prodotti a due a due, che comprendono questa lettera K, e così in appresso.

Della medesima maniera S_m rappresentando il solo prodotto, che si può fare con m lettere, ed S_{m-1}, essendo la somma delli prodotti differenti ad $m-1$ ad $m-1$ di questi medesimi secondi termini, perciò $S_m + S_{m-1}K$ indicherà la somma di tutti li prodotti differenti, che si possono fare con tutti li secondi termini delli $m+1$ binomi multiplicandoli ad m ad m, giacchè la parte S_m rappresenta il solo prodotto, che si può fare senza impiegare la lettera K, e di poi quando si multiplica S_{m-1} per K, si formano tutti quelli prodotti, nelli quali la lettera K può entrare, dunque $S_m + S_{m-1}K$ è la somma di tutti li prodotti differenti, che si possono comporre multiplicando ad m ad m, li secondi termini delli medesimi $m+1$ binomii.

In fine è evidente, che $S_m K$ è il solo prodotto di $m+1$ lettere, che si può fare con li medesimi secondi termini.

Dal che generalmente conchiudiamo, che rappresentando con m qualunque numero di binomii, li quali hanno il primo termine comune, il prodotto, che si ha multiplicandoli insieme, avrà la forma.

$$x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + S_3 x^{m-3} + \ldots\ldots + S^{m-1} x + S$$

assegnando ad S_1, S_2, S_3 ec. le significazioni convenute.

49. Se supponiamo ora, che tutti li secondi termini delli binomii dati sieno eguali ad a, cioè che sieno $a=b=c=d$ ec, allora il binomio $x+a$ sarà preso m volte come fattore nella multiplicazione per se medesimo, e lo sviluppo precedente, dopo di avere ricevute le modificazioni, che questa supposizione produce in esso, darà lo sviluppo della potenza m^{ma}

del binomio $x+a$; per vedere quali cambiamenti deve provare lo sviluppo precedente per indicare lo sviluppo della potenza m^{ma} del binomio $x+a$, noi considereremo.

1.° Che la quantità S_1, che indicava la somma delli secondi termini, si cambierà in a presa tante volte quante ne indica il numero delli binomii, ma si fatto numero delli binomi è m, dunque avremo.

$$S_1 = ma$$

2.° Che la quantità S_2, che si componeva dalli prodotti ab, ac, ad, bc, bd ec. si cambierà in a^2 presa tante volte, quanti sono li prodotti differenti, che si possono fare con m lettere multiplicandole a due a due, quindi se noi volessimo sapere il valore di S_2, bisognerebbe prima conoscere il numero delli prodotti differenti, che si possono fare multiplicando a due a due m lettere. Disegniamo per poco questo numero con P_2, ed avremo.

$$S_2 = P_2 a^2$$

3. Similmente ragionando vedremo che,

$$\begin{aligned} S_3 &= P_3 a^3 \\ S_4 &= P_4 a^4 \\ S_5 &= P_5 a^5 \\ \text{ec.} & \quad \text{ec.} \end{aligned}$$

Disegnando con P_3, P_4, P_5 ec. li numeri delli prodotti differenti, che si possono fare con le m lettere date a, b, c, d ec. combinandole a tre a tre, a quattro a quattro, a cinque a cinque ec.

Quindi lo sviluppo di $(x+a)^m$ avrà la forma

$$x^m + P_1 a x^{m-1} + P_2 a^2 x^{m-2} + P_3 a^3 x^{m-3} + \cdots\cdots\cdots + P_{m-1} a^{m-1} x + a^m.$$

Dal che vediamo, che lo sviluppo di $(x+a)^m$ sarebbe interamente conosciuto, se fossero determinati li numeri indicati da P_2, P_3, P_4 ec, li quali dipendendo da m debbono espremersi per mezzo di m, oppure ciò che vale lo stesso saranno espressi in *funzione di m.*

I. Se sopra di m lettere noi ne prendiamo una, per esempio a, ne restano $m-1$, indi multiplicando questa lettera a per ciascuna delle $m-1$ lettere restanti, noi avremo $m-1$ prodotti di due lettere, i quali sarebbero ab, ac, ad, ae, af, ec. Se poi facciamo la medesima cosa sopra la lettera b, avremo similmente $m-1$ prodotti di due lettere ba, bc, bd ec. Se poi operiamo della stessa maniera sopra la lettera c, ne risulteranno ancora $m-1$ prodotti di due lettere ca, cb, cd, ce, ec, e così seguitando per le altre lettere, noi formeremo tante volte $m-1$ prodotti di due lettere quante sono le lettere, quindi il numero delli prodotti di due lettere sarà indicato da

$m(m-1)$. Ma quì è necessario di avvertire, che questo numero delli prodotti di due lettere è il doppio di quello delli prodotti differenti, perchè, per esempio, il prodotto ab si trova fra li $m-1$ prodotti, che si hanno multiplicando a per ciascuna delle lettere restanti, ed il prodotto ba si trova compreso tra quelli, che sono nati dalla multiplicazione di b per ciascuna delle $m-1$ lettere restanti, ma ab, ba sono due prodotti eguali, dunque il prodotto ab è ripetuto due volte; lo stesso accade per tutti gli altri prodotti, quindi conchiudiamo che il numero delli prodotti trovati seguendo il processo adoperato è doppio del numero delli prodotti veramente differenti e e che il numero delli prodotti differenti, che si possono fare con m lettere multiplicandolo a due a due è espresso da $\frac{m(m-1)}{1 \times 2}$, e per conseguenza che $P_2 = \frac{m(m-1)}{1 \times 2}$.

II. Se si fa il prodotto ab di due lettere, vi resteranno $m-2$ lettere, quindi se ciascuna di qneste $m-2$ lettere restanti si multiplichi per ab, si formeranno $m-2$ prodotti di tre lettere abc, abd, abe ec, indi se facciamo lo stesso col prodotto ac di due lettere avremo ancora $m-2$ prodotti di tre lettere abc, acd, acf ec, e così in appresso, e per conseguenza formeremo seguendo questo porcesso tante volte $m-2$ prodotti di tre lettere, quante ne indica il numero de' prodotti differenti di due lettere, e perciò avendo disegnato con P_2 il numero delli prodotti differenti di due lettere, il numero delli prodotti di tre lettere sarà espresso da $P_2(m-2)$; Ma quì osserveremo ancora, che questo numero è triplo del numero delli prodotti realmente differenti a tre a tre, che si possono fare con m lettere, in fatti multiplicando ab per c abbiamo abc, multiplicando bc per a abbiamo bca, e multiplicando ac per b abbiamo acb, ma questi tre prodotti sono eguali, dunque esso è ripetuto tre volte nel numero de' prodotti di tre lettere, che si possono fare con m lettere, si dica lo stesso di ciascuno degli altri prodotti di tre lettere e conchiudiamo, che ciascuno di essi è ripetuto tre volte, e che perciò il numero trovato è triplo di quelli di tre lettere veramente differenti, e per conseguenza $P_3 = \frac{P_2(m-2)}{3}$ $= \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3}$

III. Applicando lo stesso raziocinio per determinare P_4, noi troveremo

$P_4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$, e così procedendo avanti.

IV. Ed in generale conchiudiamo, che il numero delli prodotti differenti, che si possono fare con m lettere multiplicandole ad n ad n è

$$P_n = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-(n-1))}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots\ldots\ldots\ldots n}$$

Quindi mettendo nella formola trovata in vece di P_1, P_2, P_3, P_4 ec. li valori respettivi da noi trovati, avremo.

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \times 2} a^2 x^{m-2}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3} a^3 x^{m-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a^m$$

ART III.

Osservazioni sopra la formola del binomio

50. In tutti gli sviluppi, ed in tutte le serie algebraiche è di somma importanza la ricerca del *termine generale*.

Noi intendiamo per *termine generale* quella espressione algebraica, nella quale se si fa la la ipotesi, la quale determina il posto, che un termine occupa nello sviluppo, il risultato è precisamente eguale a si fatto termine.

I. Noi sappiamo, che il coefficiente del secondo termine è sempre m, cioè il numero, che indica il grado della potenza alla quale da noi si è elevato il binomio dato $x+a$; il coefficiente del terzo termine è P_2, cioè il numero, che indica quanti prodotti differenti di due lettere si possono fare con m lettere; il coefficiente del quarto termine è P_3, cioè il numero, che indica quanti prodotti differenti di tre lettere si possono farecon m lettere, e così inappresso, ed in generale il coefficiente del termine, che occupa il posto $n+1$ è P_n, cioè ilnumero, cheiindica quanti prodotto differenti di n lettere si possono fare con m, lettere.

Per quello, che riguarda gli esponenti delle lettere x ed a, noi sappiamo, che quelli di a vanno crescendo nelli termini successivi sempre di una unità, e come essa nel primo termine non entra alcuna volta come fattore, noi diciamo, che essa ha per esponente il zero, nelli termini seguenti ha per esponenti 1, 2, 3, 4 ec. fino all' ultimo termine, nel quale il suo esponente è il grado medesimo della potenza, cioè m, di maniera, che nel termine che occupa il posto indicato da $n+1$ lo esponente di a è n, gli esponenti poi di x seguono una legge totalmente opposta a quella, che seguono gli esponenti di a, cioè esso ha nel primo termine m per esponente di x, e nelli termini susseguenti x ha per esponenti $m-1$, $m-2$, $m-3$ ec, in modo che la somma degli esponenti di a, e di x è sempre eguale ad m; quindi avendo noi veduto, che il termine, che occupa il posto $n+1$, ha n per esponente di a; quello di x deve essere $m-n$, quindi se noi indichiamo con T_{n+1} il termine, che occupa il posto $n+1$

noi avremo $T_{n+1} = P_n a^n x^{m-n}$; ma noi abbiamo veduto, che $P_n = \frac{m(m-1)(m-2)(m-(n-1)}{1 \times 2 \times 3 \ldots\ldots n}$,

dunque sostituendo nella formola precedente in vece di P_n questo suo valore, avremo la seguente formola del termine generale $T_{n+1} =$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-(n-1)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots\ldots\ldots\ldots n} a^n x^{m-n}$$

Questo è il termine generale, poichè se supponiamo $n=1=2$, $=3=$ec. noi troveremo il secondo, il terzo, il quarto ec. termine dello sviluppo.

In fatti se supponiamo, per esempio, $n=2$, avremo $n-1=1$, e l' ultimo fattore $m-(n-1)$ del numeratore sarà $(m-1)$, quindi questo numeratore sarà $m(m-1)$, ed il denominatore, il quale deve avere 2 per ultimo termine sarà 1×2, giacchè n è eguale a 2. Quindi il coefficiente del termine indicato da T_3 sarà $\frac{m(m-1)}{1 \times 2}$; Dippiù $a^n x^{m-n}$ sarà $a^2 x^{m-2}$, giacchè si è supposto $n=2$, dunque il terzo termine dedotto dal termine generale è.......... $\frac{m(m-1)}{1 \times 2} a^2 x^{m-2}$, ed in fatti questo è il terzo termine della formola generale.

II. Il numero delli termini dello sviluppo è sempre disegnato da $m+1$, il che evidentemente deriva dallo osservare, che gli esponenti di a nelli termini dello sviluppo incominciano nel primo termine dal zero, e crescendo nelli termini successivi sempre di una unità, nell'ultimo termine diviene m, oppure che quelli di x, incominciando da m nel primo termine, e diminuendo in ciascuno de' termini sempre di una unità, nell' ultimo termine si trova avere per esponente zero.

III. Li termini, che sono ad eguale distanza dagli estremi hanno li coefficienti eguali; in fatti se invece di elevare $x+a$ alla potenza m si eleva alla medesima potenza $a+x$, lo sviluppo deve essere lo stesso, e li coefficienti cambierebbero di luogo il secondo passerebbe nel penultimo luogo, il terzo passerebbe nel antepenultimo ec, e viceversa il coefficiente del penultimo passerebbe nel secondo, quello dell' antepenultimo in quello del terzo.

IV. Se il binomio fosse $x-a$, ed esso dovesse essere elevato alla potenza m, è evidente, che nello sviluppo trovato deve necessariamente incontrarsi una variazione nelli segni, che affettano li termini di esso, ed è facile, il conchiudere, che essa si ridurrà a dare alli termini dello sviluppo alternativamente li segni $+$, e$-$, imperocchè li termini 2°, 4°, 6°, ec, si trovano essere prodotti di una multiplicazione, nella quale uno delli fattori è una potenza dispari del secondo termine del binomio dato, la quale essendo potenza dispari di una quantità negativa deve essere negativa, nel mentre che li termini, che occupano li luoghi dispari hanno per fattori sempre potenze pari del secondo termine del binomio dato, le quali sono tutte positive.

V. Se nel termine generale T_{n+1} $=\ldots\ldots$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-(n-1)}{1\times 2\times 3\ \ldots\ldots\ldots\ n}\,a^n x^{m-n}$$ in

vece di n..mettiamo $n-1$, noi vediamo, che la formola

$$T_{n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-(n-1))}{1\times 2\times 3\ \ldots\ldots\ldots n}a^n x^{m-n}$$

di cambia nella formola.

$$T_n=\frac{m(m-1)(m-2).(m-(n-2)}{1\times 2\times 3\ldots\ldots(n-1)}a^{n-1}\,x^{m-(n-1)}$$

Paragonando queste due formole fra esse, noi vediamo, che qualunque termine dello sviluppo di $(x+a)^m$ indicato da T_{n+1} si deduce dal termine precedente indicato da T_n; 1.° multiplicando questo termine per $m-(n-1)$ esponente, che ha x nel medesimo termine. 2.° Dividendo questo prodotto per lo numero delli termini, che precedono il termine, che noi dobbiamo formare 3.° Accrescendo di unità lo esponente di a, e diminuendo di una unità lo esponente di x.

Proponiamoci di formare lo sviluppo di.... $(x+a)^3$, ricavando ciascheduno delli termini di esso dal termine precedente.

Noi sappiamo, che il primo termine di questo sviluppo è x^m, il secondo termine si dedurrà da esso 1.° multiplicando per 3 il coefficiente 1 del primo termine, ed avremo 3. 2. Dividendo 3 per 1 numero de' termini, che precedono il secondo termine 3°. accrescendo di 1 l'esponente, che ha a nel primo termine, che si può considerare essere zero, e diminuendo di 1. lo esponente, che ha x nel primo termine, ed avremo il secondo termine eguale a $\frac{3}{1}ax^{m-1}$.

Per trovare il terzo termine per mezzo del secondo, noi multiplicheremo questo secondo termine per 2 esponente di x ed avremo $6ax^2$, indi lo dividiamo per 2 numero de' termini, che precedono il terzo, ed avremo $3ax^2$, ed in fine accresceremo di una unità lo esponente di a, e diminuiremo di una unità lo esponente di x, ed avremo determinato il terzo termine $3a^2x$.

Finalmente operando sopra del terzo termine come abbiamo operato sopra del secondo, ne ricaveremo l' ultimo termine a^3.

Articolo IV.

Dello sviluppo della potenza intera, e positiva di un trinomio, di un quadrinomio, ed in generale di qualsivoglia polinomio.

51. Proponiamoci di sviluppare $(a+b+c)^m$; noi incominceremo dal supporre per un momento $a+b=x$, ed allora noi dobbiamo sviluppare $(x+c)^m$; e lo sviluppo sarà

$$+c)^m = x^m + \frac{m}{1} c x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \times 2} c^2 x^{m-2} + \ldots\ldots + c^m$$

e ora ad x sostituiamo $a+b$; noi osserveremo, che

$$^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1 \times 2} a^{m-2} b^2 + \ldots\ldots\ldots + b^m$$

e che

$$^{m-1} = (a+b)^{m-1} = a^{m-1} + \frac{m-1}{1} a^{m-2} b^1 + \ldots\ldots + b^{m-1}$$

così in appresso; sostituendo avremo $(a+b+c)^m =$

$$\begin{array}{l} a^m \\ + m a^{m-1} b \\ + \frac{m(m-1)}{1 \times 2} a^{m-2} b^2 \\ + \text{ec.} \\ + b^m \end{array} + mc \left| \begin{array}{l} a^{m-1} \\ + \frac{m-1}{1} a^{m-2} b \\ + \text{ec.} \\ + b^{m-1} \end{array} \right. +$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$+\frac{m(m-1)}{1\times 2}c^2 \left| \begin{array}{l} a^{m-2}+\text{ec.} \\ +\text{ec.} \\ +b^{m-2} \end{array} \right.$$

Tale è lo sviluppo della potenza m^{esima} di un trinomio; procedendo della medesim maniera si troverebbe lo sviluppo della potenza m^{esima} di un quadrinomio considerando la somma delli tre primi termini come equivalente ad un monomio; il che darebbe naturalmente lo sviluppo.

$$(a+b+c+d)^m=(a+b+c)^m+m(a+b+c)^{m-1}d$$

$$+\frac{m(m-1)}{1\times 2}(a+b+c)^{m-2}d^2+\text{ec.}$$

Indi si formerebbe lo sviluppo di $(a+b+c)^m$, e se ne dedurrebbero quelli di $(a+b+c)^{m-1}$, di $(a+b+c)^{m-2}$ rimpiazzando m per $m-1$, $m-2$, ec.

Lo stesso processo ci condurrebbe allo sviluppo della potenza m^{esima} di un polinomio composto da un numero qualunque di termini.

C A P. IV.

Della decomposizione delle quantità

52. Tutti li casi della composizione delle quantità sono quelli, che da noi sono stati esposti nel capitolo precedente, oppure pos-