TULLIO LEVI-CIVITA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE
A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume quarto
1917 - 1928

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1960

COMITATO

PER L'EDIZIONE DELLE OPERE MATEMATICHE

DI TULLIO LEVI-CIVITA

TULLIO LEVI-CIVITA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE
A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume quarto
1917 - 1928

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1960

№ 310

Bologna - Monograf - XI-1960

MEMORIE E NOTE

I.

NOZIONE DI PARALLELISMO IN UNA VARIETÀ QUALUNQUE E CONSEGUENTE SPECIFICAZIONE GEOMETRICA DELLA CURVATURA RIEMANNIANA

« Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. XLII (1917),

pp. 173-215.

Introduzione.

La teoria della gravitazione di EINSTEIN (suffragata oramai dalla spiegazione della famosa disuguaglianza secolare, che l'osservazione rivela nel perielio di Mercurio, e non è prevista dalla legge di NEWTON) considera la struttura geometrica dello spazio ambiente come tenuissimamente, ma pur intimamente, dipendente dai fenomeni fisici che vi si svolgono; a differenza delle teorie classiche, che assumono tutte lo spazio fisico quale dato a priori. Lo svolgimento matematico della grandiosa concezione di EINSTEIN (che trova nel calcolo differenziale assoluto del RICCI il suo naturale strumento algoritmico) fa intervenire come elemento essenziale la curvatura di una certa varietà a quattro dimensioni e i relativi simboli di RIEMANN. L'incontro, anzi il maneggio continuativo di tali simboli in questioni di così alto interesse generale mi ha condotto a ricercare se non sia possibile ridurre alquanto l'apparato formale che serve abitualmente ad introdurli e a stabilirne il comportamento covariante (1).

Un perfezionamento in proposito è effettivamente possibile, e costituisce in sostanza i §§ 15 e 16 del presente scritto; il quale, sorto inizialmente con questo solo obbiettivo, venne via via ampliandosi per far debito posto anche all'interpretazione geometrica.

---

(1) Cfr. per es. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, Pisa, Spoerri, 1902, pp. 69-72.

In sulle prime avevo creduto di trovarla senz'altro nei lavori originali di RIEMANN *Über die Hypothesen welche Geometrie zu Grunde liegen* e *Commentatio mathematica...* (2); ma ce n'è appena un embrione. Da un lato infatti, ravvicinando le fonti citate, si ricava l'impressione che RIEMANN avesse proprio in mente quella caratterizzazione della curvatura intrinseca e invariante, che sarà qui precisata (§§ 17-18). D'altra parte però non c'è traccia, nè in RIEMANN, nè nel commento esplicativo dovuto a WEBER (3), di quelle specificazioni (nozione di direzioni parallele in una varietà qualunque e considerazione di un quadrangolo geodetico infinitesimo con due lati paralleli), che riconosceremo indispensabili dal punto di vista geometrico. Inoltre non si riesce — io almeno non sono riescito — a giustificare il passaggio formale con cui, secondo RIEMANN, dalle premesse, che sono inappuntabili, si dovrebbe conseguire la altrettanto inappuntabile espressione finale della curvatura.

Presenterò al lettore questo mio dubbio, fornendogli i necessari elementi di giudizio, in una nota critica finale.

La prima e più estesa parte della memoria (§§ 1-14) è destinata a introdurre e ad illustrare la nozione di parallelismo in una V_n a metrica qualsiasi.

Si comincia dal campo infinitesimale, cercando di caratterizzare il parallelismo di due direzioni (α), (α') uscenti da due punti vicinissimi P e P'. All'uopo si ricorda che qualunque varietà V_n si può risguardare immersa in uno spazio euclideo S_N a un numero abbastanza elevato N di dimensioni, e si rileva anzitutto che, immaginando spiccata da P una generica direzione (f) di S_N, il parallelismo ordinario in tale spazio richiederebbe

$$\text{angolo } \widehat{(f)(\alpha)} = \text{angolo } \widehat{(f)(\alpha')}\,,$$

per qualunque (f). Orbene, il parallelismo in V_n si definisce, limitandosi ad esigere che la condizione sia soddisfatta *per tutte le* (f) *appartenenti a* V_n (ossia alla giacitura di S_N tangente in P a V_n).

A giustificazione di questa definizione va notato che, mentre essa riproduce, come è necessario, il comportamento elementare per le V_n euclidee, ha in ogni caso carattere intrinseco, perchè in definitiva risulta dipendente soltanto dalla metrica di V_n, e non anche dall'ausiliario spazio ambiente S_N. Infatti la traduzione analitica della nostra definizione di parallelismo si concreta come segue: Riferita la V_n a coordinate generali x_i $(i = 1, 2, ..., n)$, siano dx_i gli incrementi corrispondenti al pas-

(2) B. RIEMANN, *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig, Teubner, 1876, pp. 261-263, 381-382.

(3) Loc. cit. (2), pp. 384-389.

saggio da P a P'; $\xi^{(i)}$ i parametri spettanti a una generica direzione (α) uscende da P; $\xi^{(i)}+d\xi^{(i)}$ quelli spettanti ad una direzione infinitamente vicina (α'), spiccata da P'. La condizione di parallelismo è espressa dalle n equazioni

$$(A) \qquad d\xi^{(i)} + \sum_{1}^{n}{}_{jl} \begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix} dx_j \xi^{(l)} = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

designando $\begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix}$ i noti simboli di CHRISTOFFEL.

Una volta acquisita la legge con cui si passa da un punto a un punto infinitamente vicino, si è senz'altro in grado di eseguire il trasporto di direzioni parallele lungo una qualsiasi curva C. Se $x_i = x_i(s)$ ne costituiscono le equazioni parametriche, basta evidentemente risguardare, nelle (A), le x_i e subordinatamente le $\begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix}$ come funzioni assegnate, le $\xi^{(i)}$ come funzioni da determinarsi del parametro s, e si ha il sistema lineare ordinario

$$\frac{d\xi^{(i)}}{ds} + \sum_{1}^{n}{}_{jl} \begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix} \frac{dx_j}{ds} \xi^{(l)} = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

riducibile ad una forma tipica (detta a determinante gobbo), che già si è presentata in altre ricerche e fu oggetto di studio sistematico da parte dei sig.ri EIESLAND (4), LAURA (5), DARBOUX (6), VESSIOT (7).

Ecco qualche conseguenza geometrica.

1) La direzione parallela in un punto generico P ad una direzione (α) uscente da un altro punto qualsiasi P_0 dipende in generale dal cammino secondo cui si passa da P_0 a P. L'indipendenza dal cammino è proprietà esclusiva delle varietà euclidee.

2) Lungo una medesima geodetica, le direzioni delle tangenti sono parallele, ciò che generalizza un'ovvia caratteristica della retta negli spazi euclidei (quella appunto che EUCLIDE pone in testa agli elementi come intuizione primordiale della retta).

---

(4) J. EIESLAND, *On the Integration of a System of Differential Equations in Kinematics*, « American Journal of Mathematics », vol. XXVIII, 1906, pp. 17-42.

(5) E. LAURA, *Sulla integrazione di un sistema di quattro equazioni differenziali lineari a determinante gobbo per mezzo di due equazioni di Riccati*, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLII, 1906-1907, pp. 1089-1108; vol. XLIII, 1907-1908, pp. 358-378.

(6) G. DARBOUX, *Sur certains systèmes d'équations linéaires*, « Comptes Rendus Hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences », t. CXLVIII, 1° semestre 1909, pp. 16-22, e *Sur les systèmes d'équations différentielles homogènes*, Ibid., pp. 673-679 e pp. 745-754.

(7) E. VESSIOT, *Sur l'intégration des systèmes linéaires à déterminant gauche*, « Comptes Rendus Hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences », t. CXLVIII, 1° semestre 1909, pp. 332-335.

3) Il trasporto per parallelismo, lungo un cammino qualsiasi, di due direzioni concorrenti ne conserva l'angolo. Con ciò si vuol dire evidentemente che l'angolo formato da due generiche direzioni uscenti da un medesimo punto è anche l'angolo formato dalle loro parallele in un altro punto qualunque. Tenendo conto della rilevata proprietà delle geodetiche, si ricava il corollario che, lungo una geodetica, direzioni parallele sono sempre egualmente inclinate sulla geodetica stessa. Se si tratta in particolare di una V_2, questa condizione è anche sufficiente; sicchè, per le ordinarie superficie, parallelismo lungo una geodetica equivale ad isogonalità.

Non ho indicato con ordine il contenuto dei vari paragrafi. Supplirà agevolmente uno sguardo al sommario riportato alla fine del lavoro.

1. - Preliminari.

Sia (coi soliti simboli)

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n}{}_{1} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare di una varietà qualsiasi V_n.

Come è ben noto, si può sempre risguardare la V immersa in uno spazio euclideo S_N a un numero di dimensioni N abbastanza grande (non superiore a $n(n+1)/2$). Indichino y_ν $(\nu = 1, 2, ..., N)$ coordinate cartesiane di un tale spazio. In seno ad esso, gioverà considerare la V_n definita mediante le espressioni parametriche

$$y_\nu = y_\nu(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (\nu = 1, 2, ..., N) \tag{1}$$

delle coordinate cartesiane in termini delle intrinseche, risultando in conformità

$$ds^2 = \sum_{1}^{N}{}_{\nu}\, dy_\nu^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,. \tag{2}$$

Assumiamo in V_n una curva C a piacimento, e siano

$$x_i = x_i(s) \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{3}$$

le sue equazioni parametriche, s designando l'arco (contato a partire da un'origine arbitraria). La C appartiene naturalmente anche allo spazio ambiente S_N, e come tale rimane definita dalle espressioni parametriche $y_\nu(s)$ delle coordinate cartesiane dei suoi punti. Queste espressioni parametriche sono senz'altro offerte dalle (1), in cui si attribuiscano alle x_i i valori (3). Derivandole rapporto ad s, e indicando con apici le derivate rapporto a questo argomento, si ha

$$y'_\nu = \sum_1^n {}_i \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} x'_i . \qquad (\nu = 1, 2, \dots, N). \tag{4}$$

Riferiamoci ad un valore generico, ma ben determinato, di s, cioè ad un qualsiasi punto P della curva C. Le y'_ν costituiscono manifestamente i coseni direttori di C in P rispetto agli assi coordinati dello spazio euclideo S_N; le x'_i sono i *parametri di direzione* (della stessa C e nello stesso punto P) rispetto a V_n.

Ricordiamo ancora [8] che, se si pone

$$y''_\nu = c q_\nu , \tag{5}$$

con $c \geqslant 0$ e $\sum_1^N {}_\nu q_\nu^2 = 1$, rimane definita la curvatura c di C in P, e (escluso il caso limite $c = 0$), pel tramite dei coseni q_ν, una direzione (q), detta *normale principale assoluta* nel punto P. Proiettandola (ortogonalmente) sull'iperpiano tangente a V_n in P, si individua una direzione (q^*), pure normale alla curva, detta *normale principale relativa.*

Designeremo con q_ν^* i coseni direttori di (q^*); con Φ l'angolo compreso fra (q) e (q^*); e infine con α_ν i coseni direttori di una generica (α) uscente da P e appartenente a V_n (cioè al suo iperpiano tangente). Sarà manifestamente

$$\sum_1^N {}_\nu \alpha_\nu q_\nu = \cos \Phi \sum_1^N {}_\nu \alpha_\nu q_\nu^* ,$$

quindi, moltiplicando per c e badando alle (5),

$$\sum_1^N {}_\nu \alpha_\nu y''_\nu = c \cos \Phi \sum_1^N {}_\nu \alpha_\nu q_\nu^* .$$

Va rilevato che il secondo membro ha carattere intrinseco rispetto alla varietà V_n, si può cioè interpretare indipendentemente dallo spazio euclideo

[8] L. Bianchi, loc. cit. [1], pp. 365-367.

ambiente. Infatti

$$c \cos \Phi = \gamma$$

non è altro che la curvatura geodetica di C, e $\sum_{1}^{N}{}_{\nu}\, \alpha_\nu q_\nu^*$ il coseno dell'angolo χ fra (α) e la normale principale relativa (q^*), direzioni appartenenti entrambe a V_n. Sussiste dunque (in dipendenza dall'assunta curva C), per qualsiasi direzione (α) di V_n, la relazione

$$\sum_{1}^{N}{}_{\nu}\, \alpha_\nu y_\nu'' = \gamma \cos \chi\,. \tag{6}$$

2. - Direzioni parallele in V_n lungo una curva prefissata.

Supponiamo che ad ogni punto P di C corrisponda una direzione (α) appartenente a V_n. Saranno con ciò a risguardarsi funzioni di s i parametri di direzione $\xi^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ che definiscono la (α) entro V_n, nonchè i coseni direttori α_ν $(\nu = 1, 2, ..., N)$ che la individuano nello spazio ambiente; e si avrà [come già per la direzione di C, a norma delle (4)]

$$\alpha_\nu = \sum_{1}^{n}{}_{l}\, \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}\, \xi^{(l)}\,. \tag{7}$$

Immaginiamo di far variare P lungo C. La condizione di parallelismo ordinario delle (α) (rispetto allo spazio ambiente S_N) implica eguaglianza degli angoli che esse formano con una medesima direzione, scelta a piacere.

Per arrivare ad una nozione di parallelismo attinente unicamente a V_n, consideriamo il fenomeno elementare, cioè il passaggio da P ad un punto infinitamente vicino.

Sia (f) una generica direzione *fissa* di S_N, f_ν i relativi coseni direttori. Quando s si incrementa di ds, il coseno dell'angolo fra (α) ed (f),

$$\sum_{1}^{N}{}_{\nu}\, \alpha_\nu f_\nu\,,$$

subisce l'incremento

$$ds \sum_{1}^{N}{}_{\nu}\, \alpha_\nu' f_\nu\,.$$

L'ordinario parallelismo richiederebbe l'annullarsi di tale incremento per tutte le direzioni (f), e porterebbe quindi alla costanza delle α_ν.

Accontentiamoci di esigere che l'angolo fra (α) *ed una* (f) *si mantenga invariato per le direzioni* (f) *appartenenti a* V_n, ossia che l'incremento $ds \sum_{\mathrm{I}}^{N}{}_\nu \alpha'_\nu f_\nu$ si annulli [non per tutte le (f), ma soltanto] per queste direzioni tangenziali.

Ove si osservi che tali direzioni sono tutte e sole quelle conciliabili coi vincoli (1), appare manifesto (sostituendo alle f_ν delle quantità proporzionali) che la condizione enunciata equivale alla seguente:

$$\sum_{1}^{N}{}_\nu \alpha'_\nu \delta y_\nu = 0 \tag{I}$$

per tutti gli spostamenti δy_ν *conciliabili coi vincoli* (1).

Avendosi, in base alle (1) stesse,

$$\delta y_\nu = \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \delta x_k ,$$

colle δx_k completamente arbitrarie, la (I) si scinde nelle n equazioni

$$\sum_{1}^{N}{}_\nu \alpha'_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} = 0 , \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

che costituiscono una traduzione formale del parallelismo delle (α) lungo la C.

3. - Forma intrinseca delle condizioni di parallelismo.

Nelle (8) figurano le α_ν e le y_ν, che hanno relazione collo spazio ambiente. Si può liberarsene, facendo in definitiva intervenire solo elementi spettanti alla metrica della V_n.

All'uopo si comincia col sostituire ai coseni direttori α_ν le loro espressioni (7) in funzione dei parametri di direzione $\xi^{(l)}$. Si ha, derivando rapporto all'arco s di C,

$$\alpha'_\nu = \sum_{1}^{n}{}_l \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l} \frac{d\xi^{(l)}}{ds} + \sum_{1}^{n}{}_{jl} \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j \partial x_l} x'_j \xi^{(l)} .$$

D'altra parte, in virtù della (2),

$$a_{kl} = \sum_{1}^{N}{}_{\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}, \qquad (k, l = 1, 2, ..., n),$$

da cui segue, per i simboli di CHRISTOFFEL di prima specie,

$$\begin{aligned} a_{jl,k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_k}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{1}^{N}{}_{\nu}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}\right)\right] \\ &= \sum_{1}^{N}{}_{\nu} \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j \partial x_l}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}, \qquad (j, l, k = 1, 2, ..., n). \end{aligned}$$

Con ciò le (8) divengono

$$\sum_{1}^{n}{}_{l}\, a_{kl} \frac{d\xi^{(l)}}{ds} + \sum_{1}^{n}{}_{jl}\, a_{jl,k} x'_j \xi^{(l)} = 0, \qquad (k = 1, 2, ..., n).$$

Da queste, moltiplicando per $a^{(ik)}$ (9), sommando rispetto a k (da 1 ad n), e ricordando le definizioni

$$\begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix} = \sum_{1}^{n}{}_{k}\, a_{jl,k} a^{(ik)}, \qquad (j, l, i = 1, 2, ..., n),$$

dei simboli di CHRISTOFFEL di 2ª specie, si traggono le equazioni equivalenti

$$(\mathrm{I}_a) \qquad \frac{d\xi^{(i)}}{ds} + \sum_{1}^{n}{}_{jl} \begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix} x'_j \xi^{(l)} = 0, \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

che definiscono il modo di variare dei parametri $\xi^{(i)}$ lungo C, in base alla condizione che le direzioni da essi parametri individuate si mantengano parallele.

Dacchè C si considera preventivamente assegnata (e con essa le espressioni delle x e delle x' in funzione di s), i coefficienti $\sum_{1}^{n}{}_{j} \begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix} x'_j$ d'ogni $\xi^{(l)}$

---

(9) Con $a^{(ik)}$ si designano al solito i coefficienti della forma reciproca alla forma fondamentale $ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik} dx_i dx_k$.

nelle (I_a) vanno risguardati come funzioni conosciute della variabile indipendente s. Le (I_a) stesse si presentano in conformità come n equazioni differenziali ordinarie nelle altrettante quantità $\xi^{(i)}$. Ne consegue, in base ai noti teoremi di esistenza, che, spiccata a piacimento una direzione da un punto qualsiasi P_0 di C, rimangono determinate le direzioni parallele per ogni altro punto P della curva.

4. - Confronto col comportamento euclideo. Sua proprietà caratteristica nei riguardi del parallelismo.

Per quanto s'è visto or ora, lungo la curva C, seguita a sussistere la proprietà elementare che da un punto P esce una sola direzione parallela ad altra assegnata per P_0. Va rilevato tuttavia che, mentre negli spazi euclidei la parallela per P è unica in senso assoluto, nella nostra V_n a metrica qualsiasi essa viene in generale a dipendere da C, ossia dal cammino lungo cui si passa da P_0 a P.

Si può anzi aggiungere che, *se* (per un punto qualsiasi P di un certo campo) *la parallela* (ad una qualsiasi direzione spiccata da altro punto P_0 del campo) *è indipendente dal cammino, lo spazio V_n è* (in quel campo) *necessariamente euclideo.*

Si osservi infatti che, dalle (I_a), moltiplicando per ds e ponendo per brevità

$$X_j^{(i)} = \sum_1^n {}_l \begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix} \xi^{(l)},$$

risulta

$$d\xi^{(i)} = -\sum_1^n {}_j X_j^{(i)} dx_j . \tag{9}$$

La voluta indipendenza dal cammino richiede che le $d\xi^{(i)}$, e con esse i secondi membri delle (9), siano differenziali esatti, ciò che, designando con δx_j un secondo sistema di incrementi delle x_j, indipendenti dai dx_j e tali che $d\,\delta x_j = \delta\, dx_j$, si traduce nelle n identità

$$\delta \sum_1^n {}_j X_j^{(i)} dx_j = d \sum_1^n {}_j X_j^{(i)} \delta x_j \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Esplicitando e notando che l'eguaglianza deve sussistere qualunque sieno i due sistemi di incrementi dx_j, δx_j, nonchè i valori (iniziali, e quindi anche generici) delle $\xi^{(i)}$, si è condotti automaticamente ad esprimere che si annullano tutti i simboli di RIEMANN ([10]), ossia che si tratta di una varietà euclidea, c. d. d.

5. - Altra forma delle equazioni (I_a). Dipendenza da una sola funzione.

Nelle (I_a) figurano come elementi determinativi delle direzioni parallele (α) i parametri di direzione $\xi^{(i)}$ ($= dx_i/ds$, rappresentando ds la lunghezza di un elemento spiccato nella direzione (α), e dx_i il corrispondente incremento della coordinata x_i). Questi $\xi^{(i)}$ costituiscono un sistema contravariante ([11]) (rispetto a qualsivoglia trasformazione delle coordinate generali x_i). Giova talora mettere in evidenza, invece del sistema contravariante $\xi^{(i)}$, il sistema covariante reciproco

$$\xi_i = \sum_{1}^{n}{}_k\, a_{ik}\xi^{(k)}\,, \tag{10}$$

cioè i cosidetti *momenti*.

Per trasformare in conformità le (I_a), deriviamo materialmente le posizioni (10), introducendovi per le $d\xi^{(k)}/ds$ le espressioni fornite dalle (I_a). Si ricava (dopo aver scambiato nell'ultimo termine l'indice di sommatoria k in l)

$$\frac{d\xi_i}{ds} = -\sum_{1}^{n}{}_{kjl}\, a_{ik}\begin{Bmatrix} j\,l \\ k \end{Bmatrix} x'_j\xi^{(l)} + \sum_{1}^{n}{}_l\, \frac{da_{il}}{ds}\,\xi^{(l)}\,.$$

Siccome

$$\sum_{1}^{n}{}_k\, a_{ik}\begin{Bmatrix} j\,l \\ k \end{Bmatrix} = a_{jl,i}\,,$$

e

$$\frac{da_{il}}{ds} = \sum_{1}^{n}{}_j\, \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j}\, x'_j = \sum_{1}^{n}{}_j\, (a_{jl,i} + a_{ij,l})x'_j\,,$$

([10]) Dal punto di vista metodologico, ove si ritenga effettivamente preferibile all'ordinaria trattazione dei simboli e della curvatura di RIEMANN quella che sarà esposta nei §§ 15-19, il teorema del testo dovrebbe figurare dopo quei paragrafi. Lo ho anticipato per comodo del lettore cui sono famigliari i simboli di RIEMANN.

([11]) Cfr. (in questo punto soltanto per le locuzioni) G. RICCI et T. LEVI-CIVITA, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, « Mathematische Annalen », Bd. LIV, 1900, pp. 125-201, [in queste « Opere »: vol. primo, XXXII, pp. 479-559].

così resta

$$\frac{d\xi_i}{ds} = \sum_{jl}^{n}{}_1 \, a_{ij,l} x'_j \xi^{(l)} . \tag{11}$$

Anche nel secondo membro si devon fare apparire, non le $\xi^{(l)}$, ma i momenti: cosa ben facile a norma delle (10), che risolute danno

$$\xi^{(l)} = \sum_{k}^{n}{}_1 \, a^{(lk)} \xi_k .$$

Con ciò, attese le espressioni dei simboli di CHRISTOFFEL di 2ª specie già richiamate nel precedente §, risulta

$$\sum_{jl}^{n}{}_1 \, a_{ij,l} x'_j \xi^{(l)} = \sum_{jk}^{n}{}_1 \left\{ {ij \atop k} \right\} x'_j \xi_k ,$$

e si hanno quindi (riponendo l per k come indice della sommatoria) le equazioni trasformate

$$\frac{d\xi_i}{ds} = \sum_{jl}^{n}{}_1 \left\{ {ij \atop l} \right\} x'_j \xi_l , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{I$_b$}$$

Si osserverà che questo sistema (I_b) è *l'aggiunto* del precedente (I_a). Infatti il coefficiente di ξ_l nella i-esima equazione (I_b) è eguale ed opposto al coefficiente di $\xi^{(i)}$ nella l-esima equazione (I_a).

Alle equazioni in questione si può anche attribuire un terzo aspetto che ricorda, pur essendo in verità meno espressivo, la classica forma lagrangiana delle equazioni della dinamica.

L'analogia risiede in ciò che se si fa capo ad una sola funzione di $3n$ argomenti x_i, x'_i, $\xi^{(i)}$,

$$B = \sum_{ij}^{n}{}_1 \, a_{ij} x'_i \xi^{(j)} , \tag{12}$$

bilineare nelle $\xi^{(j)}$ (che fungono da incognite) e nelle x'_i (che sono, al pari delle x_i, funzioni assegnate di s), si ha dalle (10)

$$\xi_i = \frac{\partial B}{\partial x'_i} ,$$

e si constata immediatamente (con ovvi scambi di indici) che, per essere

$$a_{ij,l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}\right),$$

i secondi membri delle (11) possono essere scritti

$$\frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial x'_i} + \frac{1}{2}\sum_1^n{}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial B}{\partial x'_i} x'_j - \frac{\partial B}{\partial \xi^{(i)}}\xi^{(j)}\right).$$

Con ciò, dalle (11) stesse, che sono sostanzialmente equivalenti tanto alle (I_a) quanto alle (I_b), si ha l'annunciata forma involgente la sola B:

$$(\mathrm{I}_c) \qquad \frac{d}{ds}\frac{\partial B}{\partial x'_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial x'_i} + \frac{1}{2}\sum_1^n{}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial B}{\partial x'_i} x'_j - \frac{\partial B}{\partial \xi^{(i)}}\xi^{(j)}\right).$$

6. - Integrale quadratico. Conservazione degli angoli. Composizione di soluzioni ortogonali.

Le equazioni lineari (I_a) ammettono l'integrale quadratico

$$\sum_1^n{}_{ij}\, a_{ij}\xi^{(i)}\xi^{(j)} = \mathrm{cost}\,.$$

Lo si riconosce nel modo più spiccio notando che, in virtù delle (10), il primo membro si scrive

$$\sum_1^n{}_i\, \xi^{(i)}\xi_i\,,$$

ed ha quindi per derivata

$$\sum_1^n{}_i\left(\frac{d\xi^{(i)}}{ds}\xi_i + \frac{d\xi_i}{ds}\xi^{(i)}\right),$$

che si annulla identicamente in forza della (I_a) e delle equivalenti (I_b).

Del resto, anche senza verifica diretta, si può affermare la costanza di $\sum_1^n{}_i\, \xi^{(i)}\xi_i$ in base ad una nota proprietà dei sistemi aggiunti, dacchè (§ precedente) $\xi^{(i)}$ e ξ_i sono soluzioni di due sistemi siffatti.

Ovvio corollario dell'esistenza dell'integrale quadratico è che, se i valori iniziali delle $\xi^{(i)}$ sono effettivamente parametri di direzione, e, come tali, rendono

$$(13) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}\xi^{(i)}\xi^{(j)} = 1\,,$$

la stessa relazione rimane soddisfatta per qualunque s, cioè le soluzioni $\xi^{(i)}$ conservano lungo C il carattere di parametri di direzione: circostanza implicita nella impostazione del problema, ma non a priori evidente nella sua formulazione analitica a mezzo delle (I_a).

Altro corollario degno di nota è la conservazione, lungo C, dell'an golo ϑ di due direzioni che si trasportano per parallelismo. Siano infatti $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ i parametri di queste due direzioni, ξ_i, η_i i relativi momenti. Si ha

$$\cos\vartheta = \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}\xi^{(i)}\eta^{(j)} = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, \xi^{(i)}\eta_i = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, \xi_i\eta^{(i)}\,.$$

Riferiamoci per es. all'ultima espressione, e deriviamo sostituendo a $d\xi_i/ds$ i valori forniti dalle (I_b), a $d\eta^{(i)}/ds$ quelli forniti dalle (I_a) (previo mutamento di ξ in η). Il risultato è anche qui identicamente nullo, c. d. d.

Dalla linearità delle equazioni di parallelismo — riferiamoci per es. alle (I_a) — segue che, se $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ sono soluzioni, lo è del pari una qualsiasi combinazione lineare a coefficienti costanti. Suppongasi in particolare che $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ sieno parametri di due direzioni (oltrechè parallele) ortogonali fra loro, e si assuma

$$\zeta^{(i)} = \cos\vartheta\, \xi^{(i)} + \sin\vartheta\, \eta^{(i)}$$

con ϑ costante. Si ha ovviamente

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}\zeta^{(i)}\zeta^{(j)} = 1\ ; \qquad \sum_{1}^{n}{}_{i}\, \zeta^{(i)}\xi_i = \cos\vartheta\,, \qquad \sum_{1}^{n}{}_{i}\, \zeta^{(i)}\eta_i = \sin\vartheta\,,$$

sicchè le $\zeta^{(i)}$ costituiscono i parametri di una direzione che, mentre ottempera lungo C alla condizione di parallelismo, appartiene alla giacitura individuata dalle prime due, formando con esse in ogni punto sempre gli stessi angoli ϑ e $\pi/2 - \vartheta$.

L'osservazione si estende agevolmente a quante si vogliono soluzioni mutuamente ortogonali, e dà luogo al seguente enunciato espressivo:

Ogni direzione che, spostandosi lungo C, si mantiene rigidamente collegata con direzioni parallele soddisfa essa stessa alla condizione di parallelismo.

7. - Geodetiche. Loro proprietà caratteristica nei riguardi della direzione.

Le equazioni delle geodetiche di V_n sono notoriamente

$$x_i'' + \sum_1^n {}_{jl} \begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix} x_j' x_l' = 0 , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Da esse segue che, se C è geodetica, le (I_a) ammettono la soluzione $\xi^{(i)} = x_i'$, e reciprocamente. Si ha pertanto: *La direzione di una geodetica in un suo punto qualsiasi è sempre parallela alla direzione iniziale*; *reciprocamente ogni curva che gode di questa proprietà è geodetica.*

Risulta così estesa alle geodetiche di una varietà qualunque una discriminante delle rette negli spazi euclidei. E in pari tempo rimane acquisito che sono necessariamente concomitanti la conservazione della direzione e (l'altra discriminante delle geodetiche, cioè) la proprietà integrale di minimizzare la distanza.

8. - Inclinazione sulla curva di trasporto.

Giova rilevare una espressiva combinazione lineare delle (I_a). Per evitare gli sviluppi materiali, risaliremo alla formula (I), che è la genesi delle equazioni differenziali e sostanzialmente equivale ad esse. Detta formula deve sussistere per ogni spostamento δy_ν, e quindi per ogni direzione, appartenente a V_n. Consideriamo in particolare la direzione tangente a C, ponendo nella (I) y_ν' al posto di δy_ν. Risulta

$$\sum_1^N {}_\nu\, \alpha_\nu' y_\nu' = 0 ,$$

che si può scrivere

$$\frac{d}{ds} \sum_1^N {}_\nu\, \alpha_\nu y_\nu' = \sum_1^N {}_\nu\, \alpha_\nu y_\nu'' .$$

Chiamando ψ l'angolo che la direzione (α) (del cui parallelismo si tratta) fa con C e badando alla (6), si ha la relazione che volevamo stabilire

$$\frac{d}{ds} \cos \psi = \gamma \cos \chi . \tag{14}$$

Ricordiamo (§ 1) che γ rappresenta la curvatura geodetica di C, e χ l'angolo compreso fra (α) e la normale principale di C (relativa a V_n). La (14) fornisce quindi la legge con cui varia, lungo la curva di trasporto C, l'inclinazione ψ (sulla stessa C) di un fascio di direzioni parallele.

Se C è geodetica, $\gamma = 0$, e quindi $\cos \psi = \text{cost.}$, ossia: *direzioni parallele lungo una geodetica formano sempre il medesimo angolo colla geodetica stessa.* Questo è del resto un caso particolare della conservazione degli angoli rilevata a § 6: basta tener presente (§ precedente) che le direzioni di una geodetica sono tutte parallele tra loro.

Se C è qualunque, ma si tratta di uno spazio euclideo, la (14) si identifica col primo gruppo delle formule di FRÉNET.

9. - Caso delle ordinarie superficie.

Per $n = 2$, le varie direzioni uscenti da un medesimo punto di C rimangono univocamente determinate dall'angolo ψ, purchè vi si associ un dato qualitativo: il verso in cui, a partire dalla direzione positiva di C, deve contarsi ψ. Ne consegue che (con opportuna specificazione qualitativa) basta la (14) a definire univocamente le direzioni parallele lungo una generica curva della superficie. Si può specificare come segue: Detta (q^*) la normale principale relativa (proiezione sul piano tangente alla superficie della normale principale di C), immaginiamo di contare ψ verso (q^*) [si intende, a partire dalla direzione positiva di C, attraverso l'angolo retto, che questa forma con (q^*)]. L'angolo ψ, inteso a questo modo, può non essere il minimo angolo fra C ed (α), cui si riferisce la (14) (ma quello concavo che completa il giro); comunque il suo coseno coincide in ogni caso col $\cos \psi$ della (14), avendosi ulteriormente (per l'attuale ψ) $\sin \psi = \cos \chi$.

La (14) assume così la forma semplificata

$$\frac{d\psi}{ds} = -\gamma \,. \tag{15}$$

Già ci siamo occupati nel precedente § del caso $\gamma = 0$ per n qualunque. Per le superficie, si può aggiungere che l'ordinaria nozione di parallelismo geodetico rientra nella nostra nozione generale di parallelismo. Infatti, curve geodeticamente parallele hanno per traiettorie ortogonali curve geodetiche; esse possono quindi dirsi parallele (nel senso da noi attribuito a tale qualifica) rispetto a ognuna di queste geodetiche, essendo, per entrambe le curve, $\psi = \pi/2$, ovvero $\psi = 3\pi/2$.

Lasciamo il caso di C geodetica e prendiamo un esempio particolare.

Supponiamo che si tratti di una superficie sferica, e che C ne sia un parallelo. La direzione (q^*) in un punto generico è quella del meridiano, verso il polo di C. Se λ è la latitudine (relativa all'emisfero che contiene il polo di C) e R il raggio della sfera,

$$\gamma = \frac{1}{R \cot \lambda}.$$

D'altra parte, ove si immagini di percorrere il parallelo nel senso in cui cresce la longitudine φ,

$$ds = R \cos \lambda \, d\varphi ,$$

talchè la (15) si riduce a

$$d\psi = - d\varphi \sin \lambda .$$

L'angolo ψ varia dunque uniformemente colla longitudine, e decresce di $2\pi \sin \lambda$ in un giro completo. La direzione parallela ad una iniziale prefissata risulta così funzione *non uniforme* dei punti di un parallelo.

Lo stesso per altre curve chiuse (*): ad es., percorrendo il perimetro di un triangolo geodetico, ψ subisce l'incremento $2\pi - \varepsilon$ (ε eccesso sferico). Lo si riconosce immediatamente pensando che ψ resta costante lungo i lati e subisce nei vertici incrementi bruschi rappresentati dai supplementi degli angoli.

10. - Spazi a curvatura costante. Osservazione sul parallelismo di Clifford.

Vogliamo mostrare che, per gli spazi a curvatura costante ([12]) (di quante si vogliono dimensioni) le equazioni di parallelismo *lungo una geodetica* si integrano a vista, proprio come nel caso esaminato or ora di varietà qualunque, ma a due sole dimensioni.

Riferiamoci, per fissare le idee, ad una V_n di curvatura costante $=1$, ciò che è lecito senza pregiudizio della generalità, ogniqualvolta (come nella questione analitica di cui intendiamo occuparci) non è necessario distinguere il reale dall'immaginario. La nostra V_n si può in conformità risguardare come una ipersfera di uno spazio euclideo a $n+1$ dimen-

(*) Dalla riga 3 alla 14 sono state rettificate le formule e la conseguente deduzione secondo le indicazioni inserite dall'Autore stesso in un estratto del lavoro [N.d.R.].

([12]) Anche a questo proposito si intenderà ripetuta l'avvertenza della nota ([10]).

sioni, rappresentata in coordinate cartesiane dalla equazione

$$\sum_1^{n+1}{}_\nu\, y_\nu^2 = 1\,. \tag{16}$$

Nel caso presente è forse vantaggioso non ricorrere a coordinate intrinseche della V_n, immaginandone sia i punti che le direzioni definiti per mezzo dei loro elementi determinativi nello spazio euclideo ambiente: i punti per mezzo delle loro coordinate cartesiane y_ν vincolate dalla (16); le direzioni (α), per mezzo dei loro coseni direttori α_ν, legati, oltre che da

$$\sum_1^{n+1}{}_\nu\, \alpha_\nu^2 = 1\,, \tag{17}$$

anche dalla condizione

$$\sum_1^{n+1}{}_\nu\, \alpha_\nu y_\nu = 0 \tag{18}$$

di appartenenza a V_n (cioè all'iperpiano tangente).

Data in V_n una linea geodetica C, esaminiamo come devono variare le $\alpha_\nu(s)$ lungo C perchè ne rimangano individuate direzioni parallele (in V_n). Riprendiamo perciò la (I) del § 2 e notiamo che i vincoli (1) sono ora rappresentati dalla sola equazione (16). Il classico procedimento di LAGRANGE consente senz'altro di sostituire alla (I) le equazioni esplicite

$$\alpha_\nu' = \mu y_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{19}$$

in cui μ designa un moltiplicatore a priori indeterminato.

Se ne deve far sistema colla (18), risultandone così definite tanto le α quanto la μ. La (17) è poi effettivamente compatibile colle (18), (19), poichè da queste segue

$$\frac{d}{ds}\sum_1^{n+1}{}_\nu\, \alpha_\nu^2 = 2\sum_1^{n+1}{}_\nu\, \alpha_\nu\alpha_\nu' = 2\mu\sum_1^{n+1}{}_\nu\, \alpha_\nu y_\nu = 0\,.$$

Ciò posto, teniamo presente che, ψ essendo l'angolo fra (α) e C,

$$\cos\psi = \sum_1^{n+1}{}_\nu\, \alpha_\nu y_\nu'\,,$$

e che (§ 8) quest'angolo si conserva costante (al variare di s) in virtù dell'ipotesi che C sia geodetica.

Ora la (18), derivando e badando alle (19) e (16), dà

$$\mu + \cos\psi = 0 ,$$

sicchè le (19) assumono la forma

$$\alpha'_\nu = -\cos\psi \cdot y_\nu ,$$

e la determinazione dei coseni α_ν appare ridotta a quadrature. In realtà non ce n'è neppur bisogno. Basta osservare in primo luogo che, per $\cos\psi = 0$, cioè *per le direzioni ortogonali a C*, risulta $\alpha'_\nu = 0$, sicchè *il parallelismo in V_n è caratterizzato dalla costanza delle α_ν e coincide quindi col parallelismo ordinario nello spazio ambiente. Quanto alle direzioni non ortogonali a C*, si può ricorrere all'enunciato finale del § 6 desumendone che *la condizione di parallelismo (entro V_n) consiste nel formare gli stessi angoli sia con C che con $n-1$ direzioni fisse (indipendenti) ortogonali a C, nonchè, ben si intende, tangenti all'ipersfera* (16).

Consideriamo in particolare una V_3. Il comportamento or ora rilevato di direzioni parallele, uscenti ortogonalmente dai punti di una stessa geodetica C, rende manifesto che non c'è rapporto col cosidetto parallelismo di CLIFFORD. Infatti, se si considerano ∞^1 geodetiche, parallele secondo CLIFFORD, spiccate dai punti di una geodetica C, queste risultano bensì normali alla C, ma le loro tangenti *non* sono parallele nello spazio ambiente [13].

---

[13] Per giustificare questa affermazione, si può ragionare come segue.

Si ricorda anzitutto [L. BIANCHI, loc. cit. [1], p. 446] che le geodetiche costituenti una congruenza di CLIFFORD sono rappresentate parametricamente da formule del tipo

$$(1) \qquad y_\nu = a_\nu \cos s + \sin s \sum_1^4 {}_\varrho\, c_{\nu\varrho} a_\varrho , \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4),$$

dove il parametro s si identifica coll'arco, i coefficienti costanti $c_{\nu\varrho}$, caratteristici della congruenza, soddisfanno alla duplice condizione di emisimmetria ($c_{\nu\varrho} + c_{\varrho\nu} = 0$) e di ortogonalità; le a_ν (valori iniziali delle y_ν) sono legate dalla (16), variando del resto (in tutti i modi possibili) dall'una all'altra delle varie geodetiche della congruenza.

Moltiplichiamo le (1) per $c_{\mu\nu}$, e sommiamo rispetto all'indice ν da 1 a 4. Attese le identità

$$\sum_1^4 {}_\nu\, c_{\mu\nu} c_{\nu\varrho} = -\sum_1^4 {}_\nu\, c_{\mu\nu} c_{\varrho\nu} = -\varepsilon_{\mu\varrho} , \qquad (\mu, \varrho = 1, 2, 3, 4;\ \varepsilon_{\mu\varrho} = 0 \text{ per } \mu \neq \varrho \text{ ed } = 1 \text{ per } \mu = \varrho),$$

si ha subito (cambiando a calcolo eseguito μ in ν e ν in ϱ)

$$(2) \qquad \sum_1^4 {}_\varrho\, c_{\nu\varrho} y_\varrho = \cos s \sum_1^4 {}_\varrho\, c_{\nu\varrho} a_\varrho - a_\nu \sin s , \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

I coseni direttori di una qualunque delle curve (1) (in un suo punto generico) sono eviden-

11. - Riduzione delle equazioni di parallelismo al tipo emisimmetrico.

Il sistema differenziale (I_a) ammette (§ 6) un integrale quadratico. Ciò consente di affermare ([14]) che è possibile, con una conveniente trasformazione lineare delle incognite, ridurre il sistema stesso alla forma emisimmetrica

$$\text{(II)} \qquad \frac{dz_h}{ds} = \sum_1^n {}_k\, p_{hk} z_k \,, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

caratterizzata dalle relazioni

$$\text{(20)} \qquad p_{hk} + p_{kh} = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)$$

fra i coefficienti (i quali del resto si suppongono funzioni qualunque di s). All'uopo basta che la trasformazione lineare fra le $\xi^{(i)}$ e le z_h attribuisca all'integrale qaadratico la forma canonica

$$\sum_1^n {}_h\, z_h^2 = \text{cost}\,.$$

Per raggiungere concretamente l'intento, illustrando nel tempo stesso la trasformazione sotto l'aspetto geometrico, conviene procedere come segue.

Da ogni punto P della C, immaginiamo spiccate (con criterio arbitrario) $n-1$ direzioni che, insieme a quella di C, costituiscano un'ennupla ortogonale Ω. Facendo corrispondere queste direzioni ai numeri $1, 2, \ldots, n-1$, indichiamo, per l'h-esima, con $\lambda_h^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ i parametri, cioè il sistema coordinato contravariante, e con $\lambda_{h/i}$ i momenti

---

tamente rappresentati dalle derivate delle y_ν rapporto all'arco:

$$y'_\nu = -a_\nu \sin s + \cos s \sum_1^4 {}_\varrho\, c_{\nu\varrho} a_\varrho \,,$$

le quali, in virtù delle (2), possono esprimersi in funzione delle coordinate y_ν (dal punto da cui si immagina spiccata la geodetica della congruenza) sotto la forma

$$y'_\nu = \sum_1^4 {}_\varrho\, c_{\nu\varrho} y_\varrho \,. \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Siccome il determinante delle $c_{\nu\varrho}$ non si annulla (il suo valore assoluto è 1), così a due punti diversi non possono *mai* corrispondere gli stessi coseni. È dunque escluso che vi sia una C, da tutti i punti della quale escano geodetiche di una congruenza di CLIFFORD sotto eguale direzione; c. d. d.

([14]) Cfr. per es. DARBOUX, loc. cit. ([6]).

(sistema coordinato covariante). Per uniformità di notazione, attribuiremo l'indice n alla direzione di C che completa l'ennupla, e porremo in conformità

$$x'_i = \lambda_n^{(i)}, \qquad \sum_1^n {}_j\, a_{ij} x'_j = \lambda_{n/i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

Varranno perciò le relazioni caratteristiche delle ennuple ortogonali

$$\sum_1^n {}_i\, \lambda_{h/i} \lambda_k^{(i)} = \varepsilon_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

col solito significato delle ε_{hk} (0 per $h \neq k$, 1 per $h = k$).

La Ω, e per essa le varie λ, vanno naturalmente considerate (al pari delle x_i, x'_i) funzioni note di s.

Ciò premesso, ecco come si esplica la voluta trasformazione lineare. Si assumono come elementi determinativi delle direzioni parallele, al posto dei parametri $\xi^{(i)}$ (o degli elementi reciproci ξ_i) i coseni z_h degli angoli che vengono a formarsi in ogni punto colle direzioni dell'ennupla. L'identità geometrica

$$\sum_1^n {}_h\, z_h^2 = 1$$

assicura senz'altro che si arriverà ad un sistema trasformato emisimmetrico. Sviluppiamo anche il calcolo onde procurarci l'espressione esplicita dei coefficienti p_{hk}.

Le nuove incognite z_h sono, per loro definizione, legate alle $\xi^{(i)}$, o rispettivamente alle ξ_i, dalle equazioni

$$z_h = \sum_1^n {}_i\, \xi^{(i)} \lambda_{h/i}, \tag{23$_a$}$$

$$z_h = \sum_1^n \xi_i \lambda_h^{(i)}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{23$_b$}$$

In base alle (22), queste possono essere risolute sotto le forme rispettive

$$\xi^{(i)} = \sum_1^n {}_k\, z_k \lambda_k^{(i)}, \tag{24$_a$}$$

$$\xi_i = \sum_1^n {}_k\, z_k \lambda_{k/i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{24$_b$}$$

Deriviamo le (23_a) rapporto ad s, badando alle (I_a) [in cui, a norma delle (21), si scriva $\lambda_n^{(j)}$ per x'_j], e sostituendo nei secondi membri (a derivazione eseguita), in luogo delle $\xi^{(i)}$ (o $\xi^{(l)}$), i valori (24_a). Ove per brevità si ponga

$$(25_a) \qquad p_{hk} = \sum_1^n{}_i \frac{d\lambda_{h/i}}{ds}\lambda_k^{(i)} - \sum_1^n{}_{ijl}\begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix}\lambda_n^{(j)}\lambda_k^{(l)}\lambda_{h/i}, \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n),$$

si è evidentemente condotti alle (II). Però i valori dei coefficienti non mettono in diretta evidenza il carattere emisimmetrico di cui, per le precedenti osservazioni, devono essere necessariamente dotati. Si potrebbe farlo scaturire con trasformazioni materiali, tenendo conto delle (22) e della struttura dei simboli di CHRISTOFFEL. Ma la verificazione si fa più comodamente, notando che le stesse equazioni differenziali nelle z_h, cui siamo testè pervenuti, si devono pur ricavare operando collo stesso criterio, anzichè sulle (23_a), (24_a), (I_a), sulle equivalenti (23_b), (24_b), (I_b). Il calcolo fatto a questo modo porge per i coefficienti p_{hk} le nuove espressioni

$$(25_b) \qquad p_{hk} = \sum_1^n{}_i \frac{d\lambda_h^{(i)}}{ds}\lambda_{k/i} + \sum_1^n{}_{ijl}\begin{Bmatrix} i\,j \\ l \end{Bmatrix}\lambda_n^{(j)}\lambda_{k/l}\lambda_h^{(i)}, \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Dal confronto delle (25_a) colle (25_b) scende l'annunciata riprova formale.

Infatti, sommando l'espressione di p_{hk} data dalle (25_a) con quella di p_{kh} data dalle (25_b), i due $\sum_{ijl}$ si elidono identicamente (come si constata, scambiando in uno di essi gli indici i ed l), e rimane

$$p_{hk} + p_{kh} = \sum_1^n{}_i \left(\frac{d\lambda_{h/i}}{ds}\lambda_k^{(i)} + \frac{d\lambda_k^{(i)}}{ds}\lambda_{h/i}\right),$$

che va pure a zero, in virtù delle (22).

Il sistema lineare (II) a determinante gobbo costituisce un'evidente generalizzazione di quello che si incontra nella cinematica dei corpi rigidi per determinare il moto degli assi solidali, quando è assegnata la velocità angolare. Circa la teoria di questi sistemi differenziali rimandiamo ai lavori già citati nell'introduzione [note ([4]) a ([7])]. Vogliamo tuttavia rilevare qualche proprietà elementare:

1) Eseguendo sulle incognite z_h una sostituzione ortogonale arbitraria (a coefficienti dipendenti comunque da s), il sistema trasformato è dello stesso tipo. La dimostrazione scende subito dall'osservare che l'integrale quadratico $\sum_1^n{}_h z_h^2 = \text{cost.}$ [la cui esistenza è caratteristica pei

sistemi emisimmetrici (II)] conserva inalterata la sua forma quando si sottopongono le z_h a trasformazioni ortogonali.

2) Se la C è geodetica, le equazioni di parallelismo (I_a) sono soddisfatte (cfr. § 7) da $\xi^{(i)} = x'_i = \lambda_n^{(i)}$, e per conseguenza [a tenore delle (22) e (23_a)] le (II) danno

$$z_h = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n-1)\,, \qquad z_n = 1\,. \tag{26}$$

Ciò esige

$$p_{hn} = 0 \qquad (h = 1, 2, \dots, n-1), \tag{27}$$

per qualunque valore di s. Reciprocamente, se sussistono le (27), le equazioni (II) ammettono la soluzione (26), e la C è geodetica.

3) Sempre nell'ipotesi di C geodetica, la riduzione del sistema (II) in base alla conoscenza della soluzione particolare (26) è, per così dire, automatica. Infatti, in virtù delle (27), le prime $n-1$ equazioni (II) sono esenti da z_n, e l'n-esima si riduce a $dz_n/ds = 0$.

4) Qualunque sia C, se si conoscono m direzioni parallele indipendenti, cioè m soluzioni indipendenti delle originarie equazioni (I_a), si sa dalla teoria generale dei sistemi lineari che è possibile una riduzione di m unità. Vogliamo far vedere che la riduzione effettiva si raggiunge qui ancora in modo semplicissimo. Ed ecco come.

Si comincia (sfruttando l'osservazione finale del § 6) col normalizzare le m soluzioni conosciute, deducendone altrettante mutuamente ortogonali (il che si fa con operazioni razionali). Si immagina poi di sostituire all'originaria ennupla di direzioni Ω associata ad ogni punto di C (che comprende la direzione di C e altre $n-1$ ad essa ortogonali) una nuova ennupla ortogonale Ω^*, in cui figurino le nostre m direzioni provenienti per ortogonalizzazione dalle soluzioni conosciute.

I coseni direttori z_h^* (di una direzione qualsiasi) rispetto ad Ω^* risultano legati ai coseni direttori z_h, che si riferiscono alla Ω, da una sostituzione ortogonale. Il sistema (II), trasformato nelle z_h^* (che conserva il tipo emisimmetrico), viene così ad ammettere, per costruzione, m soluzioni distinte del tipo: $n-1$ delle z^* nulle e l'n-esima eguale all'unità. Supposto che questa sia, per le m soluzioni di cui si tratta, rispettivamente z_n^*, z_{n-1}^*, ..., z_{n-m+1}^*, si riconosce subito che deve annullarsi ogni p_{hk} per

$$h = 1, 2, \dots, n-m\,, \quad k = n-m+1\,, \quad n-m+2, \dots, n\,,$$

sicchè le prime $n-m$ equazioni trasformate costituiscono un sistema ridotto (sempre di tipo emisimmetrico) comprendente soltanto le incognite z_1^*, z_2^*, ..., z_{n-m}^*, c. d. d.

12. - Spazi a tre dimensioni.

Per $n = 3$, il sistema (II) è propriamente quello da cui dipende la teoria del triedro mobile ([15]): non c'è che da mettere in luce la diversa interpretazione dei risultati, con riguardo al parallelismo in una V_3, lungo una assegnata curva C. Limitiamoci al caso più semplice, in cui la C è geodetica. Per l'osservazione 3) del § precedente, il sistema differenziale (II) in z_1, z_2, z_3 si riduce in questo caso (a $z_3 = \text{cost.}$, associato) al sistema binario

$$\frac{dz_1}{ds} = p_{12} z_2, \qquad \frac{dz_2}{ds} = p_{21} z_1 .$$

Attesa la relazione $p_{12} + p_{21} = 0$, si ha l'integrale $z_1^2 + z_2^2 = \text{cost.}$; designando la costante con r^2, potremo porre in conformità $z_1 = r \cos \vartheta$, $z_2 = r \sin \vartheta$, con che si ottiene una sola equazione in ϑ

$$\frac{d\vartheta}{ds} = p \qquad\qquad (p = - p_{12} = p_{21}).$$

Come si vede, siamo ricondotti ad una semplice quadratura.

13. - Legame delle p_{hk} coi coefficienti di rotazione di Ricci.

Supponiamo che la C faccia parte di una congruenza (assegnata, ma qualunque) di curve in V_n. In tale ipotesi le $\lambda_n^{(i)}$ e così le $\lambda_{n/i}$ possono risguardarsi come funzioni di $x_1, x_2, ..., x_n$, le quali, lungo C, si riducono, pel tramite delle (3), alle funzioni di s precedentemente considerate (§ 11).

A questa congruenza, di cui fa parte la C, immaginiamo di associarne altre $n - 1$ in modo da costituire un'ennupla ortogonale, coll'unica condizione di identificarsi con Ω nei punti di C; e sieno $\lambda_h^{(i)}(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\lambda_{h/i}(x_1, x_2, ..., x_n)$ i rispettivi sistemi coordinati contravariante e covariante.

Si avrà così, lungo C,

$$\frac{d\lambda_{h/i}}{ds} = \sum_1^n{}_j \frac{\partial \lambda_{h/i}}{\partial x_j} x'_j = \sum_1^n{}_j \frac{\partial \lambda_{h/i}}{\partial x_j} \lambda_n^{(j)} ,$$

([15]) G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 2e édition, t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1914, Chap. II, pp. 27-41.

e la (25_a) (scambiando nel secondo termine i due indici di sommatoria i ed l) potrà essere scritta

$$p_{hk} = \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, \lambda_k^{(i)} \lambda_n^{(j)} \left[\frac{\partial \lambda_{h/i}}{\partial x_j} - \sum_{1}^{n}{}_l \begin{Bmatrix} i\, j \\ l \end{Bmatrix} \lambda_{h/l} \right].$$

Nella quantità in parentesi riconosciamo la derivata covariante ([16]) $\lambda_{h/ij}$, talchè, ricordando le formule di definizione dei *coefficienti di rotazione*,

$$\gamma_{hkn} = \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, \lambda_{h/ij} \lambda_k^{(i)} \lambda_n^{(j)},$$

si è condotti alla conclusione

$$p_{hk} = \gamma_{hkn} \qquad (h, k = 1, 2, ..., n).$$

Ora si sa che $\gamma_{hkn} ds$ ammette, in quanto coefficiente di rotazione, l'interpretazione seguente: Quando l'origine dell'ennupla Ω si sposta di ds lungo C, passando da un punto generico P ad un punto vicinissimo P', la direzione h ([17]) in P' non rimane in generale ortogonale alla direzione k corrispondente al punto P, ma forma con essa l'angolo $\pi/2 - \gamma_{hkn} ds$.

Identica interpretazione compete pertanto a $p_{hk} ds$, e così, anche sotto questo aspetto geometrico, si ravvisa nei sistemi (II) la generalizzazione della teoria elementare del triedro mobile.

14. - Varietà con una congruenza di curve parallele rispetto a qualsivoglia trasversale.

Sia $\xi_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ il sistema coordinato covariante di una congruenza di curve in V_n. Vogliamo provarci a supporre che le curve di questa congruenza siano incondizionatamente parallele, ossia che soddisfino alle condizioni di parallelismo lungo qualsiasi linea C. Scegliendo in particolare per C una linea della congruenza, appare intanto che questa deve essere costituita da geodetiche (§ 7). In generale, tutto si riduce ad esprimere che le equazioni di parallelismo (in una qualunque delle forme loro attribuite), per es. le (I_b), sono verificate in ogni punto di V_n ([18]) e per qualsiasi direzione x_i'. Dacchè, esplicitando le $d\xi_i/ds$,

([16]) Cfr. RICCI e LEVI-CIVITA, loc. cit. ([11]).

([17]) Si vuol dire la direzione definita dai parametri $\lambda_h^{(i)}$ (o dai momenti $\lambda_{h/i}$).

([18]) Si intende, al solito, di quel campo di V_n che si considera, entro cui si suppongono soddisfatte debite limitazioni qualitative.

le (I_b) si scrivono

$$\sum_1^n{}_j\, x'_j \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \sum_1^n{}_l \begin{Bmatrix} i\,j \\ l \end{Bmatrix} \xi_l \right] = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

le ξ_i dovranno verificare le n^2 equazioni

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \sum_1^n{}_l \begin{Bmatrix} i\,j \\ l \end{Bmatrix} \xi_l = 0\,, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{28}$$

le quali stanno ad esprimere che si annulla identicamente il sistema covariante ξ_{ij} primo derivato del sistema ξ_i.

Dalle (28) segue in particolare

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\,,$$

donde apparisce che le ξ_i sono le derivate di una medesima funzione F. Perciò la (13), o, se si vuole, la equivalente

$$\sum_1^n{}_{ij}\, a^{(ij)} \xi_i \xi_j = 1\,,$$

diviene

$$\Delta F = 1 \qquad (\Delta \text{ parametro differenziale di } 1^{\mathrm{o}} \text{ ordine}),$$

mostrandoci che le ipersuperficie $F = \text{cost.}$ (di cui le curve della nostra congruenza costituiscono le traiettorie ortogonali) sono geodeticamente parallele.

Assumiamo per semplicità la funzione F come coordinata x_n, associandole, come coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, $n-1$ integrali indipendenti della equazione

$$\nabla(x_n, \Theta) = 0 \qquad (\nabla \text{ parametro differenziale misto}),$$

con che le ipersuperficie coordinate $x_h = \text{cost.}$ $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$ sono ortogonali alle $x_n = \text{cost.}$ Potremo in conformità ritenere

$$a^{(nj)} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1)\,, \qquad a^{(nn)} = 1\,, \tag{29}$$

nonchè

$$\xi_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1)\,, \qquad \xi_n = 1\,;$$

e le (28) si ridurranno a

$$\begin{Bmatrix} ij \\ n \end{Bmatrix} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

o addirittura, badando alle identità

$$\begin{Bmatrix} ij \\ n \end{Bmatrix} = \sum_1^n {}_h a^{(hn)} a_{ij,h}$$

e alle (29), alle seguenti

$$a_{ij,n} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ove si noti che le (29) equivalgono alle analoghe relative agli elementi reciproci:

$$(29') \qquad a_{nj} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad a_{nn} = 1,$$

e si tenga presente che

$$a_{ij,n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{in}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{nj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_n}\right),$$

risulta in definitiva

$$(28') \qquad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_n} = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Le (29′) e (28′) mettono in evidenza che *il ds^2 assume la forma*

$$(30) \qquad dx_n^2 + d\sigma^2,$$

designando $d\sigma^2$ il quadrato di un arbitrario elemento lineare nelle $n-1$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (a coefficienti indipendenti da x_n).

Siccome ([19]) la forma (30) è caratteristica per le varietà che posseggono una semplice infinità di *superficie geodetiche* ([20]), così riconosciamo che *sono in ogni caso concomitanti per una varietà V_n le due proprietà di ammettere ∞^1 superficie geodetiche e di contenere una congruenza a parallelismo completo.*

([19]) Cfr. J. Hadamard, *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions*, « Bulletin des Sciences Mathématiques », t. XXV, 1901, pp. 37-40.

([20]) Si dicono superficie geodetiche quelle (eventuali) varietà a $n-1$ dimensioni immerse in una V_n, le quali contengono tutta intera la geodetica di V_n, che congiunge due loro punti qualisivogliano.

15. - Differenziali di 2° ordine. Determinazioni invariantive. Lemma di Ricci.

In una data ricerca, sieno fissate le variabili indipendenti, per es. $x_1, x_2, ..., x_n$. Come si sa dal calcolo, è sempre lecito risguardare nulli i differenziali secondi $d^2x_1, d^2x_2, ..., d^2x_n$. Una tale convenzione non ha però carattere invariantivo di fronte ai cambiamenti di variabili. Infatti, se si sostituiscono alle x_i n loro combinazioni indipendenti $\boldsymbol{x}_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, i differenziali secondi

$$d^2\boldsymbol{x}_i = \sum_1^n{}_{jl} \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}_i}{\partial x_j \partial x_l} dx_j dx_l\,,$$

(calcolati in base alle ipotesi $d^2x_i = 0$) risultano in generale diversi da zero.

Se si associa alle variabili una forma differenziale quadratica, riferendosi per es. alla metrica di una V_n (colle notazioni dei §§ precedenti), diviene agevole una caratterizzazione invariantiva. Basta assumere i d^2x_i (non nulli, ma) definiti come segue:

$$d^2x_i + \sum_1^n{}_{jl} \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} dx_j dx_l = 0\,, \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Dalle equazioni delle geodetiche (§ 7), moltiplicate per ds^2, apparisce che tali d^2x_i sono quelli che spettano alle variabili lungo la geodetica spiccata dal punto generico $(x_1, x_2, ..., x_n)$ nella direzione pure generica $(dx_1, dx_2, ..., dx_n)$. Questa interpretazione geometrica assicura a priori che la convenzione suaccennata possiede il voluto carattere invariantivo, senza rendere necessaria una verifica materiale, che si potrebbe del resto effettuare in modo ovvio.

Analogamente per la sovrapposizione di due sistemi indipendenti di incrementi dx_i e δx_i. Si potrebbe porre $d\delta x_i = \delta dx_i = 0$, ma, mentre l'invertibilità degli incrementi d e δ possiede, come facilmente si riconosce, carattere invariantivo, lo stesso non è delle posizioni $d\delta x_i = 0$. Noi le sostituiremo con

$$d\delta x_i + \sum_1^n{}_{jl} \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} dx_l \delta x_j = 0\,, \tag{31}$$

le quali implicano

$$d\delta x_i = \delta dx_i\,, \tag{31'}$$

e contengono come caso particolare, per $d = \delta$, le precedenti espressioni dei d^2x_i.

L'invarianza delle (31), di fronte ai cambiamenti di variabili, può qui ancora essere desunta dalla interpretazione geometrica. Basta osservare che, ponendo materialmente $\delta x_i = \varepsilon\xi^{(i)}$ (con ε costante infinitesima) le (31) si identificano colle (I_a), talchè esprimono come devono alterarsi le δx_i, per effetto dello spostamento $(dx_1, dx_2, ..., dx_n)$, onde definire direzioni parallele fra loro. Questa proprietà invariantiva, oltre che con una verificazione diretta, si potrebbe controllare con un elegante artificio formale accennato da RIEMANN [21] e reso esplicito da WEBER [22].

Dalle (31), tenuto presente che

$$da_{ik} = \sum_1^n{}_j \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} dx_j = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_j (a_{ij,k} + a_{jk,i})\, dx_j = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_{jl} \left[a_{lk}\begin{Bmatrix} i\,j \\ l \end{Bmatrix} + a_{li}\begin{Bmatrix} j\,k \\ l \end{Bmatrix}\right] dx_j\,,$$

scende identicamente

$$d\sum_1^n{}_{ik} a_{ik}\,\delta x_i\,\delta x_k = 0\,, \tag{32}$$

come pure

$$d\sum_1^n{}_{ik} a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k = 0\,.$$

Queste relazioni equivalgono al risultato ben noto di calcolo differenziale assoluto che si annulla identicamente il sistema derivato covariante dei coefficienti a_{ik} della forma fondamentale (lemma di RICCI).

16. - Differenziali d'ordine superiore. Invariante, che compendia i simboli di Riemann, fornendone nel modo più diretto l'espressione esplicita.

Mercè applicazione ripetuta delle (31), rimangono senz'altro definiti (in funzione dei differenziali primi, dei simboli di CHRISTOFFEL, e loro derivate) anche differenziali superiori del tipo $d'\delta dx_i$, $\delta d' dx_i$, il simbolo d' dovendo naturalmente trattarsi alla stessa stregua di d e δ.

Non si può affermare che $d'\delta dx_i$ coincida con $\delta d' dx_i$, anzi il calcolo

---

([21]) Loc. cit. ([3]), p. 381.
([22]) Loc. cit. ([3]), p. 388.

effettivo mostra che ciò non è. Le differenze

$$u^{(i)} = d'\delta\, dx_i - \delta d'\, dx_i \tag{33}$$

posseggono tuttavia la notevole proprietà di costituire un sistema contravariante.

Per dimostrarlo, prendiamo in considerazione un sistema covariante ausiliario p_i, costituito da n funzioni delle x (senza intervento di differenziali) e partiamo dall'osservare che (in quanto il sistema p_i si suppone covariante)

$$\sum_{1}^{n}{}_i\, p_i\, dx_i$$

è un invariante, Lo è quindi (per essere del pari invarianti gli operatori d' e δ) anche la differenza

$$G = d'\delta \sum_{1}^{n}{}_i\, p_i\, dx_i - \delta d' \sum_{1}^{n}{}_i\, p_i\, dx_i$$

$$= d' \sum_{1}^{n}{}_i\, (\delta p_i\, dx_i + p_i \delta\, dx_i) - \delta \sum_{1}^{n}{}_i\, (d' p_i\, dx_i + p_i d'\, dx_i)\,.$$

Sviluppando materialmente, e tenendo presente che, per le (31′),

$$d'\delta p_i = \delta\, d' p_i\,,$$

si ha

$$G = \sum_{1}^{n}{}_i\, p_i (d'\delta\, dx_i - \delta d'\, dx_i) = \sum_{1}^{n}{}_i\, p_i u^{(i)}\,,$$

donde apparisce che anche $\sum_{1}^{n}{}_i\, p_i u^{(i)}$ è un invariante. Da questa invarianza e dall'arbitrarietà delle p_i (che sono funzioni delle x, vincolate soltanto a trasformarsi con legge covariante quando si eseguisce un cambiamento di variabili) segue la contravarianza del sistema $u^{(i)}$ definito dalle (33); c. d. d.

Risulta quindi invariante

$$I = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik} u^{(i)} \delta' x_k\,, \tag{34}$$

rappresentando $\delta' x_k$ un arbitrario sistema di incrementi delle variabili.

Dacchè le (31) porgono

$$d'\delta dx_i = -d' \sum_{1}^{n}{}_{jl} \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} dx_j \delta x_l$$

$$= -\sum_{1}^{n}{}_{jlh} \frac{\partial \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix}}{\partial x_h} d'x_h dx_j \delta x_l - \sum_{1}^{n}{}_{jl} \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} (d' dx_j \delta x_l + dx_j d' \delta x_l) ,$$

$$\delta d' dx_i = -\delta \sum_{1}^{n}{}_{jl} \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} dx_j d'x_l$$

$$= -\sum_{1}^{n}{}_{jlh} \frac{\partial \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix}}{\partial x_h} \delta x_h dx_j d'x_l - \sum_{1}^{n}{}_{jl} \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} (\delta dx_j d'x_l + dx_j \delta d'x_l) ,$$

per sottrazione (dopo aver scambiato h ed l nella prima sommatoria) si ricava

$$u^{(i)} = d'\delta dx_i - \delta d' dx_i$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_{jlh} \left[\frac{\partial \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix}}{\partial x_h} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} jh \\ i \end{Bmatrix}}{\partial x_l} \right] dx_j d'x_l \delta x_h - \sum_{1}^{n}{}_{jl} \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} (d' dx_j \delta x_l - \delta dx_j d'x_l) .$$

Dalle (31) si ha ancora

$$d' dx_j = -\sum_{1}^{n}{}_{ht} \begin{Bmatrix} ht \\ j \end{Bmatrix} dx_h d'x_t , \qquad \delta dx_j = -\sum_{1}^{n}{}_{kt} \begin{Bmatrix} ht \\ j \end{Bmatrix} dx_h \delta x_t ,$$

talchè, scambiando gli indici in modo da poter raccogliere a fattor comune $dx_j d'x_l \delta x_h$, emerge

$$-\sum_{1}^{n}{}_{jl} \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} (d' dx_j \delta x_l - \delta dx_j d'x_l) = \sum_{1}^{n}{}_{jlh} dx_j d'x_l \delta x_h \sum_{1}^{n}{}_{t} \left[\begin{Bmatrix} th \\ i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} jl \\ t \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} tl \\ i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} jh \\ t \end{Bmatrix} \right],$$

e si ottiene infine

$$u^{(i)} = \sum_{1}^{n}{}_{jlh} dx_j d'x_l \delta x_h \{ji, lh\} , \tag{35}$$

designandosi con

$$(36)\qquad \{ji, lh\} = \frac{\partial \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix}}{\partial x_h} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} jh \\ i \end{Bmatrix}}{\partial x_l} + \sum_1^n{}_t \left[\begin{Bmatrix} jl \\ t \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} th \\ i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} jh \\ t \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} tl \\ i \end{Bmatrix} \right],$$

i simboli di RIEMANN di 2ª specie.

Ove si passi a quelli di 1ª specie col porre

$$(37)\qquad a_{jk,lh} = \sum_1^n{}_i\, a_{ik}\{ji, lh\},$$

la espressione (34) di I, in base alle (35), diviene

$$(34')\qquad I = \sum_1^n{}_{jlhk}\, a_{jk,lh}\, dx_j\, d'x_l\, \delta x_h\, \delta' x_k$$

e mette direttamente in evidenza il carattere covariante dei simboli (37). Se non erro, è questo il modo più rapido per arrivarvi. Quanto alle proprietà dei simboli stessi, compendiabili nelle formule

$$a_{jk,lh} = -\, a_{jk,hl}\,,$$

$$a_{jk,lh} = \quad a_{lh,jk}\,,$$

non resta che riportarsi alla trattazione ordinaria, desumendole (la prima immediatamente, la seconda con qualche trasformazione) dalle formule di definizione.

Dobbiamo invece rivolgere la nostra attenzione alla interpretazione geometrica dell'invariante I nel caso particolarmente importante in cui i differenziali indipendenti si riducono a due, coincidendo d' con d e δ' con δ.

17. - Parallelogrammoidi. Base e soprabase. Sviluppo delle coordinate dei vertici a partire dalla base.

Sia PQ un generico arco di geodetica nella nostra V_n. Dai punti P e Q immaginiamo spiccate due altre geodetiche in direzioni parallele. Esse formeranno (§ 8) con PQ uno stesso angolo ψ. Si assumano su queste geodetiche due archi eguali

$$PP' = QQ' = ds \,,$$

e si congiungano anche P' e Q' con un arco di geodetica. Si ottiene così un quadrangolo geodetico che chiameremo *parallelogrammoide*, designandone i due lati opposti PQ e $P'Q'$ come *base* e *soprabase*.

Indicheremo con $x_i^{(P)}$, $x_i^{(Q)}$, $x_i^{(P')}$, $x_i^{(Q')}$ le coordinate dei quattro vertici P, Q, P', Q'; con $\xi_P^{(i)}$, $\xi_Q^{(i)}$ i parametri di direzione delle due geodetiche parallele nei loro punti di origine; con $\left\{ {ij \atop l} \right\}_P$, $\left\{ {jl \atop i} \right\}_Q$ i valori dei simboli di CHRISTOFFEL in questi stessi punti.

Dalle equazioni delle geodetiche, a meno di termini d'ordine superiore al secondo in ds, si ha

$$\text{(38)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x_i^{(P')} &= x_i^{(P)} + ds\,\xi_P^{(i)} - \frac{1}{2} ds^2 \sum_1^n{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\}_P \xi_P^{(j)} \xi_P^{(l)} \,, \\ x_i^{(Q')} &= x_i^{(Q)} + ds\,\xi_Q^{(i)} - \frac{1}{2} ds^2 \sum_1^n{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\}_Q \xi_Q^{(j)} \xi_Q^{(l)} \,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \right.$$

Designiamo con δx_i le differenze $x_i^{(Q)} - x_i^{(P)}$, e in generale con δf il divario fra le determinazioni di un qualsiasi elemento (numerico o geometrico) f, passando da P a Q. Avremo per sottrazione dalle (38)

$$x_i^{(Q')} - x_i^{(P')} = \delta x_i + ds\,\delta\xi^{(i)} - \frac{1}{2} ds^2\, \delta \sum_1^n{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\} \xi^{(j)} \xi^{(l)} \,.$$

Siccome, per costruzione, ds non si altera nel passaggio da P a Q, così, ritenendolo infinitesimo, ponendo per brevità

$$dx_i = \xi_P^{(i)} ds \,,$$

e badando alla (31) per $\delta = d$, potremo anche scrivere

$$\text{(39)} \qquad Dx_i = x_i^{(Q')} - x_i^{(P')} = \delta x_i + \delta dx_i + \tfrac{1}{2} \delta d^2 x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Di qui appare che le differenze Dx_i delle coordinate omologhe dei punti P' e Q' sono (colla convenuta approssimazione rispetto a ds) di prim'ordine rispetto alla variazione δ: val quanto dire che, indicando con δs l'arco PQ e trattandolo come un infinitesimo (indipendente da ds), le differenze Dx_i risultano anch'esse infinitesime di primo ordine (almeno) rispetto a δs. Le (39) ne forniscono pertanto una espressione che è esatta:

fino al secondo ordine rispetto a ds;

fino al primo ordine rispetto a δs.

Dal significato dei simboli d e δ, quali figurano nella (39), scende immediatamente che, come il d^2, anche i δd e δd^2 si esplicitano in base alla (31). Ed è appena necessario avvertire che, a calcoli eseguiti, tutte le funzioni del posto vanno riferite al punto P.

18. - Lunghezza della soprabase. Curvatura.

Rappresentiamo con a'_{ik} i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare in P'. Atteso il comportamento testè rilevato delle Dx_i, potremo risguardare

$$\sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a'_{ik} Dx_i Dx_k \tag{40}$$

come *espressione del quadrato della distanza* $\overline{P'Q'}^2$, *a meno di termini d'ordine superiore al secondo, rispetto sia a* ds *che a* δs.

Giova riportare (colla stessa approssimazione) anche i valori a'_{ik} al punto P. All'uopo basta sviluppare lungo la geodetica PP', trascurando i termini in ds^3; si ha quindi

$$a'_{ik} = a_{ik} + da_{ik} + \frac{1}{2} d^2 a_{ik}\,. \tag{41}$$

Un analogo trasporto si può mettere in evidenza in una generica Dx_i, aggiungendo e togliendo il termine $d^2\delta x_i/2$ (e ricordando che $\delta dx_i = d\delta x_i$). Le (39) divengono in conformità

$$Dx_i = D'\delta x_i - \frac{1}{2} v^{(i)}\,, \tag{39'}$$

dove

$$D'\delta x_i = \delta x_i + d\delta x_i + \frac{1}{2} d^2\delta x_i\,, \tag{42}$$

$$v^{(i)} = d\,\delta\, dx_i - \delta\, d^2 x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{43}$$

Come si vede, le $v^{(i)}$ sono di terz'ordine (secondo in ds e primo in δs).

Perciò la materiale sostituzione nella (40), a meno di termini d'ordine complessivo superiore al quarto, dà

$$\overline{P'Q'}^2 = \sum_{ik}^{n}{}_1 \, a'_{ik} D'\delta x_i \, D'\delta x_k - \sum_{ik}^{n}{}_1 \, a'_{ik} v^{(i)} D'\delta x_k \, .$$

In base alle (41), (42), e colla stessa approssimazione, il primo sommatorio può essere posto sotto la forma

$$\delta s^2 + d\delta s^2 + \frac{1}{2} d^2 \delta s^2 ,$$

dove

$$\delta s^2 = \overline{PQ}^2 = \sum_{ik}^{n}{}_1 \, a_{ik} \, \delta x_i \, \delta x_k \; ;$$

e il secondo sommatorio può essere ridotto a

$$J = \sum_{ik}^{n}{}_1 \, a_{ik} v^{(i)} \, \delta x_k \, .$$

Ora, in virtù della (33), $d\delta s^2$ si annulla identicamente; lo stesso avviene quindi di $d^2\delta s^2$. Rimane in conformità

$$\overline{P'Q'}^2 = \overline{PQ}^2 - J , \tag{44}$$

ma resta da attribuire ad J la sua espressione definitiva. Questa risulta dalla circostanza che, a norma delle (43), J si può considerare come un caso particolare dell'invariante I definito dalla (34): basta assumervi d' coincidente con d e δ' con δ. Si ha perciò dalla (34')

$$J = \sum_{jlhk}^{n}{}_1 \, a_{jk,lh} \, dx_j \, dx_l \, \delta x_h \, \delta x_k \, . \tag{45}$$

Siamo ora in grado di fornire una caratterizzazione intrinseca della curvatura sotto la forma geometrica seguente:

Costruito in V_n un parallelogrammoide infinitesimo $PQP'Q'$, si faccia il rapporto

$$K = \frac{\overline{PQ}^2 - \overline{P'Q'}^2}{(ds\delta s \sin\psi)^2} \tag{46}$$

fra la differenza dei quadrati della base e della soprabase e il quadrato dell'area del parallelogrammoide [23]. *Questo rapporto, cioè, in virtù della* (44),

$$K = \frac{J}{(ds\,\delta s \sin\psi)^2}, \tag{47}$$

costituisce la curvatura riemanniana di V_n in P secondo la giacitura del parallelogrammoide. La coincidenza colla espressione ordinaria [24] scende dalla (45).

Una volta riconosciuto che K dipende soltanto dal punto P e dalla giacitura, si ha dalla (46) il corollario seguente: Tutti i parallelogrammoidi equivalenti che insistono sulla stessa base (e appartengono alla stessa giacitura) hanno soprabasi di eguale lunghezza.

Vorrei ancora rilevare, dal punto di vista sistematico, che il procedimento ora svolto, oltre a stabilire una nuova proprietà della curvatura riemanniana, presenta sulla trattazione ordinaria il vantaggio di evitare qualche sviluppo formale. Di solito infatti si definisce, in uno dei modi segnalati da GAUSS, la curvatura delle V_2; e si passa alle V_n, facendo intervenire le V_2 costituite dalle geodetiche di una stessa giacitura. Si richiede quindi un discreto calcolo per riconoscere che la curvatura riemanniana di queste V_2 è data dalla (47).

Se invece si adotta per K la definizione geometrica (46), da un lato riesce più espressiva la traduzione analitica che porta alla (47); e dall'altro, valendo naturalmente la medesima definizione anche per $n = 2$, appare manifesto che la curvatura di V_n desunta da un generico parallelogrammoide coincide con quella di qualsivoglia V_2, la quale (al limite) contenga lo stesso parallelogrammoide.

NOTA CRITICA

Già rilevammo nel § 15 che le espressioni (31)

$$d\,\delta x_i + \sum_{jl}^{n} {}_{1} \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} dx_j \delta x_l = 0 ,$$

dei differenziali di 2° ordine non differiscono da quelle cui si perviene esplicitando la comprensiva definizione di RIEMANN.

---

[23] Più precisamente, di qualunque pezzo di superficie a due dimensioni avente il parallelogrammoide per contorno e tendente a zero con esso.

[24] L. BIANCHI, loc. cit. [1], pp. 341-342.

Dallo stesso paragrafo risulta altresì che, con queste espressioni dei differenziali secondi, si ha identicamente (lemma di RICCI):

$$\delta ds^2 = d\delta s^2 = d\Phi = \delta\Phi = 0\,, \tag{48}$$

dove

$$\Phi = \sum_{ik}^{n}{}_1 \, a_{ik}\, dx_i\, \delta x_k\,,$$

e ds^2, δs^2 stanno, ben si intende, per

$$\sum_{ik}^{n}{}_1 \, a_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad \text{e} \qquad \sum_{ik}^{n}{}_1 \, a_{ik}\, \delta x_i\, \delta x_k\,,$$

rispettivamente.

In questa condizione di cose non sembra ambiguo il significato da attribuire al trinomio considerato da RIEMANN:

$$R = \delta^2 ds^2 - 2d\delta\Phi + d^2\delta s^2\,,$$

e un tale significato, in virtù della (48), implica necessariamente $R = 0$.

RIEMANN afferma invece ([25]): « Haec expressio [cioè R] invenietur $= J$ » [avendo J il valore (45)]. WEBER, nei suoi chiarimenti, si diffonde sul modo di introdurre i differenziali secondi ([26]), ma, dopo averne ricavata l'espressione esplicita, dice semplicemente ([27]): « woraus man leicht den Ausdruck erhält $R = J$ ».

Probabilmente, nella R di RIEMANN, c'è soltanto un qualche vizio di scrittura, che ne vela il concetto. Mi lusingo di aver sostanzialmente ricostruito tale concetto, ma non potei aggiustare il simbolo. Se la cosa è fattibile, sarà bene rendere, anche su questo particolare, piena giustizia al genio di RIEMANN.

Terminerò con una osservazione circa il calcolo della curvatura con riferimento a speciali variabili, che è indicato da RIEMANN ([28]) e sviluppato da WEBER ([29]). Ecco intanto di che si tratta.

([25]) Loc. cit. ([2]), p. 381.

([26]) Aggiungendo, senza alcuna giustificazione, le condizioni supplementari

$$d^2\delta s^2 = \delta^2 ds^2 = -2d\delta\Phi\,.$$

In virtù delle (48) (e semprechè si debbano leggere le formule come effettivamente sono scritte), va tutto a zero.

([27]) Loc. cit. ([2]), p. 388.

([28]) Loc. cit. ([2]), p. 261.

([29]) Loc. cit. ([2]), pp. 384-387.

Si scelgano coordinate $x_1, x_2, ..., x_n$ tali che, *in un determinato punto P*, si annullino tutti i simboli $\begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix}$ (cosa sempre possibile, come è ben messo in evidenza da WEBER). Si considerino due sistemi indipendenti di differenziali dx_i, δx_i, risguardando nulli tutti i differenziali secondi d^2x_i, $d\delta x_i$, δdx_i, $\delta^2 x_i$. Dicansi P' e Q i punti di coordinate x_i+dx_i, $x_i+\delta x_i$; a'_{hk} i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare in P'. Posto in particolare

$$(\delta s^2)_{P'} = \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, a'_{hk}\, \delta x_h\, \delta x_k\,,$$

si applichi alle a' lo sviluppo di TAYLOR rispetto agli incrementi d, fino al secondo ordine incluso. Con tale approssimazione si ha

$$(\delta s^2)_{P'} = \delta s^2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{hkjl} \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_j\, \partial x_l}\, dx_j\, dx_l\, \delta x_h\, \delta x_k\,,$$

il δs^2 e le derivate seconde riferendosi, ben si intende, a P. Come mostra WEBER, per il modo con cui sono state fissate le variabili, intercedono speciali relazioni fra i valori delle derivate seconde delle a_{hk} in P. Tenendone conto, con qualche trasformazione, si trova

$$(\delta s^2)_{P'} = \delta s^2 + \frac{1}{3}\sum_{1}^{n}{}_{hkjl} \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_j\, \partial x_l} + \frac{\partial^2 a_{jl}}{\partial x_h\, \partial x_k} - \frac{\partial a_{hj}}{\partial x_k\, \partial x_l} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_h\, \partial x_j}\right] dx_j\, dx_l\, \delta x_h\, \delta x_k\,.$$

Il sommatorio si può risguardare come l'espressione, che, in base alla formula (45), assume $-J$, quando si adottano le variabili x particolarizzate come sopra si è detto.

Perciò, badando alla (47), ricaviamo

$$\text{(49)} \qquad \frac{(\delta s^2)_{P'} - \delta s^2}{(ds\, \delta s \sin \psi)^2} = -\frac{1}{3} K\,,$$

che RIEMANN, nel passo citato, enuncia a parole (moltiplicando ambo i membri per 4, onde mettere in evidenza nel denominatore l'area del triangolo $PP'Q$).

Vengo finalmente alla mia osservazione.

Detto Q^* l'estremo dell'elemento lineare $(\delta s)_{P'}$ (corrispondente agli incrementi δx_i), la (49) si scrive

$$\frac{\overline{P'Q^*}^2 - \overline{PQ}^2}{(ds\,\delta s \sin \psi)^2} = -\frac{1}{3} K; \tag{49'}$$

mentre la (46) (cambiata di segno) porge

$$\frac{\overline{P'Q'}^2 - \overline{PQ}^2}{(ds\,\delta s \sin \psi)^2} = -K. \tag{46'}$$

I secondi membri stanno, come si vede, nel rapporto di 1 a 3. La non coincidenza è manifestamente dovuta al fatto che il punto Q' (quarto vertice del parallelogrammoide), cui si perviene col procedimento invariante, è ben distinto dal punto Q^* di RIEMANN, definito analiticamente con riferimento a speciali variabili.

Per localizzare il divario sulle formule, giova riferire (come è naturalmente permesso, dato il carattere invariantivo) anche il nostro procedimento alle speciali variabili di RIEMANN. Le (31) danno allora, in quanto si riferiscono al punto P,

$$d^2 x_i = d\delta x_i = \delta d x_i = \delta^2 x_i = 0\ ;$$

ma non ne segue che debbano annullarsi nello stesso punto anche i differenziali superiori, come $\delta d^2 x_i$, $d^2 \delta x_i$, ecc. Il calcolo di RIEMANN è invece basato sull'ipotesi che si annullino tutti i differenziali d'ordine superiore al primo: ipotesi anch'essa legittima, ma *non* dotata di carattere invariantivo (di fronte ai cambiamenti di variabili). Non deve dunque sorprendere che i risultati sieno diversi; si rileverà piuttosto la fortuita analogia delle formule (49') e (46'), i cui secondi membri differiscono soltanto per un fattore numerico.

Padova, novembre 1916.

INDICE

II.

SULLE LINEE D'AZIONE DEGLI INGRANAGGI

« Atti e Mem. Acc. di Sc., lett. ed arti in Padova », vol. XXXIII (1917), pp. 1-8.

È ben noto il così detto metodo epicicloidale per il tracciamento simultaneo di due profili coniugati, metodo che trova la sua più cospicua applicazione nella pratica costruttiva dei denti di due ruote d'ingranaggio.

Mi propongo di mostrare che una semplice modificazione, anzi un caso limite, di questo metodo consente un analogo tracciamento della linea d'azione, detta anche linea dei contatti o d'ingranamento (1): la linea insomma, che è (rispetto ad un osservatore fisso) luogo dei punti in cui vengono successivamente in contatto i denti delle due ruote.

Per maggior chiarezza, premetterò un richiamo del metodo epicicloidale, seguendo le litografie delle mie lezioni di Meccanica razionale.

1. - Generalità.

Siano l e λ due curve piane qualisivogliono (dotate di tangente e di curvatura finita nei tratti che si prendono in considerazione). Se l rotola senza strisciare su λ, rimane individuato un moto rigido, di cui l e λ sono traiettorie polari. Un generico profilo c solidale con l occupa in questo movimento una semplice infinità di posizioni (rispetto alla curva fissa λ), le quali — ammesso che sieno soddisfatte ovvie condizioni qualitative — sono inviluppate da una curva γ.

È questo il profilo coniugato di c nel movimento di cui si tratta; risultando reciprocamente c coniugato di γ nel moto inverso, in quanto

---

(1) Cfr. per es. F. REULEAUX, *Cinematica teorica* (tradotta da G. COLOMBO), Milano, Hoepli, 1874, § 32; D. TESSARI, *La teoria degli ingranaggi*, Torino, Bocca, 1902; od anche il capitolo *Cinématique appliquée aux mécanismes* nel t. I del « Cours de mécanique » del sig. LECORNU, Paris, Gauthier-Villars, 1914.

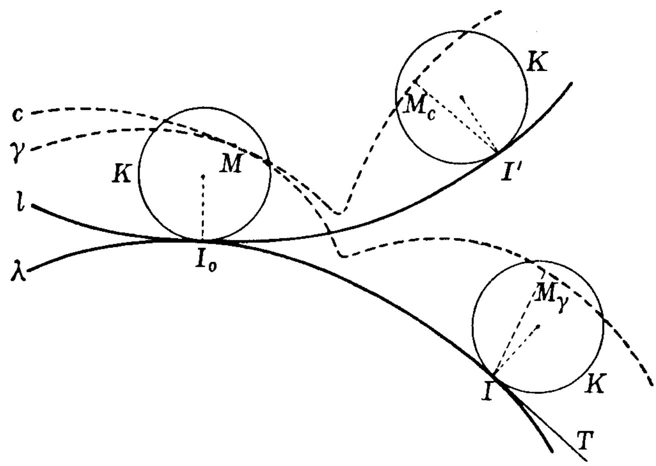
c costituisce a sua volta l'inviluppo delle infinite posizioni che assume il profilo γ rispetto ad l.

La stessa definizione della curva γ come inviluppo delle c dà modo di descriverla per punti, note l, λ, e c. Ma in molti casi si raggiunge più comodamente lo scopo per via indiretta, ricorrendo ad un procedimento simmetrico che genera, per così dire automaticamente, coppie di profili coniugati, quando sono date l e λ. Ecco in qual modo.

2. - Metodo epicicloidale. Regola.

Si sceglie a piacimento una curva *ausiliaria* K e la si fa rotolare senza che strisci (si intende come figura invariabile) sia su l che su λ.

Un punto qualunque M solidale con K descrive nel primo rotolamento un arco di curva c, nel secondo un arco di curva γ, che risultano coniugati, corrispondendosi quei punti M_c ed M_γ che costituiscono le posizioni di M (nella figura mobile e nel piano del moto) dopo un eguale rotolamento di K su l e su λ, a partire da un punto I_0, in cui l e λ si trovano in contatto (cfr. la figura).



3. - Dimostrazione.

La dimostrazione è pressochè immediata. Fissiamo infatti la nostra attenzione su due posizioni di K (riferite l'una ad l, l'altra a λ), le quali si deducono dalla iniziale mediante un eguale rotolamento su l e su λ. Siano I' ed I i rispettivi punti di contatto.

Per il teorema di CHASLES, $I'M_c$ e IM_γ risultano rispettivamente normali alle traiettorie di M nei due casi, cioè alle curve c e γ. Consideriamo d'altra parte il movimento, del quale vogliamo assegnare coppie di profili coniugati, cioè il rotolamento di l su λ, a partire da quella posizione di l in cui il contatto ha luogo in I_0. Quando questo si è portato in I, per l'eguaglianza dei due archi I_0I, I_0I', è proprio I' che va a cadere in I. Con ciò la curva K tangente in I' ad l viene necessariamente a sovrapporsi alla curva congruente (desunta per analogo rotolamento) tangente in I alla λ. Coincidono quindi in particolare M_c ed M_γ, nonchè le normali $I'M_c$, IM_γ. Le curve c e γ hanno pertanto costantemente la stessa normale, e quindi anche la stessa tangente nel punto comune, proprietà questa caratteristica di due profili coniugati; c. d. d.

4. - Corollario.

Supponiamo in particolare che la curva l si riduca ad una circonferenza infinitesima, assimilabile all'unico punto I' percorrente λ. In tal caso il rotolamento di K su l si presenta come uno scorrimento della curva (rigida) K in modo da passare sempre per lo stesso punto I'. In verità, ciò non basta ancora a determinare il moto di K, nè per conseguenza quello del punto solidale M. Ma, se si bada alla dimostrazione del n. prec., apparisce che quanto importa individuare (in corrispondenza ad una generica posizione di K) è la posizione M_c di M rispetto alla tangente in I' comune a l e a K. Ne viene, per l infinitesimo, che lo scorrimento di K attraverso I' si specifica, rispetto al riferimento che ci interessa, *colla condizione di toccare costantemente una data retta.* Ecco come rimane definito il luogo c d'ogni punto M solidale con K.

Ricomponiamo adesso il fenomeno, considerando insieme γ e c. La curva γ è il profilo generato da M per rotolamento di K su λ, e γ è l'inviluppo delle posizioni di c. Nel moto inverso, c è l'inviluppo delle posizioni di γ, e questa circostanza può essere espressivamente interpretata, in relazione alla genesi di γ mediante K. Basta pensare che il punto in cui γ tocca il suo inviluppo c è (come si ricordò in generale al n. prec.) piede della normale abbassata su γ dal centro istantaneo I. In I la tangente a K coincide colla tangente a λ. Perciò *c si presenta come luogo* (riferito ad I e alla tangente IT a λ in esso punto) *dei piedi delle normali condotte da I al profilo γ.*

5. - Applicazione alle linee d'azione.

Riprendiamo la considerazione d'un moto piano qualsiasi. Dicesi linea d'azione (c, γ) il luogo delle posizioni in cui viene successivamente a trovarsi il punto di contatto fra due profili coniugati c, γ, rispetto al contatto polare, con che si intende rispetto al centro istantaneo I e alla tangente IT che le due traiettorie polari hanno ivi in comune.

Se si osserva qui ancora che il punto di contatto fra c e γ è piede della normale abbassata da I su γ, si ricava senz'altro dal n. prec. il seguente complemento del metodo epicicloidale:

Ogniqualvolta si conoscono la curva ausiliaria K e il punto solidale M che servono alla descrizione continua di due profili coniugati c e γ, si può analogamente procurarsi anche la linea d'azione (c, γ), facendo scorrere la stessa K in modo da passare per un punto fisso I toccandovi una retta pur fissa IT: la traiettoria di M in tale scorrimento è precisamente la (c, γ) cercata.

6. - Caso delle ruote dentate.

Siano R, R' due ruote dentate di centri O, O', costituenti un ingranaggio piano. Supposto costante il rapporto delle velocità angolari (con cui le due ruote ruotano attorno ai rispettivi centri), il moto relativo è notoriamente epicicloidale, rotolando l'una sull'altra le così dette circonferenze primitive delle due ruote, che rappresentano le traiettorie polari l e λ del caso generale.

Rispetto ad un osservatore fisso, il centro istantaneo I cade sempre in uno stesso punto della retta dei centri; la tangente IT in I alle traiettorie polari è così essa stessa una retta fissa (perpendicolare alla OO'), talchè ogni linea d'azione (c, γ) si trova riferita ad un osservatore fisso.

Particolarmente interessante è il caso in cui c e γ costituiscono i profili (sempre coniugati per ruote costruite a dovere) dei denti delle due ruote. Il nome di linea d'azione è sorto appunto da questo caso concreto, in cui la (c, γ) si presenta come luogo dei punti nei quali, venendo i denti in presa, si effettua una trasmissione di azione dalla ruota conducente alla ruota condotta.

L'enunciato del n. precedente ci offre un criterio assai comodo per caratterizzare le linee d'azione nei tipi più usitati di ingranaggi, pei quali i profili dei denti rispondono effettivamente a genesi epicicloidali molto semplici.

7. - Esempi.

Negli ingranaggi detti *epicicloidali*, i denti di ciascuna ruota sono costituiti ([2]) da due archi raccordati: il fianco (porzione interna alla circonferenza primitiva) è un arco di ipocicloide, la costa un arco di epicicloide, l'uno e l'altro aventi per base la circonferenza primitiva. La curva K del n. 5 è dunque, per entrambi gli archi, una circonferenza cui appartiene il punto generatore M. Nelle ruote d'assortimento, le due circonferenze (quella che definisce i fianchi rotolando internamente alla circonferenza primitiva e l'altra che definisce le coste rotolando esternamente) sono eguali. Ma nulla vieta a priori che possano essere diverse. Comunque, per la parte di dente che proviene da ognuna di esse, la linea d'azione (luogo di M, quando K scorre toccando in un punto fisso una retta fissa) si confonde colla stessa K, ossia, in pratica, con un suo arco convenientemente limitato. Perciò l'intera linea d'azione si compone di due archi (raccordati) di quelle circonferenze (eguali negli ingranaggi d'assortimento), che fungono da rullette per la descrizione dei fianchi e delle coste dei denti.

Questa stessa conclusione vale naturalmente anche per gli ingranaggi *a fianchi rettilinei*, che rientrano come casi particolari negli epi-ipocicloidali: basta che la K generatrice dei fianchi di ciascuna ruota (e quindi anche delle coste della ruota compagna) abbia per diametro il raggio della circonferenza primitiva della ruota medesima; allora risulta appunto rettilinea la traiettoria d'ogni punto M di K, nel rotolamento interiore.

Meno semplicemente si applicherebbe la genesi epicicloidale agli ingranaggi *a evolvente di circolo*, in cui il profilo d'ogni dente è un arco di evolvente d'una circonferenza concentrica e interna alla primitiva. Viceversa, risulta immediatamente dalla definizione che la normale comune a questo tipo di profili coniugati condotta dal centro istantaneo I è una ([3]) retta fissa. La linea d'azione è dunque un segmento di tale retta.

([2]) Si intende, per la porzione di profilo che effettivamente viene utilizzata nella trasmissione del moto in un determinato senso. Se si tratta di ingranaggi reciproci, alla detta porzione fa ordinariamente riscontro un'altra, simmetrica rispetto al raggio mediano del dente, la quale prende il posto della prima, quando si inverte la rotazione della ruota conducente (e quindi anche della ruota condotta).

([3]) Una soltanto per la parte di profilo che ha praticamente interesse. Considerandolo indefinito, gli si possono condurre da I due normali (entrambe fisse, per qualunque posizione della ruota).

III.

SULLA ESPRESSIONE ANALITICA SPETTANTE AL TENSORE GRAVITAZIONALE NELLA TEORIA DI EINSTEIN

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXVI$_1$ (1º sem. 1917), pp. 381-391.

Nella presente Nota, dopo aver richiamato, per comodo del lettore, l'idea direttiva e l'impostazione matematica della relatività generale, mostro come alcune identità (fra le derivate dei simboli di RIEMANN) scoperte dal BIANCHI offrano un sicuro criterio per introdurre il così detto tensore gravitazionale. Sotto l'aspetto analitico si tratta di un sistema doppio simmetrico A_{ik} $(i, k = 0, 1, 2, 3)$, i cui dieci elementi caratterizzano completamente il contributo della gravitazione nel comportamento meccanico locale, individuando sia gli sforzi specifici che il flusso e la densità di energia (di origine gravitazionale). Il significato meccanico del sistema implica una struttura analitica dotata di convenienti proprietà invariantive di fronte ad eventuali trasformazioni di coordinate. Tale è in effetti la forma (covariante) delle A_{ik} fornita dal criterio suaccennato, la quale inoltre dà luogo ad una estensione particolarmente espressiva del principio di D'ALEMBERT.

L'idea di un tensore gravitazionale fa parte della grandiosa costruzione di EINSTEIN. Però la definizione propostane dall'Autore non può risguardarsi definitiva. Anzi tutto, dal punto di vista matematico, le fa difetto quel carattere invariantivo che dovrebbe invece necessariamente competerle secondo lo spirito della relatività generale. E anche più grave è il fatto, avvertito con fine intuito dallo stesso EINSTEIN (¹), che se ne trae una conseguenza fisica palesemente inaccettabile a proposito delle

(¹) *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*, « Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Ak. der Wiss. », 1916, p. 696.

onde di gravitazione. Per questo punto egli trova tuttavia un accomodamento nella teoria dei quanti.

In verità la spiegazione è meno riposta: tutto dipende dalla non corretta forma assunta per il tensore gravitazionale. Vedremo che colla nostra determinazione scompare automaticamente ogni possibilità di paradosso.

1. - Generalità.

Nella meccanica ordinaria, lo spazio fisico si considera rigorosamente euclideo, e la rappresentazione analitica dei fenomeni è, per così dire, subordinata alla forma differenziale quadratica (ternaria) dl^2 che esprime il quadrato dell'elemento lineare.

Nella teoria della relatività in senso stretto, si seguita a risguardare lo spazio come euclideo; ma le equazioni della meccanica hanno carattere invariantivo, non più rispetto alla forma dl^2, sibbene rispetto ad una forma quadernaria ds^2 che involge anche il tempo t ed ha notoriamente l'espressione

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dl^2 \tag{1}$$

(c costante universale da interpretarsi come velocità della luce nel vuoto).

Ben si intende che, con referenza a coordinate cartesiane, si ha qui ancora

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \,.$$

Nella relatività generale — nuova e più comprensiva concezione delle leggi naturali, dovuta anch'essa ad EINSTEIN — spazio e tempo non costituiscono una semplice localizzazione, inerte e immutabile, dei fenomeni, ma ne sono affetti e reagiscono per guisa che il ds^2 cambia natura.

Al posto di (1), si ha una forma fondamentale

$$ds^2 = \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k \,, \tag{2}$$

la quale, con opportuna scelta dei parametri x_0, x_1, x_2, x_3, si riduce esattamente alla forma (1) nel caso limite in cui manchi qualsiasi azione fisicamente percettibile (presenza o moto di materia, di elettricità, o più generalmente di qualche forma di energia). Di regola, la (2), pur essendo quantitativamente molto prossima al tipo (1), deve ritenersi non data *a priori* ma intrinsecamente definibile in base alle circostanze di fatto. Fra queste figura naturalmente anche la gravitazione universale, cui compete, secondo EINSTEIN, il privilegio di dipendere esclusivamente dai coefficienti g_{ik} (e loro derivate).

Le equazioni tutte della nuova meccanica hanno carattere invariantivo rispetto a quella ben determinata forma (2) che conviene al caso specifico. In questa nuova meccanica la teoria di una data classe di fenomeni comprende necessariamente, accanto a relazioni le quali hanno riscontro nelle precedenti impostazioni (classica e relativistica della prima maniera), ulteriori relazioni destinate a caratterizzare il ds^2. Tali sono le equazioni gravitazionali di EINSTEIN (in numero di 10 come i coefficienti g_{ik}), che considereremo al § 6.

2. - Tensore energetico.

La meccanica dei sistemi continui — anche secondo lo schema ordinario — porta a ritenere ben conosciuto un fenomeno meccanico (che si svolge in un certo campo di valori di x, y, z, t), allorquando sono assegnati (in funzione del posto e del tempo) i seguenti elementi: sforzi, quantità di moto, flusso e densità di energia.

Nella meccanica relativistica, il vettore $\boldsymbol{q}$, che rappresenta la densità di quantità di moto, è legato al flusso di energia $\boldsymbol{\chi}$ dalla relazione

$$\boldsymbol{q} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{\chi},$$

e conviene far capo all'unico vettore

$$-\mathfrak{f} = c\boldsymbol{q} = \frac{1}{c}\boldsymbol{\chi}, \tag{3}$$

che si può risguardare come flusso di energia durante un secondo di luce (intervallo di tempo entro cui la luce percorre l'unità di lunghezza). Notiamo del resto, a scanso di equivoci, che non intendiamo con ciò di fissare l'unità di tempo: essa rimane generica al pari delle altre due unità fondamentali.

Poniamo, per brevità di scrittura,

$$y_0 = ct, \quad y_1 = x, \quad y_2 = y, \quad y_3 = z, \tag{4}$$

e introduciamo, con referenza a queste variabili, un tensore simmetrico T_{ik} così definito: Per $i, k = 1, 2, 3$, T_{ik} è la componente secondo l'asse delle y_k dello sforzo specifico che si esercita sopra un elemento superficiale normale all'asse delle y_i (²) (o viceversa, scambiando i con k); $T_{i0} = T_{0i}$ si identifica colla componente $\mathfrak{f}_i$ del vettore $\mathfrak{f}$; infine T_{00} è la densità dell'energia.

3. - Riferimento a coordinate qualunque.

Se alle y_i si sostituiscono quattro combinazioni (indipendenti) qualisivogliano x_0, x_1, x_2, x_3, la forma

$$ds^2 = dy_0^2 - (dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2) \tag{1'}$$

assume l'aspetto generale (2). Varranno tuttavia le restrizioni qualitative

$$g_{00} > 0\,, \qquad g_{ii} < 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{5}$$

ogni qualvolta il parametro x_0 (variando da solo) è atto a rispecchiare la nozione intuitiva di tempo, mentre le rimanenti x_i sono in qualche modo interpretabili come effettive coordinate di spazio.

Ciò ritenuto, *per tensore energetico in coordinate qualunque* x_i *si intenderà quel sistema covariante doppio* T_{ik}, *che, riferito alle* y, *si specifica nel modo indicato.*

Dalle stesse formule di covarianza con cui rimangono definiti i vari elementi del sistema T_{ik}, si desume, per ognuno di essi, una interpretazione in coordinate generali x. E precisamente si trova (³) che:

$$\frac{T_{ik}}{\sqrt{g_{ii}g_{kk}}} = \frac{T_{ki}}{\sqrt{g_{ii}g_{kk}}}\,, \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

rappresenta la componente (ortogonale) secondo la linea x_i (cioè quella su cui varia la sola x_i) dello sforzo che si esercita sopra un elemento superficiale perpendicolare alla linea x_k (o viceversa, scambiando i con k):

$$\frac{T_{i0}}{\sqrt{-g_{00}g_{ii}}} = \frac{T_{0i}}{\sqrt{-g_{00}g_{ii}}}\,, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

(²) Colla convenzione (abituale in idrodinamica) che sforzo normale positivo corrisponda a pressione.

(³) Sarebbe fuor di luogo che io mi indugiassi ora sulle modalità di deduzione. Ma mi permetto di rilevare che non occorrono sviluppi materiali, purchè si ricorra ad un opportuno adattamento dei metodi del calcolo differenziale assoluto ai ds^2 indefiniti che conglobano spazio e tempo.

rappresenta la componente di $\mathfrak{f}$ secondo la linea x^i (in quanto si immagini decomposto il vettore $\mathfrak{f}$ secondo il triedro delle linee coordinate); infine T_{00}/g_{00} è la densità di distribuzione della energia nello spazio (x_1, x_2, x_3) [cui si attribuisca la determinazione della energia nello spazio $-ds^2$ per $dx_0 = 0$].

4. - Invariante lineare e divergenza del tensore energetico.

Ci atteniamo al solito simbolismo del calcolo differenziale assoluto. Rappresentiamo perciò con $g^{(ik)}$ gli elementi reciproci ai coefficienti g_{ik}, e con T_{ikl} $(i, k, l = 0, 1, 2, 3)$ il sistema derivato covariante di T_{ik} secondo la forma fondamentale. Pel momento, come già nel precedente §, riterremo che questa sia la (1'), la quale, riferita a coordinate qualunque x, assume l'aspetto generico (2).

Ponendo

$$T = \sum_{ik}{}_0^3 \, g^{(ik)} T_{ik}\,, \tag{6}$$

si definisce un invariante, detto appunto *invariante lineare* o *scalare del tensore energetico.*

Si chiama invece *divergenza* dello stesso tensore energetico il sistema covariante semplice (o vettore quadridimensionale)

$$F_i = \sum_{kl}{}_0^3 \, g^{(kl)} T_{ikl} \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{7}$$

Il significato meccanico della divergenza (come quello di T, che tralascio di rilevare perchè immediato), si rende manifesto, riportandosi alle variabili y. Rispetto a tali variabili, $g^{(ik)} = 0$ $(i \neq k)$, $g^{(00)} = 1$, $g^{(ii)} = -1$ $(i = 1, 2, 3)$, e la derivazione covariante coincide coll'ordinaria.

Si ha quindi

$$F_i = \frac{\partial T_{i0}}{\partial y_0} - \sum_k{}_1^3 \frac{\partial T_{ik}}{\partial y_k}\,, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$F_0 = \frac{\partial T_{00}}{\partial y_0} - \sum_k{}_1^3 \frac{\partial T_{0k}}{\partial y_k}\,.$$

Teniamo presente il § 2 e notiamo che, in forza della (3), le T_{i0} si identificano con $-cq_i$ (q_i componenti della densità di quantità di moto $\boldsymbol{q}$). Con ciò apparisce ovviamente dalle prime tre equazioni testè scritte (riponendovi ct per y_0) che $-F_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sono componenti della forza esterna $\boldsymbol{F}$ applicata al sistema (per unità di volume); l'ultima equazione, qualora [sempre in base alle (3)] si prendano le T_{0k} sotto la forma $-(1/c)\chi_k$ (χ_k componenti del flusso di energia $\boldsymbol{\chi}$), mostra poi che cF_0 è la densità di potenza, cioè l'energia comunicata dall'esterno al sistema per unità di tempo e di volume. Si può anche dire, se si vuole, che F_0 rappresenta l'energia comunicata al sistema, per unità di volume, in un secondo di luce. Ne consegue in particolare che in un sistema isolato, la divergenza è nulla.

Ove ci si riferisca a coordinate qualunque x_i, il carattere covariante del sistema semplice F_i consente senz'altro di interpretare $-F_1/\sqrt{-g_{11}}$, $-F_2/\sqrt{-g_{22}}$, $-F_3/\sqrt{-g_{33}}$ quali componenti di $\boldsymbol{F}$ secondo le linee coordinate x_1, x_2, x_3; $F_0/\sqrt{g_{00}}$ quale energia ceduta in un secondo di luce all'unità di volume del sistema.

5. - Passaggio alla relatività generale.

Pur riferendoci a coordinate generali, abbiamo supposto finora che si tratti di un ds^2 euclideo. Formalmente le cose vanno nello stesso modo anche per un ds^2 essenzialmente irriducibile al tipo (1'), semprechè tuttavia:

a) x_0 sia interpretabile come tempo e le altre tre coordinate come parametri di spazio, valendo in conformità le disuguaglianze (5);

b) si conservino (nell'infinitesimo) le intuizioni meccaniche abituali, sicchè sia possibile attribuire un senso positivo a misure locali di forza, sforzi, flusso e densità di energia. In tali condizioni rimane univocamente definito il tensore energetico pel tramite dei rapporti

$$\frac{T_{ik}}{\sqrt{g_{ii}g_{kk}}} \quad (i, k = 1, 2, 3); \qquad \frac{T_{0i}}{\sqrt{-g_{00}g_{ii}}} \quad (i = 1, 2, 3); \qquad \frac{T_{00}}{g_{00}},$$

di cui al § 3.

D'ora innanzi il nostro ds^2 si intenderà *a priori* qualunque (salvo le restrizioni suindicate); e si assumerà naturalmente lo stesso ds^2 per forma fondamentale.

6. - Le equazioni del campo gravitazionale.

Indichino $g_{ij,hk}$ $(i, j, h, k = 0, 1, 2, 3)$ i simboli di RIEMANN di prima specie spettanti ad un generico ds^2 quadernario (2). Attesa la loro covarianza, le posizioni

$$G_{ik} = \sum_{0}^{3}{}_{jh}\, g^{(jh)} g_{ij,hk} \qquad (i, k = 1, 0, 2, 3) \tag{8}$$

definiscono un sistema covariante doppio.

Ove si tengano presenti le formule (4)

$$g_{ij,hk} = \sum_{0}^{3}{}_{\nu}\, g_{j\nu}\{i\nu, hk\},$$

$$\{i\nu, hk\} = \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} ih \\ \nu \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_h}\begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} + \sum_{0}^{3}{}_{l}\left[\begin{Bmatrix} ih \\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} lk \\ \nu \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} lh \\ \nu \end{Bmatrix}\right],$$

che legano i simboli riemanniani di prima a quelli di seconda specie, e questi ai simboli di CHRISTOFFEL (pure di seconda specie), si riconosce immediatamente che le (8) equivalgono a

$$G_{ik} = \sum_{0}^{3}{}_{h}\{ih, hk\} = \tag{8'}$$
$$= \sum_{0}^{3}{}_{h}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} ih \\ h \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_h}\begin{Bmatrix} ik \\ h \end{Bmatrix}\right] + \sum_{0}^{3}{}_{hl}\left[\begin{Bmatrix} ih \\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} kl \\ h \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} lh \\ h \end{Bmatrix}\right].$$

L'invariante lineare del sistema doppio G_{ik}

$$G = \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g^{(ik)} G_{ik} \tag{9}$$

si dirà *curvatura media* del nostro ds^2 (5).

Ciò posto, le equazioni gravitazionali di EINSTEIN sono:

$$G_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} G = -\varkappa T_{ik}, \tag{10}$$

dove $\varkappa$ dipende dalla costante f di attrazione universale e da c a norma della formula

$$\varkappa = \frac{8\pi f}{c^4}. \tag{11}$$

(4) BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, Pisa, Spoerri, 1902, p. 72.

(5) Tale designazione è ovviamente desunta dal significato geometrico che spetterebbe a G, qualora si trattasse di un ds^2 definito positivo.

Osservo incidentalmente che si può verificare l'omogeneità dei due membri delle (10), immaginando di riferirsi a parametri x_0, x_1, x_2, x_3 tutti omogenei tra loro, per es. lunghezze, come sono (pei ds^2 euclidei) le y definite dalle posizioni (4). I coefficienti g_{ik} sono allora dei puri numeri, e i primi membri hanno manifestamente le dimensioni l^{-2}. D'altra parte tutti i T_{ik} (sforzi specifici a meno di fattori numerici, ecc.) hanno in questo caso le stesse dimensioni, e precisamente $ml^{-1}t^{-2}$. Si ha poi

$$[f] = m^{-1}l^3t^{-2}\,, \qquad [\varkappa] = m^{-1}l^{-1}t^2\,,$$

sicchè anche ai secondi membri spettano effettivamente le dimensioni l^{-2}.

7. - Giustificazione formale desunta dalle identità di Bianchi.

Le derivate covarianti dei simboli di RIEMANN sono legate da relazioni notevolissime dovute al BIANCHI [6], che si possono compendiare nella formula

$$g_{ij,hkl} + g_{jl,hki} + g_{lj,hkj} = 0 \qquad (i, j, h, k, l = 0, 1, 2, 3),$$

ovvero, per ben note proprietà dei simboli di RIEMANN, nella formula equivalente

$$g_{ij,hkl} + g_{il,khj} - g_{lj,hki} = 0\,.$$

Moltiplichiamo per $\frac{1}{2}g^{(kl)}g^{(jh)}$ e sommiamo rispetto a k, l, j, h, avendo cura di scambiare nel secondo termine (a somma eseguita) j con l e h con k. Questo secondo termine diviene così identico al primo, e risulta

$$\sum_0^3{}_{kljh}\, g^{(kl)}g^{(jh)}g_{ij,hkl} - \frac{1}{2}\sum_0^3{}_{kljh}\, g^{(kl)}g^{(jh)}g_{lj,hki} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

D'altra parte la derivazione covariante delle (8) — ricordando il lemma di RICCI che i coefficienti della forma fondamentale hanno derivata covariante nulla — porge

$$G_{ikl} = \sum_0^3{}_{jh}\, g^{(jh)}g_{ij,hkl}\;;$$

---

(6) Cfr. loc. cit., p. 351.

mentre, dalla espressione (9) di G, che può essere scritta

$$G = \sum_{0}^{3}{}_{kl}\, g^{(kl)} G_{lk} ,$$

derivando covariantemente, si trae

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = G_i = \sum_{0}^{3}{}_{kl}\, g^{(kl)} G_{lki} = \sum_{0}^{3}{}_{kljh}\, g^{(kl)} g^{(jh)} g_{lj,hki} .$$

Le ricavate combinazioni delle identità di BIANCHI divengono con ciò

$$\sum_{0}^{3}{}_{kl}\, g^{(kl)} G_{ikl} - \tfrac{1}{2} G_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{12}$$

Esse contengono la giustificazione delle equazioni gravitazionali (10), dal lato matematico. Ed ecco perchè. I secondi membri delle (10) costituiscono un sistema doppio a divergenza nulla ([7]). Se si richiede che il sistema (10) sia completo [cioè che nessuna condizione sia imposta al ds^2 indipendentemente dalle circostanze esteriori riassunte nelle T_{ik}], bisogna che sia identicamente nulla anche la divergenza dei primi membri, ossia del sistema

$$G_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} G .$$

Questo appunto esprimono le equazioni (12).

8. - Tensore gravitazionale o inerziale. Generalizzazione del principio di d'Alembert.

Posto per brevità

$$A_{ik} = \frac{1}{\varkappa} \{ G_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} G \} , \tag{13}$$

le equazioni gravitazionali (10) si scrivono

$$T_{ik} + A_{ik} = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3). \tag{10'}$$

([7]) Infatti le T_{ik} includono il contributo di tutti i fenomeni che si svolgono nel posto e nell'istante considerato (gravitazione a parte). Si tratta comunque di un sistema isolato nel senso ordinario della parola. Debbono perciò annullarsi, per ogni sua porzione elementare, forza o potenza.

Interpretiamovi le A_{ik} come componenti di un tensore energetico dovuto all'ambiente spaziale e temporale, cioè dipendente esclusivamente dai coefficienti del ds^2. Un tale tensore si potrà a egual titolo denominare *gravitazionale* oppure *inerziale* ([8]), poichè dal ds^2 dipendono simultaneamente gravitazione ed inerzia. Le (10′) dànno luogo in conformità al seguente enunciato:

La natura del ds^2 è sempre tale da equilibrare ogni azione meccanica, nel senso che si annulla identicamente la somma dei due tensori energetico ed inerziale.

Vien fatto naturalmente di riavvicinare un tale enunciato al principio di D'ALEMBERT « le forze perdute (cioè forze direttamente applicate e forze di inerzia) si fanno equilibrio ». L'equilibrio espresso dalle (10′) è proprio ciò che si può concepire di più completo sotto l'aspetto meccanico, venendo ad annullarsi non soltanto la forza totale applicata ad ogni singolo elemento, ma altresì (col tener conto dell'inerzia delle A_{ik}) sforzi, flusso e densità di energia.

Ben si intende che questa assenza assoluta di entità meccaniche concerne i sistemi isolati. Se nel campo di un tale sistema si introduce ad esempio un po' di materia (e si suppone per semplicità trascurabile la conseguente modificazione del campo), si ha sulla materia addizionale un complesso di azioni esterne provenienti dal sistema. Nel caso schematico del punto materiale, queste si riassumono in una legge di moto (geodetica rispetto al ds^2 quadridimensionale), che include in particolare l'ordinaria dinamica di un punto sottoposto a forze conservative.

Va notato che le equazioni fondamentali di EINSTEIN, qui riattaccate al principio di D'ALEMBERT, furono già, da EINSTEIN stesso e, in modo più completo, da LORENTZ e da HILBERT ([9]), fatte discendere dalla variazione (debitamente intesa) di un unico integrale, rimanendo così esteso alla nuova meccanica anche il principio di HAMILTON.

9. - Equivoco di Einstein concernente il tensore gravitazionale.

Ricordo, per quanto possa essere superfluo, che da ogni sistema covariante doppio A_{ik} si ottiene immediatamente un sistema misto $A_i^{(j)}$ (covariante rispetto all'indice i e contravariante rispetto all'indice j),

---

([8]) Cfr. per es. W. DE SITTER, *On the relativity of rotation in Einstein's theory*, « Proc. of K. Ak. van Wet. te Amsterdam », vol. XIX, 1916, p. 530 (in nota).

([9]) Cfr. per es. le pp. 707-709 del rapporto di DE SITTER, *On Einstein's theory of gravitation...*, « Monthly Notices », vol. LXXVI, 1916.

ponendo

$$A_i^{(j)} = \sum_0^3 g^{(jk)} A_{ik} \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3).$$

Ne consegue che, per individuare il tensore gravitazionale con referenza a determinate variabili, è indifferente assegnare gli elementi A_{ik} ovvero le loro combinazioni lineari $A_i^{(j)}$. Ciò premesso, veniamo alle espressioni esplicite proposte da EINSTEIN (10) per le $A_i^{(j)}$ e da lui designate con $\sqrt{-g}\,t_i^j$ (g discriminante del ds^2).

Esse sono

$$\sqrt{-g}\,t_i^j = \frac{1}{2}\left\{G^*\varepsilon_{ij} - \mathop{S}_0^3{}_{hk} \frac{\partial G^*}{\partial g_j^{(hk)}} g_i^{(hk)}\right\}, \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3), \tag{14}$$

dove ε_{ij} rappresenta al solito lo zero o l'unità secondochè i due indici sono distinti o coincidono; $g_j^{(hk)}$ sta per $\frac{\partial g^{(hk)}}{\partial x_j}$; il sommatorio $\mathop{S}_0^3{}_{hk}$ va esteso a tutte le combinazioni con ripetizione degli indici h e k; infine la funzione

$$G^* = -\sum_0^3{}_{ik} g^{(ik)} \sum_0^3{}_{hl} \left[\begin{Bmatrix} ih \\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} kl \\ h \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} lh \\ h \end{Bmatrix}\right], \tag{15}$$

deve intendersi (come è ovviamente lecito) ridotta a dipendere dai soli argomenti $g^{(hk)}$, $g_j^{(hk)}$, prima di sottoporla a derivazione parziale rapporto a questi ultimi.

La inattendibilità delle posizioni (14) dal punto di vista matematico si constata agevolmente. Basta per es. ricavarne l'espressione che dovrebbe avere l'invariante lineare, cioè

$$\sqrt{-g}\sum_0^3{}_i t_i^i = \frac{1}{2}\left\{4G^* - \sum_0^3{}_i \mathop{S}_0^3{}_{hk} \frac{\partial G^*}{\partial g_i^{(hk)}} g_i^{(hk)}\right\}.$$

Siccome G^*, a norma della (15) è quadratica omogenea nei simboli di CHRISTOFFEL e quindi anche nelle $g_i^{(hk)}$, così, in virtù del teorema di EULERO,

$$\sum_0^3{}_i \mathop{S}_0^3{}_{hk} \frac{\partial G^*}{\partial g_i^{(hk)}} g_i^{(hk)} = 2G^*,$$

e *l'invariante in questione dovrebbe ridursi a* G^*.

(10) Dapprima con referenza a speciali variabili; allargandone poi la validità; e da ultimo attribuendo loro carattere generale. Cfr. in particolare la recente Nota: *Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie*, « Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Ak. der Wiss. », 1916, pp. 1111-1116.

Ora è ben noto (11) che *non* esistono invarianti differenziali del 1° ordine, intrinseci, cioè formati esclusivamente coi coefficienti del ds^2 e loro derivate prime, come lo è G^*. Tanto basta a rendere, almeno in generale, inammissibile la forma del tensore gravitazionale assunta da EINSTEIN. Questi del resto già ne aveva risentito un qualche disagio, specie quando (12), dopo avere con geniale semplicità tratteggiata la teoria delle onde gravitazionali, fu condotto al risultato inattendibile che anche onde *spontanee* dovrebbero di regola dar luogo a dispersione di energia per irraggiamento.

« Siccome questo — sono sue parole — non dovrebbe presentarsi in natura, così appare verosimile che intervenga la teoria dei quanti a modificare non soltanto l'elettrodinamica di MAXWELL, ma anche la nuova teoria della gravitazione ».

In realtà non c'è bisogno di arrivare ai quanti. Basta correggere l'espressione formale del tensore gravitazionale nel modo qui esposto. Rimane allora *a priori* esclusa l'eventualità di imbattersi in conseguenze non rispondenti alla intuizione fisica, sia che si tratti di onde libere o d'altro fenomeno *puramente* gravitazionale. Infatti, a norma delle (10'), o, se si vuole, del principio di D'ALEMBERT generalizzato, quando si annulla il tensore energetico T_{ik}, lo stesso deve avvenire per il tensore gravitazionale A_{ik}, il che implica assoluta assenza sia di sforzi, che di flusso, o anche di semplice localizzazione dell'energia.

---

(11) Veggasi ad es. RICCI et LEVI-CIVITA, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, « Mathematische Annalen », B. 54, 1900, p. 162 [in queste « Opere »: vol. primo, XXXII, p. 518].

(12) Nella Nota già citata al principio.

IV.

STATICA EINSTEINIANA

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. $XXVI_1$ (1º sem. 1917), pp. 458-470.

Mi propongo di studiare sia quel caso particolare delle equazioni gravitazionali di EINSTEIN, che corrisponde a fenomeni statici, sia (sempre dal punto di vista della relatività generale) il movimento di un punto materiale entro un campo statico, nell'ipotesi che sia trascurabile la modificazione del campo provocata dal moto del punto.

Nei §§ 1-2 attribuisco alle equazioni ricordate una forma invariantiva rispetto al ds^2 dello spazio ambiente. Con ciò rimane direttamente collegata la natura metrica di questo spazio ai fenomeni di equilibrio che vi hanno sede, mentre nella forma generale di EINSTEIN (valida per fenomeni comunque variabili col posto e coll'istante) si presentano fuse insieme le misure dello spazio e del tempo in una metrica quadridimensionale.

Un'immediata conseguenza delle equazioni così trasformate si è che, in regime statico, la curvatura media dello spazio fisico è necessariamente *positiva o nulla.*

Passo quindi (§§ 3-4) alle equazioni del moto di un punto materiale. Anche qui si tratta semplicemente di lumeggiare le particolari proprietà dovute al regime statico del campo. Tra queste figura la equazione variazionale delle traiettorie, che è in sostanza l'espressione appropriata al caso del principio della minima azione. La trasformazione, con cui vi si giunge eliminando il tempo, è perfettamente applicabile anche nell'ordinaria meccanica dei sistemi olonomi, e serve a passare (supposte le forze conservative) dal principio di HAMILTON a quello della minima azione con qualche maggiore spontaneità e semplicità che non si riscontri nei procedimenti classici (1).

(1) Veggansi ad es. i trattati seguenti: APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, tomo II (3ª ediz.), Paris, Gauthier-Villars, 1911, nn. 483-487; MAGGI, *Principii di stereodinamica*, Milano, Hoepli, 1903, pp. 102-103; WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, Cambridge, University Press, 1904, sez. 99-100.

1. - Le equazioni di Einstein nel caso statico.

Quando si tratta di fenomeni statici, la forma differenziale quaternaria ds'^2, che congloba le misure dello spazio e del tempo, si presenta sotto la forma

$$\sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k = V^2 dx_0^2 - ds^2\,, \tag{1}$$

dove x_0 rappresenta il tempo e

$$ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{2}$$

è il quadrato dell'elemento lineare dello spazio fisico ambiente. I coefficienti a_{ik} vanno ritenuti, al pari di V, funzioni soltanto di x_1, x_2, x_3; la V si interpreta come velocità della luce e si considera quindi essenzialmente positiva.

Con manifesto significato dei simboli, si ha

$$\left\{\begin{array}{llll} g_{ik} = -a_{ik}\,, & g_{0i} = 0\,, & g_{00} = V^2\,; & g = -aV^2\,; \\ g^{(ik)} = -a^{(ik)}\,, & g^{(0i)} = 0\,, & g^{(00)} = \dfrac{1}{V^2} & (i, k = 1, 2, 3). \end{array}\right. \tag{3}$$

Converrà contrassegnare con un apice i simboli di CHRISTOFFEL e di RIEMANN relativi alla forma quaternaria (1), riservando la ordinaria notazione senza apice agli analoghi simboli relativi alla (2).

Dalle formule di definizione si ricava subito, in base alle (3),

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}; \\[2ex] \begin{Bmatrix} i\,k \\ 0 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 0\,i \\ k \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 0 \end{Bmatrix}' = 0; \\[2ex] \begin{Bmatrix} i\,0 \\ 0 \end{Bmatrix}' = \dfrac{V_i}{V}; \\[2ex] \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ i \end{Bmatrix}' = V V^{(i)}\,, \end{array}\right. \tag{4}$$

dove i, k, l possono assumere i valori 1, 2, 3; $V_i = \partial V / \partial x_i$ e $V^{(i)} = \sum_{j=1}^{3} a^{(ij)} V_j$ ne è il sistema reciproco rispetto al ds^2.

Nella teoria di EINSTEIN ha importanza fondamentale il sistema covariante doppio

$$
\begin{aligned}
(5)\qquad G'_{ik} &= \sum_{h=0}^{3} \{ih, hk\}' \\
&= \sum_{h=0}^{3} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \begin{Bmatrix} i\,h \\ h \end{Bmatrix}' - \frac{\partial}{\partial x_h} \begin{Bmatrix} i\,k \\ h \end{Bmatrix}' \right] \\
&+ \sum_{hl=0}^{3} \left[\begin{Bmatrix} i\,h \\ l \end{Bmatrix}' \begin{Bmatrix} k\,l \\ h \end{Bmatrix}' - \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}' \begin{Bmatrix} l\,h \\ h \end{Bmatrix}' \right] \\
&(i, k = 0, 1, 2, 3).
\end{aligned}
$$

Introducendo l'analogo sistema

$$
(6)\qquad G_{ik} = \sum_{h=1}^{3} \{ih, hk\} \qquad (i, k = 1, 2, 3)
$$

relativo alla forma ternaria (2), si trova, dopo ovvie riduzioni,

$$
(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} G'_{ik} &= G_{ik} + \frac{V_{ik}}{V}, \\ G'_{0i} &= 0, \\ G'_{00} &= -\, V \Delta_2 V, \end{aligned} \right. \qquad (i, k = 1, 2, 3),
$$

in cui le V_{ik} rappresentano derivate seconde covarianti e Δ_2 il parametro differenziale di 2° ordine con referenza al ds^2 spaziale (2).

In base a queste formule e alle (3), si ha, per l'invariante lineare del sistema G'_{ik},

$$
G' = \sum_{ik=0}^{3} g^{(ik)} G'_{ik} = g^{(00)} G'_{00} - \sum_{ik=1}^{3} a^{(ik)} G'_{ik} = -\frac{\Delta_2 V}{V} - \sum_{ik=1}^{3} a^{(ik)} G_{ik} - \frac{\Delta_2 V}{V}.
$$

Se quindi si pone

$$
(8)\qquad -2\mathfrak{M} = \sum_{ik=1}^{3} a^{(ik)} G'_{ik},
$$

con che, come verificheremo al § 3, $\mathfrak{M}$ rappresenta la *curvatura media* dello spazio ambiente, risulta

$$(9) \qquad \tfrac{1}{2}G' = \mathfrak{M} - \frac{\Delta_2 V}{V},$$

che fornisce l'espressione statica dell'invariante G'.

Ciò premesso, ricordiamo ([2]) che le equazioni gravitazionali sono

$$G'_{ik} - \tfrac{1}{2}G' g_{ik} = -\varkappa T_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

dove $\varkappa$ è costante e T_{ik} designa il tensore energetico.

In condizioni statiche, le T_{ik} sono, come tutto il resto, indipendenti dal tempo x_0; inoltre le $T_{i0} = T_{0i}$ si annullano, rappresentando (previa divisione per $-\sqrt{-g_{00}g_{ii}} = -V\sqrt{a_{ii}}$) componenti di flusso dell'energia. Perciò, avuto riguardo alle (3) e (7), tre delle richiamate equazioni si riducono a pure identità; e ne rimangono sette; le sei (corrispondenti ai valori non nulli degli indici)

$$(10) \qquad G_{ik} + \mathfrak{M}a_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \frac{\Delta_2 V}{V} a_{ik} = -\varkappa T_{ik}, \qquad (i, k = 1, 2, 3);$$

nonchè (per $i = k = 0$)

$$-V\Delta_2 V - \tfrac{1}{2}G' g_{00} = -\varkappa T_{00},$$

ossia, badando alla (9),

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathfrak{M} = \varkappa \frac{T_{00}}{V^2}.$$

Queste sette equazioni (10) ed (I) riducono, come è nella natura delle cose, la statica einsteiniana alle tre dimensioni dello spazio ambiente. Esse hanno forma invariantiva rispetto alla metrica di questo spazio, fungendo — colla nomenclatura del calcolo differenziale assoluto — da forma fondamentale il relativo ds^2. Vi figurano inoltre, come elementi associati alla forma fondamentale, le due funzioni (invarianti) V e T_{00}, e il sistema covariante doppio T_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$. Quest'ultimo caratterizza la distribuzione degli sforzi; mentre T_{00}/V^2 si interpreta quale densità d'energia [cfr. il § 3 della mia Nota, testè citata], rappresentando V, come è stato detto in principio, la velocità della luce.

([2]) Cfr. p. es. la Nota *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein*, in questo volume dei « Rendiconti », pp. 381-391 [in questo vol. delle « Opere » è la Nota immediatamente precedente].

Nei riguardi della densità di energia giova rilevare che, almeno nell'ambito dei fenomeni oggidì meglio conosciuti (sia materiali che elettromagnetici in senso lato), non c'è esempio di densità negativa ([3]), sicchè si può ritenere il secondo membro della (I) $\geqslant 0$. Ne viene questo corollario geometrico: *La curvatura media* $\mathfrak{M}$ (somma delle tre curvature principali), *che si determina nello spazio fisico per effetto di fenomeni puramente statici, è in ogni caso positiva o nulla.*

2. - Le α_{ik} di Ricci. Forma definitiva delle equazioni della statica.

Per le varietà a tre dimensioni i simboli di RIEMANN (di prima specie) $a_{ij,hk}$ $(i,\ j,\ h,\ k = 1,\ 2,\ 3)$ si riducono sostanzialmente allo schema $a_{i+1,\,i+2;\,k+1,\,k+2}$ (colla convenzione di risguardare equivalenti due indici che differiscono per multipli di 3), e vengono opportunamente sostituiti dai rapporti

$$\alpha^{(ik)} = \frac{a_{i+1,i+2;k+1,k+2}}{a}, \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{11}$$

introdotti dal RICCI, che costituiscono, come egli ha mostrato (e come si verifica materialmente in modo ovvio), un sistema doppio simmetrico contravariante.

Con α_{ik} si intende naturalmente il sistema covariante reciproco, mercè cui le $\alpha^{(ik)}$ si esprimono sotto la forma

$$\alpha^{(ik)} = \sum_{jh}^{3}{}_{1}\, a^{(ij)} a^{(hk)} \alpha_{jh}\,. \tag{12}$$

Vogliamo stabilire le relazioni che legano le α_{ik} alle G_{ik} ([4]).

Procedendo per via diretta, si può partire dalle (6) e sostituire nei secondi membri i simboli $\{ih, hk\}$ mediante quelli di prima specie, scrivendo

$$G_{ik} = \sum_{jh}^{3}{}_{1}\, a^{(jh)} a_{ij,hk}\,. \tag{6'}$$

([3]) Infatti, se in un dato posto c'è materia in riposo distribuita con densità μ, ciò importa una energia di origine materiale $V^2\mu$, che (in condizioni ordinarie) prepondera di gran lunga su tutti gli altri eventuali contributi. D'altra parte il contributo alla densità d'energia di origine elettromagnetica è esso pure $\geqslant 0$. Perciò, anche in assenza di materia, la densità di energia non sembra suscettibile di valori negativi.

([4]) Relazioni già indicate dal RICCI nella Nota *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque*, « Atti del R. Istituto Veneto », tomo LXIII, 1904, p. 1235.

Il secondo membro si sviluppa, attribuendo a j i valori $i, i+1, i+2$ e ad h i valori $k, k+1, k+2$. Tenendo conto delle identità

$$a_{ij,hk} = a_{ji,hk} = - a_{ij,kh} ,$$

e delle (11), si ha

$$G_{ik} = a\{- a^{(i+1\ k+1)}\alpha^{(i+2\ k+2)} + a^{(i+1\ k+2)}\alpha^{(i+2\ k+1)} + \\ + a^{(i+2\ k+1)}\alpha^{(i+1\ k+2)} - a^{(i+2\ k+2)}\alpha^{(i+1\ k+1)}\} ,$$

ossia, in base alle (12),

$$G_{ik} = a \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, \alpha_{jh}\{- a^{(i+1\ k+1)}a^{(i+2\ j)}a^{(k+2\ h)} + a^{(i+1\ k+2)}a^{(i+2\ j)}a^{(k+1\ h)} \\ + a^{(i+2\ k+1)}a^{(i+1\ j)}a^{(k+2\ h)} - a^{(i+2\ k+2)}a^{(i+1\ j)}a^{(k+1\ h)}\} .$$

Nel sommatorio giova raggruppare il primo col secondo termine e il terzo col quarto, attribuendo ad h i valori $i, i+1, i+2$.

Dacchè il complemento algebrico di $a^{(ik)}$ nel determinante di queste quantità vale a_{ik}/a, risulta

$$G_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{j}\, \{\alpha_{ji}a_{i+2\ k}a^{(i+2\ j)} - \alpha_{j\,i+2}a_{ik}a^{(i+2\ j)} + \alpha_{ji}a_{i+1\ k}a^{(i+1\ j)} - \alpha_{j\,i+1}a_{ik}a^{(i+1\ j)}\} ,$$

la quale, aggiungendo e togliendo (sotto il sommatorio) $\alpha_{ji}a_{ik}a^{(ij)}$, si scrive più semplicemente

$$G_{ik} = \alpha_{ik} - a_{ik} \sum_{1}^{3}{}_{lj}\, \alpha_{lj}a^{(lj)} .$$

Moltiplichiamo per $a^{(ik)}$ e sommiamo rispetto ai due indici i e k. Tenuto conto che

$$\sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{(ik)}a_{ik} = 3 ,$$

il confronto colla (8) porge

$$\mathfrak{M} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{(ik)}\alpha_{ik} , \tag{13}$$

sicchè le ottenute relazioni fra le G_{ik} e le α_{ik} assumono l'aspetto:

$$\alpha_{ik} = G_{ik} + \mathfrak{M} a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{14}$$

che più conviene al nostro scopo ([5]).

La (13) poi rende ragione del significato di $\mathfrak{M}$ come curvatura media della varietà. Infatti le curvature principali sono, per definizione, le radici (necessariamente reali) ω_1, ω_2, ω_3 della equazione cubica ([6])

$$\|\alpha_{ik} - \omega a_{ik}\| = 0\,,$$

e il secondo membro della (13) è precisamente la somma di queste radici (coefficiente di ω^2 diviso per $-a$, essendo $-a$ il coefficiente di ω^3 nel primo membro della equazione cubica).

([5]) Si può arrivarvi in modo più elegante, ricorrendo ai sistemi E spettanti al nostro ds^2 ternario; cfr. RICCI et LEVI-CIVITA, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, « Math. Ann. », B. 54, 1900, p. 135 [in queste « Opere »: vol. primo, XXXII, pp. 479-559]; RICCI, *Sulle superficie geodetiche...*, in questi « Rendiconti », vol. XII, 1° semestre 1903, p. 410. In primo luogo, mediante l'E covariante si scrivono le (12) sotto la forma

$$a_{ij,hk} = \sum_{pq}{}_1^3 \alpha^{(pq)} \varepsilon_{pij} \varepsilon_{qkh}\,,$$

con che le (6') assumono l'aspetto

$$G_{ik} = \sum_{jhpq}{}_1^3 a^{(jh)} \alpha^{(pq)} \varepsilon_{pij} \varepsilon_{qhk} = -\sum_{jhpq}{}_1^3 a^{(jh)} \alpha^{(pq)} \varepsilon_{pij} \varepsilon_{qkh}\,.$$

D'altra parte la definizione delle $a^{(jk)}$ si traduce, mediante l'E covariante, nelle formule

$$a^{(jh)} = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu\varrho\sigma\tau}{}_1^3 \varepsilon^{(\nu\varrho j)} \varepsilon^{(\sigma\tau h)} a_{\nu\sigma} a_{\varrho\tau}\,.$$

Sostituiamo in G_{ik}, badando alle identità (di verificazione immediata)

$$\sum_j{}_1^3 \varepsilon_{pij} \varepsilon^{(\nu\varrho j)} = \varepsilon_{p\nu} \varepsilon_{i\varrho} - \varepsilon_{p\varrho} \varepsilon_{i\nu} \qquad (p, i, \nu, \varrho = 1, 2, 3),$$

e a quest'altre (che ne differiscono solo per la designazione degli indici)

$$\sum_h{}_1^3 \varepsilon_{qkh} \varepsilon^{(\sigma\tau h)} = \varepsilon_{q\sigma} \varepsilon_{k\tau} - \varepsilon_{q\tau} \varepsilon_{k\sigma}\,, \qquad (q, k, \sigma, \tau = 1, 2, 3),$$

nelle quali le ε a due indici stanno, secondo il solito, a rappresentare lo zero quando gli indici sono distinti, e l'unità quando coincidono.

Ove si noti che l'espressione (13) di $\mathfrak{M}$ equivale a

$$\mathfrak{M} = \sum_{pq}{}_1^3 a_{pq} \alpha^{(pq)}\,,$$

risultano appunto le (14).

([6]) RICCI et LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 163 [in queste « Opere »: vol. primo, XXXII, p. 519].

Mercè le (14), si introducono le α_{ik} nelle equazioni gravitazionali (10). Trascrivendo anche la (I), si ha in definitiva il sistema

$$\mathfrak{M} = \varkappa \frac{T_{00}}{V^2}, \tag{I}$$

$$\alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \frac{\Delta_2 V}{V} a_{ik} = -\varkappa T_{ik}, \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{II}$$

dove la curvatura media $\mathfrak{M}$ ha l'espressione (13).

Una notevole conseguenza delle (II) si ha moltiplicandole per $a^{(ik)}$ e sommando rispetto ai due indici. Avuto riguardo alle (13) e (I), si ottiene

$$\frac{\Delta_2 V}{V} = \frac{1}{2} \varkappa \left(\mathfrak{T} + \frac{T_{00}}{V^2}\right), \tag{14}$$

dove

$$\mathfrak{T} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{(ik)} T_{ik} \tag{15}$$

rappresenta evidentemente l'invariante lineare del sistema degli sforzi rispetto al nostro ds^2 (dello spazio ambiente). Tale invariante — sia detto per incidenza — non deve confondersi collo scalare del tensore quadridimensionale

$$T = \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g^{(ik)} T_{ik},$$

cui, a norma delle (3), spetta invece l'espressione

$$T = \frac{T_{00}}{V^2} - \mathfrak{T}.$$

3. - Moto di un punto materiale. Traiettorie. Equivalenza a geodetiche e a fasci conservativi del tipo ordinario.

Secondo la teoria generale di Einstein, qualunque sia il ds' quadridimensionale, le equazioni del moto di un punto materiale si compendiano nel principio variazionale

$$\delta \int ds' = 0. \tag{16}$$

In condizioni statiche, vale pel ds' la forma (1), talchè, posto, per comodità di confronto colle notazioni abituali,

$$(17) \qquad x_0 = t, \qquad \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i, \qquad (i = 1, 2, 3), \qquad \frac{ds^2}{dt^2} = v^2,$$

la precedente può essere scritta

$$\delta\int\sqrt{V^2 - v^2}\,dt = 0 \text{ (7)}.$$

Per restare nel campo reale e regolare, giova escludere i movimenti in cui la velocità attraversa il valore critico V, e porre (col valore aritmetico del radicale)

$$(18) \qquad \begin{cases} \sqrt{V^2 - v^2} & \text{per } v < V \text{ (8)}, \\ \sqrt{v^2 - V^2} & \text{per } v > V, \end{cases}$$

valendo in entrambi i casi l'equazione variazionale del moto

$$(16') \qquad \delta\int L\,dt = 0.$$

Ne conseguono notoriamente le equazioni differenziali di LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Si noterà che, nella (16), e quindi nella equivalente (16'), anche t deve essere sottoposto a variazione, trattandolo alla stessa stregua delle coordinate di spazio, e supponendo in conformità δt nullo agli estremi (dell'intervallo di integrazione). Ciò dà luogo (mercè la solita integra-

(7) Sotto questa forma essa venne già proposta e discussa da ABRAHAM, però limitatamente all'ipotesi che il ds^2 sia euclideo. Cfr. in particolare *Le equazioni di Lagrange nella nuova meccanica*, « Ann. di Mat. », t. XX (dedicato alla memoria di LAGRANGE), 1913, pp. 29-36.

(8) Si potrebbe anche limitarsi a questo primo caso, che è il solo fisicamente interessante per un effettivo punto materiale. Stimo tuttavia preferibile — giacchè l'occasione si presenta — di trattare la questione in modo completo.

Nella recente Memoria di HILBERT, *Die Grundlagen der Physik* (seconda parte), « Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen », 1917, dove sono precisati i postulati della relatività generale, si trova, a proposito dei movimenti dei punti materiali, una specificazione qualitativa, che in condizioni statiche, equivale appunto a $v < V$.

zione per parti) ad una quarta equazione

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0\,,$$

che è però una conseguenza delle prime tre.

Quando in particolare, come nel caso attuale, $\partial L/\partial t = 0$, essa si identifica coll'integrale tipico dei sistemi lagrangiani (delle forze vive, allorchè L ha la forma quadratica rispetto alla velocità, che le compete nella meccanica ordinaria)

$$\sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - L = V_0 \qquad (V_0 \text{ costante}). \tag{19}$$

Sfruttando questa equazione, si può, *colle dovute modalità*, eliminare dt dalla (16′), e ottenerne una formula, anch'essa variazionale, che corrisponde al principio della minima azione, compendiando le equazioni delle traiettorie. Ecco come conviene procedere.

Si premette che, nella (16′), le variazioni δx_i, δt vanno ritenute arbitrarie, ma nulle ai limiti. Si nota poi che, risguardando V_0 come una costante prefissata ($\delta V_0 = 0$), si può sostituire alla (16′) la formula

$$\delta \int (L + V_0)\, dt = 0\,, \tag{16″}$$

sostanzialmente equivalente, perchè dà luogo alle stesse equazioni di Lagrange. Essa però presenta sulla (16′) il vantaggio che non occorre più imporre a δt la condizione di annullarsi agli estremi (semprechè si intenda che, nell'integrale (19), la costante del secondo membro abbia il valore prefissato V_0). Questo risulta subito dall'osservare che, portando il δ sotto il segno, si ha, materialmente, come contributo proveniente dalla variazione di t,

$$\int \delta\, dt \left[-\sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i + L + V_0\right],$$

che si annulla, in virtù della (19).

Così stando le cose, diviene lecito di considerare, nella (16″), le x_i, t, e subordinatamente le loro variazioni, legate dalla (19), anzichè indipendenti. In verità, nulla vieta *a priori* di introdurre vincoli a piacimento, sia nella (16′) che nella (16″), *purchè soltanto rimangano rispettate le condizioni ai limiti per le δx_i, δt.* Come si comporta la (19) a tale riguardo? La sua variazione fornisce, possiamo dire, il δdt o, ciò che è lo stesso, il $d\delta t$ in termini delle δx_i che rimangono (funzioni di t) arbitrarie, salvo l'annullamento ai limiti. Il δt risulta in conformità da una quadratura, e quindi si può renderlo zero ad *uno* degli estremi dell'intervallo di integrazione, ma non in generale anche all'altro. Perciò l'introduzione del vincolo (19) è perfettamente legittima nella (16''), la quale non richiede l'annullarsi ai limiti di δt; ma non lo sarebbe invece nella (16').

Chiarito il concetto, esplicitiamo il calcolo.

La (19), moltiplicando per L, si scrive

$$\frac{1}{2}\sum_1^3{}_i \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - L^2 = V_0 L\,.$$

In virtù della (18),

$$L^2 = \pm (V^2 - v^2)\,,$$

il segno dovendo essere scelto in modo che L^2 risulti positivo. Ne deduciamo (per essere v^2 omogeneo di 2° grado nelle $\dot{x}_i$ e V^2 funzione soltanto delle x_i)

$$\frac{1}{2}\sum_1^3{}_i \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i = \mp \frac{1}{2}\sum_1^3{}_i \frac{\partial v^2}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i = \mp\, v^2\,,$$

dovendosi adottare il segno superiore o l'inferiore, secondochè vale l'uno o l'altro per L^2. Con questa stessa convenzione, la precedente, cioè in sostanza l'integrale (19), si scrive

$$\mp\, V^2 = V_0 L\,. \tag{19'}$$

Perciò, badando alla (18) stessa, si vede che *la costante V_0 è necessariamente negativa e in valore assoluto $> V$, nei moti che seguono con velocità $v < V$; è invece positiva e può assumere qualsiasi valore fra 0 e ∞ nell'ipotesi opposta.*

Dalla (19'), dividendo per V_0 ed elevando al quadrato, si ha

$$v^2 = V^2 \mp \frac{V^4}{V_0^2}\,,$$

colla solita discriminazione del segno, sicchè, in tutte le formule simultaneamente, vale il segno superiore ovvero l'inferiore.

Dacchè $v = ds/dt$ (con ds e dt positivi), si ricava ulteriormente

$$dt = \frac{ds}{V}\left(1 \mp \frac{V^2}{V_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

D'altra parte la (19′) dà

$$L + V_0 = V_0\left(1 \mp \frac{V^2}{V_0^2}\right).$$

Sostituendo in (16″), sopprimendo il fattore costante V_0, e ponendo

$$(20) \qquad 2U = \frac{1}{V^2}\left(1 \mp \frac{V^2}{V_0^2}\right) = \frac{1}{V^2} \mp \frac{1}{V_0^2},$$

risulta l'*equazione comprensiva delle traiettorie*

$$(21) \qquad \delta\int\sqrt{2U}\,ds = 0.$$

Queste appariscono in conformità coincidenti (ben si intende per ciascun valore della costante V_0 che compare implicitamente in U) *colle geodetiche di uno spazio di elemento lineare* $\sqrt{2U}\,ds$, *od anche* ([9]) *con un fascio di traiettorie di un problema conservativo di meccanica ordinaria nello spazio fisico di elemento lineare* ds. Il fascio è caratterizzato come segue: forza viva

$$\frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^{*2}},$$

t^* designando una variabile ausiliaria che funge da tempo; funzione delle forze c^4U, con c costante arbitraria; energia totale

$$\frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^{*2}} - c^4U = 0.$$

Si può anche dire, badando alle espressione (20) di U:

$$\text{funzione delle forze } \frac{c^4}{2V^2}; \qquad \text{energia totale } \pm\frac{c^4}{2V_0^2}.$$

([9]) Veggasi ad es. il già citato *Traité de mécanique rationnelle* di APPELL, n. 487.

4. - Casi limiti. Interpretazione ottica.

1. *Attrazione newtoniana.* – Nell'ipotesi che la forma quadridimensionale $ds'^2 = V^2 dt^2 - ds^2$ sia molto prossima al tipo euclideo, si può porre

$$(22) \qquad V = c(1 + \gamma)\,, \qquad ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_{ik} (\varepsilon_{ik} + \gamma_{ik})\, dx_i\, dx_k\,,$$

dove c è costante (velocità della luce in assenza d'ogni circostanza perturbatrice), e le γ, *che sono tutte puri numeri, vanno trattate come quantità di primo ordine.*

La funzione lagrangiana, per moti dotati di velocità $v < V$, è, a norma della (18),

$$\sqrt{V^2 - v^2}\,,$$

ossia, moltiplicando per $-c$ (ciò che è lecito senza alterare le equazioni del moto) badando alla prima delle (22), e trascurando γ^2,

$$-c^2 \sqrt{1 + 2\gamma - \frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Supposto che (come avviene di regola pel moto dei corpi ponderabili) si possa trascurare anche il quadrato del rapporto v^2/c^2, sviluppando il radicale e prescindendo dalla inessenziale costante additiva $-c^2$, la detta funzione lagrangiana assume la forma

$$L = \tfrac{1}{2} v^2 - c^2 \gamma\,.$$

Per $v^2 = ds^2/dt^2$ si deve intendere, a norma della (21),

$$\sum_{1}^{3}{}_{ik} (\varepsilon_{ik} + \gamma_{ik}) \dot{x}_i \dot{x}_k = \sum_{1}^{3}{}_{i} \dot{x}_i^2 + \sum_{1}^{3}{}_{ik} \gamma_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k\,,$$

ma è subito visto che le γ_{ik} si possono porre senz'altro eguali a zero, poichè porterebbero, nelle equazioni del moto, solo contributi di secondo ordine.

Ci troviamo pertanto ricondotti, in prima approssimazione, all'ordinaria dinamica di un punto materiale nello spazio euclideo sotto l'azione di un potenziale unitario (intendo funzione delle forze riferita all'unità di massa)

$$-c^2\gamma \, .$$

Attesa l'espressione $c(1+\gamma)$ di V, la (14), colla convenuta approssimazione, diviene

$$\Delta_2\gamma = \frac{1}{2}\varkappa\left(\mathfrak{T} + \frac{T_{00}}{V^2}\right),$$

riducendosi in sostanza alla equazione di Poisson-Laplace caratteristica dei potenziali newtoniani. Infatti, nell'interno dei corpi ponderabili, l'energia intrinseca prepondera di gran lunga su tutte le altre forme, sicchè la densità di energia vale sensibilmente $c^2\mu$ (μ densità della materia), e $\mathfrak{T}$ risulta trascurabile di fronte a $c^2\mu$; negli spazi vuoti ($\mu = 0$), tutta la somma $\mathfrak{T} + T_{00}/V^2$ è trascurabile di fronte all'ordine di grandezza dei valori che le competono entro la materia. Si può così ritenere in tutto lo spazio

$$\Delta_2\gamma = \tfrac{1}{2}\varkappa c^2\mu \, .$$

Dacchè, a meno di termini di second'ordine, il $\Delta_2\gamma$ si può riportare al ds^2 euclideo, e

$$\varkappa = \frac{8\pi f}{c^4}, \qquad (f \text{ costante di attrazione}),$$

si ritrova effettivamente la equazione di Poisson-Laplace per il potenziale $-c^2\gamma$.

Fu appunto mediante questa considerazione che Einstein fissò il valore numerico della sua costante universale $\varkappa$.

2. $|V_0|$ *grandissimo. Confronto coi raggi luminosi.* – Se v assume, nel corso del moto, un qualche valore molto prossimo a V, il corrispondente valore di L è piccolissimo, e quindi, in base alla (19'), la costante V_0 deve ritenersi grandissima in valore assoluto (negativa o positiva secondochè $v \gtrless V$).

Supponendo trascurabile V^2/V_0^2 di fronte all'unità, si ha dalla (20)

$$2U = \frac{1}{V^2},$$

talchè, per il teorema di equivalenza del precedente paragrafo, le traiettorie coincidono sia colle geodetiche dell'elemento lineare ds/V, sia (nello spazio di elemento lineare ds) con un fascio spettante alla funzione delle forze $c^4/2V^2$.

Il primo risultato dà luogo ad un interessante ravvicinamento ottico, già rilevato per altra via dal Sig. CALDONAZZO ([10]) a proposito della teoria di ABRAHAM. Per conseguirlo, basta ricordare che si è attribuito a V il significato di velocità della luce entro il nostro spazio (sede di fenomeni statici) di elemento lineare ds. Conservando, anche nella nuova meccanica, il principio di FERMAT, l'andamento dei raggi luminosi rimane compendiato nella formula

$$\delta\int\frac{ds}{V} = 0 .$$

A questa stessa formula (cioè alle geodetiche dell'elemento lineare ds/V) si riduce, come s'è notato or ora, la (20) per $|V_0|$ grandissimo. Le traiettorie d'un punto materiale tendono pertanto a confondersi coi raggi luminosi al crescere indefinito di V_0 o, ciò che è lo stesso, al convergere della velocità del moto verso la velocità della luce.

3. V_0 *piccolissimo*. – Questo caso può presentarsi, a norma delle (19') e (18), soltanto per $v > V$ e grandissimo. La (20) mostra che $\sqrt{2U}$ è allora sensibilmente costante, sicchè la equazione (21) delle traiettorie si riduce a

$$\delta\int ds = 0 .$$

Se ne inferisce che (come nella meccanica ordinaria, quando l'azione acceleratrice delle forze è trascurabile di fronte all'inerzia) le traiettorie, entro un campo gravitazionale, tendono a diventare geodetiche al crescere indefinito della velocità.

([10]) *Traiettorie dei raggi luminosi e dei punti materiali nel campo gravitazionale*, « Nuovo Cimento », serie VI, vol. V, 1913, pp. 267-300.

V.

REALTÀ FISICA DI ALCUNI SPAZI NORMALI DEL BIANCHI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5°, vol. $XXVI_1$ (1° sem. 1917), pp. 519-531.

Le equazioni gravitazionali di EINSTEIN sono state integrate rigorosamente da SCHWARZSCHILD (¹) in un caso di fondamentale importanza (simmetria attorno ad un centro), che rispecchia (colla correzione derivante dalla relatività generale) l'attrazione newtoniana del Sole, rendendo esatto conto del secolare spostamento dei perieli dei pianeti, e segnatamente del perielio di Mercurio: risultato celeberrimo, già in precedenza ottenuto da EINSTEIN mediante una integrazione approssimata (perfettamente bastevole per la valutazione numerica della disuguaglianza).

Indicherò qui un nuovo caso di integrazione non privo di interesse fisico, ponendo a base della mia deduzione le equazioni gravitazionali già ridotte a quella forma (spazialmente invariante) che conviene al caso statico e che fu oggetto di una mia precedente comunicazione (²).

Concettualmente si tratta di questo: Supposto che esista nel vuoto un campo elettrico ovvero magnetico uniforme (e costante anche rispetto al tempo), si domanda se e come un tale campo influisce sulla natura geometrica dello spazio ambiente. Si trova che lo spazio non resta euclideo (come sarebbe in assenza del campo), ma si atteggia a varietà normale di BIANCHI (³) con due curvature principali nulle, e la terza (quella corrispondente alle giaciture normali alle linee del campo) positiva e pro-

(¹) *Ueber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie*, « Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Ak. der Wiss. », 1916, pp. 189-196. Veggasi altresì la recente Memoria di HILBERT, *Die Grundlagen der Physik* (zweite Mitteilung), « Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen », 1917.

(²) *Statica einsteiniana*, in questo volume dei « Rendiconti », pp. 458-470 [in questo vol. delle « Opere » è la Nota immediatamente precedente].

(³) *Sugli spazi normali a tre dimensioni colle curvature principali costanti*, in questi « Rendiconti », vol. XXV, 1° semestre 1916, pp. 59-68.

porzionale al quadrato dell'intensità del campo. Il fattore di proporzionalità è, naturalmente, assai piccolo. Detta $1/R^2$ la curvatura non nulla, risulta ad es., per un campo magnetico di 25000 gauss, R dell'ordine di una decina di siriametri (siriametro = un milione di volte la distanza media fra la Terra e il Sole). Con tutto ciò non è escluso che qualche conseguenza (per es. il modo di variare della velocità della luce lungo le linee di forza) divenga controllabile con osservazioni di fisica cosmica.

Ad un ulteriore tipo, anche più elementare, di soluzione rigorosa si è condotti (n. 5), prefiggendoci che lo spazio assuma curvatura costante e che vi si esercitino sforzi puramente normali. Questo tipo si collega (n. 6) ad una questione molto dibattuta di statistica stellare, su cui si è testè rivolta l'attenzione di EINSTEIN [4].

1. - Campi elettromagnetici stazionari.

Sia

$$ds^2 = \sum_{ik}{}_1^3 a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

l'espressione, in coordinate generali x_1, x_2, x_3, del quadrato dell'elemento lineare dello spazio fisico in una regione che si suppone sede di fenomeni elettromagnetici. Secondo la teoria di EINSTEIN, questi fenomeni influiscono sulla natura metrica dello spazio, sicchè il ds^2 non sarà, in generale, rigorosamente euclideo. Comunque, in condizioni statiche, seguita a valere, anche nella detta teoria, lo schema elettromagnetico ordinario riferito alla metrica (1).

Ci atterremo al caso elementare in cui il campo consta di una sola delle due forze: elettrica ovvero magnetica. Indichi $X_i\,(x_1, x_2, x_3)$ $(i=1, 2, 3)$ il sistema coordinato covariante di questa forza. Le sue componenti (in generale non ortogonali) secondo il triedro delle normali alle superficie coordinate saranno in conformità $X_i\sqrt{a^{(ii)}}$. Introdotti anche gli elementi reciproci

$$X^{(i)} = \sum_j{}_1^3 a^{(ij)} X_j \qquad (i = 1, 2, 3),$$

porremo

$$8\pi u = \sum_i{}_1^3 X^{(i)} X_i\,. \tag{2}$$

Le misure si intenderanno riferite al sistema elettrostatico assoluto,

---

(4) *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, « Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Ak. der Wiss. », 1917, pp. 142-152.

nel senso di GAUSS-HERTZ [5] (in cui la costante dielettrica e la permeabilità magnetica si considerano puri numeri, eguali all'unità per il vuoto). Con ciò, in seno ad un mezzo impolarizzabile (aria o vuoto), u rappresenta la densità di energia dovuta alla forza X_i, mentre il relativo tensore maxwelliano degli sforzi rimane definito dal sistema (covariante)

$$T_{ik} = u a_{ik} - \frac{1}{4\pi} X_i X_k \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{3}$$

I singoli sforzi specifici (trattati come pressioni) risultano dai rapporti $T_{ik}/\sqrt{a_{ii}a_{kk}}$, il cui significato, per una data coppia di indici i, k, è: componente ortogonale secondo la linea x_k dello sforzo che si esercita sopra un elemento superficiale normale alla linea x_i (o viceversa).

Dacchè il campo in questione si suppone essenzialmente stazionario, dovremo ritenere le X_i derivanti da un potenziale φ ($X_i = -\partial\varphi/\partial x_i$), escludendo dalle nostre considerazioni, se si tratta di forza magnetica, quelle eventuali porzioni di campo in cui ci sono correnti.

Assumiamo in particolare $\varphi = - C x_1$ con C costante. Avremo

$$X_1 = C\,, \qquad X_2 = X_3 = 0\,,$$

il che corrisponde ad una forza di intensità $|C|\sqrt{a^{(11)}}$ diretta secondo le normali alle superficie x_1.

Se si suppone inoltre che le linee coordinate siano ortogonali, ossia che il ds^2 abbia la forma

$$H_1^2\,dx_1^2 + H_2^2\,dx_2^2 + H_3^2\,dx_3^2\,,$$

si ha dalle (2) e (3)

$$u = \frac{C^2}{8\pi H_1^2}\,, \tag{2'}$$

$$\begin{cases} \dfrac{T_{11}}{H_1^2} = -\,u, & \dfrac{T_{22}}{H_2^2} = \dfrac{T_{33}}{H_3^2} = u\,, \\ T_{ik} = 0, & (i \neq k), \end{cases} \tag{3'}$$

ciò che rispecchia la caratteristica distribuzione degli sforzi maxwelliani, i quali sono tensioni sugli elementi normali e pressioni sugli elementi paralleli alle linee di forza, colla comune intensità u.

---

[5] Cfr. per es. ABRAHAM, *Theorie der Elektrizität*, B. I, § 61, Leipzig, Teubner, 1912 (4ª edizione).

2. - Spazi (B) del Bianchi.

Il BIANCHI ha chiamato spazi *normali* quelli in cui le tre congruenze costituite dalle linee principali di curvatura risultano normali (ad altrettante famiglie di superficie), ed ha caratterizzato tutti gli spazi normali colle tre curvature principali costanti. Fra questi, a prescindere dal caso classico delle tre curvature eguali (spazi a curvatura costante), ce n'è un solo tipo, che diremo (B), cui spetta curvatura media $\mathfrak{M}$ positiva (6).

In esso due curvature principali sono nulle, e la terza, positiva, si identifica quindi con $\mathfrak{M}$. Posto

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{R^2}, \quad (\text{con } R > 0),$$

si può attribuire al quadrato dell'elemento lineare l'espressione

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \sin^2 \frac{x_2}{R}\, dx_3^2, \tag{B}$$

con riferimento al sistema triplo ortogonale, le cui linee coordinate formano le congruenze principali.

Ciò premesso, ricordo in generale che, ogniqualvolta le congruenze principali sono normali, ove si indichino con ω_i le tre curvature principali e con H_i^2 i coefficienti del ds^2 nella forma ortogonale corrispondente alle dette congruenze, valgono per le α_{ik} del RICCI (7) le espressioni canoniche

$$\alpha_{ik} = 0 \quad (i \neq k), \qquad \alpha_{ii} = \omega_i H_i^2 \qquad\qquad (i = 1, 2, 3).$$

Per il ds^2 (B), cui spettano le curvature $\omega_1 = 1/R^2$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$, si ricava in particolare

$$\alpha_{ik} = 0 \quad (i \neq k), \qquad \alpha_{11} = \frac{1}{R^2}, \qquad \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0\,. \tag{4}$$

Ci sarà comodo immaginare rappresentato uno spazio (B) nell'ordinario spazio euclideo, interpretando x_1, x_2, x_3/R come coordinate cilindriche:

(6) BIANCHI, loc. cit., p. 68.

(7) Negli spazi a tre dimensioni, queste α_{ik} sostituiscono con vantaggio i simboli di RIEMANN a quattro indici. Già ho avuto occasione di richiamarlo nel § 2 della Nota precedente.

ordinatamente z, ϱ, ϑ, il significato di queste ultime lettere essendo manifesto. Si stabilisce così una corrispondenza biunivoca fra i punti dei due spazi, pur essendo diverse le loro due metriche. Alla espressione (B) del ds^2 fa riscontro, per lo spazio rappresentativo, la determinazione euclidea in coordinate cilindriche

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \left(\frac{x_2}{R}\right)^2 dx_3^2 .$$

Le due forme tendono a coincidere per R molto grande: in modo più preciso, risulta trascurabile il divario, allorchè il rapporto x_2/R è abbastanza piccolo perchè si possa confondere il seno coll'arco. In ogni caso, le linee x_1 ed x_2 (rette parallele all'asse delle z e rette che lo incontrano normalmente, nello spazio rappresentativo) sono geodetiche anche nella metrica (B).

3. - Produzione magnetica ovvero elettrostatica di uno spazio (B).

Supponiamo che, in una porzione dello spazio ambiente, priva di materia ponderabile, si provochi un campo uniforme, per es. magnetico, come si realizza comodamente nell'interno di un solenoide percorso da corrente costante. Dobbiamo aspettarci (ammessa la relatività generale di EINSTEIN) che lo spazio occupato dal campo non resti rigorosamente euclideo, tale modificazione di struttura geometrica dello spazio potendo implicare a sua volta una qualche (tenuissima) distorsione delle linee di forza, finchè si ristabilisce un completo equilibrio. Si tratta di determinare la natura dello spazio e l'assetto finale del fenomeno, a equilibrio raggiunto.

La risoluzione del problema va naturalmente desunta dalle equazioni generali della statica einsteiniana, in cui si attribuiscano alla densità di energia e agli sforzi le determinazioni corrispondenti al caso specifico.

Ecco in primo luogo le equazioni statiche (sotto la forma spazialmente invariante, di cui al § 2 della Nota precedente):

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{M} = \varkappa u ,$$

$$\text{(II)} \qquad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \frac{\Delta_2 V}{V} a_{ik} = -\varkappa T_{ik} , \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

dove u è la densità di energia (indicata nella precedente comunicazione con T_{00}/V^2); V la velocità di propagazione della luce: V_{ik} e $\Delta_2 V$ designano derivate covarianti e parametro di second'ordine riferiti al ds^2 dello spazio ambiente; le α_{ik} sono i corrispondenti simboli di Ricci; $\mathfrak{M} = \sum_{ik}^{3} a^{(ik)}\alpha_{ik}$ la curvatura media; infine le T_{ik} costituiscono il tensore degli sforzi; e la costante

$$\varkappa = \frac{8\pi f}{c^4}, \tag{5}$$

essendo f la costante di attrazione universale e c la velocità della luce nel vuoto, in assenza d'ogni azione perturbatrice.

Dico che, a regime stabilito, la sede del nostro campo uniforme è uno spazio (B), *di cui le linee di forza* (sensibilmente rette) *costituiscono la congruenza principale* (geodetica) x_1, *corrispondente alla curvatura non nulla.*

Per dimostrarlo, basterà verificare che le (I), (II) rimangono soddisfatte, qualora:

1) vi si introducano per le a_{ik}, α_{ik} le espressioni che loro competono nella metrica (B);

2) si attribuiscano alla densità di energia u e agli sforzi T_{ik} — che, nella supposta assenza di materia, provengono *esclusivamente* dal campo — le espressioni (2′) e (3′) coi valori 1, 1, $\sin^2(x_2/R)$ di H_1^2, H_2^2, H_3^2;

3) si determini in modo opportuno la funzione V.

In base alla (2′), in cui si faccia $H_1 = 1$, la (I) porge, coincidendo ora $\mathfrak{M}$ con $1/R^2$,

$$\frac{1}{R^2} = \varkappa u = \frac{\varkappa C^2}{8\pi}, \tag{6}$$

e determina così, in funzione dell'intensità del campo, la curvatura dello spazio normalmente alle linee di forza (l'unica che non rimane nulla). Atteso il valore (5) di $\varkappa$, si ricava

$$R = \frac{c^2}{C\sqrt{f}}. \tag{6′}$$

Dalla espressione generale delle derivate seconde covarianti

$$V_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{1}^{3} {}_l \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_l},$$

segue che, per la forma fondamentale (B) e per una funzione della sola x_1, il sommatorio si annulla, talchè le derivate seconde covarianti non differiscono dalle ordinarie, e queste vanno tutte a zero ad eccezione di V_{11} che si riduce a V″ (l'apice indicando derivazione rispetto all'argomento x_1). Si ha poi [coi valori delle $a^{(ik)}$ corrispondenti a (B)]

$$\Delta_2 V = \sum_{ik\,1}^{3} a^{(ik)} V_{ik} = V'' .$$

Con ciò, quelle delle (II) che corrispondono a indici i, k distinti risultano pure identità. Le altre tre, ossia

$$\alpha_{ii} + \frac{V_{ii}}{V} - \frac{\Delta_2 V}{V} H_i^2 = -\varkappa T_{ii}\,, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

dànno, in base alle (3′) e (4),

$$\frac{1}{R^2} = \varkappa u \quad (i = 1); \qquad \frac{V''}{V} = \varkappa u \quad (i = 2, 3).$$

La prima coincide colla (6), e la seconda, introducendovi per $\varkappa u$ il suo valore $1/R^2$ ed integrando, porge

(7) $$V = c_1 e^{x_1/R} + c_2 e^{-x_1/R} \qquad (c_1,\ c_2 \text{ costanti}).$$

4. - Ordine di grandezza di R.

Campi magnetici. - L'intensità C praticamente raggiungibile può ammontare a qualche decina di migliaia di gauss. Prendiamo 25 000 a titolo di apprezzamento. Esprimendo anche c ed f in unità C.G.S., la (6′) dà R in centimetri. Ora $c = 3\cdot 10^{10}$, $f = 6{,}6\cdot 10^{-8}$, sicchè, arrotondando, risulta $R = \frac{3}{2}\cdot 10^{20}$ cm $= \frac{3}{2}\cdot 10^{15}$ km. Se si nota che $\frac{3}{2}\cdot 10^{8}$ km è la distanza media Sole-Terra, si arriva alla conclusione che, *per un campo di* 25 000 *gauss, il raggio di curvatura vale dieci milioni di volte la distanza media fra la Terra e il Sole, ossia dieci siriametri.* Esso varia in ragione inversa dell'intensità del campo; ma rimane comunque al di fuori d'ogni attuale possibilità sperimentale di ridurlo a dimensione apprezzabile entro un laboratorio. Non è invece da escludere che qualche altra previsione della teoria, per es. la variazione esponenziale della velocità V della luce lungo le linee di forza, quale risulta dalla (7), divenga osservabile in fisica cosmica.

Campi elettrostatici. - Per la valutazione numerica di R, seguita a valere la formula (6′), purchè l'intensità C del campo sia espressa in unità elettrostatiche. Indichiamo con C_v l'intensità in questione espressa in volt per centimetro. Sarà $10^8\ C_v$ la sua misura in unità elettromagnetiche C.G.S.; quindi $C = 10^8\ C_v/c = C_v/300$ è il numero da introdurre nella (6′), ricavandone, come sopra, R in cm.

Quando pur si attribuiscano a C_v valori tra i più alti finora raggiunti, diciamo $5 \cdot 10^5$ (il che può essere giustificato, pensando che si tratta di campi nel vuoto, sì che non c'è da preoccuparsi delle scariche distruttive), si ha per C il valore $\frac{5}{3} \cdot 10^3$, che è appena la quindicesima parte di quello considerato nel precedente esempio di campo magnetico. Il raggio R risulterebbe in conformità 15 volte più grande.

5. - Soluzioni particolari nell'ipotesi che lo spazio assuma una curvatura costante K.

Varranno anzitutto le relazioni geometriche fondamentali

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_{ik} &= K a_{ik} \\ \mathfrak{M} &= 3K \,, \end{aligned}\right. \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{8}$$

con che la (I) diviene

$$3K = \varkappa u \,. \tag{9}$$

Ne desumiamo $K \geqslant 0$, il che rientra nell'osservazione generale della Nota precedente che, in condizioni statiche, la curvatura media $\mathfrak{M}$ è sempre positiva o nulla. La (9) stessa mostra poi che u è necessariamente costante insieme a K, ossia che il mezzo deve presentare una distribuzione uniforme di energia.

Nell'ipotesi che sia uniforme anche la distribuzione degli sforzi e che questi si esplichino normalmente, avremo altresì

$$T_{ik} = p a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{10}$$

con p costante positiva o negativa, secondochè lo sforzo normale cui si trova sottoposto ogni elemento del mezzo ha carattere di pressione ovvero di tensione.

Tenuto conto delle (9) e (10), le (II) divengono

$$\frac{V_{ik}}{V} + \left(K + \varkappa p - \frac{\Delta_2 V}{V}\right) a_{ik} = 0 \,, \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{11}$$

a cui si può soddisfare in due modi diversi.

1) *V costante.* – In tal caso è necessario e basta aggiungere alla (9) la condizione

$$K + \varkappa p = 0 . \tag{12}$$

Dal loro confronto segue $p = - u/3$, e si è condotti al seguente enunciato:

Entro un mezzo omogeneo uniformemente stirato con una trazione $u/3$ (u densità dell'energia), lo spazio assume curvatura costante positiva $K = \varkappa u/3$, la velocità della luce conservandosi costante.

Si noterà tuttavia che un tale mezzo non potrebbe essere costituito da materia ordinaria, nè allo stato fluido, nè allo stato solido. Non allo stato fluido, perchè gli sforzi interni in tale stato hanno sempre carattere di pressioni; e nemmeno allo stato solido, perchè l'ordine di grandezza della trazione $u/3$ è ben superiore ai limiti di rottura. Un apprezzamento numerico si ha immediatamente, pensando che, detta μ la densità materiale di un eventuale mezzo solido nelle condizioni supposte, sarebbe sensibilmente $u = c^2\mu$ e si tratterebbe quindi di una trazione di $\frac{1}{3}c^2\mu = 3\cdot 10^{20}\cdot\mu$ dine per cm².

2) *V variabile.* – Dalle (11), moltiplicate per $a^{(ik)}$ e sommate rispetto ai due indici i e k, segue in primo luogo

$$\frac{\Delta_2 V}{V} + 3\left(K - \frac{\Delta_2 V}{V} + \varkappa p\right) = 0 ,$$

ossia

$$\frac{\Delta_2 V}{V} = \frac{3}{2}(K + \varkappa p) .$$

Le (11) stesse equivalgono quindi a

$$\frac{V_{ik}}{V} + K^* a_{ik} = 0 , \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{13}$$

dove si è posto per brevità

$$K^* = K - \frac{1}{2}(3K + p\varkappa) .$$

È facile riconoscere che le (13) risultano effettivamente compatibili, per V *non* costante, anzi costituiscono un sistema completo rispetto alla stessa V, considerata come funzione incognita, allora e soltanto allora che $K^* = K$ [8].

[8] Per stabilirlo, conviene ricordare [Ricci e Levi-Civita, « Math. Ann. », vol. 54, 1900, p. 143; in queste « Opere »: vol. primo, XXXII, p. 498] che le derivate seconde covarianti d'ogni sistema semplice V_1 verificano le relazioni

$$V_{ikl} - V_{ilk} = \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, a_{kl,ji}\, a^{(jh)} V \qquad (i, k, l = 1, 2, 3).$$

Ciò richiede

$$3K + \varkappa p = 0\,, \tag{14}$$

che, associata alla (9), porge $p = -u$, e dà luogo alle stesse considerazioni qualitative di pocanzi.

Per l'integrazione delle (13), giova prendere il ds^2 (che ha per ipotesi la curvatura costante K) sotto la forma tipica [9]

$$\frac{1}{\psi^2}\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)\,, \tag{15}$$

Ricorriamo ai sistemi E, e da un lato sostituiamo, ai simboli di RIEMANN, le $\alpha^{(pq)}$ di RICCI, a norma della formula

$$a_{hl,ji} = \sum_{pq}{}_1^3\, a^{(pq)} \varepsilon_{pkl} \varepsilon_{qji}\,;$$

teniamo conto d'altro lato che, nel caso presente, $\alpha^{(pq)} = K a^{(pq)}$, talchè si può anche porre

$$\alpha^{(pq)} = \frac{K}{2} \sum_{\nu\varrho\sigma\tau}{}_1^3\, a_{\nu\sigma} a_{\varrho\tau} \varepsilon^{(p\nu\varrho)} \varepsilon^{(q\sigma\tau)}\,.$$

Avuto riguardo alle identità

$$\sum_p{}_1^3\, \varepsilon^{(p\nu\varrho)} \varepsilon_{pkl} = \varepsilon_{\nu k} \varepsilon_{\varrho l} - \varepsilon_{\nu l} \varepsilon_{\varrho k}\,, \qquad (\nu, \varrho, k, l = 1, 2, 3),$$

che giova aver presenti anche sotto la forma

$$\sum_q{}_1^3\, \varepsilon^{(q\sigma\tau)} \varepsilon_{qji} = \varepsilon_{\sigma j} \varepsilon_{\tau i} - \varepsilon_{\sigma i} \varepsilon_{\tau j}\,, \qquad (\sigma, \tau, j, i = 1, 2, 3),$$

e in cui, ben si intende, le ε a due indici valgono zero o uno secondochè questi indici sono distinti o coincidono, risulta

$$V_{ikl} - V_{ilk} = \frac{K}{2} \sum_{jh\nu\varrho\sigma\tau}{}_1^3\, a_{\nu\sigma} a_{\varrho\tau} a^{(jh)} V_h (\varepsilon_{\nu k} \varepsilon_{\varrho l} - \varepsilon_{\nu l} \varepsilon_{\varrho k})(\varepsilon_{\sigma j} \varepsilon_{\tau i} - \varepsilon_{\sigma i} \varepsilon_{\tau j}) = K(a_{il} V_k - a_{ik} V_l)\,.$$

Nell'ipotesi che le V_i siano le derivate d'una funzione V che verifica le (13), si ha, dalle (13) stesse, moltiplicando per V e derivando covariantemente,

$$V_{ikl} = -K^* a_{ik} V_l\,,$$

che, introdotte nelle precedenti, dànno luogo alle condizioni di integrabilità:

$$(K - K^*)(a_{il} V_k - a_{ik} V_l) = 0\,,$$

per ogni terna di indici i, k, l.

Dacchè, per ipotesi, V è un'effettiva funzione, una almeno delle sue derivate, diciamo per es. V_k, sarà diversa da zero. Fissiamo, nelle equazioni testè stabilite, questo valore di k e un valore di l diverso da k; e moltiplichiamo per $a^{(ik)}$, sommando rispetto all'indice i. Ricaveremo

$$(K - K^*) V_k = 0\,,$$

donde appunto $K - K^* = 0$; c. d. d.

[9] BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, p. 345, Pisa, Spoerri, 1902.

con

$$\psi = 1 + \frac{1}{4} K \cdot (x_1^2 + x^2 + x_3^2) \,. \tag{16}$$

Per le derivate covarianti V_{ik} si ricavano subito (dalla formula di definizione) le espressioni esplicite

$$V_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_k}\right) - \frac{\varepsilon_{ik}}{\psi}\sum_1^3{}_l \frac{\partial \psi}{\partial x_l}\frac{\partial V}{\partial x_l},$$

col solito significato delle ε_{ik} (0 per $i \neq k$, 1 per $i = k$).

Portando nelle (13) e badando alla forma (15) del ds^2, nonchè alla (16), si ha in primo luogo

$$\frac{\partial^2(\psi V)}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \,, \qquad (i \neq k),$$

donde apparisce che

$$W = \psi V$$

dev'essere a variabili separate (somma di tre funzioni, una della sola x_1, una della sola x_2 e una della sola x_3).

Le rimanenti (13), in cui, ben si intende, si faccia $K^* = K$, dànno

$$\psi^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i} - \psi \sum_1^3{}_l \frac{\partial \psi}{\partial x_l}\frac{\partial V}{\partial x_l} + KV = 0 \,,$$

ossia

$$\psi \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} W - \sum_1^3{}_l \frac{\partial \psi}{\partial x_l}\frac{\partial W}{\partial x_l} + \left\{K + \sum_1^3{}_l \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_l}\right)^2\right\}\frac{W}{\psi} = 0 \,.$$

In virtù della (16),

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2} K, \qquad K + \sum_1^3{}_l \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_l}\right)^2 = K\psi \,,$$

talchè in definitiva l'ausiliaria W (a variabili separate) si trova sottoposta alle tre condizioni

$$\psi \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} - \sum_1^3{}_l \frac{\partial \psi}{\partial x_l}\frac{\partial W}{\partial x_l} + \frac{1}{2} KW = 0 \,, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

con $\psi = 1 + \frac{1}{4} K \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Data questa forma di ψ, ogni $\partial^2 W / \partial x^2$

deve ridursi ad una costante, e risulta subito che la più generale soluzione è

$$W = b_0 \left\{ \tfrac{1}{4} K \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 1 \right\} + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \,,$$

le b designando costanti arbitrarie. Con tale espressione di W,

$$V = \frac{1}{\psi} W$$

costituisce in conformità l'integrale generale delle (13).

6. - Termine addizionale recentemente proposto da Einstein.

Riflessioni statistiche sulla distribuzione asintotica della materia nell'universo stellare hanno indotto EINSTEIN (10) a saggiare l'introduzione di un piccolo termine correttivo (perfettamente compatibile coi postulati della relatività generale) nelle sue equazioni fondamentali. Queste erano (con referenza al ds^2 quadridimensionale)

$$\text{(E)} \qquad G_{ik} - \tfrac{1}{2} G g_{ik} = - \varkappa T_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3);$$

e dovrebbero modificarsi come segue:

$$\text{(E}'\text{)} \qquad G_{ik} - (\tfrac{1}{2} G + \lambda) g_{ik} = - \varkappa T_{ik} \,,$$

λ designando una costante universale positiva.

In condizioni statiche, la forma quaternaria

$$\sum_0^3{}_{ik}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

si riduce a

$$V^2 dx_0^2 - ds^2 = V^2 dx_0^2 - \sum_1^3{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k \,,$$

ed è opportuno mettere in evidenza la metrica spaziale.

(10) La stessa ipotesi di una distribuzione quasi uniforme di materia nel mondo suggerì all'ALMANSI interessanti specificazioni positive e formali, inquadrabili nell'ordinario schema newtoniano. Cfr. *Le equazioni fondamentali della Dinamica e la legge di gravitazione* nelle Memorie di questa Accademia, vol. IX, 1913, pp. 473-502.

Se, in luogo delle (E), si accettano le (E′), si hanno, in luogo delle (I) e (II), queste equazioni statiche ([11]):

$$\mathfrak{M} - \lambda = \varkappa u\,, \tag{I′}$$

$$\alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \left(\frac{\Delta_2 V}{V} + \lambda\right) a_{ik} = -\,\varkappa T_{ik}\,, \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{II′}$$

Dacchè $\lambda > 0$, la (I′) mostra che il termine complementare rende verificata *a fortiori* (escludendo il caso limite $\mathfrak{M} = 0$) la proprietà generale dello spazio fisico (da noi rilevata al § 1 della precedente Nota) di non poter mai assumere in condizioni statiche curvatura media negativa.

Se poi si introducono le ipotesi particolari del n. 5, supponendo che si tratti di spazio a curvatura costante K, sottoposto a sforzi normali, con che valgono le (8) e (10), le (I′) e (II′) assumono l'aspetto

$$3K - \lambda = \varkappa u\,, \tag{9′}$$

$$\frac{V_{ik}}{V} + \left(K + \varkappa p - \frac{\Delta_2 V}{V} - \lambda\right) a_{ik} = 0\,, \quad (i, k = 1, 2, 3). \tag{11′}$$

Queste corrispondono manifestamente alle (9) e (11) del n. prec., identificandosi con esse per $\lambda = 0$. La discussione si fa nello stesso modo, col vantaggio che la presenza della costante λ lascia un certo margine a valori positivi di p.

Occupiamoci in particolare delle soluzioni per cui V è costante. Alla (9′) dovremo associare la

$$K + \varkappa p = \lambda\,, \tag{12′}$$

talchè, eliminando K, otteniamo

$$3\varkappa p = 2\lambda - \varkappa u\,. \tag{17}$$

Per $p = 0$, si ha la soluzione particolare di EINSTEIN

$$\bar{u} = \frac{2\lambda}{\varkappa}\,, \qquad \bar{K} = \lambda\,,$$

([11]) Il passaggio dalle (E′) alle (I′), (II′) si fa esattamente come dalla forma originaria (E) alle (I), (II) [§§ 1-2 della Nota prec., già più volte citata]: basta soltanto tener conto del termine addizionale in λ.

che caratterizza la distribuzione media $\overline{u}$ di energia (e quindi di materia) nell'intero spazio, supposto che esso sia (tranne divergenze locali) dotato di una curvatura costante, e riempito (in modo statisticamente uniforme) di materia incoerente, tra le cui particelle non si esercitano sforzi molecolari.

La (17) mostra che si può generalizzare la soluzione di EINSTEIN, assumendo a piacere il valore di u (costante e $\geqslant 0$). Con ciò si conserva la piena uniformità delle caratteristiche geometriche e meccaniche, ma non l'assenza di sforzi normali. Questi si esplicano come pressioni per $u < \overline{u}$, come tensioni per $u > \overline{u}$. Ragionevoli induzioni sul comportamento della materia, per quanto diffusa, portano ad escludere la seconda eventualità: u si presenta quindi come un limite superiore della densità media di energia attribuibile all'universo stellare. Sia per ciò, che per l'assenza di sforzi che la caratterizza, la soluzione di EINSTEIN presenta senza dubbio il maggiore interesse speculativo.

VI.

ds^2 EINSTEINIANI IN CAMPI NEWTONIANI

NOTA I.

GENERALITÀ E PRIMA APPROSSIMAZIONE

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. $XXVI_2$ (1917_2),
pp. 307-317.

La questione che è oggetto della presente Nota e di alcune altre che le faranno seguito si imposta fisicamente così:

Una regione dello spazio è sede di un campo di forza — nell'ordinaria meccanica si direbbe senz'altro newtoniano — dovuto all'azione di masse esterne al campo. Supposto che le masse non si spostino e che non intervenga nessun'altra circostanza perturbatrice, si stabilisce — pur valendo la nuova meccanica di EINSTEIN — un regime statico, poco diverso da quello che risponde alla tradizione classica, le condizioni di equilibrio dovendosi desumere dalle equazioni gravitazionali di EINSTEIN. Il nostro scopo è appunto di discutere le principali conseguenze di codeste equazioni nel caso semplice testè specificato.

Dacchè il divario quantitativo dallo schema abituale è appena sensibile alle più affinate esperienze, siamo intuitivamente tratti a presumere che ad ogni ordinario potenziale newtoniano si coordini una soluzione dell'anzidetto sistema differenziale, sicchè il grado di arbitrarietà del suo integrale generale sarà quello stesso delle funzioni armoniche. Ciò si mette in evidenza, direi quasi automaticamente, quando, nella trattazione delle equazioni differenziali, ci si limita ad una prima approssimazione. Il potenziale newtoniano $-c^2\gamma$ (c costante universale ben nota) conserva allora, nei riguardi statici, il suo significato ordinario (vuoi di lavoro, vuoi, cambiando il segno, di energia posizionale di un ipotetico punto materiale mobile nel campo); e la metrica dello spazio ambiente subisce soltanto una alterazione conforme (rispetto alla metrica euclidea che vige in assenza del campo), di modulo $1-\gamma$ assai prossimo all'unità, avendosi l'elemento lineare

$$dl = (1 - \gamma)\, dl_0 ,$$

con dl_0 euclideo.

In questa prima Nota, prendo anzitutto occasione dai richiami preliminari (nn. 1 e 2) per una osservazione meccanica di carattere generale; ed è che, nella statica di EINSTEIN, seguitano bensì a sussistere le consuete nozioni elementari di funzione delle forze (entro un campo conservativo) e di energia posizionale (di un punto materiale mobile nel campo), ma sono in generale distinte. Soltanto in prima approssimazione, una è l'opposta dell'altra, a meno di una inessenziale costante additiva, come nella meccanica ordinaria.

Scritte poi [n. 3] le equazioni fondamentali, mi occupo qui esclusivamente della loro integrazione approssimata [nn. 4-8] col risultamento già indicato.

Rimetto alle Note successive lo studio rigoroso del sistema differenziale. Nella prossima comunicazione ricaverò le condizioni di integrabilità illustrandole sotto l'aspetto geometrico.

1. - Richiami concernenti il moto di un punto materiale in campo statico.

Sia S una porzione qualsivoglia dello spazio fisico:

$$dl^2 = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare, e V la velocità della luce in un generico punto P di S.

L'ipotesi che la forma quaternaria fondamentale della teoria di EINSTEIN sia esente da termini rettangoli in dt, ossia del tipo

$$ds^2 = V^2\, dt^2 - dl^2 , \tag{2}$$

e che i coefficienti V^2, a_{ik} siano funzioni del posto P (cioè delle coordinate x_1, x_2, x_3) *indipendenti da* t, traduce matematicamente la limitazione a fenomeni di carattere statico.

Il moto di un punto materiale (supponendo al solito che si possa prescindere da ogni sua azione sul campo) è retto dalla equazione variazionale

$$\delta \int ds = 0 .$$

Posto per brevità

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$v^2 = \frac{dl^2}{dt^2} = \sum_{ik}^{3}{}_1 \, a_{ik} \, dx_i dx_k \,, \qquad L = c\,|\sqrt{V^2 - v^2}\,|\,,$$

con c costante *a priori* arbitraria, se ne traggono le equivalenti equazioni di LAGRANGE (¹)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Dacchè L non contiene esplicitamente t, esse ammettono il ben noto integrale

$$L - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i = E \qquad (E \text{ costante}), \tag{4}$$

che esprime il principio di conservazione dell'energia. Infatti la funzione della posizione e della velocità del mobile, che sta nel primo membro e che mantiene valore invariato durante il movimento, può interpretarsi come energia (per unità di massa) del mobile stesso: basta attribuire alla costante c il valore, diciamo canonico, della velocità della luce in assenza di ogni azione perturbatrice, e prender norma dal caso elementare ($V = c$ e dl euclideo) (²).

Osservazione. — Nella citata mia Nota sulla statica einsteiniana avevo adottato per L la determinazione $|\sqrt{V^2 - v^2}|$ (senza l'inessenziale fattore c) con che le dimensioni di L erano quelle di una velocità. Lo stesso avvenendo per il primo membro del corrispondente integrale, questo risultava soltanto proporzionale all'energia unitaria del mobile. Coll'attuale L, il primo membro di (4) rappresenta proprio la detta energia.

2. - Significato meccanico della funzione $-\frac{1}{2}V^2$.

Se ad un dato istante si annulla la velocità del mobile, cioè ognuna delle $\dot{x}_i$ (caso del moto incipiente a partire dalla quiete), si ha in particolare dalle (3)

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik}\ddot{x}_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{5}$$

(¹) Cfr. la Nota *Statica einsteiniana*, in questi « Rendiconti », vol. XXVI (1° sem. 1917), pag. 465 [in questo vol.: pag. 67].

(²) Cfr. A. PALATINI, *Lo spostamento del perielio di Mercurio e la deviazione dei raggi luminosi secondo la teoria di Einstein*, « Nuovo Cimento », serie VI, vol. XIV, 1917, pag. 40.

le quali definiscono le $\ddot{x}_i$ (i due punti sovrapposti significando, ben s'intende, duplice derivazione rapporto a t) in funzione del posto. I secondi membri

$$X_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x_i} \tag{6}$$

(in quanto derivate di una medesima funzione $-\frac{1}{2}V^2$) costituiscono manifestamente un sistema covariante (di fronte a trasformazioni qualsivogliono di coordinate spaziali). Il sistema contravariante reciproco è

$$X^{(i)} = \sum_{1}^{3}{}_k\, a^{(ik)} X_k\,,$$

designandosi al solito con $a^{(ik)}$ i coefficienti della quadrica reciproca di dl^2.

La risoluzione delle (5) porge precisamente

$$\ddot{x}_i = X^{(i)}\,,$$

mettendo in evidenza il carattere contravariante delle accelerazioni incipienti: voglio dire delle $\ddot{x}_i$ spettanti ad un punto materiale in campo statico, quando si assumono tutte le $\dot{x}_i$ eguali a zero.

Ai due sistemi semplici reciproci X_i, $X^{(i)} = \ddot{x}_i$ si coordina notoriamente (³) un unico vettore $\boldsymbol{F}$ (dello spazio euclideo tangente, col quale del resto si identifica qualunque varietà nell'intorno di prim'ordine di un suo punto generico).

Tale vettore $\boldsymbol{F}$ *porge ovviamente la misura statica della forza* (unitaria) *del campo* (accelerazione incipiente di un punto materiale libero, o, se si vuole, accelerazione che è d'uopo vincere per mantenere il punto in quiete).

Consideriamo, accanto al punto P di coordinate x_i, un punto vicinissimo P' di coordinate $x_i + dx_i$ e il trinomio (invariante)

$$\sum_{1}^{3}{}_i\, X_i dx_i = -\frac{1}{2} dV^2\,.$$

Indicando con dl l'elemento lineare PP', $-\frac{1}{2}(dV^2/dl)$ si presenta come derivata (in P) della funzione $-\frac{1}{2}V^2$ secondo l'arco (di una qualsiasi linea) uscente da P verso P'. D'altra parte i rapporti dx_i/dl sono

(³) RICCI et LEVI-CIVITA, *Méthodes de calcul différentiel absolu*, etc., « Math. Ann. », B. LIV, 1900, pag. 137 [in queste « Opere »: vol. primo, XXXII, pag. 492].

i parametri spettanti alla direzione PP', e la proiezione ortogonale (col debito segno) del vettore $\boldsymbol{F}$ secondo tale direzione è espressa dall'invariante

$$\sum_1^3{}_i X_i \frac{dx_i}{dl} = -\frac{1}{2}\frac{dV^2}{dl}.$$

Perciò, definendo il lavoro elementare di $\boldsymbol{F}$ relativo allo spostamento PP', come nell'ordinario spazio euclideo, quale prodotto dello spostamento per la proiezione ortogonale della forza, l'identità

$$-\frac{1}{2}\frac{dV^2}{dl}dl = -\frac{1}{2}dV^2$$

mostra che $-\frac{1}{2}V^2$ *costituisce la funzione potenziale della forza che si esercita nel campo in condizioni statiche.*

Vale la pena di rilevare che, mentre nell'ordinaria meccanica questa funzione potenziale, cambiata di segno, si può anche interpretare come una energia di posizione spettante al punto mobile, ciò in generale non avviene nella teoria di EINSTEIN. Infatti dalla (4), quando la velocità si annulla, si ha la parte intrinseca (cioè costante) e posizionale dell'energia del mobile complessivamente espressa da cV, che non coincide con $\frac{1}{2}V^2$, nemmeno a prescindere da una costante additiva (inessenziale, rispetto alla funzione potenziale $-\frac{1}{2}V^2$). Le due espressioni cV e $\frac{1}{2}V^2$ hanno differenza costante soltanto in prima approssimazione, quando cioè il divario di V dal valore costante c è abbastanza piccolo perchè, ponendo $V = c(1+\gamma)$, sia lecito risguardare γ come una quantità (numero puro), di prim'ordine. Si ha allora

$$cV = c^2(1+\gamma), \qquad \frac{1}{2}V^2 = \frac{1}{2}c^2(1+2\gamma),$$

che differiscono per $\frac{1}{2}c^2$.

3. - Campi vuoti. Equazioni indefinite.

Supponiamo che la porzione S di spazio a cui si riferiscono le nostre considerazioni sia completamente vuota, abbia cioè densità di energia (e quindi di materia) ovunque nulla. Supponiamo inoltre che entro S siano ovunque nulli gli sforzi specifici. In tali condizioni si annullano evidentemente, in ogni punto di S, tutti gli elementi del tensore energetico (sforzi, densità e flusso di energia).

Il ds^2 einsteiniano (e con esso il dl^2 spaziale) sarebbe rigorosamente euclideo, qualora il tensore suddetto fosse zero in *tutto* lo spazio ([4]). Noi ci proponiamo più generalmente di indagare le limitazioni che derivano dal semplice annullamento *locale* (in una porzione finita S di spazio).

Le equazioni indefinite che vanno all'uopo discusse sono manifestamente quelle della statica einsteiniana, coi secondi membri eguali a zero (per essere nullo il tensore energetico), cioè le sette seguenti ([5]):

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{M} = 0 \,,$$

$$\text{(II)} \qquad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

In queste si considera come fondamentale il dl^2 spaziale (anzichè il ds^2 quadridimensionale di EINSTEIN): le α_{ik} sono i simboli di RICCI (che sostituiscono con vantaggio quelli di RIEMANN per le forme ternarie);

$$\mathfrak{M} = \sum_{ik}^{3}{}_{1}\, a^{(ik)} \alpha_{ik}$$

è la curvatura media dello spazio. Essendo notoriamente

$$\Delta_2 V = \sum_{ik}^{3}{}_{1}\, a^{(ik)} V_{ik} \,,$$

la (I), in virtù delle (II), equivale alla condizione di armonicità

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \Delta_2 V = 0 \,.$$

4. - Prima approssimazione. Conseguente linearità del sistema differenziale.

Se si suppone che l'espressione (2) del ds^2 sia molto prossima al tipo euclideo riferito a coordinate cartesiane di spazio

$$c^2\, dt^2 - \sum_{i}^{3}{}_{1}\, dx_i^2 \,,$$

([4]) L'affermazione è intuitiva sotto l'aspetto fisico, rispecchiando, si può dire, il punto di partenza della costruzione speculativa di EINSTEIN. Dal punto di vista matematico si richiederebbe invece una dimostrazione rigorosa in base alle equazioni che racchiudono oramai tutta la teoria. Non mi consta che tale dimostrazione sia stata data, e mi permetto di segnalarlo, osservando che il teorema in questione si riduce, nel caso limite della meccanica ordinaria, alla costanza d'ogni funzione armonica regolare in tutto lo spazio.

([5]) Pag. 464 della già citata nota, *Statica einsteiniana* [in questo vol.: pag. 66].

giova porre, assieme a

$$(5)\qquad V = c(1+\gamma)\,,$$

$$(6)\qquad a_{ik} = \varepsilon_{ik} + e_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

col solito significato dei simboli ε_{ik} (0 per $i \neq k$ e 1 per $i = k$). Si ha così

$$(6')\qquad dl^2 = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k = dl_0^2 + \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, e_{ik}\, dx_i\, dx_k\,,$$

dove dl_0^2 è l'elemento lineare dell'ordinario spazio euclideo riferito a coordinate cartesiane.

Le e_{ik} sono puri numeri al pari della γ, e il supposto comportamento qualitativo del ds^2 equivale, in prima approssimazione, a trattare come infinitesime tutte queste sette quantità.

I simboli di RIEMANN $a_{ij,hk}$ relativi alla forma (6') [e quindi ai coefficienti (6)] si riducono in conformità a (6)

$$a_{ij,hk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 e_{jh}}{\partial x_i\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_j\, \partial x_h} - \frac{\partial^2 e_{ih}}{\partial x_j\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 e_{jk}}{\partial x_i\, \partial x_h}\right) \qquad (i, j, h, k = 1, 2, 3).$$

Dacchè, a meno di termini di prim'ordine, le $a^{(jh)}$ conservano i valori euclidei ε_{jh}, ne consegue

$$G_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, a^{(jh)} a_{ij,hk} = \sum_{1}^{3}{}_{j}\, a_{ij,jk} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{j}\left(\frac{\partial^2 e_{jj}}{\partial x_i\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_j\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 e_{jk}}{\partial x_i\, \partial x_j}\right).$$

In generale le G_{ik} sono legate alle α_{ik} di RICCI dalle relazioni [(14) della Nota *Statica einsteiniana*, già due volte citata]

$$\alpha_{ik} = G_{ik} + \mathcal{M} a_{ik}\,.$$

Coll'espressione delle G_{ik} testè ricavata, dato che, nel caso presente, $\mathcal{M} = 0$ a norma della (I), risulta

$$(7)\qquad \alpha_{ik} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{j}\left(\frac{\partial^2 e_{jj}}{\partial x_i\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_j\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 e_{jk}}{\partial x_i\, \partial x_j}\right).$$

(6) BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 1902], pag. 73; oppure RICCI et LEVI-CIVITA, loc. cit., pag. 142.

La determinazione delle incognite γ, e_{ik} va desunta dalle (I), (II), o, se si vuole, dalle equivalenti (I'), (II).

Importa rilevare che, a meno di termini d'ordine superiore al primo (nelle γ, e_{ik}), le derivate covarianti V_{ik} di $V = c(1+\gamma)$ rispetto alla forma (6') coincidono colle corrispondenti derivate ordinarie di $c\gamma$. Con ciò

$$\Delta_2 V = c\Delta_2^0\gamma\ ,$$

rappresentando Δ_2^0 l'ordinario parametro differenziale di 2° ordine relativo al dl_0^2, cioè l'operatore $\sum_1^3{}_i\, \partial^2/\partial x_i^2$. Le (I'), (II) possono quindi scriversi

$$\Delta_2^0\gamma = 0\ , \tag{8}$$

$$\alpha_{ik} = -\frac{\partial^2\gamma}{\partial x_i\,\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{9}$$

dove le α_{ik} sono le combinazioni lineari (differenziali del 2° ordine) (7) delle incognite e_{ik}.

5. - Isolamento del problema statico.

Ricordando dal n. 2 che $-\frac{1}{2}V^2$, o, ciò che è lo stesso, $-\frac{1}{2}(V^2 - c^2) = -c^2\gamma$ costituisce *il potenziale* (statico) *del campo*, appare dalla (8) che questo (come nella teoria classica dell'attrazione newtoniana all'esterno dell'agente) *è sottoposto alla restrizione di essere funzione armonica, nonchè, ben si intende, regolare nel campo*. Il campo stesso — data la forma della (8) — si comporta, nei riguardi della legge di variazione del potenziale, come se fosse euclideo e riferito a coordinate cartesiane.

Le (9) — lo accerteremo tra un momento — non implicano alcun ulteriore vincolo per la funzione γ; quindi, *inversamente, ogni γ armonica e regolare in S dà luogo ad un campo possibile*. Ciò è perfettamente conforme allo schema ordinario, secondo cui il gradiente d'ogni funzione armonica e regolare in un campo può essere (in infiniti modi) realizzato mediante l'attrazione di masse esterne al campo.

6. - Il problema geometrico. Soluzione particolare.

Venendo oramai alle (9), si nota in primo luogo che una soluzione particolare si ha prendendo

$$e_{ik} = -2\varepsilon_{ik}\gamma \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{10}$$

La verificazione è immediata, attesa l'espressione (7) delle α_{ik} e l'armonicità della γ.

Siccome poi le (3) stesse costituiscono un sistema lineare, non omogeneo, nelle e, l'integrale generale si ha senz'altro componendo (per via di somma) la soluzione (10) con la soluzione più generale delle equazioni prive di secondo membro

$$\alpha_{ik} = 0 \ .$$

Dacchè γ non interviene più, è provata l'affermazione del n. prec. circa l'isolamento del problema statico.

L'integrale generale del sistema $\alpha_{ik} = 0$ è ben noto; ma, come si preciserà qui appresso, non ha per noi importanza, corrispondendo soltanto a cambiamenti delle coordinate di riferimento.

7. - Carattere inessenziale dell'arbitrarietà formalmente spettante all'integrale generale.

L'annullarsi delle α_{ik} esprime (rigorosamente, non soltanto nel nostro ordine di approssimazione) la condizione necessaria e sufficiente perchè il corrispondente dl^2 (ternario) sia euclideo, ossia riducibile con acconcia scelta di parametri alla forma $\sum_1^3{}_i\, dy_i^2$. Perciò, dette genericamente x_1, x_2, x_3 le coordinate di riferimento, la maniera più generale di definire un dl^2 euclideo, rispetto a tali coordinate x, si ha manifestamente introducendo una qualunque trasformazione fra le y e le x,

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

e prendendo per coefficienti a_{ik} quelli che risultano dall'esprimere $\sum_1^3{}_i\, dy_i^2$ mediante i differenziali delle x. Assumendo, come è sempre lecito, le funzioni $y_i(x_1, x_2, x_3)$ sotto la forma

$$x_i + \xi_i(x_1, x_2, x_3) \ ,$$

si ha $\Big($per materiale introduzione dei corrispondenti differenziali nel trinomio $\sum_1^3{}_i\, dy_i^2\Big)$

$$dl^2 = \sum_1^3{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

con

$$a_{ik} = \varepsilon_{ik} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \sum_1^3{}_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \, .$$

Per rispecchiare la limitazione al prim'ordine delle differenze $a_{ik} - \varepsilon_{ik}$, colla specificazione ulteriore che sia dello stesso ordine il divario fra il reticolato cartesiano delle y e quello (curvilineo) delle x (7), basta (e occorre) poter trattare come infinitesime le funzioni ξ (assieme alle loro derivate). Ne risulta

(11)
$$e_{ik} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \, ,$$

che costituisce l'espressione formale dell'integrale generale del sistema omogeneo $\alpha_{ik} = 0$ [le α_{ik} dipendendo linearmente dalle e, a norma delle (7)].

Ma non è questa espressione formale che importa ritenere, sibbene la circostanza che il termine (11) [da aggiungere a (10) per avere l'integrale generale del sistema (9) a secondi membri non nulli] si può sempre rendere eguale a zero mediante opportuno cambiamento di coordinate: sostituendo cioè alle x le combinazioni

(12)
$$y_i = x_i + \xi_i(x_1, x_2, x_3) \, ,$$

con che l'espressione del dl^2 si riduce, per costruzione, a $\sum_1^3{}_i dy_i^2$, annullandosi tutte le differenze $a_{ik} - \varepsilon_{ik}$.

Scelte per variabili le y, si deve naturalmente far subire la trasformazione (12) anche alla soluzione particolare (10). Ma la (12) — dovendosi riguardare le ξ infinitesime al pari di γ — si riduce, nei riguardi della (10), alla materiale sostituzione delle y alle x. Rimane perciò inalterata, anche riferendosi alle y, la espressione (11) della soluzione particolare che sola ci interessa.

Si noti inoltre che rimane egualmente inalterata la forma elementare (somma delle derivate seconde) del parametro $\Delta_2^0 \gamma$.

---

(7) In difetto di tale specificazione, si esige soltanto che risultino infinitesime le sei quantità (numeriche)

$$e_{ik} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \sum_1^3{}_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \, ,$$

e ciò può ottenersi, come ha mostrato il prof. ALMANSI [*L'ordinaria teoria dell'elasticità e la teoria delle deformazioni finite*, in questi « Rendiconti », vol. XXVI (2° sem. 1917), pp. 3-8], anche senza che sieno infinitesime le stesse ξ.

8. - Forma canonica del ds^2.

Si raccoglie da quanto precede che, *entro un campo vuoto, al potenziale statico* (in prima approssimazione newtoniano) $-c^2\gamma$ *si collega una alterazione metrica dello spazio ambiente. Scelte opportunamente le coordinate di riferimento* (le y del n. prec., che qui indicheremo con x) γ *può ritenersi soluzione* (*a priori* qualunque, purchè regolare nel campo) *dell'equazione di Laplace*

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial x_3^2}=0\ ;$$

ai coefficienti a_{ik} del quadrato dell'elemento lineare competono (colla stessa approssimazione) le espressioni $a_{ik}-2\varepsilon_{ik}\gamma$, con che

$$dl^2=(1-2\gamma)(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)\ .$$

Come si vede, lo spazio non resta in generale euclideo, nemmeno in prima approssimazione, ma è soltanto (in tale approssimazione) rappresentabile conformemente entro uno spazio euclideo.

In definitiva, il ds^2 *globale di Einstein che conviene ad un assegnato campo di forza newtoniano di potenziale* $-c^2\gamma$ *è dato da*

$$ds^2=c^2(1+2\gamma)\,dt^2-(1-2\gamma)\,dl_0^2 \tag{13}$$

(dl_0 elemento lineare di uno spazio euclideo).

Per il campo di un'unica massa ($-c^2\gamma$ proporzionale all'inversa della distanza dalla massa), l'espressione (13) del ds^2 era già stata esplicitamente segnalata da De Sitter [8]. Il caso di quante si vogliono masse (che corrisponde sostanzialmente ad una arbitraria funzione armonica γ) è poi implicito in una notevole formula di seconda approssimazione stabilita da J. Droste [9]. Con tutto ciò mi è parso opportuno, proponendomi una ricerca sistematica sugli spazi vuoti, di far posto anche a questi risultati di prima approssimazione, tanto più che vengono così meglio lumeggiati, e si ottengono nel modo più spontaneo senza sviluppi materiali di calcolo.

---

[8] Cfr. Einstein, *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*, «Sitzungsberichte der K. Preuss. Ak. der Wiss.», 1916, pag. 692.

[9] *The field of n moving centres in Einstein's theory of gravitation*, «K. Ak. van Wet. te Amsterdam, Proceedings, vol. XIX», 1916, pp. 447-455.

NOTA II.

CONDIZIONI DI INTEGRABILITÀ E COMPORTAMENTO GEOMETRICO SPAZIALE

Ibidem, vol. $XXVII_1$ (1918_1),
pp. 3-12.

Lo scopo principale delle presenti ricerche, già dichiarato nella Nota I, è l'integrazione delle equazioni della statica einsteiniana negli spazi vuoti (più precisamente, a tensore energetico nullo). A dire il vero, i risultati che ho finora raggiunti non mi consentono di attribuire alla parola integrazione la sua accezione completa di costruzione dell'integrale generale, ma quella più modesta di determinazione di alcune notevoli categorie di soluzioni. Riservandomi di indicare a suo tempo i criteri di semplicità analitica e di interpretazione meccanica, che portano a queste soluzioni, dovrò intrattenermi ancora un po' (e non soltanto in questa seconda Nota) su considerazioni preparatorie.

Qui mi valgo della geometria intrinseca come strumento di calcolo per dedurre ed illustrare le condizioni di integrabilità. Col procedimento adottato, esse si raggruppano tre a tre [cfr. n. 4]. Un gruppo involge soltanto le differenze delle curvature e le anormalità delle congruenze principali, e porta [n. 5] ad una razionale classificazione delle soluzioni *a priori* possibili in due grandi tipi A) e B), dei quali il secondo offre assai più del primo prospettiva di successo a chi si accinga alla integrazione effettiva. Tale secondo tipo presenta a sua volta tre sottocasi [n. 6] con caratteristiche geometriche nettamente distinte.

L'ultimo sottocaso B_3) si integra a vista [n. 7] e costituisce l'equivalente einsteiniano di un campo di forza costante. Lo spazio ambiente rimane rigorosamente euclideo; le linee di forza sono rette parallele, ma la intensità della forza (in senso statico) è costante soltanto in prima approssimazione; riesce invece ancora rigorosamente conforme al caso dei gravi (funzione lineare di una coordinata cartesiana) l'energia posizionale di un punto materiale posto nel campo.

Ho aggiunto [n. 8] un'ovvia riduzione delle equazioni di partenza a quella forma intrinseca sotto cui si sono ricavate le loro condizioni di integrabilità.

1. - Eliminazione delle derivate seconde di V dalle equazioni fondamentali.

Si tratta delle equazioni della statica dei campi vuoti [n. 3 della Nota precedente (1)]:

$$\mathcal{M} = 0 \,, \tag{I}$$

$$\alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{II}$$

col significato dei simboli ivi irchiamato.

Giova anzitutto formare le condizioni di integrabilità delle (II), eliminandone le derivate terze (covarianti) della V a norma delle note identità (2)

$$V_{rpq} - V_{rqp} + \sum_{1}^{3}{}_s\, a_{rs,pq} V^{(s)} = 0 \qquad (p, q, r = 1, 2, 3).$$

Ove vi si introducano per V_{rqp}, V_{rqp} i valori ricavati dalle (II), e si divida tutto per $-V$, si ottiene

$$\alpha_{rpq} - \alpha_{rqp} + \alpha_{rp}\nu_q - \alpha_{rq}\nu_p - \sum_{1}^{3}{}_s\, a_{rs,pq}\nu^{(s)} = 0 \tag{1}$$

$$(r, p, q = 1, 2, 3),$$

avendo posto

$$V = ce^{\nu} \,, \tag{2}$$

con c costante (di omogeneità) *a priori* arbitraria.

2. - Richiami di geometria intrinseca.

Per lo studio delle (1), giova far largo posto alla metrica dello spazio ambiente, riferendosi ad una terna (pel momento generica) di congruenze

(1) Pp. 307-317 del vol. XXVI di questi « Rendiconti » (2° semestre 1917).

(2) RICCI et LEVI-CIVITA, *Méthodes* etc., « Math. Ann. », B. 54, 1900, pag. 143 [in queste « Opere »: vol. primo, pag. 498].

ortogonali [1], [2], [3] [3]. Designeremo al solito con 1, 2, 3 le linee, o anche le direzioni, corrispondenti; con $\lambda_i^{(r)}$, $\lambda_{i|r}$ $(r = 1, 2, 3)$ i sistemi coordinati contravariante e covariante della congruenza $[i]$. Sussisteranno le relazioni di ortogonalità

$$\sum_1^3{}_r \lambda_{i|r}\lambda_k^{(r)} = \varepsilon_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{3}$$

col solito significato delle ε_{ik} (0 per $i \neq k$ e 1 per $i = k$).

La derivata di una qualsiasi funzione ν rapporto all'arco l_i della linea i è evidentemente espressa da

$$\frac{d\nu}{dl_i} = \sum_1^3{}_r \nu_r \lambda_i^{(r)}, \tag{4}$$

le ν_r rappresentando [come già nelle (1)] derivate (ordinarie, o, ciò che fa lo stesso, covarianti) della funzione ν.

Gli invarianti differenziali di prim'ordine relativi alla terna sono (tutti e soli) i coefficienti di rotazione di Ricci:

$$\gamma_{hik} = -\gamma_{ihk} = \sum_1^3{}_{rq} \lambda_{h|rq} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(q)} \qquad (h, i, k = 1, 2, 3), \tag{5}$$

Tra gli invarianti di secondo ordine meritano speciale attenzione i seguenti:

$$\gamma_{ij,hk} = \frac{d\gamma_{ijh}}{dl_k} - \frac{d\gamma_{ijk}}{dl_h} + \sum_1^3{}_{h'} \{\gamma_{ijh'}(\gamma_{h'hk} - \gamma_{h'kh}) + \gamma_{h'ik}\gamma_{h'jh} - \gamma_{h'ih}\gamma_{h'jk}\} \tag{6}$$

$$(i, j, h, k = 1, 2, 3),$$

legati ai simboli di Riemann e ai parametri di direzione della terna dalle relazioni.

$$\gamma_{ij,hk} = \sum_1^3{}_{rspq} a_{rs,pq} \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} \lambda_h^{(p)} \lambda_k^{(q)}. \tag{7}$$

Giova ricordare altresì che, per le varietà ternarie — ed è il caso nostro —

---

[3] Ibidem, Cap. II.

le γ con quattro indici si riducono sostanzialmente allo schema

$$(6') \qquad \gamma_{ik} = \gamma_{ki} = \gamma_{i+1\, i+2,\, k+1\, k+2} = -\gamma_{i+2\, i+1,\, k+1\, k+2} = -\gamma_{i+1\, i+2,\, k+2\, k+1}$$

$$(i,\, k = 1,\, 2,\, 3)\,,$$

colla solita convenzione di risguardare equivalenti gli indici che differiscono per multipli di 3.

Le γ_{ik} si comportano rispetto ai simboli a_{ik} di Ricci come le γ a quattro indici rispetto ai simboli di Riemann, avendosi, in luogo delle (7), le formule più semplici

$$(7') \qquad \gamma_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{rq}\, \alpha_{rq}\, \lambda_i^{(r)}\, \lambda_k^{(q)}\,,$$

che si possono anche scrivere sotto la forma equivalente

$$(7'') \qquad \alpha_{rp} = \sum_{1}^{3}{}_{h'k'}\, \gamma_{h'k'}\, \lambda_{h'|r}\, \lambda_{k'|p}\,.$$

Se ne trae, per derivazione covariante,

$$\alpha_{rpq} = \sum_{1}^{3}{}_{h'k'} \left\{ \frac{\partial \gamma_{h'k'}}{\partial x_q} \lambda_{h'|r}\, \lambda_{k'|p} + \gamma_{h'k'} (\lambda_{h'|rq}\, \lambda_{k'|p} + \lambda_{h'|r} \lambda_{k'|pq}) \right\}.$$

A queste equazioni covarianti (rispetto ai tre indici p, q, r) se ne possono sostituire altrettante singolarmente invarianti, col criterio abituale di saturare gli indici. Basta moltiplicare per $\lambda_i^{(r)} \lambda_h^{(p)} \lambda_k^{(q)}$ e sommare rispetto ai tre indici p, q, r.

Badando alle (3) e (5), risulta

$$(8) \qquad \sum_{1}^{3}{}_{rpq}\, \alpha_{rpq}\, \lambda_i^{(r)} \lambda_h^{(p)} \lambda_k^{(q)} = \frac{d\gamma_{ih}}{dl_k} + \sum_{1}^{3}{}_{j}\, (\gamma_{jh}\, \gamma_{jik} + \gamma_{ij} \gamma_{jhk})\,.$$

3. - Trasformazione delle condizioni di integrabilità e delle equazioni di Bianchi.

La stessa saturazione degli indici (moltiplicazione per $\lambda_i^{(r)} \lambda_h^{(p)} \lambda_k^{(q)}$ e somma rapporto a p, q, r) può essere applicata alle condizioni di integrabilità (1). Gioverà preventivamente immaginare sostituita nell'ultimo sommatorio, al posto di $\nu^{(s)}$, l'espressione [equivalente in base alle (4)], $\sum_1^3{}_j (d\nu/dl_j)\lambda_j^{(s)}$. Ove si tenga conto altresì delle (8), (3), (4) e (7), si ricava

$$(9) \qquad \frac{\gamma_{ih}}{dl_k} - \frac{d\gamma_{ik}}{dl_h} + \sum_1^3{}_j\{\gamma_{jh}\gamma_{jik} - \gamma_{jk}\gamma_{jih} + \gamma_{ij}(\gamma_{jhk} - \gamma_{jkh})\} + \\ + \gamma_{ih}\frac{d\nu}{dl_k} - \gamma_{ik}\frac{d\nu}{dl_h} - \sum_1^3{}_j\gamma_{ij,hk}\frac{d\nu}{dl_j} = 0 \,.$$

Nell'ultimo termine compariscono ancora le γ con quattro indici, che si riconducono, quando si voglia, a quelle a due, in base alle (6′). Basta prendere le mosse dall'osservazione che i primi membri delle (9) sono emisimmetrici rispetto ai due indici h e k, cambiando unicamente di segno, quando si scambiano h e k. Si può perciò limitarsi a considerare nelle (9) tre combinazioni semplici dei due indici h e k, per es. le seguenti:

$$h = i + 1\,, \qquad k = i + 2\,;$$
$$h = i + 2\,, \qquad k = i \quad ;$$
$$h = i \quad , \qquad k = i + 1\,.$$

Se inoltre, in

$$\sum_1^3{}_j\gamma_{ij,hk}\frac{d\nu}{dl_j}\,,$$

si attribuiscono a j i valori i, $i+1$, $i+2$ (e si tien presente che $\gamma_{ii,hk} = 0$) si riscontrano nello sviluppo del sommatorio sole γ a quattro indici dello schema (6′), ossia γ a due indici. Mi dispenso dall'esplicitare questo calcolo in generale, dovendo riprenderlo tra un momento con referenza alla terna principale (anzichè a congruenze ortogonali qualisivogliono).

Completo intanto le formule non specializzate, attribuendo col RICCI(4) forma intrinseca anche alle equazioni segnalate dal BIANCHI, cui soddisfanno identicamente le derivate dei simboli di RIEMANN. Esse possono essere scritte (5):

$$\sum_1^3{}_{pq} a^{(pq)}G_{rpq} - \frac{1}{2}G_r = 0 \qquad (r = 1,\, 2,\, 3),$$

dove

$$G_{rp} = \sum_1^3{}_{jh} a^{(jh)}a_{rj,hp}$$

(4) *Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni*, in questi « Rendiconti », vol. XII (1° sem. 1903), pp. 409-420.

(5) Cfr. la Nota *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein*, ibidem, vol. XXVI (1° sem. 1917); pag. 388 [in questo vol.: pag. 55].

e G è il relativo invariante lineare $\sum_{rp}^{3}{}_{1} a^{(rp)} G_{rp}$. Per le varietà a tre dimensioni si ha (⁶)

$$G_{rp} = \alpha_{rp} - \mathfrak{M} a_{rp} ,$$

quindi

$$G = -2\mathfrak{M} ,$$

$$G_{rpq} = \alpha_{rpq} - \mathfrak{M}_q a_{rp} ,$$

e le precedenti equazioni possono essere scritte

$$\sum_{pq}{}_{1}^{3} a^{(pq)} \alpha_{rpq} = 0 .$$

Saturiamo anche l'indice r, moltiplicando per $\lambda_i^{(r)}$ e sommando rispetto ad r. Tenendo conto delle (8), si ottiene

$$\sum_{k}{}_{1}^{3} \frac{d\gamma_{ik}}{dl_k} + \sum_{hk}{}_{1}^{3} (\gamma_{hk}\gamma_{hik} + \gamma_{ih}\gamma_{hkk}) = 0 . \tag{10}$$

4. - Riferimento alla terna principale.

Se le tre congruenze [1], [2], [3] costituiscono la terna principale di curvatura (o una di tali terne nei casi di indeterminazione) (⁷), si ha

$$\gamma_{ik} = \varepsilon_{ik}\omega_i \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{11}$$

essendo ω_1, ω_2, ω_3 le tre curvature principali, cioè le radici della equazione cubica

$$\|\alpha_{ik} - \omega a_{ik}\| = 0 .$$

La loro somma (curvatura media) è $\mathfrak{M} = \sum_{ik} a^{(ik)} \alpha_{ik}$. Si può quindi, mettendo in evidenza le ω, assumere la (I) sotto la forma

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0 . \tag{I*}$$

Introduciamo nelle (10) i valori (11) delle γ_{ik}, ed esplicitiamo distinguendo

(⁶) *Statica einsteiniana*, ibidem, pag. 463 [in questo vol.: pag. 65].

(⁷) RICCI et LEVI-CIVITA, loc. cit., pag. 163 [in queste «Opere»: vol. primo, XXXII, pag. 519].

i tre casi già indicati al n. precedente. In base alle sole (6′), che in virtù delle (11) divengono

$$\gamma_{h+1\,h+2,\,k+1\,k+2} = \ldots = \varepsilon_{hk}\omega_k$$

(e all'annullarsi identico delle γ_{iih}, $\gamma_{ii,hk}$), risulta materialmente:
Per $h = i+1$, $k = i+2$,

$$\omega_{i+1}\gamma_{i+1\,ii+2} - \omega_{i+2}\gamma_{i+2\,ii+1} + \omega_i(\gamma_{ii+1\,i+2} - \gamma_{ii+2\,i+1}) = 0\,; \tag{12}$$

per $h = i+2$, $k = i$,

$$-\frac{d\omega_i}{dl_{i+2}} + \omega_{i+2}\gamma_{i+2ii} + \omega_i\gamma_{ii+2i} - \frac{d\nu}{dl_{i+2}}\omega_i + \frac{d\nu}{dl_{i+2}}\omega_{i+1} = 0\,; \tag{13}$$

per $h = i$, $k = i+1$,

$$\frac{d\omega_i}{dl_{i+1}} - \omega_{i+1}\gamma_{i+1ii} - \omega_i\gamma_{ii+1i} + \frac{d\nu}{dl_{i+1}}\omega_i - \frac{d\nu}{dl_{i+1}}\omega_{i+2} = 0 \qquad (i = 1,\,2,\,3). \tag{14}$$

$$(i = 1,\,2,\,3)\,.$$

Le γ con tre indici distinti, che sole compariscono nelle (12), si possono (attesa la emisimmetria rispetto ai due primi indici) rappresentare con una notazione più comoda, ponendo

$$\gamma_i = \gamma_{i+1\,i+2\,i} = -\,\gamma_{i+2\,i+1\,i}\,, \tag{15}$$

Con ciò le (12) divengono

$$-\,\omega_{i+1}\gamma_{i+2} - \omega_{i+2}\gamma_{i+1} + \omega_i(\gamma_{i+2} + \gamma_{i+1}) = 0\,,$$

le quali, introducendo le mutue differenze delle curvature principali

$$\delta_i = \omega_{i+2} - \omega_{i+1}\,, \tag{16}$$

si semplificano ulteriormente in

$$\delta_{i+1}\gamma_{i+1} = \delta_{i+2}\gamma_{i+2}\,.$$

Val quanto dire che le (12) si riducono a due sole algebricamente distinte, esprimenti che il prodotto

$$\text{(III)} \qquad \delta_i \gamma_i = \varpi \qquad (i = 1, 2, 3)$$

è indipendente dall'indice i.

Se, nelle (13), si cambia i in $i+1$ (il che implica $i+1$ in $i+2$ e $i+2$ in i), e poi, senza toccare l'indice i, si scrive materialmente k al posto di $i+1$ e j al posto di $i+2$, si ottiene (invertendo anche il segno)

$$\text{(IV)} \qquad \frac{d\omega_k}{dl_i} + (\omega_i - \omega_k)\gamma_{kik} + \frac{dv}{dl_i}(\omega_k - \omega_j) = 0 \, .$$

A questo stesso schema si riducono le (14), cambiandovi prima i in $i+2$, e poi scrivendo, senza toccare i, k in luogo di $i+2$ e j in luogo di $i+1$.

In definitiva, *le* (IV) *sostituiscono opportunamente entrambi i gruppi* (13) *e* (14), *coll'intesa che* i, k, j *rappresentano tre indici distinti.*

Accanto alle (III) e (IV) vanno pur prese in considerazione le (10), che esprimono anch'esse condizioni di integrabilità (valide per qualsiasi varietà a tre dimensioni, a differenza delle (III) e (IV) che provengono specificamente dalle equazioni di EINSTEIN). Tali equazioni, riferite anche esse alla terna principale mediante le (11), assumono l'aspetto, già segnalato dal RICCI,

$$\text{(17)} \qquad \frac{d\omega_i}{dl_i} + \sum_1^3{}_k (\omega_k - \omega_i)\gamma_{kik} = 0 \, .$$

Sotto questo aspetto si vede subito che si tratta di condizioni già implicitamente contenute nelle (IV), in virtù delle (I*). Infatti immaginiamo, nelle (IV) stesse, di attribuire a k i due valori diversi da i e di sommare. I primi due termini, per essere nulla alla somma delle ω, dànno $-d\omega_i/dl_i$; gli ultimi due si elidono; alla somma dei medî si può anche aggiungere l'addendo (nullo) corrispondente al valore i di k. Risulta così

$$-\frac{d\omega_i}{dl_i} + \sum_1^3{}_k (\omega_i - \omega_k)\gamma_{kik} = 0 \, ,$$

ossia precisamente la (17).

5. - Discussione delle (III) e conseguente ripartizione degli spazi potenziati vuoti in due tipi A) e B).

A norma delle (III), vi sono due tipi di metriche *a priori* possibili negli spazi vuoti: il tipo A) corrispondente alla restrizione qualitativa $\varpi \neq 0$ e il tipo B) caratterizzato dall'annullarsi di ϖ. Non a caso ho adoperato la lettera A) per designare il primo tipo, volendo alludere alla necessaria *anormalità* delle congruenze principali. Si ricordi infatti che, data una terna generica, la condizione necessaria e sufficiente perchè la congruenza $[i]$ sia normale (cioè costituita dalle traiettorie ortogonali ad una famiglia di superficie) è espressa dall'annullarsi della *anormalità*

$$\gamma_{i\,i+1\,i+2} - \gamma_{i\,i+2\,i+1}\,.$$

Colla notazione adottata poc'anzi, tale anormalità della $[i]$ vale

$$\gamma_{i+1} + \gamma_{i+2}\,.$$

Ciò posto, qualora fosse $\gamma_{i+1} + \gamma_{i+2} = 0$, essendo ciascuna delle γ diversa da zero in causa di $\varpi \neq 0$, si avrebbe dalle (III)

$$\delta_{i+t} = \frac{\varpi}{\gamma_{i+1}} = -\,\delta_{i+2}$$

e quindi, per le (16),

$$\omega_i - \omega_{i+2} = -\,(\omega_{i+1} - \omega_i)\,,$$

ossia $\delta_i = 0$, il che è inconciliabile con $\varpi \neq 0$.

Dunque, *nel caso* A) *le congruenze principali sono tutte tre necessariamente anormali*; *inoltre* (dacchè non può neanche annullarsi qualcuna delle δ) *le corrispondenti curvature sono essenzialmente distinte.*

6. - Suddivisione del tipo B).

Per questo secondo tipo si ha

$$\text{(III}'\text{)} \qquad \delta_i \gamma_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

e il modo di annullarsi dei primi membri porge un ulteriore criterio di classificazione. Giova prendere norma dall'ellissoide di curvatura (eventualmente degenere), che ha per assi le ω_i. Si è condotti ai tre sottocasi seguenti:

B_1) (ellissoide a tre assi). Le δ_i sono tutte diverse da zero, e le (III′) equivalgono all'annullarsi delle γ_i. Si tratta manifestamente di spazi *normali* (nel senso di BIANCHI), risultando normali le tre congruenze principali di curvatura. È perciò giustificato il qualificare B_1) come tipo o sottotipo *normale*.

B_2) (ellissoide rotondo). Una sola delle δ, diciamo δ_3, si annulla, sicchè le (III') esigono

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0 \, .$$

La congruenza [3] risulta quindi normale.

Questo sottocaso può dirsi in conformità *seminormale* perchè è normale una almeno delle congruenze principali.

B_3) (sfera). L'ultima eventualità *a priori* possibile si ha supponendo tutte le ω eguali tra loro, e quindi [teorema di SCHUR, immediatamente desumibile dalle (17)] ad una medesima costante.

7. - Ovvia caratterizzazione geometrica e statica del sottocaso B_3).

In relazione al problema meccanico che è origine e scopo delle presenti ricerche, *il sottocaso* B_3) *può dirsi elementare o galileiano.* Ed ecco perchè. Dovendosi [per la (I) o (I*)] annullare la curvatura media, riconosciamo in primo luogo che il valore comune (e costante) delle tre curvature principali non può essere che zero. Si tratta quindi dell'ordinario spazio euclideo, con che si annullano tutte le α_{ik}. Riferendosi a coordinate cartesiane, le derivazioni covarianti si identificano con derivazioni ordinarie, sicchè le (II) si riducono a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \, \partial x_k} = 0 \qquad\qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Ciò val quanto dire V funzione lineare delle coordinate cartesiane, e quindi riducibile senza pregiudizio della generalità (mediante opportuna orientazione degli assi e scelta dell'origine) alla forma $c + (1/c) g x_3$ (c velocità della luce in assenza d'ogni circostanza perturbatrice, g costante).

L'energia *posizionale* dell'unità di massa posta nel campo è espressa [8] da

$$cV - c^2 = g x_3 \, ,$$

come nel caso dei gravi, quando x_3 rappresenta la quota. La forza statica del campo è il gradiente di $-\frac{1}{2}V^2$. Essa è quindi costante in direzione, ma non rigorosamente in grandezza; può risguardarsi tale tostochè sia trascurabile $g x_3$ di fronte a c^2.

---

[8] Nota I, nel vol. XXVI di questi « Rendiconti » (2° semestre 1917), pag. 307-317 [in questo vol.: pag. 65].

8. - Forma intrinseca delle (II).

Terminerò questa seconda Nota mettendo sotto forma intrinseca (analoga a quella sotto cui si ricavarono le condizioni di integrabilità) anche le equazioni (II) di EINSTEIN: la (I) ha già questo carattere, come appare materialmente da (I*).

All'uopo mi riporto alle (4), che, risolute [mercè le (3)] rapporto alle ν_r, e riferite alla funzione V anzichè alla ν, dànno

$$V_p = \sum_1^3{}_j \frac{dV}{dl_j} \lambda_{j|p} .$$

Introducendo, in luogo di V, la funzione dV/dl_j, si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{dV}{dl_j}\right) = \sum_1^3{}_h \frac{d}{dl_h}\left(\frac{dV}{dl_i}\right) \lambda_{h|q} ;$$

sicchè, per derivazione covariante della precedente, risulta

$$V_{pq} = \sum_1^3{}_j \frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{dV}{dl_j}\right) \lambda_{j|p} + \sum_1^3{}_j \frac{dV}{dl_j} \lambda_{j|pq} = \sum_1^3{}_{jh} \frac{d}{dl_h}\left(\frac{dV}{dl_j}\right) \lambda_{j|p} \lambda_{h|q} + \sum_1^1{}_j \frac{dV}{dl_j} \lambda_{j|pq} .$$

Saturando i due indici p, q, mediante moltiplicazione per $\lambda_i^{(p)} \lambda_k^{(q)}$ e somma rapporto a p, q, si ottiene, in base alle (3) e (5),

$$\sum_1^3{}_{pq} V_{pq} \lambda_i^{(p)} \lambda_k^{(q)} = \frac{d}{dl_k}\left(\frac{dV}{dl_i}\right) + \sum_1^3{}_j \gamma_{jik} \frac{dV}{dl_j} .$$

A norma di questa formula e della (7'), la stessa saturazione, applicata alle equazioni (II),

$$\alpha_{pq} + \frac{V_{pq}}{V} = 0 ,$$

porta alle equivalenti

$$\text{(II*)} \qquad \gamma_{ik} + \frac{1}{V} \frac{d}{dl_k}\left(\frac{dV}{dl_i}\right) + \sum_1^3{}_j \gamma_{jik} \frac{1}{V} \frac{dV}{dl_j} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

che appunto volevamo fissare, onde averle pronte all'occasione.

NOTA III.

FORMULE AUSILIARIE

Ibidem, vol. $XXVII_2$ (1918_2),

pp. 183-191 (*).

Ho raccolto in questa terza Nota considerazioni e sviluppi aventi ancora carattere preparatorio, in quanto trovano la loro principale, se non esclusiva, ragion d'essere nel sussidio che presteranno alla effettiva integrazione delle equazioni gravitazionali di EINSTEIN in alcuno dei casi o sottocasi già classificati nella Nota II.

Circa il contenuto specifico rileverò che si tratta in primo luogo del passaggio da una forma fondamentale ad un'altra che ne differisce per un semplice fattore (trasformazione conforme). Ho assegnato le relazioni esplicite fra omologhe derivate covarianti (§ 1) e omologhi simboli di RIEMANN (§ 2). A dire il vero tali relazioni figurano già in una Nota del sig. FINZI pubblicata nel 1903 [1]; ma ho stimato opportuno ricavarle *ex novo* per comodità del lettore.

Nel § 3 ho indicato un processo di riduzione da $n+1$ a n variabili, di cui già mi sono valso (per $n=3$) nel riferire al ds^2 spaziale (anzichè al ds'^2 quadridimensionale) le equazioni della statica einsteiniana. In sostanza si troveranno qui ripetute, per n qualunque, formule che già scrissi per $n=3$, onde farne (§ 4) applicazione, per $n=2$, al calcolo dei simboli di RICCI relativi ad una forma ternaria del tipo

$$d\sigma^2 + A^2\, dx_3^2$$

con $d\sigma$ (elemento lineare binario) ed A indipendenti da x_3. Si arriva ad espressioni di carattere invariantivo rispetto al $d\sigma$, la cui utilità si farà manifesta nelle Note successive.

(*) Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1918.

[1] *Le ipersuperficie a tre dimensioni che si possono rappresentare conformemente sullo spazio euclideo*, « Atti del R. Istituto Veneto », T. LXII, pp. 1049-1062.

1. - Trasformazione conforme e suoi effetti sulla derivazione covariante.

Sia

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n} {}_{1} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

il quadrato di un elemento lineare in quante si vogliono variabili;

$$ds'^2 = e^{2\tau} ds^2 . \tag{2}$$

Usando i soliti simboli per la metrica (1), designeremo con omologhi simboli accentati tutto ciò (coefficienti, coefficienti della forma reciproca, simboli di Christoffel e di Riemann, derivate covarianti, ecc.) che si riferisce alla metrica conforme (2). Così saranno

$$a'_{ik} = e^{2\tau} a_{ik}$$

i coefficienti del ds'^2;

$$a'^{(ik)} = a^{-2\tau} a^{(ik)}$$

i coefficienti della forma reciproca;

$$a'_{ik,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a'_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a'_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial a'_{ik}}{\partial a_j}\right) = e^{2\tau}(a_{ik,j} + \tau_k a_{ij} + \tau_i a_{jk} - \tau_j a_{ik})$$

i simboli di Christoffel di prima specie;

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ h \end{Bmatrix}' = \sum_{1}^{n}{}_j\, a'^{(hj)} a'_{ik,j} = \begin{Bmatrix} i\,k \\ h \end{Bmatrix} + \varepsilon_{ih}\tau_k + \varepsilon_{hk}\tau_i - a_{ik}\tau^{(h)} \tag{3}$$

$$(i,\ k,\ j,\ h = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

quelli di seconda specie spettanti ad esso ds'^2. Ben si intende che con τ_i intendiamo le derivate (ordinarie ,o, ciò che è lo stesso, covarianti) della funzione τ; con $\tau^{(h)} = \sum_{1}^{n}{}_j\, a^{(hj)}\tau_j$ gli elementi reciproci rispetto alla forma (1); infine con ε_{ih} lo zero o l'unità secondochè i due indici sono distinti o coincidono.

Ciò premesso, sia X_i un generico sistema semplice covariante. Se si assume come forma fondamentale la (2), si ha, per derivazione covariante, il sistema doppio

$$(X_i)'_k = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \sum_1^n {}_h \begin{Bmatrix} i\,k \\ h \end{Bmatrix}' X_h \,.$$

Analogamente, se si assume per forma fondamentale la (1), le corrispondenti derivate covarianti hanno le espressioni

$$X_{ik} = \frac{\partial X_j}{\partial x_k} - \sum_1^n {}_h \begin{Bmatrix} i\,k \\ h \end{Bmatrix} X_h \,.$$

Ne viene, badando alle (3),

$$(4) \qquad (X_i)'_k = X_{ik} - \tau_i X_k - \tau_k X_i + a_{ik} \sum_1^n {}_h \tau^{(h)} X_h \,,$$

delle quali relazioni è materialmente visibile il comportamento covariante. Una loro immediata conseguenza si è l'identità dei rotori (dedotti da X_i con referenza alle due forme), cioè dei sistemi emisimmetrici

$$(X_i)'_k - (X_k)'_i \qquad \text{e} \qquad X_{ik} - X_{ki} \,.$$

Ove in particolare il sistema X_i sia costituito dalle derivate di una funzione $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, il sommatorio

$$\sum_1^n {}_h \tau^{(h)} X_h$$

si identifica col parametro differenziale misto $\nabla(\tau, V)$, preso, si intende, con referenza alla forma (1).

Posto ancora

$$V = V_0 e^{\nu} \qquad (V_0 \text{ costante arbitraria}),$$

le (4), divise per V, assumono l'aspetto

$$(5) \qquad \frac{V'_{ik}}{V} = \nu_{ik} + \nu_i \nu_k - \tau_i \nu_k - \tau_k \nu_i + a_{ik} \nabla(\tau, \nu) \,.$$

Le (4) stesse si possono generalizzare considerando (anzichè un sistema semplice X_i) un sistema d'ordine qualunque m, $Y_{i_1 i_2 \ldots i_m}$, e confrontando le derivate covarianti del sistema, prese una prima volta con referenza alla forma fondamentale (2), una seconda volta con referenza alla (1). Mi limiterò ai sistemi doppi Y_{jh}. Partendo dalle formole di definizione

$$(Y_{jh})'_k = \frac{\partial Y_{jh}}{\partial x_k} - \sum_1^n{}_i \left[\left\{ \begin{matrix} j\,k \\ i \end{matrix} \right\}' Y_{ih} + \left\{ \begin{matrix} k\,h \\ i \end{matrix} \right\}' Y_{ji} \right],$$

si ricavano le relazioni

$$(6) \qquad (Y_{jh})'_k = Y_{jhk} - \tau_j Y_{kh} - \tau_h Y_{jk} - 2\tau_k Y_{jh} + a_{jk} \sum_1^n{}_i \tau^{(i)} Y_{ih} + a_{kh} \sum_1^n{}_i \tau^{(i)} Y_{ji}\,.$$

Poniamo $Y_{jh} = (X_j)'_h$, e formiamo le differenze

$$(X_j)'_{hk} - (X_j)'_{kh}\,.$$

Si ha

$$(X_j)'_{hk} - (X_j)'_{kh} = [(X_j)'_h]_k - [(X_j)'_k]_h + \tau_j[(X_h)'_k - (X_k)'_h] +$$
$$+ \tau_h (X_j)'_k - \tau_k (X_j)'_h + a_{jk} \sum_1^n{}_i \tau^{(i)} (X_i)'_h - a_{jh} \sum_1^n{}_i \tau^{(i)} (X_i)'_k\,,$$

da cui, usando ancora le (4) e il loro corollario concernente l'identità dei rotori, dopo riduzioni materiali, risulta

$$X_j)'_{hk} - (X_j)'_{kh} = X_{jhk} - X_{jkh} + X_k(\tau_{jh} - \tau_j \tau_h) - X_h(\tau_{jk} - \tau_j \tau_k) +$$
$$+ a_{jh}\Big[\sum_1^n{}_i X^{(i)}(\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) + X_k \Delta\tau\Big] - a_{jk}\Big[\sum_1^n{}_i X^{(i)}(\tau_{ih} - \tau_i \tau_h) + X_h \Delta\tau\Big]\,,$$

essendo

$$\Delta\tau = \nabla(\tau, \tau) = \sum_1^n{}_\varrho \tau^{(\varrho)} \tau_\varrho$$

il parametro differenziale di primo ordine della funzione τ, relativo alla forma (1).

Ove, nel secondo membro, si sostituisca ulteriormente $\sum_1^n{}_i a_{ih} X^{(i)}$ al posto di X_h e $\sum_1^n{}_i a_{ik} X^{(i)}$ al posto di X_k, si può ritenere la precedente relazione sotto la forma:

$$(7) \qquad (X_j)'_{hk} - (X_j)'_{kh} = X_{jhk} - X_{jkh} +$$
$$+ \sum{}_i X^{(i)} [a_{ik}(\tau_{jh} - \tau_j \tau_h) - a_{ih}(\tau_{ik} - \tau_j \tau_k) + a_{jh}(\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) -$$
$$- a_{jk}(\tau_{ih} - \tau_i \tau_h) + (a_{ik} a_{jh} - a_{jh} a_{jk}) \Delta\tau]\,.$$

2. - Relazioni fra i simboli di Riemann. Corollari. Forme ternarie.

Le derivate terze covarianti di un generico sistema semplice X_i, prese con referenza ad un'assegnata forma fondamentale — sia per esempio la (1) — sono legate ai simboli di RIEMANN relativi a quella forma dalle ben note identità (già invocate anche nella Nota II)

$$X_{jhk} - X_{jkh} = \sum_{1}^{n} {}_i\, a_{ij,hk} X^{(i)} . \tag{8}$$

Se si assume per forma fondamentale la (2), con che, secondo la nostra convenzione, si debbono far apparire gli omologhi simboli accentati, queste identità (ove si tenga presente che $X'^{(i)} = e^{-2\tau} X^{(i)}$), assumono l'aspetto:

$$(X_j)'_{hk} - (X_j)'_{kh} = e^{-2\tau} \sum_{1}^{n} {}_i\, a'_{ij,hk} X^{(i)} . \tag{9}$$

In base ad esse e alle precedenti, le (7) (che devono sussistere per qualsiasi sistema $X^{(i)}$) porgono le relazioni, già segnalate dal sig. FINZI (nella Nota citata da principio),

$$\begin{aligned} e^{-2\tau} a'_{ij,hk} = a_{ij,hk} + a_{ik}(\tau_{jh} - \tau_j \tau_h) - a_{ih}(\tau_{jk} - \tau_j \tau_k) + \\ + a_{jh}(\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) - a_{jk}(\tau_{ih} - \tau_i \tau_h) + (a_{ik} a_{jh} - a_{ih} a_{jk}) \Delta\tau . \end{aligned} \tag{10}$$

Va da sè che a queste relazioni si sarebbe potuto arrivare (in modo concettualmente più diretto, ma formalmente più laborioso) facendo capo alla definizione dei simboli di RIEMANN di seconda specie per mezzo di quelli di CHRISTOFFEL, e sfruttando unicamente le (3).

Ove si ponga con EINSTEIN

$$G_{ik} = \sum_{1}^{n} {}_{jh}\, a^{(jh)} a_{ij,hk}$$

e in conformità

$$G'_{ik} = \sum {}_{jh}\, a'^{(jh)} a'_{ij,hk} ,$$

si ha dalle (10) [badando alle identità $\sum_{1}^{n} {}_h\, a^{(jh)} a_{ih} = \varepsilon_{ij}$, $\sum_{1}^{n} {}_{jh}\, a^{(jh)} a_{jh} = n$,

$\sum_{1}^{n}{}_{jh}\, a^{(jh)}\tau_j\tau_h = \Delta\tau, \ \sum_{1}^{n}{}_{jh}\, a^{(jh)}\tau_{jh} = \Delta_2\tau]$

$$(11) \qquad G'_{ik} = G_{ik} + (n-2)(\tau_{ik} - \tau_i\tau_k) + a_{ik}\{\Delta_2\tau + (n-2)\Delta\tau\}\,.$$

Ne consegue, fra gli invarianti lineari

$$G' = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a'^{(ik)}G'_{ik}\,, \qquad G = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a^{(ik)}G_{ik}\,,$$

la relazione

$$(12) \qquad e^{2\tau}G' = G + 2(n-1)\Delta_2\tau + (n-1)(n-2)\Delta\tau\,.$$

Per $n = 3$, i simboli di RIEMANN a quattro indici si riducono sostanzialmente al sistema doppio G_{ik}; o piuttosto (con vantaggio per le eventuali interpretazioni geometriche) ai simboli di RICCI

$$\alpha_{ik} = G_{ik} - \frac{1}{2}\, G a_{ik} \ ([2])\,.$$

Gli omologhi simboli spettanti alla forma (2) sono

$$\alpha'_{ik} = G'_{ik} - \frac{1}{2}\, G' a'_{ik} = G'_{ik} - \frac{1}{2}\, G' e^{2\tau} a_{ik}\,.$$

Si ha perciò, in base alle (11) e (12),

$$(13) \qquad \alpha'_{ik} = \alpha_{ik} + \tau_{ik} - \tau_i\tau_k - a_{ik}\Delta_2\tau\,.$$

3. - Abbassamento invariantivo da $n+1$ variabili ad n.

Sia

$$ds'^2 = A^2 dx_0^2 + ds^2$$

una forma differenziale quadratica in $n+1$ variabili, con ds^2 forma gene-

---

([2]) Cfr. la Nota *Statica einsteiniana* in questi Rendiconti, vol. XXVI (1° sem. 1917), pag. 463 [in questo vol.: pag. 65].

rica in n variabili definita dalla (1), ed A indipendente da x_0 (al pari dei coefficienti del ds^2)

I coefficienti del ds'^2 sono manifestamente

$$\text{gli } a_{ik} \text{ del } ds^2 \ (i, k = 1, 2, \dots, n); \quad a_{0i} = 0 \ (i > 0); \quad a_{00} = A^2 .$$

Il loro determinante vale quindi

$$a' = a \cdot A^2 ,$$

essendo a il discriminante della (1); donde gli elementi reciproci:

$$a'^{(ik)} = a^{(ik)} \ (i, k, = 1, 2, \dots, n); \quad a'^{(0i)} = 0 \ (i > 0); \quad a^{(00)} = \frac{1}{A^2} .$$

Anche qui, come (salvo il diverso significato del ds'^2) nei precedenti paragrafi, contrassegneremo con accento tutto ciò che si riferisce alla metrica definita dal ds'^2, riservando la corrispondente notazione senza accento per gli elementi omologhi (eventualmente da limitarsi ai valori 1, 2,..., n degli indici) relativi al ds^2.

Con tale intesa, si trova subito, per i simboli di Christoffel di prima specie,

$$\left|\begin{array}{l} a'_{ik,j} = a_{ik,j} \ (i, k, j = 1, 2, \dots, n); \\ a'_{0i,k} = a'_{ik,0} = a'_{00,0} = 0 \ ; \\ a'_{0i,0} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial A^2}{\partial x_i} = A A_i \ ; \qquad a'_{00,i} = - A A_i , \end{array}\right.$$

e per quelli di seconda:

$$(15) \qquad \left|\begin{array}{l} \begin{Bmatrix} i\ k \\ h \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} i\ k \\ h \end{Bmatrix} \quad (i, k, h = 1, 2, \dots, n) ; \\ \begin{Bmatrix} 0\ i \\ k \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} i\ k \\ 0 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 0\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}' = 0 ; \\ \begin{Bmatrix} 0\ i \\ 0 \end{Bmatrix}' = \dfrac{A_i}{A} , \qquad \begin{Bmatrix} 0\ 0 \\ i \end{Bmatrix}' = - A A^{(i)} . \end{array}\right.$$

Ne viene, per le derivate seconde covarianti di una generica funzione

$\nu(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$,

$$(16)\quad \begin{cases} \nu'_{ik} = \dfrac{\partial \nu_i}{\partial x_k} - \sum_0^n{}_h \left\{ \begin{matrix} i\ k \\ h \end{matrix} \right\}' \nu_h = \nu_{ik} \quad (i, k = 1, 2, ..., n) ; \\ \nu'_{0i} = \dfrac{\partial \nu_0}{\partial x_i} - \sum_0^n{}_h \left\{ \begin{matrix} 0\ i \\ h \end{matrix} \right\}' \nu_h = \dfrac{\partial \nu_0}{\partial x_i} - \dfrac{A_i}{A} \nu_0 = A \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{1}{A}\nu_0\right) ; \\ \nu'_{00} = \dfrac{\partial \nu_0}{\partial x_0} - \sum_0^n{}_h \left\{ \begin{matrix} 0\ 0 \\ h \end{matrix} \right\}' \nu_h = \dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x_0^2} + A \nabla(A, \nu) . \end{cases}$$

Se poi si richiamano le formole di definizione delle G'_{ik} e le conseguenti loro espressioni in funzione dei simboli di seconda specie,

$$G'_{ik} = \sum_0^n{}_{jh} a'^{(jh)} a'_{ij,hk} = \sum_0^n \{ih, hk\} =$$
$$= \sum_0^n{}_h \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ h \end{matrix} \right\}' - \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{matrix} i\ k \\ h \end{matrix} \right\}' \right] + \sum_0^n{}_{hj} \left[\left\{ \begin{matrix} i\ h \\ j \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} k\ j \\ h \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} i\ k \\ j \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} j\ h \\ h \end{matrix} \right\}' \right],$$

si ricava, dopo facili riduzioni,

$$(17)\quad \begin{cases} G'_{ik} = G_{ik} + \dfrac{A_{ik}}{A} \qquad (i, k = 1, 2, ..., n) ; \\ G'_{0i} = 0 ; \\ G'_{00} = A \Delta_2 A \quad (^3) , \end{cases}$$

da cui in particolare

$$(18)\quad G' = \sum_0^n{}_{ik} a'^{(ik)} G'_{jk} = G + 2 \frac{\Delta_2 A}{A} .$$

4. - Complementi relativi alle forme ternarie.

Supponiamo $n = 2$, e sostituiamo l'indice 3 all'indice 0, con che il ds'^2 ternario ha l'espressione

$$ds^2 + A^2 dx_3^2 .$$

---

(3) Queste formule (salvo lieve divario nelle notazioni e speciale riferimento a $n = 3$) si trovano anche nella Nota testè citata sulla *Statica einsteiniana*, pag. 460 [in questo vol.: pag. 61].

Per la forma binaria

$$ds^2 = \sum_{ik}^{2}{}_{1} a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,,$$

i simboli di RIEMANN di prima specie $a_{ij,hk}$ si annullano, oppure si riducono allo schema $a_{12,12}$; e si ha

$$a_{12,12} = aK\,,$$

rappresentando K la curvatura gaussiana del ds^2 ed a il discriminante.

Ne viene

$$G_{ik} = \sum_{jh}^{2}{}_{1} a^{(jh)} a_{ij,hk} = a^{(\bar{i}\bar{k})} a_{i\bar{i},\bar{k}k}\,,$$

designando $\bar{i}$ e $\bar{k}$ gli indici complementari di i e di k nella coppia 1, 2: intendo dire che, per $i = 1$, $\bar{i} = 2$, e viceversa.

Dacchè

$$a^{(\bar{i}\bar{k})} = (-1)^{i+k} \frac{a_{ik}}{a}$$

e

$$a_{i\bar{i},\bar{k}k} = -(-1)^{i+k} aK\,,$$

rimane semplicemente

$$G_{ik} = -K a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2),$$

donde

$$G = \sum_{ik}^{2}{}_{1} a^{(ik)} G_{ik} = -2K\,.$$

Le G'_{ik} sono fornite dalle (17) (per $n = 2$ e con sostituzione di 3 a zero), e la G' dalla (18), che diviene

$$\frac{1}{2} G' = -K + \frac{\Delta_2 A}{A}\,.$$

Dopo ciò si possono senz'altro esplicitare le espressioni (riferite al ds^2

binario e alla funzione associata A) dei simboli di RICCI

$$\alpha_{ik} = G'_{ik} - \frac{1}{2} G' a'_{ik}$$

relativi alla forma ternaria $ds'^2 = ds^2 + A^2 ds_3^2$. Si trova immediatamente

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} \alpha_{ik} = \dfrac{A_{ik}}{A} - \dfrac{\Delta_2 A}{A} a_{ik} \qquad (i,\ k = 1,\ 2)\ ; \\ \alpha_{i3} = 0\ ; \\ \alpha_{33} = A^2 K\ , \end{cases}$$

nonchè, per la curvatura media,

$$\text{(20)} \qquad \mathfrak{M} = \sum_{ik}^{3} {}_{1} a'^{(ik)} \alpha_{ik} = -\frac{1}{2} G' = K - \frac{\Delta_2 A}{A}\ .$$

Essendo evidentemente

$$a'_{ik} = a_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ 2)\ ; \qquad a'_{i3} = 0\ , \quad a'_{33} = A^2$$

i coefficienti del ds'^2, dalla considerazione della equazione cubica

$$\| \alpha_{ik} - \omega a'_{ik} \| = 0\ ,$$

la quale definisce le curvature principali, apparisce tosto che una radice è

$$\omega_3 = K$$

e che le linee coordinate x_3 ($x_1 = \text{cost}$, $x_2 = \text{cost}$) sono le corrispondent linee principali di curvatura.

Per individuare le altre due curvature principali ω_1, ω_2 (e subordinatamente le relative direzioni principali), si stacca dalla precedente equazione cubica $A^2(K - \omega)$, e rimane

$$\begin{vmatrix} \dfrac{A_{11}}{A} - \left(\dfrac{\Delta_2 A}{A} + \omega\right) a_{11} & \dfrac{A_{12}}{A} - \left(\dfrac{\Delta_2 A}{A} + \omega\right) a_{12} \\ \dfrac{A_{21}}{A} - \left(\dfrac{\Delta_2 A}{A} + \omega\right) a_{21} & \dfrac{A_{22}}{A} - \left(\dfrac{\Delta_2 A}{A} + \omega\right) a_{22} \end{vmatrix} = 0\ .$$

Esempio. — Per $A = \text{cost}$, la equazione testè scritta si riduce a

$$\omega^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 ,$$

e quindi porge $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Ne viene che, per un ds'^2 ternario della forma

$$ds^2 + dx_3^2 ,$$

due delle curvature principali sono nulle, e la terza, corrispondente alle giaciture $x_3 = \text{cost}$, coincide colla curvatura gaussiana K del ds^2 binario.

NOTA IV.

IL SOTTOCASO B_2): RIDUZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Ibidem, pp. 220-229 (*).

La precedente Nota III fu, per così dire, di preparazione generica; questa sarà di preparazione specifica alla deduzione di una classe di integrali. Si tratta del sottocaso B_2) [cfr. Nota II], il più semplice, dopo quello elementare (o galileiano) in cui lo spazio resta addirittura euclideo. Dalle condizioni caratteristiche di B_2) scende (§§ 1-2) che lo spazio è atteggiato a varietà normale di BIANCHI con due curvature principali ω_1 e ω_2 eguali tra loro, talchè (siccome la curvatura media si annulla in ogni caso) si ha

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\,\omega\,,$$

designando ω la terza curvatura principale. Il quadrato dell'elemento lineare è (§ 3) riducibile alla forma

$$dl^2 = e^{2\tau}(d\sigma^2 + dx_3^2)\,,$$

dove $d\sigma$ rappresenta un elemento lineare binario (di cui anche i coefficienti sono indipendenti da x_3), e la funzione τ è legata alla velocità della luce $V = V_0 e^{\nu}$ (V_0 costante di omogeneità) dalla relazione $\nu = \tau + \zeta$, con ζ funzione della sola x_3; inoltre $e^{-3\tau}$ differisce da ω per un fattore costante.

Si potrebbe cercare di sfruttare tutti questi risultati simultaneamente procedendo a diretta riduzione e integrazione delle equazioni gravitazionali intrinseche, secondo il criterio indicato a § 4. Ma si richiederebbero calcoli poco istruttivi e artifici non spontanei. Ho preferito pertanto riprendere *ab initio* le equazioni della statica einsteiniana, cercandone le

(*) Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1918.

soluzioni per cui il dl^2 ha la forma indicata e $\tau = \nu + \zeta$ (senza far intervenire ipotesi concernenti la curvatura). In base a tali condizioni addizionali, le equazioni si trasformano con procedimento sistematico rivolto alla separazione delle variabili (§§ 5-6), applicando le formule della Nota precedente. Vien fatto così di sostituire, come forma fondamentale, il $d\sigma^2$ binario all'originario dl^2, e le espressioni che ne risultano per le curvature principali mostrano *a posteriori* che le soluzioni in questione sono tutte e sole le B_2) cercate.

Per ragione di spazio, mi sono arrestato a questo punto, rimettendo alle prossime Note la discussione del sistema ridotto che non si presenta ancora sotto forma immediatamente integrabile.

1. - Semplificazione delle condizioni di integrabilità corrispondenti al sottocaso B_2).

Ricordiamo — con riferimento alle Note precedenti e in particolare alla II [1] per simboli e formule — che il sottocaso B_2) è contraddistinto dall'annullarsi di

$$\delta_3 = \omega_2 - \omega_1 \; ; \qquad \gamma_1 = \gamma_{231} \, , \qquad \gamma_2 = \gamma_{312} \, .$$

La prima condizione esprime che sono eguali due delle curvature principali. Siccome la curvatura media $\mathcal{M} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ si annulla in ogni caso, così le tre curvature principali ω_1, ω_2, ω_3 si possono esprimere per mezzo di una sola funzione ω (del posto) sotto la forma

$$(1) \qquad \omega_1 = -\frac{1}{2}\,\omega \, , \qquad \omega_2 = -\frac{1}{2}\,\omega \, , \qquad \omega_3 = \omega \, .$$

In una tale metrica (prescindendo dal caso particolare in cui ω si riduca ad una costante) assumono evidentemente posto cospicuo le superficie $\omega = \text{cost.}$ (luogo dei punti in cui lo spazio si presenta egualmente incurvato) e le loro traiettorie ortogonali che chiameremo, come è naturale, *linee di pendenza* (delle curvature).

Delle tre direzioni principali di curvatura è univocamente determinata soltanto quella corrispondente ad ω, cioè [Nota II, § 4] la 3, che si dirà

---

[1] Cfr. Nota I a pp. 307-317 del vol. XXVI (2° semestre 1917); Nota II a pp. 3-12 del vol. XXVII (1° semestre 1918); Nota III a pp. 183-191 di questo stesso volume (2° semestre 1918).

assiale; le altre due sono unicamente sottoposte alla condizione di essere perpendicolari tra loro e alla 3. Chiameremo naturalmente *linee assiali* quelle definite dalle direzioni assiali 3, e *congruenza assiale* la [3], formata dalle linee assiali. La relativa anormalità $\gamma_{312} - \gamma_{321}$ si annulla in causa di $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Perciò la congruenza assiale taglia ortogonalmente una famiglia di superficie, che gioverà assumere come superficie coordinate $x_3 = \text{cost}$. Va notato altresì che (annullandosi separatamente γ_{312} e γ_{321}) sussiste la relazione

$$\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0 . \tag{2}$$

Premesso questo, introduciamo nelle condizioni di integrabilità [(IV) della Nota II]

$$\frac{d\omega_k}{dl_i} + (\omega_i - \omega_k)\gamma_{kik} + \frac{dv}{dl_i}(\omega_k - \omega_j) = 0 , \tag{IV}$$

in cui i, k, j rappresentano indici *distinti*, le determinazioni (1) delle curvature principali.

Anzitutto, per $k = 1$ o 2, $j = 3$ (e quindi $i = 2$ ovvero 1 rispettivamente) si hanno le due equazioni

$$\frac{d\omega}{dl_i} + 3\omega\frac{dv}{dl_i} = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{IV$_a$}$$

Cogli stessi valori di k, ma $i = 3$ (e quindi j eguale, rispettivamente a 2 ovvero a 1) risulta

$$\frac{d\omega}{dl_3} - 3\omega\gamma_{k3k} = 0 \qquad (k = 1, 2). \tag{IV$_b$}$$

Infine, per $k = 3$, $i = 1$ o 2 (e quindi $j = 2$ o 1 rispettivamente) si ricava

$$\frac{d\omega}{dl_i} - \frac{3}{2}\omega\gamma_{3i3} + \frac{3}{2}\omega\frac{dv}{dl_i} = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

che, unite alle precedenti, esauriscono le (IV). Quest'ultimo gruppo, eliminando le dv/dl_i per mezzo delle (IV$_a$), può essere scritto

$$\frac{d\omega}{dl_i} - 3\omega\gamma_{3i3} = 0 . \tag{IV$_c$}$$

2. - Interpretazioni geometriche. Riferimento ad un sistema triplo ortogonale.

L'ipotesi $\omega = 0$ implicherebbe, in virtù delle (1), l'annullarsi di tutte e tre le curvature principali; si tratterebbe pertanto di spazio euclideo, e si ricadrebbe nel caso galileiano B_3), già esaurito nella Nota II (§ 7). Va quindi ritenuto $\omega \neq 0$, ed è lecito porre

$$\omega = \omega_0 e^{-3\tau}, \tag{3}$$

designando con ω_0 una curvatura costante (non nulla, ma *a priori* arbitraria) che si introduce per ragione di omogeneità, onde poter risguardare l'esponenziale e con esso l'esponente τ quale un puro numero. Tale è — ricordiamolo — anche ν, legato alla velocità V della luce dalla posizione [(2) della Nota II]

$$V = V_0 e^{\nu} \quad (^2).$$

Per il semplice fatto che ω non si annulla, segue dalle (IV_b)

$$\gamma_{311} = \gamma_{322}, \tag{4}$$

la quale, associata a (2), sta ad esprimere che la congruenza assiale [3] è isotropa, ossia può, in infiniti modi, risguardarsi costituita dalle intersezioni di due famiglie di superficie ortogonali fra loro ([3]). Due tali famiglie, unitamente alla $x_3 =$ cost., formano un sistema triplo ortogonale, talchè, assumendole come superficie coordinate $x_1 =$ cost., $x_2 =$ cost., il quadrato dell'elemento lineare dello spazio ha necessariamente la forma

$$dl^2 = H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2 + H_3^2 dx_3^2 .$$

([2]) A vero dire, nella Nota II, la costante moltiplicativa V_0 (affatto inessenziale perchè non compare nelle equazioni differenziali) era stata designata con c. Siccome si suole attribuire a c il significato specifico di velocità della luce in assenza d'ogni circostanza perturbatrice, così evito d'ora innanzi di adoperare la stessa lettera per una semplice costante di omogeneità, che può benissimo non avere (come per es. vedremo nella Nota V, § 4) la detta interpretazione fisica.

([3]) Cfr. Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, nelle Memorie di questa Accademia, ser. 5ª, vol. II, 1896, pp. 31 e 44. La denominazione « congruenza isotropa » ricorro però soltanto nella successiva mia Nota *Sulle congruenze di curve*, in questi « Rendiconti », vol. VIII (1° sem. 1899); [in queste « Opere »: vol. 1°, XXII]. Le proprietà differenziali delle congruenze, e in particolare delle congruenze isotrope, ivi riferite all'ordinario spazio euclideo, sussistono anche in varietà a tre dimensioni di natura metrica qualunque.

Abbiamo già osservato a § 1 che ogni terna trirettangola di direzioni fra cui figuri quella assiale può essere risguardata come principale. *Perciò in particolare è lecito considerare come terna principale di curvatura quella costituita dalle linee coordinate di un qualsiasi sistema triplo ortogonale cui appartenga la famiglia* $x_3 =$ cost. Così intanto risulta che ogni varietà del tipo B_2) è normale nel senso di BIANCHI, e quindi rientra nel tipo B_1) [Nota II, § 6], di cui però costituisce [in virtù della condizione addizionale $\delta_3 = 0$, ossia delle (1)] una classe speciale. Ed è ben giustificato il considerarla a parte, tanto più che B_2) si integra, mentre non si saprebbe forse affrontare B_1) nella sua generalità.

3. - Forma finita sotto cui giova ritenere le condizioni di integrabilità.

Ricordiamo che le linee coordinate di un sistema triplo ortogonale costituiscono tre congruenze normali, per cui le γ con tre indici distinti sono nulle, e le altre si riducono allo schema γ_{ikk}. Queste si esprimono, per mezzo dei coefficienti H del dl^2 riferito al sistema triplo, sotto la forma

$$\gamma_{ikk} = \frac{d\mathfrak{h}_k}{dl_i} \qquad (i \neq k),$$

essendo

$$H_k = e^{\mathfrak{h}_k}.$$

Con queste espressioni delle γ, ove si elimini anche ω per mezzo della (3), i tre gruppi (IV_a), (IV_b), (IV_c), divengono rispettivamente

$$(IV'_a) \qquad \frac{d\nu}{dl_i} = \frac{d\tau}{dl_i} \qquad (i = 1, 2);$$

$$(IV'_b) \qquad \frac{d\mathfrak{h}_i}{dl_3} = \frac{d\tau}{dl_3};$$

$$(IV'_c) \qquad \frac{d\mathfrak{h}_3}{dl_i} = \frac{d\tau}{dl_i}.$$

Tali equazioni vanno notate perchè si prestano a diretta combinazione colle equazioni gravitazionali [sotto la forma (I*), (II*) della Nota II], combinazione che sarebbe richiesta dal primo dei procedimenti di integrazione di cui sarà fatto cenno nel § seguente. Ma importa anche più l'osservare che, sostituendo ad ogni dl_i la sua espressione $H_i dx_i$, si attribuisce alle suddette equazioni la forma equivalente

$$\frac{\partial \nu}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau}{\partial x_i}; \qquad \frac{\partial \mathfrak{h}_i}{\partial x_3} = \frac{\partial \tau}{\partial x_3}; \qquad \frac{\partial \mathfrak{h}_3}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \qquad (i=1,\ 2).$$

L'effettiva integrazione del primo gruppo porge

$$(\mathrm{IV}''_a) \qquad \nu = \tau + \zeta\,,$$

designando ζ una funzione *a priori* arbitraria *della sola* x_3.

Dal secondo gruppo, tenuto presente che $H_i = e^{\mathfrak{h}_i}$, si ricava

$$(\mathrm{IV}''_b) \qquad H_i = e^\tau \mathcal{H}_i \qquad (i=1,\ 2),$$

le $\mathcal{H}_i$ dipendendo *soltanto da* x_1, x_2.

Infine il terzo gruppo equivale a

$$H_3 = e^\tau \chi\,,$$

con χ funzione della sola x_3. Ma si può sempre rendere $\chi = 1$, eseguendo un semplice cambiamento di parametro, sostituendo cioè alla variabile x_3 una sua opportuna funzione. Adottato questo nuovo parametro, che per semplicità seguiteremo a chiamare x_3, si ha

$$(\mathrm{IV}''_c) \qquad H_3 = e^\tau;$$

ossia $\mathfrak{h}_3 = \tau$.

In virtù delle (IV''_b) e (IV''_c), il nostro dl^2 assume l'aspetto

$$e^{2\tau}(\mathcal{H}_1^2 dx_1^2 + \mathcal{H}_2^2 dx_2^2 + dx_3^2)\,.$$

Si noti che, per essere $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ funzioni di x_1, x_2 non ulteriormente vincolate (dalle equazioni di cui ci occupiamo), $\mathcal{H}_1^2 dx_1^2 + \mathcal{H}_2^2 dx_2^2$ costituisce un generico $d\sigma^2$ binario.

Possiamo pertanto riassumere le condizioni di integrabilità come segue:

$$(5) \qquad dl^2 = e^{2\tau} dl'^2 = e^{2\tau}(d\sigma^2 + dx_3^2)\,,$$

con $d\sigma$ elemento lineare binario (a coefficienti indipendenti da x_3), ciò che sostituisce le (IV''_b) e (IV''_c);

$$(6) \qquad \nu = \tau + \zeta$$

con ζ *funzione della* x_3, ciò che riproduce la (IV_a''); *infine* τ *è legata ad* ω *ossia alle curvature principali* ($\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega$) *del* dl^2, *dalla equazione* (3); *le* x_3 ($x_1 = \text{cost.}$, $x_2 = \text{cost.}$) *sono linee assiali* (cfr. § 1).

4. – Doppio modo di impostare la integrazione. Preferibilità del secondo.

Conseguite ormai sotto forma assai maneggevole le condizioni di integrabilità relative al sottocaso B_2), si può ricorrere, per l'integrazione delle corrispondenti equazioni gravitazionali, a due distinti criterî:

1°. Far sistema delle equazioni intrinseche (I*), (II*) della Nota II colle condizioni di integrabilità (IV_a'), (IV_b'), (IV_c'), riferendo il dl^2 ad un sistema triplo che rientri nel tipo (5), e semplificando poi ulteriormente di mano in mano che se ne presenta l'opportunità, in modo da rendere immediata taluna integrazione e giungere infine ad un sistema ridotto, in cui figurano esplicitamente derivate ordinarie, al posto delle intrinseche.

Il calcolo condotto per questa via mi è riuscito discretamente laborioso e poco perspicuo, sicchè reputo superfluo intrattenermivi, proponendomi di sviluppare invece il criterio

2°. Le condizioni di integrabilità esigono che il dl^2 spaziale e ν (legata alla velocità della luce dalla relazione $V = V_0 e^{\nu}$) abbiano le forme rispettive (5) e (6). Orbene, si riprendono le originarie equazioni gravitazionali (I), (II), e si cercano quelle loro particolari soluzioni, che verificano anche (5) e (6).

Le trasformazioni covarianti su cui appositamente richiamai l'attenzione nella precedente Nota III consentono di caratterizzare queste soluzioni con spontaneità ed eleganza. Il sottocaso B_2) vi è certo compreso. A posteriori risulterà che esso è proprio costituito da tutte e sole le dette soluzioni.

5. - Trasformazioni suggerite dalla forma (5) del dl^2.

Le derivate seconde covarianti V_{ik} di una generica funzione V, prese con referenza ad un assegnato dl^2, si sanno riportare ad un dl'^2 che ne differisce per il fattore $e^{2\tau}$. Essendo precisamente

$$dl^2 = e^{2\tau}\, dl'^2 ,$$

basta invocare le formule (5) della precedente Nota III, *scambiandovi le* *lettere accentate con quelle non accentate.* Si ha così

$$\frac{V_{ik}}{V} = \nu'_{ik} + \nu_i \nu_k - \tau_i \nu_k - \tau_k \nu_i + a'_{ik} \nabla'(\tau, \nu) \tag{7}$$

$$(V = V_0 e^\nu; \quad i, k = 1, 2, 3),$$

il secondo membro andando riferito alla forma dl'^2.

L'analogo riporto dei simboli di Ricci α_{ik} dà luogo alle formule [(13) della citata Nota, con identica avvertenza circa gli accenti]

$$\alpha_{ik} = \alpha'_{ik} + \tau'_{ik} - \tau_i \tau_k - a'_{ik} \Delta'_2 \tau . \tag{8}$$

A noi interessa il dl'^2 che figura nella (5), cioè

$$dl'^2 = d\sigma^2 + dx_3^2 .$$

Stando così le cose, è possibile ed opportuno esprimere ulteriormente le ν'_{ik} e α'_{ik} con riferimento alla forma binaria $d\sigma^2$. A ciò provvedono le formule (16) e (19) della Nota citata, in cui si ponga $A = 1$. Tali formule divengono in conformità

$$\nu'_{ik} = \nu_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{9}$$

$$\alpha'_{ik} = \alpha'_{i3} = 0 \quad (i, k = 1, 2) ; \qquad \alpha'_{33} = K ; \tag{10}$$

le ν_{ik} $(i, k = 1, 2)$ si possono risguardare come derivate covarianti rispetto al $d\sigma^2$ binario; ν_{i3} e ν_{33} si identificano colle derivate seconde ordinarie $\partial^2\nu/\partial x_i \partial x_3$; $\partial^2\nu/\partial x_3^2$; e K rappresenta la curvatura gaussiana del $d\sigma^2$.

6. - Combinazione delle precedenti relazioni e della (6).

A ν si può sostituire dappertutto la sua espressione (6), con che

$$\nu_i = \tau_i \quad (i = 1, 2) , \qquad \nu_3 = \tau_3 + \zeta' ,$$

l'apice apposto ad una funzione di un solo argomento designando derivata rispetto a quell'argomento.

Così facendo, le (7), combinate colle (9), e le (8), combinate colle (10), dànno

$$
(7') \qquad \begin{cases} \dfrac{V_{ik}}{V} = \tau_{ik} - \tau_i \tau_k + a_{ik} \nabla'(\tau, \tau + \zeta) \,; & \dfrac{V_{i3}}{V} = \tau_{i3} - \tau_i \tau_3 \,; \\[2ex] \dfrac{V}{V_{33}} = \tau_{33} - \tau_3^2 + \zeta'' + \zeta'^2 + \nabla'(\tau, \tau + \zeta) \,; & \end{cases}
$$

$$
(8') \qquad \begin{cases} \alpha_{ik} = \tau_{ik} - \tau_i \tau_k - a_{ik} \Delta_2' \tau \,; & \alpha_{i3} = \tau_{i3} - \tau_i \tau_3 \,; \\[1ex] \alpha_{33} = K + \tau_{33} - \tau_3^2 - \Delta_2' \tau \,, & \end{cases}
$$

gli indici i e k potendo in queste formule assumere i valori 1 *e* 2.

Giova rilevare subito che, essendo i coefficienti della forma reciproca alla (5)

$$
a^{*(ik)} = e^{-2\tau} a^{(ik)} \quad (i, k = 1, 2) \,; \qquad a^{*(i3)} = 0 \,; \qquad a^{*(33)} = e^{-2\tau} \,,
$$

dove le $a^{(ik)}$ spettano (quali elementi reciproci) al $d\sigma^2$ binario, le (8′) dànno la curvatura media $\mathfrak{M}$ del dl^2 spaziale sotto la forma

$$
(11) \qquad \mathfrak{M} = \sum_1^3{}_{ik}\, a^{*(ik)} \alpha_{ik} = e^{-2\tau} \{ K - 2(\Delta_2' \tau - \Delta' \tau) - 3\Delta' \tau \} \,.
$$

7. - Riduzione delle equazioni gravitazionali.

Introduciamo le espressioni (7′) e (8′) nelle

$$
(\mathrm{II}) \qquad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3),
$$

che, assieme alla

$$
(\mathrm{I}) \qquad \mathfrak{M} = 0 \,,
$$

costituiscono il sistema da integrare. Si hanno in conformità i tre gruppi

$$
(\mathrm{II}_a) \qquad 2(\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) + 2 a_{ik} e^{\tau} J = 0 \qquad (i, k = 1, 2),
$$

$$
(\mathrm{II}_b) \qquad 2(\tau_{i3} - \tau_i \tau_3) = 0 \,,
$$

$$
(\mathrm{II}_c) \qquad K + 2(\tau_{33} - \tau_3^2) + \zeta'' + \zeta'^2 + 2 e^{\tau} J = 0 \,,
$$

dove J è determinato dalla posizione

$$2e^{\tau}J = -\Delta_2'\tau + \Delta'(\tau, \tau+\zeta) . \tag{12}$$

Dacchè si ha identicamente (per $i, k = 1, 2, 3$)

$$\frac{\partial e^{-\tau}}{\partial x_i} = -e^{-\tau}\tau_i , \quad (e^{-\tau})_{ik} = -e^{-\tau}(\tau_{ik} - \tau_i\tau_k) , \tag{13}$$

le (II$_b$) equivalgono a

$$\frac{\partial^2 e^{-\tau}}{\partial x_i \partial x_3} = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

che si integrano a vista e porgono

$$e^{-\tau} = \xi(x_1, x_2) + \eta(x_3) , \tag{14}$$

ξ ed η dipendendo esclusivamente dagli argomenti indicati.

Con ciò, ove si tenga conto che i parametri differenziali accentati si riferiscono alla forma $dl'^2 = d\sigma^2 + dx_3^2$ e quelli non accentati al $d\sigma^2$ binario, si ha tosto dalle (13) e dalla definizione (sotto una forma qualsiasi) dei parametri suaccennati:

$$\begin{cases} e^{-2\tau}\Delta'\tau = \Delta' e^{-\tau} = \Delta\xi + \eta'^2 , \\ e^{-2\tau}\nabla'(\tau, \tau+\zeta) = e^{-2\tau}(\Delta'\tau + \tau_3\zeta') = \Delta\xi + \eta'^2 - \eta'\zeta' e^{-\tau} , \\ e^{-\tau}(\Delta_2'\tau - \Delta'\tau) = -\Delta_2' e^{-\tau} = -\Delta_2\xi - \eta'' . \end{cases} \tag{15}$$

La (12) può così essere scritta

$$2J = e^{-\tau}(-\Delta_2'\tau + \Delta'\tau + \tau_3\zeta') = \Delta_2\xi + (\eta'' - \eta'\zeta') , \tag{12'}$$

mentre le (II$_a$), moltiplicando per $-\frac{1}{2}e^{-\tau}$ divengono

$$\xi_{ik} - a_{ik}J = 0 \qquad (i, k = 1, 2);$$

Di qua si trae in primo luogo, moltiplicando per $a^{(ik)}$ e sommando,

$$\Delta_2\xi - 2J = 0 . \tag{12''}$$

Il confronto colla (12') porge quindi

$$\eta'' - \eta'\zeta' = 0 \; ; \tag{16}$$

inoltre, col valore (12'') di J, risultano le equazioni (di secondo ordine)

$$\xi_{ik} - \frac{1}{2}\Delta_2 \xi a_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2), \tag{17}$$

di cui è manifesto il carattere invariante di fronte al $d\sigma^2$ binario.

Le (16) *e* (17) (nella prima delle quali intervengono unicamente funzioni di x_3, mentre nelle altre c'è dipendenza esclusiva da x_1, x_2) *prendono il posto delle* (II_a). *La* (14) (che è addirittura in termini finiti) *sostituisce opportunamente le* (II_b).

Resta da tener conto delle (II_c) e (I), mettendovi in evidenza K, ξ, η, ζ. La (II_c) moltiplicata per $e^{-\tau}$, in base alle (13), (14) e (12''), si scrive

$$(K + \zeta'' + \zeta'^2)e^{-\tau} - 2\eta'' + \Delta_2 \xi = 0 \, . \tag{18}$$

Quanto alla (I), badando alla espressione (11) di $\mathcal{M}$, le (15) le attribuiscono l'aspetto

$$K e^{-\xi\tau} + 2(\Delta_2 \xi + \eta'')e^{-\tau} - 3(\Delta \xi + \eta'^2) = 0 \, . \tag{19}$$

Ecco l'ultima equazione da ritenere per formarne sistema colle (14), (16), (17), (18).

8. - Espressione delle curvature principali. Verificazione di appartenenza al tipo B).

Riservo alle prossime Note l'integrazione del sistema così specificato, e termino preparandomi le curvature principali dei dl^2 soddisfacenti al sistema stesso. Se ne desume tra altro che essi rientrano necessariamente nel tipo B_2), sicchè il nostro procedimento dà tutte e sole le soluzioni di questo tipo.

Per caratterizzare le curvature principali, basta naturalmente (come già a § 4 della Nota precedente) ricorrere all'equazione di terzo grado, che complessivamente le definisce,

$$\|\alpha_{ik} - \omega a_{ik}\| = 0 :$$

ben si intende che a_{ik} e α_{ik} vanno ora riferite alla metrica (5).

Dacchè, in virtù delle (8′) e (II_b), le α_{i3} $(i=1,2)$ si annullano, e così pure [attesa l'espressione (5) del dl^2] le a_{i3}, mentre $a_{33}=e^{2\tau}$, si presenta nel primo membro della precedente equazione il fattore $\alpha_{33}-\omega e^{2\tau}$, determinandosi così la radice

$$\omega = e^{-2\tau}\alpha_{33} ,$$

la quale corrisponde evidentemente alle giaciture $x_3=\text{cost}$.

L'espressione (8′) di α_{33}, tenendo conto delle (13), (14) e (15), attribuisce ad ω la seguente forma esplicita

$$\omega = Ke^{-2\tau} + \Delta_2\xi e^{-\tau} - (\Delta\xi + \eta'^2) . \tag{20}$$

D'altra parte, per $i, k=1, 2$, le (8′), in virtù delle (14), (15) e (17), dànno

$$\alpha_{ik} = - e^{\tau}\xi_{ik} - a_{ik}\Delta_2'\tau = -\left(\frac{1}{2}\Delta_2\xi\cdot e^{\tau} + \Delta_2'\tau\right)a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2).$$

C'è dunque proporzionalità fra le α_{ik} e le a_{ik}, e perciò le due ulteriori radici ω_1 e ω_2 della precedente equazione cubica sono eguali tra loro. Siccome la somma $\mathcal{M}=\omega_1+\omega_2+\omega$ si annulla, si ha senz'altro

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega ,$$

rimanendo così accertato il comportamento delle curvature, che contraddistingue il sottocaso B_2).

NOTA V.

IL SOTTOCASO B_2): SOLUZIONI LONGITUDINALI ($\xi = 0$)

Ibidem, pp. 240-248.

Abbiamo stabilito nella Nota precedente [1] il sistema differenziale ridotto, da cui (in base ai criterî generali di trasformazione e di abbassamento esposti nella Nota III) [2] può farsi dipendere il sottocaso B_2). L'integrazione va effettuata con criterî diversi, secondochè una delle funzioni incognite, $\xi(x_1, x_2)$, si riduce o no ad una costante. Qui si contempla la prima ipotesi, in cui, come si osserva a § 1, è lecito porre addirittura $\xi = 0$.

Si è così condotti (§ 2) ad una prima categoria di $ds^2 = V^2 dt^2 - dl^2$, che includono quelli (di EINSTEIN-SCHWARZSCHILD) provocati da masse (materiali) simmetricamente distribuite attorno ad un centro. Al dl^2 può essere attribuita la forma

$$dl^2 = \frac{1}{\eta^2}\left\{d\sigma^2 + \frac{d\eta^2}{K_0\eta^2(\mu - \varepsilon\eta)}\right\},$$

essendo K_0 una costante essenzialmente positiva, μ una seconda costante, $\varepsilon = \pm 1$, e $d\sigma$ un elemento lineare binario (indipendente da η) a curvatura gaussiana costante $K_0\mu$. Il § 3 contiene lo studio intrinseco di una tale metrica e del relativo campo di forza. Questo deriva in generale dal potenziale statico $-\frac{1}{2}V^2$. Nel caso presente V^2 risulta lineare in η (a coefficienti costanti), e le linee di forza coincidono sia colle linee di pendenza che colle linee assiali di curvatura principale (definite a § 1 della Nota prec.). Perciò la distorsione dello spazio è, in tutti i sensi, longitudinale rispetto alla forza che la determina, e *longitudinali* possono opportunamente qualificarsi le soluzioni corrispondenti del sistema differenziale ricordato da principio. Esse contengono tre costanti, ma sono

(1) In questo volume di « Rendiconti », pp. 220-229.
(2) Ibidem, pp. 183-191.

∞^1 intrinsecamente distinte, perchè due delle tre costanti sono di pura omogeneità, stanno cioè a rispecchiare indeterminazione delle unità di lunghezza e di tempo.

Per caratterizzare l'influenza di una massa puntiforme (o più in generale stratificata per sfere concentriche), basta supporre μ positiva ed $\varepsilon = 1$. Ponendo

$$R = \frac{1}{\sqrt{K_0 \eta}}, \qquad \alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{K_0 \mu^{\frac{3}{2}}}},$$

si ritrova la forma canonica di SCHWARZSCHILD. Ma anche per $\mu < 0$ (purchè soltanto risulti positivo il dl^2, il che richiede $\mu - \varepsilon\eta > 0$), si hanno soluzioni reali, soddisfacenti a tutte le volute condizioni. In tali soluzioni, quando si introduce l'ipotesi addizionale che siano quantitativamente piccolissime le divergenze dalla geometria di EUCLIDE e dalla meccanica di NEWTON, le superficie equipotenziali tendono a confondersi con piani paralleli (§ 5). Così, oltre alla soluzione elementare B$_3$) della Nota II (3) (in cui lo spazio resta rigorosamente euclideo e le superficie equipotenziali, pur rigorosamente, piani paralleli), si riconosce l'esistenza di altre soluzioni esatte (dipendenti da un parametro), le quali presentano più complessa natura geometrica e meccanica, ma convergono allo stesso limite di B$_3$) (cioè a un campo uniforme dello spazio ordinario).

Si noti che, *in prima approssimazione*, è escluso un tale fenomeno, diciamo così poligenetico, a partire da un potenziale newtoniano ordinario. Come ho mostrato nella Nota I (4), ad ogni funzione armonica fa riscontro un solo ds^2 einsteiniano.

Il comportamento analitico, messo in evidenza dall'integrazione rigorosa, è suscettibile di una espressiva immagine fisica. Supponiamo che, in un certo ambiente, si provochi un campo newtoniano assai sensibilmente uniforme. Secondo la teoria di EINSTEIN, ne rimane influenzata la natura metrica dell'ambiente, il quale, a equilibrio raggiunto, si atteggia a varietà in generale non euclidea. Se il campo messo in gioco fosse proprio rigorosamente uniforme, lo spazio rimarrebbe euclideo: soluzione B$_3$), che si può riavvicinare, per prendere un esempio dall'ordinaria teoria della elasticità, alla *non* inflessione di una verga verticale caricata di punta. Ma è pur naturale che inevitabili piccole impurità del campo diano luogo ad altre forme di equilibrio finale, che involgono una distorsione dello spazio. L'analogia, nel caso della verga elastica, è offerta

(3) In questi «Rendiconti», vol. XXVII (1° semestre 1918), pp. 3-12.
(4) Ibidem, vol XXVI (2° semestre 1917), pp. 307-317.

dall'inflessione in qualche piano verticale, privilegiato per effetto di piccole dissimmetrie strutturali della verga.

1. - Aspetto della questione per $\xi = 0$.

Il sistema di cui dobbiamo occuparci è costituito dalle equazioni differenziali (16)–(19) della Nota precedente, nonchè dalla equazione in termini finiti [recante il numero (14)]

$$e^{-\tau} = \xi(x_1, x_2) + \eta(x_3) .$$

Nelle ricordate equazioni differenziali, ξ ed η compariscono soltanto derivate, ovvero pel tramite di $e^{-\tau}$. Perciò il sistema non si altera aggiungendo a ξ una costante arbitraria, purchè contemporaneamente si tolga la stessa costante da η, in modo da rispettare la somma $e^{-\tau}$. Così in particolare, *nell'ipotesi che la funzione ξ si riduca ad una costante*, è lecito assumere senz'altro $\xi = 0$, con che le equazioni (17), (18) e (19) si semplificano notevolmente. Le (17) rimangono identicamente soddisfatte; le (18) e (19), scrivendo anche η in luogo di $e^{-\tau}$, divengono

$$(K + \zeta'' + \zeta'^2)\eta - 2\eta'' = 0 , \tag{1}$$

$$K\eta^2 + 2\eta''\eta - 3\eta'^2 = 0 . \tag{2}$$

Fra $\eta(x_3)$ e $\zeta(x_3)$ passa la relazione [(16) della Nota precedente]

$$\eta'' - \zeta'\eta' = 0 . \tag{3}$$

Ricorderò, per quanto possa essere superfluo, che il dl^2 spaziale ha la forma [(5) della Nota prec., in cui si sostituisca a $e^{-\tau}$ il suo attuale valore η]

$$dl^2 = \frac{d\sigma^2 + dx_3^2}{\eta^2} , \tag{4}$$

dove $d\sigma$ rappresenta un elemento lineare binario (indipendente da x_3), avente K per curvatura gaussiana.

Per questa metrica si hanno le curvature principali

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\,\omega ,$$

con ω definito dalla equazione [(20) della Nota prec., che ora diviene]

$$\omega = K\eta^2 - \eta'^2 . \tag{5}$$

Infine, da $V = V_0 e^{\nu}$ (V_0 costante di omogeneità) e dalla equazione [(6) della Nota prec.] $\nu = \tau + \zeta$, segue, per la velocità della luce,

$$V = V_0 \frac{e^{\zeta}}{\eta} . \tag{6}$$

2. - Prime conseguenze delle equazioni differenziali. Caratteri salienti delle soluzioni.

Si può tosto escludere che $\eta(x_3)$ si riduca ad una costante. Infatti la (2) mostra che, per $\eta = \text{cost.}$, $K\eta^2 = 0$. La (5) implicherebbe allora $\omega = 0$, e quindi (per essere $\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega$) l'annullarsi di tutte le curvature. Si ricadrebbe pertanto nel caso B$_3$) (elementare o galileiano), già esaurito nella Nota II.

Ritenendo ormai η' non identicamente nullo, sarà anche η generalmente diversa da zero, e l'equazione, ricavata or ora, potrà essere risoluta rispetto a K, porgendo

$$K = -2\frac{\eta''}{\eta} + 3\frac{\eta'^2}{\eta^2} . \tag{2'}$$

Dacchè il primo membro, come curvatura del $d\sigma^2$ binario, dipende soltanto da x_1, x_2, mentre il secondo è funzione della sola x_3, la (2') richiede che siano entrambi separatamente costanti. La (4) mostra allora (essendo η funzione della sola x_3) che le superficie $x_3 = \text{cost.}$ hanno la curvatura (costante sopra ognuna di esse) $K\eta^2$, e riescono geodeticamente parallele. Il gruppo di movimenti (a tre parametri) di queste superficie a curvatura costante, che hanno per quadrato dell'elemento lineare $d\sigma^2/\eta^2$, è quello stesso del $d\sigma^2$, il quale opera sulle sole variabili x_1, x_2. Un tale gruppo spetta quindi (come gruppo intransitivo) anche alla metrica spaziale definita dalla (4).

Concettualmente la integrazione può riguardarsi compiuta. Abbiamo infatti riconosciuto che lo spazio (pur non restando euclideo) ammette un gruppo intransitivo ∞^3 di movimenti rigidi. Per $K > 0$, tale gruppo è senz'altro isomorfo a quello delle rotazioni intorno a un punto, e si è ricondotti al caso ormai classico di EINSTEIN ([5]) (campo dovuto a masse distribuite simmetricamente attorno ad un punto). Ciò vale non solo per la metrica spaziale, ma anche per il ds^2 quadridimensionale, dacchè V, a norma della (6), è funzione della sola x_3, e quindi costante sulle varie sfere geodetiche $x_3 = \text{cost}$.

Va da sè che il caso di $K < 0$ è formalmente identico, passando attraverso l'immaginario, ma dà luogo a diversa interpretazione nel campo reale, il gruppo dei movimenti essendo quello della pseudosfera. Per $K = 0$, le superficie $x_3 = \text{cost}$. hanno curvatura nulla, e il gruppo di movimenti è quello del piano euclideo.

3. - Formule esplicite. Legge della forza. Comportamento longitudinale della deformazione spaziale.

Alle equazioni (1) e (2) possiamo pensare sostituite la (2′) e quella che si ricava da (1) eliminandone K e ζ mediante (2′) e (3), ossia

$$-4\eta'' + \frac{3\eta'^2}{\eta} + \frac{\eta'''\eta}{\eta'} = 0 .$$

Non occorre tenerne conto perchè è implicita nella (2′), da cui, attesa la costanza di K, discende per derivazione. La (2′) stessa, posto per un momento $\mathfrak{z} = 1/\sqrt{\eta}$, equivale a

$$\mathfrak{z}'' - \frac{1}{4} K\mathfrak{z} = 0 ,$$

che giova sostituire col solito integrale primo

$$\mathfrak{z}'^2 - \frac{1}{4} K\mathfrak{z}^2 = \text{cost.}$$

La costante del secondo membro sarà, secondo i casi, positiva o negativa (certamente positiva per $K < 0$). Checchè ne sia, è lecito attribuirle la forma $-\frac{1}{4}\varepsilon K_0$, dove $\varepsilon = \pm 1$, e K_0 designa una costante $\geqslant 0$, che ha le dimensioni di K (cioè l^{-2}). Riponendo per $\mathfrak{z}$ il suo valore $1/\sqrt{\eta}$, si ricava

$$\eta'^2 = K\eta^2 - \varepsilon K_0 \eta^3 .$$

([5]) Veggasi la trattazione esauriente del PALATINI (*Sullo spostamento del perielio di Mercurio*, ecc., « Nuovo Cimento », vol XIV, luglio 1917, pp. 12-45), che prende appunto le mosse dalla impostazione gruppale.

La (5) diviene con ciò

(5') $$\omega = \varepsilon K_0 \eta^3 \quad (^6)\,,$$

donde in particolare apparisce che la costante K_0 va ritenuta diversa da zero: altrimenti si ricadrebbe nel sottocaso B_3) (curvature tutte nulle, ossia spazio euclideo).

Dacchè K_0 non si annulla (ed ha le dimensioni di K), possiamo assumere la costante K sotto la forma $K_0\mu$ (con μ puro numero); la precedente equazione può così essere scritta:

(7) $$\eta'^2 = K_0(\mu\eta^2 - \varepsilon\eta^3)\,.$$

La (4), sostituendovi come variabile indipendente η ad x_3, a norma della (7), assume l'aspetto

(4') $$dl^2 = \frac{d\sigma^2}{\eta^2} + \frac{d\eta^2}{K_0\,\eta^4(\mu - \varepsilon\eta)}\,,$$

dove $K_0 > 0$ è una costante arbitraria di dimensioni l^{-2}, μ è una costante numerica arbitraria (positiva, negativa o nulla), $\varepsilon = \pm 1$, e $d\sigma$ sta ad indicare un elemento lineare binario di curvatura costante $K = K_0\mu$. *Si dovranno prendere in considerazione soltanto valori positivi di* η, dacchè (§ 1) η è il valore di una esponenziale.

Le linee (geodetiche) su cui varia la sola x_3, ossia la sola η, hanno, in base alla (4'), l'elemento lineare

(8) $$dg = \frac{|d\eta|}{\sqrt{K_0}\,\eta^2\sqrt{\mu - \varepsilon\eta}}\,,$$

il radicale intendendosi preso positivamente. Supponiamo di contare l'arco g su queste geodetiche, a partire da una generica, ma ben determinata superficie (ad esse ortogonale) $\eta = \eta_0$, e di procedere, nel senso delle η decrescenti, da η_0 verso lo zero. Si avrà così $|d\eta| = -d\eta$, e g, a tenore della (8), andrà crescendo *indefinitamente*, perchè il differenziale del secondo membro tende a diventare infinito d'ordine superiore al primo. Ne viene che, facendo decrescere η da un generico valore positivo η_0 verso lo zero, si tende all'∞, nella nostra varietà di elemento lineare (4'),

(6) Questa espressione di ω è conforme al risultato generale trovato nella Nota preced. (§ 1), specificando le condizioni di integrabilità del sottocaso B_2). Per ogni soluzione appartenente a tale tipo sussiste la relazione $\omega = \omega_0\, e^{-3\tau}$ (con ω_0 costante). Qui $e^{-\tau}$ si riduce ad η, e la [5') si identifica appunto colla ricordata condizione di integrabilità.

allontanandosi indefinitamente, in senso perpendicolare, da una qualsiasi superficie della famiglia $\eta = \text{cost}$. Quanto più si procede verso l'infinito, tanto meno la varietà tende a scostarsi da uno spazio euclideo, perchè, in virtù della (5), ω, e con essa anche le due altre curvature principali $\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega$ convergono a zero assieme ad η.

La (3), isolando ζ', si integra e porge

$$e^{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{K_0}}\,\eta' , \tag{3'}$$

dove ho assunto $1/\sqrt{K_0}$ per costante di integrazione. Ciò è lecito, perchè da un lato è rispettata l'omogeneità, tale costante dovendo essere una lunghezza (η e ζ sono puri numeri, $\eta' = d\eta/dx_3$ è l'inversa di una lunghezza). D'altro lato poi va tenuto presente che ci prepariamo e^{ζ} *soltanto* per sostituirlo nella espressione (6) di V, in cui compare già una costante moltiplicativa arbitraria. Sarebbe dunque ozioso introdurne una seconda.

L'effettiva sostituzione di (3') in (6), ove si tenga conto della (7), ci dà

$$\frac{1}{2}V^2 = \frac{1}{2}V_0^2(\mu - \varepsilon\eta) . \tag{6'}$$

In questa e nella (4'), si compendia la rappresentazione formale della categoria di soluzioni di cui stiamo occupandoci. L'integrazione ha introdotto le tre costanti K_0, μ, V. Ma K_0 e V_0 dipendono dalla scelta delle unità di lunghezza e di velocità. *Perciò si tratta di ∞^1 soluzioni intrinsecamente distinte.*

Dacchè [Nota I, § 2] $-\frac{1}{2}V^2$ costituisce il potenziale statico del nostro campo di forza, e V dipende dalla sola η, le superficie $\eta = \text{cost.}$ sono equipotenziali, e le loro traiettorie ortogonali (geodetiche come s'è già rilevato) costituiscono le *linee di forza*. Esse coincidono manifestamente colle *linee assiali* [linee principali di curvatura corrispondenti alla ω, le quali, in ogni dl^2 del sottocaso B_2), sono quelle su cui varia la sola x_3, il che è quanto dire, nel caso presente, la sola η]; nonchè colle *linee di pendenza* della ω [funzione della sola η a norma della (5')]. Per questa duplice coincidenza, è ben giustificato di chiamare *longitudinali* le soluzioni di cui stiamo occupandoci.

Assumendo per positivo il senso delle η crescenti, si ha dalle (6') e (8)

$$F = -\frac{1}{2}\frac{dV^2}{dg} = \frac{1}{2}V_0^2\sqrt{K_0}\,\eta^2\sqrt{\mu - \varepsilon\eta} . \tag{9}$$

Dacchè F risulta positiva, *la forza è diretta* (secondo le linee assiali di curvatura) *verso le regioni più incurvate* (tali essendo, a norma della (5′), quelle che corrispondono a valori maggiori di η).

La legge quantitativa della forza si può considerare espressa dalla (9) sotto forma intrinseca. Infatti η non è un generico parametro di posizione, ma, in virtù della (5′), ha un preciso significato metrico dipendente dalle curvature delle varietà. Va da sè che, volendo, si potrebbe anche esprimere F in funzione della distanza geodetica g da una prefissata superficie (equipotenziale) $\eta = \eta_0$. Basterebbe ricavare η in termini di g dalla (8) e sostituire in (9).

Val la pena di fissare anche l'espressione esplicita del gradiente della forza F (lungo la sua linea d'azione, nel senso delle η crescenti), che è

$$\frac{dF}{dg} = V_0^2 K_0 \eta^3 \left(\mu - \frac{5}{4}\varepsilon\eta\right). \tag{10}$$

4. - Forma di Schwarzschild per $\mu > 0$.

A norma della (4′), le superficie $\eta = \text{cost.}$ sono geodeticamente parallele. Ad esse compete il quadrato dell'elemento lineare $d\sigma^2/\eta^2$ e quindi (per essere $K_0\mu$ la curvatura del $d\sigma^2$) la curvatura costante $K_0\mu\eta^2$, *positiva* assieme a μ. Ognuna di esse è perciò applicabile sopra una sfera il cui raggio R è definito da

$$\frac{1}{R} = \sqrt{K_0\mu}\cdot\eta . \tag{11}$$

Introducendo coordinate geografiche ϑ, φ, si può intanto porre

$$\frac{d\sigma^2}{\eta^2} = R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) .$$

D'altra parte dalle (8) e (11), sostituendo come variabile indipendente R ad η, si ricava

$$dg^2 = \frac{dR^2}{1 - \alpha/R},$$

dove

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{K_0}\,\mu^{\frac{3}{2}}}$$

sta a designare una costante (positiva per $\varepsilon = 1$) avente le dimensioni di una lunghezza.

Ne consegue, badando alle (4') e (8),

$$dl^2 = \frac{d\sigma^2}{\eta^2} + dg^2 = R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) + \frac{dR^2}{1 - \alpha/R},$$

che è precisamente la forma di SCHWARZSCHILD (7).

La corrispondente espressione di V^2 si ha dalla (6'), sostituendo R ad η per mezzo della (11). Ove si designi con c^2 la costante $V_0^2\mu$, risulta

$$V^2 = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{R}\right).$$

C. D. D.

5. - Condizione qualitativa di immediata prossimità ad uno spazio euclideo.

Dacchè le tre curvature principali sono, a norma della (5'),

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\,\omega = -\frac{1}{2}\,\varepsilon K_0 \eta^3 \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

si sarà prossimi al comportamento euclideo allora e allora soltanto che risulti piccolo $K_0\eta^3$. Questo può avvenire per due ragioni: o K_0 (che è una curvatura) riesce trascurabile di fronte ad altra curvatura che abbia importanza specifica nel caso concreto da prendere in considerazione; ovvero η^3 (che è un puro numero) si mantiene piccolo in valore assoluto.

Ciò premesso, si osservi dal punto di vista geometrico che la congruenza assiale (costituita dalle linee su cui varia la sola x_3, o, ciò che è lo stesso, la sola η) è, per ogni metrica del sottocaso B_2), isotropa e normale [cfr. Nota IV, § 2]; per le metriche (4') risulta altresì geodetica. Ora, in uno spazio euclideo, le congruenze geodetiche, isotrope e normali si riducono a due soli tipi:

1) Rette concorrenti in un punto (proprio) O.

2) Rette parallele.

Ne segue che, nelle soluzioni trovate, in quanto si accostino al caso euclideo, le superficie equipotenziali $\eta = \text{cost.}$ devono essere assai prossime a sfere concentriche, oppure a piani paralleli.

La curvatura delle sfere è positiva, e non infinitesima, finchè ci si

(7) Cfr. PALATINI, loc. cit., pag. 19.

pone a distanza finita da O. Siccome, nella contigua metrica einsteiniana, la curvatura delle superficie $\eta = \text{cost.}$ è espressa da $K_0\mu\eta^2$, così dobbiamo necessariamente ritenere $\mu > 0$. Dopo di che, in base al precedente §, diviene superfluo soffermarsi sul complemento quantitativo di piccolo divario dalla metrica euclidea: questo si specifica in modo noto, chiaramente illustrato dal PALATINI nella citata Memoria.

Resta da riconoscere in quali delle nostre soluzioni le superficie equipotenziali sono prossime a piani paralleli dello spazio ordinario. Si richiede evidentemente (e basta) che sieno piccole ad un tempo le curvature principali, e per esse $K_0\eta^2$, nonchè la curvatura $K_0\mu\eta^2$ delle superficie equipotenziali. Trattando come quantità di prim'ordine i due puri numeri η (variabile) e μ (costante), le dette curvature riescono del 3° ordine. E si può constatare che il campo di forza è uniforme con approssimazione anche superiore a quest'ordine. Basta por mente alla (10), la quale mostra che il gradiente della forza F contiene il fattore di quarto ordine

$$\eta^2\left(\mu - \frac{5}{4}\varepsilon\eta\right).$$

Val la pena di rilevare che, in questi campi prossimi agli uniformi, come in tutte le soluzioni longitudinali, lo spazio è distorto (cioè deformato rispetto all'ordinario spazio euclideo) in modo che la direzione assiale di curvatura principale coincide con quella della forza. È questo il comportamento più intuitivo. Vedremo però in seguito (in particolare al § 6 della Nota VI) che altre soluzioni, pur aventi lo stesso aspetto limite di campi uniformi dello spazio euclideo, presentano, nei riguardi dell'inclinazione delle linee assiali sulle linee di forza, caratteristiche più complesse, che non si saprebbero certo prevedere col semplice buon senso.

NOTA VI.

IL SOTTOCASO B_2): SOLUZIONI QUADRANTALI ($\eta = 0$)

Ibidem, pp. 283-292.

Nella Nota precedente (¹) è stata discussa quella particolare categoria di ds^2, appartenenti al sottocaso B_2), in cui l'incognita ξ si riduce ad una costante (soluzioni longitudinali). Conviene ora esaminare la opposta (e più generale) eventualità che ξ sia una effettiva funzione.

Valendomi di certo gruppo di equazioni cui deve soddisfare $\xi(x_1, x_2)$, sono condotto (§§ 1 e 2) ad esprimere molti elementi incogniti mediante una sola funzione $\Xi(\xi)$, preparandomi così un sistema differenziale direttamente integrabile con mezzi elementari. Ma ancora una volta (§ 3) va staccata dal caso generale una seconda categoria di soluzioni, specializzata (come già la prima nei riguardi di ξ) perchè una certa η si mantiene costante. La presente Nota si limita a questa seconda categoria. L'integrazione (§ 4) è immediata, e porta a ∞^3 soluzioni, di cui però (come già le longitudinali) soltanto ∞^1 sono intrinsecamente distinte. La loro esegesi geometrica e statica (§ 5) mette in evidenza la *proprietà quadrantale*, cioè la perpendicolarità fra le linee assiali e le linee di pendenza (veggasi per le denominazioni il § 1 della Nota IV) (²). Si tratta, come si vede, di una proprietà puramente geometrica. A differenza di quanto accade nella prima categoria di soluzioni, non c'è legame semplice fra le linee di forza e le linee caratteristiche della deformazione.

Un caso limite (§ 6) di soluzioni quadrantali è assai prossimo ai campi uniformi dello spazio euclideo, e porge un nuovo esempio (cfr. la prefazione della Nota precedente) di quella poligenesi (a partire da un ordinario potenziale newtoniano) che contraddistingue le soluzioni rigorose dalla prima approssimazione.

(¹) Pp. 240-248 di questo volume.
(²) Ibidem, pp. 220-229.

1. - Le equazioni in ξ (per ξ non costante).

Si tratta delle equazioni [(17) della Nota IV]

$$\xi_{ik} - \frac{1}{2} \Delta_2 \xi a_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2), \tag{1}$$

dove le a_{ik}, le derivate covarianti della funzione ξ e il parametro si riferiscono alla forma binaria

$$d\sigma^2 = \sum_{ik}{}_1^2 a_{ik} dx_i dx_k .$$

Le (1) rimangono identicamente soddisfatte nell'ipotesi particolare di ξ costante, ampiamente discussa nella Nota precedente. Vediamo ora le conseguenze dell'ipotesi opposta.

Moltiplicando per $\xi^{(k)}$ e sommando rispetto all'indice k, risulta

$$\sum_k{}_1^2 \xi^{(k)} \left(\xi_{ik} - \frac{1}{2} \Delta_2 \xi a_{ik} \right) = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{1'}$$

Soffermiamoci un momento per stabilire che queste equazioni, pur essendo due soltanto, ammettono le originarie (1) come necessaria conseguenza, sicchè c'è equivalenza fra (1) e (1'). Osserviamo all'uopo che (essendo ormai esclusa la costanza di ξ) non possono annullarsi identicamente, nè entrambe le derivate ξ_1, ξ_2, nè entrambi gli elementi del sistema reciproco $\xi^{(k)} = \sum_h{}_1^2 a^{(hk)} \xi_h$. Le (1') esigono perciò che si annulli il determinante di elementi

$$b_{ik} = \xi_{ik} - \frac{1}{2} \Delta_2 \xi a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2).$$

Per sfruttare questa circostanza, poniamo

$$\sqrt{\pm b_{11}} = b_1 , \qquad \pm b_{12} = b_1 b_2$$

adottando il segno superiore per b_{11} positivo, l'inferiore per b_{11} negativo, in modo che b_1 riesca reale in ogni caso. Dall'annullarsi del determinante $b_{11} b_{22} - b_{12}^2$ segue allora $\pm b_{22} = b_2^2$, e rimane acquisito che (b_1, b_2 designando acconce ausiliarie *reali*) sussistono le identità

$$\xi_{ik} - \frac{1}{2} \Delta_2 \xi \, a_{ik} = \pm \, b_i b_k \, :$$

circa il segno da preporre ai secondi membri, basta ritenere che esso è il medesimo per ogni coppia i, k.

Moltiplichiamo per $a^{(ik)}$ e sommiamo. Il primo membro si annulla talchè

$$\pm \sum_{1}^{2}{}_{ik} \, a^{(ik)} b_i b_k = 0 \, .$$

Siccome la forma di coefficienti $a^{(ik)}$ è definita positiva (al pari del $d\sigma^2$, di cui è reciproca), la precedente condizione richiede l'identico annullarsi di b_1, b_2. Ne consegue

$$\xi_{ik} - \frac{1}{2} \Delta_2 \xi \, a_{ik} = 0 \, ,$$

e quindi l'annunciata equivalenza fra le (1) e le (1′).

Ciò premesso, ove si noti che

$$(\Delta\xi)_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{1}^{2}{}_k \, \xi^{(k)} \xi_k = 2 \sum_{1}^{2}{}_k \, \xi^{(k)} \xi_{ik} \, ; \qquad \sum_{1}^{2}{}_k \, a_{ik} \xi^{(k)} = \xi_i \, ,$$

le (1′) assumono l'aspetto

$$(\Delta\xi)_i - \Delta_2 \xi \cdot \xi_i = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

e si possono quindi compendiare nell'unica equazione ai differenziali totali

$$d(\Delta\xi) - \Delta_2 \xi \cdot d\xi = 0 \, .$$

Perchè questa sussista è necessario e basta che i due parametri $\Delta\xi$, $\Delta_2\xi$ sieno entrambi funzioni della sola ξ, la prima *a priori* arbitraria, e la seconda eguale alla rispettiva derivata. Attribuiremo a $\Delta\xi$ la forma $K_0 \Xi(\xi)$ con K_0 costante positiva di dimensione l^{-2} (e quindi interpretabile come curvatura superficiale), che introduciamo per ragione di omogeneità, onde poter riguardare Ξ puro numero al pari di ξ.

Escludendo eventuali punti (isolati) in cui potrebbero annullarsi ξ_1 e ξ_2, il parametro $\Delta\xi$ è positivo; sarà perciò, generalmente, $\Xi(\xi) > 0$. Rimane inteso che noi riferiremo le nostre considerazioni a campi in cui una tale disuguaglianza si trova soddisfatta.

In definitiva le originarie (1) sono sostituibili colle due condizioni

$$(1'')\qquad \Delta\xi = K_0 \Xi\,, \qquad \Delta_2\xi = K_0\Xi' :$$

va da sè che l'apice apposto ad una funzione di un solo argomento, quale la $\Xi(\xi)$, designa senza ambiguità derivazione rispetto a quell'argomento.

2. - Forma canonica del $d\sigma^3$ riferito alle linee $\xi = \text{cost.}$ e alle loro traiettorie ortogonali. Curvatura.

Possiamo immaginare riferito il nostro $d\sigma^2$ binario alle linee $\xi = \text{cost.}$ e alle loro traiettorie ortogonali. Sia φ^* un qualsiasi parametro di queste linee (che mi riservo di sostituire con una sua conveniente funzione φ). Potrò intanto porre, in virtù della prima delle (1''),

$$d\sigma^2 = \frac{1}{K_0}\left(\frac{d\xi^2}{\Xi} + \Phi\, d\varphi^{*2}\right),$$

essendo Φ una funzione di ξ, φ^*, sottoposta alla condizione di rendere verificata anche la seconda delle (1''). Dacchè si ha, per una generica funzione $f(\xi, \varphi^*)$,

$$\Delta_2 f = K_0\sqrt{\frac{\Xi}{\Phi}}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\Xi\Phi}\,\frac{\partial f}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi^*}\left(\frac{1}{\sqrt{\Xi\Phi}}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi^*}\right)\right\},$$

assumendo $f = \xi$, si ricava

$$\Xi' = \sqrt{\frac{\Xi}{\Phi}}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\sqrt{\Xi\Phi}\,,$$

ossia

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \frac{2}{\Xi}\,\Xi'.$$

Ne consegue

$$\Phi = \Phi^*\,\Xi\,,$$

in cui la costante di integrazione Φ^* va ritenuta funzione *a priori* arbitraria di φ^*. Con un cambiamento di parametro, si rende

$$\sqrt{\Phi^*}\, d\varphi^* = d\varphi\,,$$

talchè risulta

$$d\sigma^2 = \frac{1}{K_0}\left(\frac{d\xi^2}{\Xi} + \Xi\, d\varphi^2\right), \tag{2}$$

che risguarderemo come forma canonica del nostro $d\sigma^2$. Si tratta evidentemente di metrica spettante ad una superficie rotonda, i cui meridiani ($\varphi = \text{cost}$) e paralleli ($\xi = \text{cost}$) costituiscono un reticolato in corrispondenza equivalente (che conserva le aree) col reticolato cartesiano (ξ, φ) della metrica euclidea $1/K_0(d\xi^2 + d\varphi^2)$.

È appena necessario aggiungere che, da (2), si passa alla forma geodetica, ponendo

$$du = \frac{d\xi}{\sqrt{\Xi}},$$

con che

$$d\sigma^2 = \frac{1}{K_0}\,(du^2 + \Xi\, d\varphi^2)\;;$$

e alla forma isometrica, ponendo

$$d\chi = \frac{d\xi}{\Xi},$$

con che

$$d\sigma^2 = \frac{\Xi}{K_0}\,(d\chi^2 + d\varphi^2)\,.$$

La curvatura gaussiana K si calcola nel modo più spiccio dalla espressione geodetica del $d\sigma^2$, in base alla formula

$$K = -K_0 \frac{1}{\sqrt{\Xi}}\,\frac{d^2\sqrt{\Xi}}{du^2}\,.$$

Sostituendo a du la sua espressione $d\xi/\sqrt{\Xi}$, si ricava

$$K = -\frac{1}{2}\,K_0\,\Xi''\,. \tag{3}$$

3. - Richiamo del sistema da integrare. Caso di $\eta = 0$.

Finora abbiamo considerato le (1) per se stesse, e le abbiamo, per così dire, risolute parametricamente, esprimendo tutto mediante la funzione (positiva) $\Xi(\xi)$, che le (1) stesse lasciano completamente arbitraria

È il momento di riprendere le altre equazioni del problema nella forma loro attribuita alla fine della Nota IV.

Per raccogliere le idee, rammento che, nella classe di ds^2 einsteiniani di cui stiamo occupandoci, la metrica spaziale è definita da

$$dl^2 = e^{2\tau}(d\sigma^2 + dx_3^2) ,$$

dove, per quanto precede, il $d\sigma^2$ è della forma (2), mentre

$$e^{-\tau} = \xi + \eta ,$$

con η funzione della sola x_3. La velocità della luce si esprime per ξ, η e un'ulteriore funzione ζ della sola x_3, avendosi

$$V = V_0 \frac{e^{\zeta}}{\xi + \eta} :$$

V_0 designa una costante arbitraria, cui spettano le dimensioni di una velocità, mentre le funzioni ξ, η e ζ hanno dimensioni nulle.

Fra ξ, η, ζ e gli elementi del $d\sigma^2$ (coefficienti e curvatura), passano, oltre alle (1) già sfruttate, le equazioni (16), (18), (19) della Nota IV, che dovrei intanto trascrivere, sostituendovi, in luogo di $\Delta\xi$, $\Delta_2\xi$ e K le loro espressioni (1″) e (3) per mezzo della sola Ξ. Riporterò queste formule nella successiva Nota VII, quando mi accingerò a discuterle con referenza al caso generale in cui η si suppone una effettiva funzione di x_3. Qui mi limiterò al caso, in certo modo singolare, in cui η si riduce ad una costante. Si può allora, ragionando come a § 1 della Nota precedente, ritenerla addiritura nulla; la (16) rimane identicamente soddisfatta, e le equazioni (18), (19) (postovi in conformità $e^{-\tau} = \xi$) assumono l'aspetto

$$\left(-\frac{1}{2} K_0 \Xi'' + \zeta'' + \zeta'^2\right)\xi + K_0 \Xi' = 0 , \tag{4}$$

$$-\frac{1}{2} \Xi'' \xi^2 + 2\Xi' \xi - 3\Xi = 0 . \tag{5}$$

Il quadrato dell'elemento lineare $e^{2\tau}(d\sigma^2 + dx_3^2)$, esplicitato analogamente in base alla (2), ove si ponga

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{K_0}} \psi , \tag{6}$$

sostituendosi così alla variabile indipendente x_3 (che è una lunghezza) la ψ (che è un puro numero), diviene

$$(7) \qquad dl^2 = \frac{1}{K_0\xi^2}\left\{\frac{d\xi^2}{\Xi} + \Xi\, d\varphi^2 + d\psi^2\right\}.$$

Le curvature principali sono, come in tutte le soluzioni B_2), legate dalle relazioni

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\,\omega\,,$$

dove ω corrisponde alle giaciture $x_3 = \text{cost.}$, ossia $\psi = \text{cost.}$, ed è definita in generale dalla equazione (20) della più volte citata Nota IV, equazione che, nel caso presente, si riduce a

$$(8) \qquad \omega = K_0\left(-\frac{1}{2}\,\Xi''\xi^2 + \Xi'\,\xi - \Xi\right).$$

Rileverò da ultimo che, ponendo $\eta = 0$ nella espressione poc'anzi richiamata di V, si ha

$$(9) \qquad V = V_0\,\frac{e^\zeta}{\xi}\,.$$

4. - Determinazione delle soluzioni per cui $\eta = 0$.

Le nostre variabili indipendenti sono ormai: la ξ *essenzialmente positiva* (in quanto si identifica, per $\eta = 0$, coll'esponenziale $e^{-\tau}$), la φ e la ψ. Le funzioni incognite si riducono a due, dipendenti entrambe da un solo argomento: la $\Xi(\xi)$ e la $\zeta(x_3)$, in cui x_3 va sostituito con ψ a norma della (6). Facendo apparire ψ come variabile di derivazione in luogo di x_3, e ponendo per brevità

$$(10) \qquad \frac{d^2\zeta}{d\psi^2} + \left(\frac{d\zeta}{d\psi}\right)^2 = e^{-\zeta}\,\frac{d^2 e^\zeta}{d\psi^2} = Z\,,$$

si ha

$$\zeta'' + \zeta'^2 = K_0 Z\,.$$

Con ciò (essendo lecito di dividere senza riserve per ξ), la (4) può essere scritta

$$Z = \frac{1}{2}\,\Xi'' - \frac{1}{\xi}\,\Xi' \,. \tag{4'}$$

Dei due membri, il primo può dipendere soltanto da ψ, il secondo soltanto da ξ. Perciò essi sono entrambi costanti (e puri numeri). Designandone il valore comune con $-\mu$, la (4') si scinde nelle due:

$$Z = -\mu\,, \qquad \frac{1}{2}\,\Xi'' - \frac{1}{\xi}\,\Xi' = -\mu\,.$$

Ridotta a mezzo di quest'ultima, la (5) diviene

$$\Xi'\xi - 3\Xi = -\mu\xi^2\,,$$

ossia

$$d\left(\frac{1}{\xi^3}\,\Xi\right) = -\mu\,\frac{d\xi}{\xi^2}\,.$$

Integrando e attribuendo alla costante la forma $\varepsilon\lambda$, con $\varepsilon = \pm 1$ e $\lambda > 0$, si ha

$$\Xi = \mu\xi^2 + \varepsilon\lambda\xi^3\,.$$

Si verifica immediatamente che, con tale espressione di Ξ, rimane senz'altro soddisfatta anche la precedente

$$\frac{1}{2}\,\Xi'' - \frac{1}{\xi}\,\Xi' = -\mu\,;$$

e quindi la (5) per necessaria conseguenza. Va rilevato che λ non può essere zero, perchè in tal caso si annullerebbe anche ω in base alla (8), e si sarebbe ricondotti ad uno spazio euclideo, caso che sempre si esclude, perchè già esaurito nella Nota II. Riconosciuto che $\lambda \neq 0$, diviene lecito senza pregiudizio della generalità supporre addirittura $\lambda = 1$. Infatti, partendo da un valore positivo generico di questa costante, basta porre

$$K_0 = \frac{K_0^*}{\lambda}\,, \qquad \mu = \lambda\mu^*\,, \qquad \Xi = \lambda\Xi^* = \lambda(\mu^*\xi^2 + \varepsilon\xi^3)\,, \qquad \varphi = \lambda\varphi^*\,,$$

perchè tutte le formule precedenti rimangano inalterate salvo lo scambio materiale di K_0, μ, Ξ, φ, λ in K_0^*, μ^*, Ξ^*, φ^*, 1 (K_0^* risultando, ben si intende, positiva al pari di K_0). C. D. D.

Possiamo pertanto ritenere

$$(11) \qquad \Xi = \mu\xi^2 + \varepsilon\xi^3 \qquad [\varepsilon = \pm 1)\,,$$

con che la (8) si riduce a

$$(8') \qquad \omega = -\varepsilon K_0 \xi^3 \quad (^3)\,.$$

La determinazione della funzione ζ dipende dalla equazione $Z = -\mu$, la quale, badando alla (10), diviene

$$\frac{d^2 e^\zeta}{d\psi^2} + \mu e^\zeta = 0\,.$$

A prescindere da inessenziali costanti di integrazione (4) (e da un eventuale scambio, pure inessenziale, di ψ in $-\psi$), ne deduciamo:

$$(12) \qquad e^\zeta = \begin{cases} \cos\sqrt{\mu}\,\psi & (\mu > 0)\,, \\ \cosh\sqrt{-\mu}\,\psi\,, \quad \text{ovvero} \quad e^{\sqrt{-\mu}\psi} & (\mu < 0)\,, \\ \psi, \quad \text{ovvero} \quad 1 & (\mu = 0)\,. \end{cases}$$

In base alla (11), la metrica spaziale (7) contiene le due costanti K_0 e μ; nella V figura inoltre V_0. Perciò questa seconda categoria ha lo stesso grado di arbitrarietà delle soluzioni longitudinali (Nota prec., § 3); e consta anch'essa (K_0 e V_0 dipendendo dalla scelta, *a priori* arbitraria, delle unità di lunghezza e di tempo) di ∞^1 soluzioni intrinsecamente distinte.

---

(3) Anche per questa seconda categoria di soluzioni, si ha, come già per la prima [Nota precedente, § 3], un controllo diretto della condizione generale di integrabilità [Nota IV, § 2] $\omega = \omega_0 e^{-3\tau}$ con ω_0 costante. Ora $e^{-\tau} = \xi$, $\omega_0 = -\varepsilon K_0$ mentre, per la prima categoria, si aveva $e^{-\tau} = \eta$, $\omega_0 = \varepsilon K_0$.

(4) Queste sarebbero infatti: o moltiplicativa nell'espressione di e^ζ; o additiva rispetto alla variabile indipendente ψ. La prima è superflua perchè si conglobcrebbe nella V_0 che compare nella espressione (9) di V (sola formula per cui ci interessa e^ζ); la seconda è pure inessenziale perchè ψ compare nelle formule soltanto pel tramite di $d\psi^2$, e quindi si può, senza alterare le formule stesse, sostituire ψ con $\pm\psi + \text{cost}$.

5. - Giustificazione dell'appellativo quadrantale. Comportamento geometrico e meccanico.

La congruenza assiale ($\xi = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$ colle attuali notazioni), che corrisponde alla curvatura ω, è isotropa e normale [cfr. Nota IV, § 2] per tutte le B_2); nella precedente categoria di soluzioni essa era altresì geodetica; ora non più perchè il coefficiente di $d\psi^2$ nella (7), dipende da ψ. Inoltre è diverso nei due casi il modo di variare di ω. Nelle soluzioni longitudinali le linee assiali erano traiettorie ortogonali delle superficie $\omega = \text{cost.}$, e quindi coincidevano colle linee di pendenza. Qui, a norma della (8'), le linee di pendenza sono le ξ ($\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}$), ortogonali alle linee assiali ψ. Le soluzioni di cui stiamo occupandoci si chiamano *quadrantali* appunto per il fatto che si tagliano ad angolo retto le due congruenze di linee, intrinsecamente caratteristiche, assiali e di pendenza.

Giova rilevare che le superficie $\varphi = \text{cost.}$, e così pure le $\psi = \text{cost.}$, sono *piani geodetici*, nel senso che ogni loro linea geodetica è anche geodetica rispetto alla metrica dello spazio ambiente ([5]); all'incontro non si tratta di superficie a curvatura gaussiana nulla: per es. le $\psi = \text{cost.}$, in base alla stessa definizione di curvatura riemanniana secondo una data giacitura, hanno la curvatura ω.

Le linee assiali (su cui varia la sola ψ) appartengono evidentemente ai piani geodetici $\varphi = \text{cost.}$ e ne costituiscono le linee $\xi = \text{cost.}$ Esse risultano geodeticamente parallele nella metrica superficiale subordinata dalla (7) per $\varphi = \text{cost.}$ La loro curvatura geodetica γ, in base a nota formula ([6]), vale

$$\gamma = -K_0\xi^2\sqrt{\Xi}\,\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{K_0\xi^2}}\right) = \sqrt{K_0\Xi}\,,$$

e si mantiene manifestamente costante lungo una stessa linea $\xi = \text{cost.}$ *Le linee assiali possono pertanto riguardarsi come circoli geodetici* (linee piane a curvatura costante) *della metrica* (7).

Se si fa convergere ξ a zero (come già η, a § 3 della Nota preced.), ci si allontana indefinitamente nella varietà, tendendo all'∞ la distanza da una generica superficie $\xi = \text{cost.}$, contata sulle geodetiche ad essa ortogonali; ecc.

([5]) Si può rendersene conto sia, direttamente, in base alle equazioni di LAGRANGE per le geodetiche, sia invocando un risultato specifico dovuto al sig. HADAMARD. Cfr. *Sur les éléments linéaires à trois dimensions*, Bull. des sciences math., tomo XXV, 1901, pp. 37-40.

([6]) Cfr. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 1902], pag. 184.

Le superficie equipotenziali $-\frac{1}{2}V^2 = \text{cost.}$, o, ciò che è lo stesso, $V = \text{cost.}$, non coincidono più, come nell'altra categoria, colle $\omega = \text{cost.}$, ma dipendono da ξ e da ψ a norma delle (9) e (12). Perciò le linee di forza non coincidono colle linee assiali (su cui varia la sola ψ), nè colle linee di pendenza (su cui varia la sola ξ); e nemmeno le incontrano sotto angolo retto. Ne consegue, considerando intuitivamente l'andamento delle linee di forza come causa meccanica e la distorsione geometrica dello spazio, cioè l'andamento delle linee principali di curvatura (e, per esse, assiali e di pendenza), come effetto, che il comportamento delle soluzioni in discorso, non è longitudinale, nè trasversale; ma misto.

6. - Caso limite.

Supponiamo in particolare che la costante (numerica) μ abbia un valore positivo molto grande. L'ipotesi si intenderà precisata, convenendo di riferirsi a valori moderati della variabile ξ, tali cioè che ξ^3 riesca trascurabile di fronte a $\mu\xi^2$.

Noto anzi tutto che l'incondizionata trascurabilità di ξ^3 implica, in causa della (8′), l'annullarsi di ω, e con essa di $\omega_1 = \omega_2 = -\omega/2$ ossia l'euclideità dello spazio. La stessa conclusione sussiste sotto l'ipotesi più lata che si possa prescindere da ξ^3 di fronte a $\mu\xi^2$. Infatti Ξ si riduce allora a $\mu\xi^2$, e l'espressione (7) del quadrato dell'elemento lineare, ponendo

$$r = \frac{1}{\sqrt{K_0\mu}}\frac{1}{\xi}, \qquad z = \sqrt{\frac{\mu}{K_0}}\,\varphi, \qquad \theta = \sqrt{\mu}\,\psi,$$

diviene

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2\,d\theta^2,$$

in cui si ravvisa la nota forma euclidea riferita a coordinate cilindriche.

La (9), in virtù della (12) per $\mu > 0$, porge

$$V = V_0\sqrt{K_0\mu}\,r\cos\theta, \tag{13}$$

e mostra per conseguenza che le superficie $V = \text{cost.}$ si identificano coi piani (paralleli tra loro e all'asse delle z) $r\cos\theta = \text{cost.}$ Le linee di forza sono le perpendicolari a questi piani, mentre la forma limite delle linee assiali (su cui varia la sola ψ, ossia la sola θ) è costituita dai circoli paralleli, e la forma limite delle linee di pendenza (su cui varia la sola ξ, ossia la sola r) è offerta dai raggi incidenti all'asse delle z sotto angolo retto. Come si vede, le linee di forza incontrano sia le linee assiali che le linee di pendenza sotto angoli variabili da punto a punto, anzi suscettibili di qualsivoglia determinazione.

A tenore della (13), ove si ponga $r \cos\theta = x - x_0$ (x_0 costante), V varia linearmente colla distanza x dal piano $r \cos\theta = -x_0$; perciò l'aspetto limite della forza è quello del caso B_3) (Nota II, § 7), ossia, si può dire, il campo uniforme [7].

Per quanto precede, le linee caratteristiche della deformazione spaziale presentano, anche al limite, un comportamento obliquo (non longitudinale, nè trasversale) rispetto alle linee di forza.

---

[7] Va notato che l'espressione *rigorosa* del potenziale statico $-\frac{1}{2}V^2$ sarebbe quadratica in x, e la forza avrebbe quindi carattere di forza elastica di richiamo (verso il piano $x = x_0$). Però, come si vide a proposito di B_3), le condizioni che interessano praticamente sono quelle in cui è trascurabile il quadrato del rapporto x/x_0. Allora è lecito prescindere dal termine quadratico in $-\frac{1}{2}V^2$, con che si ricade nei campi uniformi, c.d.d.

NOTA VII.

IL SOTTOCASO B_2): SOLUZIONI OBLIQUE

Ibidem, pp. 343-351.

Con questa Nota esaurisco finalmente lo studio del sottocaso B_2), che comprende in sostanza tutti i campi di forza (non occupati da masse materiali) per effetto dei quali lo spazio si atteggia a varietà normale di BIANCHI con due curvature principali eguali. Le equazioni che li determinano, ridotte a tal forma da poter iniziare le integrazioni, stanno scritte a § 7 della Nota IV. Nelle Note V e VI [1] ci siamo occupati di due particolari categorie di integrali (soluzioni longitudinali e soluzioni quadrantali), le quali corrispondono all'ipotesi che sia costante l'una o l'altra di due certe funzioni $\xi(x_1, x_2)$, $\eta(x_3)$.

Si tratta ora dell'ultima e più generale categoria di soluzioni, in cui tanto ξ quanto η sono effettive funzioni, con che diviene lecito assumerle entrambe per variabili indipendenti. In primo luogo (§ 1) richiamo le suaccennate equazioni differenziali, semplificandole col tener conto di alcune espressioni parametriche (si potrebbe anche dire integrali di una parte delle equazioni del sistema), assegnate in principio della Nota precedente. Nel sistema così esplicitato restano da determinare funzioni incognite di un solo argomento. Le variabili non sono però separate, e il sistema ha un aspetto asimmetrico, punto espressivo. Lo si trasforma con qualche accorgimento elementare (§ 2), dopo di che l'integrazione si fa senza calcoli (§ 3), e si perviene (§ 4) a rappresentazioni canoniche eleganti, una prima algebrica, e una seconda per trascendenti ellittiche. Non ho fatto uno studio geometrico approfondito, come per le categorie precedenti, notando soltanto che in generale varia da punto a punto l'angolo fra le linee assiali e le linee di pendenza, e l'inclinazione di entrambe sulle linee di forza. Ecco perchè ho chiamato *oblique* queste soluzioni.

Le costanti introdotte dall'integrazione sono quattro, ma due equivalgono a scelta arbitraria delle unità di lunghezza e di tempo, sicchè

---

[1] Cfr. Nota IV, pp. 220-229; Nota V, pp. 240-248; Nota VI, pp. 283-292 di questo volume dei «Rendiconti».

le soluzioni intrinsecamente distinte sono ∞^2 (anzichè soltanto ∞^1 come le longitudinali e le quadrantali).

L'ultimo paragrafo contiene una tabella riassuntiva dei risultati e delle formule concernenti il sottocaso B_2).

1. - Richiami.

I ds^2 einsteiniani da determinare sono statici, cioè della forma

$$V^2\,dt^2 - dl^2\,,$$

e appartengono al sottocaso B_2), in cui la metrica spaziale è definita da

$$dl^2 = e^{2\tau}(d\sigma^2 + dx_3^2)\,,$$

essendo $d\sigma$ un elemento lineare binario indipendente da x_3, e

$$e^{-\tau} = \xi(x_1, x_2) + \eta(x_3)\,.$$

A prescindere dalle soluzioni (già discusse nella Nota V), in cui ξ si mantiene costante, si ha, in base alla Nota precedente,

$$d\sigma^2 = \frac{1}{K_0}\left(\frac{d\xi^2}{\Xi} + \Xi\,d\varphi^2\right), \tag{1}$$

con Ξ funzione (incognita) della sola ξ, e K_0 costante positiva.

La curvatura gaussiana K di questo $d\sigma^2$ è data [loc. cit., formula (3)] da

$$K = -\frac{1}{2}K_0\,\Xi''\,. \tag{2}$$

Infine

$$V = V_0\,\frac{e^\zeta}{\xi+\eta}\,, \tag{3}$$

con V_0 costante (avente le dimensioni di una velocità) e ζ funzione della sola x_3.

Complessivamente si presentano tre funzioni incognite, ciascuna di un solo argomento: $\Xi(\xi)$, $\eta(x_3)$, $\zeta(x_3)$, le quali devono verificare le equazioni (16), (18) e (19) della Nota IV. Avendo cura di sostituire a $e^{-\tau}$, $\Delta\xi$,

$\Delta_2\xi$, K i loro valori $\xi+\eta$, $K_0\Xi$, $K_0\Xi'$, $-\frac{1}{2}K_0\Xi''$ [il primo e l'ultimo già richiamati, e gli altri due forniti dalle (1″) della Nota precedente], le equazioni da integrare assumono la forma

$$\eta'' - \zeta'\eta' = 0 , \tag{4}$$

$$\left(-\frac{1}{2}K_0\,\Xi'' + \zeta'' + \zeta'^2\right)(\xi+\eta) - 2\eta'' + K_0\Xi' = 0 , \tag{5}$$

$$-\frac{1}{2}K_0\Xi''(\xi+\eta)^2 + 2(K_0\Xi' + \eta'')(\xi+\eta) - 3(K_0\Xi + \eta'^2) = 0 . \tag{6}$$

Rammento altresì che le curvature principali di tutti i dl^2 appartenenti al sottocaso B_2) sono legate dalle relazioni

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\,\omega .$$

Per ω, la (20) della Nota IV, colle sostituzioni testè indicate, porge

$$\omega = -\frac{1}{2}K_0\Xi''(\xi+\eta)^2 + K_0\Xi'(\xi+\eta) - (K_0\Xi + \eta'^2) . \tag{7}$$

2. - Trasformazione delle equazioni differenziali.

Possiamo escludere che η si riduca ad una costante (caso esaurito nella Nota preced.) e ritenere perciò $\eta' \neq 0$. Siamo così autorizzati a immaginare x_3 espresso per mezzo di η, con che η'^2 diviene una ben determinata funzione positiva di η, che assumeremo sotto la forma

$$\eta'^2 = K_0\boldsymbol{H}(\eta) , \tag{8}$$

designando K_0 la costante positiva che già figura nelle precedenti equazioni e che si introduce per ragioni di omogeneità, cioè (essendo x_3 una lunghezza e quindi η'^2 delle stesse dimensioni di K_0) per rendere la incognita $\boldsymbol{H}(\eta)$ puro numero al pari di η.

Dalla (8), derivando rispetto ad x_3, segue successivamente

$$2\eta'' = K_0\boldsymbol{H}' , \qquad \frac{\eta'''}{\eta'} = \frac{1}{2}K_0\boldsymbol{H}'' . \tag{8'}$$

Siccome poi, in virtù della (4),

$$\zeta' = \frac{\eta''}{\eta'} ,$$

così da un lato si ha, badando alle (8'),

$$\zeta'' + \zeta'^2 = \frac{\eta'''}{\eta'} = \frac{1}{2} K_0 \boldsymbol{H}'' ; \tag{4'}$$

mentre, integrando, si ricava

$$\zeta = \log \eta' + \text{cost.}$$

Di ζ (rimanendo ormai espresso per η il binomio $\zeta'' + \zeta'^2$) ho bisogno soltanto per formare V a norma della (3). In V già figura la costante moltiplicativa V_0 *a priori* indeterminata. È dunque inutile farne figurare un'altra in e^ζ, e si può limitarsi a mettere in evidenza un fattore di omogeneità $1/\sqrt{K_0}$, ritenendo

$$e^\zeta = \frac{1}{\sqrt{K_0}} \eta' ,$$

ossia, in base alla (8),

$$e^\zeta = \sqrt{\boldsymbol{H}(\eta)} , \tag{4''}$$

dove, ben si intende, il radicale va preso positivamente.

Mediante le (8), (8') e (4'), le (5) e (6) assumono un aspetto compatto ed elegante, divenendo rispettivamente

$$-\frac{1}{2} (\Xi'' - \boldsymbol{H}'')(\xi + \eta) + (\Xi' - \boldsymbol{H}') = 0 , \tag{5'}$$

$$-\frac{1}{2} \Xi'(\xi + \eta)^2 + (2\Xi' + \boldsymbol{H}')(\xi + \eta) - 3(\Xi + \boldsymbol{H}) = 0 . \tag{6'}$$

A queste due equazioni (e a queste due soltanto) devono soddisfare le nostre due funzioni incognite $\Xi(\xi)$, $\boldsymbol{H}(\eta)$. La dipendenza da due diversi argomenti darebbe *a priori* poca speranza di compatibilità. Ma nella fattispecie è legittima la presunzione che esistano soluzioni. Passo ad accertarlo, dopo aver però trascritta l'equazione (7) che dà ω, sostituendovi $K_0 H$ ad η'^2. Si ha così

$$(7') \qquad \omega = -K_0 \left\{ \frac{1}{2} \Xi''(\xi+\eta)^2 - \Xi'(\xi+\eta) + \Xi + H \right\}.$$

3. - Determinazione delle funzioni incognite Ξ, H.

Dalla (5′), derivando rispetto a ξ, segue

$$-\frac{1}{2} \Xi'''(\xi+\eta) + \frac{1}{2}(\Xi'' + H'') = 0,$$

e di qui, derivando ulteriormente rispetto ad η,

$$(9) \qquad \Xi''' = H'''.$$

Il primo membro dipende soltanto da ξ, il secondo soltanto da η; bisogna quindi che siano entrambi costanti. Perciò Ξ ed H non possono essere altro che polinomi di terzo grado nei rispettivi argomenti ξ, η. Designando con Ξ_0, Ξ'_0, Ξ''_0 i valori di Ξ, Ξ', Ξ'' per $\xi = 0$, e analogamente con H_0, ecc., si ha dalla (5′), dalla sua derivata rispetto a ξ, e dalla (6′) facendovi $\xi = \eta = 0$:

$$\Xi'_0 = H'_0, \qquad \Xi''_0 = -H''_0, \qquad \Xi_0 = -H_0.$$

In base a queste relazioni e alla (9), il confronto dei due sviluppi di TAYLOR

$$\Xi(\xi) = \Xi_0 + \Xi'_0\xi + \frac{1}{2}\Xi''_0\xi^2 + \frac{1}{6}\Xi'''\xi^3,$$

$$H(\eta) = H_0 + H'_0\eta + \frac{1}{2}H''_0\eta^2 + \frac{1}{6}H'''\eta^3,$$

consente di esprimere H per Ξ sotto la forma

$$(10) \qquad H(\eta) = -\Xi(-\eta).$$

Tenendone conto, si constata ovviamente che le (5′), e (6′) riescono soddisfatte, qualunque sia il polinomio di terzo grado $\Xi(\xi)$, che rimane così arbitrario.

L'identità

$$-\boldsymbol{H}(\eta)=\Xi(-\eta)=\Xi\{\xi-(\xi+\eta)\}=$$
$$=\Xi(\xi)-(\xi+\eta)\Xi'(\xi)+\frac{1}{2}(\xi+\eta)^2\Xi''(\xi)-\frac{1}{6}(\xi+\eta)^3\Xi'''$$

semplifica notevolmente l'espressione (7′) di ω, riducendola a

$$\omega=-\frac{1}{6}K_0\Xi'''\cdot(\xi+\eta)^3. \tag{7''}$$

Ne deduciamo anzitutto che la costante Ξ''' va ritenuta diversa da zero; altrimenti si annullerebbe ω e con essa le altre due curvature ω_1, ω_2, e si ricadrebbe al solito nel caso elementare B_3) di uno spazio euclideo. Inoltre, ricordando che $e^{-\tau}=\xi+\eta$, riconosciamo che, anche in questo caso, ω si presenta sotto la forma $\omega_0 e^{-3\tau}$ (ω_0 costante), come deve avvenire, in virtù delle condizioni di integrabilità, per tutte le B_2) [cfr. Nota IV, § 2].

4. - Soluzioni oblique. Forme canoniche.

Dalla espressione (1) del $d\sigma^2$ apparisce che, se si designa con λ una generica costante positiva e si sostituiscono ordinatamente $\lambda\Xi$, K_0/λ, φ/λ a Ξ, K_0, φ, il $d\sigma^2$ non si altera. Con tale sostituzione non si toccano ξ, η, x_3, nè per conseguenza

$$e^{2\tau}dx_3^2=\frac{1}{(\xi+\eta)^2}dx_3^2,$$

mentre, in virtù delle (4″) e (10), e^{ζ} rimane materialmente moltiplicata per $\sqrt{\lambda}$. Lo stesso avverrebbe per V in base alla (3), ma basta mutare anche V_0 in $V_0/\sqrt{\lambda}$ perchè si conservi la forma primitiva. Dunque, eseguendo simultaneamente tutti gli scambi indicati, non si altera il ds^2 einsteiniano

$$V^2dt^2-dl^2=V^2dt^2-\frac{1}{(\xi+\eta)^2}(d\sigma^2+dx_3^2),$$

alla cui determinazione è in definitiva rivolta la nostra ricerca.

Possiamo valerci di questa osservazione per attribuire al coefficiente di ξ^3 in Ξ (che è poi $\frac{1}{6}\Xi'''$) quel valore numerico (non nullo) che più ci piace, coll'unico vincolo di conservare il segno. Assumeremo come coefficiente di ξ^3 il valore 4ε, essendo $\varepsilon = \pm 1$ secondo il segno dell'originario Ξ'''.

D'altra parte è ancora lecito, senza alterare $\xi + \eta$, $d\xi$, $d\eta$, nè per conseguenza le equazioni (5'), (6') che caratterizzano Ξ, $\boldsymbol{H}$, di cambiare ξ in $\xi + h$ (h costante), purchè contemporaneamente si cambi η in $\eta - h$. Così, senza ledere la generalità, si può assumere il polinomio di terzo grado $\Xi(\xi)$ sotto la forma normale di WEIERSTRASS, a meno del fattore ε, ritenendo

$$\Xi(\xi) = \varepsilon(4\xi^3 - g_2\xi - g_3) \qquad (g_2,\ g_3 \text{ costanti}). \tag{11}$$

La (10) porge allora per $\boldsymbol{H}(\eta)$ l'analoga forma

$$\boldsymbol{H}(\eta) = \varepsilon(4\eta^3 - g_2\eta + g_3)\,, \tag{11'}$$

che differisce soltanto per il segno di g_3.

La (7''), essendo $\Xi''' = 24\varepsilon$, assume l'aspetto definitivo

$$\omega = -\,4\varepsilon K_0(\xi + \eta)^3\,. \tag{12}$$

Dacchè la (8) porge

$$dx_3^2 = \frac{d\eta^2}{K_0 \boldsymbol{H}(\eta)}\,,$$

ed è

$$dl^2 = \frac{1}{(\xi + \eta)^2}\,(d\sigma^2 + dx_3^2)\,,$$

ove si tenga conto della (1), risulta

$$dl^2 = \frac{1}{K_0(\xi + \eta)^2}\left\{\frac{d\xi^2}{\Xi} + \frac{d\eta^2}{\boldsymbol{H}} + \Xi\, d\varphi^2\right\} \tag{13}$$

colle forme (11) e (11') di Ξ, $\boldsymbol{H}$.

La (3) e la (4'') dànno poi

$$V = V_0\,\frac{\sqrt{\boldsymbol{H}(\eta)}}{\xi + \eta}\,. \tag{14}$$

Le *linee assiali* (linee di curvatura principale corrispondenti alla ω) sono — come in tutte le soluzioni B_2) — le linee x_3, ossia, colle attuali variabili indipendenti, le η ($\xi = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$). Le *linee di pendenza* (traiettorie ortogonali delle superficie $\omega = \text{cost.}$, cioè $\xi + \eta = \text{cost.}$) sono variabilmente inclinate sulle prime: a differenza di quanto accadeva nelle due precedenti categorie di soluzioni. Egualmente complessa è la relazione delle *linee di forza* (traiettorie ortogonali delle superficie $V = \text{cost.}$) con entrambe le congruenze suaccennate. Mi esimo quindi da una particolareggiata illustrazione geometrica delle formule conseguite.

Avvertirò piuttosto che, sostituendo a ξ, η due nuovi argomenti u, v mediante le posizioni

$$(15) \qquad \xi = \wp(\sqrt{\varepsilon}u;\, g_2, g_3), \quad \eta = \wp(\sqrt{\varepsilon}v;\, g_2, -g_3) = -\wp(\sqrt{\varepsilon}iv;\, g_2, g_3)$$
$$(\varepsilon = \pm 1, \ i = \sqrt{-1}),$$

tutto si esprime per mezzo dell'unica funzione $\wp$ di invarianti reali g_2, g_3 e di argomenti $\sqrt{\varepsilon}u$, $\sqrt{\varepsilon}iv$.

Si ha infatti dalle (15), badando alla equazione differenziale caratteristica della $\wp$, e alle (11), (11'),

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = \varepsilon(4\xi^3 - g_2\xi - g_3) = \Xi(\xi),$$
$$\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^2 = -\varepsilon(-4\eta^3 + g_2\eta - g_3) = \boldsymbol{H}(\eta),$$

dopo di che, in base alle stesse posizioni (15), l'espressione del quadrato dell'elemento lineare assume la forma elegante

$$(13') \qquad dl^2 = \frac{1}{K_0[\wp(\sqrt{\varepsilon}u) - \wp(\sqrt{\varepsilon}iv)]^2}\left(du^2 + dv^2 + \varepsilon\wp'^2(\sqrt{\varepsilon}u)d\varphi^2\right).$$

Analogamente si ricava dalla (14) il potenziale statico

$$(14') \qquad -\frac{1}{2}V^2 = -\frac{1}{2}V_0^2\frac{\boldsymbol{H}(\eta)}{(\xi+\eta)^2} = \frac{1}{2}V_0^2\frac{\varepsilon'\wp^2(\sqrt{\varepsilon}iv)}{[\wp(\sqrt{\varepsilon}u) - \wp(\sqrt{\varepsilon}iv)]^2}.$$

5. - Riassunto.

Specificazione delle costanti: K_0, V_0 costanti positive arbitrarie aventi rispettivamente le dimensioni l^{-2}, lt^{-1}; μ, g_2, g_3 costanti numeriche arbitrarie; $\varepsilon = \pm 1$.

Caratteri comuni a tutte le soluzioni B_2).

Lo spazio si atteggia a varietà normale di BIANCHI colle tre curvature principali

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega .$$

Il quadrato dell'elemento lineare è del tipo

$$dl^2 = e^{2\tau}(d\sigma^2 + dx_3^2) ,$$

con $d\sigma$ binario (indipendente da x_3), e τ legato ad ω dalla relazione

$$\omega = \omega_0 e^{-3\tau} \qquad (\omega_0 \text{ costante})$$

Le linee su cui varia la sola x_3 costituiscono le *linee assiali* di curvatura principale corrispondenti alla ω.

La velocità della luce si esprime sotto la forma

$$V = V_0 e^{\tau+\zeta} \qquad (\zeta \text{ funzione della sola } x_3);$$

come in tutti i fenomeni statici, $-\frac{1}{2}V^2$ costituisce la funzione delle forze (riferita all'unità di massa).

Forme canoniche.

Esistono tre (e tre sole) categorie di soluzioni, cioè le seguenti:

1) *Soluzioni longitudinali* $(e^{-\tau} = \eta(x_3))$. Sostituendo ad x_3 la variabile η (puro numero), si trova

$$\begin{cases} dl^2 = \dfrac{d\sigma^2}{\eta^2} + \dfrac{d\eta^2}{K_0\eta^4(\mu - \varepsilon\eta)} & [d\sigma^2 \text{ forma binaria indipendente da } \eta, \text{ a curvatura gaussiana costante } K_0\mu], \\ \omega = \varepsilon K_0 \eta^3 , \quad -\dfrac{1}{2}V^2 = -\dfrac{1}{2}V_0^2(\mu - \varepsilon\eta) . \end{cases}$$

Le linee assiali e le linee di pendenza della ω coincidono colle linee di forza, donde la qualifica longitudinali.

2) *Soluzioni quadrantali* $(e^{-\tau} = \xi)$. Colle variabili indipendenti (tutti puri numeri) ξ, φ, $\psi = \sqrt{K_0}\cdot x_3$, si ha

$$\begin{cases} dl^2 = \dfrac{1}{K_0\xi^2}\left(\dfrac{d\xi^2}{\Xi} + \Xi\, d\varphi^2 + d\psi^2\right), & \Xi = \mu\xi^2 + \varepsilon\xi^3 , \\ \omega = -\varepsilon K_0 \xi^3, \quad -\dfrac{1}{2}V^2 = -\dfrac{1}{2}V_0^2\dfrac{e^{2\zeta}}{\xi^2} & \left[e^\zeta \text{ funzione di } \psi \text{ definita dall'equazione } \dfrac{d^2 e^\zeta}{d\psi^2} + \mu e^\zeta = 0\right]. \end{cases}$$

Le linee assiali ψ e le linee di pendenza ξ si tagliano ad angolo retto, donde l'appellativo quadrantali.

3) *Soluzioni oblique*. Variabili indipendenti: ξ, η (funzione della sola x_3, che si sostituisce ad essa), φ, tutti puri numeri; $e^{-\tau} = \xi + \eta$ Si ha

$$\left\{\begin{aligned} & dl^2 = \frac{1}{K_0(\xi+\eta)^2}\left\{\frac{d\xi^2}{\Xi} + \frac{d\eta^2}{\boldsymbol{H}} + \Xi\, d\varphi^2\right\} \quad \left[\begin{aligned} \Xi &= \varepsilon(4\xi^3 - g_2\xi - g_3) \\ \boldsymbol{H} &= \varepsilon(4\eta^3 - g_2\eta + g_3)\end{aligned}\right], \\ & \omega = -4\varepsilon K_0(\xi+\eta)^3, \qquad -\frac{1}{2}V^2 = -\frac{1}{2}V_0^2\frac{\boldsymbol{H}}{(\xi+\eta)^2}.\end{aligned}\right.$$

Sono assiali le linee η, variamente inclinate sia sulle linee di pendenza della funzione ω che sulle linee di forza.

Va segnalato il cambiamento di parametri consistente nel sostituire a ξ, η due argomenti ellittici u, v mediante le posizioni

$$\xi = \wp(\sqrt{\varepsilon}u;\, g_2, g_3), \qquad \eta = -\wp(\sqrt{\varepsilon}iv;\, g_2, g_3).$$

Le espressioni canoniche assumono allora l'aspetto indicato in fine del precedente paragrafo.

NOTA VIII.

SOLUZIONI BINARIE DI WEYL

Ibidem, Vol. $XXVIII_1$ (1919_1),
pp. 3-13.

In una memoria pubblicata nell'agosto 1917 [1], il sig. WEYL ebbe la felice idea di prendere in considerazione quella classe di problemi della statica einsteiniana, in cui tutte le incognite si possono far dipendere da due sole coordinate, essendo inoltre soddisfatta una certa condizione di ortogonalità. Tale classe è particolarmente notevole per la sua generalità, potendo (mediante quadrature e operazioni in termini finiti) essere posta in corrispondenza biunivoca cogli ordinarî potenziali simmetrici, di cui costituisce l'analogo einsteiniano.

A questa stessa categoria di soluzioni ero pervenuto per mio conto alquanto più tardi, come esempio cospicuo di quel tipo generale B_1) (cfr. Nota II, § 6) [2], in cui lo spazio fisico si atteggia a varietà normale del BIANCHI (con curvature principali distinte). Avendo in seguito conosciuta, per gentile invio dell'Autore, la ricerca di WEYL e rilevato che egli mi aveva preceduto nell'idea, e, sebbene per via diversa, nei risultati principali, pensavo di non pubblicare il mio studio, o tutt'al più di limitarmi a segnalare un'applicazione elementare meritevole di interesse perchè rispecchia il campo dovuto all'attrazione di una retta indefinita. Ma una più attenta lettura del lavoro di WEYL mi ha mostrato che la sua deduzione è incompleta (cfr. in proposito il § 5 del presente scritto). Egli tien conto soltanto di tre equazioni, che, in certo senso, sono effettivamente le più importanti, ma non esauriscono il sistema cui si riducono nel caso considerato le equazioni della statica einsteiniana. Questo sistema è costituito da cinque equazioni (una delle quali risulta conseguenza differenziale delle altre). Per un singolare compenso il WEYL aggiunge alle sue tre equazioni una condizione quantitativa che rende il grado di arbitrarietà eguale a quello del sistema completo. E il risultato

---

(1) « Ann. der Physik », B. 54, pp. 117-145.
(2) In questi « Rendiconti », vol. XXVII (1° semestre 1918), pp. 3-12.

finale è corretto, tranne per quanto concerne una delle incognite (la nostra λ, ivi designata con γ).

Stando così le cose, mi permetto di rendere di pubblica ragione il mio procedimento. Riservo ad altra prossima comunicazione una breve illustrazione geometrica e l'esempio cui sopra accennai.

1. - Definizione e caratterizzazione intrinseca.

Si tratta di assegnare i ds^2 statici, e quindi del tipo

$$V^2 dt^2 - dl^2 ,$$

che convengono ad uno spazio vuoto (tensore energetico nullo) sotto le due ipotesi addizionali seguenti:

1) i coefficienti dipendono esclusivamente da due sole coordinate, diciamo x_1, x_2;

2) il dl^2 ha forma ortogonale rispetto alla terza coordinata x_3.

Posto al solito

$$V = V_0 e^{\nu} , \tag{1}$$

con V_0 costante di omogeneità e $\nu(x_1, x_2)$ puro numero, conviene in primo luogo (come apparirà dallo sviluppo successivo del calcolo) assumere il dl^2 sotto la forma

$$dl^2 = e^{-2\nu} dl'^2 , \tag{2}$$

dove il dl'^2 ottempera ancora alle condizioni imposte al dl^2, ed è quindi del tipo

$$dl'^2 = d\sigma^2 + r^2 dx_3^2 , \tag{3}$$

con $d\sigma$ elemento lineare binario, ed r funzione, *a priori* indeterminata, di x_1, x_2. Circa le dimensioni, è ben chiaro che (in una forma differenziale quadratica la quale esprime il quadrato di un elemento lineare) quando le variabili indipendenti si risguardano lunghezze, i coefficienti riescono puri numeri. Tale convenzione intenderemo adottata riguardo al $d\sigma$; mentre considereremo x_3 come un parametro di dimensioni nulle (per es. un angolo) e dovremo in conformità attribuire ad r le dimensioni di una lunghezza.

Va notato altresì che le due ipotesi poc'anzi enunciate sotto aspetto formale sono interpretabili intrinsecamente nella metrica definita dal dl^2.

La prima (indipendenza dei coefficienti da x_3) *sta ad esprimere che lo spazio ammette un gruppo* ∞^1 *di movimenti rigidi*, definito dalla trasformazione infinitesima $\partial/\partial x_3$. *La seconda equivale* all'esistenza di superficie (le $x_3 = \text{cost.}$) che tagliano ortogonalmente le traiettorie del gruppo ($x_1 = \text{cost.}$, $x_2 = \text{cost.}$), ossia *alla normalità della congruenza costituita dalle traiettorie del gruppo.*

2. - Forma binaria delle equazioni di Einstein.

Le derivate seconde covarianti di una generica funzione V, riferite ad un assegnato dl^2, e i simboli di RICCI α_{ik}, spettanti ad esso dl^2, si sanno riportare ad un dl'^2 in corrispondenza conforme (2) col dl^2, e successivamente, in base alla (3), al $d\sigma^2$ binario cui si associ la funzione r (cfr. §§ 3 e 4 della Nota III).

In primo luogo (dalle formole (5) della detta Nota, scambiando i simboli accentati con quelli non accentati e ponendo $\tau = -\nu$) si ha

$$\frac{V_{ik}}{V} = \nu'_{ik} + 3\nu_i\nu_k - a'_{ik}\Delta'\nu \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{4}$$

dove le derivate covarianti ν'_{ik}, i coefficienti a'_{ik} e il parametro Δ' si riferiscono al dl'^2.

Dacchè, in base alla (2), gli elementi reciproci ai coefficienti del dl^2 valgono $e^{2\nu}a'^{(ik)}$, si ha, come conseguenza formale delle (4),

$$\frac{\Delta_2 V}{V} = e^{2\nu}\Delta'_2\nu\ .$$

Siccome una delle equazioni di EINSTEIN può essere posta sotto la forma $\Delta_2 V = 0$, così possiamo intanto ritenere acquisito che

$$\Delta'_2\nu = 0. \tag{5}$$

E ciò giova a semplificare le espressioni [(13) della Nota III, per $\tau = -\nu$] delle α_{ik} in funzione delle α'_{ik}, che si scrivono

$$\alpha_{ik} = \alpha'_{ik} - \nu'_{ik} - \nu_i\nu_k \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Prima di fare il secondo passo, cioè il riferimento al $d\sigma^2$ binario, ricordiamo che le equazioni fondamentali della statica einsteiniana (negli spazi vuoti) sono sette, di cui una può essere rappresentata da $\Delta_2 V = 0$, ossia dalla (5), e le altre sei si scrivono

$$(7) \qquad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

In base alle (4) e (6), queste assumono l'aspetto

$$(7') \qquad \alpha'_{ik} + \nu 2_i \nu_k - a'_{ik} \Delta' \nu = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Badiamo ora alla (3), notando anzi tutto che, se il $d\sigma^2$ binario a l'espressione generica

$$\sum_{1}^{2}{}_{ik} a_{ik} \, dx_i \, dx_k ,$$

si hanno i coefficienti $dl'^2 = d\sigma^2 + r^2 dx_3^2$ e i loro reciproci $a'^{(ik)}$ sotto la forma

$$(8) \qquad \begin{cases} a'_{ik} = a_{ik}, & a'_{i3} = 0, & a'_{33} = r^2 ; \\ a'^{(ik)} = a^{(ik)}, & a'^{(i3)} = 0, & a'^{(33)} = \dfrac{1}{r^2} \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2).$$

Con ciò, per una funzione qualsiasi indipendente da x_3, risulta $\Delta' = \Delta$, quindi in particolare

$$(9) \qquad \Delta' \nu = \Delta \nu .$$

Quanto alle derivate seconde ν'_{ik}, esse si identificano colle corrispondenti ν_{ik} (relative al $d\sigma^2$) per $i, k = 1, 2$, e si ha complessivamente (formule (21) della Nota III, per ν indipendente da x_3)

$$(10) \qquad \nu'_{ik} = \nu_{ik} \quad (i, k = 1, 2) , \qquad \nu'_{i3} = 0 , \qquad \nu'_{33} = r \nabla(r, \nu) .$$

Ne deduciamo in particolare

$$(11) \qquad \Delta'_2 \nu = \sum_{1}^{3}{}_{ik} a'^{(ik)} \nu_{ik} = \Delta_2 \nu + \frac{1}{r} \nabla(r, \nu) .$$

Le espressioni dei simboli di Ricci α'_{ik}, riportate al $d\sigma^2$ e alla funzione associata r, sono [Nota III, formule (19)]

$$(12) \qquad \alpha'_{ik} = \frac{r_{ik}}{r} - a_{ik}\frac{\Delta_2 r}{r} \quad (i, k = 1, 2), \qquad \alpha'_{i3} = 0, \qquad \alpha'_{33} = r^2 K,$$

designando K la curvatura gaussiana del $d\sigma^2$.

Teniamo conto di quanto precede [formule (8)-(12)] nelle equazioni gravitazionali, cioè nella (5) e nelle (7').

La prima, in base alla (11), diviene

$$(13) \qquad \Delta_2 \nu + \frac{1}{r}\nabla(r, \nu) = 0.$$

Delle (7') due rimangono identicamente soddisfatte (quelle in cui uno, ed un solo indice, ha il valore 3); una $(i = k = 3)$ si riduce a

$$(14) \qquad K = \Delta\nu,$$

e le rimanenti tre assumono l'aspetto

$$\frac{r_{ik}}{r} + 2\nu_i\nu_k - a_{ik}\left(\frac{\Delta_2 r}{r} + \Delta\nu\right) = 0 \qquad (i, k = 1, 2),$$

covariante rispetto al $d\sigma^2$.

Da esse, moltiplicando per $a^{(ik)}$ e sommando, segue

$$\Delta_2 r = 0,$$

con che si può scrivere più semplicemente

$$(15) \qquad \frac{r_{ik}}{r} + 2\nu_i\nu_k - a_{ik}\Delta\nu = 0 \qquad (i, k = 1, 2):$$

in queste equazioni seguita naturalmente ad essere implicita come necessaria conseguenza la $\Delta_2 r = 0$.

Il sistema da integrare consta pertanto delle cinque equazioni (13), (14), (15), *nelle quali figurano come elementi incogniti le funzioni r e ν, e la forma binaria $d\sigma^2$, che funge da forma fondamentale, essendo a essa riferiti derivate covarianti e parametri.*

Giova ancora prepararsi le espressioni, involgenti unicamente r, ν e $d\sigma^2$, he competono alle α_{ik} del dl^2 spaziale: ciò col manifesto intendimento di valersene a suo tempo pel calcolo delle curvature principali. Tutto si riduce, in virtù delle equazioni gravitazionali (7), che dànno

$$\alpha_{ik} = -\frac{V_{ik}}{V},$$

ad introdurre nei secondi membri delle (4) le espressioni (10) delle ν'_{ik}, badando altresì alle (8) e (9). Si ottiene

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{ik} = -\nu_{ik} - 3\nu_i\nu_k + a_{ik}\Delta\nu & (i, k = 1, 2), \\ \alpha_{i3} = 0, \quad \alpha_{33} = r^2\left\{\Delta\nu - \frac{1}{r}\nabla(r, \nu)\right\}. & \end{array} \right.$$

3. - Forma isometrica del $d\sigma^2$. Ulteriore trasformazione delle equazioni gravitazionali.

Per l'armonicità di r rispetto al $d\sigma^2$ ($\Delta_2 r = 0$), esiste la funzione associata z (determinata a meno di una inessenziale costante additiva), armonica anch'essa, *indipendente da* r ([3]) e dotata delle stesse dimensioni, quindi omogenea ad una lunghezza.

Il $d\sigma^2$, espresso per r e z assume notoriamente la forma isometrica

$$(17) \qquad d\sigma^2 = e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2),$$

dove λ è una funzione, *a priori* incognita, di r e di z, legata alla curvatura gaussiana K dalla relazione

$$(18) \qquad K = -\Delta_2\lambda = -e^{-2\lambda}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right).$$

Più comprensivamente, seguitando per un momento ancora a lasciar generiche le variabili indipendenti, potremo ritenere la (17) sotto la forma

$$(17') \qquad d\sigma^2 = e^{2\lambda}d\sigma_0^2$$

con $d\sigma_0$ elemento lineare euclideo.

([3]) Questa affermazione cadrebbe in difetto soltanto se r fosse costante. Ma si può *a priori* escludere tale eventualità, badando alle equazioni (15). Infatti, per r costante, queste implicherebbero proporzionalità fra i coefficienti a_{ik} del $d\sigma^2$ e i prodotti $\nu_i\nu_k$ e quindi l'annullamento del discriminante, il che è da escludere, trattandosi di forma definita positiva.

Prima di procedere all'integrazione del sistema (13), (14), (15), si rende opportuna un'ultima trasformazione, che riporti, in tutte le formule, derivate covarianti e parametri al $d\sigma_0^2$ euclideo.

Detti a_{ik}^0 i coefficienti di questo $d\sigma_0^2$, si ha dalla (17') $a_{ik} = e^{2\lambda} a_{ik}^0$; inoltre (invocando qui ancora le formule (5) della Nota III):

$$
(19) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{r_{ik}}{r} = \frac{r_{ik}^0}{r} - \frac{r_i}{r}\lambda_k - \frac{r_k}{r}\lambda_i + \frac{1}{r}\nabla^0(r, \lambda) a_{ik}^0 , \\
&\nu_{ik} = \nu_{ik}^0 - \nu_i \lambda_k - \nu_k \lambda_i + \nabla^0(\nu, \lambda) a_{ik}^0 , \qquad (i, k = 1, 2); \\
&\nabla = e^{-2\lambda}\nabla^0 , \qquad \Delta = e^{-2\lambda}\Delta^0 , \qquad \Delta_2 = e^{-2\lambda}\Delta_2^0 ,
\end{aligned}
\right.
$$

dove sono contrassegnati con ^{0} gli elementi che si riferiscono al $d\sigma_0^2$.

Con ciò, le (13), (14), (15), avendo anche cura di sostituire a K la sua espressione (18), $-\Delta_2\lambda = -e^{-2\lambda}\Delta_2^0\lambda$, assumono l'aspetto

$$
(13') \qquad \Delta_2^0 \nu + \frac{1}{r}\nabla(r, \nu) = 0,
$$

$$
(14') \qquad \Delta_0^2 \lambda = -\Delta^0 \nu ,
$$

$$
(15') \qquad \frac{r_{ik}^0}{r} - \frac{r_i}{r}\lambda_k - \frac{r_k}{r}\lambda_i + 2\nu_i\nu_k - a_{ik}^0 \left\{\Delta^0\nu - \frac{1}{r}\nabla^0(r, \lambda)\right\} = 0
$$

$$
(i, k = 1, 2) .
$$

4. - Particolarizzazione delle variabili indipendenti. Integrazione e forme canoniche.

Finora ci siamo occupati di cambiare la forma fondamentale, in modo che questa è divenuta il $d\sigma_0^2$ euclideo. Ma non abbiamo peranco introdotta alcuna specificazione delle variabili indipendenti x_1, x_2, sicchè le formule precedenti valgono in coordinate qualunque.

Per agevolare l'integrazione, giova però riferirsi a coordinate cartesiane (rispetto al nostro $d\sigma_0^2 = dr^2 + dz^2$), assumendo $x_1 = r$, $x_2 = z$. Con tali variabili indipendenti, $a_{ik}^0 = \varepsilon_{ik}$; le derivate covarianti coincidono con le derivate ordinarie, l'indice 1 significando derivazione parziale rapporto ad r e l'indice 2 derivazione parziale rapporto a z; $r_1 = 1$, $r_2 = 0$, $r_{ik}^0 = 0$ $(i, k = 1, 2)$; ecc.

La (13') assume così la forma esplicita:

$$
(20) \qquad \frac{\partial^2\nu}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\nu}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\nu}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2} = 0 .
$$

in cui si ravvisa la nota equazione che definisce i potenziali simmetrici dello spazio ordinario in coordinate cilindriche.

Dunque, in primo luogo, *l'incognita $\nu(r, z)$ è un potenziale simmetrico.* Soddisfatta che sia questa condizione, le (15′) risultano, come tosto verificheremo, compatibili e atte a individuare λ mediante una quadratura.

Per riconoscerlo, facciamo successivamente coincidere, nelle (15′), la coppia (i, k) con (1, 1), (2, 2) e (1, 2).

Le prime due equazioni riescono coincidenti, sicchè si ricava

$$\lambda_1 = r(\nu_1^2 - \nu_2^2)\,, \qquad \lambda_2 = 2r\nu_1\nu_2\,, \tag{21}$$

le quali si compendiano in

$$d\lambda = r(\nu_1^2 - \nu_2^2)\,dr + 2r\nu_1\nu_2\,dz\,. \tag{21′}$$

In virtù della (20), il secondo membro risulta, come si constata immediatamente, un differenziale esatto, sicchè le (21) sono compatibili, e *la determinazione di λ richiede unicamente una quadratura.*

Quanto alla (14′) (che si presenta a primo aspetto come una ulteriore condizione imposta alla λ), essa rimane identicamente soddisfatta, purchè vi si introducano per λ_1, λ_2 le espressioni (21) e, ancora una volta, si tenga conto della (20).

Riassumendo, da (2), (3) *e* (17) *si ha l'espressione canonica dell'elemento lineare di spazio sotto la forma*

$$dl^2 = e^{-2\nu}\{e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2) + r^2\,dx_3^2\}\,, \tag{22}$$

dove $\nu(r, z)$ è un potenziale simmetrico, cioè una qualunque soluzione della *equazione* (20), *e λ rimane individuata, una volta assegnato ν, a meno di una costante additiva inessenziale* (in quanto si possono far coincidere, con semplice alterazione dell'unità di lunghezza, ossia moltiplicazione di r e z per una medesima costante, due dl^2, i quali differiscono soltanto per la determinazione di λ). *Si ha poi* dalla (1) $V = V_0\,e^{\nu}$, e quindi *il potenziale statico*

$$-\frac{1}{2}V^2 = -\frac{1}{2}V_0^2\,e^{2\nu}\,.$$

Dacchè V_0 è una semplice costante di omogeneità, rimane provato che *ad ogni ordinario potenziale simmetrico ν corrisponde univocamente un ds^2 einsteiniano del tipo binario di Weyl.*

5. - Osservazione critica.

Il sig. WEYL, dopo aver impostata la questione con molta eleganza, ne deduce le equazioni differenziali caratteristiche da un principio variazionale, perfettamente corretto, ma solo parzialmente applicato. Ed ecco come.

La variazione di un certo integrale

$$\iint \mathfrak{H}\, dx_1\, dx_2$$

deve essere zero per incrementi arbitrari dei coefficienti g_{ik} del ds^2 einsteiniano, vincolati soltanto ad annullarsi al contorno del campo di integrazione.

Quando pur si sappia — ed è il caso di WEYL — che il ds^2, a partire dal quale la variazione si deve annullare, può essere assunto sotto forma ortogonale (anzi parzialmente isometrica)

$$f\, dt^2 - \{h(dx_1^2 + dx_2^2) + l\, dx_3^2\}\,,$$

non basta limitarsi a variazioni che conservano quella forma, ma è d'uopo lasciare a priori arbitrarie tutte le δg_{ik}. Altrimenti si ottengono condizioni che sono indubbiamente necessarie, ma che in generale non esauriscono il principio variazionale. Tale circostanza si presenta appunto nel detto caso, nel quale WEYL trova *tre sole equazioni algebricamente distinte*, equivalenti alle nostre (13), (14), (15), mentre il procedimento completo ne fornirebbe *cinque*.

Le proprietà più importanti (armonicità di r, carattere di potenziale binario della ν) sono già incluse nelle tre equazioni del WEYL e da lui ben messe in luce. Egli enuncia altresì il risultato esatto che ad ogni potenziale simmetrico ordinario fa riscontro un ds^2 einsteiniano univocamente determinato, ma lo desume (pag. 39 della Memoria citata) da una addizionale condizione di regolarità in tutto lo spazio, che non è il caso di invocare, trattandosi di rispecchiare più generalmente il punto di vista differenziale, il quale richiede soltanto regolarità locale.

Per il confronto delle formule posso limitarmi a rilevare che, a meno di inessenziali costanti additive, le funzioni $\psi = \log\sqrt{f}$ e $\gamma = \log\sqrt{hf}$ di WEYL si identificano rispettivamente colle nostre ν e λ, coincidendo le equazioni (15) (per gli spazi vuoti) e (16) della Memoria di WEYL con (13') e (14'). Le equazioni omesse da WEYL (per incompleto sfruttamento del principio variazionale) sono in sostanza le (21).

6. - Espressione delle curvature principali.

Indichiamo con ϱ il logaritmo di r/r_0, essendo r_0 una lunghezza costante (arbitraria) che si introduce per ragione di omogeneità. Da

$$\frac{r}{r_0} = e^{\varrho} \tag{23}$$

segue

$$\frac{r_i}{r} = \varrho_i \quad (i = 1, 2) ; \qquad \frac{1}{r}\nabla^0(r, \nu) = \nabla^0(\varrho, \nu) , \quad \text{ecc.}$$

Usufruiremo di ϱ per brevità di scrittura, nel riportare al $d\sigma_0^2$ [cfr. n. 3] anche le espressioni (14) dei simboli di Ricci α_{ik} spettanti al nostro dl^2 spaziale. Eliminando dai secondi membri della (16) le ν_{ik} mediante le (19), si ha immediatamente

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{ik} = -\nu_{ik}^0 + \nu_i \lambda_k + \nu_k \lambda_i - 3\nu_i \nu_k + a_{ik}^0 \nabla^0(\nu - \lambda, \nu) & (i, k = 1, 2) ; \\ \alpha_{i3} = 0 , \qquad \alpha_{33} = r^2 e^{-2} \nabla^0(\nu - \varrho, \nu) . & \end{array} \right. \tag{24}$$

Dacchè il nostro dl^2 ha la forma ortogonale (22), ossia

$$e^{2(\lambda-\nu)} d\sigma_0^2 + r^2 e^{-2\nu} dx_3^2 ,$$

la solita equazione cubica, che determina le curvature principali, ammette intanto il fattore lineare $\alpha_{33} - \omega r^2 e^{-2\nu}$, e quindi la radice

$$\omega_3 = e^{-2(\lambda-\nu)} \nabla^0(\nu - \varrho, \nu) . \tag{25}$$

A questa prima conclusione si poteva arrivare anche osservando che il secondo membro della (22) rientra nel tipo considerato a § 4 della Nota III, talchè la curvatura principale ω_3 (quella corrispondente alle giaciture $x_3 = \text{cost.}$) si identifica colla curvatura gaussiana della forma binaria $e^{-2\nu} d\sigma^2 = e^{2(\lambda-\nu)} d\sigma_0^2$. Ciò porge

$$\omega_3 = - e^{-2(\lambda-\nu)} \Delta_2^0(\lambda - \nu) ,$$

che coincide precisamente colla (25), in virtù di (13′) e (14′).

Le altre due curvature principali ω_1 e ω_2 rimangono definite dalla equazione quadratica

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega a_{11} & \alpha_{12} - \omega a_{12} \\ \alpha_{21} - \omega a_{21} & \alpha_{22} - \omega a_{22} \end{vmatrix} = 0 . \tag{26}$$

Dacchè, come ben si sa, $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$ è conseguenza necessaria delle equazioni gravitazionali, la somma delle radici ω_1, ω_2 della equazione (26) vale $-\omega_3$. Quindi, mettendovi in evidenza come incognita $\omega+\frac{1}{2}\omega_3$, dovrà sparire il termine lineare. Ne segue che, ove si ponga

$$\beta_{ik}=\alpha_{ik}+\frac{1}{2}\,\omega_3 e^{2(\lambda-\nu)}a^0_{ik}=\alpha_{ik}+\frac{1}{2}\,a^0_{ik}\,\nabla^0(\nu-\varrho,\nu)\,,$$

ossia, badando al primo gruppo delle (24),

$$\beta_{ik}=-\nu^0_{ik}+\nu_i\lambda_k+\nu_k\lambda_i-3\nu_i\nu_k+\frac{1}{2}\,a^0_{ik}\,\nabla^0(3\nu-2\lambda-\varrho,\nu)\,, \tag{27}$$

la (26) si riduce a

$$\beta+e^{4(\lambda-\nu)}a^0\cdot\left(\omega+\frac{1}{2}\,\omega_3\right)^2=0\,, \tag{26'}$$

rappresentando β il determinante $\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}$ e a^0 quello delle a^0_{ik} (discriminante del $d\sigma_0^2$).

Ne risulta, tenendo conto della (25), l'espressione comprensiva delle due curvature ω_1, ω_2 sotto la forma

$$\omega=e^{-2(\lambda-\nu)}\left\{-\frac{1}{2}\nabla^0(\nu-\varrho,\nu)\pm\sqrt{\frac{-\beta}{a^0}}\right\}. \tag{28}$$

Importa rilevare che β *deve ritenersi essenzialmente diverso da zero* (e quindi negativo, affinchè riesca reale $\sqrt{-\beta/a^0}$). Infatti, per $\beta=0$, coinciderebbero le due curvature ω_1 e ω_2, e si ricadrebbe nel sottocaso B_2), già esaurito nelle Note precedenti. Si può domandare in modo preciso a quale categoria di soluzioni B_2) corrisponde il valore limite $\beta=0$. Ciò risulta agevolmente dal confronto del dl^2 [quale risulta dalle (2), (3)] coll'espressione che gli compete in generale nel caso B_2). Quest'ultima — aggiungo un asterisco per evitare ambiguità col $d\sigma$ della presente Nota — è $e^{2\tau}(d\sigma^{*2}+d\sigma_3^2)$, dove $d\sigma^*$ sta a rappresentare (al pari di $d\sigma$) un elemento lineare binario indipendente da x_3, e $\tau=\nu+\zeta$, essendo ζ funzione della sola x_3. Dacchè ν ha identico significato nei due casi, perchè vi sia coincidenza, è intanto necessario che, anche nella B_2), esso risulti indipendente da x_3. Dal confronto dei due dl^2 per $dx_3=0$ segue allora che ζ deve ridursi ad una costante. Ora, nelle tre categorie di soluzioni B_2), ve n'è una e una soltanto — quella delle soluzioni quadrantali — in cui $e^{-\tau}$ non dipende da x_3. Concludiamo pertanto che *il caso particolare* $\beta=0$ *riporterebbe alle soluzioni quadrantali colla specificazione* $\zeta=$ cost,. ciò che implica [cfr. Nota VI, § 4] l'annullarsi della costante μ.

NOTA IX.

L'ANALOGO DEL POTENZIALE LOGARITMICO

Ibidem, pp. 101-109.

Nella Nota precedente (1) abbiamo assegnata un'ampia classe di ds^2 einsteiniani i cui coefficienti dipendono da due sole coordinate di spazio: ad ogni ordinario potenziale simmetrico $\nu(r, z)$ (r distanza dall'asse di simmetria Oz) corrisponde univocamente un ds^2 di tale classe. Un esempio meritevole di particolare attenzione si ha supponendo ν indipendente da z, con che esso si riduce alla forma $h \log r/r_0$ (h, r_0 costanti) e conviene all'attrazione newtoniana dell'asse, supposto sede di una distribuzione lineare omogenea, od anche di un qualsiasi cilindro coassiale, indefinito, omogeneo (rispetto a cui il punto potenziato sia esterno), avente, per unità di lunghezza, la stessa massa della retta. Il relativo ds^2 einsteiniano appare interessante perchè determina rigorosamente l'influenza geometrica, meccanica ed ottica di un cilindro materiale.

Di ciò tratta la presente Nota; ed eccone le conclusioni.

Lo spazio circostante al cilindro non resta più euclideo, ma si atteggia a varietà normale di BIANCHI con le tre curvature principali tutte distinte. Le coordinate cilindriche r, z, x_3 dello spazio euclideo, non perturbato dalla presenza del cilindro, divengono (a cilindro introdotto e equilibrio ristabilito) coordinate curvilinee dello spazio distorto e ne costituiscono le linee principali di curvatura. Si può quindi dire — l'esiguità della distorsione rendendo espressiva la rappresentazione euclidea — che le linee principali di curvatura risultano dirette radialmente, assialmente, secondo il parallelo. Le curvature principali variano tutte in ragione inversa del quadrato della distanza (geodetica) dall'asse: quella corrispondente alle giaciture normali all'asse è di un ordine di grandezza inferiore alle altre due, e può trascurarsi di fronte ad esse che (nello stesso ordine di approssimazione) riescono eguali ed opposte.

La forza d'attrazione è tutta radiale (cioè diretta secondo la linea r, verso l'asse), come nella teoria ordinaria; però l'intensità non è rigoro-

(1) In questi «Rendiconti», vol. XXVII (2° semestre 1918), pp. 3-13.

samente proporzionale all'inversa della distanza (geodetica) dall'asse, bensì ad una potenza lievissimamente superiore a -1.

La velocità della luce V varia proporzionalmente a r^h (§ 4), ma, stante la piccolezza di h in eventuali esperienze di laboratorio (cfr. il § 6), non vi è da sperare, nemmeno coi mezzi odierni dell'ottica, di rendere questa variazione di V accessibile a controllo diretto.

1. - Richiami. Linee isometriche e loro proprietà generali.

Le soluzioni binarie esplicitate nella Nota precedente corrispondono a ds^2 statici del tipo

$$V_0^2 e^{2\nu} dt^2 - dl^2 , \tag{1}$$

dove V_0 rappresenta una costante avente le dimensioni di una velocità, e il quadrato dell'elemento lineare di spazio ammette la forma canonica

$$dl^2 = e^{-2\nu}\{e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2) + r^2 dx_3^2\} : \tag{2}$$

$\nu(r, z)$ designa un generico potenziale simmetrico, cioè un integrale particolare qualunque dell'equazione

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \nu}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} = 0 , \tag{3}$$

e λ è subordinatamente definita, a meno di una costante additiva inessenziale [cfr. il § 4 della Nota prec.], dall'equazione ai differenziali totali

$$d\lambda = r(\nu_1^2 - \nu_2^2)dr + 2r\nu_1\nu_2 dz \quad \left(\nu_1 = \frac{\partial \nu}{\partial r},\ \nu_2 = \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) . \tag{4}$$

Si deve limitarsi a valori positivi di r, mentre z e x_3 possono assumere valori reali qualisivogliono.

Per $\nu = 1$, λ si può ritenere eguale ad 1; il dl^2 appartiene allora allo spazio euclideo riferito a coordinate cilindriche r, z, x_3, quest'ultima interpretandosi evidentemente come azimut attorno all'asse Oz. Le linee x_3 ($r = \text{cost.}$, $z = \text{cost.}$) sono in questo caso i circoli paralleli.

Più generalmente, in corrispondenza ad un qualsiasi potenziale simmetrico $\nu(r, z)$, tutti i coefficienti del ds^2 conservano lo stesso valore lungo le linee x_3: chiamerò perciò *isometriche* tali linee. Un'ovvia conseguenza di questo loro comportamento rispetto alla metrica spaziale (2) si è che ognuna ha la flessione costante. Per conseguirne la espressione esplicita, si ricorda:

1) che la flessione Γ d'una linea x_3 è caratterizzata dai due coefficienti di rotazione γ_{133}, γ_{233} [2], essendo precisamente $\Gamma = |\sqrt{\gamma_{133}^2 + \gamma_{233}^2}|$;

2) [cfr. Nota IV, § 2] che, per ogni dl^2 ternario della forma $\sum_1^3{}_i e^{2\mathfrak{h}_i} dx_i^2$, si ha

$$\gamma_{3i3} = - e^{-\mathfrak{h}_i} \frac{\partial \mathfrak{h}_3}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2),$$

γ_{313} potendosi anche risguardare [3] come curvatura geodetica della linea x_3 sopra la superficie $x_2 = \text{cost.}$ che la contiene; γ_{323} come analoga curvatura sopra la superficie $x_1 = \text{cost.}$: l'una e l'altra prese con debito segno.

Con referenza a (2), ove si faccia corrispondere r ad x_1 e z ad x_2, si ha in particolare

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2 = \lambda - \nu\,, \qquad \mathfrak{h}_3 = -\nu + \log r\,,$$

e quindi

$$\gamma_{313} = - e^{\nu-\lambda}\left(\frac{1}{r} - \nu_1\right), \qquad \gamma_{323} = e^{\nu-\lambda}\nu_2\,. \tag{5}$$

Dacchè tutto risulta indipendente da x_3, rimane acquisito che ogni linea isometrica è dotata di flessione costante.

Prendiamo in considerazione una generica superficie $z = \text{cost.}$ Il quadrato del suo elemento lineare è, in base alla (2),

$$e^{2(\lambda-\nu)} dr^2 + e^{-2\nu} r^2 dx_3^2\,.$$

I coefficienti di dr^2 e di dx_3^2 (avendo ormai z un valore costante) dipendono esclusivamente da r; perciò le linee r ($x_3 = \text{cost.}$) sono geodetiche, e le linee x_3, cioè *le linee isometriche, oltre ad avere curvatura geodetica costante, sono* — secondo la definizione del BIANCHI [4] — *circoli geodetici delle superficie* $z = \text{cost.}$ La loro distanza geodetica ϱ dal centro, o circolo singolare, $r = 0$ è

$$\varrho = \int_0^r e^{\lambda-\nu} dr\,, \tag{6}$$

---

[2] RICCI et LEVI-CIVITA etc., «Math. Ann.», B. 54, 1900, pag. 154.

[3] BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 1902], pp. 179-181.

[4] Loc. cit., pag. 196.

il limite superiore dell'integrale essendo il valore di r, che spetta all'isometrica di cui si tratta, e dovendosi, ben si intende, risguardare la z (che comparisce pel tramite di $\lambda - \nu$) costante col valore che spetta alla stessa isometrica.

2. - Potenziali logaritmici. Più stretta analogia delle linee isometriche coi circoli paralleli dello spazio ordinario. Distanza dall'asse. Flessione.

Occupiamoci in particolare dei potenziali logaritmici, cioè di quelle soluzioni della (3), che non dipendono da z. Si ha per essi, designando con h una costante arbitraria,

$$\nu_1 = \frac{h}{r}, \qquad \nu_2 = 0, \tag{7}$$

e quindi, designando con r_0 una seconda costante,

$$\nu = h \log \frac{r}{r_0}. \tag{7'}$$

La funzione ν, per tutti i ds^2 della classe (1), si risguarda dotata di dimensioni nulle; r è una lunghezza. Perciò il prodotto $r\nu_1$ è un puro numero, e con esso la costante h. Dalla (7'), che equivale a $r/r_0 = e^{h/\nu}$, risulta ulteriormente che r_0 ha le dimensioni di una lunghezza.

La (4), coi valori (7), porge

$$\lambda_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{h^2}{r}, \qquad \lambda_2 = \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0, \tag{8}$$

donde, a meno di una inessenziale costante additiva,

$$\lambda = h^2 \log \frac{r}{r_0}. \tag{8'}$$

La circostanza che, nell'espressione (2) del dl^2 (senza termini rettangoli in dz), tutti i coefficienti sono, nel caso attuale, indipendenti da z, permette di affermare che *le superficie* $z = \text{cost.}$ *sono piani geodetici*: basta aver riguardo alle equazioni lagrangiane delle geodetiche. Le linee isometriche $x_3 = \text{cost.}$ hanno così non soltanto la flessione costante, ma anche le altre caratteristiche degli ordinari circoli paralleli attorno all'asse Oz, essendo circoli geodetici dei piani, pure geodetici, $z = \text{cost.}$

Dacchè ogni geodetica di tali piani lo è altresì rispetto allo spazio ambiente, *la* ϱ *definita dalla* (6) *rappresenta la minima distanza d'una generica isometrica dall'asse* (superficie singolare) $r = 0$, *il minimo riferendosi a tutte le linee spaziali* (non soltanto a quelle che appartengono alla stessa superficie $z = \text{cost.}$, cui conviene limitarsi quando ν dipende anche da z).

Ove si ponga per brevità

$$n - 1 = h^2 - h \,, \tag{9}$$

si ha, per qualsiasi valore reale di h,

$$n = h^2 - h + 1 = \left(h - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \;;$$

inoltre, dalle (7′) e (8′),

$$e^{-\nu} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^h, \qquad e^{\lambda-\nu} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1}. \tag{10}$$

Dacchè $n > 0$, la funzione r^{n-1} è integrabile a partire da $r = 0$, come si richiede perchè abbia senso la distanza ϱ dall'asse. In modo preciso risulta

$$\varrho = \frac{r^n}{n r_0^{n-1}} \,. \tag{11}$$

La curvatura geodetica d'una linea isometrica (nel piano $z = \text{cost.}$ cui essa appartiene) è espressa dalla prima delle (5). Si può anzi aggiungere che γ_{313} ci dà la detta curvatura presa positivamente quando la concavità della curva è rivolta nel senso delle r crescenti, negativamente nel caso opposto. *Se si vuole rispecchiare la condizione qualitativa che i circoli geodetici sieno concavi verso il centro* ($r = 0$), *bisognerà ritenere* $\gamma_{313} < 0$. Ora si ha da (5), (7) e (10)

$$\gamma_{313} = -(1 - h)\,\frac{r_0^{n-1}}{r^n} \,,$$

donde la disuguaglianza

$$h < 1 \,. \tag{12}$$

D'altra parte la flessione Γ (annullandosi γ_{323}) coincide col valore assoluto di γ_{313}. Possiamo quindi ritenere, esprimendo r per ϱ a norma della (11),

$$\Gamma = \frac{1-h}{n} \frac{1}{\varrho} . \tag{13}$$

3. - Curvature e direzioni principali dello spazio corrispondenti ad un potenziale logaritmico.

Dal § 6 della Nota precedente risulta che le linee isometriche sono, per qualsiasi potenziale simmetrico $\nu(r, z)$, linee principali di curvatura. La corrispondente curvatura principale ω_3 vale

$$\omega_3 = e^{-2(\lambda-\nu)} \nabla^0 \left(\nu - \log \frac{r}{r_0}, \nu\right),$$

il parametro misto ∇^0 riferendosi alla forma euclidea $dr^2 + dz^2$.

Per il potenziale logaritmico si ha in conformità, dalle (10), (7), (9) e (11),

$$\omega_3 = (n-1) \frac{r_0^{2(n-1)}}{r^{2n}} = - \frac{1-n}{n^2} \frac{1}{\varrho^2} . \tag{14}$$

Le altre due curvature principali dipendono dai simboli di Ricci α_{11}, α_{12}, α_{22}. Le loro espressioni generali si trovano esplicitate nella Nota precedente. Senza richiamarle materialmente, basterà ora procurarsi i valori delle α_{ik} forniti dalle formule (24) di detta Nota.

Sostituendo in queste formule, per le derivate covarianti ν_{ik}, da riferirsi alla forma euclidea $dr^2 + dz^2$, le derivate ordinarie, e tenendo conto che a_{ik} sono i coefficienti (1 o 0) della forma suddetta, si ha, per le (7), (8) e (9),

$$\alpha_{11} = \frac{h}{r^2} + \frac{2h^3 - 3h^2}{r^2} + \frac{(h-h^2)h}{r^2} = \frac{(1-h)(1-n)}{r^2} ;$$

$$\alpha_{12} = 0 ; \qquad \alpha_{22} = \frac{(h-h^2)h}{r^2} = \frac{h(1-n)}{r^2} .$$

L'annullarsi di α_{12} sta ad indicare che *le linee coordinate r e z sono, al pari delle x_3, linee principali di curvatura.* E le rispettive curvature principali ω_1 e ω_2 si hanno in conformità dividendo α_{11} e α_{22} per i coefficienti di dr^2 e di dz^2 nel dl^2, cioè per $e^{2(\lambda-\nu)} = (r/r_0)^{2(n-1)}$. Con ciò, tenendo conto della (9), risulta

$$\omega_1 = \frac{(1-h)(1-n)}{n^2}\frac{1}{\varrho^2}, \qquad \omega_2 = \frac{h(1-n)}{n^2}\frac{1}{\varrho^2}, \tag{15}$$

annullandosi, come deve sempre accadere negli spazi vuoti, la curvatura media $\omega_1+\omega_3+\omega_3$. Dalle (14) e (15) apparisce che *le tre curvature principali sono distinte* (circostanza già rilevata in generale alla fine della Nota precedente); *e tutte inversamente proporzionali al quadrato della distanza geodetica dall'asse.*

4. - Potenziale statico. Forza del campo.

Designando al solito con V^2 il coefficiente di dt^2 nel ds^2 einsteiniano, si ha da (1) e (7')

$$V^2 = V_0^2 e^{2\nu} = V_0^2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2h},$$

donde il potenziale statico $-\frac{1}{2}V^2$. Questo è funzione della sola r; quindi *la forza è tutta radiale* (si intende secondo le linee r). L'elemento d'arco delle linee r essendo $e^{\lambda-\nu}dr$, ossia, a norma della (10), $(r/r_0)^{n-1}dr$ si ha, per la componente della forza nel senso delle r crescenti,

$$-\frac{1}{2}\frac{dV}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1}dr} = -V_0^2\,h\,\frac{r_0^{n-1}}{r^n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2h}.$$

Dacchè tale componente è negativa, la forza è diretta *verso l'asse*; mettendo in evidenza la distanza geodetica a norma della (11), si ha per l'intensità F l'espressione

$$F = V_0^2\frac{h}{n}\cdot\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{2h/n}, \tag{16}$$

dove

$$\varrho_0 = \frac{r_0}{n} \tag{17}$$

designa evidentemente la distanza geodetica per $r = r_0$.

La (16) mostra che la forza varia proporzionalmente alla potenza $-1+2h/n$) della distanza geodetica dall'asse.

5. - Prima approssimazione.

Ricordo dalla Nota I [5] (§ 8) che, in prima approssimazione, il ds^2 che conviene ad un campo newtoniano di potenziale $-V_0^2\gamma$, dove V_0 rappresenta la velocità della luce in quei posti del campo in cui $\gamma = 0$ [6], ha la forma

$$V_0^2(1+2\gamma)\,dt^2 - (1-2\gamma)\,dl_0^2 \tag{18}$$

con dl_0 euclideo.

Dalle (1) e (2) apparisce che, in corrispondenza ad un generico potenziale simmetrico $\nu(r, z)$, il ds^2 rientra nel tipo (18), purchè ν (che è un puro numero) si possa trattare come una piccola quantità del prim'ordine, e λ riesca addirittura trascurabile. In tale ipotesi infatti

$$e^{2\nu} = 1 + 2\nu\,, \qquad e^{2(\lambda-\nu)} = 1 - 2\nu\,;$$

e si ha da (2)

$$dl^2 = (1-2\nu)(dr^2 + dz^2 + r^2\,dx_3^2)\,,$$

il secondo fattore costituendo appunto un dl_0^2 euclideo (riferito a coordinate cilindriche) donde, per (1),

$$ds^2 = V_0^2(1+2\nu)\,dt^2 - (1-2\nu)\,dl_0^2\,.$$

La coincidenza colla (18) è manifesta, purchè *si identifichi* ν *con* γ e V_0 *col valore della velocità della luce* per $\nu = 0$, il che è quanto dire, badando alla (7'), *per* $r = r_0$.

6. - Attrazione di un cilindro omogeneo.

Se si prende per ν il potenziale logaritmico $h \log r/r_0$, la condizione che tale quantità possa considerarsi piccola di prim'ordine è evidentemente soddisfatta le quante volte sia tale la costante h (che, in virtù

---

[5] In questi «Rendiconti», vol XXVII (2° sem. 1917), pp. 307-317.

[6] A vero dire, nella citata Nota I, si fa l'ipotesi specifica che γ si annulli all'∞ e che ivi la velocità della luce V_0 abbia il valore c che le compete in assenza d'ogni circostanza perturbatrice.

della (12), è in ogni caso una frazione propria): ciò, ben si intende, purchè r sia abbastanza discosto da 0 e ∞ da poter trattare $\log r/r_0$ come quantità finita. Sotto queste stesse ipotesi $\lambda = h^2 \log r/r_0$ risulta senz'altro trascurabile, come si richiede per l'applicabilità delle formule di prima approssimazione.

Ciò posto, riportiamoci agli elementi della teoria dell'attrazione newtoniana. Un cilindro circolare, indefinito, omogeneo, agisce nei punti esterni come se tutta la massa fosse distribuita uniformemente sull'asse con la stessa densità μ per unità di lunghezza. Detta r la distanza dall'asse e f la costante d'attrazione, si ha il potenziale

$$2f\mu \log\frac{1}{r} + \text{cost}.$$

Specificando la inessenziale costante additiva, si può ritenere per tale potenziale l'espressione

$$2f\mu \log\frac{r_0}{r},$$

che diviene manifestamente identificabile con

$$-V_0^2\nu = V_0^2 h \log\frac{r_0}{r};$$

basta assumere

$$h = \frac{2f\mu}{V_0^2}. \tag{19}$$

A V_0 si può, senza errore sensibile, sostituire il valore limite c. Si ha quindi, in unità C.G.S.,

$$V_0 = c = 3\cdot 10^{10}, \qquad f = 6{,}7\cdot 10^{-8},$$

e ciò porge

$$h = 2\,\frac{6{,}7}{9}\,10^{-28}\mu, \tag{19'}$$

la densità lineare μ dovendosi ritenere espressa in grammi per centimetro. Di qua si rileva intanto che, per ogni distribuzione realizzabile con masse ordinarie, è esuberantemente verificata l'ipotesi preliminare che h si possa trattare come quantità di prim'ordine. Sotto tale ipotesi, si ha dalla (9)

$n = 1 - h$; e, sempre a meno di termini di secondo ordine, h/n si riduce ad h. In conformità l'espressione (16) della forza, tenuto conto della (19), assume l'aspetto

$$\frac{2f\mu}{\varrho}\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{2h}.$$

Il primo fattore corrisponde evidentemente all'attrazione newtoniana esterna di un cilindro omogeneo (dello spazio euclideo) alla distanza ϱ dall'asse. Il secondo fattore (assai prossimo all'unità) $(\varrho/\varrho_0)^{2h}$ costituisce la *correzione statica* dovuta alla teoria di EINSTEIN. L'alterazione geometrica dello spazio ambiente, già esplicitata in generale a § 3, dà luogo, trascurando nelle (15) e (16) i termini di secondo ordine in h, ai seguenti valori delle curvature principali:

$$\omega_1 = -\frac{h}{\varrho^2}, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = \frac{h}{\varrho^2}.$$

Dacchè ω_1, ω_2, ω_3 appartengono rispettivamente alle giaciture r=cost., z= cost., x_3= cost., si conclude che, nella distorsione dello spazio, provocata dalla presenza di un cilindro materiale (circolare, indefinito, omogeneo), la curvatura riemanniana resta nulla nelle giaciture normali all'asse, mentre assume il valore positivo h/ϱ^2 per le giaciture meridiane e il valore opposto $-h/\varrho^2$ per le giaciture tangenti ai cilindri coassiali.

VII.

LA TEORIA DI EINSTEIN E IL PRINCIPIO DI FERMAT

« Nuovo Cimento », ser. 6ª, vol. XVI (1918), pp. 105-114.

1. - Preliminari.

Sia

$$ds^2 = \sum_{ik}^{3}{}_{0}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

la forma quadratica che, secondo EINSTEIN, congloba le misure dello spazio e del tempo.

Supposto che la variabile $x_0 = t$ si possa fisicamente interpretare come tempo, e che x_1, x_2, x_3 rappresentino coordinate di spazio, sarà $-(ds^2)_{dx^0=0}$, ossia

$$dl^2 = -\sum_{ik}^{3}{}_{1}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k = \sum_{ik}^{3}{}_{1}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,, \tag{2}$$

la forma quadratica (definita positiva) che individua la metrica dello spazio ambiente.

Per l'interpretazione fisica, conviene tener distinti nel ds^2 i termini in dx_0, cioè in dt, scrivendo

$$ds^2 = g_{00}\, dt^2 + 2\, dt \sum_{i}^{3}{}_{1}\, g_{0i}\, dx_i - dl^2\,. \tag{1'}$$

La forma quaternaria del secondo membro è indefinita [1] e può assumere, secondo i casi, valori positivi, negativi o nulli.

---

[1] Più precisamente anzi, considerata (nell'intorno di un punto generico) come forma algebrica in dt, dx_1, dx_2, dx_3, è tale che, in ogni sua ridotta canonica (per trasformazioni lineari reali), *l'indice d'inerzia* (numero dei coefficienti negativi) *è tre*.

Un sistema di differenziali $dx_0 = dt$, dx_1, dx_2, dx_3 definisce notoriamente una direzione (d) della varietà quadridimensionale. Si dice che (d) è *temporale*, *spaziale* o *di lunghezza nulla* secondochè ds^2 risulta positivo, negativo o nullo. L'ipotesi che t, variando da sola, porga la misura del tempo implica in particolare che sia temporale la direzione

$$(dt \neq 0, \quad dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0)\,.$$

Ne consegue $g_{00}\,dt^2 > 0$, il che giustifica la posizione

$$g_{00} = V^2 \tag{3}$$

con V quantità reale avente le dimensioni di una velocità.

Nel fenomeno cinematico del movimento di un punto, x_1, x_2, x_3 sono funzioni ben determinate di t, e ad ogni dt rimangono univocamente subordinati i differenziali delle altre tre variabili. Il postulato della relatività elementare che ogni movimento materiale segue con velocità inferiore a quella della luce si generalizza notoriamente assumendo che, per ogni punto materiale in moto, $ds^2 > 0$; mentre, per la propagazione della luce, si ha $ds^2 = 0$. Le equazioni del moto

$$x_i = x_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

definiscono, eliminando t, una linea dello spazio ambiente, cioè la traiettoria del moto; interpretate invece nello spazio a quattro dimensioni, definiscono la così detta *linea oraria* ([2]).

Tenuta presente la specificazione qualitativa $ds^2 > 0$, la legge quantitativa che governa il moto di un punto materiale si compendia nel principio variazionale di EINSTEIN:

$$\delta\int ds = 0\,, \tag{4}$$

per variazioni (delle coordinate e di t) nulle agli estremi. Con espressiva immagine gometrica si può dire: *La linea oraria d'un punto materiale è una geodetica temporale della metrica quadridimensionale* [(1) *ovvero* (1')].

([2]) Secondo MINKOWSKI, *Weltlinie*, cioè *linea universale* [Cfr., in traduzione italiana, dovuta al Prof. GIANFRANCESCHI, l'articolo « Spazio e Tempo » nel vol. XVIII, 1909, di questo giornale, pag. 336]. La denominazione introdotta da MINKOWSKI è stata, a vero dire, generalmente accettata. A me pare tuttavia preferibile prender norma dall'uso comune della cinematica elementare, in cui si chiama appunto linea oraria il diagramma nel piano (s, t) di un moto (su traiettoria qualsiasi) definito dall'equazione $s = s(t)$. Se il moto è definito dalle tre equazioni $x_i = x_i(t)$, si ha un analogo diagramma quadridimensionale, e non c'è ragione di designarlo con un vocabolo diverso.

2. - Raggi luminosi. Principio relativistico. Principio di Fermat. Coincidenza in condizioni stazionarie.

L'applicazione formale della (4) al caso di una linea oraria di lunghezza nulla non può effettuarsi materialmente (portando il δ sotto il segno e procedendo col solito algoritmo del calcolo delle variazioni) in causa della singolarità conseguente all'annullarsi del ds. Però basta notoriamente un semplice cambiamento di parametro nelle equazioni differenziali equivalenti a (4) per far sparire ogni traccia di singolarità. In questo senso è perfettamente legittima la nozione di linee geodetiche di lunghezza nulla e si può assumere come postulato fondamentale dell'ottica geometrica nella teoria di EINSTEIN l'enunciato di HILBERT ([3]): *I raggi luminosi sono linee geodetiche di lunghezza nulla della metrica quadridimensionale* [(1) *ovvero* (1')].

Un altro criterio induttivo a priori plausibile, per definire l'andamento dei raggi luminosi è di *associare alla equazione* $ds^2 = 0$ *il principio di Fermat* del minimo tempo di percorrenza fra due punti generici; ossia di assumere

$$\delta\int dt = 0\,, \tag{5}$$

intendendo dt legato a t, alle coordinate di spazio e ai differenziali di queste da $ds^2 = 0$. In proposito giova notare che, mentre nel principio geometrico quadridimensionale (4) vanno ritenute nulle agli estremi dell'intervallo di integrazione non soltanto le δx_i, ma anche δt, nella (5) va evidentemente soppressa quest'ultima condizione, la quale ridurrebbe la (5) stessa a pura identità. Del resto basta pensare al significato del principio per desumerne la precisa impostazione analitica. Intanto si deve riferirsi allo spazio a tre dimensioni x_1, x_2, x_3 (di elemento lineare dl), risguardando assegnati i punti di partenza e di arrivo, nonchè l'istante di partenza del segnale luminoso; e si tratta di cercare la via che minimizza la durata del tragitto $\int dt$ subordinatamente al vincolo differenziale $ds^2 = 0$. Questo implica $\delta ds^2 = 0$, che si può considerare come una relazione (differenziale del prim'ordine) fra δt, le variazioni (arbitrarie, ma nulle agli estremi) δx_i e i rispettivi differenziali $d\delta t$, $d\delta x_i$. Imponendo a δt di annullarsi in partenza, esso rimane univocamente determinato, lungo la curva che congiunge le posizioni estreme, in funzione delle δx_i. La (5) esprime, si può dire, che tale curva va determinata in

([3]) *Die Grundlagen der Physik*, parte II, Göttinger-Nachrichten, 1916.

modo che δt si annulli anche in arrivo, comunque si scelgano le δx_i (nei punti intermedi). La traduzione differenziale nella (5) si ottiene come segue.

Ove si immagini la equazione $ds^2 = 0$ risoluta rispetto a dt, si ha

$$dt = f(t;\, x_1, x_2, x_3;\, dx_1, dx_2, dx_3)\,,$$

essendo f funzione omogenea di primo grado rapporto a dx_1, dx_2, dx_3. In condizioni stazionarie, quando cioè i coefficienti del ds^2 non dipendono da t, anche f ne è esente, e il principio (5), sostituitovi f a dt, assume veste puramente geometrica, portando alle equazioni

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial\, dx_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

In generale è d'uopo far intervenire anche l'identità

$$\delta dt - \delta f = 0$$

e ricorrere al solito metodo dei moltiplicatori, sostituendo a (5) la condizione equivalente

$$\int [\delta\, dt + \lambda(\delta\, dt - \delta f)] = 0$$

con δt nulla ad uno solo degli estremi.

Se ne ricavano le equazioni differenziali

$$\begin{cases} d\lambda + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial t} = 0\,, \\[2ex] d\left(\lambda \dfrac{\partial f}{\partial\, dx_i}\right) - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \end{cases}$$

colla condizione $\lambda + 1 = 0$ a quello dei due estremi in cui δt rimane arbitraria. Per $\partial f/\partial t = 0$, la prima equazione differenziale, congiunta alla condizione ai limiti, porge $\lambda = -1$, sicchè si ritrovano, come è necessario, le equazioni del caso stazionario.

Ho già avuto occasione di valermi del principio di FERMAT in condizioni statiche ([4]), quando cioè non soltanto tutti i coefficienti del ds^2

([4]) *Statica einsteiniana.* «Rend. della R. Acc. dei Lincei», vol. XXVI, 1° sem. 1917, p. 470 [in questo vol.: p. 73].

sono indipendenti da t, ma inoltre si annullano i termini rettangoli in dt ($g_{0i} = 0$). Il WEYL (5) ha in seguito notato che, in tali condizioni, c'è sostanziale equivalenza fra i due criteri (di HILBERT e di FERMAT). La verificazione del WEYL non è in verità complicata, ma richiede comunque qualche passaggio formale. *Mi propongo di stabilire* (più generalmente e con semplicità anche maggiore) *l'equivalenza, per ogni metrica stazionaria, dei due principi d'ottica geometrica: geodeticità (quadridimensionale), minimo tempo.*

3. - Dimostrazione.

Come già abbiamo accennato, conviene considerare le geodetiche di lunghezza nulla derivanti per via di limite dalle geodetiche temporali ($ds > 0$). Per queste, ove si designi con c una costante arbitraria da identificarsi colla velocità della luce in assenza d'ogni circostanza perturbatrice, si suol porre

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \quad (i = 1, 2, 3), \quad v^2 = \frac{dl^2}{dt^2} = \sum_{ik}^{3}{}_{1} a_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k\,; \tag{6}$$

$$L = c\,\frac{ds}{dt} = c\sqrt{V^2 + \sum_{i}^{3}{}_{1} g_{0i}\dot{x}_i - v^2}, \tag{7}$$

la funzione L ammettendo derivate parziali finite (perchè è escluso che si annulli il ds e quindi la quantità sotto il radicale).

La (4) può essere scritta

$$\delta\int L\,dt = 0\,. \tag{4'}$$

La variazione, fatta rispetto alle coordinate x_1, x_2, x_3, porta classicamente alle equazioni di LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{8}$$

Data la provenienza di (4′) da (4), bisogna trattarvi t alla stregua delle coordinate di spazio e quindi sottoporlo anch'esso a variazione (nulla agli estremi). Ciò non porta però ad alcuna nuova condizione. Si

(5) *Zur Gravitationstheorie*, « Ann. der Physik », B. 54, 1917, pp. 127-128.

ha infatti, dopo ovvia integrazione per parti

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0\,,$$

che è necessaria conseguenza delle (8).

Nell'ipotesi, caratteristica del caso stazionario, che L non contenga esplicitamente t, se ne ricava l'integrale

$$L - \sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i = E\,, \tag{9}$$

dove la costante E è interpretabile come energia totale del punto mobile [6].

Moltiplicando per L, il primo membro può essere scritto

$$\frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{2}\left(L^2 - \sum_1^3{}_i \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right).$$

In virtù della (7), L^2 è un polinomio di secondo grado in $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$: esso si presenta già scisso in tre addendi omogenei dei gradi rispettivi 0, 1, 2. Per il teorema di EULERO sulle funzioni omogenee, sparisce il termine lineare dalla differenza $L^2 - \sum_1^3{}_i (\partial L^2/\partial \dot{x}_i)\dot{x}_i$, la quale si riduce a $c^2(V^2+v^2)$. Con ciò la (9), moltiplicata per L, porge

$$\frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{2}c^2(V^2+v^2) = EL\,. \tag{9'}$$

Il primo membro è essenzialmente positivo, anzi $\geqslant \frac{1}{2}c^2V^2$ (che è da ritenersi dotato di limite inferiore non nullo nel campo che si considera). Il prodotto EL *può così risguardarsi quale funzione delle x e delle $\dot{x}$, la quale rimane regolare e diversa da zero, anche quando L converge a zero*; in tale ipotesi la costante E tende manifestamente all'infinito.

D'altra parte, come già rilevai nella citata nota sulla statica einsteiniana, per tutti i movimenti cui compete una medesima energia totale E, si può sostituire alla (4'), in cui si suppone che δt si annulli agli estremi

(6) Cfr., oltre alla già citata « *Statica einsteiniana* » (pagine 465-468), la nota *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. I. Generalità e prima approssimazione.* Ibidem, 2° semestre 1917, pag. 309 [in questo vol.: p. 91].

dell'intervallo di integrazione, un principio analogo che presenta sul primo il vantaggio di non richiedere più la detta condizione. All'uopo basta notare che, per δt nulla agli estremi, $\delta\int dt = 0$, e, per conseguenza, la (4') equivale a $\delta\int (L - E)\, dt = 0$, od anche, per $E \neq 0$, a $\delta\int (1 - (L/E))dt = 0$; infine che, in quest'ultima, si può lasciar cadere il vincolo che δt si annulli agli estremi, perchè, portando il δ sotto il segno e applicandolo a dt (in quanto compare sia esplicitamente, sia pel tramite delle $\dot{x}$), si ha, materialmente,

$$-\frac{1}{E}\int \delta dt\left(L - E - \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right),$$

che si annulla in virtù della (9).

Rimane dunque acquisito che, per un assegnato valore (non nullo) di E, le equazioni del moto si possono, *senza alcun vincolo relativo a* δt, compendiare nella formula

$$\delta\int\left(1 - \frac{L}{E}\right) dt = 0\,. \tag{10}$$

La funzione sotto il segno può scriversi $1 - (L^2/EL)$, donde apparisce, avuto riguardo al rilevato comportamento del denominatore EL, che essa si mantiene regolare e tende all'unità, nell'ipotesi che L converga a zero. Ora è appunto tale ipotesi che fa passare dai moti materiali al caso limite della propagazione luminosa. Attesa la regolarità, il passaggio al limite può essere invertito cogli operatori $\delta\int$, e così la (10) dà luogo al principio di FERMAT

$$\delta\int dt = 0\,,$$

c. d. d.

4. - Complementi geometrici.

Ad ogni direzione (d) dello spazio quadridimensionale (t, x_1, x_2, x_3), cioè ad ogni sistema di incrementi (dt, dx_1, dx_2, dx_3) si può ovviamente far corrispondere un vettore (velocità) $\boldsymbol{v}$ dello spazio fisico di elemento lineare dl, con che si intende, in modo preciso, dello spazio euclideo tangente (nel punto generico, a partire dal quale si considerano gli incrementi suddetti).

Assumeremo per sistema controvariante di questo vettore, rispetto alla metrica (2), i rapporti

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Attribuendo loro la forma

$$\frac{dx_i}{dl}\frac{dl}{dt},$$

si mettono in evidenza i parametri di direzione dx_i/dl, e perciò il fattore positivo dl/dt misura la lunghezza del vettore. Riportandoci alla posizione (6), abbiamo per il quadrato di tale lunghezza

$$v^2 = \frac{dl^2}{dt^2} = \sum_{ik}^{3}{}_{1} a_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k .$$

Un altro vettore $\boldsymbol{w}$, funzione esclusivamente del posto e del tempo (soltanto del posto in condizioni stazionarie), si può far corrispondere alla terna g_{0i} (covariante rispetto a trasformazioni qualisivogliono delle sole coordinate di spazio), assumendo tale terna per sistema covariante del vettore. Allora, ove si designino con $a^{(ik)}$ i coefficienti della forma reciproca alla (2) e si ponga

$$w^2 = \sum_{ik}^{3}{}_{1} a^{(ik)} g_{0i} g_{0k}, \tag{11}$$

si ha in w la lunghezza e (per $w > 0$) nei rapporti g_{0i}/w i momenti (sistema reciproco ai parametri) della direzione di questo vettore. Va notato che, se le coordinate spaziali x hanno le dimensioni di una lunghezza, i coefficienti a_{ik} del dl^2, e quindi i loro reciproci $a^{(ik)}$, sono puri numeri, mentre i coefficienti g_{0i} dei termini rettangoli in dt hanno le dimensioni di una velocità. Perciò il vettore $\boldsymbol{w}$ è interpretabile come velocità al pari di $\boldsymbol{v}$. Tale conclusione — lo si constata ovviamente — rimane valida, anche lasciando indeterminate le dimensioni delle coordinate x_1, x_2, x_3.

Detto φ l'angolo di $\boldsymbol{v}$ con $\boldsymbol{w}$, supposti per un momento entrambi diversi da zero, si ha, in base alla metrica (2),

$$\cos\varphi = \sum_{i}^{3}{}_{1} \frac{g_{0i}\dot{x}_i}{wv},$$

donde l'identità

$$vw \cos\varphi = \sum_1^3{}_i\, g_{0i}\dot{x}_i\,, \tag{12}$$

che sussiste anche se eventualmente si annullano v o w.

Tutto ciò premesso, in base alle (3), (6) e (12), l'espressione (1′) del ds^2 può essere scritta

$$ds^2 = dt^2(V^2 + 2vw\cos\varphi - v^2)\,.$$

Si rende così manifesto che la condizione $ds^2 = 0$, caratteristica della propagazione della luce, ne definisce la velocità v in funzione del posto e della direzione del raggio, nonchè del tempo, nel caso generale, in cui i coefficienti del ds^2, e con essi V, w e φ, dipendono da t.

Rappresentando con β e con p i rapporti (positivi entrambi e numeri puri) v/V e w/V, si ha per β la equazione di secondo grado

$$\beta^2 - 2p\cos\varphi\beta - 1 = 0\,, \tag{13}$$

le cui radici hanno per prodotto -1, e sono quindi una positiva e l'altra negativa. Per il suo significato v dev'essere positiva, talchè la (13) la definisce *univocamente*.

Quando si annullano tutti i termini rettangoli in dt (caso statico), $w = 0$, quindi $\beta = 1$, e v coincide con V. In generale è $p > 0$, e il divario da V (fissato un posto e un istante) dipende dalla direzione del raggio, ossia dall'angolo φ che esso forma con $\boldsymbol{w}$. Si ha ancora $v = V$ per ogni raggio perpendicolare a $\boldsymbol{w}$. La (13) mostra poi ovviamente che i valori massimo e minimo di β si hanno in corrispondenza a $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$. Ciò è quanto dire che la massima velocità di propagazione

$$V(\sqrt{1+p^2} + p)$$

ha luogo secondo $\boldsymbol{w}$; la minima

$$V(\sqrt{1+p^2} - p)\,.$$

nella stessa direzione, ma in senso opposto.

Come si vede, all'infuori del caso statico, la propagazione della luce nello spazio fisico ha comportamento non soltanto anisotropo ma addirittura irreversibile.

VIII.

COME POTREBBE UN CONSERVATORE GIUNGERE ALLA SOGLIA DELLA NUOVA MECCANICA

« Rend. del Seminario mat. della Fac. di Sc. della R. Univ. di Roma, » vol. V (1918-19), pp. 10-28; trad. spagnola, « Revista Mat. Hispano-Americana », t. II (1920), pp. 107-115, 129-132, 169-176; trad. francese in « L'Enseignement mathématique », XXI (1920), pp. 5-28.

In politica non sono molti quelli che amano chiamarsi puramente e semplicemente conservatori, perchè conservatore si prende spesso quale sinonimo di misoneista. Questo pericolo non c'è evidentemente in scienza. Nessun ricercatore può essere misoneista, ma molti cultori di scienza possono, direi quasi debbono, essere conservatori per la stessa loro missione di custodire con gelosa cura un certo patrimonio intellettuale ben consolidato, e di vagliare con severo spirito critico ciò che importa variazione od alienazione del patrimonio stesso.

Sotto questo punto di vista posso ben onorarmi di parlare dinanzi a numerosi conservatori; e sarò doverosamente circospetto nel cercare di orientarne il pensiero verso la nuova meccanica, senza destare diffidenze con improvvise demolizioni. Mi propongo di mostrare, attraverso un paio di formule classiche, semplici e compendiose, come un legittimo desiderio di generalizzazione formale da un lato e di sintesi concettuale dall'altro, renda plausibili alcune modificazioni di leggi generali, quantitativamente lievissime, speculativamente grandiose, che hanno ricevuto in questi ultimi anni un assetto sistematico per opera di EINSTEIN, fornendo spiegazione esauriente di più esperienze, e specialmente di una celebre esperienza d'ottica, e di un fatto astronomico (lo spostamento del perielio di Mercurio) di fronte a cui restavano impotenti i vecchi e pur gloriosi schemi, nonostante i più vigorosi sforzi.

Ma di ciò vi intratteranno in seguito altri colleghi con più fervida e colorita parola. Io passo ad assolvere il mio cómpito introduttivo.

1. - Il principio di Hamilton.

Prendiamo le mosse dalle equazioni del moto di un punto materiale in un campo conservativo. Sia U il potenziale unitario. Le equazioni del moto, in coordinate cartesiane (riferite ad assi fissi) y_1, y_2, y_3, si scrivono

$$\text{(N)} \qquad \ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

il punto sovrapposto indicando al solito derivazione rispetto al tempo t. Ove si designi con

$$dl_0^2 = \sum_1^3{}_i \, dy_i^2$$

il quadrato dell'elemento lineare (percorso dal mobile nel tempuscolo dt) e con v la velocità del mobile (in valore assoluto), sarà

$$v^2 = \frac{dl_0^2}{dt^2} = \sum_1^3{}_i \, \dot{y}_i^2 \, .$$

Posto

$$L = \frac{1}{2} v^2 + U \, ,$$

le (N) si possono notoriamente compendiare nella formula variazionale

$$\text{(H)} \qquad \delta \int L \, dt = 0 \, ,$$

che esprime il principio di HAMILTON.

Fissiamo un momento l'attenzione sulla (H). Essa implica un intervallo di integrazione (t_0, t_1) da fissarsi preventivamente ed arbitrariamente; ed è appunto il suo sussistere per variazioni δy_i delle y_i, nulle agli estremi e del resto arbitrarie, che equivale all'essere verificate le (N) nello stesso intervallo.

Questa l'accezione più semplice del principio di HAMILTON, nel quale non si fa variare t, si assume cioè $\delta t = 0$. Sono pur classiche varie generalizzazioni, nelle quali si sottopone anche t a variazione, libera o condizionata. Di una di queste generalizzazioni che rispettano l'equivalenza fra le (N) e la (H) parleremo tra un momento. Intanto notiamo che, se si cambiano comunque le coordinate, sostituendo alla terna cartesiana y_1, y_2, y_3 coordinate curvilinee qualsivogliono, o anche più generalmente tre parametri lagrangiani x_1, x_2, x_3, legati alle y_1, y_2, y_2 da relazioni, che possono involgere anche il tempo, regolari e invertibili nel campo che si considera,

$$(\mathrm{T}_3) \qquad x_h = x_h(y_1, y_2, y_3, t) \qquad (h = 1, 2, 3),$$

ovvero, sotto forma risoluta rapporto alle y_i $(i = 1, 2, 3)$,

$$(\mathrm{T}_3') \qquad y_i = y_i(x_1, x_2, x_3, t) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

e si introducono queste espressioni nella L, essa diviene una funzione $L(x|\dot{x}|t)$ degli argomenti x_h, $\dot{x}_h$ $(h = 1, 2, 3)$, t, quadratica (in generale non omogenea) nelle $\dot{x}$.

Inteso che per L si adotti questa espressione trasformata, la (H) seguita a sussistere rispetto ai parametri lagrangiani x, e dà luogo, eseguendo effettivamente la variazione, a tre equazioni differenziali equivalenti alle (N), che hanno la forma classica di LAGRANGE:

$$(\mathrm{M}) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_h} - \frac{\partial L}{\partial x_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, 3).$$

Questa forma presenta la notevole proprietà di essere invariante rispetto a qualsivoglia scelta di parametri lagrangiani x (combinazioni indipendenti delle y, involgenti eventualmente anche il tempo).

OSSERVAZIONE I (sulla nozione di equazioni invariantive).

La qualifica di invariante, di fronte a qualsiasi scelta, e quindi anche trasformazione delle x [di tipo (T_3)], testè attribuita alle equazioni del moto, non va presa in senso assoluto: nel senso cioè che le equazioni differenziali rimangano proprio inalterate (salvo un materiale scambio di simboli), comunque si scelgano le variabili, ma in senso relativo, cioè nella accezione più lata di invarianza subordinata ad una qualche funzione (o sistema di funzioni), *base* delle trasformazioni, su cui si opera direttamente la sostituzione imposta dal cambiamento di variabili. La base delle trasformazioni (T_3) per le equazioni dinamiche è evidentemente la L, unico elemento di cui occorre e basta procurarsi l'espressione esplicita

$$L(x|\dot{x}|t)$$

nelle nuove variabili x (e loro derivate $\dot{x}$). Facendo intervenire questo elemento ausiliario, la struttura delle equazioni (M) è poi sempre la stessa, qualunque siano le coordinate di riferimento.

OSSERVAZIONE II (sulla base comune a tutte le equazioni della fisica matematica).

Si noterà che è ancora in senso relativo (perfettamente analogo a quello testè dichiarato) che hanno carattere invariante le equazioni della fisica matematica rispetto a trasformazioni quali si vogliono di coordinate *non* involgenti il tempo. In un sistema di siffatte equazioni appariranno generalmente certi parametri fisici, assieme a loro derivate rispetto a coordinate di spazio e tempo. Orbene, in via assoluta, il sistema cambierà certo aspetto (almeno nella maggior parte dei casi), quando per esempio si sostituiranno alle coordinate cartesiane le coordinate polari. Tuttavia, se si assume come *base* il dl_0^2 (quadrato dell'elemento lineare dello spazio) da esprimersi volta per volta per mezzo delle coordinate x a cui si vuol riferirsi, con che si avrà in generale

$$(\varphi) \qquad dl_0^2 = \sum_{ik}^{3}{}_{1} a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,,$$

diviene possibile in ogni caso, facendo apparire anche la forma differenziale quadratica (φ), o, più esplicitamente, i suoi coefficienti a_{ik}, di attribuire al sistema di equazioni una forma che rimane materialmente la stessa comunque si scelgano le coordinate.

OSSERVAZIONE III. – *La base dinamica L implica la base geometrica* dl_0^2.

Dalle (T_3) si ha, per un generico movimento, derivando rapporto a t,

$$\dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum_{1}^{3}{}_{k} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\dot{x}_k\,.$$

D'altra parte, dalle (T_3) stesse, considerate come formule di trasformazione di coordinate, in cui t appare come semplice parametro, si ha, differenziando,

$$dy_i = \sum_{1}^{3}{}_{k} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\, dx_k\,.$$

La sostituzione materiale di quest'ultime in $dl_0^2 = \sum_1^3{}_i dy_i^2$ dà luogo ad una forma differenziale quadratica, testè compendiosamente designata con (φ).

L'analoga sostituzione delle $\dot{y}_i$ in $L = \frac{1}{2}\sum_1^3{}_i\, \dot{y}_i^2 + U$ porge ovviamente un risultato del tipo

$$L_2 + L_1 + L_0\,,$$

essendo $L_2 = \frac{1}{2}(dl_0^2/dt^2)$ di secondo grado, L_1 di primo grado nelle $\dot{x}$, e L_0 funzione soltanto delle x e di t.

Di qua apparisce che la base dinamica L implica, per ogni speciale scelta di coordinate, la conoscenza dei tre addendi L_2, L_1, L_0, ossia equivale al complesso di tre basi:

1) una forma quadratica che, a meno del fattore $1/2\,dt^2$ (costante rispetto alle coordinate x), è la stessa base geometrica (φ);

2) una forma lineare L_1 [e per essa tre coefficienti, analoghi ai sei a_{ik} di (φ)];

3) una funzione $L_0(x\,|\,t)$ (che è in fondo un decimo ed ultimo coefficiente della L).

Si potrebbero di qua ricavare alcune conseguenze. A noi basterà ritenere che la base geometrica è in ogni caso inclusa nella dinamica (non viceversa).

2. - Equiparazione di t alle coordinate di spazio nell'algoritmo variazionale. Varietà analitica V_4. Locuzioni quadridimensionali.

Ovvia conseguenza delle equazioni (M) di LAGRANGE si è l'identità

$$\frac{d}{dt}\left\{L - \sum_1^3{}_i \frac{dL}{d\dot{x}_i}\dot{x}_i\right\} - \frac{\partial L}{\partial t} = 0\,.$$

Ciò posto, si immagini di attribuire, nell'intervallo (t_0, t_1), anche alla variabile indipendente t una variazione δt nulla agli estremi e del resto arbitraria. Dacchè, per questo fatto, le x_i rimangono inalterate, mentre le $\dot{x}_i = dx_i/dt$ subiscono gli incrementi

$$\partial\dot{x}_i = -\dot{x}_i \frac{d\,\delta t}{dt}\,,$$

si riconosce immediatamente che il contributo proveniente dalla variazione di t nella (H), ossia

$$\int_{t_0}^{t_1} L\,\delta\, dt + \int_{t_0}^{t_1} dt\left\{\frac{\partial L}{\partial t}\,\partial\delta t + \sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\,\partial\dot{x}_i\right\}\,,$$

può, con un'ovvia integrazione per parti, essere posto sotto la forma

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\,\delta t \left\{ \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{dt}\left(L - \sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \right\},$$

che va a zero, in virtù delle (M), per quanto abbiamo testè rilevato.

Si possono pertanto, nel principio variazionale (H), trattare alla stessa stregua le coordinate di spazio x_1, x_2, x_3 e anche la t.

Consideriamo, per semplice convenienza di linguaggio, la varietà a quattro dimensioni V_4 corrispondente ai quattro parametri x_i, t, varietà a quattro dimensioni in cui vengono a trovarsi rappresentati simultaneamente lo spazio ed il tempo.

Una terna di equazioni

$$x_i = x_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ossia, nella interpretazione cinematica, un movimento, dà luogo ad una curva di V_4, e reciprocamente. Una tale curva si chiama *linea oraria*, come ovvia generalizzazione del diagramma piano con cui (portando in ascisse i tempi e in ordinate gli spazi percorsi) si suol rappresentare l'andamento del moto sopra una traiettoria prestabilita. Adottando questa locuzione, si può dire che curve integrali delle equazioni (M) sono tutte e sole le orarie di V_4, per cui, rimanendo fissi gli estremi, si annulla la variazione dell'integrale.

$$\int L\,dt\,.$$

3. - Il carattere invariantivo del principio di Hamilton non è riferibile alle V_4.

La più generale trasformazione di parametri in V_4 comprende ovviamente tre equazioni del tipo (T_3), con cui si sostituiscono alle coordinate cartesiane y_1, y_2, y_3 tre loro combinazioni indipendenti x_1, x_2, x_3, involgenti anche t; e inoltre una quarta con cui si sostituisce al tempo t un'ulteriore combinazione $x_0(y_1, y_2, y_3, t)$ (indipendente dalle tre precedenti): questo nuovo parametro x_0 si chiama talora *tempo locale*, perchè dipende non solo dall'originario tempo, ma anche dal posto. Lo schema di una (T_4) è così

$$(T_4) \qquad \begin{cases} x_0 = x_0(y_1, y_2, y_3, t)\,, \\ (T_3)\,. \end{cases}$$

Finchè si assume L per base, la forma dell'integrale $\int L\,dt$ non ha evidentemente carattere invariantivo di fronte ad una (T_4), venendo in generale sostituito il dt con una espressione lineare nei differenziali di tutte quattro le variabili x. Si potrebbe cercare di sostituire alla base L qualche cosa di più generale; allora sarebbe possibile raggiungere l'intento, ma in modo complesso e infecondo, perdendo in semplicità concettuale e formale ben più di quanto si guadagni in generalità.

Non è invece difficile arrivare ad una forma espressiva, invariante di fronte ad ogni (T_4), riguardando il principio di HAMILTON come un risultato d'approssimazione, così grande, ben inteso, da non essere avvertibile il divario fra esso e l'ipotetico principio rigoroso nelle applicazioni correnti, non solo tecniche, ma anche astronomiche. Una tale circostanza si presenta manifestamente, qualora i termini correttivi abbiano, rispetto agli omologhi della teoria ordinaria, un ordine di grandezza non superiore al centomilionesimo (10^{-8}).

Ecco una concreta realizzazione di questo criterio.

4. - Forma einsteiniana del principio di Hamilton.

Indichiamo con c una velocità costante, assai grande di fronte alla massima raggiunta nei movimenti di cui intendiamo occuparci. In modo preciso supponiamo che i due puri numeri

$$\frac{v^2}{c^2} \quad \text{e} \quad \frac{U}{c^2}$$

siano entrambi trascurabili di fronte alla unità.

A questo proposito notiamo che una tale circostanza si presenta effettivamente, per c comparabile colla velocità della luce, non soltanto per gli ordinari problemi di moto terrestre, ma anche in meccanica celeste. Per rendersene conto, basta supporre che v sia una velocità planetaria e U il potenziale newtoniano che la determina, con che esso U (nel campo del moto del pianeta) ha notoriamente lo stesso ordine di grandezza di v^2.

Come ordine di grandezza di v, si può assumere 30 km al secondo, che conviene al moto orbitale terrestre. Essendo, in cifra tonda $c = 300\,000$ km/sec, si avrà $v/c \sim 10^{-4}$, e quindi

$$\frac{v^2}{c^2} \quad \text{e} \quad \frac{U}{c^2} \sim 10^{-8}\,.$$

Ciò premesso, cominciamo coll'osservare che, dovendo annullarsi δt agli estremi dell'intervallo di integrazione,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt = 0 ,$$

talchè si può sostituire a L come funzione integranda nella (H)

$$c^2 - L = c^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{U}{c^2}\right) .$$

Entro parentesi, i termini $-\frac{1}{2}(v^2/c^2)$, $-U/c^2$, pur essendo trascurabili di fronte all'unità, sono essenziali perchè il principio variazionale non si riduca all'identità. Però termini d'ordine superiore si potranno senz'altro trascurare nell'approssimazione convenuta. Sarà quindi lecito scrivere

$$c^2 - L = c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{2U}{c^2}} = c\sqrt{c^2 - v^2 - 2U} ,$$

e con ciò il principio di Hamilton che, per l'osservazione precedente, è equivalente a $\delta\int(c^2 - L)\,dt = 0$, può, omettendo il fattore costante c e scrivendo dl_0^2/dt^2 al posto di v^2, essere sostituito da

$$\delta \int \sqrt{c^2 - \frac{dl_0^2}{dt^2} - 2U}\, dt = 0 ,$$

ossia, ponendo

(D) $$ds^2 = (c^2 - 2U)\,dt^2 - dl_0^2 ,$$

da

(H′) $$\delta \int ds = 0 .$$

Dacchè, con referenza a coordinate cartesiane, il dl_0^2 vale $\sum_{1}^{3}{}_i\, dy_i^2$, il ds^2 testè introdotto è una forma differenziale quadratica quaternaria; indefinita, perchè (pur con valori reali e infinitesimi di dt, dy_1, dy_2, dy_3) è suscettibile di assumere determinazioni sia positive che negative. Con tutto ciò *va ritenuto che, nell'ambito dei fenomeni di moto che stiamo considerando, si ha sempre* $ds^2 > 0$.

Basta notare che, raccogliendo $c^2 dt^2$ a fattore e riponendo v^2 per dl_0^2/dt^2, si può scrivere

$$ds^2 = c^2 dt^2\left(1 - \frac{2U}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right);$$

e ciò prova l'asserto, perchè la quantità in parentesi risulta certo positiva quando sussistono le limitazioni quantitative da cui abbiamo preso le mosse.

Ove si sostituiscano agli argomenti t, y_1, y_2, y_3 quattro loro combinazioni indipendenti quali si vogliono x_0, x_1, x_2, x_3 mediante una (T_4), il ds^2 conserva il carattere di forma quadratica nei differenziali delle variabili indipendenti. Cambieranno i coefficienti; si perderà in generale la forma ortogonale (assenza di termini rettangoli); ma comunque l'espressione esplicita rientrerà nel tipo

$$\text{(E)} \qquad ds^2 = \sum_{ik}^{3}{}_{0}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k\,,$$

i coefficienti $g_{ik} = g_{ki}$, in numero di dieci, essendo in generale funzioni delle x.

L'essenziale è che, *assumendo il ds^2 per base, la* (H') *presenta manifestamente carattere invariante di fronte a qualsivoglia scelta di coordinate in V_4*. Ciò costituisce una rilevante superiorità di (H') sopra l'originario principio di HAMILTON.

5. - Interpretazione pseudo-geometrica.

La forma ds^2 è indefinita, come abbiamo osservato or ora, anzi ha per indice di inerzia 3 (¹). Con tutto ciò (per estensione analitica attraverso l'immaginario) nulla vieta di adoperare le locuzioni geometriche, di cui si fa abitualmente uso quando si tratta di una forma quadratica essenzialmente positiva, interpretandola come quadrato della distanza di due punti vicinissimi di una V_4.

Rimangono allora valide dal punto di vista analitico le definizioni e le equazioni (non le disuguaglianze) della geometria differenziale, salvo qualche riserva, proveniente dal fatto che, in geometria differenziale, per il carattere definito del ds^2, si può escludere sistematicamente che ds^2 si annulli, mentre con un ds^2 indefinito l'eventualità va contemplata e discussa.

(¹) Numero dei coefficienti negativi in una (qualunque) espressione canonica.

Premesse queste avvertenze, si può ben dire che il ds^2 di EINSTEIN [definito da (D), o, in coordinate generali, da (E)] pone una determinazione metrica in V_4, e che *le geodetiche proprie di questa metrica* (curve che rendono stazionario l'$\int ds$ senza annullare il ds) *altro non sono che le curve orarie dell'originario problema meccanico.*

6. - Un'applicazione particolare della (H′). Trasformazioni di Lorentz.

Le equazioni del moto sotto l'originaria forma newtoniana (N) implicano, come ben si sa, moto uniforme per forza nulla o, ciò che è lo stesso (a meno di una inessenziale costante), per $U=0$. La (H), che equivale rigorosamente alle (N), definisce dunque per $U=0$ dei moti uniformi. Questa proprietà seguita a sussistere anche per la nuova forma einsteiniana (H′) del principio di HAMILTON, che pur non è rigorosamente equivalente alle (N). Per rendersene conto, si osserva che per $U=0$, la (D) porge

$$(\mathrm{D}_0) \qquad ds_0^2 = c^2\,dt^2 - dl_0^2 \,,$$

talchè, riferendosi a coordinate cartesiane e ponendo

$$L^* = \sqrt{c^2 - \sum_1^3{}_i \dot{y}_i^2} \,,$$

la (H′), che diviene

$$(\mathrm{H}_0') \qquad \delta\int ds_0 = 0 \,,$$

può essere scritta

$$\delta\int L^*\,dt = 0 \,.$$

Le corrispondenti equazioni lagrangiane, per il fatto che L^* non dipende esplicitamente dalle y, dànno subito i tre integrali primi

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{y}_i} = \text{cost.} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

donde la costanza di tutte le $\dot{y}$, *c. d. d.*

Ciò posto, consideriamo una categoria particolare, ma molto importante di trasformazioni (T_4), così specificate. Dalla quaderna (t, y_1, y_2, y_3) si passa ad una nuova quaderna (t', y'_1, y'_2, y'_3) per cui si conserva la forma (D_0) del ds_0^2: inteso questo nel senso che, in virtù delle formule di trasformazione, risulti identicamente

$$ds_0^2 = c^2\,dt^2 - \sum_1^3{}_i\, dy_i^2 = c^2\,dt'^2 - \sum_1^3{}_i\, dy_i'^2 \,.$$

La (H'_0) ci assicura allora che, *anche nella nuova quaderna, interpretando t' come tempo e y'_1, y'_2, y'_3 come coordinate cartesiane, il moto apparirà uniforme.*

Trasformazioni siffatte furono effettivamente costruite da LORENTZ, sicchè si possono chiamare lorentziane: le designeremo brevemente con ($\wedge$).

Ne avremo prossimamente una bella illustrazione vettoriale dal prof. MARCOLONGO, il quale rilevò per il primo come, ponendo $\sqrt{-1}\,ct = y_0$, con che il ds_0^2 assume la forma euclidea $-\sum_0^3{}_i\, dy_i^2$, le trasformazioni di LORENTZ lasciano invariata la forma $\sum_0^3{}_i\, dy_i^2$, sicchè (prescindendo qui ancora da un passaggio attraverso l'immaginario) sono sostanzialmente identiche ai « movimenti » di uno spazio euclideo a quattro dimensioni.

Chiudo la parentesi circa l'effettiva esistenza di queste speciali trasformazioni ($\wedge$), e segnalo un importante corollario. Ogni ($\wedge$) trasforma, come s'è detto, un generico moto uniforme in un nuovo moto pure uniforme; non si può tuttavia affermare che, per effetto della trasformazione, rimanga inalterata la velocità. Ma un caso almeno c'è, in cui questa circostanza si presenta, e concerne i movimenti che seguono colla velocità c (quella tale velocità costante, grandissima, che abbiamo originariamente introdotto per modificare in modo quantitativamente insensibile, ma teoricamente fecondo di conseguenze, la formula di HAMILTON).

Infatti, per un moto che segua colla velocità c (rispetto ai parametri t, y_1, y_2, y_3) si ha evidentemente $c^2 = dl_0^2/dt^2$ e quindi

$$ds_0^2 = c^2\,dt^2 - dl_0^2 = 0 \,.$$

Attesa l'invarianza (non solo del ds_0^2, ma addirittura della speciale forma $c^2dt^2 - \sum_1^3{}_i\, dy_i^2$ di esso) quando si passa alle nuove variabili accentate con una trasformazione di LORENTZ, si ha, anche pel movimento trasformato, $c^2dt'^2 - \sum_1^3{}_i\, dy_i'^2 = 0$, e quindi la velocità c, *c. d. d.*

7. - L'ottica geometrica nel suo aspetto più elementare.

Nella schematizzazione geometrica dei raggi luminosi si ammette, come nella meccanica newtoniana, un riferimento assoluto. Per renderc espressiva la rappresentazione, si immagina questo offerto da un ipotetico mezzo in quiete, che costituisce come il supporto dei fenomeni ottici: il così detto etere cosmico. Negli spazi privi di materia ponderabile la luce si propaga in linea retta con velocità costante c rispetto all'etere, o, ciò che è lo stesso, rispetto ad assi fissi: intendendo per fissi, immobili rispetto all'etere. c è dunque la velocità della luce quale apparisce ad un generico osservatore O, in quiete rispetto all'etere.

Consideriamo un solido C animato da moto traslatorio con velocità u, e un fascio di raggi paralleli propagantisi nello stesso senso del moto.

Rispetto all'osservatore O, il fenomeno luminoso si schematizza — lo abbiamo richiamato or ora — come un particolare moto uniforme dotato di velocità c.

Secondo i criteri della cinematica ordinaria, l'analoga velocità rispetto ad un osservatore O' solidale con C vale $c-u$.

Ora (per quanto, nell'ambito delle velocità realizzabili con corpi materiali, sia piccolo il rapporto u/c e ancora più il suo quadrato u^2/c^2, che solo è accessibile a effettivo controllo sperimentale) si può ritenere sicuramente acquisito, in seguito ad una classica esperienza di MICHELSON, ripetuta in seguito da altri fisici e recentemente, su nuove basi, dal prof. MAJORANA, che la velocità di propagazione è ancora c anche rispetto ad O'.

Per spiegare questa constatazione sperimentale, basta evidentemente che ciò che macroscopicamente apparisce come traslazione di un corpo C con velocità u, sia, in un più affinato stadio di misura, una trasformazione (Λ): risultando effettivamente dallo studio di queste trasformazioni che ogni ordinaria traslazione uniforme è pressochè confondibile con una (Λ) (a meno di un decimilionesimo, purchè sia $u/c \leqslant 10^{-4}$).

Rimangono pertanto rispettate la legge classica dell'ottica geometrica (che la propagazione sia rettilinea, uniforme, con velocità c), nonchè le famose esperienze cui poc'anzi alludevo, ove si ammetta che sia, anche per la propagazione della luce (come pel moto di un punto materiale in assenza di forze)

$$\delta\int ds_0 = 0 \quad \text{(moto uniforme)},$$

colla specificazione

$$ds_0^2 = 0 \qquad \text{(il che è quanto dire moto dotato di velocità } c\text{)};$$

e si risguardi d'altra parte il fenomeno della traslazione dei solidi come tenuissimamente diverso dall'ordinaria descrizione cinematica, sì da corrispondere ad una trasformazione (Λ). Ciò già ebbe sostanzialmente a spiegare il prof. CASTELNUOVO in una sua conferenza di alcuni anni or sono; ne riparlerà prossimamente il MARCOLONGO. A me basta l'aver rilevato che l'ottica geometrica, pur nella sua forma più schematica, porta — e non semplicemente per una ideologia matematica di maggiore generalità e agilità, ma per virtù d'esperienza — ad attribuire una importanza fondamentale alla forma quadridimensionale

$$ds_0^2 = c^2\, dt^2 - dl_0^2 . \tag{D$_0$}$$

8. - Riavvicinamento delle due conclusioni meccanica ed ottica. Ovvia induzione circa il valore numerico di c e circa l'ottica geometrica in un campo di forza.

Per quegli speciali movimenti che corrispondono a propagazione della luce nell'etere, in assenza di circostanze perturbatrici, funge da base la forma

$$c^2\, dt^2 - dl_0^2 ,$$

in cui la costante c ha un valore numerico ben determinato.

Per i moti usuali (velocità al più planetaria) e sotto l'azione di forze conservative — diciamo in presenza di masse assegnate — funge da base una forma

$$ds^2 = (c^2 - 2U)\, dt^2 - dl_0^2 , \tag{D}$$

in cui, da un lato la costante c è soltanto sottoposta alla restrizione qualitativa di essere abbastanza grande, e d'altro lato l'influenza delle masse modifica alquanto il coefficiente di dt^2. Se si aspira alla unità di concezione dei fenomeni fisici, si è ovviamente tratti ad ammettere che, *caeteris paribus*, una stessa forma differenziale ds^2 domini così il moto dei punti materiali come l'andamento dei raggi luminosi fungendo da base in entrambi i casi. Si dovrà perciò attribuire alla costante c, nel caso dinamico generale, lo stesso valore specifico che le compete nel fenomeno ottico particolare. Allora intanto, in assenza di circostanze perturbatrici, in particolare di masse a distanza sensibile, con che $U = 0$, il ds^2 meccanico si identifica effettivamente col ds^2 dell'ottica limite.

Di più, dacchè nel caso di $U = 0$ (cioè in assenza di masse a distanza sensibile) si è compendiata l'ottica geometrica, mercè l'intervento del ds_0^2, in due leggi che si presentano come limite di leggi dinamiche, si è condotti ad esperire l'estensione dello stesso criterio anche al caso in cui esistono masse ($U \neq 0$). La propagazione della luce sarà quindi retta in ogni eventualità dai postulati seguenti:

1) (Come per i moti materiali). Principio geodetico:

$$\delta \int ds = 0 .$$

2) $ds^2 = 0$, il che è quanto dire che si tratta di moti per cui il quadrato della velocità dl^2/dt^2 vale

$$c^2 - 2U = c^2\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) .$$

La velocità V risulta quindi leggermente diversa da c, ossia (a meno di termini assolutamente trascurabili) espressa da

$$V = c\left(1 - \frac{U}{c^2}\right) .$$

I due postulati si possono compendiare in un espressivo enunciato geometrico:

Nella nostra metrica convenzionale (D) *i raggi luminosi sono geodetiche di lunghezza nulla.*

9. - Incurvamento di raggi luminosi per l'azione di masse materiali.

La presenza della funzione U nel ds^2 fa ovviamente presumere che l'andamento dei raggi luminosi non sarà più rigorosamente rettilineo, come per $U = 0$.

Esplicitando le equazioni differenziali equivalenti al principio variazionale ed eliminando dt, mediante l'equazione $ds^2 = 0$, rimangono definiti i raggi, e, per integrazione, le curve secondo cui si atteggiano. Queste si trovano così caratterizzate in un modo quantitativamente preciso che ci è stato suggerito dalla rappresentazione matematica dei fenomeni.

Una conferma molto espressiva del passaggio dall'andamento rettilineo a quello curvilineo, per effetto di un campo di forza, ci è somministrata da considerazioni fisiche di tutt'altra natura. Ed ecco come.

Nei corpi radioattivi si trova immagazzinata una quantità enorme di energia: basta pensare per esempio che una anche esigua massa di radio è capace di irradiare per anni ed anni, senza sensibile modificazione, tanto calore da portare in ogni ora da 0° al punto di ebollizione una uguale massa d'acqua. Soltanto in un tempo lunghissimo (oltre 2500 anni pel radio, e, per altri elementi radioattivi, comparabile con la durata delle epoche geologiche) la provvista di calore tenderebbe ad esaurirsi. Per quanto la radioattività non sia una proprietà generale dei corpi, essa rende manifesto che (almeno in alcuni casi) la materia racchiude una enorme provvista di energia, e, sotto questa forma, la constatazione è generalizzabile per induzione ad ogni atomo di materia ponderabile. Può anzi farsi un apprezzamento quantitativo che conduce ad assumere come misura di questa energia mc^2, essendo m la massa della materia di cui si tratta. Questa energia intrinseca della materia risulta quindi di un ordine di grandezza ben altrimenti considerevole delle altre due forme di energia che si fanno intervenire in meccanica elementare, la cinetica $mv^2/2$ e la potenziale (o posizionale) dipendente dal posto che la massa m occupa in un assegnato campo di forza. Per quanto di gran lunga preponderante su queste due forme, la energia intrinseca può esser ignorata dall'ordinaria meccanica appunto per questo suo carattere intrinseco, cioè per il fatto che rimane, almeno sensibilmente, invariata di fronte ai fenomeni del moto.

Ammessa una volta la proporzionalità fra massa materiale ed energia, queste due entità fisiche divengono concomitanti: dove c'è materia nell'ordinario senso della parola, c'è anche energia, anzi (rispetto ai consueti apprezzamenti in kilogrammetri) molta energia, in causa del fattore c^2; e reciprocamente, dove c'è energia, è implicita la materia; materia sia pure così rarefatta da non essere avvertita con mezzi relativamente grossolani (come pesate o altre esperienze statiche), ma pur sempre dotata delle caratteristiche meccaniche fondamentali della materia quali la gravitazione (ossia l'attitudine a risentire l'attrazione newtoniana di altre masse) e l'inerzia.

Ciò posto, si rifletta che qualunque teoria *fisica* della luce (in cui l'analisi sia spinta al di là della semplice schematizzazione cinematica), sia che si tratti di teoria elastica o di teoria elettromagnetica, porta a risguardare i raggi luminosi come linee di flusso o, se si vuole, traiettorie dell'energia, propagantesi lungo essi con velocità c.

Data la precedente relazione di proporzionalità, ciò è quanto dire che lungo i raggi luminosi si ha anche flusso di materia. Certo, in proporzioni talmente ridotte da non giustificare l'antica spiegazione corpuscolare e da lasciar sussistere in tutte le sue conseguenze la teoria ondulatoria; comunque, flusso di materia. Ma questa risente l'attrazione newtoniana di masse poste nel campo, donde intanto l'effetto qualitativo dell'incurvamento dei raggi. Del resto, colle sole premesse testè dichiarate, si può passare addirittura al quantitativo e formare le equazioni differenziali dei raggi. Basta rilevare che, per un elemento generico della nostra tenuissima materia viaggiante lungo il raggio con velocità c (o assai prossima a c), valgono (trascurando in una prima approssimazione l'eventuale correzione da apportare a c) le relazioni

$$\frac{c^2}{\varrho} = \frac{dU}{dn}\,, \qquad \frac{dU}{db} = 0\,,$$

dove n e b designano le (a priori incongite) direzioni della normale principale e binormale al raggio in un suo punto generico, e ϱ il raggio di curvatura in quel punto. Queste coincidono (in prima approssimazione) colle equazioni differenziali che si dedurrebbero dal principio variazionale combinato con $ds^2 = 0$.

10. - Correzione einsteiniana delle equazioni della fisica matematica. Relatività della prima maniera.

Le leggi dei fenomeni naturali, diciamo, per fissar le idee, di una data classe di fenomeni naturali (ad es. meccanica dei sistemi continui, elettromagnetismo, termodinamica), quali si trovano tradotte in equazione secondo le teorie classiche della fisica matematica, presentano tutte, come già si disse [n. 1, oss. II], carattere invariantivo rispetto a cambiamenti quali si vogliono di coordinate di spazio, semprechè si assuma il dl_0^2 spaziale come forma fondamentale, cioè come base di trasformazione.

In queste equazioni compare (a meno che non si tratti di fenomeni statici) anche il tempo t; ma la variabile t sta a sè, nè potrebbe essere mescolata alle altre in una eventuale trasformazione senza che venga meno il carattere invariantivo delle equazioni.

Sia, per esempio,

$$(\Omega) \qquad \Omega_1 = 0\,, \quad \Omega_2 = 0\,, \quad \ldots\,, \quad \Omega_m = 0$$

il sistema che, secondo lo schema abituale, traduce in equazioni una determinata teoria fisica. Vi compariranno certi parametri p_1, p_2, ..., p_n

specifici della teoria, inoltre (almeno in generale) coordinate di spazio e tempo. Pensando il sistema riferito a coordinate generali x_1, x_2, x_3, vi compariranno ulteriormente i coefficienti a_{ik} del quadrato dell'elemento lineare espresso per mezzo delle x:

$$(\varphi) \qquad dl_0^2 = \sum_i^{3}{}_{1} dy_i^2 = \sum_{ik}^{3}{}_{1} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \,.$$

Il sistema (Ω) esprime relazioni fisico-geometriche ed è quindi dotato di carattere invariante rispetto alle trasformazioni di coordinate.

Permettetemi a questo proposito una breve digressione, che vi potrà in sulle prime apparire piuttosto oziosa, ma che è invece essenziale come avviamento analitico alla relatività generale.

Nelle (Ω) intervengono soltanto le a_{ik} e le loro derivate *prime*: ciò almeno vale per gli esempi più cospicui, ai quali possiamo limitare il nostro discorso. La struttura delle (Ω) non è perciò subordinata all'ipotesi che il dl_0^2 sia euclideo. Le (Ω) stesse sono interpretabili, senza richiedere alcuna modificazione formale, come l'estensione più spontanea, anzi (sotto certe restrizioni) l'unica possibile, delle ordinarie leggi fisiche ad uno spazio di natura metrica qualsiasi, avente cioè per quadrato dell'elemento lineare una forma differenziale quadratica definita

$$dl^2 = \sum_{ik}^{3}{}_{1} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \,,$$

data a priori, e quindi in generale *non* euclidea, cioè *non* riducibile con opportuna scelta di variabili al tipo elementare $\sum_i^{3}{}_{1} dy_i^2$.

Questa estensione poteva parere fino a ieri pura metafisica o almeno mediocre esercitazione matematica, perchè nulla consigliava di rinunciare all'ipotesi fondamentale, suggerita da intuizioni primordiali e maturata attraverso constatazioni sempre più affinate, che lo spazio in cui viviamo sia rigorosamente euclideo. Oggi non è più così. Vedremo anzi tra un momento quali opportunità di sintesi concettuale inducano a ricostruire la filosofia naturale su base più ampia, riservando, ben si intende il definitivo giudizio sulla ricostruzione a quando si potrà ritenere esauriente il numero e l'entità delle conferme che le porgono i fatti.

Torno ora alle (Ω), per richiamare la vostra attenzione sopra possibili loro modificazioni, al solito, abbastanza radicali nel concetto, ma tali da non alterarne sensibilmente il contenuto quantitativo nell'ambito finora sperimentato.

Lo scopo è di sostituire alle (Ω) altrettante equazioni

$$(\mathrm{R}) \qquad R_1 = 0 \,, \quad R_2 = 0 \,, \ldots \,, \quad R_m = 0 \,,$$

identiche alle stesse (Ω) in condizioni statiche (debitamente specificate) e dotate più generalmente di carattere invariante rispetto a tutte le trasformazioni quaternarie di variabili indipendenti (non i soli cambiamenti di coordinate). Per raggiungere questo scopo, basta in ultima analisi assumere come base di trasformazione, in luogo del dl^2 spaziale ([2]), una (qualsiasi) forma quaternaria ds^2, la quale si riduca a $-dl^2$ per $dt = 0$.

Il modo per costruire effettivamente il sistema (R), cominciando dall'attribuire la forma più adatta all'(Ω) da cui si parte, è in ogni caso fornito con tutta facilità dai metodi del calcolo differenziale assoluto del Ricci (associati, ben si intende, a specifiche premesse di carattere fisico). Ma lasciamo la parte esecutiva, restringendoci ai passaggi concettuali. Supponendo che le originarie (Ω) si riferiscano allo spazio euclideo della fisica classica, come nuova base si può per esempio assumere la forma

$$ds_0^2 = c^2 dt^2 - dl_0^2 ,$$

che, come abbiamo visto, domina l'ottica geometrica limite, cioè in assenza di circostanze perturbatrici.

Se così si fa, si rispecchia la così detta *relatività della prima maniera*, nella quale — importa notarlo — anche la dinamica del punto materiale va riformata con riferimento al ds_0^2, e non nel modo autonomo che già vi indicai, così spontaneamente suggerito dal principio di Hamilton.

Non posso passare sotto silenzio, per la sua importanza intrinseca e storica, il fatto notevolissimo che esiste un sistema (Ω), quello che regge i fenomeni elettro-magnetici nei mezzi impolarizzabili in quiete, per cui le equazioni (R), formate sulla base del ds_0^2 ottico, proprio si identificano con le originarie (Ω). Fu anzi questa specifica coincidenza che diede il primo impulso alla teoria della relatività, nel senso ristretto suaccennato, e che conferì impronta prevalentemente elettromagnetica alle prime esposizioni sistematiche della teoria.

Ma torniamo alla base di trasformazione.

Già in questa nostra rapida rassegna delle innovazioni suggerite dal desiderio di affrancarsi da un tempo assoluto nella dinamica del punto materiale, siamo stati condotti a sostituire al ds_0^2 dell'ottica-limite un ds^2 alquanto più generale

$$c^2\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) dt^2 - dl_0^2 ,$$

([2]) Dico genericamente dl^2 e non dl_0^2; perchè la precedente osservazione del testo autorizza a riferire le (Ω) ad uno spazio di natura metrica qualsiasi.

che varia da caso a caso in dipendenza dal campo di forza. Si potrebbe in ogni teoria fisica assumere come base un tale ds^2, in cui è tenuto conto di U, ossia in sostanza delle masse in presenza delle quali avvengono i fenomeni considerati.

E così sarebbe a priori prevedibile e risulterebbe quantitativamente precisata dalle equazioni (R) una influenza (che si sovrappone a quella eventualmente già contemplata dalle teorie ordinarie), certo assai piccola ma non rigorosamente nulla, del campo di forza entro cui si svolge la classe di fenomeni presi in esame.

Ma per una sintesi comprensiva di tutti i fenomeni, c'è ancora un ultimo passo da fare.

11. - Influenza di tutti i fenomeni fisici sulle misure dello spazio e del tempo. Relatività generale.

Conviene generalizzare il criterio che ci ha condotto ad assumere come base dinamica e ottica il ds^2 quadridimensionale della formula (D), sulla natura del quale influisce essenzialmente la materia circostante (pel tramite del potenziale U). In linea speculativa, il fatto che la materia influisce fa pensare che non soltanto la materia, ma anche ogni altra circostanza fisica (moto, stato elettrico, sforzi locali, ecc.) possa esercitare una analoga influenza, modificando in misura tenuissima (sempre dell'ordine di U/c^2 al più, nelle ordinarie condizioni) *tutta* la struttura del ds^2 (non soltanto il coefficiente di dt^2). Ciò porta in particolare alla conseguenza (visto che, per $dt = 0$, il ds^2 diviene puramente spaziale) che anche lo spazio geometrico ambiente non rimarrà in generale rigorosamente euclideo, come fu sempre postulato finora in ogni concreta teoria di fenomeni fisici, ma se ne scosterà in modo vario secondo le influenze esterne. Notiamo per incidenza che (non in tre, ma in due dimensioni), si ha un esempio tangibile di variabilità dell'elemento lineare secondo le circostanze, considerando una membrana elastica.

Il legame fra la natura del ds^2, che congloba le misure dello spazio e del tempo, e il complesso dei fenomeni fisici costituisce il postulato qualitativo della relatività generale. La traduzione quantitativa è fornita dalle così dette equazioni gravitazionali di EINSTEIN, che sono naturalmente in numero di 10, quanti i coefficienti, *a priori* incogniti, del ds^2 riferito a coordinate generali [cfr. la (E) del n. 4].

Con questa veduta rimane stabilita un'intima interdipendenza fra tutti i fenomeni geometrici, cinematici e fisici. La geometria e la cinematica cessano di occupare un posto privilegiato fra le varie teorie fisiche, nel senso che lo spazio ed il tempo non sono più un semplice supporto immanente e intangibile dei fenomeni, ma ne subiscono l'influsso pel tramite del ds^2, alla cui natura è d'altra parte subordinato lo svolgimento dei fenomeni stessi.

Come la meccanica di NEWTON, introducendo la gravitazione universale, ha realizzato una interdipendenza generale fra il moto di tutti i corpi ponderabili, così, più generalmente, la nuova meccanica, mediante le equazioni delle singole teorie fisiche, lievemente modificate, e le equazioni gravitazionali, lega fra loro tutti i fenomeni naturali in uno schema unitario, il quale (assumendo per base lo specifico ds^2 einsteiniano che conviene al caso considerato) ha carattere invariantivo di fronte a tutte le trasformazioni dei quattro parametri indipendenti che complessivamente individuano posto e tempo.

IX.

SUR LA RÉGULARISATION DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

« Acta Mathematica », t. 42 (1918),
pp. 99-144.

Les équations différentielles du problème des trois corps, dans une quelconque de leurs formes classiques, se comportent régulièrement tant que les positions des trois corps sont distinctes, mais présentent des singularités s'il arrive que la limite inférieure des distances mutuelles soit zéro (chocs). L'analyse de ce qui se passe au voisinage d'un choc a été dans ces dernières années l'objet de maintes recherches visant d'abord (PAINLEVÉ (1), LEVI-CIVITA (2), BISCONCINI (3), SUNDMAN (4)) à caractériser les conditions qui doivent être remplies par les données initiales pour que deux des trois corps, ou tous les trois, se choquent au bout d'un temps fini.

Ces premiers succès ont conduit à penser que les singularités analytiques correspondant au phénomène d'un choc ne soient pas si redoutables qu'on aurait pu le craindre. C'est ainsi qu'en 1906, en remaniant, d'après une aimable invitation de M. MITTAG-LEFFLER, mon étude citée tout à l'heure sur le cas particulier du problème restreint, je suis parvenu à faire disparaître toute singularité par un changement tout à fait élémentaire de paramètres, et cela sans altérer la forme canonique des équations (5).

---

(1) *Leçons etc., professées à Stockholm* (Paris: Hermann, 1897), pp. 582-586.

(2) *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*, « Annali di Matematica », ser. III, t. IX, 1903, pp. 1-32.

(3) *Sur le problème des trois corps*, «ces Acta », t. 30, 1906, pp. 49-92.

(4) *Recherches sur le problème des trois corps*, « Acta Societatis Scientiarum Fennicae », t. XXXIV, n. 6 (Helsingfors, 1907).

(5) Dans ce journal, t. 30, pp. 305-327. Il convient d'avertir que, dès 1895, N. THIELE, dans ses *Recherches numériques concernant les solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps* [« Astronomische Nachrichten », B. CXXXVIII, pp. 1-10] avait indiqué une transformation régularisante du problème restreint, moins simple que la mienne, mais embrassant à la fois les deux masses finies. Il s'en est servi heureusement dans ses calculs, sans en faire toutefois ressortir, même en passant, l'intérêt spéculatif.

M. SUNDMAN ([6]) a découvert ensuite une régularisation du problème général, d'où la conclusion, mémorable au point de vue de l'analyse, que toute solution (quelles que soient les circonstances initiales) peut être représentée par des développements toujours convergents. Cependant la dite régularisation est atteinte d'une manière indirecte, par l'introduction d'un nombre assez grand d'auxiliaires et en sortant du cadre des équations de la dynamique: circonstance assez gênante, puisqu'il n'est plus permis (du moins sans discussion préalable) d'appliquer au système régularisé ni les résultats théoriques, ni les méthodes de calcul de la mécanique analytique.

Pour le problème plan il m'a été aisé de réaliser ([7]) une véritable régularisation dynamique, en généralisant (avec traitement symétrique des trois corps) la transformation (ponctuelle)

$$x + iy = (\xi + i\eta)^2 \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

employée pour le problème restreint.

Le problème dans l'espace a longtemps résisté à mes efforts, tant que j'essayais de l'aborder par des semblables changements de coordonnées. Les transformations canoniques usuelles se rattachant au mouvement elliptique ne régularisent pas non plus. Mais on peut en trouver d'analogues, une notamment bien simple, suggérée par le mouvement parabolique ([8]), rendant tout holomorphe au voisinage d'un choc binaire ([9]).

L'éminent Directeur des *Acta* a bien voulu me demander un exposé détaillé de ce dernier résultat. Voilà l'origine et le but du présent article. Pour en faciliter la lecture, j'y ai repris tout ce qu'il faut connaître des travaux antérieurs.

On trouvera, dans un premier chapitre, soit des prémisses formelles, pour la plus part classiques, un petit peu rajeunies par un usage (d'ailleurs très discret) des notations vectorielles; soit quelques lemmes, due à M. M. PAINLEVÉ et SUNDMAN, qui précisent au sens de l'analyse les circonstances essentielles des chocs, et permettent d'exclure l'eventualité d'une collision générale dès que le moment résultant des quantités de mouvement ne s'annule pas ([10]).

([6]) *Mémoire sur le problème des trois corps*, « ces Acta », t. 36, 1912, pp. 105-179.

([7]) « Rendiconti dei Lincei », vol. XXIV (2- semestre 1915), pp. 61-75, 235-248, 421-433, 485-501, 553-569.

([8]) « Ibidem », vol. XXV (premier semestre 1916), pp. 445-458.

([9]) « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris », t. 162, 1916, pp. 625-629.

([10]) Cette exclusion fut connue par WEIERSTRASS, ainsi qu'il résulte d'une lettre adressée à M. MITTAG-LEFFLER et publiée dans ce même recueil (voir *Zur Biographie von Weierstrass*, t. 35, 1911, p. 30).

Le second chapitre débute par l'intégration, moyennant la méthode de JACOBI, des équations du mouvement parabolique (d'un point soumis à l'attraction d'un centre fixe, dans le cas particulier où s'annule la constante des forces vives). On en tire une transformation canonique (apte à régulariser le voisinage d'un choc dans le problème des deux corps), et on fait l'étude de ses élégantes propriétés géométriques et cinématiques. La considération du mouvement parabolique fournit en outre l'occasion pour construire une seconde transformation canonique, qui à la vérité n'a rien à faire avec notre régularisation; mais ne doit pas être négligée, puisqu'elle introduit un *système canonique d'éléments paraboliques*, pouvant rendre de très bons services pour la détermination des perturbations d'une comète.

Après avoir préparé de la sorte tous les éléments nécessaires, j'explicite, dans le troisième (et dernier) chapitre, la régularisation canonique du problème des trois corps au voisinage d'un choc binaire, dont sont des corollaires immédiats: la continuation analytique du mouvement au délà des chocs éventuels, à laquelle se rattache l'heureuse explication mécanique de M. ARMELLINI [11]; la représentabilité, sans aucune restriction, des coordonnées cartésiennes des trois corps par des séries convergentes pour toutes les valeurs réelles d'un paramètre convenable τ; enfin la *possibilité* d'introduire, dans le système différentiel canonique qui définit le mouvement, a côté de la variable indépendante τ, des fonctions inconnues telles que le système, tout en restant canonique, se comporte régulièrement (non seulement au voisinage d'un choc préfix, mais) toujours, c'est-à-dire pour tout état de mouvement qui puisse être effectivement rejoint à partir d'un état initial quelconque. Il resterait à indiquer un choix approprié de ces paramètres: question inessentielle, je voudrais presque dire de vernissage formel, mais que je me permets quand même de signaler au lecteur. Pour ceux qui aiment les calculs élégants et les analogies mécaniques, la matière ne paraît pas sans attraits; du moins à en juger d'après le cas particulier du problème plan, où la dite spécification donne lieu [citation [7]] à des rapprochements inattendus avec d'autres systèmes dynamiques exemptes de singularités dans le champ réel (tel notamment un solide pesant fixé par un de ses points).

En revenant à la simple régularisation locale du voisinage d'un choc qui va être développée ici, il y'a lieu d'ajouter qu'elle prêterait à reprendre, par des calculs peut-être plus commodes et plus symétriques, la détermination effective des deux relations invariantes caractéristiques

[11] *Estensione della soluzione del* SUNDMAN *dal caso di corpi ideali al caso di sferette elastiche omogenee*, « Rendiconti dei Lincei », vol. XXIV (premier semestre 1915), pp. 185-190.

d'un choc, déjà traitée par M. BISCONCINI [citation ([3])]. On pourrait s'en attendre un avantage analogue à celui que j'ai mis en évidence pour le problème restreint [citations ([2])].

En terminant, je voudrais souligner l'importance de la régularisation aussi à un point de vue plus général. Il me suffit pour cela de faire remarquer que la régularisation préalable d'un système différentiel est indispensable pour pénétrer intimement dans l'allure générale des solutions et dans la distribution des solutions périodiques. Justement dans cette voie, ouverte par POINCARÉ, semblent devoir maintenant s'engager de préférence les efforts des géomètres ([12]).

CHAPITRE I.

RELATIONS FORMELLES QUELQUES RÉSULTATS DUS À M. M. PAINLEVÉ ET SUNDMAN

1. - Préliminaires.

Soient P_ν $(\nu = 0, 1, 2)$ trois points matériels; m_ν leurs masses; G leur centre de gravité.

Introduisons les trois vecteurs ([13])

$$\boldsymbol{R}_\nu = P_\nu - G \qquad (\nu = 0, 1, 2) \tag{1}$$

et leurs différences

$$\boldsymbol{r}_0 = P_2 - P_1 = \boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1,\ \boldsymbol{r}_1 = P_0 - P_2 = \boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{R}_2,\ \boldsymbol{r}_2 = P_1 - P_0 = \boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_0$$

correspondant aux trois côtés du triangle $P_0 P_1 P_2$.

En regardant équivalents les indices ν (tels que 0 et 3, 1 et 4) qui diffèrent entre eux d'un multiple de 3, on peut évidemment condenser

([12]) Tout récemment des résultats extrêmement remarquables on été obtenus par M. BIRKHOFF dans ses beaux mémoires:

The restricted problem of the three bodies, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XXXIX, 1915, pp. 265-334;

Dynamical systems with two degrees of freedom, « Transactions of the American Mathematical Society », vol. XVIII, 1917, pp. 199-300.

([13]) Pour abréger l'écriture, je vais avoir recours aux tout premiers éléments du calcul vectoriel en suivant les notations de M. M. BURALI-FORTI et MARCOLONGO. Voir leurs « *Eléments de calcul vectoriel* » (édition française par S. Lattès, Paris: Hermann, 1910).

la définition des $\boldsymbol{r}_\nu$ dans la formule cyclique

$$\boldsymbol{r}_\nu = P_{\nu+2} - P_{\nu+1} = \boldsymbol{R}_{\nu+2} - \boldsymbol{R}_{\nu+1} \qquad (\nu = 0,\, 1,\, 2). \tag{2}$$

En additionant on a l'identité (géométriquement évidente)

$$\sum_0^2{}_\nu\, \boldsymbol{r}_\nu = 0\,. \tag{3}$$

Il convient d'ajouter qu'aussi les vecteurs $\boldsymbol{R}_\nu$ sont liés par une relation linéaire. C'est

$$\sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \boldsymbol{R}_\nu = 0\,, \tag{4}$$

exprimant que G est le centre de gravité des trois points matériels P_ν.
En faisant système des (2) et (4), on peut inversement exprimer les $\boldsymbol{R}_\nu$ à l'aide des $\boldsymbol{r}_\nu$. Partons pour cela de (4), en l'écrivant

$$m_\nu\, \boldsymbol{R}_\nu + m_{\nu+1}\, \boldsymbol{R}_{\nu+1} + m_{\nu+2}\, \boldsymbol{R}_{\nu+2} = 0\,,$$

et lui attribuant ensuite la forme équivalente:

$$M\boldsymbol{R}_\nu + m_{\nu+1}(\boldsymbol{R}_{\nu+1} - \boldsymbol{R}_\nu) + m_{\nu+2}(\boldsymbol{R}_{\nu+2} - \boldsymbol{R}_\nu) = 0\,,$$

où

$$M = m_0 + m_1 + m_2 \tag{5}$$

désigne la masse totale du système. D'après les formules (2) elles-mêmes, on en tire la résolution annoncée

$$M\boldsymbol{R}_\nu = m_{\nu+2}\, \boldsymbol{r}_{\nu+1} - m_{\nu+1}\, \boldsymbol{r}_{\nu+2} \qquad (\nu = 0,\, 1,\, 2). \tag{6}$$

Il nous sera commode de poser

$$|\boldsymbol{R}_\nu| = R_\nu\,, \qquad |\boldsymbol{r}_\nu| = r_\nu \qquad (\nu = 0,\, 1,\, 2),$$

c'est-à-dire d'indiquer par R_ν la distance $\overline{GP_\nu}$, par r_ν la distance $\overline{P_{\nu+1} P_{\nu+2}}$.

2. - Formules de Lagrange.

Soit P un point quelconque de l'espace,

$$G - P = \boldsymbol{d}$$

le vecteur allant de P au barycentre G.

On a évidemment

$$P_\nu - P = (P_\nu - G) + (G - P) = \boldsymbol{R}_\nu + \boldsymbol{d}\,.$$

Formons le moment d'inertie (polaire) du système des trois points P_ν, par rapport à P. C'est par définition

$$(7)\quad J_P = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \overline{PP}_\nu^2 = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu (P_\nu - P)\times(P_\nu - P) = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu (\boldsymbol{R}_\nu + \boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{R}_\nu + \boldsymbol{d})$$

(où $\times$ est le symbole de produit scalaire), se réduisant à

$$J = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu R_\nu^2$$

lorsqu'on fait coïncider P avec le centre de gravité G.

Développons le produit scalaire dans la dernière expression de J_P, en tenant compte de (4), (5), et en désignant par d la distance $\overline{PG}$. Il vient immédiatement

$$J_P = J + Md^2\,,$$

formule bien connue de LAGRANGE, valable en général pour un nombre quelconque de points matériels. En faisant coïncider P avec P_ν, elle donne en particulier

$$m_{\nu+1} r_{\nu+2}^2 + m_{\nu+2} r_{\nu+1}^2 = J + MR_\nu^2\,.$$

Multiplions par m_ν/M et additionnons par rapport à ν (c'est-à-dire à trois valeurs consécutives de ν) en écrivant

$$(8)\qquad m_\nu^* = \frac{m_{\nu+1} m_{\nu+2}}{M} \qquad (\nu = 0,\,1,\,2)\,.$$

On obtient la relation remarquable

$$J = \sum_0^2{}_\nu m_\nu R_\nu^2 = \sum_0^2{}_\nu m_\nu^* r_\nu^2 , \tag{9}$$

due également à LAGRANGE.

3. - Expression de la force vive signalée par R. Ball [14].

Considérons un mouvement quelconque des trois points P_ν, rapporté au centre de gravité G, c'est-à-dire à trois axes rectangulaires de direction invariable ayant l'origine en G. Les vecteurs $\boldsymbol{R}_\nu$ sont fonctions du temps t, et la vitesse de P_ν par rapport à G n'est autre que

$$\boldsymbol{V}_\nu = \dot{\boldsymbol{R}}_\nu , \tag{10}$$

en désignant avec un point superposé la dérivation par rapport à t.

La force vive du système (le repère étant toujours en G) est par définition

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \sum_0^2{}_\nu m_\nu V_\nu^2 ,$$

V_ν representant la longueur du vecteur $\boldsymbol{V}_\nu$ (vitesse en valeur absolue).

Introduisons d'autre part les mouvements relatifs de nos points, et précisément (pour $\nu = 0, 1, 2$) de $P_{\nu+2}$ par rapport à $P_{\nu+1}$.

La vitesse relative correspondante, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{V}_{\nu+2} - \boldsymbol{V}_{\nu+1} \tag{11}$$

ne diffère pas de $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ d'après (2): sa longueur sera désignée par v_ν.

Ceci posé, on remarque:

1) que les vecteurs $\boldsymbol{V}_\nu = \dot{\boldsymbol{R}}_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu = \dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ sont liés par les mêmes relations linéaires — (2) et (4) notamment — existant entre les vecteurs $\boldsymbol{R}_\nu$, $\boldsymbol{r}_\nu$;

2) que, si dans la formule (7) du n. préc. définissant J_P, on remplace $\boldsymbol{R}_\nu$ et $\boldsymbol{d}$ par leurs dérivées $\dot{\boldsymbol{R}}_\nu = \boldsymbol{V}_\nu$ et $\dot{\boldsymbol{d}}$, en désignant le premier

---

[14] Voyez par ex. E. J. ROUTH, *Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies (elementary part)* [sixième édition, London: Macmillan, 1897], § 424.

membre par $2\mathfrak{T}_P$, on obtient

$$2\mathfrak{T}_P = \sum_0^2{}_\nu m_\nu(\boldsymbol{V}_\nu + \dot{\boldsymbol{d}})\times(\boldsymbol{V}_\nu + \dot{\boldsymbol{d}}) ,$$

d'où en particulier, pour P coïncidant avec G (ce qui entraîne $\boldsymbol{d} = 0$),

$$2\mathfrak{T}_G = \sum_0^2{}_\nu m_\nu V_\nu^2 = 2\mathfrak{T} .$$

Il s'en suit que, moyennant les mêmes passages formels conduisant de (7) à (9), on a

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu m_\nu V_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu m_\nu^* v_\nu^2 . \tag{12}$$

4. - Autre expression de la force vive (remontant à Jacobi).

Il nous sera parfois avantageux dans la suite d'avoir recours à une forme mixte de $\mathfrak{T}$, où interviennent une seule des vitesses relatives, soit la vitesse v_ν du corps $P_{\nu+2}$ par rapport à $P_{\nu+1}$, et la vitesse absolue V_ν du troisième corps P_ν.

Pour y parvenir, il suffit de remplacer, dans la définition directe de $\mathfrak{T}$ (valable quel que soit ν),

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\{m_\nu V_\nu^2 + m_{\nu+1} V_{\nu+1}^2 + m_{\nu+2} V_{\nu+2}^2\} ,$$

$\boldsymbol{V}_{\nu+1}$ et $\boldsymbol{V}_{\nu+2}$ en fonction de $\boldsymbol{v}_\nu$ et $\boldsymbol{V}_\nu$. C'est bien aisé, puisque ces quatre vecteurs sont liés par deux relations. L'une d'elles n'est que (11), c'est-à-dire

$$\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{V}_{\nu+2} - \boldsymbol{V}_{\nu+1} ;$$

l'autre, se déduisant de (4) par dérivation, exprime la circonstance évidente que la vitesse du barycentre (par rapport à des axes ayant l'origine dans le barycentre lui-même) s'annule; et s'écrit

$$m_\nu \boldsymbol{V}_\nu + m_{\nu+1}\boldsymbol{V}_{\nu+1} + m_{\nu+2}\boldsymbol{V}_{\nu+2} = 0 .$$

Il s'en suit

$$(13) \qquad \begin{cases} (m_{\nu+1}+m_{\nu+2})\boldsymbol{V}_{\nu+1} = -\,m_{\nu+2}\boldsymbol{v}_\nu - m_\nu \boldsymbol{V}_\nu\,, \\ (m_{\nu+1}+m_{\nu+2})\boldsymbol{V}_{\nu+2} = \quad m_{\nu+1}\boldsymbol{v}_\nu - m_\nu \boldsymbol{V}_\nu\,, \end{cases}$$

d'où, par substitution matérielle dans $V^2_{\nu+1}=\boldsymbol{V}_{\nu+1}\times\boldsymbol{V}_{\nu+1}$ et $V^2_{\nu+2}=$ $=\boldsymbol{V}_{\nu+2}\times\boldsymbol{V}_{\nu+2}$,

$$m_{\nu+1}V^2_{\nu+1}+m_{\nu+2}V^2_{\nu+2}=\frac{1}{m_{\nu+1}+m_{\nu+2}}\,(m_{\nu+1}m_{\nu+2}v^2_\nu+m^2_\nu V^2_\nu)\,,$$

et par conséquent (en introduisant ceci dans l'expression de $\mathfrak{T}$ et en associant les deux termes semblables en V^2_ν)

$$(14) \qquad \mathfrak{T}=\frac{1}{2(m_{\nu+1}+m_{\nu+2})}\,(m_{\nu+1}m_{\nu+2}v^2_\nu+Mm_\nu V^2_\nu)\,.$$

C'est substantiellement la forme attribuée à la force vive par JACOBI (dans sa réduction du problème des trois corps) et devenue ensuite classique ([15]). Il y a seulement une différence inessentielle consistant dans ceci: au lieu que la dérivée $\boldsymbol{V}_\nu$ de $\boldsymbol{R}_\nu=P_\nu-G$ (G barycentre des trois points), on fait apparaître ordinairement la dérivée du vecteur proportionnel $(M/(m_{\nu+1}+m_{\nu+2}))\boldsymbol{R}_\nu$ admettant également une interprétation géométrique très simple. En effet, si l'on indique par G_ν le centre de gravité du couple $P_{\nu+1}$, $P_{\nu+2}$, on a évidemment

$$\frac{M}{m_{\nu+1}+m_{\nu+2}}\,\boldsymbol{R}_\nu=P_\nu-G_\nu\,.$$

5. - Moment résultant des quantités de mouvement.

Comme la résultante des quantités de mouvement (rapportées au barycentre)

$$\sum_{0}^{2}{}_\nu\, m_\nu \boldsymbol{V}_\nu=\sum_{0}^{2}{}_\nu\, m_\nu \dot{\boldsymbol{R}}_\nu$$

([15]) Voir par exemple CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, B. I. [Leipzig: Veit, 1902], pp. 237-241; ou bien POINCARÉ, *Leçons de mécanique céleste*, T. I. [Paris: Gauthier-Villars, 1905], pp. 34-41.

est nulle d'après (4), le moment résultant $\boldsymbol{K}$ est indépendant du centre de réduction. En le prenant en G, on a par définition

$$\boldsymbol{K} = \sum_0^2{}_\nu \boldsymbol{R}_\nu \wedge m_\nu \boldsymbol{V}_\nu \tag{15}$$

($\wedge$ symbole de produit vectoriel).

Remplaçons $\boldsymbol{R}_\nu$ par sa valeur (6), et développons le produit vectoriel en affectant le facteur $\boldsymbol{V}_\nu$ de tous les coefficients numériques. Le second membre, eu égard à (8), devient

$$\sum_0^2{}_\nu \boldsymbol{r}_{\nu+1} \wedge m^*_{\nu+1} \boldsymbol{V}_\nu - \sum_0^2{}_\nu \boldsymbol{r}_{\nu+2} \wedge m^*_{\nu+2} \boldsymbol{V}_\nu ,$$

ou bien, pourvu qu'on change, dans la première somme, ν en $\nu+2$, dans la seconde, ν en $\nu+1$,

$$\sum_0^2{}_\nu \boldsymbol{r}_\nu \wedge m^*_\nu (\boldsymbol{V}_{\nu+2} - \boldsymbol{V}_{\nu+1}) .$$

Il en résulte, d'après (11),

$$\boldsymbol{K} = \sum_0^2{}_\nu \boldsymbol{r}_\nu \wedge m^*_\nu \boldsymbol{v}_\nu , \tag{16}$$

qui exprime le moment $\boldsymbol{K}$ sous forme relative symétrique, tout à fait analogue à la forme usuelle (15).

Nous allons en tirer une limitation remarquable pour le produit $J\mathfrak{T}$.

Observons d'abord:

1) que la longueur du produit vectoriel $\boldsymbol{r}_\nu \wedge m^*_\nu \boldsymbol{v}_\nu$ ne dépasse pas le produit (arithmétique) $m^*_\nu r_\nu v_\nu$ des longueurs des facteurs;

2) que la longueur K du vecteur $\boldsymbol{K}$ ne dépasse pas la somme des longueurs de ses termes, d'où

$$\sum_0^2{}_\nu m^*_\nu r_\nu v_\nu \geqslant K .$$

D'ailleurs l'identité bien connue, consistant à égaler le carré de la matrice

$$\begin{vmatrix} \sqrt{m^*_0} r_0 & \sqrt{m^*_1} r_1 & \sqrt{m^*_2} r_2 \\ \sqrt{m^*_0} v_0 & \sqrt{m^*_1} v_1 & \sqrt{m^*_2} v_2 \end{vmatrix}$$

au déterminant

$$\begin{vmatrix} J & \sum_0^2{}_\nu m_\nu^* r_\nu v_\nu \\ \sum_0^2{}_\nu m_\nu^* r_\nu v_\nu & 2\mathfrak{T} \end{vmatrix}$$

qui s'obtient [en tenant compte de (9) et (12)] par la multiplication des horizontales, nous assure que ce déterminant est $\geqslant 0$. On en tire

$$2J\mathfrak{T} \geqslant (\sum_0^2{}_\nu m_\nu^* r_\nu v_\nu)^2 ,$$

d'où l'inégalité

(17) $$2J\mathfrak{T} \geqslant K^2 ,$$

qui va nous servir essentiellement au n. 11.

6. - Fonction des forces dans le problème des trois corps. Équations vectorielles du mouvement. Intégrales classiques.

Supposons que nos trois points matériels — on dira *corps* suivant l'usage — s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton. Soit f la constante de gravitation universelle. Avec les notations précédentes la fonction des forces s'écrit

(18) $$\mathfrak{U} = f\left(\frac{m_1 m_2}{r_0} + \frac{m_2 m_0}{r_1} + \frac{m_0 m_1}{r_2}\right) ,$$

ou, si l'on veut,

(18′) $$\mathfrak{U} = f\left(\frac{m_{\nu+1}\, m_{\nu+2}}{r_\nu} + \frac{m_{\nu+2}\, m_\nu}{r_{\nu+1}} + \frac{m_\nu\, m_{\nu+1}}{r_{\nu+2}}\right) ,$$

valable quelle que soit la valeur de l'indice ν; ou encore, d'après (8),

(18″) $$\mathfrak{U} = fM \sum_0^2{}_\nu \frac{m_\nu^*}{r_\nu} .$$

On représente par

$$\mathrm{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U}$$

le vecteur qui a pour composantes les dérivées partielles de $\mathfrak{U}$ par rapport aux coordonnées de P_ν; ou si l'on veut (sous forme indépendante du système de référence) le vecteur tel que, pour tout déplacement infiniment petit dP_ν, on ait $\mathrm{grad}_{P_\nu}\mathfrak{U}\times dP_\nu =$ différentielle partielle de $\mathfrak{U}$ (se rapportant à la variation du point P_ν).

Quelle que soit la définition préférée, $\mathrm{grad}_{P_\nu}\mathfrak{U}$ représente la force sollicitant P_ν, et l'on a

$$\sum_0^2{}_\nu\, \mathrm{grad}_{P_\nu}\mathfrak{U}\times dP_\nu = d\mathfrak{U}\,,$$

$d\mathfrak{U}$ étant la différentielle totale.

L'expression explicite de $\mathrm{grad}_{P_\nu}\mathfrak{U}$ se déduit immédiatement des (18′) et (2). Elle est

$$\mathrm{grad}_{P_\nu}\mathfrak{U} = fm_\nu\left(\frac{m_{\nu+1}}{r^3_{\nu+2}}\,\boldsymbol{r}_{\nu+2} - \frac{m_{\nu+2}}{r^3_{\nu+1}}\,\boldsymbol{r}_{\nu+1}\right). \tag{19}$$

Comme le système des trois corps n'est soumis à aucune force extérieure, le mouvement (absolu, au sens mécanique du mot) du barycentre G est rectiligne et uniforme, et les choses se passent au point de vue dynamique comme si G était fixe.

On a en conformité les équations vectorielles du mouvement

$$m_\nu\dot{\boldsymbol{V}}_\nu = m_\nu\ddot{\boldsymbol{R}}_\nu = \mathrm{grad}_{P_\nu}\mathfrak{U} \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2). \tag{20}$$

Les intégrales des quantités de mouvement reviennent au principe (déjà utilisé) de la conservation du mouvement du centre de gravité. Quant aux autres intégrales classiques, celles des aires se résument dans la constance du vecteur $\boldsymbol{K}$ défini par (15) [ou (16)], et l'intégrale des forces vives s'écrit

$$\mathfrak{T} - \mathfrak{U} = E\,, \tag{21}$$

$\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}$ ayant été explicitées sous plusieurs formes différentes, et E, constante pendant le mouvement, s'interprétant comme énergie totale du système.

7. - Viriel.

Si l'on dérive par rapport à t la première expression (9) de J, en remplaçant $\dot{\boldsymbol{R}}_\nu$ par $\boldsymbol{V}_\nu$, on a

$$\frac{1}{2}\dot{J} = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \boldsymbol{V}_\nu \times \boldsymbol{R}_\nu\,,$$

d'où, en dérivant une seconde fois,

$$\frac{1}{2}\ddot{J} = \sum_0^2{}_\nu m_\nu \boldsymbol{V}_\nu \times \boldsymbol{V}_\nu + \sum_0^2{}_\nu m_\nu \dot{\boldsymbol{V}}_\nu \times \boldsymbol{R}_\nu.$$

Le premier terme du second membre, à cause de (12) n'est que $2\mathfrak{T}$. Le second, en ayant égard à (20), s'écrit

$$\sum_0^2{}_\nu \operatorname{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U} \times \boldsymbol{R}_\nu :$$

c'est ce qu'on appelle le *viriel* de notre système matériel.

Dès qu'on pense $\mathfrak{U}$ comme fonction homogène de degré -1 des coordonnées des points P_ν, rapportées au centre de gravité G, on reconnait, en appliquant le théorème d'EULER, que le viriel ne diffère pas de $-\mathfrak{U}$. On a par conséquent la relation

$$\frac{1}{2}\ddot{J} = 2\mathfrak{T} - \mathfrak{U} ,$$

qui remonte, elle aussi, à LAGRANGE et joue, comme nous le verrons, un rôle fondamental dans les considérations des nn. 10 et 11.

8. - Premier corollaire du théorème général d'existence.

Supposons que la constante E ait une valeur fixée d'avance (et d'ailleurs quelconque). Si à un instant donné t les positions des trois corps sont distinctes de sorte que la fonction des forces $\mathfrak{U}$ a une valeur finie, le mouvement se poursuit régulièrement pour une durée T non nulle [16]. Si l'on sait auparavant que $\mathfrak{U}$ ne dépasse pas une certaine limite $\overline{\mathfrak{U}}$, on peut affirmer que

$$T > \overline{T} ,$$

en désignant par $\overline{T}$ une quantité positive, dépendant exclusivement de $\overline{\mathfrak{U}}$ (des masses et de E). Pour la démonstration il convient de s'appuyer

[16] Je me borne, pour fixer les idées, aux valeurs croissantes de la variable indépendante t (futur). Il n'y aurait rien à changer dans les raisonnements et dans la conclusion, si l'on envisageait des valeurs décroissantes (passé); ou bien, croissantes et décroissantes à la fois.

sur les équations de mouvement (20), en les envisageant comme un système

$$(20') \qquad \dot{\boldsymbol{R}}_\nu = \boldsymbol{V}_\nu\,, \qquad m_\nu \dot{\boldsymbol{V}}_\nu = \operatorname{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U}$$

du premier ordre par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{R}_\nu$, $\boldsymbol{V}_\nu$, c'est-à-dire par rapport à leurs 18 composantes.

Dès que $\mathfrak{U}$ ne dépasse $\overline{\mathfrak{U}}$, on peut assigner une limite supérieure aux seconds membres. C'est ce qui résulte, pour le premier groupe, de l'intégrale des forces vives, qui donne pour $\mathfrak{T}$ la limite supérieure $\overline{\mathfrak{U}}+E$, d'où l'on tire, à cause de l'expression (12) de $\mathfrak{T}$, qu'aucune des composantes de $\boldsymbol{V}_\nu$ ne peut dépasser $|\sqrt{(\overline{\mathfrak{U}}+E)/m_\nu}|$. Quant au second groupe des (20′), la limite supérieure d'une composante quelconque de $\operatorname{grad}_{P_\nu}\mathfrak{U}$ apparaît des (19), en remarquant que, d'après la forme de $\mathfrak{U}$, $1/r_\nu$ ne peut pas dépasser $\overline{\mathfrak{U}}/(fm_{\nu+1}m_{\nu+2})$. Ces seconds membres sont d'ailleurs des fonctions régulières (des composantes des $\boldsymbol{V}_\nu$ et des $\boldsymbol{R}_\nu$), tant que les distances mutuelles ne s'annulent pas: en particulier donc tant que $\mathfrak{U} < \overline{\mathfrak{U}}$.

Dans ces conditions le théorème classique d'existence nous assure que les intégrales de (20′), à partir d'un instant t et d'une position pour laquelle $\mathfrak{U} < \overline{\mathfrak{U}}$, restent régulières pendant un intervalle de temps non nul. Le même théorème assigne en surplus à cet intervalle une durée minimum T [17], qui dépend en général des positions et des vitesses se rapportant à l'instant t. Toutefois — c'est le corollaire qui nous intéresse — *T admet nécessairement une limite inférieure non nulle $\overline{T}$, dépendant exclusivement de* $\overline{\mathfrak{U}}$ (et des autres costantes qui interviennent dans la question, comme E et les masses).

On s'en rend compte d'après un raisonnement bien connu, en essayant d'admettre le contraire, c'est-à-dire que la limite inférieure $\overline{T}$ soit nulle. Il existerait alors, dans l'ensemble des conditions initiales satisfaisant à la restriction $\mathfrak{U} \leqslant \overline{\mathfrak{U}}$, un système régulier de positions et de vitesses au voisinage desquelles la limite inférieure de T serait encore nulle. Mais à ce système lui-même, et à tout son voisinage, on peut coordonner, d'après le théorème d'existence rappelé tout à l'heure, un intervalle de régularité *non nul*: la limite inférieure $\overline{T}$ de T ne peut donc pas être nulle. C. Q. F. D.

9. - Deuxième corollaire.

Considérons le mouvement des trois corps à partir d'un instant initial t_0, pour lequel nous supposons tout régulier. Ou bien le mouvement

(17) Je veux dire une durée $\leqslant$ à l'intervalle.

se poursuit régulièrement pour toute valeur de $t > t_0$, ou bien il y a un premier instant t_1 tel que le mouvement, étant régulier à l'intérieur de l'intervalle (t_0, t_1), cesse de l'être pour $t = t_1$. Nous désignerons par t' un instant de l'intervalle (t_0, t_1), si proche que l'on veut à t_1, mais antérieur à t_1.

D'après ce qui précède, la limite *supérieure* de $\mathfrak{U}$, finie dans tout intervalle (t_0, t'), doit être infinie pour l'intervalle (t_0, t_1): autrement le mouvement serait régulier même au delà de t_1.

On peut en déduire — c'est ce que j'appelle le deuxième corollaire — qu'on a plus précisément

$$\lim_{t=t_1} \mathfrak{U} = +\infty . \tag{23}$$

En effet, si $\mathfrak{U}$ n'admettait pas la limite $+\infty$ pour $t = t_1$, il existerait des instants t', si proches que l'on veut à t_1, pour lesquels $\mathfrak{U}$ serait plus petite qu'une valeur $\overline{\mathfrak{U}}$ assignée d'avance. Alors le mouvement se poursuivrait régulièrement jusqu'à $t' + \overline{T}$ ($\overline{T}$ dépendant exclusivement de $\overline{\mathfrak{U}}$, ainsi qu'il a été dit au n. préc.), et par suite (puisqu'on peut supposer t' infiniment peu différent de t_1) même au delà de t_1, ce qui contredit à l'hypothèse. On a donc bien la propriété exprimée par (23).

10. - Existence d'une limite pour J. Les deux seules formes de singularités possibles: choc binaire et collision générale.

La formule (22), en y remplaçant $\mathfrak{T}$ par sa valeur déduite de l'intégrale des forces vives, s'écrit

$$\frac{1}{2}\frac{d\dot{J}}{dt} = \mathfrak{U} + 2E .$$

Dès que t est assez proche à t_1, le second membre devient et demeure positif à cause de (23). $\dot{J}(t)$ va donc en croissant avec t, et tend par conséquent à une limite finie ou bien à $+\infty$ pour $t = t_1$. En tout cas $\dot{J}$ garde le même signe, pour t assez proche à t_1: cela est évident si la limite de $\dot{J}$ n'est pas zéro; et si elle est zéro, il suffit d'observer que $\dot{J}$ y converge en croissant, et prend en conformité des valeurs toujours négatives à gauche de t_1.

Il s'en suit que la quantité positive J tend elle-même vers une limite positive ou nulle. On doit justement distinguer ces deux eventualités:

1) $\lim_{t=t_1} J = J_1 > 0$. On a alors un *choc binaire*; des trois distances, une et une seulement tend vers zéro. Pour le constater, on remarque d'abord que, U croissant indéfiniment, la plus petite des distances mutuelles tend nécessairement à zéro. Il reste à s'assurer que cette distance minimum est toujours la même, ce qui réussit par réduction à l'absurde. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait, si près de t_1 que l'on veut, quelque instant t' tel que, avant et après t', la plus petite distance serait représentée par deux différents côtés du triangle des trois corps: par ex., par r_1 avant et par r_2 après. Alors, pour $t=t'$, ces deux distances seraient égales, et infiniment petites avec $t_1 - t'$; il en serait de même de la troisième (qui ne peut pas dépasser leur somme), et aussi par conséquent de $J = \sum_0^2{}_\nu m_\nu^* r_\nu^2$, ce qui ne peut pas arriver dès que $\lim_{t=t_1} J > 0$.

Soi précisément r_ν la distance tendant à zéro, ce qui correspond à un choc entre $P_{\nu+1}$ et $P_{\nu+2}$. Il convient de retenir que $r_{\nu+1}$ et $r_{\nu+2}$ *tendent l'une et l'autre vers une même limite non nulle.* En effet, puisque la différence $|r_{\nu+1} - r_{\nu+2}|$ ne peut pas dépasser r_ν, on a en premier lieu

$$\lim_{t=t_1} (r_{\nu+1} - r_{\nu+2}) = 0 .$$

D'autre part, vu que r_ν tend vers zéro, on a, de la seconde expression (9) de J,

$$\lim_{t=t_1} (m_{\nu+1}^* r_{\nu+1}^2 + m_{\nu+2}^* r_{\nu+2}^2) = \lim_{t=t_1} J = J_1 > 0 ,$$

d'où l'on déduit

$$\lim_{t=t_1} r_{\nu+1}^2 = \lim_{t=t_1} r_{\nu+2}^2 = \frac{J_1}{m_{\nu+1}^* + m_{\nu+2}^*} . \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2) $\lim_{t=t_1} J = 0$. L'expression de J invoquée tout à l'heure montre que, avec J, toutes les distances mutuelles convergent vers zéro.

Il s'agit dans ce cas d'une *collision générale*, les trois corps tendant à e choquer en G (d'après la première des expressions (9) de J).

Il convient d'ajouter que, J tendant à zéro, la limite de $\dot{J}$ est nécessairement une quantité finie $\leqslant 0$. En effet $\dot{J}$ converge à sa limite en croissant. Donc, en premier lieu, cette limite ne saurait être $-\infty$; mais elle ne peut être non plus > 0, car alors il en serait de même de $\dot{J}$, pour t assez proche à t_1; et J irait en croissant, tandis qu'il tende justement vers sa valeur minimum zéro.

11. - Exclusion des collisions générales d'après M. Sundman.

On a reconnu au n. précédent que, pour t assez proche à t_1, dJ/dt garde toujours le même signe. Il est partant loisible d'introduire J à la place de t comme variable indépendante.

Puisque on a

$$\frac{d}{dt}\dot{J} = \dot{J}\frac{d\dot{J}}{dJ} = \frac{1}{2}\frac{d}{dJ}\dot{J}^2 ,$$

on tire de (22), en éliminant cette fois $\mathfrak{U}$ moyennant l'intégrale des forces vives,

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dJ}\dot{J}^2 = \mathfrak{T} + E .$$

Ceci posé, tirons quelques conséquences de l'hypothèse que la singularité de l'instant t_1 soit une collision générale: J tend alors à zéro lorsqu'on fait tendre t a t_1.

Multiplions par dJ la formule écrite tout à l'heure, et intégrons depuis l'instant initial t_0 jusqu'à un $t < t_1$, mais très voisin à t_1, c'est-à-dire depuis la valeur initiale J_0 de J jusqu'à une valeur J très petite, mais encore > 0.

Il vient (avec une signification évidente de $\dot{J}_0$)

$$\frac{1}{4}(\dot{J}^2 - \dot{J}_0^2) + E(J_0 - J) = \int_{J_0}^{J} \mathfrak{T}\, dJ .$$

Lorsqu'on fait tendre t à t_1, et par suite J à zéro, $\dot{J}$ a une limite finie, bien déterminée (voir la remarque finale du n. précédent). Il en est donc ainsi du premier membre, et par conséquent aussi de l'intégrale $\int_{J_0}^{J}\mathfrak{T}\,dJ$. C'est comme dire que la fonction $\mathfrak{T}$ *est intégrable jusqu'à* $J = 0$.

Or on a, d'après (17),

$$\mathfrak{T} \geqslant \frac{1}{2}K^2\frac{1}{J} ,$$

ce qui revient à dire que, si K était une constante *non* nulle, $\mathfrak{T}$ deviendrait infinie, pour $J = 0$, d'ordre non inférieur à l'unité, et alors elle ne serait point intégrable jusqu'à $J = 0$.

La contradiction disparaît seulement en supposant que K soit nulle. La condition $K=0$ est donc nécessaire pour que les trois corps puissent se choquer tous les trois dans un même point géométrique. C'est le beau lemme de M. SUNDMAN, établissant, si l'on veut, que, *lorsque le moment résultant des quantités de mouvement ne s'annule pas, la seule singularité qui puisse se présenter dans le problème des trois corps est un choc binaire.*

12. - Voisinage d'un choc binaire $P_{\nu+1}$, $P_{\nu+2}$. Spécifications se rapportant à P_ν.

On a vu au n. 10 que, dans le cas d'un choc binaire entre $P_{\nu+1}$ et $P_{\nu+2}$, le troisième corps P_ν reste à une distance finie — je veux dire ayant une limite inférieure >0 — soit de $P_{\nu+1}$ que de $P_{\nu+2}$. Il s'en suit que la force d'attraction newtonienne

$$\operatorname{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U} = f m_\nu \left(\frac{m_{\nu+1}}{r^3_{\nu+2}} \boldsymbol{r}_{\nu+2} - \frac{m_{\nu+2}}{r^3_{\nu+1}} \boldsymbol{r}_{\nu+1} \right)$$

subie par P_ν demeure bornée.

Comme le mouvement du système est régulier, depuis l'instant initial, pour tout $t<t_1$, la force qu'on vient d'expliciter peut être envisagée comme une fonction (vectorielle) de t, holomorphe pour $t<t_1$, et en outre certainement bornée, lorsque t s'approche indéfiniment de t_1. Une telle fonction est bien intégrable (depuis l'instant initial t_0) jusqu'à $t=t_1$. Dès lors l'équation du mouvement de P_ν

$$m_\nu \ddot{\boldsymbol{R}}_\nu = \operatorname{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U}$$

nous assure que $\dot{\boldsymbol{R}}_\nu$, vitesse absolue — on doit entendre rapportée à G — de P_ν, tend à une limite bien déterminée pour $t=t_1$. Elle est à son tour intégrable jusqu'à t_1, et il en résulte l'existence d'une limite bien déterminée pour le vecteur

$$\boldsymbol{R}_\nu = P_\nu - G\,.$$

On peut dire aussi: *Le corps qui ne participe pas au choc tend, pour t convergent à t_1, vers une position limite à distance finie, avec une vitesse (absolue) également finie et bien déterminée.*

13. - Ordre d'infinitude de la vitesse.

L'expression (18′) de $\mathfrak{U}$ (en s'appuyant uniquement sur la circonstance que $1/r_{\nu+1}$ et $1/r_{\nu+2}$ restent finis) donne

(24) $$\lim_{t=t_1} r_\nu \mathfrak{U} = f\, m_{\nu+1} m_{\nu+2}\,.$$

D'ailleurs [n. précédent] $\dot{\boldsymbol{R}}_\nu = \boldsymbol{V}_\nu$ reste fini, et par suite

$$\lim_{t=t_1} r_\nu V_\nu^2 = 0\,.$$

Multiplions l'intégrale des forces vives par r_ν, en y prenant l'expression de $\mathfrak{T}$ sous la forme (14). On en tire après coup

(25) $$\lim_{t=t_1} r_\nu v_\nu^2 = 2f(m_{\nu+1} + m_{\nu+2})\,,$$

ce qui montre que *la vitesse devient infinie d'ordre* $\frac{1}{2}$ (par rapport à l'inverse de la distance). La vitesse $\boldsymbol{v}_\nu$ dont il s'agit devrait être spécifiée comme vitesse relative des deux corps qui se choquent; mais il convient de remarquer que aussi leurs vitesses absolues $\boldsymbol{V}_{\nu+1}$ et $\boldsymbol{V}_{\nu+2}$ se comportent d'une manière identique. C'est ce qui résulte sans peine des formules (13), en tenant compte encore une fois de la circonstance que la vitesse $\boldsymbol{V}_\nu$ reste finie.

14. - Relations asymptotiques. Variable auxiliaire de M. Sundman. Constatation qu'elle reste finie pour t tendant à t_1.

Le produit scalaire $\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{v}_\nu$ des deux vecteurs quelconques $\boldsymbol{r}_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu$ ne dépasse jamais en valeur absolue le produit $r_\nu v_\nu$ de leurs longueurs. Lorsque celui-ci tend à zéro, il en est de même *a fortiori* pour $\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{v}_\nu$. En attribuant à $\boldsymbol{r}_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu$ la signification des nn. précédents, $r_\nu v_\nu$, à cause de (25), tend effectivement à zéro, pour t convergent à t_1. D'ailleurs la dérivation de l'identité $r_\nu^2 = \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{r}_\nu$ donne

$$\frac{dr_\nu^2}{dt} = 2\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{v}_\nu\,.$$

Il s'en suit

$$\lim_{t=t_1} \frac{dr_\nu^2}{dt} = 0 . \tag{26}$$

La dérivation ultérieure de la même identité donne

$$\frac{d^2 r_\nu^2}{dt^2} = 2v_\nu^2 + 2\boldsymbol{r}_\nu \times \dot{\boldsymbol{v}}_\nu . \tag{27}$$

Il convient de transformer le second membre, en profitant, pour le premier terme, de l'intégrale des forces vives, et pour $\dot{\boldsymbol{v}}_\nu$, c'est-à-dire, d'après (11), pour la différence

$$\dot{\boldsymbol{V}}_{\nu+2} - \dot{\boldsymbol{V}}_{\nu+1} ,$$

des équations du mouvement (20).

En se rappelant que $1/r_{\nu+1}$, $1/r_{\nu+2}$, $\boldsymbol{V}_\nu$ restent finis, et en remplaçant, dans

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{U} + E ,$$

$\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}$ par leurs valeurs (14) et (18′), on tire d'abord

$$2v_\nu^2 = \frac{4f(m_{\nu+1} + m_{\nu+2})}{r_\nu} + \dots ,$$

les termes non écrits restant finis lorsque t s'approche indéfiniment de t_1.

Avec cette même entente, on a de (19)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{m_{\nu+1}} \operatorname{grad}_{P_{\nu+1}} \mathfrak{U} &= \quad f \frac{m_{\nu+2}}{r_\nu^3} \boldsymbol{r}_\nu + \dots , \\ \frac{1}{m_{\nu+2}} \operatorname{grad}_{P_{\nu+2}} \mathfrak{U} &= -f \frac{m_{\nu+1}}{r_\nu^3} \boldsymbol{r}_\nu + \dots , \end{aligned}\right.$$

et par conséquent

$$\dot{\boldsymbol{v}}_\nu = \frac{1}{m_{\nu+2}} \operatorname{grad}_{P_{\nu+2}} \mathfrak{U} - \frac{1}{m_{\nu+1}} \operatorname{grad}_{P_{\nu+1}} \mathfrak{U} = -f \frac{m_{\nu+1} + m_{\nu+2}}{r_\nu^3} \boldsymbol{r}_\nu + \dots ,$$

$$\boldsymbol{r}_\nu \times \dot{\boldsymbol{v}}_\nu = -f \frac{m_{\nu+1} + m_{\nu+2}}{r_\nu} + \dots .$$

Cette dernière formule et la précédente expression asymptotique de $2v_\nu^2$ donnent à (27) l'aspect

$$\frac{d^2 r_\nu^2}{dt^2} = 2f\,\frac{m_{\nu+1} + m_{\nu+2}}{r_\nu} + X\,, \tag{27'}$$

le terme additionnel X pouvant être regardé comme une fonction de t, holomorphe pour t intérieur à l'intervalle (t_0, t_1), et finie même pour t s'approchant indéfiniment de t_1. L'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} X\,dt$$

est donc bien déterminée.

D'après (26), il en est de même pour

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d^2 r_\nu^2}{dt^2}\,dt = \left[\frac{dr_\nu^2}{dt}\right]_{t_0}^{t_1},$$

qui se réduit à la valeur initiale de dr_ν^2/dt.

Dans ces conditions, l'équation (27′) montre aussitôt que, *en posant*

$$du_\nu = \frac{dt}{r_\nu}\,, \tag{28}$$

on définit (à une constante près) une fonction u_ν croissant avec t et tendant vers une valeur limite finie pour $t = t_1$.

Chapitre II.

TRANSFORMATIONS CANONIQUES SUGGÉRÉES PAR LE MOUVEMENT PARABOLIQUE

1. - Formules symétriques se rapportant à la méthode de Jacobi.

Soit donné un système canonique

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}\,, \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

dont la fonction caractéristique $H(p_1, p_2, \ldots, p_n; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est supposée indépendante de t. Si l'on regarde, dans H, toute p_i comme la dérivée partielle $\partial W/\partial x_i$ d'une fonction $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on forme l'équation de HAMILTON-JACOBI en posant

$$H = \text{const.} = E\,. \tag{2}$$

La définition classique d'intégrale complète de cette dernière équation introduit explicitement E et $n-1$ autres constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Sous forme plus symétrique, il convient de nommer, avec POINCARÉ [18], intégrale complète toute fonction

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

des x_i et de n constantes ξ_i, douée des propriétés suivantes:

1) c'est une solution de (2), c'est-à-dire qu'en l'introduisant dans H celle-ci devient une fonction $\mathfrak{H}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ des seules ξ et par suite une constante;

2) elle contient les n constantes ξ essentiellement, c'est-à-dire de telle manière que (dans le domaine des valeurs qu'il y a lieu de considérer) le déterminant hessien

$$\left\| \frac{\partial^2 W}{\partial x_i\, \partial \xi_j} \right\| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

ne s'annule pas.

Moyennant une telle W, les $2n$ équations

$$\frac{\partial W}{\partial \xi_i} = -\varpi_i\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial x_i} = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

définissent l'intégrale générale du système (1), en fournissant les x_i et les p_i comme fonctions des $2n$ argument ξ_i, ϖ_i: les ξ_i doivent être regardés comme des constantes d'intégration, les ϖ_i comme des fonctions linéaires de t; d'une manière précise on a

$$\varpi_i = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \xi_i}\, t + \eta_i\,, \tag{4}$$

en désignant par η_i des nouvelles constantes arbitraires.

---

[18] Pp. 10-13 des *Leçons de mécanique céleste*, déjà citées à la page 225.

2. - Mouvement central parabolique. Équation en W qu'il convient d'envisager.

Un point matériel P de masse égale à l'unité est attiré par un centre fixe O suivant la loi de NEWTON. Les équations canoniques du mouvement ont pour fonction caractéristique l'énergie totale. En l'exprimant à l'aide des coordonnées cartesiennes du mobile (rapportées au centre) x_1, x_2, x_3 et des conjuguées p_1, p_2, p_3 (composantes de la vitesse), on a

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{k}{r}, \tag{5}$$

où k est la constante d'attraction et $r = |\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}|$ la distance $\overline{OP}$.

La nature de la trajectoire dépend, comme on sait, de la valeur (constante pour chaque solution) prise par la fonction H elle-même.

Les mouvements paraboliques correspondent à la valeur $H = 0$. Fixons-nous sur cette détermination, et considérons le système différentiel que l'on obtient de (1) (pour $n = 3$, avec l'expression (5) de H) en changeant la variable indépendante t d'après la position

$$dt = r\,du\,. \tag{6}$$

On a

$$\frac{dp_i}{du} = -r\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad \frac{dx_i}{du} = r\frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Pour les solutions paraboliques, le long desquelles $H = 0$, les seconds membres peuvent s'écrire

$$-\frac{\partial(rH)}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial(rH)}{\partial p_i}\,.$$

Ces solutions vérifient partant également le système canonique

$$\frac{dp_i}{du} = -\frac{\partial(rH)}{\partial x_i}, \qquad \frac{dx_i}{du} = \frac{\partial(rH)}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{7}$$

qui diffère à double titre du système originaire, ayant été altérées soit la variable indépendante que la fonction caractéristique. C'est une transformation que j'ai employé ici même ([19]) il y a déjà quelques années pour la régularisation du problème restreint. On peut bien l'appeler transformation de DARBOUX-SUNDMAN, puisque on y combine une propriété des faisceaux conservatifs de trajectoires signalée par DARBOUX avec le changement de variable indépendante dont s'est servi M. SUNDMAN dans son mémoire couronné ([20]).

Toutes les solutions du système (7) peuvent être représentées — dans la manière rappelée au n. 1 — moyennant une intégrale complète de l'équation

$$\frac{1}{2}r(p_1^2+p_2^2+p_3^2)=\text{const.}=\mathfrak{H}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,. \tag{8}$$

Dans les expressions intégrales des x_i, p_i (provenant de la résolution des équations, qui correspondent aux (3) pour le problème qui nous occupe), les constantes ξ_1, ξ_2, ξ_3 doivent être censées soumises à la liaison

$$\mathfrak{H}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=k\,, \tag{9}$$

pour rendre $H=0$, condition caractéristique des ∞^5 solutions paraboliques.

3. - Construction d'une intégrale homogène de degré $\frac{1}{2}$.

En coordonnées polaires r, w (colatitude), φ (longitude), l'équation (8) s'écrit

$$\frac{r}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2 w}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2\right\}=\text{const.} \tag{8'}$$

On reconnaît aisément qu'elle admet des intégrales indépendantes de φ, de la forme

$$W=\sqrt{r}\,f(w)\,.$$

En effet, en substituant dans (8') $\sqrt{r}\,f(w)$ à la place de W, il vient

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}f^2+\left(\frac{df}{dw}\right)^2\right\}=\text{const.}$$

([19]) Loco citato (dans la note ([5]), p. 313).
([20]) Loco citato (dans la note ([6]), p. 127).

On y satisfait en prenant

$$f = 2\sqrt{\xi}\,\sin\frac{1}{2}w\,,$$

où l'on entend par ξ une constante positive. La valeur constante du second membre de (8′) est alors $\frac{1}{2}\xi$.

On a trouvé de la sorte une intégrale

$$W = 2\sqrt{\xi r}\,\sin\frac{1}{2}w \tag{10}$$

contenant matériellement la seule constante ξ; mais on peut sans peine faire apparaître le degré de généralité qu'il nous faut. Il suffit de remarquer que (puisqu'on n'a fait aucune hypothèse à l'égard de l'orientation des axes) il est parfaitement loisible de regarder comme arbitraire la direction de l'axe polaire Ox_3, c'est-à-dire de la demi-droite à partir de laquelle on compte la colatitude w. En tenant compte de cela, rapportons nos formules à des coordonnées non spécialisées par rapport à la demi-droite en question, désignant par λ_1, λ_2, λ_3 ses cosinus directeurs. On aura en conformité

$$\cos w = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{r}\,,$$

et W renfermera, outre ξ, les cosinus λ, c'est-à-dire essentiellement trois constantes arbitraires. Pour le mettre en évidence, considérons le vecteur $\boldsymbol{\xi}$ ayant pour longueur ξ et pour cosinus directeurs λ_1, λ_2, λ_3, et exprimons W à l'aide des composantes

$$\xi_i = \xi\lambda_i \qquad (i = 1,\, 2,\, 3),$$

continuant toutefois à écrire ξ au lieu de $|\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}|$. On a de la sorte

$$W = \sqrt{2\xi r}\,\sqrt{1-\cos w} = \sqrt{2}\sqrt{\xi r - \sum_{i=1}^{3}\xi_i x_i}\,, \tag{10′}$$

ce qui est bien une intégrale de (8′) contenant d'une manière essentielle les trois constantes ξ_1, ξ_2, ξ_3. Je ne m'arrête pas à justifier cette dernière affirmation, qui apparaîtra évidente dans la suite d'après les expressions explicites des x_i, p_i. Je me borne à faire remarquer que, comme il résulte de (10′), W demeure régulière et différente de zéro, pourvu seulement que ne s'annulent pas à la fois toutes les $x_i(r=0)$, ni toutes les $\xi_i(\xi=0)$, ni enfin toutes les différences $x_i-\xi_i(\cos w=1)$.

Puisque la substitution de la valeur (10) de W dans le premier membre de (8′) donnait pour résultat $\frac{1}{2}\xi$, il s'en suit que, pour l'intégrale complète (10′) explicitée tout à l'heure,

$$\mathfrak{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{2}\xi \,, \tag{11}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (9),

$$\xi = \left|\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}\right| = 2k \,. \tag{9'}$$

Voilà la relation devant exister entre les constantes d'intégration ξ_1, ξ_2, ξ_3 (et le coefficient de l'attraction k) lorsqu'il s'agit des solutions paraboliques.

4. - Signification des constantes ξ_i et des paramètres ϖ_i.

Les équations définissant le mouvement, d'après les formules générales (3) et l'expression (10′) de W, sont

$$-\frac{\partial W}{\partial \xi_i} = \frac{r}{W}\left(\frac{x_i}{r}-\frac{\xi_i}{\xi}\right) = \varpi_i \,, \tag{12}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\xi}{W}\left(\frac{x_i}{r}-\frac{\xi_i}{\xi}\right) = p_i \qquad (i=1,2,3), \tag{13}$$

ces dernières pouvant évidemment être remplacées par

$$r p_i = \xi \varpi_i \,, \tag{14}$$

qui résultent après coup de la comparaison entre (12) et (13).

Occupons nous à présent de faire ressortir de ces équations les propriétés bien connues du mouvement parabolique, et l'interprétation soit des constantes ξ_i que des paramètres ϖ_i. Pour cette discussion il y a quelque avantage à introduire des vecteurs permettant de remplacer nos six équations (12) et (13) par deux relations vectorielles équivalentes.

On a déjà défini le vecteur $\boldsymbol{\xi}$ (ayant pour composantes les ξ_i) constant en grandeur et direction: la grandeur, d'après (9′), est $2k$, assurément non nulle, et on verra bientôt quelle est l'interprétation géométrique de la direction. En attendant associons à $\boldsymbol{\xi}$ un vecteur $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ de composantes ϖ_i; et en outre, suivant l'usage, $\boldsymbol{r}$ de composantes x_1, x_2, x_3 et $\boldsymbol{v}$ de composantes p_1, p_2, p_3, qui déterminent respectivement la position et la vitesse du point mobile.

Dès lors les équations (12) et (13) se résument vectoriellement comme il suit:

$$\frac{1}{W}\left(\boldsymbol{r}-\frac{r}{\xi}\boldsymbol{\xi}\right)=\tilde{\boldsymbol{\omega}}\,, \tag{12'}$$

$$\frac{1}{W}\left(\frac{\xi}{r}\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}\right)=\boldsymbol{v}\,, \tag{13'}$$

et donnent lieu à

$$r\boldsymbol{v}=\xi\tilde{\boldsymbol{\omega}}\,, \tag{14'}$$

évidemment équivalente aux (14).

En tenant compte de la forme générale (4) des paramètres ϖ_i (puisque on a actuellement, à cause de (11), $\mathfrak{H}=\frac{1}{2}\xi$), on reconnaît le vecteur $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ comme une fonction linéaire de t, ayant $-(1/2\xi)\boldsymbol{\xi}$ pour coefficient de t. C'est un vecteur parallèle à $\boldsymbol{\xi}$; par suite, si l'on forme le produit vectoriel $\boldsymbol{\xi}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, t disparaît. Donc

$$\boldsymbol{\xi}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{c}\,, \tag{15}$$

en désignant par $\boldsymbol{c}$ un vecteur constant.

D'autre part, en multipliant vectoriellement (à gauche), la (12') par $\boldsymbol{\xi}$ et la (13') par $\boldsymbol{r}$, on a

$$\boldsymbol{\xi}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}}=\frac{1}{W}(\boldsymbol{\xi}\wedge\boldsymbol{r})\,,$$

$$\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{v}=-\frac{1}{W}(\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{\xi})\,,$$

d'où

$$\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\xi}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{c}\,.$$

Ceci exprime la constance de la vitesse aréolaire $\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{v}$, propriété fondamentale de tout mouvement central, qui devait naturellement être implicite dans la représentation intégrale (12), (13) du mouvement parabolique. La constatation que le mouvement est plan découle classiquement de l'intégrale (vectorielle) des aires

$$\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}\,,$$

d'où résulte l'équation du plan

$$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r} = 0 .$$

Les vecteurs $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\tilde\omega}$ appartiennent eux aussi au plan d'après (15). Quant à la trajectoire, sa nature géométrique descend aisément de (12'), en tenant compte de (10'). Cette dernière peut s'écrire à l'aide des vecteurs $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{r}$:

$$W^2 = 2(\xi r - \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r}) , \tag{10''}$$

après quoi le carré (scalaire) de (12') donne

$$\varpi^2 = \frac{r}{\xi} , \tag{16}$$

en représentant manifestement par ϖ la longueur du vecteur $\boldsymbol{\tilde\omega}$.

La multiplication scalaire de la même (12') par $\boldsymbol{\xi}$ donne d'ailleurs

$$\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\tilde\omega} = \frac{1}{W} (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r} - \xi r) ,$$

c'est-à-dire, ayant égard à (10''),

$$\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\tilde\omega} = -\frac{1}{2} W . \tag{17}$$

Il s'en suit

$$\xi^2 \varpi^2 - (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\tilde\omega})^2 = \xi^2 \varpi^2 - \frac{1}{4} W^2 ,$$

ou bien, à cause de (16) et (10''),

$$\xi^2 \varpi^2 - (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\tilde\omega})^2 = \xi r - \frac{1}{2} (\xi r - \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} (\xi r + \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r}) .$$

En se rappelant que w représente l'angle des deux vecteurs $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{r}$ et remarquant d'autre part que le premier membre de la dernière équation ne diffère pas du carré du vecteur $\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\tilde\omega} = \boldsymbol{c}$, on a enfin

$$r(1 + \cos w) = \frac{2}{\xi} c^2 \qquad (c \text{ longueur du vecteur } \boldsymbol{c}) .$$

C'est évidemment l'équation polaire de la trajectoire, dans son plan, l'axe polaire étant dirigé dans le sens du vecteur $\boldsymbol{\xi}$.

La comparaison avec l'équation d'une parabole rapportée à son foyer achève notre vérification, et nous permet en outre de retenir:

Le vecteur constant (ξ_1, ξ_2, ξ_3) *de longueur* $2k$ *a la direction de l'axe de la trajectoire parabolique (son sens etant celui qui va du foyer au sommet). Le paramètre de cette parabole est la constante* $(1/\xi)c^2$, *exprimable directement à l'aide des* ξ_i, ϖ_i *sous la forme*

$$\frac{1}{\xi}c^2 = \frac{1}{\xi}(\boldsymbol{\xi}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}})^2 = \frac{1}{\xi}\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \varpi_1 & \varpi_2 & \varpi_3 \end{vmatrix}^2 . \tag{15'}$$

5. - Forme résolue de la transformation canonique entre les deux sextuples [21] $(x_i; p_i)$, $(\xi_i; \varpi_i)$.

L'identité

$$\sum_1^3{}_i\, p_i\, dx_i - \sum_1^3{}_i\, \varpi_i\, d\xi_i = dW ,$$

découlant immédiatement des (12), (13), fait voir que ces formules établissent une transformation canonique entre les variables primitives x_i, p_i et les arguments ξ_i, ϖ_i, pourvu seulement qu'on puisse les résoudre par rapport aux unes et aux autres.

En substituant, dans les (12), r/ξ par la valeur ϖ^2 tirée de (16), on a en premier lieu

$$x_i = \varpi^2\xi_i - 2U\varpi_i \qquad (i=1, 2, 3), \tag{I}$$

où j'ai écrit $-2U$ à la place de W, désignant ainsi par U le trinôme $\sum_1^3{}_i\, \varpi_i\xi_i$, comme on le fait habituellement dans la théorie des transformations de contact: on a en effet, d'après (17)

$$U = -\frac{1}{2}W = \boldsymbol{\xi}\times\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \sum_1^3{}_i\, \varpi_i\xi_i . \tag{18}$$

Les formules exprimant les p_i moyennant les ξ_i et les ϖ_i, c'est-à-dire les (13) convenablement transformées, sont immédiatement fournies par

---

[21] J'emploie, pour abréger, *sextuple* au lieu de *système de six éléments*.

les (14), dès qu'on y remplace ξ/r par $1/\varpi^2$. On a donc le second groupe résolu

$$\text{(II)} \qquad p_i = \frac{\varpi_i}{\varpi^2} \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Signalons encore quelques formules, conséquences des (I), (II) [ou, si l'on veut, des originaires (12), (13)], qui nous servirons dans la suite. L'une d'elles n'est que (16), qu'on retrouve matériellement, en faisant le carré des (I) et les additionnant; un second groupe est constitué par les (14), qui résultent, peut-on dire, des (II) et (16); et il y a lieu enfin de fixer l'expression de $v^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, qui se déduit des (II) sous la forme $1/\varpi^2$ et devient ξ/r d'après (16).

Le système à retenir est donc

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} r = \xi\varpi^2\,, \\ rp_i = \xi\varpi_i \\ r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi\,. \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3)\,,$$

Il va sans dire que, dans toutes ces formules, r, ξ et ϖ gardent leur signification de longueurs des vecteurs (x_1, x_2, x_3), (ξ_1, ξ_2, ξ_3), $(\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3)$, c'est-à-dire des valeurs arithmétiques des radicaux $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, $\sqrt{\varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_3^2}$.

6. - Inversion. Comportement analytique.

Notre transformation (I), (II) peut être invertie sans calcul. Il suffit de s'appuyer sur la circonstance que l'expression (10′) de W dépend symétriquement des x_i et des ξ_i. Il s'en suit que les formules (12) et (13) sont également symétriques par rapport aux deux sextuples (x_i, p_i), $(\xi_i, -\varpi_i)$. D'après cela, *dès qu'on remplace matériellement dans les* (I), (II) *les* x_i, p_i *par* ξ_i, $-\varpi_i$ *et vice versa, on en tire les expressions résolues par rapport aux* ξ_i, $-\varpi_i$. Il est bon d'ajouter que, à cause de la forme spéciale des équations dont il s'agit, *le résultat peut également s'obtenir par l'échange des éléments correspondants des deux sextuples* (x_i, p_i), (ξ_i, ϖ_i).

Associons cette remarque à la circonstance que les seconds membres des (I) sont des polynômes (de troisième dégré) et les seconds membres des (II) des fonctions rationnelles ayant ϖ^2 au dénominateur. C'est assez pour pouvoir affirmer que *notre transformation est birationnelle, et régulière pour toutes les valeurs finies des arguments qui n'annulent pas le trinôme* $\varpi_1^2+\varpi_2^2+\varpi_3^2$, *ni l'analogue* $p_1^2+p_2^2+p_3^2$.

Rapportons-nous, pour fixer les idées, à la transformation directe (I), (II). Parmi les déterminations des arguments ξ_i, ϖ_i, il y a lieu de signaler les sextuples Γ formés par des valeurs nulles des ϖ_i, non toutes nulles à la fois des ξ_i, de façon que $\xi>0$. Ce sont évidemment des sextuples, *non* réguliers d'après ce qui précède, qui se trouvent pour ainsi dire plongés dans le domaine d'holomorphisme sans le partager: ils forment en effet une variété à trois dimensions seulement, tandis que l'espace environnant en a six. Supposons de faire varier dans cet espace le sextuple ξ_i, ϖ_i et de le faire tendre à un Γ en suivant une ligne régulière. Les ϖ_i tendent alors à zéro de telle façon que les rapports ϖ_i/ϖ admettent des limites bien déterminées γ_i, nécessairement liées par la relation

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1\,.$$

Les formules (I) et (19) montrent que *les coordonnées* x_i, *la distance* r, *et les produits* rp_i, $r(p_1^2+p_2^2+p_3^2)$ *demeurent, même en s'approchant indéfiniment d'un* Γ, *des fonctions régulières des* ξ_i, ϖ_i, *nulles en* Γ.

Il n'en est pas ainsi des p_i, lesquelles, d'après (II), deviennent en général infinies. On peut préciser davantage en constatant que les rapports x_i/r [tirés des (I) et (19)] et les produits $\sqrt{r}\,p_i$ [tirés des (II) et (19)] ont des limites bien déterminées. Il vient en effet, en tenant compte de ce que $\lim \varpi_i/\varpi=\gamma_i$,

$$\lim\frac{x_i}{r}=\frac{\xi_i}{\xi}-2\gamma_i\sum_1^3{}_j\frac{1}{\xi}\xi_j\gamma_j\,, \tag{20}$$

$$\lim\sqrt{r}\,p_i=\sqrt{\xi}\,\gamma_i\,, \tag{21}$$

les radicaux ayant leurs valeurs arithmétiques, et le symbole lim se rapportant à l'approche d'un Γ en suivant une ligne régulière fixée d'avance.

Dans le cas particulier où s'annule le vecteur $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\xi}\wedge\boldsymbol{\varpi}$, le mouvement parabolique devient rectiligne et les directions ξ_i/ξ, ϖ_i/ϖ coïncident, pouvant au plus différer quant au sens. On a alors

$$\lim\frac{\xi_i}{\xi}=\pm\,\gamma_i\,,$$

et la limite (20) de x_i/r devient par conséquent

$$\lim\frac{x_i}{r}=\mp\,\gamma_i\,. \tag{20'}$$

REMARQUE. – Par rapport aux coordonnées x_i, notre transformation canonique (I), (II) n'est pas ponctuelle. En effet, dans les seconds membres des (I), apparaissent à la fois les ξ_i et les ϖ_i. Il s'agit par conséquent d'une transformation de contact. Toutefois, si on l'envisage intrinsèquement, la dite transformation est bien ponctuelle prolongée (au sens de LIE). En effet les (II) représentent une inversion par rayons réciproques entre les p_i et les ϖ_i; les (I) en restent subordonnées par la condition que la transformation entre les deux sextuples (p_1, x_i), (ϖ_i, ξ_i) soit canonique.

7. - Mouvement parabolique tangent. Interprétation des variables ξ_i, ϖ_i.

Il est aisé de reconnaître la signification des variables ξ_i, ϖ_i liées aux x_i, p_i par la transformation (I), (II), lorsqu'on envisage les x_i, p_i comme coordonnées et composantes de vitesse d'un point mobile avec une loi quelconque. Il suffit pour cela d'envisager, à côté du mouvement réel, un mouvement parabolique hypothétique du même point, dû à attraction newtonnienne de l'origine. En se rapportant au n. 4, on supposera:

1) que le coefficient d'attraction ait la valeur numérique

$$k = \frac{1}{2} r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$$

correspondant au sextuple x_i, p_i dont il s'agit;

2) que la parabole (trajectoire du point dans ce mouvement fictif) passe au point (x_1, x_2, x_3) en y touchant le vecteur (p_1, p_2, p_3). On l'appellera *parabole osculatrice* (à la trajectoire du point dans son mouvement effectif).

Le mouvement parabolique tangent reste ainsi caractérisé. Les variables transformées ξ_i, ϖ_i se rattachent à ce mouvement d'une manière bien évidente.

Les ξ_i définissent un vecteur de longueur $2k$ parallèle à l'axe de la parabole osculatrice dans le sens allant du foyer au sommet; $\frac{1}{\xi}\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \varpi_1 & \varpi_2 & \varpi_3 \end{Vmatrix}^2$ représente le paramètre de la parabole, etc.

S'il arrive que, pendant le mouvement, les ξ_i, ϖ_i convergent vers un des sextuples Γ, considérés au n. précédent ($\varpi_i = 0$, $\xi > 0$), la parabole osculatrice devient de plus en plus mince, son paramètre tendant à zéro: l'orientation de l'axe admet toutefois une limite bien déterminée. Le mobile tend à l'origine dans une direction également bien déterminée [formule (20)]. Si en particulier $\lim \varpi_i/\varpi = \pm \lim \xi_i/\xi$ $(i=1, 2, 3)$, le rapprochement en question a lieu justement dans la direction de l'axe [formule (20′)].

8. - Généralités sur l'introduction d'éléments osculateurs paraboliques.

La transformation canonique (I), (II) est bien remarquable à cause de ses propriétés régularisantes. Les paramètres ξ_i, ϖ_i qu'elle introduit sont très étroitement liés, comme on vient de voir, au mouvement parabolique tangent. Toutefois ces ξ_i, ϖ_i ne peuvent pas être envisagés individuellement comme éléments osculateurs paraboliques: pour se procurer de tels éléments (faisant pendant aux classiques éléments elliptiques), il faudrait encore en former des combinaisons convenables. On y parvient plus commodement en revenant à la source de la transformation (I), (II), c'est-à-dire à l'équation aux dérivées partielles (8′) et en utilisant une intégrale complète différente de (9), et précisément à variables séparées comme dans le cas elliptique.

9. - Intégrale complète de (8′) à variables séparées. Éléments paraboliques.

Posons

$$W = R + Gw\,, \tag{22}$$

en supposant R fonction du seul argument r, et G constante. Si l'on introduit dans le premier membre de (8′) cette expression de W, on a

$$\frac{r}{2}\left\{\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}G^2\right\} = \frac{1}{8}Z^2\,,$$

en désignant par

$$\frac{1}{8}Z^2 = k \tag{23}$$

la constante du second membre de (8′).

On en tire

$$R = \int_a^r dr\sqrt{\frac{Z^2}{4r} - \frac{G^2}{r^2}}\,, \tag{24}$$

où la limite inférieure q de l'intervalle d'intégration pourrait être arbitraire. Il convient toutefois (comme dans l'intégrale analogue se rapportant au mouvement elliptique) d'attribuer à q la plus petite des valeurs de r annulant la fonction sous le signe. Il y a ici une seule racine finie; on est donc conduit à prendre

$$q = \frac{4G^2}{Z^2} \,. \tag{25}$$

Puisque on sait d'avance que l'orbite est parabolique (et décrite suivant la loi des aires par rapport au foyer), on constate immédiatement que q représente le demi-paramètre: c'est en effet la plus petite distance du foyer à laquelle puisse se trouver le mobile (qui parcourt la courbe toujours dans le même sens). En suivant POINCARÉ ([22]), on supposera que la droite fixe à partir de laquelle on compte l'angle w, soit justement la ligne des noeuds (intersection, dûment précisée quant au sens, du plan de la parabole avec le plan coordonnée Ox_1x_2). Si l'on désigne suivant l'usage par θ la longitude du noeud (c'est-à-dire l'angle formé par le noeud avec l'axe Ox_1), on a, d'après la définition de w,

$$\cos w = \frac{x_1}{r}\cos\theta + \frac{x_2}{r}\sin\theta \,,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = -\cos I \,, \tag{26}$$

en entendant par I l'inclinaison (du plan de la parabole sur le plan Ox_1x_2).

D'après cela, il y a lieu de considérer W comme dépendant des coordonnées cartésiennes x_1, x_2, x_3 du point mobile, et des trois constantes Z, G, θ à interpréter comme il suit:

Z dépend exclusivement du coefficient d'attraction, comme il résulte de (23);

$G = \frac{1}{2}Z|\sqrt{q}|$ définit ensuite le demi-paramètre q de la parabole;

θ représente la longitude du nœud.

Les équations (3), adaptées à notre W, où Z, G, θ jouent le rôle des ξ_i, en écrivant $-\zeta$, $-g$, Θ à la place de ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, donnent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial Z} = \zeta\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial G} = g\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial \theta} = -\Theta, \\ &\frac{\partial W}{\partial x_i} = p_i \qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}\right. \tag{27}$$

([22]) Loc. cit. (à la page 225), pp. 65-74.

Ayant égard aux équations (22), (24),(25), (26), le premier groupe s'écrit

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{\partial R}{\partial Z} = \int_q^r \frac{Z\,dr}{4r\sqrt{\dfrac{Z^2}{4r} - \dfrac{G^2}{r^2}}} = \int_q^r \frac{Z dr}{2\sqrt{Z^2 r - 4G^2}} = \sqrt{r-q} = \zeta\,,$$

$$\frac{\partial W}{\partial G} = \frac{\partial R}{\partial G} + w = g\,,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = -\,G\cos I = -\,\Theta\,,$$

et consent de reconnaître la signification des trois autres paramètres $\zeta,\ g,\ \Theta$.

Tout d'abord, d'après une propriété élémentaire de la parabole: $\zeta^2 = r - q$ représente l'abscisse de la position courante du mobile, comptée sur l'axe à partir du sommet.

La seconde équation, appliquée au sommet, fait voir que g représente l'angle que la direction de l'axe (allant du foyer au sommet) forme avec la ligne des nœuds.

Enfin la troisième équation nous montre que: $\Theta = G\cos I$ fixe l'inclinaison.

Les équations (27) entraînent:

$$\sum_1^3{}_i\, p_i\,dx_i - (Z\,d\zeta + G\,dg + \Theta\,d\theta) = d(W - Z\zeta - Gg)$$

et définissent par conséquent une transformation canonique entre le sextuple (p_i, x_i) et les deux triplets conjugués

$$(P) \qquad \begin{pmatrix} Z & G & \Theta \\ \zeta & g & \theta \end{pmatrix}.$$

Les expressions explicites des x_i, p_i en fonction des arguments (P) s'établissent sans peine, soit en effectuant la résolution matérielle des (27); soit, d'une manière indirecte mais plus commode (adoptée ordinairement dans le cas des éléments elliptiques), en ayant recours aux formules élémentaires de transformation des coordonnées et tirant parti de la signification des six éléments (P).

J'omets ces développements en me bornant à faire remarquer que, à différence de la précédente (I), (II), la transformation entre les (x_i, p_i) et les (P) *n'est pas régularisante.* Déjà les expressions des x_i présentent des singularités au voisinage d'un choc, auquel correspondent des valeurs nulles des paramètres ζ, G et Θ.

Le sextuple canonique (P) est un cas limite (correspondant à la valeur zéro de l'énergie) des éléments elliptiques que j'ai appelés *isoénergétiques* ([23]): il peut rendre de bons services dans l'étude des perturbations des comètes.

Chapitre III.

RÉGULARISATION EXPLICITE DU VOISINAGE D'UN CHOC BINAIRE

1. - Forme canonique de Poincaré.

On a rappelé, au n. 8 du Chap. I, les équations du mouvement absolu sous forme vectorielle, où figurent comme inconnues auxiliaires les composantes des quantités de mouvement. Il est bien connu qu'on leur donne immédiatement forme canonique, et qu'on les réduit ensuite à six degrés de liberté en mettant en évidence les coordonnées relatives de deux des trois corps par rapport au troisième ([24]). Pour expliciter le système réduit, il me paraît avantageux d'abandonner la symétrie par rapport aux trois corps, en appelant O celui auquel on rapporte le mouvement et les coordonnées des deux autres; P, P' ceux-ci; et adoptant les notations qui s'y rattachent.

On indiquera par m_0 la masse de O; par m, m' les masses de P, P'; par x_i, x'_i $(i=1, 2, 3)$ leurs coordonnées (par rapport à trois axes rectangulaires d'orientation fixe, ayant leur origine en O); par p_i, p'_i les composantes de la quantité de mouvement *absolue* de P et de P' respectivement; par r, r', Δ les trois distances $\overline{OP}$, $\overline{OP'}$, $\overline{PP'}$.

([23]) *Sopra un nuovo sistema canonico di elementi ellittici*, « Annali di Matematica », ser. III t. XX, 1913. Voir aussi:

W. De Sitter, *On canonical elements*, « Proceedings of the K. Ak. van Wet. te Amsterdam », vol. XVI, 1913, pp. 279-291.

H. Andoyer, *Sur l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie comme éléments canoniques d'après* M. M. T. Levi-Civita *et* G. W. Hill et *Sur les problèmes fondamentaux de la mécanique céleste*, « Bulletin Astronomique », t. XXX, 1913, pp. 425-429, et t. XXXII, 1915, pp. 5-18.

([24]) Ou bien, en suivant Jacobi, certaines combinaisons linéaires (dépendant des masses) de ces coordonnées relatives. Nous y reviendrons au n. 6.

D'après le théorème des quantités de mouvement (le barycentre étant censé fixe), la somme des quantités de mouvement des trois corps est nulle. Il s'en suit que la quantité de mouvement (absolue) de O a pour composantes

$$-(p_i + p'_i)\,.$$

La force vive $\mathfrak{T}$ du système est partant la somme

$$\frac{1}{2m_0}\{(p_1+p'_1)^2+(p_2+p'_2)^2+(p_3+p'_3)^2\}+$$
$$+\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{2m'}(p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2)\,;$$

d'où

$$\mathfrak{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m'}\right)(p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2)+$$
$$+\frac{1}{m_0}(p_1p'_1+p_2p'_2+p_3p'_3)\,. \tag{1}$$

La fonction des forces $\mathfrak{U}$ (formule (18) du Chap. I), avec les notations actuelles, s'écrit

$$\mathfrak{U}=f\left(\frac{m_0m}{r}+\frac{m_0m'}{r'}+\frac{mm'}{\varDelta}\right). \tag{2}$$

La différence

$$H=\mathfrak{T}-\mathfrak{U}\,, \tag{3}$$

c'est-à-dire l'énergie du système, se présente ainsi comme une fonction des douze variables x_i, x'_i, p_i, p'_i.

Le système canonique

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dp_i}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\,, & \frac{dx_i}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial p_i}\,,\\ \frac{dp'_i}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial x'_i}\,, & \frac{dx'_i}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial p'_i}\end{aligned}\right. \qquad (i=1,\,2,\,3), \tag{4}$$

admettant H comme fonction caractéristique et (x_i, p_i), (x'_i, p'_i) comme variables conjuguées, définit le mouvement. C'est la forme particulièrement simple indiquée par POINCARÉ. L'intégrale des forces vives s'écrit évidemment

$$H=E \qquad (E \text{ constante}). \tag{5}$$

2. - Transformation de Darboux-Sundman.

Envisageons les mouvements pour lesquels la constante E a une valeur fixée d'avance, et effectuons le premier pas en vue de la régularisation d'un choc binaire P, O. Tout à fait comme dans le cas du problème restreint [voir le n. 2 du Chap. préc.], il convient de poser

$$dt = r\,du\,. \tag{6}$$

Les ∞^{11} solutions du système (4) satisfaisant à la condition $H = E$ vérifient également le système

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{du} = -\dfrac{\partial H^*}{dx_i}\,, & \dfrac{dx_i}{du} = \dfrac{\partial H^*}{\partial p_i}\,, \\[2ex] \dfrac{dp'_i}{du} = -\dfrac{\partial H^*}{\partial x'_i}\,, & \dfrac{dx'_i}{du} = \dfrac{\partial H^*}{\partial p'_i} \end{cases} \qquad (i = 1,\, 2,\, 3), \tag{7}$$

où

$$H^* = r(H - E)\,. \tag{8}$$

Pour chacune d'elles, H^* prend la valeur zéro.

Remarque. – Soit t_1 l'instant du choc P, O dans le sens précisé au Chap. I. Le n. 14 du même Chapitre nous permet d'affirmer que la nouvelle variable u [introduite moyennant la position (6)] tend en croissant vers une valeur finie u_1, lorsque on fait tendre t à t_1. Le choc binaire dont il s'agit constitue donc, même à l'égard du système transformé (7), une (éventuelle) singularité des fonctions inconnues $x_i(u)$, $p_i(u)$, $x'_i(u)$, $p'_i(u)$ se présentant pour une valeur *finie* u_1, tandis que, pour $u < u_1$ (et assez proche à u_1), tout est régulier.

3. - Limite du produit $r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$ pour r tendant à zéro.

Plaçons-nous au voisinage d'un choc entre P et O, dans l'hypothèse que le moment résultant des quantités de mouvement des trois corps ne s'annule pas. On est assuré [Chap. I, n. 12] que P' reste à l'écart des deux corps tendant à se choquer, sa vitesse restant également finie. On a reconnu aussi [n. 13 du même Chapitre] que la vitesse de P (soit absolue que relative au corps O) multipliée par $\sqrt{r}$ reste finie. On pourrait en déduire aussitôt (en tenant compte de ce que p_1, p_2, p_3 sont composantes de la quantité de mouvement absolue) que le produit $r(p_1^2+p_2^2+p_3^2)$ admet lui aussi une limite finie. Mais il ne vaut pas la peine de faire des emprunts de l'endroit cité. On va le faire ressortir à nouveau de l'intégrale des forces vives.

Posons pour abréger

$$q = |\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}|\,,$$

$$r(p_1^2+p_2^2+p_3^2) = \xi\,,$$

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{m_0}\sqrt{r}\left(p_1'\dfrac{p_1}{q}+p_2'\dfrac{p_2}{q}+p_3'\dfrac{p_3}{q}\right) = g\,, \\ r\left\{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{m_0}+\dfrac{1}{m'}\right)(p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2) - \dfrac{fm_0m'}{r'} - \dfrac{fmm'}{\varDelta} - E\right\} = \eta\,. \end{cases}$$

D'après (1), (2), (3), on a

$$H^* = r(H-E) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)\xi + g\sqrt{\xi} - fm_0m + \eta\,.$$

L'équation $H^*=0$ (du second degré en $\sqrt{\xi}$), avec la spécification $\sqrt{\xi}>0$, définit univoquement $\sqrt{\xi}$ comme fonction holomorphe des quantités g et η tendant vers la limite (positive)

$$l = \sqrt{\frac{2fm_0m}{\dfrac{1}{m_0}+\dfrac{1}{m}}}\,,$$

lorsque g et η convergent à zéro. Or il résulte des (9) (et de la circonstance rappelée ci-dessus que $1/r'$, $1/\varDelta$ et les p_i' restent finis, ainsi que les rapports p_i/q, qui sont des cosinus directeurs) que g et η s'annulent avec r.

On a partant

$$\lim_{r=0}\sqrt{\xi} = l\,,$$

ce qui entraîne justement, à cause de la signification de ξ, et de u_1 (voir la remarque finale du n. précédent)

$$(10)\qquad \lim_{u=u_1} r(p_1^2+p_2^2+p_3^2) = l^2 = \frac{2fm_0m}{\dfrac{1}{m_0}+\dfrac{1}{m}}\,.$$

C. Q. F. D.

4. - Introduction des variables ξ_i, ϖ_i. Holomorphisme de l'expression transformée de H^*.

Appliquons maintenant la transformation (I), (II) du Chapitre précédent [n. 5], en remplaçant les six arguments x_i, p_i par les combinaisons ξ_i, ϖ_i; bien entendu sans toucher aux x'_i, p'_i.

Au point de vue formel il y a lieu de noter qu'en transformant ainsi les équations (7), elles restent canoniques avec la même fonction caractéristique, et s'écrivent par conséquent

$$(7')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varpi_i}{du} &= -\frac{\partial H^*}{\partial \xi_i}, & \frac{d\xi_i}{du} &= \frac{\partial H^*}{\partial \varpi_i}, \\ \frac{dp'_i}{du} &= -\frac{\partial H^*}{\partial x'_i}, & \frac{dx'_i}{du} &= \frac{\partial H^*}{\partial p'_i} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où l'on doit, bien entendu, retenir H^* exprimée à l'aide des arguments ξ_i, ϖ_i, x'_i, p'_i.

Voyons ce qui se passe au point de vue qualitatif.

Les formules (19) du Chap. préc., qui sont des conséquences nécessaires des (I), (II), fournissent immédiatement des renseignements très importants sur la manière dont se comportent les ξ_i, ϖ_i dans le cas d'un choc P, O. En associant ces renseignements à l'expression analytique qu'acquiert H^* avec les nouvelles variables, on pourra ensuite reconnaître qu'il en résulte sa régularisation.

Utilisons d'abord les formules (19) susdites, et notamment la première

$$r = \xi\varpi^2 ,$$

et la troisième

$$r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi .$$

Comme on vient de voir [formule (10)], en proximité d'un choc P, O, *ξ tend vers une limite l^2 non nulle.* L'expression de r montre alors que ϖ^2, *et par conséquent ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 convergent vers zéro.*

On n'a pas encore le droit d'affirmer que ξ_1, ξ_2, ξ_3 tendent séparément vers des limites bien déterminées, mais il est désormais bien sûr qu'ils restent finis.

Nous profiterons bientôt de ces remarques. Envisageons en attendant un ensemble de valeurs des ξ_i, ϖ_i constituant le voisinage d'un de ces sextuples Γ qu'on a eu l'occasion de considérer au Chap. préc. [n. 6], et qui résultent des valeurs nulles des ϖ_i, non toutes nulles à la fois des ξ_i. Soit D un domaine se rapportant aux douze variables ξ_i, ϖ_i, x'_i, p'_i, caractérisé comme on vient de dire (voisinage d'un Γ) par rapport aux ξ_i, ϖ_i, et comprenant le voisinage d'un système quelconque de valeurs finies des x'_i, p'_i, soumises à la seule restriction que les x'_i ne s'annulent pas toutes les trois (P' distinct de O, et par suite aussi de P, dès qu'on conçoit l'extension de D suffisamment petite).

On va constater que, *dans tout domaine D, H^*, considérée comme fonction des variables ξ_i, ϖ_i, x'_i, p'_i, se comporte régulièrement.*

Pour cela, il convient de s'appuyer encore une fois sur les formules (19) [du Chapitre précédent] pour en tirer à première vue que r, $r(p_1^2+p_2^2+p_3^2)=\xi$, *et rp_i sont, à l'intérieur d'un domaine D, des fonctions holomorphes des ξ_i, ϖ_i.*

D'ailleurs, puisque r' et Δ ne s'annulent pas dans D, les rapports r/r', r/Δ sont, eux aussi, des fonctions holomorphes (des ξ_i, ϖ_i, et des x'_i). Comme on a de (1)

$$(1') \qquad r\mathfrak{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)r(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+ \\ +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m'}\right)r(p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2)+\frac{1}{m_0}\sum_1^3{}_i\, rp_ip'_i,$$

et de (2)

$$(2') \qquad r\mathfrak{U}=f\left(m_0m+m_0m'\frac{r}{r'}+mm'\frac{r}{\Delta}\right),$$

les expressions des seconds membres montrent après coup qu'il s'agit de fonctions holomorphes dans D, dépendant dans leur ensemble de toutes nos douze variables.

Dès lors

$$H^*=r(H-E)=r\mathfrak{T}-r\mathfrak{U}-rE$$

apparaît elle aussi une fonction holomorphe des variables ξ_i, ϖ_i, x'_i, p'_i dans tout domaine D. C. Q. F. D.

5. - Régularisation d'un choc P, O.

Supposons que, pour u tendant à u_1 (valeur certainement finie d'après la remarque du n. 2), les deux corps P et O tendent à se choquer. Nous pouvons à présent compléter les constatations du n. précédent, en établissant que, pour $u=u_1$, les ξ_i aussi convergent (comme les ϖ_i, x'_i, p'_i)

vers des limites bien déterminées. Il suffit pour cela de faire jouer la double circonstance que, pour $u_1 - u$ assez petit, les valeurs prises par ξ_i, ϖ_i, x'_i, p'_i (le long de la trajectoire dont il s'agit) appartiennent certainement à un domaine D, et que par conséquent les seconds membres des équations (7'), et notamment les $-\partial H^*/\partial\varpi_i$, restent holomorphes, par rapport aux arguments ξ_i, ϖ_i, x'_i, p'_i. Dès que, pour $u < u_1$ et assez proche à u_1, ces arguments sont à leur tour des fonctions régulières de u, il en est autant des seconds membre susdits.

D'ailleurs, pour u tendant à u_1, les x'_i, p'_i, ϖ_i tendent [nn. 3 et 4] vers des valeurs limites bien déterminées. Il reste à établir qu'il en est de même pour les ξ_i, en sachant [n. 4] que $\xi = |\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}|$ admet une limite différente de zéro. Cette circonstance garantit que les seconds membres des (7'), fonctions holomorphes de u (à gauche de u_1), restent finis lorsque u converge à u_1. On peut alors raisonner comme au n. 10 du Chap. I. Ces seconds membres, et en particulier $-\partial H^*/\partial\varpi_i$, sont intégrables depuis une valeur quelconque u_0 (assez proche à u_1) jusqu'à u_1. On déduit donc, des équations différentielles

$$\frac{d\xi_i}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial\varpi_i} \qquad (i = 1, 2, 3)\,,$$

elles-même, l'existence des limites pour les ξ_i.

D'après cela, *une solution du système* (7'), *même si elle correspond à un choc P, O, n'a plus rien de singulier au point de vue analytique.* Il s'agit en effet d'une solution pour laquelle les fonctions inconnues ξ_i, ϖ_i, x'_i, p'_i, en correspondance d'une valeur finie u_1 de la variable indépendante, prennent des valeurs bien déterminées tombant dans un domaine D de régularité (pour les seconds membres des équations différentielles).

C. Q. F. D.

Dès que les ξ_i, ϖ_i se comportent régulièrement même pour $u = u_1$, elles tendent à leurs valeurs limites suivant une ligne régulière (de l'espace ξ_i, ϖ_i). Ceci permet de conclure, en revenant aux anciennes variables x_i, p_i [n. 6, équations (20) et (21) du Chap. préc.] que *les deux corps P, O tendent à se choquer suivant une direction bien déterminée* (caractérisée par les limites des cosinus directeurs x_i/r); *et que la vitesse de chacun d'eux, tout en devenant infinie, admet une direction limite.* A la vérité les équations (21) (du Chap. préc.) établissent ceci pour le vecteur de composantes p_i, c'est-à-dire pour la quantité de mouvement et par suite pour la vitesse *absolue* de P. Pour justifier à tout égard l'énoncé qui précède, on va constater ultérieurement que la vitesse relative de P par rapport à O admet la même direction limite. Cette direction limite appartient alors à toute sorte de vitesse de P et de O (absolue, ou relative d'un d'eux par rapport à l'autre).

On n'a qu'à tenir compte du groupe des équations (4) définissant les dx_i/dt:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}=\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)p_i+\frac{1}{m_0}p_i' \qquad (i=1,\,2,\,3)\,.$$

Les p_i' restent finies à l'instant du choc, mais non toutes les p_i [d'après (10)]. Il s'en suit que la vitesse relative de P par rapport à O (vecteur de composantes dx_i/dt) a la même direction limite que la vitesse absolue du même point P (vecteur ayant pour composantes p_i/m).

6. - Forme canonique de Jacobi. Régularisation tout à fait analogue qu'on peut lui faire subir.

Nous avons pris les équations du mouvement sous la forme canonique de Poincaré [n. 1]. Il est aisé de se rendre compte qu'il n'y a rien d'essentiel à modifier dans les considérations de ce Chapitre si l'on préfère d'adopter les équations canoniques de Jacobi.

En effet les douze fonctions inconnues figurant dans ces équations sont: les trois coordonnées x_i de P par rapport à O, comme dans l'autre cas; et neuf autres — je continuerai à les appeler p_i, x_i', p_i' — qui ont une signification différente. Il n'est pas nécessaire de la spécifier, sauf pour les x_i'. Celles-ci [comparez Chap. I, n. 4] sont les coordonnées de P' par rapport au barycentre B des deux autres corps P et O. Les coordonnées de B par rapport à O sont αx_i, où la constante (numérique) α n'est que la fraction $m/(m_0+m)$. Il s'en suit que les coordonnées de P' rapportées également à O (c'est-à-dire nos anciennes x_i') sont données par

$$\alpha x_i+x_i'\,;$$

et l'on a

$$\left\{\begin{aligned} r'^2 &= \sum_1^3{}_i\,(\alpha x_i+x_i')^2\,,\\ \Delta^2 &= \sum_1^3{}_i\{(1-\alpha)x_i-x_i'\}^2\,. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

La force vive $\mathfrak{T}$ s'exprime ici encore moyennant les p_i et les p_i', mais sans termes rectangles, sous la forme

$$\mathfrak{T}=\frac{1}{2}\mu(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{2}\mu'(p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2)\,, \tag{12}$$

les coefficients μ et μ' dépendant exclusivement des masses:

$$\mu = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m}, \qquad \mu' = \frac{M}{m'(m_0 + m)} \qquad (M = m_0 + m + m').$$

La fonction des forces est toujours

$$\mathfrak{U} = f\left(\frac{m_0 m}{r} + \frac{m_0 m'}{r'} + \frac{m m'}{\Delta}\right), \tag{2}$$

r' et Δ étant toutefois les fonctions (11) des x et des x'. On a bien entendu

$$H = \mathfrak{T} - \mathfrak{U},$$

après quoi le système canonique définissant le mouvement s'écrit encore sous la forme (4), d'où l'on arrive à (7) moyennant la transformation de DARBOUX-SUNDMAN.

Au point de vue qualitatif, tout se passe comme précédemment: lorsque les deux corps P et O tendent à se choquer, r tend à zéro, tandis que r' et Δ convergent vers une limite positive. Il s'en suit [comme au n. 3] que les arguments x_i', p_i' ont des limites finies, et [encore plus simplement qu'au n. 3, à cause de (12)] que

$$\lim_{u=u_1} r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \frac{2fm_0 m}{\mu} = \frac{2fm_0 m}{\dfrac{1}{m_0} + \dfrac{1}{m}}.$$

La transformation (I), (II) et les raisonnements des nn. 4 et 5 s'appliquent (sans qu'il soit même nécessaire d'invoquer la circonstance que les rp_i sont des fonctions holomorphes des ξ_i, ϖ_i), et le voisinage du choc binaire P, O reste également régularisée.

7. - Le paramètre symétrique τ et la règularisation complète du mouvement. Corollaire.

Considérons le produit

$$r\mathfrak{U} = f\left(m_0 m + m_0 m' \frac{r}{r'} + m m' \frac{r}{\Delta}\right)$$

comme fonction des variables ξ_i, ϖ_i, x_i', p_i' (ces dernières n'interviennent pas). Ainsi qu'on l'a fait remarquer au n. 4, il se comporte régulièrement au voisinage d'un choc P, O, état de choc compris, et ne s'y annule pas: en effet, pour $r=0$, $r\mathfrak{U}$ se réduit à $fm_0 m$.

Il s'en suit, en tenant compte de (6), que le paramètre τ, défini (à une constante inessentielle près) par la relation différentielle

$$d\tau = r\mathfrak{U}\,du = \mathfrak{U}\,dt\,, \tag{13}$$

peut rendre les mêmes services que u dans le domaine susdit, avec l'avantage, évident à cause de sa structure symétrique, de s'appliquer également aux autres chocs binaires éventuels: partout ailleurs, cela va sans dire, la substitution de τ à t comme variable indépendante est parfaitement légitime, puisque $\mathfrak{U}$ demeure fini et > 0.

La substitution de τ à u dans le système différentiel (7) (ayant égard à la circonstance que, pour les solutions qu'on a à considérer, $H^* = 0$) laisse subsister la forme canonique, pourvu qu'on remplace H^* par $H^*/r\mathfrak{U}$. On a partant le système

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{d\tau} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\,, & \dfrac{dx_i}{d\tau} = \dfrac{\partial F}{\partial p_i}\,, \\ \dfrac{dp'_i}{d\tau} = -\dfrac{\partial F}{\partial x'_i}\,, & \dfrac{dx'_i}{d\tau} = \dfrac{\partial F}{\partial p'_i} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3)\,, \tag{14}$$

où

$$F = \frac{1}{r\mathfrak{U}}\,H^* = \frac{1}{\mathfrak{U}}\,(H - E)\,, \tag{15}$$

et l'on doit se borner aux solutions pour lesquelles $F = 0$.

La seconde expression de F montre immédiatement que c'est une fonction régulière des variables x_i, p_i, x'_i, p'_i tant que les positions des trois corps sont distinctes; au voisinage d'un choc P, O, la transformation (I), (II) rétablit la régularité, ainsi qu'il résulte de la première expression de F et des nn. 4, 5; enfin, au voisinage d'un autre choc binaire (P', O, ou P, P'), on régularise d'une manière analogue, à cause de la symétrie substantielle de $F = (H - E)/\mathfrak{U}$ par rapport aux trois corps: il suffit de combiner une convenable transformation linéaire sur les x, x', p, p' (équivalente à un échange de rôle des trois corps) avec la même transformation (I), (II).

On a donc le droit d'affirmer que le système differentiel (14) est ou bien régulier, ou bien régularisable par une simple transformation canonique des fonctions inconnues, quelle que soit la valeur de τ, c'est-à-dire pour toute la durée du mouvement, même au delà des chocs, s'ils en arrivent.

Corollaire. – Les coordonnées des trois corps, lorsqu'elles ne figurent pas directement parmi les fonctions inconnues, sont (d'après (I), (II) et des formules élémentaires de transformation de coordonnées) des fonctions holomorphes des auxiliaires servant à régulariser. Il en résulte que *les coordonnées des trois corps, leurs distances mutuelles et* [d'après (13)] *aussi le temps t sont des fonctions du paramètre* τ, *régulières pour toutes les valeurs réelles de ce paramètre, qui correspondent biunivoquement à toutes les valeurs réelles du temps.* C'est la conclusion, bien connue aujourd'hui de M. SUNDMAN [25], laquelle a nettement scellé toute une catégorie de recherches anciennes et modernes.

8. - Complément formel qui reste encore à élaborer.

Considérons, pour commodité de langage, un espace S à douze dimensions en correspondance biunivoque avec les systèmes de valeurs des douze variables x_i, p_i, x'_i, p'_i figurant comme inconnues dans les équations différentielles (14).

Dès qu'on suppose le moment rèsultant $\boldsymbol{K}$ des quantités de mouvement différent de zéro, on peut exclure [Chap I, n. 11] un domaine de S entourant (pour ainsi dire) les collisions générales. Et il devient loisible de partager par la pensée la partie restante de S (qui peut être atteinte effectivement pendant un mouvement correspondant à des valeurs déterminées de K et de E) en quatre régions: trois voisinages des chocs binaires, S_1, S_2, S_3, et une quatrième S_0, dans laquelle les distances mutuelles ne descendent pas au dessous d'une certaine limite.

D'après le n. précédent le système différentiel (14) se comporte régulièrement: dans S_0 déjà par rapport aux variables x_i, p_i, x'_i, p'_i qui y figurent directement; dans chacun des S_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ par rapport à douze combinaisons (canoniques) convenables des mêmes variables.

On peut évidemment (dans une infinité de manières) choisir 12 paramètres canoniques

$$y_h\,, \quad q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, 6)$$

définissant l'état de mouvement des trois corps, doués de la propriété que la fonction caractéristique F se comporte régulièrement, par rapport aux arguments y_h, q_h, dans toutes nos quatre régions S_ν $(\nu = 0, 1, 2, 3)$. Il suffit par ex. que y_h, q_h coïncident avec les x_i, x'_i; p_i, p'_i dans S_0, avec les combinaisons canoniques régularisantes dans S_ν, à l'exception de très petites couches S^*_ν de ces dernières, tout près de leur frontière avec S_0. Dans S^*_ν, soit les x_i, p_i, x'_i, p'_i, soit les combinaisons qui se rapportent

(25) Loc. cit. (6).

à S_ν assurent la régularité du système (14), et on peut, sans la gêner jamais, imaginer à son gré une transition graduelle et canonique des unes aux autres.

Ceci en concept; mais il y a lieu de désirer un choix plus concret et plus expressif de ces paramètres. Je me borne à signaler la question. Une idée de sa nature et des ressources formelles auxquelles il faudrait vraisemblablement avoir recours est offerte par ce qui arrive dans le cas particulier du problème plan. Pour ce cas [où les substitutions régularisantes appartiennent à un type encore plus élémentaire que (I), (II)], la question dont il s'agit a été effectivement traitée avec tous les développements qu'elle comporte ([26]).

Padoue, Août 1917.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I.

Relations formelles - Quelques résultats dus á MM. Painlevé et Sundman.

([26]) Renvoi à la citation ([7]).

CHAPITRE II.

Transformations canoniques suggérées par le mouvement parabolique.

CHAPITRE III.

Régularisation explicite du voisinage d'un choc binaire.

X.

L'OTTICA GEOMETRICA E LA RELATIVITÀ GENERALE DI EINSTEIN

« Rivista d'Ottica e Meccanica di precisione », anno I, nn. 11-12 (1920), pp. 1-16.

Nei primi mesi del corrente anno si conobbero i risultati delle osservazioni istituite in occasione dell'eclisse del 29 maggio 1919, allo scopo di misurare l'incurvamento tenuissimo — diremo *deflessione*, seguendo gli astronomi inglesi — che, secondo la relatività generale di EINSTEIN, devono subire i raggi di luce provenienti dalle stelle quando passino nelle vicinanze del Sole.

La deflessione effettivamente constatata fu conforme alle previsioni della teoria, costituendone così una prova sperimentale, in certo senso anche più brillante, se non più decisiva, di quelle già offerte dalla spiegazione dell'esito negativo dell'esperienza di MICHELSON e dello spostamento secolare del perielio di Mercurio. In questi due ultimi casi si tratta infatti di render ragione di fenomeni già osservati (per quanto indarno investigati al lume degli ordinari principî di meccanica), mentre la deflessione dei raggi è un fatto nuovo, annunciato prima dalla teoria e poi suffragato dall'esperienza. Forse per questa ragione l'interesse suscitato nei competenti dalle memorabili scoperte dell'EINSTEIN (1), cominciò a diffondersi in tutti gli ambienti scientifici solo in seguito alla conferma astronomica dell'incurvamento dei raggi stellari; ed ebbe pronta ripercussione in un pubblico più largo.

---

(1) È doveroso il rilevare che EINSTEIN trovò la necessaria base matematica per la sua relatività generale nel calcolo differenziale assoluto, creato ed elaborato nell'ultimo trentennio dal Prof. G. RICCI, dell'Università di Padova. Un esempio altrettanto cospicuo di speculazioni astratte, divenute in un dato momento essenziali al progresso della filosofia naturale, si ha forse soltanto nella teoria delle coniche di Apollonio, che rese possibile la scoperta delle leggi di KEPLER.

Dacchè la questione rientra in certo senso nell'ottica di precisione, non è fuori di luogo informarne con qualche ampiezza i lettori di questa *Rivista*. Presupporremo in essi unicamente la conoscenza della meccanica classica, mirando a far intendere lo spirito del risultato finale e della sua deduzione quantitativa, senza intrattenerci sulle formule generali che racchiudono la teoria di EINSTEIN, nè cercare di surrogarle — impresa ardua e comunque non costringibile in poche pagine — con una volgarizzazione adeguata.

Parecchi scritti sono stati naturalmente dedicati all'argomento in libri e periodici: qualcuno avrò occasione di citarne; degli altri mi limito a segnalare l'eccellente memoria del PALATINI, *Lo spostamento del perielio di Mercurio e la deviazione dei raggi luminosi* (« Nuovo Cimento », luglio 1917, pp. 12-54), da cui il presente articolo si differenzia perchè mira ad illustrare soltanto il fenomeno ottico col minimo sforzo.

I

RICHIAMI D'OTTICA GEOMETRICA SECONDO LO SCHEMA CLASSICO

1. - Generalità - Legge di rifrazione - Principio di Fermat.

In un mezzo trasparente, omogeneo, la luce si propaga notoriamente in linea retta con velocità costante. Nel caso dell'isotropia, cui esclusivamente ci riferiremo, la velocità è sempre la stessa in tutte le direzioni e costituisce quindi una costante caratteristica del mezzo. Per l'aria (e così sensibilmente per gli spazi interplanetari), questa costante vale in cifra tonda

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec},$$

ossia 300 000 km al secondo.

Se si tratta invece di mezzo eterogeneo, in cui l'indice di rifrazione n, che è poi l'inversa della velocità di propagazione, varia da punto a punto, allora i raggi non hanno in generale andamento rettilineo, ma sono incurvati secondo una legge che dipende dal modo di variare di n col posto, cioè dalla funzione $n(x, y, z)$, designandosi al solito con x, y, z coordinate cartesiane di un punto geometrico del mezzo.

Ecco quali considerazioni conducono a caratterizzare l'andamento dei raggi.

Si parte dal caso elementare di un mezzo illimitato che consta di due porzioni S_0, S, ciascuna separatamente omogenea, ma aventi due diversi indici di rifrazione n_0, n. Sia σ la superficie di separazione fra S_0 ed S. Entro S_0 ogni raggio ha andamento rettilineo; così pure entro S. Perciò, nel passare da un punto generico P_0 di S_0 ad altro punto, pure generico,

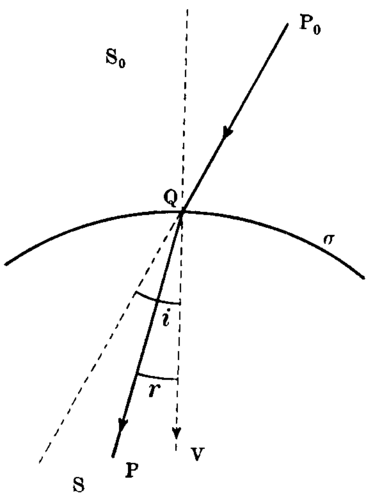


Fig. 1.

P di S, la luce segue un cammino che consta di due tratti rettilinei: P_0Q, da P_0 fino ad un certo punto Q (a priori incognito) di σ; e QP. Le leggi sperimentali della rifrazione, attraverso la superficie di separazione σ, ci dicono poi che i due segmenti P_0Q, QP non sono in generale per diritto, stanno però in un medesimo piano colla normale V alla superficie in Q, l'ubicazione di Q essendo tale da rendere soddisfatta la nota legge (di CARTESIO)

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{n}{n_0},$$

in cui i ed r designano gli angoli formati dal raggio incidente e dal raggio rifratto rispettivamente colla normale ν alla superficie σ in Q (raggi e normale intendendosi orientati nel senso della propagazione).

Orbene, queste leggi geometriche sono incluse nel principio di FERMAT del minimo tempo. Se infatti si cerca quale sia il cammino fra P_0 e P lungo cui la luce si propaga nel tempo più breve, appare in primo luogo manifesto che, in ognuna delle due porzioni S_0 ed S (entro cui la velocità è costante), tale cammino deve essere rettilineo; sicchè tutto si riduce ad individuare la posizione di Q su σ in base alla condizione che risulti minima la somma

$$t = n_0 \overline{P_0 Q} + n \overline{QP}$$

dei due tempi che la luce impiega a percorrere il segmento P_0Q (colla velocità $1/n_0$) e il segmento QP (colla velocità $1/n$). In condizioni di minimo deve essere $\delta t = 0$, e un facile calcolo porta subito a riconoscere che ciò implica appunto le leggi di CARTESIO ([2]).

2. - Mezzo costituito da più strati omogenei - Caso limite Formula variazionale cui dà luogo il principio di Fermat.

Lo stesso avviene più generalmente se il mezzo consta di quantesivogliano, diciamo $m+1$, porzioni omogenee, essendo interposti, fra S_0 ed S, $m-1$ strati intermedi, separati l'uno dall'altro e dai due estremi dalle superficie successive $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$. Gli indici di rifrazione siano ordinatamente le costanti $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}, n$.

Per andare da P_0 a P, un raggio dovrà attraversare le varie σ in punti (*a priori* incogniti) $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$. Il principio di FERMAT esige in primo luogo che detto raggio sia costituito da una spezzata a tratti rettilinei $P_0Q_1, Q_1Q_2, \ldots, Q_{m-1}Q_m, Q_mP$. L'ubicazione dei punti Q sarà poi caratterizzata dalla condizione di rendere minima la durata totale del tragitto, cioè il tempo,

$$t = n_0 \overline{P_0 Q_1} + n_1 \overline{Q_1 Q_2} + \ldots + n_{m-1} \overline{Q_{m-1} Q_m} + n \overline{Q_m P} .$$

Anche qui si constata ovviamente che, per $\delta t = 0$, le rifrazioni successive ottemperano tutte alle leggi di CARTESIO. Perciò il principio di FERMAT, o anche soltanto quella parte di esso che esprime le condizioni

([2]) Cfr. per es. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle* (3ª ediz., Paris, Gauthier-Villars, 1909), T. I, Cap. VII, n. 150, pp. 220-223.

differenziali necessarie pel minimo, cioè la formula

$$\delta t = 0 ,$$

apparisce come una opportuna sintesi dei fatti osservati.

Il caso più interessante di un mezzo eterogeneo, in cui n varia con continuità da punto a punto, si può ovviamente desumere per via di limite dalle stratificazioni discrete ora contemplate. Basta per un momento immaginare, nel mezzo assegnato, un certo numero di superficie della famiglia

$$n(x, y, z) = \text{cost.} ,$$

abbastanza vicine perchè dall'una all'altra di esse la n si mantenga sensibilmente costante. In un mezzo ipotetico nel quale la n fosse rigorosamente costante entro i singoli strati, subendo invece bruschi salti attraverso le superficie che li separano, l'andamento del raggio sarebbe di spezzata poligonale retta dal principio di FERMAT. Ciò porta a passare al limite quando il numero degli strati cresce indefinitamente, ammettendo in conformità che seguiti ad essere valido lo stesso principio anche nel caso di un indice di rifrazione $n(x, y, z)$ variabile con continuità. Ove si indichi con ds l'elemento d'arco di un generico raggio di luce propagantesi nel mezzo, $n\,ds$ rappresenta manifestamente il tempuscolo impiegato dalla luce a percorrere ds, e il principio di FERMAT si traduce nel fatto analitico che la curva incognita, seguita dal raggio luminoso fra due punti prefissati P_0, P, deve corrispondere al minimo tempo di percorso, ossia minimizzare l'$\int_{P_0P} n\,ds$. Abbandonando come sopra le specificazioni qualitative addizionali, che si richiedono per un effettivo minimo, e limitandoci ad esprimere che si annulla la variazione prima, possiamo inferirne che l'*ottica geometrica di un mezzo in cui* $n(x, y, z)$ *è una funzione qualunque del posto* (continua e derivabile quanto occorre) *rimane sostanzialmente compendiata nella formula* (*variazionale*).

$$\delta\int n\,ds = 0 . \tag{1}$$

Da questa si ricaverebbero ovviamente (col solito algoritmo del calcolo delle variazioni) le equazioni differenziali (equivalenti) atte a fornire, per integrazione, la forma effettiva dei raggi (fra due punti qualisivogliono del mezzo). Ma è preferibile, specie in vista delle considerazioni che mi propongo di svolgere più avanti, di evitare il calcolo diretto, profittando invece di una nota equivalenza dinamica. Ed ecco quale.

3. - Traiettorie dinamiche nei problemi conservativi - Fascio corrispondente ad un assegnato valore della costante delle forze vive - Equazioni differenziali del fascio - Principio della minima azione.

Si consideri un punto materiale (x, y, z) il quale si muova sotto l'azione di una forza conservativa. Sia

$$U(x, y, z)$$

il potenziale di questa forza, unitario, cioè riferito all'unità di massa del punto di applicazione. Supposto che gli assi di riferimento sieno fissi (nel senso ordinariamente attribuito in meccanica a tale qualifica), si ha, per caratterizzare il moto del punto, la equazione (vettoriale) fondamentale della meccanica: accelerazione = forza unitaria, ossia, proiettando sui tre assi,

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{2}$$

il punto sovrapposto indicando derivazione rispetto al tempo t.

Le (2) ammettono notoriamente l'integrale (delle forze vive)

$$\frac{1}{2} v^2 - U = E, \tag{3}$$

in cui $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ rappresenta manifestamente il quadrato della velocità del mobile, e la costante delle forze vive E l'energia complessiva (di moto e di posizione) che gli compete per unità di massa.

Alle (2) equivalgono le così dette equazioni intrinseche che provengono dalla stessa equazione vettoriale sopra ricordata, proiettando sulla tangente alla traiettoria, sulla sua normale principale N e sulla binormale B.

La prima si può immaginare sostituita dalla relazione integrale (3). Le altre due, ricordando che le componenti dell'accelerazione secondo N (verso la concavità della traiettoria) e secondo B valgono rispettivamente v^2/ϱ (ϱ raggio di curvatura) e 0, si scrivono

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{dU}{dN}, \qquad 0 = \frac{dU}{dB}, \tag{4}$$

i secondi membri essendo visibilmente derivate di direzione: del potenziale U secondo le (*a priori* incognite) direzioni N e B.

Se si tien conto della (3), *si può risguardare* v^2 (introdotto originariamente come quadrato della velocità del mobile) *quale una funzione nota del posto.* D'altra parte, nei secondi membri delle (4), si può anche scrivere, al posto di U, $U+E$, ossia $\frac{1}{2}v^2$. Coll'accezione testè attribuita a v, scompare il tempo, e rimangono soltanto elementi geometrici. In altri termini, si ha il risultato della eliminazione di t dalle equazioni del moto, ossia le equazioni differenziali che definiscono tutte le possibili traiettorie, nel campo di forza derivante da un assegnato potenziale $U(x, y, z)$, sotto la forma

$$(4') \qquad \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dN} = \frac{v^2}{\varrho}, \qquad \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dB} = 0,$$

essendo v^2 legata ad U dalla (3), con E costante arbitraria.

Immaginiamo in particolare di attribuire ad E un ben determinato valore, con che anche v^2 rimane univocamente individuato in funzione del posto. Le (4') definiscono allora non più tutte le traiettorie, ma soltanto un loro *fascio*, chiamandosi appunto fascio il complesso delle traiettorie che corrispondono ad un medesimo valore della costante E. Le (4') stesse sono in definitiva due equazioni differenziali del secondo ordine fra x, y, z; perciò la loro integrazione introduce quattro costanti arbitrarie, e un fascio consta in conformità di ∞^4 traiettorie. La totalità delle traiettorie, risultando dall'insieme di tutti i fasci viene invece a dipendere da cinque costanti: le quattro di un fascio generico e la E (che sono essenziali, cioè non riducibili a meno di cinque, escluso soltanto il caso di U costante, ossia di un campo di forza nullo).

Per il nostro scopo, cioè per evitare la trattazione diretta del problema generale dell'ottica geometrica, subordinando la ricerca dei raggi a quella di un fascio di traiettorie di un opportuno problema dinamico, è d'uopo ricorrere altresì al principio della minima azione.

Questo principio si traduce analiticamente in una equazione variazionale (esente da t) che, per un assegnato valore della costante E, compendia le equazioni del corrispondente fascio di traiettorie. Essa esprime che si annulla la variazione dell'azione relativa all'arco di traiettoria compreso fra due punti generici, l'azione essendo definita come

$$\int\sqrt{2(U+E)}\,ds\,,$$

esteso all'arco di traiettoria di cui si tratta ([3]).

([3]) APPELL, loc cit., Cap. XV, n. 220, pp. 543-544.

Abbreviando la scrittura, coll'usare qui ancora v^2 in luogo della sua espressione esplicita $2(U+E)$, si può in definitiva ritenere come equivalente alle (4) la formula variazionale

$$\delta\int v\,ds = 0\,. \tag{5}$$

4. - Identità fra raggi luminosi e fasci di traiettorie dinamiche Subordinazione di questi a quelle.

La (5) [risguardandovi v, come realmente è in base alle (3), quale funzione assegnata di x, y, z] differisce dalla (1) soltanto per lo scambio materiale di n in v. *Basta dunque sostituire n a v nelle* (4′) *per avere, sotto la forma esplicita:*

$$\frac{1}{2}\frac{dn^2}{dN} = \frac{n^2}{\varrho}\,, \qquad \frac{1}{2}\frac{dn^2}{dB} = 0\,, \tag{4''}$$

le equazioni differenziali dei raggi luminosi in un mezzo di indice n.

A questo criterio di equivalenza giova attribuire un'altra forma, che riescirà più agile, pur essendo meno definitiva in quanto, a differenza delle (4′), (4″), involge ancora la variabile ausiliaria t. Essa consiste nell'enunciato seguente:

I raggi luminosi in un mezzo di indice variabile $n(x, y, z)$ costituiscono altrettante traiettorie dinamiche di un punto materiale soggetto ad una forza derivante dal potenziale $\frac{1}{2}n^2$, e precisamente, valendo per il problema dinamico l'integrale delle forze vive

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}n^2 = \text{cost.}\,,$$

quel fascio di traiettorie, per cui è zero la costante del secondo membro, con che $v = n$.

La giustificazione è manifesta, perchè si riporta senz'altro alla coincidenza di (4′) e (4″) per $v = n$.

La regola, testè formulata, è molto comoda consentendo interessanti interpretazioni ottiche di risultati già bene acquisiti o addirittura familiari nella loro veste meccanica. Consideriamo per es. il caso tipico — che dà luogo in condizioni opportune al così detto miraggio di MONGE [1] — di un mezzo in cui l'indice di rifrazione n varia soltanto colla quota z. Prendiamo anzi addirittura l'ipotesi (che sopra tutto ha interesse fisico)

---

[1] Veggasi ad es. A. GARBASSO, *Il miraggio*, « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino », t. LVII, 1906, pp. 1-57.

di una variazione lenta. Potremo in tal caso assumere, come espressione di n in funzione di z,

$$n = n_0\left(1 + \frac{z}{h}\right),$$

essendo n_0 ed h costanti, e di più quest'ultima (la quale è una lunghezza) tale che, nell'ambito dei valori di z che occorre prendere in considerazione, il rapporto z/h si possa trattare come quantità di primo ordine. Si ha allora, trascurando z^2/h^2 e designando con g la costante n_0^2/h,

$$\frac{1}{2}n^2 = \frac{1}{2}n_0^2\left(1 + 2\frac{z}{h}\right) = \frac{1}{2}n_0^2 + gz\,.$$

I raggi si confondono pertanto con traiettorie di un problema dinamico in cui il potenziale $\frac{1}{2}n^2$ è funzione lineare di z. Questa dipendenza lineare del potenziale dalla sola z sta a dire che la forza è parallela all'asse delle z ed ha per valore (più precisamente per componente unitaria) g. Ci ritroviamo quindi (salvo il diverso valore numerico di g) nel caso elementare del moto dei gravi. I raggi (qualora non degenerino in rette) saranno altrettante parabole ad asse verticale, colla concavità nel senso della forza, cioè nel senso in cui cresce n, ecc.

II

ENERGIA E MATERIA COME ASPETTI DIVERSI DI UNA STESSA ENTITÀ FISICA

5. - Fenomeni radioattivi - Energia intrinseca della materia - Proporzionalità fra massa e energia e relativo coefficiente.

La teoria elettromagnetica della luce ci ha abituati a risguardare le vibrazioni luminose come distinte soltanto quantitativamente dalle oscillazioni elettriche.

Una identificazione anche più radicale di quantità fisiche considerate finora come indipendenti — materia ed energia — è stata suggerita, in modo spontaneo ma ancora timido, dai fenomeni radioattivi, e si è poi affermata vigorosamente come conseguenza quasi ineluttabile delle nuove concezioni teoriche. Si tratta anzitutto della constatazione sperimentale che nei corpi radioattivi si trova immagazzinata una enorme quantità di energia. Per es. un grammo di radio metallico è capace di sviluppare (nel corso delle sue trasformazioni) oltre tre milioni di grandi calorie. Questa energia, che si va svolgendo durante il processo di disintegrazione del radio, e così delle altre sostanze radioattive, deve necessariamente essere contenuta, in misura non prima sospettata, entro ogni atomo di queste sostanze. Siccome d'altra parte, dal punto di vista chimico, i corpi radioattivi (tranne l'alto peso atomico) non hanno caratteri speciali, così appare ragionevole l'induzione che ogni atomo di qualsiasi elemento racchiuda energia in misura altrettanto cospicua, voglio dire dello stesso ordine di grandezza. Un apprezzamento quantitativo fu suggerito per tutt'altra via dalla relatività (anche della prima maniera), la quale porta per forza di cose ad ammettere che la massa di un corpo varî (lievissimamente), oltrechè colla velocità, coll'energia che vi ha sede, e precisamente aumenti di $\Delta E/c^2$ se gli si comunica una energia addizionale ΔE.

Si è fatta così strada nella fisica moderna, e si può ritenere acquisita indipendentemente da ogni speciale costruzione teorica, la veduta che energia e materia siano necessariamente concomitanti (energia $=$massa $\times c^2$); e si possono quindi risguardare come manifestazioni diverse di una stessa entità, la quale ci appare come materia ordinaria quando sia, per così dire, abbastanza concentrata, mentre si avverte, nelle forme più svariate, come energia quando non ci sono nuclei di condensazione.

Questo costituisce evidentemente un riconoscimento di equivalenza non meno grandioso di quello affermato dal primo principio della termodinamica. Esso si precisa nel dato quantitativo che c^2 è il fattore di proporzionalità fra la misura di una massa e quella della concomitante energia, e si designa perciò come *principio* o *postulato di proporzionalità*. Si può anche dirlo principio di identificazione (fra energia e materia), o anche di materializzazione dell'energia, o infine di inerzia e peso della medesima, le quali ultime denominazioni sono giustificate dal fatto che, ammessa la proporzionalità fra energia e massa materiale, l'energia stessa rimane materializzata e quindi dotata delle due qualità fondamentali che competono ai corpi ponderabili: inerzia, nonchè peso, cioè più generalmente attitudine a risentire l'azione gravitazionale degli altri corpi.

6. - Conseguenze ottiche.
Incurvamento dei raggi luminosi entro un campo di forza.

La schematizzazione cinematica, ricordata al § 1, basta per lo svolgimento dell'ottica geometrica; non così per l'ottica fisica. La spiegazione dei più complessi fenomeni di interferenza, di diffrazione, di polarizzazione, ecc., richiede notoriamente una teoria che penetri alquanto più addentro nell'analisi del fenomeno. La teoria ondulatoria, che risale ad Huygens e si affermò in modo definitivo con Joung e Fresnel, fu costituita in modo soddisfacente da prima su modello elastico (desunto dalle vibrazioni dei corpi solidi), poi, per opera di Maxwell, su modello elettromagnetico. Sia in questa teoria, oggi universalmente accettata, che nella anteriore teoria elastica, si identificano i raggi luminosi colle linee di flusso dell'energia, la velocità del flusso essendo quella sperimentalmente constatata per la luce. Se si associa a questa circostanza, già da tempo acquisita, il postulato di proporzionalità introdotto al n. precedente, si è necessariamente condotti ad assumere che, lungo ogni raggio luminoso, viaggia della materia: in quantità così esigua (stante la piccolezza del fattore di proporzionalità per cui ad un *erg* corrisponde appena la frazione $1/c^2 = 1/(9 \cdot 10^{20})$ di grammo) da risultare inapprezzabile nella maggior parte dei casi, ma pur sempre materia.

Questa nuovissima materializzazione dell'energia lascia sussistere il concetto di propagazione ondosa e la conseguente spiegazione dei fenomeni concreti; sicchè, dal punto di vista filosofico concilia la teoria ondulatoria con l'antica teoria dell'emissione.

Ma vediamo quali specifiche conseguenze discendono dal principio di proporzionalità, quando ci si pone nelle condizioni più opportune perchè si possa avvertire l'influenza della (diluitissima e velocissima) materia che percorre i singoli raggi.

Consideriamo all'uopo un mezzo trasparente nel quale (in assenza d'ogni azione perturbatrice) la luce si propaga colla velocità costante c. Supponiamo che questo mezzo sia sede di un campo di forza, e sia $U(x, y, z)$ il relativo potenziale. Un punto materiale libero che si muove in questo campo è soggetto unicamente alla forza derivante dal potenziale U e descrive quindi delle traiettorie che in generale non sono rette, ma curve, il raggio di curvatura in un punto generico essendo legato al valore di U (in quel punto) e alla velocità (pure in quel punto) del mobile dalla prima delle (4). Essa mostra tra altro, come è del resto evidente per intuizione, che *caeteris paribus*, la traiettoria è tanto meno incurvata quanto maggiore è la velocità. Orbene, se è vero che i raggi luminosi sono effettivamente traiettorie di particelle materiali (sia pure così infime, da essersi finora rivelate all'esperienza — e all'esperienza ottica che è la più squisita — con sole caratteristiche energetiche), ciascuna di queste particelle deve pur obbedire alle leggi dinamiche, e quindi, supponendo trascurabili le mutue influenze, con che ciascuna si comporta come un punto materiale libero, alle (3) e (4). D'altra parte le leggi stesse devono riportare, almeno con grande approssimazione, ai fatti osservati in condizioni ordinarie, i quali sono: velocità c, andamento rettilineo anche entro il campo gravitazionale terrestre e solare.

7. - Apprezzamenti numerici sul campo gravitazionale nel sistema solare e sul presumibile incurvamento dei raggi luminosi.

Possiamo agevolmente rendercene conto, assegnando anche la formula che in seconda (e più che bastevole) approssimazione può essere sostituita alla prima delle (4) come misura dell'incurvamento locale.

Cominciamo perciò dal considerare l'ordine di grandezza di U che vogliamo identificare col potenziale newtoniano di campi appartenenti al sistema solare. A titolo di apprezzamento, possiamo riferirci a corpi sferici, omogenei, ovvero stratificati per sfere concentriche. Se R è il raggio, M la massa ed f la costante di attrazione, fM/R rappresenta il valore del potenziale proprio alla superficie, valore che è evidentemente il più grande di quelli presi da U nei punti non interni alla sfera potenziante, dacchè essa agisce su ognuno di questi punti come se tutta la massa fosse raccolta nel centro. In quanto poi ai varî corpi del sistema solare, il più grande valore numerico di fM/R si ha notoriamente pel Sole. Si tratta in ogni caso di una quantità [che ha le dimensioni di un potenziale unitario e quindi del quadrato di una velocità, come tra altro apparisce dalla (3)] molto piccola rispetto a c^2.

Calcoliamo infatti il rapporto fM/c^2R, pel Sole, tenendo conto di $c = 30 \cdot 10^4$ km/sec, e di questi altri due dati: *a*) il raggio apparente del Sole (per un osservatore terrestre alla distanza media) vale in cifra tonda (errore relativo inferiore al millesimo) 16′; *b*) la velocità (media) della Terra nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole vale, pure in cifra tonda (con errore inferiore al centesimo), 30 km al secondo.

Designando con Δ la distanza media Sole-Terra, sarà R/Δ la misura in radianti dell'angolo di 16′, sicchè

$$\frac{R}{\Delta} = 16 \cdot \frac{2\pi}{360 \cdot 60} = \frac{4\pi}{27 \cdot 10^2},$$

ossia

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{27 \cdot 10^2}{4\pi} = 214 .$$

Si ha così, in base al dato *a*) ,

$$\frac{1}{c^2}\frac{fM}{R} = \frac{\Delta}{R} \cdot \frac{1}{c^2}\frac{fM}{\Delta} = 214 \cdot \frac{1}{c^2}\frac{fM}{\Delta} .$$

Ricordiamo d'altra parte che, per il moto in un circolo di raggio Δ dovuto all'attrazione della massa M situata nel centro, si ha [per es. dalla prima delle (4)]

$$v^2 = \frac{fM}{\Delta}.$$

Applicando questa relazione al moto orbitale terrestre e tenendo conto del dato *b*), possiamo scrivere

$$\frac{1}{c^2}\frac{fM}{\Delta} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 10^{-8},$$

onde risulta

$$(6) \qquad \frac{1}{c^2}\frac{fM}{R} = 214 \cdot 10^{-8} = 2{,}14 \cdot 10^{-6}.$$

Dacchè, come già si osservò, nell'espressione del potenziale U dovuto ai corpi del sistema solare, il termine che rispecchia l'attrazione del Sole assume un valore massimo di gran lunga preponderante sugli analoghi massimi degli altri termini, si può ritenere che, *in tutto lo spazio interplanetario, l'ordine di grandezza di* U/c^2 *è conforme alla* (6), *cioè inferiore a pochi milionesimi.*

Entro questa approssimazione la (3) ci fa precisamente ritrovare la prima legge dell'ottica geometrica (velocità di propagazione $= c$). Basta infatti attribuire alla costante E del secondo membro il valore $\frac{1}{2}c^2$ per avere come espressione rigorosa di v:

$$v^2 = c^2 - 2U = c^2\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right),$$

donde appunto, trascurando $2U/c^2$ (che ammonta al massimo a pochi milionesimi) di fronte all'unità,

$$v = c, \qquad \textit{c. d. d.}$$

L'altra legge, considerata finora come fondamento dell'ottica geometrica, è che (anche entro campi di forza quali quelli esistenti negli spazî interplanetari) i raggi hanno andamento rettilineo. Secondo l'ammesso postulato, le traiettorie sono invece definite dalle (4), in cui va sostituito a v^2 il valore (3), ossia, coll'approssimazione testè specificata, il valore costante c^2. Ciò consente senz'altro di riconoscere che, se l'andamento non è rigorosamente rettilineo come assume la fisica classica, se ne scosta però in misura quasi insignificante. Infatti, dalla prima delle (4), in cui si scriva c^2 per v^2, si ha

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{c^2}\frac{dU}{dN}.$$

La derivata dU/dN rappresenta la forza del campo nella direzione N, e perciò non può superare l'intensità di tale forza. Riprendendo il caso tipico del Sole, che fissa l'ordine di grandezza, si ha la massima intensità alla sua stessa superficie, talchè

$$\left|\frac{dU}{dN}\right| \leqslant \frac{fM}{R^2},$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{\varrho} \leqslant \frac{1}{c^2}\frac{fM}{R}\cdot\frac{1}{R}.$$

Il primo fattore del secondo membro è un puro numero, e precisamente, in base alla (6), la piccola frazione $2{,}14\cdot 10^{-6}$. Ne viene che $1/\varrho$ (cioè l'incurvamento dei raggi per effetto del campo gravitazionale) non supera tale piccola frazione di $1/R$; in altri termini, il raggio di curvatura, se non è proprio ∞, come per le rette, è almeno dell'ordine di un milione di volte il raggio del Sole.

8. - Effetto angolare massimo (deflessione) per raggi che rasentano la corona solare - Applicazione ad un osservatore terrestre.

La forma rigorosa dei raggi va naturalmente desunta dalle (3), (4), con $E = \frac{1}{2}c^2$. Si tratta, come abbiamo più volte rilevato, delle equazioni del moto di un punto materiale in un campo conservativo di potenziale U. Se questo proviene da un'unica massa gravitante — pensiamo specificamente al Sole — il problema è proprio quello del moto di un punto attratto da un centro fisso, la cui integrazione risale a NEWTON. Le traiettorie sono classicamente coniche col fuoco nel centro di forza, la cui specie dipende dal segno della costante E. Per $E > 0$, e tale è il caso nostro, in cui va attribuito ad E il valore $\frac{1}{2}c^2$, si tratta manifestamente di iperboli. La circostanza qualitativa già rilevata che i raggi rimangono pochissimo incurvati, anche se passano vicinissimi al Sole, ci avverte che dovrà in ogni caso trattarsi di iperboli a asintoti OA', OT' quasi per diritto (fig. 2).

Consideriamo in modo preciso un raggio iperbolico il quale lambisca la sfera solare in V. Sia O il centro dell'iperbole, S quello del Sole e quindi il fuoco della stessa iperbole. Sarà V il suo vertice e, ove si designi con a il semiasse trasverso, con e l'eccentricità, avremo per definizione

$$\overline{OV} = a\,, \qquad \overline{OS} = ae\,, \qquad \overline{SV} = R = a(e-1)\,.$$

Si sa d'altra parte dalla geometria analitica che, se si rappresenta con δ l'angolo (esterno) compreso fra i due asintoti,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\,.$$

Nel caso che ci occupa, δ deve essere piccolissimo; quindi e grandissimo, in base alla formula ora scritta. Potremo tranquillamente ritenere

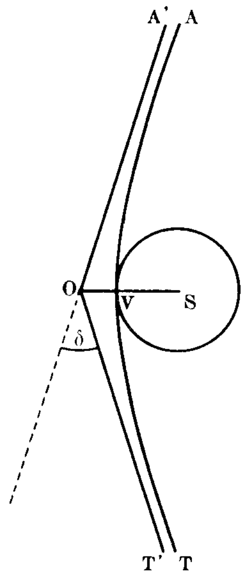


Fig. 2.

la tangente confondibile coll'arco, e $1/e$ trascurabile di fronte all'unità. Con ciò al posto di

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\delta = \frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e}\,,$$

si può scrivere

$$\delta = \frac{2}{e} = \frac{2}{e}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{e}} = \frac{2}{e-1}\,.$$

Badando alla relazione $R = a(e - 1)$, risulta in definitiva come misura di δ in funzione delle due lunghezze R ed a,

$$\delta = \frac{2a}{R}\,. \tag{7}$$

Il semiasse trasverso a, nel moto iperbolico dovuto all'attrazione newtoniana di una massa M, è classicamente legato alla costante E delle forze vive dalla relazione

$$E = \frac{fM}{2a}\,.$$

Ricavandone a e ponendo per E il suo valore $\frac{1}{2}c^2$, la (7) diviene

$$\delta = 2 \cdot \frac{1}{c^2} \frac{fM}{R}\,, \tag{7'}$$

e quindi, badando alla (6),

$$\delta = 4{,}28 \cdot 10^{-6}\,.$$

Il secondo membro è un puro numero che esprime l'angolo δ in radianti. Per averlo in $''$, dovremo moltiplicare per

$$\frac{360 \times 60 \times 60}{2\pi} = 57^\circ\, 17'\, 45'' = 206265''\,,$$

con che risulta

$$\delta = 0'',88\,. \tag{8}$$

Si riconosce immediatamente che quest'angolo δ porge appunto la misura della *deflessione*, ossia della massima deviazione angolare di cui è suscettibile un raggio stellare per effetto gravitazionale del Sole. Supponiamo infatti di considerare un raggio di luce che parte da un astro A e arriva ad un osservatore terrestre T, seguendo un arco di iperbole che rasenta la corona solare in V, come nella fig. 2. La direzione dell'iperbole in T, secondo cui l'osservatore riceve il raggio di luce, si confonde con quello dell'asintoto OT'; la direzione secondo cui la luce è partita dall'astro è quella della tangente in A, che si confonde a sua volta coll'altro asintoto $A'O$. *c. d. d.*

Naturalmente $A'O$ si può identificare colla direzione secondo cui T percepisce la stella in condizioni normali, cioè quando, allontanandosi il Sole dalla direzione Terra-Astro e divenendo insensibile la perturbazione gravitazionale corrispondente, il raggio visuale torna ad essere rettilineo (ossia si scosta dall'andamento rettilineo in modo addirittura inapprezzabile).

Non sarà male osservare che, se il raggio visuale di una stella, anzichè rasentare la sfera solare, passa a una distanza $R_1 > R$ dal centro del Sole, la deflessione diminuisce, precisamente in ragione inversa della detta distanza perielia R_1.

Basta osservare che l'espressione (7) di δ seguita naturalmente a sussistere, per una qualsiasi stella visibile dalla Terra, purchè soltanto vi si sostituisca al posto di R la distanza perielia R_1. Avremo in conformità

$$\delta = \frac{2a}{R} = \frac{2a}{R} \cdot \frac{R}{R_1} .$$

Il fattore $2a/R_0$ è stato calcolato or ora, sicchè risulta in definitiva

$$\delta = 0{,}88 \frac{R}{R_1} .$$

Dacchè R corrisponde a $16'$, basta evidentemente che la distanza angolare dal centro del Sole sia di pochissimi gradi, perchè δ non superi qualche centesimo di secondo e riesca quindi del tutto inavvertibile, come se il raggio rimanesse rigorosamente rettilineo.

9. - Ritorno al caso generale di un campo di forza qualsiasi - Equazione variazionale dei raggi luminosi, che compendia le vedute ordinarie associate al principio di proporzionalità.

Abbiamo già rilevato alla fine del n. 6 che, in un generico campo di forza di potenziale U, la propagazione dei raggi luminosi è retta dalle (3), (4), ossia dalle stesse equazioni che convengono al moto di un punto materiale; soltanto (n.° 7) conviene specificare la costante delle forze vive E attribuendole il valore $\frac{1}{2}c^2$. Con ciò si ha

$$v = \sqrt{c^2 + 2U} ,$$

e l'equazione variazionale (5) che definisce comprensivamente il fascio di traiettorie coincidente coi raggi luminosi, si scrive

$$\delta \int \sqrt{c^2 + 2U}\, ds = 0 ,$$

o, ciò che è lo stesso, dividendo ambo i membri per c,

$$\delta \int \sqrt{1 + \frac{2U}{c^2}}\, ds = 0 . \tag{9}$$

III

LA RELATIVITÀ GENERALE E LE SUE CONSEGUENZE CONCRETE CIRCA L'ANDAMENTO DEI RAGGI LUMINOSI IN UN CAMPO DI FORZA

10. - Tempo e spazio nella fisica classica - Demolizione relativistica delle premesse tradizionali.

Due sono i cardini della abituale rappresentazione geometrica e cinematica dei fenomeni naturali:

1) Lo spazio in cui tali fenomeni si localizzano è rigorosamente euclideo, possiede cioè le ben note caratteristiche che gli attribuisce l'intuizione diretta, disciplinata e codificata dalla geometria elementare.

2) Il tempo si può concepire e (almeno in astratto) misurare indipendentemente da ogni riferimento spaziale; esiste cioè un assoluto al quale si possono immaginare riportati gli orologi di tutti gli osservatori. È questo il tempo contemplato nella legge di inerzia, nella costanza della velocità c della luce rapporto all'etere, ecc.

Orbene, la così detta relatività ristretta (o della prima maniera) ha cominciato col contestare questa seconda veduta, rilevando, in base alle stesse modalità fisiche di misura del tempo, che due osservatori in moto (uniforme) l'uno rispetto all'altro, possono arrivare con identico procedimento (scambio di segnali) ad apprezzarlo in modo diverso. Donde l'opportunità di modificare tutta l'impostazione concettuale, rinunciando al tempo assoluto, e sostituendovi un postulato che mette, per così dire, sullo stesso piede due osservatori che sono in moto (uniforme) l'uno rispetto all'altro. Il postulato consiste nell'ammettere l'eguaglianza, per entrambi, della velocità di propagazione di uno stesso raggio di luce, mentre secondo la cinematica classica, queste due velocità dovrebbero differire per quella spettante al moto relativo dei due osservatori. Con ciò si stabilisce un legame fra le misure di tempo e quelle di spazio, e si vengono ad alterare in conformità fino i primi elementi di cinematica. Tenendo conto delle conseguenti modificazioni, rimangono spiegati nel modo più soddisfacente il risultato negativo dell'esperienza di Michelson, nonchè il parziale trascinamento delle onde luminose in un mezzo in moto, sperimentalmente constatato da Fresnel, risultando d'altro lato che per gli ordinari fenomeni della meccanica dei corpi ponderabili (velocità piccole di fronte a c), le correzioni sono addirittura trascurabili.

Pur rivoluzionando (sotto l'aspetto speculativo) cinematica e meccanica e con esse tutta la fisica, la relatività della prima maniera rispettava ancora, quanto alla localizzazione dei fenomeni nello spazio, i postulati della geometria elementare. In verità, discussioni appassionate intorno alla natura metrica dello spazio ambiente si erano svolte, come è ben noto, nel secolo scorso, a proposito della geometria non euclidea (o geometria degli spazi a curvatura costante). Tuttavia, in base ai controlli offerti dall'astronomia e dalla meccanica, esse avevano portato alla conclusione che, se pure lo spazio fisico è a curvatura costante non nulla, il divario da uno spazio euclideo (curvatura rigorosamente nulla) dovrebbe essere così piccolo da sfuggire alle più affinate osservazioni. Pareva così superata l'eventualità di dover ricorrere a un più complicato schema geometrico, rafforzandosi l'ipotesi — vorrei dire il sentimento — che il nostro spazio sia rigorosamente euclideo.

Ma anche quest'ultimo credo scientifico dovette essere sacrificato per inquadrare in una concezione unitaria spazio, tempo e gravitazione. A tanto perviene la relatività generale di EINSTEIN. Riassumerne, anche nel modo più sommario, il contenuto specifico non è possibile senza una preparazione adeguata. Rimandando il lettore, desideroso di acquistare un'idea di questa radicale trasformazione della filosofia naturale, a qualcuna delle esposizioni di insieme finora pubblicate ([5]), mi limiterò qui a riferire quanto è strettamente necessario per afferrare la genesi della formula in cui si compendiano le conseguenze ottiche di prima approssimazione.

11. - Modificazione dello spazio - Influenza sull'andamento dei raggi luminosi - Formula finale.

Alla incondizionata validità della geometria euclidea si sostituisce, secondo EINSTEIN, l'ipotesi, già affacciata in astratto da RIEMANN e da CLIFFORD, che anche la natura metrica dello spazio (che si estrinseca nelle relazioni fra i varî elementi di una generica figura) possa dipendere dai fenomeni che vi si svolgono: in particolare dalla presenza e dal moto della materia.

L'ipotesi stessa si complica colla già postulata fusione delle misure di spazio e di tempo e si concreta in un sistema di equazioni differenziali

([5]) Cfr. in particolare: A. EINSTEIN, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Braunschweig, Vieweg (3ª ediz.), 1920 [di cui l'ing. CALISSE stà preparando una traduzione italiana]; A. S. EDDINGTON, *Space, Time, Gravitation*, « Cambridge University Press », 1920. A chi voglia approfondire, rendendosi anche conto dello svolgimento matematico, sono specialmente raccomandabili le lezioni di H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, Berlin, Springer (3ª ediz.), 1920.

che presiedono a queste deformazioni spaziali e temporali. Ben si intende che si tratta di deformazioni tenuissime, le quali nemmeno si avvertono nell'ambito dei fenomeni, in certo senso grossolani, che già sono soddisfacentemente rappresentati colle teorie ordinarie; ma in alcuni pochi casi ne discendono conseguenze sperimentalmente apprezzabili. Tra queste, celeberrima, la spiegazione dello spostamento secolare del perielio di Mercurio, di fronte a cui erano rimasti sterili tutti gli sforzi della meccanica celeste, che pur basta a rendere conto di particolarità anche più minute dei movimenti planetari. Inoltre — ci siamo — l'incurvamento dei raggi luminosi in un campo di forza.

Circa l'incurvamento, già sappiamo dal precedente § II, che il fatto qualitativo non è una prerogativa della teoria di EINSTEIN. Anche conservando in tutto lo schema classico, vi si è condotti colla sola ipotesi addizionale che energia e materia siano manifestazioni, diverse soltanto per gradi, di una stessa entità fisica. Lo svolgimento matematico di tali premesse porta, come abbiamo visto, alla formula variazionale (9) per definire in generale l'andamento dei raggi, nonchè in particolare [formula (8)] al valore numerico $0'',88$ per la deflessione che dovrebbe essere causata dal Sole sopra raggi stellari che ne lambiscano la corona.

Che cosa dà, a calcoli eseguiti, la teoria di EINSTEIN, quando la si applica a prevedere l'effetto di masse materiali sulla propagazione della luce?

Essa implica in primo luogo — ciò è uno dei suoi cardini, come abbiamo rilevato — cambiamento di natura metrica dello spazio ambiente, il quale non resta più euclideo, ma si incurva, come (scendendo da tre a due dimensioni per avere un'analogia tangibile) accade di una superficie piana, membrana o piastra elastica assicurata al contorno, quando venga per esempio premuta nelle parti centrali.

D'altra parte la teoria stessa (limitandoci per semplicità alla prima approssimazione) porta a riconoscere che basta sovrapporre la deformazione dello spazio al diretto incurvamento dei raggi, già calcolato per via energetica e rappresentato dalla (9).

In definitiva, *le cose vanno come se lo spazio ambiente* (che in realtà, o se vogliamo essere agnostici, secondo la concezione einsteiniana, si è incurvato) *rimanesse rigorosamente euclideo e i raggi vi fossero definiti dal principio variazionale* (6)

$$(10) \qquad \delta\int\sqrt{1+\frac{4U}{c^2}}\,ds=0\,,$$

(6) Per la dimostrazione veggansi le note: *Statica einsteiniana*, « Rend. della R. Acc. dei Lincei », vol. XVI (1° semestre 1917), pag. 459-470, e *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. I: Generalità e prima approssimazione*, « ibidem » (2° semestre 1917), pp. 307-317 [in questo vol.: pp. 59-73 e 89-99].

rappresentando U il potenziale newtoniano delle masse che si prendono in considerazione.

Il confronto colla (9) mostra che c'è una sola differenza: il fattore 4, anzichè 2, premesso ad U. Si può quindi inferirne che *anche secondo la teoria della relatività generale* (limitata alla prima approssimazione, cioè ritenendo trascurabili i termini di 2° ordine in U/c^2), *i raggi luminosi entro un campo di forza potenziale U si identificano con un fascio di traiettorie dinamiche, spettanti però al potenziale doppio $2U$; la costante delle forze vive caratteristica del fascio è $\frac{1}{2}c^2$* (questo, come nella teoria ordinaria cui si associ il postulato di proporzionalità).

La sostituzione di $2U$ ad U, nella equazione comprensiva che definisce i raggi, porta naturalmente la stessa sostituzione nelle equazioni che se ne ricavano. Riferendosi in particolare al caso della attrazione solare, discusso al § II, per cui $U = fM/r$ (r distanza dal centro del Sole) basterà materialmente raddoppiare il coefficiente fM, nelle varie formule.

Risulta così, dalle (7') ed (8), che *la deflessione* (dei raggi che provengono da una stella e rasentano la corona solare) *prevista dalla teoria di Einstein è doppia di quella calcolata coi soliti criteri in base alla semplice proporzionalità fra energia e massa materiale, e ammonta a*

$$1'',76 \,.$$

Siamo in un ordine di grandezza perfettamente accessibile ad accurate osservazioni astronomiche.

Si noti che, per Giove, l'analogo effetto, pur in condizioni di massimo, raggiunge appena 0″,017, rimanendo quindi inapprezzabile.

12. - Conferma sperimentale.

Gli eventuali spostamenti angolari dovuti al Sole divengono effettivamente osservabili durante una sua eclisse totale. Concettualmente, basta scegliere una qualche stella fissa il cui raggio visuale passi rasente al Sole nel momento dell'eclisse, e paragonare la posizione osservata in tale occasione con quella che si desume dai cataloghi. In pratica, data la limitata precisione dei cataloghi che può lasciare incertezze dell'ordine di 1″, si ricorre al confronto di lastre fotografiche (di zone del cielo prossime alla corona solare), ottenute durante l'eclisse, e in condizioni normali.

Un primo tentativo in questo senso fu promosso dall'Osservatorio di Lick nel 1918; ma la precisione delle osservazioni riuscì insufficiente allo scopo.

Per l'eclisse totale del 29 maggio 1919, due spedizioni simultanee furono organizzate dalla Società Reale di Londra: l'una operò a Sobral nel Brasile settentrionale, l'altra all'isola di Principe nel Golfo di Guinea, località entrambe comprese nella zona di totalità dell'eclisse. I risultati delle osservazioni raccolte in queste due spedizioni si possono riassumere come segue ([7]): La media degli spostamenti osservati a Sobral dà per la deflessione 1″,98 (con errore probabile di $\pm$ 0″,12); l'analoga media delle osservazioni di Principe dà 1″,61 (con errore probabile di $\pm$ 0.30). Fra i due valori sperimentali sta la deflessione 1″,76 prevista dalla relatività generale di EINSTEIN. Questa ne ha così ricevuto nuova e clamorosa conferma, rimanendo nettamente esclusa sia la deviazione nulla dell'ottica geometrica, sia la mezza deviazione (0″,88), cui si sarebbe condotti (§ II) dalla teoria ordinaria, associandole il semplice postulato di proporzionalità fra massa e energia.

([7]) DYSON, EDDINGTON and DAVIDSON, *A determination of the deflection of light by the Sun's gravitatonal field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1919*, « Transactions of the Royal Society of London, S. A. », Vol. 220, 1920, pagine 291-333.

XI.

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE FUNZIONALE CHE CARATTERIZZA LE ONDE PERIODICHE IN UN CANALE MOLTO PROFONDO

« Math. Ann. », Bd. 85 (1922) pp. 256-279.

1. - Posizione del problema.

Finora si conosce una sola soluzione rigorosa del problema delle onde atte a propagarsi in un canale senza alterazione di forma: quella trocoidale scoperta da GERSTNER nel 1802. Ma le onde trocoidali presentano il noto inconveniente di corrispondere a movimento vorticoso delle particelle fluide, talchè non potrebbero sorgere per via conservativa. Lo schema meccanico della propagazione ondosa deve essere irrotazionale. Classiche soluzioni approssimate (le così dette onde semplici) furono assegnate da AIRY; e altri notevoli risultati di approssimazione ulteriore, concernenti le onde periodiche, si debbono a STOKES, RAYLEIGH ed altri (1).

La trattazione matematica rigorosa, nel caso di un canale molto profondo (2), può in definitiva farsi dipendere da una equazione integrale *non* lineare. Sarebbe agevole il rendersene conto, ma noi ci limitiamo alla affermazione, perchè il problema sarà qui posto sotto un aspetto più direttamente legato all'origine idrodinamica, che è il seguente:

Determinare una funzione

$$\omega = \vartheta + i\tau$$

della variabile complessa $\zeta = \varrho e^{i\sigma}$, *regolare entro il cerchio* $|\zeta| < 1$, *continua assieme alla sua derivata prima sulla circonferenza* C $(|\zeta| = \varrho = 1)$

(1) Veggansi per es. le pagine 410 e 418 del trattato del LAMB, *Hydrodynamics* (4ª edizione), Cambridge, University Press, 1918.

(2) Per un canale di profondità finita, si arriva invece ad una equazione mista (cioè insieme differenziale e alle differenze finite). Cfr. *Sulle onde progressive di tipo permanente*, « Rend. della R. Acc. dei Lincei » (5) 16 (2° semestre 1907), pp. 776-790 [in queste « Opere »: vol. secondo, XXXVI, pp. 615-629].

la quale si annulli con ζ e verifichi su C la relazione

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p e^{-3\tau} \sin\vartheta = 0 \,, \tag{I}$$

designando p una costante positiva a priori indeterminata.

L'incognita ω deve inoltre soddisfare alla limitazione

$$|e^{-i\omega} - 1| < 1$$

ossia [tenuto conto che $e^{-i\omega} = e^{\tau}(\cos\vartheta - i \sin\vartheta)$] alla

$$2\cos\vartheta > e^{\tau} \,, \tag{D}$$

la quale implica in particolare

$$|\vartheta| < \frac{\pi}{2} \,, \qquad \tau < \log 2 \,,$$

ed è *automaticamente verificata per $|\omega|$ abbastanza piccolo.*

Giova fin d'ora scrivere la (I) anche sotto la forma

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta = P(\vartheta, \tau) \,, \tag{I'}$$

con

$$P(\vartheta, \tau) = p\{e^{-3\tau} \sin\vartheta - \vartheta\} \,. \tag{1}$$

Ciò allo scopo evidente di raccogliere nel primo membro la parte lineare rispetto agli argomenti ϑ, τ, per modo che $P(\vartheta, \tau)$ risulta di secondo ordine nell'intorno di $\vartheta = 0$, $\tau = 0$.

Circa il significato di p, ϑ, τ basterà ritenere:

1) che

$$p = \frac{g\lambda}{2\pi c^2} \,, \tag{2}$$

dove si designa con c la velocità di propagazione delle onde periodiche di cui si tratta, con λ la loro lunghezza, e con g l'accelerazione della gravità;

2) che ϑ rappresenta la inclinazione sulla orizzontale della velocità relativa (delle particelle materiali rispetto all'onda), talchè sulla circonferenza C (che corrisponde al pelo libero) ϑ è proprio l'inclinazione del profilo dell'onda sull'orizzonte;

3) che ce^{τ} rappresenta la grandezza della detta velocità relativa.

2. - Indicazione del metodo e dei risultati.

Si incomincia (§§ 3-8) coll'esame approfondito del problema ausiliario in cui la (I′) è ridotta alla sua parte lineare, figurando nel secondo membro una funzione nota in luogo di $P(\vartheta, \tau)$. Concettualmente il problema si potrebbe far rientrare nella teoria generale delle equazioni integrali lineari di seconda specie (tipo FREDHOLM-HILBERT), ma in vista della applicazione alle onde si impone l'impiego di mezzi più atti al calcolo esplicito.

Se ne desume poi molto spontaneamente (§ 10) un algoritmo di approssimazioni successive per gli integrali di equazioni funzionali alquanto più generali della (I); il teorema fondamentale di esistenza (§ 11) sotto limitazioni qualitative di tipo ben prevedibile (§§ 9 e 12); nonchè il teorema di unicità (§ 13).

Dal punto di vista analitico non sarà forse inutile osservare che il procedimento testè delineato è applicabile quasi senza modificazione ad una classe molto ampia di equazioni non lineari, che comprende quella contemplata dal sig. E. SCHMIDT nella III parte delle sue fondamentali ricerche *Zur Theorie der linearen und nicht-linearen Integralgleichungen* (3), e da lui risoluta mediante sviluppo in serie di potenze (integrali): felice estensione del metodo dei limiti di CAUCHY. Viceversa (previa qualche trasformazione) le questioni qui studiate si potrebbero anche subordinare alla teoria generale dello SCHMIDT. Ma io ho preferito una trattazione autonoma, sia per prepararmi, come già accennai a proposito dei problemi ausiliari, formule risolutive praticamente maneggevoli, sia per mostrare come sia fecondo, anche in quest'ambito funzionale, l'algoritmo così elementare e così universale delle approssimazioni successive (4).

Tornando alle onde, mi si consenta di riferire il pensiero di Lord RAYLEYGH quale risulta dalla prefazione dell'ultimo lavoro (5) da lui dedicato all'argomento. Dopo aver riassunte le critiche di scarsa convergenza numerica e di dubbia convergenza teorica, mosse al procedimento di STOKES, egli rileva giustamente che la questione esistenziale è distinta da quella della convergenza di uno speciale algoritmo, e conclude: « Of

(3) « Math. Ann. », 65 (1908), pp. 370-399.

(4) Da questo stesso concetto sono dominati i notevolissimi studi del sig. L. LICHTENSTEIN sulle figure di equilibrio di masse fluide ruotanti. Essi fanno capo ad una equazione funzionale, più precisamente integro-differenziale, di tipo molto complesso, pervenendo a sviscerarne le proprietà e ad integrarla per approssimazioni successive. Cfr. in particolare la seconda parte delle *Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten usw.*, « Math. Zeitschrift », 7 (1920), Cap. I-III, pp. 126-182; nonchè la prima parte delle *Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper*, « ibidem », 10 (1921), pp. 130-158.

(5) *On periodic irrotational waves at the surface of deep water*, « Phil. Magazine », 33, May 1917, pp. 381-389.

course a strict mathematical proof of their existence is a desideratum; but I think that the reader, who follows the results of the calculations here put forward, is likely to be convinced that permanent waves of moderate height do exist ».

La nostra ricerca risponde al desiderato di Lord RAYLEIGH, rimanendo tuttavia ancora da verificare (§ 15) se la radice b di una certa equazione sta effettivamente nel limite al disotto del quale è sicura la convergenza del procedimento costruttivo. Per ragioni di spazio e di tempo rimando questa discussione ad altro lavoro, in cui sarà fatto debito posto anche al lato meccanico della questione.

Del resto ha già interesse meccanico il risultato, dedotto a § 14 del presente scritto, che possono esistere soluzioni rigorose della (I) soltanto a patto che p sia un numero intero.

Riferendoci al caso tipico $p=1$, ciò vuol dire, in base alla (2), che, *anche per onde di altezza finita, è esattamente verificata l'equazione di Airy*

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}.$$

Le approssimazioni di STOKES e RAYLEIGH conducono invece ad una relazione meno semplice in cui interviene anche l'altezza dell'onda, risultandone, per qualsiasi altezza finita, alquanto accresciuto il valore di c spettante ad un λ assegnato, il che implica, in base alla (2), $p<1$.

Si sarebbe tratti ad inferirne che, almeno qualitativamente, le cose andranno nello stesso modo anche al limite. Invece non è così; o più esattamente (sotto le ipotesi ammesse dai due illustri autori) non può esistere il limite, perchè incompatibile col fatto rigorosamente accertato che deve comunque essere intero il valore di p.

3. - Questioni ausiliarie. Risoluzione per serie.

Siano $\sum_1^\infty{}_n h_n$, $\sum_1^\infty{}_n k_n$ due serie, a termini reali e costanti, assolutamente convergenti, con che

$$\chi(\sigma) = \sum_1^\infty{}_n (h_n \cos n\sigma + k_n \sin n\sigma) \tag{3}$$

rappresenta una funzione di σ reale, uniforme, continua e *a valor medio nullo* sulla circonferenza C.

Cerchiamo una funzione $\omega(\zeta)$ la quale, comportandosi pel resto nel modo dichiarato al § 1, verifichi sul contorno, in luogo della (I), la equazione lineare non omogenea

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta = \chi(\sigma) \,. \tag{II}$$

In base alle premesse, è intanto naturale di porre

$$\omega = \sum_{1}^{\infty}{}_n \, a_n \zeta^n \,,$$

i coefficienti a_n essendo costanti, in generale complesse, di cui metteremo in evidenza le parti reale ed immaginaria, assumendo

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n \,.$$

Avremo, su C,

$$\left\{ \begin{aligned} \vartheta &= \sum_{1}^{\infty}{}_n (\alpha_n \cos n\sigma - \beta_n \sin n\sigma) \,, \\ \tau &= \sum_{1}^{\infty}{}_n (\beta_n \cos n\sigma + \alpha_n \sin n\sigma) \,, \end{aligned} \right.$$

con che, *per p non intero*, la (II) porge senza riserve

$$\alpha_n = \frac{h_n}{n-p} \,, \qquad \beta_n = \frac{k_n}{n-p} \,, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \,.$$

Ne risulta che

$$\omega = \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{h_n - ik_n}{n-p} \zeta^n \,, \tag{4}$$

verifica la (II), annullandosi per $\zeta = 0$ e comportandosi nel modo voluto entro e sopra C.

Per p intero, la equazione omogenea dedotta dalla (II), cioè

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta = 0 \,,$$

comporta ∞^2 soluzioni non nulle che si compendiano in

$$\omega = a\zeta^p \,,$$

dove $a = \alpha + i\beta$ designa una costante complessa arbitraria.

I valori interi del parametro p costituiscono ovviamente gli *autovalori* dell'equazione funzionale (II) che sarebbe facile, per quanto superfluo ai fini che qui ci proponiamo, di presentare sotto la forma canonica di equazione integrale lineare di seconda specie ([6]). In corrispondenza ai suddetti valori interi di p, la (II) può essere soddisfatta solo a patto che in $\chi(\sigma)$ si annullino h_p, k_p; essa ammette allora ∞^2 soluzioni. Ma nemmeno questo ci interessa.

Importa piuttosto, per p intero, assumere come ausiliaria, in luogo della (II), la equazione funzionale

$$\text{(III)} \qquad \frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(\sigma_1) \cos p(\sigma - \sigma_1)\, d\sigma_1 = \chi(\sigma)\,.$$

Ammesso come sopra lo sviluppo $\omega = \sum_1^\infty{}_n\, \alpha_n \zeta^n$, si trova subito, per $n \neq p$,

$$a_n = \frac{h_n - ik_n}{n - p}\,,$$

nonchè

$$a_p = h_p - ik_p\,,$$

e quindi

$$\text{(5)} \qquad \omega = (h_p - ik_p)\zeta^p + \sum_1^\infty{}'_n \frac{h_n - ik_n}{n - p}\, \zeta^n\,,$$

dove l'apice nel sommatorio sta a designare che si deve escludere il valore p di n.

4. - Espressione delle incognite mediante integrali definiti. Semplificazione delle ipotesi concernenti la funzione assegnata χ.

Particolare interesse ha naturalmente la espressione della ω proprio sul contorno $|\zeta| = 1$ cui si riferisce l'equazione funzionale caratteristica [(II) o (III)]. Ed è importante fissare nettamente il comportamento qualitativo al contorno in relazione alle ipotesi che si fanno circa l'analogo comportamento dei dati della questione, cioè della funzione $\chi(\sigma)$.

([6]) Cfr. il Cap. X dei classici *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* [Leipzig, Teubner, 1912] dell'HILBERT.

Per trarne il miglior rendimento (il che si rivela necessario quando si vuol applicare la formula risolutiva alla integrazione di altre equazioni funzionali per approssimazioni successive), è opportuno procurarsi le espressioni delle risolventi (4), (5) mediante integrali definiti portanti sulla funzione $\chi(\sigma)$. Ciò si potrebbe ottenere riprendendo *ab initio* le equazioni funzionali (II) e (III); presentandole quali equazioni integrali lineari, per es. nella sola ϑ; formandone il nucleo risolvente e ricavandone in tal guisa ϑ, e poi τ. Ma è più conveniente trasformare i risultati già ottenuti mediante sviluppo in serie.

All'uopo cominciamo col porre

$$N(z) = \sum_1^\infty{}_n \frac{z^n}{n-p}, \tag{6}$$

per p non intero;

$$\mathfrak{N}(z) = z^p + \sum_n' \frac{z^n}{n-p}, \tag{7}$$

per p intero, con che le serie sono uniformemente convergenti in ogni campo (di valori di z) interno a C.

Ove in particolare si assuma $z = \zeta/\zeta_1$ con $|\zeta| < 1$ e ζ_1 sulla circonferenza C, cioè del tipo $e^{i\sigma_1}$, le serie stesse risultano uniformemente convergenti rispetto $\alpha\sigma_1$, nell'intervallo $(-\pi, \pi)$.

Si verifica immediatamente, integrando termine a termine, che le (4), (5) si possono scrivere sotto la forma

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} N(\zeta e^{-i\sigma_1})\chi(\sigma_1)\,d\sigma_1, \tag{4'}$$

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{N}(\zeta e^{-i\sigma_1})\chi(\sigma_1)\,d\sigma_1. \tag{5'}$$

Per $|\zeta| < 1$ queste equivalgono dunque alle precedenti. Resta da legittimare e da studiare i valori al contorno. Vedremo che ne risulterà un vantaggio quanto alle ipotesi preliminari atte ad assicurare la validità delle formule. Nell'impostare i nostri calcoli (§ 3), abbiamo anche ammesso per la χ uno sviluppo di Fourier assolutamente convergente (anche quando seni e coseni si sostituivano coll'unità). *Arriveremo alla conclusione che basta supporre* $\chi(\sigma)$ *periodica, continua assieme alla sua derivata prima e dotata di valor medio nullo, perchè le formule* (4'), (5'), *postovi* $\zeta = e^{i\sigma}$, *definiscano effettivamente le incognite delle equazioni funzionali* (II) *e* (III).

5. - Studio dei nuclei risolventi.

Occupiamoci intanto della funzione $N(z)$. Per fissarne il comportamento, quando z arriva o varia su C, basta far uso della identità, valida per qualsiasi n, quando p non è intero,

$$\frac{1}{n-p}=\frac{1}{n}\,\frac{1}{1-\frac{p}{n}}=\frac{1}{n}+\frac{p}{n^2}+\frac{p^2}{n^2(n-p)}\,.$$

Supposto per un momento ancora $|z|<1$, si immagini scisso il termine generale della serie (6) in tre addendi, corrispondenti ai tre della superiore identità, dopodichè, essendo

$$\sum_1^\infty {}_n\frac{z^n}{n}=\log\frac{1}{1-z}\,,$$

ove si ponga per brevità

$$\sum_1^\infty {}_n\frac{z^n}{n^2}=\Lambda(z)\,, \tag{8}$$

$$p^2\sum_1^\infty {}_n\frac{z^n}{n^2(n-p)}=N^*(z)\,, \tag{9}$$

risulta

$$N(z)=\log\frac{1}{1-z}+p\Lambda(z)+N^*(z)\,. \tag{6'}$$

Da questa espressione segue senza difficoltà il comportamento al contorno di N e della sua derivata. Il primo addendo ha già una forma tipica. Esaminiamo gli altri due.

La serie che definisce Λ rimane uniformemente convergente anche su C, cioè per $z=e^{is}$ (s reale); perciò l'addendo Λ rappresenta una funzione continua anche sul contorno (o quando dall'interno si arriva al contorno); non così la sua derivata, che ha però appena un infinito logaritmico per $s=0$ $(z=1)$, come appare dalla (8), la quale implica

$$\frac{d\Lambda}{dz}=\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z}\,. \tag{8'}$$

L'addendo N^* definito dalla (9) rimane continuo assieme alla sua derivata prima. In definitiva la parte asintotica di N su C si riduce ad una singolarità logaritmica per $s=0$; con ciò la N rimane integrabile su C. La sua derivata

$$\frac{dN}{dz}=\frac{1}{1-z}+\frac{p}{z}\log\frac{1}{1-z}+\frac{dN^*}{dz},$$

ha invece, oltre ad una singolarità logaritmica, un infinito di primo ordine, sempre per $s=0$.

Dacchè, per $|z|<1$, si ha identicamente, in base alla (6)

$$z\frac{dN}{dz}-pN=\sum_1^\infty{}_n z^n=\frac{z}{1-z},$$

questa relazione differenziale seguita a valere anche sul contorno, più precisamente in ogni punto di regolarità, cioè per qualunque s, eccettuato soltanto il punto singolare $s=0$. Sostituendo e^{is} a z e *scrivendo per brevità* $N(s)$, $N'(s)$ *in luogo di* $N(e^{is})$, $d/ds(N(e^{is}))$, *rimane acquisita, per* $s\neq 0$, *la identità*

$$N'(s)-ipN(s)=i\frac{e^{is}}{1-e^{is}}\,. \tag{10}$$

Scindiamo il reale dall'immaginario in N, Λ, N^*, ponendo

$$N=N_1+iN_2\,,$$
$$\Lambda=\Lambda_1+i\Lambda_2\,,$$
$$N^*=N_1^*+iN_2^*\,.$$

Notiamo subito che N_1^*, N_2^* sono, al pari di N^*, continue assieme alle rispettive derivate anche sul contorno C; Λ_1 e Λ_2 sono esse stesse continue, in base alle (8), mentre, per essere $d\Lambda/dz=z^{-1}\log 1/(1-z)$, le derivate sono al più affette da singolarità logaritmica e in particolare rimangono integrabili.

Notiamo ancora che, per $z=e^{is}$,

$$1-z=(1-\cos s)-i\sin s=2\sin\frac{s}{2}e^{i(s-\pi)/2}\,.$$

Di qua apparisce che, sull'arco $(0,\pi)$, essendo $\sin s/2$ positivo, il modulo di $1-z$ è $2\sin s/2$, e l'argomento è $(s-\pi)/2$ (si intende, a meno di multipli interi di 2π); sull'arco $(0, -\pi)$, si ha invece

$$2 \sin\frac{s}{2} = 2\left|\sin\frac{s}{2}\right| e^{i\pi},$$

l'argomento risultando in conformità $(s+\pi)/2$. Con ciò, ove si separi in $\log 1/(1-z)$ il reale dall'immaginario, si ha, per $z = e^{is}$ (e per quel ramo uniforme entro C, che si annulla nel centro),

$$\log\frac{1}{1-z} = \log\frac{1}{2\left|\sin\frac{s}{2}\right|} - i\,\frac{s\mp\pi}{2}, \tag{11}$$

in cui, al variare di s fra $-\pi$ e π, va preso il segno superiore o l'inferiore secondochè s è positivo o negativo. Come si vede, il coefficiente di i presenta un brusco salto di π per $s = 0$; rimane invece continuo nel punto diametralmente opposto di C, annullandosi per $s = \pm\pi$. La derivata si riduce a $-\frac{1}{2}$ su tutto C, perciò, *mentre*

$$N_1 = \log\frac{1}{2\left|\sin\frac{s}{2}\right|} + pA_1 + N_1^* \tag{12}$$

resta, al pari di N, *integrabile su* C, *ma non si può dire altrettanto della sua derivata* $N_1' = dN_1/ds$, N_2 ed N_2' *si mantengono entrambe integrabili su* C. Infatti

$$N_2 = -\frac{s\mp\pi}{2} + pA_2 + N_2^* \tag{13}$$

ha una semplice discontinuità di prima specie per $s = 0$. La discontinuità scompare nella derivata N_2', la quale ha nient'altro che un infinito logaritmico proveniente dall'addendo pA_2', cioè, in virtù della (8′), dalla parte reale di

$$p \log\frac{1}{1-e^{is}}.$$

Dacchè

$$\frac{ie^{is}}{1-e^{is}} = \frac{\frac{1}{2}e^{is/2}}{\frac{1}{2i}\left(e^{-is/2} - e^{is/2}\right)} = -\frac{1}{2}\cot\frac{s}{2} - i\,\frac{1}{2},$$

la (10), eguagliando i coefficienti di i, ci dà in particolare

$$N_2'(s) - pN_1(s) = -\frac{1}{2}. \tag{10'}$$

Analogo comportamento qualitativo presenta il nucleo (complesso) $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + i\mathfrak{N}_2$ ($\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ reali) definito dalla (7). Si ha infatti, al posto della (6'),

$$\mathfrak{N} = z^p + \left(\log\frac{1}{1-z} - \frac{z^p}{p}\right) + p\left(\Lambda(z) - \frac{z^p}{p^2}\right) + \mathfrak{N}^* \tag{7'}$$

con

$$\mathfrak{N}^* = p^2 \sum_{1}^{\infty}{}_n' \frac{z^n}{n^2(n-p)},$$

e ciò dimostra l'asserto, dato che p va qui supposto intero (oltrechè positivo), e che quindi z^p rappresenta una funzione regolare.

La (7) dà poi immediatamente, per $|z| < 1$,

$$z\frac{d\mathfrak{N}}{dz} - p\mathfrak{N} = \sum_{1}^{\infty}{}_n' z^n = \frac{z}{1-z} - z^p.$$

Si ha dunque, in luogo della (10),

$$\mathfrak{N}'(s) - ip\mathfrak{N}(s) = \frac{ie^{is}}{1-e^{is}} - ie^{ips}, \tag{14}$$

e da questa, eguagliando i coefficienti di i nei due membri,

$$\mathfrak{N}_2'(s) - p\mathfrak{N}_1(s) = -\frac{1}{2} - \cos ps. \tag{14'}$$

6. - Considerazione diretta dei valori al contorno forniti dalle (4'), (5'). Verificazione delle (II), (III).

Se anche ζ viene in C e si riduce quindi a e^{is} (con s reale), l'argomento dei nuclei nelle (4'), (5') assume l'aspetto $e^{i(\sigma-\sigma_1)}$. Dacchè abbiamo convenuto di designare $N(e^{is})$ semplicemente con $N(s)$, possiamo intanto (con analoga convenzione per ω e per $\mathfrak{N}$) scrivere le (4'), (5'), riferite al contorno, sotto la forma

$$\omega(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N(\sigma-\sigma_1)\chi(\sigma_1)\,d\sigma_1\,, \tag{4''}$$

$$\omega(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathfrak{N}(\sigma-\sigma_1)\chi(\sigma_1)\,d\sigma_1\,. \tag{5''}$$

Dal § precedente siamo assicurati della integrabilità dei nuclei N, $\mathfrak{N}$ e della conseguente legittimità degli integrali, come valori al contorno (finiti e continui) di una ω (ζ) regolare per $|\zeta|<1$ e nulla per $\zeta=0$. Dall'ipotesi che il dato della questione, cioè la funzione χ, ammetta derivata continua, segue poi subito che la stessa proprietà compete ad $\omega(\sigma)$. Infatti, attesa la periodicità di $N(\sigma-\sigma_1)$ e di $\chi(\sigma_1)$ rapporto ai rispettivi argomenti, si può intanto, assumendo $s=\sigma-\sigma_1$ per variabile di integrazione, attribuire alla (4'') la forma

$$\omega(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N(s)\chi(\sigma-s)\,ds\,.$$

Di qua, derivando, come è lecito, sotto il segno e riassumendo a derivazione eseguita $\sigma_1=\sigma-s$ come variabile di integrazione, si ricava

$$\omega'(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N(\sigma-\sigma_1)\chi'(\sigma_1)\,d\sigma_1\,, \tag{15}$$

l'apice designando derivazione rispetto all'argomento indicato.

Analoga conclusione sussiste naturalmente per la (5').

Passiamo alla verificazione delle soluzioni trovate, esplicitando i passaggi per la (II) e mostrando che, coi valori al contorno (5'') e (15), essa rimane effettivamente soddisfatta.

Separiamo per ciò il reale dall'immaginario nelle (4'') e (15), e ricaveremo ϑ, τ e loro derivate (si intende al contorno), ottenendo

$$\vartheta=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N_1(\sigma-\sigma_1)\chi(\sigma_1)\,d\sigma_1\,,\qquad \tau=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N_2(\sigma-\sigma_1)\chi(\sigma_1)\,d\sigma_1\,, \tag{16}$$

nonchè

$$\vartheta'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N_1(\sigma-\sigma_1)\chi'(\sigma_1)\,d\sigma_1\,,\qquad \tau'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N_2(\sigma-\sigma_1)\chi'(\sigma_1)\,d\sigma_1\,.$$

Operiamo sull'ultima formula, assumendovi per variabile di integrazione $s = \sigma - \sigma_1$, con che essa può essere scritta

$$\tau'(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} N_2(s)\chi'(\sigma - s)\,ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} N_2(s)\chi'(\sigma - s)\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} N_2(s)\chi'(\sigma - s)\,ds\,.$$

Abbiamo visto nel precedente § che $N_2(s)$ è continua in ciascuno dei due intervalli $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$ separatamente, e vi ammette derivata, la quale diviene infinita appena logaritmicamente per $s = 0$ ed è quindi integrabile in entrambi gli intervalli. Si può perciò integrare per parti, notando che $\chi'(\sigma - s) = -(d/ds)\chi$; e si avrà

$$\tau'(\sigma) = -\frac{1}{\pi}[N_2(s)\chi(\sigma - s)]_{s=-\pi}^{s=0} - \frac{1}{\pi}[N_2(s)\chi(\sigma - s)]_{s=0}^{s=\pi} + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} N_2'(s)\,\chi(\sigma - s)\,d\sigma\,.$$

Nella parte ai limiti i due termini relativi a $s = -\pi$ e a $s = \pi$ si elidono per la periodicità di N_2 e di χ; gli altri due (che si eliderebbero anch'essi se N_2 fosse continua) si riducono, con notazione evidente, a

$$\chi(\sigma)\frac{1}{\pi}\{N_2(+0) - N_2(-0)\}\,,$$

ossia, in virtù della (13) (in cui A_2 e N_2^* designano funzioni continue), a $\chi(\sigma)$. Rimane quindi

$$\tau'(\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} N_2'(s)\chi(\sigma - s)\,ds + \chi(\sigma)\,.$$

Dalla prima delle (16) si ha

$$p\vartheta(\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} pN_1(s)\chi(\sigma - s)\,ds\,,$$

donde, per sottrazione

$$\tau'(\sigma) - p\vartheta(\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{N_2'(s) - pN_1(s)\}\chi(\sigma - s)\,ds + \chi(\sigma)\,.$$

Siccome, per la (10′), il fattore di $\chi(\sigma - s)$ sotto il segno integrale si riduce a $-\frac{1}{2}$, così l'integrale stesso si annulla (per l'ipotesi che χ sia a valor medio nullo), e rimane la (II).

La verificazione della (III) si fa in modo del tutto analogo, sfruttando in fine la (14′).

7. - Casi particolari notevoli.

Se la χ è funzione pari $[\chi(-\sigma) = \chi(\sigma)]$, ovvero dispari $[\chi(-\sigma) = -\chi(\sigma)]$ la stessa proprietà compete a ϑ, e l'opposta a τ, cioè $\tau(\sigma)$ è dispari nel primo caso e pari nel secondo: sia che si tratti della equazione (II) che della (III). La dimostrazione segue materialmente dalle espressioni (16) di ϑ e τ, o dalle analoghe che si avrebbero per la equazione (III) (scambiando N in $\mathfrak{N}$): basta tener conto che N_1 è pari e N_2 dispari, e analogamente $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$. Tale comportamento si desume ovviamente dalle definizioni (6), (7), di $N(z)$, $\mathfrak{N}(z)$ le quali mostrano che entrambe queste funzioni sono reali sull'asse reale. Perciò, in punti simmetrici rispetto a tale asse, N_1 assume valori eguali, N_2 valori opposti, il che implica appunto N_1 pari e N_2 dispari su C; lo stesso per $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$.

Fissiamo l'attenzione sull'ipotesi (la quale si troverà verificata nella applicazione dei §§ seguenti) che $\chi(\sigma)$ sia dispari. Risultano, come s'è detto, $\tau(\sigma)$ pari e $\vartheta(\sigma)$ dispari, il che si può sintetizzare dicendo che la funzione di variabile complessa $i\omega = i\vartheta - \tau$ prende, sul contorno C, valori coniugati in punti simmetrici rispetto all'asse reale. Dal contorno la proprietà si trasporta notoriamente all'intero campo; così $i\omega$ *risulta reale*, e quindi $\vartheta = 0$, *sull'asse reale*. A questa conclusione — sia detto per incidenza — si perviene ovviamente anche partendo dallo sviluppo (3) di $\chi(\sigma)$. Per la disparità, ogni $h_n = 0$. La (4), o rispettivamente la (5), mostra allora che $i\omega$ è reale per ζ reale.

8. - Disuguaglianze fondamentali.

In base alle espressioni (6′) e (7′) di N, $\mathfrak{N}$, risultano integrabili su C anche i valori assoluti, $|N|$, $|\mathfrak{N}|$.

Designeremo con L il valore numerico dell'integrale $1/\pi\int_{-\pi}^{\pi}|N|\,ds$, ovvero, per p intero, dell'analogo $1/\pi\int_{-\pi}^{\pi}|\mathfrak{N}|\,ds$. Con ciò questa costante positiva L viene a dipendere esclusivamente dal parametro p; non si può dire che abbia limite superiore finito al variare di p, ma è ben determinata e finita in corrispondenza a qualsiasi valore di p (intero o no).

Ferme restando per la funzione data χ le ipotesi del § 4, indichiamo con M ed M' i massimi dei valori assoluti di $\chi(\sigma)$ e di $\chi'(\sigma)$. Dalle (4''), (15) [ovvero dalle analoghe per p intero] ricaviamo immediatamente le disuguaglianze

$$|\omega(\sigma)| \leqslant LM \,, \qquad |\omega'(\sigma)| \leqslant LM' \,, \tag{17}$$

che valgono tanto per la (II) quanto per la (III).

9. - Limitazioni concernenti $P(\vartheta, \tau)$ e sue derivate.

La funzione $P(\vartheta, \tau)$ definita dalla (1) è regolare per qualsiasi valore finito di ϑ, τ. Perciò, se $\Delta\vartheta$, $\Delta\tau$ designano degli incrementi arbitrari di queste quantità, e ΔP è l'incremento corrispondente di P, si ha

$$\Delta P = \overline{\frac{\partial P}{\partial \vartheta}} \Delta\vartheta + \overline{\frac{\partial P}{\partial \tau}} \Delta\tau \,,$$

il tratto sovrapposto indicando che la funzione va riferita ad argomenti del tipo $\vartheta + t\Delta\vartheta$, $\tau + t\Delta\tau$ con t compreso fra 0 ed 1.

Compendiamo per brevità $\vartheta + i\tau$ in ω, $\Delta\vartheta + i\Delta\tau$ in $\Delta\omega$, e supponiamo

$$|\omega| + |\Delta\omega| \leqslant \Omega \,, \tag{18}$$

con che anche $|\omega|$, $|\Delta\omega|$, $|\tau|$, $|\Delta\vartheta|$, $|\Delta\tau|$ sottostanno tutti alla stessa limitazione, sono cioè $\leqslant \Omega$.

D'altra parte

$$\begin{cases} P(\vartheta, \tau) = p(e^{-3\tau} \sin\vartheta - \vartheta) \,, \\ \dfrac{\partial P}{\partial \vartheta} = p(e^{-3\tau} \cos\vartheta - 1) \,, \qquad \dfrac{\partial P}{\partial \tau} = -3pe^{-3\tau} \sin\vartheta \end{cases}$$

sono sviluppabili in serie di potenze di ϑ e di τ, convergenti per tutti i valori di questi argomenti; e le tre serie ammettono ordinatamente le maggioranti

$$p\{e^{3\tau} S\vartheta - \vartheta\} \,, \qquad p\{e^{3\tau} C\vartheta - 1\} \,, \qquad 3pe^{3\tau} S\vartheta \,,$$

S e C designando seno e coseno iperbolico.

Per valori degli argomenti ϑ, τ non superiori ad Ω in modulo, si avrà in conformità

$$\begin{cases} |P| \leq p\{e^{3\Omega} S\Omega - \Omega\}\,, \\ \left|\dfrac{\partial P}{\partial \vartheta}\right| \leq p\{e^{3\Omega}\; C\Omega - 1\}\,, \qquad \left|\dfrac{\partial P}{\partial \tau}\right| \leq 3p\, e^{3\Omega} S\Omega\,, \end{cases}$$

le quali, ove si introduca la trascendente intera

$$G(\Omega) = p\{e^{3\Omega} S\Omega - \Omega\}\,, \tag{19}$$

danno luogo alle disuguaglianze

$$\begin{cases} |P| \leq G(\Omega)\,, \\ \left|\dfrac{\partial P}{\partial \vartheta}\right| + \left|\dfrac{\partial P}{\partial \tau}\right| \leq G'(\Omega)\,. \end{cases} \tag{20}$$

Notiamo che, nell'ipotesi (18), argomenti del tipo $\vartheta + t\varDelta\vartheta$, $\tau + t\varDelta\tau$ sono certo non superiori ad Ω in valore assoluto, mentre in ogni caso, $|\varDelta\vartheta| \leq |\varDelta\omega|$, $\varDelta\tau|\,| \leq |\varDelta\omega|$. Perciò dalla precedente espressione di $\varDelta P$ discende subito la importante disuguaglianza

$$|\varDelta P| \leq G'(\Omega)\,|\varDelta\omega|\,. \tag{21}$$

Accanto a questa occorre stabilirne una analoga relativa a $P' = dP/d\sigma$: si intende che ci si riferisce al contorno C, pensando ϑ, τ, come pure $\varDelta\omega = \varDelta\vartheta + i\varDelta\tau$, quali funzioni di σ (continue assieme alle loro derivate), con che

$$P' = \frac{\partial P}{\partial \vartheta}\vartheta' + \frac{\partial P}{\partial \tau}\tau'\,,$$

e $\varDelta P'$ rappresenta l'incremento dovuto al fatto che ϑ, τ, ϑ', τ' subiscono gli incrementi definiti da $\varDelta\omega$, $\varDelta\omega'$.

Ammesso che anche $|\omega'|$ e $|\varDelta\omega'|$ soddisfacciano ad una disuguaglianza analoga alla (18), anzi alla

$$|\omega'| + |\varDelta\omega'| \leq \Omega\,, \tag{18'}$$

colla stessa costante positiva nel secondo membro, si trova agevolmente

$$|\varDelta P'| \leq G'(\Omega)\,|\varDelta\omega'| + G''(\Omega)\,\Omega\,|\varDelta\omega|\,. \tag{21'}$$

Ci apparirà più innanzi essenziale la circostanza che la maggiorante $G(\Omega)$ si annulla di secondo ordine per $\Omega=0$, e quindi G' di prim'ordine. Questo è reso possibile dall'essere P di secondo ordine almeno nei due argomenti ϑ e τ. Ecco perchè abbiamo fin da principio attribuito alla (I) la forma (I′) apparentemente meno semplice.

10. - Equazione funzionale più generale della (I′). Algoritmo di approssimazioni successive. Sua illimitata applicabilità.

Introduciamo, per brevità di scrittura, un operatore funzionale $A\omega$, lineare, ma *non* monogeno, ponendo, sul contorno C:

$$(22) \qquad A\omega = \begin{cases} \tau'(\sigma) - p\vartheta(\sigma)\,, & \text{per } p \text{ non intero} \\ \tau'(\sigma) - p\vartheta(\sigma) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(\sigma_1)\cos p(\sigma-\sigma_1)d\sigma_1\,, & \text{per } p \text{ intero.} \end{cases}$$

Si consideri l'equazione funzionale

$$(\text{IV}) \qquad A\omega = P(\vartheta, \tau) + \chi(\sigma)\,,$$

in cui $\chi(\sigma)$ designa una funzione *dispari*, nota e soddisfacente alle altre condizioni specificate a § 4. Tale equazione funzionale è, per p non intero, alquanto più generale della (I), riducendosi alla (I′) per $\chi(\sigma)=0$.

Cerchiamo di integrare la (IV) per approssimazioni successive, assumendo come approssimazione iniziale $\omega_0=\vartheta_0+i\tau_0$ la soluzione dell'equazione *lineare*

$$(23) \qquad A\omega_0 = \chi(\sigma)\,,$$

che è poi la (IV) stessa in cui si trascuri il termine $P(\vartheta, \tau)$ d'ordine superiore al primo.

Per quanto fu esposto nei §§ 6 e 7 a proposito delle equazioni (II) e (III), siamo assicurati che la (23) definisce effettivamente in modo univoco una funzione $\omega_0(\zeta)$ regolare per $|\zeta|<1$, nulla nell'origine, continua assieme alla sua derivata prima su C, e *simmetrica*, volendo dire brevemente con tale qualifica che $i\omega_0$ è reale per ζ reale, ossia che ϑ_0 è dispari e τ_0 pari.

Risulterà in conformità dispari, e quindi in particolare di valor medio nullo, anche la funzione

$$P(\vartheta_0, \tau_0) = p(e^{-3\tau_0} \sin\vartheta_0 - \vartheta_0) ,$$

nonchè

$$\chi_1(\sigma) = P(\vartheta_0, \tau_0) + \chi(\sigma) .$$

Passeremo ad una seconda approssimazione ω_1, in base alla equazione lineare

$$A\omega_1 = \chi_1(\sigma)$$

da cui rimane appunto individuata una funzione ω_1 che si comporta come ω_0, compresa la proprietà di simmetria.

A partire da ω_1 si trae in modo analogo una ulteriore approssimazione ω_2, ecc. In generale, supposto che si siano così conseguite ω_0, ω_1, ω_2, ..., $\omega_{\nu-1} = \vartheta_{\nu-1} + i\tau_{\nu-1}$, si pone

$$\chi_\nu(\sigma) = P(\vartheta_{\nu-1}, \tau_{\nu-1}) + \chi(\sigma) , \tag{24}$$

con che χ_ν risulta sempre dispari, e si ricava ω_ν dalla equazione lineare

$$A\omega_\nu = \chi_\nu(\sigma) \qquad (\nu = 1, 2, ...). \tag{25}$$

L'algoritmo costruttivo delle ω è, come si vede, iterabile indefinitamente. Resta da far vedere che esso converge realmente verso una funzione ω che soddisfa alla (IV) e alle altre condizioni volute.

11. - Correzioni successive.
Convergenza uniforme delle ω_ν, ω'_ν verso una funzione limite ω e sua derivata. Verificazione della equazione funzionale.

Definiamo le *correzioni successive*

$$w_\nu = \omega_\nu - \omega_{\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, ...), \tag{26}$$

le quali, nei riguardi qualitativi, si comportano manifestamente come le ω, e danno luogo alle identità

$$\omega_\nu = \omega_0 + \sum_1^\nu {}_i w_i \qquad (\nu = 1, 2, ...). \tag{27}$$

Le disuguaglianze stabilite nei §§ 8 e 9 ci porteranno a riconoscere che le serie $\sum_1^\infty{}_i w_j$, $\sum_1^\infty{}_i w_j'$ sono entrambe uniformemente convergenti su C, purchè soltanto sieno abbastanza piccoli i limiti superiori M, M' di $|\chi(\sigma)|$, $|\chi'(\sigma)|$.

All'uopo cominciamo col rilevare che dalle (23) e (17) scende

$$|\omega_0| \leqslant \mu\,, \qquad |\omega_0'| \leqslant \mu\,, \tag{28}$$

indicando per brevità con μ *il maggiore dei due numeri* LM, LM'.

Dalle stesse (23), combinate colle (25), (26), si ha poi

$$Aw_1 = P(\vartheta_0, \tau_0)\,, \tag{29}$$

$$Aw_\nu = P(\vartheta_{\nu-1}, \tau_{\nu-1}) - P(\vartheta_{\nu-2}, \tau_{\nu-2}) \qquad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{30}$$

Il secondo membro della (29) è una funzione di σ continua assieme alla sua derivata $P' = (\partial P/\partial\vartheta_0)\vartheta_0 + (\partial P/\partial\tau_0)\tau_0'$. Dalle (21) e (28) seguono subito le limitazioni

$$|P(\vartheta_0, \tau_0)| \leqslant G(\mu)\,, \qquad |P'| \leqslant G'(\mu)\mu\,.$$

Dato che $G(\mu)$ è rappresentata da una serie (senza termine costante) a coefficienti tutti positivi, si ha necessariamente $G(\mu) \leqslant G'(\mu)\mu$, sicchè potremo *a fortiori* ritenere

$$|P(\vartheta_0, \tau_0)| \leqslant G'(\mu)\mu\,.$$

Con queste limitazioni per il secondo membro della (29) e sua derivata, possiamo applicare alla funzione w_1, definita dalla (29), le disuguaglianze corrispondenti alle (17) ottenendo

$$|w_1| \leqslant LG'(\mu)\mu\,, \qquad |w_1'| \leqslant LG'(\mu)\mu\,. \tag{31}$$

Poniamo

$$\begin{cases} \Omega_\nu = |\omega_0| + |w_1| + |w_2| + \ldots + |w_\nu|\,, \\ \Omega_\nu' = |\omega_0'| + |w_1'| + |w_2'| + \ldots + |w_\nu'| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots), \end{cases} \tag{32}$$

e, fissando per un momento l'attenzione sopra un valore determinato n dell'indice ν, indichiamo con Ω un numero non inferiore al massimo di

$$\mu,\ \Omega_1,\ \Omega_2,\ \ldots,\ \Omega_{n-1}\,,$$
$$\Omega_1',\ \Omega_2',\ \ldots,\ \Omega_{n-1}'\,.$$

Cerchiamo quali limitazioni si può trarne per le $|w_j|$, $|w'_j|$ $(j=1, 2, ..., n)$ e per Ω_n, Ω'_n.

Abbiamo intanto, dalle (27) e dalla definizione di Ω,

$$|\omega_{\nu-2}| \leqslant \Omega\,, \qquad |\omega_{\nu-1}| \leqslant \Omega\,,$$

nonchè

$$|\omega'_{\nu-2}| \leqslant \Omega\,, \qquad |\omega'_{\nu-1}| \leqslant \Omega \qquad (\nu = 2, 3, ..., n).$$

Con ciò al secondo membro delle (30), che è un ΔP, si può applicare la disuguaglianza (21) del § 9, e si ha

$$|\Delta P| = |P(\vartheta_{\nu-1}, \tau_{\nu-1}) - P(\vartheta_{\nu-2}, \tau_{\nu-2})| \leqslant G'(\Omega)\,|w_{\nu-1}|\,.$$

Alla derivata $d\Delta P/d\sigma = \Delta P'$ si può applicare in conformità la (21'), ottenendo

$$|\Delta P'| \leqslant G'(\Omega)\,|w'_{\nu-1}| + G''(\Omega)\Omega\,|w_{\nu-1}|\,.$$

La (17) dà allora

$$(33) \qquad \begin{cases} |w_\nu| \leqslant LG'(\Omega)\,|w_{\nu-1}|\,, \\ |w'_\nu| \leqslant L\{G'(\Omega)\,|w'_{\nu-1}| + G''(\Omega)\Omega\,|w_{\nu-1}|\} \end{cases} \qquad (\nu = 2, 3, ..., n).$$

Poniamo

$$(34) \qquad q = LG'(2\Omega)$$

e notiamo che, per essere $G'(\Omega)$ una serie di potenze a coefficienti tutti positivi (convergenti per qualsiasi Ω), si ha $G'(2\Omega) \geqslant G'(\Omega)$, ed anche

$$G'(2\Omega) \geqslant G'(\Omega) + G''(\Omega)\Omega\,,$$

come si può verificare paragonando lo sviluppo dei due membri, cioè i valori delle derivate di un ordine qualsiasi k per $\Omega = 0$.

Tenuto conto di ciò, segue immediatamente dalle (33) che, ove sia

$$(35) \qquad |w_\nu| \leqslant \mu q^\nu\,, \qquad |w'_\nu| \leqslant \mu q^\nu$$

per un dato valore dell'indice ν, le disuguaglianze stesse rimangono verificate per il valore di ν immediatamente successivo.

Ore le (35) sono soddisfatte per $\nu=1$, come risulta dalle (31), notando che

$$LG'(\mu) \leqslant LG'(\Omega) \leqslant LG'(2\Omega) = q\,.$$

Esse seguitano dunque a sussistere fino a $\nu=n$, che è, *per ora*, il limite di validità delle (33). Ma tale validità è unicamente subordinata alla circostanza che nessuna delle Ω_ν, Ω'_ν, fino a $\nu=n-1$, supera Ω. Se si è in grado di constatare che anche Ω_n, Ω'_n risultano $\leqslant \Omega$, le (35) e le disuguaglianze

$$\Omega_\nu \leqslant \Omega\,, \qquad \Omega'_\nu \leqslant \Omega \tag{36}$$

rimangono acquisite per qualunque ν. In realtà dalle (32), attese le (28) e le (35) (che sussistono, come si è rilevato, da $\nu=1$ fino a $\nu=n$), segue

$$\Omega_n \leqslant \mu(1+q+\ldots+q^n) = \mu\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,,$$

$$\Omega'_n \leqslant \mu\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.$$

Evidentemente, se

$$q<1\,, \tag{37}$$

$$\frac{\mu}{1-q} \leqslant \Omega\,, \tag{38}$$

Ω_n, Ω'_n risultano $\leqslant \Omega$, e la illimitata validità delle (35) associata a $q<1$ garantisce la assoluta e uniforme convergenza delle serie

$$\omega_0 + \sum_1^\infty{}_j\, w_j\,, \qquad \omega'_0 + \sum_1^\infty{}_j\, w'_j\,.$$

La prima serie definisce perciò una funzione $\omega(\sigma)=\vartheta+i\tau$, continua assieme alla sua derivata ω', che è somma della seconda serie. Ciò val quanto dire, in base alle (27), che si ha, uniformemente su C,

$$\lim_{\nu\to\infty} \omega_\nu = \omega\,, \qquad \lim_{\nu\to\infty} \omega'_\nu = \omega'\,. \tag{39}$$

Ne risulta, pure uniformemente,

$$\lim_{\nu\to\infty} A\omega_\nu = A\omega\,,$$

$$\lim_{\nu\to\infty} P(\vartheta_\nu, \tau_\nu) = P(\vartheta, \tau)\,,$$

con che, dalle (24) e (25), passando al limite per $\nu \to \infty$, si ricava

$$A\omega = P(\vartheta, \tau) + \chi(\sigma) .$$

Perciò la ω, definita dall'algoritmo (25), è veramente integrale della (IV) con tutti i requisiti voluti.

12. - Discussione delle condizioni sufficienti per la convergenza. Conseguente apprezzamento numerico.

Per quanto precede, la convergenza del nostro procedimento di approssimazioni successive è assicurata, purchè sussistano le due disuguaglianze

$$q < 1 , \tag{37}$$

$$\frac{\mu}{1-q} \leqslant \Omega , \tag{38}$$

con

$$q = LG'(2\Omega) \tag{34}$$

e μ dipendente dai dati della questione come il maggiore dei due numeri LM, LM' [M, M' massimi di $\chi(\sigma)$, $\chi'(\sigma)$].

Mostriamo che *a tutte queste condizioni si soddisfa purchè soltanto sia abbastanza piccolo* μ, *il che vuol dire* M *ed* M'.

All'uopo cominciamo coll'osservare che, per ottemperare alla (38) rimpicciolendo μ quanto meno è possibile, dovremo intanto assumere la (38) stessa sotto la forma limite

$$\mu = \Omega(1-q) . \tag{38'}$$

D'altra parte $q = LG'(2\Omega)$ si annulla per $\Omega = 0$ e va poi sempre crescendo con Ω finchè arriva al valore 1 in corrispondenza a un certo $\Omega = U$. I valori di Ω che possono legittimamente servire nei ragionamenti del § precedente (come presunte limitazioni delle Ω_ν, Ω'_ν) sono *a priori* tutti e soli quelli compresi fra 0 ed U (che rendono $0 < q < 1$). Il più conveniente tra questi, cioè quello che imporrà la minima restrizione a μ, sarà, in base alla (38'), quello che ne rende massimo il secondo membro

$$\Omega(1-q) = \Omega\{1 - LG'(2\Omega)\} .$$

Questo secondo membro si annulla per $\Omega = 0$, nonchè per $\Omega = U$ $(q = 1)$, rimanendo positivo nel frapposto intervallo. Esso vi ammette perciò un massimo $\bar{\mu}$ (ed uno soltanto, come si verifica immediatamente) in corrispondenza ad un valore intermedio $\bar{\Omega}$ dell'argomento.

Riassumendo, si calcolerà il valore numerico $\bar{\Omega}$ *di* Ω, *che rende massimo* $\Omega\{1 - LG'(2\Omega)\}$, *e questo massimo* μ [i quali dipendono esclusivamente da L, e quindi (§ 38) da p]. *La condizione sufficiente per la validità del procedimento si può allora presentare sotto la forma esplicita*

$$\mu \leqslant \bar{\mu} ,$$

rimanendo altresì assicurate, per la soluzione ω *che esso determina, le limitazioni*

$$|\omega| \leqslant \bar{\Omega} , \qquad |\omega'| \leqslant \bar{\Omega} .$$

Un apprezzamento numerico (un po' sbrigativo, ma comunque istruttivo) si ottiene trascurando nella serie $G(\Omega)$ le potenze superiori alla seconda. La (19), cioè

$$G(\Omega) = p\{e^{3\Omega}\, S\Omega - \Omega\} ,$$

si riduce allora a

$$G(\Omega) = 3p\Omega^2 ,$$

e dà quindi

$$LG'(2\Omega) = 12Lp\Omega .$$

Il massimo $\bar{\mu}$ di

$$\Omega(1 - 12Lp\Omega)$$

si ha così per

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{24Lp} ,$$

ed è

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2}\,\bar{\Omega} = \frac{1}{48Lp} .$$

Il valore limite U di Ω (quello che rende $q = 1$) è invece

$$U = 2\bar{\Omega} .$$

13. - Unicità della soluzione fornita dal metodo delle approssimazioni successive.

Vogliamo far vedere che ogni soluzione $\omega^* = \vartheta^* + i\tau^*$ della (IV), continua assieme alla sua derivata prima su C, nulla nel centro, cioè a valor medio nullo su C, e soddisfacente ad una limitazione

$$|\omega^*| \leqslant \Omega ,$$

che valga anche per la ω definita col procedimento delle approssimazioni successive, coincide necessariamente con questa.

Vi perverremo senza difficoltà considerando le differenze

$$w_\nu^* = \omega^* - \omega_\nu \qquad (\nu = 1, 2, ...), \tag{40}$$

fra la ω^* di cui si tratta e le approssimazioni successive ω_ν introdotte a § 10, e constatando che tali differenze convergono a zero per $\nu \to \infty$.

Intanto conviene rilevare che ω_ν verifica, per definizione, la condizione al contorno (25)

$$A\omega_\nu = \chi_\nu(\sigma) = P(\vartheta_{\nu-1}, \tau_{\nu-1}) + \chi(\sigma) \qquad (\nu = 1, 2, ...),$$

e ω^*, per ipotesi, la (IV):

$$A\omega^* = P(\vartheta^*, \tau^*) + \chi(\sigma) .$$

$P(\vartheta^*, \tau^*)$ è naturalmente, al pari di $\chi(\sigma)$, funzione continua di σ, assieme alla sua derivata prima, ed ha inoltre valore medio nullo, tale proprietà competendo a $\chi(\sigma)$, ω^* e quindi anche ad $A\omega^* - \chi(\sigma)$. Per analoga ragione, o anche più specificamente (§ 10) perchè funzione dispari, ha valore medio nullo $P(\vartheta_\nu, \tau_\nu)$.

Si ha così, badando alla (40),

$$Aw_\nu^* = P(\vartheta^*, \tau^*) - P(\vartheta_\nu, \tau_\nu) ,$$

pure con valore medio nullo del secondo membro (in quanto lo si consideri come funzione di σ). Sussistono pertanto le condizioni sotto cui è legittimo dedurne per $|w_\nu^*|$ la limitazione corrispondente alla prima delle (17).

Tenuto presente che il secondo membro in discorso è un ΔP, e che, dalle disuguaglianze

$$|\omega^*| \leqslant \Omega\,, \qquad |\omega_\nu| \leqslant \Omega\,,$$

segue

$$|\omega^*| + |\omega_\nu| \leqslant 2\Omega\,,$$

con ovvia modificazione delle considerazioni istituite al § 9, si trova

$$|\Delta P| \leqslant G'(2\Omega)\,|w^*_{\nu-1}|\,,$$

quindi, in base alla (17),

$$|w^*_\nu| \leqslant LG(2\Omega)\,|w^*_{\nu-1}|\,,$$

ossia, per la (34),

$$|w^*_\nu| \leqslant q\,|w^*_{\nu-1}| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Questa ci mostra che le $|w^*_\nu|$ decrescono anche più rapidamente dei termini di una progressione geometrica di ragione $q < 1$. Dunque

$$\lim_{\nu\to\infty} w_\nu = 0\,, \qquad \textit{c. d. d.}$$

14. - Corollario. Sua portata idrodinamica. Validità rigorosa dell'equazione di Airy.

Abbiamo già notato a § 3 che l'equazione funzionale (II)

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta = \chi(\sigma)$$

ammette tutti e soli i valori interi di p per autovalori; ossia che, per p non intero, l'equazione omogenea

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta = 0$$

non ammette soluzioni diverse da zero. Siccome, per p non intero, l'operatore $A\omega$ definito dalla (22) è proprio $d\tau/d\sigma - p\vartheta$, così

$$A\omega_0 = 0$$

implica $\omega_0 = 0$. La stessa conclusione è vera per A (non per $(d\tau/d\sigma) - p\vartheta$), anche se p è intero, in quanto appunto la corrispondente definizione (22) di A introduce un termine addizionale che toglie all'intero p il carattere di autovalore.

Ciò premesso, è chiaro che *per* $\chi(\sigma) = 0$, *la soluzione della equazione* (IV) *definita dalle approssimazioni successive è zero.* Infatti la (23) dà in primo luogo $\omega_0 = 0$, e allora, in virtù delle (24) (fattovi $\chi = 0$) e delle (25), si annullano tutte le ω_ν e quindi anche il limite ω). Questo ci consente di affermare (con riferimento al precedente §) che *a prescindere da* $\omega = 0$, *non esistono soluzioni* (regolari e inferiori ad un certo limite) *dell'equazione*

$$A\omega = P(\vartheta, \tau) .$$

Per p non intero, questa coincide colla (I'); dunque, sempre per p non intero, nemmeno la (I') ha soluzioni diverse da zero.

Dacchè la (I') definisce le onde periodiche (irrotazionali e permanenti) in un canale molto profondo, e il valore assoluto di ω è legato all'altezza dell'onda, si può anche dare a quanto precede la forma espressiva: *Onde periodiche di altezza moderata possono esistere solo in corrispondenza a valori interi di* p. Infatti, per p non intero, si ha necessariamente $\omega = 0$, il che vuol dire assenza d'ogni perturbazione ondosa.

Richiamandosi al significato cinematico di p, espresso dalla (2) del § 1,

$$p = \frac{g\lambda}{2\pi c^2} ,$$

si vede che dei valori interi di p quello che dà l'onda fondamentale (di lunghezza minima) è $p = 1$, Per queste onde, si trova quindi esattamente verificata la equazione di AIRY

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} .$$

A dire il vero, non abbiamo ancora dimostrata l'effettiva esistenza di dette onde, ma già la conclusione rigorosa che il minimo valore possibile di p è l'unità merita attenzione, perchè diversa da quanto avrebbero lasciato supporre le ricerche di STOKES e di RAYLEIGH. Secondo il loro procedimento di approssimazioni successive, tostochè si abbandona la linearità, la equazione di AIRY si trova sostituita da una relazione più complicata, in cui intervengono, oltre a c e a λ, anche l'altezza dell'onda, coll'effetto generale di aumentare alquanto la velocità coll'altezza, ossia di rendere $p < 1$.

Era naturale il pensare che così fosse in natura per onde di ampiezza finita. Risulta invece dalla nostra discussione che un tale comportamento è contingente allo speciale tipo di approssimazione adottata, ma non può comunque riscontrarsi in effettive soluzioni della (I).

15. - Risoluzione della (I) in corrispondenza ad un suo autovalore (p intero). Equazione di Schmidt.

La equazione (I) — o, ciò che è lo stesso, la equivalente (I′) — non ha termine noto. Per p intero (autovalore), si può subordinarla ad altra con termine noto, che rientra nel tipo (22) (§ 10), ed è quindi integrabile per approssimazioni successive. Basta ricorrere ad un artificio dovuto in sostanza ad E. Schmidt.

Limitandoci alle eventuali soluzioni della (I) per cui $\tau(\sigma)$ è pari e $\vartheta(\sigma)$ dispari (*simmetriche*, secondo la denominazione introdotta al § 10), indichiamo con b il coefficiente (incognito) di $\sin p\sigma$ nello sviluppo di Fourier della funzione ϑ. Sarà zero per la disparità il coefficiente di $\cos p\sigma$, e si avrà

$$(41)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\vartheta(\sigma_1)\cos p(\sigma-\sigma_1)\,d\sigma_1 = b\sin p\sigma\,.$$

La (I′), aggiungendo membro a membro questa identità, assume la forma

$$(\mathrm{I}'')\qquad \frac{d\tau}{d\sigma}-p\vartheta(\sigma)+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\vartheta(\sigma_1)\cos p(\sigma-\sigma_1)\,d\sigma_1 = P(\vartheta,\tau)+b\sin p\sigma.$$

Riconosciamo in questa la (IV) del § 10, con p intero e,

$$\chi(\sigma) = b\sin p\sigma\,.$$

Trattiamovi per un momento b come un parametro indeterminato. La proposizione esistenziale del § 11 ci assicura che, per $|b|$ abbastanza piccolo, la (I″) ammette una soluzione $\omega(\zeta, b)$ calcolabile col metodo delle successive approssimazioni. Tale soluzione soddisferà a tutti i requisiti voluti; in particolare, risulterà dispari (e continua) su C la sua parte reale $\vartheta(\sigma, b)$. Se il parametro b, lasciato per un momento indeterminato (salvo una limitazione superiore del valore assoluto), si potrà *a posteriori* identificare col coefficiente di $\sin p\sigma$ nello sviluppo di ϑ, cioè se

$$b = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(\sigma, b) \sin p\sigma \, d\sigma \,, \tag{41'}$$

sussisterà, per la disparità di ϑ, anche la (41), e per conseguenza la funzione trovata come soluzione della (I″) verificherà altresì la originaria (I).

Tutto si trova così ricondotto alla discussione della equazione in termini finiti (41′); a constatare cioè che essa ammette almeno una radice b abbastanza piccola in valore assoluto, cioè contenuta effettivamente nell'ambito di validità del procedimento costruttivo dell'integrale $\omega(\zeta, b)$. Questo procedimento rende subito manifesto che, nello sviluppo di $\vartheta(\sigma, b)$ per potenze di b, il termine lineare vale $b \sin p\sigma$; perciò la equazione (41′) si riduce alla forma

$$b^2 B(b) = 0 \,,$$

con B serie di potenze di b; ossia in definitiva a

$$B(b) = 0 \,.$$

Questa si può chiamare *equazione di Schmidt*, perchè rientra in una categoria da lui segnalata in generale a proposito delle equazioni integrali non lineari.

Riservo ad altro lavoro la effettiva costruzione della $\omega(\zeta, b)$ e la discussione della equazione $B(b) = 0$, con riguardo alle conseguenze idrodinamiche.

XII.

SULLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ

« Elettrotecnica », vol. X (1923),

pp. 1-4.

(Le due conferenze Castelnuovo sulla « Teoria della relatività » che ebbero luogo l'anno scorso presso la Sezione di Roma e di cui fu già pubblicato il testo (1922, pag. 417), *furono seguite da ampia discussione. Riportiamo qui una parte di questa discussione; e cioè le osservazioni che ebbe a fare il prof. T. Levi-Civita).*

Il prof. Castelnuovo ha rilevato il significato di *tempo proprio* che compete alla forma differenziale

$$ds^2 = \sum_{ik}^{3} {}_{0}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k \,, \tag{1}$$

in cui le x_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ designano parametri quali si vogliono atti a individuare un avvenimento nello spazio-tempo.

Supponendo che il tempo proprio sia comodamente accessibile all'esperienza e alla misura diretta (il che diede luogo l'altra sera a interessante dibattito circa la possibilità e le modalità di realizzazione concreta), ne discende ovviamente la determinabilità sperimentale dei coefficienti g_{ik}. Basta infatti osservare nell'intorno di un generico avvenimento A (cioè di assegnati valori delle x_i) 10 distinti avvenimenti A' (le coordinate di ciascuno dei quali differiscano dalle x_i per incrementi infinitesimi dx_i) e misurare i singoli tempi propri, perchè la (1), applicata ai diversi sistemi di incrementi dx_i, fornisca altrettante equazioni lineari fra le g capaci di determinarle.

Tutto questo è incontestabile; ma apparisce indubbiamente desiderabile di poter raggiungere la determinazione sperimentale delle g anche senza far intervenire il tempo proprio, con che rimangono automaticamente eliminate le eventuali difficoltà d'ordine concettuale o d'ordine pratico cui dà luogo la sua misura effettiva.

Vi si perviene associando alla (1) due tra i postulati fondamentali della teoria di EINSTEIN; e precisamente:

a) La propagazione luminosa avviene sempre in modo che, lungo ogni linea oraria,

$$ds^2 = 0 . \tag{2}$$

b) Le equazioni del moto di un punto materiale, in un campo di forza cui convenga l'espressione (1) del ds^2, sono geodetiche di questo ds^2 (proprie, cioè tali che lungo di esse $ds^2 > 0$).

Mi propongo in particolare di mostrare come basti la proposizione *a*) per individuare i rapporti dei coefficienti g, o, ciò che è lo stesso, il ds^2 a meno di un fattore. La determinazione di quest'ultimo può invece farsi dipendere dalla proposizione *b*).

* * *

Cominciamo coll'attribuire a uno dei quattro parametri, sia per es. x_0, il significato di tempo: si intende di tempo convenzionale, misurato (in ogni singolo posto) da un orologio qualsiasi, anche difettoso. Comunque si scelga il parametro temporale x_0, il fatto solo che esso sia tale implica, secondo lo schema einsteiniano, che, se si fa variare solo x_0 (tenendo costanti x_1, x_2, x_3), deve risultare $ds^2 > 0$. Ma, quando $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$, ds^2 si riduce a $g_{00}\, dx_0^2$, sicchè il coefficiente g_{00} risulta necessariamente > 0, e si può quindi porre

$$g_{00} = c^2 e^{2\nu} , \tag{3}$$

essendo per es. c una costante positiva (di omogeneità) e ν, al pari di g_{00}, una incognita funzione di x_0, x_1, x_2, x_3 (puro numero, cioè di dimensioni nulle).

Ciò premesso, fissiamo a piacimento un istante x_0 e tre valori x_1, x_2, x_3 delle coordinate di spazio, cioè un punto P, e proponiamoci in primo luogo di determinare i rapporti delle g (in P, all'istante x_0).

Ci serviremo di segnali luminosi fra P e punti molto vicini dello spazio fisico ambiente, che è per ipotesi (istante per istante), in corrispondenza biunivoca colle terne di coordinate x_1, x_2, x_3. Sono per conseguenza ben determinate nel detto spazio fisico (all'istante x_0) superficie e linee rappresentate da equazioni fra x_1, x_2, x_3: in particolare le linee x_1 ($x_2 = \text{cost}$, $x_3 = \text{cost}$) su cui varia la sola x_1, le linee x_2, ecc.

Scegliamo due punti Q, Q' molto vicini a P, sulla stessa linea x_1 che contiene il punto P. Supponiamo anzi che Q, Q' corrispondano agli incrementi (da trattarsi come infinitesimi) dx_1 e $-dx_1$ della coordinata x_1;

dx_2, dx_3 riescono nulli in entrambi i casi perchè ci si sposta lungo una linea x_1.

Immaginiamo di far partire da P nell'istante x_0 due raggi luminosi, uno verso Q, l'altro verso Q'. Sia $x_0 + dx_0$ l'istante in cui il primo raggio arriva in Q; $x_0 + d'x_0$ l'istante in generale distinto in cui il secondo raggio arriva in Q'. Attesa l'espressione (1) del ds^2 e la condizione $ds^2 = 0$ per le propagazioni luminose, avremo, nel passaggio da P a Q,

$$g_{00}\, dx_0^2 + 2g_{01}\, dx_0\, dx_1 + g_{11}\, dx_1^2 = 0 \,, \tag{4}$$

e, nel passaggio da P a Q',

$$g_{00}\, d'x_0^2 - 2g_{01}\, d'x_0\, dx_1 + g_{11}\, dx_1^2 = 0 \,. \tag{5}$$

Queste due equazioni, in cui dx_1, dx_0, $d'x_0$ sono noti (il primo scelto a piacimento, gli altri due dati dall'esperienza) forniscono ovviamente i rapporti g_{01}/g_{00}, g_{11}/g_{00}. Si noti che, qualora i due tempi elementari di propagazione dx_0, $d'x_0$ (desunti dall'osservazione) risultino eguali, le (4) e (5) danno per sottrazione $g_{01} = 0$. Reciprocamente, se $g_{01} = 0$, i due tempi devono coincidere. Perciò la propagazione elementare della luce nella direzione d'una linea x_1 si presenta come fenomeno reversibile allora e allora soltanto che $g_{01} = 0$.

In modo analogo si determinano, considerando le altre due linee coordinate x_2 e x_3, i quattro rapporti

$$\frac{g_{01}}{g_{00}}, \quad \frac{g_{22}}{g_{00}}; \quad \frac{g_{03}}{g_{00}}, \quad \frac{g_{33}}{g_{00}}.$$

Per procurarsi anche gli altri rapporti

$$\frac{g_{23}}{g_{00}}, \quad \frac{g_{31}}{g_{00}}, \quad \frac{g_{12}}{g_{00}},$$

basterà fare ulteriori esperienze dello stesso tipo, prendendo però i punti Q in direzioni diverse da quelle delle linee coordinate.

Così, per determinare g_{23}/g_{00}, si può servirsi di una linea della superficie $x_1 = \text{cost}$ (passante per P), che non sia nè la x_2, nè la x_3; per es. della

$$x_3 - x_2 = \text{cost}.$$

Si hanno allora, nel passare da P ad un punto vicinissimo Q su questa linea, gli incrementi

$$0\,, \quad dx_2\,, \quad dx_2\,,$$

con dx_2 arbitrario.

Se si fa partire da P nell'istante x_0 un raggio luminoso verso questo punto Q, e si indica con dx_0 il tempuscolo di propagazione, si ha dalla (2), divisa per g_{00},

$$dx_0^2 + 2\,\frac{g_{02}}{g_{00}}\,dx_0\,dx_2 + 2\,\frac{g_{03}}{g_{00}}\,dx_0\,dx_2 + \frac{g_{22}}{g_{00}}\,dx_2^2 + \frac{g_{33}}{g_{00}}\,dx_2^2 + 2\,\frac{g_{23}}{g_{00}}\,dx_2^2 = 0\,, \tag{6}$$

che permette di ricavare il rapporto g_{23}/g_{00}, essendo note o già determinate le altre quantità che vi compariscono.

Analogamente per g_{31}/g_{00}, g_{12}/g_{00}.

Non è fuor di luogo aggiungere che da altre esperienze dello stesso tipo si traggono quante si vogliono (anzi infinite) ulteriori equazioni fra i rapporti delle g. La loro compatibilità, in quanto venga effettivamente suffragata da queste ulteriori esperienze, costituisce un controllo molto significante dello schema einsteiniano fino al postulato a).

* * *

Assegnati così i rapporti

$$g'_{ik} = \frac{g_{ik}}{g_{00}} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)\,, \tag{7}$$

giova porre, badando alla (3)

$$ds^2 = g_{00}\,ds'^2 = c^2\,e^{2\nu}\,ds'^2\,, \tag{8}$$

con che la forma differenziale

$$ds'^2 = \frac{ds^2}{g_{00}}$$

è interamente conosciuta (essendolo i singoli coefficienti).

In base alle (1) e (7), scrivendo a parte i termini che contengono l'indice 0, il ds'^2 si esplicita come segue:

$$ds'^2 = dx_0^2 + 2\sum_{i\,1}^{3} g'_{0i}\,dx_0\,dx_i + \sum_{ik\,1}^{3} g'_{ik}\,dx_i\,dx_k\,. \tag{9}$$

Comunque, ci troviamo ricondotti a determinare la funzione ν con esperienze gravitazionali, più precisamente di movimento di corpi (punti materiali) nel campo in cui vale la espressione (8) del ds^2.

Le equazioni del moto sono notoriamente compendiate nel principio variazionale

$$\delta \int ds = 0 . \tag{10}$$

Ora se, lungo la traiettoria, si immagina assunto per variabile indipendente il tempo x_0, e si indicano con $\dot{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ le derivate dx_i/dx_0, ove, badando alla (9), si ponga

$$\frac{ds'}{dx_0} = \sqrt{1 + 2 \sum_i^{3}{}_{1} g_{0i}\dot{x}_i + \sum_{ik}^{3}{}_{1} g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k} = \mathcal{L}(x_0 \,|\, x_1, x_2, x_3 \,|\, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) , \tag{11}$$

e si tenga conto della (8), la equazione variazionale (10) può essere scritta

$$\delta \int (e^{\nu}\mathcal{L})\, dx_0 = 0 . \tag{10'}$$

Essa equivale, come si sa, alle tre equazioni lagrangiane

$$\frac{d}{dx_0}\frac{\partial(e^{\nu}\mathcal{L})}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial(e^{\nu}\mathcal{L})}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Notando che ν non dipende dalle $\dot{x}$, e ponendo per brevità di scrittura

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \alpha_i , \qquad -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \beta_i , \qquad \frac{d\alpha_i}{dx_0} + \beta_i = \gamma_i , \quad (i = 1, 2, 3), \tag{12}$$

risulta

$$\alpha_i \frac{d\nu}{dx_0} + \beta_i \frac{\partial \nu}{\partial x_i} + \gamma_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{13}$$

Ritenuto tutto ciò, va tenuto presente che l'osservazione diretta del moto ci pone in grado di rilevare come varino le coordinate x_i in funzione del tempo x_0, sicchè dobbiamo considerare conosciute per ogni punto materiale che abbandoniamo o lanciamo (nel campo di forza di cui si tratta) le $x_i(x_0)$ e quindi anche le derivate $\dot{x}_i$, nonchè le $\ddot{x}_i$. Ne consegue che sono egualmente conosciute le quantità α_i, β_i, γ_i definite dalle (12).

Dacchè

$$\frac{dv}{dx_0} = \frac{\partial v}{\partial x_0} + \sum_1^3{}_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \dot{x}_i \, .$$

le (12) ci si presentano in definitiva come tre equazioni lineari nelle quattro derivate parziali dell'incognita funzione v. Fissato un punto generico P e un istante x_0, ogni arbitraria scelta della velocità del corpo di prova (cioè dei tre valori numerici da attribuirsi a $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$) dà luogo a tre equazioni nelle quattro derivate

$$\frac{\partial v}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_3}$$

riferite al posto e all'istante. Queste equazioni consentono dunque esuberantemente la determinazione dei valori numerici di dette derivate: esuberantemente, nel senso che se ne possono trarre, moltiplicando le esperienze, non solo le quattro incognite, ma anche quanti si vogliono controlli.

Note le derivate della v (in ogni punto di un certo campo e in ogni istante di un certo intervallo), la v stessa rimane determinata a meno di una costante additiva; quindi, a norma della (3), la g_{00} a meno di costante moltiplicativa, che si congloba nel fattore di omogeneità c^2, talchè questo resta arbitrario. La sua presenza nella espressione di g_{00} e quindi, a norma della (8), nel ds^2 appare nella natura delle cose, corrispondendo in sostanza alla scelta, che rimane arbitraria, dell'unità con cui si conviene di misurare il ds o, se si vuole, il tempo proprio di un generico fenomeno.

XIII.

DIFERENCIALES SEGUNDAS QUE SE COMPORTAN DE MODO INVARIANTIVO

« Rev. Matem. Hispano-Americana », t. V (1923),
pp. 165-176.

1. - Consideraciones preliminares.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ indican variables independientes y dx_i, δx_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ sistemas arbitrarios de incrementos a ellas atribuidos, es notoriamente lícito definir con criterios diversos (en relación con las hipótesis que se quieran hacer sobre la dependencia de las diferenciales dx y δx de las x) las diferenciales segundas, $\delta\, dx_i$, $d\,\delta x_i$. Cuando en un determinado problema no hay que cambiar de variables, es corriente atenerse al criterio más sencillo, cual es de considerar los incrementos dx_i, δx_i independientes del lugar (es decir, de las variables x), poniendo conforme a esto

$$\delta\, dx_i = d\,\delta x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Un convenio semejante tiene, sin embargo, el inconveniente de no ser invariante. En efecto: consideremos una transformación genérica de variables, la cual sustituya las x por las nuevas variables y, ligadas a las primeras por relaciones regulares (es decir, finitas, continuas y derivables hasta el orden que sea preciso, en el campo que se considera, así como, se sobreentiende, invertibles.) Escriberemos

$$y_\nu = y_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

que podrán considerarse resolubles respecto a las x, y por tanto, equivalentes a las inversas

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2'}$$

Ahora, si se designan, come es natural, por dy_ν, δy_ν, δdy_ν, etcétera, los incrementos de las y, correspondientes, según las (2), a los incrementos dx_i, δx_i, δdx_i, etc., atribuidos a las x, se tiene como es obvio

$$dy_\nu = \sum_1^n{}_i \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} dx_i\,, \qquad \delta y_\nu = \sum_1^n{}_i \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \delta x_i\,,$$

$$\delta dy_\nu = \sum_1^n{}_i \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \delta dx_i + \sum_1^n{}_{ij} \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \delta x_j\,, \quad \text{etc.}$$

Se consigue así que, adoptando para las variables primitivas diferenciales segundas nulas, las δdy_ν tengan determinaciones, en general, no nulas

$$\sum_1^n{}_{ij} \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \delta x_j\,.$$

Se presenta de este modo la cuestión de substituir si es posible, a las (1), expresiones de carácter invariante, es decir, aptas para conservar análoga estructura, cuando se transformen las variables independientes. La cosa es factible, como tuve ocasión de mostrar en mi trabajo sobre el paralelismo [1], si se toma como *base*, esto es, como elemento auxiliar para considerarlo invariante respecto a las transformaciones de variables, una forma diferencial cuadrática (irreducible)

$$\varphi = \sum_1^n{}_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,.$$

Se pueden también formar diferenciales que se comporten de modo invariante (en el sentido antes especificado) cuando la base sea una forma diferencial de grado superior al segundo? La respuesta es afirmativa y la base invariante puede ser fijada todavía con mayor generalidad, recurriendo, para definir un sistema invariante de diferenciales segundas, a los primeros elementos del cálculo de variaciones, como lo estableció LIPSCHITZ a fines del año 1869 [2].

Me propongo desarrollar aqui, generalizándolas, las indicaciones de LIPSCHITZ, respondiendo con esto a la cortés invitación de mi colega el

---

[1] « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », t. XLII, 1917, pp. 173-215, § 15 [in questo vol.: pp. 27-28]. Cfr. ademàs FUBINI: *I differenziali controvarianti*, « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. LIV, 1918-19, p. 57. *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale*, « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », t. XLIII, 1918-19, pag. 1-46, § 1.

[2] Cfr. *Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen*, « Journal für die reine und angewandte Mathematik », Bd. 70, pp. 71-102, § 1.

Profesor PLANS. Antes de entrar en materia, me parece todavía oportuno hacer notar cómo, con la construcción a partir de una base dada de diferenciales segundas invariantes, no se llega todavía a la extensión del algoritmo esencial del cálculo diferencial absoluto. Aludo a la derivación covariante, esto es, a la deducción de un tensor de rango $m+1$ de otro tensor dado de rango m. En efecto, cuando la base no es una forma diferencial cuadrática φ, sino una más general (por ejemplo de grado superior al segundo), se puede todavía de una forma diferencial (invariante) F, que tenga por coeficientes los elementos $A_{i_1 i_2 \dots i_m}$ de un tensor covariante dado, deducir una nueva formación (invariante) δF, la cual (en cuanto se sustituyan a las diferenciales segundas sus expresiones invariantes) vendrá a depender de los argumentos que figuran en F de las derivadas de las $A_{i_1 i_2 \dots i_m}$ y además de una serie ulterior de diferenciales δx_i. Peró δF no será (como cuando la base era φ) una forma de orden $m+1$, y es por lo menos dudoso que de δF se logre efectivamente deducir un tensor derivado cualquiera, cuyos elementos sean aptos a sustituir las derivadas ordinarias de las A solas.

Esta sería la específica generalización del cálculo diferencial absoluto, de la cual ya habia sido advertida la necesidad en varios casos, particularmente por FUBINI en sus penetrantes investigaciones de geometría proyectivo-diferencial [3].

La introducción de la diferenciales segundas invariantes de base más general, no proporcionando aún una derivación covariante de los tensores, parece, sin embargo, constituir el primer paso. Por ésto, me permito dedicar la presente nota a tal cuestión preliminar.

2. - Base invariante. Formaciones lagrangianas subordinadas.

Supongamos por un momento nuestras variables independientes x, funciones de dos parámetros t y u. Con las locuciones geometricas corrientes, interpretando las x como coordenadas de un punto en un espacio representativo S_n, la dependencia indicata por los dos parámetros t y u equivale a hacer intervenir una superficie generica de dos dimensiones Σ del S_n. Naturalmente las transformaciones (2), (2′), vienen así interpretadas como cambios de coordenadas en el S_n.

---

(3) A este propósito señalaremos también las notables investigaciones de los señores GOURSAT PASCAL, CARTAN, DE DONDER, BUHL, que tratan de construir *también sin base* (no tantos elementos cuantas son las derivadas de las A) sino algunas combinaciones invariantes de las A y sus derivadas.

Pongamos para mayor brevedad

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}, \qquad x'_i = \frac{dx_i}{du} \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{3}$$

e introduzcamos una función (regular, en el sentido indicado en el número precedente) *a priori* cualquiera

$$\Lambda(x \,|\, \dot{x} \,|\, x')$$

de los $3n$ argumentos x, $\dot{x}$, x'.

Elegida de modo arbitrario una región σ de la superficie Σ, esto es, un campo de valores de las t, u, indiquemos con s su contorno y formemos la integral doble

$$A = \int_\sigma \Lambda \, dt \, du \, . \tag{4}$$

Imaginemos ahora que atribuímos a las x_i incrementos δx_i, que se han de considerar como funciones de las t, u (regulares en el sentido indicado en el § 1) arbitrarias en el interior de σ y sometidas solamente a la condición de anularse en el contorno s. La integral A sufrirá conforme a esto una variación elemental δA. Poniendo

$$\varpi_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{x}_i} + \frac{d}{du}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_i} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}, \tag{5}$$

tendremos después de obvias y bien conocidas integraciones por partes

$$\delta A = -\int_\sigma dt \, du \sum_1^n \varpi_i \, \delta x_i \, . \tag{6}$$

3. - Cambios de variables.
Covariancia de las formaciones lagrangianas.

Ocupémonos en primer lugar del modo de comportarse de las ϖ_i respecto de una transformación genérica (2), en la hipótesis que se trate como invariante la función Λ, introduciendo en esta, en lugar de las x, sus expresiones (2′) y, naturalmente, en lugar de dx/dt, dx/du, aquellas funciones de las y, dy/dt o respectivamente dy/du, que se deducen de la derivación de las mismas (2').

Con esto la Λ cambia de forma, es verdad; pero permanece inalterada en cuanto función de t y de u, permaneciendo también inalteradas las integrales A y δA. En consecuencia, si se forman, con referencia a las variables y, los binomios análogos a los ϖ_i

$$(5') \qquad \chi_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{y}_i} + \frac{d}{du}\frac{\partial \Lambda}{\partial y'_i} - \frac{\partial \Lambda}{\partial y_i},$$

se puede del mismo modo atribuir a δA la expresión

$$(6') \qquad \delta A = -\int_\sigma dt\,du \sum_1^n {}_i\, \chi_i\, \delta y_i\,.$$

Confrontando con la (6), atendiendo a la arbitrariedad de σ, se puede inferir, como bien se sabe, la igualdad local de las funciones bajo el signo, o sea

$$(7) \qquad \sum_1^n {}_i\, \varpi_i\, \delta x_i = \sum_1^n {}_i\, \chi_i\, \delta y_i,$$

la cual demuestra el carácter covariante de las formaciones lagrangianas ϖ_i (y en particular *la invariancia* respecto a cualquier transformación (2) de coordenadas) *del sistema de ecuaciones* (en derivadas parciales)

$$(8) \qquad \varpi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Es importante hacer notar que la (7), establecida en la hipótesis que las t y u sean variables independientes, continúa subsistiendo aunque las t, u se liguen entre sí. En particular, es licíto suponer $u = t$, lo que, cuando se escribe para mayor claridad

$$(9) \qquad L(x\,|\,\dot{x}) = \{\Lambda(x\,|\,\dot{x}\,|\,x')\}_{x'=\dot{x}}\,\cdot$$

da lugar clásicamente a la invariancia del sistema de ecuaciones de LAGRANGE

$$(10) \qquad p_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Cambiando materialmente t en u, o sea poniendo

$$L^*(x\,|\,x') = \Lambda(x\,|\,x'\,|\,x')\,,$$

se tiene de modo análogo el sistema invariante

$$p_i^* = \frac{d}{du}\frac{\partial L^*}{\partial x_i'} - \frac{\partial L^*}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{10'}$$

Las $d^2x_i/dt^2 = \ddot{x}_i$ aparecen en las (10) linealmente, teniéndose

$$p_i = \sum_1^n {}_k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \ddot{x}_k + \ldots\,,$$

donde los términos omitidos dependen solamente de las x y de las $\dot{x}$.

4. - Derivadas segundas puras y mixtas.

Siempre que el determinante hessiano de la L respecto a las $\dot{x}$

$$D = \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \right\| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

sea distinto de cero, las (10) son aptas para definir las $\ddot{x}_i$, tal definición teniendo, por cuanto se ha observado en lo anterior, carácter invariante respecto de todas las transformaciones (2). De idéntico modo, salvo el cambio material de t en u, quedan definidas de modo invariante las $x_i'' = d^2x_i/du^2$, por las (10').

Adoptando para las d^2x_i/dt^2, d^2x_i/du^2 tales determinaciones, se pueden definir ulteriormente, con ley invariante — subordinata esta también a la invariancia de Λ — también las derivadas segundas mixtas $d^2x_i/dt\,du$. Basta, para tal fin, recurrir a las (8), notando que, según las (5), los términos de una ϖ_i genérica que contienen derivadas segundas, se hacen explícitos como sigue:

$$\sum_1^n {}_k \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_1^n {}_k \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{x}_i \partial x_k'} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_i' \partial \dot{x}_k} \right) \frac{d^2 x_k}{dt\,du} + \sum_1^n {}_k \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_i' \partial x_k'} \frac{d^2 x_k}{du^2}\,.$$

Se deduce de aqui que con la restricción cualitativa de que sea distinto de cero el determinante

$$\Delta = \left\| \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \dot{x}'_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x'_i \partial \dot{x}_k} \right\| ,$$

las ecuaciones (8)

$$\varpi_i = 0 ,$$

en las cuales se sustituyan a las derivadas segundas puras $\ddot{x}_i, x''_i$, las expresiones proporcionadas por las (10), (10′), son aptas para definir de modo invariante las derivadas segundas mixtas $d^2x_i/dt\,du$.

En conclusión, *las* (10), (10′) y (8), *dan lugar a determinaciones invariantes de todas las derivadas segundas. La invariancia* (respecto a transformaciones cualesquiera de coordenadas) *está subordinada unicamente a la de una función* (arbitraria) $\Lambda(x|\dot{x}|x')$, *con la restricción cualitativa de que no se anulen* (en el campo de los valores considerados) *los dos determinantes* D y Δ.

Observación I (*integrabilidad*). – Las ecuaciones (10), (10′), (8), en cuanto se consideren como un sistema en derivadas parciales que define todas las derivadas segundas de las x_i, no serán en general ilimitadamente integrables. Pero el sistema tiene todavía un significado efectivo cuando éste se limita al transporte a lo largo de una curva, por ejemplo, del modo siguiente.

Consideremos un punto cualquiera P_0, y pasando por él dos curvas arbitrarias T y U, ambas integrales del sistema (10), o más precisamente, quierendo poner en evidencia la diversa designación del parámetro (t para T y u para U), integrales, la primera del sistema (10), la segunda del sistema (10′). Sean $\dot{X}_i^{(0)}$, $X_i'^{(0)}$ los valores numéricos de las derivadas de las coordenadas (respecto a t y respecto a u, respectivamente) en P_0. Las (8), (10), (10′) definen, como es obvio, un transporte de curvas de la especie U, a lo largo de T, y viceversa.

Expliquemos esto, refiriéndonos, para fijar las ideas, al transporto a lo largo de T.

Las (8), donde habremos sustituído en lugar de las $\ddot{x}_i$, x''_i los valores deducidos de las (10), (10′), dan, puede decirse, las dx'/dt en función de las x', así como de las x, $\dot{x}$, esto es (a lo largo de T), de funciones conocidas de t. Integrando este sistema diferencial de primer order con las condiciones iniciales $x'_i = x_i'^{(0)}$ (para aquel valor de t que corresponde al punto P_0), se deducen valores de las x' para asociar a cada punto P de la T. Las (10′) caracterizan entonces unívocamente una curva del sistema U, que pasa por P con la dirección x'_i, etc.

El interés del sistema (8), (10), (10′) está en que, construcciones de este tipo, resultan, en la variedad S_n, independientes del sistema de coordenadas elegido.

OBSERVACIÓN II (*simétria*). – No será inútil el hacer notar explícitamente que las expresiones de las derivadas segundas mixtas, que se obtienen de las (8) después de haber eliminado las derivadas segundas puras $\ddot{x}_i$, x''_i, por medio de las (10), (10′), *no* resultan en general simétricas respecto a las dos series de argumentos $\dot{x}$, x'. Esto ocurre, sin embargo, si lo es la Λ, esto es, si se tiene idénticamente

$$\Lambda(x\,|\,\dot{x}\,|\,x') = \Lambda(x\,|\,x'\,|\,\dot{x})\ .$$

A primera vista, se estaría tentado de pensar que, cambiando t con u, debía quedar materialmente inalterado el segundo miembro de las (8), supuesto resueltas con respecto a las $d^2x/dt\,du$, como sucede al primero. En realidad, non es asi, porque la operación « cambio de t con u » la cual no altera las derivadas segundas, no es admitida en general por la function $\Lambda(x\,|\,\dot{x}\,|\,x')$, por medio de la cual se expresan de modo invariante las derivadas segundas. Si se quiere que esta espresión tenga estructura simétrica, basta servirse, como se ha dicho, de una función Λ que sea ella misma simétrica.

5. - Tránsito a las diferenciales.

Supongamos, en particular, que Λ sea función homogénea respecto a cada una de las dos series de argumentos $\dot{x}$ y x', de grados respectivos μ y ν, siendo μ y ν números reales arbitrarios.

Indicando con dx_i las diferenciales $\dot{x}_i\,dt$, con δx_i las del tipo $x'_i\,du$, tendremos conforme a ello

$$dt^\mu du^\nu \Lambda(x\,|\,\dot{x}\,|\,x') = \Lambda(x\,|\,dx\,|\,\delta x)\ . \tag{11}$$

Si ahora se multiplican las (5) por $dt^\mu du^\nu$, y *se entiende por* Λ *el segundo miembro de la* (11), *las ecuaciones* $\varpi_i = 0$ *pueden escribirse*

$$d\,\frac{\partial \Lambda}{\partial(dx_i)} + \delta\,\frac{\partial \Lambda}{\partial(\delta x_i)} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)\ . \tag{I}$$

De modo análogo, llamando L a la función

$$dt^{\mu+\nu} L(x\,|\,\dot{x}) = L(x\,|\,dx)\,, \tag{12}$$

la cual proviene de la nueva Λ, haciendo coincidir en ella δ, con d, se tiene de la (10)

$$d\,\frac{\partial L}{\partial(dx_i)} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{II}$$

Estas últimas, con las que se obtienen, sustituyendo en ellas materialmente las diferenciales δ en lugar de d, sirven para definir de modo invariante las diferenciales segundas puras, mientras que las (I) *dan después las mixtas* $\delta\, dx_i = d\,\delta x_i$, las unas y la otras como funciones homogéneas de grado 2 (respecto a los argumentos dx_i, δx_i juntamente). La resolubilidad unívoca está asegurada por la no anulación de los dos determinantes del tipo D y Δ, propiamente coincidentes con estos, salvo la sustitución de las diferenciales dx_i, δx_i, en vez de las derivadas $\dot{x}_i$, x'_i.

Según la observación final del número precedente, las expresiones invariantes de las diferenciales segundas mixtas $\delta\, dx_i = d\,\delta x_i$ pueden no depender, y en general no dependerán, de modo simétrico de las dos series de diferenciales dx_i y δx_i. Esta ulterior condición se hallará verificada siempre que la Λ sea simétrica, es decir, siempre que subsista la identidad

$$\Lambda(x\,|\,dx\,|\,\delta x) = \Lambda(x\,|\,\delta x\,|\,dx)\,.$$

6. - Caso ordinario del cálculo diferencial absoluto.

La base invariante es en este caso la forma diferencial cuadrática que define la métrica de S_n

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, a_{hk}\, dx_h\, dx_k\,.$$

Con esa, es también invariante la forma bilineal

$$\Lambda = \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, a_{hk}\, dx_h\, \delta x_k \tag{13}$$

por ser $a_{hk} = a_{kh}$, la cual satisfará manifiestamente al requisito de homogeneidad del número precedente, y resulta además simétrica respecto a los argumentos dx, δx. Las (I) se reducen conforme a esto a

$$d \sum_{1}^{n}{}_{k} a_{ik}\, \delta x_k + \delta \sum_{1}^{n}{}_{k} a_{ik}\, dx_k - \sum_{1}^{n}{}_{hk} \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_i}\, dx_h\, \delta x_k = 0 ,$$

de la cual, haciendo materialmente las diferenciaciones:

$$\sum_{1}^{n}{}_{k} a_{ik}\, d\delta x_k + \sum_{1}^{n}{}_{kl} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\, dx_l\, \delta x_k + \sum_{1}^{n}{}_{k} a_{ik}\, \delta d x_k +$$

$$+ \sum_{1}^{n}{}_{kl} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\, \delta x_l\, dx_k - \sum_{1}^{n}{}_{hk} \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_i}\, dx_h\, \delta x_k = 0 .$$

Ahora, si se escribe $\delta d x_k$ en lugar de $d\,\delta x_k$ en la primera suma, se cambia en la segunda l con k, y se muda en la última h en k, y k en l, se obtiene

$$\sum_{1}^{n}{}_{k} a_{ik}\, \delta d x_k + \sum_{1}^{n}{}_{kl} \begin{bmatrix} k\,l \\ i \end{bmatrix} dx_k\, \delta x_l = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

designando con $\begin{bmatrix} k\,l \\ i \end{bmatrix}$ el símbolo de Christoffel de 1ª especie, esto es, el binomio

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} \right\} .$$

Estas ecuaciones, lineales en las $\delta d x_k$, se resuelven, como es notorio, bajo la forma

$$\delta d x_i = d \delta x_i = - \sum_{1}^{n}{}_{kl} \begin{Bmatrix} k\,l \\ i \end{Bmatrix} dx_k\, dx_l . \tag{14}$$

donde $\begin{Bmatrix} k\,l \\ i \end{Bmatrix}$ indican simbolos de Christoffel de segunda especie.

Expresiones invariantes, también bilineales en las dx, δx, se obtendrían tomando como base, además de la (13) en la cual $a_{hk} = a_k$, una forma bilineal asimétrica en las dos series de argumentos.

7. - Estudios de WIRTINGER.

Este autor ha discutido recientemente ([4]) otro tipo de cuestiones que se relacionan en esencia con la transformación de las diferenciales segundas. Allí se estudian transformaciones (de contacto) con una serie de argumentos auxiliares, y se les atribuye su aspecto invariante por medio de una sola función W. Pero esta función W, *no* se transforma por invariancia cuando se cambia de variables. Prescindiendo de la diversidad de puntos de vista, las trasnformaciones de WIRTINGER son por un lado más y por otro menos generales que las consideradas en esta Nota. La parte común corresponde, con las notaciones aqui usadas, a una Λ lineal respecto a una de las dos series de argumentos dx o δx.

([4]) *On a general infinitesimal geometry in reference to the theory of relativity*, « Transactions of the Cambridge Philos. Society », vol. XXII, 1922, pp. 439-448.

XIV.

SULLA STABILITÀ DELLE LAVAGNE A CAVALLETTO

« Periodico di Matematiche », s. IV, vol. IV (1924), pp. 59-73.

Durante gli esami di Meccanica razionale (all'Università di Roma, in quest'ultima sessione estiva) una lavagna il cui cavalletto era molto divaricato minacciò di precipitare al suolo, scivolando per ulteriore divaricamento degli appoggi. Il fatto fermò naturalmente l'attenzione mia e dei colleghi di commissione, professori ARMELLINI e BISCONCINI, ponendoci un concreto problema di stabilità dell'equilibrio che non figura (o almeno non ci consta che figuri) nella pur tanto copiosa letteratura degli esercizi di statica elementare. In verità la questione rientra in tale ambito modesto; ma richiede una discussione un po' approfondita per cogliere l'andamento generale del fenomeno giungendo ad apprezzamenti quantitativi.

Mi permetto pertanto di segnalare insieme l'esercizio e la soluzione che ne ho elaborata.

1. - Specificazione del sistema materiale.

Una lavagna a cavalletto è schematicamente costituita (cfr. la fig. 1) da un telaio piano (rigido) $CABDE$ e da un puntone posteriore CP_1 detto *gambo*, girevole a cerniera attorno a C. Il telaio si appoggia in A, B sopra un suolo orizzontale e sostiene una lastra rettangolare L (lavagna) schematicamente nello stesso piano del telaio, inserita nella scannellatura (orizzontale) DE. Il tutto è simmetrico rispetto al piano mediano, verticale in condizione di equilibrio, che passa per il gambo CP_1. Fissiamo la nostra attenzione su questo piano, rappresentandovi con CP_1 (cfr. la fig. 2) il gambo, con CP la traccia del telaio, e quindi con P_1P la traccia (orizzontale) del terreno. Designeremo con O la proiezione (verticale) della cerniera C su P_1P; e ci riferiremo ad un sistema di assi cartesiani Oxy, di cui Ox coincida (in direzione e verso) coll'orizzontale OP, e Oy (pure in direzione e verso) colla verticale OC. Dette a, a_1, h le lunghezze dei segmenti OP, OP_1, OC, le coordinate di P, P_1, C saranno rispettivamente $(a, 0)$, $(-a_1, 0)$, $(0, h)$.

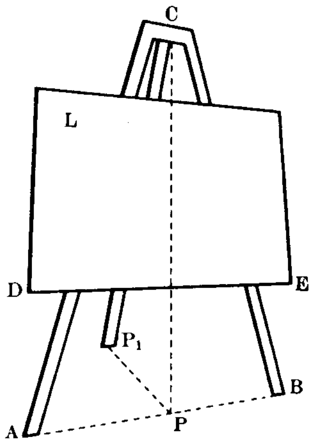


Fig. 1

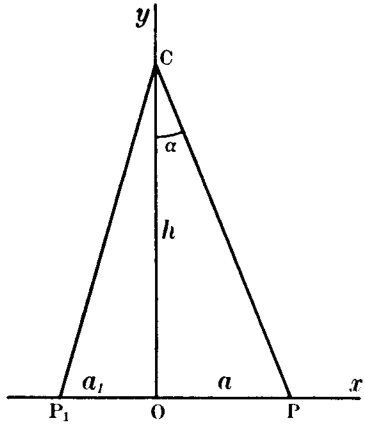


Fig. 2

Risguarderemo il telaio e la lavagna che vi è inserita come un unico sistema rigido (di traccia CP), cui è articolata, in C, l'asta, pure rigida, CP_1.

2. - Sollecitazione. Coefficiente d'attrito ridotto. Corrispondente margine di stabilità.

Abbiamo supposto ogni cosa, quindi anche la sollecitazione, simmetrica rispetto al piano mediano CPP_1. In conformità le forze applicate al telaio si compongono due a due in forze agenti nel piano mediano e applicate a punti della traccia CP (eventualmente prolungata). Le forze agenti sul gambo CP_1 sono poi (sempre per la simmetria) necessariamente contenute nel detto piano mediano Oxy. Si tratta quindi di un problema statico in questo piano, e tutto si riduce, per impostarlo, a tener conto delle tre equazioni cardinali relative alle due parti rigide CP (traccia del telaio) e CP_1 (gambo).

Specifichiamo anzi tutto le varie forze (esterne) agenti su ciascuna parte. Per il *telaio* avremo:

a) (*Peso*)

Il peso complessivo p del telaio e della lavagna di componenti 0, $-p$ applicato nel baricentro G (del sistema telaio-lavagna). Di G si sa soltanto che è un punto interno al segmento CP.

b) (*Reazione del suolo*)

La reazione del suolo, applicata in P, che avrà una componente normale N (necessariamente rivolta verso l'alto, cioè nel senso positivo dell'asse Oy), e una componente tangenziale che designeremo con $-T$, perchè normalmente sarà diretta verso O, cioè negativa. Del resto non facciamo *a priori* ipotesi sul segno di T, tenendo invece presente la legge di attrito statico, la quale richiede $|T| \leqslant fN$, dove f designa il coefficiente d'attrito negli appoggi A e B (lo stesso nei due posti, per l'ipotesi della simmetria).

Volendo che sia assicurato non solo l'equilibrio degli appoggi (del punto P nella nostra rappresentazione piana), ma anche un certo margine di fronte a eventuali perturbazioni accidentali tendenti a farli scivolare, converrà sostituire ad f una frazione k alquanto più piccola, ritenendo la precedente disuguaglianza sotto la forma

$$|T| \leqslant kN, \tag{1}$$

con k ($< f < 1$) *costante ben determinata* che chiameremo *coefficiente ridotto* (¹).

c) (*Forza vincolare in* C)

Una forza di componenti X, Y applicata nella cerniera C, che rappresenta l'azione del gambo sul telaio (²).

(¹) Un tale criterio equivale a fissare a priori (per una eventuale sollecitazione orizzontale tendente a perturbare l'equilibrio) un margine *unitario* ben determinato, rappresentato dalla differenza $f-k$. E questo è un criterio astrattamente soddisfacente. Per altro può benissimo accadere che si sia invece in grado di anticipare un apprezzamento sull'entità assoluta τ della perturbazione contro cui conviene premunirsi. In tal caso dovrebbe risguardarsi τ, cioè in sostanza $(f-k)N$ (e non il margine unitario $f-k$) come un dato della questione. La disuguaglianza caratteristica sarebbe in conformità, non la (1), ma

$$|T| + \tau \leqslant fN,$$

con τ costante positiva prestabilita. Ne risulterebbe un po' più laboriosa la discussione dei nn. seguenti. Perciò noi ci atteniamo alla (1), non senza rilevare che, nel nostro problema, si potrà, volendo, ottemperare *a posteriori* anche alla condizione testè accennata, sfruttando le formule risolutive, che fissano in particolare la dipendenza di N da k, e scegliendo poi (in quanto possibile) il valore numerico di k abbastanza piccolo perchè $(f-k)N$ non risulti inferiore a τ.

(²) Considerando questa azione rappresentata da una sola forza applicata in C (senza coppia), veniamo in particolare a *trascurare l'attrito del perno*. Ciò è giustificato a doppio titolo: sia perchè, nel caso concreto, questa influenza non è rilevante rispetto alle altre forze in gioco; sia perchè, trascurandola, si agisce comunque in favore della stabilità. Cfr. LEVI-CIVITA e AMALDI: *Lezioni di meccanica razionale*, vol. I, [Bologna, Zanichelli, 1923], pp. 550-551.

d) (*Perturbazione accidentale*)

Altre forze addizionali (esercitate per es. da chi scrive sulla lavagna), di cui indicheremo le caratteristiche con $-u$, $-v$, M. Si intende che $-u$, $-v$ designano le componenti orizzontale e verticale del risultante: ho premesso il segno $-$ perchè normalmente (cioè quando si preme scrivendo sulla lavagna) u e v risultano positivi. M(pure positivo nell'esemplificazione che abbiamo in vista) rappresenta il momento (scalare), rispetto al punto P, ossia rispetto ad un asse Pz, ortogonale al piano della figura e tale che, rispetto a Pz, la coppia Oxy apparisca destrorsa.

Sul *gambo* CP_1 agiranno forze analoghe, salvo che non c'è luogo a considerare sollecitazioni addizionali. Avremo pertanto:

a_1) il *peso* p_1 applicato al baricentro G_1 di CP_1;

b_1) la *reazione* del suolo di componenti T_1, N_1, fra cui deve essere soddisfatta la disuguaglianza, analoga alla (1),

$$|T_1| \leqslant kN_1 , \tag{2}$$

supponendo che anche all'appoggio P_1 si abbia lo stesso coefficiente d'attrito ridotto, che vale (per A, B, e quindi) per P;

c_1) la *forza vincolare*, proveniente dal collegamento col telaio in C, la quale, per il principio di reazione, ha le componenti $-X$, $-Y$.

3. - Equazioni cardinali.

Per il *telaio*, esprimendo che si annulla il risultante di tutte le forze esterne, abbiamo, in base ad a), b), c), d):

$$-T + X - u = 0 , \tag{I}$$

$$-p + N + Y - v = 0 . \tag{II}$$

L'equazione dei momenti, ove si assuma per polo il punto P, è (con evidente significato della notazione)

$$\sum [(x-a)Y - yX] + M = 0 .$$

Possiamo calcolare materialmente i vari termini del sommatorio (tre nel nostro caso), o anche, in modo più espressivo, formare rispetto a P i momenti intensivi (prodotto della forza per il braccio di leva) delle forze a) e c) (la reazione del suolo b) non portando alcun contributo), e prenderli col segno + o col segno —, secondochè (per un osservatore che guarda dall'alto la fig. 2) il senso di rotazione apparisce destrorso o sinistrorso. Si ha così, designando l'ascissa del baricentro G del telaio (che è necessariamente compresa fra 0 ed a) con $(1-\lambda)a$ (λ frazione propria):

$$\text{(III)} \qquad \lambda a p - aY - hX + M = 0\,.$$

Per il *gambo*, ponendo eguali a zero le due componenti del risultante, si ha

$$\text{(I}_1\text{)} \qquad T_1 - X = 0\,,$$

$$\text{(II}_1\text{)} \qquad -p_1 + N_1 - Y = 0\,.$$

Se poi si indica con $(1-\lambda_1)a_1$ l'ascissa del braicentro G_1 del gambo (λ_1 frazione propria, eguale ad $\frac{1}{2}$ nel caso di un gambo omogeneo) e si eguaglia a zero il momento risultante rispetto al polo P_1, cioè il sommatorio

$$\sum[(x+a_1)Y - yX]\,,$$

si ha

$$\text{(III}_1\text{)} \qquad -\lambda_1 a_1 p_1 - a_1 Y + hX = 0\,.$$

4. - Risoluzione delle equazioni cardinali rispetto a X, Y; N, N_1; T, T_1.

Le reazioni d'attrito T, T_1 entrano soltanto nelle (I), (I$_1$) e rimangono da queste definite per la X sotto la forma

$$\text{(3)} \qquad T = X - u\,, \qquad T_1 = X\,.$$

Le (III), (III$_1$) si possono risolvere rispetto ad X, Y e danno

$$\text{(4)} \qquad X = \frac{\lambda p + \lambda_1 p_1 + \dfrac{1}{a} M}{\dfrac{h}{a} + \dfrac{h}{a_1}}\,,$$

$$\text{(5)} \qquad Y = \frac{\lambda a p - \lambda_1 a_1 p_1 + M}{a + a_1}\,.$$

Portando questo valore di Y in (II) e (II$_1$), se ne ricavano le seguenti espressioni delle reazioni normali N ed N_1:

$$N = \left(1 - \lambda \frac{a}{a+a_1}\right) p + \lambda_1 \frac{a_1}{a+a_1} p_1 - \frac{1}{a+a_1} M + v \,, \tag{6}$$

$$N_1 = \lambda \frac{a}{a+a_1} p + \left(1 - \lambda_1 \frac{a_1}{a+a_1}\right) p_1 + \frac{1}{a+a_1} M \,. \tag{7}$$

Le equazioni (3) [in cui si risguardi X definito dalla (4)], (5), (6), (7) equivalgono manifestamente alle originarie equazioni cardinali, e, insieme colle disuguaglianze (1), (2) esauriscono tutte le condizioni di equilibrio.

5. - Considerazioni sulle disuguaglianze caratteristiche (1). (2). Parametro lagrangiano α delle configurazioni del sistema.

Trasformiamo un po' le disuguaglianze (1), (2) in modo da metterne meglio in evidenza la portata. Dacchè, a norma della (4) (e dell'ipotesi fatta al n. 2 circa il senso del momento perturbatore M), la X risulta essenzialmente positiva, la disuguaglianza (2), badando alla seconda delle (3), si scrive più semplicemente

$$X \leqslant kN_1 \,. \tag{2'}$$

D'altra parte va tenuto presente che, a equilibrio raggiunto, la componente orizzontale u della sollecitazione addizionale (che abbiamo supposto $\geqslant 0$) deve in particolare poter essere nulla. Con ciò la (1) implica intanto

$$X \leqslant kN \,, \tag{1'}$$

dopo di che la (1) stessa si riduce ad una limitazione dei valori (positivi) che può assumere u senza compromettere l'equilibrio, cioè a

$$u \leqslant X + kN \,. \tag{8}$$

Prima di chiudere l'impostazione generale va rilevato che, nelle formule finali, conviene far apparire, al posto di a, a_1, h, due costanti puramente strutturali del sistema, quali l'*apotema l del telaio* (*lunghezza della* *sua traccia CP*) e la *lunghezza* l_1 *del gambo*, e inoltre un parametro lagrangiano atto a fissare la configurazione del sistema nelle supposte condizioni di appoggio: per esempio l'*inclinazione* $\alpha = \widehat{PCO}$ (cfr. fig. 2) della traccia CP del telaio sulla verticale. Si ha allora, per definire l'analoga inclinazione α_1 del gambo CP_1 e la quota h della cerniera C,

$$l_1 \cos\alpha_1 = l \cos\alpha = h\,, \tag{9}$$

mentre risulta

$$a = l \sin\alpha\,, \qquad a_1 = l_1 \sin\alpha_1\,. \tag{10}$$

6. - Ipotesi semplificatrici consentite nei casi usuali. Conseguenti limiti superiori per l'inclinazione α e pel momento perturbatore M.

Non sembra agevole, almeno a prima vista, una discussione espressiva delle disuguaglianze (1′), (2′) per valori qualunque dei dati della questione: l, l_1; p, p_1; λ, λ_1. Conviene quindi tener conto di alcune semplificazioni sensibilmente verificate per le ordinarie lavagne a cavalletto. Noi ammetteremo precisamente:

1) che p_1 (peso del gambo) sia trascurabile di fronte a p (peso complessivo del telaio e della lavagna);

2) $a_1 = a$.

Con ciò la (4), avuto riguardo alle (9) e (10), diviene

$$X = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha \left\{\lambda p + \frac{1}{a}\,M\right\}, \tag{4′}$$

mentre le (6) e (7) si semplificano come segue:

$$N = \left(1 - \frac{1}{2}\,\lambda\right) p - \frac{1}{2a}\,M + v\,, \tag{6′}$$

$$N_1 = \frac{1}{2}\left\{\lambda p + \frac{1}{a}\,M\right\}. \tag{7′}$$

La (2′) assume in conformità l'aspetto particolarmente semplice

$$\mathrm{tg}\,\alpha \leqslant k\,.$$

Indicando con χ l'angolo ($< \pi/4$) che ha per tangente la frazione k, il quale si dirà *angolo di attrito ridotto*, potremo ritenere la disuguaglianza precedente sotto la forma definitiva

$$\alpha \leqslant \chi\,, \tag{11}$$

con χ costante prefissata.

Si noti che, per essere (n. 2) $k < f$, sarà $\chi < \varphi$, designandosi al solito con φ l'angolo d'attrito negli appoggi ($\operatorname{tg}\varphi = f$). Se ci si accontentasse del sussistere dell'equilibrio (senza margine di sicurezza di fronte a cause perturbatrici tendenti a far scivolare gli appoggi), si avrebbe $k = f$ e si sarebbe condotti alla limitazione $\alpha \leqslant \varphi$. L'esigenza della stabilità dà luogo, come si vede, alla circostanza più restrittiva che *l'inclinazione α sulla verticale* (la quale, data l'ipotesi $a_1 = a$ è la stessa per la traccia del telaio e per il gambo) *non deve superare l'angolo d'attrito ridotto χ.* Ciò equivale a dire che *sia la traccia del telaio che il gambo devono star dentro non soltanto ai coni d'attrito dei rispettivi appoggi, ma addirittura dentro (o sopra) alle superficie coniche coassiali di semiapertura χ.*

Soddisfatta questa condizione, la (1′) si traduce in una limitazione superiore per l'eventuale momento perturbatore M. Infatti, portandovi per X e per N i valori (4′) e (7′) e badando alla prima delle (10), essa può scriversi

$$M \leqslant plF(\alpha, k, \lambda)\,, \tag{12}$$

dove

$$F(\alpha, k, \lambda) = \sin\alpha \left\{\frac{k}{k + \operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{2}\lambda\right\}. \tag{13}$$

7. - Inclinazione di massima sicurezza. Studio della F come funzione di α.

Dalle (12) e (13) apparisce che, per lasciare al momento perturbatore M il massimo margine di cui è suscettibile (per una data lavagna, ossia per valori prefissati di p, l, k, λ), conviene disporre di α in modo da attribuire al secondo membro della (12) e per esso alla F, la quale si annulla per $\alpha = 0$ e rimane positiva nell'intervallo $(0, \chi)$ dell'argomento α, il massimo dei valori che essa può assumere in questo intervallo.

All'uopo cominciamo col derivare la (13) rispetto ad α, il che dà

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\,\frac{k}{(k + \operatorname{tg}\alpha)^2} + \cos\alpha\left\{\frac{k}{k + \operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{2}\lambda\right\}.$$

Ove, nel secondo membro, si raccolga $k \cos \alpha$ a fattore e si ponga per brevità di scrittura

$$\operatorname{tg} \alpha = z \,, \tag{14}$$

$$Z(z) = \frac{k - z^3}{(k + z)^2} - \frac{\lambda}{2k} \,, \tag{15}$$

si ha identicamente

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = k \cos \alpha Z(z) \,. \tag{16}$$

La posizione (14) consente di risguardare α come funzione di z, la quale va sempre crescendo da 0 a χ, mentre z cresce da 0 a k. Nell'intervallo $(0, \chi)$ di α, si ha costantemente $\cos \alpha > 0$, talchè il segno e le eventuali radici di $\partial F / \partial \alpha$ nel detto intervallo corrispondono a quelli di Z nell'intervallo $(0, k)$ dell'argomento z.

Ora la (15), derivando, ci dà

$$Z'(z) = -\frac{3z^2}{(k + z)^2} - \frac{2(k - z^3)}{(k + z)^3} \,,$$

da cui apparisce che Z' è sempre negativa per z compresa fra 0 e k.

Perciò $Z(z)$ va sempre decrescendo nell'intervallo a partire dal valore

$$Z(0) = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right) > 0 \,.$$

Se anche il valore minimo

$$Z(k) = \frac{1}{2k}\left\{\frac{1 - k^2}{2} - \lambda\right\} \tag{17}$$

è positivo (o nullo), cioè se

$$\lambda \leqslant \frac{1 - k^2}{2} \,, \tag{18_a}$$

allora segue dalla (16) che F va sempre crescendo con α, sicchè il massimo è raggiunto per $\alpha = \chi$, ed è

$$F^* = \frac{1}{2}(1 - \lambda) \sin \chi \,. \tag{19_a}$$

Se invece

$$\lambda > \frac{1-k^2}{2}\,, \tag{18_b}$$

allora, per la (17), $Z(k) < 0$, e la funzione $Z(z)$ che decresce sempre al crescere di z da 0 a k, attraversa certamente una volta (e una volta soltanto) il valore zero. Dicasi z^* questa radice di $Z(z)$, e α^* il corrispondente valore (14). In base alla (16), sarà $\partial F/\partial\alpha > 0$ per $\alpha < \alpha^*$, $\partial F/\partial\alpha > 0$ per $\alpha > \alpha^*$, talchè la F ammette effettivamente un massimo (ed uno soltanto) in corrispondenza ad $\alpha = \alpha^*$; il quale massimo, in base alla (13), ha il valore

$$F^* = \sin\alpha^* \left\{\frac{k}{k+\operatorname{tg}\alpha^*} - \frac{1}{2}\lambda\right\}. \tag{19_b}$$

8. - Distinzione delle lavagne in due classi. Diverso loro comportamento di fronte alla stabilità dell'equilibrio.

Ove si ricordi (n. 3) che $(1-\lambda)a$ designa l'ascissa del baricentro G del telaio (lavagna compresa), con che λh ne è l'ordinata, si può dire che λ rappresenta la frazione di altezza (a partire dal suolo), in corrispondenza a cui cade il baricentro.

Nel caso di una lavagna, posta a metà del telaio, si ha (almeno sensibilmente, ossia trascurando il peso del telaio di fronte a quello della lavagna) $\lambda = \frac{1}{2}$. Ma si può benissimo alzare o abbassare la lavagna, spostando (fig. 1) la scannellatura DE, in modo da rendere λ sia maggiore che minore di $\frac{1}{2}$. In pratica, onde dare comodità a chi scrive, senza spreco di materiale, si tiene $\lambda > \frac{1}{2}$, press'a poco intorno a $\frac{2}{3}$, sicchè ci si trova nella eventualità (18_b). Comunque, giova considerare anche la (18_a), facendole corrispondere la qualifica *lavagna bassa*, mentre alla (18_b) fa naturalmente riscontro la qualifica opposta *lavagna alta*. Usando queste locuzioni il risultato qualitativo della precedente discussione si può riassumere come segue:

Per lavagne basse, il massimo valore M^* di M è raggiunto quando l'inclinazione sulla verticale è uguale all'angolo di attrito ridotto χ. Si ha allora, in base alle (12) e (19_b)

$$M^* = pl\,\frac{1}{2}\,(1-\lambda)\sin\chi\,. \tag{20_a}$$

Notiamo incidentalmente che, in virtù della (10), $l\sin\chi(1-\lambda)$ non è che l'ascissa del baricentro G, sicchè la (20_a) fornisce quale margine di sicurezza la metà del momento del peso della lavagna (telaio compreso) rispetto al vertice C, margine, *caeteris paribus* tanto maggiore quanto più basso è il baricentro.

Le cose vanno diversamente per *lavagne alte* ($\lambda > (1-k)^2/2$). C'è in tal caso un *optimum* di inclinazione $\alpha^* < \chi$. In corrispondenza a quest'α^*, la (12) dà, per il momento perturbatore, il margine massimo

$$(20_b) \qquad M^* = plF^* ,$$

con F^* definita dalla (19_b).

Per completare questo secondo risultato, conviene anzi tutto rendersi conto del modo in cui $F^*(\alpha^*, k, \lambda)$ varia con k e con λ, si intende per lavagne alte, ossia per λ soddisfacente alla (18_b) e quindi compreso fra $(1-k^2)/2$ e l'unità. All'uopo formiamo le dF^*/dk, $dF^*/d\lambda$, tenendo conto che α^* è funzione di k e di λ. Siccome però $\partial F^*/\partial\alpha^* = 0$, così

$$\frac{dF^*}{dk} = \frac{\partial F^*}{\partial k}, \qquad \frac{dF^*}{d\lambda} = \frac{\partial F^*}{\partial \lambda},$$

e la (19_b) ci dà semplicemente

$$\frac{dF^*}{dk} = \frac{\sin\alpha^* \operatorname{tg}\alpha^*}{(k+\operatorname{tg}\alpha^*)^2}, \qquad \frac{dF^*}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\sin\alpha^* ,$$

mostrando che, nell'ambito dei valori che ci interessano, la prima è sempre positiva e la seconda sempre negativa. Di qua e dalla (20_b), da un lato la circostanza intuitivamente evidente che M^* cresce con k, cioè al crescere dell'attrito degli appoggi (più precisamente di quella parte su cui si fa assegnamento); d'altro lato la constatazione che M^* decresce al crescere di λ. Sarà dunque buona norma costruttiva di rendere λ quanto più piccola è possibile compatibilmente colle altre esigenze pratiche, cioè di abbassare il baricentro del sistema per quanto è consentito dalle dette esigenze. Tenendone conto, si è condotti a prendere, come poc'anzi abbiamo accennato, $\lambda > \frac{1}{2}$ (press'a poco intorno ai $\frac{2}{3}$) e ci si trova quindi nell'ambito di validità della (18_b) (lavagne alte).

9. - Caso ordinario di lavagne alte. Determinazione quantitativa dell'inclinazione più conveniente. Esempio numerico.

In base a quanto precede, nella eventualità (18_b), la tangente trigonometrica dell'inclinazione α^* di massima sicurezza è fornita dalla radice z^* (compresa fra 0 e k) dell'equazione (15), la quale, liberata dai denominatori, assume la forma

$$z^3 + \frac{2k}{\lambda}(k+z)^2 - k = 0\,, \tag{15'}$$

di terzo grado in z.

Lo studio qualitativo della radice z^* essendo stato fatto esaurientemente, non resta che esplicitarne l'espressione formale, ricorrendo alla formula cardanica.

Perciò si comincia a porre

$$z = \mathfrak{z} - \frac{\lambda}{6k}\,, \tag{21}$$

con che

$$k + z = \mathfrak{z} + \frac{6k^2 - \lambda}{6k}$$

e si è ridotti alla forma canonica

$$\mathfrak{z}^3 + \mathfrak{p}\mathfrak{z} + \mathfrak{q} = 0\,, \tag{15''}$$

dove

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{p} &= \lambda\left(1 - \frac{\lambda}{12k^2}\right), \\ \mathfrak{q} &= -\left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)k - \frac{1}{6}\frac{\lambda^2}{k} + \frac{1}{108}\frac{\lambda^3}{k^3}\,. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Nelle circostanze usuali si può ritenere l'attrito abbastanza rilevante; certo tale che (pur essendo k il coefficiente di attrito ridotto) $12k^2$ sia (parecchio) superiore all'unità. Con ciò, in base alla prima delle (22), $\mathfrak{p}$ va ritenuto sempre positivo, sicchè risulta pure positiva la quantità

$$r^2 = \frac{\mathfrak{q}^2}{4} + \frac{\mathfrak{p}^3}{27} \tag{22}$$

(discriminante, cambiato di segno). La (15″) possiede pertanto una sola radice reale, fornita senza ambiguità dalla nota formula cardanica. Badando alla (21), avremo in definitiva

$$z^* = \left(-\frac{\mathfrak{q}}{2} + r\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{\mathfrak{q}}{2} - r\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\lambda}{6k}\,, \tag{23}$$

in cui ai radicali va attribuito il valore aritmetico.

Assumiamo a titolo d'esempio

$$k = \frac{1}{3}, \qquad \lambda = \frac{2}{3}.$$

Le (15′) e (15″) si riducono rispettivamente a

$$z^3 + \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = 0,$$

$$\mathfrak{z}^3 + \frac{1}{3}\,\mathfrak{z} - \frac{10}{27} = 0.$$

essendo

$$z + \frac{1}{3} = \mathfrak{z}.$$

Si ha quindi

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{3}, \qquad \mathfrak{q} = -\frac{10}{27}, \qquad r^2 = \frac{26}{27^2},$$

$$z^* = \frac{1}{3}\left\{(5 + \sqrt{26})^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{26} - 5)^{\frac{1}{3}}\right\} - \frac{1}{3} = 0{,}23302.$$

Tale essendo la tangente trigonometrica della inclinazione α^* di massima sicurezza, risulta

$$\alpha^* = 13^\circ\, 7'\, 1'',2,$$

e quindi, a norma della (19_b),

$$F^* = 0{,}057786,$$

sicchè il momento di sicurezza M^* è questa frazione (un po' più che 1/20) di pl.

XV.

ÜBER DIE TRANSPORTGESCHWINDIGKEIT IN EINER STATIONÄREN WELLENBEWEGUNG

« Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik, Innsbruck, 1922 »,

pp. 85-96.

1. - Kinematische Kennzeichnung der Bewegung.

Wir betrachten einen Kanal mit rechtwinkligem Querschnitt, mit horizontalem Boden und vertikalen Wänden. Wir beschränken uns auf den typischen Fall, in welchem die Bewegung des Wassers parallel zu den Seitenwänden erfolgt, und zwar in allen längs des Kanals gelegten longitudinalen Schnitten in gleicher Weise. Alsdann ist das Problem auf eine zweidimensionale Aufgabe zurückgeführt, indem es genügt, die Bewegung in einem der vertikalen Schnitte zu untersuchen (Abb. 1).

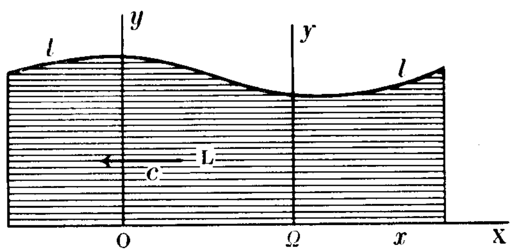


Abb. 1.

Die horizontale x-Achse stelle den Boden dar; die Linie l bilde die freie Oberfläche, sie sei mehr oder weniger gewellt, im allgemeinen veränderlich mit der Zeit.

Wir definieren eine stationäre Wellenbewegung wie folgt:

a) während die freie Oberfläche l in bezug auf einen festen Beobachter scheinbar ohne Gestaltsänderung sich längs des Kanals fortbewegt, und zwar mit einer erheblichen Geschwindigkeit c,

b) sollen die Flüssingkeitsteilchen tatsächlich — statt an dieser Translationsbewegung teilzunehmen — kleine und im Verhältnis zu c langsame Schwingungsbewegungen vollführen.

2. - Einschränkende Voraussetzungen.

Die Strömung soll außer den spezifischen Bedingungen a) und b) die allgemeinen Forderungen erfüllen, welche die Hydrodynamik vorschreibt, insbesondere auch die Bedingung der Wirbellosigkeit. In der Tat, wenn Wirbel vorhanden wären, wie es namentlich bei den GERSTNERschen Wellen der Fall ist, so könnten diese nur unter der Wirkung von nicht konservativen Kräften ganz bestimmter Art zustande kommen und man kann vernünftigerweise nicht annehmen, daß in der Natur gerade diese vorkommen. Wenn wir zu unseren Voraussetzungen die Wirbellosigkeit hinzufügen, so können wir die allgemeinen kinematischen Bedingungen wie folgt zusammenfassen:

(c) c_1) Differentialbedingungen, (Inkompressibilität und Wirbellosigkeit),
c_2) Randbedingungen (am Boden und an der freien Oberfläche).

Die Bedingungen haben zur Folge [1], *daß die Bewegung für einen Beobachter, der sich mit der freien Oberfläche l mitbewegt, stationären Charakter hat.* Infolgedessen ist es zweckmäßig, neben den festen Achsen ΩXY (wobei ΩX längs des Bodens und ΩY vertikal nach oben gerichtet ist) ein bewegtes Achsenkreuz Oxy einzuführen, welches in einem bestimmten Augenblick, z.B. $t = 0$, mit dem festen Achsenkreuz zusammenfällt und dann mit l sich mitbewegt, so daß die Achse Ox mit der Geschwindigkeit c längs des Bodens gleitet. Angenommen, daß die beiden Achsen ΩX und Ox in dem entgegengesetztem Sinne positiv gerechnet werden, als die Fortschreitungsgeschwindigkeit c der freien Oberfläche, so haben wir folgende Transformationsformeln:

$$\left\{\begin{array}{l} x = X - ct \\ y = Y . \end{array}\right. \tag{1}$$

In dem Oxy-System erfüllt die strömende Flüssigkeit einen mit der Zeit unveränderlichen Streifen, welcher unten von der x-Achse, oben von der Linie l begrenzt wird. Diese letztere ist — wie wir gesagt haben — mehr oder weniger gewellt, sie braucht zwar nicht periodisch zu sein, soll jedoch dem allgemeinen Verlauf nach in der Nähe einer horizontalen Geraden bleiben.

Da nach a), c_1), c_2) die Bewegung im System Oxy stationär ist, so sind die Komponenten u, v der Relativgeschwindigkeit der einzelnen

[1] Vgl. Qüestions de Mecànica clàssica i relativista (Barcelona, Institut d'estudios catalans, 1922, pp. 42-44).

Teilchen nur Funktionen von x und y. Die Absolutgeschwindigkeit hat folglich die Komponenten $u-c$ und v, und aus der Bedingung *b*) folgt, daß das Verhältnis

$$\frac{\sqrt{(u-c)^2+v^2}}{c}$$

ein echter Bruch ist und zwar in allen praktisch interessanten Fällen klein gegen Eins.

Aus c_1) folgt, daß, wenn wir die komplexe Variable

$$z = x + iy \tag{2}$$

und den Vektor

$$w = u - iv \tag{3}$$

einführen, w eine monogene Funktion von z ist. Ebenfalls nach c_1) können wir das Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y)$ und die Stromfunktion $\psi(x, y)$ einführen und setzen:

$$f = \varphi + i\psi\,, \tag{4}$$

wobei f ebenfalls eine monogene Funktion von z ist, und zward so, daß

$$w = \frac{df}{dz}\,. \tag{5}$$

Während die Funktion w durch ihre Bedeutung als Geschwindigkeitsvektor bei einer regulären Bewegung notwendigerweise in dem ganzen Bereich L endlich ist [2], können wir dies nicht ohne weiteres behaupten von ihrem Integral $f(z)$. Es ist vielmehr leicht zu sehen, daß während ψ auch im ∞ endlich bleibt, φ mit x ins Unendliche wächst, und zwar gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$, je nachdem wir mit x im positiven oder negativen Sinne ins Unendliche gehen.

3. - Der Flüssigkeitstransport.

Wir haben bereits die Absolutbewegung des Wassers in qualitativer Weise gekennzeichnet, indem wir angenommen haben, daß die Absolut-

---

[2] Es genügt, wenn man sich überlegt, daß die Absolutgeschwindigkeit vektoriell durch die komplexe Zahl $w-c$ dargestellt wird, welche, da ihr Absolutwert — wie oben gesagt wurde — im ganzen Strömungsbereich kleiner ist als c, überall endlich bleibt. Dasselbe gilt folglich für w.

geschwindigkeiten klein sind gegen die Fortschreitungsgeschwindigkeit c der Welle.

Wir wollen nun nachweisen, *daß in Schichten, welche unterhalb der freien Oberfläche liegen, der Transport an Materie im Mittelwert verschwindet.* Man wäre geneigt anzunehmen, daß die Fortschreitung der Welle überhaupt nur eine Scheinbewegung ist und daß die Flüssigkeitsteilchen um eine feste mittlere Lage oszillieren, ohne daß eine Translation im ganzen überhaupt erfolgt. Eine solche Annahme wäre jedoch zu eng gefaßt und — wie bereits Lord RAYLEIGH durch eine zwar anschauliche, aber nicht ganz exakte Beweisführung gezeigt hat — im Widerspruch mit der angenommenen Wirbellosigkeit der Strömung.

Wir wollen indessen verlangen, daß ein eventueller (kleiner) materieller Transport, welcher mit Fortschreitung der Störung verbunden ist, nur durch die Ungleichheit der Oberfläche verursacht sei; die tieferen Schichten sollen hierzu keinen Beitrag leisten. Wir betrachten also als charakteristisches Merkmal der Bewegung das Verschwinden des Massentransportes für die tieferen Schichten und zeigen, daß die Wellenbewegung nichtsdestoweniger von einem Massentransport in der Richtung der Fortschreitungsgeschwindigkeit begleitet ist. Unsere Aufgabe besteht darin, diesen (geringfügigen) Transport quantitativ zu bestimmen, indem wir die mittlere Durchflußgeschwindigkeit abschätzen.

Zunächst wollen wir die Bedingung aufstellen, daß in tiefen Schichten der Transport verschwindet, d.h. die Wassermenge, welche durch ein festes Flächenelement im Kanal im Zeitintervall Δt hindurchfließt, endlich bleibt, wie auch die Zeitdauer Δt zunimmt. Es genügt ein Linienelement dY der festen vertikalen Achse $Y =$ konst. zu betrachten. Bezeichnen wir die Komponenten der Absolutgeschwindigkeit mit $u - c$ und v, so beträgt die in einem Zeitelement dt durch dY fließende Wassermenge [3] $(u-c)\,dY\,dt$ (die Dichte gleich Eins gesetzt). Dabei haben wir die Durchflußmenge positiv in der positiven Richtung der x-Achse gerechnet; wollen wir die Durchflußmenge in Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle positiv rechnen, so müssen wir das Vorzeichen vertauschen und erhalten für die Durchflußmenge durch dY für die Zeitdauer zwischen zwei Zeitpunkten t_0 und $t_0 + \Delta t$

$$dY \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (c-u)\,dt\,.$$

(3) Es sei bemerkt, daß, wenn wir die Durchflußmenge für alle Zeitelemente dt in dem betrachteten Zeitraum gleich $dY(c-u)dt$ setzen, dies gleichbedeutend ist damit, daß das Element dY zu einer « tiefen » Schicht gehört. Wenn in der Tat dY zeitweise oberhalb der freien Oberfläche liegt, so müssen wir für solche Zeitelemente $(c-u)\,dt$ durch Null ersetzen.

Nach (1) können wir dY durch dy ersetzen und, da X konstant bleibt, $dx = c\,dt$. Wenn wir daher die Abszissenwerte, welche einem bestimmten X zur Zeit t_0 und $t_0 + \Delta t$ entsprechen, mit x_0 und $x_0 + \Delta x$ bezeichnen, erhalten wir für die Durchflußmenge den Ausdruck:

$$dy\,\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}(c-u)\,dx\,.$$

Damit kein Massentransport stattfindet, ist es notwendig und hinreichend, daß das Integral

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}(c-u)\,dx$$

oder — da $u = \partial\varphi/\partial x$ ist und y in bezug auf die Integration als eine Konstante gilt —

$$c\,\Delta x - \{\varphi(x_0+\Delta x,\, y) - \varphi(x_0,\, y)\}$$

bei unbegrenzt zunehmendem Δx endlich bleibt.

Dies bedeutet so viel, daß die Funktion $\varphi - cx$ endlich bleibt, wenn x unbegrenzt wächst.

Da — wie wir in dem vorangehenden Punkte gezeigt haben — ψ im ganzen Bereiche endlich bleibt, und dasselbe auch für die Ordinate y gilt, so können wir die Bedingung der Endlichkeit der Funktion $(f - cz)$ auferlegen.

So erhalten wir — während $f(z)$ selbst im allgemeinen nicht endlich bleibt — eine Bedingung für das asymptotische Verhalten dieser Funktion. Die Bedingung des fehlenden Massentransportes in Schichten unterhalb der Oberfläche ist äquivalent mit der analytischen Forderung, daß $F(z) = f - cz$ überall im Bereich (auch im Unendlichen) endlich bleibt.

4. - Die mittlere Durchflußmenge durch einen vertikalen Querschnitt.

Um die gesamte Durchflußmenge durch einen vertikalen Querschnitt für die Zeitdauer Δt zu ermitteln, kann man in zweierlei Weise vorgehen: einerseits kann man den bereits berechneten Beitrag für jedes Element dY ermitteln und diese Beiträge summieren, andererseits kann man für jedes Zeitelement die gesamte Durchflußmenge für den Querschnitt berechnen und nach der Zeit integrieren. Wir gehen nach der zweiten Methode vor und beziehen alles auf die bewegten Achsen, indem wir die Zeit mit Hilfe der Beziehung $x = X + ct$ durch x ausdrücken (X wird als konstant angesehen). Mit Rücksicht auf diese Beziehung entspricht einem bestimmten Werte von t ein bestimmter Wert von x, d.h. bezogen auf die bewegten Achsen, eine bestimmte Abszisse der freien Oberfläche l; ferner bedeutet eine Integration längs des entsprechenden vertikalen Querschnitts Integration von $y = 0$ bis $y = y_l(x)$, wobei y_l die der betreffenden Abszisse x entsprechende Ordinate der Linie l bezeichnet. Wir erhalten daher die Durchflußmenge für das Zeitelement dt

$$\frac{1}{c}\,dx\int_0^{y_l}(c-u)\,dy$$

und die gesamte Durchflußmenge für die Zeitdauer Δt

$$M = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx \int_0^{y_l}\left(1-\frac{u}{c}\right) dy\,. \tag{6}$$

Wenn wir jenen Teil des Strömungsfeldes L, welcher zwischen x_0 und $x_0 + \Delta x$ liegt, mit L' bezeichnen, so ist die rechte Seite von (6) nichts Anderes als das Flächenintegral der Funktion $1 - (u/c)$, erstreckt über den Bereich L'. Wir können daher (6) in kürzer gefaßter Form schreiben:

$$M = \int_{L'}\left(1-\frac{u}{c}\right) dL\,. \tag{6'}$$

Es ist zu bemerken, daß die Durchflußmenge in der Relativbewegung infolge des stationären Charakters derselben, (für alle vertikalen Schnitte), gerechnet vom Boden bis zur freien Oberfläche den gleichen Wert hat. Wir bezeichnen diese konstante Größe q als relative Durchflußmenge; sie beträgt offenbar

$$q = \int_0^{y_l} u\,dy\,, \tag{7}$$

und damit wird die Gleichung (6)

$$M = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} y_l \, dx - \frac{q}{c} \Delta x \,. \tag{6''}$$

Die mittlere absolute Durchflußmenge $\bar{Q}$ erhalten wir aus M mittels Division durch Δt oder durch $\Delta x / c$, so daß wir schreiben können:

$$\bar{Q} = \lim_{\Delta x = \infty} \frac{cM}{\Delta x} \,. \tag{8}$$

Wenn wir uns nun dieselbe Flüssigkeitsmenge, welche in stationärer Wellenbewegung sich defindet, in Ruhe denken, so können wir die Niveauhöhe der in Ruhe befindlichen Flüssigkeit einführen, und diese beträgt nach der Bedingung der Inkompressibilität offenbar

$$h = \lim_{\Delta x = \infty} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} y_l \, dx \,. \tag{9}$$

h stellt einen Mittelwert (ev. asymptotischen Wert) für die Ordinate der Oberfläche l dar. In dem besonderen Fall einer periodischen Welle liefert h den Mittelwert der periodischen Funktion $y_l(x)$, d.h. die mittlere Ordinate einer Welle. Für alle Fälle können wir h als mittlere Tiefe einführen und die Existenz des Grenzwertes auf der rechten Seite der Gl. (9) bildet vom physikalischen Standpunkt aus keine Einschränkung. Daraus folgt aber mit Berücksichtigung von (6″) und (8) unmittelbar die Existenz einer mittleren Durchflußmenge rein aus den allgemeinen Voraussetzungen, welche wir aufgestellt haben. Wenn wir in der Tat in Gl. (8) den Ausdruck (6″) einführen und die Definition von h nach (9) benutzen, so erhalten wir

$$\bar{Q} = ch - q \,. \tag{8'}$$

5. - Umformung des Ausdruckes für M. Asymptotische Näherung.

Das Verhältnis

$$\beta = \frac{|w - c|}{c} \,, \tag{10}$$

der absoluten Geschwindigkeit zur Fortschreitungsgeschwindigkeit ist nach der Voraussetzung unter (6) ein echter Bruch. Berechnen wir das Quadrat des Absolutwertes von $c-w=c-u-iv$, so erhalten wir die Identität

$$\beta^2 = 1 - \frac{u}{c} + \left[\frac{|w|^2}{c^2} - \frac{u}{c}\right]. \tag{11}$$

Integrieren wir diesen Ausdruck über das Gebiet L' und setzen wir

$$N = -\int_{L'}\left(\frac{|w|^2}{c^2} - \frac{u}{c}\right) dL\,, \tag{12}$$

so folgt aus (6′)

$$M = \int_{L'} \beta^2\, dL + N\,. \tag{6‴}$$

Wir können nun zeigen, daß das zweite Glied der rechten Seite endlich bleibt, wie auch L' wächst, so daß das Verhältnis $N/\Delta x$ sich der Null nähert, wenn Δx unbegrenzt zunimmt. Um das Verhalten von N zu prüfen, ist es zweckmäßig, Gl. (12) umzuformen, indem wir von der Ebene $z=x+iy$ zur Ebene $f=\varphi+i\psi$ übergehen ([4]), wobei dem Strömungsgebiet L ein Parallelstreifen zwischen den beiden Geraden $\psi=0$ und $\psi=q$ entspricht (s. Abb. 2). Dem Bereich L' entspricht ein Gebiet S', begrenzt durch zwei Transversallinien σ_1, σ_2, welche den zwei Querschnitten $x=x_0$ und $x=x_0+\Delta x$ entsprechen.

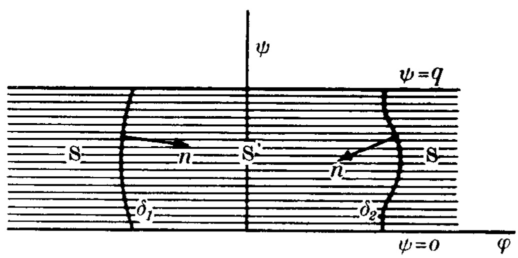


Abb. 2.

Aus der konformen Abbildung zwischen den Ebenen z und f folgt

$$df = \frac{df}{dz}\,dz = w\,dz\,,$$

([4]) Vgl. a. a. O. (Qüestions etc.) S. 48-50; oder auch « Rend. della R. Acc. dei Lincei », Bd. 16 (2° Sem. 1907), S. 776-790; [in queste « Opere », vol. secondo, pp. 615-629].

so daß das Verhältnis zweier entsprechender Strecken gleich $|w|$ ist und für zwei entsprechende Flächenelemente dS und dL gilt:

$$dS = |w|^2 dL \,. \tag{13}$$

Andererseits, wenn wir statt der Funktion f von z die inverse Funktion z von f betrachten, so gilt identisch

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{\frac{df}{dz}},$$

und aus der Gleichheit der Realteile folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{1}{|w|^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{|w|^2} u \,,$$

oder durch gliedweise Multiplikation mit (13)

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} dS = u \, dL \,.$$

Durch diese letzte Beziehung wird aus der Gl. (12), wobei wir die Beziehung (13) nochmals berücksichtigen:

$$N = -\frac{1}{c^2} \int_{S'} \left(1 - c \frac{\partial x}{\partial \varphi}\right) dS \,.$$

Nun haben wir gezeigt (Nr. 3), daß aus der Bedingung des verschwindenden Transportes in tiefen Schichten folgt, daß die Funktion $F = f - cz$ im ganzen Bereich L (auch im Unendlichen) überall endlich bleibt. Diese Eigenschaft behält sie aber auch im Streifen S, wenn wir sie als Funktion von f betrachten (infolge der gegenseitig eindeutigen Abbildung zwischen f und z).

Es folgt daraus naturgemäß, daß auch der Realteil von F, d. h. $\Phi(\varphi, \psi) = \varphi - cx$, endlich bleibt, so daß wir schreiben können:

$$N = -\frac{1}{c^2} \int_{S'} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} dS \,. \tag{12'}$$

Nun können wir leicht das Verhalten von N feststellen. Zunächst bezeichnen wir mit σ' die gesamte Begrenzung von S' und mit n die Richtung der nach innen gerichteten Normale; dann folgt aus (12′)

$$N = \frac{1}{c^2}\int \Phi \cos \widehat{n\varphi}\, d\sigma' .$$

Längs der Geraden $\psi = 0$ und $\psi = q$, verschwindet $\cos(\widehat{n\varphi})$, so daß nur die Integrale über die Transversallinien σ_1 und σ_2 übrig bleiben. Jede dieser Linien ist das Abbild eines vertikalen Schnittes vom Boden bis zur freien Oberfläche, d.h. einer Linie, deren Länge unter einem bestimmten Maximum liegt; andererseits ist das Abbildungsverhältnis gleich $|w|$, und diese Größe bleibt endlich im ganzen Gebiet (Nr. 2.). Wenn wir daher das Produkt der größten Ordinate von l mit dem größten Wert des Absolutwertes von Φw mit P bezeichnen und berücksichtigen, daß

$$\left|\int\limits_{\sigma_1+\sigma_2} \Phi \cos \widehat{n\varphi}\, d\sigma' \right| = \int |\Phi w|\, |dz| ,$$

wobei die Integration auf der rechten Seite längs der zwei Ordinaten zu erstrecken ist, welche L' begrenzen, so erhalten wir unmittelbar die Ungleichung

$$N \leqslant \frac{2P}{c^2} ,$$

wodurch unsere Behauptung bewiesen ist.

6. - Die Integralbeziehung. Nachweis und Berechnung des Transportes.

Wir greifen nun zurück auf Gl. (8) und ersetzen M durch den Wert aus (6‴), indem wir berücksichtigen, daß N bei beliebig zunehmenden Δx endlich bleibt, so daß $\lim\limits_{\Delta x = \infty} N/\Delta x = 0$ ist. Wir erhalten

$$\overline{Q} = c \lim_{\Delta x = \infty} \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{L'} \beta^2\, dL .$$

Aus (8′) folgt, daß die linke Seite einen bestimmten Wert hat. Dasselbe gilt nun auch für die rechte Seite, welcher wir eine anschaulichere Form geben werden, indem wir nach der Definition (9) die mittlere Tiefe einführen:

$$h = \lim_{\Delta x = \infty} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} y_l \, dx = \lim_{\Delta x = \infty} \frac{L'}{\Delta x} .$$

Nun folgt aus der Existenz des Grenzwertes

$$\frac{\bar{Q}}{c} = \lim_{\Delta x = \infty} \frac{1}{\Delta x} \int_{L'} \beta^2 \, dL$$

die Existenz eines zweiten Grenzwertes, welchen wir erhalten, indem wir, durch gliedweise Division mit dem vorstehendem Ausdruck von h, statt Δx die Fläche L' einführen, und zwar muß der Grenzwert gleich $\bar{Q}/ch$ werden. Dieser Grenzwert bedeutet jedoch offenbar den örtlichen Mittelwert von β^2; wir bezeichnen ihn mit β^{*2} und schreiben

$$\beta^{*2} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{1}{L'} \int_{L'} \beta^2 \, dL , \tag{14}$$

woraus folgt

$$\bar{Q} = ch\beta^{*2} . \tag{8''}$$

Nach (14) ist die rechte Seite offenbar $\geqslant 0$. In dem besonders interessanten Falle einer periodischen Welle können wir das Gleichheitszeichen sicher ausschließen, weil dann β^{*2} den Mittelwert der positiven Größe β^2 darstellt, genommen über einen endlichen Bereich (über den Bereich einer Welle). Wenn wir zunächst von dem Fall, daß β^{*2} Null wird, absehen, so folgt aus (8″), daß ein materieller Transport in der Richtung der Wellenfortpflanzung stattfindet, und zwar hat $\bar{Q}$ die Bedeutung der Durchflußmenge in asymptotischem Sinne, so daß die durch einen Schnitt während der Zeit Δt fließende Wassermenge angenähert durch $ch\beta^{*2}\Delta t$ gegeben wird, wobei der relative Fehler mit wachsendem Δt immer kleiner wird.

7. - Die Transportgeschwindigkeit.

Wenn wir statt der wirklichen Strömung, welche die Welle begleitet, und deren Existenz wir soeben nachgewiesen haben, die gesamte Durchflußmenge gleichmäßig über den Kanal von einer mittleren Höhe verteilt denken, so konnen wir von einer fiktiven Transportgeschwindigkeit γ sprechen, gegeben durch die Formel:

$$\gamma = \frac{\overline{Q}}{h}. \tag{15}$$

Die Geschwindigkeit stellt die *mittlere Geschwindigkeit* des materiellen Transportes dar, welchen die Welle mit sich führt.

Aus (15) und (8″) folgt die bemerkenswerte Beziehung

$$\frac{\gamma}{c} = \beta^{*2}. \tag{16}$$

8. - Anwendungen auf die einfachen Airyschen Wellen.

Wir haben als ein charakteristisches Merkmal der Wellenbewegung vorausgesetzt, daß das Verhältnis β ein gegen Eins kleiner echter Bruch ist. Wir können als erste Annäherung annehmen, daß wir β als kleine Größe erster Ordnung behandeln dürfen, deren Quadrate vernachlässigt werden sollen. Alsdann sind die kinetischen Bedingungen a), b), c) und die dynamische Bedingung, daß längs der freien Oberfläche konstanter Druck herrscht, für die einfachen Airyschen Wellen erfüllt.

Andererseits folgt aus (16), daß der Flüssigkeitstransport ein Effekt zweiter Ordnung ist. Wir dürfen daher nicht sämtliche quadratischen Glieder streichen, weil wir dann den ganzen Effekt unterdrücken und $\gamma = 0$ erhalten. Wenn wir jedoch, wie im Falle der Airyschen Wellen, β als Funktion des Ortes tatsächlich ausrechnen können, indem wir die Größen zweiter Ordnung vernachlässigen und dann daraus β^{*2} ausrechnen, so liefert uns (16) offenbar γ genau bis zur zweiten Ordnung, in dem Sinne, daß die Glieder, welche wir vernachlässigen, sicher von höherer, als von der zweiten Ordnung sind (wenigstens von der dritten).

Im Falle der Airyschen Wellen ist die komplex genommen Geschwindigkeit, wenn wir mit λ die Wellenlänge bezeichnen, gegeben durch die Formel [5]

$$w = c\left(1 - \mu\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\right), \tag{17}$$

---

[5] Vgl. a. a. O. (Qüestions etc.), S. 66-70.

wobei μ eine reine Zahl ist, welche wir zunächst beliebig, jedoch klein von der ersten Ordnung im Vergleich zu Eins ansetzen.

Setzen wir

$$\alpha = \frac{2\pi h}{\lambda}, \tag{18}$$

so gilt die AIRYschen Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\frac{c^2}{gh} = \mathfrak{Tg}\,\alpha \tag{19}$$

($g =$ Beschleunigung der Schwere).

Die Gleichung der freien Oberfläche l lautet mit demselben Grad der Annäherung

$$y_l = h\left[1 + \mu\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha}{\alpha}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\right]. \tag{20}$$

Die Höhe a der Welle (größte Erhöhung der Oberfläche über die mittlere Höhe $y = h$) ist offenbar durch den Koeffizienten von $\sin 2\pi x/l$ bestimmt, und zwar gilt

$$\frac{a}{h} = \mu\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha}{\alpha}. \tag{21}$$

Dies vorausgeschickt, können wir β^{*2} als den Mittelwert von β^2 über eine Wellenlänge leicht berechnen. Das Gebiet ist durch eine Wellenlinie begrenzt, welche von der Horizontalen $y = h$ durch Größen erster Ordnung sich unterscheidet. Da β^2 klein von zweiter Ordnung ist, und wir Glieder höherer Ordnung streichen wollen, so können wir als Integrationsbereich das Wellengebiet durch ein Viereck von der Länge λ und Höhe h ersetzen. Wir erhalten daher:

$$\beta^{*2} = \frac{1}{\lambda h}\int\limits_0^h dy \int\limits_0^\lambda \beta^2\,dx\,.$$

Laut (17) haben wir

$$\beta^2 = \left|\frac{w-c}{c}\right|^2 = \mu^2\cos\frac{2\pi(x+iy)}{\lambda}\cos\frac{2\pi(x-iy)}{\lambda}$$

$$= \mu^2\{\cos^2\xi\,\mathfrak{Cof}^2\,\eta + \sin^2\xi\,\mathfrak{Sin}^2\,\eta\}\,,$$

wobei wir der Kürze halber

$$\xi = \frac{2\pi x}{\lambda}, \qquad \eta = \frac{2\pi y}{\lambda} \tag{22}$$

gesetzt haben.

Berücksichtigen wir, daß

$$\cos^2 \xi = \frac{1 + \cos 2\xi}{\lambda}, \qquad \sin^2 \xi = \frac{1 - \cos 2\xi}{\lambda}$$

ist, so erhalten wir zunächst durch Integration in bezug auf x zwischen 0 und λ offenbar

$$\frac{1}{2}\mu^2(\mathfrak{Cof}^2 \eta + \mathfrak{Sin}^2 \eta) = \frac{1}{2}\mu^2 \, \mathfrak{Cof}\, 2\eta\,,$$

so daß wir, wenn wir die Integration auch nach y ausführen und die Beziehungen (22) berücksichtigen, erhalten:

$$\beta^{*2} = \frac{\mu^2}{2\alpha}\int_0^\alpha \mathfrak{Cof}\, 2\eta\, d\eta = \frac{\mu^2}{4\alpha}\mathfrak{Sin}\, 2\alpha\,.$$

Aus der Identität

$$\frac{\mathfrak{Sin}\, 2\alpha}{\alpha} = 2\frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha}{\alpha^2}\frac{\alpha}{\mathfrak{Tg}\, \alpha}$$

folgt

$$\beta^{*2} = \frac{1}{2}\mu^2 \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha}{\alpha^2}\frac{\alpha}{\mathfrak{Tg}\, \alpha}\,,$$

oder mit Benutzung der Relation (21) für die Wellenhöhe und der AIRYschen Gleichung

$$\beta^{*2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2 \frac{gh}{c^2}\,.$$

In der Formel sind nur Größen enthalten, welche der Erfahrung unmittelbar zugänglich sind.

Für die Transportgeschwindigkeit folgt dann für den Fall der einfachen Welle schließlich der Ausdruck:

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2 \frac{gh}{c^2}, \tag{23}$$

so daß dieselbe in direktem Verhältnis mit dem Quadrat der Höhe und umgekehrt mit der Tiefe des Kanals und dem Quadrat der Wellengeschwindigkeit zunimmt.

* * *

Bei der nachfolgenden Diskussion wies Herr PRANDTL auf die begriffliche Schwierigkeit hin, daß in den Ausführungen von H. LEVI-CIVITA zwei Bezugssysteme: das ruhende (mit den Wänden verbundene) und das mit der Welle verbundene eine ausgezeichnete Rolle spielen. Wenn man der ganzen Anordnung eine konstante Geschwindigkeit erteilt, so wird die Transportmenge geändert, während die Gesetzmäßigkeiten der mechanischen Vorgänge nach dem Relativitätsprinzip (in der klassischen Galileischen Form) bei einer Translation unverändert bleiben müssen.

Herr LEVI-CIVITA antwortete, daß bei einer Translation der gesamten Anordnung (daher auch der *Wände*) sowohl c als w unverändert bleiben, so daß dadurch seine Begriffsbestimmungen, Ableitungen und Ergebnisse nicht berührt werden.

Herr PRANDTL erwiderte, daß man bei einer idealen Flüssigkeit den Wänden eine beliebige Translation erteilen kann, ohne Einfluß auf die Bewegung der Flüssigkeit. Dies ist aber gleichbedeutend damit, daß man zu c und w eine Konstante v_0 hinzufügt. Dadurch werden aber die Formeln und die aus ihnen gezogenen Folgerungen des Herrn LEVI-CIVITA durchaus nicht unverändert gelassen.

Herr v. KÁRMÁN wies darauf hin, dad ein ausgezeichnetes Bezugssystem wohl definiert werden kann, weil gerade durch LEVI-CIVITA gezeigt wurde, daß der Materialtransport in allen Höhenschichten, welche stets unterhalb der freien Oberfläche liegen, in bezug auf ein ganz bestimmtes Bezugsysstem verschwindet. Dieses Koordinatensystem bezeichnet Herr LEVI-CIVITA als festes. Die erwähnte Eigenschaft dieses Bezugsystems ist nicht invariant für eine Translation mit der Geschwindigkeit v_0, so daß die von Herrn PRANDTL aufgeworfene begriffliche Schwierigkeit behoben wird.

Herr PRANDTL gibt zu, daß es ein in mathematischem Sinne ausgezeichnetes Bezugssystem gibt; er hält es aber für wünschenswert, die Frage zu klären, welche physikalische Bedeutung diesem System zukommt, wie es sich z.B. zu jenem System verhält, in welchem die Flüssigkeit anfangs ruht, falls man die Wellenbewegung durch erregende Kräfte aus der Ruhe entstanden denkt.

XVI.

DETERMINAZIONE RIGOROSA DELLE ONDE IRROTAZIONALI PERIODICHE IN ACQUA PROFONDA

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXXIII (2º sem. 1924), pp. 141-150 (*).

In una comunicazione al Congresso internazionale di meccanica, che ebbe luogo a Delft nello scorso Aprile (e anche in una conferenza tenuta al Seminario matematico della R. Università di Roma), tratteggiai la questione enunciata nel titolo, e il metodo con cui si perviene a risolverla (1). Una notizia abbastanza ampia di questa comunicazione apparirà quanto prima negli Atti di quel Congresso; mentre la ricerca *in extenso*, cogli sviluppi delle dimostrazioni e dei calcoli, si trova in corso di stampa nelle « Matematischen Annalen ».

Mi permetto frattanto di indicare rapidamente l'aspetto matematico della questione, l'algoritmo risolutivo che ne fornisce gli integrali sotto forma di serie, il risultato numerico del calcolo dei primi termini, alcune formule generali e la loro illustrazione meccanica.

1. - Questione analitica cui può essere ricondotto il problema meccanico.

Dalle considerazioni generali sulle onde irrotazionali, esposte parecchi anni or sono in questi Rendiconti (2), e raccolte recentemente nella Con-

(*) Pervenuta all'Accademia il 9 agosto 1924.

(1) Il sig. NÉKRASSOW era pervenuto per suo conto a conclusioni analoghe (forse un po' meno specificate dal punto di vista applicativo, ma con ulteriori risultati nei riguardi esistenziali), ricorrendo alla teoria delle equazioni integrali. Egli ebbe la cortesia di informarmene, trasmettendomi anche una redazione francese delle sue ricerche (già pubblicate in lingua russa). Potei così comunicarne io stesso il contenuto al Congresso di Delft.

(2) Vol. XVI (2º sem. 1907), pagg. 776-790; vol. XXI (1º sem. 1912), pagg. 3-14.

ferenza III del volume *Questioni di meccanica classica e relativista* [3], segue (con facili adattamenti al caso di una profondità infinita) che la determinazione di tutti i possibili tipi di onde periodiche, atte a propagarsi senza alterazione di forma, si riduce alla seguente questione analitica:

Assegnare tutte le funzioni

$$\omega(\zeta) = \vartheta + i\,\tau \qquad (\vartheta \text{ parte reale})$$

della variabile complessa $\zeta = \varrho\, e^{i\sigma}$ (ϱ modulo), regolari entro il cerchio $|\zeta| \leqslant 1$ ($\mathfrak{D}$ della fig. 1), nulle nel centro O ($\zeta = 0$)

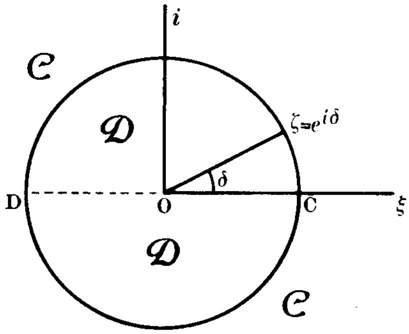


Fig. 11.

e soddisfacenti, sopra la circonferenza $\mathfrak{C}$ ($|\zeta| = \varrho = 1$), all'equazione

$$\text{(I)} \qquad \frac{d\tau}{d\sigma} = p\, e^{-3\tau} \sin\vartheta\,,$$

dove p designa un parametro positivo *a priori* indeterminato.

Ogni siffatta funzione $\omega(\zeta)$, non identicamente nulla, dà luogo a un tipo effettivo di onde periodiche permanenti, purchè soltanto sussista, in tutto il campo $|\zeta| \leqslant 1$, la disuguaglianza

$$\text{(1)} \qquad |e^{-i\omega} - 1| < \beta\,,$$

essendo β una frazione propria che, nei casi praticamente interessanti, è piuttosto piccola (per es., non superiore ad $\frac{1}{10}$). Comunque, la (1) rimane automaticamente verificata per $|\omega|$ abbastanza piccolo.

---

[3] Bologna, Zanichelli, 1924; già pubblicate due anni or sono in catalano per cura del professore TERRADAS (Barcelona, Institut d'estudis catalans).

La costante p è legata ad elementi essenziali del fenomeno (λ, c lunghezza e velocità di propagazione dell'onda; g accelerazione della gravità) a norma della formula

$$(\mathrm{II}) \qquad p = \frac{g\lambda}{2\pi c^2}\,;$$

$c\,|e^{-i\omega}| = ce^{\tau}$ rappresenta la grandezza della velocità delle particelle liquide, *relativa* all'onda (velocità poco diversa da c, in quanto, trattandosi di onde, il moto assoluto delle singole particelle deve ridursi a piccole oscillazioni); infine ϑ misura l'inclinazione della suddetta velocità sulla orizzontale, inclinazione che rimane anch'essa sempre piuttosto piccola in tutto il campo del moto.

Va notato subito che ci si può limitare a contemplare valori di $p \leqslant 1$, perchè da ogni soluzione della (I), corrispondente a un tale valore di p, se ne possono dedurre infinite altre in cui p è sostituito da np, con n intero arbitrario: codeste soluzioni (sostanzialmente coincidenti dal punto di vista meccanico) provengono dal risguardare come nuova onda semplice l'aggregato di n delle onde corrispondenti alla soluzione inizialmente considerata.

2. - Onde semplici di Airy.

Se $\omega = \vartheta + i\tau$ si tratta come infinitesima, l'equazione (I) si riduce a

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta = 0\,, \qquad \text{su } \mathfrak{C}\,.$$

Designando genericamente con $\Re\omega$ la parte reale di una quantità complessa ω, si ha intanto, per la nostra funzione $\omega(\zeta)$, $p\Re\omega = p\vartheta$; siccome poi, su $\mathfrak{C}$, $\zeta = e^{i\sigma}$, e quindi $d\sigma = d\zeta/i\zeta$, si ha anche $\Re\zeta d\omega/d\zeta = d\tau/d\sigma$. La precedente equazioni può, così essere scritta

$$\Re\left(\zeta\frac{d\omega}{d\zeta} - p\omega\right) = 0\,, \qquad \text{su } \mathfrak{C}\,,$$

e sta a dire che la funzione $\zeta d\omega/d\zeta - p\omega$, regolare entro $\mathfrak{C}$, ha parte reale nulla sulla circonferenza; la funzione stessa si riduce perciò ad una costante puramente immaginaria, anzi addirittura a zero, in quanto deve annullarsi nell'origine. La (I) equivale pertanto alla equazione differenziale

$$\zeta \frac{d\omega}{d\zeta} - p\omega = 0 , \tag{2}$$

il cui integrale può essere posto sotto la forma $-i\mu\zeta^p$, con μ costante arbitraria. La regolarità implica che l'esponente $p(\leqslant 1)$ debba essere precisamente 1, e si ha, in prima approssimazione, corrispondente alle classiche onde di AIRY,

$$\omega = -i\mu\zeta . \tag{3}$$

La condizione numerica

$$p = 1 , \tag{4}$$

ossia, in virtù della (II),

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} ,$$

è appunto la celebre relazione di AIRY che lega c a λ.

Qualora si supponga (e questo è sempre lecito con opportuna scelta degli assi di riferimento) che il punto $\zeta = 1$ (C della fig. 1) corrisponda a una *cresta* C del profilo ondoso (vedi fig. 2 a pag. 370), si constata che *μ deve ritenersi reale, anzi positivo*: il valore numerico rimane arbitrario, purchè soltanto piccolissimo, in conformità all'ipotesi preliminare che ω possa trattarsi come quantità di primo ordine.

3. - Cenno di precedenti ricerche.

In una memoria dei « Math. Annalen » (Bd. 85, 1922, volume dedicato all'HILBERT) io mi occupai dell'equazione (I), anzi dell'equazione più generale

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - pe^{-3\tau} \sin\vartheta = \chi(\sigma) , \qquad \text{su } \mathfrak{C} ,$$

dove $\chi(\sigma)$ designa una funzione conosciuta, dimostrando, tra altro, che, per $p < 1$, la (I) non ammette soluzioni $\omega(\zeta)$, diverse da zero e abbastanza piccole, cioè in modulo inferiori ad un certo limite numerico $\varepsilon(p)$, il quale dipende essenzialmente da p, e tende a zero per $p \to 1$. Rimane escluso il caso in cui p sia proprio 1.

In questa condizione di cose, io avevo (come applicazione incidentale di quel mio studio) creduto di poter affermare che (se pur esistono onde della specie considerata) deve, per qualsiasi corrispondente soluzione della (I), essere esattamente $p = 1$, ossia seguitare a valere la relazione di AIRY. Una tale conclusione era, in verità, affrettata, come fin da allora mi fece gentilmente osservare il sig. WEYL. Infatti è ben possibile che esistano soluzioni della (I) le quali non soddisfino alla limitazione $|\omega| < \varepsilon(p)$, eppure si mantengano in modulo abbastanza piccole da verificare la disuguaglianza fondamentale (1), in cui β è una costante prefissata, *indipendente* da p. Bisogna dunque cercare le eventuali onde permanenti, fra le soluzioni delle (I), non soltanto (come io avevo, a torto, ritenuto imprescindibile) in corrispondenza al valore $p = 1$; ma, più generalmente, anche per $p < 1$. Ora accade appunto che per $p = 1$ nulla si trova, mentre esistono soluzioni per $p < 1$ (e abbastanza prossimo all'unità). Vedremo, tra poco, come si costruiscono le soluzioni di questo secondo tipo. Dobbiamo intanto ricordare che già da parecchio tempo STOKES e poi lord RAYLEIGH [non in base alla (I), ma direttamente operando sulle equazioni idrodinamiche] avevano istituito determinazioni approssimative di onde permanenti, spingendo l'approssimazione fino ad un ordine abbastanza elevato: STOKES fino al secondo e RAYLEIGH, in due primi lavori, fino al quarto, e nell'ultimo, da lui dedicato all'argomento (4), fino al sesto. Ora, pur essendo molto dubbia la legittimità del procedimento dal punto di vista della convergenza, così che RAYLEIGH (5) esprimeva il desiderio che si ponesse una buona volta fuori discussione la questione esistenziale con una dimostrazione rigorosa, è pur significante il fatto che in ogni ordine di approssimazione (superiore al primo) risulta che il rapporto fra c^2 e $g\lambda/2\pi$ va crescemdo coll'*altezza* a dell'onda (a partire dal valore limite 1, per a infinitesimo). Ciò implica in particolare $p < 1$ e lascia ragionevolmente presumere che, se mai esistono soluzioni rigorose della (I), queste debbano piuttosto ritrovarsi per $p < 1$, anzichè in corrispondenza al valore limite $p = 1$.

4. - Integrazione della (I) mediante sviluppo in serie di potenze di un parametro. Espressione esplicita dei primi termini. Convergenza.

Venendo ormai all'agoritmo costruttivo, si introduce un parametro positivo μ e si cerca di soddisfare alla (I) (per qualsiasi μ) ponendo

$$\omega = \sum_{1}^{\infty}{}_n\, \omega_n(\zeta)\mu^n\,, \tag{5}$$

(4) *On periodical irrotational waves at the surface of deap water*, « Phil. Mag. », vol XXXII, 1917, pp. 381-389.

(5) « Ibidem », p. 382.

nonchè

$$(6) \qquad 1 - p = \sum_{1}^{\infty}{}_n\, k_{2n}\mu^{2n}\,,$$

le $\omega_n(\zeta)$ essendo funzioni di ζ (polinomii) e le k_{2n} costanti da determinarsi in base alle condizioni del problema. É sottinteso che le serie si suppongono uniformemente convergenti per $|\mu|$ abbastanza piccolo; la prima anche per $|\zeta| \leqslant 1$, assieme colla serie delle derivate rapporto a ζ. Come già ϑ e τ per ω, così ϑ_n e τ_n designeranno rispettivamente la parte reale e il coefficiente di i in ω_n:

$$(7) \qquad \omega_n = \vartheta_n + i\tau_n\,.$$

Cominciando dal primo termine $\mu\omega_1$ della (5), si vede subito che le (I) e (6) ne riconducono la determinazione alla (2), in cui già si sia posto $p = 1$. Ne viene, in virtù della (3),

$$(8) \qquad \omega_1 = -i\zeta\,.$$

Ricordato che $\omega(\zeta)$ deve per sua definizione annullarsi nell'origine, si riconosce senza difficoltà che è lecito ritenere (sostituendo, se del caso, a μ una sua opportuna funzione) $\omega - \omega_1$ divisibile per ζ^2. Ecco poi il criterio ricorrente, in base a cui si riesce ad assegnare i coefficienti successivi:

Suppongasi di aver trovato

$$\omega_\nu(\zeta) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

nonchè ogni $k_{2\nu}\,(k_2, k_4, \ldots)$ il cui indice sia inferiore a $n-1$, avendo constatato che ciascun $\omega_\nu(\zeta)$ è un polinomio di grado ν, divisibile per ζ^2 e dotato delle due proprietà seguenti:

a) $\omega_\nu(\zeta)$ è puramente immaginario per ζ reale;

b) $\omega_\nu(-\zeta) = (-1)^\nu\omega_\nu(\zeta)$.

Allora, sostituendo nella (I), per ω e p, le espressioni (5) e (6) ed eguagliando i coefficienti di μ^n nei due membri, si è condotti ad una equazione della forma

$$(9) \qquad \frac{d\tau_n}{d\sigma} - \vartheta_n = \chi_n(\sigma) - k_{n-1}\sin\sigma\,, \qquad \text{su } \mathfrak{C}\,,$$

dove $\chi_n(\sigma)$ è una combinazione polinomiale delle ϑ_ν, τ_ν, $k_{2\nu}$ già trovate e va quindi ritenuta funzione nota di σ; $k_{n-1}=0$ per n pari, ed è invece la prima delle $k_{2\nu}$ incognite per n dispari.

La natura della (I) e le proprietà delle $\omega_\nu(\zeta)$ già assegnate ($\nu=1, 2, \ldots, n-1$) consentono più precisamente di constatare che $\chi_n(\sigma)$ si riduce ad un polinomio di grado n in $\cos\sigma$, $\sin\sigma$, il cui sviluppo di Fourier ha la forma

$$\chi_n(\sigma)=\sum_{1}^{[n/2]}{}_\nu\, q_{n/n-2\nu}\sin(n-2\nu)\sigma\,,$$

le q designando costanti (note) e $[n/2]$ il massimo intero contenuto in $n/2$. Giova scrivere a parte l'ultimo termine del sommatorio, corrispondente a $\nu=[n/2]$. Esso è identicamente nullo per n pari, e per n dispari vale $q_{n/1}\sin\sigma$. Convenendo di assumere $q_{n/1}=0$ per n pari, possiamo scrivere in ogni caso la (9) sotto la forma

$$\frac{d\tau_n}{d\sigma}-\vartheta_n=\sum_{1}^{[n/2]-1}{}_\nu\, q_{n/n-2\nu}\sin(n-2\nu)\sigma+(q_{n/1}-k_{n-1})\sin\sigma, \tag{9'}$$

con che, si noti bene, il sommatorio rimane sempre esente da termini in $\sin\sigma$.

Ciò posto, ove si tenga conto che le incognite ϑ_n e τ_n sono, per ipotesi, funzioni coniugate, sviluppabili su $\mathfrak{C}$ in serie di Fourier [trattabili come somme; e senza termini costanti, nè termini in $\cos\sigma$, $\sin\sigma$, in quanto $\omega_n(\zeta)$ contiene ζ^2 a fattore], si riconosce per materiale identificazione dei due membri della (9'):

1) che $k_{n-1}=q_{n/1}$, il che si riduce ad una identità per n dispari, e per n pari determina k_{n-1};

2) che [attraverso $\vartheta_n(\sigma)$, $\tau_n(\sigma)$] resta univocamente individuata la funzione $\omega_n(\zeta)$, la quale si riduce ad un polinomio di grado n, divisibile per ζ^2 e soddisfacente alle due proprietà a) e b) (per $\nu=n$).

Con ciò rimane perfettamente giustificato il nostro criterio ricorrente, e l'algoritmo costruttivo dei polinomii $\omega_n(\zeta)$ e delle costanti k_{2n}, risulta illimitatamente applicabile a partire da $n=2$, essendo ω_1 fornito dalla (8).

Il calcolo numerico dei primi termini dà

$$\left\{\begin{aligned}&\omega_1-i\zeta\,;\quad \omega_2=-i\frac{3}{2}\zeta^2\,;\quad \omega_3=-i\frac{17}{6}\zeta^3\,,\quad k_2=1\,;\\ &\omega_4=-i\left\{\frac{71}{12}\zeta^4+\zeta^2\right\};\ \omega_5=-i\left\{\left(13+\frac{3}{40}\right)\zeta^5+\frac{15}{4}\zeta^3\right\},\ \ k_4=\frac{5}{2};\ \ldots,\end{aligned}\right. \tag{10}$$

con che in particolare si ha dalla (6)

$$p = 1 - \mu^2 - \frac{5}{2}\mu - (6), \tag{6'}$$

designandosi genericamente con (n) un termine d'ordine n (almeno) in μ.

Naturalmente, oltre alla illimitata applicabilità dell'algoritmo, è essenziale di verificarne la convergenza. Rimandando, per la dimostrazione, alla memoria che, come avvertii da principio, sta per essere pubblicata nei « Math. Ann. », mi limiterò ad accennare che l'uniforme convergenza delle serie (5) e (6) si stabilisce per confronto con opportune maggioranti, previa una estensione della nozione di maggiorante forse non priva di interesse, anche indipendentemente dalla applicazione specifica di cui si tratta.

5. - Profilo dell'onda. Relazioni fra elementi caratteristici del moto ondoso.

Nota $\omega(\zeta)$, rimangono senz'altro individuati gli elementi salienti del fenomeno meccanico. Così per es. il fatto che $\omega(\zeta)$ risulta puramente

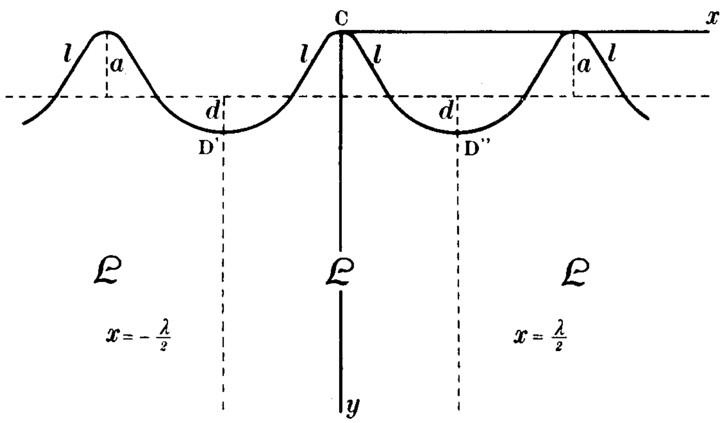


Fig. 2.

immaginaria per ζ reale si traduce in una proprietà di simmetria (geometrica e cinematica) rispetto alla verticale Cy d'ogni cresta d'onda C (cfr. fig. 2).

Per la linea libera l, cioè per il profilo superiore dell'onda, si ricava la rappresentazione parametrica

$$z_1 = x_l + iy_l = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\sigma e^{i\omega}\,d\sigma\,,$$

la $\omega(\zeta)$ sotto il segno riferendosi, ben si intende, alla circonferenza $\mathfrak{C}$ ($\zeta = e^{i\sigma}$). Le (5) e (10) dànno in conformità

$$(11)\quad \begin{cases} x_l = \dfrac{\lambda}{2\pi}\Big\{\sigma + \mu\sin\sigma + \mu^2\sin 2\sigma + \mu^3\dfrac{3}{2}\sin 3\sigma + \\ \quad + \mu^4\left(\dfrac{8}{3}\sin 4\sigma + \dfrac{1}{2}\sin 2\sigma\right) + \mu^5\left(5{,}21\sin 5\sigma + \dfrac{19}{12}\sin 3\sigma\right) + (6)\Big\}\,, \\ y_l = \dfrac{\lambda}{2\pi}\Big\{\mu(1-\cos\sigma) + \mu^2(1-\cos 2\sigma) + \mu^3\dfrac{3}{2}(1-\cos 3\sigma) + \\ \quad + \mu^4\left[\dfrac{8}{3}(1-\cos 4\sigma) + \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\sigma)\right] + \\ \quad + \mu^5\left[5{,}21\,(1-\cos 5\sigma) + \dfrac{19}{12}(1-\cos 3\sigma)\right] + (6)\Big\}\,. \end{cases}$$

E ancora: $ce^{-2i\omega(1)}$, $ce^{-2i\omega(-1)}$ rappresentano (vettorialmente, e anche in valore assoluto, perchè si tratta di numeri positivi) la velocità (relativa) minima e massima delle particelle fluide, in corrispondenza la prima ad una cresta C, la seconda ad una *sella* dell'onda (D', D'' nella figura); *l'altezza a dell'onda* (sopraelevazione d'una cresta sul livello medio) e la *depressione d* (quota di una sella al disotto dello stesso livello) e per esse i rapporti

$$(12)\qquad \alpha = \frac{a}{\frac{1}{2\pi}\lambda}\,,\qquad \delta = \frac{d}{\frac{1}{2\pi}\lambda}\,,$$

hanno le espressioni rispettive

$$(13)\qquad \alpha = \frac{1}{p}\frac{1}{2}\left(1 - e^{-2i\omega(1)}\right)\,,$$

$$(14)\qquad \delta = \frac{1}{p}\frac{1}{2}\left(e^{2i\omega(-1)} - 1\right)\,,$$

ossia, sviluppando in serie di potenze di μ, a norma delle (5), (10) e (6'):

$$\alpha = \mu \left\{1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{3}{2}\mu^2 + \frac{13}{6}\mu^3 + \left(6 + \frac{19}{24}\right)\mu^4 + (5)\right\}, \tag{13'}$$

$$\delta = \mu \left\{1 - \frac{1}{2}\mu + \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{13}{6}\mu^3 + \left(6 + \frac{19}{24}\right)\mu^4 + (5)\right\}. \tag{14'}$$

Come si vede, per μ abbastanza piccolo, $\alpha > \delta$, ossia *l'altezza a delle creste al disopra del livello medio supera la depressione d delle selle al disotto dello stesso livello.*

La eliminazione del parametro ausiliario μ fra le (6'), (13') e (14') dà luogo a due relazioni fra α, δ e p, le quali [attese le definizioni (21) e (II) di questi rapporti] involgono unicamente elementi caratteristici (geometrici e cinematici) del moto ondoso. Per esplicare queste relazioni, si può per es. ricavare dalla (13') μ in termini di α, e sostituire in

$$\alpha - \delta = \mu^2 \left\{1 + \frac{13}{3}\mu^2 + (4)\right\},$$

nonchè nella espressione (6') di p, che procedono entrambe per potenze pari di μ. Si ha così

$$\delta = \alpha - \alpha^2 + \alpha^3 - \frac{31}{12}\alpha^4 + \frac{23}{4}\alpha^5 + (6), \tag{15}$$

$$p = \frac{g\lambda}{2\pi c^2} = 1 - \alpha^2 + \alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha^4 + \frac{25}{12}\alpha^5 + (6), \tag{16}$$

la quale, invertendo, può anche essere scritta

$$\frac{1}{p} = \frac{2\pi c^2}{g\lambda} = 1 + \alpha^2 - \alpha^3 + \frac{7}{4}\alpha^4 - \frac{49}{12}\alpha^5 + (6). \tag{16'}$$

Quest'ultima relazione, arrestata al secondo ordine, dà

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}(1 + \alpha^2),$$

risultato di seconda approssimazione, che risale a STOKES.

LORD RAYLEIGH, nella memoria citata al n. 3, introdusse ipotesi preventive sull'ordine di grandezza di certi coefficienti β, γ, δ, ε, e, in base a tali ipotesi, spinse il suo calcolo fino al 6° ordine. Per il confronto colle nostre formule, bisognerebbe prima di tutto verificare in modo preciso che le ipotesi suddette si accordano effettivamente cogli ordini di grandezza risultanti dal teorema di esistenza. Va comunque rilevato che se, anche senza precisare l'ordine di grandezza dei coefficienti γ, δ, ε del RAYLEIGH, si ammette unicamente che siano d'ordine superiore al suo β, si ha un controllo per il nostro calcolo numerico, potendosi constatare (fatte le debite riduzioni e sostituzioni) che dalle formule del RAYLEIGH seguono relazioni, fra gli elementi caratteristici, coincidenti colle precedenti fino al 5° ordine incluso.

Noterò infine che la discussione concernente l'ordine di grandezza di quei tali coefficienti presenterebbe interesse, non soltanto, dirò così, storico-critico, ma anche algoritmico, poichè il procedimento del RAYLEIGH, pur essendo meno sistematico, riesce, all'atto pratico, alquanto più spedito, almeno pel calcolo dei primi termini.

XVII.

CONDIZIONI ATTE AD ASSICURARE L'INDIPENDENZA DEGLI ARGOMENTI NELLA ESPRESSIONE HAMILTONIANA DELL'AZIONE VARIATA

(in collaborazione con U. AMALDI)

« Rend. Acc. Lincei », ser. 6ª, vol. I (1925),

pp. 265-272.

1. – Nel redigere il secondo volume delle nostre *Lezioni di Meccanica razionale* abbiamo avuto occasione di notare, a proposito del *principio dell'azione variata*, come tutti gli Autori, che potemmo consultare, da JACOBI in poi, si accontentino di affermare che una certa trasformazione di variabili è possibile, almeno in generale, senza accertarne le condizioni di effettiva validità.

Ecco precisamente di che si tratta: dato un sistema lagrangiano

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, ..., n) \tag{1}$$

a potenziale cinetico $\mathcal{L}$ dipendente in modo qualsiasi dai $2n$ argomenti q_h e $\dot{q}_h = dq_h/dt$, ma non da t, l'*azione*

$$a = \int_{t_0}^{t} dt \sum_{1}^{n}{}_h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h , \tag{2}$$

relativa ad una soluzione generica di (1), per un dato intervallo di tempo $t_0 \mapsto t$, si presenta come funzione di $t - t_0$ e delle costanti di integrazione che individuano codesta soluzione. Come tali si possono naturalmente assumere i valori iniziali q_h^0, $\dot{q}_h^0$ delle q_h, $\dot{q}_h$ od anche i q_h^0 e, in luogo dei $\dot{q}_h^0$, i valori iniziali p_h^0 delle n combinazioni (supposte indipendenti) delle

q_h e $\dot{q}_h$ (momenti)

$$p_h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

La trasformazione, cui dianzi alludemmo, consiste nell'esprimere gli $n+1$ argomenti p_h^0 e $t - t_0$ in termini, oltre che delle *coordinate iniziali* q_h^0, delle *coordinate finali* q_h e della *energia totale* E, che è poi il valore costante, e perciò in particolare iniziale, della funzione caratteristica di HAMILTON

$$H = \sum_1^n {}_h\, p_h \dot{q}_h - \mathcal{L}\ . \tag{4}$$

In quanto una tale trasformazione sia lecita, l'espressione hamiltoniana dell'azione variata

$$\delta a = \sum_1^n {}_h\, (p_h \delta q_h - p_h^0 \delta q_h^0) + (t - t_0)\, \delta E$$

si può considerare come il differenziale totale di a rispetto ai $2n+1$ argomenti q_h, q_h^0 ed E; e se ne traggono le identità

$$\frac{\partial a}{\partial q_h} = p_h\,, \quad \frac{\partial a}{\partial q_h^0} = -\, p_h^0\,, \quad \frac{\partial a}{\partial E} = t - t_0\,,$$

colle classiche conseguenze, dedottene per la prima volta da HAMILTON (1).

Noi ci proponiamo qui di indicare in qual modo abbiamo trattato l'argomento nelle nostre « Lezioni », stabilendo le condizioni di effettiva validità pel cambiamento di variabili testè accennato.

L'analoga questione che si presenta in ordine al *principio di* HAMILTON e che concerne (anche nel caso di $\mathcal{L}$ dipendente esplicitamente da t) la esprimibilità dell'integrale

$$\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}\, dt$$

---

(1) Cfr. per es. KELVIN and TAIT, *Treatise on natural philosophy*, Cambridge, University Press (ediz. stereotipa), § 330; J. E. ROUTH, *Treatise on the dynamics*, ecc. (advanced part), 5ª ed., London, Macmillan, 1892, Cap. X; oppure H. LAMB, *Higher Mechanics*, Cambridge, University Press, 1920, p. 262.

per mezzo degli argomenti iniziali e finali t_0, q_h^0 e t, q_h, si trova invece considerata e discussa nelle *Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem* di v. WEBER [2] col risultato che ad assicurare la sostituibilità delle q_h alle p_h^0 basta che il sistema lagrangiano (1) sia *normale* (cioè risolubile rispetto alle n derivate seconde delle q_h), il che a sua volta è certo se non si annulla, nell'intorno dei valori iniziali, l'Hessiano della funzione lagrangiana $\mathcal{L}$ rispetto alle $\dot{q}_h$

$$\Delta = \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h \, \partial \dot{q}_k} \right\| \qquad (h, k = 1, 2, ..., n).$$

2. – Per la nostra discussione riprendiamo il generico sistema lagrangiano (1) con $\mathcal{L}$ indipendente da t e introduciamo senz'altro la ipotesi della normalità, cioè la disuguaglianza

$$a) \qquad \Delta \neq 0 .$$

Con ciò si ha notoriamente equivalenza completa fra il sistema del 2° ordine (1) e il sistema hamiltoniano

$$(5) \qquad \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \qquad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, ..., n),$$

dove la funzione caratteristica è definita dalla (4), con l'intesa che le $\dot{q}_h$ vi siano espresse in termini delle q_h e delle p_h per mezzo delle (3), le quali, in virtù della ipotesi *a*), sono certamente risolubili rispetto alle $\dot{q}_h$.

Le nostre equazioni differenziali, sia sotto l'originaria forma (1), sia sotto la forma (5), ammettono l'integrale

$$(6) \qquad H = \text{cost.} = E .$$

Immaginiamo di attribuire alla costante E un valore determinato e associamo la (6) così particolarizzata alle equazioni differenziali sotto la forma lagrangiana (1). Il sistema differenziale così ottenuto definisce, nello spazio astratto ad n dimensioni delle q_h, ∞^{2n-2} curve, che costituiscono, come si suol dire, un *fascio di traiettorie* del sistema lagrangiano. A giustificare un tal computo e una tale denomnazione, osserviamo che, se la H, considerata, in base alla (4), come funzione delle q_h, $\dot{q}_h = dq_h/dt$,

[2] Leipzig, Teubner, 1900; nn. 380-382. Anche questo complemento figura nelle nostre *Lezioni*, svolto per altro in forma più rapida.

contiene effettivamente, traverso le $\dot{q}_h$, il dt (e vedremo fra un momento la condizione a ciò sufficiente), la (6) permette di eliminare lo stesso dt dalle (1), le quali assumono così un aspetto esclusivamente geometrico, in quanto risultano del tutto indipendenti dal tempo t; e definiscono nello spazio delle q_h un insieme di ∞^{2n-2} curve, traiettorie di tutte e sole quelle soluzioni di (1), che corrispondono al prefissato valore dell'energia E.

Ma perchè la H contenga effettivamente, pel tramite delle $\dot{q}_h$, il dt è necessario e sufficiente che la sua derivata rispetto a questo differenziale dt sia diversa da zero; e poichè questa derivata, a meno del fattore $-1/dt$, è data da

$$\sum_1^n {}_h \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h ,$$

si conclude che la condizione voluta si può enunciare dicendo che *la H come funzione delle q_h, $\dot{q}_h$, non deve essere omogenza di grado zero nelle $\dot{q}_h$.*

A questa condizione giova dare una forma diversa, risalendo dalla H alla funzione lagrangiana $\mathcal{L}$, che va considerata come il dato diretto della questione. In base alle (3) e (4), per caratterizzare sulla $\mathcal{L}$ anzichè sulla H il caso di eccezione, bisogna trovare, sotto la ipotesi che H sia omogenea di grado zero nelle $\dot{q}_h$, la più generale espressione di $\mathcal{L}(q\,|\,\dot{q})$ che soddisfa all'equazione

$$\sum_1^n {}_h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - \mathcal{L} = H , \tag{7}$$

lineare, ma non omogenea, rispetto ad $\mathcal{L}$ e alle sue derivate. Ora, per una notissima regola di Calcolo, la più generale soluzione di una tale equazione si ottiene aggiungendo ad una qualsiasi soluzione particolare l'integrale generale dell'equazione priva di secondo membro, che, riducendosi qui a

$$\sum_1^n {}_h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - \mathcal{L} = 0 ,$$

caratterizza tutte e sole le funzioni omogenee di 1° grado nelle q_h. Se allora si osserva che, essendo la H, per ipotesi, omogenea di grado zero nelle $\dot{q}_h$, la $\mathcal{L} = -H$ è una particolare soluzione della (7), e che, d'altra parte la H non è sottoposta ad alcuna condizione, all'infuori di quella della omogeneità di grado zero nelle $\dot{q}_h$, si conclude che: *Perchè la* (7) *contenga effettivamente il dt occorre e basta che* *b) la funzione lagrangiana $\mathcal{L}(q\,|\,\dot{q})$ non sia decomponibile nella somma di due funzioni omogenee nelle $\dot{q}_h$, dei gradi zero ed uno rispettivamente.*

3. – A questo punto della discussione giova riferirsi, anzichè al sistema lagrangiano (1), al suo equivalente hamiltoniano (5). e calcolare pel suo integrale generale i primi termini degli sviluppi delle funzioni incognite q_h in serie di potenze dell'argomento $t - t_0$, a partire dai valori iniziali p_h^0, q_h^0.

In base alla seconda n-pla di equazioni (5) si ha immediatamente

$$q_h - q_h^0 = (t - t_0)\frac{\partial H(p^0\,|\,q^0)}{\partial p_h^0} + \mathbf{(2)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

dove con la consueta notazione $\mathbf{(n)}$ si designano termini che contengono a fattore il binomio $t - t_0$ almeno all'esponente n; e tutto si riduce a riconoscere sotto quali condizioni il sistema di $n+1$ equazioni che si ottiene, associando a queste equazioni integrali (8), la (6), riferita addirittura all'istante iniziale t_0, risulti risolubile rispetto agli $n+1$ argomenti p_h^0 e $t - t_0$. Assodata questa risolubilità, avremo, insieme, dimostrato che rimangono effettivamente indipendenti gli altri $2n+1$ argomenti q_h, q_h^0 ed E, che compaiono nelle suindicate equazioni.

Tutto ciò sarà provato, se ci assicureremo che, per t diverso da t_0 e abbastanza vicino ad esso, non si annulli il determinante funzionale, rispetto alle p_h^0 e $t - t_0$, dei primi membri delle equazioni (8) e (6) che qui riscriveremo:

$$(t - t_0)\frac{\partial H(p^0\,|\,q^0)}{\partial p_h^0} - (q_h - q_h^0) + \mathbf{(2)} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{8'}$$

$$H(p^0\,|\,q^0) - E = 0\,. \tag{6'}$$

Gli elementi c_{hk} di questo determinante funzionale per le prime n righe e colonne ($h, k = 1, 2, \ldots, n$) son dati, in base alle (8′), da

$$c_{h,k} = (t - t_0)\frac{\partial^2 H}{\partial p_h^0\,\partial p_k^0} + \mathbf{(2)} \qquad (h, k = \,, 2, \ldots, n);$$

mentre per l'ultima colonna si ha, ancora dalle (8′),

$$c_{h.n+1} = \frac{\partial H}{\partial p_h^0} + \mathbf{(1)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

e per l'ultima riga, dalla (6′),

$$c_{n+1,k} = \frac{\partial H}{\partial p_k^0} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n); \qquad c_{n+1,n+1} = 0\,.$$

Pel nostro scopo basta valutare del determinante

$$\|c_{h,k}\| \qquad (h,\, k = 1, \dots, n+1)$$

i termini di grado minimo rispetto al binomio $t - t_0$; cosicchè intanto appare manifesto che per gli elementi dell'ultima colonna è inutile tener conto dei secondi addendi **(1)**, giacchè essi darebbero luogo a termini di ordine superiore a quelli provenienti complessivamente dai primi addendi. Resta così un determinante orlato che, notoriamente, si riduce ad una forma quadratica negli elementi $\partial H / \partial p_h^0$ degli orli, avente per coefficienti i complementi algebrici degli elementi del determinante non orlato

$$\|c_{h,k}\| \qquad (h,\, k = 1, 2, \dots, n);$$

e qui ancora è evidente che in ciascuno di codesti complementi algebrici il termine di ordine minimo si ha trascurando nei $c_{h,k}$ i secondi addendi **(2)**. In ultima analisi, ove si introduca anche l'Hessiano della funzione hamiltoniana H rispetto alle p_h, cioè

$$\Delta_1 = \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_h \, \partial p_k} \right\| \qquad (h,\, k = 1, 2, \dots, n),$$

e per brevità si ponga

$$\Omega = \left| \begin{array}{c|c} & \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ & \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \Delta_1 & \vdots \\ & \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \hline \frac{\partial H}{\partial p_1} \, \frac{\partial H}{\partial p_2} \cdots\cdots\cdots \frac{\partial H}{\partial p_n} & 0 \end{array} \right|$$

si riconosce che la parte principale del determinante in questione si riduce a

$$(t - t_0)^{n-1} \, \Omega^0 ,$$

dove l'apice ^{0} sta a denotare che alle p_h, q_h vanno sostituiti i loro valori iniziali, e si conclude che la condizione cercata di risolubilità si è che, pei valori iniziali che si vogliono considerare, si abbia

$$\Omega \neq 0 .$$

4. – Oramai ci resta unicamente da riportare alla funzione lagrangiana $\mathcal{L}$ anche quest'ultima condizione, che abbiamo ottenuto in forma per così dire hamiltoniana, in quanto vi compariscono le derivate della H.

A tale scopo osserviamo anzitutto che, in base alla seconda ennupla delle equazioni (5), gli elementi $\partial H/\partial p_h$, che figurano negli orli di Ω, sono senz'altro sostituibili colle $\dot{q}_h$.

D'altra parte, come si sa dai primi elementi della teoria della trasformazione hamiltoniana, i due sistemi di equazioni

$$p_h = \frac{\partial \mathcal{L}(q \mid \dot{q})}{\partial \dot{q}_h}, \qquad \dot{q}_h = \frac{\partial H(p \mid q)}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \dots, n),$$

sono l'uno l'inverso dell'altro, talchè le derivate parziali

$$\frac{\partial p_h}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}, \qquad \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial p_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p_k} \qquad (h, k = 1, 2, \dots, n),$$

costituiscono due sistemi reciproci nel senso della teoria dei determinanti. Segue di qui in primo luogo che, fra i due Hessiani Δ e Δ_1 di $\mathcal{L}$ ed H rispettivamente, intercede l'identità

$$\Delta \Delta_1 = 1 .$$

Inoltre i complementi algebrici degli elementi di Δ_1, vale a dire i coefficienti della forma quadratica nelle $\partial H/\partial p_h = \dot{q}_h$, che dà lo sviluppo del determinato orlato Ω, si ottengono moltiplicando per $\Delta_1 = 1/\Delta$ i corrispondenti elementi di Δ, cioè le $\partial^2 \mathcal{L}/\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k$; cosicchè si ha

$$\Omega = \frac{1}{\Delta} \sum_{1}^{n}{}_{hk} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_h \dot{q}_k ;$$

e per la voluta risolubilità del sistema (8'), (6') rispetto alle p_h^0 e $t - t_0$ basta introdurre accanto alle già ammesse limitazioni *a*) e *b*), la condizione che pei valori iniziali che si considerano si abbia

$$c) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{hk} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_h \dot{q}_k \neq 0 .$$

Naturalmente, se, pur limitandosi alla analisi locale, in un conveniente intorno di una posizione iniziale q_h^0 generica, si vogliono contemplare tutte le traiettorie che partono da essa, in qualsiasi direzione, bisogna accertarsi che la c) sussista (in corrispondenza ai dati valori delle q_h^0) comunque si scelgano le $\dot{q}_h^0$.

In conclusione, *ad assicurare la completa validità dei classici risultati dell'*HAMILTON *circa l'azione variata bastano le tre condizioni* a), b), c), *tutte e tre immediatamente verificabili sulla data funzione lagrangiana* $\mathcal{L}$.

Termineremo osservando che nel caso dinamico (in senso ristretto), in cui $\mathcal{L}$ è del tipo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0 ,$$

dove $\mathcal{L}_2$ ed $\mathcal{L}_1$ denotano due forme nelle $\dot{q}_h$, rispettivamente di grado due ed uno, mentre $\mathcal{L}_0$ dipende dalle sole q, le condizioni a), b), c) sono certamente soddisfatte grazie alla circostanza che la forma $\mathcal{L}_2$ è per sua natura definita positiva.

XVIII.

MOTI GRAVITAZIONALI IN UNA DIMENSIONE

« Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. II (1925),
pp. 365-371.

1. – Consideriamo un mezzo indefinito (per es. pulviscolo cosmico), il quale sia soggetto unicamente alla mutua attrazione delle particelle materiali che lo costituiscono. Facciamo l'ipotesi particolare che, in un certo istante, la densità μ vari per strati piani, paralleli ad una orientazione fissa Oyz: sia cioè μ funzione unicamente della coordinata x. Anche la attrazione newtoniana a (esercitata, in quell'istante, dal sistema sull'unità di massa, in un posto generico x, y, z) sarà una funzione della sola x. In tal caso, purchè la velocità v, nello stesso istante, sia ovunque diretta secondo Ox e funzione pur essa della sola x, è chiaro che il moto del sistema si inizierà e avverrà sempre nel seguito parallelamente all'asse delle x con comportamento rigido dei singoli piani normali a quest'asse.

Si può quindi prescindere dalle coordinate trasversali y, z e limitarsi a considerare il moto rettilineo delle particelle appartenenti ad una generica retta perpendicolare agli strati: diciamo all'asse Ox. Mi propongo di mostrare che si può giungere alla caratterizzazione completa di un tal moto rettilineo per gravitazione, a partire da una distribuzione iniziale arbitraria della velocità e della densità. Lo stesso vale anche per moti rettilinei gravitazionali dotati di simmetria sferica attorno ad un centro; ma di ciò non mi occupo nella presente Nota.

2. – Giova impostare il problema del moto sotto l'aspetto molecolare o lagrangiano, risguardando l'ascissa x di una generica particella e così la sua densità μ quali funzioni del tempo t e dell'ascissa iniziale x_0, assumendosi $t = 0$ come istante iniziale. Le nostre incognite saranno dunque le funzioni $x(t, x_0)$, $\mu(t, x_0)$, che supporremo, ben si intende, nel corso della ricerca, finite, continue e derivabili quanto occorre, riservandoci di riconoscerlo *a posteriori* (in base ad opportune ipotesi concernenti i dati della questione) sulle espressioni esplicite che perverremo ad assegnarne.

In particolare riterremo che, nell'intervallo di tempo cui si riferiscono le nostre considerazioni, interceda corrispondenza *biunivoca* fra x ed x_0, ossia che l'equazione

$$x = x(t, x_0) \tag{1}$$

sia atta a definire x_0 come funzione uniforme di x e di t, anch'essa finita, continua e derivabile.

Con ciò è legittimo associare, quando si voglia, all'impostazione molecolare del moto di cui si tratta, quella locale, e si può intanto — per noi sarà sufficiente — fare intervenire l'aspetto locale della densità, cioè la funzione $\mu(t, x)$ che si ottiene da $\mu(t, x_0)$ sostituendo, al posto di x_0, la sua espressione ricavata dalla (1).

La funzione $\mu(t, x)$ permette di calcolare istante per istante (sotto forma pure locale) l'attrazione newtoniana $a(t, x)$, esercitata dall'intero sistema materiale sopra l'unità di massa nel posto generico x. All'uopo basta ricordare che uno strato piano indefinito di densità uniforme μ e di spessore infinitesimo $d\xi$, cioè di densità superficiale $\mu\, d\xi$, esercita in un punto di ascissa generica x una attrazione elementare (indipendente da x) data in valore assoluto da (1)

$$2\pi f \mu\, d\xi \qquad (f \text{ costante di attrazione universale}),$$

e, naturalmente, rivolta dal punto potenziato di ascissa x verso lo strato potenziante di ascissa ξ. La componente secondo Ox di tale attrazione elementare è per conseguenza $\pm 2\pi f \mu\, d\xi$, valendo il segno superiore per $x < \xi$ e l'inferiore per $x > \xi$.

Sommando i vari contributi elementari risulta

$$a(t, x) = -2\pi f m_1 + 2\pi f m_2\,, \tag{2}$$

ove si è posto, per brevità di scrittura,

$$m_1 = \int_{-\infty}^{x} \mu(t, \xi)\, d\xi\,, \qquad m_2 = \int_{x}^{\infty} \mu(t, \xi)\, d\xi\,. \tag{3}$$

Si è così implicitamente introdotta, fra le specificazioni qualitative da controllare *a posteriori*, anche l'integrabilità della funzione $\mu(t, x)$, rispetto all'argomento x, fino a $\pm\infty$.

---

(1) Cfr. per es. LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1923), p. 507, es. 5, in cui si faccia crescere indefinitamente il raggio R.

Avendo riguardo alle (3), la derivazione della (2) porge

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial x} = -4\pi f\mu , \tag{4}$$

che è manifestamente l'equazione di POISSON per il caso elementare di cui si tratta.

Le quantità m_1, m_2 definite dalle (3) hanno un significato ovvio: m_1 rappresenta la massa totale del sistema (per unità di sezione trasversale) che si trova a sinistra del posto x; m_2 rappresenta l'analoga massa a destra. Essenziale è la circostanza, derivante dal principio di conservazione della massa, che, durante il moto del sistema, rimangono inalterate le masse complessive da una parte e dall'altra di ogni piano sostanziale, cioè sempre costituito dalle stesse particelle materiali. Ne viene che m_1, m_2 sono caratteristiche intrinseche d'ogni particella materiale, ossia non variano col tempo, ma conservano le loro determinazioni iniziali, dipendendo soltanto dalla particella e per essa dalla sua posizione iniziale x_0.

Potremo in conformità ritenere quali espressioni di m_1, m_2 quelle fornite dalla (3) per $t = 0$, ossia

$$m_1 = \int_{-\infty}^{x_0} \mu_0(\xi)\, d\xi , \qquad m_2 = \int_{x_0}^{\infty} \mu_0(\xi)\, d\xi , \tag{3'}$$

dove μ_0 sta a rappresentare la determinazione iniziale della densità.

In base alla (2), anche $a(t, x)$ si conserverà costante per ogni particella, e, designando con a_0 la sua determinazione iniziale, avremo

$$a(t, x) = a_0(x_0) = -2\pi f m_1 + 2\pi f m_2 , \tag{2'}$$

da cui scende tosto la soluzione del problema con mezzi elementari.

3. – Infatti le funzioni incognite $x(t, x_0)$, $\mu(t, x_0)$ devono soddisfare l'equazione dinamica e quella di continuità. La prima, avuto riguardo alla (2'), si scrive

$$\ddot{x} = a_0(x_0) , \tag{5}$$

rappresentandosi al solito con punti sovrapposti le derivazioni sostanziali cioè rispetto a t, quando si tratta x_0 come costante.

L'equazione di continuità lega $\mu(t, x)$ alla sua determinazione iniziale

$\mu_0(x_0)$ per mezzo della prima incognita $x(t, x_0)$, sotto la forma

$$\mu \frac{\partial x}{\partial x_0} = \mu_0 . \tag{6}$$

Essa traduce notoriamente il principio di conservazione della massa, di cui già ci siamo valsi al numero precedente per il calcolo di $a(t, x)$. Del resto tutto è incluso nella condizione differenziale (6), sicchè in particolare la constatazione che m_1, m_2, e quindi $a(t, x)$, sono invarianti rispetto al moto si potrebbe anche conseguire per materiale trasformazione delle (2) nelle (2′), in base alla (6).

4. – La (5) ci dice in primo luogo che *il movimento delle singole particelle è uniformemente accelerato*: però l'accelerazione $a_0(x_0)$ è in generale variabile da particella a particella in dipendenza dalle circostanze iniziali.

Per completare lo studio del moto, assegniamo le espressioni integrali esplicite delle funzioni x e μ.

La (5), integrata una prima volta rispetto a t, a partire dall'istante iniziale $t = 0$, dà

$$\dot{x} = a_0 t + v_0 ,$$

designando $v_0(x_0)$ (costante di integrazione rispetto a t) la velocità iniziale. Questa va considerata un dato della questione assieme alla $\mu_0(x_0)$ che caratterizza la distribuzione iniziale della densità.

Con ulteriore integrazione fra 0 e t, atteso il significato di x_0, si trae

$$x = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0 . \tag{7}$$

Il coefficiente a_0 si desume da μ_0 attraverso le (2′) e (3′); con tale intesa la (7) costituisce l'espressione definitiva della funzione $x(t, x_0)$.

Se ne ricava

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = a_0' \frac{t^2}{2} + v_0' t + 1 ,$$

dove gli apici indicano derivazioni rispetto all'argomento x_0.

La equazione (4) (di Poisson), applicata all'istante iniziale, permette di sostituire a_0' con $-4\pi f \mu_0$, sicchè potremo scrivere

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = 1 + v_0' t - 2\pi f \mu_0 t^2 \tag{8}$$

e ottenere così dalla (6) quale espressione esplicita della densità

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + v_0' t - 2\pi f \mu_0 t^2} . \tag{9}$$

5. – Il procedimento seguito assicura che le funzioni x e μ definite dalle (7) e (9), verificano effettivamente le volute condizioni: equazione di continuità ed equazione dinamica, rimanendo arbitrarie le funzioni $v_0(x_0)$ e $\mu_0(x_0)$, cioè la distribuzione iniziale delle velocità e densità. Basta pensare da un lato che la definizione (9) di μ non è altro che l'equazione di continuità (6); dall'altro che, per quanto si è visto al n. 2, l'attrazione $a(x, t)$, in virtù dell'equazione di continuità, si riduce semplicemente ad $a_0(x_0)$, sicchè la equazione del moto è proprio la (5), in base a cui è stata costruita la espressione (7) di x, c. d. d.

Si intende che la soluzione trovata rimane valida finchè sussistono le presupposte condizioni di comportamento qualitativo (continuità, derivabilità, integrabilità della $\mu(t, x)$ rispetto ad x fino a $\pm\infty$).

La (7) mostra in primo luogo che tutto va bene per quanto concerne la funzione $x(t, x_0)$, non appena i dati iniziali posseggono i requisiti suddetti. L'equazione di continuità o, ciò che è lo stesso, la (9) assicura poi che lo stesso vale per μ *finchè rimane diverso da zero il denominatore* $\partial x/\partial x_0$, dato esplicitamente dalla (8), ossia finchè si ha corrispondenza biunivoca fra x_0 ed x (posizione iniziale e posizione attuale).

Essendo $\partial x/\partial x_0$ eguale all'unità per $t = 0$, si può intanto affermare che *il moto del sistema è sempre regolare per t abbastanza piccolo.* Ma risulta altresì dalla (8) che in nessun caso la regolarità può permanere indefinitamente al crescere di t. Questo perchè il coefficiente $-2\pi f \mu_0$ di t^2 in $\partial x/\partial x_0$ è negativo e il termine noto positivo, sicchè esiste una (e una sola) radice positiva t_1 della equazione di secondo grado

$$1 + v_0' t - 2\pi f \mu_0 t^2 = 0 . \tag{10}$$

Nell'ipotesi che la velocità iniziale sia nulla o uniforme, con che $v_0' = 0$, si ha

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi f \mu_0}} .$$

Se per esempio si trattasse di materia cosmica (molto diluita), avente una densità comparabile a quella della nebulosa dell'Orsa Maggiore, $\mu_0 = 3.6 \cdot 10^{-17}$, essendo, in unità C.G.S., $f = 6.7 \cdot 10^{-8}$, risulterebbe

$$t_1 = 8166 \text{ anni (solari).}$$

6. – Vale la pena di indagare quali sono, per date circostanze iniziali, le eventuali posizioni x_0 in cui, prima che altrove, il moto cesserà di essere regolare: sono queste manifestamente le sezioni più esposte a scissioni o frazionamenti del sistema materiale. Chiameremo *ascisse critiche* queste eventuali x_0. In corrispondenza ad esse la radice positiva t_1 della (10) deve avere un valore minimo, il che, nei casi comuni [2], equivale a $dt_1/dx_0 = 0$, $d^2t_1/dx_0^2 > 0$. Ne consegue, derivando la (10) (che diviene una identità per $t = t_1$) e riferendosi ai valori suddetti,

$$v_0'' t_1 - 2\pi f \mu_0' t_1^2 = 0$$

ossia, in quanto, per la (10) stessa, $t_1 > 0$,

$$v_0'' - 2\pi f \mu_0' t_1 = 0 \,. \tag{11}$$

L'eliminazione di t_1 dà l'*equazione delle ascisse critiche*

$$2\pi f \mu_0'^2 + v_0' v_0'' \mu_0' - \mu_0 v_0''^2 = 0 \,. \tag{12}$$

Si ha d'altra parte, derivando la (10) due volte rispetto ad x_0 e ponendovi, a derivazione eseguita, $t = t_1$, $dt_1/dx_0 = 0$,

$$v_0''' t_1 - 2\pi f \mu_0'' t_1^2 + (v_0' - 4\pi f \mu_0 t_1) \frac{d^2 t_1}{dx_0^2} = 0 \,, \tag{13}$$

che, tenuto conto delle precedenti, deve rendere $d^2t_1/dx_1^2 > 0$.

Nel caso particolare di una distribuzione iniziale di velocità a gradiente uniforme ($v_0'' = 0$) (in cui è naturalmente inclusa l'eventualità che sia addirittura costante o nulla la velocità iniziale), la (12) si riduce a $\mu_0' = 0$, e la (13), tenuto conto della (10), può essere scritta

$$\left\{\frac{1}{t_1} + 2\pi f \mu_0 t_1\right\} \frac{d^2 t_1}{dx_0^2} + 2\pi f \mu_0'' t_1^2 = 0$$

che porge per d^2t_1/dx_0^2 un valore positivo allora e allora soltanto che $\mu_0'' < 0$.

---

[2] Lascio così da banda gli eventuali minimi unilaterali che potrebbero presentarsi agli estremi, qualora il campo occupato dal sistema materiale non invadesse tutta la retta, ma fosse limitato a uno o più segmenti di essa (cfr. l'es. del n. 7); nonchè la circostanza eccezionale di annullamento simultaneo delle due prime derivate. Per questi casi si richiederebbe una piccola discussione supplementare

Le sezioni critiche sono quindi in tal caso quelle di densità massima, come è del resto intuitivo, qualora si pensi che essendo in gioco esclusivamente la mutua attrazione, è soltanto l'indefinita costipazione di materia che può compromettere la regolarità del moto.

7. – Rientra naturalmente nelle considerazioni precedenti anche una distribuzione iniziale che occupi soltanto un segmento finito dell'asse Ox.

Anche in tale ipotesi si può, volendo, rispettare la continuità della funzione $\mu_0(x_0)$ e magari delle derivate μ_0', μ_0'' che abbiamo fatto intervenire nelle considerazioni del numero precedente. Basta assumere μ_0 nulla, eventualmente assieme a μ_0', μ_0'', agli estremi del detto segmento e diversa da zero nell'interno. Ma questo non è essenziale per la validità delle espressioni integrali (7) e (9), richiedendosi soltanto, se μ_0 presenta una qualche discontinuità, di tenerne debito conto nella discussione delle sezioni critiche.

Comunque, conveniamo di indicare con A e B le particelle materiali che costituiscono gli estremi del segmento; con α e β $(>\alpha)$ le loro ascisse iniziali.

Dalle espressioni (2') di a_0 e (3') di m_1, m_2 risulta in questo caso che, per $x_0 \leqslant \alpha$, $a_0(x_0)$ ha il valore costante $2\pi fm$, mentre, per $x_0 \geqslant \beta$, ha il valore opposto $-2\pi fm$, m designando la massa totale del sistema.

Dopo ciò dalla (7) o, più direttamente, dalla (5) risulta che le particelle A e B, coda e fronte del sistema materiale, sono animate dalle accelerazioni rispettive $2\pi fm$, $-2\pi fm$, dirette entrambe verso l'interno del sistema. Più specificamente si ha dalla (7), applicandola a B e ad A e facendo la differenza,

$$s = s_0 + w_0 t - 2\pi f m t^2 \,,$$

dove s designa la lunghezza del segmento AB all'istante t, s_0 la sua lunghezza iniziale, e w_0 la velocità iniziale (relativa) di B rispetto ad A. Ben si intende che ciò vale nei limiti di regolarità del moto indicati al n. 5.

XIX.

COMMEMORAZIONE DEL SOCIO NAZIONALE PROF. G. RICCI-CURBASTRO

« Mem. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. I (1925),
pp. 555-564.

Nella prelezione al corso di Fisica matematica, tenuta addì 8 Gennaio 1881 all'Università di Padova (¹), il prof. GREGORIO RICCI-CURBASTRO, dopo aver tratteggiati alcuni importanti indirizzi, così si esprimeva:

« Voi intendete quindi di quali immensi vantaggi possano questi metodi essere fecondi specialmente per avvicinarsi a quello che è da tanto tempo il fine supremo degli sforzi dei fisici: voglio dire l'unità della scienza, cioè la scoperta delle relazioni che legano tra loro diversi fenomeni naturali e le cause da cui dipendono ».

Essenziale contributo a così eccelsa finalità recò più tardi Egli stesso, creando un metodo nuovo, il calcolo differenziale assoluto, che permise all'EINSTEIN di dare forma matematica alla sua relatività generale.

Basterebbe questo semplice accenno a rivelare le grandi benemerenze del Nostro; ma sarà lecito a me, che ebbi la fortuna e l'onore di essere suo discepolo prediletto, poi per oltre vent'anni collega a Padova, e per più ancora a Lui avvinto da amicizia costante e devota, che solo la morte poteva spezzare, di rievocare dinanzi a Voi il rimpianto Consocio, in cui pari alla potenza dell'intelletto fu l'elevatezza morale, l'austerità del carattere, la serenità dei giudizi.

* * *

Apparteneva Egli a nobile e cospicua famiglia di Romagna. Nacque in Lugo il 12 Gennaio 1853 da Antonio e da Livia Vecchi. Fece privatamente gli studi elementari e classici assieme al fratello Domenico acquistando solida coltura umanistica e sicura conoscenza dei primi elementi

---

(¹) Non fu stampata. Il manoscritto, rintracciato fra le carte del Nostro, fu gentilmente messo a mia disposizione dalla famiglia.

di matematica e di fisica. Nel 1869 superò brillantemente l'esame di ammissione al corso filosofico-matematico dell'Università di Roma.

L'avviamento alle discipline matematiche non fu mai oggetto di dubbi o di esame in famiglia: da un lato Egli, che pur si era dimostrato ottimo scolaro in tutto, amava la matematica anche se non aveva ancora scorte le sue attitudini eccezionali; d'altro lato i suoi consideravano ben naturale che venisse prescelto questo ramo di studi, il quale, almeno nel suo indirizzo applicativo, si trovava egregiamente rappresentato nelle tradizioni domestiche. Era infatti il padre valente ingegnere e la madre figlia di quel Gregorio Vecchi, allievo del Venturoli, che fu il primo professore di Idrometria nella Scuola Pontificia degli ingegneri in Roma, e poscia ingegnere capo della provincia di Bologna.

Verso il '70 il valore dei docenti e il livello degli studi scientifici non era, a dir vero, molto elevato nell'ateneo romano. Il Nostro, dopo avervi seguito il primo corso di matematica, se ne tornò a casa, rimanendovi alcun tempo per desiderio del padre, le cui convinzioni erano state gravemente turbate dagli avvenimenti del Settembre 1870. Nel 1872 si iscrisse all'Università di Bologna, e di là passò a Pisa, attratto dalla fama di quella Scuola Normale Superiore, dove, in seguito a concorso, entrò come alunno esterno nel 1873.

Ebbe quivi a maestri il BETTI, il DINI e il PADOVA, col quale ultimo strinse più tardi fraterna amicizia.

Nel 1875 compilò con molta cura una dissertazione di carattere monografico sulle ricerche del FUCHS relative alle equazioni differenziali lineari, e conseguì a pieni voti e lode la laurea in scienze fisiche e matematiche. Nell'anno successivo fu dalla Scuola Normale abilitato all'insegnamento secondario, presentando una seconda dissertazione di argomento affine, e precisamente sopra una generalizzazione del problema di RIEMANN concernente le funzioni ipergeometriche. Anche questa dissertazione rimase manoscritta, pur contenendo osservazioni e deduzioni originali. Del resto la caratteristica del suo pensiero matematico di affrontare le questioni per la via logicamente più diretta, già si rileva in questi scritti giovanili; ma non meno evidente è il disinteressato amore alla scienza e l'elevata serietà dei suoi propositi che lo spinge a studiare ancora senza assillo di ricerche personali. Ben si intende del resto che un ingegno della sua tempra, nutrito oramai di larga e ben assimilata coltura, non poteva a lungo accontentarsi di rimaneggiare le idee altrui, e doveva a un certo momento sentire spontaneo e possente il bisogno di lavoro originale. Ma ciò venne per gradi. Primo incentivo a pubblicare gli fu offerto dai corsi del BETTI e del DINI, che frequentò anche nell'anno scolastico 1876-77, essendogli stata conferita la borsa di studio Lavagna. Fu allora che il BETTI, avendo avuto occasione di apprezzare lo squisito rigore logico e la lucida penetrazione di quel suo uditore, lo pregò di riassumere in alcuni articoli del « Nuovo Cimento » le leggi ponderomotrici ed elettromotrici di circuiti galvanici quali risultano da un lato dalle formule di azione elementare di F. NEUMANN, di RIEMANN e di CLAUSIUS e dall'altro dalla teoria di MAXWELL, collegandovi alcune osservazioni meccaniche svolte dallo stesso BETTI nel corso di quell'anno. Tali articoli forniscono una sintesi concettosa e mirabilmente precisa delle questioni esaminate.

Un altro suo lavoro, apparso durante lo stesso periodo nel « Giornale di Matematica », risente invece l'influenza del DINI: esso si riferisce all'aggiunta di LAGRANGE di un'equazione differenziale lineare, e indaga le relazioni di comportamento dei rispettivi integrali nell'intorno di un punto singolare, deducendone in particolare e senza alcun calcolo che, se una equazione è riducibile (nell'ambito delle funzioni uniformi), lo è del pari la sua aggiunta.

Riuscito vincitore nel concorso per posti di perfezionamento all'estero nel 1877-78, il RICCI si recò a Monaco e vi seguì assiduamente i corsi dei professori KLEIN e BRILL.

Il KLEIN, fervido suscitatore di idee e di ricerche nei giovani matematici, che fin da allora cominciavano ad accorrere alla sua scuola, prese a stimare il Nostro e fu da Lui ricambiato della più deferente e affettuosa ammirazione. Ma se pure il KLEIN ebbe influenza benefica sullo sviluppo ulteriore del suo pensiero matematico, l'eventuale stimolo si trasfuse così nella sua personalità che non ne rimane traccia appariscente, a differenza di quanto si riscontra in altri, pure illustri, scolari dello stesso KLEIN.

Nel successivo anno scolastico 1879-80 tornò a Pisa in qualità di assistente straordinario alla cattedra di Calcolo, di cui era titolare il DINI.

In seguito a pubblico concorso fu nominato professore straordinario di Fisica matematica nella Università di Padova, a decorrere dal 1° dicembre 1880.

L'arrivo alla cattedra fu pel Nostro fulgido inizio di magnifica operosità scientifica. Dapprima gliene porse occasione il suo corso, pel quale approfondì le proprietà e l'uso della funzione di GREEN nella teoria del potenziale; e successivamente l'equivalenza fra correnti galvaniche (invariabili nel tempo) e magneti permanenti. Alla espressione matematica di tale equivalenza egli perviene con grande semplicità e generalità per diretta trasformazione dei potenziali rispettivi. Questi risultati furono comunicati all'Istituto Veneto negli anni 1882, 1885.

* * *

Ma già si affacciavano alla sua mente fondamentali problemi di analisi e di geometria differenziale che, attraverso sforzi poderosi e belle indagini preliminari, dovevano condurlo alla scoperta e all'affinamento progressivo di quel calcolo che oggi porta il suo nome [2].

I primi saggi in argomento si riferiscono alla costruzione dei parametri e degli invarianti differenziali e alla classificazione delle forme quadratiche. Sviluppando le idee contenute in queste prime memorie, il RICCI ha man mano ideato e perfezionato gli algoritmi che ne scaturiscono. Egli si è proposto di modificare gli ordinari procedimenti del calcolo differenziale in guisa che le formule e i risultati sussistano sempre sotto una stessa forma, qualunque sia il sistema di variabili di cui si fa uso.

Ciò si raggiunge purchè da un lato si operi (come Egli mostrò essere nella natura delle cose) sopra sistemi di funzioni che si comportano, quando si cambia variabili, come i coefficienti di forme che siano per il loro significato o si assumano per convenzione indipendenti dall'accidentalità della scelta delle variabili; e d'altro lato si introduca un qualche elemento, il quale sia egualmente invariante e funga da *assoluto* (donde il nome del calcolo), cioè si possa far intervenire anche nelle operazioni da eseguire sopra gli altri sistemi.

La applicazione più feconda si ha quando, per l'indole stessa della materia che si studia, ha particolare importanza una forma differenziale quadratica: tale, in geometria, quella con cui si esprime la distanza elementare di due punti; in meccanica, la forza viva; in relatività, l'intervallo elementare di due eventi nello spazio-tempo.

Conviene allora assumere come assoluto codesta forma; e sorge lo strumento essenziale del nuovo calcolo, cioè la derivazione covariante che ha le caratteristiche essenziali della derivazione ordinaria, ma in più rispetta il comportamento invariantivo (di fronte a cambiamenti qualisivogliono di variabili) dei sistemi cui viene applicata.

Una tale derivazione era stata, per vero dire, segnalata dal CHRISTOFFEL fin dal 1869, ma soltanto dal RICCI fu concepita e maneggiata come strumento autonomo di calcolo. Essa gli permise tosto di ridurre, con inattesa perspicuità ed eleganza, al campo puramente algebrico il problema degli invarianti differenziali e dei parametri spettanti ad una forma quadratica e altre di qualsiasi grado ad essa associate; nonchè di assegnare sotto veste compendiosa le condizioni per l'esistenza di integrali ortogonali per una equazione alle derivate parziali del primo ordine, ciò che comprende come caso particolare la teoria dei sistemi tripli ortogonali dello spazio ordinario.

A proposito di questa prima fase di una produzione che solo in seguito

---

(2) Mi basti ricordare il libro di J. A. SCHOUTEN intitolato appunto *Der Ricci-Kalkül* (Berlin, Springer, 1924).

apparve per unanime consenso memorabile, esistono due istruttive relazioni del BELTRAMI e del BIANCHI sui concorsi ai premi reali di matematica per gli anni 1887 (3) e 1901 (4), che ho naturalmente tenute presenti nel redigere questi cenni.

Gli studi compiuti dal RICCI a tutto il 1886 furono dal BELTRAMI qualificati « importanti » con questo giudizio riassuntivo: « ci sembra... rappresentino un poderoso sforzo di elaborazione preparatoria, sforzo che in parte apparisce già conducente ad una meta onorevole, in parte aspetta la sua giustificazione finale da ulteriori cimenti, nei quali forse il primitivo ed assai complesso apparato analitico potrà essere definitivamente surrogato da più semplici algoritmi esecutivi ».

In tali apprezzamenti si manifesta lo spirito insieme illuminato e prudente del BELTRAMI: riconoscimento esplicito del valore intrinseco dei nuovi trovati, ma cauta riserva, pur con benevola aspettativa, circa la loro capacità di condurre ad alta meta.

Invero la fiducia preventiva non è, nè deve essere elemento di giudizio; ma non mancò al Nostro come incessante incitatrice delle sue ricerche.

Attese Egli dapprima, per lungo volgere di anni, a mostrare la fecondità dei suoi metodi affrontando particolari questioni attinenti alle superficie, quali ad esempio la caratterizzazione intrinseca dei ds^2 riducibili in più modi alla forma di LIOUVILLE, ovvero spettanti a quadriche. Presentò anche, in un corso, disgraziatamente soltanto litografato in piccolo numero di esemplari e da lungo tempo esaurito, l'intera dottrina delle superficie dello spazio ordinario, riattaccandola ai suoi metodi con attraente sobrietà e ingegnosi, elegantissimi espedienti, che valsero a rendere agile e penetrante il calcolo assoluto in due variabili.

Ma molto più che nel campo dell'ordinaria geometria infinitesimale delle superficie si rendono evidenti i vantaggi di un tale calcolo, quando intervengono tre o più variabili indipendenti. A dirigere le ricerche con criteri sicuri, uniformi e ridotti alla massima semplicità soccorre essenzialmente la teoria delle congruenze ortogonali di linee in una varietà riemanniana V_n. Questo sussidio di capitale importanza generalizza, conferendogli assai maggiore potenzialità, il triedro mobile dello spazio ordinario. Mercè l'introduzione dei coefficienti di rotazione e delle congruenze canoniche rispetto ad una congruenza assegnata, pensamenti geniali e profondi, trae Egli partito da svariate intuizioni ed immagini della geometria intrinseca erigendola in vero strumento di calcolo.

Così nel 1895, dopo circa un decennio di meditazione indefessa e di

(3) Nei « Rendiconti » di questa Accademia, ser. IV, vol. V (1° sem. 1889), pp. 304-307.
(4) « Rendiconto dell'adunanza solenne del 1° giugno 1902 », pp. 147-149.

successivi apporti (non ritocchi, chè il lavoro del RICCI non ne richiedeva), il calcolo assoluto raggiunse la sua piena e rigogliosa maturazione.

Poco appresso l'attenzione del Nostro fu attratta da una questione che, a sua insaputa, era stata proprio allora posta a concorso dalla Società Jablonowski di Lipsia: la questione cioè di caratterizzare mediante proprietà di curvatura gli spazi a tre dimensioni dotati di un gruppo di movimenti. Il BIANCHI ne assegnava per suo conto le forme canoniche, senza però esaminare l'aspetto invariantivo del problema, il quale quadra perfettamente nel campo dominato dal Nostro.

Dopo aver ritrovare ed illustrate le curvature principali (di cui avevano fatto cenno in precedenza il SOUVOROFF e lo SCHUR), Egli, partendo dalle equazioni fondamentali del KILLING debitamente trasformate, giunse a stabilire in modo completo i criteri richiesti, che nel caso dei gruppi transitivi assumono una forma singolarmente semplice ed espressiva.

Con tale egregio bagaglio di titoli affrontò il RICCI il concorso al premio reale di matematica pel 1901. Il premio non fu conferito nè a a lui, nè ad altri, osservandosi a suo riguardo che « gli algoritmi da lui sviluppati si dimostrano utili ma non indispensabili nel trattare varie questioni di matematica ». Mai il RICCI ebbe a muoverne lagno, ma conservò immutato il convincimento (allora poco più che solitario) di avere effettivamente dotata la matematica di un fecondo campo di dottrine.

Ancora tre lustri dovettero passare prima che il mondo scientifico ne avesse la prova, attraverso la relatività generale dell'EINSTEIN, la quale divenne anche per Lui « giusta di glorie dispensiera ».

* * *

Ma riprendiamolo ancora nella sua quieta esistenza di Padova, dopo che vi ebbe conquistata la cattedra di Fisica matematica.

Circondato subito dalla stima affettuosa dei colleghi, si legò intimamente al D'ARCAIS, di poco più anziano di Lui e che, al pari di Lui, era stato per qualche tempo assistente del DINI. Quando poi nel 1882 ERNESTO PADOVA fu per suo desiderio trasferito da Pisa alla cattedra di Meccanica superiore dell'Università di Padova, l'antico maestro e nuovo collega di una materia tanto affine divenne rapidamente carissimo amico. Sebbene, come si è detto, in questi anni sia stata intensa la sue operosità didattica, e la sua mente fosse vôlta di preferenza a quegli studi onde poi sorse e prosperò il calcolo assoluto, non rimase Egli chiuso nella cerchia contemplativa dello scienziato, ma partecipò attivamente alla vita amministrativa della sua Lugo come consigliere provinciale e comunale. Fu così tratto a occuparsi anche di idraulica pratica, come tra altro attestano due belle relazioni: una, ricca di notizie storiche, al Consiglio Provinciale *Sulle condizioni idrauliche della campagna a destra di Reno-Primaro e sui provvedimenti atti a migliorarle* (5), e l'altra al Consiglio Comunale sopra una proposta di acquedotto (6).

Solo molto più tardi si diede mano ai lavori di bonificazione secondo il progetto da Lui sostenuto nella prima relazione, che implicava essenzialmente una botte sotto il Santerno.

Ben sapendo di aver dato, con questo scritto e con assiduo interessamento per lunghi anni appresso, efficace impulso a tale opera, lo accennò con legittimo compiacimento ai figliuoli quando nel 1924 visitò assieme ad essi quelle zone, almeno in parte, già bonificate.

Nell'agosto 1884 si unì in matrimonio colla nobile signorina Bianca Bianchi Azzarani di Imola, così che gli arrise completa la felicità domestica. Amava la moglie, al pari di Lui, la vita ritirata e tranquilla di una casa che essa andava abbellendo con raffinato gusto d'arte.

Due figli e una figlia allietarono questa unione che nulla turbò mai, ma fu prematuramente troncata nel 1914 da un tumore maligno che trasse la signora alla tomba in breve volger di tempo.

* * *

Come ben sapete, dalla formazione del Regno d'Italia fino a tutto il secolo scorso, si ebbero nelle nostre Università ruoli separati per i professori ordinari e per gli straordinari. Così accadeva che la promozione ad ordinario, dipendendo da vacanza di posto in un organico molto ristretto, presentasse le più grandi disparità individuali.

Alcuni pochi riuscivano a conseguirla dopo il triennio di rito: l'attesa media era più lunga; ma accadeva talora che la longevità dei colleghi e il loro attaccamento ad una determinata sede ne bloccassero il ruolo per molto tempo.

Particolarmente ritardata da una tale situazione fu la carriera del Nostro, che rimase straordinario ben dieci anni, e potè essere promosso con decorrenza 1° dicembre 1890 allora soltanto che il ministero cedette finalmente alle reiterate istanze della Facoltà di Scienze di Padova e le accordò un posto di ordinario in soprannumero, a condizione che la Facoltà rinunciasse al posto di straordinario che in quel mentre si rendeva vacante per il passaggio a Genova del professore di Algebra complementare, GIOVANNI GARBIERI. Così fu che il RICCI assunse la cattedra di Algebra col grado di ordinario, conservando per incarico il suo antico corso di Fisica matematica.

---

(5) Faenza: Conti, 1881 (di pagine 36).

(6) *Sulla proposta di condurre a Lugo le acque delle Vallette.* Lugo: Cremonini, 1908 (di pagine 41).

Non gli tornò sgradito l'onere di un doppio insegnamento, nè in particolare il contatto con larga massa di studenti, cui lo ponevano le lezioni di analisi algebrica. Alla preparazione di queste diede opera solerte cercando di raggiungere la massima spontaneità concettuale. Ne sorse, dopo ulteriori perfezionamenti suggeritigli dall'esperienza didattica, una nuova esposizione della teoria dei numeri reali secondo il concetto di DEDEKIND, la quale, quando si sviluppino, come Egli fece, tutti i particolari, raggiunge non soltanto grande perspicuità, ma anche maggiore unità di altre trattazioni che più o meno si scostano dal criterio rigido della ripartizione in due classi di tutti i numeri razionali.

Quel suo corso d'algebra, che mi fu dato di ascoltare quando Egli lo professò per la prima volta e che mi rimase poi sempre impresso quale modello di ragionamenti impeccabili e di fruttuosa palestra matematica, fu poco appresso dato per intero alle stampe. Ma subì in seguito rimaneggiamenti profondi, quando, per accordo intervenuto, a Padova prima che altrove, fra la Facoltà di Scienze e la Scuola d'Ingegneria, si convenne che, sacrificando qualche capitolo dell'algebra tradizionale, il corso del 1° anno fosse prevalentemente destinato a fornire gli elementi essenziali del Calcolo e a mettere i giovani in grado di frequentare con profitto nel secondo anno non soltanto la parte più progredita e le applicazioni del Calcolo, ma altresì l'intero programma di Meccanica razionale.

Il nuovo corso, rivolto a queste finalità, andò trasformandosi e fu più volte raccolto in dispense litografate; ma, negli ultimi anni della sua vita, fu da Lui stesso considerato maturo per la stampa. La pubblicazione è imminente coi tipi dell'editore Milani di Padova, avendo l'Autore medesimo curata quasi interamente la revisione delle bozze.

Anche in questo libro scolastico c'è più che una esposizione originale: ricorderò non foss'altro la riduzione sistematica al numerabile nella teoria degli integrali definiti, che era stata del resto già in precedenza segnalata dall'A. in apposita nota.

Le lezioni orali del RICCI non erano vivaci, ma mirabili per precisione e castigata fluidità di forma: chi le avesse stenografate, nulla avrebbe trovato da cambiare nel trascriverle. Chi seguiva con attenzione coglieva il nocciolo delle questioni, sempre prospettate con grande generalità, pur prescindendo da ogni evidente sottigliezza, e sentiva tutto il vigore di quel lucido intelletto.

Questa limpidezza di pensiero, che si estrinsecava con eloquio familiare e pur pieno di dignità, rendeva desiderato il suo avviso anche fuori del campo scientifico; non soltanto nei consigli di Facoltà, della quale fu preside dal 1900-01 al 1907-08, e nel senato accademico; ma anche nelle pubbliche amministrazioni. Come giovanissimo in Romagna, così pure a Padova fu dai cattolici portato nelle elezioni amministrative. Divenuto consigliere comunale, appena si presentò una opportuna situazione (di coalizione o di partito) fu assessore, prima alla pubblica istruzione, poi alle finanze, uffici che tenne con zelo ed equità impareggiabili, riconosciuti non soltanto dagli avversari, ma, ciò che è anche più raro, dagli stessi diretti dipendenti. Pregato più volte insistentemente di accettare la carica di Sindaco declinò sempre perchè, nel suo bell'equilibrio di pensatore e di cittadino, non permise mai che l'uno assorbisse l'altro in modo completo, e fu ventura per la matematica, che ebbe così da Lui nuovi risultati.

* * *

Il calcolo assoluto, ben costituito fin dal 1895, aveva avuto nel 1899, per incitamento del Klein, una esposizione riassuntiva, intesa a mettere lo strumento alla portata di chiunque ne avvertisse il bisogno. Ma per parecchi anni ancora se ne servirono quasi esclusivamente l'inventore e pochi suoi scolari. Il Ricci, dopo aver ripresa con questi metodi la teoria dell'applicabilità delle superficie nell'indirizzo di Weingarten, trasse da essi proprietà metriche assai riposte degli iperspazi. Ci limiteremo a ricordare quel tensore doppio, proveniente per saturazione di due indici dal tensore di Riemann, che dà luogo alle curvature principali e loro media e che oggi è classico in relatività (cioè in particolare per le varietà a quattro dimensioni che conglobano spazio e tempo), sotto il nome di tensore G_{ik} di Einstein.

Non meno belle dal punto di vista matematico, se pur inferiori per portata speculativa, sono le sue ricerche sulle varietà a tre dimensioni che godono di proprietà intrinseche assegnate *a priori*. Si tratta di problemi ben definiti, di enunciato semplice, dei quali tuttavia la impostazione coi mezzi ordinari si presenterebbe di disperante complessità: il Nostro perviene con analisi sottile a classificarli e a risolverli in modo esauriente.

* * *

Ed eccoci finalmente, quando il Ricci aveva già varcata la sessantina, alla più brillante e incontrastata affermazione del suo calcolo assoluto.

L'Einstein, dopo aver creato nel 1905 la relatività ristretta, suscitando fervide ammirazioni e largo, se non universale consenso, a differenza dei suoi continuatori che accettarono come definitiva la sua prima concezione dello spazio-tempo, fu tosto dominato dal desiderio di modificarla quanto occorresse per attribuirle forma invariante: alle leggi della meccanica di fronte a riferimenti animati da moto qualsiasi e, più generalmente, alle leggi della fisica per qualisivogliono coordinate di spazio e di tempo.

In un certo senso la questione era già risoluta, secondo lo schema classico in cui il tempo sta a sè, dalle equazioni di LAGRANGE per la meccanica, dai contributi di JACOBI, LAMÉ, BELTRAMI, PADOVA, HERTZ, VOLTERRA per altri ordini di fenomeni.

I metodi del RICCI avrebbero d'altra parte agevolmente effettuata, anche per la relatività della prima maniera, la trasformazione in coordinate generali (sia di spazio che di tempo), assumendo come forma fondamentale il ds^2 quaternario che esprime l'intervallo elementare.

Ciò ebbe a rilevare esplicitamente il sig. KOTTLER nel 1912 (7).

Ma EINSTEIN mirava a rendere solidali tutti i fenomeni fisici, collegandovi geometria e gravitazione. Di qua il necessario abbandono di quel tale ds^2 dato *a priori*, per sostituirlo con altra determinazione metrica quadridimensionale, *a priori* incognita, influenzabile dalle circostanze esterne (elettromagnetiche, ottiche, termiche, ecc.) e reagente sopra di esse nel duplice aspetto di materia e d'ambiente.

Come tradurre in formule precise così audace aspirazione? MARCELLO GROSSMANN, che era allora (1912) collega dell'EINSTEIN al Politecnico di Zurigo, ebbe il felice intuito che il mezzo acconcio doveva essere il calcolo assoluto. E vi attirò l'attenzione dell'EINSTEIN, collaborando con lui ad un primo abbozzo di queste nuove vedute (8). EINSTEIN, impadronitosi dell'algoritmo, non tardò a piegarlo all'espressione completa delle sue straordinarie divinazioni, culminate nella costruzione delle celebri equazioni gravitazionali, le quali, in uno schema idealmente sintetico della natura, fornirono tra altro quella spiegazione conseguente dello spostamento del perielio di Mercurio, che da tempo si cercava indarno nell'ambito della meccanica newtoniana.

Le equazioni gravitazionali rappresentano — sono parole dell'EINSTEIN — un vero trionfo dei metodi di calcolo creati dal RICCI.

Ecco il grande cimento, preconizzato dal BELTRAMI, in cui (mancando il sussidio di riferimenti particolari) il calcolo del RICCI riuscì non soltanto utile, ma veramente indispensabile!

Fu detto a ragione che, come APOLLONIO di Perga, colle sue investigazioni astratte sulle sezioni del cono, preparò il substrato matematico alle scoperte astronomico-meccaniche di KEPLERO, di GALILEO e di NEWTON, così fece il RICCI per la relatività generale. Ma l'opera di APOL-

(7) Cfr. *Über die Raum-Zeit-Linien der Minkowskischen Welt*, Wiener Ber., IIa, B. CXXI pp. 1659-1759.

(8) Cfr. *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*, Leipzig, Teubner, 1913.

LONIO rimase infruttuosa per circa 18 secoli. Più fortunato potè il Nostro assistere ad una superba realizzazione delle sue ricerche.

Profondamente stimato da alcuni pochi, Egli era rimasto in precedenza ignoto ai più, anche pel suo carattere riservato e alieno, nonchè dal farsi largo, altresì dalle forme intensive di comunicazione scientifica che si accompagnano alla vita moderna, quali frequenti viaggi e contatti personali; intervento a congressi; conferenze; distribuzioni relativamente larghe di lavori; pubblicazione di Note preventive e di riassunti.

Avvenne così che il riconoscimento ufficiale del suo merito insigne fu piuttosto lento anche nell'ambiente accademico, nè ebbe da parte del Governo sanzione adeguata. Entrò Egli bensì all'Istituto Veneto fin dal 1892 (e ne fu presidente nel biennio 1916-17, 17-18), ma soltanto in data recente fu ascritto alla R. Accademia di Torino (1918), alla Società dei XL (1921), alla R. Accademia di Bologna (1922), alla Accademia Pontificia (1925). La stessa Accademia di Padova appena nel 1905 lo nominò socio corrispondente, effettivo nel 1915. La nostra Accademia, che si allieta di avere avuto le prime comunicazioni dei principali risultati da Lui scoperti, Lo elesse corrispondente nel 1899, socio nazionale nel 1916.

La relatività Lo rivelò anche al gran pubblico, assicurando ai suoi metodi l'attenzione dei cultori più insigni di matematica e di fisica. I lavori che vi si ispirano e i libri che ne trattano si contano oramai a migliaia; e gia è segnato nella storia della scienza il posto luminoso che spetta all'opera sua.

Padova e Lugo, le due città in cui tutta intera si svolse la sua preziosa attività di eminente matematico, di maestro esemplare, di amministratore sagace, si apprestano ad onorarne la memoria con lapide, o busto, o altro monumento statuario, onde resti tangibile attestazione della riconoscenza universitaria e cittadina.

* * *

Mancò ai vivi addì 6 Agosto 1925 in una clinica di Bologna. Vi era entrato il 21 Luglio, a doveri scolastici compiuti integralmente, sebbene risentisse vera sofferenza dalle lunghe sedute d'esame, cui si sobbarcava contro l'esplicito divieto del medico. Nella clinica subì un atto operativo per liberarsi di un disturbo vescicale che da qualche anno Lo tormentava e che Gli andava causando dolori sempre più acuti, pur non avendo carattere allarmante. L'intervento chirurgico Lo sollevò nel modo più soddisfacente. Già aveva ripreso ad alzarsi ed era felice della ricuperata salute che Gli avrebbe consentito di dedicarsi con lena rinnovata alle sue ricerche favorite. Ma il cuore non resse, e un improvviso attacco di angina pectoris infranse in poche ore la robusta sua fibra.

Sempre in silenzio esercitò largamente la carità. Ben si accorda con ciò il suo testamento, nel quale esorta con tenerezza commovente i suoi figli a essere prodighi in beneficenza. Raccomandò funerali senza pompa, disponendo che la tomba di famiglia nel cimitero di Lugo rechi a ricordo di sè una semplice lapide con professione ardente di fede cattolica, l'intera sua vita essendo riassunta nella notizia:

Fu per ... (9) anni professore di matematica all'Università di Padova.

Esempio edificante di modestia in un uomo che pur ebbe giusta coscienza di aver legato perennemente il suo nome al calcolo differenziale assoluto e alle sue applicazioni grandiose.

---

(9) Quarantacinque.

XX.

IL PRINCIPIO DI DOPPLER E LA IPOTESI BALISTICA DELLA LUCE

Nota di O. M. CORBINO e T. LEVI-CIVITA (*)

« Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. III (1° sem. 1926), pp. 705-714.

La interpretazione dei fenomeni ottici secondo la teoria classica fornisce uno schema cinematico assai semplice per spiegare il principio di DOPPLER e il conseguente spostamento delle righe spettrali emesse da una sorgente in moto. Tale spostamento risulta collegato alla velocità relativa di avvicinamento o di allontanamento della sorgente e dell'osservatore.

Dimostreremo in questa Nota che secondo quello schema cinematico, se si ammette la ipotesi balistica della luce, e precisamente che la velocità della luce emessa da una sorgente in moto rispetto all'osservatore risulti dalla somma vettoriale della velocità normale della luce e di quella della sorgente, se ne deduce l'esistenza di un effetto DOPPLER *di velocità* e in più di un effetto DOPPLER *di accelerazione* che può acquistare valori notevolmente superiori al primo, e che non è confermato dalle osservazioni. Un tale effetto era stato, per vero dire, già rilevato e sommariamente apprezzato da DE SITTER (1), THIRRING (2), BERNHEIMER (3). Le nostre considerazioni, rimanendo nel campo strettamente cinematico ed eliminando il non necessario intervento di elementi ulteriori (quali tempo di coerenza, urti atomici, campo gravitazionale) rendono possibile la utilizzazione esclusiva di dati astronomici bene accertati.

È facile riconoscere per via intuitiva l'origine di questo effetto di accelerazione.

(*) Presentata nella seduta del 3 giugno 1926.

(1) « Bull. of Astr. Inst. of Netherlands », vol. 2, 1924.

(2) « ZS. f. Phys. », vol. 31, p. 133, 1925.

(3) « Ibidem », vol. 36, p. 302, 1926.

Per quanto sia piccolo l'intervallo di tempo che corre fra le emissioni di due onde consecutive, la sorgente se è dotata di accelerazione subisce in quell'intervallo una variazione di velocità, cosicchè l'onda successiva è lanciata con velocità differente e, data la grande distanza fino all'osservatore, l'intervallo fra i tempi d'arrivo delle due onde risulta anche esso mutato in misura sensibile, donde un ulteriore mutamento di frequenza che si aggiunge all'effetto DOPPLER di velocità.

Ma tutto ciò presuppone che le onde consecutive di un fascio di luce emesso da un centro luminoso siano veramente emesse in modo consecutivo dal centro, e che ciascuna perciò risenta gli stati di moto consecutivi del centro luminoso.

Se il processo dell'emissione della luce si considera dal punto di vista delle teorie più recenti, le cose potrebbero però procedere diversamente.

Si resti pure, in un primo momento, nella concezione della propagazione della luce per onde.

Il fenomeno ritmico prenderebbe origine fuori del centro luminoso, e la frequenza delle onde generate sarebbe semplicemente il rapporto tra il mutamento di energia interna ΔE dell'atomo emittente e la costante h di PLANCK. Non si sa nulla sul meccanismo di formazione di queste onde che avrebbero una connessione energetica e non cinematica con lo stato del centro luminoso. E pertanto il treno di onde formatosi potrebbe bensì portare la traccia della velocità del centro luminoso, ma non quella dell'accelerazione.

Se poi si considera che la stessa propagazione della luce per onde è attualmente in questione, e che dei fatti nuovi di grande peso tenderebbero a rimettere in onore la concezione newtoniana di quanti granulari di luce, con che perfino la nozione di « frequenza » perderebbe il suo consueto e immediato significato fisico, risulta chiaramente che le considerazioni puramente cinematiche svolte in questa Nota non potrebbero esaurire la controversia. In tal caso, del resto, sarebbe da rifare l'intera opera monumentale di HUYGENS e di FRESNEL, e già la spiegazione del più semplice fenomeno interferenziale, l'esperienza delle due fenditure di YOUNG, presenterebbe delle difficoltà che oggi appaiono insuperabili.

1. - L'ipotesi balistica e alcune sue conseguenze cinematiche.

Poniamoci dal punto di vista della fisica classica, in modo che si possa parlare di direzioni invariabili e di assi fissi (rispetto alle stelle fisse; ovvero rispetto all'etere; o, se si vuole, nel senso della statistica stellare).

Sia

$$P = P(t) \tag{1}$$

un punto mobile con legge assegnata rispetto ad un generico osservatore (fisso) O, che si intenderà schematizzato da un sistema di assi cartesiani $Oxyz$, di origine O e di direzioni invariabili.

La (1), proiettata sugli assi, dà luogo naturalmente alle tre equazioni scalari equivalenti, che definiscono, in funzione di t, le tre coordinate x, y, z di P; e in particolare alla espressione della distanza $r = OP$, pure come funzione di t.

La velocità

$$\boldsymbol{v} = \frac{dP}{dt}$$

(riferita agli stessi assi, cioè allo stesso osservatore) ha come componente radiale (nel senso delle r crescenti)

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}\,, \tag{2}$$

convenendo di designare per brevità con punti sovrapposti le derivate rispetto a t.

Ciò premesso, supponiamo che valga per la propagazione della luce (in assenza di ogni azione perturbatrice), l'*ipotesi balistica* del RITZ [4], la quale consiste in questo: La luce emessa da una sorgente (puntiforme) P si propaga in tutte le direzioni con velocità costante *c rispetto alla sorgente*, il che vuol dire più precisamente, rispetto ad assi di direzione invariabile coll'origine in un punto fittizio C, il quale coincide con P all'istante t dell'emissione, e successivamente si muove di moto rettilineo uniforme con la velocità $\boldsymbol{v}$ da cui era animato P nell'istante t. Naturalmente C coincide con P nel caso in cui il moto di quest'ultimo (rispetto al riferimento assoluto) sia uniforme, o in particolare si riduca alla quiete.

Se della propagazione luminosa ci si fa un modello ondulatorio, si potrà dire che le superficie d'onda sono sfere di centro C. Comunque, indicando con $\boldsymbol{u}$ il versore di una direzione generica, la velocità della luce in quella direzione sarà data (rispetto a C) da $c\boldsymbol{u}$.

Se, invece di C, si considera l'osservatore fisso O, varrà il principio di composizione delle velocità dell'ordinaria cinematica, e si avrà come velocità della luce, nella direzione $\boldsymbol{u}$, quale apparisce ad O, $c\boldsymbol{u}$+velocità

[4] *Gesammelte Werke* (Paris, Gauthier-Villars, 1911), Art. XVIII.

della sorgente rispetto ad O, ossia

$$(3) \qquad c\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \,.$$

Le eventuali superficie d'onda rimangono naturalmente sferiche anche per l'osservatore O, ma si tratta di sfere di centro C, le quali vanno espandendosi attorno a questo punto fittizio.

Proponiamoci in particolare di desumere dalla (3) la velocità di propagazione V (in senso scalare) con cui viaggia la luce emessa, in un assegnato istante t, da P, lungo la retta PO, verso O. Il versore di tale raggio essendo manifestamente $-(P-O)/r$, dovremo porre

$$(4) \qquad -V\frac{P-O}{r} = c\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \,,$$

che determina ad un tempo il versore $\boldsymbol{u}$ e lo scalare V.

Il divario fra l'incognito versore $\boldsymbol{u}$ (direzione secondo cui la luce viene emessa da P) e $-(P-O)/r$ (direzione secondo cui essa viene percepita da O) costituisce un *effetto di aberrazione*, particolare dell'ipotesi balistica, che non sembra però suscettibile di controllo sperimentale da parte di O. Ben diverso è il caso della modificazione nella velocità di propagazione, la quale da c, come seguiterebbe ad essere nello schema classico, diviene V. Interessa perciò essenzialmente di ricavare V dalla (4), il che si ottiene subito eliminando $\boldsymbol{u}$.

Consideriamo dapprima un caso particolare ovvio, ma notevole perchè il divario di V da c, che gli compete, costituisce in ogni eventualità il termine preponderante di $V-c$. Si tratta del caso in cui (all'istante considerato t) la velocità $\boldsymbol{v}$ di P sia tutta radiale (nell'uno o nell'altro senso).

La (4) mostra allora che avendo i due vettori $\boldsymbol{v}$ e $P-O$ la medesima direzione (se non il medesimo verso) lo stesso accade di $\boldsymbol{u}$ e si ha, eguagliando le componenti radiali (verso O) e badando alla (2),

$$(5) \qquad V = c - \dot{r} \,.$$

Passiamo oramai al caso generale, ed isoliamo $c\boldsymbol{u}$ nella (4), eguagliando poi le lunghezze dei vettori che appariscono nei due membri.

Qualora si noti che

$$\boldsymbol{v} \times \frac{P-O}{r} = v_r = \dot{r} \,,$$

e si designi con v il valore assoluto della velocità vettoriale $\boldsymbol{v}$, risulta senz'altro

$$V^2 + 2V\dot{r} + v^2 = c^2 ,$$

che può essere scritta

$$(V + \dot{r})^2 = c^2 - v^2 + \dot{r}^2 . \tag{6}$$

Riterremo, come è nella natura delle cose, la velocità v della sorgente, e a fortiori la sua componente radiale $\dot{r}$, piccola di fronte a c. Potremo in conformità trattare negli apprezzamenti numerici come quantità del primo ordine i rapporti del tipo $\dot{r}/c$, nonchè

$$\frac{v}{c} = \beta , \quad \frac{\sqrt{v^2 - \dot{r}^2}}{c} = \beta_1 , \tag{7}$$

essendo in ogni caso $\beta_1 \leqslant \beta$.

La (6), trascurando β_1^2 di fronte all'unità, dà per V il valore (5) che rigorosamente gli compete, quando $\boldsymbol{v}(t)$ è puramente radiale. Il valore esatto, avuto riguardo all'espressione (7) di β_1, può essere scritto

$$V = c\sqrt{1 - \beta_1^2} - \dot{r} . \tag{6'}$$

Da

$$v^2 = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}$$

si trae, derivando,

$$\frac{dv^2}{dt} = 2\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \times \boldsymbol{v} = 2av ,$$

dove si designa con a la componente tangenziale (cioè secondo $\boldsymbol{v}$) dell'accelerazione $d\boldsymbol{v}/dt$ di P.

Con ciò l'espressione (7) di β_1 dà

$$\frac{d\beta_1^2}{dt} = \frac{2}{c^2}\,(va - \dot{r}\,\ddot{r}) ;$$

si ha quindi, per derivazione della (6'),

$$\dot{V} = \left(\frac{\dot{r}}{c}\,\ddot{r} - \beta a\right)(1 - \beta_1^2)^{-\frac{1}{2}} - \ddot{r} . \tag{8}$$

Le (6′) e (8) definiscono rigorosamente la velocità radiale V e la sua derivata $\dot{V}$.

Per lo scopo che abbiamo in vista, potremo tranquillamente trascurare di fronte all'unità non solo termini dell'ordine di β^2, ma anche termini dell'ordine di β. In conformità *adotteremo senz'altro per* V *il valore* c, *e per* $\dot{V}$ il valore

$$\dot{V} = -\ddot{r}, \tag{9}$$

che risulta da (8) notando che nel primo termine le componenti $\ddot{r}$ ed a dell'accelerazione sono affette dai fattori di primo ordine $\dot{r}/c$ e β.

2. - L'equazione di Doppler e la conseguente correlazione delle frequenze.

La luce emessa da P in un generico istante t si propaga lungo la retta PO verso O con velocità V [data rigorosamente dalla (8), e approssimativamente dalla (5), o addirittura da c].

Perciò essa impiega il tempo r/V a giungere in O, e l'istante di arrivo t' rimane definito da

$$t' = t + \frac{r}{V}. \tag{10}$$

È questa la così detta *equazione di Doppler*, che lega i tempi di emissione coi tempi di arrivo. Differenziando, se ne trae la relazione

$$dt' = dt \left\{1 + \frac{\dot{r}}{V} - \frac{r\dot{V}}{V^2}\right\} \tag{11}$$

tra i rispettivi differenziali, relazione la quale può naturalmente applicarsi anche ad intervalli di tempo (corrispondenti) τ, τ' molto brevi, pur senza essere infinitesimi: tale il periodo τ delle vibrazioni luminose emesse dalla sorgente P, e il periodo τ' con cui vengono invece percepite da O.

Considerando, in luogo dei periodi, le frequenze

$$\nu = \frac{1}{\tau}, \qquad \nu' = \frac{1}{\tau'},$$

si ha dalla (11) la legge di correlazione

$$\nu = \nu' \left\{1 + \frac{\dot{r}}{V} - \frac{r\dot{V}}{V^2}\right\}, \tag{11'}$$

la quale costituisce l'*espressione rigorosa del principio di Doppler* nella forma che conviene all'ipotesi balistica.

Come si è osservato alla fine del numero precedente, si può porre con sufficiente approssimazione

$$V = c\,, \qquad \dot{V} = -\ddot{r}$$

e limitarsi ad illustrare le conseguenze della formula approssimata

$$\nu = \nu' \left\{1 + \frac{\dot{r}}{c} + \frac{r\ddot{r}}{c^2}\right\}. \tag{12}$$

Notiamo intanto che il termine

$$\frac{\dot{r}}{c} = \delta \tag{13}$$

vi rappresenta quella parte dello spostamento (relativo) $(\nu - \nu')/\nu'$ di frequenza che corrisponde all'ordinario effetto DOPPLER (V rigorosamente eguale a c, comunque si muova la sorgente); mentre la perturbazione dovuta all'ipotesi balistica è caratterizzata dall'ultimo termine

$$\frac{r\ddot{r}}{c^2} = \delta_1\,. \tag{14}$$

3. - Caso in cui P descrive un'orbita circolare. Formula atta a controllo astronomico.

Supponiamo che P descriva, di moto uniforme, un'orbita circolare attorno ad un punto G fisso rispetto all'osservatore O, e consideriamo, per comodità di calcolo, il caso in cui il piano dell'orbita passa per O.

Introduciamo in questo piano due assi coordinati Ox, Oy, facendo passare la direzione positiva dell'asse Oy per G. Indichiamo con d la distanza OG, con a il raggio dell'orbita, e con ϑ l'anomalia di GP rispetto all'asse delle x. Avremo

$$x = a\cos\vartheta\,, \qquad y = d + a\sin\vartheta \tag{15}$$

e (senza pregiudizio della generalità)

$$\vartheta = \omega t \tag{16}$$

con ω costante positiva.

Dalle (15) segue manifestamente

$$r^2 = x^2 + y^2 = d^2 + a^2 + 2da\sin\vartheta\,, \tag{17}$$

e quindi

$$\dot r = \omega a \frac{d}{r}\cos\vartheta\,, \qquad \ddot r = -\,\omega^2 a\frac{d}{r}\sin\vartheta - \frac{\dot r^2}{r}\,. \tag{18}$$

Qualora si esemplifichi la sorgente luminosa P come una stella doppia che descrive un'orbita circolare attorno al baricentro G del sistema binario (costituito da essa e dalla sua compagna), e O come un osservatore terrestre

$$\frac{2a}{d} = \varepsilon \tag{19}$$

costituisce l'*angolo parallattico*, che può ben riguardarsi trascurabile di fronte all'unità. Con tale intesa, avendosi dalla (17)

$$\frac{d}{r} = \left\{1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \varepsilon\sin\vartheta\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

d/r è, in prima approssimazione, sostituibile coll'unità.

Cerchiamo di renderci conto dell'importanza relativa dei due spostamenti δ (effetto Doppler normale) e δ_1 (correzione balistica), calcolandone (nella suaccennata ipotesi semplificatrice) i massimi valori assoluti Δ e Δ_1.

Dalla (13) e dalla prima delle (18) si ha senz'altro (in quanto va posto $d/r = 1$)

$$\Delta = \frac{\omega a}{c}\,,$$

mentre la seconda può essere scritta

$$\ddot{r} = -\omega^2 a \sin\vartheta - \frac{\omega^2 a^2}{d} \cos^2\vartheta = -\omega^2 a \left\{\sin\vartheta + \frac{1}{2}\varepsilon \cos^2\vartheta\right\}.$$

Trascurando ancora una volta la parallasse ε di fronte all'unità, si può identificare $r\ddot{r}/c^2$ con $d\ddot{r}/c^2$ e se ne deduce, in base alla (14), come massimo valore di δ_1,

$$\Delta_1 = \frac{\omega^2 ad}{c^2} = \Delta \frac{\omega d}{c}.$$

Se si nota che d/c rappresenta il tempo T_1 impiegato dalla luce a percorrere la distanza media Stella doppia-Terra e che fra la velocità angolare ω e il periodo T del moto circolare (durata della rivoluzione della stella doppia di cui si tratta) passa la relazione

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

si ha in definitiva

$$\Delta_1 = \Delta 2\pi \frac{T_1}{T}. \tag{20}$$

La correzione balistica può dunque ammontare a

$$2\pi \frac{T_1}{T}$$

volte il massimo Δ dell'effetto Doppler normale, essendo T_1 il tempo impiegato dalla luce per giungere a noi dalla stella e T la durata della sua rivoluzione.

La formula (20) è stata dedotta nell'ipotesi che l'osservatore O appartenga al piano dell'orbita della sorgente luminosa. È facile però riconoscere che la (20) seguita a sussistere qualunque sia l'orbita circolare di P. Per constatarlo, immaginiamo ancora di assumere OG come direzione positiva dell'asse y, e, se OG non è addirittura perpendicolare al piano dell'orbita, consideriamone la proiezione Gy_1 su questo piano, indicando con φ l'angolo (acuto) $\widehat{yy_1}$. Nel caso particolare in cui OG e il piano dell'orbita fossero perpendicolari, assumeremo Gy_1 ad arbitrio nel detto piano, e sarà $\varphi = \widehat{yy_1} = \pi/2$. Comunque, potremo ulteriormente assumere l'asse Ox nella direzione perpendicolare ad un tempo ad y e ad y_1 (e quindi parallela al piano dell'orbita), e con ciò rimane individuato anche il terzo asse cartesiano Oz. Scegliendo i versi in modo opportuno, si hanno per le coordinate di P, al posto delle (15), le espressioni

$$(15') \qquad x = a\cos\vartheta\,, \qquad y = d + a\sin\vartheta\cos\varphi\,, \qquad z = a\sin\vartheta\sin\varphi\,,$$

essendo sempre $\vartheta = \omega t$. Se ne trae

$$(17') \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = d^2 + a^2 + 2da\cos\varphi\sin\vartheta\,,$$

e quindi

$$(18') \qquad \dot r = \omega a\cos\varphi\frac{d}{r}\cos\vartheta\,, \qquad \ddot r = -\,\omega^2 a\cos\varphi\frac{d}{r}\sin\vartheta - \frac{\dot r^2}{r}\,.$$

Da questo punto in poi tutto va come nel caso particolare in cui il piano dell'orbita passa per O, tranne che la costante a si trova sostituita da $a\cos\varphi$. Ne risultano (sempre trascurando l'angolo parallatico ε) come massimi valori assoluti di δ e di δ_1:

$$\Delta = \frac{\omega a\cos\varphi}{c}\,, \qquad \Delta_1 = \frac{\omega^2 a\cos\varphi}{c^2} = \Delta\frac{\omega d}{c}\,,$$

donde ancora la (20), coll'avvertenza che, nel caso particolare di $\varphi = \pi/2$ (moto in piano perpendicolare ad OG), si annullano insieme Δ e Δ_1, e quindi essa si riduce ad una identità. Del resto in tale caso la sorgente rimane sempre alla stessa distanza dall'osservatore; in base alle (6′), (7) e alla costanza della velocità v di P, anche V è rigorosamente costante: non c'è quindi nè effetto Doppler normale, nè correzione balistica.

Escluso questo caso limite, ritenuto cioè $\varphi < \pi/2$, la (20) può servire di effettivo controllo all'ipotesi balistica.

Già per una stella doppia *visuale*, quale Procione, si ha $T_1/T = \frac{1}{4}$ e quindi Δ_1 è più che $\frac{3}{2}\Delta$.

Per doppie spettroscopiche il rapporto T_1/T può assumere valori di gran lunga più rilevanti. Ci basti citare l'esempio della stella polare, la quale possiede una compagna (spettroscopica) scoperta da Campbell. Il periodo di rivoluzione è un po' meno di quattro giorni, mentre il relativo T_1 supera i 46 anni. Ne viene che Δ_1 dovrebbe essere oltre 25000 volte Δ!

L'esperienza non ha mai fatto sospettare spostamenti spettrali così enormi, sicchè l'ipotesi balistica è insostenibile o almeno non conciliabile cogli ordinari postulati della fisica classica.

XXI.

SUI MOTI EINSTEINIANI IN SECONDA APPROSSIMAZIONE

« Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. IV (2º sem. 1926),
pp. 3-5 (*).

Nel preparare, per la traduzione inglese delle *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (in collaborazione col prof. ENRICO PERSICO), due capitoli addizionali di applicazione alla teoria della relatività, mi venne fatto di rilevare un'equivalenza meccanica di seconda approssimazione, che è altrettanto generale quanto comoda per la trattazione spedita di alcuni problemi concreti.

Non mi consta che il risultato sia noto, e mi permetto perciò di comunicarlo all'Accademia, rimandando per la dimostrazione al libro suaccennato, presentemente in corso di stampa presso l'editore Blackie di Glasgow.

1. – Poniamoci per un momento dal punto di vista della meccanica classica. Sia P un punto materiale (di massa 1) mobile nello spazio ordinario. Designi x, y, z coordinate cartesiane; dl_0 l'arco elementare descritto da P nel tempuscolo dt; $U(x, y, z)$ il potenziale (unitario) del campo di forza newtoniano entro cui avviene il moto. Questa funzione U dovrà in conformità ritenersi armonica.

Detta ancora E l'energia totale spettante a P in dipendenza dalle circostanze iniziali del moto, varrà l'integrale delle forze vive

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dl_0}{dt}\right)^2 - U = E \,. \tag{1}$$

2. – Ciò premesso, passiamo a considerare (le condizioni fisiche rimanendo inalterate) lo stesso problema di moto secondo la relatività generale dell'EINSTEIN.

(*) Presentata nella seduta del 20 giugno 1926.

Mentre, in prima approssimazione, si ricade notoriamente nelle equazioni newtoniane, in seconda approssimazione si è in definitiva condotti all'enunciato seguente:

Le traiettorie del moto einsteiniano coincidono con quelle di un moto newtoniano (nell'ordinario spazio euclideo) pel quale, l'energia totale essendo ancora E, la forza deriva dal potenziale

$$U_1 = \left(1 + \frac{4E}{c^2}\right) U + \frac{3U^2}{c^2}\,, \tag{2}$$

dove c rappresenta al solito la velocità della luce (nel vuoto e in assenza di cause perturbatrici).

Detto t_1 il tempo in questo problema newtoniano ausiliario, si ha corrispondentemente l'integrale delle forze vive

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dl_0}{dt_1}\right)^2 - U_1 = E\,. \tag{3}$$

Fra t_1 e la variabile t che funge da tempo nel moto einsteiniano passa la relazione

$$dt = \left(1 + \frac{4U}{c^2}\right) dt_1\,. \tag{4}$$

3. – Nel caso particolare in cui il campo di forza sia dovuto ad un'unica massa m_0 situata nell'origine O delle coordinate, si ha

$$U = \frac{fm_0}{r}\,,$$

essendo f la costante di attrazione universale e $r = \overline{OP}$.

La (2) mostra allora che, almeno nei riguardi delle traiettorie, tutto va come se, valendo la meccanica ordinaria, il punto P si trovasse soggetto oltrechè ad una attrazione newtoniana, di componente radiale

$$\left(1 + \frac{4E}{c^2}\right)\frac{dU}{dr} = -\left(1 + \frac{4E}{c^2}\right)\frac{fm_0}{r^2}\,,$$

anche ad una forza perturbatrice, pure attrattiva, in ragione inversa dei cubi della distanza, di componente radiale

$$\frac{3}{c^2}\frac{dU^2}{dr} = -\frac{K}{r^3},$$

essendo

$$K = 6\left(\frac{fm_0}{c}\right)^2.$$

Tenendone conto si ricava naturalmente per le orbite (in prima approssimazione) ellittiche, uno spostamento del perielio nella precisa misura calcolata per la prima volta dall'EINSTEIN, e ritrovata poi in più modi da vari autori (¹), sia direttamente, sia profittando della soluzione rigorosa dello SCHWARZSCHILD.

(¹) Per es. DE SITTER, DROSTE, EDDINGTON, PALATINI.

XXII.

SUR LES CHOCS DANS LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

« Comptes Rendus du 2me Congrès international de mécanique appliquée, Zürich 1926 »,
pp. 96.

C'est vers la moitié du XVIIIme siècle qu'on a commencé à appeler tout court problème des trois corps le problème du mouvement de trois points matériels qui s'attirent mutuellement suivant la loi de NEWTON.

CLAIRAUT, D'ALEMBERT et EULER dans des pièces célèbres (1) ont établi, à peu près dans la forme cartésienne reproduite ensuite dans tout traité de mécanique céleste, les équations différentielles et leurs intégrales classiques: du centre de gravité, des aires et des forces vives. Par la simple mise au point de l'aspect analytique de la question, ils ont acquis pleine conscience de sa difficulté et de la nécessité de se contenter de méthodes et résultats d'approximation pour tirer des conséquences intéressantes au point de vue astronomique, notamment pour la théorie du mouvement de la Lune sur laquelle pointaient ces premiers essais.

On doit également à EULER la première solution particulière rigoureuse du problème. Dans une telle solution les trois corps restent toujours en ligne droite à des distances invariables, tandis que cette ligne droite tourne uniformément autour du centre de gravité du système. La vitesse angulaire de la droite étant donnée, on peut — c'est la découverte d'EULER — y fixer les trois points de manière que, pour chacun d'eux, la somme des attractions des deux autres soit justement équilibrée par la force centrifuge.

LAGRANGE, reprenant à nouveau l'étude du problème des trois corps, le partagea en deux étapes: dans la première il s'agit d'assigner à chaque instant la configuration du triangle formé par les trois corps, ou, si l'on veut, leurs distances mutuelles; dans le seconde (qui n'exige que des quadratures, dès qu'on a épuisé la première) on s'occupe de la position

(1) Voir, pour les renseignements historiques et bibliographiques, l'intéressant volume de M. MARCOLONGO, *Il problema dei tre corpi* (Milano, Hoepli, 1919).

du triangle par rapport à un repère fixe. LAGRANGE est parvenu de la sorte à la conclusion que l'ordre différentiel du système peut être réduit à 6, et à déterminer explicitement tous les mouvements dans lesquels les distances mutuelles des trois corps gardent des rapports constants.

Retrouvant par cette voie les solutions particulières d'EULER, LAGRANGE en a décélé une autre classe où les trois corps forment toujours un triangle équilatéral. Sa recherche est mémorable à double titre. D'abord l'abaissement du système qui s'y trouve indiqué a donné l'essor à un très grand nombre de travaux (des géomètres du XIX^{me} siècle) visant à expliciter le système réduit sous des formes et par des calculs de plus en plus symétriques et condensés. Particulièrement remarquables à cet égard sont les contributions de HAMILTON, JACOBI, LIOUVILLE, LIE d'un côté, BRUNS et POINCARÉ de l'autre, aboutissant à la constatation, précisée et documentée à plusieurs point de vue, qu'on ne peut pas en général (c'est-à-dire si l'on n'introduit pas d'hypothèses particulières sur les masses des trois corps et sur les données initiales) abaisser le système au-dessous de l'ordre 6, signalé par LAGRANGE.

En second lieu les solutions rigoureuses qu'il a découvertes (et qu'il regardait à vrai dire comme une simple curiosité mathématique dégagéee par son analyse pénétrante) constituent une famille importante de solutions périodiques et sont devenues, après HILL et la théorie générale due à POINCARÉ, le point de départ de nombreuses applications, ayant même un véritable intérêt astronomique, surtout pour les petites planètes du groupe dit trojan, qui avec le Soleil et Jupiter forment toujours un triangle sensiblement équilatéral.

* * *

Depuis LAGRANGE jusqu'aux savants qui, dans le sens qu'on vient d'esquisser, se sont en quelque sorte rattachés à lui, les efforts des chercheurs avaient suivi plutôt une autre voie. Sur l'exemple de NEWTON lui-même et de ses premiers successeurs, ils se sont adressés surtout à l'intégration approchée des équations différentielles du problème des trois corps (ou même d'un nombre de corps quelconque) dans les circonstances qui intéressent de plus près le système solaire, où trois astres s'influençant mutuellement (sans être d'une manière appréciable influencés par les autres corps du système) sont représentés par les deux triplets typiques: Soleil, Jupiter, petite planète; ou bien Soleil, planète, satellite (par ex. Terre, Lune).

Sous cet aspect, qui peut d'ailleurs se rallier à la théorie générale des perturbations, il est à peine nécessaire de rappeler l'œuvre grandiose de LAPLACE et, parmi ceux qui ont réalisé des progrès substantiel, POISSON, Gauss, encore une fois Hamilton et Jacobi, Airy, Délaunay, Plana, Leverrier, suivis, dans une époque plus récente, par Adams, Hill, Gyldén, Newcomb, Tisserand, Poincaré. Tel que Laplace, Poincaré marque une époque en mécanique céleste. Ses *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* ont rétabli le contact entre les spéculations les plus élevées de l'analyse moderne, si fécondement poussées par lui-même, et les aperçus et procédés de calcul employés par les astronomes, dont la bonté pour le but envisagé ne pouvait ni pourrait être méconnue.

J'ai nommé jusqu'ici des savants disparus, mais fort heureusement on peut citer encore M. Bohlin parmi les devanciers de Poincaré et MM. Andoyer, Birkhoff, Brown, Charlier, Moulton, Whittaker parmi ses nombreux continuateurs.

* * *

Les développements classiques, préparés pour satisfaire et aussi pour prévenir les besoins de l'astronomie, convergent, même très rapidement, pour un intervalle de temps assez petit: bien entendu c'est un petit toujours très respectable puisqu'il embrasse plusieurs siècles et parfois des milliers d'années. Mais on ne peut toutefois en tirer aucune prévision rigoureuse à longue échéance, c'est-à-dire pour des valeurs arbitrairement grandes du temps t, ou, en langage mathématique, pour $t \to \infty$.

Dans ce sens les démonstrations fameuses de Lagrange, de Laplace, de Poisson sur la stabilité du système du monde n'ont qu'une portée subordonnée aux traitements réductifs qu'on fait subir préalablement aux équations différentielles correspondantes.

D'ailleurs dans les cas usuels où il s'agit du mouvement d'un point soumis à l'action prépondérante d'un corps central et à l'action troublante d'une troisième masse petite ou éloignée, les séries employées couramment avaient montré dès le début l'inconvénient, dont je parlais tout à l'heure, pour ce qui se rapporte aux prévisions à longue échéance, dans une manière pour ainsi dire matérielle, c'est-à-dire par la présence de termes dits séculaires, qui ne restent pas bornés lorsque $t \to \infty$, notamment de termes linéaires en t (en première approximation), quadratiques (en seconde approximation), ou bien de la forme $t \sin \alpha t$, $t \cos \alpha t$ (α désignant une constante), etc.

On avait pensé que la présence de ces termes fût une accidentalité due à l'espèce de développement adopté; et on en a envisagé d'autres, purement trigonométriques, c'est-à-dire tels que t ne sort dans aucun terme des signes *sin* ou *cos*. Ceci a apporté des avantages au point de vue de la construction des tables astronomiques, mais au point de vue théorique ce n'est qu'un détour et même un détour dangereux. En effet les séries ordinaires, tout en n'étant pas utilisables pour t grandissant indéfiniment, convergent néanmoins jusqu'à ce que t ne dépasse pas une certaine limite. Les séries purement trigonométriques sont au contraire toujours divergentes comme l'a fait constater POINCARÉ, qui d'ailleurs ne s'est pas borné à ce résultat négatif, mais a fait l'étude asymptotique de ces séries en y rattachant plusieurs conséquences importantes.

* * *

Mais revenons spécifiquement au problème des trois corps. Il n'est pas intégrable, c'est-à-dire résoluble par les moyens élémentaires du calcul, ni non plus réductible au-dessous d'un certain ordre différentiel qui donne, peut-on-dire, la mesure de sa difficulté formelle.

Une pareille réduction a été regardée longtemps comme un préliminaire nécessaire et assez peu encourageant (il suffit de rappeler l'exclamation de CLAIRAUT: «Maintenant intègre qui pourra!») de toute recherche aspirant à respecter complètement la rigueur mathématique.

Mais lorsque, dans la seconde moitié du siècle passé, l'esprit de la théorie des fonctions se fit ressentir dans toutes les branches des mathématiques, on commença à considérer aussi pour le problème des trois corps, à côté des déterminations quantitatives, les questions se rapportant à l'allure générale du mouvement. A ce point de vue, avant encore d'envisager la forme, plus ou moins régulière ou capricieuse des trajectories, il y a lieu de s'adresser ces deux demandes: Est-ce que le mouvement se poursuivra indéfiniment, ou qu'il va être brusquement interrompu par un choc? Et, dans le premier cas, les trois corps resteront-ils à distance finie les uns des autres, ou quelqu'un s'en ira à l'infini?

C'est M. PAINLEVÉ qui, dans ses célèbres Leçons de Stockholm (²), a proposé l'étude mathématique du premier problème en établissant quelques importantes propositions préliminaires et avançant des aperçus qui ont été ensuite pleinement confirmés par d'autres chercheurs.

Dés qu'on peut exclure les chocs, une représentation analytique du mouvement devient possible, et même aisée, comme l'a montré M. PAINLEVÉ, les coordonnées des trois corps pouvant être développées en série de polynômes de la variable t.

D'ailleurs le champ envahi par le mouvement et son allure quand le temps croît indéfiniment ont été le sujet de recherches de HILL (³), de M. BOHLIN (⁴) et de M. CHAZY.

Les premiers ont introduit, à partir de l'intégrale des forces vives, la

(²) Paris, Hermann, 1897.
(³) « Acta Math. », T. 8, 1886, pp. 1-36; ou bien *Collected Mathem. Works*, vol. I, pp. 243-270.
(⁴) « Acta Math. », T. 10, 1887, pp. 109-130.

notion, simple mais précieuse, du lieu de force vive nulle en illustrant les remarquables conséquences géométriques auxquelles on est conduit.

M. Chazy [5] dans un mémoire récent a pu démontrer que (même pour le problème des n corps) le rapport r/R entre la plus petite et la plus grande des distances mutuelles tend toujours vers une limite finie lorsque t croît indéfiniment. Si en surplus l'énergie totale E du système (constante fournie directement par les circonstances initiales du mouvement) est $\geqslant 0$, on peut en tirer que: ou bien tous les trois corps s'éloignent indéfiniment pour $t \to \infty$, en décrivant des orbites (asymptotiquement) hyperboliques ou paraboliques; ou bien le problème tend de plus en plus à se partager en deux problèmes élémentaires des deux corps. C'est ce que fait prévoir l'intuition après avoir reconnu que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{r}{R} = 0 \,.$$

En effet désignons par O, P, P' les trois corps et supposons que OP correspond au côté minimum r du triangle. Puisque OP, pour t assez grand, devient négligeable vis-à-vis d'une et par suite aussi de l'autre distance du troisième corps P', il est bien clair que tout va se passer asymptotiquement:

pour P', comme si les deux masses de O et de P coïncidaient dans un même point géométrique (qu'on peut identifier indifféremment avec O, ou bien avec P, ou bien avec leur centre de gravité G);

pour le couple O, P, comme s'il fût sensiblement soustrait à l'action troublante de P. Voilà les deux problèmes des deux corps auxquels on se trouve reconduit à la limite.

Au point de vue astronomique, représentons-nous le point O comme corps central (soleil), qui fournit au système la chaleur et par là l'énergie dans ses manifestations multiformes, et soit P' l'astre (planète ou satellite) sur lequel on fixe l'attention. Dans les cas $E < 0$, ou $E = 0$, qu'on vient d'envisager, les habitants (éventuels) de P' doivent toujours s'attendre la fin de leur monde: tout à coup, si un choc intervient; par cessation progressive de toute forme de vie, à cause de l'éloignement de la source de chaleur et transissement général, lorsque c'est le régime asymptotique qui va s'établir.

Le cas où l'énergie totale E est négative a été également abordé par M. Chazy qui a obtenu quelques résultats particuliers; mais ce cas est beaucoup plus difficil, et, même en excluant les chocs comme auparavant,

---

[5] « Annales de l'Ecole Normale Supérieure », (3), T. XXXIX, 1922, pp. 29-130.

il y a lieu de retenir d'une manière générale presque seulement que les trajectoires se développent toutes dans une région finie, sans pouvoir d'ailleurs prédire quel est le domaine (de l'espace des phases) pratiquement rempli par un mouvement générique de cette catégorie. Bien entendu elle comprend aussi des solutions exceptionnelles (périodiques, asymptotiques, doublement asymptotiques, etc.) dont l'étude est bien avancée, grâce aux théories classiques de POINCARÉ et aux contributions pénétrantes qu'on doit à M. BIRKHOFF ([6]).

* * *

Ces déductions, soit qu'il s'agisse de résultats bien nets comme dans l'hypothèse $E \geqslant 0$, ou de quelques lemmes préparatoires, comme il arrive pour E négatif, sont toujours essentiellement subordonnées à l'hypothèse que n'interviennent pas de chocs. L'étude préalable de ce phénomène s'impose donc à tout égard.

Etant donné l'ordre de grandeur des vitesses des corps célestes (comprises vraisemblablement entre 10 et 300 km/sec) et la matière dont ils sont formés, tout à fait comparable à celle de notre terre, il paraît bien fondé d'attribuer aux chocs un caractère catastrophique, entraînant, si non la destruction de la matière, des morcellements et des fusions qui annulent toute continuité non seulement dans la vie intérieure, s'il y en a, mais même à l'individualité mécanique des astres qui se choquent, après une collision.

Ce point de vue presque unanime des astronomes trouve un excellent appui dans l'apparition et l'extinction des *Novæ*, envisagées comme effets de choc.

Quoi qu'il en soit quant aux effets, dans le problème des trois corps il peut se présenter des chocs binaires, ou même une collision générale. Il est évident que ce dernier cas est infiniment moins probable qu'un choc binaire, mais il y a plus. Comme l'a remarqué WEIERSTRASS (sans toutefois le publier) dès 1888 ([7]) et comme il a été retrouvé par M. SUNDMAN ([8]) pour que l'éventualité d'une collision générale puisse se présenter, il faut que le moment (vectoriel) $\boldsymbol{K}$ des quantités de mouvement du système, ou, si l'on veut, ses trois composantes (constantes des aires) soient nuls; il va sans dire qu'un tel caractère ressort immédiatement des données (circonstances initiales du mouvement). Dès que $\boldsymbol{K}$ ne s'an-

---

([6]) « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », T. XXXIV, 1915, pp .265-334; « Transactions of the American Math. Society », vol. XVIII, 1917, pp. 199-300; « Acta Math. », T. 43, 1920, pp. 1-119.

([7]) Voir MITTAG-LEFFLER, *Zur Biographie von Weierstrass*, « Acta Math. », T. 35, 1911, p. 30.

([8]) « Acta Societatis Scientiarum Fennicæ », T. 34, n°. 6 (Helsingfors, 1907).

nule pas (et il en sera bien ainsi, en général) il est impossible que les trois corps se choquent à la fois. Quelles peuvent être alors les singularités du mouvement? Puisque les forces (attractions mutuelles suivant la loi de NEWTON) restent finies et continues tant que les trois corps sont distincts, il n'y a pas de raison pour que le mouvement présente quelque singularité analytique dans les conditions susdites. En effet M. PAINLEVÉ a prouvé en toute rigueur que, à partir d'un instant t, et des conditions initiales données, ou bien le mouvement se poursuit régulièrement pour t croissant indéfiniment, ou bien il y a un premier instant t_1 pour lequel la limite de la plus petite des distances mutuelles est zéro.

Si l'on se pose dans le cas général où le vecteur constant $\boldsymbol{K}$ ne s'annule pas, on peut ajouter [9] d'après la remarque de tout à l'heure, qu'il s'agit assurément d'un choc binaire, dans le sens que deux des trois corps, soit O et P tendent, pour $t \to t_1$ à coïncider dans un même point géométrique, tandis que P' tend lui aussi vers une position limite à distance bien déterminée (et non nulle) des deux autres masses.

On constate donc effectivement — mais une analyse détaillée s'imposait au début — que les scrupules mathématiques n'entraînent dans ce cas aucune complication. Ce que le simple bon sens fait prévoir arrive: tout marche régulièrement tant que les trois corps sont distincts; pas de collision à trois, sauf dans un cas exceptionnel qui se reconnaît sur les données et peut être étudié pour son compte; reste seule à craindre l'éventualité d'un choc binaire, d'où la grande importance de pouvoir décider, d'après la simple inspection de l'état de mouvement initial, si un tel événement va, ou plutôt ne va pas se produire.

* * *

C'est la question fondamentale posée par M. PAINLEVÉ qui avait annoncé comme probable qu'on puisse la trancher en formant deux relations (transcendentes) entre les positions et les vitesses initiales, caractéristiques du choc, ces deux relations se réduisant à une seule dans le cas particulier où le mouvement des trois corps a lieu dans un plan (fixe). Il n'est pas difficile de se rendre compte d'un tel résultat par une simple évaluation de constantes.

En effet, si l'on envisage par exemple le mouvement relatif de P, P', par rapport à O, on peut naturellement le regarder défini par 6 équations du second ordre exprimant les six composantes des accélérations (relatives) de P, P' en fonctions des positions. Une solution quelconque

[9] J'ai tâché de réduire les démonstrations à leur plus grande simplicité formelle et logique dans le Chapitre I du mémoire *Sur la régularisation du problème des trois corps*, « Acta Math. », T. 42, 1918, pp. 99-144, [in questo vol.: IX, pp. 217-264].

d'un tel système est caractérisée par les données initiales, c'est-à-dire par 12 constantes α (6 coordonnées de P, P' par rapport à O et six composantes de vitesses).

Un choc binaire, disons entre O et P, se traduit par le fait que la trajectoire de P passe par O. Or, d'après les équations différentielles du mouvement, les expressions des coordonnées x, y, z de P (rapportées à O) dans l'intégrale générale sont de la forme

$$x = x(t\,|\,\alpha)\,, \qquad y = y(t\,|\,\alpha)\,, \qquad z = z(t\,|\,\alpha)\,.$$

Pour qu'un choc arrive il faut et il suffit qu'il existe un instant t_1 où les trois équations

$$x(t_1\,|\,\alpha) = 0\,, \qquad y(t_1\,|\,\alpha) = 0\,, \qquad z(t_1\,|\,\alpha) = 0$$

sont satisfaites à la fois. En éliminant t_1, il en résulte justement deux relations entre les α.

Cette considération formelle pourrait être rendue après coup parfaitement rigoureuse en s'appuyant sur les théorèmes d'existence des équations différentielles, s'il s'agissait d'un champ de valeurs où le système différentiel se comporte régulièrement au point de vue analytique. Mais c'est le contraire qui arrive. Les équations du mouvement, dans une quelconque de leurs formes classiques, présentent des singularités évidentes lorsque deux des trois corps tendent à coïncider, à cause de la force d'attraction qui devient alors infinie. La présomption de M. Painlevé, que les choses finissent pour se passer comme si tout restait régulier, a pu paraître hardie, puisqu'il y avait lieu de redouter dans l'analise des chocs des difficultés très sérieuses, comparables par exemple à celles qu'on rencontre dans l'étude des équations différentielles, même linéaires, dès qu'on dépasse le type ordinaire de Fuchs.

Toutefois une telle méfiance s'est effacée peu à peu, et on est enfin parvenu à justifier d'une manière complète les idées de M. Painlevé.

* * *

D'abord N. Thiele, astronome danois, dans ses recherches ayant pour but la construction d'orbites particulières moyennant des quadratures mécaniques, effectua la première régularisation des chocs binaires dans le cas particulier du *problème restreint*.

Vous m'excuserez si je m'arrête un instant à rappeler ce qu'on entend par problème restreint, d'après Jacobi.

Supposons que la masse de P soit tout à fait négligeable vis-à-vis de celles de O et de P'. Alors le mouvement de ce couple n'est pas troublé par P et on est par conséquent réduit, pour O, P', au problème élémentaire des deux corps résolu par NEWTON. Faisons l'hypothèse particulière que ce mouvement soit le plus simple compatible avec l'attraction mutuelle, c'est-à-dire que O et P' tournent uniformément autour de leur centre de gravité, G, avec une telle vitesse angulaire que pour chacun d'eux la force centrifuge fasse équilibre à l'attraction.

Dans ces conditions notre problème se réduit à celui du mouvement du point matériel P sous l'attraction newtonienne des deux centres (mobiles) O et P' qui tournent uniformément autour du point fixe G.

Bornons-nous pour simplifier au mouvement plan et rapportons P à des axes rectangulaires Gxy invariablement liés au couple O, P' et par suite uniformément tournants. Avec un tel repère, les équations du mouvement de P admettent l'intégrale, dite de JACOBI,

$$\frac{1}{2}v^2 - U = C\,, \tag{1}$$

où v est la vitesse de P (relative aux axes susdits) et U désigne la fonction des forces (y comprise la centrifuge).

Par un choix convenable d'unités on peut retenir

$$U = \frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\Delta} - \frac{1}{2}\mathfrak{r}^2 \tag{2}$$

où μ et $\nu = 1 - \mu$ désignent respectivement les masses de P' et de O; $r = \overline{OP}$, $\Delta = \overline{P'P}$, $\mathfrak{r} = \overline{GP}$.

Les chocs possibles regardent ici le mouvement de P qui peut tomber sur O ou sur P'.

Dans les équations différentielles du mouvement en coordonnées cartésiennes figurent des termes qui deviennent infinis comme $1/r^2$ et $1/\Delta^2$ au voisinage des centres O et P'. N. THIELE, pour ne pas être gêné par ces infinis dans ses calculs numériques eut recours à une transformation en coordonnées elliptiques, associée à un changement de variable indépendante, moyennant lesquels toute singularité disparut ([10]).

THIELE avait sans doute reconnu toute l'importance d'une telle régularisation préalable au point de vu pratique, pour la détermination de proche en proche d'arcs de trajectoires et pour la déduction par tâtonnement d'orbites périodiques. Mais il n'a jamais considéré sa transfor-

([10]) « Astr. Nachrichten », B. CXXXVIII, 1895, pp. 1-10.

mation en mathématicien pour en tirer des conséquences théoriques. Cet aspect de la question a été examiné un peu plus tard sous l'influence de M. PAINLEVÉ.

J'ai montré en 1904 ([11]) que, justement pour le problème restreint, on peut faire disparaître toute singularité par un changement tout à fait élémentaire des variables (de la forme $x+iy=(\xi+i\eta)^2$, à l'égard des coordonnées), et cela sans altérer la forme canonique des équations. J'en ai tiré la condition explicite de choc, précisément sous la forme annoncée comme très probable par M. PAINLEVÉ.

Peu après M. BISCONCINI ([12]) sous réserve qu'une certaine vitesse angulaire reste finie (hypothèse qui n'a rien de restrictif au point de vue mécanique, mais qu'il restait à faire ressortir logiquement des équations du mouvement) a pu également expliciter deux relations fournissant la condition d'un choc binaire dans le problème général, ce qui acheva de confirmer les prévisions de M. PAINLEVÉ.

Je reviendrai un peu plus avant sur la signification précise et les bornes de ces résultats. Permettez-moi en attendant d'arriver au clou de la régularisation et de ses conséquences, c'est-à-dire au mémoire fondamental de M. SUNDMAN couronné par l'Académie des Sciences de Paris ([13]).

M. SUNDMAN a effectué d'une manière tout à fait élémentaire (bien qu'un peu lourde et sans conservation des propriétés formelles appartenant aux équations différentielles de la dynamique) la régularisation complète (pour $K\neq 0$) du problème général des trois corps, d'où en particulier la justification rigoureuse de la circonstance qualitative admise provisoirement par M. BISCONCINI comme hypothèse de travail.

Mais ce qui donna à juste titre le plus grand éclat aux recherches de M. SUNDMAN c'est la conclusion mémorable qu'il sut en tirer que, dans une solution quelconque, les coordonnées des trois corps et le temps t sont des fonctions holomorphes d'un paramètre τ pour toutes les valeurs réelles de ce paramètre qui correspondent biunivoquement à toutes les valeurs réelles de t. Positions et temps peuvent donc être représentés par des développements en séries toujours convergents.

Pour bien comprendre la nature et la portée d'une telle proposition il convient de la rattacher au développement analogue qui avait été précédemment signalé par M. PAINLEVÉ. La validité de ce dernier est essentiellement subordonnée à l'absence de chocs. M. SUNDMAN au contraire a ôté toute restriction et fourni par son développement un algorithme permettant de calculer à tout instant la position des mobiles,

---

([11]) « Acta Math. », T. 30, 1906, pp. 305-327.
([12]) « Acta Math. », T. 30, 1906, pp. 49-92.
([13]) « Ibidem », T. 36, 1912, pp. 105-179.

non seulement jusqu'à un choc éventuel, mais même au delà. Quest-ce que signifie l'au delà d'un choc? Etant donné l'aspect de destruction d'un, ou même de deux mondes, sous lequel un choc est conçu par les astronomes, l'au delà pourrait nous paraître un rêve mystique, ou plutôt une simple fiction mathématique provenant d'une continuation analytique se présentant comme possible pour $t > t_1$ (si t_1 désigne l'instant du choc). En réalité, comme l'a reconnu mon Collègue, M. ARMELLINI [14] une telle continuation analytique n'est pas dépourvue d'interprétation physique. Elle traduit ce qui se passerait si les corps qui se choquent étaient des sphères parfaitement élastiques rebondissant après la rencontre.

Il en est bien ainsi pour les molécules d'un gaz d'après la théorie cinétique, mais pour les problèmes astronomiques il faut pouvoir isoler la phase antérieure au choc et l'instant d'un tel événement.

Quoi qu'il en soit, à M. SUNDMAN revient le mérite d'avoir dans un certain sens résolu le fameux probléme qui avait résisté pour deux siècles aux efforts des plus illustres géomètres. Je viens de dire résolu dans un certain sens. Voici pourquoi.

Nul doute que la résolution des problèmes s'entend maintenant en analyse dans un sens très large: tout algorithme est bon pourvu qu'il conduise au but. Mais, lorsqu'il s'agit d'une question mécanique, on doit prétendre aussi d'être à même d'en prévoir, ne fût-ce qu'en concept, par des opérations mathématiques déterminées (et en nombre fini) les traits essentiels: forme des trajectoires, allure générale du mouvement, et, dans notre cas, d'une manière essentielle, chocs éventuels. La solution de M. SUNDMAN supprime tout caractère singulier des chocs et par là même toute distinction entre mouvements se poursuivant régulièrement et mouvements catastrophiques au bout d'un temps fini.

La contribution de M. SUNDMAN, si remarquable qu'elle soit, est donc loin d'épuiser la question. Mais, comme il arrive souvent après un progrès substantiel, elle a produit et va sans doute stimuler de nouveaux efforts.

* * *

On suivi d'un côté des perfectionnements formels, se rapportant à la manière d'effectuer la régularisation autour des chocs binaires. M. SUNDMAN y était parvenu d'une manière indirecte, par l'introduction d'un nombre non indifférent d'auxiliaires parasites et en sortant du cadre des équations de la Dynamique: circonstance assez gênante, puisqu'on n'a plus le droit d'appliquer (du moins sans discussions laborieuses) au système

---

(14) « Rend. Acc. Lincei », vol, 24_1 (1915), pp. 184-190.

régularisé, ni les résultats théoriques, ni les méthodes de calcul de la mécanique analytique.

Pour le problème plan on a pu aisément parvenir à une véritable régularisation dynamique en généralisant (avec traitement symétrique des trois corps) la transformation ponctuelle

$$x + iy = (\xi + i\eta)^2$$

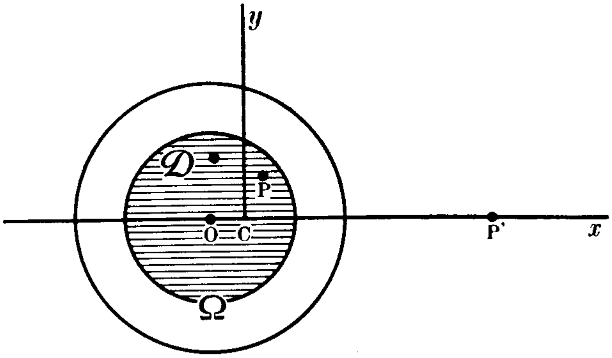
employée pour le problème restreint ([15]).

Le problème dans l'espace a longtemps résisté à mes efforts, tant que j'essayais de régulariser par de simples changements de coordonnées. Les transformations canoniques usuelles se rattachant au mouvement elliptique ne régularisent non plus. Mais on peut en trouver d'analogues: une notamment biens simple, suggérée par le mouvement parabolique, rendant tout holomorphe au voisinage d'un choc binaire.

Ce n'est — faut-il le répéter — qu'un perfectionnement formel permettant de suivre sans effort les quelques passages qui amènent l'introduction des nouvelles variables canoniques et régularisantes ([16]).

* * *

D'autre côté — et c'est de beaucoup le plus important — reste ouverte la question des chocs.



([15]) « Rend. Acc. Lincei », Vol. 24_2, 1915, [in queste « Opere »: vol. terzo, XXXIII-XXXIV-XXXV, pp. 477-544].

([16]) Voir le mémoire cité à la note ([7]), ou bien mes conférences tenues en Espagne. L'édition catalane (Barcelona, Istitut d'Estudis catalans, 1922) a été soignée par M. TERRADAS. Ont paru ensuite une édition italienne (Bologna, Zanichelli, 1924) et une traduction allemande (Berlin, Springer, 1924).

Pour qu'on puisse mieux saisir le peu qui est déjà acquis et la difficulté essentielle à surmonter, je me rapporterai exclusivement au problème restreint, et même à des circonstances initiales relatives au point P, telles que la constante C de l'intégrale (1) soit négative et assez grande.

Sous une telle hypothèse la considération des régions bornées par les courbes (de vitesse nulle)

$$U = -C \tag{3}$$

assure que, si P se trouve initialement à l'intérieur d'un certain oval Ω (peu différent d'une circonférence pour $|C|$ assez grande) renfermant le point O et excluant P', il ne peut jamais sortir de Ω.

Dès lors le seul événement à redouter c'est un choc avec le centre O, et tout revient à former la condition (unique, comme on l'à déjà remarqué dès qu'il s'agit de mouvement plan) pour que P aille justement à passer par O. Je vous ai dit que cette condition a été obtenue sous forme explicite mais pas encore suffisante à épuiser la question. Voici pourquoi. A fin de pouvoir dégager des théorèmes fondamentaux d'existence et construire effectivement la condition de choc sous forme d'une relation uniforme entre la position et la vitesse initiales de P, il a fallu borner ultérieurement la région du plan à laquelle on se rapportait, en supposant P intérieur non seulement — ce qui va de soi — à l'oval Ω correspondant à la valeur choisie pour C, mais encore — ce qui est fâcheux, comme je vais l'expliquer — à un certain domaine D autour de O. Dans D la dite condition peut être présentée sous la forme

$$\dot{\vartheta} = f(\varrho, \vartheta, C), \tag{4}$$

$\varrho^2 = r$, et ϑ étant les coordonnées polaires de P par rapport à O comme pôle et OP' comme axe polaire, $\dot{\vartheta}$ la vitesse angulaire de P, et f une fonction holomorphe des arguments indiqués, périodique par rapport à ϑ.

Si l'equation (4) n'est pas satisfaite, on est parfaitement sûr qu'il n'y aura pas de choc ni avant, ni après l'instant initial, tant que le mobile ne sort pas du domaine D; mais s'il en sort pour y rentrer, ces rapprochements nouveaux pourraient devenir dangereux.

La simple constatation que (4) n'est pas vérifiée permettrait, notamment, de rassurer l'humanité lorsque une issue catastrophique aurait l'apparence d'être imminente. C'est donc quelque chose, mais ce n'est pas tout, ni même le plus intéressant.

Que va-t-il arriver lorsque P, qui reste nécessairement à l'intérieur de Ω, sorte de D? On n'en sait rien; ou plutôt on en sait déjà assez ([17])

([17]) Loco citato ([11]), § 6.

pour devoir en conclure qu'on est encore à mi-chemin. En effet on a constaté sur un exemple élémentaire que la chance de sorties de D, suivies de rentrées et de rapprochements au centre O de plus en plus serrés, n'est pas seulement une éventualité abstraite, mais peut réellement se présenter. D'après cela la circonstance que l'équation (4) ne soit pas vérifiée a seulement une valeur temporaire. Elle ne suffit pas à exclure à longue échéance ni un choc mathématique (coïncidence exacte de P avec O), ni encore moins un choc physique, en entendant par choc physique un simple rapprochement de deux corps au-dessous d'une certaine limite δ_0.

Evidemment, eu égard à la circonstance que les corps célestes ne sont pas des points matériels, mais possèdent des dimensions finies, la condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement se poursuive régulièrement c'est que la distance de leurs centres de gravité (qui se meuvent exactement d'après la loi de NEWTON) reste supérieure à un certain δ_0 (à fixer d'avance d'après la forme et les dimensions des corps).

Dans cette direction on ne possède, que je sache, aucun résultat concret.

Pour notre cas particulier il s'agirait de remplacer O par un petit cercle σ_0 (de rayon δ_0) autour de O, et de fixer, si non les conditions nécessaires et suffisantes, tout au moins quelque classe de conditions initiales pour lesquelles il soit certain que la trajectoire de P ne sillonne jamais le petit cercle σ_0.

Lorsque, C étant donné, P reste intérieur à l'ovale Ω correspondant, il est bien clair que, si le troisième corps P' n'existait pas, les trajectoires de P se réduiraient aux ellipses képlériennes. D'autre part l'effet général de l'attraction du corps extérieur P' est d'augmenter la distance moyenne de P à O, ainsi qu'il résulte d'une règle classique de GAUSS ([18]). La présence du troisième corps P' paraît d'après cela antagoniste à une chute de P sur O, et partant favorable à la sûreté du mouvement troublé dans les cas où pour le mouvement non troublé, les circonstances initiales donneraient lieu à des orbites elliptiques assez proches à la forme circulaire.

Ce n'est évidemment qu'une intuition mécanique, qui pourrait même être trompeuse puisqu'elle se rapporte à un effet moyen. Toutefois c'est une indication assez signifiante pour qu'on soit tenté de la soumettre au crible d'une analyse rigoureuse, en entreprenant l'étude asymptotique de la classe de solutions susdites.

([18]) Voir n°. 12 de la première des conférences citées sous ([16]).

* * *

La rédaction du présent mémoire m'en a inspiré le désir et j'y ai réfléchi pendant ces dernières semaines.

On part naturellement d'un système différentiel préalablement régularisé. Toute réduction faite, on est conduit à deux équations canoniques

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{\partial H}{\partial x}, \tag{5}$$

où soit la variable indépendante φ, soit les inconnues x, y sont des éléments osculateurs des trajectoires du point P: tant que celles-ci ne diffèrent pas beaucoup de cercles, φ est un angle qui oscille (faiblement) autour de POP' et croît toujours pendant le mouvement ([19]), servant à fixer la position de P dans sa rotation autour de P; x et y sont des petits paramètres s'annulant avec l'excentricité e de l'ellipse osculatrice et caractérisant à la fois cette excentricité et l'orientation du grand axe. H est une fonction de x, y, φ holomorphe par rapport à x, y pour $|x|$ $|y|$ assez petits, et périodique par rapport à φ. Elle dépend en outre d'une petite constante ε provenant de C, et en est également fonction holomorphe pour $|\varepsilon|$ assez petit. En posant $\varepsilon = 0$, on a $H = 0$, c'est-à-dire x, y constants. Lorsque ε n'est pas zéro, il s'agit de prouver que, sous une convenable limitation initiale, x, y restent même pour $\varphi \to \infty$ au-dessous (en valeur absolue) d'une limite bien déterminée suffisante à garantir que la trajectoire de P reste toujours assez éloignée de O.

J'ai déjà trop abusé de votre attention bienveillante pour que je puisse songer à vous entretenir maintenant sur la démonstration de cette propriété. Je voudrais seulement la rattacher à un critère formulé récemment par M. Birkhoff à la suite de ses recherches pénétrantes sur les solutions périodiques ([20]). Il me faut prémettre pour cela qu'il y a lieu de distinguer entre les systèmes dynamiques propres, tels qu'on les rencontre en mécanique analytique, et les modèles qu'on fait intervenir en mécanique statistique.

Ces derniers sont quasi-ergodiques; c'est-à-dire que toutes (ou presque toutes) leurs solutions passent et repassent si près que l'on veut de tout état de mouvement (ou point dans l'espace des phases) pour lequel l'énergie garde sa valeur initiale.

([19]) Il s'agit par conséquent d'orbites (absolues) directes, puisque P tourne dans le même sens que P'.

([20]) *Stabilità e periodicità nella dinamica* (conférence tenue au séminaire mathématique de l'Université de Rome) « Periodico di Matematica », (VI) vol. VI, 1926, pp. 262-271.

Au contraire, d'après M. BIRKHOFF, la caractéristique principale des phénomènes dynamiques non collectivités, ni quantisés est la suivante:

Toute trajectoire qui ne s'éloigne pas à l'infini est elle même périodique ou, tour à tour, va s'approcher autant que l'on veut d'orbites périodiques.

Dans le cas du systéme (5) il en résulte justement [21] que les orbites initialement assez proches à des circonférences restent toujours assez éloignées de O, la distance minimum pouvant être limitée d'avance en fonction des données initiales. On est partant à même de constater par la simple inspection de ces données que, dans les cas ordinaires, il n'y a aucun choc à rédouter.

J'ose espérer que vous vous rejouirez de cette conclusion tranquillisante; j'en ai même la certitude, puisque vous y voyez la fin de mon trop long exposé.

---

[21] Je me propose de revenir prochainement sur ce point important en développant soit la déduction du système differentiel (5), soit la dèmonstration des propriétés énoncées et leurs conséquences.

XXIII.

SUR L'ÉCART GÉODÉSIQUE

« Math. Ann. », Bd. 97 (1926),

pp. 291-320.

Une formule classique remontant à Jacobi définit d'une manière très simple l'ensemble des géodésiques g d'une surface, infiniment voisines à une géodésique donnée B, qu'on appelle géodésique *base*. C'est l'équation linéaire

$$\text{(J)} \qquad \frac{d^2 y}{d\sigma^2} + Ky = 0 ,$$

où y désigne la distance (normale) d'un point quelconque M de g à la base, σ l'arc de celle-ci, compté à partir d'une origine arbitraire O jusqu'à la projection P de M sur B, et $K(\sigma)$ la courbure gaussienne de la surface en P.

(J) n'est que l'équation aux variations, d'après POINCARÉ, des géodésiques à partir de B: elle donne lieu, comme on sait (¹), à des conséquences très remarquables sur l'allure des géodésiques ξ dans le voisinage immédiat de la base, la nature de la surface intervenant seulement à travers sa courbure totale K. Il s'agit évidemment d'une question intrinsèque, c'est-à-dire se rapportant exclusivement à la métrique de la surface (définie par son ds^2), et non aux différentes configurations qu'elle peut présenter dans l'espace.

Dès lors on est très naturellement conduit à tâcher d'étendre l'étude de l'écart géodésique à une variété riemannienne V_n à un nombre quelconque de dimensions. A la vérité on possède depuis longtemps les équations de LAGRANGE définissant les géodésiques d'une V_n sous une forme dont la convenance soit théorique, soit algorithmique ne saurait être

(¹) Voir par ex. DARBOUX, *Théorie des surfaces*, vol. III (Paris, Gauthier-Villars, 1894; nouveau tirage 1923), Chap. V; ou bien BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Bd. I. (2. édition, Berlin, Julius Springer, 1924, pp. 83-88).

dépassée. Il suffit donc d'en former les équations aux variations à partir d'une géodésique donnée B. De cette manière, en introduisant, d'après M. BIANCHI, la dérivation d'un vecteur attaché aux points d'une ligne d'une V_n, on parviendra à attribuer aux équations aux variations dont il s'agit une forme condensée, (I) du N° 8, géométriquement expressive et, bien entendu, invariante, c'est-à-dire valable quel que soit le système de coordonnées auxquelles on se rapporte.

La construction effective de ces équations (linéaires du second ordre, au nombre de n, avec autant d'inconnues) exige uniquement la connaissance de la base B et de la métrique de la variété (notamment des symboles de RIEMANN) le long de la même courbe.

On constatera tout à fait généralement que le système susdit admet une intégrale première linéaire donnant lieu à son tour à une relation en termes finis entre les inconnues: c'est comme dire que l'ordre difféRéntiel peut être abaissé a $2(n-1)$; donc en particulier, dans le cas d'une surface, à 2, ce qui s'accorde avec la formule classique de JACOBI rappelée au début.

Naturellement on peut tâcher de simplifier le système (I) en se rapportant à des variables convenables.

Comme préparation à ces réductions j'ai repris, dans la première partie du présent mémoire, une généralisation due à M. FERMI, des coordonnées localement cartésiennes de RIEMANN. Il est bien connu que RIEMANN, par la considération de l'ensemble des géodésiques issues d'un même point O, a montré qu'on peut définir, à partir de coordonnées quelconques x, de nouvelles coordonnées y telles que le ds^2 devienne localement cartésien, dans ce sens que ses coefficients ont des dérivées toutes nulles au point O: le choix des y peut se faire d'une infinité de manières et n'exige que des opérations rationnelles.

M. FERMI à établi que, une courbe quelconque B étant donnée, il est encore possible d'introduire des coordonnées y pour lesquelles le ds^2 a caractère localement cartésien *en tout point* P de B. Pour se procurer effectivement de telles y en fonction des variables primitives x, il faut toutefois avoir recours au transport par parallélisme le long de B, ce qui équivaut à l'intégration préalable d'un système linéaire d'ordre n admettant une intégrale quadratique [2].

Dans le N° 1 j'ai reproduit la remarque originaire de RIEMANN; j'ai exposé ensuite le résultat de M. FERMI en suivant de plus près la voie de RIEMANN et en développant certains détails. J'ai été conduit de la sorte à envisager en premier lieu le cas où la courbe B est géodésique (N^{os} 2, 3),

---

[2] Voir à ce propos mon mémoire *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque* etc., « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », 42, 1917, pp. 173-215 [in questo vol.: I, pp. 1-39].

après quoi on se rend compte plus nettement des petits compléments exigés par le cas général (N° 4). Les N^{os} 5 et 6 se rapportent à l'interprétation géométrique des coordonnées y et à une propriété qui en ressort pour l'arc des géodésiques infiniment proches à une base géodésique donnée B. Les N^{os} 7 et 8 sont dédiés à la formation des equations aux variations en coordonnées générales.

Les coordonnées y apparaissent évidemment indiquées pour l'analyse de ce qui se passe au voisinage immédiat de B. En se rapportant aux y les équations (I) se simplifient à double titre. Tout d'abord la réduction à l'ordre $2(n-1)$ s'accomplit automatiquement: puisque y_n s'identifie avec la variable indépendante σ, une des équations devient une identité et il en restent $n-1$ du second ordre définissant $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ comme fonctions de σ. D'autre part dans ces équations il ne figure pas de dérivées premières, précisément comme il arrive dans l'equation unique (J).

L'introduction des y s'appuie, ainsi qu'on l'a rappelé, sur le transport parallèle le long de la géodésique B. Au point de vue analytique ceci revient à une opération auxiliaire d'ordre $n-2$ ([3]). Une telle intégration intermédiaire disparaît pour $n=2$: circonstance à prévoir puisqu'on savait depuis longtemps que l'obtention de (J) n'en exige pas.

Il resterait à examiner de plus près sous quelles conditions deviennent possibles des réduction ultérieures du système (I). Je n'ai pas même effleuré cette étude, ni non plus l'application des (I) à la question si importante de la stabilité des mouvements.

1. - Coordonnées localement cartésiennes d'après Riemann.

Soit V_n une variété riemannienne à n dimensions rapportée à des coordonnées quelconques $x_1, x_2, \dots, x_n$. Soit

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

la forme quadratique qui caractérise la métrique de la variété: je supposerai, pour fixer les idées sur le cas traditionnel, que la forme soit definie positive ([4]). Je supposerai en outre que les coefficients a_{ik} soient

([3]) Il s'agit d'un système linéaire d'ordre n dont on connaît une intégrale quadratique et une solution particulière (correspondant à la direction de la géodésique elle-même).

([4]) Les considérations qu'on va développer subsistent d'ailleurs sans modifications essentielles, même s'il s'agissait d'une forme indéfinie, pourvu qu'elle soit irréductible et que la base B ne soit pas de longueur nulle.

des fonctions des variables indépendantes x, analytiques et holomorphes dans le domaine qu'on va envisager (5).

Si l'on fixe un point O de coordonnées x_i^0 $(i = 1, 2, ..., n)$, il arrive en général que les $\frac{n^2(n+1)}{2}$ dérivées premières des coefficients a_{ik} ne s'annulent pas en O. On peut toutefois, et cela d'une infinité de manières — c'est la remarque classique de RIEMANN — remplacer les x par d'autres coordonnées y de sorte que toutes les dérivées des (nouveaux) coefficients du ds^2, ou, ce qui revient au même, *tous les symboles de Christoffel s'annulent au point O*. On appelle de telles combinaisons *y coordonnées localement cartésiennes* (parfois aussi géodésiques) *par rapport au pôle O*.

Pour démontrer l'existence et caractériser le dégré d'arbitrariété des fonctions y, on peut se placer au point de vue formel en se proposant la question tout à fait élémentaire de construire les transformations de coordonnées douées de la propriété voulue. C'est ce qu'on fait de préférence dans les expositions didactiques des principes de la géométrie riemannienne (6). Mais on peut aussi construire d'une manière synthétique un tel système de coordonnées (et en déduire ensuite tous les autres d'après la remarque finale de ce N°). C'est la voie originelle de RIEMANN que je vais reproduire ici.

Soit dx_i $(i = 1, 2, ..., n)$ un système d'accroissements infiniment petits donnés aux variables x à partir du point O. Ils définissent un déplacement élémentaire et, par leur rapports, une direction issue de O. A la place de ces $n-1$ rapports on introduit plus symétriquement les *paramètres de direction*, c'est-à-dire [ds étant défini par (1)] les n quantités

$$\lambda^i = \frac{dx_i}{ds}, \tag{2}$$

liées, d'après (1), par l'identité

$$\sum_{1}^{n} {}_{ik}\, a_{ik} \lambda^i \lambda^k = 1\,. \tag{3}$$

Les équations différentielles des géodésiques de V_n (quelles que soient les coordonnées auxquelles on se rapporte) s'écrivent

$$x_i'' = -\sum_{1}^{n} {}_{jh} \begin{Bmatrix} jh \\ i \end{Bmatrix} x_j' x_h' \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{4}$$

(5) J'introduis l'hypothèse de l'analyticité pour abréger la déduction des intégrales des lignes géodésiques et la discussion des conséquences qui servent à notre but. On pourrait toutefois raisonner sur des hypothèses beaucoup moins restrictives. Voir notamment les remarques à la fin des n. 1, 3, 4.

(6) Par exemple dans mes *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (raccolte dal Dottore ENRICO PERSICO), Roma, Stoek, 1925, pp. 187-190.

où $\begin{Bmatrix} j\,h \\ i \end{Bmatrix}$ désignent les symboles bien connus de CHRISTOFFEL (relatifs, cela va sans dire, aux coordonnées choisies), la variable indépendante est l'arc s de la géodésique envisagée (compté à partir d'une origine arbitraire) et $'$ désigne la derivation par rapport à s.

D'après (4) les dérivées secondes des x se présentent comme des fonctions quadratiques des dérivées premières x' à coefficients dépendant des x. Il s'en suit, par dérivation, que les x''' sont des formes du troisième degré par rapport aux x', et, plus généralement, que les dérivées $x^{(m)}$ d'un ordre quelconque m sont des formes d'ordre m par rapport aux x', dont les coefficients dépendent des x. On le démontre bien aisément par induction en supposant d'avoir constaté pour une certaine valeur de m, que

$$x_i^{(m)} = p_i\,,$$

les p étant des polynomes homogènes de dégré m par rapport aux x'. Si l'on dérive par rapport à s il vient évidemment

$$x_i^{(m+1)} = \sum_1^n {}_l \frac{\partial p_i}{\partial x_l} x_l' + \sum_1^n {}_l \frac{\partial p_i}{\partial x_l'} x_l''\,.$$

Or $\partial p_i / \partial x_l$ est encore une forme de dégré m par rapport aux x', et par conséquent la prémière somme est bien une forme de dégré $m+1$. Il en est de même de la seconde, puisque $\partial p_i / \partial x_l'$ est une forme de dégré $m-1$, tandis que, d'après (4), les x_l'' s'expriment par des formes quadratiques. Pour $m=2$ la propriété ressort directement des équations (4): elle est donc vraie en général. C.Q.F.D.

Moyennant le développement de TAYLOR, on peut expliciter les solutions $x_i(s)$ des (4) qui représentent les ∞^{n-1} géodésiques issues de O. Les conditions initiales définissant ces solutions sont (en plaçant pour simplifier l'origine des arcs au point O):

$$(5) \qquad x_i = x_i^0\,, \qquad x_i' = \lambda^i\,, \qquad \text{pour } s = 0\,,$$

les λ^i devant être censées comme des constantes, liées uniquement par (3) (où les a_{ik} se rapportent au point O): les rapports des λ^i restent par consequent tout à fait arbitraires. Dans le développement de TAYLOR (absolument et uniformément convergent par rapport aux λ et à s pour $|s|$ assez petit)

$$(6) \qquad x_i - x_i^0 = \lambda^i s + \sum_2^\infty {}_m x_i^{(m)} \frac{s^m}{m!} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on doit naturellement supposer le $x_i^{(m)}$ calculées d'après (4) et (5). La remarque de tout à l'heure nous permet de retenir que *les* $(1/m!)x_i^{(m)}$ *sont des polynomes homogènes de dégré* m, $X_m^i(\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^n)$, par rapport aux arguments λ, dont les coefficients sont des constantes bien déterminées, dépendant du point O.

Introduisons maintenant avec RIEMANN, à la place des x, les nouvelles variables

$$y_i = \lambda^i s \qquad (i = 1, 2, ..., n). \tag{7}$$

Comme, à cause de l'homogénéité,

$$s^m X_m^i(\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^n) = X_m^i(y_1, y_2, ..., y_n)\,,$$

les (6) donnent lieu aux formules de transformation

$$x_i - x_i^0 = y_i + \sum_2^\infty {}_m X_m^i(y_1, y_2, ..., y_n) \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{8}$$

les X_m étant des polynomes de dégré m par rapport aux y et les séries étant absolument et uniformément convergentes tant que les $|y|$ restent assez petits.

Le point O $(x_i = x_i^0)$ correspond évidemment à l'origine $(y_i = 0)$ des nouvelles coordonnées, et les formules (8) définissent une véritable transformation de coordonnées, régulière et biunivoque au voisinage du point O, puisque le déterminant fonctionnel des seconds membres des (8) se réduit à l'unité au point O (pour $y_i = 0$).

Nous sommes maintenant à même d'établir, presque sans calculs, que, si l'on remplace dans (1) les variables x par y, les nouveaux symboles de CHRISTOFFEL, disons $\left\{\begin{matrix}\overline{j\,h} \\ i\end{matrix}\right\}$, s'annulent tous au point O.

Pour cela on s'appuie sur la remarque que, si dans les formules (8) on remettait $\lambda^i s$ à la place de chaque y_i, en regardant les λ^i comme des constantes (quelconques, mais bien déterminées), on serait reconduit aux equations paramétriques (6) d'une géodésique issue de O. C'est à dire que les equations (7), sous la même hypothèse pour les λ^i, définissent justement la même géodésique lorsqu'on se rapporte aux variables y. Il s'en suit que les équations différentielles des géodésiques en coordonnées y,

$$y_i'' = -\sum_1^n {}_{jh} \left\{\begin{matrix}\overline{j\,h} \\ i\end{matrix}\right\} y_j' y_h' \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{4'}$$

doivent être satisfaites par les expressions (7) des y, et cela pour tout choix des constantes λ satisfaisant uniquement à (3).

Si l'on porte dans (4′) les valeurs (7) des y, les premiers membres s'annulent, et on a par conséquent

$$\sum_1^n{}_{jh} \begin{Bmatrix} \overline{j\,h} \\ i \end{Bmatrix} \lambda^j \lambda^h = 0\,,$$

qui doivent être satisfaites pour toute valeur de s, et en particulier pour $s = 0$.

Les $\begin{Bmatrix} \overline{j\,h} \\ i \end{Bmatrix}$ se rapportent dans ce cas au point O et ne dépendent plus des λ. En les désignant par $\begin{Bmatrix} \overline{j\,h} \\ i \end{Bmatrix}_0$, on se trouve de la sorte conduit aux conditions

$$\sum_1^n{}_{jh} \begin{Bmatrix} \overline{j\,h} \\ i \end{Bmatrix}_0 \lambda^j \lambda^h = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

valables quels que soient les rapports des λ. Ceci implique nécessairement

$$\begin{Bmatrix} \overline{j\,h} \\ i \end{Bmatrix}_0 = 0 \qquad (i, j, h = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire que, par rapport aux variables y, tous les symboles de Christoffel s'annulent au point O.

Remarque. – La détermination des combinaisons cartésiennes y des x d'après les formules de transformation (8), implique (à cause des séries des seconds membres) l'intégration préalable des équations (4) des géodésiques. Mais il est essentiel d'observer que, si l'on remplace les seconds membres des (8) par d'autres ayant en commun les termes des deux premiers ordres par rapport aux y, tout en différant d'une manière quelconque au delà du second ordre, on définit de nouvelles coordonnées également cartésiennes au point O. En particulier on pourrait prendre

$$(8') \qquad x_i - x_i^0 = y_i + X_2^i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_i - \frac{1}{2}\sum_1^n{}_{jh} \begin{Bmatrix} j\,h \\ i \end{Bmatrix} y_j\, y_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

auquel cas les second membres se réduisent à des polynômes du second dégré et les coefficients aux symboles de Christoffel relatifs aux variables originaires x et au point O. C'est d'après cela qu'on a bien le droit d'affirmer qu'on peut introduire des coordonnées localement cartésiennes d'une infinité de manières n'éxigeant que des transformations rationnelles.

2. - Coordonnées cartésiennes le long d'une courbe. Aperçu géométrique préliminaire.

Une belle généralisation du résultat de RIEMANN est due à M. FERMI (7). Il a fait remarquer que, une courbe quelconque B de V_n

$$x_i = \varphi_i(\sigma) \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{9}$$

étant donnée, on peut introduire de nouvelles coordonnées y ayant caractère cartésien en tout point P de B, c'est-à-dire telles que les symboles de CHRISTOFFEL s'annulent tout le long de B.

Il n'est pas sans intérêt de se rendre compte d'avance de la marche à suivre pour l'introduction des y. On y sera conduit très naturellement en se faisant guider par analogie géométrique avec le cas élémentaire où l'on aurait affaire à une courbe B de l'espace ordinaire rapportée à des coordonnées curvilignes quelconques x. Pour faire ressortir cette analogie on prendra soin de choisir, parmi les locutions et les constructions de la géométrie élémentaire, celles qui s'étendent d'une manière évidente à une variété riemannienne V_n. Ceci posé, comment s'y prendra-t-on pour introduire, à partir des x, des coordonnées cartésiennes y dans notre espace? Envisageons d'abord l'hypothèse particulière, qui est d'ailleurs la plus importante pour notre but, que B est une géodésique (droite).

Une des coordonnées y, disons par ex. y_3, est alors donnée par l'arc de B (abscisse) compté à partir d'un point origine quelconque O. Ensuite, si, pour tout point P de B, on imagine le lieu Σ (plan) des géodésiques (droites) perpendiculaires à B, on a une famille de surfaces qu'on appelera $y_3 =$ const., la constante étant celle qui correspond au point P. Un point M de l'espace peut être caractérisé par la valeur de y_3 appartenant à la surface Σ de la famille, qui le contient, et en outre par deux autres coordonnées y_1, y_2 de ce plan. Pour les définir, on mènera par O deux droites perpendiculaires entre elles dans le plan Σ_0 correspondant au point O, et ensuite leurs parallèles en tout point P de B. On engendre de la sorte un réseau cartésien tout le long de B, et il suffit d'associer à y_3 justement les deux autres coordonnées, fournies, en tout Σ, par ce réseau.

(7) *Sopra i fenomeni che avvengono in prossimità di una linea oraria*, « Rend. Acc. Lincei », 21 (1er seméstre 1922), pp. 21-23, 51-52. Comparez aussi les pages 190 à 191 demes *Lezioni etc.*, citées tout à l'heure.

En traduisant analytiquement ce critère on parvient aisément à la construction effective des formules de transformation entre les coordonnées originaires x et les y susdites.

Je me propose de détailler ceci dans le N° suivant. En attendant je voudrais esquisser aussi les compléments géométriques qui conviennent au cas d'une courbe quelconque B (toujours de l'espace ordinaire).

On mène par un point initial O de B toutes les géodésiques orthogonales à B, et par tout autre point P de B les géodésiques sortant dans les directions parallèles (droites parallèles), qui engendrent justement une surface géodésique Σ (plan) de pôle P. On fera correspondre à une Σ déterminée la valeur σ de l'arc de B compté de O à P. Cette σ est une coordonnée auxiliaire. Pour établir le passage entre les coordonnées assignées x et des coordonnées cartésiennes il y a lieu de fixer l'attention sur un trièdre trirectangle de référence T ayant l'origine en O, l'axe des y_3 tangent à B, et les deux autres dans le plan Σ_0. Par rapport à ces axes la courbe B aura certaines équations paramétriques

$$y_i = \psi_i(\sigma)\,, \tag{11}$$

les fonctions ψ_i étant inconnues a priori. Quoi qu'il en soit, moyennant le transport parallèle de O à P, on peut introduire des différences $y_1 - \psi_1(\sigma)$, $y_2 - \psi_2(\sigma)$, ayant la signification de coordonnées dans Σ, localement cartésiennes par rapport au point P. On construit de cette manière les formules de transformation entre les x_i et y_1, y_2, σ. C'est ce qu'on va voir au N° 4, où nous aborderons directement le cas général d'une B appartenant à une V_n quelconque.

Le dernier pas, consistant à introduire la troisième, ou en général l'n-ième coordonnée cartésienne — disons désormais y_n — à la place de σ, s'accomplit très simplement, moyennant l'équation $y_n = \psi_n(\sigma)$, en utilisant les formules de transformation et exprimant d'après celles-ci que la direction $\boldsymbol{u}_n$ suivant laquelle varie y_n seule se maintient orthogonale le long de B aux $n-1$ directions suivant lesquelles varie une seule des autres y. On en tire n relations, entre les paramètres de la direction $\boldsymbol{u}_n$ se rapportant aux anciennes et aux nouvelles variables, conduisant à déterminer les fonctions $\psi_i(\sigma)$ (chacune à une constante près). Ce point aussi sera développé au N° 4.

3. - Cas d'une géodésique.

On continuera à supposer (voir la note du N° 1) l'analyticité de l'expression (1) du ds^2. Dès lors les seconds membres $\varphi_i(\sigma)$ des équations (9) sont des fonctions régulières de l'argument σ pour les valeurs de cet argument qui correspondent à la géodésique (ou portion de géodésique) B dont il s'agit; quant au paramètre σ, on supposera que ce soit justement l'arc de B compté à partir d'un point O (quelconque, mais bien déterminé). Choisissons, en O, $n-1$, directions $\boldsymbol{u}_\alpha^0$ de paramètres $\boldsymbol{u}_\alpha^{0/i}$ ($\alpha = 1, 2, ..., n-1$) normales à B et orthogonales entre elles. Imaginons de les transporter parallèlement en nous déplaçant sur B. Soient, pour un point quelconque P de B, $\boldsymbol{u}_\alpha$ ces $n-1$ directions transportées parallèlement, $u_\alpha^i(\sigma)$ ($i = 1, 2, ..., n$) leurs paramètres de direction, $u_{\alpha/i}$ les *moments* correspondants, c'est-à-dire [8] les combinaisons linéaires des paramètres

$$u_{\alpha/i} = \sum\nolimits_j a_{ij} u_\alpha^j .$$

D'après les propriétés fondamentales du transport parallèle, les direction $\boldsymbol{u}_\alpha$ et la tangente à le géodésique B continueront à former en tout point P un ennuple orthogonal.

Une direction quelconque $\boldsymbol{u}^0$, issue de O normalement à B, est naturellement contenue dans la variété linéaire des $\boldsymbol{u}_\alpha^0$. Désignons par N_α ($\alpha = 1, 2, ..., -1$) les cosinus des angles qu'elle forme avec ces $\boldsymbol{u}_\alpha^0$. Lorsqu'on la transporte parallèlement, en suivant B, de O en P, elle reste normale à B et continue a former, avec les $\boldsymbol{u}_\alpha^0$ transportées, c'est-à-dire avec les $\boldsymbol{u}_\alpha$, les mêmes angles. C'est comme dire que les paramètres $u_i(\sigma)$ définis, le long de B, par les équations du parallélisme

$$\frac{du^i}{d\sigma} = -\sum_{1}^{n}{}_{jh} \left\{ \begin{matrix} j\,h \\ i \end{matrix} \right\} \frac{d\varphi_j}{d\sigma} u^h \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

et les conditions initiales

$$u^i(0) = \sum_{1}^{n-1}{}_\alpha N_\alpha u_\alpha^{0/i} \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

ont, quel que soit σ, les expressions

$$(12) \qquad u_i(\sigma) = \sum_{1}^{n-1}{}_\alpha N_\alpha u_\alpha^i(\sigma) \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

les N_α étant des constantes.

Ceci posé, considérons au point quelconque P de B les ∞^{n-2} géodésiques sortant de ce point dans une direction quelconque $\boldsymbol{u}$ normale à B. Elles forment une surface, ou, si l'on veut, hypersurface Σ à $n-1$ di-

---

[8] Chap. V, §§ 2, 3 et 22 des *Lezioni etc.*

mensions de pôle P. En faisant varier P sur B on a une famille ∞^1 de ces hypersurfaces. Tout point M de V_n (au voisinage de B) appartient à une de ces hypersurfaces et à une seule. On peut le caractériser en se donnant d'abord la Σ à laquelle il appartient, et ensuite $n-1$ coordonnées y_α ($\alpha=1, 2, \ldots, n-1$) aptes à déterminer sa position sur Σ, ayant notamment caractère cartésien (sur cette Σ) par rapport au point P. Comme paramètre définissant Σ on peut prendre par exemple la valeur de σ correspondant au point P. Une de nos nouvelles coordonnées sera d'après cela

$$y_n = \sigma \,. \tag{13}$$

Pour associer à y_n d'autres paramètres y_α jouissant de la propriété annoncée il convient d'envisager l'ensemble des géodésiques qui forment une des Σ. Il s'agit des géodésiques sortant dans toutes les directions $\boldsymbol{u}$ orthogonales à B. Comme dans le N° 1, les équations paramétriques d'une de ces géodésiques peuvent être construites d'après les équations différentielles (4), sous forme de séries de puissances de l'arc s compté à partir de P.

On a ainsi, à la place des (6), les équations

$$x_i - \varphi_i(\sigma) = u^i s + \sum_2^\infty{}_m \frac{x_i^{(m)}}{m!} s^m \,, \tag{14}$$

les $x_i^{(m)}$ étant maintenant des polynômes homogènes de degré m par rapport aux u_i. A cause des (12), *on peut* également *regarder les* $x_i^{(m)}$ *comme des formes du degré m par rapport aux* N_α, dont les coefficients dépendent en général de σ. Dès lors, si l'on introduit, par analogie aux définitions (7) de Riemann, les $n-1$ nouveaux arguments

$$y_\alpha = N_\alpha s \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, n-1), \tag{15}$$

et si l'on tient compte des (11), de la structure des $x_i^{(m)}$ et de (13), on peut attribuer aux (14) la forme

$$x_i = \varphi_i(y_n) + \sum_1^{n-1}{}_\alpha u^i_\alpha(y_n) y_\alpha + \sum_2^\infty{}_m X^i_m(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

les X^i_m étant des polynomes homogènes de degré m par rapport aux y_α ($\alpha=1, 2, \ldots, n-1$) dont les coefficients dépendent de y_n.

On peut envisager ces formules comme définissant une transformation entre les x et les y. En effet elles fournissent directement les x comme fonctions des y, ces fonctions étant holomorphes au voisinage de la ligne $y_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, ..., n-1)$, qui est justement notre B, puisque, pour $y_\alpha = 0$, on tire des (16) $x_i = \varphi_i(y_n)$. D'autre part, lorsque les modules des y_α sont assez petits (quelle que soit d'ailleurs la valeur de y_n correspondant à un point P de B) on peut inversement tirer des (16) les y en fonction des x. C'est ce qui résulte du fait que le déterminant fonctionnel des seconds membres des (16), pour $y_\alpha = 0 (\alpha = 1, 2, ..., n-1)$, qui est

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \dots & u_1^n \\ u_2^1 & u_2^2 & \dots & u_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n-1}^1 & u_{n-1}^2 & \dots & u_{n-1}^n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \end{vmatrix},$$

ayant posé pour abreger l'écriture $\varphi_i' = d\varphi_i/dy_n = d\varphi_i/d\sigma$, ne s'annule pas. Pour s'en convaincre il suffit de remarquer que Δ est formé moyennant les paramètres d'un ennuple de directions mutuellement orthogonales sortant d'un même point P de B. Ce déterminant est certainement différent de zéro en même temps que le déterminant analogue ∇ formé avec les moments, puisque leur produit est égal à 1: c'est ce qui résulte immédiatement des relations d'orthogonalité, lorsque on exécute par lignes horizontales, d'après la régle de multiplication des déterminants, le produit $\Delta\nabla$.

Après avoir constaté que les formules (16) établissent effectivement un changement de variables entre les x et les y, il convient d'en déduire quelques conséquences se rapportant aux nouvelles coordonnées y. Tout d'abord la circonstance que les (16) proviennent des (14) moyennant les substitutions (13) et (15), nous assure que:

a) les équations:

$$(15) \qquad y_\alpha = N_\alpha s \qquad (\alpha = 1, 2, ..., n-1),$$

associées à $y_n = \text{const.} =$ valeur de σ au point P, définissent les géodésiques de V_n, *pourvu qu'on y regarde les* N_α *et* y_n *comme des constantes.*

Ces n constantes (y_n et N_α) sont d'ailleurs arbitraires sauf la liaison $\sum_1^{n-1}{}_\alpha N_\alpha^2 = 1$, imposée aux N_α par leur qualité de cosinus directeurs et la limitation des valeurs $y_n = \sigma$ aux points P de B.

On a déjà remarqué que, pour un point quelconque P de B, les y_α $(\alpha = 1, 2, ..., n-1)$ sont toutes nulles. Considérons la ligne (géodésique) (15) issue de P pour laquelle tous les N_α s'annulent sauf $N_\beta = 1$, β étant un indice bien déterminé entre 1 et $n-1$. Désignons par v^i_β les paramètres de direction dy_i/ds (se rapportant aux coordonnées y) d'une telle géodésique au point P. On a évidemment (d'après (15), $y_n =$ const. et le choix des N)

$$(17) \qquad v^i_\beta = 0 \quad (i \neq \beta), \qquad v^\beta_\beta = 1 \quad (\beta = 1, 2, ..., n-1).$$

Comme des (16), en différentiant et en posant ensuite $y_\alpha = 0$, on tire

$$(18) \qquad dx_i = \varphi'_i \, dy_n + \sum_1^{n-1}{}_\alpha u^i_\alpha \, dy_\alpha \, ,$$

on reconnaît immédiatement, en divisant par ds, que, pour les $n-1$ directions susdites, les paramètres dx_i/ds se rapportant aux anciennes variables sont justement les u^i_β; donc:

b) Les $n-1$ directions des lignes coordonnées y_β (issues d'un point de B), c'est-à-dire les $n-1$ directions caractérisées, en variables y, par les paramètres (17) *coïncident avec les directions (mutuellement perpendiculaires) $\boldsymbol{u}_\beta$; chacune d'elles, en se déplaçant sur B, se transporte par parallélisme.*

Il convient de remarquer en passant que a) et b) subsisteraient également si B était une courbe quelconque, auquel cas les $n-1$ directions $\boldsymbol{u}_\alpha$, déplacées le long de B, seraient encore mutuellement orthogonales, mais ne se maintiendraient pas en général orthogonales à B, quoiqu'on les ait choisi ainsi initialement (au point O).

Dans l'hypothèse que B soit géodésique, il y a lieu de tenir compte ultérieurement de cette circonstance, en coordonnées y. On peut le faire en exprimant l'autoparallélisme:

c) La direction de B, ayant en tout point P (par rapport aux coordonnées y) *les paramètres*

$$(19) \qquad y'_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, ..., n-1), \qquad y'_n = 1$$

se maintient parallèle à elle-même le long de B.

Nous avons finalement tout ce qu'il faut pour démontrer que les nouvelles coordonnées y sont cartésiennes par rapport à tout point P de B. On n'a qu'à faire intervenir successivement les équations différentielles (en coordonnées y) se rattachant à a), b), c).

Tout d'abord, pour les géodésiques issues de P normalement à B, qui appartiennent par définition de Σ à la surface $y_n = \text{const.}$ passant par P, on a, d'après (15) et la constance de y_n,

$$y'_\alpha = \frac{dy_\alpha}{ds} = N_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1), \quad y'_n = 0, \tag{20}$$

d'où

$$y''_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{20'}$$

Les équations (4') des géodésiques en coordonnées y, dès qu'on y remplace les y_α par leurs valeurs (15) et qu'on y regarde y_n comme une constante [ce qui entraîne (20) et (20')] donnent

$$\sum_{1}^{n-1}{}_{jh} \overline{\begin{Bmatrix} j\,h \\ i \end{Bmatrix}} N_j N_h = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Envisageons en particulier le point P ($s = 0$), où les coefficients $\overline{\begin{Bmatrix} j\,h \\ i \end{Bmatrix}}$ sont indépendants des N. Puisque les rapports des N sont arbitraires, il s'en suit, *en tout point P de B*,

$$\overline{\begin{Bmatrix} \alpha\,\beta \\ i \end{Bmatrix}} = 0, \tag{21}$$

quelles que soient les valeurs des indices α, β entre 1 et $n-1$, et pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Passons à b). En coordonnées y le transport parallèle d'une direction de paramètres v^i suivant une courbe, dont soient $d\sigma$ l'arc élémentaire et $dy_i/d\sigma = y'_i$ les paramètres, est régi par les équations

$$\frac{dv^i}{d\sigma} = -\sum_{1}^{n}{}_{jh} \overline{\begin{Bmatrix} j\,h \\ i \end{Bmatrix}} y'_j v^h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour B on a en particulier les paramètres (19), et ces équations se réduisent à

$$\frac{dv^i}{d\sigma} = -\sum_{1}^{n}{}_{h} \overline{\begin{Bmatrix} n\,h \\ i \end{Bmatrix}} v^h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Elles doivent admettre les $n-1$ solutions (17); ce qui équivaut à

$$\overline{\begin{Bmatrix} n\,\beta \\ i \end{Bmatrix}} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, n-1;\ i = 1, 2, \ldots, n) \tag{23}$$

tout le long de B.

En rapprochant (21) et (23) on reconnaît que les conditions a) et b) prises ensemble entraînent que presque tous les symboles de CHRISTOFFEL s'annulent; il n'y a que les n de la forme $\left\{\begin{matrix} n\,n \\ i \end{matrix}\right\}$ qui restent exclus.

Il s'annulent eux aussi lorsque B est une géodésique. On n'a qu'à exprimer d'après c) que les paramètres (19) de B fournissent encore une solution des (22). Il s'en suit

$$\overline{\left\{\begin{matrix} n\,n \\ i \end{matrix}\right\}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{24}$$

en tout point P de B. C. Q. F. D.

REMARQUE. – Ici encore, comme à la fin du N° 1, il est important de remarquer qu'on peut modifier à son gré les formules de transformation (16) pourvu qu'on ne touche pas aux termes des deux premiers ordres par rapport aux y_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$). En particulier il est loisible d'employer la transformation (quadratique par rapport aux y_1, $y_2, \ldots, y_{n-1}$)

$$x_i = \varphi_i(y_n) + \sum_1^{n-1}{}_\alpha\, u^i_\alpha(y_n) y_\alpha + X^i_2(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) \tag{16'}$$

qui exige uniquement la connaissance des symboles de Christoffel le long de B et des solutions u^i_α des équations du transport parallèle sur la même géodésique.

4. - Théorème de M. Fermi.

M. FERMI a démontré plus généralement ([9]) (par une méthode un peu différente et sans détailler) l'existence de coordonnées se comportant comme cartésiennes le long d'une courbe quelconque B, qu'on continuera à supposer définie par les équations paramétriques (9), les φ_i désignant des fonctions régulières de l'argument.

Pour rattacher cette proposition aux considérations qui précèdent, on introduit (comme on l'a esquissé au N° 2) la famille des surfaces géodésiques Σ ayant leur pôle au point arbitraire P de B et définies comme il suit. Pour un certain point initial O (d'ailleurs arbitraire), Σ est le lieu des géodésiques qui sortent de O othogonalement à B; pour un autre point quelconque P, c'est le lieu des géodésiques issues de P dans

([9]) Loc. cit. au n. 2.

les directions parallèles (suivant B) à celles qu'on a menées de O. En faisant correspondre à toute surface Σ la valeur du paramètre σ appartenant au point P, on arrive à introduire la famille des surfaces $\sigma = \text{const.}$ et par là une coordonnée auxiliaire σ dans V_n.

Comme au N° précédent on envisagera $n-1$ directions $\boldsymbol{u}_\alpha^0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$ sortant de O orthogonalement à B et perpendiculaires entre elles. Soient $\boldsymbol{u}_\alpha$ les directions parallèles sortant d'un point quelconque P de B. Ces $\boldsymbol{u}_\alpha$ seront encore mutuellement perpendiculaires et appartiendront par définition à Σ, sans rester en général normales à B: toutefois, comme il en est ainsi au point O, et que par conséquent (N° préc.), le déterminant Δ_0 des paramètres de l'ennuple formé par ces $n-1$ directions $\boldsymbol{u}_\alpha^0$ et la tangente $\boldsymbol{t}^0$ à B ne s'annule pas, on peut retenir, par continuité, que le déterminant analogue Δ, se rapportant aux $\boldsymbol{u}_\alpha$ et à la tangente $\boldsymbol{t}$ à B, dans un point P assez proche à O, ne s'annule pas non plus. Cette inégalité $\Delta \neq 0$ exprime, peut-on dire, que Σ ne contient pas la direction $\boldsymbol{t}$, ou bien encore que *le cosinus de l'angle compris entre* $\boldsymbol{t}$ *et la direction* $\boldsymbol{u}_n$ *normale à* Σ *au point* P *ne s'annule pas.*

Il est loisible d'après cela de borner nos considérations à un arc de B autour de O assez petit pour qu'on ait, en tout point P

$$\Delta \neq 0, \tag{25}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\cos \widehat{\boldsymbol{u}_n \boldsymbol{t}} = 0\ . \tag{25'}$$

En gardant les notations du N° précédent on aura les expressions (12) pour les paramètres de toute direction tangente à Σ au pôle P. Une géodésique quelconque sortant de P dans une telle direction sera ici encore représentée par les formules (14).

L'introduction des nouvelles coordonnées y s'appuie désormais sur les remarques du N° 2. On suppose d'une manière générale que la courbe B soit définie, par rapport à ces y, par des équations paramétriques

$$y_i = \psi_i(\sigma) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{10}$$

les ψ_i étant des fonctions (régulières), inconnues a priori, de l'arc σ, dont on se réserve de disposer convenablement.

Après cela on remplace les definitions (15) par

$$y_\alpha - \psi_\alpha(\sigma) = N_\alpha s \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{26}$$

et l'on peut attribuer aux équations (14) des géodésiques constituant les surfaces Σ la forme

$$x_i = \varphi_i(\sigma) + \sum_1^{n-1}{}_\alpha u_\alpha^i\{(\sigma)y_\alpha - \psi_\alpha(\sigma)\} + \tag{27}$$

$$+ \sum_2^\infty{}_m X_m^i(y_1 - \psi_1, y_2 - \psi_2, \ldots, y_{n-1} - \psi_{n-1}, \sigma),$$

les X_m^i étant des polynomes homogènes de degré i par rapport aux arguments $y_\alpha - \psi_\alpha$, qui dépendent en outre de σ.

Montrons que ces formules (27) définissent une transformation effective entre les coordonnées originaires x et les n arguments $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \sigma$, pour des valeurs assez petites des $|y_\alpha - \psi_\alpha|$ et pour tout σ correspondant à l'arc envisagé de B; c'est-à-dire dans une région assez petite de l'espace V_n environnant cet arc.

Formons à ce but le déterminant fonctionnel des x_i par rapport aux y, σ, en posant, après avoir dérivé, $y_\alpha = \psi_\alpha$. Un tel déterminant se réduit à

$$\begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_{n-1}^1 & \varphi_1' - \sum_1^{n-1}{}_\alpha u_\alpha^1 \psi_\alpha' \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_{n-1}^2 & \varphi_2' - \sum_1^{n-1}{}_\alpha u_\alpha^2 \psi_\alpha' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{n-1} & u_2^{n-1} & \ldots & u_{n-1}^{n-1} & \varphi_{n-1}' - \sum_1^{n-1}{}_\alpha u_\alpha^{n-1} \psi_\alpha' \\ u_1^n & u_2^n & \ldots & u_{n-1}^n & \varphi_n' - \sum_1^{n-1}{}_\alpha u_\alpha^n \psi_\alpha' \end{vmatrix} = \Delta;$$

puisque la dernière colonne peut être remplacée par $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_{n-1}', \varphi_n'$, il est different de zéro d'après (25). On peut par suite regarder comme nouvelles coordonnées les y_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$ associées à σ. Il est permis de substituer ultérieurement à σ une fonction quelconque de ce même argument, pourvu que ce soit une véritable fonction, non pas une constante. On choisira la dernière des (10)

$$y_n = \psi_n(\sigma) \tag{28}$$

en supposant que

$$\psi_n'(\sigma) \neq 0 \tag{29}$$

en tout point P de l'arc B dont il s'agit. Comme on l'a dit, les fonctions ψ figurant dans la représentation paramétrique (10), sont a priori indéterminées et on se propose de les fixer par la condition que les y aient caractère cartésien le long de B. Nous verrons dans un instant que cela réussit et que l'inégalité (29) se trouve respectée.

Considérons donc σ comme une fonction de y_n provenant de la résolution de (28) [ce qui est légitime d'après (29)], et, avec cette supposition envisageons les (27) comme formules de transformation entre les x et les y. En différentiant et posant ensuite $y_\alpha = \psi_\alpha$, $d\sigma = (1/\psi_n')\, dy_n$, on a

$$dx_i = \sum_1^{n-1}{}_\alpha u_\alpha^i\, dy_\alpha + \frac{1}{\psi_n'}\{\varphi_i' - \sum_1^{n-1}{}_\alpha u_\alpha^i\, \psi_\alpha'\} dy_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{30}$$

variables en tout point P de B.

Comme au N° préc. d'après les équations (18), on tire actuellement des (30) que les $n-1$ directions caractérisées (en coordonnées y) par les paramètres (17) coïncident avec les $\boldsymbol{u}_\beta$ ($\beta = 1, 2, \ldots, n-1$), issues les unes et les autres d'un point quelconque P de B. C'est l'enoncé *b*) du N° préc.

Si les y doivent avoir caractère cartésien le long de B, il faut (entre autre) que la direction de la ligne coordonnée y_n (je veux dire la direction suivant laquelle varie seulement y_n) soit en tout point P perpendiculaire aux $n-1$ directions $\boldsymbol{u}_\alpha$. Les paramètres $v_n^i = dy_i/ds$ d'une telle ligne coordonnées sont évidemment

$$v_n^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad v_n^n = 1\,. \tag{31}$$

D'après (30) les paramètres $u_n^i = dx_i/ds$ de la même direction rapportées aux coordonnées x, sont donnés par

$$u_n^i = \frac{1}{\psi_n'}\{\varphi_i' - \sum_1^{n-1}{}_\alpha u_\alpha^i\, \psi_\alpha'\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces formules peuvent être écrites:

$$\sum_1^n{}_h u_h^i \psi_h' = \varphi_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{32}$$

Avec les $n-1$ directions $\boldsymbol{u}_\alpha$ mutuellement orthogonales (qui proviennent d'un transport par parallélisme le long de B) on peut censer connue la direction $\boldsymbol{u}_n$ qui complète l'ennuple orthogonal. D'après cela ce sont précisement les (32) qui fournissent les fonctions ψ_i (a priori inconnues).

Introduisons les *moments* $u_{k/i}$ des directions $\boldsymbol{u}_k$, et multiplions les (32) par $u_{k/i}$ en faisant la somme par rapport à l'indice i (de 1 à n). On obtient

$$\psi_k' = \sum_{i}^{n}{}_1 u_{k/i}\varphi_i' \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{32'}$$

ce qui donne explicitement les ψ'. Les fonctions ψ sont ainsi déterminées chacune à une constante près: ceci correspond, peut-on-dire, à l'arbitrariété de l'origine du système cartésien de référence dans le voisinage immédiat de la courbe B, où subsiste (au second ordre près) la géométrie euclidienne.

Des (32′) on tire en particulier, pour $k = n$,

$$\psi_n' = \sum_{i}^{n}{}_1 u_{n/i}\varphi_i' \, .$$

Puisque les $u_{n/i}$ sont (en coordonnées x) les moments de la direction $\boldsymbol{u}_n$, et les φ_i' sont les paramètres de la tangente $\boldsymbol{t}$ à B, l'expression de ψ_n' peut être écrite

$$\psi_n' = \cos\,(\widehat{\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{t}})\, ,$$

ce qui assure, d'après (25′), que l'inégalité

$$\psi_n' \neq 0$$

est bien vérifiée sur l'arc de B auquel on a convenu d'avance de se borner.

Revenons maintenant aux formules de transformation (27). En les différentiant nous en avons déduit la validité de l'énoncé b). L'enoncé a) subsiste lui aussi, sauf la circonstance que, dans le cas actuel, les équations paramétriques des géodésiques formant une hypersurface Σ sont fournies, en coordonnées y, par

$$y_\alpha = \psi_\alpha(\sigma) + N_\alpha s \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{26}$$

associées à

$$y_n = \psi_n(\sigma)\, ,$$

au lieu d'être par (15), associées à $y_n = \text{const}$. Puisque toutefois ici encore, pour ces géodésiques, y_n et les N_α doivent etre regardées comme des constantes, il s'en suit, en dérivant par rapport à s,

$$y'_\alpha = N_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, n-1), \qquad y'_n = 0\,; \qquad y''_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

identiques aux (20), (20') du N° précédent. Absolument comme alors on en tire que a) entraîne les égalités

$$\overline{\begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ i \end{Bmatrix}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n-1); \\ i = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}. \tag{21}$$

D'autre part, d'après ce qui précède, chacun des systèmes de paramètres (17) et (31) appartient à des directions parallèles le long de B. C'est comme dire que les équations du parallélisme en coordonnées y,

$$\frac{dv^i}{d\sigma} = -\sum_1^n{}_{jh} \overline{\begin{Bmatrix} j\,h \\ i \end{Bmatrix}} \psi'_j v^h \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{33}$$

doivent être satisfaites par une quelconque des déterminations (17) ou (31) des v^i. En tenant compte des (21) et du fait que ψ'_n ne s'annule pas, la considération des (17) donne

$$\overline{\begin{Bmatrix} n\,\beta \\ i \end{Bmatrix}} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, n-1;\ i = 1, 2, \dots, n). \tag{23}$$

Enfin la circonstance que le système (33) doit être vérifié aussi par les valeurs (31), dès qu'on y annule les symboles de CHRISTOFFEL du type (21) ou (23), conduit à

$$\overline{\begin{Bmatrix} n\,n \\ i \end{Bmatrix}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{24}$$

Donc *tous* les symboles de CHRISTOFFEL se rapportant aux variables y s'annulent le long de B. C. Q. F. D.

Il est à peine nécessaire de répéter ici la remarque des N^{os} 1 et 3 qu'il y a toujours une grande arbitrariété dans le choix de coordonnées localement cartésiennes. On peut notamment, dans les formules de transformation (27) liant, conjointement avec (28), les y aux variables origiginaires, réduire les séries à leurs premiers termes

$$X_2^i(y_1 - \psi_1,\ y_2 - \psi_2,\ \ldots,\ y_{n-1} - \varphi_{n-1},\ \sigma)\ ,$$

et les y continueront à se comporter comme des coordonnées cartésiennes tout le long de B.

5. - Interprétation des coordonnées y dans le cas d'une géodésique. Cas général.

Plaçons-nous d'abord dans le cas particulier où il s'agit d'un espace euclidien V_n.

La géodésique B est alors une droite. Si M est un point quelconque de V_n et P le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur B, y_n n'est autre que l'abscisse (de M ou de P) comptée sur cette droite à partir de O; les autres y_α (coordonnées cartésiennes orthogonales dans le plan Σ normal à B passant par M) peuvent être regardées comme les composantes (suivant les $n-1$ directions mutuellement orthogonales $\boldsymbol{u}_\alpha$) du segment PM.

Si l'on se reporte au cas général d'une V_n quelconque, tout se passe, *dans le voisinage du premier ordre* de tout point P, comme s'il s'agissait d'une variété euclidienne douée de la détermination du ds^2 correspondant au point P.

D'après cela l'interprétation des y est la même que tout à l'heure. On peut donc retenir ce qui suit: Soit M un point quelconque appartenant à l'entourage du premier ordre de l'arc géodésique B, Σ l'hypersurface géodésique (définie au N° 2) qui le contient, P la projection orthogonale de M sur B, c'est-à-dire le pôle de Σ; y_n est l'arc de la base B depuis une origine arbitraire O jusqu'a P, les $y_\alpha\,(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$ signifient les composantes du vecteur élémentaire PM (caractérisant en grandeur et direction la distance de M à la base), ces composantes se rapportant à $n-1$ directions, perpendiculaires à B et entre elles, choisies arbitrairement au point O et transportées ensuite par parallélisme le long de B.

Remarquons en terminant que, s'il s'agit d'une courbe base quelconque, les y_α gardent leur signification de composantes du vecteur PM par rapport aux directions $\boldsymbol{u}_\alpha$, ce vecteur n'est pas toutefois en général normal à B, la famille des hypersurfaces Σ ayant la définition specifiée au N° préc. Quant à y_n, ce n'est plus l'arc σ de B; mais d'après (28) dy_n peut être interprété comme projection de l'arc élémentaire $d\sigma$ sur la normale $\boldsymbol{u}_n$ à Σ.

6. - Géodésique infiniment voisines d'une géodésique donnée.

Considérons maintenant, à côté de B, une autre géodésique quelconque g (plus précisément un arc de g) appartenant au voisinage immédiat de B ([10]). Faisons correspondre à tout point M de g le point P de B ayant même y_n (et les autres $y_\alpha = 0$).

Il est important pour ce qui va suivre de préciser la relation entre un arc élémentaire ds de g et l'arc correspondant $d\sigma = dy_n$ de B.

Dans tout l'entourage de B on a pour les coefficients b_{ik} du ds^2 en coordonnées y les déterminations euclidiennes

$$b_{ik} = 0 \quad (i \neq k)\,, \qquad b_{ii} = 1\,,$$

au second ordre près.

Il en résulte pour une courbe quelconque

$$ds = dy_n \sqrt{1 + \sum_1^{n-1}{}_\alpha \left(\frac{dy_\alpha}{dy_n}\right)^2}\,,$$

la quantité sous le radical différant de sa valeur exacte uniquement par des termes du second ordre. Pour g, les y_α et les dy_α/dy_n doivent être regardés comme des infiniment petits. Il s'en suit

$$\frac{ds}{dy_n} = \frac{ds}{d\sigma} = 1$$

au second ordre près. Ce n'est qu'une généralisation du fait élémentaire qu'un segment infiniment voisin, quant à la direction, à une droite donnée et sa projection sur la droite ont une différence du second ordre.

7. - Forme invariante des équations définissant l'écart géodésique.

Il s'agit finalement de former les équations définissant en coordonnées générales x l'allure d'une géodésique quelconque g infiniment voisine à B, c'est-à-dire les équations aux variations des (4) à partir de la solution (9).

([10]) Au sens *strict*, c'est-à-dire en exigeant que soient petits non seulement les écarts des positions regardées comme correspondantes sur B et sur g, mais aussi ceux des directions des tangentes qui s'y rapportent.

Posons

$$x_i = \varphi_i(\sigma) + \xi^i \,, \tag{34}$$

en traitant les ξ^i comme des infiniment petits avec leur dérivées par rapport à σ.

Ces ξ^i représentent évidemment les accroissement à donner aux coordonnées x_i d'un point P de B pour passer au point correspondant M de g: elles peuvent être regardées comme les composantes contrevariantes du vecteur élémentaire $PM = \boldsymbol{\xi}$. En se plaçant à un point de vue général, on ne supposera plus ce vecteur normal à B, son orientation dépendant de la loi de correspondance entre les points P et M de nos deux géodésiques. Dès lors on ne peut plus prétendre que l'arc élémentaire ds de g soit (comme au N° préc.) égal à son correspondant $d\sigma$ de B; mais puisqu'il s'agit en tout cas d'un déplacement infiniment petit, on peut prévoir quand même que, si l'on pose

$$\frac{ds}{d\sigma} = 1 + \lambda \,, \tag{35}$$

l'allongement (ou le coefficient de dilatation) λ résulte infiniment petit avec les ξ^i et leurs dérivées. C'est ce qu'on va constater dans un moment d'une manière précise. En attendant dérivons les formules (34) par rapport à σ. On a

$$\frac{ds}{d\sigma} x'_i = \varphi'_i + \frac{d\xi^i}{d\sigma} \,, \tag{34'}$$

ayant écrit, pour abréger, x'_i au lieu de dx_i/ds, φ'_i au lieu de $d\varphi_i/ds$.

Une second dérivation donne

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 x''_i + \frac{d^2 s}{d\sigma^2} x'_i = \varphi''_i + \frac{d^2\xi^i}{d\sigma^2} \,.$$

D'après (35),

$$\frac{d^2 s}{d\sigma^2} = \frac{d\lambda}{d\sigma} \,,$$

tandis que (34') peut s'écrire

$$x'_i - \varphi'_i = \lambda x'_i + \frac{d\xi^i}{d\sigma} \,.$$

En traitant λ et $d\lambda/d\sigma$ comme infiniment petits, et négligeant toujours le second ordre, on est autorisé à remplacer $(d^2s/d\sigma^2)x_i' = (d\lambda/d\sigma)x_i'$ par $(d\lambda/d\sigma)\varphi_i'$ et par conséquent à obtenir les expressions des x_i'' sous la forme

$$(34'') \qquad \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 x_i'' = \varphi_i'' + \frac{d^2\xi^i}{d\sigma^2} - \frac{d\lambda}{d\sigma}\varphi_i' .$$

Ceci posé, imaginons de multiplier les équations (4), se rapportant à une g quelconque, par $(ds/d\sigma)^2$ et faisons y les substitutions: (34) dans les $\left\{\begin{matrix} j\,h \\ i \end{matrix}\right\}$, (34′) dans les $(ds/d\sigma)x_j'$, (34″) dans les $(ds/d\sigma)^2 x_i''$.

Ayant égard à la circonstance que

$$\varphi_i'' = -\sum_{1}^{n}{}_{jh} \left\{\begin{matrix} j\,h \\ i \end{matrix}\right\} \varphi_j' \varphi_h' ,$$

puisque g est une géodésique, et se bornant, cela va sans dire, aux termes du premier ordre, on obtient

$$\frac{d^2\xi^i}{d\sigma^2} - \frac{d\lambda}{d\sigma}\varphi_i' = -\sum_{1}^{n}{}_{jhk} \frac{\partial \left\{\begin{matrix} j\,h \\ i \end{matrix}\right\}}{\partial x_k} \xi^k \varphi_j' \varphi_h' - 2\sum_{1}^{n}{}_{jh} \left\{\begin{matrix} j\,h \\ i \end{matrix}\right\} \varphi_j' \frac{d\xi^h}{d\sigma} .$$

Posons

$$(36) \qquad b^i = \varphi_i'(\sigma) \qquad (i = 1, 2, \ldots), n,$$

dans le but de mettre en évidence dans la notation le caractère contrevariant (vis-à-vis d'un changement quelconque de variables) des paramètres de la direction tangente à B. Les équations de toute à l'heure peuvent s'écrire en conformité (en y changeant en outre, dans un terme, les indices i et j en r et i)

$$(37) \qquad \frac{d^2\xi^r}{d\sigma^2} - \frac{d\lambda}{d\sigma} b^r + 2\sum_{1}^{n}{}_{jh} \left\{\begin{matrix} j\,h \\ r \end{matrix}\right\} b^j \frac{d\xi^h}{d\sigma} = -\sum_{1}^{n}{}_{ihk} \frac{\partial \left\{\begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix}\right\}}{\partial x_k} b^i b^h \xi^k .$$

Nous allons les transformer encore pour en mettre en évidence la structure invariante vis-à-vis d'une transformation quelconque de coordonnées. A ce but il convient de rappeler d'un côté l'expression formelle des symboles de Riemann de seconde espèce

$$(38) \qquad \{ir, hk\} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_h}\left\{\begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix}\right\} - \sum_{1}^{n}{}_{l} \left[\left\{\begin{matrix} l\,h \\ r \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} l\,k \\ r \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} i\,h \\ l \end{matrix}\right\}\right],$$

et de l'autre la notion introduite par M. BIANCHI de *vecteur dérivé* ([11]) d'un vecteur ξ donné comme fonction des points d'une ligne.

Si B est la ligne, le vecteur $D\xi$, dérivé de ξ, a ses composantes *contre-variantes* (paramètres) $(D\xi)^r$ définies par les combinaison linéaires suivantes des ξ^h et leurs dérivées ([12]):

$$(D\xi)^r = \frac{d\xi^r}{d\sigma} + \sum_{1}^{n}{}_{ih} \begin{Bmatrix} i\, h \\ r \end{Bmatrix} b^i \xi^h \qquad (r = 1, 2, ..., n). \tag{39}$$

Pour des coordonnées cartésiennes (s'il en existe rigoureusement), ou bien localement cartésiennes le long de B on a simplement

$$(D\xi)^r = \frac{d\xi^r}{d\sigma},$$

ce qui justifie le nom de dérivé attribué en général au vecteur défini par (39).

Moyennant le vecteur $D\xi$ il est aisé d'expliciter l'allongement λ, sans aucune hypothèse préalable sur son ordre de grandeur. Il faut remarquer à ce propos que les formules (34) et (34′), auxquelles nous aurons recours pour le calcul de λ, n'ont pas été modifiées en ayant égard à la petitesse de λ, tandis que cela est arrivé pour les formules (34″).

Sur g on a identiquement

$$\sum_{1}^{n}{}_{ir} a_{ir} x_i' x_r' = 1 .$$

Si l'on multiplie les deux membres par $(ds/d\sigma)^2$ en remplaçant (dans les a_{ir}) les x_i par leurs valeurs (34) et les $(ds/d\sigma)x_i'$ par (35′), on trouve

---

([11]) A la vérité M. BIANCHI l'appelle associé, mais la désignation dérivé me paraît préférable, puisqu'on l'emploie couramment dans l'espace ordinaire.

([12]) *Lezioni etc.*, Chap. IV, § 26. On peut d'ailleurs constater le caractère contrevariant des $(D\xi)^r$ aussi en regardant provisoirement le vecteur ξ comme fonction d'un point de V_n (non seulement de la ligne B), et en faisant intervenir le système mixte $\xi^r_{/i}$ défini (loc. cit., Chap. VI, § 2) par les expressions

$$\xi^r_{/i} = \frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} + \sum_{1}^{n}{}_h \begin{Bmatrix} i\, h \\ r \end{Bmatrix} {}^h\xi.$$

Si l'on sature l'indice de covariance i en multipliant par b^i et faisant la somme par rapport à i, on retrouve justement le second membre de (39).

immédiatement (au second ordre près, par rapport aux ξ)

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = 1 + 2\sum_{1}^{n}{}_{ir}\, a_{ir}\varphi_i'\frac{d\xi^r}{d\sigma} + \sum_{1}^{n}{}_{irh}\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_h}\varphi_i'\varphi_r'\xi^h .$$

On a d'ailleurs les identités bien connues

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_h} = \sum_{1}^{n}{}_{h}\left[a_{hi}\begin{Bmatrix} k\, l \\ h \end{Bmatrix} + a_{hk}\begin{Bmatrix} i\, l \\ h \end{Bmatrix}\right].$$

Si, dans la dernière somme de l'expression de $(ds/d\sigma)^2$, on échange les indices r et k, et qu'on tient compte de l'identité qu'on vient d'écrire, en remplaçant en outre, d'après (36),

$$\sum_{1}^{n}{}_{i}\, a_{ir}\varphi_i', \qquad \sum_{1}^{n}{}_{l}\, a_{hi}\varphi_i', \qquad \sum_{1}^{n}{}_{k}\, a_{hk}\varphi_k'$$

par b_r, b_h, b_h, il vient, à cause de (39),

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = 1 + 2\sum_{1}^{n}{}_{r}\,(D\boldsymbol{\xi})^r b_r .$$

Le vecteur $D\boldsymbol{\xi}$ est infiniment petit en même temps que les ξ^i et leurs dérivées. On a donc, en extrayant la racine, négligeant le second ordre (par rapport aux dites quantités) et ayant égard à la définition (35) de l'allongement,

(35′) $$\lambda = \sum{}_{r}\,(D\boldsymbol{\xi})^r b_r$$

ce qui en prouve le caractère infinitésimal.

Naturellement $D\boldsymbol{\xi}$ admet à son tour un vecteur dérivé $D^2\boldsymbol{\xi}$. Ses composantes contrevariantes sont définies, d'après (39), par

$$(D^2\boldsymbol{\xi})^r = \frac{d(D\boldsymbol{\xi})^3}{d\sigma} + \sum_{1}^{n}{}_{kl}\begin{Bmatrix} k\, l \\ r \end{Bmatrix} b^k (D\boldsymbol{\xi})^l .$$

En introduisant dans le second membre les expressions (39) des $(D\boldsymbol{\xi})^r$ et $(D\boldsymbol{\xi})^l$ (après un changement dans la désignation des indices) on obtient

(40) $$(D^2\boldsymbol{\xi})^r = \frac{d^2\xi^r}{d\sigma^2} + \frac{d}{d\sigma}\left(\sum_{1}^{n}{}_{ih}\begin{Bmatrix} i\, h \\ r \end{Bmatrix} b^i\xi^h\right) + \\ + \sum_{1}^{n}{}_{kl}\begin{Bmatrix} k\, l \\ r \end{Bmatrix} b^k\frac{d\xi^l}{d\sigma} + \sum_{1}^{n}{}_{ihkl}\begin{Bmatrix} k\, l \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i\, h \\ l \end{Bmatrix} b^k b^i \xi^h ,$$

les seconds membres constituant, comme les premiers, un système contrevariant. En explicitant dans le second membre la dérivation par rapport à σ et effectuant quelque autre changement dans les indices on peut écrire

$$(40') \qquad (D^2\xi)^r = d^2\xi^r + 2\sum_{jh}^{n}{}_{1}\left\{\begin{matrix} j\,h \\ r \end{matrix}\right\} b^j \frac{d\xi^h}{d\sigma} + \Xi^{(r)},$$

où l'on a posé pour abréger

$$\Xi^{(r)} = \sum_{ihk}^{n}{}_{1} \frac{\partial \left\{\begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix}\right\}}{dx_h} b^i\, b^h\, \xi^k + \sum_{lk}^{n}{}_{1}\left\{\begin{matrix} l\,k \\ r \end{matrix}\right\} \xi^k \frac{db^l}{d\sigma} + \sum_{ihkl}^{n}{}_{1}\left\{\begin{matrix} l\,h \\ r \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right\} b^i\, b^h \xi^k .$$

Remarquons en passant que, dans ces quantités auxiliaires $\Xi^{(r)}$, l'indice r est purement ordinal: on l'a placé en haut mais entre parenthèses, pour qu'on ne pense pas que les $\Xi^{(r)}$ forment un système contrevariant, ce qui n'est pas vrai.

Pour notre but il suffit de remplacer dans $\Xi^{(r)}$ les dérivées $db^l/d\sigma = \varphi_l'$ par leurs valeurs

$$-\sum_{ih}^{n}{}_{1}\left\{\begin{matrix} i\,h \\ l \end{matrix}\right\} b^i\, b^h ,$$

tirées des équations (4) des géodésiques, ce qui permet d'écrire

$$(41) \qquad \Xi^{(r)} = \sum_{ihk}^{n}{}_{1} \frac{\partial \left\{\begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix}\right\}}{\partial X_h} b^i\, b^h\, \xi^k + \sum_{ihlk}^{n}{}_{1}\left[\left\{\begin{matrix} l\,h \\ r \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} l\,k \\ r \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} i\,h \\ l \end{matrix}\right\}\right] b^i\, b^h\, \xi^k .$$

Ceci posé, si l'on ajoute $\Xi^{(r)}$ aux deux membres des équations (37), en ayant égard aux (40') et à la définition (38) des symboles de RIEMANN, on leur donne la *forme invariante*

$$(42) \qquad (D^2\xi)^r - \frac{d\lambda}{d\sigma} b^r = -\sum_{ihk}^{n}{}_{1}\{ir,\, hk\} b^i b^h \xi^h \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

J'ai dit forme invariante puisque les deux membres des équations (42) constituent l'un et l'autre un système contrevariant simple: c'est ce qui résulte, pour le terme $(D^2\xi)^r$, de la propriété fondamentale des vecteurs dérivés; pour les seconds membres, des propriétés classiques des symboles de RIEMANN de seconde espèce [13].

---

[13] *Lezioni etc.*, Chap. VII, § 3.

8. - Spécification du système différentiel. Intégrale première. Relation linéaire en termes finis.

Le système (42), associé à l'expression (35′) de λ, comprend à la vérité $n+1$ équations avec autant d'inconnues: les ξ au nombre de n et λ. Il est toutefois à prévoir, d'après sa formation, qu'il ne peut à lui seul déterminer complètement toutes les inconnues; il doit y rester une indétermination provenant de l'arbitrariété de la loi de correspondance entre les points P de B et M de g. On s'en rend compte nettement, même au point de vue formel, en constatant que la définition (35′) de λ, ou plus précisément l'équation dérivée

$$\frac{d}{d\sigma}\left\{\lambda - \sum_1^n {}_r (D\boldsymbol{\xi})^r b_r\right\} = 0 \tag{35''}$$

est une conséquence des équations (42) elles-mêmes. Afin d'établir ce point, remarquons d'abord que, pour un vecteur quelconque $\boldsymbol{v}$ dont v^r soient les composantes contrevariantes, on a

$$\frac{d}{d\sigma}\sum_1^n {}_r v^r b_r = \sum_1^n {}_r \frac{dv^r}{d\sigma} b_r + \sum_1^n {}_r v^r \frac{db^r}{d\sigma}\,.$$

Or les dérivées $db_r/d\sigma$ des moments d'une géodésique vérifient les relations [14]

$$\frac{db_r}{d\sigma} = \sum_1^n {}_{ih} \left\{ {i\,r \atop h} \right\} b^i b_h\,,$$

exprimant, si l'on veut, l'autoparallélisme de la géodésique B par l'intermédiaire de ses moments b_r.

D'après cela, l'identité précédente, pourvu qu'on échange dans la dernière somme les deux indices r et h et qu'on tienne compte des (39), prend la forme

$$\frac{d}{d\sigma}\sum_1^n {}_r v^r b_r = \sum_1^n {}_r (D\boldsymbol{v})^r b_r\,. \tag{43}$$

Calculons désormais le premier membre de (35″), en tenant compte de l'identité (43) (où le vecteur $\boldsymbol{v}$ soit remplacé par $D\boldsymbol{\xi}$). On a

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} - \sum_1^n {}_r (D^2\boldsymbol{\xi})^r b_r\,,$$

([14]) « Ibidem », Chap. V, § 26, p. 158.

ce qui s'annule bien en vertu des (42) et des propriétés élémentaires des symboles de RIEMANN.

Donc l'équation (35′) n'est qu'une intégrale particulière (ou relation invariante) du système (42); son rôle se réduit à fixer une des constantes d'intégration. Comme le système (42) contient $n+1$ inconnues, pour le rendre déterminé il faut lui associer quelque autre condition: voilà confirmé ce qu'on avait aisément prévu sous l'aspect géométrique, puisqu'il restait à fixer la loi de correspondence ponctuelle entre g et la base.

En se plaçant au point de vue formel la manière la plus simple de compléter le système (42) est d'en faire disparaître l'inconnue λ en posant

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = 0 ,$$

ce qui d'une part donne au système (42) la forme normale, c'est-à-dire résoluble par rapport aux dérivées secondes des inconnues

$$(\mathrm{I}) \qquad (D^2\xi)^r = -\sum_{ihk}^{n}{}_1 \{ir, hk\}\, b^i b^h \xi^k \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

et d'autre part, à cause de l'identité (35″), montre que *le système* (I) *admet l'intégrale première*

$$(\mathrm{II}) \qquad \sum_{1}^{n}{}_r (D\xi)^r b_r = \lambda = \text{constante} ,$$

exprimant qu'il y a une dilatation linéaire constante lorsqu'on passe d'un arc quelconque de B à l'arc correspondant de g.

Puisque, d'après l'identité (43), le premier membre de l'intégrale (II) n'est que la dérivée de $\sum_1^n{}_r \xi^r b_r$, il s'en suit que, pour toute solution du système différentiel (I), on a en outre

$$(\mathrm{III}) \qquad \sum_{1}^{n}{}_r \xi^r b_r = \lambda\sigma + C ,$$

C étant une deuxième constante.

Si l'on suppose en particulier $\lambda = 0$ on reconnaît qu'il est loisible d'associer au système différentiel la relation

$$\sum_{1}^{n}{}_r \xi^r b_r = C .$$

C'est la traduction analytique du fait géométriquement évident qu'on peut établir la correspondence entre les points M de g et P de B en imposant au vecteur (infiniment petit) PM la condition d'admettre une certaine projection orthogonale constante C sur la tangente $\boldsymbol{t}$ à la base au point P: une telle loi de correspondance implique, d'après (II), qu'il n'y a aucune altération de longueur ($\lambda = 0$) entre les arcs de B et les arcs homologues de g. Plus particulièrement encore, si $C = 0$, on revient à la loi de correspondance orthogonale (PM perpendiculaire à B) envisagée au N° 6.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, pour introduire d'autres lois géométriques de correspondance, on n'aurait qu'à reprendre le système (42) en lui associant (au lieu que $d\lambda/d\sigma = 0$) la traduction analytique de la loi choisie. Par exemple, si l'on voulait que PM fût incliné sur B d'un angle φ (constant ou fonction de σ donnée à l'avance) l'équation additionnelle serait

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, \xi^r b_r = \xi \cos\varphi \,,$$

où

$$\xi = \left| \sqrt{\sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, \xi^i \xi^k} \right|$$

représente la longueur du vecteur $\boldsymbol{\xi}$.

En tout cas une petite discussion supplémentaire serait ensuite nécessaire au sujet du système complété, ne fût-ce que pour le réduire à la forme normale et à préciser le nombre des constantes qui seront introduites par l'intégration, etc.

9. - Forme réduite du système différentiel (I) en coordonnées y.

Reprenons les coordonnées y en nous fixant sur la loi de correspondance orthogonale (entre la base B et une géodésique quelconque g de son entourage). Comme on vient de voir, une telle correspondance est traduite analytiquement par le système différentiel (I), avec les spécifications $\lambda = C = 0$ des constantes d'intégration se rapportant à (II) et (III).

D'après les remarques du N° 6, la coordonnée y_n de M est identique à celle de P. Puisque les autres coordonnées y_α $(\alpha = 1, 2, ..., n-1)$ de P sont nulles, les variations η^i des coordonnées y sont respectivement

$$\eta^\alpha = y_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, ..., n-1)\,, \qquad \eta^n = 0\,,$$

ce qui justifie la dénomination de composantes cartésiennes du déplacement normal ou *écart PM* que nous donnons aux y_α.

D'ailleurs les paramètres $b^i = dy_i/d\sigma$ de la base B s'annulent pour $i = 1, 2, ..., n-1$, tandis que $b^n = 1$. Les symboles de CHRISTOFFEL s'annulent eux aussi, le long de B, avec leurs dérivées par rapport à σ (ou, ce qui revient au même, à y_n), et par conséquent

$$(D\boldsymbol{\eta})^r = \frac{d\eta^r}{d\sigma}\,.$$

Les équations (I) deviennent en conformité

$$\text{(I}'\text{)}\qquad \frac{d^2y_\alpha}{d\sigma^2} = -\sum_1^{n-1}{}_\beta\{n\alpha, n\beta\}y_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, ..., n-1),$$

$$0 = -\sum_1^{n-1}{}_\beta\{nn, n\beta\}\,y_\beta\,,$$

où, dans les deux sommes, on a supprimé le terme correspondant à la valeur n de l'indice, puisque tout symbole de RIEMANN, ayant les derniers indices égaux, s'annule d'après la définition (38).

Le premier groupe (I′) (comprenant $n-1$ équations *linéaires du second ordre*) *définit les* $n-1$ *composantes cartésiennes de l'écart* (*normal*) *PM*. La dernière équation se réduit à une identité, et voici pourquoi. Les symboles de RIEMANN de seconde espèce sont liés en tout cas par les relations

$$(ij, hk) = \sum_1^n{}_r\, a_{jr}\{ir, hk\}$$

aux symboles de première espèce, ceux-ci vérifiant, entre autres, les identités

$$(ij, hk) = -(ji, hk)\,. \quad (^{15})$$

Dans notre cas les coefficients a_{jr} du ds^2 se réduisent, *sur B*, à 0 (pour $r \neq j$) et pour 1 (pour $r = j$). On a donc, sur la base, égalité entre les symboles des deux espèces affectés de mêmes indices. Il s'en suit en particulier

$$\{nn, n\beta\} = (nn, n\beta) = 0\,.$$

C. Q. F. D.

([15]) *Lezioni etc.*, Chap. VII, § 4.

Bien entendu, il n'y a plus à s'occuper des relations intégrales (II) et (III), qui deviennent des identités, puisque, dans le cas actuel, s'annulent les b^i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) et l'n-ième composante $\xi^n = \eta^n$ du déplacement PM.

10. Cas de $n = 2$. Formule de Jacobi.

Pour $n = 2$, c'est-à-dire pour une surface ordinaire, si B est la géodésique base, $y_2 = \sigma$ son arc, $y_1 = y$ la distance normale de M à B, le système (I′) se réduit à l'équation unique

$$\frac{d^2y}{d\sigma^2} = -\{21, 21\}y \, .$$

Il est bien connu ([16]) que, en général, c'est-à-dire quelles que soient les coordonnées, la courbure gaussienne K d'une V_2 est exprimée par le rapport

$$\frac{(12, 12)}{a} = \frac{(21, 21)}{a} \, ,$$

a désignant le discriminant de son ds^2.

Pour nos coordonnées cartésiennes le long de B, $a = 1$ et les symboles de Riemann de seconde espèce ne diffèrent pas de leurs homologues de première.

L'équation définissant y n'est donc pas autre chose que l'equation de Jacobi

$$\frac{d^2y}{d\sigma^2} + Ky = 0 \qquad (J)$$

qui a initialement suggéré notre recherche.

([16]) « Ibidem », § 9.

XXIV.

SUGLI INVARIANTI ADIABATICI

« Atti del Congresso internazionale dei Fisici, Como, 1927 ».
pp. 475-513.

Dei sistemi canonici

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

la cui funzione caratteristica H, indipendente da t, contenga dei parametri a lentamente variabili, si conoscono due tipi particolarmente cospicui di invarianti adiabatici:

1) (Teorema di GIBBS-HERTZ). Il volume V racchiuso nello spazio delle fasi, da una generica varietà isoenergetica

$$H = E \qquad (E \text{ costante}),$$

il quale spetta ai sistemi quasi ergodici; sistemi che non ammettono, oltre $H = E$, altri integrali uniformi (cfr. per es. nn. 3-5 del presente scritto).

2) (Teorema del BURGERS). Gli n integrali ciclici del SOMMERFELD

$$J_i = \oint p_i \, dq_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

i quali sono invarianti adiabatici per i sistemi (dello STÄCKEL) integrabili mediante separazione delle variabili, nonchè dotati complessivamente di n integrali (quadratici nelle p).

Abbiamo qui due casi estremi, corrispondenti rispettivamente al minimo (cioè uno) e, in certo senso, al massimo (cioè n) di integrali uniformi nelle condizioni supposte.

Nessun risultato altrettanto preciso, era stato, per quanto mi consta, conseguito circa i casi intermedi, cioè per i sistemi canonici i quali posseggono, oltre ad $H = E$, un certo numero, diciamo m, di integrali uniformi (indipendenti)

$$F_r = c_r \qquad (r = 1, 2, ..., m).$$

Anzi il FERMI aveva fatto rilevare (n. 7) che non è accettabile, almeno in generale, quella definizione di variazione adiabatica delle costanti E e c_r, che parrebbe la più spontanea in base ai soli principî della meccanica statistica, prendendo norma dal caso quasi ergodico.

Mi propongo di mostrare (nn. 8-15) come, nell'ipotesi che gli m integrali F_r siano in involuzione tra loro, i metodi classici della meccanica analitica, e in particolare la considerazione, che risale al MORERA, di certi sistemi associati ai differenziali totali suggeriscono un criterio diverso (anch'esso del resto ispirato da stretta analogia col caso quasi ergodico) per impostare il legame adiabatico (fra le variazioni E, c_r e quelle dei parametri a) in modo che riescano automaticamente soddisfatte le condizioni di integrabilità. Se ne desume (n. 14) la *esistenza di* $m+1$ *invarianti adiabatici, costruibili mediante quadrature.* In questa proposizione rientra (n. 16) il teorema del BURGERS come un caso molto particolare. Non solo, ma la nuova dimostrazione dell'invarianza adiabatica degli integrali J_i cui si perviene in tal guisa abbraccia senza riserve anche quei casi di parziale o totale commensurabilità (di certi periodi) pei quali le dimostrazioni dirette richiedevano invece, come è ben noto, discussioni complementari minuziose e svariati sussidi analitici.

In fine ho fugacemente segnalate ulteriori applicazioni e possibili estensioni (n. 17).

1. - Le recenti teorie dell'atomo e i loro schemi.

Secondo le leggi della meccanica classica i movimenti che un sistema (olonomo) con n gradi di libertà può assumere in date condizioni di sollecitazione dipendono in modo continuo da $2n$ costanti (condizioni iniziali) suscettibili di assumere (in un certo campo) tutti i possibili valori (di quel campo).

NIELS BOHR [1] fondò la sua teoria dell'atomo su premesse dell'ordinaria meccanica (anzi, per l'atomo d'idrogeno, sul problema dei due corpi), inserendovi tuttavia, con ardito connubio, un postulato estraneo che deriva invece dalla concezione quantistica del PLANCK, e fa quindi intervenire il discontinuo.

Schematicamente, tutto si riduce alla introduzione di orbite privile-

[1] Cfr. per es. *Les spectres et la théorie de l'atome.* Paris, Hermann, 1923.

giate, le quali corrispondono a soli valori in progressione aritmetica, più precisamente del tipo $nh/2\pi$ (n numero intero, h costante del PLANCK) di alcune combinazioni opportune, J_0, $J_1, \ldots, J_m$ (una sola nel caso più semplice originariamente considerato dal BOHR) delle costanti di integrazione.

La teoria, sviluppata con fervore degno delle sue conseguenze grandiose, dallo stesso BOHR e da altri fisici eminenti, trovò mirabili conferme spettrali e anche, per merito principale del SOMMERFELD ([2]), un pronto assetto sistematico, mantenuto al corrente (fino all'anno scorso) da edizioni successive del libro del SOMMERFELD, e da nuovi trattati, quali quelli di BORN e HUND ([3]), dell'ANDRADE ([4]), del JUVET ([5]), nonchè da scritti monografici ricchi di idee originali, dovuti, oltrechè agli autori già citati, segnatamente a JEANS ([6]), JORDAN, HEISENBERG, KRAMERS, SLATER ([7]), ecc.

Il suaccennato connubio della meccanica newtoniana con un principio selettivo di discontinuità quantistica dispiacque a molti fisici: e non ai tradizionalisti soltanto; donde, da un lato, gli sforzi simultanei di HEISENBERG, BORN, JORDAN, di quest'ultimo da solo e del DIRAC ([8]) per eliminare dalla teoria dell'atomo ogni elemento non accessibile all'esperienza diretta e costituire una meccanica dei fenomeni periodici su base nettamente discontinua (calcolo delle matrici); dall'altro il geniale ritorno al modello delle vibrazioni dei mezzi continui attraverso la meccanica ondulatoria di DE BROGLIE ([9]) e SCHRÖDINGER ([10]), secondo cui (in accordo non meno perfetto coi risultati sperimentali) la spiegazione del comportamento discontinuo delle linee spettrali si riporta ad autovalori ed autofunzioni di equazioni differenziali definenti lo stato del mezzo; e infine le più generali concezioni di HILBERT, V. NEUMANN e NORDHEIM, che abbracciano entrambi i punti di vista ([11]).

Se a questo nuovo indirizzo, singolarmente suggestivo e fecondo, sono oramai volti di preferenza gli sforzi dei cultori di fisica teorica, non è

([2]) *Atombau und Spektrallinien.* Braunschweig, Vieweg, 1922; 4ª ed., 1924.

([3]) *Vorlesungen über Atomdynamik.* Berlin, Springer, Bd. I, 1925.

([4]) *The structure of the atom.* London, Bell, 1923; 3ª ed., 1927.

([5]) *Mécanique analytique et théorie des quanta.* Paris, Blanchard, 1926.

([6]) *Atomicity and quanta.* Cambridge University Press, 1926.

([7]) In numerosi articoli, segnatamente della « Zeitschrift für Physik », 1924-1927.

([8]) Veggansi, soprattutto per gli autori tedeschi, le annate 1926 e 1927 della già citata « Zeitschrift für Physik », e, per gli articoli del DIRAC, il vol. 112, 1926, dei « Proc. of the R. S. of London ».

([9]) *Ondes et mouvements.* Paris, Gauthier-Villars, 1926.

([10]) *Abhandlungen zur Wellenmechanik.* Leipzig, Barth, 1927.

([11]) Cfr. una memoria di questi tre autori *Über die Grundlagen der Quantentheorie* in « Math. Ann. », B. 98, pp. 1-30; nonchè V. NEUMANN, *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, « Göttinger Nachr. », 1927, pp. 1-57.

però il caso di abbandonare l'assetto intermediario, che dirò per intenderci del SOMMERFELD, cui era pervenuta la teoria dell'atomo associando un unico principio quantistico alla meccanica ordinaria: assetto ibrido, e sotto tale rapporto « a Dio spiacente ed ai nemici sui », ma indubbiamente suggestivo, rispondente a forme elementari e concrete di intuizione fisica, e sopratutto atto a condurre alle relazioni quantitative nel modo più semplice coi procedimenti abituali della meccanica analitica.

2. - Invarianti adiabatici secondo Ehrenfest [12] e loro importanza speculativa nell'opera di sistemazione del Sommerfeld.

Fondamentale, sotto questo punto di vista ecclettico, è lo studio (per i sistemi dinamici che si collegano ai vari tipi di atomi) di quelle combinazioni,

$$J_0, \quad J_1, \quad \ldots, \quad J_m$$

delle costanti di integrazione cui vanno attribuiti i valori $nh/2\pi$ (interi a meno del fattore universale $h/2\pi$).

L'EHRENFEST le chiamò *invarianti adiabatici*, e noi ci atterremo a tale designazione; mentre lo SMEKAL, contestando l'opportunità della qualifica *adiabatici*, propose di dirli più genericamente *parametri invarianti*. Indipendentemente dal nome è essenziale la veduta fisica che vi si collega, dovuta precisamente all'EHRENFEST, e generalmente nota come principio delle adiabatiche. Si tratta di questo. Supponiamo che nel modello meccanico di un dato sistema atomico intervengano masse, vincoli, o forze suscettibili di variare con continuità: ciò si traduce matematicamente nell'ipotesi che le equazioni dinamiche, o, se si vuole, la funzione caratteristica H del sistema canonico da esse costituito dipendano da un certo numero (non importa precisarlo) di parametri a_1, a_2, ..., che designeremo complessivamente con a.

Se, al variare continuo di questi parametri a, non si altera la specie qualitativa del sistema meccanico, in guisa che esso costituisca in ogni stadio il modello di un sistema atomico (pel quale ad es. la modificazione graduale dei valori dei parametri sia fisicamente interpretabile come dovuta ad alterazioni di temperatura, di ambiente, di stato elettrico, ecc.) è manifesto che le combinazioni caratteristiche

$$J_0, \quad J_1, \quad \ldots, \quad J_m$$

(12) *Adiabatic invariants and the theory of quanta*, « Phil. Mag. », vol. XXXIII, 1917, pp. 500-513.

debbono, da un lato, variare anch'esse con continuità, dall'altro conservare valori interi (a meno di quel tale fattore costante). Ciò è possibile solo a patto che tali combinazioni rimangano costanti.

Ecco il principio di EHRENFEST, che pone, anche ai superstiti cultori di meccanica pura, lo studio astratto, interessantissimo per sè e per le applicazioni, degli invarianti adiabatici.

3. - Caso dei sistemi canonici.
Volume nello spazio delle fasi.

Limitiamoci, per fissare le idee, alla considerazione di un sistema canonico di rango $2n$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

la cui funzione caratteristica H dipenda dalle p, dalle q, dai parametri a, ma non esplicitamente da t.

Supponiamo che (nel campo in cui si faranno variare i parametri a) le varietà isoenergetiche

$$H = E \tag{2}$$

siano *superficie* (più precisamente varietà a $2n-1$ dimensioni) *chiuse* nello spazio Φ_{2n} delle fasi (rappresentativo delle $2n$ variabili coniugate p e q). Indicheremo con V e chiameremo *volume* (anche se si tratta di un campo a più di tre, ovvero a due sole dimensioni) l'estensione euclidea dello spazio Φ_{2n} delle fasi, racchiusa da una generica σ. Orbene, se il sistema canonico (1) è *quasi-ergodico*, cioè se, non esistendo altri integrali uniformi oltre (2), tutte o « quasi tutte » ([13]) le traiettorie lungo cui E ha un assegnato valore riempiono *praticamente* (cioè nel senso ben noto) la σ corrispondente, il volume V, interno ad essa, è un *invariante adiabatico*.

Questa bella proprietà è pressochè implicita in alcune considerazioni ampiamente svolte dal GIBBS nel suo celebre trattato di meccanica statistica ([14]), ma non vi è esplicitamente enunciata. Il merito di averla messa

([13]) Il « quasi tutte » si precisa come segue: si immagini una traiettoria generica individuata dai valori iniziali $p_i^0; q_i^0$. Si attribuiscano, sopra una generica varietà (2), ad un insieme σ_1 i punti $(p_i^0; q_i^0)$, da cui esce una traiettoria densa in tutto σ, all'insieme complementare σ_2 i punti da cui esce invece una traiettoria periodica o escludente alcuna porzione di σ. La misura (ipersuperficiale) di σ_2 deve essere nulla.

([14]) *Statistical mechanics*. Yale University Press, 1902.

in luce, collegandola specificamente ai processi adiabatici (in un senso ben precisato che richiameremo tra un momento) spetta a PAUL HERTZ ([15]).

4. - Dimostrazione dovuta a P. Hertz dell'invarianza adiabatica di V.

Dato l'interesse del risultato, anche per lo scopo che abbiamo in vista, vale la pena di indicarne rapidamente la deduzione.

Ricordiamo anzitutto come si definisce, nel caso dei sistemi quasi-ergodici, il valore medio $\bar{F}$ spettante ad una qualsiasi funzione (continua) del posto $F(p|q)$ sopra una data superficie isoenergetica σ, supposta tutta contenuta in un campo di regolarità della funzione $H(p|q)$.

In ogni punto *ordinario* (cioè non multiplo) M di detta superficie una almeno delle $2n$ derivate parziali di H è differente da zero. Indichiamo con z quella (o una di quelle) p o q per cui (nel punto ordinario in questione) $\partial H/\partial z \neq 0$. Indichiamo poi con x il complesso delle $2n-1$ rimanenti p, q e con dX il prodotto dei loro $2n-1$ differenziali. Mercè la relazione

$$H = E \tag{2}$$

è possibile sostituire, come $2n$ variabili indipendenti, alle originarie p e q, ossia, se si vuole, alle x e alla z, le stesse x in numero di $2n-1$, e la E. Le x si possono risguardare, in un intorno di M, quali coordinate dei punti della ipersuperficie σ. Ed è subito visto dalla definizione di estensione euclidea e dalle leggi di trasformazione degli integrali multipli, che l'elemento di volume (euclideo) dV dello spazio delle fasi può essere posto sotto la forma

$$dV = dp_1 \ldots dp_n dq_1 \ldots dq_n = dz\, dX = \frac{dE\, dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|}. \tag{3}$$

Secondo i principi della meccanica statistica, attribuendo allo spazio delle fasi una densità uniforme, ogni campo elementare dX circostante ad un punto generico M di una superficie isoenergetica σ fornisce al

([15]) Cfr. WEBER-GANS, *Repertorium der Physik*, Leipzig, Teubner, 1916, Bd. I, n. 270, p. 535.

valore medio di una funzione un contributo elementare proporzionale a

$$\frac{F(M)\,dX}{\left|\dfrac{\partial H}{\partial z}\right|}.$$

Se la σ non ha punti multipli, basterà dividerla in un numero finito di pezzi scegliendo, entro ognuno di questi, una z opportuna (fra le $2n$ p e q) perchè abbia senso e rimanga univocamente determinato (in qualunque modo si proceda alla divisione in pezzi) un integrale del tipo,

$$N = \int_\sigma \frac{F(M)\,dX}{\left|\dfrac{\partial H}{\partial z}\right|}. \tag{4}$$

Posto in particolare

$$D = \int_\sigma \frac{dX}{\left|\dfrac{\partial H}{\partial z}\right|}, \tag{5}$$

si assume come valore medio $\overline{F}$ della funzione F

$$\overline{F} = \frac{N}{D}. \tag{6}$$

Se vi sono punti multipli, bisognerebbe fare una discussione un po' più approfondita, ma si giustifica egualmente la considerazione di integrali del tipo D e N e quindi seguita ad essere valida la nozione di valore medio di una funzione (finita e continua) $F(M)$.

Tutto ciò premesso, riprendiamo l'ipotesi che H dipenda, non soltanto dalle p, q, ma anche da certi parametri a, e facciamoli variare in modo così lento — in questo sta la giustificazione dell'aggettivo adiabatico — che nel frattempo il punto M di σ, rappresentativo dell'atto di moto, muovendosi lungo una traiettoria generica (di quelle dense in σ), abbia sensibilmente invaso l'intera superficie $H = E$.

Se ai parametri a si attribuiscono degli incrementi arbitrari da, in un determinato punto M della σ (definito dalle coordinate p, q), l'incremento corrispondente della $H(p\,|\,q)$ vale manifestamente

$$d_a H,$$

le p, q rimanendo inalterate.

Nella ipotesi però che un incremento (anche elementare) delle a si compia mentre il punto rappresentativo $M(p, q)$ del sistema dinamico invade sensibilmente l'intera σ, è ben naturale di pensare che H subisca, non *l'incremento locale* $d_a H$, spettante alla fase iniziale o ad altra fase istantanea, sibbene la media relativa ad un intervallo di tempo abbastanza lungo perchè possa contribuirvi l'intera σ. In conformità *si ammette che ad una variazione elementare adiabatica dei parametri* a *rimanga subordinata come variazione indotta nella funzione* H *il valore medio* $\overline{d_a H}$, *formato a norma delle* (4), (5), (6).

Questo incremento medio della H, dipendente soltanto dalle a e da (non dalle p, q) va così risguardato come definizione dell'alterazione $d_a E$ che subisce l'energia totale E del sistema (spettante ad una soluzione generica) al variare adiabatico, nel senso ora dichiarato, dei parametri a, da cui dipende il meccanismo del sistema attraverso la funzione caratteristica $H(p\,|\,q\,|\,a)$. Siamo quindi condotti a porre

$$d_a E = \overline{d_a H} = \int_\sigma d_a H \frac{dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|} : \int_\sigma \frac{dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|}\,, \tag{7}$$

il che non dà luogo ad osservazioni nel caso di un solo parametro a, ma, nel caso di più parametri, può considerarsi giustificato *soltanto a patto che il secondo membro costituisca un differenziale esatto rispetto agli argomenti* a ([16]). Ora è facile riconoscere (teorema di PAUL HERTZ) che ciò accade effettivamente, anzi che la funzione $E(a)$, definita dalla equazione ai differenziali totali (7) si identifica con quella definita dalla equazione in termini finiti

$$V(a\,|\,E) = \text{cost}\,, \tag{8}$$

V designando, come già si convenne, il volume dello spazio delle fasi racchiuso da una generica superficie $H = E$.

Per accertarlo, basta valutare, in base al suo significato geometrico di volume, l'alterazione che subisce la funzione (8), quando alle a e alla E si attribuiscono incrementi arbitrari da, dE.

Considereremo come variabili indipendenti nello spazio delle fasi le x e la E, fissando l'attenzione sopra un punto generico M della σ e un suo circostante elemento dX. Prima però facciamo ancora un'osservazione

---

([16]) Infatti, in caso diverso, l'energia E non potrebbe risguardarsi come funzione uniforme delle a, ma, pur variando queste in modo adiabatico da una determinazione iniziale a^0 ad una determinazione finale a^1, si avrebbe per la E una alterazione ΔE dipendente ulteriormente dal cammino lungo cui le a passano (nello spazio che le rappresenta) dal punto a^0 al punto a^1.

sulla equazione

$$H = E\,, \tag{2}$$

trattandovi le a, p, q, come variabili indipendenti e la E come loro funzione. In tale accezione l'attribuire alle a incrementi da (lasciando inalterate le p, q) equivale a passare (nell'intorno del punto generico M cui si riferiscono i valori delle p e delle q) dalla superficie isoenergetica $H = E$ all'analoga $H = E - d_a H$.

Ne consegue che, per l'incremento dato alle a, la E, in prossimità di M, si incrementa di $-d_a H$, rimanendo inalterate le x, e la z variando nel modo voluto dalla (2). Perciò, in corrispondenza all'elemento superficiale dX, il volume V subisce l'incremento (3), in cui si ponga per dE il valore ora detto, ossia

$$\frac{-\,d_a H\, dX}{\left|\dfrac{\partial H}{\partial z}\right|}\,. \tag{9}$$

Sommando tutti questi contributi, si ha

$$d_a V = -\int_\sigma \frac{d_a H\, dX}{\left|\dfrac{\partial H}{\partial z}\right|}\,. \tag{10}$$

Quanto a

$$d_E V = \frac{\partial V}{\partial E}\, dE\,, \tag{11}$$

esso non è altro che il volume (dello spazio delle fasi) compreso fra la $H = E$ e la $H = E + dE$, il quale, valutato come sopra, si trova espresso da

$$d_E V = dE \int_\sigma \frac{dX}{\left|\dfrac{\partial H}{\partial z}\right|}\,. \tag{11}$$

Se si considera E come funzione delle a definita dalla (8), il differenziale totale $dV = d_a V + d_E V$ si annulla; si ha quindi dalle (10), (11), scrivendo per maggior chiarezza $d_a E$, al posto del generico dE,

$$-\int_\sigma \frac{d_a H\, dX}{\left|\dfrac{\partial H}{\partial z}\right|} + d_a E \int_\sigma \frac{dX}{\left|\dfrac{\partial H}{\partial z}\right|} = 0\,, \tag{7'}$$

che coincide materialmente colla (7) e dimostra appunto essere $d_a E$ differenziale esatto della funzione E delle a definita dalla (8). Viceversa, se si definisce $d_a E$ in base alla (7), ciò che traduce, nelle circostanze supposte, la variazione adiabatica dei parametri a, ne risulta in virtù della (7′), attese le (10) e (11), $dV=0$, onde rimane acquisito il risultato fondamentale che il volume dello spazio delle fasi, racchiuso da una superficie isoenergetica $H=E$, è un invariante adiabatico.

5. - Caso di un solo grado di libertà. Esempi elementari.

Per quanto si tratti di cose dette e ripetute in più guise (dagli autori citati e da altri), ci soffermeremo un momento sul caso particolare dei sistemi dinamici con un solo grado di libertà. Essendo q l'unica coordinata lagrangiana; $\dot{q}=dq/dt$; $T=\frac{1}{2}A\dot{q}^2$ la forza viva, con A funzione positiva di q; $U(q)$ la funzione delle forze, avremo il momento

$$p=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=A\dot{q}\,, \tag{12}$$

e per conseguenza l'espressione canonica dell'energia

$$H=\frac{1}{2A}\,p^2-U(q)\,. \tag{13}$$

È ben noto ([17]) che, ove q sia inizialmente compreso fra due radici semplici q', q'' dell'equazione

$$-U=E\,,$$

il moto è periodico. Le traiettorie, nel piano cartesiano p, q delle fasi, sono le curve chiuse

$$H=E\,.$$

Il sistema è manifestamente quasi-ergodico perchè le traiettorie di data energia E, in questo caso, coincidono addirittura colle varietà isoenergetiche $H=E$, cosicchè le riempiono tutte (senza lacune durante un solo periodo).

([17]) Cfr. per es. LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, Bologna, Zanichelli, vol. (II)$_1$, cap. I, § 6.

L'invariante di GIBBS-HERTZ è il volume, in questo caso l'area, V racchiusa da $H = E$.

Risguardando p come funzione (a due valori) di q definita dall'equazione quadratica $H = E$, l'espressione di V può essere posta sotto la forma

$$V = \oint p\, dq\,, \tag{14}$$

dove il segno $\oint$ sta ad indicare che l'integrale va esteso alla curva chiusa $H = E$, con che, in quanto, per l'espressione (13) di H, la curva risulta simmetrica rispetto all'asse delle q, si può anche scrivere

$$V = 2\int_{q'}^{q''} p\, dq\,,$$

p designando la radice positiva della equazione quadratica $H = E$. Se si introduce nella (14) il tempo t come variabile indipendente e si indica con τ il periodo del moto, si ha manifestamente $V = \int_0^\tau p\dot{q}\, dt$, e siccome $p\dot{q}$ si identifica col doppio $2T$ della forza viva si ha altresì

$$V = \int_0^\tau 2T\, dt\,. \tag{14'}$$

Nel secondo membro si riconosce *l'azione* maupertuisiana [18] relativa ad un periodo del moto: essa è dunque, al pari di V, un invariante adiabatico.

Introducendo il valore medio $\overline{T}$ della forza viva relativa ad un periodo, nonchè la frequenza $\nu = 1/\tau$, si ha ancora

$$V = 2\overline{T}\tau = \frac{2\overline{T}}{\nu}\,. \tag{14''}$$

Nel caso di un oscillatore (punto materiale soggetto a forza elastica di richiamo) si può ritenere nella (13) $A = 1$, $U = -\frac{1}{2}\omega^2 q^2$, assumendo per esempio come unitaria la massa del mobile, designandone con q l'ascissa

---

[18] « Ibidem » come in [17], vol $(\mathrm{II})_2$; cap. II, n. 13.

e indicando con ω^2 il coefficiente costante della forza di richiamo. Tutti i moti così definiti sono armonici colla costante di frequenza ω, risultando in conformità

$$q = r \cos(\omega t + \vartheta_0)\,,$$

dove r (> 0) e ϑ_0 rappresentano le costanti di integrazione.

Nel piano p, q delle fasi le curve isoenergetiche sono le ellissi

$$\frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 = E$$

e si ha quindi per l'area racchiusa

$$V = \frac{2\pi E}{\omega}\,.$$

Come si vede, non è l'energia totale E dell'oscillatore che ha carattere invariante di fronte alle influenze adiabatiche, bensì il rapporto fra energia e frequenza.

Ciò poteva del resto desumersi anche dalla (14″), tenendo presente che, nel caso di oscillatore, i valori medi dell'energia cinetica e di quella potenziale sono eguali tra loro, e ciascuno a $\frac{1}{2}E$; essendo d'altra parte $\nu = \omega/2\pi$.

Per il pendolo semplice, se si assume al solito come coordinata lagrangiana q la deviazione ϑ dalla verticale, si ha, dalla definizione di T e dall'integrale delle forze vive,

$$T = \frac{1}{2} l^2 \dot{\vartheta}^2 = E + gl \cos\vartheta\,,$$

designandosi con g l'accelerazione della gravità, con l la lunghezza del pendolo, e assumendo come unitaria la massa del pendolo stesso. La (14′) dà

$$V = l^2 \int_0^\tau \dot{\vartheta}^2\, dt\,.$$

Sostituiamovi ϑ a t come variabile d'integrazione, indicando con $-\vartheta_0$ e ϑ_0 gli estremi di una oscillazione semplice (corrispondente cioè a mezzo periodo), i quali sono definiti in funzione di E, g, l dall'equazione

$$E + gl\cos\vartheta_0 = 0 \,. \tag{15}$$

Potremo scrivere

$$V = 2l^2\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \dot{\vartheta}\, d\vartheta = 2\sqrt{2}\, l \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \sqrt{E + gl\cos\vartheta}\, d\vartheta \,. \tag{16}$$

Ne viene [19]

$$\frac{\partial V}{\partial E} = 2\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\dot{\vartheta}} = \tau \,. \tag{17}$$

Per $E = -gl$ si ha in particolare $\vartheta_0 = 0$, $V = 0$.
D'altra parte, ove si ponga al solito

$$\sin\frac{\vartheta_0}{2} = k \,,$$

la definizione (15) di ϑ_0 dà

$$E + gl = 2glk^2 \,,$$

e quindi, badando anche alla (17)

$$\frac{\partial V}{\partial k} = \frac{\partial V}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial k} = \frac{\partial V}{\partial E}\, 4glk = 4glk\tau \,.$$

Ove si ricordi il noto sviluppo di τ [20]

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_0^\infty{}_n\, c_n^2 k^{2n} \qquad \left(c_0 = 1,\ c_n = \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n}\right)$$

e si tenga presente che V si annulla per $E = -gl$, cioè per $k = 0$, si ha, integrando la precedente espressione di $\partial V/\partial k$ da 0 a k,

$$V = 8\pi\sqrt{l^3 g}\sum_0^\infty{}_n \frac{1}{2n+2}\, c_n^2\, k^{2n+2} = 4\pi\sqrt{l^3 g}\, k^2 \sum_0^\infty{}_n \frac{1}{n+1}\, c_n^2 k^{2n} \,. \tag{17'}$$

---

[19] Non sarà inutile notare che bisognerebbe veramente derivare rispetto ad E anche i limiti $\pm\vartheta_0$ (i quali ne dipendono), ma il contributo relativo è nullo perchè la funzione sotto il segno va a zero per $\vartheta = \pm\vartheta_0$.

[20] Veggasi ad es. loc. cit. a pag. 474, cap. I, n. 38.

6. - Sistemi integrabili per separazione delle variabili. Teorema di Burgers.

Tornando oramai al caso generale e considerando quanto sia notevole e fecondo l'invariante adiabatico desunto dall'integrale delle forze vive, vien fatto naturalmente di domandarsi se analoghe deduzioni non siano possibili quando si conoscono altri integrali del sistema dinamico di cui si tratta.

A questo proposito conviene anzitutto ricordare la geniale applicazione del principio di EHRENFEST, fattane subito dal BURGERS ([21]) ai sistemi dello STÄCKEL integrabili col metodo della separazione delle variabili (e quindi per quadrature). Per tali sistemi materiali il SOMMERFELD aveva introdotto con brillante successo il postulato

$$J_i = \oint p_i dq_i = \text{multiplo intero di } h/2\pi \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Spetta al BURGERS il merito di averne fornita una giustificazione razionale, constatando che, nel caso suddetto, i singoli integrali J sono invarianti adiabatici. Il BURGERS ne diede due dimostrazioni di tipo diverso, sfruttanti l'una le proprietà differenziali, l'altra le proprietà integrali dei sistemi dello STÄCKEL ([22]): procedimenti entrambi ingegnosi e penetranti, di cui il secondo è anche sembrato suscettibile di qualche estensione qualitativa. Essa non si riattacca tuttavia all'indirizzo rigoroso della meccanica analitica, il quale apparirà invece il più opportuno per fornire una generalizzazione espressiva.

7. - Sistemi canonici da designarsi come imprimitivi d'ordine m, i quali ammettono, oltre $H = E$, altri m integrali uniformi. Risultato negativo del Fermi.

Riprendiamo la considerazione di un generico sistema canonico

$$\text{(1)} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

([21]) *Adiabatic invariants of mechanical systems*, « Phil. Mag. », vol. XXXIII, 1917, pp. 514-520.

([22]) Cfr. per quest'ultima la dissertazione del BURGERS (presentata all'Università di Leida; Haarlem, 1918; in lingua olandese); ovvero BORN, loco cit. ([8]), pp. 98-148.

a funzione caratteristica $H(p|q|a)$ indipendente dal tempo, e (come al n. 3) dipendente invece in modo adiabatico da quanti si vogliono parametri a.

Supponiamo che il sistema ammetta, oltre all'integrale dell'energia

$$H = E, \tag{2}$$

altri m integrali uniformi, pure indipendenti da t,

$$F_1 = c_1, \quad F_2 = c_2, \quad \ldots, \quad F_m = c_m. \tag{18}$$

Siffatti sistemi canonici li chiameremo, per brevità, *imprimitivi d'ordine m*. L'imprimitività d'ordine zero corrisponde così all'ipotesi che esista il solo integrale uniforme dell'energia.

Per convenienza formale giova introdurre le designazioni

$$F_0 = H, \qquad c_0 = E, \tag{19}$$

con che gli integrali conosciuti (2) e (18) del nostro sistema canonico si possono tutti compendiare nella formula

$$F_r = c_r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, m). \tag{20}$$

Supponiamo inoltre che le (20) definiscano nello spazio Φ_{2n} delle fasi una varietà chiusa (cioè priva di frontiera) a $2n-(m+1)$ dimensioni, che designeremo con τ; che non esistano altri integrali uniformi; e infine che quasi tutte le curve integrali, ciascuna delle quali si svolge sopra una determinata τ, siano, nel solito senso, dense sopra la corrispondente τ; ovvero verifichino una condizione alquanto meno restrittiva d'), che sarà specificata nel prossimo n. 13.

Lasciandoci guidare dagli stessi criteri che ci hanno condotto nel n. 4 alla definizione (7) di $d_a E$, saremmo ora tratti a introdurre le variazioni adiabatiche delle costanti c_r sotto la forma di valori medi ([23])

$$\overline{d_a F_r}$$

([23]) Il significato da attribuire a tali valori medi su τ è un'ovvia generalizzazione di quello specificato al n. 4 per le superficie isoenergetiche. E precisamente, detto M un punto (ordinario) della varietà τ, $d\tau$ un elemento circostante, si indichino con $z_0, z_1, \ldots, z_m$ (complessivamente con z) $m+1$ argomenti (tra le $2n$ coniugate p, q) rapporto ai quali le (20) siano risolubili. Sarà, in conformità diverso da zero il determinante funzionale

$$\Delta = \begin{pmatrix} F_0 \, F_1 \ldots F_m \\ z_0 \;\; z_1 \;\ldots\; z_m \end{pmatrix}.$$

delle dF_r, rispetto alla varietà τ (nell'ipotesi che le curve integrali la riempiano sensibilmente).

Ma, come ebbe a rilevare il FERMI ([24]), le variazioni, così definite, non sono in generale differenziali esatti rispetto ai parametri a, e lo divengono solo in circostanze molto particolari; sicchè pare escluso che sia da impostare per questa via uno studio generale degli invarianti adiabatici.

8. - Integrali elementari $p_r = \text{cost.}$ Conseguente riduzione del sistema canonico. Invariante adiabatico fornito dal volume ridotto.

Fissiamo per un momento l'attenzione sul caso tipico in cui alcune delle coordinate lagrangiane, diciamo per es.

$$q_1\,,\quad q_2\,,\quad \dots,\quad q_m\,,$$

sono *cicliche*, o, come suol anche dirsi, *ignorabili*, nel senso che non compariscono nella espressione dell'energia H. Essendo allora

$$\frac{\partial H}{\partial q_r} = 0 \qquad\qquad (r = 1, 2, \dots, m),$$

le prime m equazioni canoniche (1) danno appunto gli m integrali

$$p_r = \text{cost.} = c_r \qquad\qquad (r = 1, 2, \dots, m). \tag{21}$$

Tenendone conto, le rimanenti equazioni (1) si scindono in due gruppi:

Dicansi x gli altri $2n-(m+1)$ argomenti p, q; dX il prodotto dei relativi differenziali. Risguardando come $2n$ variabili indipendenti, al posto delle p, q, le x e le c, si avrà

$$dV = \frac{dX dc_0 dc_1 \dots dc_m}{|\Delta|}\,,$$

e il valore medio di una generica dF_r si definisce come il rapporto

$$\int_\tau \frac{d_a F_r dX}{|\Delta|} : \int_\tau \frac{dX}{|\Delta|}\,.$$

([24]) *Alcuni teoremi di meccanica analitica importanti per la teoria dei quanti*, « Nuovo Cimento », VII, vol. 25, 1923, pp. 271-285.

a) Il sistema canonico, nei $2(n-m)$ argomenti coniugati

$$\begin{pmatrix} p_{m+1} & \cdots & p_n \\ q_{m+1} & \cdots & q_n \end{pmatrix},$$

(22) $$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad (i = m+1, .., n),$$

in cui, per mettere in evidenza che le p_r vanno sostituite coi loro valori costanti c_r, ho scritto, in luogo di H,

(23) $$\mathcal{H} = (H)_{p_r = c_r}.$$

b) Le rimanenti m equazioni

(24) $$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_r} \qquad (r = 1, 2, ..., m)$$

il cui ufficio è unicamente quello di fornire (per quadrature) l'espressione temporale delle coordinate ignorabili q_r, una volta integrato il sistema canonico ridotto (22). In questo le c si possono trattare alla stessa stregua dei parametri a (che già comparivano nella originaria H).

Purchè soltanto le varietà isoenergetiche del sistema ridotto (22)

$$\mathcal{H} = E$$

siano superficie chiuse a $2(n-m)-1$ dimensioni dello spazio Ψ delle p_i, q_i $(i > m)$, il volume W da esse delimitato è un invariante adiabatico di fronte a variazioni lente quali si vogliono di tutti i parametri a, c ed E.

9. - Generalizzazione del risultato precedente suggerita dalla teoria delle trasformazioni canoniche.

Se gli integrali conosciuti (18), pur senza avere la forma particolare $p_r = \text{cost.}$, sono fra loro in involuzione, ossia se si annullano le $m(m-1)/2$ parentesi di Poisson

$$(F_r, F_s) \qquad (r, s = 1, 2, ..., m),$$

è sempre possibile ([25]) ricondursi al caso elementare anzidetto mediante

([25]) Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, B. II, Leipzig, Teubner, 1890, Cap. X, pp. 207-209.

una trasformazione canonica, introducendo cioè, al posto degli argomenti originari p_i, q_i, $2n$ loro combinazioni indipendenti P_i, Q_i, di cui le prime m delle P si identificano con le $F_r(p|q)$, risultando altresì soddisfatta la condizione di canonicità

$$\sum_1^n{}_i P_i\, dQ_i = \sum_1^n{}_i p_i\, dq_i + \text{differenziale esatto}\,.$$

Questa assicura che, nelle nuove variabili P, Q, le equazioni differenziali (1) conservano la forma canonica colla stessa funzione caratteristica H (espressa per le P, Q, anzichè per le p, q). E il sistema trasformato ammette, per costruzione, gli m integrali elementari

$$P_r = c_r\,.$$

Soddisfatta che sia la condizione qualitativa concernente la chiusura delle varietà

$$\mathcal{H} = (H)_{P_r=c_r} = E \tag{25}$$

nello spazio dei $2(n-m)$ argomenti P_i, Q_i $(i > m)$ - e ciò dà luogo ad osservazioni essenziali su cui ci intratterremo tra un momento — *il volume W del campo delimitato da $\mathcal{H} = E$ in detto spazio costituisce un invariante adiabatico di fronte a variazioni lente quali si vogliono dei parametri a, nonchè delle costanti di integrazione E e c.*

Di tale invariante rimane dunque — specificazioni qualitative a parte — dimostrata l'esistenza per ogni sistema canonico imprimitivo d'ordine m.

10. - Considerazioni critiche. Necessità analitica e costruttiva di riportare il risultato alle originarie variabili. Cenno della via da tenere.

Per quanto teoricamente possibile, l'introduzione di nuove variabili canoniche (P_i, Q_i), di cui le prime m delle P coincidono colle F_r, dà luogo a varie osservazioni:

1) Anzitutto essa dipende da operazioni analitiche di ordine elevato; generalmente più elevato che l'integrazione del sistema canonico, di cui si conoscono gli integrali in involuzione $F_r = c_r$.

2) Mentre le originarie variabili p, q sono, per ipotesi, in corrispondenza biunivoca colle fasi (atti di moto) del sistema meccanico, non

può affermarsi a priori che lo stesso segua delle P, Q, in quanto queste (fatta eccezione per le P_r scelte eguali alle F_r) saranno in generale funzioni *non* uniformi delle p, q.

Perciò, mentre *localmente* si conservano i caratteri topologici, passando dallo spazio rappresentativo delle (p, q) a quello delle (P, Q), non è detto che lo stesso segua in tutto il campo delle (p, q) che occorre prendere in considerazione. Per es. è possibile che la proprietà di certe curve di riempire *praticamente* delle varietà non abbia carattere invariantivo quando si operano trasformazioni non uniformi, ecc.

3) È vero d'altra parte che, per la natura specifica della trasformazione canonica fra le (p, q) e le (P, Q), le varietà isoenergetiche (ridotte) τ di equazione

$$\mathcal{H} = (H)_{P_r = c_r} = E \tag{25}$$

rispetto alle variabili ausiliarie $P_{m+1}, \ldots, P_n, Q_{m+1}, \ldots, Q_n$, si possono anche definire direttamente rispetto alle variabili originarie, mediante le $m+1$ equazioni (uniformi)

$$F_r = c_r\,, \qquad H = E\,,$$

o, ciò che è lo stesso, mediante le (20) del n. 7.

Tuttavia, nello spazio delle fasi Φ_{2n} delle (p, q), tali $m+1$ equazioni determinano una varietà a $2n-(m+1)$ dimensioni, e non si vede che cosa sia geometricamente l'invariante W, il quale, nello spazio dei $2(n-m)$ argomenti $P_{m+1}, \ldots, P_n, Q_{m+1}, \ldots, Q_n$, è il volume racchiuso da una superficie (25).

Per renderci conto preciso della difficoltà, immaginiamo (ciò che non costituisce restrizione sostanziale) che gli m integrali indipendenti (18)

$$F_r = c_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

siano risolubili rispetto a $p_1, p_2, \ldots, p_m$, fornendo questi m argomenti in funzione dei rimanenti (nonchè delle c e dei parametri a) sotto la forma

$$p_r = f_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, m). \tag{18'}$$

Le equazioni (20) della varietà τ, nello spazio Φ_{2n} delle fasi, si riducono, quando si prescinda dalle $p_1, p_2, \ldots, p_m$, si consideri cioè uno spazio ausiliario Φ' a $2n-m$ dimensioni rappresentativo degli argomenti

$$p_{m+1}, \;\ldots,\; p_n\,; \qquad q_1,\; q_2,\; \ldots,\; q_n,$$

all'unica equazione

$$(H)_{p_r=f_r} = E\,, \tag{25'}$$

che rappresenta una superficie (varietà a $2n-(m+1)$ dimensioni) in Φ'. Ma bisognerebbe ulteriormente liberarsi da m dimensioni, ossia, sotto l'aspetto formale, da m argomenti, ciò che si fa automaticamente attraverso la trasformazione canonica, rimanendone condotti a prescindere dalle m coordinate ignorabili $Q_1, Q_2, ..., Q_m$, coniugate alle $P_r = F_r$.

Soltanto superando in qualche modo una tale difficoltà, si potrebbe poi abbassare di m unità la dimensione di una varietà (25'), in modo che essa si presenti quale superficie in uno spazio Ψ a $2(n-m)$ dimensioni. E allora, salvo specificazioni qualitative e riconoscimento della metrica da attribuirsi allo spazio ridotto Ψ, diverrebbe legittimo parlare di volume W racchiuso da una superficie (25'), e si avrebbe in esso l'invariante adiabatico suggerito dalla trasformazione canonica.

In definitiva, attenendosi alla via indicata, la stessa dimostrazione di esistenza dell'invariante adiabatico W non riesce esauriente perchè vi intervengono trasformazioni in generale non uniformi in tutto il campo che occorre investigare, le quali trasformazioni possono alterare taluno dei caratteri topologici di cui è d'uopo tener conto. D'altra parte, anche se si passasse sopra a tale deficienza, ritenendo, come in realtà è, che la trasformazione renda per lo meno assai plausibile il teorema d'esistenza, rimane il lato costruttivo, il quale, come si è or ora rilevato, sembra richiedere la preventiva determinazione delle combinazioni ignorabili

$$Q_1\,,\quad Q_2\,,\quad ...,\quad Q_m$$

e quindi operazioni differenziali che possono essere elevate, mentre è desiderabile pervenire all'espressione esplicita di W nel modo più semplice possibile, il quale implica, come vedremo, soltanto una quadratura.

Dobbiamo pertanto cercare di caratterizzare direttamente (si vuol dire senza trasformazioni ausiliarie) l'invariante adiabatico W.

In tale indagine si presenterà come fondamentale un procedimento dovuto al MORERA ([26]), il quale già ne trasse una rapida dimostrazione del teorema di LIE sulla riduzione dei sistemi canonici. Per lo scopo che abbiamo in vista modificheremo alquanto il procedimento, rendendo anche più spontanea l'introduzione di quel certo sistema ai differenziali totali completamente integrabile, che consente, come mostrò il MORERA, agile discussione delle questioni di riducibilità.

([26]) *Intorno ai sistemi di equazioni a derivate parziali del 1° ordine in involuzione*, « Rend. del R. Ist. Lombardo », vol. XXXVI, 1903, pp. 775-790.

11. - Nuovo aspetto del teorema del Lie sulle riduzioni dei sistemi canonici. Sistema associato (A_0) ai differenziali totali.

Poniamoci nelle condizioni ripetutamente enunciate, riferendoci ad un sistema imprimitivo d'ordine m (n. 7), cioè ad un sistema canonico (1), del quale, essendo la funzione caratteristica H indipendente da t, si conoscono, oltre all'integrale dell'energia

$$H = E\,, \tag{2}$$

m integrali

$$F_r = c_r \qquad (r = 1, 2, \dots, m), \tag{18}$$

pure indipendenti da t ed in involuzione tra di loro.

Notoriamente ([27]) quest'ultima circostanza seguita a sussistere anche se si assumono le (18) sotto la forma risoluta

$$p_r = f_r \qquad (r = 1, 2, \dots, m), \tag{18'}$$

e si traduce formalmente nelle identità

$$\frac{\partial f_r}{\partial q_s} - \frac{\partial f_s}{\partial q_r} + \{f_r, f_s\} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \dots, m), \tag{26}$$

dove il simbolo $\{\ \}$ sta a designare una parentesi del POISSON, limitata agli argomenti

$$\begin{pmatrix} p_{m+1} & \cdots & p_n \\ q_{m+1} & \cdots & q_n \end{pmatrix}.$$

Il fatto che le (18) sono altrettanti integrali del sistema canonico (1), e quindi le (18') relazioni invarianti, implica che le parentesi $(H, p_r - f_r)$ si annullino, tenuto conto delle (18') stesse.

Introducendo la funzione caratteristica ridotta

$$\mathcal{H}(p_{m+1} \dots, p_n \,|\, q) = (H)_{p_r = f_r}\,,$$

e tenendo conto che la derivata parziale di $\mathcal{H}$ rispetto ad un generico

([27]) Cfr. per es. loco cit. a pag. 474, vol. (II)$_2$; cap. X, n. 29.

argomento x (sia questo una delle p_i d'indice $> m$, una generica q, una a o una c) vale

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} + \sum_1^m {}_r \frac{\partial H}{\partial p_r} \frac{\partial f_r}{\partial x}, \tag{27}$$

si arriva, con ovvie trasformazioni materiali ([28]) ,a riconoscere che sussistono (identicamente, rispetto a tutti gli argomenti che vi compariscono) le relazioni

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_r} + \{\mathcal{H}, f_r\} = 0 \qquad (r = 1, 2, ..., m). \tag{28}$$

Tutto ciò premesso, torniamo alle equazioni differenziali

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, ..., n). \tag{1}$$

Le prime m del primo gruppo si possono tralasciare senz'altro risguardandole sostituite dagli m integrali, anzi addirittura dalle (18′) che esprimono in termini finiti $p_1, p_2, ..., p_m$, in funzione delle altre incognite $p_{m+1}, ..., p_n$; $q_1, ..., q_n$ (delle costanti c e dei parametri a).

Le rimanenti $2n - m$ equazioni (1) si possono scindere in due gruppi, rispettivamente di $2(n - m)$ e di m equazioni scrivendo:

$$\left\{\begin{aligned} dp_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} dt, \\ dq_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \qquad (i = m + 1, ..., n); \end{aligned}\right. \tag{29}$$

$$dq_r = \frac{\partial H}{\partial p_r} dt \qquad (r = 1, 2, ..., m). \tag{30}$$

Se nei secondi membri delle (29) si introducono, al posto delle derivate di H, le loro espressioni (27) per mezzo delle derivate corrispondenti della funzione ridotta $\mathcal{H}$, e si bada alle (30), si può attribuire alle (29) stesse la forma equivalente

$$\left\{\begin{aligned} dp_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dt + \sum_1^m {}_r \frac{\partial f_r}{\partial q_i} dq_r, \\ dq_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dt - \sum_1^m {}_r \frac{\partial f_r}{\partial p_i} dq_r \qquad (i = m+1, ..., n). \end{aligned}\right. \tag{A_0}$$

([28]) « Ibidem » come in ([27]), n. 30.

Queste, associate alle (30), formano complessivamente, come già le (29), (30), un sistema differenziale ordinario di rango $2n - m$. Ma si dà la circostanza singolarmente favorevole che *da sole le* (A_0) *costituiscono un sistema ai differenziali totali illimitatamente integrabile, nelle funzioni incognite* p_i, q_i $(i > m)$ *delle variabili, risguardate indipendenti,* t, q_1, q_2, ..., q_m. Questo si dirà *sistema associato* dell'originario sistema imprimitivo d'ordine m, con riguardo ai suoi m integrali in involuzione (18), o, ciò che è lo stesso, alle (18').

Le condizioni di illimitata integrabilità di (A_0) sono appunto espresse, come si potrebbe verificare in modo ovvio [29], dalle (26) e (28) che traducono formalmente le nostre ipotesi. Questo consente di considerare isolatamente il sistema (A_0) nelle $2(n - m)$ funzioni incognite p_i, q_i $(i > m)$, il quale, essendo completamente integrabile, può ricondursi ad un sistema differenziale ordinario di rango $2(n - m)$.

Una volta integrato il sistema (A_0) e conseguite quindi le funzioni p_i, q_i $(i > m)$ delle t, q_1, q_2, ..., q_m [30], basta pensarvi le q_1, q_2, ..., q_m, non più come variabili indipendenti, ma come funzioni di t soddisfacenti alle (30) per avere in sostanza assegnato l'integrale generale dell'originario sistema canonico. Per caratterizzare tali funzioni $q_r(t)$ $(r = 1, 2$ ..., $m)$ in modo da verificare anche le (30), tutto si riduce manifestamente a sostituire nei secondi membri delle (30) stesse, al posto delle p_i, q_i $(i > m)$, le loro espressioni in funzione delle t, q_1, q_2, ..., q_m risultanti dall'integrazione del sistema (A_0), con che la determinazione delle $q_r(t)$ viene a dipendere da un sistema differenziale ordinario di rango m, e sembra quindi richiedere un'operazione di quest'ordine. In realtà si potrebbe ancora riconoscere che, ricorrendo al metodo di JACOBI per l'integrazione delle (A_0), vien fatto di risparmiare l'ultima operazione di rango m, sostituendola con una semplice quadratura. Ma ciò non ha interesse per l'attuale nostro scopo, mentre importa rilevare che ogni integrale del sistema ai differenziali totali (A_0) (in cui le q_r si risguardano come variabili indipendenti assieme alla t) lo è *a fortiori* per il sistema differenziale ordinario costituito complessivamente dalle (A_0) e dalle (30), e quindi anche per l'originario sistema canonico in cui le q_r vanno considerate quali convenienti funzioni di t). Non solo, ma lo stesso fatto, che da (A_0) si può senz'altro risalire al sistema canonico, vale anche per eventuali invarianti integrali del sistema (A_0).

---

[29] Chi volesse qualche ragguaglio sulla teoria generale dei sistemi ai differenziali totali può consultare le nostre *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, raccolte dal Prof. E. PERSICO, Roma, Stock, 1925, cap. II.

[30] Tali funzioni p_i, q_i dipenderanno altresì da $2(n - m)$ costanti di integrazione, e precisamente dai valori iniziali (arbitrari, almeno entro un certo campo) p_i^0, q_i^0 che si vogliono attribuire alle p_i, q_i $(i > m)$, in corrispondenza a valori iniziali pure arbitrari t_0; q_1^0, ... , q_m^0 delle variabili indipendenti t; q_1, ... q_m.

Diamo intanto un esempio della prima osservazione, riservandoci di illustrare al n. seguente la seconda, che si collega, come mostreremo subito dopo, nel modo più diretto ed espressivo, alla teoria degli invarianti adiabatici.

L'integrale del sistema ai differenziali totali (A_0) che vogliamo intanto segnalare non è altro che quello dell'energia [ridotta a mezzo degli altri integrali conosciuti (18) o (18')]

$$\mathcal{H} = E . \tag{25'}$$

Per riconoscere che si tratta effettivamente di un integrale di (A_0) occorre e basta verificare che

$$d\mathcal{H} = \sum_{m+1}^{n}{}_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i\right) + \sum_{1}^{m}{}_r \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_r} dq_r ,$$

quando vi si sostituiscono le espressioni (A_0) delle dp_i, dq_i, va a zero per qualunque determinazione dei differenziali dt, dq_r delle variabili indipendenti. Che ciò sia, segue senz'altro dalle (28). In questo esempio particolare il ritorno al sistema differenziale ordinario non dà nulla di nuovo, riportando appunto all'integrale (ridotto) dell'energia.

12. - Lo spazio Ψ a $2(n-m)$ dimensioni delle fasi p_i, q_i $(i > m)$. Il corrispondente volume euclideo quale invariante integrale del sistema (A_0). Applicazione al volume W_0 racchiuso in Ψ da una $\mathcal{H} = E$.

Consideriamo una soluzione generica

$$\begin{cases} p_i = p_i(t\,|\,q_1, q_2, \ldots, q_m) \\ q_i = q_i(t\,|\,q_1, q_2, \ldots, q_m) \end{cases} \qquad (i = m+1,\ m+2, \ldots, n) \tag{31}$$

del sistema ai differenziali totali (A_0), illimitatamente integrabile, e rappresentiamo separatamente le determinazioni t, $q_1, \ldots, q_m$ delle variabili indipendenti quali punti P di uno spazio Σ a $m+1$ dimensioni, le determinazioni p_i, q_i delle funzioni quali punti M di un altro spazio Ψ a $2(n-m)$ dimensioni (spazio delle fasi, ridotto). Alle (31) equivale il fatto geometrico che M è funzione di P, univocamente determinata (come, sotto aspetto analitico, abbiamo avuto occasione di ricordare al n. precedente), tostochè sia assegnata la posizione M_0 di M che corrisponde ad un particolare punto P_0. Potremo scrivere, immaginando sottinteso P_0,

$$M = M(P \,|\, M_0) \,. \tag{31'}$$

Con queste immagini geometriche diviene agevole il caratterizzare a parole un tipico invariante integrale (a $2(n-m)$ dimensioni) spettante a qualsiasi sistema (A_0). Ecco di che si tratta:

Si fissi arbitrariamente (nell'ambito di valori in cui il sistema (A_0) si comporta regolarmente) una porzione finita C_0 di Ψ, e sia M_0 un suo punto generico. Consideriamo le soluzioni (31′) definite dai singoli punti M_0 di C_0 (risguardati quali iniziali, cioè assunti per un P_0 prefissato). Immaginiamo di far variare P a partire da P_0, sempre restando nell'ambito di regolarità delle (A_0).

Ad ogni P siffatto rimane subordinato un campo C di Ψ, luogo delle posizioni dei punti M che, inizialmente, occupavano C_0.

Dico che il volume W_0 *spettante a* C, *in quanto si attribuisca allo spazio* Ψ *metrica euclidea, è indipendente da* P. *Si ha cioè in*

$$W_0 = \int_C dp_{m+1} \dots dp_n \, dq_{m+1} \dots dq_n \,, \tag{32}$$

un invariante integrale del sistema ai differenziali totali (A_0).

Per giustificarlo comincerò, ad evitare ambiguità, col sostituire ∂ a d nei differenziali che stanno sotto il segno dell'integrale multiplo, riservando il simbolo d per i differenziali che si riferiscono al sistema (A_0), sia delle variabili indipendenti t, q_1, q_2, ..., q_m, sia delle funzioni p_i, q_i $(i > m)$.

Qualunque sia il campo iniziale C_0, il secondo membro della (32) diviene, a integrazione eseguita, funzione bene determinata di P, cioè di t, q_1, q_2, ..., q_m. Si tratta di stabilire che tale funzione si riduce ad una costante, cioè che il suo differenziale dW_0 è zero. Attesa l'espressione (32) di W_0, la quale, ponendo per brevità

$$\partial C = \partial p_{m+1} \dots \partial p_n \, \partial q_{m+1} \dots \partial q_n \,, \tag{33}$$

può essere scritta

$$W_0 = \int_C \partial C \,, \tag{32'}$$

si ha, col solito algoritmo,

$$dW_0 = \int_C \partial C \sum_{m+1}^{n}{}_i \left(\frac{d\partial p_i}{\partial p_i} + \frac{d\partial q_i}{\partial q_i} \right) ,$$

dove tutto va formalmente come se i rapporti

$$\frac{d\partial p_i}{\partial p_i} = \frac{\partial dp_i}{\partial p_i}, \qquad \frac{d\,\partial q_i}{\partial q_i} = \frac{\partial\, dq_i}{\partial q_i}$$

stessero a significare le corrispondenti derivate parziali

$$\frac{\partial(dp_i)}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial(dq_i)}{\partial q_i}.$$

Le dp_i, dq_i devono ritenersi sostituite colle loro espressioni (A_0). Attesa la forma canonica (rispetto a ciascuna delle variabili indipendenti) dei differenziali dp_i, dq_i, forniti dalle (A_0), ogni binomio

$$\frac{\partial dp_i}{\partial p_i} + \frac{\partial dq_i}{\partial q_i}$$

si annulla, e con esso dW_0, c.d.d.

Aggiungiamo ora l'ipotesi qualitativa che, per una determinazione generica delle $q_1, q_2, \ldots, q_m$ (ometto la t, la quale per dato non entra mai esplicitamente), le superficie isoenergetiche (ridotte)

$$\mathcal{H} = E \tag{25'}$$

siano chiuse nello spazio Ψ delle $p_{m+1}, \ldots, p_n$; $q_{m+1}, \ldots, q_n$, pur potendo in generale variare con $q_1, q_2, \ldots, q_m$.

Indichiamo in conformità con σ una ben determinata di queste superficie chiuse, che dovrà pensarsi dipendente dalle $q_1, q_2, \ldots, q_m$, nonchè, al solito, da E, dalle c e dalle a. Per essere $\mathcal{H} = E$ integrale del sistema (A_0) ogni punto M che appartiene a σ inizialmente, ossia per una qualche determinazione delle $q_1, q_2, \ldots, q_m$, vi appartiene per qualsiasi altra determinazione. Perciò il campo C racchiuso da una σ (che, anch'esso, varierà in generale colle $q_1, q_2, \ldots, q_m$) rimane sempre il corrispondente, nel senso specificato in principio di questo n., della sua determinazione iniziale. Ma il volume di tale campo è un invariante integrale, dunque si ha l'importante corollario che *il volume* (euclideo) W_0 *racchiuso, nello spazio* Ψ *delle* p_i, q_i $(i > m)$, *da una generica* σ *di equazione*

$$\mathcal{H} = E,$$

è (a differenza della σ stessa) *indipendente dalle* $q_1, q_2, \ldots, q_m$, *e quindi* *funzione soltanto delle costanti di integrazione E e c, nonchè dei parametri a* (che eventualmente figurano nella funzione caratteristica H dell'assegnato sistema canonico).

13. - Ipotesi più lata concernente la densità delle curve integrali. Proprietà fondamentale di W_0 di essere anche invariante adiabatico.

L'interesse essenziale delle precedenti considerazioni sta nel fatto che, come già il volume $2n$-dimensionale V per i sistemi quasi ergodici, così, per i sistemi canonici (1) imprimitivi di ordine m, il volume $2(n-m)$-dimensionale W_0 è un *invariante adiabatico.*

La verificazione è immediata, semprechè si supponga (cfr. n. 7) che *quasi* tutte le curve integrali del sistema canonico siano dense:

d) sulla varietà τ a $2n-(m+1)$ dimensioni definita complessivamente dalle $H=E$, $F_r=c_r$ $(r=1, 2, ..., m)$, ossia, più simmetricamente, dalle

$$F_r = c_r \qquad (r=0, 1, 2, ..., m); \tag{20}$$

o anche soltanto (è questa la condizione meno restrittiva di cui si fece cenno al n. 7)

d') sopra una qualunque delle varietà σ a $2(n-m)-1$ dimensioni, $\mathcal{H}=E$, di Ψ, le quali si ottengono attribuendo in $\mathcal{H}$, alle q_1, q_2, ..., q_m determinazioni arbitrarie (costanti o magari anche funzioni di t).

Naturalmente, se è verificata d), lo è in particolare d'), ma non viceversa.

Comunque, attesa la proprietà fondamentale (n. prec.) dell'invariante integrale W_0 di essere indipendente dalle q_1, q_2, ..., q_m, si è in grado, appoggiandosi su d') di ripetere identicamente, per il volume $2(n-m)$-dimensionale W_0 in Ψ il ragionamento sviluppato al n. 4 a proposito del volume $2n$-dimensionale V in Φ_{2n}.

E così rimane acquisita l'annunciata invarianza adiabatica di W_0.

14. - I vari sistemi associati (A_α) $(\alpha=0, 1, ..., m)$. Proprietà comuni. Corollari.

Per il solito sistema canonico (1) imprimitivo d'ordine m sussistono le m equazioni di condizione

$$(H, F_r) = 0 \qquad (r=1, 2, ..., m)$$

in quanto si suppone che le $F_r = c_r$ siano altrettanti integrali, e inoltre le $m(m-1)/2$

$$(F_r, F_s) = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \dots, m)$$

per l'ipotesi che le F stesse siano in involuzione. Colle posizioni (19) del n. 7 ($F_0 = H$, $c_0 = E$) i due gruppi si compendiano nell'unico schema

$$(33) \qquad (F_r, F_s) = 0 \qquad (r, s = 0, 1, \dots, m),$$

in cui tutte le F si comportano nello stesso modo.

Noi vi siamo pervenuti esprimendo le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un sistema canonico di funzione caratteristica F_0 (indipendente da t) ammetta gli m integrali in involuzione (pure indipendenti da t) corrispondenti alle rimanenti F. Ma, attesa la completa simmetria, si può attribuire l'ufficio di F_0 ad una generica altra F, diciamo per es.

$$F_\alpha,$$

e affermare che ad ogni sistema imprimitivo di ordine m se ne possono collegare altri m, aventi rispettivamente per funzione caratteristica F_1; F_2; ...; F_m e, ciascuna volta, le rimanenti F come integrali in involuzione. Per ognuno di questi sistemi differenziali ordinari si ha (sotto specificazioni qualitative di regolarità, risolubilità, ecc.) un sistema associato (A_α) ai differenziali totali, costruito secondo il criterio del n. 11. Atteso il diverso algoritmo costruttivo, i vari (A_α) riescono in generale diversi l'uno dall'altro. Però la differenza non è così profonda come a priori potrebbe pensarsi: *questi sistemi associati* (A_α) *ammettono tutti — lo mostreremo tra un momento — gli stessi* $2(n-m)-1$ *integrali esenti da* t. In altri termini le $2(n-m)$ espressioni (31) delle p_i, q_i $(i > m)$ che da essi si traggono per integrazione, se proprio non coincidono, danno luogo, quando se ne elimini t, alle stesse $2(n-m)-1$ conseguenze.

Per stabilire tale proprietà considereremo insieme i suddetti $2(n-m)-1$ integrali indipendenti da t di un generico sistema (A_α), l'(A_0) del n. 11 per fissare le idee, e le m equazioni

$$(18') \qquad p_r = f_r$$

che definiscono, si può dire, le $p_1, p_2, \dots, p_m$, o ciò che è lo stesso, le equivalenti

$$(18) \qquad F_r = c_r \qquad (r = 1, 2, \dots, m),$$

mostrando che questo complesso di $2n-(m+1)$ integrali si identifica con quello definito dal sistema jacobiano

$$(F_r, F) = 0 \qquad (r = 0, 1, \ldots, m), \tag{34}$$

il quale sistema, simmetrico rispetto a tutte le $m+1$ F_r, possiede precisamente $2n-(m+1)$ integrali F indipendenti tra loro.

All'uopo prendiamo le mosse dalla seguente osservazione di carattere generale: siano $F_1, F_2, \ldots, F_m$; $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$ due gruppi di funzioni indipendenti di $2n$ variabili coniugate p_i, q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, tutte in involuzione tra loro, il che è formalmente espresso da

$$(F_r, F_s) = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m); \tag{35}$$

$$(F_r, G_j) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, \mu); \tag{36}$$

$$(G_j, G_l) = 0 \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, \mu). \tag{37}$$

Suppongasi che (c_r designando delle costanti) le m equazioni

$$F_r = c_r \tag{18}$$

siano risolubili rispetto ad altrettante p — le prime m — sotto la forma

$$p_r = f_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, m). \tag{18'}$$

Per un lemma noto, già ricordato al n. 11, citaz. ([27]), le (35) implicano

$$(p_r - f_r,\ p_s - f_s) = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m), \tag{35'}$$

e le (36)

$$(p_r - f_r,\ G_j) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{36'}$$

le prime risultando soddisfatte identicamente (a parentesi calcolate), e le seconde coll'intesa che ogni eventuale p_r superstite $(r = 1, 2, \ldots, m)$ venga sostituita da f_r. Ciò posto, dicasi $\mathcal{G}$ ciò che diviene una generica G, ridotta a mezzo delle (18) [o (18')], pongasi cioè

$$\mathcal{G}_j = (G_j)_{p_r = f_r} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu)\,.$$

Se x designa uno qualsiasi degli argomenti $p_{m+1}, \ldots, p_n$; $q_1, q_2, \ldots, q_n$, si ha [come per $\mathcal{H}$ al n. 11; cfr. equazione (27)]

$$\frac{\partial \mathcal{G}_j}{\partial x} = \frac{\partial G_j}{\partial x} + \sum_1^m {}_s \frac{\partial G_j}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial x},$$

che si può scrivere, finchè x è diverso da una delle p_s,

$$\frac{\partial G_j}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{G}_j}{\partial x} + \sum_1^m {}_s \frac{\partial G_j}{\partial p_s} \frac{\partial (p_s - f_s)}{\partial x}. \tag{38}$$

Ma questa vale anche per x coincidente con una delle $p_1, p_2, \ldots, p_m$, per es. p_r, poichè in tal caso si riduce all'identità

$$\frac{\partial G_j}{\partial p_r} = \frac{\partial G_j}{\partial p_r}.$$

Colle espressioni (38) delle derivate di una G_j (rispetto ad uno qualsiasi dei $2n$ argomenti p_i, q_i) le (36′), avuto riguardo alle (35′), divengono

$$(p_r - f_r, \mathcal{G}_j) = 0 \tag{36″}$$

colla solita intesa riguardo alle superstiti $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Ma, sviluppando la parentesi, rimane l'analogo della equazione (28) per la $\mathcal{H}$, cioè

$$\frac{\partial \mathcal{G}_j}{\partial q_r} + \{\mathcal{G}_j, f_r\} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{36‴}$$

e qui si tratta ancora di identità, poichè non vi apparisce più alcuna delle $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Usando di nuovo le (38) e avendo riguardo alle (36″) e (35′), le (37) assumono la forma ridotta

$$(\mathcal{G}_j, \mathcal{G}_l) = 0 \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{37′}$$

o, se si vuole, mancandone le $p_1, p_2, \ldots, p_m$,

$$\{\mathcal{G}_j, \mathcal{G}_l\} = 0 \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, \mu). \tag{37″}$$

Traendo partito da queste equivalenze formali è ora assai agevole accertare che, per ogni soluzione F delle (34), la relazione $F = \text{cost.}$, previa riduzione a mezzo delle (18′), ossia

$$\mathcal{F} = (F)_{p_r = f_r} = \text{cost.}\,,$$

costituisce effettivamente un integrale (esente da t) del sistema (A_0) coordinato ad F_0 secondo la costruzione del n. 11.

Per gli altri (A_α) varrà poi naturalmente la stessa dimostrazione, salvo una sostituzione circolare sugli indici $0, 1, ..., m$ delle F, con tutte le sue conseguenze.

Ecco la dimostrazione.

Le (34), associate alle (20), esprimono complessivamente che le $m+2$ funzioni

$$F_1,\ F_2,\ ...,\ F_m; \qquad F_0 = H\,, \qquad F$$

sono in involuzione tra loro.

Trattando le ultime due alla stregua delle G di poc'anzi, si può senz'altro affermare che, per la $\mathcal{F}$, sussisteranno identicamente le equazioni corrispondenti a (36‴) e (37″), cioè

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_r} + \{\mathcal{F}, f_r\} = 0 \qquad (r = 1, 2, ..., m),$$

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{F}\} = 0\,.$$

Queste sono precisamente le condizioni affinchè $\mathcal{F} = \text{cost.}$ sia integrale del sistema (A_0) del n. 11, c. d. d.

Rimane pertanto provato che i vari sistemi ausiliari ai differenziali totali (A_α) $(\alpha = 0, 1, ..., m)$, associati alle equazioni (riducentisi alle (18) per $\alpha = 0$),

$$(39) \qquad F_0 = c_0\,,\ \dots,\quad F_{\alpha-1} = c_{\alpha-1}\,,\quad F_{\alpha+1} = c_{\alpha+1}\,,\ \dots,\quad F_m = c_m$$

ammettono gli stessi integrali, indipendenti da t, $F = \text{cost.}$; e precisamente tutti e soli quelli definiti dal sistema jacobiano (34). Ora in questo è in ogni caso compresa l'equazione

$$(F_0, F) = (H, F) = 0\,.$$

Perciò tali integrali appartengono tutti anche all'originario sistema canonico.

Del resto, anche senza formule, si può giungere alla stessa conclusione combinando la proprietà fondamentale dei sistemi (A_α), testè stabilita, con una osservazione del n. 11 concernente il sistema (A_0). Infatti da un lato i vari sistemi ai differenziali totali (A_α) $(\alpha = 0, 1, ..., m)$ ammettono tutti gli stessi integrali indipendenti da t; dall'altro, come fu rilevato al n. 11, ogni integrale di (A_0) spetta in particolare all'originario sistema canonico. Per conseguenza lo stesso può dirsi per un qualsiasi integrale indipendente da t di un (A_α) generico, in quanto esso appartiene pure ad (A_0).

Questo modo di ragionare è suscettibile di una estensione importante perchè dal fatto che i vari sistemi (A_α) ammettono gli stessi integrali indipendenti da t segue che hanno comune ogni altra proprietà egualmente indipendente da t; in particolare, ogni integrale (semplice o multiplo) che sia invariante per uno di essi lo è per tutti gli altri. Qui ancora, siccome al n. 12 fu notato che ogni invariante integrale per (A_0) lo è *a fortiori* per l'originario sistema canonico, si conclude che *ogni invariante integrale, in particolare adiabatico, di uno qualsiasi dei sistemi di differenziali totali* (A_α), *è tale anche per l'assegnato sistema canonico.*

15. - Esistenza per ogni sistema imprimitivo d'ordine m di $m+1$ invarianti adiabatici.

Si è definito al n. 12 [formula (32)] un invariante adiabatico W_0 del sistema (A_0).

Per ogni altro (A_α) si può (soddisfatte che sieno debite circostanze qualitative) costruire in modo analogo un invariante adiabatico W_α. Per il modo particolare con cui interviene in tale costruzione la funzione F_α, si hanno ciascuna volta risultati differenti, almeno in generale; donde il teorema:

Un sistema canonico, imprimitivo d'ordine m, ammette in generale $m+1$ invarianti adiabatici, che si presentano nel modo specificato al n. 12 per W_0, ciascuno, come volume a $2(n-m)$ dimensioni di un certo campo, caratterizzato (nello spazio Ψ delle $p_{m+1}, \dots, p_n$; $q_{m+1}, \dots, q_n$, trattandovi le $q_1, q_2, \dots, q_m$ quali parametri) dagli $m+1$ integrali conosciuti

$$F_r = c_r \qquad (r = 0, 1, \dots, m).$$

16. - Casi particolari.
Il teorema del Burgers come immediato corollario del risultato precedente.

Nel caso classico di Liouville in cui l'ordine di imprimitività è $m = n - 1$, si conoscono complessivamente n integrali indipendenti da t e in involuzione; e l'integrazione del sistema canonico si riconduce alle quadrature (31). *Un tale sistema ammette in generale* (si vuol dire sotto le condizioni di regolarità, indipendenza, ecc., a lor luogo specificate, e da accertarsi caso per caso) *n invarianti adiabatici.*

Ciò vale naturalmente anche per il tipo particolare dello STÄCKEL in cui l'integrazione può eseguirsi col metodo della separazione delle variabili. Infatti questo tipo rientra negli imprimitivi d'ordine $n-1$, possedendo, oltre all'integrale delle forze vive, altri $n-1$ integrali quadratici nelle p, tutti in involuzione tra loro (32).

Sviluppiamo almeno per questo caso il calcolo effettivo degli n invarianti adiabatici, secondo la teoria generale di cui sopra.

Per convenienza di notazione che apparirà tra un momento, attribuiremo alle $2n$ variabili coniugate, p_i, q_i gli indici $0, 1, \ldots, n-1$, anzichè $1, 2, \ldots, n$: in altri termini designeremo con p_0, q_0 le due coniugate denotate finora con p_n, q_n. Con tale intesa si possono assumere come caratteristiche del tipo di STÄCKEL le seguenti espressioni delle F_r:

$$(40) \qquad F_r = \sum_0^{n-1} \varphi^{rh}\left(\frac{1}{2}p_h^2 - U_h\right) \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1),$$

dove ogni U_h è funzione soltanto della variabile q_h, e le φ^{rk} (munite di due indici entrambi variabili fra gli stessi limiti, grazie alla convenzione testè adottata) sono elementi reciproci (33) provenienti da n^2 funzioni

$$\varphi_{rh}(q_h) \qquad (r, h = 0, 1, \ldots, n-1)$$

ciascuna delle quali dipende dal solo argomento indicato.

Procediamo alla costruzione di W_0 secondo la regola dei nn. 11 e 12. Dovremmo immaginare risolte le equazioni

$$(18) \qquad F_r = c_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1)$$

rispetto a $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, e portare i valori che in tal guisa si ricavano in F_0, la quale, così ridotta, si designa con $\mathcal{F}_0$ e viene a corrispondere alla $\mathcal{H}$ del n. 11.

L'equazione $\mathcal{F}_0 = c_0$ che qui fa riscontro alla (25') si presenta in conformità come risultato della eliminazione di $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ fra tutte le n equazioni

$$(20)_s \qquad F_r = c_r \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1),$$

dove le F_r hanno la forma esplicita (40) dello STÄCKEL.

---

(31) Loco cit. a pag. 474, vol. (II)$_2$; cap. X, nn. 44, 45.

(32) « Ibidem », n. 64.

(33) Cioè componenti algebrici divisi per il valore del determinante.

Perciò l'equazione suddetta (che ha per noi il maggior interesse, dovendo appunto da essa desumere l'invariante adiabatico W_0) equivale necessariamente al risultato dell'eliminazione di $p_1, p_2, ..., p_{n-1}$ fra le n equazioni $(20)_s$; o ancora alla espressione di p_0 (in termini delle q e delle c) che si trae dalla risoluzione delle $(20)_s$ stesse. Usufruendo degli elementi φ_{r0} reciproci dei coefficienti di $\frac{1}{2}p_0^2$ nelle varie equazioni $(20)_s$ si ha immediatamente la risolvente

$$\frac{1}{2}p_0^2 = U_0 + \sum_{0}^{n-1}{}_r\, c_r\, \varphi_{r0} \tag{41}$$

che equivale ad $\mathcal{F}_0 = c_0$ e si ridurrebbe materialmente a tale forma dividendo per φ_{00} e isolando c_0.

Mentre in generale la $\mathcal{H}$ del n. 11 poteva dipendere anche dalle $q_1, q_2, ..., q_m$, qui si dà la circostanza particolare che in $\mathcal{F}_0$ apparisce soltanto q_0. Lo spazio Ψ è ora il piano p_0, q_0, e l'invariante W_0 si riduce per conseguenza all'area di questo piano racchiusa da una curva (41).

Ecco ritrovato l'integrale ciclico

$$J_0 = \oint p_0\, dq_0$$

del SOMMERFELD come invariante adiabatico. Basta evidentemente una sostituzione circolare sugli indici per trovare gli $n-1$ altri J_α $(\alpha = 1, 2, ..., n-1)$.

Come condizioni qualitative tutto si riduce manifestamente:

1) Alla regolarità delle funzioni (40) e risolubilità delle $(20)_s$ nel campo dei valori che si considerano; il che, partendo dalle $\varphi_{rh}(q_h)$, supposte regolari, è assicurato dal non annullarsi del loro determinante $\|\varphi_{rh}\|$.

2) All'essere chiuse le n curve analoghe alla (41) nel rispettivo piano p_i, q_i.

Come si vede, le difficoltà e le discussioni complementari che, secondo le ordinarie dimostrazioni, sembravano necessarie in certi casi di commensurabilità, non si presentano affatto in base alla nostra teoria generale.

17. - Indicazione di ulteriori ricerche.

Non ci è ora possibile intrattenerci su altri esempi relativi a problemi dinamici di minore imprimitività $(m < n-1)$, i quali in certo senso appariscono anche più interessanti, in quanto non integrabili per quadrature; e dobbiamo egualmente limitarci alla semplice affermazione che taluni dei risultati precedenti sono estensibili a sistemi differenziali di forma qualsiasi.

XXV.

DREI VORLESUNGEN ÜBER ADIABATISCHE INVARIANTEN (*)

«Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität» Bd. VI, Heft 3/4, 1928, pp. 323-366.

I.

EXISTENZSÄTZE FÜR GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. VERHALTEN IM GROSSEN. ABHÄNGIGKEIT VON PARAMETERN. ADIABATISCHE INVARIANTEN. LIOUVILLESCHE SYSTEME. QUASI-ERGODISCHE HYPOTHESE. ENTSPRECHENDE LOKALE VERTEILUNG.

1. - Einleitende Betrachtungen. Geometrische und kinematische Deutung. Liouvillesche Systeme.

Es sei ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen vorgelegt. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit darf man es als System erster Ordnung ansehen, mit N unbekannten Funktionen

$$x_1\,,\quad x_2\,,\quad \ldots\,,\quad x_N$$

der unabhängigen Veränderlichen t, und zwar in der Form

$$\frac{dx_\nu}{dt} = X_\nu(x\,|\,t) \qquad (\nu = 1, 2, .., N), \tag{1}$$

wo die X_ν stetig derivierbare Funktionen ihrer Argumente (für alle zu betrachtenden Werte derselben) sind.

Es wird sehr bequem sein, sich der üblichen geometrischen Vorstellungen und Bezeichnungen zu bedienen, indem man die x als kartesische Koordinaten eines Punktes P in einem (eukl.) Bildraume ansieht.

Wenn wir ein Gebiet C der x-Werte, d.h. des R_N abgrenzen, wird es

(*) Vorgetragen im Mathematischen Seminar Hamburg, 18, 19, 20 Juli 1928.

dann berechtigt sein, von seinem Volumen V (eigentlich Volumen für $N=3$, abstrakter Inhalt für $N>3$) zu sprechen; es ist nichts anderes als das mehrfache über C erstreckte Integral

$$V=\int_C dC \tag{2}$$

wo, der Kürze halber, dC statt

$$dx_1\, dx_2 \ldots dx_N$$

geschrieben ist.

Wenn $F(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ eine, für alle reellen Werte der x, eindeutige und stetig differenzierbare Funktion bezeichnet, so wird die Gleichung

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_N)=c \qquad (c=\text{Const.}) \tag{3}$$

eine Fläche σ (eigentlich Mannigfaltigkeit mit $N-1$ Dimensionen) in R_N bestimmen. Wenn außerdem durch (3) ein endliches Gebiet der x-Werte begrenzt wird, dann heißt die Fläche σ geschlossen, usw..

Es wird sich auch empfehlen, die unabhängige Veränderliche t als Zeit zu deuten, so daß jede Lösung

$$x_\nu = x_\nu(t) \qquad (\nu=1, 2, \ldots, N)$$

von (1) sich als Bewegung des Bildpunktes P in R_N interpretieren läßt.

Unter diesem Gesichtspunkte definieren offenbar die Gleichungen (1) die Bewegung, indem sie die Geschwindigkeit von P als Funktion des Ortes (in R_N) und der Zeit vorschreiben.

In selbstverständlicher Erweiterung der im gewöhnlichen Raume geläufigen vektoriellen Begriffe darf man die Geschwindigkeit als Vektor dP/dt, mit den kartesischen Komponenten dx_ν/dt, auffassen, und sich durch die $X_\nu(x|t)$ einen Vektor $\boldsymbol{v}(P, t)$ (Funktion der Lage und der Zeit) definiert denken. Die Gleichungen (1) erscheinen dann in die einzige vektorielle Gleichung

$$\frac{dP}{dt}=\boldsymbol{v}(P, t) \tag{1'}$$

zusammengefaßt, welche, indem P zur Zeit $t=t_0$ in jeder Anfangslage P_0 (eines passenden Gebietes) sich befinden mag, als Bewegungsgleichung eines Kontinuums in R_N angesehen werden darf.

Bezeichnet man mit C_0 irgendein Stück dieses Kontinuums in der Anfangslage, d.h. ein durch Punkte P_0 erfülltes Gebiet, und V_0 sein Volumen, so wird im allgemeinen dem Gebiete C der nämlichen Punkte in einem anderen Augenblicke t ein Volumen V zukommen, welches nicht gleich V_0 sein wird: d.h. die Bewegung bringt im allgemeinen Volumänderung mit sich. Ein wichtiger Fall, wo keine Änderungen stattfinden und folglich unser abstraktes Kontinuum sich wie eine inkompressible Flüssigkeit verhält, wurde von LIOUVILLE hervorgehoben: der Fall von Systemen (1) mit verschwindender Divergenz, d.h. solcher Systeme für die

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \sum_1^N{}_\nu \frac{\partial X_\nu}{\partial x_\nu} = 0 . \tag{4}$$

Es wäre sehr leicht zu bestätigen, daß, vermöge (4), tatsächlich der Ausdruck (2) von V eine sogenannte Integralinvariante des Differentialsystems (1) wird, d.h., daß dV/dt, gebildet mit Berücksichtigung von (1), infolge von (4), verschwindet [1].

Nicht wesentlich, doch unserem Zweck angepaßt ist es, wenn wir uns nunmehr auf Systeme, für welche die Bedingung (4) (Divergenz gleich Null) befriedigt ist, beschränken: wir werden sie kurz als Liouvillesche Systeme bezeichnen.

2. - Existenzsätze. Ihr Versagen im großen.

Durch die Cauchysche Methode der endlichen Differenzen oder durch das Picardsche Verfahren der sukzessiven Approximationen läßt sich bekanntlich das Existenz-theorem beweisen. Demzufolge besitzt in der Umgebung irgendeiner regulären [2] Stelle t_0, P_0, das System (1) eine und nur eine Lösung, d.h., es existieren N (und nur N) Funktionen

$$x_\nu = x_\nu(t\,|\,t_0\,|\,x^0) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{5}$$

whelche (1) befriedigen und sich für $t = t_0$ auf die vorgeschriebenen Werte x_ν^0 reduzieren.

Die Gleichungen (5) lassen sich nun (in der Nähe der Anfangswerte) in bezug auf die N Konstanten x_i^0 auflösen, und ergeben

$$u_i(x\,|\,t\,|\,t_0) = x_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{6}$$

was ebenso viele (in einer gewissen Umgebung der Anfangswerte) *un-*

---

(1) Ein solcher Beweis ist, für $N = 3$, in jedem Lehrbuche über die Mechanik der Kontinua zu lesen. Für den allgemeinen Fall vgl. etwa: LEVI-CIVITA und AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, B. II (zweiter Teil), Kap. X, § 5, S. 354-359; oder auch WEBER-GANS-HERTZ, *Repertorium der Physik*, B. I (zweiter Teil), S. 455-460.

(2) Das heißt für Argumentwerte t_0 von t, und x_i^0 (Koord. von P_0) der x_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), in deren Umgebung die X_ν mit ihren ersten Ableitungen sich stetig verhaltende Funktionen bezeichnen.

abhängige, eindeutige Integrale des Systems liefert: die sogenannten Hauptintegrale, in bezug auf die betrachteten Anfangswerte t_0, x_i^0. In der Tat, wenn man in (6) die x_ν als die Lösungen (5) des Differentialsystems (1) ansieht, so bekommt man, durch Ableitung nach t, die Identitäten

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_1^N{}_\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_\nu} X_\nu = 0 .$$

Wegen der soeben geschriebenen Identitäten und der Unabhängigkeit der u_i, welche fordert, daß

$$\left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_\nu} \right\| \neq 0$$

ist, ist das Verschwinden sämtlicher $\partial u_\nu / \partial t$ mit demjenigen aller X_ν gleichwertig. Wenn man also diesen Ausnahmefall (Ruhelage, wie aus (1) ersichtlich) beiseite läßt, so kann man auch aus einer der N Gleichungen (6) t eindeutig bestimmen. Indem man den so gewonnenen Wert in die $N-1$ übrigen Integrale einführt, bekommt man $N-1$ von t unabhängige Integrale

$$U_j(x \mid t_0) = c_j \qquad (c_j = \text{const.};\ j = 1, 2, \ldots, N-1) \tag{7}$$

des allgemeinen Systems (1). Es ist vielleicht nicht überflüssig hinzuzufügen, daß, wenn die X_ν die unabhängige Veränderliche t nicht explizit enthalten, t_0 in den Integralausdrücken (5), und somit auch in den Integralen (6), nur in der Verbindung $t - t_0$ erscheint. Es folgt daraus, daß die Elimination von t auch diejenige von t_0 mit sich bringt, so daß, wenn t in (1) nicht explizit vorkommt, das System $N-1$ Integrale

$$U_j(x_1, x_2, \ldots, x_N) = c_j \tag{7'}$$

besitzt, die weder t, noch t_0 enthalten; mithin jede Angabe der Zeit verschwunden ist.

Alles das gilt in einer hinreichend beschränkten Umgebung der Anfangswerte. Wünscht man aber — und das liegt in der Natur der Fragestellung — den Verlauf der durch (1) definierten Bewegungen, oder auch nur der Bahnen, für alle t-Werte zu verfolgen, so liegt die Sache ganz anders. Es wird im allgemeinen durchaus nicht möglich sein, diese Bahnen vollständig mit eindeutigen Gleichungen [(7) oder [(7')] zu beherrschen, auch in ganz einfachen Fällen, wo man t von seinem Anfangswerte bis ∞ variieren lassen kann, ohne Singularitäten zu begegnen.

Ein aus der Mechanik und Physik sehr geläufiges Beispiel wird diesen Umstand am besten erläutern.

Man betrachte die zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = 0\,, \qquad \ddot{y} + \omega_2^2 y = 0\,, \tag{8}$$

wo $\cdot$ für d/dt steht, ω_1 und ω_2 positive Konstanten bezeichnen. Wenn man x, y, wie üblich, als kartesische Koordinaten eines Punktes L der Ebene auffaßt, dann handelt es sich offenbar um die Bewegungen von L, die aus der Komposition zweier harmonischer Schwingungen in den Richtungen der Koordinatenaxen hervorgehen.

Man kann unmittelbar das Differentialsystem (8) unter die Normalform (1) einordnen, indem man, neben den Koordinaten x, y, auch die Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}$, $\dot{y}$ als Hilfsvariable einführt, und (8) folgendermaßen schreibt:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}\,, \qquad \frac{d\dot{x}}{dt} = -\omega_1^2 x\,; \qquad \frac{dy}{dt} = \dot{y}\,, \qquad \frac{d\dot{y}}{dt} = -\omega_2^2 y\,, \tag{8'}$$

was offenbar ein Liouvillesches System bildet, in dem t nicht explizit vorkommt.

Das System (8) is absichtlich gewählt worden, damit sein allgemeines Integral aus den harmonischen Schwingungen

$$\begin{cases} x = r_1 \cos(\omega_1 t + \vartheta_1)\,, \\ y = r_2 \cos(\omega_2 t + \vartheta_2) \end{cases} \tag{9}$$

bestehe. Dabei sind r_1, ϑ_1, r_2, ϑ_2 die vier Integrationskonstanten und es ist gestattet, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit, r_1 und r_2 nur positive Werte beizulegen, womit sie als eigentliche Schwingungsamplitude erscheinen.

Aus (9) erhält man selbstverständlich das allgemeine Integral von (8'), indem man den Ausdrücken (9) der Koordinaten die der Geschwindigkeitskomponenten

$$\begin{cases} \dot{x} = -r_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \vartheta_1)\,, \\ \dot{y} = -r_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \vartheta_2) \end{cases} \tag{9'}$$

hinzufügt. Es gilt (Energiegleichung für jede der beiden Schwingungen)

$$\dot{x}^2 + \omega_1^2 x_1^2 = r_1^2 \omega_1^2\,, \qquad \dot{y}^2 + \omega_2^2 y^2 = r_2^2 \omega_2^2\,, \tag{10}$$

welche als zwei quadratische, von t unabhängige, Integrale des Systems (8) oder (8') erscheinen.

Nach unseren allgemeinen Betrachtungen wäre als Bildraum die Mannigfaltigkeit R_4 der 4 Argumente x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$ im Auge zu haben. Da aber die (Geschwindigkeitskomponenten) $\dot{x}$ und $\dot{y}$ sich durch x resp. durch y ausdrücken lassen (durch quadratische Beziehungen), braucht man nur das Resultat der Elimination von t aus den Integralausdrücken (9) von x und y zu berücksichtigen.

Das hat aber schon längst einen sehr merkwürdigen Umstand ans Licht gebracht. Ist das Verhältnis ω_2/ω_1 rational, so entsteht aus der Elimination von t zwischen den zwei Gleichungen (9) eine algebraische Kurve, welche (gemäß den eben genannten Gleichungen) ganz im Rechtecke $\mathfrak{R}$ $(\pm r_1, \pm r_2)$, verläuft, dessen Zentrum im Koordinatenursprung O liegt.

Hat dagegen ω_2/ω_1 einen irrationalen Wert, so bekommt man aus (9), durch Elimination von t, eine sogenannte Lissajoussche Kurve, d.h. eine Kurve, die das Rechteck $\mathfrak{R}$ überall dicht erfüllt, in dem Sinne, daß sie jedem Punkte des Rechteckes beliebig nahe kommt.

Bei dieser Sachlage hat die Bedingung sich auf einer solchen Bahnkurve zu befinden, keinen praktischen Sinn ([3]); sie ist nicht anschaulich zu fassen und auch nicht der Erfahrung zugänglich.

Man beachte, daß diese Eigenschaft der Bahnkurve, das Innere des Rechteckes praktisch zu erfüllen, dadurch zustande kommt, daß beim ständigen Anwachsen und unendlich Werden von t, die Gleichungen (9), immer neue sich nicht genau überdeckende Windungen bestimmen. Würde man dagegen t auf ein endliches Intervall beschränken, so hätte man nur endlich viele Kurvenzüge und daher nur einen in einer hinreichend kleinen Umgebung eines beliebigen Punktes L des Rechteckes. Das ist vollkommen im Einklange mit dem Wortlaute des früher angeführten lokalen Existenzsatzes.

Nach diesem lehrreichen Beispiel liegt es nahe zu vermuten, daß auch für ein allgemeines, sagen wir Liouvillesches, Differentialsystem mit den N Unbekannten x_ν ähnliche, oder sogar stärkere Abweichungen vom lokalen Verhalten vorkommen werden.

Es ist in der Tat wohl denkbar, daß einige der $N-1$ Integralgleichungen (7′), zwischen den x allein, die aus Elimination von t entstehen, gerade wie diejenige, die aus (9) hervorgeht, unendlich vieldeutig sind, so daß sie keine praktische Bindung zwischen den x darstellen.

Unter diesem Gesichtspunkte ist auffallend, daß die $N-1$, von dem Existenzsatze gelieferten, im kleinen eindeutigen Integrale (7′), für sich allein nicht imstande sind, das Verhalten im großen, d.h. bei unbeschränktem Wachsen von t, zu charakterisieren, nicht einmal zu entscheiden ob die vollständige Bahnkurve (5) eine Linie in gewöhnlichem Sinne ist, was nur ganz ausnahmsweise geschehen wird, oder wie viele Dimensionen im allgemeinen der Mannigfaltigkeit zukommen werden, die sie dicht erfüllt. Das hängt wesentlich mit der Anzahl der (von t freien)

([3]) Vgl. z.B. Levi-Civita und Amaldi, loc. cit., B. (II)$_1$; Kap. II, § 2, S. 166-170.

Integrale (7′) zusammen, die (nicht nur in der Umgebung einer vorgeschriebenen Stelle, sondern in der Nähe aller durchlaufenen Stellen) eindeutig sind. Diese Eindeutigkeit ist eine Eigenschaft im großen, welche, mit den heutigen Mitteln der Analysis, aus lokalen Merkmalen, und namentlich aus den im kleinen prinzipiell bekannten Integralen, nicht erschlossen werden kann.

Im Grunde genommen, werden diejenigen der von t freien Integrale (7′), die nicht eindeutig (oder endlich vieldeutig) sind, praktisch belanglos; sie tragen nichts zur Abgrenzung des Gebietes, in dem die Bahnkurve verläuft, bei. Nur die eindeutigen Integrale spielen eine Rolle. Da man aber im allgemeinen, für ein a priori gegebenes System, nicht weiß, ob überhaupt und noch weniger wie viele solche (im weiten Sinne) eindeutige Integrale gegebenenfalls existieren, so befindet man sich in dieser Hinsicht ungefähr in einer ähnlichen Lage wie die alten Analysten des XVIII. Jahrhunderts gegenüber dem lokalen Problem der Integration der Differentialgleichungen. Sie maßen die Schwierigkeit der Lösung aus der Anzahl der noch nicht bekannten Integrale, indem man als solche nur diejenigen ansah, die sich durch Kombination von algebraischen und elementar-transzendenten Funktionen ausdrücken lassen.

3. - Vorkommen von langsam veränderlichen Parametern. Adiabatische Invarianten.

Setzen wir voraus, daß die rechten Glieder der Gleichungen (1) nicht explizit vont t abhängen, dagegen von einigen — sagen wir r — Parametern a, die sehr langsam variieren. Diese Annahme ist nicht etwa so zu verstehen, daß bei der Integration von (1) die a als Konstanten zu behandeln sind, sondern in einer später zu präzisierenden Auffassung. Jedenfalls sind diese a Symbole für unbekannte Größen, die langsam, aber von vornherein beliebig, sich ändern.

Daher genügt nicht das System (1) allein zur Bestimmung der Funktionen $x(t)$. Man muß demselben etwas beifügen, das prinzipiell die Angabe der $a(t)$ ersetzt.

Durch naheliegende, demnächst zu erörternde, Anschauungen werden wir dazu geführt (wenigstens für einen typischen Fall von Liouvilleschen Systemen), die mathematische Formulierung einer statistischen Annahme plausibel und sogar zwingend zu machen.

In Verbindung mit (1) wird dies einige wichtige Folgerungen gestatten; und insbesondere erkennen lassen, daß die Integralinvariante (2) von (1), d.h. der Inhalt V, einen von der Änderung der a unabhängigen Wert hat. Dieses V, wie überhaupt jede mit Lösungen von (1) gebildete Größe, die (vermöge unserer Zusatzhypothese) von der Veränderlichkeit der Parameter a unabhängig ist, heißt nach EHRENFEST (4) eine adiabatische Invariante.

Ihre Einführung verdankt man bekanntlich der neueren Atommechanik. Sowohl das erste Bohrsche Modell des Wasserstoffatoms, wie die Sommerfeldsche systematische Behandlung der Feinstruktur und der Spektren von wasserstoff-unähnlichen Atomen, sind vom Gedanken geleitet, sowenig wie möglich von der klassischen Mechanik abzuweichen, und zwar nur in einem einzigen Punkte, nämlich in der Quantelung etwaiger Integrationskonstanten. Es ist hiermit, indem man sich auf das allgemeine Schema eines Differentialsystems (1) bezieht, gemeint, daß einige der Konstanten c der Integrale (7′), die, in einem Probleme der gewöhnlichen Mechanik, von Hause aus alle (innerhalb gewisser Grenzen gelegenen) Werte annehmen können, nur ganze Vielfache von gewissen universellen Konstanten sein dürfen, etwa der Form

$$n \frac{h}{2\pi},$$

wo n eine ganze Zahl und h die sogenannte Plancksche Konstante bezeichnet.

EHRENFEST hat daran das allgemeinere Prinzip angeknüpft, daß, wenn in einem Atommodelle physikalische Einflüsse einwirken, die stetig (und langsam) variieren (wie z.B. Temperatur, Massen, elektrische Ladungen oder elektromagnetische Kräfte), dann notwendig die quantisierten c (die einerseits stetig, andererseits nur durch ganze Vielfache fester Beträge variieren könnten) ihre Werte behalten müssen.

Dieses ist der Ursprung des allgemeinen Begriffes « adiabatische Invarianten » gewesen. Um zu ihnen von mathematischer Seite her zu gelangen, sind indessen einige einleitende Betrachtungen zur Auffindung und Rechtfertigung der vorher angedeuteten Zusatzhypothese erforderlich.

4. - Imprimitivitätsordnung im großen. Liouvillesche einfach imprimitive Systeme. Quasi-ergodische Hypothese.

Nach den vorigen Bemerkungen allgemeiner Natur wird es berechtigt sein, bei irgendeinem — sagen wir Liouvilleschen, von t unabhängigen — Systeme (1), die Anzahl j der voneinander unabhängigen im großen eindeutigen oder endlich vieldeutigen Integrale (7′) als *Imprimitivitäts-*

(4) *Adiabatic invariants and the theory of quanta*, « Phil. Mag. », vol. XXXIII, 1917, S. 500-513.

ordnung zu bezeichnen. Ist $j = 0$, so wird im besonderen das System primitiv genannt.

Dabei wird natürlich stillschweigend vorausgesetzt, daß, außer den genannten j, kein weiteres (unabhängiges) endlich vieldeutiges Integral existiert, so daß die Bahnkurven nur j anschaulichen Bedingungen unterliegen; und nach dem typischen Beispiele der harmonischen Schwingungen liegt es nahe zu vermuten, daß sie eine $N - j$-dimensionale Mannigfaltigkeit M dicht erfüllen. Die *primitiven Systeme* erfüllen sogar ein Gebiet des R_N dicht.

Nunmehr haben wir die notwendigen Prämissen gewonnen, um die Frage nach den adiabatischen Invarianten von Differentialsystemen, die Parameter enthalten, konkret anzugreifen.

Herr GEPPERT [5] hat neulich gezeigt, wie dieses mathematische Problem ganz allgemein zu formulieren und auf schon erforschte Gebiete der Analysis zurückzuführen ist.

In diesen Vorträgen ziehe ich aber vor, mich *auf einen engeren, aber physikalisch anschaulicheren Boden* zu stellen, *wo sich die Begriffe und Methoden der analytischen Mechanik fast unmittelbar anschließen.* Ich werde demnach mich ausschließlich auf Liouvillesche von t unabhängige Systeme beziehen

$$\frac{dx_\nu}{dt} = X_\nu(x\,|\,a) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \tag{I}$$

die langsam veränderliche Parameter a enthalten. Außerdem werde ich voraussetzen, daß:

1.) solange man die a als streng konstante Größen ansieht, dem Systeme (I) die Imprimitivitätsordnung 1 zukommt, d.h. es nur ein einziges eindeutiges Integral

$$F(x\,|\,a) = c \tag{II}$$

besitzt;

2.) die Gleichung (II) für jeden der zu betrachtenden Werte von c (oder, was dasselbe ist, für die zu betrachtenden Anfangswerte der x) eine geschlossene (§ 1) ($N - 1$-dimensionale) Fläche σ definiert. Wir werden auch voraussetzen (was sich immer durch evtl. Zeichenwechsel von F und c erreichen läßt), daß die (auf σ konstante) Funktion F nach der Außenseite wächst. Gemäß (II) wird bei konstant gehaltenen a jede Lösung $x_\nu = x_\nu(t)$ des Differentialsystem, d.h. die zugehörige Bahnkurve B, in ihrem ganzen Verlaufe auf derjenigen σ liegen, welche durch die Anfangslage geht und sogar (vgl. die genauere hierbei folgende Voraussetzung 3) diese σ dicht erfüllen.

---

(5) « Rend. Acc. Lincei », vol. VIII (2° semestre 1928).

3.) *Quasi-ergodische Hypothese.* Wenn nicht alle, so doch fast ([6]) alle Bahnkurven B erfüllen die zugehörige σ dicht ([7]).

5. - Adiabatische Variation der Parameter. Differentialeinwirkung auf c. Zeitliche Mittelbildung. Zugehörige oberflächige Mittelbildung.

Lassen wir nun die Parameter a sehr langsam variieren, indem wir eine ganz bestimmte Lösung des Differentialsystems zu verfolgen beabsichtigen, und fragen wir uns: Nach welchem Gesetze wird die Integralkonstante c sich mit den a verändern? Gerade eine solche Frage tritt auf, wenn wir z.B. die Schwingungen eines einfachen Pendels beobachten, indem die Länge desselben sehr langsam variiert; *es kommt dabei wesentlich auf die daraus entspringende Variation der Energie an.*

Um die Natur der Abhängigkeit zwischen den a und c hervortreten zu lassen, muß man natürlich sich von Anschauungen über die Variation der a leiten lassen, die, wie wir demnächst sehen werden, eine quantitative Ergänzung der quasi-ergodischen Hypothese mit sich bringen.

Vor allem die Vorstellung, daß in dem Ausdrucke des (unendlich kleinen) Zuwachses

$$d_a c = \sum_1^r{}_\varrho \frac{\partial c}{\partial a_\varrho} da_\varrho$$

welchen c durch die (unendlich langsame) Parameteränderung da_ϱ erfährt, die Koeffizienten $\partial c/\partial a_\varrho$ so zu verwerten sind, als wenn die a von der Zeit nicht abhingen. Man hätte dann, da (II) gilt, längs der betrach-

---

([6]) Fast ist in dem Sinne zu verstehen, daß auf der σ die (sämtlichen Punkte aller) Integralkurven, welche σ nicht dicht erfüllen eine Menge vom $N-1$-dimensionalen Maße Null bilden.

([7]) Eine solche Annahme erscheint, wie schon mehrmals betont, als naheliegende Verallgemeinerung des im elementaren Beispiel der vorigen Ziffer erkannten Verhaltens berechtigt Es ist aber noch nicht gelungen, sie streng zu beweisen, auch nur für wohlbestimmte Klassen von Liouvilleschen Differentialsystemen. Für die im Text betrachteten einfach imprimitiven Systeme steht bis jetzt der quasiergodischen Eigenschaft fest, nämlich der Poincarésche Wiederkehrsatz (1890), nur ein Teil der besagt, daß es unendlich unwahrscheinlich ist, daß eine Bahnkurve B sich nicht wieder irgendeinem ihrer Punkte beliebig nähert. Der Poincarésche Gebrauch der gewöhnlichen mehrfachen Integrale bei der Deduktion des Satzes (vgl. z. B. *Méthodes nouvelles de la méc. céleste*, B. III, Kap. XXVI) ist nicht einwandfrei.

Später hat CARATHÉODORY (Sitzungsber. der Preuß. Ak. der Wiss., 1919, S. 580-584) durch Anwendung der Lebesgueschen Integrale jede Schwierigkeit aufgehoben; der Satz läßt sich dann auch so aussprechen: Die Menge der Nicht-Wiederkehrpunkte besitzt auf jeder σ das Maß Null.,

FERMI (« Nuovo Cimento » (VII), 25, 1923, S. 267-269; « Phys. Zeitschrift », 24, 1923 S. 261-265) hat ferner gezeigt (durch eine Erweiterung des Poincaréschen Verfahrens, die denselben Einwänden ausgesetzt ist), daß zu zwei beliebigen σ-Punkten stets Integralkurven gefunden werden können, die ihnen beliebig nahe kommen.

teten Bahnkurve B,

$$\frac{\partial c}{\partial a_\varrho} = \frac{\partial F}{\partial a_\varrho},$$

und folglich

(11) $$d_a c = d_a F$$

in jedem Augenblicke t.

Es wäre dann auch berechtigt, da F nicht von der Zeit abhängt, die Gleichung (11) durch

(11′) $$d_a c = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} d_a F\, dt$$

zu ersetzen, wo das Intervall $t_0 \mapsto t_1$ willkürlich ist. Vom physikalischen Standpunkte muß man jedoch bemerken, daß die Hypothese der Konstanz der a nur im angenäherten Sinne zu verstehen ist. Die Zeit, in welcher die a die kleinen Zuwüchse da erfahren, ist nicht unendlich, doch lang genug, um dem willkürlichen Zeitintervall $t_1 - t_0$ einen erheblichen Wert zuerteilen zu können, so groß im besonderen, daß es gestattet sei, das rechte Glied von (11′) als ein asymptotisches Mittel

(12) $$\widetilde{d_a F} = \lim_{t_1 \to \infty} \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} d_a F\, dt$$

anzusehen; womit unter anderem zugelassen wird, daß ein solches asymptotisches Mittel (bei festgehaltenen a) überhaupt existiert. Beiläufig sei bemerkt, daß dies bekanntlich immer der Fall ist, wenn es sich um periodische Funktionen handelt.

Für solche deckt sich außerdem das asymptotische mit dem gewöhnlichen Mittel; im besonderen würde man statt (12)

(12′) $$\widetilde{d_a F} = \frac{1}{T} \int_0^T d_a F\, dt$$

schreiben können, wo T die Periode bezeichnet. Wie dem auch sei, um aus der Definition

(11″) $$d_a c = \widetilde{d_a F}$$

von $d_a c$ dieses Differential tatsächlich zu berechnen, muß man imstande sein, die Quadratur (12) auszuführen, und dies, da $d_a F$ von den x wesentlich abhängt, setzt seinerseits die Kenntnis der $x_\nu(t)$ längs B, d.h. der Integralausdrücke unseres Differentialsystems voraus. Sehr wünschenswert erscheint es natürlich, zum Ziele zu gelangen durch einfache, direkt auf die gegebenen Größen sich beziehende Operationen, ohne die Integration des Systems (I) irgendwie zu verlangen.

Dies ermöglicht sich durch eine Erweiterung der früheren Anschauung, welche den noch nicht benutzten charakteristischen Umstand der von B erzeugten dichten Erfüllung von σ in Anschlag bringt.

Gerade durch diesen Umstand werden wir von selbst dazu geführt, die zeitliche Mittelbindung (12) durch eine lokale Mittelbindung, die natürlich aus denselben Werten von $d_a F(x|a)$ hergestellt werden muß, zu ersetzen.

Da aber letztere sich auf x-Werte bezieht, welche σ dicht erfüllen, so läßt sich begrifflich das zeitliche Mittel ungezwungen auch als lokales Mittel auffassen, genommen über Punkte von σ, die über diese ganze Fläche dicht (wenn auch nicht kontinuierlich) verteilt sind. Ganz ruhig dürfen wir annehmen, daß es für die Verwertung der makroskopischen Erscheinung $d_a c$ freisteht, von der reellen (diskontinuierlichen) Verteilung oder von einer passend gewählten kontinuierlichen auszugehen. Die Frage ist nur: Was für eine Dichte $\varkappa$ müssen wir nach dem uns führenden Gedanken dieser kontinuierlichen Verteilung beilegen?

Die Antwort wird sich von selbst ergeben, indem man eine Eigenschaft berücksichtigt, die das Produkt $\varkappa d\sigma$ (welches mit der Häufigkeit der B-Punkte innerhalb $d\sigma$ proportional ist) notwendigerweise besitzen muß. Es handelt sich um die Invarianz dieses Produktes infolge einer (willkürlichen) Verschiebung längs B: Invarianz, die ihrerseits daraus entsprings, daß das zweite Glied von (12) (nach Limesübergang) sowohl von t_1 als von t_0 unabhängig sein muß.

6. - Verteilungsfunktion (Dichte) $\varkappa$. Möglicher Ausdruck derselben.

Eine Dichte $\varkappa$, die der Forderung der Invarianz Genüge leistet, läßt sich unmittelbar entnehmen aus der fundamentalen Eigenschaft der Liouvilleschen Systeme, den (N-dimensionalen) Inhalt zu erhalten, in Verbindung mit dem Bestehen der Integralgleichung (II).

Um dies einzusehen, betrachten wir in R_N die unendlich dünne Schicht χ, welche zwischen σ und einer unendlich benachbarten (ebenfalls geschlossenen) Fläche σ' derselben Familie (II) enthalten ist, wobei die σ' dem Werte $c+dc$ der Konstanten entsprechen wird. Eine solche Schicht geht, infolge einer Verschiebung längs B — d.h. gemäß unserem Differentialsystem (1) —, in sich selbst über. Es sei nun $d\sigma$ ein Element von σ. Auf den in den Punkten P von $d\sigma$ errichteten Normalen schneidet σ' unendlich kleine (bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung) gleiche Stücke dn ab und die Punkte dieser dn bilden zusammen ein N-dimensionales Element unserer Schicht, dessen Inhalt (im euklidischen Raume R_N) durch

$$d\chi = d\sigma\, dn \tag{13}$$

gemessen wird.

Statt dn kann man dc einführen durch eine wohlbekannte Formel, die folgendermaßen gewonnen wird. Man geht aus von dem Ausdruck

$$dF = \sum_1^N {}_\nu \frac{\partial F}{\partial x_\nu}\, dx_\nu \tag{14}$$

des Differentials dF der Funktion $F(x|a)$ in bezug auf die x, indem man die x_ν als Koordinaten eines Punktes P von σ und die Differentiale dx_ν als Komponenten der Normalenstrecke dn ansieht, die P mit dem entsprechenden Punkte P' auf σ' verbindet. Dann wird $dF = dc$; dF läßt sich aber auch anders ausdrücken.

Versteht man nämlich unter

$$G = \left| \sqrt{\sum_1^N {}_\nu \left(\frac{\partial F}{\partial x_\nu}\right)^2} \right| \tag{15}$$

den absoluten Wert des Gradienten von F und unter α_ν die Richtungskosinus der äußeren Normale in P, so hat man zuerst (da, nach Voraussetzung 2. in der vorigen Ziffer, F nach außen wächst und mithin $dF/dn = \sum_1^N {}_\nu (\partial F/\partial x_\nu)\alpha_\nu > 0$)

$$\frac{\partial F}{\partial x_\nu} = G\alpha_\nu\,.$$

Wenn wir $dc = dF$ positiv wählen, so wird P' auf der äußeren Normalen liegen, so daß die α_ν zugleich Richtungskosinus der unendlich kleinen Strecke PP' von der Länge dn sind. Für deren Komponenten dx_ν hat man

$$dx_\nu = dn \cdot \alpha_\nu\,.$$

Multipliziert man Glied für Glied die soeben geschriebenen Gleichungen und addiert, so bekommt man, mit Berücksichtigung von (14), wegen $\sum_1^N {}_\nu \alpha_\nu^2 = 1$ und $dF = dc$,

$$dc = G\, dn\,, \tag{16}$$

womit das Volumenelement (13) sich durch

$$d\chi = dc \frac{d\sigma}{G} \tag{13'}$$

ausdrücken läßt. Hätten wir dc negativ genommen, so müßte in (16) und (13′) $|dc|$ statt dc geschrieben werden.

Nun bleiben sowohl $d\chi$ als auch dc invariant in bezug auf das Differentialsystem (I): $d\chi$ weil (I), als von der Divergenz Null, die Volumina erhält, und dc wegen seiner Bedeutung als Zuwachs einer Integrationskonstanten. Dasselbe gilt folglich für $d\sigma/G$. Eine oberflächliche Verteilung auf σ mit der Dichte $\varkappa = 1/G$ besitzt also die wesentliche Eigenschaft, invariant zu sein gegenüber einer mit (I) verträglichen Verschiebung, die nichts anderes ist als eine Verschiebung längs irgendeiner Integralkurve B.

7. - Direkte Transformation für $N = 2$.

Es ist nicht ohne Interesse, zu bemerken, daß im Falle $N = 2$, wo die quasi-ergodische Hypothese, wie wir nebenbei erkennen werden, von selbst erfüllt ist, eine direkte Umformung die Identität beider Mittelwerte zu konstatieren gestattet.

Es sei in der Tat ein Liouvillesches (von adiabatischen Parametern a abhängiges) System zweiten Ranges

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \tag{17}$$

mit dem Integral

$$F(x, y) = c \tag{18}$$

vorgelegt.

Ohne Schwierigkeit erkennt man, daß (17) wegen (18) die kanonische Form besitzt, und sogar, daß mittels einer unwesentlichen Zeittransformation das System (17) durch

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x} \tag{17'}$$

ersetzt werden darf [8].

---

[8] In der Tat, aus

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

folgt die Existenz einer Funktion $H(x, y)$, deren Derivierten die Werte

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -Y, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = X,$$

Wie es auch sei, müssen im vorliegenden Falle die Mannigfaltigkeiten (II) geschlossene Kurven σ der kartesischen Ebene (x, y) sein, die ohne weiteres die Integralkurven B des Systems liefern.

Für das Differential $d\sigma$ ihrer Bogenlänge hat man aus (17′)

$$\frac{d\sigma^2}{dt^2} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial F}\right)^2 = G^2 .$$

Nehmen wir an (was der allgemeine Fall sein wird), daß, längs der betrachten σ, $\partial F/\partial x$ und $\partial F/\partial y$ *nicht* gleichzeitig verschwinden, d.h., daß σ eine einfache geschlossene Kurve ist, so darf längs derselben der Gradient G von F, und folglich $|d\sigma/dt|$, nie unter eine gewisse positive Konstante v_0 sinken. Die Bewegung des Bildpunktes P wird somit immer in demselben Sinne verlaufen und periodisch sein mit einer Periode T, die gewiß nicht länger als L/v_0 ist, wenn L die Länge von σ bezeichnet. Es ist natürlich auch gestattet, durch geeignete Wahl der positiven Richtung, $d\sigma > 0$ vorauszusetzen, so daß man endlich auf der ganzen Bahnkurve, die wir hier mit σ oder mit B bezeichnen dürfen,

$$\frac{d\sigma}{dt} = G > v_0$$

bekommt.

Dies berechtigt uns, σ statt t als unabhängige Veränderliche einzuführen. Speziell hat man

$$T = \int_0^T dt = \int_\sigma \frac{d\sigma}{G} ,$$

und das zeitliche Mittel

$$\tilde{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f\, dt$$

irgendeiner Funktion f des beweglichen Punktes P, läßt sich daher ganz

besitzen. Die Bedingung, daß $F(x, y)$ ein Integral ist, nimmt somit die Form

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

welches zeigt, daß H nichts anderes als eine Funktion $H(F)$ von F allein sein kann. Die Gleichungen (17) werden somit

$$\frac{dx}{dt} = H'(F)\frac{\partial F}{\partial y} , \quad \frac{dy}{dt} = - H'(F)\frac{\partial F}{\partial x} ,$$

und es genügt $H'(F)dt$ durch ein neues dt zu ersetzen, um die Gleichungen (17′) zu bekommen.

streng in das räumliche Mittel

$$\bar{f} = \int_\sigma f \frac{d\sigma}{G} : \int_\sigma \frac{d\sigma}{G} \tag{19}$$

überführen.

Offenbar findet sich in diesem Falle die quasi-ergodische Hypothese im trivialen Sinne erfüllt, daß die Bahnkurve gerade durch jeden Punkt P von σ geht und nicht nur in ihren unaufhörlichen Windungen dem Punkte P beliebig nahe kommt.

8. - Eindeutigkeit der Dichte. Endgültige Formel für Mittelwerte.

Kommen wir wieder auf Systeme (I) irgendwelchen Ranges mit den allgemeinen Voraussetzungen der Ziffer 5. Die unter 1. erklärte Voraussetzung erlaubt namentlich den wichtigen Schluß, daß (bis auf einen belanglosen konstanten Faktor) $\varkappa = 1/G$ *die einzige zulässige Dichte ist.*

Wäre nämlich $\varkappa'$ die Dichte einer zweiten zulässigen Flächenverteilung, so würden sowohl $\varkappa d\sigma$ als $\varkappa' d\sigma$ und folglich ihr Verhältnis

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa}$$

sich Invariant gegenüber (I) verhalten. Falls $\varkappa'$, wie $\varkappa$ für *alle* σ der Familie (II) (in einem gewissen Bereiche) gelten soll, würde $\varkappa'/\varkappa$ eine eindeutige Ortsfunktion sein, nicht nur auf σ, sondern auch im umgebenden R_N,

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa} = \text{const.}$$

wäre somit ein Integral von (I).

Da wir ausschließen, daß $\varkappa'/\varkappa$ einen auf σ konstanten Wert besitzt, so würde dieses Integral gewiß nicht mit $F = c$ (Gleichung von σ) zusammenfallen können. Unser System würde dann außer (II) noch ein zweites eindeutiges Integral besitzen, was der Voraussetzung 1.) widerspricht, w.z.b.w.

Da eine und nur eine Flächenverteilung mit der Dichte $\varkappa = 1/G$ überhaupt möglich ist, wird nunmehr berechtigt erscheinen, das zeitliche Mittel

$$\tilde{f} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f\,dt$$

irgendeiner Funktion f unseres beweglichen Punktes P durch das Oberflächenmittel auf σ,

(19) $$\bar{f} = \int_\sigma f \frac{d\sigma}{G} : \int_\sigma \frac{d\sigma}{G},$$

zu ersetzen.

In der nächsten Vorlesung werden wir diese Formel auf $d_a F$ anwenden und die sich ergebenden Folgen diskutieren.

II.

ELEMENTARGESETZ DER ADIABATISCHEN VORGÄNGE. DER SATZ VON GIBBS-HERTZ. KANONISCHE SYSTEME. BESONDERER FALL EINES FREIHEITSGRADES. BEISPIELE. SYSTEME MIT ZYKLISCHEN KOORDINATEN UND ZUGEHÖRIGE ADIABATISCHE INVARIANTE. ÜBERGANG ZUM ALLGEMEINEREN FALL INVOLUTORISCHER INTEGRALE

1. - Differentialgesetz der adiabatischen Vorgänge. Umkehrbarkeit und Integrabilitätsbedingungen.

Unter den in der vorigen Vorlesung ausgesprochenen und erklärten Hypothesen für ein Liouvillesches von Parametern a abhängiges Differentialsystem (I) mit dem einzigen Integral

(II) $$F(x\,|\,a) = c,$$

ist die adiabatische Variation von c mit den Variationen der a durch die Gleichung [(11″) der vorigen Vorlesung, wo der zeitliche Mittelwert $\widetilde{d_a F}$ durch den lokalen (19) zu ersetzen ist]

(1) $$d_a c = \int_\sigma d_a F \frac{d\sigma}{G} : \int_\sigma \frac{d\sigma}{G}$$

verbunden.

Selbstverständlich bezeichnet σ diejenige Fläche (II), die dem zu variierenden Wert von c entspricht.

Das zweite Glied von (1), in dem man die Quadraturen als ausgeführt ansieht, bietet sich als ein linearer Differentialausdruck in bezug auf die da dar.

Sind die a irgendwie als Funktionen der Zeit gegeben, so entnimmt man aus (1) das zugehörige Variationsgesetz von c eindeutig.

Wir verlangen aber, daß diesen adiabatischen Variationen (wenigstens in ideal günstigen Grenzfällen) der Charakter umkehrbarer Vorgänge zukommt, in dem Sinne, daß, wenn, die a langsam variieren und einen Kreisprozeß durchmachen, auch c wieder seinen Anfangswert annimmt.

Vom mathematischen Standpunkte aus ist diese Forderung mit der unbeschränkten Integrabilität von (1) gleichbedeutend. Es muß also das zweite Glied von (1) ein exaktes Differential (in bezug auf die a) sein. Das ist tatsächlich der Fall, wie wir sogleich zeigen werden, doch nicht ohne früher hervorgehoben zu haben, daß das Bestehen dieser vollständigen Integrabilität eine starke physikalische Stütze zu Gunsten der Hypothesen darstellt, die wir aus ganz entfernten Vorstellungen heraus eingeführt hatten.

Nun zu den Integrabilitätsbedingungen. Wir werden mehr leisten, indem wir, statt uns mit der Verifikation zu begnügen, imstande sein werden, das allgemeine Integral von (1) anzugeben. Gerade dazu war (noch einige Jahre vor dem Entstehen der allgemeinen Begriffe und der Bezeichnung « adiabatische Invariante ») Ihr Hamburger Landsmann PAUL HERTZ [9] durch naheliegende Anwendung der Gibbs'schen statistischen Mechanik gelangt.

Es scheint mit deswegen angemessen, dem Satze, zu dessen Beweis ich jetzt übergehen werde, die beiden Namen GIBBS und HERTZ beizulegen.

2. - Der Satz von Gibbs-Hertz.
Das (von einer σ eingeschlossene) Volumen V als adiabatische Invariante.

Die Gleichung (II) definiert nach unseren Voraussetzungen geschlossene Flächen σ in R_N. Für bestimmte Werte der Parameter a und der Integrationskonstanten c wird das von σ begrenzte Volumen V eindeutig bestimmt: V ist also eine wohl definierte (und, in dem zu betrachtenden Gebiete, reguläre) Funktion

$$V(c\,|\,a)$$

der Argumente c und a.

Ihr totales Differential darf selbstverständlich als Summe von zwei Anteilen gedacht werden; d.h., mit evidenter Schreibweise,

$$dV = d_c V + d_a V\,. \tag{2}$$

[9] WEBER-GANS-HERTZ, loc. cit. (1), Nr. 270, S. 534-535.

Es ist leicht, aus der Bedeutung von V, $d_c V$ und $d_a V$ direkt zu veranschaulichen und zu berechnen.

Beschäftigen wir uns zuerst mit $d_c V$. Dabei haben wir die a festzuhalten und dem c den Zuwachs dc zu erteilen, wobei V sich um das Volumen der unendlich kleinen Schicht vermehrt, welche (§ 6 der vorigen Vorlesung) zwischen den Flächen σ und σ' ($F = c + dc$) enthalten ist. Nach der Formel (13′) des zitierten Paragraphen hat dieser Zuwachs $d_c V$ (der jetzt nicht notwendig positiv sein wird, sondern das Zeichen von dc haben muß) den Wert

$$d_a V = dc \int\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{G} \,. \tag{3}$$

Um $d_a V$ zu finden, halten wir c fest und erteilen den a willkürliche Zuwüchse da, so daß aus (II), statt σ, die benachbarte Fläche

$$F + d_a F = c$$

hervorgeht, die wir σ_a nennen werden. Auch jetzt ist $d_a V$ geometrisch veranschaulicht durch die dünne, zwischen σ und σ_a eingeschlossene Schicht χ_a, wobei die in bezug auf σ äußeren Elementarvolumina als positiv, die inneren als negativ in Rechnung zu setzen sind.

Denken wir uns, wie früher, die Normale n in jedem Punkte von σ errichtet. Es sei P_a der Punkt dieser Normale, in dem sie σ_a schneidet, δn die Strecke PP_a, positiv gerechnet nach dem Äußeren von σ. Führen wir nochmals die Richtungskosinus der äußeren Normalen $\alpha_\nu = (1/G)(\partial F/\partial x_\nu)$ ein. Es sind dann $\delta n \cdot \alpha_\nu$ die Zuwüchse der Koordinaten beim Übergange von P zu P_a. Der entsprechende Zuwachs δF von F ist daher

$$\delta F = \delta n \sum_{1}^{N}{}_{\nu} \frac{\partial F}{\partial x_\nu} \alpha_\nu = G \, \delta n \,.$$

Da aber P_a auf σ_a liegt, so muß die Gleichung $F + d_a F = c$ von den Koordinaten des Punktes P_a befriedigt sein. Bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung nimmt F in P_a den Wert $c + \delta F$ an, und $d_a F$ darf immer noch auf den Punkt P bezogen werden. Wir bekommen somit

$$d_a F + G \, \delta n = 0 \,.$$

Wie bemerkt, setzt sich der Gesamtwert von $d_a V$ als Summe der einzelnen Beiträge, $\int d\sigma \, \delta n$, zusammen. Dafür kann man schreiben, indem man δn durch $d_a F$ ausdrückt:

$$d_a V = -\int\limits_{\sigma} d_a F \frac{d\sigma}{G} \,. \tag{4}$$

Das totale Differential (2) von $V(a|c)$ wird somit

$$dV = dc\int_\sigma \frac{d\sigma}{G} - \int_\sigma d_a F\frac{d\sigma}{G}. \tag{2'}$$

Nichts hindert natürlich in dieser Identität die Argumente c und a irgendwie gebunden zu denken, z.B. c statt unabhängige, als eine (beliebige) Funktion der anderen Argumente a anzusehen, wobei man statt dc passend $d_a c$ schreibt. Bei dieser Auffassung zeigt der Vergleich von (2′) mit (1), daß die totale Differentialgleichung (1) mit

$$dV = 0$$

gleichwertig ist. Diese letztere ist offenbar unbeschränkt integrabel und ergibt

$$V(c|a) = \text{const.} \tag{1'}$$

Hiermit haben wir nicht nur die unbeschränkte Integrabilität von (1) erkannt, sondern vielmehr ihr allgemeines Integral durch die endliche Gleichung (1′) zwischen c und den a ausgedrückt. Es folgt daraus, daß die adiabatische Variation von c, die durch langsame Veränderung der a bedingt wird, notwendigerweise so vor sich geht, daß das Volumen V einen konstanten Weit erhält: V ist also eine adiabatische Invariante.

3. - Anwendung auf kanonische Systeme.

Die bisherigen Betrachtungen finden eine sehr bedeutende Anwendung auf kanonische und eigentlich mechanische Systeme, woraus sie übrigens entsprungen sind.

Zuförderst kann ein beliebiges kanonisches System

$$\frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \quad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

wo $H(p|q|a)$ eine von t unabhängige (in dem zu betrachtenden Gebiete) reguläre Funktion der $2n$ Argumente p_h und q_h und irgendwelcher Parameter a bezeichnet, als ein besonderer Fall der von uns diskutierten Liouvilleschen Systeme angesehen werden.

In der Tat, wenn man $N = 2n$ setzt und die p_h, q_h zusammen die Rolle der x_ν übernehmen läßt, so wird die Divergenz von (5)

$$\sum_1^n {}_h\left(-\frac{\partial}{\partial p_h}\frac{\partial H}{\partial q_h} + \frac{\partial}{\partial q_h}\frac{\partial H}{\partial p_h}\right) = 0,$$

und es existiert andererseits (da t in H nicht explizit vorkommt) das Integral

(6) $$H = E\,,$$

welches das Integral (II) des allgemeinen Falles ersetzt.

Ist außerdem das kanonische System (5) quasi-ergodisch, was im besonderen mit sich bringt, daß die Flächen $H=E$ im Phasenraume Φ_{2n} (der Argumente p, q) geschlossen ausfallen, und daß kein weiteres eindeutiges Integral existiert, so wird die vorangehende Theorie ohne weiteres anwendbar, und man hat den wichtigen Schluß, daß, für kanonische, quasi-ergodische Systeme (5), *das von irgendeiner Fläche* $H=E$ *begrenzte Volumen* $V(E\,|\,a)$ *des Phasenraumes* Φ_{2n} *eine adiabatische Invariante ist.*

4. - Eigentlich mechanischer Fall. Systeme mit einem Freiheitsgrade.

Großes Interesse bieten natürlich diejenigen kanonischen Systeme (5), welche aus Problemen der analytischen Mechanik entspringen.

Betrachten wir namentlich ein holonomes System mit n Freiheitsgraden, das sich unter Einwirkung von konservativen Kräften befindet. Dann sind unter $q_1, q_2, \ldots, q_n$ Lagrangesche Koordinaten des Systems zu verstehen. Es sei außerdem

(7) $$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\sum_{ik}^{n}{}_{1}\, b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$$

seine lebendige Kraft, wo die b_{ik} Funktionen der q(und der Parameter a) bezeichnen, $U(q\,|\,a)$ seine Kräftefunktion. Führt man statt der q die zugehörigen Momente p durch die Gleichungen

(8) $$p_h = \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\dot{q}_h} \qquad (h=1, 2, \ldots, n)$$

ein, und ersetzt die $\dot{q}$ durch die p in $\mathfrak{T}$, so bekommt man die reziproke Form

(7′) $$(\mathfrak{T}) = \sum_{ik}^{n}{}_{1}\, b^{ik}p_ip_k\,.$$

Die charakteristische Funktion $H(p\,|\,q\,|\,a)$ der Bewegungsgleichungen in ihrer kanonischen Form hat endlich den Ausdruck

(9) $$H = (\mathfrak{T}) - U\,,$$

welcher die p nur quadratisch, vermittels der definiten Form $(\mathfrak{T})$ enthält.

Fur $n = 1$ reduziert sich $\mathfrak{T}$, indem man einfach p und q statt p_1, q_1 schreibt, auf die Form

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} A\dot{q}^2 , \tag{10}$$

und man hat folglich

$$p = A\dot{q} , \tag{11}$$

$$(\mathfrak{T}) = \frac{1}{2A} p^2 , \tag{10'}$$

wo im allgemeinen A eine positive (und reguläre) Funktion der Koordinate q (und Parameter a) bezeichnen. Der euklidische Phasenraum Φ_{2n} ist in diesem Falle nichts anderes als eine kartesische Ebene p, q (q Abszisse, p Ordinate).

Wenn für bestimmte Werte der a die Gleichung

$$U(q\,|\,a) + E = 0$$

zwei (reelle) aufeinanderfolgende einfache Wurzeln q', q'' hat, dann definiert (6) ein *einfaches* Oval, welches die beiden Parallelen $q = q'$, $q = q''$ zur Ordinatenachse berührt, zwischen ihnen und symmetrisch in bezug auf die Abszissenachse liegt. Das entnimmt man unmittelbar aus der Gleichung (6), indem man zuerst durch

$$p = |\sqrt{2A(U+E)}| \tag{6'}$$

einen einfachen Kurvenzweig oberhalb der Abszissenachse im Intervalle $q' \mapsto q''$ definiert, und dann berücksichtigt, daß an den beiden Enden des Intervalls p verschwindet und die Tangente parallel zur Ordinatenachse wird. Dieser Zweig und sein Spiegelbild in der unteren Halbebene bilden zusammen eine geschlossene (reguläre) σ, w.z.b.w.

Auch die Zusatzbedingung (§ 7 der vorigen Vorlesung) daß längs σ die rechten Seiten des Differentialsystems (18′) der zitierten Ziffer, d.h. im kanonischen Falle $-\partial H/\partial q$, $\partial H/\partial p$, nicht gleichzeitig verschwinden, ist befriedigt. In der Tat $\partial H/\partial p = p/A$ verschwindet nur in den Endpunkten des Intervalls $q' \mapsto q''$, und für diese ist gewiß $-\partial H/\partial q = \partial U/\partial q \neq 0$, da nach der Voraussetzung die Gleichung $U + E = 0$ in q' und q'' einfache Wurzeln besitzt. Die adiabatische Invariante V ist hier selbstverständlich die vom Oval eingeschlossene Fläche. Wegen der Symmetrie, in bezug auf die Abszissenachse hat man offenbar

$$V = 2\int_{q'}^{q''} p\, dq , \tag{12}$$

wo p durch (6′) definiert ist. Die Bewegung auf σ ist periodisch, wie aus einem bekannten Satze von WEIERSTRASS [10] oder aus einer etwas allgemeineren Bemerkung der vorigen Vorlesung (§ 6) hervorgeht. In (12) kann man natürlich t statt q als Integrationsveränderliche benutzen, womit das Integrale $\int_{q'}^{q''} p\,dq$ (wie leicht zu beweisen ist) sich sowohl in die Form

$$\int_0^{T/2} p\dot{q}\,dt$$

als auch in die Form

$$\int_{T/2}^{T} p\dot{q}\,dt$$

bringen läßt (T Periode).

Man hat daher

$$V = \int_0^T p\dot{q}\,dt\,, \tag{12′}$$

wofür SOMMERFELD die Abkürzung

$$\oint p\,dq \tag{13}$$

(zyklisches Integral) eingeführt hat.

Bedenkt man, daß $p\dot{q}$, gemäß (10) und (11), nichts anderes als $2\mathfrak{T}$ (zweifache lebendige Kraft) ist, so kann man auch schreiben

$$V = \int_0^T 2\mathfrak{T}\,dt\,, \tag{12″}$$

so daß V als Wirkung während einer Periode erscheint. Indem man den mittleren Wert

$$\overline{\mathfrak{T}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathfrak{T}\,dt$$

der kinetischen Energie und die Frequenz $\nu = 1/T$ einführt, bekommt man auch den bemerkenswerten Ausdruck

$$V = 2\,\frac{\overline{\mathfrak{T}}}{\nu}\,. \tag{12‴}$$

---

[10] Werke, B. II, S. 1-19. Vgl. auch LEVI-CIVITA und AMALDI, loc. cit [1], B. (II)$_1$; S. 23-33.

5. - Beispiele: Harmonischer Oszillator. Einfaches Pendel.

Für einen harmonischen Oszillator hat man, wenn m die Masse des beweglichen Punktes und λ die Elastizitäts- (oder Quasi-Elastizitäts-) Konstante bezeichnet,

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 , \qquad U = -\frac{1}{2} \lambda q^2 ,$$

also [aus (10), (11), (10′) und (9)]

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} \lambda q^2 .$$

Die Gleichung $H = E$ definiert also Ellipsen mit den Hauptachsen $\sqrt{2mE}$, $\sqrt{2E/\lambda}$. Die eingeschlossene Fläche wird somit

$$V = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{\lambda}} .$$

Setzt man, wie üblich, $\lambda/m = \omega^2$, so ergibt sich aus der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{q} + \lambda q = 0 ,$$

daß $\omega/2\pi$ die Frequenz der entsprechenden harmonischen Schwingungen darstellt. Unser V nimmt somit die Form

$$V = \frac{2\pi}{\omega} E \tag{14}$$

an, welche in diesem Falle mit (12‴) gleichwertig ist, da $2\pi/\omega = 1/\nu$, und die totale Energie E halb kinetische, halb potentielle, also gleich $2\mathfrak{T}$ ist.

Beim einfachen Pendel seien, wie üblich, die Länge mit l, der Deviationswinkel (Lagrangesche Koordinate q) mit ϑ, die Schwerebeschleunigung mit g bezeichnet, und die Masse gleich 1 gesetzt. Man hat

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} l^2\dot{\vartheta}^2 , \qquad U = gl \cos\vartheta , \qquad p = l^2\dot{\vartheta} , \qquad (\mathfrak{T}) = \frac{1}{2l^2} p^2 ,$$

$$H = (\mathfrak{T}) - U = \frac{1}{2l^2} p^2 - gl \cos\vartheta ,$$

und die Energiegleichung $H = E$ nimmt die Form an

$$p^2 = 2l^2(gl \cos\vartheta + E) . \tag{15}$$

Wenn es sich um eigentliche Schwingungen (nicht um fortschreitende Rotationen) handeln soll, so muß E einen Wert haben, für den die Gleichung (welche die Oszillationsgrenzen definiert)

$$E + gl\cos\vartheta = 0 \tag{16}$$

zwei einfache (notwendigerweise entgegengesetzte) Wurzeln ϑ_0 (> 0 und $< \pi$) und $-\vartheta_0$ zuläßt. Diese entsprechen den q', q'' der vorigen Ziffer, und so haben wir aus (12) für das Pendel von (langsam) veränderlicher Länge die adiabatische Invariante

$$V = 2\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} p\, d\vartheta\,; \tag{17}$$

p ist dabei die positive Wurzel von (15). Die Berechnung von V würde auf eine elliptische Quadratur führen. Man kann sie vermeiden und sich mit einer viel nützlicheren Reihenentwicklung begnügen, die leicht aus dem klassischen Ausdruck [11] der Halbperiode (Dauer einer einfachen Schwingung)

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{0}^{\infty}{}_n\, c_n^2 k^{2n}\,, \tag{18}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} &c_0 = 1\,, \qquad c_n = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot\ \ 2n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),\\ &\qquad\qquad k = \sin\frac{\vartheta_0}{2}\end{aligned}\right. \tag{19}$$

bedeuten, abgeleitet wird.

Die Definition (16) von ϑ_0 kann so geschrieben werden:

$$E + gl - gl(1 - \cos\vartheta_0) = 0\,,$$

so daß zwischen E und k die Relation besteht

$$E + gl - 2glk^2 = 0\,. \tag{16'}$$

Aus (15) hat man

$$\frac{\partial p}{\partial E} = \frac{l^2}{p}\,,$$

was sich wegen $p = l^2\dot\vartheta$ schreiben läßt

$$\frac{\partial p}{\partial E} = \frac{dt}{d\vartheta}\,.$$

---

(11) LEVI-CIVITA und AMALDI, « ibidem », S. 43-45.

Nun deriviere man den Ausdruck (17) von V, in bezug auf E, mit Berücksichtigung des Umstandes, daß p, gemäß (15) und (16), an den beiden Integrationsgrenzen verschwindet. Es ergibt sich

$$\frac{\partial V}{\partial E} = 2\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} dt = 2\tau\,.$$

Da wegen (16′); $\partial E/\partial k = 4glk$ ist, so hat man auch

$$\frac{\partial V}{\partial k} = 8glk\tau\,. \tag{17'}$$

Um V hieraus zu berechnen, braucht man nur für τ seinen Ausdruck (18) einzuführen und Glied für Glied zu integrieren. Die Integrationskonstante verschwindet, weil $V = 0$ für $k = 0$, ist; dies folgt aus der Bemerkung, daß, wegen (18), mit k auch die Amplitude ϑ_0 Null wird, und folglich auch V, wie aus dem ursprünglichen Ausdruck (17) unmittelbar ersichtlich ist. Man bekommt also

$$V = 4\pi g^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} \sum_0^\infty{}_n \frac{1}{n+1}\, c_n^2 k^{2n+2}\,. \tag{17''}$$

Für kleine Amplituden ϑ_0 wird k, nach (19), klein von derselben Ordnung. Man kann also in V für sehr kleine Amplituden nur das Glied niedrigster Ordnung berücksichtigen, und so ergibt sich aus (17″)

$$V = 4\pi g^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} k^2\,. \tag{17'''}$$

Bei dieser Annäherung ist offenbar zu erwarten, daß der Wert von V von demjenigen, welcher dem harmonischen Oszillator entspricht, sich nicht unterscheide. In der Tat beachte man zuerst, daß die im Oszillator vorkommende totale Energie E verschwindet mit p und q, also im Gleichgewichtszustande. Beim Pendel zeigt die Energiegleichung (15), daß nicht E, sondern $E+gl$ die totale Energie aus demselben Nullpunkte ($\vartheta = p = 0$) bezeichnet.

Nach (16′) fällt $E+gl$ mit $2glk^2$ zusammen. Die Formel (14), auf das Pendel angewandt, gibt somit

$$V = \frac{2\pi}{\omega}\cdot 2glk^2\,.$$

Da $2\pi/\omega$ die Periode bezeichnet, welche für das Pendel 2τ, also in erster Annäherung $2\pi\sqrt{l/g}$ beträgt, so kommt man tatsächlich auf (17‴) zurück.

6. - Mehrfach imprimitive Liouvillesche Systeme. Besonderer Fall von kanonischen Systemen mit zyklischen Koordinaten. Zugehörige adiabatische Invariante W.

Würde ein Liouvillesches System (I) nicht nur ein einziges (eindeutiges) Integral (II), sondern mehrere zulassen, so wäre es immerhin möglich (unter gewissen qualitativen Beschränkungen) adiabatische Invarianten des Systems (als *Ausdehnung* von reduzierten, weniger als N-dimensionalen, Mannigfaltigkeiten) zu bekommen.

Wir wollen jedoch nicht auf die allgemeine Theorie eingehen, die neulich von GEPPERT ([12]) dargelegt worden ist. Noch einmal ziehen wir vor, uns auf eine besonders wichtige Klasse zu beschränken, nämlich auf kanonische Systeme, für welche die Frage eigentümliche Merkmale aufweist.

Dies läßt sich am besten herausbringen, indem man mit einem elementaren Falle beginnt, nämlich mit dem sogenannten Routhschen Falle eines kanonischen Systems

$$\frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \qquad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

für welches die charakteristische Funktion $H(p\,|\,q)$ nicht nur von t, sondern auch von einigen q, sagen wir

$$q_1, q_2, \ldots, q_m$$

unabhängig ist: $q_1, q_2, \ldots, q_m$ werden dann zyklische oder ignorable Koordinaten genannt, und es bestehen mit

$$H = E \tag{6}$$

auch die m Integrale (der verallgemeinerten Momente)

$$p_\alpha = c_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m;\ c_\alpha = \text{const.}), \tag{5a}$$

die unmittelbar aus den m ersten Gleichungen (5) folgen und sie natürlich ersetzen können.

Unser kanonisches System, welches aus $2n$ Gleichungen besteht, läßt sich mit Vorteil in drei Gruppen teilen: Zuerst (5a), die m Gleichungen umfaßt. Dann eine zweite Gruppe, welche die $2(n - m)$ Gleichungen (5),

([12]) Loco citato ([5]).

für $h = m+1, \ldots, n$, enthält. Wir werden schreiben

$$\text{(5b)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_i} \end{aligned} \right. \qquad (i = m+1, \ldots, n),$$

wo $\mathfrak{H}(p_{m+1}, \ldots, p_n \,|\, q_{m+1}, \ldots, q_n \,|\, c)$ die mittelst der bekannten Integrale reduzierte Funktion H bezeichnet, d.h.

$$\text{(20)} \qquad \mathfrak{H} = (H)_{p_\alpha = c_\alpha}$$

gesetzt ist.

Schließlich eine dritte Gruppe, die natürlich aus den übrigen m Gleichungen gebildet ist, nämlich

$$\text{(5c)} \qquad \frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

Die zweite Gruppe (5b) kann für sich allein betrachtet werden und bildet ein kanonisches System in den $2(n-m)$ Unbekannten p_i, q_i, welches, außer den ursprünglich in (5) etwa vorkommenden Parameter a, die neuen m Parameter c enthält. Die ersten m p_α werden direkt von (5a) geliefert, dagegen sind die q_α, nach Integration von (5b), aus (5c) durch Quadraturen bestimmbar. Die Integration des ursprünglichen Systems (5) — wenn die eventuell vorkommenden Parameter a konstant bleiben — findet sich somit auf diejenige von (5b) zurückgeführt; also hat der Rang eine Verminderung von $2m$ Einheiten erfahren.

Auch wenn die a als adiabatische Parameter angesehen werden, und es wesentlich auf die adiabatische Invariante des Systems (5) ankommt, ist das reduzierte System (5b) maßgebend.

Als Parameter enthält es neben den a auch die Konstanten c der Integrale (5a), und etwaige adiabatische Invarianten (in bezug auf beide Reihen von Parametern), die es zuläßt, gelten natürlich ohne weiteres als solche auch für das ursprüngliche System (5).

Macht man nun die Voraussetzung, daß dieses kein weiteres (eindeutiges) Integral außer (6) und (5a) besitzt, so gehört zum System (5b) nur ein einziges Integral: das (reduzierte) Energie-Integral (6), d.h.

$$\text{(6b)} \qquad \mathfrak{H} = E\,.$$

Ist außerdem die quasi-ergodische Hypothese befriedigt (§ 4 der vorigen Vorlesung), so dürfen wir auf (5b) das Gibbs-Hertzsche Theorem anwenden. Demzufolge ist, wenn Ψ den $2(n-m)$-dimensionalen Phasenraum der p_i, q_i und

$$W(E \,|\, a \,|\, c)$$

das von der Fläche (6b) in ihm eingeschlossene Volumen bezeichnen, W eine adiabatische Invariante.

Es ist zu bemerken, daß die Quasi-ergodizität des reduzierten Systems (5b) sich auf eine Mannigfaltigkeit von $2(n-m)-1$ Dimensionen bezieht (eine $\mathfrak{H}=E$ in Ψ). Hätten wir allgemeiner ein Liouvillesches System der Imprimitivitätsordnung (vgl. die eben zitierte Ziffer 4 der vorigen Vorlesung) $m+1$ betrachtet, so hätten wir eine verstärkte Quasi-Ergodizität ($2n-m-1$-dimensionale dichte Erfüllung) annehmen müssen.

7. - Anscheinend naheliegende Verallgemeinerung. Auf dem Wege stehende Schwierigkeiten. Hilfsmittel zur Überwindung.

Es sei wie früher ein kanonisches System

$$(5)\qquad \frac{dp_h}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_h},\qquad \frac{dq_h}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_h}\qquad (h=1,2,..,n)$$

der Imprimitivitätsordnung $m+1$ vorgelegt. Die außer

$$(6)\qquad H=E$$

bekannten Integrale seien aber nicht von der besonderen Form $p_\alpha=c_\alpha$, sondern allgemeiner

$$(21)\qquad F_\alpha(p\,|\,q\,|\,a)=c_\alpha\qquad (\alpha=1,2,...,m),$$

wo die F_α eindeutige (oder endlich-vieldeutige), in bezug auf die p, q, unabhängige Funktionen bezeichnen, die untereinander in Involution sind. Diese letzte Annahme drückt sich formal durch das Bestehen der $m(m-1)/2$ Identitäten

$$(22)\qquad (F_\alpha, F_\beta)=0\qquad (\alpha,\beta,=1,2,...,m),$$

aus, wo

$$(F_\alpha, F_\beta)=\sum_1^n{}_h\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_h}\frac{\partial F_\beta}{\partial q_h}-\frac{\partial F_\alpha}{\partial q_h}\frac{\partial F_\beta}{\partial p_h}\right)$$

der wohlbekannte Poissonsche Klammerausdruck ist. Nach einem Satz von LIE ([13]) sind die Bedingungen (22) hinreichend, damit sich, wenn man

$$(23)\qquad P_\alpha=F_\alpha\qquad (\alpha=1,2,...,m)$$

setzt, $2n-m$ weitere unabhängige Kombinationen P_i $(i=m+1,...,n)$, Q_h $(h=1,2,...,n)$ der p, q finden lassen, so daß die Transformation

([13]) LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, B. II, S. 207-209.

zwischen den P, Q und den p, q kanonisch ausfällt. Dann transformiert sich das Differentialsystem (5) auf die neuen Variabeln P, Q bezogen, wieder in ein kanonisches, und mit derselben charakteristischen Funktion H, in die nur die P, Q an Stelle der p, q einzuführen sind.

Das transformierte System läßt sich also schreiben

$$\frac{dP_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_h}, \qquad \frac{dQ_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{24}$$

und da es die transformierten Integrale (21), d.h. wegen (23),

$$P_\alpha = c_\alpha \tag{21'}$$

zuläßt, so erscheinen die neuen Q_α als zyklische Koordinaten, und wir finden uns genau (wenigsten in formeller Hinsicht) auf den elementaren Fall der vorigen Ziffer zurückgeführt.

Auf den ersten Blick wäre man geneigt, die Frage als prinzipiell erledigt anzusehen, indem die vorher festgestellte adiabatische Invariante sich auf das ursprüngliche System (in den p, q) zurückführen läßt, usw.

Doch liegt die Sache nicht so einfach.

Erstens trägt der Liesche Satz nur lokalen Charakter. Die $2n - m$ Funktionen P_i $(i = m+1, \ldots, n)$, Q_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$, die er den gegebenen $P_\alpha = F_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ beifügt, sind eindeutig bestimmbar nur in der Umgebung jedes Punktes. Im großen kann die Abbildung zwischen den (p, q) und den (P, Q) unendlich vieldeutig werden, so daß die topologischen Beziehungen, namentlich die Quasi-ergodizität, nicht invariant sind.

Deshalb ist ein das transformierte System (24) betreffender Schluß über die Existenz von adiabatischen Invarianten nicht ohne weiteres auf das gegebene System anwendbar. Aber selbst wenn dies der Fall wäre und wir hätten so den Existenzbeweis gewonnen, so würden wir nicht imstande sein, zu diesen adiabatischen Invarianten mit geeigneten Mitteln zu gelangen. In der Tat brauchte man dafür die expliziten Transformationsformeln zwischen den (P, Q) und den (p, q), deren Herstellung in der Regel Integraloperationen erfordert, deren Gesamtordnung noch höher als die Integration des ursprünglichen Differentialsystems ist. Dagegen wollen wir die Bestimmung der adiabatischen Invarianten gerade ohne eine solche Integration erreichen. Dies wird uns ermöglicht durch ein Verfahren, welches auf MORERA's Beweis des Lieschen Satzes zurückgeht. Das nächste Mal werden wir ein solches Verfahren mit einer unserem Zwecke angepaßten Modifikation auseinandersetzen und unmittelbar für die Bildung und die Berechnung von adiabatischen Invarianten verwerten.

III.

KANONISCHE SYSTEME MIT INVOLUTORISCHEN INTEGRALEN. ASSOZIIERTES SYSTEM NACH MORERA. VERWERTUNG DESSELBEN ZUM BEWEISE DES LIESCHEN REDUKTIONSSATZES UND ZUR ERREICHUNG ADIABATISCHER INVARIANTEN. BURGERS' THEOREM ÜBER DIE INVARIANZ DER SOMMERFELDSCHEN ZYKLISCHEN INTEGRALE

1. - Integrale, die paarweise in Involution liegen. Formale Beziehungen.

Nehmen wir wieder das kanonische System

$$(1) \qquad \frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \qquad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, ..., n)$$

auf, welches außer

$$(2) \qquad H(p\,|\,q) = E,$$

noch m involutorische Integrale

$$(3) \qquad F_\alpha(p\,|\,q) = c_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, ..., m)$$

besitzt. Wie schon in der vorigen Vorlesung erwähnt, drückt sich die involutorische Eigenschaft durch das Verschwinden der Poissonschen Klammerausdrücke

$$(4) \qquad (F_\alpha, F_\beta) = 0 \qquad (\alpha, \beta, = 1\ 2, ..., m)$$

aus.

Die Tatsache, daß die F_α Integrale liefern, ist auch mit dem Verschwinden von Klammerausdrücken gleichbedeutend, nämlich mit

$$(5) \qquad (H, F_\alpha) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, ..., m),$$

wie klassisch bekannt und übrigens unmittelbar aus (1) zu entnehmen.

Für unsere Betrachtungen wird es zweckmäßig, die Gleichungen (3) in aufgelöster Form zu benutzen. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit (indem man nur etwaige Änderung von Indizes oder Substitutionen eines Paares p, q mit $-q$, p vorausschickt) darf man die Lösbarkeit der Gleichungen (3) in bezug auf die ersten m Argumente p voraussetzen und sie dementsprechend in die Form

$$p_\gamma = f_\gamma(p_{m+1}, \ldots, p_n | q | c) \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, m) \tag{3'}$$

gebracht denken.

Wie früher im elementaren Falle einiger zyklischen Koordinaten, wird es sich empfehlen, die charakteristische Funktion mittels der bekannten Integrale zu reduzieren. Somit haben wir

$$\mathfrak{H}(p_{m+1}, \ldots, p_n | q | c) = (H)_{p_\gamma = f_\gamma}. \tag{6}$$

Die Vorbereitung ist aber noch nicht erledigt. Wir müssen durch geeignete Transformation die Bedingungsgleichungen (4) und (5) von den $p_1, p_2, \ldots, p_m$ befreien. Bekanntlich gelangt man zum Ziele, indem man die Gleichungen (3) und (6) als Identitäten vermöge (3′) ansieht. Aus ihnen ergibt sich, wenn ξ irgendeines der q oder der $p_{m+1}, \ldots, p_n$ bezeichnet,

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \xi} + \sum_1^m {}_\gamma \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_\gamma} \frac{\partial f_\gamma}{\partial \xi} = 0\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \xi} = \frac{\partial H}{\partial \xi} + \sum_1^m {}_\gamma \frac{\partial H}{\partial p_\gamma} \frac{\partial f_\gamma}{\partial \xi}\,. \tag{8}$$

Die ersten können auch geschrieben werden (da $\partial p_\gamma / \partial \xi = 0$ ist)

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \xi} = \sum_1^m {}_\gamma \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_\gamma} \frac{\partial (p_\gamma - f_\gamma)}{\partial \xi}\,, \tag{7'}$$

mit dem Vorteile, daß in dieser Form die Identität von selbst befriedigt wird, wenn man unter ξ eine der $p_1, p_2, \ldots, p_m$ versteht; sie gilt also für alle kanonischen Veränderlichen p und q.

In derselben Weise folgert man aus (6)

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \xi} = \frac{\partial H}{\partial \xi} + \sum_1^m {}_\gamma \frac{\partial H}{\partial p_\gamma} \frac{\partial f_\gamma}{\partial \xi}\,,$$

wofür man auch

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \xi} + \sum_1^m {}_\gamma \frac{\partial H}{\partial p_\gamma} \frac{\partial (p_\gamma - f_\gamma)}{\partial \xi} \tag{8'}$$

schreiben kann, und in dieser Form bleibt die Identität bestehen, auch wenn ξ für $p_1, p_2, \ldots, p_m$ steht.

Mit Rücksicht auf (7) findet man für die Klammerausdrücke (F_α, F_β)

$$(F_\alpha, F_\beta) = \sum_1^m{}_{\gamma\delta} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_\gamma} \frac{\partial F_\beta}{\partial p_\delta}(p_\gamma - f_\gamma, p_\delta - f_\delta) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m). \tag{9}$$

Da die Funktionaldeterminante

$$\left\| \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_\gamma} \right\| \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, m)$$

wegen der Auflösbarkeit der Gleichungen (3) in bezug auf $p_1, p_2, \ldots, p_m$ nicht identisch verschwinden darf, entnimmt man aus (9), daß die Bedingungen (4) mit

$$(p_\alpha - f_\alpha, p_\beta - f_\beta) = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m) \tag{4'}$$

gleichwertig sind. Entwickelt man die letzteren und setzt man, für irgendwelche Funktionen f_α, f_β,

$$\{f_\alpha, f_\beta\} = \sum_{m+1}^n{}_i \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial f_\beta}{\partial q_i} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial f_\beta}{\partial p_i} \right),$$

so nehmen sie die Form

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{\partial f_\beta}{\partial q_\alpha} + \{f_\alpha, f_\beta\} = 0 \tag{4''}$$

an, wo die f, ihrer Definition nach, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ nicht enthalten, und so sind tatsächlich die (4″) davon frei.

In derselben Weise lassen sich die Bedingungen (5) umformen. Mit Benutzung von (7) und (8′) bekommt man zuerst

$$(H, F_\alpha) = \sum_1^m{}_\gamma \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_\gamma} (\mathfrak{H}, p_\gamma - f_\gamma) + \sum_1^m{}_{\gamma\delta} \frac{\partial H}{\partial p_\gamma} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_\delta} (p_\gamma - f_\gamma, p_\delta - f_\delta).$$

Die doppelte Summe verschwindet wegen (4′) und es bleibt

$$(H, F_\alpha) = \sum_1^m{}_\gamma \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_\gamma} (\mathfrak{H}, p_\gamma - f_\gamma) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

woraus unmittelbar (wegen des Nichtverschwindens der Determinante $\|\partial F_\alpha/\partial p_\gamma\|$) erhellt, daß die Gleichungen (5) die Relationen

$$(\mathfrak{H}, p_\alpha - f_\alpha) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{5'}$$

nach sich ziehen und umgekehrt. Da weder f_α noch $\mathfrak{H}$ die $p_1, p_2, \ldots, p_m$ explizite enthalten, so darf man auch die Gleichungen (5') in der Form

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_\alpha} + \{\mathfrak{H}, f_\alpha\} = 0 \tag{5''}$$

schreiben, wo jede Spur der $p_1, p_2, \ldots, p_m$ verschwunden ist.

2. - Moreras assoziiertes System (A) totaler Differentialgleichungen. Unbeschränkte Integrabilität.

Wie im trivialen Falle, wo zyklische Koordinaten vorkommen, benutzen wir die (von $H = E$ verschiedenen) bekannten Integrale, um das gegebene System (1) in drei Gruppen zu spalten. Seine m ersten Gleichungen ersetzen wir durch die Integrale (3), d.h. in aufgelöster Form,

$$p_\alpha = f_\alpha(p_{m+1}, \ldots, p_n \,|\, q \,|\, c) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m). \tag{1a}$$

Diese endliche Gleichungen bilden die erste Gruppe. Die zweite wird auch hier aus den $2(n - m)$ Gleichungen (1) bestehen, den Werten $h = m+1, \ldots, n$ entsprechend. Wir werden sie schreiben

$$dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,dt\,, \qquad dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,dt \qquad (i = m+1, \ldots, n). \tag{1b}$$

Die dritte Gruppe muß natürlich die übrigen m Gleichungen umfassen, und ist somit

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m). \tag{1c}$$

Im Falle der zyklischen Koordinaten hatten wir $p_\alpha = c_\alpha$ und, da die q_α in H nicht vorkommen, war es möglich, das (mit Hilfe von $p_\alpha = c_\alpha$ reduzierte) System (1b) für sich allein zu betrachten.

Auch hier darf man zuerst (1b) mittels (1a) reduzieren und namentlich mit Berücksichtigung von (8) und (1c), (1b) durch

$$
\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{aligned} dp_i &= -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_i}\, dt + \sum_1^m{}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}\, dq_\alpha\,, \\ dq_i &= \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_i}\, dt - \sum_1^m{}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_i}\, dq_\alpha \end{aligned} \right. \qquad (i = m+1, \ldots, n)
$$

ersetzen. Doch dieses, als gewöhnliches Differentialsystem für die Funktionen p_i, q_i der unabhängigen Veränderlichen t angesehen, kann nicht für sich allein zur Bestimmung dieser Unbekannten genügen, weil in ihm auch die m weiteren Unbekannten $q_1, q_2, \ldots, q_m$, sei es direkt, sei es durch ihre Differentiale dq_α, vertreten sind. Um ein wohlbestimmtes gewöhnliches System zu bilden, müßte man (A) zusammen mit (1c) betrachten.

Wenn man aber — und das ist die wichtige von MORERA hervorgehobene Tatsache — *die* q_α *in* (A), nicht als unbekannte Hilfsfunktionen, sondern *mit t als unabhängige Variabeln behandelt, so wird* (A) *ein unbeschränkt integrables totales Differentialsystem für die* p_i, q_i.

Wir werden demnächst die Bedeutung und die bemerkenswerten Folgen dieses Verhaltens dartun. Indessen wollen wir das ausgesprochene Resultat beweisen. Dafür genügt es, zu beachten, daß (4) und (5) gerade die Bedingungen für die vollständige Integrabilität von (A) ausmachen, wie eine direkte Verifikation (Bildung der sog. bilinearen Kovarianten) leicht erkennen ließe.

Jedoch kommt man vielleicht bequemer zum Ziel, indem man neben (A) das konjugierte System von partiellen Differentialgleichungen

$$
\text{(10)} \qquad \frac{\partial F}{\partial t} + \{\mathfrak{H}, F\} = 0\,,
$$

$$
\text{(11)} \qquad \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} - \{f_\alpha, F\} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)
$$

in Betracht zieht, welches bekanntlich die von (A) zugelassenen Integrale

$$
F(p_{m+1}, \ldots, p_n \,|\, q \,|\, t) = \text{const.}
$$

definiert. Ist dieses System vollständig, so ist (A) unbeschränkt integrabel. Nun sind die Bedingungen, damit die Gleichungen (11) ein Jacobisches System bilden,

$$
\frac{\partial}{\partial q_\beta}\{f_\alpha, F\} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\{f_\beta, F\} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m),
$$

d.h. in dem man die Derivationen ausführt und (11) benutzt,

$$\left\{\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_\beta}-\frac{\partial f_\beta}{\partial q_\alpha}, F\right\}+\{f_\alpha,\{f_\beta, F\}\}-\{f_\beta,\{f_\alpha, F\}\}=0 .$$

Die zwei letzten Glieder lassen sich durch die Poissonsche Identität umformen, und so bekommt man

$$\left\{\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_\beta}-\frac{\partial f_\beta}{\partial q_\alpha}+\{f_\alpha, f_\beta\}, F\right\}=0 ,$$

die vermöge (4″) identisch erfüllt sind.

In ganz ähnlicher Weise erkennt man, daß, wenn die Gleichung (10) hinzutritt, die Bedingungen, damit sie mit jeder der (11) in Involution steht, wegen (5″) identisch befriedigt sind.

Wenn man das Integral (2) mit Hilfe von (3) reduziert, so bekommt man gemäß (6)

$$\mathfrak{H}(p_{m+1}, \ldots, p_n | q | c) = E , \tag{2'}$$

was selbstverständlich ein Integral des gewöhnlichen (reduzierten) Systems (1b), (1c) wird. Es verlohnt aber der Mühe hervorzuheben, daß (2′) auch als Integral des totalen Systems (A) angesehen werden darf.

Die formale Bestätigung folgt unmittelbar aus (10) und (11), welche zusammen die Bedingungen ausmachen, damit F einem Integral entspricht. Für $F=\mathfrak{H}$ wird (10) identisch befriedigt (insofern $\mathfrak{H}$ die Zeit nicht explizit enthält), und die Gleichungen (11) sind auch erfüllt, weil sie mit (5″) übereinstimmen.

3. - Bedeutung und Gebrauch des Hilfsystems (A). Liescher Reduktionssatz als Korollar.

Im Systeme (A) sind die $2(n-m)$ Größen p_i, q_i $(i=m+1, \ldots, n)$ als unbekannte Funktionen der $m+1$ unabhängigen Veränderlichen t, $q_1, q_2, \ldots, q_m$ aufzufassen. Die Bestimmung derselben kann wegen der unbeschränkten Integrabilität auf die Integration eines gewöhnlichen Differentialsystems vom Range $2(n-m)$ zurückgeführt werden.

Dies läßt sich am besten veranschaulichen, indem man einerseits die Werte der p_i, q_i als Punkte P eines (reduzierten) Phasenraumes Ψ von $2(n-m)$ Dimensionen, und andererseits die Werte der $m+1$ unabhängigen Veränderlichen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ als Punkte Q in einem (ebenfalls euklidischen) Raum Σ deutet.

Es seien dann zwei Punkte Q_0, Q_1 (im Regularitätsgebiet) willkürlich gewählt und irgendeine Linie l, die sie verbindet.

Die Punkte Q_l der Linie l können den Werten eines Parameters λ (wenn man will im Intervalle $0 \mapsto 1$) zugeordnet werden, so daß längs l der Punkt Q_l und somit $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ bestimmte Funktionen von λ werden. Das System (A), in dem vorläufig die Veränderlichkeit der Argumente $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ auf die Linie l beschränkt wird, erscheint dann als gewöhnliches Differentialsystem für die Funktionen p_i, q_i der einzigen unabhängigen Variable λ, und zwar, wenn man setzt

$$K(p_{m+1}, \ldots, p_n | q_{m+1} \ldots, q_n | \lambda) = \mathfrak{H} \frac{dt}{d\lambda} - \sum_1^m{}_\alpha f_\alpha \frac{dq_\alpha}{d\lambda}, \tag{12}$$

als das kanonische System

$$\frac{dp_i}{d\lambda} = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{d\lambda} = \frac{\partial K}{\partial p_i} \qquad (i = m+1, \ldots, n). \tag{13}$$

Seine Integration liefert die Funktionen $p_i(\lambda)$, $q_i(\lambda)$, sobald ihre Anfangswerte p_i^0, q_i^0 in Q_0 gegeben sind.

In geometrischer Einkleidung, d.h. mit Hilfe des Bildpunktes P der p_i, q_i in Ψ, können wir sagen, daß (13) eine wohlbestimmte Funktion

$$P(Q_l | P_0)$$

des Punktes Q_l auf l definiert. Insbesondere werden die Werte der p, q in Q durch

$$P = P(Q | P_0) \tag{14}$$

oder in gemischter Schreibweise durch

$$\begin{cases} p_i = p_i(t, q_1, q_2, \ldots, q_m | P_0), \\ q_i = q_i(t, q_1, q_2, \ldots, q_m | P_0) \end{cases} \tag{14'}$$

dargestellt. Ihrer Entstehung nach mögen diese Werte von der Wahl der Linie l abhängig sein. Die unbeschränkte Integrabilität von (A) ist aber mit der Tatsache gleichbedeutend, daß die Endwerte in Q von besonderem Wege (der Q_0 mit Q verbindet) *nicht* abhängen.

Der Punkt P oder die p_i, q_i können somit als eigentliche Funktionen des Endpunktes Q angesehen werden, und dieses Q — vergessen wir nicht — war nach Belieben wählbar in Σ. Die so gewonnenen Funktionen p_i, q_i werden, wie gesagt, durch ihre Anfangswerte (in Q_0) eindeutig bestimmt, und bilden, das ist die Hauptsache, das allgemeine Integral des totalen Differentialsystems (A) ([13]).

Um dem ursprünglichen Systeme Genüge zu leisten, muß man zusammen mit (A) auch (1c) berücksichtigen, d.h. $q_1, q_2, \ldots, q_m$ nicht mehr als unabhängige Veränderliche betrachten, sondern als diejenigen Funktionen von t, die durch

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{1c}$$

definiert sind. Indem man dieses System dem (A) beifügt, können in den rechten Seiten die p, q durch ihre Ausdrücke (14′) ersetzt werden, und selbstverständlich die p_α durch f_α gemäß (1a). Es wird dadurch ein System $m$ten Ranges in den unbekannten Funktionen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ von t. Nach deren Bestimmung besitzt man ohne weiteres, durch Einsetzung in (14), auch die Integralausdrücke der p_i, q_i. Die Integration des ursprünglichen kanonischen Systems (1) ist somit wesentlich auf diejenige von (A) oder von (13) zurückgeführt, welchem nachträglich noch die Integration vom reduzierten System (1c), also eine Operation $m-1$-ten Ranges (wegen der Kenntnis des Integrals (2′)) hinzuzufügen ist. In dieser Hinsicht wäre es nicht überflüssig zu bemerken, daß bei Anwendung der Jacobischen Integrationsmethode auf (13), der letzte Schritt (Integration vom reduzierten System (1c)) sich auf eine einzige Quadratur zurückführen läßt.

Im Grunde genommen ist also nur (13) maßgebend, und hierin liegt der Beweis von Morera des Lieschen Satzes: die Kenntnis von m *involutorischen* Integralen gestattet eine Erniedrigung des Ranges des zu integrierenden Systems um $2m$ Einheiten, während im allgemeinen die Erniedrigung nur m Einheiten beträgt.

4. - Das von $\mathfrak{B} = E$ begrenzte Volumen W in Ψ. Invarianz gegenüber (A).

Wenn die Fläche

$$\mathfrak{H} = E \tag{2'}$$

im reduzierten Phasenraume Ψ (der $2(n-m)$ Argumente p_i, q_i) ge-

([14]) Für eingehende Behandlung seien etwa meine *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Cap. II (Roma, Stock, 1925) erwähnt (deutsche Übersetzung, Springer, 1928).

schlossen ausfallen, so ist das in einer von ihnen enthaltene Volumen

$$W(E|c) \tag{15}$$

endlich und wohlbestimmt.

Da die Funktion $\mathfrak{H}$, außer den Koordinaten p_i, q_i $(i > m)$ noch die $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und die c enthält, so wäre es wohl denkbar, daß das Volumen W nicht nur von den Konstanten E und c, sondern auch von $q_1, q_2, \ldots, q_m$ abhinge. Das ist aber nicht der Fall: W ist eine Integralinvariante von (A) und deshalb von den q unabhängig: aus demseben Grunde ist W auch von t unabhängig; das ist aber direkt in seiner Definition enthalten, als Volumen einer Fläche, in deren Gleichung, $\mathfrak{H} = E$, t nicht vorkommt.

Die ausgesprochene Eigenschaft von W, gegenüber (A) invariant zu sein, läßt sich sehr leicht durch Zusammenstellung folgender, Umstände beweisen:

1.) Da (A) für irgendeine Integrationslinie l in Σ auf ein kanonisches System (13) reduziert, so ist das Volumen des Gebietes C, welches aus irgendeinem Anfangsgebiete C_0 in Ψ hervorgeht, eine Integralinvariante von (A).

2.) Für die Anfangswerte $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_m^0$ der q_α nehme man als Anfangsgebiet C_0 im Phasenraume Ψ dasjenige, welches von

$$\mathfrak{H}(p_{m+1}, \ldots, p_n | q_{m+1}, \ldots, q_n | q_1^0, q_2^0, \ldots, q_m^0 | c) = E$$

begrenzt wird.

Da $\mathfrak{H} = E$ Integral von (A) ist, für irgendwelche Werte $q_1, q_2, \ldots, q_m$ der q, werden diese Werte dem C_0 das Gebiet C zuordnen, welches von der entsprechenden Fläche

$$\mathfrak{H}(p_{m+1}, \ldots, p_n | q_{m+1}, \ldots, q_n | q_1, q_2, \ldots, q_m | c) = E$$

begrenzt wird.

Gemäß 1. ist somit das Volumen W invariant.

5. - *W* als adiabatische Invariante.

Jetzt endlich können wir mit Vorteil das Voıkommen von adiabatischen Parametern a im ursprünglichen System (1) zulassen.

Wir werden zum wichtigen Schluß gelangen, daß W auch eine adiabatische Invariante ist.

In dieser Absicht betrachten wir zuerst das Hilfssystem (13), indem wir darin $\lambda = t$ setzen und die $q_1, q_2, \ldots, q_m$ als sehr langsam veränderlich ansehen, und zwar so langsam, daß auch sie neben den a und den Integrationskonstanten c die Rolle von adiabatischen Parametern spielen. Unter diesen Voraussetzungen ergibt (12) für die charakteristische Funktion K des kanonischen Systems (13) die vereinfachte Form

$$K = \mathfrak{H}(p_{m+1}, \ldots, p_n | q | c | a) .$$

Das in Frage kommende System ist somit

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_i} \qquad (i = m+1, \ldots, n), \tag{13'}$$

wo, in $\mathfrak{H}$, mit den a und den c, auch die $q_1, q_2, \ldots, q_m$ als adiabatische Parameter auftreten.

Auf dieses System kann ohne weiteres das fundamentale Theorem von GIBBS-HERTZ angewandt werden, woraus folgt, daß dem Volumen W die adiabatische Invarianz gegenüber (13′) zukommt.

Der nächste Schritt ist jetzt der Übergang von (13′) zu (A). Wie wird sich die Funktion $W(E|c|a)$ ändern, wenn im totalen Differentialsystem (A), die E, a und c sich adiabatisch verhalten, dagegen die $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und t, längs eines willkürlichen Weges l (vgl. § 3) in ihrem Bildraume Σ variieren?

Die Antwort wird sich von selbst darbieten, wenn man die unbeschränkte Integrabilität von (A) (bei festgehaltenen Parametern a und c) berücksichtigt. Dieser Umstand erlaubt uns, welches auch die Kurve l sei, sie durch eine l^* zwischen denselben Endpunkten zu ersetzen, die immer so schwach gegen die t-Achse geneigt ist, daß, längs l^*, die q_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, m$) sehr langsam veränderliche Funktionen der Zeit werden: man kann z.B., wenn Q_0 und Q_1 die Endpunkte von l sind, die Parallelen (im euklidischen Raume Σ) zur t-Achse aus Q_0 und Q_1 gezogen denken und in dem von ihnen erzeugten Streifen einen dritten Punkt X in sehr großer Entfernung wählen; dann ist der Streckenzug Q_0X, XQ_1 eine spezielle Verwirklichung von l^*.

Nun muß man, um die adiabatische Invarianz einer Relation zwischen E, a, c festzustellen, nach den vorigen Vorlesungen sich auf statistische Gesetze stützen, die sich auf das betreffende Differentialsystem bei festgehaltenen Parametern beziehen.

Das gilt natürlich auch dann, wenn es sich allgemeiner um das totale Differentialsystem (A) handelt. Wir haben aber soeben gezeigt, daß (A) sich dabei verhält wie das gewöhnliche kanonische System (13′), wo man die $q_1, q_2, \ldots, q_m$ als weitere adiabatische Parameter ansieht. Gegenüber (13′) ist W eine adiabatische Invariante: daher besitzt sie dieselbe Eigenschaft auch gegenüber (A); also im besonderen (wenn man in (A) die q_α nicht von t unabhängig, sondern durch (1c) verbunden denkt) gegenüber dem ursprünglichen System (1), w.z.b.w.

Anscheinend spielt bei der Bildung von W die Wahl der Argumente $p_1, p_2, \ldots, p_m$, in bezug auf welche die m Gleichungen

$$F_\alpha = c_\alpha \tag{3}$$

aufgelöst worden sind, eine wesentliche Rolle. Von dieser Wahl hängt namentlich der reduzierte $2(n-m)$-dimensionale Phasenraum Ψ ab, in welchem W sich als Volumen kennzeichnen läßt. Die Sache liegt jedoch anders: man bekommt nämlich immer dieselbe Invariante, wie man auch zu einer aufgelösten Form

$$p_\gamma = f_\gamma \tag{3′}$$

übergeht. Um dies einzusehen, bedenke man zuerst, daß, gemäß der in § 7 der vorigen Vorlesung angeführten kanonischen Transformation es gestattet ist, die $F_1, F_2, \ldots, F_m$ selbst als kanonische Argumente $P_1, P_2, \ldots, P_m$ anzusehen. Die zugehörige Bestimmung von W heiße man vorläufig W^*. Wir behaupten, daß irgendeiner aufgelösten Form (3′) ein W zukommt, welcher notwendigerweise mit W^* zusammenfällt. In der Tat befriedigt die soeben erwähnte kanonische Transformation eine Identität der Form

$$\sum_1^n{}_h P_h dQ_h = \sum_1^m{}_h p_h dq_h + d\Omega ,$$

wo $d\Omega$ ein exaktes Differential bezeichnet. Wenn man insbesondere die Gleichungen (3′) berücksichtigt, d.h. in den Veränderlichen (P, Q), $P_\alpha = c_\alpha$, so darf man auch schreiben

$$\sum_{m+1}^n{}_i P_i dQ_i = \sum_{m+1}^n{}_i p_i dq_i + d\Omega_1 - \sum_1^m{}_\alpha f_\alpha dq_\alpha ,$$

wo $\Omega_1 = \Omega - \sum_1^m{}_\alpha c_\alpha Q_\alpha$. Betrachtet man außerdem in dieser Formel die $q_1, q_2, \ldots, q_m$ als (irgendwelche) Funktionen eines Parameters λ, so definiert sie eine kanonische Transformation zwischen den $2(n-m)$ p_i, q_i $(i > m)$ und den ebenso vielen P_i, Q_i: sie erhält die kanonische Form, *nicht* aber die charakteristische Funktion. Das uns interessierende System

$$\frac{dP_i}{d\lambda} = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \qquad \frac{dQ_i}{d\lambda} = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \qquad (i = m+1, \dots, n)$$

wird speziell in (13) umgewandelt. Andererseits ist die Transformation volumstreu, d.h. sie überführt jedes Gebiet des (P, Q) Raumes in ein Gebiet des Phasenraumes Ψ, welches dasselbe Volumen (im euklidischen Maße) besitzt. Es folgt somit unter anderem $W = W^*$, w.z.b.w.

6. - Bemerkung über die Bahnkurven des vorgegebenen Systems (1).

Setzt man aus Symmetriegründen, die gleich erhellen werden,

$$H' = F_0, \qquad E = c_0, \tag{16}$$

so hat man die $m+1$ Integrale (2), (3) unter der gemeinsamen Form

$$F_\alpha = c_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, m) \tag{17}$$

und kann die Bedingungen (4), (5), welche resp. die involutorische und die Integraleigenschaft der F_α $(\alpha = 1, 2, \dots, m)$ ausdrücken, in die einzige Formel zusammenfassen

$$(F_\alpha, F_\beta) = 0 \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, m)\,. \tag{18}$$

Desgleichen nimmt die Bedingung $(H', F) = 0$, damit eine von t freie Funktion $F(p\,|\,q)$ ein Integral von (1) erzeugt, die Form an

$$(F_0, F) = 0\,.$$

Wegen (18) darf man mit ihr ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit der Lösung die m weiteren Bedingungen

$$(F_\alpha, F) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, m)$$

in Betracht ziehen. Es ist somit berechtigt, das wegen (18) Jacobische System

$$(F_\alpha, F) = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, m) \tag{19}$$

als charakteristisch für die von t freien Integrale, d.h. für die Bahnkurven des kanonischen Systems (1) anzusehen.

Die Gleichungen (19) sind offenbar vollkommen symmetrisch in bezug auf die $m+1$ F_α $(\alpha = 0, 1, 2, \dots, m)$, die ihrerseits in den Bedingungsgleichungen (18) vollkommen symmetrisch auftreten.

Daher darf man mit gleichem Rechte die Gleichungen (19) auf jedes der $m+1$ kanonischen Systeme

$$\frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial F_\mu}{dq_h}, \qquad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial F_\mu}{\partial p_h} \qquad (h = m+1, \dots, n) \tag{20}$$

(wo μ eine beliebige aber feste ganze Zahl zwischen 0 und m bezeichnet) beziehen. Für $\mu = 0$ ist man natürlich auf (1) zurückgeführt. Für die übrigen m Werte von μ sind durch die Gleichungen (20) verschiedene kanonische Systeme dargestellt, die aber alle dieselben Bahnkurven besitzen.

Da für die endgültige Definition von adiabatischen Invarianten zwar die Bahnen, nicht aber die zeitlichen Beschaffenheiten Einfluß ausüben, so können wir behaupten, daß allen Systemen (20) mit denselben Bahnen auch dieselben adiabatischen Invarianten zukommen.

7. - Auftreten von m weiteren adiabatischen Invarianten.

Kurz vorher haben wir erkannt, daß das von der Fläche

$$\mathfrak{H} = E$$

in einem durch die übrigen Integrale reduzierten $2(n-m)$-dimensionalen Phasenraume Ψ begrenzte Volumen W eine adiabatische Invariante ist.

Dieses Resultat kann man auch so aussprechen: Man betrachte im ursprünglichen $2n$-dimensionalen Phasenraume (aller p und q) die $2n-(m+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit I

$$F_\alpha = c_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, m),$$

mit der Voraussetzung, daß sie ganz im Endlichen liegt.

Sind dabei die m Gleichungen

$$F_\alpha = c_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, m)$$

in bezug auf $p_1, p_2, \ldots, p_m$ unabhängig und verhalten sich außerdem die Bahnkurven von (13′) quasi-ergodisch auf I (für irgendwelche $q_1, q_2, \ldots, q_m$), dann bekommt man im von I in Ψ begrenzten Volumen W eine adiabatische Invariante.

Vertauscht man nun in diesem Sinne F_0 mit F_μ, selbstverständlich unter Berücksichtigung der daraus folgenden Modifikationen der Vorbedingungen, *so erhält man ebenso viele* $2(n-m)$*-dimensionale Volumina* W_μ *als adiabatische Invarianten.* Diese werden im allgemeinen unabhängig sowohl untereinander als auch vom ursprünglichen W, welches aus ersichtlichen Symmetriegründen ebenfalls mit W_0 zu bezeichnen ist.

Wir haben somit den bedeutenden Schluß gewonnen, daß *kanonische Systeme der Imprimitivitätsordnung* $m+1$, *falls die zugelassenen Integrale paarweise in Involution liegen* (und passende qualitative Vorbedingungen befriedigt sind), *gerade* $m+1$ *adiabatische Invarianten zulassen, deren Bestimmung nur endliche Operationen und je eine* $2(n-m)$*-fache Quadratur erfordert.*

8. - Der Stäckelsche Fall.

Ist $m+1=n$, so haben wir die wesentlich von LIOUVILLE untersuchten Probleme, von denen die Hälfte der Integrale bekannt sind; die vollständige Integration läßt sich dann auf eine einzige Quadratur zurückführen ([15]).

Nach dem vorigen besitzen alle diese Systeme (unter passendem qualitativen Verhalten) gerade n adiabatische Integrale.

Besonders bemerkenswert für die Anwendungen auf die Atomdynamik ([16]) hat sich der von STÄCKEL entdeckte Typus gezeigt, in dem die Variabeln separierbar sind.

Der Stäckelsche Fall mit einer Wahl der Indizes, die sich vortrefflich unserem Zwecke anfügt, läßt sich folgendermaßen charakterisieren:

Es seien die n Variabeln q durch

$$q_0\,, \quad q_1\,, \quad \ldots, \quad q_{n-1}$$

bezeichnet. Es seien ferner n^2 Funktionen derselben $\varphi_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots n-1$) vorgelegt, von der Art, daß jedes $\varphi_{\alpha\beta}$ eine Funktion von q_β allein

([15]) LEVI-CIVITA und AMALDI, loc. cit. ([1]), B. $(\mathrm{II})_2$; S. 380-385.

([16]) Vgl. etwa A. SOMMERFELD: *Atombau und Spektrallinien* 4. Auflage, Braunschweig, Vieweg, 1924, Zusatz 8, oder M. BORN: *Vorlesungen über Atomdynamik* (Berlin, Springer, 1925), S. 113.

ist und außerdem

$$\varphi_{\beta\beta} \neq 0 . \tag{21}$$

Auch die Determinante

$$\varphi = \|\varphi_{\alpha\beta}\|$$

sei von Null verschieden, so daß jedem $\varphi_{\alpha\beta}$ sein reziprokes Element $\varphi^{\alpha\beta}$ (nämlich das durch den Wert der Determinante φ dividierte algebraische Komplement von $\varphi_{\alpha\beta}$) sich zuordnen läßt.

In symmetrischer Schreibweise können als Stäckelsche Systeme diejenigen bezeichnet werden, für welche insgesamt die n in den p quadratischen Integrale (eines, nach Belieben, wird die Rolle der charakteristischen Funktion spielen) bestehen [17]:

$$F_\alpha = \sum_0^{n-1}{}_\beta\, \varphi^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}p_\beta^2 - U_\beta\right) \qquad (\alpha = 0,\, 1, \dots n-1), \tag{22}$$

wo auch die U_β Funktionen eines einzigen Argumentes, und zwar von q_β bezeichnen.

Um zu rechtfertigen, daß, welches auch unter den n F als charakteristische Funktion angesehen wird, die Bedingungen (3) und (4) befriedigt sind, hat man nach § 6 bloß die involutorischen Beziehungen aller n Funktionen festzustellen, d.h. die Identitäten

$$(F_\alpha, F_\beta) = 0 \qquad (\alpha, \beta, = 0,1 \dots, n-1). \tag{23}$$

Man kann aber die Berechnung der Poissonschen Klammerausdrücke vermeiden, indem man neben (22) auch die sich daraus ergebenden Werte der p^2 schreibt, nämlich

$$\frac{1}{2}p_\mu^2 = U_\mu + \sum_0^{n-1}{}_\alpha\, c_\alpha \varphi_{\alpha\mu} \qquad (\mu = 0,\, 1, \dots,\, n-1). \tag{22'}$$

Die zweiten Glieder sind gemäß den Voraussetzungen Funktionen von q_μ allein, so daß, wenn man sie mit $\frac{1}{2}f_\mu^2$ bezeichnet, die Resolventen von (22) lauten

$$p_\mu = f_\mu .$$

Da die f_μ nur von q_μ abhängen, so hat man offenbar

$$(p_\gamma - f_\gamma,\; p_\delta - f_\delta) = 0 \qquad (\gamma, \delta = 0,\, 1, \dots,\, n-1).$$

---

[17] LEVI-CIVITA und AMALDI, « ibidem », S. 420-423.

Nun lassen sich wegen (7), die Poissonschen Klammersymbole (F_α, F_β) linear und homogen durch diejenigen der aufgelösten Ausdrücke $p_\gamma - f_\gamma$ zusammensetzen. Man hat daher (23), w.z.b.w.

Jetzt können wir die vorangehende Theorie der adiabatischen Invarianten anwenden. Sehr rasch werden wir erkennen, daß die qualitativen Vorbedingungen genau mit den üblichen der bedingt-periodischen Bewegungen übereinstimmen und gleichzeitig zur expliziten Form der n adiabatischen Invarianten gelangen.

In der Tat sei etwa $\mu = 0$ gesetzt; dann ist F_0 als charakteristische Funktion anzusehen; $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ spielen die Rolle von Integralen. Die Gleichungen

$$F_\alpha = c_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{24}$$

müssen in bezug auf $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ auflösbar sein. Das ist gewiß der Fall, weil gemäß (22) die Koeffizienten der Größen $\frac{1}{2}p_1^2, \frac{1}{2}p_2^2, \ldots, \frac{1}{2}p_{n-1}^2$ in F_α, $\varphi^{\alpha 1}, \varphi^{\alpha 2}, \ldots, \varphi^{\alpha(n-1)}$ sind. Die entsprechende Determinante ($n-1$-ter Ordnung) hat somit den Wert

$$\varphi\varphi_{00},$$

kann also wegen (21) nicht verschwinden.

Die Werte von $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, die sich aus der Auflösung der Gleichungen (24) ergeben, sind in F_0 einzuführen. So bekommt man, was dem reduzierten $\mathfrak{H}$ entspricht. Der reduzierte $2(n-m)$-dimensionale Phasenraum ist gegenwärtig nichts anderes als die Ebene (q_0, p_0), in der wir die Kurve

$$\mathfrak{H} = c_0$$

zu betrachten haben werden. A priori kann $\mathfrak{H}$ auch die übrigen q (d.h. $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$) enthalten. Hier aber findet der merkwürdige Umstand statt, daß $\mathfrak{H}$ nur von p_0, q_0 abhängt. In der Tat, $\mathfrak{H} = c_0$ ist nichts anderes als eine Form der Elimination von $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ zwischen allen Gleichungen (22) (die $n-1$ (24) und die übrige $F_0 = c_0$). Eine andere Form ist aber die erste der Gleichungen (22′), d.h.

$$\frac{1}{2}p_0^2 = U_0 + \sum_0^{n-1}{}_\alpha c_\alpha \varphi_{\alpha 0}. \tag{25}$$

Die Gleichung $\mathfrak{H} = c_0$ muß daher mit (25) übereinstimmen, welche ersichtlich nur q_0 enthält.

Genauer handelt es sich um eine zur q_0-Achse symmetrische Kurve, wie diejenige, der wir im Falle eines einzigen Freiheitsgrades in der vorigen Vorlesung (§ 4) begegnet sind.

Dasselbe Verfahren auf irgendeinen anderen Wert von μ angewandt, führt allgemeiner auf die entsprechende Gleichung (22′), also auf eine Kurve der Ebene q_μ, p_μ, welche in bezug auf die q_μ-Achse symmetrisch liegt.

Nun ist bekanntlich die Bewegung eines Stäckelschen Systems bedingt-periodisch, wenn jedes der rechten Glieder der Gleichungen (22′) zwei einfache Wurzeln q'_μ, q''_μ besitzt (zwischen denen der Anfangswert q^0_μ liegt). Dann entspricht den n Gleichungen (22′) je ein einfaches geschlossenes Oval in der respektiven Ebene q_μ, p_μ.

Die Quasi-Ergodizität der Bahnen in der entsprechenden Ebene ist im trivialen Sinne befriedigt, da die Bahn mit der Integral-Mannigfaltigkeit σ sich genau deckt, wie wir schon in der ersten Vorlesung (am Ende von § 7) hervorgehoben haben.

Da alle hinreichenden qualitativen Vorbedingungen tatsächlich erfüllt sind, liefern die von den einzelnen Ovalen (22′) eingeschlossenen Flächen W_μ also nach § 4 der vorigen Vorlesung die Sommerfeldschen zyklischen Integrale

$$W_\mu = \oint p_\mu \, dq_\mu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

ebenso viele adiabatische Invarianten.

Dieses wichtige Resultat verdankt man BURGERS. Sein erster Beweis ([18]), wie auch diejenigen, die von mehreren Autoren ([19]) nachher vorgeschlagen worden sind, setzt wesentlich voraus, daß die n Perioden (Umlaufszeiten der n Ovale in den einzelnen Ebenen q_μ, p_μ) inkommensurabel sind: sonst entstehen die sogenannten entarteten Bewegungen, deren Erledigung eine ziemlich große Mühe verursacht, da man sie als Grenzfälle behandeln muß. Bei der vorangehenden Methode (die, wie wir gesehen haben, nur ein-dimensionale Ergodizität erfordert) sind solche Schwierigkeiten von selbst verschwunden: sie waren also unwesentlich, wie die Natur der Frage wohl vorahnen ließ.

Die adiabatische Invarianz gestattet interessante Anwendung nicht nur auf die neuere Atomdynamik, woher sie entstanden ist, sondern auch auf ganz klassische astronomische Erscheinungen. Leider kann ich jetzt nicht darauf eingehen und muß mich mit der Andeutung begnügen mit dem Vorbehalt, auf solche Probleme demnächst zurückzukommen.

([18]) « Phil. Mag. », Vol. XXXIII, 1917, pp. 514-520.

([19]) Vgl. etwa BORN, loc. cit. ([16]), S. 109-114; oder auch JUVET, *Mécanique analytique et théorie des quanta* (Paris, Blanchard, 1926), Chap XI et XII.

XXVI.

SUL MASSIMO CIMENTO DINAMICO NEI SISTEMI ELASTICI

« Rend. Seminario mat. e fis. di Milano », vol. II, 1928, pp. 78-109.

1. - Posizione del problema.

Sono ben noti i così detti fenomeni di risonanza. Si tratta delle oscillazioni forzate, relativamente rilevanti, spesso addirittura pericolose, che si destano in un sistema elastico quando esso si muove (per speciali dispositivi, oppure accidentalmente) sotto l'azione di forze periodiche, la cui frequenza (esattamente o in via approssimativa) è una di quelle che si chiamano *proprie*, e può essere assunta dal sistema vibrante, anche senza eccitazione. I diapason e i vari sistemi articolati, tra l'altro ponti e volte, ne costituiscono importanti esempi.

Comunque, quando un corpo elastico vibra, il cimento cui si trova sottoposta la sua coesione è in generale maggiore di quello che esso subirebbe sotto l'azione delle stesse forze in stato di equilibrio. È manifestamente desiderabile di discutere matematicamente un tale aumento di cimento e di valutarlo con formule adatte per gli scopi tecnici.

Io mi permetterò di intrattenervi sopra questo lato della questione, essenzialmente energetico, abbastanza semplice, nonchè, come vedremo, suscettibile di trattazione autonoma e di applicazioni immediate.

Sia S un generico sistema elastico, O la sua configurazione naturale in assenza di forze esterne. Quando invece agiscono forze esterne posizionali, che non oltrepassino i limiti di elasticità, secondo i principi della statica, il sistema ammette una ben determinata configurazione di equilibrio C_s in cui le forze applicate sono equilibrate dalle forze elastiche. La coesione molecolare del sistema subisce allora un cimento statico Ω_s il quale, come si sa, è misurato dal corrispondente lavoro di deformazione: cioè dal lavoro necessario a superare la resistenza delle forze elastiche per portare il sistema (secondo un qualsiasi cammino) dal suo stato naturale O alla sua configurazione di equilibrio C_s.

Questa definizione energetica del cimento è perfettamente soddisfacente dal punto di vista teorico ([1]) e fu bene illustrata dai tecnici: basterà ricordare l'opera del CASTIGLIANO ([2]) sistematicamente dominata da questa nozione.

Va d'altra parte rilevato che nella pratica, soprattutto quale criterio di determinazione dei così detti fattori di sicurezza, sono invalsi altri punti di vista, che prendono norma non dall'energia elastica complessiva, ma da caratteri locali della deformazione o degli sforzi. Secondo alcuni, è la massima dilatazione lineare, secondo altri il massimo sforzo, oppure il rapporto

$$\frac{\text{sforzo di taglio}}{\text{sforzo normale}},$$

che non deve superare un prefissato valore.

Intorno a queste questioni esiste un'ampia letteratura e un materiale di osservazione abbastanza cospicuo ([3]); le varie ipotesi hanno trovato parziale conferma sperimentale, ma si è ancora molto lungi da conclusioni decisive.

In sostanza, io credo che si possa ritenere quanto segue: entro i limiti di validità della classica teoria (lineare) della elasticità si richiede unicamente una misura globale del cimento, e una tale misura è fornita in modo attendibile dal lavoro di deformazione. All'incontro, quando sono in gioco fenomeni di rottura e di plasticità in cui i limiti di elasticità sono certamente superati, un'apprezzamento globale può divenire insufficiente, e si presenta la necessità di fare intervenire caratteristiche locali.

Notiamo ancora una volta in modo esplicito che noi, per evitare tali difficoltà, intendiamo rimanere esclusivamente nell'ambito della ordinaria teoria lineare della elasticità, il che è certo raccomandabile quando si tratta di strutture e costruzioni.

2. - Formulazione matematica.

Le nostre considerazioni abbracceranno sistemi elastici di ogni specie. Sia con un numero finito di gradi di libertà, quali punti materiali con collegamenti elastici (che possono servire come rappresentazione schema-

---

(1) Cfr. le considerazioni luminose del BELTRAMI (*Opere*, t. IV, pp. 180-189).

(2) *Systèmes élastiques*, Torino, Negro, 1879.

(3) Cfr. per es. LOVE, *Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press (4ª ed.), 1927, pp. 121-123; oppure il concettoso articolo della *Enc. der math. Wiss.* (IV. 4, 31) di TH. v. KARMAN (con la collaborazione di L. FÖPPL).

tica delle travature reticolari), sia sistemi continui, quali aste, travi, archi, membrane, piastre, o anche corpi massicci. In realtà noi riferiremo la rappresentazione formale e le deduzioni a sistemi con un numero finito n di gradi di libertà. Siccome però da un lato n rimane indeterminato, e dall'altro (come vedremo) il procedimento concettuale e le conclusioni sono completamente indipendenti da n, così il risultato sarà senz'altro applicabile, con ovvio passaggio al limite, anche a sistemi continui quali si vogliono.

Naturalmente sarebbe anche possibile trattare i sistemi continui ad una, due o tre dimensioni, ciascuno per sè, con gli stessi criteri ma diversa impostazione formale, secondo il numero delle dimensioni e la struttura materiale; oppure anche, come io avevo fatto originariamente [4], prendere addirittura in considerazione il caso generale di un corpo solido elastico, e da questo (seguendo, per così dire, il cammino inverso) effettuare i passaggi al limite che conducono a sistemi con una o due dimensioni trascurabili, ovvero anche a masse discrete con legami elastici.

Ma è preferibile il primo metodo, come si può agevolmente prevedere in base al classico modello dei teoremi generali di Lord RAYLEIGH sulle vibrazioni dei sistemi.

Indichi dunque S un generico sistema materiale, la cui posizione rimanga determinata da n parametri indipendenti o coordinate lagrangiane $q_1, q_2, \ldots, q_n$. La natura elastica del sistema si traduce nell'esistenza di una particolare configurazione O da chiamarsi *naturale*, nella quale il sistema può rimanere in quiete quando sia sottratto all'azione d'ogni forza esterna, e verso la quale esso tende a ritornare se spostato (abbastanza poco). Senza pregiudizio della generalità, possiamo supporre che la configurazione naturale O corrisponda ai valori

$$q_h = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

cioè all'origine delle coordinate nello spazio delle configurazioni.

La circostanza essenziale che il sistema possiede una energia elastica interna che si oppone ad ogni spostamento da O, si traduce notoriamente nel fatto meccanico che le forze elastiche interne (indipendentemente dalla distribuzione locale e dai caratteri specifici con cui si manifestano nei casi singoli) eseguiscono sempre un lavoro *positivo*, quando il sistema ripassa da una generica configurazione C ad O. Se si fa inoltre l'ovvia ipotesi che il sistema sia intrinsecamente conservativo, il suddetto lavoro Ω deve essere necessariamente indipendente dal cammino, ossia (siccome O designa una posizione fissa) una funzione della sola C, cioè delle coordi-

[4] « Nuovo Cimento », (5), vol. II, 1901, pp. 188-196 [in queste « Opere »: vol. secondo, VII, pp. 142-152].

nate $q_1, q_2, \ldots, q_n$, la quale si annulla in O, cioè per $q_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$: in quanto Ω deve essere positiva per ogni C (con la sola esclusione di O) essa si presenta quale funzione delle q, definita-positiva, che in O (cioè per $q_h = 0$) possiede un minimo assoluto eguale allo zero. Le sue derivate prese negativamente

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

definiscono, per ogni sistema di valori delle q, le componenti delle forze elastiche, dovute alla costituzione del sistema. Infatti, se S passa da una configurazione C, che corrisponde a valori generici delle q, ad un'altra configurazione infinitamente vicina C', che corrisponde ai valori $q_h + dq_h$, il lavoro delle forze elastiche da C fino a C', è per quanto precede, rappresentabile mediante la differenza

$$\Omega(q) - \Omega(q + dq) = -\sum_1^n {}_h \frac{\partial \Omega}{\partial q_h} dq_h ,$$

cioè quale somma dei due lavori da C sino ad O e da O fino a C'. Siccome

$$-d\Omega = -\sum_1^n {}_h \frac{\partial \Omega}{\partial q_h} dq_h ,$$

$-\partial \Omega / \partial q_h$ costituisce effettivamente la h^a componente lagrangiana della forza, come abbiamo asserito.

La configurazione naturale O è, come si suppone, una configurazione di equilibrio, anzi (atteso il segno del lavoro da una generica C fino ad O) una posizione di equilibrio *stabile* per S, in assenza di sollecitazione esterna. Perciò le forze elastiche $-\partial \Omega / \partial q_h$ debbono annullarsi in O. Ciò si sarebbe del resto potuto desumere dal fatto analitico che la funzione Ω possiede in O un minimo assoluto. Il suo sviluppo di TAYLOR nell'intorno di O comincia in conformità con termini quadratici, e noi possiamo limitarci (ciò che in questioni di elasticità è nella natura delle cose) ad un intorno abbastanza piccolo di O perchè sieno trascurabili i termini d'ordine superiore al secondo.

È dunque lecito porre semplicemente

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{hk} b_{hk} q_h q_k , \tag{1}$$

cioè risguardare Ω come una forma quadratica definita positiva delle q a coefficienti costanti.

Se agiscono altresì forze esterne, è ancora lecito in prima approssimazione (attesa la piccolezza del campo di valori attorno ad O, cui basta riferirsi) di considerare costanti le loro componenti lagrangiane c_h.

Le chiameremo *carichi*, perchè, nei casi comuni concernenti travi, archi, ecc., esse provengono per lo più da effettivi carichi.

In ogni caso, data la costanza delle c_h (rigorosa, od approssimativa), i carichi vanno considerati come forze conservative derivanti dal potenziale

$$U = \sum_1^n {}_h c_h q_h . \tag{2}$$

3. - Esempio elementare.

Giova fissare l'attenzione sopra un caso particolarmente semplice in cui $n = 1$.

Si pensi per es. ad un unico punto materiale M, su sostegno préstabilito, il quale sia collegato con una posizione determinata O del sostegno da una molla, per modo che esso, se spostato da O, acquista una energia elastica

$$\Omega = \frac{1}{2} e s^2 , \tag{1'}$$

in cui e designa una costante di elasticità, ed s la lunghezza dell'arco OP. Questa s (contata positivamente in uno dei due versi, scelto ad arbitrio) costituisce qui l'unica coordinata lagrangiana. Come carico va considerata un'unica componente tangenziale (costante) c, talchè

$$U = cs . \tag{2'}$$

Un caso anche più particolare, in cui la traiettoria prestabilita si riduce semplicemente alla verticale, è quello di una massa pesante M la quale venga appesa all'estremità inferiore di una molla in modo da poter compiere soltanto oscillazioni verticali. Essa possiede una energia elastica (1') in cui s rappresenta lo spostamento verticale di M contato a partire dalla posizione naturale O dell'estremità inferiore della molla (senza la massa addizionale). Il carico c è qui precisamente il peso di M.

4. - Equilibrio sotto l'azione di carichi. Cimento statico.

Riprendiamo lo schema generale di un sistema S con n gradi di libertà, e occupiamoci da prima, brevemente, della statica.

Sotto l'azione degli assegnati carichi il sistema S potrà stare in equilibrio, non più in O, ma in una diversa configurazione C_s in cui i carichi sono annullati dalle forze elastiche. Le condizioni all'uopo necessarie sono compendiate nel principio dei lavori virtuali, a norma del quale il lavoro virtuale complessivo delle forze esterne ed interne

$$\delta U - \delta \Omega$$

deve essere eguale a 0, allorchè si passa dalla configurazione di equilibrio C_s ad una generica altra configurazione infinitamente vicina C. L'equazione

$$\delta(\Omega - U) = 0 \tag{3}$$

dà immediatamente (in quanto gli spostamenti elementari sono arbitrari)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_h} = \frac{\partial U}{\partial q_h} = c_h \qquad (h = 1, 2, ..., n), \tag{3'}$$

e queste n equazioni lineari nelle q determinano le q stesse, cioè C_s, univocamente. Per riconoscerlo, basta osservare che il determinante del sistema (3′) non è altro, in virtù della (1), che il discriminante della forma quadratica Ω, il quale non può annullarsi perchè Ω è definita positiva e quindi, in particolare, irriducibile.

La condizione di equilibrio (3) esprime manifestamente la circostanza analitica che la funzione $\Omega - U$ ha un estremo in C. Si è naturalmente tratti a pensare che, come nel caso particolare in cui sia $U = 0$, la configurazione naturale porge un minimo effettivo per la funzione Ω, così lo stesso accada per la funzione $\Omega - U$ nella configurazione di equilibrio forzato C_s. Infatti, attesa la linearità di U, il suo secondo differenziale si annulla, cosicchè

$$\delta^2(\Omega - U) = \delta^2 \Omega > 0 ,$$

purchè soltanto non tutte le δq_h si annullino contemporaneamente. Questa disuguaglianza, assieme con la (3), garantisce il minimo di $\Omega - U$.

Allorchè sussiste l'equilibrio sotto l'azione dei carichi in C_s, il nostro sistema S subisce, a norma della definizione di Ω, il cimento statico Ω_s, in cui Ω_s designa manifestamente il valore di Ω, in C_s. Fra Ω_s e la corrispondente energia esterna posizionale U_s dei carichi sussiste la relazione notevole

$$2\Omega_s = U_s , \tag{4}$$

la quale può essere immediatamente desunta dalla condizione di equilibrio (3). Basta infatti nella (3) scrivere q_h al posto di δq_h (il che è certamente lecito, attesa l'arbitrarietà delle δq) per ottenere precisamente la (4), purchè si abbia riguardo al teorema di EULERO sulle funzioni omogenee.

Si ha così l'enunciato: *il minimo valore che può assumere la differenza* $\Omega - U$ è $-\Omega_s$.

5. - Cimento dinamico che può essere raggiunto a partire da assegnate condizioni iniziali. Definizione di un limite superiore. Caso banale in cui manca la sollecitazione.

Ed eccoci al vero scopo di questa conferenza, cioè all'indagine del cimento elastico in condizioni dinamiche.

Pel momento prenderemo esclusivamente in considerazione movimenti che si compiono sotto la sola azione delle forze elastiche e dei carichi, a partire da condizioni iniziali qualsivogliano. Ci occuperemo in seguito anche dei casi in cui intervengono forze d'altra natura, in particolare resistenze passive, ovvero perturbazioni ritmiche (forze periodiche) il che è particolarmente interessante, in quanto, come è ben noto, sono appunto queste che espongono, in certe contingenze, a cimenti pericolosi. Riferiamoci intanto al caso più semplice pel quale si può raggiungere una limitazione più precisa.

Si tratterà dunque di carichi addizionali, e di eventuali perturbazioni momentanee (quali impulsi ed urti), che destano vibrazioni elastiche del sistema, con o senza carichi addizionali.

Fra le condizioni iniziali del sistema una sola ha per noi importanza, e precisamente l'elemento globale costituito dalla energia totale E, la quale compete al sistema (nell'istante iniziale e quindi anche per tutta la durata del moto). Una tale E, pel nostro sistema S, consta di tre parti: energia elastica, ossia lavoro di deformazione Ω; energia posizionale (la quale dipende dalla quota dei carichi) U; energia cinetica o forza viva $\mathcal{G}$, la quale è una forma quadratica definita positiva delle velocità $\dot{q}_h = dq_h/dt$ e quindi possiede l'espressione

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \sum_{hk}^{n} {}_{1} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k , \tag{5}$$

in cui le a_{hk} vanno risguardate in generale quali funzioni delle q. In accordo con la precedente ipotesi che i fenomeni elastici, di cui si tratta, si svolgono in un campo ristretto intorno alla configurazione naturale O, sarebbe altresì lecito di risguardare i coefficienti a_{hk} quali costanti: ma noi non avremo bisogno di questa ulteriore semplificazione.

Il movimento del sistema è retto dalle equazioni lagrangiane. Il nostro compito, a rigore, sarebbe di caratterizzare il massimo valore Ω^* che l'energia elastica assume effettivamente nel corso del moto. Finchè si tratta di sistemi con un numero finito di gradi di libertà, il problema sarebbe risolubile in modo ben noto, per quanto con formole complicate; comunque il risultato non servirebbe per i casi tecnicamente importanti, concernenti sistemi continui.

Fortunatamente, dal punto di vista pratico, non ha interesse di determinare proprio Ω^* nella sua dipendenza precisa dalle condizioni iniziali; ma è molto più vantaggioso di assegnare con mezzi semplici un limite che Ω non possa mai superare. Ciò effettivamente riesce in modo elementare avendo unicamente riguardo all'integrale delle forze vive

$$\mathcal{G} + \Omega - U = E \,, \tag{6}$$

e determinando il massimo Ω_d di Ω che è compatibile con tale equazione. Manifestamente deve essere

$$\Omega^* \leqslant \Omega_d \,,$$

in quanto Ω^* è vincolato non soltanto dalla (6), ma anche da tutte le altre equazioni del moto. Prima di procedere alla determinazione di Ω_d, conviene osservare che, ogni qualvolta si tratta di effettivo movimento (non di quiete) del nostro sistema, sussiste la disuguaglianza

$$E > -\Omega_s \,. \tag{7}$$

Infatti la costante E (in ogni istante, e in particolare inizialmente) vale $\mathcal{G} + \Omega - U$; $\mathcal{G}$, quale forza viva, non può mai essere negativa, e il secondo addendo $\Omega - U$ possiede, come s'è visto nel precedente paragrafo, un minimo assoluto nella posizione di equilibrio C_s, cioè a norma della (4),

$$\Omega_s - U_s = -\Omega_s \,.$$

In quanto noi escludiamo precisamente tale stato di equilibrio sarà inizialmente $\mathcal{G} > 0$, ovvero, per $\mathcal{G} = 0$, la posizione del sistema diversa da C_s, cosicchè la (7) è certo soddisfatta.

Per quanto concerne la effettiva determinazione di Ω_d ci troviamo ricondotti ad un ordinario problema di calcolo differenziale. Si hanno $2n$ variabili: le n coordinate q e le n velocità $\dot{q}$, le quali sono legate soltanto dalla condizione (6). Si tratta quindi di massimo (relativo) di una funzione $\Omega(q_1, q_2, ..., q_n)$ delle sole q.

Nel caso banale in cui mancano i carichi ($U=0$), il problema è senz'altro esaurito. Infatti l'equazione (6) si riduce allora a

$$\mathcal{G} + \Omega = E$$

in cui $\mathcal{G}$ e Ω sono entrambe $\geqslant 0$. Il valore massimo Ω_d di Ω è raggiunto in conformità per $\mathcal{G}=0$ e vale quindi

$$\Omega_d = E \,. \tag{8}$$

6. - Determinazione di Ω_d nel caso generale ($U \neq 0$). Coefficiente di sicurezza.

Osserviamo anzitutto, a proposito del cercato massimo di Ω, che i valori degli argomenti q, non sono sottoposti ad alcun vincolo unilaterale. Rimangono con ciò esclusi eventuali estremi sul contorno; e debbono necessariamente trovarsi soddisfatte le ordinarie condizioni di stazionarietà. Secondo la nota regola di LAGRANGE, si deve porre

$$\delta(\Omega + \lambda E) = 0 \,, \tag{9}$$

in cui λ designa un moltiplicatore costante, a priori indeterminato; con E si deve intendere il primo membro della (6), e con δ un simbolo di differenziazione che corrisponde ad incrementi (infinitesimi) arbitrari degli argomenti q e $\dot{q}$.

Se si nota che gli argomenti $\dot{q}$ figurano soltanto in E, scende anzitutto dalle (9) e (6)

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{q}_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, ..., n), \tag{10}$$

e quindi, moltiplicando per $\dot{q}_h$ e sommando rispetto ad h da 1 ad n,

$$\lambda \mathcal{G} = 0 \,. \tag{10'}$$

Non può essere $\lambda = 0$, perchè, in virtù della (9), dovrebbe allora annullarsi $\delta\Omega$, il che corrisponde ad un estremo di Ω; e un tale estremo, attesa la definizione (1) di Ω, può essere soltanto un minimo (e precisamente zero); mentre noi stiamo cercando il massimo.

Accertato che deve essere $\lambda \neq 0$, la (10) richiede $\mathcal{G} = 0$. $\mathcal{G}$ è una forma quadratica definita positiva delle $\dot{q}$, la quale può annullarsi soltanto a patto che si annullino tutte le $\dot{q}_h$ $(h = 1, 2, ..., n)$. Ciò implica l'annullarsi di tutte le $\partial\mathcal{G}/\partial\dot{q}_h$, con che effettivamente le condizioni (10) rimangono soddisfatte.

Dobbiamo dunque porre nella (9) $\mathcal{G} = 0$ di guisa che, badando alla (6), tale condizione assume la forma

$$(1 + \lambda)\,\delta\Omega - \lambda\,\delta U = 0\ .$$

Il caso $U = 0$ fu già esaurito in precedenza [confronta formula (8)]; perciò va ritenuto $U \neq 0$. È lecito in conformità dividere l'equazione precedente per $1+\lambda$, in quanto l'ipotesi $1+\lambda = 0$ implicherebbe $\delta U = 0$, e di conseguenza, in virtù della (2), l'annullarsi di ciascun carico c_h, e quindi della stessa U.

La condizione di stazionarietà (9) può così essere scritta

$$\delta\Omega - \mu\,\delta U = 0 \tag{9'}$$

in cui μ sostituisce l'originario moltiplicatore λ, e, come quello, designa una costante (non nulla) da determinarsi a posteriori, in base alla condizione (6) per i valori stazionari.

Siamo ora in grado di illustrare concettualmente il nostro calcolo. All'uopo basta confrontare (9') con (3) per riconoscere che (9') individua una configurazione di equilibrio del nostro sistema, e precisamente quella che corrisponde al carico μU. Ora se nelle equazioni (3) (che sono lineari nelle q) si sostituisce μU in luogo di U, risulta

$$\frac{\partial\Omega}{\partial q_h} = \mu\,\frac{\partial U}{\partial q_h} = \mu c_h\,, \tag{11}$$

di guisa che le quantità q_h da determinarsi (coordinate di questa fittizia configurazione di equilibrio) coincidono con $\mu q_h^{(s)}$: si intende che le $q_h^{(s)}$ designano le coordinate della configurazione di equilibrio C_s, cioè le soluzioni delle (3').

Di qui segue senz'altro

$$\Omega_d = \mu^2\Omega_s\,, \tag{12}$$

$$U_d = \mu U_s\,, \tag{13}$$

in cui d si riferisce ai valori stazionari, s alle condizioni statiche.

In virtù della equazione

$$2\Omega_s = U_s , \tag{4}$$

si ricava dalle (12) e (13)

$$\Omega_d - U_d = (\mu^2 - 2\mu)\Omega_s .$$

La costante μ va determinata in modo che i valori stazionari [$\mathcal{G}_d = 0$, (12) e (13)] verifichino la condizione energetica (6). Ciò richiede, a norma dell'ultima equazione,

$$(\mu^2 - 2\mu)\Omega_s = E . \tag{14}$$

Se si nota ancora una volta che noi escludiamo qui il caso speciale $U = 0$ [già esaurito dalla (8)], è legittimo (in quanto C_s certo non coincide con O) di risguardare Ω_s positivo.

L'equazione che individua μ può così essere scritta

$$(\mu - 1)^2 = 1 + E/\Omega_s . \tag{14'}$$

Il secondo membro, in base alla disuguaglianza (7), è in ogni caso > 0, e l'equazione (14′) ha perciò due radici reali.

Una di esse

$$W = 1 + \sqrt{1 + E/\Omega_s} , \tag{14''}$$

in cui al radicale va attribuito il suo valore aritmetico, è > 1. L'altra all'incontro < 1, e soprattutto le compete un valore assoluto minore.

Ne viene che, per accertare la proprietà di massimo del valore stazionario $\Omega_d = \mu^2\Omega_s$, va presa in considerazione soltanto la determinazione (14″) di μ, in quanto l'altra radice darebbe manifestamente luogo ad un valore più piccolo di Ω_d.

Ciò posto, torniamo col pensiero alla equazione energetica (6) e notiamo da un lato che, in condizioni stazionarie, $\mathcal{G}_d = 0$,

$$\Omega_d - U_d = E ,$$

dall'altro che, in un generico istante t, durante il movimento, si ha

$$\mathcal{G} + \Omega - U = E .$$

Ne viene per sottrazione

$$\Omega_d - \Omega + (U - U_d) = \mathcal{G} . \tag{15}$$

Ora, se si applica lo sviluppo di TAYLOR alla forma quadratica $\Omega(q_1, q_2, ..., q_n)$ nell'intorno dei sistemi di valori $q_h^{(d)}$, si può scrivere

$$\Omega - \Omega_d = \sum_1^n {}_h \left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_h}\right)_d (q_h - q_h^{(d)}) + \Omega'$$

in cui Ω' non è altro che Ω stessa, valutata per i valori $q_h - q_h^{(d)}$, ed è per consequenza $\geqslant 0$.

Badando alle (11), si può introdurre sotto il sommatorio μc_h in luogo di $(\partial\Omega/\partial q_h)_d$, per modo che il sommatorio stesso si riduce a $\mu(U - U_d)$.

Di qui risulta, dividendo per μ,

$$\frac{1}{\mu}(\Omega - \Omega_d) = U - U_d + \Omega'/\mu .$$

Sommando con la (15), si ottiene:

$$\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)(\Omega_d - \Omega) = \mathcal{G} + \Omega'/\mu .$$

Il secondo membro non può mai essere negativo; in causa di $\mu > 1$, il fattore $1 - (1/\mu)$ è indubbiamente positivo. Conciò la precedente equazione mostra che effettivamente sussiste la disuguaglianza

$$\Omega_d - \Omega \geqslant 0 :$$

il segno di uguaglianza vale soltanto quando si ha contemporaneamente $\mathcal{G} = 0$, $\Omega' = 0$ cioè quando, il sistema occupa eventualmente la posizione $q_h^{(d)}$ con velocità nulle.

Risulta così provato con tutto rigore che l'espressione Ω_d costituisce un limite superiore del cimento dinamico ed è altresì giustificato di chiamare coefficiente di sicurezza il μ^2 (> 1), per cui bisogna moltiplicare il cimento statico per ricavarne il limite superiore del cimento dinamico.

7. - Illustrazione del risultato. Esempi.

Se in

$$\Omega_d = \mu^2 \Omega_s$$

si introduce per μ il suo valore (14'')

$$1 + \sqrt{1 + E/\Omega_s} ,$$

Ω_d assume la forma esplicita, per quanto meno espressiva,

$$\Omega_d = 2\Omega_s + E + 2\sqrt{\Omega_s(\Omega_s + E)}\,, \tag{12'}$$

la quale, di fronte alla (12) associata alla (14), presenta il solo vantaggio di non essere sottoposta alla condizione $U \neq 0$, ma di valere anche nel caso limite in cui manchino i carichi, e per conseguenza, $\Omega_s = 0$. Per riconoscerlo basta notare che (12′), per $\Omega_s = 0$, si riduce a

$$\Omega_d = E$$

in accordo con la (8).

Conviene ormai illustrare il risultato con alcuni esempi. Consideriamo in primo luogo il caso frequentemente contemplato in cui i dati carichi (di potenziale U) cominciano ad agire mentre il sistema si trova in quiete nella configurazione naturale. Quando sotto l'azione di questi carichi si fosse nuovamente stabilito l'equilibrio, il sistema S si troverebbe sottoposto al cimento statico Ω_s.

Ma, prima che l'equilibrio venga raggiunto, il sistema oscilla. Le sue condizioni iniziali sono: $\mathcal{G} = 0$, $\Omega = 0$, $U = 0$, con che risulta $E = 0$. Badando alla (14) risulta $\mu = 2$, e se ne trae quale limite superiore del cimento durante il periodo oscillatorio,

$$\Omega_d = 4\Omega_s\,.$$

Il cimento dinamico può quindi divenire quadruplo del corrispondente cimento statico.

D'altra parte è anche facile constatare, riferendosi al caso semplice di un solo grado di libertà, che il limite suaccennato può effettivamente essere raggiunto. Consideriamo perciò le oscillazioni di una molla, dopo che è stato appeso un peso P alla sua estremità inferiore. Se si trascura la massa della molla rispetto a $m = P/g$, dalle

$$\Omega = \frac{1}{2} e s^2\,, \tag{1'}$$

$$U = Ps\,, \tag{2'}$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 \tag{5'}$$

si ricava l'equazione del moto

$$\ddot{s} = -\,\omega^2 s + g$$

in cui per brevità si è scritto ω^2 in luogo di e/m.

Questa equazione ammette la soluzione particolare

$$s = g/\omega^2$$

che corrisponde all'equilibrio nella posizione in cui il peso è compensato dalla forza elastica. La rappresentazione di una generica vibrazione elastica, cioè l'integrale generale, si ottiene aggiungendo alla soluzione particolare g/ω^2 l'integrale della equazione omogenea

$$\ddot{s} = -\omega^2 s \, .$$

Si tratta qui di vibrazioni armoniche attorno ad O con la frequenza $\omega/2\pi$, aventi l'espressione

$$s = r \cos(\omega t + \vartheta_0)$$

in cui r ($\geqslant 0$) e ϑ_0 designano costanti di integrazione. Esse vanno determinate in modo che inizialmente ($t = 0$) regni la quiete in $s = 0$. Da

$$s = r \cos(\omega t + \vartheta_0) + g/\omega^2$$

si ricava così

$$s = \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos \omega t) \, ,$$

e la massima deviazione dalla posizione di equilibrio vale

$$2g/\omega^2$$

(per $\omega t =$ ad un multiplo dispari di π). Siccome il cimento $\Omega = \frac{1}{2} e s^2$ è proporzionale ad s^2, così esso assume effettivamente un valore quattro volte maggiore della determinazione statica, la quale corrisponde a $s = g/\omega^2$.

Passiamo ora ad una applicazione un po' più generale, supponendo che, immediatamente prima dell'azione dei carichi, il sistema si trovasse in equilibrio sotto altri carichi in rapporto costante α coi c_s.

Se $\alpha > 1$, si tratta manifestamente di una improvvisa riduzione di carico (nel rapporto $1/\alpha$), come può per esempio avvenire nel caso di un parziale distacco dei carichi stessi. Se invece α designa una frazione propria, si ha a fare con un aumento di carichi (sempre nel rapporto $1/\alpha$), il che corrisponde alla applicazione di carichi addizionali. Infine, α negativo significa che viene altresì invertito il senso delle forze. Comunque le equazioni (12) e (13) in cui va sostituito α al posto di μ, mostrano che assieme a $\mathcal{G} = 0$, vanno assunti come valori iniziali

$$\Omega = \alpha^2 \Omega_s , \qquad U = \alpha U_s .$$

Per conseguenza, ricordando che $2\Omega_s = U_s$, si ha

$$E = \mathcal{G} + \Omega - U = (\alpha^2 - 2\alpha)\, \Omega_s ,$$

$$1 + E/\Omega_s = (1 - \alpha)^2 .$$

Il valore assoluto di $\sqrt{1+E/\Omega_s}$ è perciò $\alpha - 1$ per $\alpha \geqslant 1$, invece $1 - \alpha$ per $\alpha \leqslant 1$, nella quale ultima eventualità è incluso anche il caso di α negativo.

Risulta così dalla (14″)

$$\mu = \begin{cases} \alpha \quad , & \text{per } \alpha \geqslant 1 , \\ 2 - \alpha , & \text{per } \alpha \leqslant 1 , \end{cases}$$

e dalle (12)

$$\Omega_d = \begin{cases} \alpha^2 \Omega_s , \\ (2 - \alpha)^2 \Omega_s , \end{cases}$$

secondo che $\alpha \geqslant 1$, oppure $\leqslant 1$.

Va rilevato che il cimento elastico, il quale, a norma della (1), è una funzione quadratica delle q_h, può anche essere risguardato come una funzione quadratica (e precisamente come la forma reciproca) dei carichi corrispondenti c_h, definiti dalle (3′). Si riconosce così che $\alpha^2 \Omega_s$ non è altro che il cimento elastico *originario*. Abbiamo quindi la conseguenza interessante (e solo parzialmente evidente) che, nello stato dinamico provocato da una riduzione dei carichi, non c'è da temere alcun aumento dell'originario cimento statico.

Se invece intervengono carichi addizionali, nella stessa direzione degli originari, il che corrisponde a $\alpha < 1$ e > 0, allora la misura del temibile aumento di cimento è fornita dal coefficiente di sicurezza

$$(15) \qquad \mu^2 = (2 - \alpha)^2 ,$$

da cui apparisce *che, quando intervengono carichi addizionali, può presentarsi, durante il periodo di assestamento, un cimento dinamico che è al massimo quadruplo di quello che si determina in fine a equilibrio raggiunto.* Il valore 4 di μ^2 viene d'altra parte assunto soltanto per $\alpha = 0$, il che ci riporta all'esempio precedente: quiete iniziale nello stato naturale. Che se, anche prima dell'intervento dei carichi addizionali, sussisteva una sollecitazione non nulla, allora è $\alpha > 0$, e per conseguenza risulta $\mu^2 < 4$ (ma tuttavia > 1).

Infine, se la variazione dei carichi è accompagnata da inversione di senso ($\alpha < 0$), allora μ^2 è sempre > 4, e può a priori raggiungere un qualsivoglia valore, se $|\alpha|$ è abbastanza grande. Merita speciale menzione il caso in cui si presenta una semplice inversione di senso di tutti i carichi senza alterazione delle loro intensità. Si ha allora $\mu^2 = 9$.

Sarebbe assai facile accertare, come già nel primo esempio speciale, riferendosi ancora a sistemi con un solo grado di libertà, che gli accennati valori del massimo cimento possono effettivamente venire raggiunti.

8. - Il cimento come funzione di E. Effetto generale di resistenze passive.

La espressione (14″) di μ mostra che esso cresce costantemente con E (nell'intervallo in cui può variare questo argomento, cioè (§ 5) da $-\Omega_s$ all'∞). Ne consegue che anche *il cimento dinamico Ω_d è una funzione di E sempre crescente.*

Ciò posto, occupiamoci dell'ipotesi più prossima alle circostanze di fatto in cui, oltre alle forze elastiche e ai carichi, agiscono resistenze passive, come attriti, viscosità, ecc. Senza analizzarle, ci accontenteremo di rilevare il fatto saliente che, *precisamente come nella statica, l'intervento di forze dissipative* (cioè di forze che fanno sempre lavoro negativo) *agisce in favore della sicurezza,* nel senso che il massimo cimento dinamico non può mai superare quello che si avrebbe *caeteris paribus* nel caso conservativo (cioè qualora non vi fosse dissipatività).

La dimostrazione è assai semplice. Basta aver riguardo, anzichè alla (6), all'analogo bilancio energetico, in cui si tien conto anche del lavoro $-\Psi$ delle forze dissipative (dall'istante iniziale sino all'istante generico t).

L'equazione, che vincola il limite superiore di Ω, è per conseguenza

$$\mathcal{G} + \Omega - U = E - \Psi, \tag{16}$$

dove Ψ, a norma della sua definizione, è una quantità $\geqslant 0$ che si annulla per $t = 0$.

La (16) si troverà soddisfatta in condizioni di massimo cimento elastico con un valore Ψ_d ($\geqslant 0$, per quanto sconosciuto) di Ψ. Chiamiamo per brevità E' la differenza $E - \Psi_d$; avremo da determinare il massimo di Ω compatibile con

$$\mathcal{G} + \Omega - U = E' .$$

Ora questo è precisamente il problema già risoluto (§§ 5-6) per lo stesso sistema sotto l'azione esclusiva di forze conservative, quando alle condizioni iniziali spetta una energia (totale) E', incognita, ma comunque non maggiore di E. Il corrispondente massimo Ω'_d è allora certamente $\leqslant \Omega_d$, c. d. d.

In generale non si può dire nulla di più; ed è anche facile riconoscere che, nonostante l'intervento delle resistenze passive, il limite superiore Ω_d può effettivamente venire raggiunto a partire da condizioni iniziali opportunamente prefissate. Recentemente il Prof. KRALL [5] ha approfondita questa interessante questione (valendosi di coordinate normali), ed ha indicata una notevole classe di sistemi elastici, affetti da attrito interno, per le cui vibrazioni (a partire dalla quiete) Ω'_d presenta una riduzione in confronto di Ω_d. Si ha precisamente un fattore di riduzione della forma $e^{-\gamma\nu}$, dove γ designa una costante dipendente dalla natura del materiale e ν la frequenza fondamentale delle oscillazioni spontanee.

9. - Lemma.

Si indichino al solito con Q_h le componenti lagrangiane di forze quali si vogliono agenti sul nostro sistema.

Come si sa, la loro espressione in funzione della distribuzione locale delle forze $\boldsymbol{F}_i$ effettivamente applicate ai singoli punti P_i del sistema è data da

$$Q_h = \sum_i \boldsymbol{F}_i \times \frac{\partial P_i}{\partial q_h}$$

in cui la somma va estesa a tutti i punti P_i del sistema a cui sono applicate delle forze, e $\times$ rappresenta un prodotto scalare.

Comunque, il lavoro elementare fatto dalle forze Q_h quando le coordinate q_h subiscono gli incrementi elementari $dq_h = \dot{q}_h\, dt$ ha l'espressione $\sum_h{}_1^n Q_h \dot{q}_h\, dt$ cosicchè la potenza elementare ϖ, e il lavoro complessivo L,

(5) « Rend. della R. Accademia dei Lincei », vol. VII, 1928, pp. 223-228.

durante un intervallo finito di tempo, sono rispettivamente

$$\varpi = \sum_{1}^{n}{}_{h} Q_h \dot{q}_h , \tag{17}$$

$$L = \int_{0}^{\tau} \varpi \, dt . \tag{18}$$

Accanto alle componenti lagrangiane covarianti Q_h giova introdurre anche le corrispondenti controvarianti Q^h a norma delle equazioni

$$Q_h = \sum_{1}^{n}{}_{k} a_{hk} Q^k , \tag{19}$$

in cui bene inteso le a_{hk} designano, come nella (5), i coefficienti della forza viva $\mathcal{G}$. La espressione (17) di ϖ può così essere scritta

$$\varpi = \sum_{1}^{n}{}_{hk} a_{hk} \dot{q}_h Q^k . \tag{17'}$$

Nelle considerazioni seguenti comparirà anche la quantità

$$\gamma = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{h} Q_h Q^h = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{hk} a_{hk} Q^h Q^k \tag{20}$$

che chiameremo *costrizione statica*: essa è infatti una funzione positiva delle forze assegnate (invariante, cioè indipendente dalla scelta delle coordinate lagrangiane), intimamente legata con la espressione classica della costrizione di GAUSS [6]; infatti, per i sistemi di punti liberi, dotati di accelerazione nulla, la (20) coincide identicamente con la definizione gaussiana

$$\gamma = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{i} F_i^2 ;$$

in ogni caso la (20) stessa possiede la proprietà che le condizioni di equilibrio $Q_h = 0$, le quali equivalgono a $Q^h = 0$ $(h = 1, 2, ..., n)$ implicano un minimo per la γ.

---

[6] Cfr. per es. LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. II_2; p. 487 (Bologna, Zanichelli, 1926).

Ci proponiamo ora di dedurre una notevole limitazione per il valore assoluto di L. Si tratta in sostanza di una disuguaglianza di SCHWARZ che si stabilisce come segue.

In causa del carattere definito della forma $\mathcal{G}$, si ha necessariamente

$$\frac{1}{2}\int_0^\tau dt \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, a_{hk}(\xi\dot{q}_h + \eta Q^h)(\xi\dot{q}_k + \eta Q^k) \geqslant 0$$

per valori reali quali si vogliano degli argomenti ξ ed η. Risguardando questi argomenti come indipendenti da t, la disuguaglianza precedente, badando alle (5), (17′), (18) e (20), può anche essere scritta

$$\xi^2\int_0^\tau \mathcal{G}\, dt + \xi\eta L + \eta^2\int_0^\tau \gamma\, dt \geqslant 0\,,$$

da cui segue la voluta limitazione per L^2, e quindi anche per $|L|$:

$$L^2 \leqslant 4\int_0^\tau \mathcal{G}\, dt\cdot\int_0^\tau \gamma\, dt\,. \tag{21}$$

Una disuguaglianza analoga sussiste anche per un altro qualsiasi valore τ^* (fra zero e τ), in particolare per quell'istante in cui la funzione (continua) $|L|$ raggiunge il suo massimo L^*. Si ha così assieme alla (21),

$$L^{*2} \leqslant 4\int_0^{\tau^*} \mathcal{G}\, dt\cdot\int_0^{\tau^*} \gamma\, dt;$$

anzi, essendo $\mathcal{G}$ e γ essenzialmente positivi, gli integrali del secondo membro non rimangono certo diminuiti qualora vengano entrambi estesi sino a τ (in luogo che sino a τ^*). Si ottiene così

$$L^{*2} \leqslant 4\int_0^\tau \mathcal{G}\, dt\cdot\int_0^\tau \gamma\, dt\,, \tag{21′}$$

che include la precedente disuguaglianza (21).

Ove si introducano i valori medi

$$\overline{\mathcal{G}} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathcal{G}\,dt\,, \quad \overline{\gamma} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \gamma\,dt$$

della costrizione e della forza viva nell'intervallo considerato, la (21′) può anche essere scritta

$$L^{*2} \leqslant 4\tau^2 \overline{\mathcal{G}}\,\overline{\gamma}\,. \tag{21″}$$

10. - Limitazione del cimento dinamico sotto una sollecitazione qualsiasi.

Allorchè il sistema S, oltre che alle forze elastiche e ai carichi (costanti) c_h, si trova sottoposto alla ulteriore sollecitazione delle Q_h, la equazione dell'energia (6), attesa la (18), assume la forma [(16), in cui va scritto L al posto di $-\Psi$]

$$\mathcal{G} + \Omega - U = E + L\,. \tag{22}$$

Badando da un lato (§ 4) che $-\Omega_s$ porge il minimo di $\Omega - U$ per modo che

$$U - \Omega \leqslant \Omega_s\,,$$

e d'altro lato che

$$L \leqslant |L| \leqslant L^*\,,$$

si ricava dalla (22) la disuguaglianza

$$\mathcal{G} \leqslant E + \Omega_s + L^*\,,$$

valida in ogni istante t dell'intervallo $0 \vdash\!\dashv \tau$.

Per integrazione rispetto a t fra 0 e τ, segue ulteriormente (in quanto E, Ω_s e L^* sono costanti)

$$\overline{\mathcal{G}} \leqslant E + \Omega_s + L^*\,. \tag{23}$$

Tenendo conto nella (21″) di questa limitazione per $\overline{\mathcal{G}}$, si trae

$$L^{*2} \leqslant 4\tau^2\overline{\gamma}\{E + \Omega_s + L^*\}\,, \tag{24}$$

ossia

$$\{L^* - 2\tau^2\overline{\gamma}\}^2 \leqslant 4\tau^2\overline{\gamma}\{E + \Omega_s + \tau^2\overline{\gamma}\}\,,$$

o infine

$$(24') \qquad L^* \leqslant \tau\Pi\,,$$

in cui per brevità si è posto

$$(25) \qquad \Pi = 2\left[\tau\bar{\gamma} + \sqrt{\bar{\gamma}\,\{E + \Omega_s + \tau^2\bar{\gamma}\}}\right].$$

Questa costante Π dipende, come si vede, da quattro argomenti: l'energia iniziale E e il cimento statico Ω_s (i quali del resto si presentano soltanto nella combinazione $E+\Omega_s$); la durata τ dell'intervallo di cui si tratta; e la costrizione media $\bar{\gamma}$ durante lo stesso intervallo.

Ove si osservi che (con le abituali notazioni di MAXWELL) le dimensioni di una energia e quindi di E, Ω_s e L, sono $l^2t^{-2}m$, si desume dalla (24) che $\tau^2\bar{\gamma}$ ha le medesime dimensioni, di guisa che

$$[\bar{\gamma}] = l^2 t^{-4} m\,,$$

ciò che del resto segue anche direttamente dalla definizione di γ quale costrizione.

Il calcolo numerico di $\bar{\gamma}$ è eseguibile senz'altro nel caso particolare, praticamente importante, in cui le forze Q_h sono funzioni conosciute, ad es. periodiche o addirittura sinusoidali, del tempo.

In ogni caso, appare dalla (24) che il limite superiore L^* di L contiene a fattore la durata τ, mentre l'altro fattore Π rimane finito anche per $\tau \to 0$.

Adesso finalmente siamo in grado di riattaccare alla equazione (22) le stesse considerazioni istituite precedentemente (§ 8) sulla (16).

Basta sostituire alla quantità variabile L il suo limite superiore L^*, e così si ricade (per la determinazione di un limite superiore di Ω nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv \tau$) sul problema già risoluto nei §§ 5-6.

Vale pertanto, da $t = 0$ *sino a* $t = \tau$, *la relazione*

$$\Omega_d = \mu^2\Omega_s\,,$$

in cui, nella espressione (14″) *di* μ, *va sostituito al posto di* E, $E+\tau\Pi$: *si intende che* Π *è data dalla* (25). Importa rilevare che questo stesso valore del coefficiente di sicurezza μ è applicabile anche per $t > \tau$, cioè, più precisamente, alle oscillazioni che persistono nel sistema dopo cessata l'azione delle forze addizionali Q_h. Infatti per tali oscillazioni, torna a valere l'espressione originaria (14″) di μ, purchè vi si introduca, al posto di E, un valore non inferiore a quello dell'energia totale del sistema nell'istante τ. Ora, per quanto si è testè visto, un tale valore è proprio $E+\tau\Pi$ (E riferendosi, come sopra, all'istante iniziale).

La valutazione di $\bar{\gamma}$, e per conseguenza di Π, richiede soltanto quadrature, a norma delle (20) e (25), allorquando sono assegnate le Q_h quali funzioni esplicite del tempo (e si risguardano costanti i coefficienti a_{hk} di $\mathcal{G}$).

Se inizialmente (cioè prima che comincino ad agire le Q_h) il sistema si trova in equilibrio sotto i carichi c_h, si ha in particolare, per $t=0$, $\mathcal{G}=0$, $\Omega=\Omega_s$, $U=U_s=2\Omega_s$, quindi, in virtù della (6),

$$E+\Omega_s=0\,.$$

La espressione (25) di Π si semplifica allora notevolmente riducendosi a

$$\Pi=4\tau\bar{\gamma}\,. \tag{25'}$$

In conformità, il valore (14″) di μ (in cui si introduca, al posto di E, $E+\tau\Pi=-\Omega_s+4\tau^2\bar{\gamma}$), diviene

$$\mu=1+2\tau\sqrt{\bar{\gamma}/\Omega_s}\,. \tag{26}$$

Nel § seguente daremo un paio di esempi. Frattanto vogliamo aggiungere una osservazione di natura qualitativa. È ben noto che, allorquando sopra un sistema elastico, il quale, come il nostro S, è suscettibile di vibrare liberamente, agiscono forze periodiche di periodo prossimo ad uno di quelli delle vibrazioni spontanee, sono da temere pericolosi effetti di risonanza; sicchè il cimento può divenire assai rilevante tostochè sia raggiunto il regime periodico delle oscillazioni forzate.

Tuttavia il risultato testè conseguito mostra che l'aumento di cimento è soltanto graduale: per τ abbastanza piccolo, esso non può divenire gran che maggiore di quello che si avrebbe, nella peggiore delle ipotesi, in assenza di influenze perturbatrici.

11. - Richiamo di formule concernenti l'inflessione di una trave semplicemente appoggiata agli estremi.

Sia S una trave di lunghezza l, il cui appoggio di sinistra O si assume al solito per origine delle coordinate, ritenendosi Ox orizzontale e coincidente con l'asse della trave nella sua configurazione naturale, Oy verticale verso il basso. Quando la trave si inflette, il suo asse resta nel piano verticale Oxy, e sarà rappresentabile mediante una equazione del tipo

$$y = \sum_1^\infty {}_h\, q_h \sin \frac{\pi h x}{l}$$

le q_h (in numero infinito) costituendo le coordinate lagrangiane del caso attuale.

Un carico Y, concentrato in un punto della trave di ascissa x dà luogo secondo la formula riportata al § 9, alle componenti lagrangiane

$$Q_h = Y \frac{\partial y}{\partial q_h} = Y \sin \frac{\pi h x}{l} \qquad (h = 1, 2, \ldots,);$$

Se invece si tratta di un carico di peso p' per unità di lunghezza, ripartito uniformemente in un segmento $a \mapsto b$ dell'intervallo $0 \mapsto l$, si ha analogamente

$$(27) \qquad Q_h = p' \int_a^b \sin \frac{\pi h x}{l}\, dx = \frac{p'l}{\pi h}\left(\cos \frac{\pi h a}{l} - \cos \frac{\pi h b}{l}\right).$$

Dalla definizione di $\mathcal{G}$ (prescindendo per semplicità dal contributo che proviene dalla rotazione delle sezioni trasversali) si ha subito

$$(28) \qquad \mathcal{G} = \frac{p}{2g} \int_0^l \dot{y}^2\, dx = \frac{pl}{4g} \sum_1^\infty {}_h\, \dot{q}_h^2,$$

dove p/g è la densità (lineare) della trave; e, dalla definizione di Ω (7),

$$(29) \qquad \Omega = \frac{1}{2} B \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{B}{4} \frac{\pi^4}{l^3} \sum_1^\infty {}_h\, h^4 q_h^2,$$

dove $B = EI$ è il così detto coefficiente di rigidità, designando al solito E il modulo di YOUNG e I il momento di inerzia della sezione della trave (rispetto all'asse neutro).

(7) Cfr. per es. RAYLEIGH, *The Theory of Sound*, vol. I, p. 257 (2ª ediz., London, Macmillan, 1894).

Le equazioni del moto (spontaneo)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial(\mathcal{G} - \Omega)}{\partial q_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, ...)$$

si esplicitano sotto la forma

$$\ddot{q}_h + h^4\omega^2 q_h = 0,$$

dove

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 gB}{pl^4}\,. \tag{30}$$

Si tratta quindi di vibrazioni aventi i periodi $2\pi/\omega h^2$. Il periodo fondamentale T corrisponde ad $h = 1$ e, a norma della (30), risulta espresso da

$$T^2 = \frac{4pl^4}{\pi^2 gB}\,. \tag{30$'$}$$

Limitiamoci a considerare la trave semplicemente appoggiata agli estremi nei due casi tipici di sollecitazione statica, in cui si ha

1) un carico unitario p;

2) un carico di peso P, concentrato in un punto di ascissa ξ.

Risultano per Ω_s le espressioni rispettive (⁸)

$$\Omega_s = \frac{1}{240}\,\frac{p^2 l^5}{B}\,, \tag{31}$$

$$\Omega_s = \frac{1}{6}\,\frac{P^2}{lB}\,\xi^2(l - \xi)^2\,. \tag{32}$$

Riferendoci in particolare alla (31), giova che ne prepariamo due espressioni trasformate; una, introducendo al posto di B il periodo fondamentale T, con che si ha

$$\Omega_s = \frac{1}{240}\,\frac{1}{4}\,\pi^2 gplT^2\,; \tag{31$'$}$$

e l'altra facendovi invece apparire lo spostamento elastico (verticale) nel

(⁸) Veggasi ad es.: A. E. H. LOVE, *The mathematical Theory of Elasticity*, pp. 371-372 (4ª Ediz., Cambridge University Press, 1927).

punto di mezzo della trave (freccia di inflessione), che è

$$f=\frac{1}{24}\,\frac{5}{16}\,\frac{pl^4}{B}\,.$$

Con ciò risulta

$$\Omega_s=\frac{16}{50}\,Pf\,, \tag{31''}$$

avendo indicato con P il carico totale pl.

Per il caso (32) di uno stesso carico P, concentrato nel punto ξ si avrebbe invece

$$\Omega_s=\frac{1}{2}\,P\eta\,,$$

essendo η lo spostamento elastico del punto di applicazione del carico.

12. - Treno su ponte ferroviario.

Quando un treno, di cui sia (in media) p' il peso per unità di lunghezza, sta transitando sopra un ponte, il ponte stesso, in un generico istante, si trova sottoposto ad una sollecitazione addizionale corrispondente ad un carico (unitario) p' in un tratto (variabile $a \mapsto b$ del segmento $0 \mapsto l$. E precisamente, supponendo per fissare le idee che il treno corra con velocità v nel senso dell'asse delle x e che si contino i tempi dall'istante in cui si inizia il passaggio sul ponte, avremo, in una prima fase, caricato, all'ingresso del ponte, un segmento $0 \mapsto b$, con $b=vt$, e ciò finchè vt raggiunge la più piccola delle due lunghezze: l (lunghezza del ponte) od l_1 (lunghezza del treno); poi, se $l_1<l$, un tratto intermedio (variabile) $a \mapsto b$, o invece $0 \mapsto l$ se $l_1>l$, ecc. Comunque le condizioni di carico corrispondono sempre allo schema (27), essendo a e b funzioni continue di t, comprese fra 0 ed l.

Dall'espressione (ortogonale) (28) di $\mathcal{G}$ si ha, a norma della (19),

$$Q^h=\frac{2g}{pl}\,Q_h\,,$$

donde, in base alla definizione (20) dello sforzo statico γ, scrivendo materialmente n in luogo di h:

$$\gamma=\frac{g}{pl}\sum_1^\infty{}_n\,Q_n^2\,. \tag{33}$$

Si noti ora che, in ciascuna delle serie,

$$s_a = \sum_1^\infty {}_n \frac{\cos^2 \pi n a/l}{n^2}\,, \qquad s_b = \sum_1^\infty {}_n \frac{\cos^2 \pi n b/l}{n^2}\,, \qquad s' = \sum_1^\infty {}_n \frac{\cos \pi n a/l \cdot \cos \pi n b/l}{n^2}\,,$$

il termine generale è in modulo, $\leqslant 1/n^2$. Essendo $\sum_1^\infty {}_n 1/n^2$ convergente colla somma $\pi^2/6$, le tre serie ora scritte convergono (uniformemente) rispetto ad a e a b e hanno ciascuna una somma $\leqslant \pi^2/6$, in valore assoluto.

La quantità (necessariamente positiva)

$$s_a + s_b - 2s'$$

è dunque $\leqslant (4/6)\pi^2 = (2/3)\pi^2$, e si può quindi porre

$$s_a + s_b - 2s' = \frac{2}{3}\, k(t)\pi^2\,,$$

designando con $k(t)$ una frazione propria (funzione continua di t).

Si ha in conformità delle (27) e (33)

$$\gamma = \frac{2}{3}\, g\, \frac{p'^2}{p}\, l k(t)\,,$$

e, prendendo il valore medio nell'intervallo $0 \mapsto \tau$,

$$\bar{\gamma} = \frac{2}{3}\, g\, \frac{p'^2}{p}\, l \bar{k}\,, \tag{34}$$

in cui $\bar{k}$ è, al pari di k, non superiore all'unità.

Abbiamo ormai quanto basta per assegnare il limite del cimento dinamico dovuto al passaggio del treno, cioè *all'azione combinata della maggiore sollecitazione e delle vibrazioni indotte nel ponte.* Basta all'uopo procurarsi il corrispondente coefficiente di sicurezza μ, che possiamo ritenere espresso dalla

$$\mu = 1 + 2\tau \sqrt{\bar{\gamma}/\Omega_s} \tag{26}$$

del § 10, perchè il ponte, prima del passaggio del treno, è in equilibrio sotto l'azione esclusiva del proprio peso. Per Ω_s va posta l'espressione (31'), e si ha così, a norma della (34),

$$\bar{\gamma}/\Omega_s = \bar{k}\,\frac{240\cdot 8}{3}\,\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{p'}{p}\right)^2 \frac{1}{T^2}\,.$$

Raccogliendo i fattori numerici in un unico coefficiente e sostituendo a $\bar{k}$ il suo massimo valore 1 (con che — non occorre dirlo — si agisce sempre in favore della sicurezza) risulta

$$\tau\sqrt{\bar{\gamma}/\Omega_s} = 8{,}05\,\frac{p'}{p}\,\frac{\tau}{T}\,.$$

Ne consegue in definitiva, per il fattore di sicurezza

$$\mu = 1 + 16{,}10\,\frac{p'}{p}\,\frac{\tau}{T}\,, \tag{26'}$$

dove p è il peso del ponte, p' quello del carico per unità di lunghezza, τ la durata totale del passaggio del treno sul ponte e T il periodo fondamentale delle vibrazioni del ponte stesso.

Una tale limitazione, assolutamente sicura (nell'ambito delle adottate schematizzazioni), non è per verità altrettanto vantaggiosa nei casi comuni, dove gli ordinari apprezzamenti rendono plausibile un valore meno rilevante di μ (⁹). *Ma, mentre i soliti criteri lasciano presumere un pericoloso aumento di cimento quando, accrescendosi le velocità dei treni, τ tendesse ad avvicinarsi al periodo T della vibrazione spontanea (fondamentale) del ponte, la formula* (26′) *mostra che tale presunzione é infondata. Al contrario, anzi, l'aumento di velocità agisce in favore della sicurezza.*

Esaminiamo da ultimo anche l'influenza di piccole accidentalità del binario. Se δ rappresenta la massima differenza di livello dovuta ad una qualche sconnettitura delle rotaie, un carico puntiforme P' acquista (per caduta o discesa) la forza viva $P'\delta$. Non è detto naturalmente che una tale forza viva venga trasmessa interamente al ponte sottostante; anzi in generale soltanto una piccola frazione si convertirà effettivamente in forza viva spettante ad oscillazioni (verticali) del supporto. Comunque, si agisce qui ancora (esagerando) in favore della sicurezza, assumendo che tutta la forza viva $P'\delta$ si riversi sul ponte.

Ed è pur lecito, a titolo di apprezzamento, di ritenere valida la stessa espressione, anche se P' rappresenta non un carico concentrato, ma la

(⁹) Si può consultare l'interessante articolo di S. TIMOSHENKO, *Vibrations of Bridges*. American Society of mechanical Engineers (Annual meeting, New York, 1927).

somma dei carichi che subiscono il dislivello δ, come avviene nel caso di un treno di peso complessivo P'.

L'effetto del piccolo dislivello δ, considerato isolatamente, cioè come se la forza viva $P'\delta$ venisse comunicata al ponte, mentre si trova in equilibrio (sotto la sola azione del peso proprio) si potrà così desumere dalla (14″) introducendo per

$$E = \mathcal{G}$$

il valore che corrisponde alle condizioni iniziali $\mathcal{G} = P'\delta$, $\Omega = \Omega_s$, $U = U_s$, ossia

$$E = -\Omega_s + P'\delta \, .$$

Ne consegue

$$\mu = 1 + \sqrt{P'\delta/\Omega_s} \, ,$$

e, in definitiva, sostituendo per Ω_s il suo valore (31″) (in cui si arrotonda 16/50 in 1/3)

$$\mu = 1 + \sqrt{\frac{P'}{P}\frac{3\delta}{f}} \, ,$$

dove P è il peso totale del ponte, P' quello del carico mobile, δ il dislivello e f la freccia d'inflessione dovuta esclusivamente al peso proprio del ponte. Quest'ultima formula è più vantaggiosa di altra analoga adoperata dai tecnici e stabilita con apprezzamenti meno sicuri ([10]).

([10]) Cfr. C. Guidi, *Lezioni sulla scienza delle costruzioni*. Parte seconda (11ª Ediz.), Torino, Bocca, 1925, cap. V, art. 163-171.

XXVII.

APPLICAZIONI ASTRONOMICHE DEGLI INVARIANTI ADIABATICI

« Atti del Congresso internazionale dei Matematici, Bologna, 1928 », t. V, pp. 17-28.

1. - Preliminari.

I progressi realizzati nella meccanica celeste da NEWTON in poi sono indubbiamente grandiosi, sotto il duplice aspetto teorico e pratico. E alla grandiosità si accompagna — esempio insuperato nella filosofia naturale — uno schema logico mirabilmente semplice e perspicuo. Non c'è che da associare le leggi newtoniane del moto e della gravitazione universale per avere le equazioni rigorose; e, per conseguire soluzioni approssimate largamente sufficienti ai bisogni dell'astronomia, basta tener conto di qualche dato ulteriore, suggerito con manifesta evidenza dall'osservazione diretta.

Soltanto recentemente, nell'astronomia stellare e in qualche problema cosmogonico, si sono fatte intervenire ipotesi addizionali probabilistiche e statistiche.

In questa comunicazione mi propongo di mostrare sopra due esempi espressivi, desunti da ovvi problemi della meccanica planetaria, come si possa apprezzare l'influenza delle perturbazioni particolarmente lente, facendo intervenire l'elemento statistico con criterio semplice e generale, già bene codificato.

In modo preciso si tratterà unicamente di sfruttare, nei casi suindicati, la nozione di *invariante adiabatico*, introdotta, come è ben noto, dal fisico olandese EHRENFEST nella meccanica atomica, per giustificare i postulati quantici del BOHR e del SOMMERFELD e renderne possibile l'applicazione a modelli atomici più complessi.

2. - Richiami concernenti la nozione di invariante adiabatico.

Sia dato un sistema differenziale ordinario di rango N

$$\frac{dx_\nu}{dt} = X_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_N \,|\, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

e si supponga che i secondi membri X_ν dipendano, oltre che dalle funzioni x_ν e, eventualmente, dalla variabile indipendente t, anche da un certo numero (che non occorre specificare) di parametri a. Se questi si considerano costanti, oppure anche funzioni *conosciute* del tempo, il sistema (1) è atto (sotto condizioni di continuità, derivabilità, ecc., che qui supponiamo largamente soddisfatte) ad individuare le N funzioni incognite x, a partire dai loro valori iniziali.

Se invece — e tale dovrà essere il nostro punto di vista — si considerano le a come quantità variabili molto lentamente, ma in modo *a priori* arbitrario, il sistema (1) è per se stesso indeterminato, contenendo più incognite che equazioni; e precisamente un eccesso di incognite eguale al numero dei parametri a. Tuttavia è ancora possibile pervenire a conseguenze notevoli qualora:

a) il sistema (1) stesso, *allorchè i parametri a si considerino addirittura come costanti*, presenti un certo comportamento qualitativo — quasi ergodicità [1] — che dipende essenzialmente dal numero di integrali (in debito senso) uniformi, e indipendenti da t, che esso possiede;

b) i parametri a varino in modo abbastanza lento — si suol dire *adiabatico* — perchè sia giustificata una certa ipotesi statistica concernente i valori medi.

3. - Esempio tipico offerto dai sistemi canonici con un solo grado di libertà.

Un caso particolarmente notevole, in cui le condizioni a) e (per variazione abbastanza lenta dei parametri, anche) b) si trovano soddisfatte, è offerto dai sistemi canonici con un solo grado di libertà, a funzione caratteristica $H(p\,|\,q\,|\,a)$ indipendente dal tempo:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{2}$$

nell'ipotesi che, quando i parametri si considerano costanti, l'integrale (generalizzato) dell'energia

$$H = E \qquad (E \text{ costante}) \tag{3}$$

[1] Ad una esposizione riassuntiva di queste nozioni, con qualche contributo personale circa il modo di formularne e di giustificarne i postulati fisico-statistici, sono dedicate le lezioni, che ho tenuto recentemente all'Università di Amburgo, per benevolo invito di quel Senato Accademico. Cfr.: *Drei Vorlesungen über adiabatische Invarianten*. Abh. aus dem math. Seminar der Hamburgischen Universität, B. VI, 1928, pp. 323-366, dove si trovano anche indicazioni bibliografiche [in questo vol.: XXV, pp. 499-545].

rappresenti nello spazio delle fasi, cioè nel piano cartesiano (q, p), una curva chiusa, senza punti doppi, cioè tale che, sopra di essa, non si annullino contemporaneamente $\partial H/\partial p$, $\partial H/\partial q$. In tale ipotesi, quando si seguitano a risguardare i parametri a come costanti, il moto risulta periodico, come è sostanzialmente ben noto; se poi i parametri stessi variano lentamente (ma in modo arbitrario) l'area

$$V(E\,|\,a)$$

racchiusa dalla curva (3) rimane inalterata.

Ciò si esprime dicendo che V costituisce un *invariante adiabatico* del nostro sistema differenziale. Se ne desume che l'energia E, la quale, in corrispondenza ad una generica soluzione del sistema (2), si conserva costante, assieme ai parametri a, risente le loro lente variazioni (adiabatiche), a norma della equazione

$$V(E\,|\,a) = \text{cost.} \tag{4}$$

È questo il solo risultato della teoria generale degli invarianti adiabatici che avremo bisogno di invocare.

I.

PROBLEMA DEI DUE CORPI DI MASSE VARIABILI

4. - Impostazione formale. Ricerche dell'Armellini.

Il problema dei due corpi di masse variabili è astronomicamente importante a doppio titolo. Da un lato la caduta di meteoriti tende ad aumentare le masse m, m' dei due corpi, e con esse la loro somma M: certo con contributi assai tenui ed irregolari, ma presumibilmente con ritmo medio analogo a quello fornito dalle osservazioni attuali.

D'altro lato radiazioni termiche, elettromagnetiche, luminose, ecc., che siano comunque emesse dai due corpi, ne diminuiscono l'energia e quindi le masse.

In definitiva, anche per due corpi sottratti ad ogni influenza gravitazionale esteriore, se si tratta di previsioni a lunghissima scadenza, bisogna considerare le masse m, m' come parametri (lentissimamente) variabili, in funzione del tempo t.

Gli autori che si sono occupati di tale questione hanno sempre preso come punto di partenza le equazioni del moto *relativo* del problema classico dei due corpi di masse costanti, risguardando in esse m, m' non più costanti, ma funzioni assegnate di t.

Questo criterio non è forse del tutto soddisfacente, potendo apparire preferibile una impostazione più comprensiva in cui fin da principio si tenga conto della variabilità delle masse.

Comunque non è su questo punto che conviene ora soffermarsi; noi vogliamo semplicemente applicare la considerazione dell'invariante adiabatico alle equazioni adottate finora.

Per conseguirle, attraverso passaggi che ci serviranno anche nel secondo esempio, rifacciamoci dal moto assoluto nel problema classico dei due corpi di masse invariabili m, m'.

Siano questi P, P'; G il loro baricentro (che può considerarsi fisso); r la loro distanza; $M = m + m'$ la somma delle masse. Sarà

$$|GP| = \frac{m'}{M} r , \qquad |GP'| = \frac{m}{M} r .$$

Il moto avvenendo in un piano, in virtù dell'integrale (baricentrale, vettoriale) dei momenti, ove si indichi con ϑ l'anomalia di PP' in questo piano, contata a partire da una retta fissa, si avrà per P (di massa m) la forza viva (assoluta)

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{m'}{M}\right)^2 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2)$$

e analogamente per P' la forza viva

$$\frac{1}{2} m' \left(\frac{m}{M}\right)^2 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) ,$$

donde pel sistema la forza viva

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \frac{mm'}{M} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) .$$

Designando con f la costante di attrazione universale, si avrà d'altra parte la funzione delle forze

$$\mathcal{U} = f \frac{mm'}{r} .$$

Se si moltiplicano T ed U per una stessa costante, le equazioni lagrangiane del moto non si alterano. Prenderemo come fattore moltiplicativo M/mm', assumendo così come forza viva la espressione (unitaria)

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2)$$

e come funzione delle forze

$$\mathcal{U} = \frac{fM}{r}.$$

Si ha in conformità l'energia totale

$$H = \mathcal{T} - \mathcal{U},$$

la quale introducendosi al posto di $\dot{r}$, $\dot{\vartheta}$ le variabili coniugate

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \qquad p_\vartheta = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\vartheta}} = r^2\dot{\vartheta},$$

diviene

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\vartheta^2\right) - \frac{fM}{r}.$$

È questa la funzione caratteristica del sistema canonico

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \tag{6}$$

$$\frac{dp_\vartheta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta}, \tag{7}$$

che definisce il moto relativo dei due corpi.

Siccome ϑ non compare esplicitamente in H, la prima delle (7) dà luogo all'integrale

$$p_\vartheta = c \qquad (c \text{ costante}) \tag{8}$$

che esprime la costanza della velocità areolare.

Avuto riguardo a ciò, le (6) rientrano nello schema (2) con un solo grado di libertà, involgendo soltanto r e p_r.

Tutto questo nel caso classico in cui m, m' sono costanti.

Nel caso di masse variabili si assumono come equazioni differenziali del problema le stesse (6), (7) le quali seguitano ad ammettere l'integrale (8).

Quindi, per ciò che concerne la coppia r, p_r, si tratta ancora delle (6), con $p_\vartheta = c$: soltanto M non vi designa più una costante, bensì una funzione assegnata di t.

L'andamento del moto in quest'ultima ipotesi fu ripetutamente oggetto di studio da parte di eminenti cultori di meccanica celeste; basterà ricordare OPPOLZER, GYLDÉN, LEHMANN-FILHÈS, STRÖMGREN, PLUMMER.

In epoca recente la questione fu ripresa con più elevati mezzi analitici dal prof. ARMELLINI [2], il quale, oltre a ritrovare i risultati ottenuti dai precedenti autori, altri ne aggiunse di notevole interesse.

Fra le conclusioni rigorose cui egli pervenne (nel caso di orbite osculatrici ellittiche) giova, per lo scopo nostro, ricordare la seguente: Se $M(t)$ va sempre crescendo con t e diviene infinita per $t \to \infty$, il limite inferiore di $r(t)$ è zero, cioè alla lunga i due corpi finiscono per cadere l'uno sull'altro.

Ben più difficile è precisare il comportamento asintotico, quando $M(t)$, pur tendendo all'∞ con t, non è sempre crescente. È possibile che alla lunga intervenga un urto anche in questo caso, ma non si può a rigore escludere che i due corpi vadano invece allontanandosi indefinitamente. Sia per stabilire il primo punto che per rilevare la seconda incertezza l'ARMELLINI dovette ricorrere ad una analisi piuttosto approfondita e delicata.

Vedremo tra un momento che la considerazione dell'invariante adiabatico, di cui al numero precedente, assicura che, se $M(t)$ *cresce indefinitamente con legge lenta, ma qualsiasi, si avrà un urto; mentre, se* $M(t)$ *converge a zero, i due corpi andranno allontanandosi indefinitamente.*

È appena necessario far notare che, ricorrendo ad un invariante adiabatico, si viene ad associare al sistema differenziale (6) un elemento ulteriore di carattere statistico.

È questo il substrato logico del progresso, che vien fatto di conseguire, e si concreta nel precedente enunciato. A rigore, badando alla circostanza che c'è di mezzo un complemento statistico, si dovrebbe limitarsi ad intendere il precedente enunciato nel senso, che è, se non proprio impossibile, almeno infinitamente poco probabile che i due corpi sfuggano ad un urto, quando cresce indefinitamente la somma $M(t)$ delle

---

(2) Cfr. in particolare la memoria: *Il problema dei due corpi di masse variabili*, « Memorie della Società Italiana delle Scienze » (detta dei XL), t. XIX, 1915, pp. 75-96, dove sono anche nitidamente riassunti i risultati anteriori, colle relative indicazioni bibliografiche.

masse, mentre è *quasi* certo che essi si allontaneranno indefinitamente se M tende a zero (come accade ad esempio se prepondera l'irraggiamento).

5. - Calcolo effettivo dell'invariante adiabatico e sua immediata conseguenza.

A norma delle (3), (5), (6), si tratta di assegnare l'area V (del piano r, p_r) racchiusa da una curva (del 4° ordine)

$$\frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{c^2}{r^2}\right) - \frac{fM}{r} = E\,, \tag{9}$$

in cui c, f, M ed E vanno trattate come costanti: le prime tre positive, l'ultima negativa, in accordo colla premessa (n. 3) che si tratta di moto periodico e quindi, nel caso attuale, necessariamente kepleriano, ciò che appunto richiede $E < 0$.

L'area V suddetta è manifestamente espressa, risguardando t come variabile indipendente, dall'integrale

$$\int p_r\,dr$$

esteso ad un periodo (del moto kepleriano in questione). Indicando tale periodo con T, e quindi con

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

il moto medio, ove si ricordi (n. precedente) che il momento p_r si identifica con $\dot{r}$, talchè $dr = \dot{r}\,dt = p_r\,dt$, si ha

$$V = \int_0^T p_r^2\,dt\,,$$

che, in virtù della (9), può essere scritta

$$V = 2E\,\frac{2\pi}{n} + 2fM\int_0^T \frac{dt}{r} - c\int_0^T \frac{c\,dt}{r^2}\,. \tag{10}$$

L'integrale delle aree (8), cioè $r^2\dot{\vartheta} = c$, consente di sostituire nell'ultimo integrale $d\vartheta$ a $c\,dt/r^2$, sicchè l'integrale stesso, essendo esteso ad un periodo, vale 2π.

Per assegnare senza calcoli anche il valore dell'integrale

$$\int_0^T \frac{dt}{r}$$

basta introdurvi come variabile indipendente, al posto di t, l'anomalia eccentrica u, notoriamente legata a t dall'equazione di Kepler, che, differenziata, si scrive

$$(1 - e\cos u)\,du = n\,dt\,,$$

dove e designa l'eccentricità dell'orbita ellittica. Siccome, dettone a il semi-asse maggiore, si ha ulteriormente

$$a(1 - e\cos u) = r\,,$$

dt/r si identifica con du/an, e, dovendosi qui ancora integrare per un periodo si ha

$$\int_0^T \frac{dt}{r} = \frac{2\pi}{an}\,.$$

Risulta così dalla (10)

$$V = 2E\frac{2\pi}{n} + \frac{2fM}{a}\frac{2\pi}{n} - 2\pi c\,. \tag{10'}$$

Il nostro obbiettivo è di valersi dell'invariante adiabatico

$$V = \text{cost.}$$

per desumere la legge di variazione (secolare) di a con M. Giova dunque, traendo partito dalla circostanza che *c è una costante di integrazione anche per M variabile*, far apparire, nella precedente espressione di V, soltanto M ed a, oltre a c.

Basta all'uopo ricordare le classiche relazioni del moto ellittico

$$E = -\frac{fM}{2a}\,, \qquad n = \sqrt{\frac{fM}{a^3}} \tag{11}$$

per avere

$$\frac{2\pi}{n}\left(2E + \frac{2fM}{a}\right) = 2\pi\sqrt{fMa}\,.$$

Segue in conformità dalla (10′)

$$\frac{V}{2\pi} = \sqrt{fMa} - c\,, \tag{10''}$$

donde apparisce che, assieme a V e a c, rimane costante il prodotto

$$fMa\,.$$

Perciò a tende necessariamente a zero quando M cresce indefinitamente (in modo lento ma del resto qualunque), e tende all'∞, qualora M converga a zero (sempre in modo lento, ma con legge qualsiasi); c. d. d.

II.

IL PROBLEMA DEI DUE CORPI GRAVITANTI E ROTANTI

6. - Espressioni della forza viva e della funzione delle forze (a meno del fattore mm'/M). Variabili coniugate. Equazioni canoniche. Riduzione conseguente dalla conoscenza di tre integrali.

Consideriamo ora più generalmente due corpi solidi, soggetti alla mutua attrazione, da un lato abbastanza distanti perchè tale attrazione si esplichi come se le due masse m, m' fossero concentrate nei rispettivi baricentri P, P', dall'altro abbastanza estesi e rapidamente rotanti perchè non sia trascurabile la forza viva dovuta al moto di rotazione in confronto di quella spettante al moto traslatorio baricentrale.

Supporremo in particolare che la rotazione di ciascuno dei due corpi avvenga esclusivamente attorno all'asse (baricentrale), normale al piano fisso in cui avviene il moto dei due baricentri P, P'. Ammetteremo anzi che tali due assi di rotazione siano principali di inerzia (pel rispettivo baricentro). Con ciò la assunta specificazione dei due atti di moto non richiede appositi vincoli, bastando che essa si verifichi inizialmente perchè seguiti a sussistere in qualsiasi istante.

Ove si indichino con I, I' i momenti di inerzia di ciascuno dei due corpi attorno agli assi suaccennati, con ω, ω' le rispettive velocità angolari, si ha

$$\frac{1}{2}(I\omega^2 + I'\omega'^2)$$

quale espressione del contributo di forza viva proveniente dalle rotazioni. Tale contributo va aggiunto alla $\mathcal{T}$ del n. 4. Applicando anche ad esso, come già alla $\mathcal{T}$, il fattore moltiplicativo M/mm', e ponendo per brevità di scrittura

$$\lambda^2 = \frac{MI}{mm'}, \qquad \lambda'^2 = \frac{MI'}{mm'} \tag{12}$$

(con che λ e λ' hanno le dimensioni di una lunghezza), il problema si tratterà come se la forza viva totale avesse l'espressione

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}\lambda^2\omega^2 + \frac{1}{2}\lambda'^2\omega'^2,$$

e la funzione delle forze quella stessa dell'esempio I, cioè

$$\mathcal{U} = \frac{fM}{r}.$$

Chiamiamo φ e φ' gli angoli che definiscono le orientazioni dei due corpi attorno ai rispettivi assi di rotazione, contandoli entrambi a partire dalla retta (mobile) PP'. Saranno $\dot{\varphi}$, $\dot{\varphi}'$ velocità angolari *relative* dei due corpi; mentre le loro velocità angolari *assolute* ω, ω', atteso il significato di ϑ (n. 4) varranno

$$\omega = \dot{\vartheta} + \dot{\varphi}, \qquad \omega' = \dot{\vartheta}' + \dot{\varphi}'. \tag{13}$$

Al pari di ϑ, anche φ e φ' sono coordinate ignorabili perchè non appariscono esplicitamente nè in $\mathcal{T}$, nè in $\mathcal{U}$. Sussistono quindi tre integrali primi. Uno, che fa riscontro alla (8) del n. 4, si scrive, avuto riguardo alle (13),

$$p_\vartheta = \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{\vartheta}} = r^2\dot{\vartheta} + \lambda^2\omega + \lambda'^2\omega' = c, \tag{14}$$

mentre gli altri due (che corrispondono ai due ulteriori gradi di libertà del problema attuale), cioè

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot\varphi} = \lambda^2\,\omega = \gamma = \text{cost.}\,, \tag{15}$$

$$p_{\varphi'} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot\varphi'} = \lambda'^2\omega' = \gamma' = \text{cost.}\,, \tag{16}$$

esprimono la costanza delle velocità angolari (assolute) ω, ω'.

La funzione

$$H = \mathcal{T} - \mathcal{U}\,,$$

da cui si eliminino $\dot\vartheta$, $\dot\varphi$, $\dot\varphi'$, facendovi apparire le coniugate p_ϑ, p_φ, $p_{\varphi'}$, e, per esse, addirittura i loro valori costanti c, γ, γ', assume l'aspetto

$$H = \frac{1}{2}\left\{p_r^2 + \frac{(c-\gamma-\gamma')^2}{r^2} + \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\gamma'}{\lambda'}\right)^2\right\} - \frac{fM}{r} \tag{17}$$

e dà luogo, per la determinazione di r, p_r, ad un sistema canonico ridotto con un solo grado di libertà, rientrando qui ancora nello schema (2) del n. 3.

7. - Variazione lenta dei parametri contenuti in H. Invariante adiabatico V. Sua espressione esplicita.

Supponiamo che sia i parametri strutturali del sistema dei due corpi (gravitanti e rotanti) M, λ, λ', sia i momenti c, γ, γ', anzichè mantenersi rigorosamente costanti possano subire (per influenze non contemplate nell'impostazione precedente) variazioni di qualsivoglia natura, però molto lente. Sussisterà in tali ipotesi, secondo la premessa generale del n. 3, un invariante adiabatico

$$V(M, \lambda, \lambda' \,|\, c, \gamma, \gamma' \,|\, E)$$

corrispondente all'area racchiusa da una generica curva

$$H = E$$

nel piano cartesiano (r, p_r).

Per la valutazione di V non occorre alcun nuovo calcolo. Da un lato si osserva che l'equazione $H = E$, in cui H ha l'espressione (17), può ricondursi alla forma (9) solo che si ponga

$$E_1 = E - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma'}{\lambda'}\right)^2, \tag{18}$$

$$c_1 = c - \gamma - \gamma' . \tag{19}$$

Con ciò infatti l'equazione stessa si scrive

$$\frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{c_1^2}{r^2}\right) - \frac{fM}{r} = E_1 .$$

D'altro lato il secondo membro della (10″) (cioè il valore di $V/2\pi$, corrispondente alla espressione (9) di H) può farsi dipendere unicamente da E e da c (oltre che da fM). Basta riporvi per a il suo valore $-fM/2E$ fornito dalla prima delle (11), con che esso diviene

$$\frac{fM}{\sqrt{-2E}} - c .$$

Scrivendovi materialmente E_1 e c_1 per E e c, se ne desume senz'altro la $V/2\pi$ spettante al problema attuale.

L'espressione esplicita dell'invariante adiabatico V è data pertanto da

$$\frac{V}{2\pi} = \frac{fM}{\sqrt{-2E_1}} - c_1 , \tag{20}$$

E_1 *e* c_1 *designando le combinazioni* (18) *e* (19) *dei parametri che, come risulta dalla* (17), *intervengono nella presente questione.*

8. - Effetti secolari delle maree.

Facciamo una applicazione dell'invariante adiabatico testè assegnato, supponendo che varino lentamente (e indipendentemente dagli altri parametri) i due argomenti γ, γ', i quali, in base alle (15), (16) e (12), rappresentano i momenti assiali delle quantità di moto dovute alla rotazione dei due corpi, moltiplicati per il fattore costante M/mm'.

Un esempio cospicuo, studiato sistematicamente da Giorgio Darwin, in cui questa circostanza si presenta, si ha considerando il fenomeno delle maree, sia in senso proprio, cioè provenienti da eventuali oceani che in tutto od in parte ricoprano la superficie dei due corpi, sia che si intendano sotto questo nome le così dette maree solide, consistenti in deformazioni elastiche dei nuclei. Comunque, si tratta di fenomeni periodici o quasi-periodici, i quali sono inevitabilmente accompagnati da piccole azioni dissipative. Dato il loro incessante rinnovellarsi, l'effetto generale deve essere quello di far decrescere (lentissimamente, ma senza compenso) l'energia totale E del sistema.

Basta tener conto di questa circostanza evidente per ricavare una notevole previsione asintotica circa lo stato limite del sistema.

Infatti, purchè, ben si intenda, nulla intervenga a modificare le premesse, dovrà la E, considerata come funzione di γ, γ', tendere ad un valore minimo. Perciò, nello stato finale che si tratta di caratterizzare, dovrà aversi necessariamente ([3])

$$\frac{\partial E}{\partial \gamma} = 0\,, \quad \frac{\partial E}{\partial \gamma'} = 0\,. \tag{21}$$

La relazione (adiabatica) fra E, γ e γ' è fornita da

$$\frac{V}{2\pi} = \text{cost.}\,, \tag{22}$$

in cui $V/2\pi$ ha l'espressione (20), e le quantità fM, λ, λ', c devono considerarsi indipendenti da γ, γ', anzi addirittura costanti, allorchè si contemplino unicamente effetti di marea, dovuti a forze mutue, le quali non alterano nè il momento totale c della quantità di moto, nè M, nè (almeno sensibilmente) le altre due caratteristiche di massa λ, λ'.

Avendosi dalla (22)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \gamma} + \dfrac{\partial V}{\partial E}\dfrac{\partial E}{\partial \gamma} = 0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial \gamma'} + \dfrac{\partial V}{\partial E}\dfrac{\partial E}{\partial \gamma'} = 0\,, \end{cases}$$

le condizioni limiti (21) divengono

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma} = 0\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial \gamma'} = 0\,, \tag{21'}$$

([3]) In quanto γ e γ', possono *a priori* variare comunque, e non c'è quindi da considerare anche la eventualità di estremi di frontiera.

ossia, avuto riguardo alla espressione (20) di V e alle (18) e (19),

$$\begin{cases} -fM(-2E_1)^{-\frac{3}{2}}\dfrac{\gamma}{\lambda^2}+1=0\,, \\ -fM(-2E_1)^{-\frac{3}{2}}\dfrac{\gamma'}{\lambda'^2}+1=0\,. \end{cases}$$

Ora $(-2E_1)^{\frac{3}{2}}/fM$ non è altro che *il moto medio* n, cioè il valore medio della velocità angolare con cui ruota ciascuno dei due corpi, o, se si vuole la loro congiungente PP': questo si può desumere dalle (11), eliminandone a e tenendo conto che alla E di quel problema va nel caso presente sostituita la E_1.

D'altra parte, per le (15) e (16), γ/λ^2, γ'/λ'^2 si identificano con le velocità angolari ω, ω' dei moti di rotazione dei due corpi.

Le precedenti equazioni assumono pertanto la forma semplicissima

$$-\frac{\omega}{n}+1=0\,, \qquad -\frac{\omega'}{n}+1=0\,,$$

ossia in definitiva

$$\omega=\omega'=n\,. \tag{21''}$$

Ne consegue che l'effetto secolare (*in senso asintotico*) *di una lieve ma incessante dissipatività* (quale quella che accompagna i fenomeni di marea) *è di eguagliare le durate di rotazione di entrambi i corpi a quella della loro rivoluzione.*

Nel caso particolare Terra-Luna tale condizione limite è notoriamente già raggiunta per quanto concerne la Luna, mentre ne siamo ancora discosti per la Terra.

In linea storica va rilevato che l'idea generale di spiegare con una considerazione energetica l'eguaglianza fra le durate della rotazione e della rivoluzione lunare è dovuta a Lord KELVIN (4). Ma in quell'epoca non si era ancora presentata la nozione di invariante adiabatico, e il KELVIN si era accontentato di sfruttare direttamente l'integrale dell'energia $H=E$ nel caso particolare in cui, rimanendo costanti anche gli argomenti r e p_r, si può ragionare sulla $H=E$ come abbiamo fatto or ora sulla $V=\text{cost.}$ Si trattava quindi, nel geniale ravvicinamento indicato dal KELVIN, unicamente del caso particolare di moti circolari uniformi, ai

(4) Cfr. THOMSON e TAIT: *Treatise on natural philosophy*, Parte II (Cambridge University Press); new edition, 1883; appendice G, § *b*) (di G. H. DARWIN), pp. 505-517.

quali del resto si era pure limitato il DARWIN, trascurando inoltre — ciò che per KELVIN non sarebbe stato essenziale — la rotazione di uno dei due corpi.

L'uso degli invarianti adiabatici (pur circoscritto allo schema più elementare che concerne i sistemi canonici con un solo grado di libertà) consente invece, come si è visto, di riconoscere con eguale, se non addirittura maggiore, semplicità, che lo stesso comportamento asintotico delle rotazioni vale anche per il caso generale di un moto ellittico qualsiasi.

XXVIII.

ALCUNE APPLICAZIONI ASTRONOMICHE DEGLI INVARIANTI ADIABATICI

« Bollettino dell'Unione Mat. It. », anno VII, n. 5 (1928), pp. 251-253.

Il problema dei due corpi, tenendo conto degli integrali conosciuti, si può far dipendere da un sistema canonico

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y}\,,\qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{1}$$

con un solo grado di libertà, a funzione caratteristica H indipendente dal tempo, il quale, possedendo l'integrale

$$H=E \qquad (E \text{ costante}) \tag{2}$$

si integra per quadrature, come è ben noto. Ciò, sia che i due corpi si assimilino, come d'ordinario, a semplici punti materiali, sia anche in una accezione più generale, quando cioè si considerino quali solidi girevoli attorno al rispettivo asse baricentrale, normale al piano dell'orbita.

In entrambi i casi figurano nella H, oltre alle funzioni incognite x, y, taluni parametri costanti a: le masse, e una costante delle aree nel primo caso; nel secondo, anche momenti di inerzia e altre due costanti di integrazione provenienti da coordinate ignorabili.

Se questi parametri a non sono proprio costanti, ma variano (sia pure molto lentamente) col tempo, come accade ad es. per caduta di meteoriti, ovvero per irraggiamento, o ancora per effetto accumulato di influenze dissipative, allora il sistema (1) non si sa più integrare, e divengono difficili anche le indagini qualitative intese a caratterizzare il comportamento asintotico del moto, noto essendo quello dei parametri a.

Tuttavia, se questi parametri a variano abbastanza lentamente e gradualmente (¹), si può ricorrere alla teoria degli invarianti adiabatici (²), sorta, come è ben noto, dalla meccanica atomica e dovuta all'illustre fisico olandese EHRENFEST.

I sistemi (1), nell'ipotesi anzidetta, ammettono un tipico invariante adiabatico, cioè una funzione $V(a|E)$ dei parametri e dell'argomento E definito dalla (2) (costante nel moto non perturbato), la quale conserva valore costante anche al variare (lento e graduale) dei parametri a. Tale $V(a|E)$ non è altro che l'area del piano (x, y) racchiusa da una generica curva (2) (supposto, ben si intende, che, per i valori considerati delle a e della E, la (2) definisca effettivamente una curva chiusa). Si ha dunque, pur variando le a, la relazione integrale

$$V(a|E) = \text{cost.}\,, \tag{3}$$

la quale consente deduzioni concrete, ed anche previsioni asintotiche. Vero è che queste non scendono logicamente dalle sole equazioni differenziali (1), ma implicano anche l'ipotesi della adiabaticità, ossia (come si riconosce, illustrandone la portata) un elemento statistico. Ciò nulla meno codeste conclusioni hanno un interesse pratico equivalente alla certezza matematica, come i risultati della teoria cinetica dei gas e di tanti altri capitoli della fisica moderna.

Nel caso di due corpi puntiformi di masse variabili, va ritenuto $E < 0$, e la (3) si riduce alla forma

$$Ma = \text{cost.}\,, \tag{4}$$

dove M rappresenta la somma delle masse e a il semiasse maggiore dell'ellisse osculatrice.

La (4) porge in modo ovvio alcune proposizioni rigorose dell'ARMELLINI, che gli richiesero acuta disamina e impiego di mezzi elevati, e le completa, conferendo loro assai maggiore portata pratica.

L'analogo invariante adiabatico, relativo al caso più generale di corpi rotanti, permette di assegnare con altrettanta semplicità le condizioni di minimo per l'energia E nelle supposte circostanze. A tale minimo tende il sistema per effetto secolare di lenta, ma incessante dissipatività, in

---

(¹) Con ciò si vuol dire in modo preciso che, in ogni porzione Δt dell'intervallo di tempo che occorre considerare, gli incrementi Δa delle a si possono trattare come infinitesimi di fronte a quelli (sincroni) delle x, y, e che inoltre gli incrementi delle da/dt sono a loro volta infinitesimi rispetto alle da/dt stesse.

(²) Cfr. per es. le mie *Drei Vorlesungen über die Theorie der adiabatische Invarianten*. « Abh. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität », B. VI, Heft 3/4, 1928, pp. 323-366 [in questo vol.: XXV, pp. 499-545].

particolare di quella che accompagna i fenomeni di marea. L'interpretazione delle condizioni di minimo è quanto mai espressiva: *Le durate di rotazione di ciascuno dei due corpi debbono eguagliare il periodo della loro rivoluzione.*

Ciò costituisce una generalizzazione notevole del celebre risultato concernente il caso di orbite circolari, stabilito per la prima volta da G. DARWIN con diretta e laboriosa calcolazione, come conseguenza delle sue ricerche sulle maree, e da lui stesso ridimostrato poco dopo, per suggerimento di LORD KELVIN, con eleganti considerazioni energetiche.

XXIX.

SUL MOTO DI UN CORPO DI MASSA VARIABILE

« Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. VII (2° sem. 1928), pp. 329-333 (*).

1. – Nella meccanica classica la massa m di un generico corpo, intendiamo per semplicità punto materiale, si assume come una caratteristica intrinseca del corpo, invariante di fronte al movimento del corpo stesso, e si ha, con evidente significato dei simboli, la legge newtoniana

$$m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} . \tag{1}$$

La massa m non è invece considerata quale una costante specifica del mobile nella concezione einsteiniana: più precisamente, secondo la relatività ristretta, essa dipende dalle velocità in modo ben determinato.

Tuttavia, anche assai prima del sorgere della relatività, si era presentato in Astronomia l'esempio di corpi la cui massa, nell'intervallo di tempo entro il quale interessa seguire l'andamento del moto, non rimane invariata, ma va subendo piccoli incrementi dovuti alla caduta di meteoriti.

Tenendo conto di ciò, fu ripetutamente oggetto di studio il problema dei due corpi (Sole-Pianeta) nell'ipotesi di masse variabili, e in particolare crescenti, con t (¹). Il punto di partenza di tali ricerche fu sempre la formula newtoniana (²) in cui soltanto si risguarda m non più come costante, ma come funzione assegnata di t.

(*) Presentata nella seduta dell'11 novembre 1928.

(¹) Cfr. in proposito la bella Memoria del prof. ARMELLINI, *Sul problema dei due corpi di masse variabili*, « Mem. della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) », t. XIX, 1916, pp. 75-96, dove si trovano anche richiamate le precedenti ricerche.

(²) Anche la spettroscopia stellare, in base specialmente al materiale raccolto e interpretato da H. SHAPLEY (dell'Osservatorio di Harvard), tende a confermare l'effettiva esistenza di un pulviscolo cosmico. Cfr. il recente articolo dello stesso SHAPLEY, *The centre of the Galaxy*, in « Nature », vol. 122, n. 3074, 29 settembre 1928, pp. 272-274.

Una tale impostazione è *a priori* perfettamente ragionevole, e suffragata *a posteriori* dal fatto che nel problema dei due (o più) corpi si può (per semplice sottrazione delle corrispondenti equazioni (1), divise pel rispettivo m, come nel caso delle masse costanti) fare intervenire esclusivamente il loro moto *relativo*.

Ciò non ostante io credo — e mi propongo di indicarne il perchè nella presente comunicazione — che l'applicazione conseguente dei principi della meccanica classica dia luogo, con ovvio passaggio al limite, non alla (1), bensì all'equazione

$$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{F}, \tag{2}$$

che esprime il teorema della quantità di moto, e, notoriamente, resta valida sotto la stessa forma anche nella relatività ristretta.

2. – Per giustificare la (2) prendiamo specificamente in considerazione il caso di un corpo P la cui massa varia per apporti successivi, dovuti a urti anelastici (cioè senza rimbalzo) con uno sciame di corpuscoli Q [1].

Sia $\boldsymbol{v}$ la velocità *assoluta* (cioè riferita ad assi *fissi*, nell'ordinaria accezione della meccanica classica) di P, e m la sua massa, immediatamente anteriori all'urto con un generico Q. Siano d'altra parte $\boldsymbol{w}$ e μ gli analoghi elementi spettanti a questo Q.

Valuteremo (sempre secondo le norme consuete della meccanica classica) la variazione di velocità derivante da tali urti, e poi passeremo al limite, introducendo due ipotesi che avremo cura di sottolineare (di isotropia statistica e di indipendenza di effetti) quanto mai spontanee e perfettamente nello spirito dei postulati di GALILEO e di NEWTON.

Il baricentro di una coppia P, Q possiede, immediatamente prima dell'urto, la velocità

$$\frac{m\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{w}}{m + \mu},$$

la quale, per il principio di reazione, non è alterata dall'urto medesimo [3], e rappresenta quindi la velocità posteriore del corpo risultante dalla collisione anelastica dei due. Tale corpo chiameremo ancora P, attesa la minore importanza dell'altro che vi è rimasto conglobato. Comunque

[3] Cfr., per es., LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, t. $(\mathrm{II})_2$; p. 580, ovvero *Compendio...*, parte seconda, p. 170.

l'incremento $\Delta \boldsymbol{v}$ che subisce la velocità di P per la caduta di Q vale

$$\Delta \boldsymbol{v} = \frac{m\boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{w}}{m + \mu} - \boldsymbol{v} = \frac{\mu(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v})}{m + \mu},$$

o, più semplicemente, trascurando μ di fronte ad m (sotto l'aspetto formale, si può anche dire, trattando μ come infinitesimo di primo ordine)

$$\Delta \boldsymbol{v} = \frac{\mu}{m} (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}) .$$

Ciò premesso, fissiamo un generico istante t, e, a partire da esso, un intervallo di tempo dt, abbastanza breve, di fronte alla durata del moto di P, che interessa di caratterizzare, da potersi trattare come infinitesimo, ma d'altra parte abbastanza lungo per includere moltissimi urti con corpuscoli Q. Diremo $d''\boldsymbol{v}$ la variazione complessiva che subisce la velocità di P nell'intervallo dt per effetto esclusivo degli urti anelastici coi vari Q. Essa sarà naturalmente la somma dei $\Delta \boldsymbol{v}$ testè calcolati, in ognuno dei quali, a meno di termini d'ordine superiore rispetto a μ, è anche lecito risguardare m e $\boldsymbol{v}$ come massa e velocità di P, anteriori a *tutti* gli urti dell'intervallo dt, cioè corrispondenti entrambe all'istante t.

Avremo in conformità

$$d''\boldsymbol{v} = \sum \Delta \boldsymbol{v} = \frac{1}{m} \sum \mu \boldsymbol{w} - \frac{1}{m} \boldsymbol{v} \sum \mu ,$$

le sommatorie intendendosi estese a tutti gli urti dell'intervallo dt.

$\sum \mu$ è, per definizione, l'incremento dm che subisce la massa di P per assorbimento dei Q con cui collide nell'intervallo.

Ammettiamo poi — ecco il primo postulato — che lo sciame dei corpuscoli Q (pulviscolo cosmico) non abbia moto d'insieme *rispetto agli assi fissi*, cioè che sia nulla la sua velocità baricentrale, *assoluta* ([4]), il che

---

([4]) Una tale ipotesi si può anche intendere come una proprietà degli assi fissi rispetto all'insieme dei corpuscoli Q, cioè il pulviscolo cosmico; il postulato consistendo, sotto questo punto di vista, nel fatto che assi di direzione invariabile, solidali col baricentro dei punti Q, sono inerziali o galileiani, cioè tali che rispetto ad essi, per corpi di massa invariabile, vale la solita (1). Una tale definizione di assi inerziali toglie loro la caratteristica indeterminazione di una traslazione uniforme (relatività galileiana). Nè ciò deve meravigliare, perchè si fa intervenire un elemento nuovo, la materia meteorica, dal cui moto di insieme scaturisce la maggiore dsecificazione.

si esprime mediante l'equazione

$$\sum \mu w = 0 \quad (3)$$ [5].

Rimane pertanto

$$d''v = -\frac{dm}{m} v . \quad (4)$$

3. – Valutiamo oramai la variazione *totale* di velocità che il nostro corpo P, sottoposto all'azione di quante si vogliono forze, subisce nel tempuscolo dt. Sia $\boldsymbol{F}$ il risultante di tutte queste forze.

Possiamo ammettere — ecco il secondo postulato — che valga anche per l'eventuale variabilità della massa, come per tutte le altre azioni fisiche, compendiabili ciascuna in una forza, il principio galileiano di indipendenza, che cioè la variazione totale $d\boldsymbol{v}$ di velocità, che si determina in un tempuscolo elementare dt, sia la somma delle due $d'\boldsymbol{v}$ e $d''\boldsymbol{v}$ che si avrebbero rispettivamente, qualora:

1) agissero le forze di risultante $\boldsymbol{F}$ senza variazione di massa;

2) la massa variasse di dm, essendo P libero da forze.

Siccome, per il principio fondamentale della meccanica ordinaria [formula (1)],

$$d'\boldsymbol{v} = \frac{1}{m} \boldsymbol{F} dt , \quad (5)$$

basta sommare con la (4) per avere la cercata estensione della legge del moto al caso di masse variabili:

$$d\boldsymbol{v} = \frac{1}{m} \boldsymbol{F} dt - \frac{dm}{m} \boldsymbol{v} .$$

Ne viene, moltiplicando per m e isolando $\boldsymbol{F} dt$,

$$d(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F} dt ,$$

che è appunto la formula (2), c. d. d.

---

[5] In linea storica va rilevato che la considerazione esplicita di urti anelastici soddisfacenti alla (3) del testo [o, più precisamente, ad una condizione che, per il sistema planetario, è sensibilmente identica alla (3)], si trova già in una Nota dell'OPPOLZER, inserita nel n. 2375 (vol. 108, 1884) delle « Astr. Nachr. ».

Pare tuttavia (per quanto si può giudicare dagli accenni sommari della Nota suddetta) che l'A. faccia poi il calcolo delle perturbazioni movendo dalla (1), mentre, come si mostra nel presente scritto, esso dovrebbe invece essere imposto sulla (2).

Le conseguenze che ne discendono per il problema astronomico dei due corpi di masse variabili sono oggetto di una Nota del prof. G. VRANCEANU, inserita in questo stesso fascicolo.

4. OSSERVAZIONE. – Per ritrovare la formula (1), applicata finora anche nell'ipotesi di masse variabili, bisognerebbe ammettere che si annullasse *non* la velocità baricentrale *assoluta* dei corpuscoli Q, ma quella *relativa* a P, cioè, in luogo della (3), la condizione

$$\sum \mu(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}) = 0 , \tag{3'}$$

che sembra arbitraria perchè la velocità (assoluta) di P non ha *a priori* alcuna relazione col moto (pure assoluto) del baricentro dei corpuscoli Q.

Importa per altro rilevare che, se si trattasse invece di un dm negativo, proveniente, non da assorbimento, ma da eiezione di corpuscoli Q da parte di P (modello meccanico di fenomeni di irraggiamento), allora sarebbe invece giustificata la (3'), e non più la (3), apparendo plausibile l'ipotesi (balistico-statistica) che i corpuscoli Q, *emessi da* P, abbiano moto d'insieme nullo, *rispetto allo stesso* P.

XXX.

AGGIUNTA ALLA NOTA «SUL MOTO DI UN CORPO DI MASSA VARIABILE» (1) (*)

« Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. VIII (2º sem. 1928), pp. 621-622.

Nella Nota richiamata nel titolo fu dimostrato che, se la massa m di un corpo P va crescendo per urti (anelastici) con corpuscoli Q (caduta di meteoriti), il moto è (coi soliti simboli) retto dall'equazione

$$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{F}. \tag{I}$$

Desidero rilevare che la stessa equazione rimane valida anche se (accanto alla variazione derivante da assorbimenti di pulviscolo) la massa m subisce eventuali diminuzioni per distacco di piccoli frammenti Q (modello meccanico di fenomeni di irraggiamento). Ciò si giustifica in modo ovvio cogli stessi criteri di cui ci siamo serviti nel caso del pulviscolo.

Quando P espelle un corpuscolo Q di massa μ con velocità (assoluta) $\boldsymbol{w}$, la parte residua, che si seguiterà a designare con P, attesa la piccolezza del frammento perduto, subisce un impulso (reattivo) $-\mu\boldsymbol{w}$, e quindi una variazione di velocità $\Delta\boldsymbol{v}$, definita da

$$\Delta\boldsymbol{v} = -\frac{\mu}{m-\mu}\boldsymbol{w},$$

o, più semplicemente, essendo lecito trattare μ come infinitesimo, da

$$\Delta\boldsymbol{v} = -\frac{\mu}{m}\boldsymbol{w}. \tag{1}$$

---

(1) Pp. 595-599 di questo volume.
(*) Presentata nella seduta del 16 dicembre 1928.

Suppongasi che in un tempuscolo dt, successivo all'istante generico t, abbiano luogo numerosissime eiezioni di corpuscoli Q, statisticamente isotrope rispetto a P, con che vogliamo dire dotate di velocità (relativa) d'insieme nulla, cioè soddisfacenti alla [(3′) della Nota precedente]

$$\sum \mu(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}) = 0 . \tag{2}$$

Sommiamo le varie (1), che si riferiscono all'intervallo dt. I primi membri formano $d''\boldsymbol{v}$, mentre, trascurando ancora una volta infinitesimi d'ordine superiore rispetto a μ (il che consente di risguardare m come massa di P, anteriore a tutti gli urti dell'intervallo dt), e badando alla (2), la somma dei secondi membri può essere sostituita da

$$-\frac{1}{m}\sum \mu \boldsymbol{v} = -\frac{dm}{m}\boldsymbol{v} .$$

Ne consegue la [equazione (4)]

$$d''\boldsymbol{v} = -\frac{dm}{m}\boldsymbol{v}$$

della Nota precedente e ci si trova così ricondotti a quella stessa equazione (I) che conveniva al caso del pulviscolo, c. d. d.

Generalizzando induttivamente queste constatazioni è lecito ritenere che, *quando, per circostanze fisiche di natura qualsiasi, la massa di un corpo varia (con continuità), il moto è sempre retto dalla equazione: derivata di quantità di moto eguale a forza.*

INDICE