. . . .

. . . .

$$+\frac{m(m-1)}{1\times 2}c^2 \left| \begin{array}{l} a^{m-2}+\text{ec.} \\ +\text{ec.} \\ +b^{m-2} \end{array} \right.$$

Tale è lo sviluppo della potenza m^{esima} di un trinomio ; procedendo della medesim maniera si troverebbe lo sviluppo della potenza m^{esima} di un quadrinomio considerando la somma delli tre primi termini come equivalente ad un monomio ; il che darebbe naturalmente lo sviluppo.

$$(a+b+c+d)^m=(a+b+c)^m+m(a+b+c)^{m-1}d$$

$$+\frac{m(m-1)}{1\times 2}(a+b+c)^{m-2}d^2+\text{ec.}$$

Indi si formerebbe lo sviluppo di $(a+b+c)^m$, e se ne dedurrebbero quelli di $(a+b+c)^{m-1}$, di $(a+b+c)^{m-2}$ rimpiazzando m per $m-1$, $m-2$, ec.

Lo stesso processo ci condurrebbe allo sviluppo della potenza m^{esima} di un polinomio composto da un numero qualunque di termini.

C A P. IV.

Della decomposizione delle quantità

52. Tutti li casi della composizione delle quantità sono quelli, che da noi sono stati esposti nel capitolo precedente, oppure pos-

sono essere da essi facilmente dedotti, essi evidentemente sono ricavati dalla proprietà, che hanno le grandezze di potere sempre essere accresciute, ed in ultima analisi tutte si riducono alla addizione; dobbiamo ora occuparci delli metodi di *decomposizione*, li quali dipendono tutti dalla proprietà, che hanno le quantità di essere suscettibili di diminuzione, cioè di perdere quel tanto, che avevano acquistato per lo accrescimento, quindi in ultima analisi debbono ridursi alla sottrazione, e per conseguenza dobbiamo dedurre li metodi di decomposizione delle quantità da quelli delle composizioni di esse. La decomposizione delle quantità è di somma importanza, poichè per mezzo di essa possiamo scovrire li rapporti, con li quali le parti sono legate al tutto, e così scovrire le quantità ignote, e conoscere in quale maniera le quantità note entrano nella composizione delle quantità ignote.

Articolo I.

Della sottrazione

53. Nella sottrazione algebraica noi ci proponiamo di trovare la espressione algebraica la più semplice possibile della differenza, che passa tra due quantità algebraicamente espresse.

Se noi ci proponiamo di sottrarre b da a, è evidente, che il residuo è $a-b$; Similmente se da a si dovesse sottarre $b-c$ è anche evidente, che il residuo potrebbe essere scritto $a-(b-c)$, ma come noi dobbiamo spesso formare un solo polinomio del residuo, noi incominceremo dal sottrarre b da a, e noteremo il residuo $a-b$, indi considereremo, che noi non dovevamo sottrarre tutto b da a; ma dovevamo prima diminuire b di tanto quanto vale c, ed indi sottrarre il residuo da a, quindi conchiudiamo, che il residuo trovato $a-b$ è minore del vero residuo di tanto quanto vale c, e che per ridurlo al suo vero valore deve essere accresciuto di c, e ricaviamo il vero residuo $a-b+c$.

Finalmente se dal polinomio $5a^2b+3ac-2c^3$ si vuole sottrarre $2ad-5c^2+4d-3K$, noi potremo scrivere per residuo $5a^2b+3ac-2c^3-(2ad-5c^2+4d-3K)$, ma come la sottrazione algebraica consiste a ridurre in un solo polinomio il residuo dimandato, noi incominceremo dal sottrarre dal polinomio $5a^2b+3ac$, $-2c^3$ la quantità $2ad+4d$, indi osserveremo che sottraendo $2ad+4d$ noi abbiamo sottratta una quantità maggiore di quella, che dovevamo sottrarre, poichè questa quantità doveva prima essere diminuita di $5c^2$, e di $3K$, e perciò conchiudiamo, che il residuo da noi trovato è minore del vero residuo di tanto quanto è $5c^2+3K$, e diremo, che il residuo dimandato è $5a^2b+3ac-2c^3-2ad+5c^2+3K-4d$.

Da quanto abbiamo detto ricaviamo la seguente regola generale.

Qualora si vogliano sottrarre l' uno dall'altro due polinomj, *si scriva il polinomio*, *che si vuole sottrarre con tutti li suoi segni* $+$ *cambiati in* $-$, *e quelli* $-$ *cambiati in* $+$ *appresso di quello, da cui deve essere sottratto, e se nel residuo si trovano termini simili, sopra di essi si esegua la contrazione.*

54. Quì stimo non essere fuori di proposito avvertire il caso, in cui dobbiamo sottrarre il monomio $-b$ dal monomio $+a$, e dimostrare, che anche in questo caso ha luogo la regola data, e che per conseguenza il residuo dimandato è $a+b$.

In fatti noi abbiamo dimostrato nella aritmetica, che qualora in una sottrazione le due quantità, sopra delle quali si deve operare, si accrescono della medesima quantità, il residuo non si altera, quindi se in questo caso le due quantità $+a$, e $-b$ si accrescono ambedue della medesima quantità b avremo il medesimo residuo, che avremmo sottraendo $-b$ da $+a$, e perciò il residuo dimandato sarà $+a+b-(+b-b)$, ma $+b-b$ è eguale a zero, dunque il residuo dimandato è $a+b$; quindi questo caso rientra nella regola generale.

Esempio

sia la quantità $3a^2b^4 - 5ac^3 + 8b^2d - c^2d^2$ *dall*
quale si vuole sottrare $4ac^3d^4 - 7a^2b^4 + 5b^2d - 5c^2d^2$

Avremo

$$3a^2b^4 - 5ac^3 + 8b^2d - c^2d^2$$
$$4ac^3d^4 - 7a^2b + 5b^2d - 5c^2d^2$$

Residuo $3a^2b^4 - 5ac^3 + 8b^2d - c^2d^2$
$-4ac^3 - 5b^2d + 7a^2b^4 + 5c^2d^2$
Residuo contratto $10a^2b^4 - 9ac^3 + 3b^2d + 4c^2d^2$

Articolo II.

Della divisione

55. L' obietto della divisione algebraica è lo stesso di quello della divisione aritmetica, poichè per mezzo di essa noi vogliamo uno delli fattori di una multiplicazione, quando sono noti il prodotto, e l' altro fattore.

56. Proponiamoci in primo luogo di dividere un monomio per un altro monomio, e cerchiamo 1.° la regola de' segni 2.° quella de' coefficienti 3.° quella delle lettere simili 4.° Quella delle lettere dissimili.

1.° Poichè il dividendo è il prodotto della multiplicazione del divisore per lo quoziente, è evidente, che il suo segno è quello, che risulterebbe da sì fatta multiplicazione, quindi qualora il dividendo è affetto dal segno $+$ è necessario, che il divisore, ed il quoziente sieno affetti dal medesimo segno, e per conseguenza se il divisore è affetto dal segno $+$ anche il quoziente deve avere il segno $+$; e se il divisore è affetto dal segno $-$, il quoziente ancora deve avere il segno $-$

Se poi il dividendo è affetto dal segno $-$, il divisore, ed il quoziente debbono avere segni differenti, quindi se il divisore ha il segno $+$ il quoziente deve avere il segno $-$, e se il divisore ha il segno $-$ il quoziente deve avere il segno $+$. Quindi ricaviamo la seguente regola generale.

Qualora si debbono dividere l'uno per l'altro due monomj, ed essi sono preceduti ambidue dal medesimo segno, il quoziente deve avere il segno $+$, ed al contrario il quoziente sarà affetto dal segno $-$, quando il divisore ed il dividendo sono affetti da segni differenti.

2.° Il coefficiente del dividendo è sempre il prodotto del coefficiente del divisore multiplicato per quello del quoziente, quindi è evidente, che il *coefficiente del quoziente si troverà dividendo il coefficiente del dividendo per quello del divisore.*

3.° Proponiamoci di dividere a^m per a^n, e supponiamo, che il quoziente sia a^x, noi avremo $a^m = a^{n+x}$, e per conseguenza $n+x=m$, d'onde ricaviamo $x=m-n$; quindi conchiudiamo, che *qualora il dividendo*, *ed il divi-*

sore hanno una lettera comune, essa si scrive nel quoziente dandogli per esponente il residuo, che si ha togliendo dallo esponente, che essa ha nel dividendo, quello che essa ha nel divisore.

4.° Finalmente poichè il divisore multiplicato per lo quoziente deve riprodurre il dividendo è evidente, che *le lettere, che sono nel dividendo e non sono nel divisore debbono essere notate col proprio esponente nel quoziente.*

Esempj

Divid.	$+12a^3b^4c$	$+4ab^3$	*divisore*
		$+3a^2bc$	*quoz.*
Divid.	$-12a^5b^2c^2$	$-4a^2b$	*divisore*
		$+3a^3bc$	*quoz.*
Divid.	$+12a^4b^3d^2$	$-4ab^2$	*divisore*
		$-3a^3bd^2$	*quoz.*
Divid.	$-12a^5b^3d$	$+4a^2b$	*divisore*
		$-3a^3b^2d$	*quoz.*

57. Potrebbe darsi il caso, che nel divisore vi fosse qualche lettera, la quale non si trova nel dividendo, come, per esempio, se dovessimo dividere $12a^3b^2$ per $3ac^2$, noi al-

tro non potremmo fare, che indicare la divisione scrivendo $\frac{12a^3b^2}{3ac^2}$, ma quì osserviamo, che questa espressione può essere ridotta ad una forma più semplice, giacchè si è dimostrato in aritmetica, che il quoziente di una divisione non si altera, qualora sì il dividendo, che il divisore si dividano per una medesima quantità, perciò se dividiamo per $3a$ si il dividendo $12a^3b^2$, che il divisore $3ac^2$, il quoziente dimandato sarà ridotto a $\frac{4a^2b^2}{c^2}$; Dal che conchiudiamo, *che qualora il divisore ha delle lettere, le quali non si trovano nel dividendo, si esegue la divisione come se esse non vi fossero, indi esse si notano come denominatori del quoziente trovato.*

58. Noi abbiamo veduto, che $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, ma quì si possono dare tre casi 1°. che sia $m>n$, 2°. Che sia $m=n$, 3°. che sia $m<n$.

Consideriamo in primo luogo, che sia $m>n$, e supponiamo, che r indichi la differenza, che passa tra m ed n, avremo $m=n+r$, quindi $\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{n+r}}{a^n}=a^r$, ed in questo caso essendo r un numero intero e positivo, indicherà *evidentemente il numero delle volte*, *che a entra come fattore nella multiplicazione per se medesima.*

2. Sia $m=n$ sarà $\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^m}=a^0$; ma noi sappiamo, che una quantità divisa per se medesima è eguale alla unità, quindi $\frac{a^m}{a^m}=1$; ma la medesima divisione eseguita secondo le regole dell' algebra dà per quoziente a^0, dunque il quoziente essendo unico, avremo $a^0=1$; quindi la divisione fornisce un nuovo simbolo per disegnare la unità, e ricaviamo generalmente, che *qualunque quantità, la quale ha il zero per esponente equivale alla unità,* poichè essa sempre indica il quoziente di una quantità divisa per se medesima.

3. Supponiamo in ultimo luogo, che sia $m<n$, e che r disegni la differenza, che passa tra n ed m, avremo $m+r=n$; quindi $\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^{m+r}}=a^{m-m-r}=a^{-r}$; quindi è necessario vedere, quale significazione ha questa espressione a^{-r}; Il quoziente di $\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^{m+r}}=\frac{a^m}{a^m \times a^r}$ ma il quoziente di una divisione non si altera qualora sì il dividendo, che il divisore si divida per una medesima quantità, dunque $\frac{a^m}{a^m \times a^r}$

$=\frac{1}{a^r}$; ma $\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^{n+r}}$, dunque $\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^r}$ ma, il quoziente di una divisione è unico, dunque $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$ Sicchè *qualunque quantità, la quale ha un esponente negativo, è eguale al quoziente, che si ha dividendo la unità per la medesima quantità, nella quale si sia cambiato lo esponente da negativo in positivo.*

Sia ora il polinomio $25a^6b^4-16a^4c^2+24a^2b^2c-9b^4$ da dividere per $5a^3b^2+4a^2c-3b^2$, questi polinomj sono ordinati per rapporto alla lettera a, quindi essendo $25a^6b^4-16a^4c^2+24a^2b^2c-9b^4$ il prodotto di $5a^3b^2+4a^2c-3b^2$ multiplicato per lo quoziente, ne segue per quello, che da noi si è dimostrato nella multiplicazione delli polinomii, che $25a^6b^4$ è il prodotto del primo termine $5a^3b^2$ del divisore per lo primo termine del quoziente, quindi per avere sì fatto primo termine del quoziente, dobbiamo dividere il primo termine $25a^6b^4$ del dividendo per lo primo termine $5a^3b^2$ del divisore, ed il quoziente $5a^3b^2$ è il primo termine del quoziente; se ora noi multiplichiamo tutto il divisore per questo termine del quoziente, ed il prodotto $25a^6b^4+20a^5b^2c-15a^3b^4$, che ne risulta lo sottraiamo dal dividendo, ed ordiniamo il residuo per rapporto alla medesima lettera a, avremo il residuo $-20a^5b^2c-16a^4c^2+15a^3b^4+24a^2b^2c$

$-9b^4$, il quale ha il suo primo termine $-20a^5b^2c$, il quale è il prodotto del primo termine del divisore $5a^3b^2$ per lo secondo termine del quoziente, quindi dividendo $-20a^5b^2c$ per $5a^3b^2$, avremo $4a^2c$ per lo secondo termine del quoziente; se ora multiplichiamo il divisore per questo quoziente avremo il prodotto $-20a^5c+16a^4c^2+12a^2b^2c$, il quale sottratto dal residuo precedente dà il nuovo residuo $15a^3b^4+12a^2b^2c-9b^4$, il quale essendo ancora ordinato rapporto alla medesima lettera ordinatrice a, deve avere il suo primo termine $15a^3b^4$, il quale è il prodotto del primo termine del divisore $5a^3b^2$ per lo terzo termine del quoziente, dunque dividendo sì fatto termine $15a^3b^4$ del residuo per lo primo termine $5a^3b^2$ del divisore avremo $+3b^2$ per lo terzo termine del quoziente, il quale multiplicato per lo divisore dà un prodotto il quale sottratto dall'ultimo residuo dà per risiduo zero, e conchiuderemo, che la divisione è esatta, e che il quoziente dimandato è $5a^3b^2-4a^2c+3b^2$; e poichè lo stesso raziocinio si può adoperare per quali sivogliano altri due polinomii, che si vogliono dividere l'uno per l'altro, noi possiamo stabilire la seguente regola generale.

Dopo di avere ordinati il dividendo, ed il divisore per rapporto ad una medesima lettera, si divida il primo termine a sinistra del dividendo per lo primo termine a sinistra del divisore, il quoziente darà il pri-

mo termine del quoziente, indi si multiplichi il divisore per questo termine, ed il prodotto si sottragga dal dividendo, di poi avendo ordinato il residuo per rapporto alla medesima lettera ordinatrice, si divida il primo termine di tale residuo per lo stesso primo termine del divisore, ed il quoziente darà il secondo termine del quoziente; si multiplichi similmente tutto il divisore per questo secondo termine del quoziente, ed il residuo si sottragga dal residuo precedente, e così si continui la medesima serie di operazioni, fino a tanto che si ottenga per residuo zero, o una quantità, la quale non è più divisibile per lo divisore dato, e nel primo caso la divisiore è esatta, e per conseguenza conchiudiamo, che il dividendo è il prodotto del divisore per lo quoziente trovato, e nel secondo caso conchiudiamo, che il quoziente è incompleto, e che il dividendo è eguale alla somma del prodotto del quoziente per lo divisore, e del residuo ritrovato.

59. Termineremo questa teoria con lo esporre li caratteri principali per conoscere, quando la divisione delle quantità monomie, o polinomie non può eseguirsi esattamente, cioè in quale caso non può esistere una quantità algebraica intera, la quale multiplicata per una altra data riproduca una terza quantità data.

In primo luogo è evidente, che la divisione esatta di un monomio per un altro monomio è impossibile, *quando il coefficiente del dividendo non è esattamente divisibile per lo coefficiente del divisore*, 2°. *Se lo esponente di qualche lettera del divisore è maggiore di quello, che la medesima lettera ha nel dividendo* 3.° *Se nel divisore si trovano une o più lettere, che non sono nel dividendo.*

Qualora una di queste tre cose accade, il quoziente resta sotto la forma di *monomio frazionario*, cioè diviene una espressione monomia, nella quale entra necessariamente il segno algebraico della divisione.

Nella divisione può accadere, che li polinomj, che si debbono dividere l' uno per l'altro, abbiano ambidue, oppure uno di essi più termini affetti dalla medesima potenza della lettera ordinatrice, come sarebbero li polinomii.

$10a^3+11ba^2-15ca^2+3b^2a-19bca+5b^2c+15bc^2$ da dividere per $5a^2+3ab-5bc$.

In questo caso noi osserveremo, che il primo di essi può essere posto sotto la forma $10a^3+(11b-15c)a^2+(3b^2-19bc)a+5b^2c+15bc^2$; oppure più comodamente

$$10a^3 + \begin{array}{r|l|} 11b & a^2+3b^2 \\ 15c & -19bc \end{array}\; a+5b^2c+15bc^2,$$

considerando $11b+15c$ come il coefficiente di a^2, $3b^2-19bc$ come il coefficiente di a

Ciò posto ecco il quadro delle operazioni del calcolo

$$\left.\begin{matrix} {}^3+11b \\ -16c \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} a^2+3b^2 \\ -19bc \end{matrix}\right| a+5b^2c+15bc^2 \quad \left|\begin{matrix} 5a^2+3ba-5bc \\ \hline 2a+3b-3c \end{matrix}\right.$$

1.° *Residuo* $\left.\begin{matrix} 5b \\ -15c \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} a^2+3b^2 \\ -9bc \end{matrix}\right| a-5b^2c+15bc^2$

2.° *Residuo* O

Questa operazione è stata eseguita

1.° Dividendo $10a^3$ per $5a^2$, ed abbiamo ottenuto $2a$ al quoziente.

2.° Abbiamo multiplicato il divisore per $2a$, ed abbiamo dal dividendo sottratto il prodotto avuto per mezzo di si fatta multiplicazione, e ne abbiamo ottenuto il primo residuo.

3.° Abbiamo considerato $\left.\begin{matrix} 5b \\ -15c \end{matrix}\right| a^2$ come il primo termine di questo residuo ordinato per rapporto alla medesima lettera ordinatrice a, e lo abbiamo diviso per lo primo termine $5a^2$ del divisore, e ne abbiamo avuto per quoziente $+4b-3c$.

4.° Finalmente dopo di avere multiplicato tutto il divisore per questo quoziente, abbiamo sottratto il prodotto dal primo residuo, e ne è risultato zero per secondo residuo, e per conseguenza la divisione è terminata.

Il caso precedente suole molto spesso accadere, ed esso è il più complicato, che la divisione possa presentare, quindi è necessario considerarlo generalmente, e rendere ragione di tutto il processo, che si deve tenere per trovare il quoziente; ma prima di entrare in tale discussione, stimo essere bene di esporre alcune notazioni delle quali faremo continuamente uso.

58. Qualora in una quistione, che si propone, debbono entrare molte quantità, gli algebristi sogliono disegnarne alcune con lettere differenti, e per non multiplicare molto le lettere differenti, disegnano le altre con le medesime lettere mettendo sopra di esse uno, due, tre ec. accenti, che essi enunciano con le parole primo, secondo, terzo ec.

Ciò posto sieno dati il.

Dividendo $Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E$ ed il divisore $A'a^2+B'a+C'$

In questi polinomj ciascuno delli coefficienti A,B,C,D,E,A',B',C' disegna la riunione di più termini, in modo, che Aa^4 indica tutta la parte del dividendo affetta da a^4; Ba^3 indica tutta la parte del dividendo affetta da a^3, e così per gli altri termini.

Osservando il dividendo noi troviamo, che il massimo esponente, che in esso affetta la lettera ordinatrice a è 4, e che nel divisore il massimo esponente della medesima lettera è 2, noi conchiudiamo, che la lettera a deve avere per esponente 2 nel quoziente, e per conseguenza il quoziente prende la forma $A''a^2+B''a+C''$; per determinare nel quoziente la parte $A''a^2$, la quale è affetta dalla massima potenza di a, che in esso può esistere, noi osserveremo, che abbiamo dimostrato, che il prodotto di $A' a^2$ per $A'' a^2$ non può essere contratto con alcuno altro termine delli prodotti parziali, che si possono ottenere multiplicando il divisore per lo quoziente, e perciò esso deve essere eguale alla parte $A a^4$ del dividendo, le quale è affetta dalla lettera ordinatrice a elevata alla massima potenza, dunque reciprocamente dividendo $A a^4$ per $A' a^2$ dobbiamo ottenere la parte $A'' a^2$ del quoziente, e poichè a^4 diviso per a^2 dà per quoziente a^2, tutto si riduce a dividere A per A'; Quindi se A, ed A' sono ancora essi polinomii composti da una, o da più lettere, si deve sopra di essi procedere secondo la regola data, e perciò essi debbono essere ordinati per rapporto ad una delle lettere, che essi contengono, quindi è necessario, scrivendo in una colonna il coefficiente di una data potenza della lettera ordinatrice, avere la attenzione di ordinarlo per rapporto ad una seconda lettera, e se per caso più termini avessero questa seconda lettera affetta dal medesimo esponente, essi debbono essere ordinati per rapporto ad una terza lettera.

Dopo di avere ottenuta la prima parte $A'' a^2$ del quoziente, si multiplichi ciascuna delle parti del divisore per questo quoziente trovato, e si sottragga il prodotto dallo intero dividendo, ed otterremo così il primo *residuo dividendo*, sopra del quale si opererà come si è operato sopra del dividendo dato.

Poichè interessa moltissimo la abitudine nella esecuzione delle operazioni algebraiche, soggiugnerò due altri esempj della divisione del caso, del quale ci occupiamo, notando anche le divisioni parziali, che sono necessarie per la divisione principale.

59. Nella divisione algebraica vi è anche un altro caso di somma importanza, e che per conseguenza merita la nostra attenzione, questo è qualora il polinomio dividendo contiene una, o più lettere, che non si trovano nel divisore; in questo caso si potrebbero ordinare li polinomii per rapporto a qualsivoglia altra lettera comune ad amendue, tuttavia la difficoltà, che porta il calcolo, ci determina a ricercare un metodo più semplice per trovare il quoziente dimandato.

Supponiamo, che il polinomio dividendo contenga differenti potenze della lettera ordinatrice a, e che questa lettera a non si trovi nel divisore, o ciò che vale lo stesso, che *il divisore sia indipendente da a.*

Noi ordinando il dividendo per rapporto ad a, lo potremo mettere sotto la forma $Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E$, supponendo, che 4 sia il massimo esponente, che a si trova avere in questo polinomio, e notiamo con M il divisore indipendente da a. Ciò posto ragioniamo così.

Noi sappiamo, che il divisore multiplicato per lo quoziente deve riprodurre il dividendo, ma per ipotesi il divisore è indipendente da a, dunque il quoziente deve essere un polinomio, il quale deve essere affetto da quelle potenze della lettera a, le quali si trovano nel dividendo, e perciò esso deve essere necessariamente della forma $A'a^4+B'a^3+C'a^2+D'a+E'$, supponiamo, che si sia trovato questo quoziente, e che tutto il divisore sia stato multiplicato successivamente per ciacheduna delle parti $A'a^4$, $B'a^3$, $C'a^2$ ec., li prodotti sarebbero successivamente $A'Ma^4$, $B'Ma^3$, $C'Ma^2$ ec., e poichè essi non possono ricevere alcuna contrazione, perchè la lettera a è affetta da esponenti diversi, essi debbono essere eguali respettivamente alli termi Aa^4, Ba^3, Ca^2 ec. del dividendo, quindi dobbiamo avere.

$$A'M=A$$
$$B'M=B$$
$$C'M=C$$

e così in appresso

Il che ci fa conoscere $A'=\frac{A}{M}$

$$B'=\frac{B}{M}$$
$$C'=\frac{C}{M}$$

e così in appresso

Dal che dedurremo la seguente proposizione generale.

*

Affinchè un polinomio ordinato per rapporto ad una lettera sia esattamente divisibile per un polinomio indipendente dalla medesima lettera, è necessario, che ciascuno delli coefficienti delle differenti potenze di essa nel dividendo sia esattamente divisibile per lo polinomio indipendente, ed i coefficienti delle differenti potenze della lettera ordinatrice nel quoziente saranno li quozienti successivi delli coefficienti del polinomio dividendo divisi per lo polinomio divisore.

60. Noi abbiamo detto, che lo spirito del linguaggio algebraico consiste nel cercare tutti li mezzi per renderlo quanto più si può laconico, quindi quando possiamo per mezzo di alcuni ripieghi rendere più semplici li processi, che si dovrebbero eseguire secondo le regole generali, è sempre ben fatto metterli in opera, ma queste *malizie di calcolo* non possono acquistarsi se non per mezzo di un lungo esercizio nella prattica del calcolo, e nella diligente attenzione nel discernere le circostanze, nelle quali esse possono essere adoperate, perciò nel dare un esempio del caso precedente della divisione, farò notare qualche abbreviazione, che si può fare nel calcolo per mezzo di alcune considerazioni, con l'ajuto delle quali modificando le quantità sopra delle quali dobbiamo operare, rendiamo il processo più corto, e più facile, e tale che ci conduca per una via molto più commoda al risultato finale.

Proponiamoci perciò di dividere il polinomio.

$$b^3 - 3abc^3 - 2b^3c^2 + b^5 - 3a^2bc^2 + 3ab^3c - a^2c^3 + bc^4 + a^2b^2c$$

per $b^2 - c^2$

Noi ordinando il polinomio dividendo per rapporto alla lettera a potremo scriverlo sotto la forma.

$$3b^3 + b^2c - 3bc^2 - c^3)a^2 + (3b^3c - 3bc^3)a + b^5 - 2b^3c^2 + bc^4$$

Indi seguendo la regola precedente eseguiremo le tre divisioni parziali quì sotto notate.

$$\frac{+b^2c - 3bc^2 - c^3}{b^2 - c^2}, \quad \frac{3b^3c - 3bc^3}{b^2 - c^2}, \quad \frac{b^5 - 2b^3c^2 + bc^4}{b^2 - c^2};$$

e noteremo li tre quozienti $3b+c$, $3bc$, $b^3 - bc^2$, ed avremo il quoziente totale $(3b+c)a^2 + 3bca + b^3 - bc^2$, quoziente da noi trovato seguendo la regola generale.

61. Vediamo ora come in conseguenza di alcune trasformazioni, che possiamo fare subire alli dividendi parziali, noi avremmo più facilmente trovati li medesimi quozienti respettivi; ed in primo luogo il primo quoziente $3b+c$ si avrebbe potuto trovare con più faciltà mettendo $3b^3 + b^2c - 3bc^2 - c^3$ sotto la forma $3b(b^2 - c^2) + c(b^2 - c^2)$, che equivale a $(3b+c)(b^2 - c^2)$, quindi sì fatto quoziente sarebbe quello, che è indicato da $\frac{(3b+c)(b^2 - c^2)}{b^2 - c^2}$,

e perciò $3b+c$, il secondo quoziente $3bc$ si sarebbe con molta facilità trovato osservando, che $b^3c - 3bc^3 = 3bc(b^2 - c^2)$, ed il terzo si sarebbe trovato immediatamente mettendo b^5

$-2b^3c^2+bc^4$ sotta la farma $b(b^4-2b^2c^2+c^4)$, che equivale a $b(b^2-c^2)^2$, quindi sì fatto quoziente sarebbe quello, che è indicato da $\frac{b(b^2-c^2)^2}{b^2-c^2}$, e per conseguenza $b(b^2-c^2)$

$=b^3-bc^2$.

62. Prima di lasciare la teoria della divisione stimo essere necessario esaminare un caso particolare della divisione, il quale è di somma importanza, giacchè noi dobbiamo molto spesso fare uso di esso, questo è quello in cui ci proponiamo di dividere la differenza delle potenze del medesimo grado di due lettere per la differenza delle medesime due lettere.

Se noi dividiamo a^2-b^2 per $a-b$, noi troviamo per quoziente $a+b$. Similmente dividendo a^3-b^3 per $a-b$, noi otteniamo per quoziente a^2+ab+b^2. Cosìancora dividendo a^4-b^4 per $a-b$, noi abbiamo per quoziente $a^3+a^2b+ab^2+b^3$, e così procedendo avanti.

Considerando li risultati precedenti trovati per mezzo del processo ordinario della divisione, noi troviamo 1.° Che sempre la divisione si esegue esattamente 2.° Che il numero delli termini del quoziente corrisponde al numero, che esprime il grado della potenza, alla quale sono elevate le lettere 3.° Che essi sono tutti preceduti dal segno $+$, sono tutti omogenei, ed hanno l' unità per coefficiente. 4.° Che ciascuno di essi è il prodotto, che nasce multiplicando la lettera del primo termine del dividendo per quella del secondo termine con tale legge, che nel primo termine del quoziente, la lettera del primo termine del dividendo si trova avere per esponente lo esponente, che essa ha nel dividendo diminuito di una unità, e nelli termini seguenti questo esponente diminuisce sempre di una unità fino all' ultimo termine, in cui lo esponente di essa è zero, e che la lettera, che forma il secondo termine del dividendo, si trova nel primo termine con lo esponente zero, e negli altri termini si trova con gli esponenti, che continuamente vanno crescendo di una unità, fino all' ultimo termine, in cui si trova avere per esponente quello, che essa aveva nel dividendo diminuito di una unità.

Facendo attenzione, che queste leggi si conservano sempre le medesime in tutte le divisioni successive di tali binomii, qualunque sia lo esponente, dal quale sono affette le due lettere, che formano il dividendo, noi potremmo per analogia conchiudere, che esse sono generali, ma poichè la analogia non porta con se la certezza, noi ne daremo la dimostrazione

63. Supponiamo, che tutte queste leggi sieno state verificate fino al binomio espresso da $a^m - b^m$ diviso per $a - b$, e che per conseguenza il risultato della divisione sia.

$a^{m-1} + ba^{m-2} + b^2a^{m-3} + \ldots\ldots + b^{m-2}a + b^{m-1}$, e dimostriamo, che esse debbono ancora aver luogo per $\dfrac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a - b}$; eseguendo sopra $a^{m+1} - b^{m+1}$

la divisione per $a-b$ seguendo il processo ordinario, avremo per primo quoziente parziale a^m, e per residuo $a^m b - b^{m+1}$; in modo che avremo

$$\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}=a^m+\frac{a^m b-b^{m+1}}{a-b},$$

questo quoziente potrà essere posto sotto la forma $a^m+\frac{b(a^m-b^m)}{a-b}$,

ma $\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+ba^{m-2}+b^2a^{m-3}+\ldots\ldots\ldots +b^{m-1}$; dunque $\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}=a^m+b\,(a^{m-1}+ba^{m-2}+b^2a^{m-3}+\ldots\ldots+b^{m-1})=a^m+ba^{m-1}+b^2a^{m-2}+\ldots\ldots\ldots+b^{m-1}a+b^m$, quoziente nel quale si trovano aver luogo tutte le leggi verificate fino al binomio a^m-b^m diviso per $a-b$, dunque la formola generale, che esprime il quoziente di $\frac{a^m-b^m}{a-b}$ è $a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+a^{m-4}b^3+\ldots\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}$, qualunque sia il valore, che si assegni ad m.

Articolo III.

Del raccoglimento delli fattori.

64 Noi abbiamo veduto nello esempio ultimo della divisione, come facendo subire alcune trasformazioni alle quantità, sopra delle quali

noi dovevamo eseguire la divisione, abbiamo resa la operazione della divisione molto più semplice, quindi credo ben fatto cercare in quale maniera dobbiamo operare, qualora avendo noi il prodotto di una multiplicazione, si possa scomporre nelli suoi fattori, ed indicarlo per mezzo del segno della multiplicazione, operazione, la quale, come abbiamo veduto, molte volte serve a facilitare la divisione, e dippiù essa è di sommo vantaggio nella soluzione delli problemi.

Questa operazione si suole chiamare il *raccoglimento delli fattori di una quantità.* Si esegue questa operazione dividendo tutti li termini di una espressione algebraica, li quali hanno un divisore comune, per questo divisore comune, indi si mette dentro di una parentesi il quoziente trovato, e fuori di essa si mette come multiplicatore il fattore comune trovato; molte volte un fattore si trova essere comune ad alcuni termini soltanto della espressione data, ed in questo caso il raccoglimento si esegue soltanto sopra li termini, che contengono il fattore comune.

Quantunque non si possano dare regole generali per eseguire questi raccoglimenti parziali delli fattori parziali, che si trovano in una espressione algebraica, pure noi esporremo alcune osservazioni generali, che si possono fare sopra alcuni prodotti per facilitare questa importante operazione, ed addurremo alcuni esempj, affinchè si acquisti una certa abitudine per metterla in prattica.

65 Noi sappiamo, che qualora si multiplicano due polinomii si hanno tanti prodotti porziali, quanti ne indica il numero delli termini del multiplicatore, quindi volendo raccogliere li fattori comuni sarà ben fatto di separare il polinomio proposto in tante espressioni, ciascuna delle quali sia composta da un eguale numero di termini, e raccogliere particolarmente quel fattore comune, che ciascuna di esse può avere. Ma quì dobbiamo osservare, che spesse volte nel trovare il prodotto totale di una multiplicazione hanno luogo le contrazioni, nel quale caso non potremo trovare li fattori comuni senza mettere il prodotto nello stato, nel quale era prima di eseguire sopra di esso le contrazioni.

Osserviamo in oltre, che dopo di avere trovati parzialmente alcuni fattori comuni, tra essi ve ne possono essere di quelli, che sono comuni a tutte le parti della espressione; in questo caso essi debbono essere raccolti di nuovo secondo il metodo indicato.

Finalmente nel mettere fuori della parentesi il fattore comune, si deve fare bene attenzione al segno, dal quale esso deve essere affetto, affinchè se le quantità, che si trovano comprese dentro delle parentesi sono eguali nelli differenti raccoglimenti particolari, possano ancora avere li medesimi segni, e rendere così la espressione generale capace di essere assoggettata di nuovo ad un altro raccoglimento di fattori, per rendere così la espressione finale sommamente semplice, il che altrimenti non avrebbe potuto farsi.

Esempj

1.° Sia $a^4 - ab^3 + a$. La sola ispezione della espressione proposta basta per farci conoscere, che essa ha soltanto a per fattore comune di tutti li suoi termini, quindi dopo di avere divisa per a la espressione proposta, e trovato il quoziente $a^3 - b^3 + 1$ conchiudiamo, che $a^4 - ab^3 + a = a(a^3 - b^3 + 1)$.

2.° Sia $3a^2bx - 6a^3b^2x^2 - 9a^4b^5dx^3$, noi anche immediatamente vediamo, che il fattore unico di tutti li termini è $3a^2bx$, e conchiuderemo, che $3a^2bx - 6a^3b^2x^2 - 9a^4b^5dx^3 = 3a^2bx\ (1 - 2abx - 3a^2b^4dx^2)$.

3.° Sia $4bx + cx^2 + 3ax + 5by^2 - 10b^2$. Per eseguire questa operazione, osserviamo in primo luogo, che li tre primi termini hanno per fattore comune x, e li due altri hanno $5b$, quindi conchiudiamo, che la espressione proposta si riduce ad $x(4b + cx + 3a) + 5b(y^2 - 2b)$

4.° Sia $a^2 - ab + ac - bc$; noi incomincieremo dalli due primi termini, e chiaramente vediamo, che essi hanno a per comune fattore, indi vediamo, che li due ultimi hanno per comune fattore c, quindi operando secondo la regola data, essa sarà espressa da $a(a - b) + c(a - b)$, e raccogliendo di nuovo li fattori, essa prenderà la forma $(a + c)(a - b)$.

5. Sia $ad^2 - ad^2x + bd^2 - bd^2x - a + ax - b + bx$. Incominciamo dallo esaminare li due primi termini di questa espressione, e noi troviamo, che essi hanno il fattore comune

ad^2, e che perciò essi si riducono ad ad^2 $(1-x)$; esaminando li due termini seguenti, vediamo, che essi hanno per fattore bd^2, e per conseguenza li possiamo mettere sotto la forma $bd^2(1-x)$, esaminando li due altri termini seguenti, troviamo, che essi hanno per fattore comune $-a$, e che per conseguenza equivale a $-a(1-x)$; finalmente dividendo li due ultimi termini per $-b$, abbiamo per quoziente $1-x$, e perciò li mettiamo sotto la forma $-b(1-x)$; Quindi osserviamo, che la espressione data ha in tutti li termini suoi per fattore comune $1-x$, perciò la esprimeremo sotto la forma $(1-x)$ (ad^2+bd^2-a-b); indi sostituendo in vece di ad^2+bd^2 la sua equivalente $d^2(a+b)$ ed in vece di $-a-b$ la sua equivalente $-1(a+b)$, e raccogliendo il fattore comune $a+b$ avremo $ad^2+bd^2-a-b=(d^2-1)(a+b)$, e la espressione data sarà ridotta ad $(1-x)$ $[(d^2-1)(a+b)]$; dippiù essendo $d^2-1=(d+1)$ $(d-1)$; possiamo anche mettere la espressione data $ad^2-ad^2x+bd^2-bd^2x-a+ax$ $-b+bx$ sotto la forma $(1-x)$........ $[(d+1)(d-1)(a+b)]$.

Finalmente sia $18a^2c+15a^2b-12c^3-10bc^2$; chiaramente vediamo, che li due primi termini di questa espressione hanno in primo luogo per comune fattore $3a^2$, ed essi possono essere posti sotto la forma $3a^2(6c+5b)$; li due ultimi termini hanno per divisore comune $-2c^2$, ed essi prendono la forma

$-2c^2(6c+5b)$; e perciò la espressione data può essere espressa da $3a(6c+5b)-2c(6c+5b)$, e raccogliendo di nuovo li fattori comuni avremo la espressione data $18a^2c+15a^2b-12c^3-10bc^2=(3a-2c)(6c+5b)$.

Articolo IV.

Della ricerca del massimo comune divisore.

66 Noi diamo in algebra il nome di massimo comune divisore di due o più quantità algebraiche a quella quantità, per la quale essendo divise le quantità date, li quozienti che ne risultano non hanno più alcun divisore comune.

67 La teoria del massimo comune divisore nell' algebra è quella medesima, che da noi è stata esposta nella Aritmetica, e per conseguenza il metodo per trovare il massimo comune divisore nell' algebra è quello medesimo, che abbiamo esposto nella aritmetica per trovare il massimo comune divisore fra due numeri dati, quindi avremo la regola seguente.

Si ordinino le due quantità date per rapporto ad una lettera comune, e si prenda per dividenda quella quantità, nella quale questa lettera ordinatrice ha lo esponente maggiore, si divida per l'altra, e si prosegua la divisione fino a tanto, che lo esponente di tale lettera sia nel primo ter-

mine del divisore maggiore di quello, che essa ha nel dividendo; indi si divida la quantità, che ha fatta da divisore per lo residuo della divisione, di poi il primo residuo si divida per lo secondo residuo, e così si proceda fino a tanto, che si giunga ad una divisione esatta, ed allora conchiuderemo, che l' ultimo divisore è il massimo comune divisore dimandato.

68 Prima però di mettere in opera questa regola stimo non essere fuori di proposito avvertire, che il massimo comune divisore di due quantità non è alterato, qualora una di esse si moltiplichi, o si divida per una altra quantità, purchè questa non sia fattore dell' altra quantità data, per esempio, sieno le due quantità AB, AC, le quali hanno per massimo comune divisore A, e si multiplichi AB per D, essa diverrà ABD, ed osserviamo, che le due quantità ABD, ed AC hanno conservato il medesimo massimo comune divisore A; Similmente se abbiamo le due quantità ABD, AC le quali hanno il massimo comune divisore A, dividendo ABD per D, ne nascerà la quantità AB, e noi vediamo che AB, AC conservano lo stesso comune divisore A; ma noi vediamo, che sì fatto massimo comune divisore verrebbe alterato se la quantità AB si multiplicasse, o dividesse per una quantità, la quale fosse fattore di AC. Dal che conchiudiamo, che *nella ricerca del massimo comune divisore noi possiamo supprimere*

quelle quantità, le quali sono fattori soltanto di una di esse; e che possiamo multiplicare una di esse per qualunque altra quantità, purchè essa non sia fattore dell' altra quantità data, senza che il massimo comune divisore sia alterato.

69 Dippiù noi abbiamo dimostrato, che se una quantità è ordinata per rapporto ad una lettera ordinatrice, per esempio A, ed una quantità per esempio D indipendente dalla lettera A è divisore di tutta la quantità, essa deve dividere in particolare li coefficienti di ciascuna potenza di A; questa verità riceve quì una interessantissima applicazione.

Supponiamo, che si abbia un polimonio A ordinato per rapporto ad una lettera ordinatrice a, e che esso abbia un divisore D indipendente dalla lettera ordinatrice a, noi possiamo col metodo dato cercare il massimo comune divisore tra due coefficienti del polinomio A, indi tra questo divisore ed un altro qualunque delli coefficienti del medesimo polinomio, e proseguire la medesima operazione per tutti gli altri coefficienti, è evidente, che se il polinomio A ha un fattore D indipendente dalla lettera ordinatrice a, questo deve essere fattore del coefficiente di ciascun termine in particolare, e perciò D dovrà essere fattore di tutto il polinomio A, e supposto, che dividendo per D il polinomio A, si abbia per quoziente A', avremo $A = A'D$, ed il polinomio A' non potrà più ammettere alcun divisore indipendente da a.

Supponiamo, che l'altro polinomio sia espresso da B, e che facendo sopra di esso la operazione medesima, che abbiamo fatta sopra del polinomio A, si trovi il divisore D' indipendente da a, e che dividendo B per D' si trovi il quoziente B', noi avremo B=B'D'.

Se tra D, e D' troviamo il massimo comune divisore, che supponiamo disegnato da K, questa quantità K sarà il fattore indipendente da a, il quale è evidentemente comune alli due polimonj A, B. Se ora supponiamo, che li due polinomi A, B abbiano un divisore comune composto da due fattori, uno delli quali sia indipendente da A, che noi abbiamo indicato con la lettera K, l' altro dipendente da a, che indicheremo con la letterà Q, il massimo divisore comune di essi sarà KQ; e poichè noi abbiamo trovato K, dobbiamo soltanto occuparci a trovare Q, nel quale non può più esistere alcun fattore indipendente da a; Ma avendo conosciuto K, se noi dividiamo D per K avremo un quoziente, che chiameremo α, e se dividiamo D' per K avremo un altro quoziente, che chiameremo β, e ne ricaveremo D=Kα, D'=Kβ, ed avremo A =A'Kα, B=B'Kβ, dalle quali quantità sopprimendo il fattore comune K, ne ricaveremo Q, il quale sarà il divisore comune tra A'α, e B'β, e poichè α, β sono fattori particolari di queste due quantità possono essere soppressi, e troveremo Q, il quale sarà quella quantità, che è fattore comune di A', e di B'.

Da quanto abbiamo detto conchiudiamo, che dopo di avere trovati li due divisori D, D' independenti dalla lettera ordinatrice a, delli quali uno D è comune a tutti li termini di A, l' altro D' è comune a tutti li termini di B, nelle due quantità si supprimono questi fattori, e li polinomi divengono più semplici, li quali saranno quelli, che abbiamo disegnati con A', e B', e terremo conto del fatto re K comune a D, e D', indi passeremo a trovare il massimo comune divisore tra A', e B', che abbiamo disegnato con Q, il quale multiplicheremo per K, ed avremo il massimo comune divisore cercato delli due polinomi dati A, e B.

70. Poichè sin dal principio di queste istituzioni ho sempre inculcata la necessità di conoscere la sintassi della lingua algebraica per potere fare in essa de' progressi, stimo essere necessario trattenerci alquanto sopra la pratica di questa interessantissima teoria, applicando la regola esposta a varj esempj, e perciò sia.

Esempio I.° Proponiamoci di determinare il massimo comune divisore delle due quantità $3bcq+30mp+18bc+5mpq$, e $24ad-7fgq-42fg+4adq$; prima di cominciare la operazione ordiniamo le quantità per rapporto ad una lettera comune ad esse, e sia questa la lettera q, esse si ridurranno respettivamente a $(3bc+5mp)q+18bc+30mp$, e $(4ad-7fg)q+24ad-42fg$, incominciando dal dividere la prima di esse per la seconda, ma noi osserviamo, che la divisione non si può eseguire, poichè $3bc+5mp$ coefficiente di quella prima non è divisibile per $4ad-7fg$ coefficiente della medesima lettera q nella seconda; dippiù osserviamo, che $24ad-42fg$ è esattamente divisibile per 6, e da per quoziente $4ad-7fg$, quindi il divisore si riduce a $(4ad-7fg)(q+6)$, dunque esso ha per suo divisore $4ad-7fg$, il quale non è fattore del dividendo, e perciò si può supprimere, senza che il massimo comune divisore delle quantità date sia alterato, quindi divideremo $(3bc+5mp)q+18bc+30mp$ per $q+6$, e poichè la divisione riesce esattamente, conchiudiamo, che $q+6$ è il massimo comune divisore dimandato.

Esempio II.° Sieno date le due quantità $3a^3-3ba^2+b^2a-b^3$, e $4ba^2-5b^2a+b^3$, le quali sono ordinate per rapporto alla lettera a ad esse comune, e poichè questa lettera si trova avere nella prima quantità un esponente maggiore di quello, che essa ha nella seconda, prenderemo la prima per dividendo, e la seconda per divisore, ma volendo incominciare la divisione, noi siamo arrestati, giacchè il primo termine del dividendo non può essere esattamente diviso per lo primo termine del divisore, ed osserviamo, che ciò dipende dal coefficiente $4b$, che affetta il primo termine del divisore, quindi noi sapendo 1.° che il massimo comune divisore di due quantità non si altera qualora in una di esse si introduce qualunque fattore, purchè non sia fattore dell' altra. 2.° Che il comune divisore resta lo stesso qualora in una delle quantità si sopprime un suo fattore particolare, noi conchiuderemo in prima, che poichè il numero 4 coefficiente numerico del primo termine del divisore non è fattore di tutto il divisore, noi potremo introdurre il 4, come fattore nel dividendo, senza che il massimo comune divisore delle quantità date si alteri, e questo dividendo si ridurrà $4\times3a^3-12ba^2+4b^2a-4b^3$, ed avremo così tolta la difficoltà, che veniva dal coefficiente numerico 4 del divisore, ma osserviamo, che nel primo termine del divisore vi è la lettera b, la quale non trovandosi nel primo termine del dividendo impedisce ancora la divisione, quindi considerando, che la lettera b è fattore di tutti li termini del divisore, noi potremmo supprimerla senza alterare il massimo comune divisore dimandato, ma prima di sopprimerla, dobbiamo assicurarci, che essa non sia fattore del dividendo, quindi sapendo noi, che un fattore indipendente dalla lettera ordinatrice deve avere la proprietà di dividere particolarmente il coefficiente, che la lettera ordinairice ha in ciascheduno de' termini della quantità, conchiudiamo, che la lettera b non essendo fattore del primo termine $3a^3$ del dividendo, non può essere fattore del dividendo, e perciò la sopprimiamo nel divisore, ed esso diverrà $4a^2-5ba+b^2$, e diremo, che il massimo co-

mune divisore cercato fra li due polinomj dati sarà quello stesso, che noi troveremo operando sopra li polinomii $4\times3a^3-12ba^2+4b^2a-4b^3$, e $4a^2-5ba+b^2$.
eseguendo questa divisione troviamo, che il quoziente parziale è $3a$, indi multiplicando questo quoziente $3a$ per lo divisore, e sottraendo il prodotto dal dividendo, avremo il residuo $3ba^2+b^2a-4b^3$, e proseguendo la divisione, divideremo questo residuo per lo stesso divisore, e poichè in questo residuo vi è il suo fattore particolare b, noi lo sopprimeremo, e lo ridurremo a $3a^2+ba-4b^2$, e lo divideremo per lo divisore $4a^2-5ab+b^2$, e poichè il divisore ha nel suo primo termine il coefficiente numerico 4, il quale non è fattore in tutto il divisore, ed impedisce la division del primo termine del dividendo per lo prim termine del divisore, noi potremo multiplica re il dividendo per 4 senza che il massimo co mune divisore delli polinomii dati si alteri quindi multiplichiamo il dividendo per 4 e avremo $4\times3a^2+4ba-16b^2$, il quale divis per lo divisore $4a^2-5ba+b^2$ dà per quozien te parziale 3, indi multiplicando il divisor per questo quoziente, e sottraendo il prodo to dal dividendo, avremo il residuo $19ba-19b$
Quì osserviamo, che la divisione non pu essere eseguita, poichè la lettera ordinatric nel residuo trovato ha lo esponente minore quello, che essa ha nel divisore, quindi s guendo la regola data, noi passeremo il div

sore in dividendo, e questo residuo in divisore, e divideremo $4a^2-5ba+b^2$ per $19ba-19b^2$, e poichè $19ba-19b^2$ ha per suo divisore particolare $19b$, noi lo sopprimiamo, e dividiamo $4a^2-5ba+b^2$ per $a-b$, e diremo che il massimo comune divisore delli polinomi dati sarà quello, che si trova tra $4a^2-5ba+b^2$ ed $a-b$, ma eseguendo la divisione essa viene esatta, dunque $a-b$ è il massimo comune divisore delli polinomii dati $3a^3-3ba^2+b^2a-b^3$, e $4ba^2-5b^2a+b^3$.

In fatti se questi polinomii si dividono per $a-b$, li quozienti $3a^2+b^2$, e $4ab-b^2$, che ne risultano sono *quantità prime fra loro*, cioè non hanno alcun fattore comune.

Esempio III.° Proponiamoci di trovare il massimo comune divisore delli polinomi

$$6a^5+15ba^4-4c^2a^3-10bc^2a^2$$
$$9ba^3-27bca^2-6bc^2a+18bc^3$$

Li quali sono ordinati relativamente alla lettera a; ed in primo luogo noi osserviamo, che il primo di essi ha a^2 per suo fattore particolare, e che il secondo ha per suo fattore particolare $3b$, quindi sopprimendoli, noi cercheremo il massimo comune divisore delli polinomi

$$6a^3+15ba^2-4c^2a-10bc^2$$
$$3a^3-9ca^2-2c^2a+6c^3$$

Ed incominceremo dal dividere il primo termine del primo polinomio per lo primo termine del secondo, ed avremo per quoziente il numero 2, il quale multiplicato per lo divisore, e sottratto il prodotto dal dividendo, avremo il residuo $18ca^2+15ba^2-12c^3-10bc^2$, e raccogliendo li fattori, questo residuo si riduce $(6c+5b)(3a^2)+(6c+5b)(-2c^2)=(6c+5b)(3a^2-2c^2)$; quantità la quale ha per suo fattore particolare $6c+5b$, il quale da noi si può sopprimere senza che il massimo comune divisore delli polinomi dati si alteri, e poichè questo residuo ridotto ha la lettera ordinatrice affetta da un esponente minore di quello che essa ha nel divisore, passeremo il divisore a dividendo, e questo residuo così preparato a divisore, e divideremo $3a^3-9ca^2-2c^2a+6c^3$ per $3a^2-2c^2$, e poichè la divisione viene esatta, conchiudiamo, che $3a^2-2c^2$ è il massimo comune divisore delli polinomi dati.

Esempio IV. Proponiamoci di trovare il massimo comune divisore delli due polinomj

$$36a^2cd-120abcd+100b^2cd$$
$$36a^3c-6a^2bc-90ab^2c$$

li quali sono ordinati per rapporto alla lettera ordinatrice a, e poichè evidentemente conosciamo, che il secondo polinomio ha a per fattore particolare, li due polinomi si ridurranno a

$$36a^2cd-120abcd+100b^2cd$$
$$36a^2c-6abc-90b^2c$$

Indi cerchiamo il fattore indipendente da a nel primo polinomio, e noi troveremo, che li coefficienti delli ultimi due termini hanno per comune fattore $20bcd$, indi cerchiamo il comune fattore di $20bcd$ ed il coefficiente del primo termine, e noi troviamo, che essi hanno per comune fattore $4cd$; e perciò essendo $4cd$ fattore di tutto il primo polinomio, noi lo sopprimiamo, e lo riduciamo a $9a^2-30ab+25b^2$; indi cerchiamo il fattore comune di tutti li termini del secondo polinomio, il quale è $6c$, e sopprimendolo, il secondo polinomio si riduce a $6a^2-ab-15b^2$; ma qui consideriamo che li due fattori particolari $4cd$, o $6c$ delli due polinomi hanno per fattore comune $2c$; conchiudiamo, che sopprimendo nelli polinomi dati li due fattori particolari noi sopprimiamo il fattore $2c$ comune alli polinomi dati, il quale deve fare parte del massimo comune divisore di essi, quindi noi cercheremo il massimo comune divisore delli polinomi così preparati, e poi lo multiplicheremo per $2c$; Eseguiamo dunque le operazioni della ricerca del massimo comune divisore di $9a^2-30ab+25b^2$, e $6a^2-ab-15b^2$.

Dividiamo il primo termine $9a^2$ del dividendo per $6a^2$ primo termine del divisore, ed osserviamo, che il coefficiente 9 non è divisibile per 6, e che $6=3\times2$, e che nè 3 nè 2 è divisore del secondo polimomio, quindi potremo multiplicare il polinomio tanto per 9, quanto per 3, quanto per 2 senza che il comune divisore dimandato si alteri, purchè però da noi si scelga tra questi tre numeri quello, che rende la divisione possibile, quindi potremo multiplicare il primo polinomio per 9 oppure per 2, lo multiplichiamo per 2, perchè il dividendo viene più semplice ; e cercheremo il massimo comune divisore tra

$18a^2-60ab+50b^2$

$6a^2-ab-15b^2$; e troveremo per primo quoziente 3, indi sottraendo dal dividendo il prodotto del divisore multiplicato per lo quoziente 3, avremo per residuo $-57ab+95b^2$; quindi osservando, che in questo residuo la lettera ordinatrice ha un esponente minore di quello, che essa ha nel divisore, noi passeremo il divisore a dividendo, e lo divideremo per questo residuo, cioè divideremo $6a^2-ab-15b^2$ per $-57ab+95b^2$; qui osserviamo, che il coefficiente -57 del primo termine del divisore impedisce di fare la divisione, e come esso non è divisore di tutto il binomio divisore, potremo conchiudere, che si potrebbe il dividendo multiplicare per -57, ma noi ci inganneremo così operando, perchè essendo 57 un numero non primo dobbiamo assicurarci se tra li suoi fattori ve ne sia qualcuno, che sia fattore anche di 95, poichè in tale caso noi dovremo sopprimere prima questo fattore nel binomio divisore, altrimenti questo numero essendo fattore del divisore si introdurrebbe come fattore nel dividendo, ed il massimo comune divisore verrebbe alterato, quindi trovando tutti li divisori primi di 57, noi troviamo, che $57=3\times19$, e trovando li divisori primi di 95 troviamo, che $95=5\times19$; e conchiudiamo, che 19 è fattore particolare di tutto il divisore, quindi lo sopprimiamo, dividendo $-57ab+95b^2$ per -19, ed avremo per divisore $3ab-5b^2$, e sopprimendo in questo binomio il suo divisore particolare b troveremo il massimo comune divisore tra $6a^2-ab-15b^2$, e $3a-5b$; e poichè la divisione riesce esatta conchiuderemo, che il massimo comune divisore dimandato è $2c(3a-5b)=6ac-10bc$

Teoria delle frazioni.

71. Nella aritmetica abbiamo veduto, che le frazioni tirano la loro origine dalla divisione, la quale non ha potuto eseguirsi esattamente, della medesima maniera abbiamo veduto nell' algebra, che qualora una divisione non si può eseguire esattamente, essa fa nascere le frazioni algebraiche, e poichè nella aritmetica abbiamo veduto, che la frazione indica, che la unità è stata divisa in tante parti eguali, quante ne indica il numero delle unità del denominatore, delle quali se ne prendono tante, quante ne indica il numeratore, quindi quanto da noi si è detto nella aritmetica per rapporto alle frazioni aritmetiche, si deve ancora conchiudere avere luogo nelle frazioni algebraiche, e come nella aritmetica le frazioni sono state divise in due classi, cioè quelle nelle quali il numeratore è minore del denominatore, che noi abbiamo chiamate *frazioni vere*, e quelle nelle quali il numeratore è maggiore del denominatore, che

noi abbiamo chiamate *frazioni spurie* ovvero *espressioni frazionarie*, similmente nell' algebra noi riconosciamo le medesime due specie di frazioni, cioè quelle nelle quali il numeratore è di un grado più elevato del denominatore, e quelle nelle quali il numeratore è di un grado meno elevato del denominatore.

Quando la frazione ha il numeratore di grado più elevato del grado del denominatore può essere decomposta in un monomio, o pure in un polinomio più una frazione vera, come per esempio la espressione frazionaria $\frac{a^2+b^2}{a-b}$, può essere decomposta nelle due parti $a+b$, e $\frac{2b^2}{a-b}$, il che si ottiene eseguendo la divisione del numeratore per lo denominatore, proseguendo la divisione fino a tanto, che si giunga ad un residuo di grado inferioro a quello del divisore, allora il monomio, o polinomio, che si è avuto per quoziente sarà la prima parte, e la seconda sarà formata dalla frazione vera, che ha per muratore il residuo, ed il divisore, ossia il denominatore primitivo per denominatore.

72. Le frazioni algebraiche hanno le medesime proprietà delle frazioni aritmetiche cioè 1. Che il valore di una frazione non si altera, qualora li suoi termini si multiplicano, o si dividono per un medesimo numero. 2. Che per addizionare le frazioni, o sottrarre una frazione

da una altra, debbono ridursi prima allo stesso denominatore, ed indi addizionare li numeratori, o sottrarre uno di essi dall' altro, e dare alla somma, o al residuo trovato per denominatore il denominatore comune. 3. Che per multiplicare due frazioni, basterà fare una altra frazione, la quale abbia per numeratore il prodotto delli numeratori delle frazioni date, e per denominatore il prodotto delli denominatori delle medesime frazioni date. 4. Che per dividere una frazione per una altra, basterà multiplicare la frazione dividenda per la frazione divisore rovesciata. 5. Che per elevare a potenza una frazione basterà elevare separatamente il numeratore, ed il denominatore alla potenza dimandata. 6. Finalmente, che per estrarre la radice da una frazione, se il denominatore è una potenza perfetta del grado dimandato basterà estrarre separatamente la radice dimandata dalli due termini della frazione, e qualora il denominatore non è potenza perfetta del grado dimandato, basterà elevare il denominatore alla potenza, che ha il suo grado di una unità minore del grado della radice dimandata, e multiplicare il numeratore per questa potenza, e dal prodotto estrarre la radice dimandata, e dare a questa radice per denominatore il denominatore della frazione data.

73. La riduzione delle frazioni al medesimo denominatore si esegue della medesima maniera,

con la quale operiamo sopra delle frazioni aritmetiche; ma qui osserveremo che nella aritmetica oltre del metodo generale per eseguire questa operazione ancillare, abbiamo esposto il metodo di ridurle al medesimo denominatore, dando ad esse per denominatore comune il minimo dividendo comune di tutti li denominatori, ma la ricerca del minimo dividendo comune, quando li denominatori sono polinomj, esige la soluzione delle equazioni, e perciò non possiamo occuparcene in questo luogo, anzi in molti casi una tale operazione eccede le forze dell' algebra nello stato attuale. Ma nel caso, che li denominatori sono monomi, la riduzioue al minimo denominatore comune è sommamente facile, poichè questo denominatore comune si riduce a quel monomio, il quale è composto da tutti li fattori delli denominatori, li quali si trovano elevati alle più alte potenze nelli denominatori dati, fattori che sono tutti in evidenza, e così per esempio se ci proponiamo di ridurre al medesimo denominatore le frazioni $\frac{a^2}{b^3c}$, $\frac{a^2-b}{b^2cd}$, $\frac{a+b}{bcd^3f}$, e che questo denominatore sia il minimo dividendo comune delli denominatori, noi evidentemente conosciamo, che esso deve essere il minimo dividendo comune delli denominatori b^3c, b^2cd, bcd^3f, il quale è b^3cd^3f; e per ridurre queste frazioni al medesimo minimo denominatore comune b^3cd^3f, noi multiplichremo li due termini di ciascuna delle fraoni date per ciascuno delli fattori semplici , c, d, f, che non sono nelli denominatorilati con esponenti minori di quelli, che eo ha nel minimo dividendo comune, così ultiplicheremo li due termini della prima fraone per d^3f, quelli della seconda per bd^2f, quelli della terza per b^2, ed avremo le azioni ridotte al medesimo minimo denomitore comune b^3cd^3f.

74. Non è fuori di proposito avvertire quì, che nella esecuzione delli cali sopra delli rotti nell' algebra, è sempre bfatto di ridurre le frazioni alla minima essione, e di adoperare tutte quelle malizidi calcolo, che possono farci trovare li risuli li più semplici possibili, cosa che è un vantaggio inapprezzabile nell' algebra, ancando a tali simplificazioni, spesso si giug a risultati talmente complicati, e ad ezioni di grado tanto elevato, che la solune ne è troppo difficile; quindi la riduzionelle frazioni alla minima espressione è pimportante nell'algebra di quello, che essa nell' aritmetica, ma noi abbiamo veduto nelritmetica, che la riduzione delle frazioni aminima espressione si riduce a dividere li p termini delle frazioni per lo massimo comudivisore di essi, quindi per ridurre una frne alla minima espressione, bisogna trovare massimo comune divisore delli termini dsa, e poi divi-

dere li medeimi termini per lo massimo comune divisoı trovato, dal che sı vede, che la ricerca de massimo comune divisore nelalgebra è un operazione di somma importanza.

75. Noi abbmo veduto, che una frazione non si altera, qlora li due termini di essa si multiplicano ɔ si dividono per un medesimo numero, ma timo necessario vedere, quello che accade iıına frazione, quando li due termini di es si accrescono, o si diminuiscono di una ıedesima quantità.

Sia in prɒ luogo la frazione $\frac{a}{b}$, il valore della que sia espresso da v, alli due termini della zione $\frac{a}{b}$ si agginnga la quantità m, il val della frazione varierà, ma noi non sappia, se il valore di essa varierà in più, o in no, si supponga, che questa variazione sia pressa da d, ed avremo $\frac{a+m}{b+m}=v+d$, questa quantità d sarà per noi ignota tan nel suo valore numerico, quanto nel segr ; poichè noi non sappiamo di quanto il va della frazione deve variare, come ancnon sappiamo se essa deve variare in più, ın meno, quindi concepiremo, che la lra d indichi nel medesimo tempo il numergnoto, ed il segno col quale esso deve essere combinato col valore primitivo v della frazione data,

Noi abbiamo per la supposizione $v+d=\frac{a+m}{b+m}$; si tolga sì dall' una, che dall' altra di queste quantità eguali la medesima quantità v, avremo $d=\frac{a+m}{b+m}-v$, e sostituendo in vece di v la frazione primitiva $\frac{a}{b}$, avremo $d=\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}$; e riducendo le frazioni al medesimo denominatore avremo $d=\frac{b(a+m)}{b(b+m)}-\frac{a(b+m)}{b(b+m)}$ $=\frac{ab+bm-ab-am}{b\,(b+m)}=\frac{bm-am}{b(b+m)}=\frac{m}{b}\times\frac{b-a}{b+m}$, per fare la discussione di questo valore di d, noi dobbiamo vedere, quale valore prende la espressione $d=\frac{m}{b}\times\frac{b-a}{b+m}$ secondo le varie relazioni, che possono avere li due termini della frazione proposta $\frac{a}{b}$; quindi determineremo il valore, che essa acquista quando $a>b$, quando $a=b$, e quando $a<b$:

Supponendo $a>b$, è evidente, che in questo caso $b-a$ è una quantità sottrattiva, la quale divisa per la quantità additiva $b+m$ darà un quoziente anche sottrattivo, e multiplicando questo quoziente sottrattivo per lo numero assolnto $\frac{m}{b}$, darà un prodotto sottrattivo, dunque d è sottrattiva quindi in vece di leggere $v+d=\frac{a+m}{b+m}$, leggeremo $v-d=\frac{a+m}{b+m}$, e conchiuderemo, che quando la *frazione* $\frac{a}{b}$ *è una frazione nella quale il numeratore è maggiore del denominatore, aggiugnendo una medesima quantità alli suoi due termini il suo valore diminuisce.*

Supponendo $a=b$, avremo $d=\frac{m}{b}\times\frac{b-a}{b+m}$, ma essendo $a=b$ avremo $b-a=o$, ed il valore di d si ridurrà a $\frac{m}{b}\times\frac{o}{b+m}=o$, e conchiudiamo, che qualora *una frazione ha li suoi termini eguali, accrescendo sì il numeratore, che il denominatore di una medesima quantità il valore della frazione non si altera.*

Sia in ultimo luogo $a<b$, cioè sia $\frac{a}{b}$ una frazione vera, in questo caso $b-a$ è una quantità additiva, la quale è divisa per la quantità additiva $a+m$ da il quoziente anche additivo, il quale multiplicato per lo numero assoluto $\frac{m}{b}$ da il prodotto anche additivo,

quindi conchiudiamo, che qualora di *una frazione vera si accrescono li due termini di una medesima quantità, il valore della frazione si accresce.*

Supponiamo in secondo luogo, che li due termini della frazione $\frac{a}{b}$ si diminuiscano della medesima quantità m, e si chiamino anche v il valore di $\frac{a}{b}$; e d la differenza, che passa tra la frazione $\frac{a}{b}$, e la frazione $\frac{a-m}{b-m}$, la differenza d sarà ignota tanto nel suo valore numerico, quanto nel segno, dal quale deve essere affetta, quindi avremo $v+d=\frac{a-m}{b-m}$, e

$$d=\frac{a-m}{b-m}-\frac{a}{b}=\frac{b(a-m)}{b(b-m)}-\frac{a(b-m)}{b(b-m)}=$$

$$\frac{ab-mb-ab+am}{b(b-m)}=\frac{am-bm}{b(b-m)}=\frac{m}{b}\times\frac{a-b}{b-m};$$ affinchè la discussione di questo valore di d fia completa, noi supporremo $b>m$, ed $a>b$, oppure $a=b$, oppure $a<b$. Supponendo in primo luogo $b>m$, ed $a>b$, avremo evidentemente $a-b$ quantità additiva, e $b-m$ anche additiva, quindi il quoziente $\frac{a-b}{b-m}$ sarà additivo, il quale multiplicato per lo numero

assoluto $\frac{m}{b}$ darà anche un prodotto additivo; quindi il valore di d è additivo, e conchiudiamo, che *se li duc termini di una frazione si diminuiscono di una quantità minore del suo denominatore, il suo valore si aumenta, quando la frazione data ha il suo numeratore maggiore del suo denominatore.*

Supponiamo $b>m$, ed $a=b$; in questo caso è evidente, che $a-b=o$, quindi la espressione $d=\frac{m}{b}\times\frac{a-b}{b-m}$, si cambia in $d=\frac{m}{b}\times\frac{o}{b-m}$ $=o$; quindi conchiudiamo, che *qualora si diminuiscono li due termini di una frazione, che ha il numeratore eguale al denominatore, di una quantità minore del suo denominatore, il valore della frazione non si altera.*

Suppponiamo in fine $b>m$, ed $a<b$, in questo caso è evidente, che $a-b$ è una quantità sottrattiva, che divisa per la quantità $b-m$, che evidentemente è additiva, darà un quoziente sottrattivo, il quale ripetuto tante volte, quante ne indica il numero assoluto $\frac{m}{b}$ darà un prodotto sottrattivo, quindi conchiudiamo, che *qualora si diminuiscono li due termini di una frazione vera di una quantità minore del denominatore, il suo valore diminuisce*;

Supponiamo $b=m$, ed $a>b$; $a=b$, $a<b$.

Sia $b=m$, ed $a>b$; il valore di d evidentemente si ridurrà ad $1\times\frac{a-b}{o}$; ma qualunque numero diviso per lo zero è eguale all' infinito, dunque d è eguale all' infinito.

Si metta $b=m$, ed $a=b$, il valore di d si ridurrà evidentemente ad $1\times\frac{o}{o}$; espressione, che indica la indeterminazione

In terzo luogo mettendo $b=m$, ed $a<b$, evidentemente conosciamo, che il valore di d si riduce ad $1\times\frac{a-b}{o}$, ma $a-b$ è quantità sottrattiva, e perciò il valore di d sarà il quoziente, che si ha dividendo una quantità sottrattiva per lo zero, e perciò eguale all' infinito preso col segno —

Supponiamo in ultimo luogo $b<m$ con $a>b$, $a=b$, ed $a<b$

Mettendo $b<m$ ed $a>b$, avremo $d=\frac{m}{b}\times\frac{a-b}{b-m}$; ma $a-b$ è una quantità additiva, $b-m$ è una quantità sottrattiva, dunque $\frac{a-b}{b-m}$ è una quantità sottrattiva, che multiplicata per lo numero assoluto $\frac{m}{b}$, darà d eguale ad una quantità sottrattiva, e perciò la frazione diminuisce.

Supponendo anche $b<m$ ed $a=b$, la quantità $a-b=o$; ed il valore di d si ridurrà ad $\frac{m}{b}\times\frac{o}{b-m}=o$, e perciò la frazione non si altera.

Supponendo in ultimo luogo $b<m$, ed $a<b$, noi avremo la quantità $a-b$, che sarà sottrattiva, e $b-m$ anche sottrattiva, quindi $\frac{a-b}{b-m}$ sarà una quantità additiva, la quale multiplicata per lo numero assoluto $\frac{m}{b}$ darà per lo valore di d una quantità additiva, e perciò la frazione aumenta.

Prima di terminare questa teoria delle frazioni stimo essere buono di avvertire, che noi possiamo in una frazione cambiare tutti li segni delli suoi termini senza cambiare il valore della frazione, in fatti se noi abbiamo la frazione $\frac{a-b+c}{d+e-f}$, questa frazione non cambierà di valore multiplicando sì il numeratore, che il denominatore per -1, ed avremo la frazione equivalente $\frac{-a+b-c}{-d-e+f}$.